



**HAL**  
open science

# Modélisation de paroi en simulation des grandes échelles dans une turbomachine

M. Catchirayer

► **To cite this version:**

M. Catchirayer. Modélisation de paroi en simulation des grandes échelles dans une turbomachine. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Aix-Marseille Université, 2019. Français. NNT: . tel-02106929v1

**HAL Id: tel-02106929**

**<https://theses.hal.science/tel-02106929v1>**

Submitted on 23 Apr 2019 (v1), last revised 25 May 2019 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Aix-Marseille Université

# THÈSE

présentée pour obtenir le titre de  
DOCTEUR  
d'Aix-Marseille Université

École doctorale : Sciences pour l'ingénieur  
Laboratoire : Mécanique, Modélisation et Procédés Propres (M2P2)  
Unité de recherche : CERFACS  
Spécialité : Mécanique des Fluides

par

Mathieu CATCHIRAYER

---

## **Modélisation de paroi en simulation des grandes échelles dans une turbomachine**

---

soutenue le 27/03/2019 devant le jury composé de :

Pierre SAGAUT  
Jean-François BOUSSUGE  
Nicolas GOURDAIN  
Éric LAMBALLAIS  
Sébastien DECK  
Franck NICLOUD  
Maria Vittoria SALVETTI  
Dimitrios PAPADOGIANNIS

Aix-Marseille Université  
CERFACS  
ISAE-Supaero  
Université de Poitiers  
ONERA  
Université de Montpellier  
Università di Pisa  
Safran Tech

Directeur  
Co-directeur  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examinatrice  
Invité



# Remerciements

Les travaux présentés dans la suite se sont révélés être une belle aventure ponctuée de rencontres riches et de collaborations diverses. Ainsi, les quelques lignes écrites ci-dessous sont l'occasion pour moi de remercier très sincèrement toutes les personnes impliquées.

Je remercie tout d'abord l'ensemble du jury pour avoir accepté d'évaluer cette thèse et pour le vif intérêt qu'ils y ont manifesté lors de la soutenance. Les questions posées ont donné lieu à des discussions constructives et pertinentes dans un climat empreint de bienveillance. J'adresse une mention particulière pour les rapporteurs qui ont pris le temps d'une lecture approfondie de ce manuscrit. Leurs commentaires et leurs remarques m'ont permis d'avoir un regard neuf sur les travaux réalisés et d'orienter les échanges de la soutenance dans des directions intéressantes.

Mes prochains remerciements vont à Pierre, directeur de cette thèse. Son recul et son expertise au cours de nos échanges, notamment lors de ses venues au CERFACS, ont contribué à maintenir le cap et ainsi à aboutir aux résultats escomptés dans le temps imparti. Je remercie ensuite avec beaucoup d'enthousiasme Jean-François, co-directeur mais aussi (et surtout) encadrant au quotidien, pour ses qualités humaines et avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler. La réussite de cette étude tient principalement à son expérience aussi bien d'un point de vue relationnel que technique dont j'ai pu profiter pleinement à la faveur de sa disponibilité. Sa franchise et son honnêteté intellectuelle m'ont permis d'avoir un avis critique sur les résultats, m'amenant à être plus exigeant et plus rigoureux, en évitant par exemple de « coder en spaghettis » tout en sachant que « quand on n'a pas les doigts palmés, ça fonctionne » ! Enfin, merci aussi pour avoir sorti la cravate à l'occasion de la soutenance, en espérant que cela devienne la norme !

Bien que n'étant pas officiellement impliqué dans l'encadrement ou le suivi de cette thèse, j'adresse un grand merci à Marc (le plus jeune des permanents !), sans qui beaucoup de choses n'auraient pas été possibles. Sa disponibilité, sa patience et son efficacité face à mes nombreuses sollicitations (que ce soit sur *elsA*, Antares ou même de manière plus générale), le tout de manière désintéressée et avec beaucoup de sympathie, ont débloqué une multitude de situations. Pouvoir côtoyer et compter sur une personne comme lui a été une réelle chance ainsi qu'une source de quiétude.

Cette étude n'aurait pu avoir lieu sans le financement et la participation du groupe Safran, et plus spécifiquement de Safran Tech. À ce titre, je suis reconnaissant envers Vincent de m'avoir proposé cette thèse et accordé sa confiance quant à son déroulement. De



plus, le séjour effectué dans les locaux de Safran Tech a été l'opportunité d'une expérience enrichissante et instructive, sans compter les interactions multiples avec Xavier et Dimitrios durant chaque moitié de la thèse qui m'ont beaucoup apporté.

Parmi les personnes côtoyées au CERFACS, je remercie, pour leur aide et leur bonne humeur, toutes celles des équipes administrative et informatique (CSG) avec qui j'ai eu l'occasion d'interagir. Je pense à Marie et Nicole, voisines de bureau, mais aussi à Michèle, Lydia et Brigitte. Un merci particulier à Nicole pour avoir organisé ma soutenance qui s'est déroulée tel un « plan sans accroc ». J'émets des remerciements spéciaux à Chantal, voisine Cugnalaïse, pour son rire communicatif et son don de répandre la bonne humeur partout où elle passe, nous remontant le moral dans les moments difficiles. Côté CSG, merci à Gérard, Patrick, Fabrice, Fred et Isabelle pour la patience, l'écoute et l'accueil souriant dont ils font preuve à chacune de nos requêtes, sans oublier leur expertise et l'environnement informatique personnalisé et performant qu'ils proposent.

Ces trois années de thèse n'auraient pas été les mêmes sans la bonne ambiance qui règne au sein de la dynamique équipe CFD du CERFACS, souvent bon enfant grâce aux doctorants et post-docs présents, permettant de décompresser et de supporter la charge de travail parfois conséquente. Il serait vain de vouloir tous les remercier individuellement, mais parmi eux j'ai une pensée pour Robin l'amoureux des tripes de Caen, Romain le visiteur de l'IRT, Omar le MVP de l'EAC, Laure pour avoir veillé aux traditions « choco » du CERFACS, Félix et ses paris sportifs ratés, Biolchi pour ses récits sportifs dignes des plus grands, Valentin le chef plasma, Lucien l'inspecteur du guide Michelin et Quentin le stagiaire en télétravail. J'adresse un premier remerciement spécial pour Majd (aussi appelé Pastaroukh. . . ou Rémi) pour m'avoir (entre autres) initié aux mises en données et aux calculs turbomachines avec *elsA*. Le deuxième est dédié à Maxime pour sa gentillesse, pour m'avoir fait profiter de son expérience en turbomachines, pour nous avoir régalarés avec tous ses gâteaux mais aussi pour toutes nos discussions, que ce soit sur la CFD, la Formule 1. . . Merci aussi au groupe LBM composé de passionnés qui me font l'honneur de m'accueillir pour la suite et de me former : Gauthier le théoricien éclairé, Florian l'expert compressible, Thomas le roi de la transition et Johann le nouveau référent des méthodes hybrides RANS-LES. J'en profite pour souhaiter bon courage au club de foot du CERFACS : l'EAC. Cela aura été amusant de le supporter, et encore plus d'écouter les analyses (forcément objectives) d'après-match de ses joueurs ! Enfin, merci à mes cobureaux successifs pour le temps partagé ensemble, notamment Adrien pour son calme et sa sérénité, Pierre qui nous aura fait le plaisir de revenir quelques mois avant d'aller surfer sur la vague du *deep learning* et désormais Nicolas dont l'entrain et l'enthousiasme n'ont d'égal que le goût pour la recherche et font plaisir à voir.

Finalement, je tiens à remercier ma famille pour leur soutien et leurs encouragements continus, notamment ma mère, ma sœur et (plus récemment !) ma nièce. En particulier, l'enseignement des additions et des soustractions prodigué par la deuxième dès mon plus jeune âge m'a donné un élan dont, à n'en pas douter, je continue à profiter aujourd'hui !

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>xiii</b>
<b>I Contexte et synthèse bibliographique de l'étude</b>	<b>1</b>
Introduction . . . . .	3
<b>1 Turbulence pariétale dans les turbomachines</b>	<b>5</b>
1.1 Performance d'une turbomachine . . . . .	6
1.2 Effets visqueux dans une turbomachine axiale . . . . .	9
1.2.1 Pertes de profils . . . . .	9
1.2.2 Pertes secondaires . . . . .	14
1.2.3 Pertes de jeu . . . . .	17
1.3 Bilan . . . . .	19
<b>2 Modélisation des écoulements compressibles turbulents</b>	<b>21</b>
2.1 Modélisation des équations de Navier-Stokes pour un fluide monophasique	21
2.1.1 Conservation de la masse . . . . .	22
2.1.2 Équation de bilan de la quantité de mouvement . . . . .	23
2.1.3 Équation de bilan de l'énergie . . . . .	24
2.1.4 Fermeture des équations de Navier-Stokes . . . . .	25
2.2 Coût de calcul de la simulation numérique directe (DNS) . . . . .	26
2.3 Description statistique des écoulements turbulents : (U)RANS . . . . .	28
2.4 Simulation des Grandes Échelles : LES . . . . .	31
2.5 Bilan : comparaison des différentes approches . . . . .	35

<b>3</b>	<b>Turbulence pariétale</b>	<b>41</b>
3.1	Équations de couche limite bidimensionnelle . . . . .	41
3.2	Profils auto-similaires dans une couche limite turbulente incompressible .	42
3.2.1	Zone interne . . . . .	43
3.2.2	Zone externe . . . . .	45
3.2.3	Bilan et profil de température . . . . .	47
3.3	Structures turbulentes pariétales . . . . .	50
3.4	Influence d'un gradient de pression longitudinal . . . . .	54
3.4.1	Gradient de pression adverse . . . . .	54
3.4.2	Gradient de pression favorable . . . . .	65
3.5	Effets de rotation . . . . .	72
3.6	Prise en compte des effets de compressibilité . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Modélisation de la turbulence pariétale en LES</b>	<b>77</b>
4.1	Coût de calcul d'une couche limite turbulente attachée incompressible en LES	77
4.1.1	Zone interne . . . . .	79
4.1.2	Zone externe . . . . .	81
4.1.3	Bilan . . . . .	83
4.2	Présentation d'une méthode hybride RANS-LES : la WMLES . . . . .	86
4.2.1	Principe de la WMLES . . . . .	87
4.2.2	Préconisation de maillage en WMLES . . . . .	89
4.2.3	Erreurs induites par la WMLES . . . . .	94
4.3	Modèles de paroi en WMLES . . . . .	97
4.3.1	Intégration des modèles de paroi dans un solveur LES . . . . .	98
4.3.2	Modèles de paroi analytiques . . . . .	100
4.3.3	Modèles de paroi numériques . . . . .	106
4.4	Domaine de validité d'une approche WMLES . . . . .	113
4.4.1	Domaine de validité des modèles de paroi . . . . .	114
4.4.2	Cas d'une couche limite transitionnelle . . . . .	115
4.5	Présentation d'une autre classe de méthodes hybrides RANS-LES : la DES .	118
4.5.1	Présentation de la DES97 . . . . .	118
4.5.2	Principales variantes de la DES97 . . . . .	122
4.5.3	Comparaison des méthodes DES97 et WMLES . . . . .	123
<b>II</b>	<b>Développement et validation d'un modèle de paroi adapté aux configurations turbomachines</b>	<b>127</b>
	Introduction . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Développement d'un modèle de paroi intégral compressible : l'iWMLES</b>	<b>131</b>
5.1	Contexte et objectifs . . . . .	131

5.2	<i>Extended integral wall-model for large-eddy simulations of compressible wall-bounded turbulent flows</i> . . . . .	132
5.3	Bilan . . . . .	153
<b>6</b>	<b>Validation de l'iWMLES : couche limite soumise à un gradient de pression</b>	<b>155</b>
6.1	Contexte et objectifs . . . . .	155
6.2	Présentation de l'expérience d'Harun (2012) . . . . .	157
6.3	Validation d'une méthode d'injection de turbulence pariétale non-réfléchissante	160
6.3.1	Choix d'une méthode d'injection de turbulence pariétale . . . . .	160
6.3.2	Présentation de la méthode d'injection de turbulence de Sandham et al. (2003) . . . . .	165
6.3.3	Formulation de l'injection de turbulence pariétale non-réfléchissante utilisée . . . . .	167
6.3.4	Présentation du cas de validation et des méthodes numériques utilisées	168
6.3.5	Résultats et bilan . . . . .	170
6.4	Simulation WMLES de l'expérience d'Harun (2012) . . . . .	174
6.4.1	Maillage . . . . .	174
6.4.2	Méthodes numériques . . . . .	175
6.4.3	Résultats . . . . .	179
6.5	Bilan . . . . .	187
<b>7</b>	<b>Application de l'iWMLES à l'écoulement dans un compresseur axial</b>	<b>189</b>
7.1	Contexte et objectifs de l'étude . . . . .	189
7.2	Présentation de la configuration et des données de référence . . . . .	190
7.3	Méthodologie numérique en WMLES et en LES . . . . .	192
7.3.1	Maillage . . . . .	192
7.3.2	Conditions aux limites . . . . .	193
7.3.3	Modélisations physique et numérique de l'écoulement . . . . .	194
7.3.4	Condition initiale et méthodologie de simulation . . . . .	195
7.3.5	Coût de calcul et synthèse . . . . .	195
7.4	Résultats . . . . .	196
7.4.1	Maillage : convergence et stratégie . . . . .	197
7.4.2	Performances globales . . . . .	197
7.4.3	Analyse des couches limites . . . . .	199
7.4.4	Analyses de l'interaction rotor/stator et du tourbillon de jeu . . . . .	202
7.4.5	Synthèse des résultats . . . . .	210
7.5	Bilan . . . . .	211
	<b>Conclusion</b>	<b>215</b>

---

<b>A Méthodes numériques de résolution</b>	<b>223</b>
A.1 Principe de la méthodes des volumes finis . . . . .	223
A.2 Discrétisation des flux . . . . .	224
A.2.1 Discrétisation des flux convectifs . . . . .	224
A.2.2 Discrétisation des flux diffusifs . . . . .	225
A.3 Conditions aux limites non-réfléchissantes . . . . .	226
A.3.1 Condition d'entrée subsonique . . . . .	227
A.3.2 Condition de sortie subsonique . . . . .	228
<b>Bibliographie</b>	<b>229</b>
<b>Résumé</b>	<b>246</b>

# Liste des figures

1	Moteur Leap développé par Safran Aircraft Engines et GE Aviation au sein de CFM International . . . . .	xiii
1.1	Cartographie d'une soufflante transsonique (compresseur) d'un moteur d'avion civil . . . . .	7
1.2	Courbes caractéristiques d'une turbine axiale de deux étages . . . . .	8
1.3	Variation des coefficients de pertes en fonction du nombre de Mach en sortie $M_2$ d'une cascade de turbine à un nombre de Reynolds de $10^6$ . . . . .	10
1.4	Mécanismes de transition d'une couche limite induite naturellement et par <i>bypass</i> . . . . .	11
1.5	Représentation schématique du développement des couches limites sur des aubes d'une section de cascade et des sillages induits en aval . . . . .	12
1.6	Représentation schématique des interactions rotor-stator . . . . .	14
1.7	Écoulements secondaires dans une turbomachine . . . . .	16
1.8	Écoulement de jeu dans une turbomachine . . . . .	17
2.1	Schéma du spectre de densité d'énergie cinétique $E$ en fonction du logarithme du nombre d'onde $k$ . . . . .	27
2.2	Schéma du principe de séparation des échelles en LES par le maillage . . . . .	32
2.3	Décomposition du spectre d'énergie de la solution en fonction de la modélisation turbulente choisie . . . . .	38
2.4	Revue des phénomènes instationnaires dans une turbomachine . . . . .	39
2.5	Classification des principales méthodes de simulation de la turbulence . . . . .	39
3.1	Schéma des différentes zones composant une couche limite turbulente . . . . .	48
3.2	Profils de vitesse et de frottement moyens dans une couche limite turbulente . . . . .	49
3.3	Champ instantané de la fluctuation de vitesse longitudinale à $y^+ = 16$ dans une LES de canal plan . . . . .	51
3.4	Champ instantané de la fluctuation de vitesse longitudinale à $y^+ = 150$ dans une DNS de canal plan . . . . .	52
3.5	Schéma de l'évolution du profil de vitesse moyenne dans une couche limite soumise à un gradient de pression adverse . . . . .	55
3.6	Schéma d'une couche limite turbulente soumise à un gradient de pression . . . . .	55

3.7	Profils de vitesse moyenne (a) et de fluctuations turbulentes moyennes (b) en unités de paroi à $Re_\tau \simeq 1900$ pour des valeurs de $\beta$ croissantes . . . . .	61
3.8	Profils de fluctuations turbulentes moyennes de la vitesse normale à la paroi en unités de paroi à $Re_\tau \simeq 1900$ pour des valeurs de $\beta$ croissantes . . . . .	62
3.9	Profil de température moyenne en unités de paroi $\theta^+ = \bar{T}/T_\tau$ dans une couche limite soumise à un gradient de pression adverse . . . . .	64
3.10	Schéma de l'évolution du profil de vitesse moyenne dans une couche limite soumise à un gradient de pression favorable . . . . .	65
3.11	Schéma de l'évolution d'une couche limite soumise à un gradient de pression favorable . . . . .	67
3.12	Profils de vitesse en unités de paroi dans une couche limite soumise à un gradient de pression favorable . . . . .	68
3.13	Profils de fluctuations turbulentes moyennes des vitesses longitudinale et normale à la paroi en unités de paroi dans une couche limite soumise à un gradient de pression favorable . . . . .	71
3.14	Profils d'énergie cinétique turbulente moyenne $k$ en unités de paroi dans une couche limite soumise à un gradient de pression favorable . . . . .	71
3.15	Profils de température $\Theta^+$ et de fluctuations turbulentes $\bar{\theta}^+$ moyennes en unités de paroi dans une couche limite soumise à un gradient de pression favorable . . . . .	72
4.1	Évolution du nombre de points dans une couche limite turbulente attachée incompressible en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	85
4.2	Résumé des préconisations de maillage en LES dans une couche limite turbulente attachée incompressible . . . . .	86
4.3	Principe de la WMLES . . . . .	88
4.4	Principe d'un maillage WMLES . . . . .	89
4.5	Stratégies de maillage en WMLES pour une couche limite turbulente attachée à $Re_\tau \leq 2500$ . . . . .	91
4.6	Nature des structures turbulentes en WMLES . . . . .	96
4.7	Schéma de la projection du vecteur vitesse au premier point au-dessus de la paroi dans le repère local de la couche limite . . . . .	99
4.8	Interaction entre un modèle de paroi et un solveur LES pour une paroi isotherme . . . . .	100
4.9	Principe du calcul du frottement pariétal en WMLES à l'aide d'un modèle de paroi analytique . . . . .	101
4.10	Principe du calcul du frottement pariétal en WMLES à l'aide d'un modèle de paroi numérique . . . . .	107
4.11	Ratio entre le nombre de points requis pour résoudre un élément de taille $\delta^3$ en LES et celui requis en WMLES . . . . .	114
4.12	Principe de la DES97 . . . . .	119

4.13	Type de modélisation utilisée dans une couche limite attachée en DES97 selon que $\delta < C_{DES}\Delta x$ ou $\delta > C_{DES}\Delta x$ . . . . .	120
6.1	Schéma de la géométrie de la soufflerie . . . . .	158
6.2	Évolution longitudinale du coefficient de pression $C_p$ dans l'expérience d'HARUN (2012) . . . . .	158
6.3	Principe d'injection de turbulence grâce à l'utilisation d'une simulation précurseur ou concurrente . . . . .	161
6.4	Principe d'injection de turbulence grâce à l'utilisation d'une méthode de recyclage . . . . .	163
6.5	Profils de vitesse moyenne en unités de paroi le long de la paroi entre $x = 30$ et $x = 170$ . . . . .	171
6.6	Profils de fluctuations turbulentes en unités de paroi le long de la paroi entre $x = 30$ et $x = 170$ . . . . .	172
6.7	Évolution longitudinale du coefficient de frottement . . . . .	173
6.8	Évolution longitudinale du coefficient de pression . . . . .	173
6.9	Schéma de la WMLES de l'expérience d'HARUN (2012) . . . . .	178
6.10	Évolution longitudinale du coefficient de pression pour le cas de couche limite soumise à un gradient de pression adverse . . . . .	180
6.11	Évolution longitudinale du gradient de pression pour le cas de couche limite soumise à un gradient de pression adverse . . . . .	181
6.12	Évolution longitudinale de la vitesse $u_e$ au-dessus de la couche limite pour le cas de couche limite soumise à un gradient de pression adverse . . . . .	181
6.13	Évolution longitudinale du gradient de pression en unités de paroi $p^+$ pour le cas de couche limite soumise à un gradient de pression adverse . . . . .	182
6.14	Évolution longitudinale du coefficient de frottement pour le cas de couche limite soumise à un gradient de pression adverse . . . . .	183
6.15	Évolution longitudinale du paramètre de gradient de pression de Clauser $\beta$ pour le cas de couche limite soumise à un gradient de pression adverse . . . . .	183
6.16	Évolution longitudinale de l'épaisseur de couche limite pour le cas de couche limite soumise à un gradient de pression adverse . . . . .	184
6.17	Profils de vitesse moyenne en unités de paroi le long de la paroi entre $x = 2.9$ m et $x = 4.78$ m . . . . .	185
6.18	Profils de fluctuations turbulentes en unités de paroi le long de la paroi entre $x = 2.9$ m et $x = 4.78$ m . . . . .	186
7.1	Coupe axiale du CME2 . . . . .	191
7.2	Maillage en unités de paroi le long des aubes du rotor et du stator du CME2 à $h/H = 50\%$ . . . . .	198
7.3	Champ instantané de l'entropie massique à $h/H = 50\%$ en iWMLES avec le maillage WM1 . . . . .	199



7.4	Évolution le long d'une aube du rotor et du stator du coefficient de frottement moyen $C_f$ à $h/H = 50\%$ . . . . .	200
7.5	Évolution le long d'une aube du rotor et du stator du coefficient de pression moyen $C_p$ à $h/H = 50\%$ . . . . .	201
7.6	Évolution le long d'une aube du rotor et du stator de l'énergie cinétique turbulente moyenne $k$ à une distance de la paroi d'environ $100\ \mu\text{m}$ à $h/H = 50\%$	202
7.7	Profils de la vitesse moyenne le long de la paroi, de l'énergie cinétique turbulente moyenne et des fluctuations turbulentes moyennes dans la couche limite extrados d'une aube du rotor à $0.08C_{\text{rot}}$ et $h/H = 50\%$ . . . . .	203
7.8	Évolution de l'énergie cinétique turbulente $k$ dans la couche limite d'une aube du stator à une distance de la paroi d'environ $100\ \mu\text{m}$ à $h/H = 50\%$ et $h/H = 80\%$ . . . . .	204
7.9	Champ bidimensionnel de la vitesse axiale moyenne $W_x$ à l'interface rotor/stator . . . . .	205
7.10	Vitesse axiale moyenne $W_x$ à l'interface rotor/stator à $h/H = 50\%$ et $h/H = 80\%$	205
7.11	Vitesse axiale $W_x$ moyennée en phase à l'interface rotor-stator à équidistance de deux aubes du stator à $h/H = 50\%$ et $h/H = 80\%$ . . . . .	206
7.12	Diagramme $\theta$ -temps de la vitesse axiale $W_x$ à l'interface rotor-stator, en $x = 75\ \text{mm}$ et $h/H = 50\%$ . . . . .	207
7.13	Diagramme $\theta$ -temps de la partie instationnaire de la vitesse axiale $W_x^{s2}$ à l'interface rotor-stator ( $x = 75\ \text{mm}$ ) à $h/H = 50\%$ et $h/H = 80\%$ . . . . .	207
7.14	Champ moyen de l'entropie massique en $h/H = 80\%$ . . . . .	208
7.15	Champ instantané de l'entropie massique à l'interface rotor/stator . . . . .	209
7.16	Champ instantané de l'entropie massique en aval du stator, en $x = 194\ \text{mm}$	209
7.17	Stratégie de maillage pour la WMLES d'une aube de turbomachine . . . . .	213

# Liste des tableaux

3.1	Revue bibliographique de cas de couche limite soumise à un gradient de pression adverse . . . . .	59
3.2	Revue bibliographique de cas de couche limite soumise à un gradient de pression favorable . . . . .	66
3.3	Revue bibliographique de cas de canal circulaire en rotation . . . . .	73
4.1	Estimation du coût de calcul spatial d'une couche limite turbulente attachée incompressible en LES . . . . .	84
4.2	Principales lois de paroi . . . . .	102
6.1	Données expérimentales de l'expérience d'HARUN (2012) dans le cas d'une couche limite soumise à un gradient de pression adverse avec $u_{in} = 15.9 \text{ m s}^{-1}$ . $\beta$ est le paramètre de gradient de pression de Clauser (3.32) et $p^+$ est le gradient de pression en unités de paroi (4.35) . . . . .	159
6.2	Paramètres utilisés pour la méthode d'injection de turbulence de SANDHAM et al. (2003) . . . . .	169
6.3	Paramètres d'entrée de la WMLES de l'expérience d'HARUN (2012) . . . . .	175
6.4	Données de maillage de la WMLES de l'expérience d'HARUN (2012) . . . . .	176
6.5	Paramètres pour la méthode d'injection de turbulence de SANDHAM et al. (2003) dans la WMLES de l'expérience d'HARUN (2012) . . . . .	176
7.1	Données géométriques et paramètres de fonctionnement au point nominal du CME2 . . . . .	191
7.2	Nombre de points par passage de pale dans chaque roue, dans le jeu à l'extrémité d'une aube du rotor et dans le domaine de calcul . . . . .	192
7.3	Comparaison des coûts de calcul entre les approches WMLES et LES pour la géométrie du CME2 . . . . .	196
7.4	Synthèse des méthodes numériques employées pour les WMLES et LES du CME2 . . . . .	196
7.5	Performances au point de fonctionnement nominal du CME2 . . . . .	199



# Introduction

L'empreinte environnementale de l'aviation civile a pris ces dernières années une nouvelle dimension. Elle représente aujourd'hui entre 2 et 3% des émissions mondiales de gaz à effet de serre avec une flotte de près de 20 000 avions dans le monde. D'après Fleming et al. (2008), en raison entre autres d'une croissance du nombre de passagers annuel, ces chiffres seront de plus en plus importants et l'aviation civile sera à l'origine de plus d'un milliard et demi de tonnes de CO<sub>2</sub> émis chaque année à partir de 2025. Bien que des gains d'efficacité énergétique aient été constamment obtenus par l'ensemble de l'industrie aéronautique, ils sont insuffisants pour enrayer cette dynamique. En outre, en plus de l'impact climatique, le bruit généré par le transport aérien affectera un nombre de personnes plus important.

Les acteurs du secteur aéronautique ont reconnu ces défis et pris plusieurs engagements. En particulier, une réduction de 50% des émissions de CO<sub>2</sub> est visée d'ici 2050 par rapport à 2005. Comme indiqué par Slotnick et al. (2014), il est attendu que les futurs systèmes de propulsion contribuent pour moitié à l'amélioration requise pour parvenir à cet objectif. Cela passe pour les motoristes par une meilleure compréhension des écoulements de fluide régissant leurs machines, comme celle représentée à la figure 1.

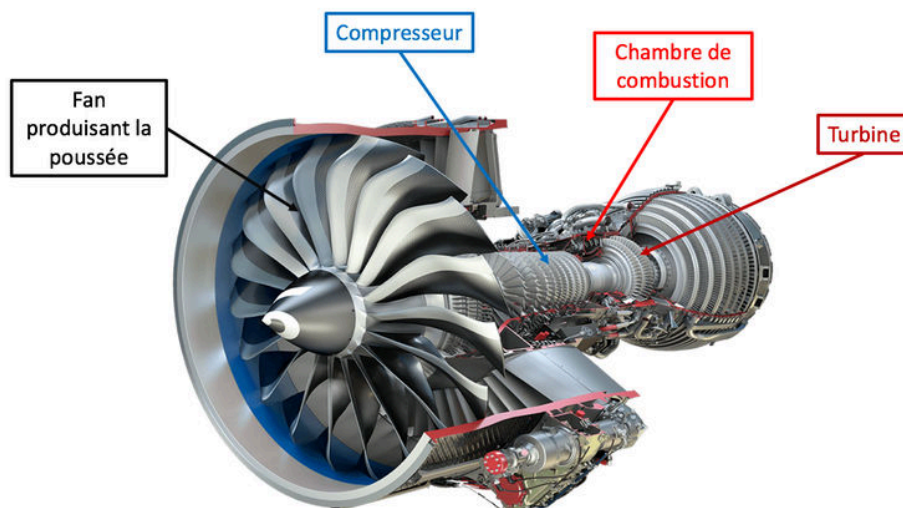


FIGURE 1 – Moteur Leap développé par Safran Aircraft Engines et GE Aviation au sein de CFM International. Source : <https://actu-aero.fr/>

La simulation numérique des fluides est capable de répondre à cette problématique. Elle est d'ailleurs déjà utilisée depuis plusieurs dizaines d'années par les motoristes aéronautiques comme un outil de conception industriel à travers les approches RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) et URANS (*Unsteady RANS*) qui sont basées sur une modélisation statistique de la turbulence. Ces approches sont suffisamment matures pour, par exemple, simuler de façon assez précise l'écoulement dans des compresseurs ou des turbines de plusieurs étages comprenant des détails géométriques complexes. Cependant, cette modélisation statistique de la turbulence engendre des limitations dans la prédiction de certains phénomènes tels que la transition à la turbulence des couches limites ou l'éventuel décollement de ces dernières.

Une manière de résoudre cet écueil est de recourir à la simulation des grandes échelles, aussi notée dans la littérature LES (*Large-Eddy Simulation*), qui consiste à résoudre les grandes échelles énergétiques de la turbulence et d'avoir ainsi à ne modéliser que les plus petites qui sont de nature isotrope. Par conséquent, une erreur de modélisation moindre qu'avec les approches RANS et URANS et une plus grande prédictibilité des phénomènes physiques sont obtenues. En revanche, un des principaux obstacles à l'introduction de la LES en industrie est lié à son coût de calcul prohibitif lorsqu'une couche limite à haut nombre de Reynolds se développe dans la configuration étudiée. En effet, dans cette région de l'écoulement, les grandes structures énergétiques locales sont, comparées au reste de l'écoulement, très petites et nécessitent alors un maillage fin pour être résolues. Chapman (1979) est le premier à donner une estimation du coût de calcul d'une couche limite turbulente en LES. Son estimation, dont l'ordre de grandeur est toujours valable aujourd'hui, est basée sur une résolution précise des échelles intégrales. Dans la zone externe de la couche limite, l'échelle intégrale est faiblement corrélée au nombre de Reynolds de l'écoulement alors que dans la zone interne de la couche limite, elle y est beaucoup plus dépendante. Cela se traduit par l'impossibilité, au regard des moyens de calcul actuels, d'employer une approche LES sur la plupart des configurations aéronautiques industrielles, où le nombre de Reynolds de l'écoulement dépasse souvent le million. Cette limitation est aujourd'hui identifiée comme le premier frein au déploiement de la LES en aérodynamique.

Pour réduire le temps de calcul d'une LES, une solution est de ne pas résoudre la zone interne des couches limites et de modéliser leurs effets : c'est le principe de l'approche WMLES (*Wall-Modeled Large-Eddy Simulation*).

## Objectifs de l'étude

Le but de ces travaux est d'accélérer l'utilisation de la LES pour la prédiction des écoulements présents dans les turbomachines aéronautiques, c'est-à-dire en ayant un temps de restitution acceptable. Pour réaliser cet objectif, l'approche considérée dans ces travaux est la WMLES. Concrètement, en WMLES, les flux pariétaux sont estimés à l'aide d'un modèle de paroi, dont le rôle est de modéliser les effets de la zone interne de la couche limite à partir de données issues de la zone externe. Deux types de modèles de paroi existent : les analytiques et les numériques. Les modèles de paroi analytiques utilisent une relation donnant explicite-

ment les flux pariétaux en fonction de quantités extraites dans la zone inertielle de la couche limite. Leur coût de calcul est ainsi négligeable comparé à celui d'une itération d'un solveur LES. Cependant, ces relations sont basées sur de nombreuses hypothèses restreignant leur domaine de validité à des configurations académiques. Au contraire, les modèles de paroi numériques résolvent un système d'équations différentielles. Comparé à un modèle de paroi analytique, il est alors possible de prendre en compte plus de phénomènes physiques, au prix d'une complexité d'utilisation et d'un coût de calcul plus élevés. En outre, le système d'équations différentielles à retenir reste un problème ouvert. Généralement, ce dernier est basé sur les équations de couche limite. Dans ce cas, il faut déterminer si les termes de gradient de pression et de convection doivent être conservés, ainsi que les modélisations de la viscosité turbulente et du nombre de Prandtl turbulent à adopter.

Par conséquent, le principal objectif de cette étude est de dégager la méthodologie numérique optimale permettant d'exploiter l'approche WMLES sur les écoulements présents dans les turbomachines, aussi bien en terme de maillage, de méthodes numériques que de modélisation de paroi. À ce titre, un modèle de paroi adapté aux écoulements dans les turbomachines doit être proposé et développé. Ce dernier doit alors être :

- capable de prendre en compte les phénomènes auxquels les couches limites présentes dans une turbomachine sont soumises, en particulier les effets de compressibilité, thermiques et de gradient de pression ;
- suffisamment robuste et simple d'utilisation pour être appliqué sur des configurations à géométries complexes.

Le nouveau modèle de paroi proposé sera d'abord évalué sur des couches limites turbulentes académiques soumises à des effets de compressibilité et/ou un gradient de température. Puis, sa capacité à prendre en compte les effets de gradient de pression sera validée. Finalement, le modèle de paroi développé sera appliqué sur une configuration représentative des géométries industrielles.

## Codes de calcul

Le Cerfacs a développé des modèles de paroi (RANS ou LES) dans la plupart des solveurs numériques utilisés par le groupe Safran, notamment *elsA*, AVBP et N3S. La principale leçon de ces études est qu'il est impossible d'étudier un modèle de paroi indépendamment du code où il est employé : implémentation numérique et modélisation physique sont indissociables. Dans la continuité des travaux de Bocquet (2013), seul le solveur *elsA* est considéré dans ces travaux.

Par ailleurs, l'ensemble des simulations réalisées dans cette étude est post-traité à l'aide de l'outil dédié développé par le Cerfacs : Antares (2018).

## Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est composé de deux parties. Dans la première, le cadre dans lequel ces travaux s'inscrivent est présenté. Notamment, les principaux phénomènes turbulents ayant lieu dans une turbomachine et impactant leur rendement sont décrits. Puis, les modélisations les plus courantes des écoulements turbulents compressibles sont introduites, permettant d'expliquer l'utilité d'une approche LES dans un contexte turbomachine, par rapport aux approches RANS et URANS. Ensuite, les résultats théoriques de couche limite turbulente relatifs à la compréhension et à la justification de l'approche WMLES sont détaillés. Enfin, cette approche est exposée, aussi bien son intérêt que son principe et son domaine de validité.

Dans la seconde partie, un modèle de paroi adapté aux géométries industrielles est proposé et validé. D'abord, ce modèle est évalué sur des couches limites se développant dans des canaux plans, dont les écoulements sont à un nombre de Mach allant de 0.2 à 1.7 et sont éventuellement soumis à un gradient de température. Cela permet de témoigner de la capacité du modèle implémenté à dégénérer vers des solutions analytiques connues ainsi qu'à prendre en compte les effets de compressibilité et/ou thermiques dans une couche limite. Son aptitude à prédire les effets de gradient de pression sur une couche limite est ensuite démontrée. À cet effet, une méthodologie numérique permettant de soumettre une couche limite à un gradient de pression donné avec un solveur compressible est introduite. Finalement, la robustesse du modèle de paroi développé est prouvée en l'utilisant pour prédire l'écoulement dans un compresseur axial. Cette application est alors l'occasion de mettre en exergue les avantages, limites et préconisations d'usage d'une approche WMLES.

**Première partie**

**Contexte et synthèse bibliographique  
de l'étude**





## Introduction

Une étude bibliographique est réalisée afin de présenter le contexte dans lequel ces travaux s'inscrivent ainsi que les résultats théoriques justifiant l'utilisation de l'approche numérique considérée dans la seconde partie de ce manuscrit. Cette première partie se structure de la manière suivante :

- tout d'abord, les principaux effets visqueux impactant la performance d'une turbomachine sont décrits ;
- puis, les principales approches numériques permettant la prédiction de ces effets sont introduites. L'approche LES est alors choisie dans le cadre de ces travaux en raison de sa modélisation réduite de la turbulence ;
- néanmoins, le coût de calcul à haut nombre de Reynolds d'une approche LES près des parois empêche son application à des écoulements industriels. Avant de présenter des approches permettant de réduire ce coût, les résultats théoriques nécessaires à leur compréhension et justifiant leur intérêt et leur existence sont rappelés ;
- enfin, l'approche considérée dans cette étude est introduite et son principe de fonctionnement, ses avantages et ses limites sont détaillés.



# Chapitre 1

## Turbulence pariétale dans les turbomachines

Une turbomachine est, par définition, une machine où s'opère un transfert d'énergie entre un flux continu de fluide et une partie solide en rotation. Deux principaux types de turbomachines existent :

- celles où l'énergie du fluide est absorbée par le rotor, comme les turbines ;
- celles où le rotor fournit de l'énergie au fluide, comme les compresseurs.

Les turbomachines peuvent également être classées selon la direction principale des lignes de courant de leur écoulement qui peut être :

- principalement parallèle à l'axe de rotation (turbomachines axiales) ;
- principalement perpendiculaire à l'axe de rotation dans le plan de sortie du fluide (turbomachines radiales) ;
- sans direction privilégiée dans le plan de sortie du fluide (turbomachines mixtes).

Comme expliqué par Ottavy (2006), les turbomachines axiales sont caractérisées par des débits importants et des taux de pression réduits (de l'ordre de 1.4 pour un compresseur transsonique et de 2 pour un compresseur supersonique). Au contraire, dans les turbomachines radiales, les débits sont réduits et les taux de pression importants (de l'ordre de 10). Dans le cadre de ces travaux, l'intérêt est porté sur les principaux systèmes de propulsion aéronautique (turboréacteurs, turbopropulseurs et turbomoteurs) qui sont composés de turbomachines (de types compresseur et turbine) et d'autres éléments (chambre de combustion...). C'est pourquoi, parmi la multitude des turbomachines existantes (éolienne, pompe, turbine hydraulique, turbine à vapeur...), seuls les étages de compresseurs et de turbines à gaz sont considérés dans la suite. Un étage de turbomachine est composé d'une roue mobile (rotor) et d'une roue fixe (stator).

Ce chapitre vise à présenter l'importance de la prédiction des pertes dans une turbomachine et leurs principales sources liées aux effets visqueux.

## 1.1 Performance d'une turbomachine

Le point de fonctionnement d'une turbomachine peut être défini par son débit massique  $\dot{m}$  et sa vitesse de rotation  $\Omega$ . La performance d'une turbomachine est alors évaluée par son taux de pression totale  $\Pi$  et son rendement isentropique  $\eta_{is}$  définis respectivement par :

$$\Pi = \frac{p_{02}}{p_{01}}, \quad (1.1)$$

avec  $p_{01}$  et  $p_{02}$  les pressions totales aux plans d'entrée et de sortie de la turbomachine, et :

$$\eta_{is} = \begin{cases} \eta_c = \frac{\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1} & \text{pour un compresseur,} \\ \eta_t = \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}{\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1} & \text{pour une turbine,} \end{cases} \quad (1.2)$$

avec  $T_{01}$  et  $T_{02}$  les températures totales aux plans d'entrée et de sortie. L'équation (1.2) est valable lorsque les transferts de chaleur sont négligeables par rapport à ceux de travail et en supposant que la compression ou la détente du fluide s'opère de manière quasi-statique. L'ensemble des points de fonctionnement d'une turbomachine permet de définir sa plage de fonctionnement et de tracer sa cartographie.

Dans le cas d'un compresseur, la cartographie est composée des courbes (appelées courbes caractéristiques) décrivant l'évolution du taux de pression totale  $\Pi$  ou du rendement isentropique  $\eta_{is}$  en fonction du débit réduit  $\dot{m}\sqrt{T_{01}}/p_{01}$  à une vitesse de rotation réduite  $\Omega/\sqrt{T_{01}}$  donnée (c'est-à-dire à iso-régime). La connaissance de ces courbes permet de déterminer complètement le comportement d'un compresseur, comme illustré à la figure 1.1. Chaque courbe caractéristique est limitée en débit pour des raisons physiques :

- par la ligne de pompage, quand le débit diminue. En effet, sous l'effet des gradients de pression adverses présents dans un compresseur, les couches limites sur les aubes décollent (phénomène de décrochage) et le compresseur est affecté par différentes instabilités dont le pompage (inversion du sens de l'écoulement) ;
- par blocage du débit (*choking*), quand le débit augmente. En effet, pour un débit suffisamment élevé, le nombre de Mach de l'écoulement atteint l'unité (dans la section la plus petite). Le débit ne peut alors plus augmenter (tant que l'écoulement en amont est subsonique).

Dans le cas d'une turbine, les courbes caractéristiques sont présentées différemment, comme illustré à la figure 1.2. D'une part, les courbes caractéristiques sont limitées uniquement par un blocage du débit. Cela s'explique par le fait que les couches limites dans une turbine sont accélérées et restent stables même quand le débit diminue en raison des gradients de pression favorables auxquels l'écoulement est soumis. Dans le cas d'un blocage du débit, la vitesse de rotation réduite n'a plus d'influence sur le point de fonctionnement de la turbine.

D'autre part, ces courbes sont plutôt tracées en fonction du taux de pression que du débit réduit. En effet, c'est le taux de pression qui est en général donné et, lorsque l'écoulement est suffisamment accéléré, le débit réduit varie peu en fonction de la vitesse de rotation réduite (comme montré à la figure 1.2).

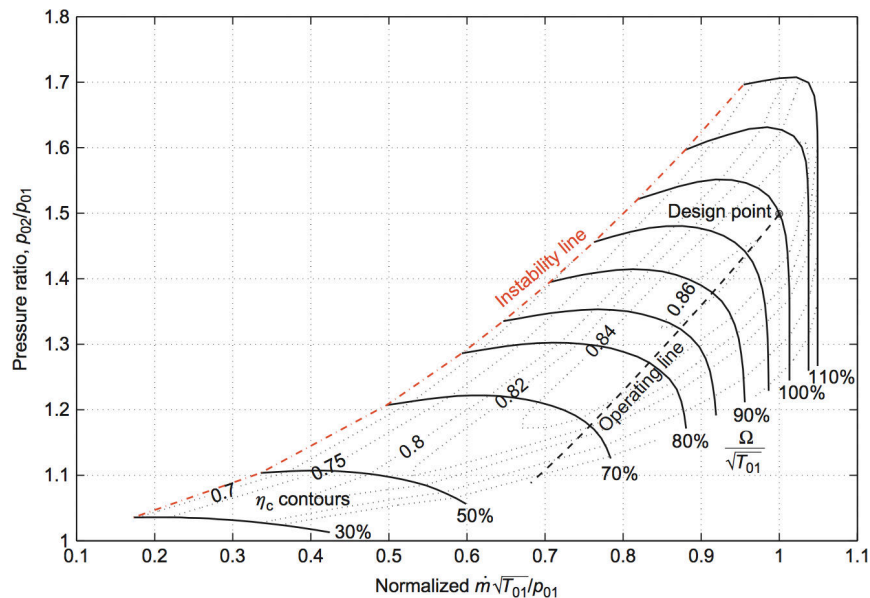


FIGURE 1.1 – Cartographie d'une soufflante transsonique (compresseur) d'un moteur d'avion civil, basé sur les données de Cornell (1975) et tiré de Dixon et Hall (2013)

Comme expliqué par Dixon et Hall (2013), la ligne de fonctionnement d'un compresseur est choisie (et imposé par l'état de l'écoulement en aval) de manière à passer le plus près possible (selon les choix du motoriste) du point de fonctionnement où le rendement isentropique est maximal, aussi appelé point de fonctionnement nominal. Pour déterminer ce point, les isolignes du rendement isentropique sont ajoutées, comme sur la figure 1.1.

Pour réduire la consommation en carburant des systèmes de propulsion aéronautique, une amélioration des performances aérodynamiques de leurs turbomachines et en particulier de leurs rendements est nécessaire. Pour cela, une meilleure compréhension des phénomènes induisant une augmentation de l'entropie est requise afin de les minimiser. Ces phénomènes, appelés pertes, peuvent être décomposés en deux parties : les effets visqueux et les effets thermiques. Il est à noter que dans le cas d'un écoulement incompressible se développant le long de parois adiabatiques, les effets thermiques sont négligeables. L'entropie est alors directement liée aux effets visqueux.

Dans la suite de ce chapitre, l'accent est mis sur les pertes associées aux couches limites présentes dans une turbomachine axiale (qui correspond au cas final étudié dans ces travaux), c'est-à-dire aux effets visqueux.

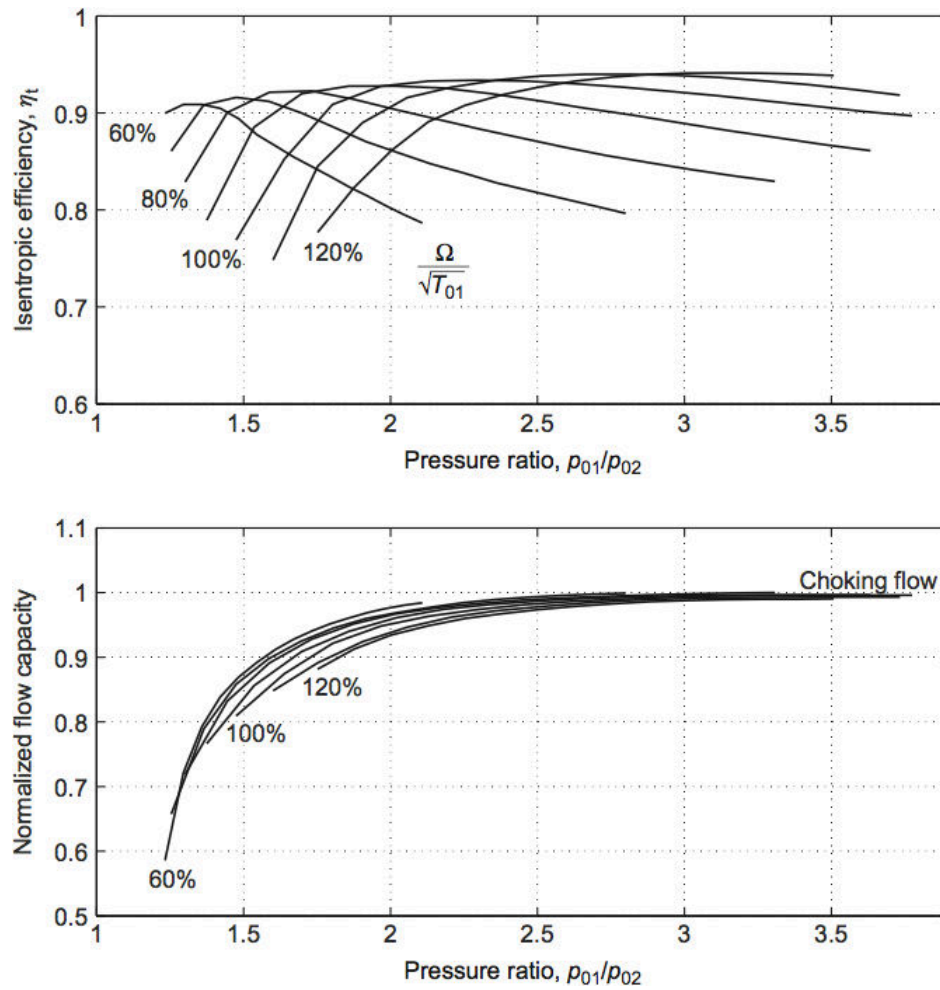


FIGURE 1.2 – Courbes caractéristiques d’une turbine axiale de deux étages, d’après Dixon et Hall (2013). En-haut : rendement isotropique en fonction du taux de pression. En-bas : débit adimensionné en fonction du taux de pression

## 1.2 Effets visqueux dans une turbomachine axiale

Les phénomènes de pertes dues aux effets visqueux peuvent être classés en différentes catégories. Par exemple, Dixon et Hall (2013) classent les sources de pertes selon leur nature bidimensionnelle (c'est-à-dire celles présentes dans une cascade d'envergure infinie) ou tridimensionnelle. Ici, la classification usuelle (comme utilisée par Denton (1993)) est choisie et les pertes sont décomposées en pertes de profils, secondaires et de jeu, même s'il est acquis qu'elles sont interdépendantes. D'ailleurs, les pertes secondaires et de jeu sont parfois confondues. Dans cette section, ces trois types de pertes sont définis et brièvement présentés. Une revue plus complète des mécanismes de pertes dans une turbomachine est proposée, par exemple, par Denton (1993).

Par ailleurs, les effets des paramètres géométriques des aubes pouvant générer des pertes importantes (état de surface, angle d'incidence, calage, solidité...) ne sont pas considérés ici.

### 1.2.1 Pertes de profils

Les pertes de profils correspondent à l'ensemble des pertes générées par :

- les couches limites présentes sur les aubes et non-influencées par les moyeu et carter (pertes de couches limites);
- leur mélange au bord de fuite (pertes de mélange);
- la présence d'ondes de choc (pertes de choc).

Comme expliqué par Denton (1993), ces pertes sont celles présentes dans une cascade d'envergure infinie, c'est-à-dire dans un écoulement bidimensionnel. C'est pourquoi, les pertes de profils peuvent aussi être associées à l'écoulement primaire d'une turbomachine axiale, qui est la partie de l'écoulement dont la direction principale est axiale.

Les pertes dues aux couches limites sur les aubes sont directement liées aux frottements visqueux qui y sont présents. L'intensité de ce cisaillement varie selon que ces couches limites sont laminaires ou turbulentes et attachées ou décollées. D'après Dixon et Hall (2013), les pertes de couches limites représentent près de deux tiers des pertes de profils dans une turbine subsonique et un tiers dans une turbine supersonique, comme illustré à la figure 1.3.

Lorsqu'une couche limite est turbulente, son épaisseur et le cisaillement en son sein augmentent. Les pertes sont alors plus élevées. Toutefois, une couche limite turbulente est plus résistante aux gradients de pression. En particulier, un décollement de la couche limite peut être évité. De manière relative, les pertes sont alors réduites par rapport au cas d'une couche limite laminaire qui aurait décollée. De plus, une fois que la couche limite a transitionné vers un état turbulent, si le nombre de Reynolds basé sur la corde augmente à corde constante (par exemple en augmentant la vitesse), la couche limite devient plus fine et les pertes diminuent.



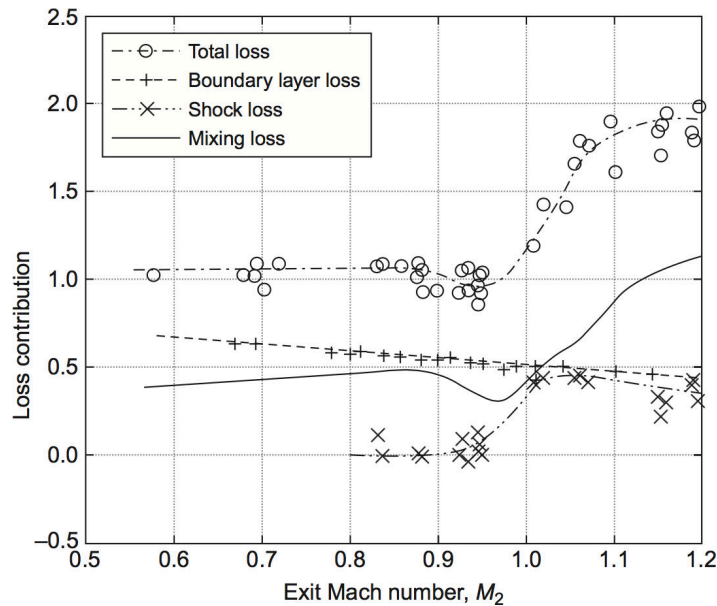


FIGURE 1.3 – Variation des coefficients de pertes en fonction du nombre de Mach en sortie  $M_2$  d'une cascade de turbine à un nombre de Reynolds de  $10^6$ , adapté de Mee et al. (1992) par Dixon et Hall (2013)

C'est pourquoi, il est important de prédire la position de la transition à la turbulence des couches limites sur une aube. En général, cette transition est induite :

- naturellement, c'est-à-dire par l'amplification de petites perturbations formant des ondes instables comme celles de Tollmien-Schlichting. Ces instabilités conduisent alors à la transition de la couche limite via la formation de spots turbulents ;
- par *bypass*, comme décrit par Morkovin (1969). L'amplification des ondes de Tollmien-Schlichting est court-circuitée par la turbulence extérieure qui induit des instabilités dans la couche limite aboutissant directement à la formation de spots turbulents. Ce type de transition a lieu lorsque le taux de turbulence extérieure est environ supérieur à 1%, ce qui est fréquent dans les écoulements présents dans les turbomachines ;
- par rugosité ;
- par un bulbe de décollement. Ce type de transition apparaît lorsque la couche limite est soumise à un gradient de pression adverse provoquant son décollement, favorisant ainsi l'apparition de structures tourbillonnaires tridimensionnelles. Ces structures permettent à la couche limite de devenir turbulente et, grâce à l'augmentation induite de quantité de mouvement, de réattacher.

Les mécanismes de transitions naturelle et *bypass* sont illustrés à la figure 1.4.

Un compresseur peut être le siège de pertes importantes car l'écoulement doit passer d'une pression statique faible en entrée à une pression statique élevée en sortie. Les couches limites sont donc soumises à des gradients de pression adverses augmentant leur épaisseur et pouvant provoquer leur décollement. En plus des pertes associées au décollement même,

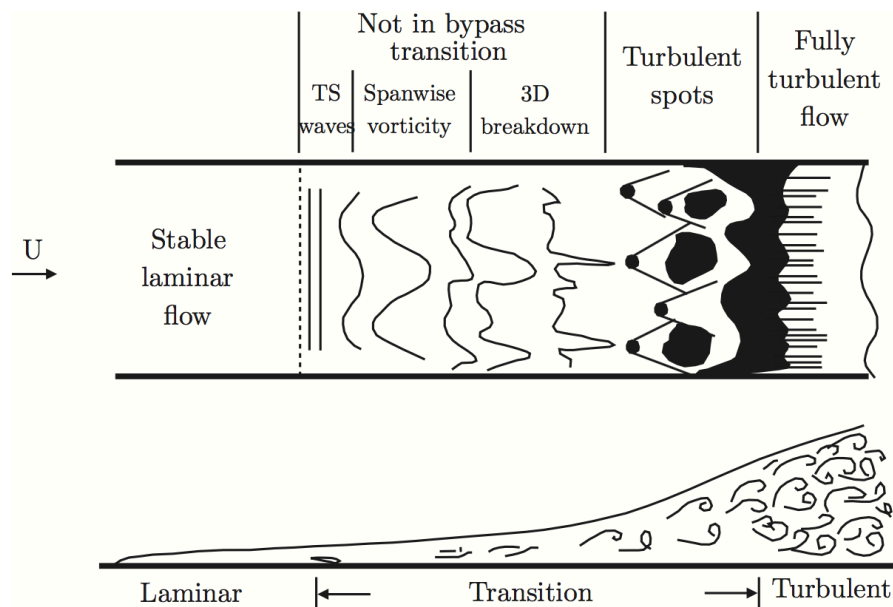


FIGURE 1.4 – Mécanismes de transition d’une couche limite induite naturellement et par *bypass*, adapté de White (2005) par Mouret (2016)

ce dernier réduit aussi l’énergie cinétique de l’écoulement en amont, comme expliqué par Dixon et Hall (2013). Par conséquent, les pertes provoquées par un décollement de couche limite sont difficiles à quantifier. Il est à noter que les aubes sont conçues de manière à ce que leurs couches limites restent attachées au point de fonctionnement nominal, (sauf au bord de fuite, mais ce décollement est inclus dans les pertes de mélange). En revanche, en s’éloignant du point de fonctionnement nominal d’un compresseur, les couches limites peuvent présenter des décollements importants et des phénomènes de décrochage et de pompage peuvent apparaître, comme décrit à la section 1.1. Dans le cas d’une turbine, les gradients de pression favorables tendent à stabiliser les couches limites et il est donc rare qu’elles décollent.

Lorsqu’un choc apparaît dans l’écoulement, les pertes de choc deviennent non nulles. Comme expliqué par Dixon et Hall (2013), l’entropie générée lors d’un choc droit varie comme  $(M_1^2 - 1)^3$ , avec  $M_1$  le nombre de Mach en amont du choc, ce qui est faible pour des nombres de Mach représentatifs des écoulements dans les turbines ( $M_1 \lesssim 1.4$ ). Cette variation d’entropie est d’autant plus réduite que dans une turbine, les chocs sont souvent obliques. Comme montré à la figure 1.3, les pertes dues à un choc représentent moins de 30% des pertes de profils dans le cas d’une cascade de turbine. Dans le cas d’un compresseur dont l’écoulement en entrée est subsonique, sa ligne de fonctionnement est choisie de manière à éviter le blocage du débit et, a fortiori, la présence d’un choc dans l’écoulement. Ce dernier étant par ailleurs ralenti (en raison des gradients de pression adverses), les pertes de choc peuvent être négligées.

Les pertes de mélange désignent les pertes associées au sillage formé par le mélange des couches limites intrados et extrados d'une aube avec l'écoulement en aval (illustré à la figure 1.5) ainsi que leur décollement au bord de fuite. En effet, les couches limites sont très souvent décollées vers le bord de fuite car ce dernier est épaissi pour des raisons mécaniques. Le sillage génère des pertes en convectant un cisaillement élevé (et très souvent turbulent) en aval de l'aube. Il est à noter qu'en s'éloignant de l'aube, l'épaisseur du sillage augmente pendant que son déficit de vitesse diminue en raison de son mélange visqueux avec l'écoulement environnant, tel que schématisé à la figure 1.5. Comme montré à la figure 1.3, les pertes de mélange représentent environ un tiers des pertes totales dans une cascade de turbine subsonique et plus de 50% quand le nombre de Mach en sortie devient supérieur à l'unité.

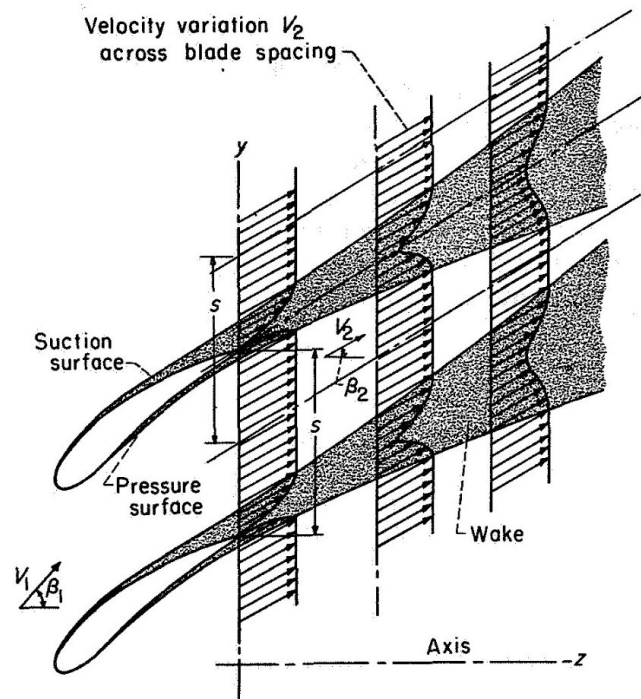


FIGURE 1.5 – Représentation schématique du développement des couches limites sur des aubes d'une section de cascade et des sillages induits en aval, d'après Johnsen et Bullock (1965)

Le sillage derrière une aube étant formé à partir des structures contenues dans les couches limites de cette aube, les pertes de mélange sont directement dépendantes de l'état de ces couches limites au bord de fuite. Il est donc important de correctement prédire leur évolution le long de l'aube et en particulier leur épaisseur. D'ailleurs, comme expliqué ci-dessus, les couches limites sur une aube sont plus fines lorsque le nombre de Reynolds basé sur la corde augmente à corde constante. Ainsi, en plus de réduire les pertes de couches limites, une augmentation de ce nombre de Reynolds induit également une diminution des pertes de sillage générées par une couche limite turbulente.

Bien que n'étant pas inclus dans les pertes de profils en toute rigueur, les interactions entre les roues du rotor et du stator d'une turbomachine (aussi appelées interactions rotor-stator) sont également une source de pertes à ne pas négliger. En particulier, l'interaction entre les couches limites d'une aube et le sillage d'une aube amont est un mécanisme important. D'une part, le sillage peut provoquer une transition à la turbulence de type *bypass* dans les couches limites de cette aube. D'autre part, comme expliqué par Mailach et al. (2007) et illustré à la figure 1.6, la convection d'un sillage est perturbée par la présence des aubes en aval. En effet, lorsqu'un sillage atteint le bord d'attaque d'une aube située à l'aval, il est coupé en deux parties qui se propagent chacune dans un espace inter-aube différent. Mailach et al. (2007) identifient alors trois effets impactant la structure du sillage :

- le mélange du sillage avec l'écoulement inter-aubes par effets visqueux ;
- l'étirement ou la compression du sillage de manière non-visqueuse ;
- l'effet de « jet négatif » (appelé *negative jet* dans la littérature).

Lorsqu'une roue est présente en aval, les pertes ne sont pas uniformes dans l'espace inter-aubes : les vitesses réduites du sillage sont mélangées avec des vitesses plus élevées du côté extrados de l'aube (côté de dépression ou *suction side*, noté SS à la figure 1.6) que du côté intrados (côté de surpression ou *pressure side*, noté PS à la figure 1.6). Des pertes plus importantes sont donc générées du côté extrados de l'aube.

Dans un compresseur, l'élargissement de l'espace inter-aube dans la direction axiale étire le sillage (de manière non-visqueuse), ce qui accélère la réduction de sa vitesse déficitaire. Cet effet, présenté par L. H. Smith (1966), réduit les pertes dues au mélange visqueux et est appelé *wake recovery* dans la littérature. Dans le cas d'une réduction de l'espace inter-aube, ces effets sont inversés.

Enfin, comme montré à la figure 1.6, le triangle des vitesses local est modifié dans le sillage. En effet, dans le cas d'un sillage d'une aube du stator (illustré à la figure 1.6), la vitesse absolue  $c$  (ou relative  $w$  dans le cas d'un rotor) réduite dans le sillage induit une vitesse relative  $w$  (ou absolue  $c$  dans le cas d'un rotor) également réduite. Cet écart de vitesse est à l'origine d'une vitesse de glissement (*slip velocity*) qui génère un déplacement de quantité de mouvement dans le sillage allant du côté de dépression vers celui de surpression : c'est le « jet négatif ». D'après Meyer (1958), ce jet provoque une accélération de l'écoulement en amont du sillage et un ralentissement en son aval du côté de dépression de l'aube, et l'effet inverse du côté de surpression. De plus, lorsque le sillage atteint le bord d'attaque d'une aube en aval, la modification du triangle des vitesses fait varier l'angle d'incidence sur cette aube, ce qui génère des pertes.

Les pertes de profils désignent l'ensemble des pertes présentes dans l'écoulement primaire dans une cascade de turbomachine. Elles sont générées par les couches limites présentes sur les aubes, les sillages en aval et les éventuels chocs présents. Ces pertes, qui sont de nature bidimensionnelle en moyenne, dépendent donc directement de l'état des couches limites des aubes. En particulier, le mécanisme instationnaire

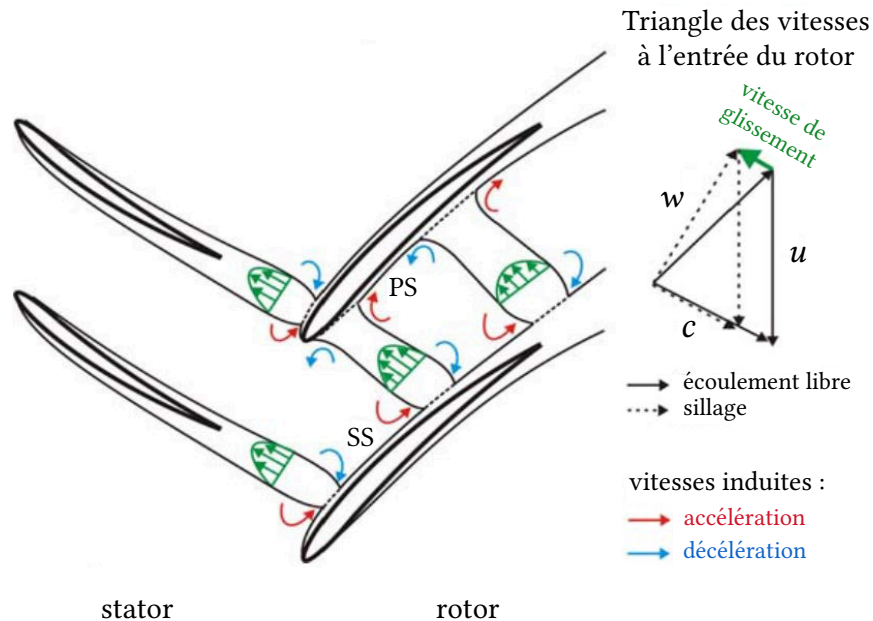


FIGURE 1.6 – Représentation schématique des interactions rotor-stator.  $c$ ,  $w$  et  $u$  sont respectivement les vitesses absolue, relative et de rotation. SS (*suction side*) et PS (*pressure side*) désignent les côtés de dépression et de surpression d'une aube. Adapté de Mailach et al. (2007)

complexe et la position de leur transition à la turbulence ainsi que leur potentiel décollement doivent être correctement prédits. Par ailleurs, les interactions existantes entre différentes roues dans une turbomachine, bien que n'étant pas incluses en toute rigueur dans les pertes de profils, génèrent également des pertes via des phénomènes instationnaires.

### 1.2.2 Pertes secondaires

Les pertes secondaires, aussi appelées *endwall loss* dans la littérature, correspondent à l'ensemble des pertes générées par les couches limites se développant sur les moyeu et carter d'une turbomachine, qu'elles soient en interaction avec les couches limites sur les aubes ou non. Elles sont principalement dues aux écoulements secondaires qui sont, par définition, les écoulements engendrés par la déviation (par effets visqueux) de l'écoulement primaire autour d'une aube à cause de la présence des moyeu et carter, à l'exception de l'écoulement de jeu. En effet, bien qu'en interactions mutuelles, les écoulements de jeu et secondaires sont généralement distingués l'un de l'autre dans la littérature d'un point de vue qualitatif. Il en est de même entre les pertes secondaires et les pertes de jeu (présentées à la section suivante).

Toutefois, malgré leur nom, les pertes secondaires ne sont pas à négliger et peuvent contribuer pour 30 à 50% des pertes totales d'après Sharma et Butler (1987). Comme noté

par Dixon et Hall (2013), si les écoulements secondaires dans les turbines sont le lieu de pertes importantes en raison des déviations importantes auxquelles l'écoulement est soumis, ils sont souvent plus visibles et plus critiques dans un compresseur car les couches limites y sont plus épaisses en raison des gradients de pression adverses présents.

En plus des frottements visqueux associés aux couches limites sur les moyeu et carter, l'interaction de ces dernières avec les couches limites sur les aubes est aussi à l'origine de pertes secondaires. En effet, les écoulements secondaires générés lors de cette interaction sont caractérisés par des structures tourbillonnaires tridimensionnelles. Comme résumé par Ligrani et al. (2017), il existe plusieurs modèles décrivant leur formation, évolution et topologie, dont ceux de Hawthorne (1951), Langston (1980), Öngören (1981), Sieverding et Van den Bosche (1983) et Sharma et Butler (1987). En se basant sur celui de Öngören (1981) (illustré à la figure 1.7), les principales structures observées dans un écoulement secondaire sont les :

- tourbillons contrarotatifs (*counter vortex*);
- tourbillons de passage (*passage vortex*);
- tourbillons de coin (*corner vortex*).

Lorsque l'écoulement contenu dans la couche limite du moyeu (ou du carter) s'approche du bord d'attaque d'une aube, un décollement apparaît en amont du bord d'attaque. Ce point de décollement, où les lignes de frottement se croisent, est un point singulier de type col (ou selle, *saddle point* dans la littérature). À ce point, un tourbillon en fer à cheval (*horseshoe vortex*) est formé et est ensuite scindé en deux tourbillons : un du côté de surpression de l'aube et l'autre du côté de dépression.

Le tourbillon du côté de surpression est convecté jusqu'au côté de dépression de l'aube adjacente en raison du gradient de pression azimuthale existant dans l'espace inter-aube. En traversant l'espace inter-aube, ce tourbillon se développe et est appelé tourbillon de passage. Le tourbillon du côté de dépression se développe en restant adjacent à l'aube et en s'éloignant du moyeu (ou carter), et possède un sens de rotation opposé à celui du tourbillon de passage : c'est le tourbillon contrarotatif.

Par ailleurs, un décollement se forme près de la jonction entre un moyeu (ou un carter) et le côté de dépression de l'aube. Un tourbillon, appelé tourbillon de coin, se développe alors sous les autres. Comme synthétisé par Gao et al. (2015), sa formation est principalement due au gradient de pression adverse présent le long du côté de dépression de l'aube auquel les vitesses réduites contenues dans le mélange des couches limites du moyeu (ou du carter) et de l'aube sont soumises.

Les pertes secondaires sont celles générées par les couches limites qui se développent sur les moyeu et carter d'une turbomachine. Malgré leur nom, elles ne sont pas négligeables et peuvent même être plus importantes que les pertes de profils. Les pertes secondaires sont principalement dues aux écoulements secondaires qui sont issus des interactions entre les couches limites de moyeu et de carter et celles

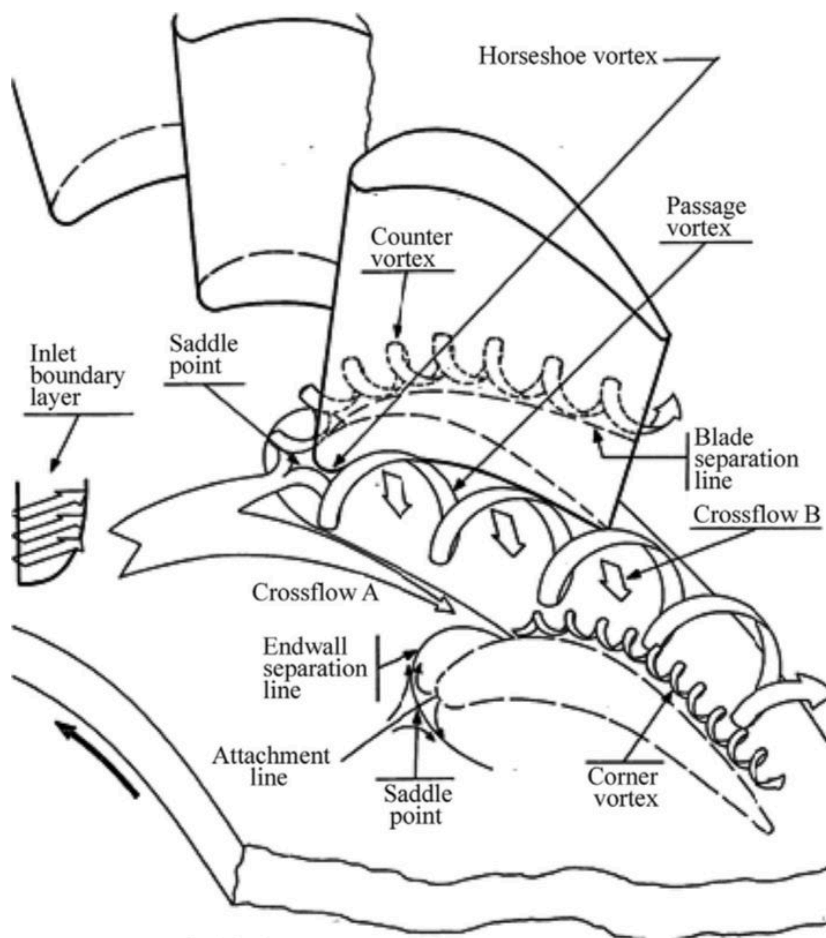


FIGURE 1.7 – Écoulements secondaires dans une turbomachine, d'après Öngören (1981)

se développant sur les aubes. Ces interactions provoquent des décollements qui sont à l'origine de pertes mais également de la formation de structures tourbillonnaires. Ensuite, ces tourbillons se développent et se mélangent avec l'écoulement primaire, créant ainsi davantage de pertes. Les mécanismes de formation de ces tourbillons et leurs interactions mutuelles sont des sujets de recherche actifs, notamment en raison de leur caractère tridimensionnelle fortement instationnaire.

### 1.2.3 Pertes de jeu

Les pertes de jeu désignent les pertes associées aux écoulements de jeu existants en tête des aubes du rotor et parfois (selon les choix de conception du motoriste) en pied des aubes du stator (pour, notamment, réduire le poids des aubes). D'après Denton (1993), elles contribuent pour environ un tiers aux pertes totales. Un écoulement de jeu est montré à la figure 1.8. Son existence pour une aube du rotor est due à l'espace nécessaire entre cette aube du rotor mobile (en rotation) et le carter fixe. Comme expliqué précédemment, bien que les interactions entre les pertes secondaires et de jeu peuvent être importantes et qu'il est difficile de les quantifier séparément, ces dernières sont qualitativement distinguées l'une de l'autre dans la littérature.

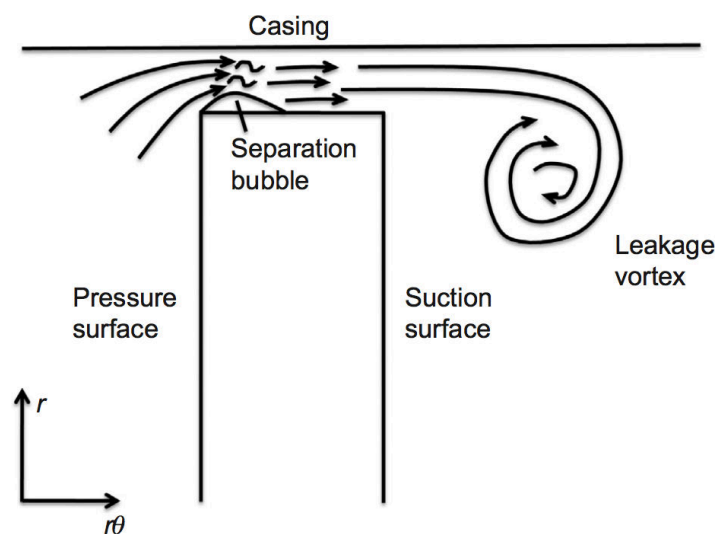


FIGURE 1.8 – Écoulement de jeu dans une turbomachine, d'après Dixon et Hall (2013)

La dynamique et l'intensité de l'écoulement de jeu dépendent de plusieurs facteurs (géométrie de l'aube et du jeu, vitesse de rotation de l'aube, débit en entrée...). Cet écoulement est dirigé du côté de surpression de l'aube vers celui de dépression, en raison du gradient de pression azimuthale existant entre ces deux côtés. Comme expliqué par Dixon et Hall (2013), en général, un décollement apparaît sur la couche limite en tête de l'aube (près du côté de surpression). Ce décollement induit une réduction du débit de la turbomachine. De plus, si l'épaisseur de l'aube est petite par rapport à la taille du jeu (comme c'est d'usage



dans un compresseur), ce décollement peut ne pas réattacher. Sinon, un bulbe de décollement est formé, de même que sur la figure 1.8. Ensuite, l'écoulement de jeu se propage dans l'écoulement primaire en lui étant quasi-orthogonal. Par cisaillement entre ces deux écoulements, un tourbillon – dont l'axe de rotation est selon la direction axiale – est créé : c'est le tourbillon de jeu (*leakage vortex*). Comme résumé par You et al. (2007), le tourbillon de jeu est caractérisé par des fluctuations turbulentes élevées et se déplace vers le côté de surpression du bord de fuite de l'aube adjacente tout en s'éloignant du carter. Par mélange avec l'écoulement moyen, sa taille se développe lors de sa convection, ce qui permet de le distinguer même en aval de l'aube.

Des pertes sont ainsi générées :

- lors de l'interaction visqueuse entre l'écoulement de jeu et les couches limites de l'aube et du carter ;
- par mélange visqueux entre l'écoulement de jeu et l'écoulement moyen en aval de l'aube (du côté de dépression).

D'après Dixon et Hall (2013), les pertes de jeu augmentent rapidement avec la taille du jeu : une augmentation de 1% du ratio entre cette dernière et la hauteur de l'aube implique une perte de rendement de l'ordre de 2–3% dans une turbine. Des pertes plus élevées ont donc lieu dans les turbines dont la hauteur est réduite, puisque la taille du jeu est relativement indépendante de la hauteur des aubes.

En plus de générer des pertes importantes, l'écoulement de jeu a une influence notable sur la stabilité d'un compresseur. En effet, en raison des gradients de pression adverses auxquels l'écoulement dans un compresseur est soumis, ce dernier peut s'inverser sous l'effet du jet induit par l'écoulement de jeu. Cet écoulement réduit donc le domaine de stabilité d'un compresseur et peut même provoquer son pompage. D'ailleurs, en augmentant de 30% la taille du jeu dans un compresseur axial, Gourdain et al. (2012) observent une réduction du domaine de stabilité de 40%.

En résumé, le jeu requis entre les parties en rotation et fixes d'une turbomachine est à l'origine d'un écoulement tridimensionnelle instationnaire complexe. Dans le cas d'une aube du rotor, cet écoulement génère des pertes élevées en interagissant avec les couches limites du carter et de la tête de l'aube (en provoquant notamment un décollement de cette dernière) et en créant un tourbillon du côté de dépression de l'aube, appelé tourbillon de jeu, qui se mélange avec l'écoulement moyen. Dans le cas d'une aube du stator, un jeu peut exister au pied de l'aube et cette interaction a alors lieu entre les couches limites du moyeu et du pied de l'aube.

La dynamique et l'intensité de l'écoulement de jeu dépendent de plusieurs paramètres, dont en particulier la taille du jeu. Cet écoulement a un impact très important sur le rendement d'une turbomachine ainsi que sur la stabilité d'un compresseur.

### 1.3 Bilan

Les systèmes de propulsion aéronautique atteignent des rendements qui sont de plus en plus difficiles à améliorer. Pour aller plus loin, une meilleure compréhension des mécanismes à l'origine des types de pertes existants dans une turbomachine (pertes de profils, secondaires et de jeu) est nécessaire afin de les minimiser. Bien qu'il soit difficile de quantifier les pertes associées à un phénomène en particulier (que ce soit expérimentalement ou numériquement), chaque type de pertes contribue environ pour un tiers aux pertes totales d'après Denton (1993). Évidemment, ces proportions peuvent évoluer selon le type de turbomachine considéré, la géométrie des aubes, la taille du jeu...

Par conséquent, il est important d'être capable de prédire tous les types de pertes dans une turbomachine, afin de mieux les contrôler. C'est d'autant plus vrai dans un compresseur car ces pertes réduisent sa plage de fonctionnement en étant à l'origine de différentes instabilités. En particulier, elles impactent directement la marge de pompage (définie comme l'écart entre la ligne de fonctionnement et la ligne de pompage), qui est un paramètre de conception crucial.

La plupart des phénomènes de pertes étant de nature instationnaire (transition et décollement des couches limites, tourbillons...) et même tridimensionnelle pour les pertes secondaires et de jeu, des méthodes avancées (tant expérimentalement que numériquement) sont requises pour les caractériser. Dans le cadre de ces travaux, l'objectif est d'accélérer l'utilisation d'une méthode de simulation numérique avancée sur des configurations de turbomachines afin de mieux cerner et prédire leur comportement. Une présentation des principales méthodes numériques existantes est proposée dans le chapitre suivant.



# Chapitre 2

## Modélisation des écoulements compressibles turbulents

Le chapitre précédent a permis de mettre en évidence l'existence d'écoulements instationnaires complexes dans une turbomachine ainsi que l'importance de leur prédiction. Cette problématique peut être adressée par simulation numérique. Dans ce chapitre, les principales modélisations des écoulements de fluide existantes sont présentées et comparées, permettant ainsi de dégager la méthode numérique la plus adaptée.

### 2.1 Modélisation des équations de Navier-Stokes pour un fluide monophasique

Sous l'approximation des milieux continus, les écoulements de fluides Newtonien sont régis par les équations de Navier-Stokes. Ces équations peuvent être obtenues de deux manières équivalentes :

- en considérant un volume élémentaire  $d\Omega$  ;
- en considérant un volume de contrôle  $\Omega$ .

La démarche présentée ici s'appuie sur un volume de contrôle fini fixe  $\Omega$  et les principes fondamentaux suivants :

- la masse contenue dans un volume  $\Omega$  se conserve ;
- la deuxième loi de Newton ;
- le premier principe de la thermodynamique : l'énergie contenue dans un volume  $\Omega$  se conserve.

En appliquant ces principes au volume  $\Omega$ , les équations de Navier-Stokes sous forme intégrale (ou globale) et conservative sont obtenues. L'utilisation d'un volume élémentaire  $d\Omega$  permet d'obtenir les équations sous forme différentielle (ou locale). Si  $d\Omega$  ou  $\Omega$  sont considérés en mouvement avec le fluide, les équations sont obtenues sous forme non-conservative. À partir d'une formulation donnée (intégrale ou différentielle ; conservative

ou non-conservative), il est possible d'en déduire une autre comme expliqué par Anderson (1995).

### 2.1.1 Conservation de la masse

Soit un volume de contrôle fini fixe  $\Omega$  de frontière fermée  $\partial\Omega$  et  $\mathbf{n}$  la normale sortante à la frontière. En notant  $\rho(\mathbf{x}, t)$  la masse volumique du fluide au point  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ , la masse de fluide  $m(t)$  contenue dans  $\Omega$  est donnée par :

$$m(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega. \quad (2.1)$$

Le principe fondamental de conservation de la masse appliqué à  $\Omega$  signifie que le flux de masse sortant (ou entrant) de  $\partial\Omega$  est égal à la variation temporelle croissante (ou décroissante) de la masse contenue dans  $\Omega$ , c'est-à-dire à la dérivée totale (ou particulière) de  $m$  :

$$\frac{dm}{dt} = - \int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\Omega, \quad (2.2)$$

avec  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  le vecteur vitesse. Le signe  $-$  résulte du choix d'avoir pris une normale  $\mathbf{n}$  sortante.

Ainsi :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0. \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) est une forme intégrale conservative de l'équation de conservation de la masse, aussi appelée équation de continuité.

En supposant que la masse volumique est une fonction continue dérivable sur  $\Omega$  (cette hypothèse est valable hors-choc), le théorème de Green-Ostrogradski (ou flux-divergence) permet de transformer l'intégrale sur la surface fermée  $\partial\Omega$  dans l'équation (2.3) en intégrale volumique. L'équation de conservation de la masse devient alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d\Omega = 0, \quad (2.4)$$

où  $\nabla \cdot$  représente l'opérateur divergence. Finalement, puisque  $\Omega$  est fixe :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) d\Omega = 0. \quad (2.5)$$

Comme cette intégrale est nulle pour tout domaine  $\Omega$ , la fonction intégrée est identiquement nulle, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) est la forme différentielle conservative de l'équation de conservation de la masse.

### 2.1.2 Équation de bilan de la quantité de mouvement

La deuxième loi de Newton est appliquée au volume de contrôle fixe  $\Omega$  : la somme des forces s'exerçant sur  $\Omega$  est égale à la variation de quantité de mouvement de l'ensemble des particules de fluides traversant  $\Omega$ .

Le bilan de quantité de mouvement est composée de deux termes :

- la variation temporelle de quantité de mouvement des particules de fluides contenues dans  $\Omega$  :  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \, d\Omega$  ;
- le flux de quantité de mouvement traversant  $\partial\Omega$  :  $\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, d\partial\Omega$ , avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante de  $\partial\Omega$ .

Deux types de forces s'exercent sur  $\Omega$  :

- les forces volumiques qui agissent sur l'ensemble du volume  $\Omega$  :  $\int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \, d\Omega$ , avec  $\mathbf{f}$  la force volumique par unité de masse s'exerçant sur  $\Omega$  ;
- les forces surfaciques qui agissent sur  $\partial\Omega$  :  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega$ , avec  $\mathbf{T}$  le tenseur des contraintes et  $\mathbf{n}$  la normale sortante à  $\partial\Omega$ . Le tenseur des contraintes  $\mathbf{T}$  est symétrique et peut se décomposer en deux termes :
  - la contrainte normale de pression  $p$  orientée dans le sens opposé à  $\mathbf{n}$  :  $-p\mathbf{1}_3$  ;
  - le tenseur symétrique des contraintes visqueuses qui apparaissent lorsque le fluide est en mouvement :  $\boldsymbol{\tau}$ .

Ainsi, le bilan de quantité de mouvement pour un volume de contrôle fixe  $\Omega$  s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, d\partial\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (-p\mathbf{1}_3 + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega. \quad (2.7)$$

Il s'agit d'une équation vectorielle de dimension 3. De même que pour l'équation (2.3) de conservation de la masse, en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski sur chaque dimension, les intégrales surfaciques peuvent être remplacées par des intégrales volumiques si les fonctions intégrées sont supposées dérivables. L'équation de bilan de quantité de mouvement sous forme intégrale conservative est alors obtenue :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Omega} (-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \, d\Omega, \quad (2.8)$$

avec  $\otimes$  le produit tensoriel.

Ce bilan d'intégrales étant valable pour un volume  $\Omega$  quelconque, il est vérifié localement en tout point de l'espace et l'équation de bilan de quantité de mouvement sous forme différentielle conservative est alors obtenue :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.9)$$

avec

$$\boldsymbol{\tau} = \mu'(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{1}_3 + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t), \quad (2.10)$$

puisque le fluide est supposé Newtonien avec  $\mu$  et  $\mu'$  respectivement les viscosités dynamique et volumique.

### 2.1.3 Équation de bilan de l'énergie

Le principe de conservation de l'énergie correspond au premier principe de la thermodynamique : la somme du travail par unité de temps des forces s'exerçant sur  $\Omega$  et du flux de chaleur traversant la frontière  $\partial\Omega$  par unité de temps est égale à la variation de l'énergie totale de l'ensemble des particules de fluides traversant  $\Omega$ .

L'énergie totale par unité de masse  $E(\mathbf{x}, t)$  d'une particule de fluide, aussi appelée énergie totale spécifique, est composée de deux termes :

- une énergie interne spécifique  $e$  associée au mouvement à l'échelle moléculaire ;
- une énergie cinétique par unité de masse associée au mouvement à l'échelle macroscopique de la particule de fluide :  $\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2$ .

Le bilan d'énergie totale dans  $\Omega$  est donc composée de deux termes :

- la variation temporelle de l'énergie totale contenue dans  $\Omega$  :  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho E \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho E}{\partial t} \, d\Omega$  ;
- le flux d'énergie totale traversant  $\partial\Omega$  :  $\int_{\partial\Omega} \rho E \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega$  avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante de  $\partial\Omega$ .

Les forces surfaciques et volumiques s'exerçant sur  $\Omega$  ont été listées à la section 2.1.2. Le travail d'une force par unité de temps correspond à sa puissance, qui est donnée par le produit de la force par la vitesse à son point d'application. Ainsi, le travail par unité de temps (ou la puissance) des forces s'exerçant sur  $\Omega$  est donné par :

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} ((-p\mathbf{1}_3 + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, d\partial\Omega. \quad (2.11)$$

En négligeant les phénomènes de rayonnement, seule la conduction thermique peut expliquer la présence d'un flux de chaleur. La conduction thermique correspond à la présence de gradients de température à travers la surface de contrôle  $\partial\Omega$ . En notant  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  le vecteur flux de chaleur surfacique par conduction par unité de temps, le flux de chaleur traversant  $\partial\Omega$  par unité de temps est égal à

$$- \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega, \quad (2.12)$$

où le signe  $-$  résulte du choix d'avoir pris une normale  $\mathbf{n}$  sortante.

Finalement, l'application du premier principe de la thermodynamique permet d'obtenir l'équation de bilan d'énergie sous forme intégrale conservative pour un volume de contrôle  $\Omega$  fixe :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho E}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho E \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} ((-p\mathbf{1}_3 + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega. \quad (2.13)$$

Il s'agit d'une équation scalaire. De même qu'aux sections 2.1.1 et 2.1.2, le théorème de Green-Ostrogradski permet de transformer les intégrales surfaciques en intégrales volumiques. L'équation (2.13) s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho E}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot ((-p\mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega. \quad (2.14)$$

Comme cette équation est valable pour tout domaine  $\Omega$ , elle est vérifiée localement en tout point de l'espace. L'équation de bilan d'énergie sous forme différentielle conservative est alors obtenue :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (-p\mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (2.15)$$

#### 2.1.4 Fermeture des équations de Navier-Stokes

Le système d'équations de Navier-Stokes, sous forme différentielle conservative pour un écoulement compressible, est constitué des équations (2.6), (2.9) et (2.15) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.16b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (-p\mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (2.16c)$$

avec  $\boldsymbol{\tau} = \mu'(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{1}_3 + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t)$ .

Ce système de cinq équations scalaires contient quatorze inconnues et est donc ouvert. La fermeture du système est obtenue à l'aide des relations suivantes :

- le fluide est supposé être un gaz parfait et donc régi par l'équation d'état thermodynamique suivante :

$$p = \rho r T, \quad (2.17)$$

avec  $r = \mathcal{R}/\mathcal{M} = c_p - c_v$  la constante spécifique du fluide et  $T$  sa température.  $\mathcal{R}$  est la constante universelle des gaz parfaits et  $\mathcal{M}$  est la masse molaire du fluide.  $c_p$  et  $c_v$  sont respectivement les capacités thermiques massiques (aussi appelées chaleurs spécifiques) à pression et volume constant. Pour un gaz parfait, l'énergie interne du fluide et donc les chaleurs spécifiques sont uniquement fonction de la température. Le fluide sera dans la suite considéré comme un gaz calorifiquement parfait, ainsi  $c_p$  et  $c_v$  sont des constantes du fluide. L'énergie totale spécifique  $E$  peut alors s'écrire :

$$E = \frac{rT}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2, \quad (2.18)$$



avec  $\gamma = c_p/c_v$  le rapport des chaleurs spécifiques, qui sera supposé constant et égal à 1.4 dans la suite ;

- les forces volumiques sont négligées :

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}; \quad (2.19)$$

- la viscosité dynamique varie avec la température selon la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = \mu_{\text{ref}} \left( \frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \frac{T_{\text{ref}} + S}{T + S}, \text{ avec } S = 110.4 \text{ K}; \quad (2.20)$$

- les viscosités dynamique et volumique sont reliées selon l'hypothèse de Stokes :

$$\mu' = -\frac{2}{3}\mu; \quad (2.21)$$

- le vecteur flux de chaleur par conduction est supposé suivre la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad (2.22)$$

avec  $\lambda = c_p \mu / Pr$  la conductivité thermique moléculaire du fluide, qui sera ici supposée indépendante de la température  $T$ .  $Pr$  est le nombre de Prandtl supposé ici environ égal à 0.72.

## 2.2 Coût de calcul de la simulation numérique directe (DNS)

La simulation numérique directe (ou DNS, *Direct Numerical Simulation*) consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes écrites à la section 2.1.4 sans aucune modélisation de la turbulence. Les erreurs se restreignent alors à celles induites par les méthodes numériques et les conditions aux limites employées. Afin de comprendre l'intérêt de modéliser tout ou partie des échelles turbulentes, une estimation du coût de calcul d'une DNS est proposée dans cette section.

Dans une DNS, l'ensemble des échelles spatiales et temporelles de l'écoulement doivent être résolues. Dans un contexte de turbulence isotrope, l'estimation de ces échelles est basée sur la théorie de Kolmogorov de 1941 (voir Kolmogorov (1991b,a) pour les traductions anglaises) qui est brièvement rappelée ci-dessous. Il est à noter que l'hypothèse de turbulence isotrope est toujours vérifiée à partir d'une certaine échelle de longueur (si le nombre de Reynolds de l'écoulement est assez élevé).

Un spectre d'énergie cinétique pour une turbulence isotrope est schématisé à la figure 2.1. Ce spectre peut être décomposé selon trois échelles de longueurs caractéristiques :

- l'échelle de longueur intégrale  $I$ , de nombre d'onde  $k_I$ , qui correspond à la taille caractéristique des plus grandes structures turbulentes. Ces structures représentent

la plus grande contribution à l'énergie cinétique fluctuante de l'écoulement, et leur taille est relativement indépendante du nombre de Reynolds (excepté dans les couches limites, comme cela sera expliqué à la section 3.3);

- l'échelle de longueur de Taylor, de nombre d'onde  $k_T$ , qui correspond à la taille caractéristique des structures affectées par la viscosité du fluide, entraînant un mécanisme de dissipation de l'énergie cinétique fluctuante sous forme de chaleur;
- l'échelle de longueur de Kolmogorov  $\eta$ , de nombre d'onde  $k_\eta$ , qui est telle que le nombre de Reynolds local de l'écoulement est unitaire. Cette échelle correspond donc aux plus petites échelles turbulentes de l'écoulement.

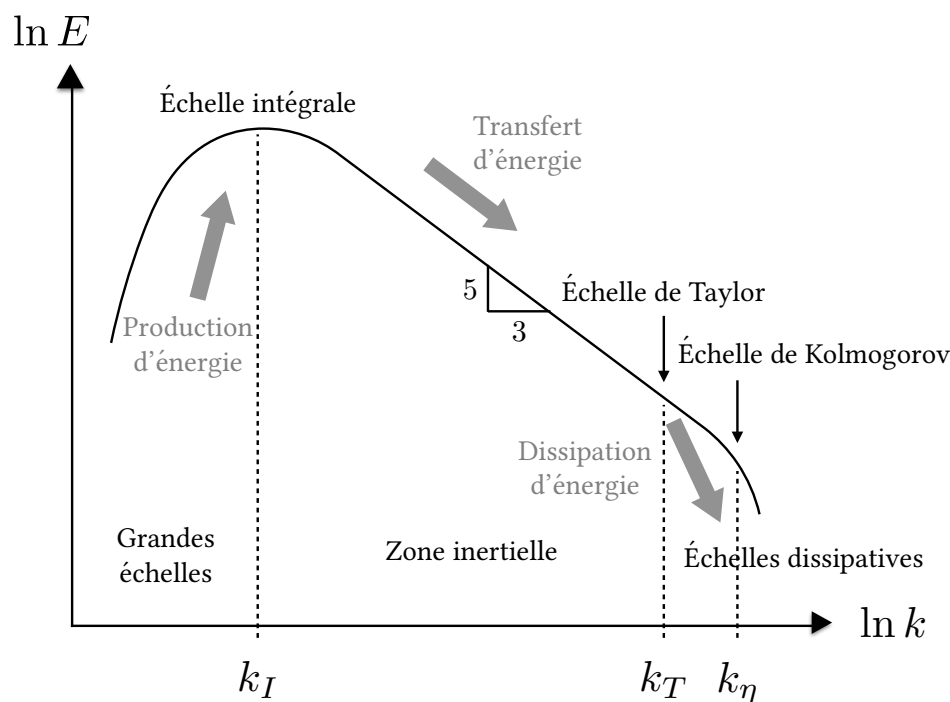


FIGURE 2.1 – Schéma du spectre de densité d'énergie cinétique  $E$  en fonction du logarithme du nombre d'onde  $k$

À partir de ces échelles de longueurs, le spectre d'énergie peut être divisé en trois régions, suivant le concept de cascade d'énergie de Richardson :

- une zone de production d'énergie (aux nombres d'onde inférieurs à  $k_I$ );
- une zone de transfert d'énergie des grandes structures vers les plus petites, aussi appelée zone inertielle. Plus le nombre de Reynolds de l'écoulement est élevé, plus la zone inertielle est étendue. Dans cette zone, située entre les échelles de longueurs intégrale et de Taylor, le spectre de densité d'énergie décroît suivant la loi de Kolmogorov (pente en  $k^{-5/3}$ , avec  $k$  le nombre d'onde);
- une zone de dissipation d'énergie des plus petites structures par effet Joule (aux nombres d'onde supérieurs à  $k_T$ ).

Une DNS doit résoudre les plus petites structures turbulentes, dont la taille est caractérisée par l'échelle de longueur de Kolmogorov. Le domaine de calcul doit également être au moins de la taille des plus grandes structures, qui sont caractérisées par l'échelle de longueur intégrale. Le rapport entre ces deux échelles permet donc d'estimer le nombre de degrés de libertés requis pour effectuer une DNS dans chaque direction de l'écoulement. Comme rappelé par Sagaut et al. (2013), ce rapport varie avec le nombre de Reynolds turbulent  $Re_I$  basé sur l'énergie cinétique totale et l'échelle de longueur intégrale selon :

$$\frac{I}{\eta} \sim Re_I^{3/4}. \quad (2.23)$$

Le nombre de degrés de libertés pour effectuer une DNS tridimensionnelle est donc de l'ordre de  $\mathcal{O}(Re_I^{9/4})$ . De plus, le nombre d'itérations temporelles d'une DNS est inversement proportionnelle à l'échelle temporelle de Kolmogorov qui varie comme  $Re_I^{-3/4}$ . En supposant également que le nombre d'opérations par itération est proportionnel au nombre de degrés de libertés, le nombre d'opérations d'une DNS est alors de l'ordre de  $\mathcal{O}(Re_I^3)$ . Comme précisé par ces derniers, cette estimation est valable pour une turbulence isotrope. Dans le cas d'une turbulence pariétale, des structures anisotropes très petites doivent être résolues et une dépendance encore plus forte au nombre de Reynolds apparaît, comme expliqué dans la suite à la section 4.1.1.

Ainsi, la DNS est aujourd'hui restreinte aux écoulements à nombre de Reynolds modéré. Par conséquent, pour simuler des écoulements à nombre de Reynolds élevé (sur des applications aéronautiques,  $Re \in [10^5 ; 10^8]$  avec  $Re$  le nombre de Reynolds basé sur les échelles caractéristiques de l'écoulement ; en général, d'après Sagaut et al. (2013),  $Re/Re_I \leq 10^{-2}$ ), il est nécessaire de modéliser tout ou partie de la turbulence. Il existe principalement deux méthodes, qui sont décrites dans les sections suivantes :

- la méthode (U)RANS, qui modélise l'ensemble des échelles turbulentes ;
- la méthode LES, qui modélise les échelles de longueurs dissipatives.

### 2.3 Description statistique des écoulements turbulents : (U)RANS

Les approches RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) et URANS (*Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes*) consistent à modéliser l'ensemble des échelles turbulentes via une approche statistique.

Les équations URANS sont déduites à partir des équations de Navier-Stokes grâce à la décomposition de Reynolds : chaque variable turbulente  $\phi$  est décomposée en un champ moyen  $\bar{\phi}$  (au sens de Reynolds, c'est-à-dire statistique) et un champ fluctuant  $\phi'$ , ainsi :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'. \quad (2.24)$$

Afin d'obtenir des équations pour les écoulements compressibles semblables à celle des

écoulements incompressibles, la moyenne de Favre est utilisée : chaque variable turbulente  $\phi$  est décomposée en un champ moyen  $\widehat{\phi}$  et un champ fluctuant  $\phi''$ , c'est-à-dire :

$$\phi = \widehat{\phi} + \phi'', \quad (2.25)$$

avec

$$\widehat{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}. \quad (2.26)$$

Il est à noter que la moyenne au sens de Favre se réduit à celle de Reynolds dès lors que les fluctuations de densité sont négligeables, comme c'est le cas pour les écoulements faiblement compressibles.

En introduisant la décomposition de Favre pour les variables  $\mathbf{u}$ ,  $E$  et  $h = e + p/\rho$  (l'enthalpie spécifique) dans les équations de Navier-Stokes (2.16), puis en prenant la moyenne au sens de Reynolds, les équations pour le champ moyen sont obtenues et s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}}) = 0, \quad (2.27a)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}} \otimes \widehat{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}_R), \quad (2.27b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho} \left( \widehat{e} + \frac{\widehat{u}_j \widehat{u}_j}{2} + k \right) \right] + \nabla \cdot \left( \bar{\rho} \left( \widehat{e} + \frac{\widehat{u}_j \widehat{u}_j}{2} + k \right) \widehat{\mathbf{u}} \right) = \nabla \cdot (-\bar{p} \widehat{\mathbf{u}} + (\widehat{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}_R) \cdot \widehat{\mathbf{u}}) - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_T), \quad (2.27c)$$

où la diffusion moléculaire et le transport d'énergie cinétique turbulente sont négligés, ainsi que les fluctuations de viscosité moléculaire. La convention d'Einstein de sommation des indices est utilisée. Par rapport aux équations de Navier-Stokes (2.16), de nouveaux termes apparaissent :

- le tenseur des contraintes de Reynolds  $\boldsymbol{\tau}_R$  défini par :

$$\tau_{R_{ij}} = -\overline{\rho u_i'' u_j''}, \quad (2.28)$$

- l'énergie cinétique turbulente :

$$k = \frac{\widehat{u_i'' u_i''}}{2} = \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2\bar{\rho}} = -\frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\tau}_R)}{2}, \quad (2.29)$$

qui est donc liée à la trace de  $\boldsymbol{\tau}_R$ ,

- le flux de chaleur turbulent  $\mathbf{q}_T$  défini par :

$$q_{T_i} = \overline{\rho u_i'' h}. \quad (2.30)$$

Afin de fermer le système d'équations (2.27), le tenseur des contraintes de Reynolds  $\boldsymbol{\tau}_R$  et le flux de chaleur turbulent  $\mathbf{q}_T$  doivent être modélisés. Par analogie avec la loi de

comportement du tenseur des contraintes visqueuses (2.10), Boussinesq (1877) propose de modéliser le tenseur des contraintes de Reynolds avec une loi de comportement basée sur une viscosité turbulente  $\mu_t$  :

$$\boldsymbol{\tau}_R = \mu_t \left( \nabla \widehat{\mathbf{u}} + (\nabla \widehat{\mathbf{u}})^t - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}}) \mathbf{1}_3 \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \mathbf{1}_3. \quad (2.31)$$

De même, par analogie avec la loi de Fourier, une loi de comportement linéaire basée sur un nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  est utilisée pour modéliser le flux de chaleur turbulent à partir du gradient de température :

$$\mathbf{q}_T = -\frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \nabla \widehat{T}. \quad (2.32)$$

Comme expliqué par Sagaut (2013), la valeur de  $Pr_t$  ainsi que son éventuelle dépendance à  $Pr$  et à la distance à la paroi sont des questions ouvertes. Dans le cadre de ces travaux,  $Pr_t$  sera supposé constant et égal à 0.9.

Le système d'équations (2.27) peut donc être fermé moyennant une relation sur la viscosité turbulente  $\mu_t$ . Cette relation est donnée par un modèle de turbulence. Il y a principalement deux types de modèles : algébrique ou à équation(s) de transport. Les modèles algébriques, comme celui de Baldwin et Lomax (1978), sont peu coûteux en temps de calcul et robuste. Néanmoins, ils ne permettent pas de prendre en compte les effets d'histoire de l'écoulement, ce qui les rend peu précis pour la simulation de couches limites soumises à de forts gradients de pression ou décollées. Ainsi, les modèles de turbulence à équation(s) de transport sont utilisés pour tenir compte du transport de l'énergie cinétique turbulente. Pour les écoulements de turbomachines, un modèle de turbulence populaire est le modèle  $k-\omega$  de Menter (1994) : une fonction de raccord permet de passer du modèle  $k-\omega$  de Wilcox (1993) près des parois au modèle  $k-\epsilon$  à l'extérieur des couches limites.  $\epsilon$  et  $\omega = \epsilon/k$  sont respectivement la dissipation turbulente et le taux de dissipation turbulente. Ainsi, le système (2.27) est complété par des équations de transport pour  $k$ ,  $\omega$  et  $\epsilon$ . Finalement, les rapports  $k/\omega$  et  $k/\epsilon$  permettent d'estimer  $\mu_t$ .

Afin de réduire le couplage entre les équations du modèle de turbulence et les équations du système (2.27), ces dernières peuvent être simplifiées en introduisant un certain découplage dans les termes convectifs. En effet, par une analyse des ordres de grandeurs des différents termes, il est possible de montrer que pour les écoulements présentant un niveau de turbulence modéré :

$$\frac{2}{3} \bar{\rho} k \ll \bar{p} \quad (2.33)$$

et

$$k \ll \widehat{e} + \frac{\widehat{u}_j \widehat{u}_j}{2}. \quad (2.34)$$

Ainsi :

$$\widehat{E} = \widehat{e} + \frac{\widehat{u}_j \widehat{u}_j}{2} = \widehat{e} + \frac{\widehat{u}_j \widehat{u}_j}{2} + k \simeq \widehat{e} + \frac{\widehat{u}_j \widehat{u}_j}{2}. \quad (2.35)$$

Le système d'équations (2.27) peut alors être approximé par un système dont les équations sont couplées au modèle de turbulence uniquement via les termes de diffusion. Par abus de langage, ce système d'équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible utilisant la moyenne de Favre est appelé système d'équations URANS dans la suite de ces travaux et est donné par :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}}) = 0, \quad (2.36a)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}} \otimes \widehat{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \left( \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu}\right) \widehat{\boldsymbol{\tau}} \right), \quad (2.36b)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \widehat{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{E} \widehat{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left( -\bar{p} \widehat{\mathbf{u}} + \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu}\right) \widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \widehat{\mathbf{u}} - \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu} \frac{Pr}{Pr_t}\right) \bar{\mathbf{q}} \right). \quad (2.36c)$$

Dans le cas d'un écoulement statistiquement stationnaire, ces équations se réduisent au système d'équations :

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}}) = 0, \quad (2.37a)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}} \otimes \widehat{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p} + \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu}\right) \nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{\tau}}, \quad (2.37b)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{E} \widehat{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left( -\bar{p} \widehat{\mathbf{u}} + \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu}\right) \widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \widehat{\mathbf{u}} - \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu} \frac{Pr}{Pr_t}\right) \bar{\mathbf{q}} \right), \quad (2.37c)$$

appelé système d'équations RANS dans la suite.

## 2.4 Simulation des Grandes Échelles : LES

La simulation des grandes échelles (ou LES, *Large-Eddy Simulation*) est une approche basée sur une séparation des échelles grâce à un filtrage spatial. Comme expliqué à la section 2.2, les grandes échelles de l'écoulement sont les plus énergétiques alors que les plus petites échelles ont un comportement plus universel. La LES tire profit de ce constat en résolvant uniquement les grandes échelles (c'est-à-dire les petits nombres d'onde) et en modélisant les petites échelles (c'est-à-dire les grands nombres d'onde).

Le filtrage spatial peut s'effectuer de manière explicite ou implicite (grâce au maillage), comme indiqué par Garnier et al. (2009). C'est la deuxième méthode qui est considérée ici et schématisée à la figure 2.2. Les effets de sous-maille sont modélisés de manière explicite, c'est-à-dire en ajoutant des termes aux équations de mouvement (les modèles de sous-maille). La fréquence de coupure spatiale  $\kappa_c$  associée est alors la fréquence de Nyquist et est directement

reliée à la taille  $\Delta$  des cellules du maillage :

$$\kappa_c = \frac{\pi}{\Delta}. \quad (2.38)$$

Les échelles spatiales de nombre d'onde inférieur à  $\kappa_c$  sont considérées comme résolues. Le nombre d'onde maximal que peut représenter le maillage est le nombre d'onde de Nyquist  $\kappa_N > \kappa_c$ . Afin de modéliser uniquement les échelles turbulentes ayant un comportement de nature universel, la fréquence de coupure est idéalement placée après l'échelle de longueur intégrale.

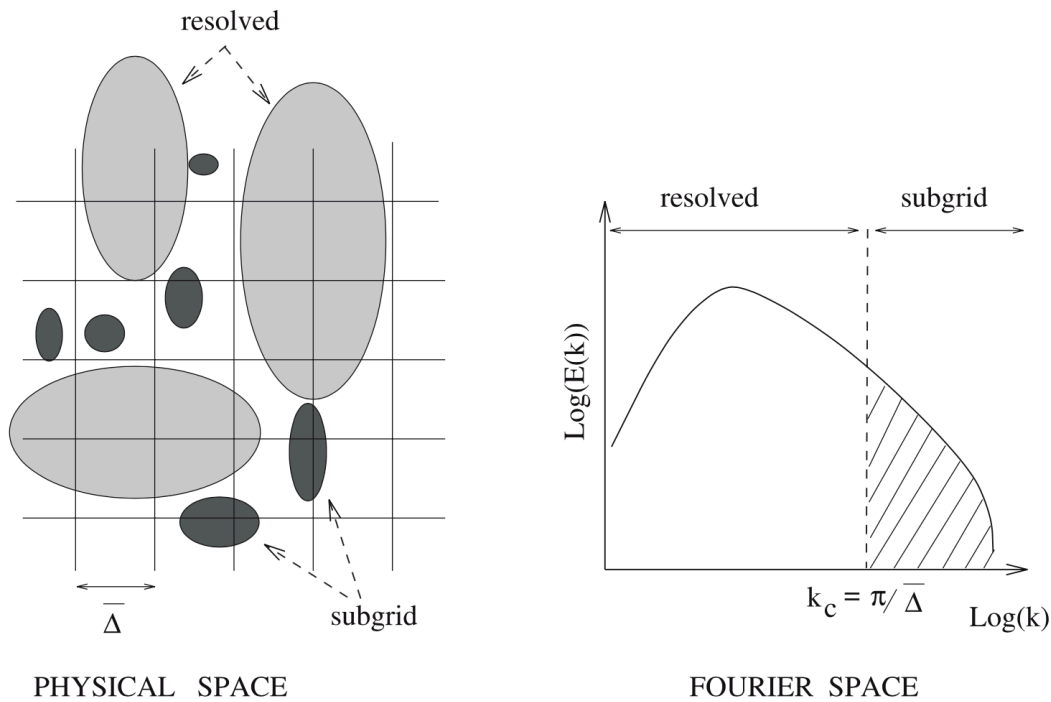


FIGURE 2.2 – Schéma du principe de séparation des échelles en LES par le maillage, d'après Sagaut (2006)

Le maillage agit alors comme un filtre passe-bas (dans le domaine spectral) : chaque variable turbulente  $\phi$  est filtrée en un champ  $\bar{\phi}$ . Il est à noter que le filtrage spatial induit également un filtrage temporel des hautes fréquences. De même que pour les équations (U)RANS, ce filtrage peut être pondéré par la masse afin de conserver un formalisme similaire aux équations de Navier-Stokes. C'est le filtrage de Favre : chaque variable turbulente  $\phi$  est décomposée en un champ de basses fréquences  $\tilde{\phi}$  et un champ de hautes fréquences  $\phi''$ , c'est-à-dire :

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'', \quad (2.39)$$

avec

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}. \quad (2.40)$$

En appliquant le filtrage spatial aux équations de Navier-Stokes (2.16), puis en introduisant le filtrage de Favre pour les variables  $\mathbf{u}$ ,  $E$  et  $h$ , les équations pour le champ filtrés sont obtenues et peuvent s'écrire (voir Garnier et al. (2009)) :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) = 0, \quad (2.41a)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}_{\text{sgs}}) + \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}), \quad (2.41b)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \nabla \cdot ((\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}) - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{q}} + c_p \mathbf{q}_{\text{sgs}} + \mathcal{J} - \mathcal{D} - (\bar{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}})), \quad (2.41c)$$

avec de nouveaux termes par rapport aux équations de Navier-Stokes (2.16) qui représentent les interactions entre les échelles de sous-maille (non-résolues) et les échelles résolues :

- le tenseur des contraintes de sous-maille  $\boldsymbol{\tau}_{\text{sgs}}$  défini par :

$$\tau_{\text{sgs},ij} = \bar{\rho}(\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j); \quad (2.42)$$

- la diffusion turbulente de l'énergie cinétique de sous-maille  $\mathcal{J}$  définie par :

$$\mathcal{J}_i = \frac{1}{2}(\bar{\rho} \widetilde{u_i u_j u_j} - \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \tilde{u}_j - \tau_{\text{sgs},jj}), \quad (2.43)$$

qui est donc liée à la trace de  $\boldsymbol{\tau}_{\text{sgs}}$  ;

- la diffusion visqueuse de sous-maille  $\mathcal{D}$  définie par :

$$\mathcal{D}_i = \overline{\tau_{ij} u_i} - \tilde{\tau}_{ij} \tilde{u}_i; \quad (2.44)$$

- le flux de température de sous-maille  $\mathbf{q}_{\text{sgs}}$  défini par :

$$q_{\text{sgs},i} = \bar{\rho}(\widetilde{u_i T} - \tilde{u}_i \tilde{T}). \quad (2.45)$$

Le flux de chaleur de sous-maille est alors donné par  $c_v \mathbf{q}_{\text{sgs}}$ .

Afin de fermer le système d'équations (2.41), ces termes doivent être modélisés.

En supposant que la cascade d'énergie des grandes échelles vers les échelles de sous-maille, décrite à la section 2.2, est similaire à la diffusion moléculaire (dont le comportement est piloté par la viscosité moléculaire et approximé par l'hypothèse de Boussinesq (1877)), le tenseur de sous-maille  $\boldsymbol{\tau}_{\text{sgs}}$  peut être modélisé avec une loi de comportement basée sur une viscosité de sous-maille  $\mu_{\text{sgs}} = \bar{\rho} \nu_{\text{sgs}}$  :

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{sgs}} = -\mu_{\text{sgs}} \left( \nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^t - \frac{2}{3} \text{Tr}(\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{1}_3 \right) + \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sgs}}) \mathbf{1}_3, \quad (2.46)$$

ce qui permet de ramener la modélisation de  $\boldsymbol{\tau}_{\text{sgs}}$  à la modélisation de sa trace et d'une viscosité de sous-maille. Cependant, en se basant sur l'étude de Erlebacher et al. (1992), il



est possible de supposer :

$$\text{Tr}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sgs}}) \ll \bar{p}, \quad (2.47)$$

et donc seule la viscosité de sous-maille importe dans la modélisation de  $\boldsymbol{\tau}_{\text{sgs}}$ .

En supposant, comme Eidson (1985), que le transfert d'énergie des échelles résolues vers les échelles de sous-maille est proportionnel au gradient de température, une loi de comportement linéaire basée sur un nombre de Prandtl de sous-maille  $Pr_{\text{sgs}}$  peut être utilisée pour modéliser le flux de température de sous-maille à partir du gradient de température :

$$\mathbf{q}_{\text{sgs}} = -\frac{\mu_{\text{sgs}}}{Pr_{\text{sgs}}} \nabla \tilde{T}, \quad (2.48)$$

ce qui permet une analogie avec la loi de Fourier.  $\lambda_{\text{sgs}} = \mu_{\text{sgs}} c_p / Pr_{\text{sgs}}$  est alors la conductivité de sous-maille. Comme expliqué par Garnier et al. (2009), en théorie  $Pr_{\text{sgs}}$  n'est pas une constante. En pratique, certaines études dont celles de Moin et al. (1991) et Li (2016) montrent que les variations de  $Pr_{\text{sgs}}$  sont négligeables et qu'il est possible de le considérer constant. Dans le cadre de ces travaux,  $Pr_{\text{sgs}}$  sera supposé constant et égal à 0.9.

Par ailleurs, il est possible de négliger les termes suivants :

- $\nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\tau}})$  (d'après Vreman et al. (1995, 1997));
- $\nabla \cdot (\bar{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}})$  (d'après Vreman et al. (1995));
- $\nabla \cdot \mathcal{D}$  (d'après Vreman et al. (1995) et Pino Martín et al. (2000));
- $\nabla \cdot \mathcal{J}$  (d'après Nagarajan et al. (2003)).

Enfin, le système d'équations (2.27) peut être approximé par un système dont les équations sont couplées à la viscosité de sous-maille uniquement via les termes de diffusion. Ce système, appelé système d'équations LES dans la suite est donné par :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) = 0, \quad (2.49a)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \left( \left( 1 + \frac{\mu_{\text{sgs}}}{\mu} \right) \tilde{\boldsymbol{\tau}} \right), \quad (2.49b)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{E} \tilde{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left( -\bar{p} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \left( 1 + \frac{\mu_{\text{sgs}}}{\mu} \frac{Pr}{Pr_{\text{sgs}}} \right) \tilde{\mathbf{q}} \right), \quad (2.49c)$$

et seule la viscosité de sous-maille  $\mu_{\text{sgs}}$  doit être modélisée, ce qui est le rôle du modèle de sous-maille.

Dans le cadre de cette étude, le modèle de sous-maille WALE (*Wall-Adapting Local Eddy-viscosity*) proposé par Nicoud et Ducros (1999) est utilisé et défini par :

$$\nu_{\text{sgs}} = \bar{\rho} \mu_{\text{sgs}} = (C_w \Delta)^2 \frac{(\mathcal{S}_{ij}^d \mathcal{S}_{ij}^d)^{3/2}}{(\tilde{\mathcal{S}}_{ij} \tilde{\mathcal{S}}_{ij})^{5/2} + (\mathcal{S}_{ij}^d \mathcal{S}_{ij}^d)^{5/4}}, \quad (2.50)$$

avec la constante  $C_w = 0.5$ ,  $\Delta$  la taille de la cellule,  $\widetilde{S}_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$  les composantes de la partie symétrique du gradient de vitesse, et

$$\mathcal{S}_{ij}^d = \frac{1}{2} (\widetilde{g}_{ik} \widetilde{g}_{kj} + \widetilde{g}_{jk} \widetilde{g}_{ki}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \widetilde{g}_{kk}^2, \quad (2.51)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et  $\widetilde{g}_{ij} = \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}$ . Ce modèle, basé sur le gradient de vitesse, respecte l'asymptote  $v_{sgs} \sim y^{+3}$  près des parois fixes sans recourir à une fonction d'amortissement (qu'il faudrait calibrer). Ainsi, la viscosité de sous-maille n'est pas surestimée dans les couches limites comme avec d'autres modèles de sous-maille. En effet, les travaux de Bocquet (2013) montrent que le modèle de sous-maille de Smagorinsky surestime la viscosité de sous-maille dans les premières rangées de cellules au-dessus de la paroi, sur une LES de canal plan avec modélisation de paroi (approche WMLES, décrite au chapitre 4). Cette surestimation entraîne alors une augmentation de l'erreur sur la prédiction du frottement pariétal.

## 2.5 Bilan : comparaison des différentes approches

Bien que les systèmes d'équations (U)RANS (2.36) et LES (2.49) soient très semblables (aux termes de viscosité turbulente et de sous-maille près), ils ont physiquement un sens très différent.

Tout d'abord, dans l'approche RANS, une solution moyenne temporelle est recherchée (c'est l'opérateur de Reynolds qui est le plus souvent choisi et qui est considéré dans le cadre de ces travaux). L'ensemble des échelles turbulentes sont modélisées. La décomposition de la solution est représentée à la figure 2.3a. Cette approche permet de diminuer considérablement le nombre de degrés de libertés puisque la turbulence n'est pas résolue. Par ailleurs, comme une solution stationnaire est cherchée, il est possible d'utiliser une avance « temporelle » implicite à grand pas de temps sans impacter la solution finale. L'approche RANS permet d'estimer avec précision des quantités moyennes, comme les performances d'une turbomachine, tant que le modèle de turbulence prédit correctement les fluctuations turbulentes. Néanmoins, il n'est pas possible d'accéder à des informations temporelles et la prédiction de phénomènes instationnaires est difficile. En outre, comme un terme de viscosité turbulente est présent, l'écoulement est pleinement turbulent et des phénomènes comme la transition laminaire-turbulent doivent également être modélisés. La modélisation RANS est donc la plus accessible (en terme de coût de calcul) au prix d'une modélisation complète de la turbulence qui conditionne fortement la qualité de la solution. Il est à noter que si l'écoulement n'est pas statistiquement stationnaire, cela peut poser des problèmes de convergence du calcul. Dans ce cas, de la dissipation (artificielle) est généralement ajoutée.

L'approche URANS vise, comme illustrée à la figure 2.3b, à résoudre uniquement les basses fréquences temporelles et l'écoulement moyen. Comme expliqué par Sagaut (2006), lorsque l'écoulement est soumis à une fréquence de forçage (comme la rotation d'une aube),

la solution des équations URANS (2.36) représente la somme de l'écoulement moyen et de la solution moyennée en phase. Les fluctuations turbulentes restent, comme en RANS, modélisées, ce qui permet de limiter le coût de calcul. L'écoulement est donc toujours pleinement turbulent et la transition à la turbulence est modélisée. Par ailleurs, lorsqu'il n'y a pas de fréquence de forçage, la nature physique de la solution reste ouverte à débat. Par exemple, l'écoulement derrière une géométrie bidimensionnelle n'est pas complètement tridimensionnelle puisqu'il n'y a pas de réelles interactions entre les termes de convection et de diffusion turbulente, comme illustré par Spalart (2009) sur l'écoulement autour d'un cylindre. Ainsi, l'approche URANS n'est pas adaptée pour prédire des phénomènes tridimensionnels fortement instationnaires.

En particulier, les approches RANS et URANS ne permettent pas de prédire l'ensemble des phénomènes instationnaires ayant lieu dans une turbomachine, comme expliqué par Gourdain et al. (2014) et présentés à la figure 2.4. L'approche RANS permet d'estimer les effets moyennés en temps des phénomènes périodiques qu'ils soient corrélés ou non avec la vitesse de rotation des aubes de rotors. L'approche URANS permet, en plus d'accéder aux variations temporelles de ces phénomènes, d'étudier certains phénomènes transitoires (comme la distorsion). En revanche, ces approches ne sont pas adaptées à la prédiction de phénomènes turbulents de nature chaotique et fortement instationnaires, tels que la transition et le décollement des couches limites. Cela s'explique par le fait qu'elles modélisent l'ensemble des échelles turbulentes. Les fluctuations turbulentes ne sont donc pas résolues.

Au contraire, l'approche LES résout les grandes échelles turbulentes énergétiques et modélise uniquement les plus petites (de nature isotrope), comme expliqué à la section 2.4. Cette approche, illustrée à la figure 2.3c, permet ainsi d'obtenir une erreur de modélisation plus faible qu'en RANS et en URANS et une plus grande prédictibilité des phénomènes physiques. Les approches RANS, URANS et LES peuvent être classées, comme à la figure 2.5, suivant leur coût de calcul et le degré de modélisation de la turbulence utilisé.

Les approches statistiques RANS et URANS de modélisation de la turbulence engendrent des limitations, notamment dans la prédiction de phénomènes instationnaires complexes tels que la transition ou les décollements. La LES est donc l'approche la plus adaptée à la prédiction des phénomènes visqueux présents dans une turbomachine (présentés au chapitre 1). Dans le chapitre 1, il a été montré que l'impact de ces phénomènes visqueux sur les performances aérodynamiques d'une turbomachine est très important. C'est pourquoi, l'utilisation d'une approche LES sur des configurations turbomachines est aujourd'hui souhaitée.

Néanmoins, le nombre de degrés de libertés nécessaire pour discrétiser l'écoulement en LES est plus important que dans les approches RANS et URANS et des pas de temps plus faibles sont requis, puisqu'une partie de la turbulence (les grandes structures) est résolue. Si loin des parois, ce coût est acceptable (même sur des configurations industrielles), ce n'est pas le cas près des parois lorsque le nombre de Reynolds de

l'écoulement est élevé car même les grandes structures y sont très petites. L'estimation de ce coût de calcul est réalisé à la section 4.1.

Dans le cadre de ces travaux, l'objectif est d'accélérer l'utilisation d'une approche LES dans un contexte industriel (en particulier sur des configurations turbomachines) en réduisant son coût de calcul près des parois. Pour répondre à cette problématique, les approches hybrides RANS-LES sont considérées. Avant de présenter ces méthodes au chapitre 4, les résultats théoriques de couche limite nécessaires à leur compréhension sont présentés dans le chapitre suivant.

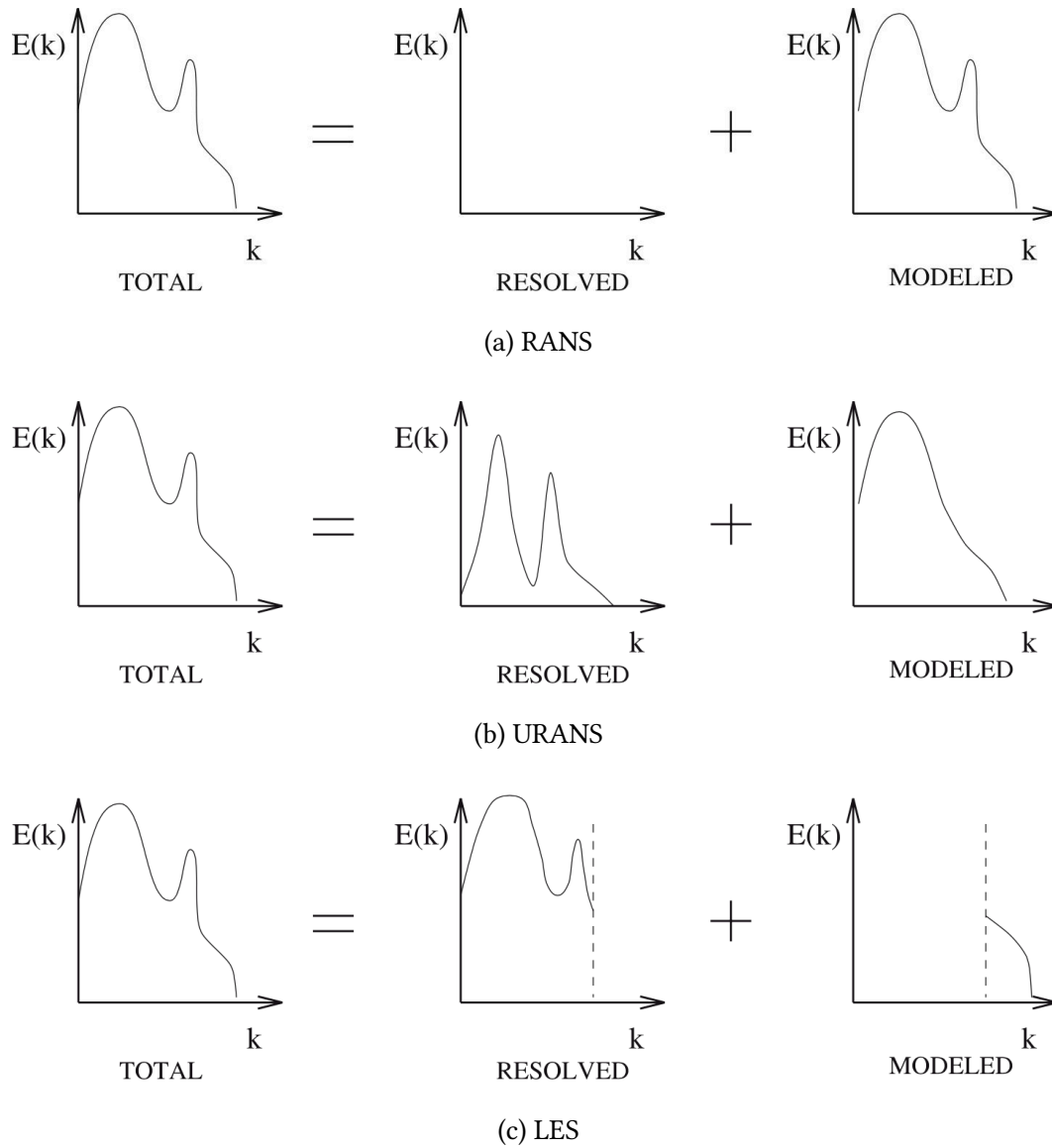


FIGURE 2.3 – Décomposition du spectre d'énergie de la solution en fonction de la modélisation turbulente choisie, d'après Sagaut (2006)

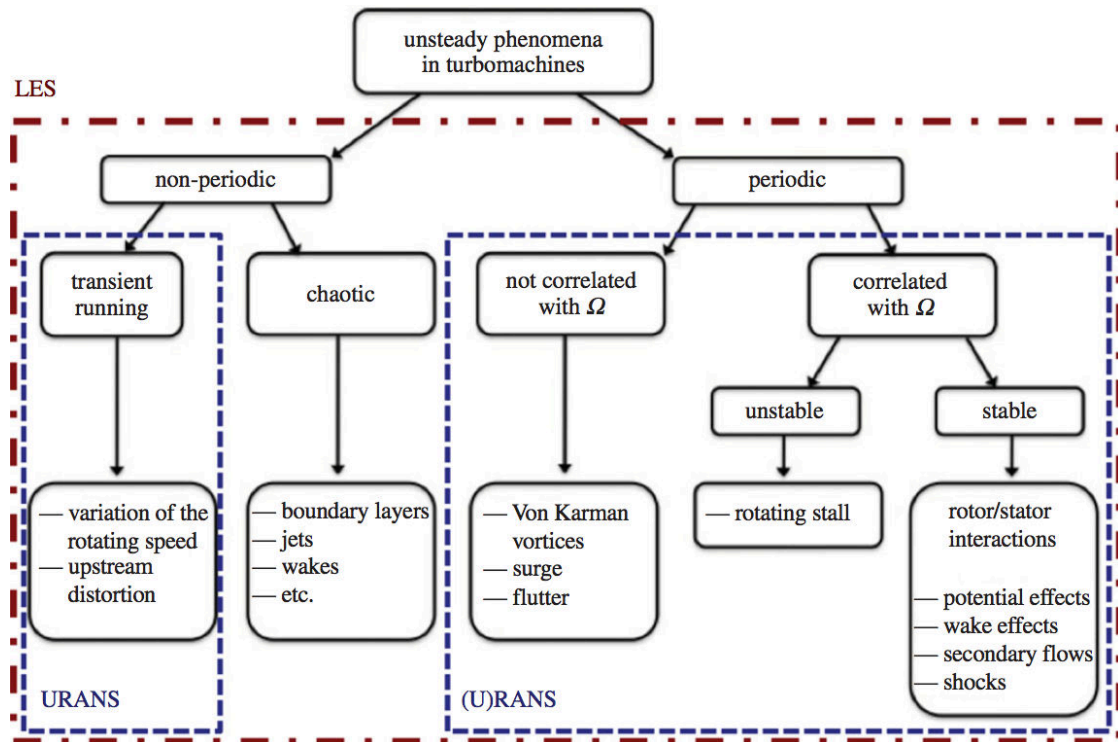


FIGURE 2.4 – Revue des phénomènes instationnaires dans une turbomachine, d’après Gourdain et al. (2014)

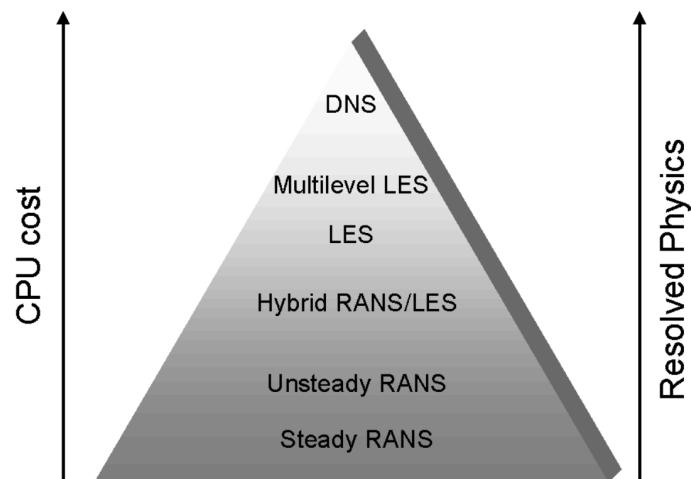


FIGURE 2.5 – Classification des principales méthodes de simulation de la turbulence, d’après Sagaut et al. (2013)



# Chapitre 3

## Turbulence pariétale

Avant de présenter les méthodes de modélisation de paroi en LES au chapitre 4, il est nécessaire de justifier leur existence. C'est pourquoi, les principaux résultats théoriques de couche limite turbulente requis à leur compréhension sont présentés. Après avoir introduit les équations de couche limite, l'un des principaux résultats de la turbulence (l'existence d'une loi logarithmique) est dérivé. Ensuite, les différentes structures turbulentes composant la couche limite sont décrites. Enfin, les effets d'un gradient de pression longitudinal, de rotation et de compressibilité sont décrits.

Dans le cadre de cette étude, seules les équations de couche limite bidimensionnelle sont considérées, puisque, comme justifié à la section 4.3.1, il est possible de ramener la modélisation de paroi à un problème bidimensionnel.

### 3.1 Équations de couche limite bidimensionnelle

Comme expliqué par Cousteix (1989), en supposant l'écoulement statistiquement bidimensionnel plan, les équations de couche limite turbulente peuvent être obtenues à partir des équations de Navier-Stokes URANS (2.36) soit par une analyse d'ordre de grandeur, soit par la méthode des développements asymptotiques raccordés. Les équations de couche limite turbulente compressible s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (3.1a)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y}, \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (3.1c)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u} \bar{\tau} - \bar{\phi})}{\partial y}, \quad (3.1d)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} r \bar{T}, \quad (3.1e)$$



avec  $\bar{H} = \bar{h} + \overline{u_i u_i}/2$  l'enthalpie totale.  $\bar{\tau}$  et  $\bar{\phi}$  sont respectivement les frottement et flux de chaleur totaux définis par :

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u' v'}, \quad (3.2)$$

$$\bar{\phi} = -\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \overline{\rho v' h'}. \quad (3.3)$$

Comme expliqué à la section 2.3, l'hypothèse de Boussinesq (1877) permet de modéliser les frottement et flux de chaleur turbulents en introduisant une viscosité turbulente  $\mu_t$  et une conductivité thermique turbulente  $\lambda_t$ , ainsi :

$$\bar{\tau} = (\bar{\mu} + \bar{\mu}_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (3.4)$$

$$\bar{\phi} = -(\bar{\lambda} + \bar{\lambda}_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}. \quad (3.5)$$

Les équations de couche limite turbulente compressible bidimensionnelle peuvent aussi s'écrire de manière équivalente :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y}, \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (3.6c)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} c_p \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} c_p \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} c_p \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}, \quad (3.6d)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} r \bar{T}, \quad (3.6e)$$

puisque  $\bar{h} = c_p \bar{T}$  d'après la deuxième loi de Joule. Il est à noter que les équations de couche limite turbulente sont formellement identiques aux équations de couche limite laminaire aux termes de frottement et flux de chaleur turbulents près.

### 3.2 Profils auto-similaires dans une couche limite turbulente incompressible bidimensionnelle sans gradient de pression

Dans cette section, l'écoulement est supposé incompressible bidimensionnel et statistiquement stationnaire (ainsi  $\bar{\rho} = \rho$ ). Le gradient de pression longitudinal est négligé. L'équation de quantité de mouvement (3.1b) selon la direction longitudinale  $x$  se réduit alors

à :

$$\underbrace{\rho\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \rho\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}}_{\text{convection}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \underbrace{\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}}_{\text{frottement laminaire}} + \underbrace{(-\rho\overline{u'v'})}_{\text{frottement turbulent}} \right] \quad (3.7)$$

La couche limite turbulente peut être décomposée en différentes zones selon la prépondérance de chaque terme et un profil de vitesse auto-similaire peut être dérivé.

### 3.2.1 Zone interne

Suffisamment près de la paroi, l'échelle de longueur caractéristique des variations normales à la paroi est très petite par rapport à l'épaisseur de couche limite. De plus, près de la paroi, l'intensité turbulente est relativement élevée et les fluctuations de vitesses turbulentes sont du même ordre de grandeur que les vitesses moyennes. Dans ce cas et lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini, l'équation (3.7) se réduit par une analyse d'ordre de grandeur à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ -\rho\overline{u'v'} + \mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right] = \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial y} = 0. \quad (3.8)$$

Par conséquent, il existe une zone près de la paroi où le frottement total est constant, donc égal au frottement pariétal  $\tau_w$  défini par :

$$\tau_w = \mu_w \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (3.9)$$

avec  $\mu_w$  la viscosité dynamique du fluide à la paroi. Cette zone, appelée zone interne de la couche limite (*inner layer*), représente environ 10% de l'épaisseur de couche limite  $\delta$  pour des écoulements à des nombres de Reynolds typiques de configurations aéronautiques, c'est-à-dire de l'ordre de  $10^6$ – $10^7$ .

Il est à noter que le frottement total est strictement constant dans la zone interne seulement dans la limite d'un nombre de Reynolds infini. Ce résultat fondamental est à la base de la justification de l'existence des lois de parois (présentées au chapitre 4) : une même échelle de vitesse caractéristique peut être définie dans la zone interne. Cette vitesse, appelée vitesse de friction, est notée  $u_\tau$  et définie par :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}, \quad (3.10)$$

avec  $\rho_w$  la densité du fluide à la paroi. À partir de cette échelle de vitesse, une échelle de longueur caractéristique de la zone interne peut être définie :

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu_w}, \quad (3.11)$$

avec  $\nu_w = \mu_w/\rho_w$  la viscosité cinématique du fluide à la paroi. Ainsi, un profil de vitesse auto-similaire dans la zone interne peut être recherché sous la forme :

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} = f(y^+). \quad (3.12)$$

Il est important de remarquer que  $y^+$  représente un nombre de Reynolds local de la couche limite. D'ailleurs, en  $y = \delta$ ,  $y^+$  est égal au nombre de Reynolds de frottement défini par :

$$\text{Re}_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu_w}. \quad (3.13)$$

La zone interne est composée de trois parties :

1. La zone linéaire (*linear sublayer*). Suffisamment près de la paroi, les termes de convection et de frottement turbulent peuvent être négligés par rapport au frottement laminaire, puisque les vitesses et leur fluctuation sont nulles à la paroi. Ainsi, l'équation (3.7) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial^2 y} = 0. \quad (3.14)$$

Le frottement laminaire est donc constant et le profil de vitesse est donné par :

$$\bar{u} = \frac{\tau_w}{\mu_w} y, \quad (3.15)$$

c'est-à-dire, en unités de parois :

$$u^+ = y^+. \quad (3.16)$$

Par conséquent, le profil de vitesse en unités de parois est linéaire. La zone linéaire est considérée s'étendre jusqu'à  $y^+ \sim 3-5$ . Même si le frottement turbulent est négligeable dans cette zone, il est important de remarquer que cette zone est traversée par des structures turbulentes ;

2. La zone inertielle (*inertial sublayer*). En s'éloignant de la zone linéaire, le frottement turbulent devient prépondérant par rapport au frottement laminaire et l'équation (3.7) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u'v'}) = 0. \quad (3.17)$$

Ainsi le frottement turbulent est constant et donné par :

$$-\rho \overline{u'v'} = \tau_w. \quad (3.18)$$

Le profil de vitesse dans la zone inertielle est formulé à la section 3.2.2. Par ailleurs, cette zone débute environ à  $y^+ \sim 50$  et s'étend jusqu'à  $y/\delta \simeq 0.1$  pour des écoulements à des nombres de Reynolds typiques d'applications aéronautiques ( $\sim 10^6-10^7$ , c'est-à-dire  $\text{Re}_\tau \sim 10^3$ );

3. La zone tampon (*buffer layer*), qui est une zone de transition entre la zone linéaire et la zone inertielle. Dans cette zone, étendue environ entre  $y^+ \sim 5$  et 50, les frottements laminaire et turbulent sont du même ordre de grandeur. Avec la zone linéaire, la zone tampon forme la sous-couche visqueuse (*viscous sublayer*).

### 3.2.2 Zone externe

En s'éloignant de la zone interne, les échelles caractéristiques de vitesse longitudinale et de longueur normale à la paroi deviennent respectivement la vitesse extérieure à la couche limite  $u_e$  et l'épaisseur de couche limite  $\delta$ . Les termes de convection et de frottement turbulent deviennent alors prépondérant par rapport au terme de frottement laminaire et l'équation (3.7) se simplifie en :

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\rho \overline{u'v'} \right). \quad (3.19)$$

De plus, comme indiqué par Cousteix (1989), l'ordre de grandeur de  $-\overline{u'v'}$  dans la zone externe est donnée par  $u_\tau^2$ . En outre, l'échelle de temps de la turbulence dans la zone externe est supposée imposée par le cisaillement  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ . Ainsi :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\delta} g'(\eta), \quad (3.20)$$

avec  $\eta = y/\delta$  et  $g'$  une fonction de l'ordre de l'unité dans la zone externe. En intégrant cette relation depuis la zone externe jusqu'à  $y = \delta$ , il vient :

$$\frac{u_e - \bar{u}}{u_\tau} = g(\eta). \quad (3.21)$$

Cette relation est appelée loi de vitesse déficitaire. Comme noté par Cousteix (1989), la fonction  $g$  n'est pas universelle et dépend de plusieurs facteurs tels que le nombre de Reynolds de l'écoulement, le gradient de pression longitudinal (supposé ici nul) ou le développement spatial de la couche limite en amont. Il est à noter que dans le cas où  $g$  est considérée universelle (c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de la distance  $\eta$ ), le profil de vitesse déficitaire (3.21) est alors auto-similaire : la couche limite est alors dite à l'équilibre.

La zone externe peut être décomposée en trois zones :

1. La zone inertielle (*inertial sublayer*), commune avec la zone interne. Il est à noter que si certains auteurs, dont Cousteix (1989), considèrent que la zone inertielle fait partie de la zone externe, ce n'est pas le cas de d'autres, comme Larsson et al. (2016).  
Comme expliqué par Cousteix (1989), le profil de vitesse dans la couche limite est décrit par deux lois complètement indépendantes (3.12) et (3.21) respectivement dans les zones interne et externe. Il existe alors une zone où ces deux lois sont simultanément valables : c'est la zone inertielle. La méthode des développements asymptotiques

raccordés permet de formuler le profil de vitesse dans cette zone. Cette méthode indique que, puisque la vitesse est continue, ses profils dans la zone interne et dans la zone externe doivent se raccorder à leur extrémité commune, c'est-à-dire lorsque  $y^+ \rightarrow \infty$  et  $\eta \rightarrow 0$ . Cette condition n'est possible que si  $Re_\tau \rightarrow \infty$ , puisque  $Re_\tau = y^+/\eta$ . Dans ce cas, le profil de vitesse doit respecter en même temps les équations (3.12) et (3.21) dans la zone de raccordement, d'où :

$$\frac{u_e}{u_\tau} - f(y^+) = g(\eta). \quad (3.22)$$

En dérivant puis en multipliant cette expression par rapport à  $\eta$  (en remarquant que  $y^+ = Re_\tau \eta$ ), il vient :

$$y^+ f'(y^+) = -\eta g'(\eta). \quad (3.23)$$

Puisque cette relation est valable pour tout  $y^+$  et pour tout  $\eta$ , et que ces deux variables sont indépendantes, chaque membre est nécessairement constant. Ainsi, en notant  $1/\kappa$  cette constante et en intégrant l'équation ci-dessus, des profils de vitesse moyenne dans les zones inertielle et de vitesse déficitaire de nature logarithmique sont obtenus :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B, \quad (3.24)$$

$$\frac{u_e - \bar{u}}{u_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln \eta + A, \quad (3.25)$$

avec  $B$  et  $A$  sont deux constantes additives.  $\kappa$  est appelée constante de Von Kármán. Contrairement à  $\kappa$  et  $B$ ,  $A$  n'est pas une constante universelle (sauf si la couche limite est à l'équilibre). En se basant sur la revue de Nagib et Chauhan (2008), il est observé numériquement et expérimentalement que  $\kappa \simeq 0.41$  et  $B \simeq 5$ . Néanmoins, comme expliqué par ces derniers, même si ces variables sont en théorie universelles, leur valeur ne l'est pas en pratique et dépend à la fois de la configuration étudiée et du nombre de Reynolds de l'écoulement. Nagib et Chauhan (2008) montrent qu'il existe tout de même une forte corrélation entre  $\kappa$  et  $B$  et proposent la relation empirique suivante :

$$\kappa B = 1.6 (\exp(0.1663B) - 1), \quad (3.26)$$

qui est vérifiée même pour des couches limites soumises à un gradient de pression longitudinal.

Par ailleurs, il est à noter que la relation logarithmique (3.24) peut également être obtenue par analyse dimensionnelle (voir par exemple Cousteix (1989));

2. Une zone de vitesse déficitaire (*deficit layer*), où le profil de vitesse est donné par l'équation (3.25). Avec la zone inertielle, la zone de vitesse déficitaire forme la zone de recouvrement logarithmique (*logarithmic layer*);
3. Une zone de sillage (*wake layer*) où le frottement total devient négligeable par rapport au terme de convection. Tout comme dans la zone de vitesse déficitaire, le profil

de vitesse n'est pas auto-similaire dans la zone de sillage. Coles (1956) propose de représenter le profil des vitesse déficitaire (3.21) dans cette zone en prenant :

$$g(\eta) = -\frac{1}{\kappa} \ln \eta + \frac{A'}{\kappa} (2 - \omega(\eta)), \quad (3.27)$$

avec  $w(\eta) = 1 - \cos(\pi\eta)$  et  $A'$  une constante non universelle.

Il est à noter qu'un profil de vitesse en puissance  $(y/\delta)^{1/7}$  est une approximation raisonnable du profil de vitesse dans la zone externe.

### 3.2.3 Bilan et profil de température

Les différentes zones composant une couche limite turbulente et l'évolution des profils de vitesse et de frottement sont respectivement synthétisées sur les figures 3.1 et 3.2.

Le profil de vitesse moyenne dans la zone interne d'une couche limite turbulente est donné par :

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{dans la zone linéaire,} \\ \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B & \text{dans la zone inertielle.} \end{cases} \quad (3.28)$$

Le raccord entre ces deux lois s'effectue en  $y^+ \simeq 11$ , selon les valeurs de  $\kappa$  et  $B$  choisies. Ce résultat fondamental de la turbulence est à la base des méthodes de modélisation de paroi (introduites en détail au chapitre 4). En effet, puisque le profil de vitesse dans la zone interne peut s'écrire sous la forme  $u^+ = f(y^+)$ , il est auto-similaire, c'est-à-dire indépendant de la zone externe de la couche limite. Cette relation est appelée loi de paroi.

Toutefois, il est important de se rappeler que ce résultat n'est valable que sous plusieurs hypothèses : l'écoulement est incompressible, bidimensionnel plan, statistiquement stationnaire et à un nombre de Reynolds infini tandis que le gradient de pression longitudinal est nul (la couche limite est donc attachée). C'est pourquoi, comme synthétisé par George (2007) et Marusic et al. (2010c, 2013), l'existence de la loi logarithmique et son universalité (vis-à-vis des constantes  $\kappa$  et  $B$ ) dans des écoulements réels restent des questions ouvertes. D'ailleurs, George (2007) observe que sur des écoulements de canal plan, jusqu'à  $Re_\tau = 2003$ , il n'existe pas de zone de frottement constant (et donc a priori de zone interne). Comme expliqué par Monkewitz et al. (2008), certains auteurs proposent alors d'utiliser une mise à l'échelle du profil de vitesse suivant une loi en puissance. Néanmoins, en étudiant plus de trois cents profils de vitesse, Monkewitz et al. (2008) observent que cette théorie s'avère moins précise que la loi logarithmique.

De plus, il n'existe pas de consensus sur le nombre de Reynolds de frottement minimal à partir duquel une loi logarithmique peut être observée. Comme rappelé par Smits et al. (2011), il existe plusieurs critères permettant d'identifier une éventuelle zone logarithmique, parmi lesquels les profils de : vitesse moyenne, de  $y^+ \partial u^+ / \partial y^+$  (qui est censé être constant et égal à  $1/\kappa$  dans la zone inertielle) ou d'énergie cinétique turbulente. En supposant que la zone inertielle débute à  $y^+ \simeq 50$  (même si, comme expliqué par Marusic et al. (2010c), plusieurs études observent des valeurs de l'ordre de  $y^+ \simeq 200$  voire 600) et s'étend jusqu'à  $y \simeq 0.1\delta$ , une condition nécessaire d'existence de la zone logarithmique est  $Re_\tau \geq 500$ , et dix fois plus pour l'observer sur une décade spatiale, c'est-à-dire  $Re_\tau \geq 5000$ .

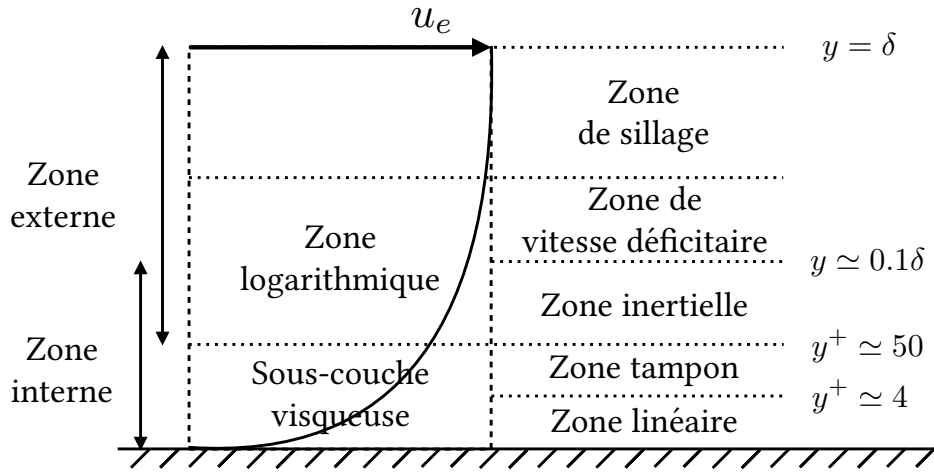


FIGURE 3.1 – Schéma des différentes zones composant une couche limite turbulente

Par ailleurs, dans le cas d'une couche limite se développant le long d'une paroi isotherme, et en suivant le même raisonnement avec l'équation d'énergie, un profil auto-similaire pour la température peut être obtenu dans la couche limite turbulente thermique :

$$T^+ = \frac{T - T_w}{T_\tau} = \begin{cases} Pr y^+ & \text{dans la zone linéaire thermique,} \\ \frac{1}{\kappa_T} \ln y^+ + B_T(Pr) & \text{dans la zone inertielle thermique,} \end{cases} \quad (3.29)$$

avec  $T_w$  et  $T_\tau$  respectivement les températures de paroi et de frottement et :

$$\kappa_T \simeq \frac{1}{2.12}, \quad (3.30)$$

$$B_T(Pr) = (3.85Pr^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln Pr, \quad (3.31)$$

deux constantes qui, comme celles du profil de vitesse, ne sont pas universelles en pratique. Il est à noter également que la constante additive  $B_T$  dépend du nombre de Prandtl. Par conséquent, le raccord entre les profils par morceaux définies dans l'équation (3.29) varie aussi avec le nombre de Prandtl. À  $Pr = 0.71$  et pour  $\kappa_T = 1/2.12$ , le raccord se fait en  $\delta_{v_T} \simeq 22$ .

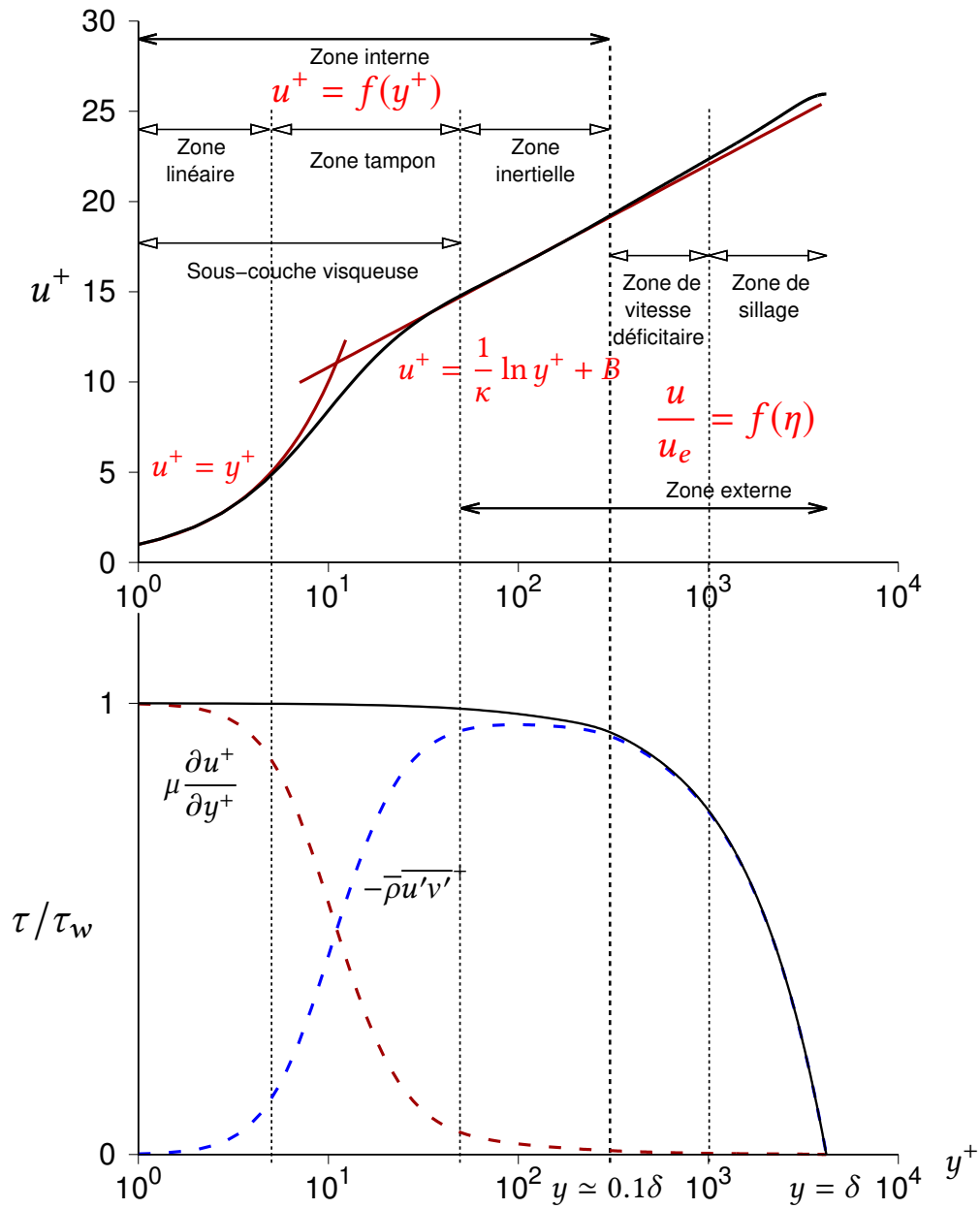


FIGURE 3.2 – Profils de vitesse et de frottement moyens dans une couche limite turbulente



### 3.3 Structures turbulentes pariétales

Une couche limite turbulente est composée de nombreuses structures cohérentes. L'objectif de cette section n'est pas de faire une revue des différentes théories associées, mais simplement d'identifier l'organisation des principales structures turbulentes pariétales, ainsi que leur éventuelle interaction, afin de justifier de la possibilité de modéliser la zone interne de la couche limite. Une revue plus détaillée de la structure d'une couche limite turbulente est proposée, par exemple, par Marusic et al. (2010c), Smits et al. (2011) ou Jiménez (2012).

Comme expliqué par Marusic et al. (2010c), les études des structures turbulentes constituant une couche limite à haut nombre de Reynolds sont relativement récentes et dues aussi bien aux développements de nouvelles méthodes expérimentales qu'à l'augmentation des moyens de calcul disponibles. De plus, il existe deux écoles selon l'existence ou non de tourbillons en forme d'épingle à cheveux ou de fer à cheval (appelés respectivement *hairpin* et *horseshoe vortices* dans la littérature). Si X. Wu et Moin (2009) observent de telles structures dans une DNS de couche limite, Marusic et al. (2010c) indiquent que cela peut être dû à des effets numériques ou à la condition aux limites d'entrée utilisée. Au contraire, Schoppa et Hussain (2002) n'observent pas de telles structures dans leur DNS. Une partie de cette dichotomie est due au fait que les définitions de ce que sont une structure cohérente ou un vortex ne sont pas évidentes.

Dans le cadre de ces travaux, il est choisi de ne pas présenter les *hairpin* ou *horseshoe vortices*. D'après Marusic et al. (2010c), il existe alors principalement trois types de structures dans une couche limite turbulente :

1. Les *streaks*;
2. Les LSM (*Large-Scale Motions*);
3. Les VLSM (*Very-Large-Scale Motions*), aussi appelés *superstructures* pour des écoulements externes.

Les *streaks* sont localisés dans la sous-couche visqueuse de la couche limite. Dans cette zone, et d'après les visualisations expérimentales de Kline et al. (1967), l'écart moyen entre deux *streaks* dans la direction transverse est d'environ 100 unités de parois. À  $y^+ = 16$ , dans un canal plan, des *streaks* faisant 1000 unités de paroi de long et 100 unités de paroi de large sont observés par Kremer et Bogey (2015) et montrés à la figure 3.3. Ces structures sont les plus petites structures composant la couche limite. Lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement augmente, leur résolution numérique implique un coût de calcul rapidement très élevé en LES. Ce coût est précisé à la section 4.1.

La zone de recouvrement logarithmique, bien qu'étant également composée de *streaks*, est principalement constituée de LSM et de VLSM, tout comme l'ensemble de la zone externe. C'est pourquoi, dans le cadre de ces travaux et comme illustré à la figure 3.2, la zone inertielle est considérée comme appartenant aussi à la zone externe. D'après les observations de Kovasznay et al. (1970), Murlis et al. (1982) et Brown et A. S. L. Thomas (1977), les LSM ont une taille de l'ordre de  $2-3\delta$  dans la direction longitudinale et d'environ  $1-1.5\delta$  dans la direction transverse. Les VLSM, observés dans toute la zone externe de la

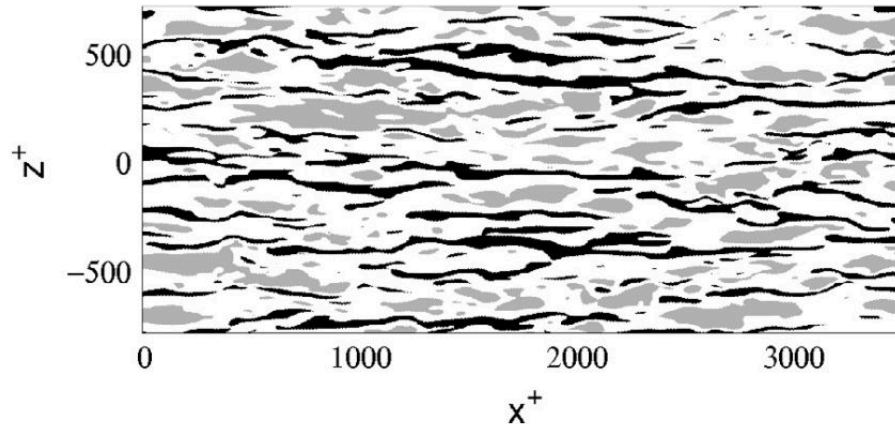


FIGURE 3.3 – Champ instantané de la fluctuation de vitesse longitudinale à  $y^+ = 16$  dans une LES de canal plan (noir :  $u < \bar{u} - u_{\text{rms}}$ , blanc :  $\bar{u} - u_{\text{rms}} < u < \bar{u} + u_{\text{rms}}$ , gris :  $u > \bar{u} + u_{\text{rms}}$ ), d'après Kremer et Bogey (2015)

couche limite par Kim et Adrian (1999), ont une taille de l'ordre de  $10\delta$  dans la direction longitudinale d'après les mesures de Hutchins et Marusic (2007). Ces grandes structures sont illustrées à la figure 3.4. De plus, selon Jiménez (2012), les structures contenues dans la zone de recouvrement logarithmique sont en accord avec le modèle de structures attachées auto-similaires de Townsend (1961) : le ratio de leur taille semble être de  $L_x \times L_y \times L_z \approx 5 \times 1 \times 2$ .

En plus de leur existence et de leur caractérisation, l'interaction entre ces structures est également un domaine de recherche actif. Il est primordial, afin de justifier d'une méthode numérique modélisant les effets de la zone interne dans une LES, que pour une couche limite à haut nombre de Reynolds :

- la formation et l'évolution des structures turbulentes de la zone externe ne dépendent pas de celles de la zone interne ;
- les structures turbulentes de la zone externe représentent la plus grande contribution à l'énergie cinétique turbulente de la couche limite.

Comme synthétisé par Larsson et al. (2016), les structures turbulentes de la zone externe (et donc de la zone de recouvrement logarithmique) peuvent être considérées indépendantes de la sous-couche visqueuse. En effet, plusieurs études numériques (comme celles de Flores et Jiménez (2006), Mizuno et Jiménez (2013) et Cossu et Y. Hwang (2017)) observent, en supprimant artificiellement les structures de la sous-couche visqueuse, que les LSM et VLSM ne sont pas impactés par l'absence de la sous-couche visqueuse et que leur formation n'est pas due à une accumulation de *streaks*. Elles sont donc autonomes et autosuffisantes. Un profil de vitesse suivant la loi logarithmique est observé et même les termes d'ordres élevés sont inchangés. Par ailleurs, Flores et al. (2007) n'observent pas de différence sur les structures de la zone externe lorsque la paroi est rugueuse.

En revanche, les grandes structures turbulentes de la zone externe impactent celles de la zone interne. En effet, d'une part, une modulation de l'amplitude des fluctuations turbulentes

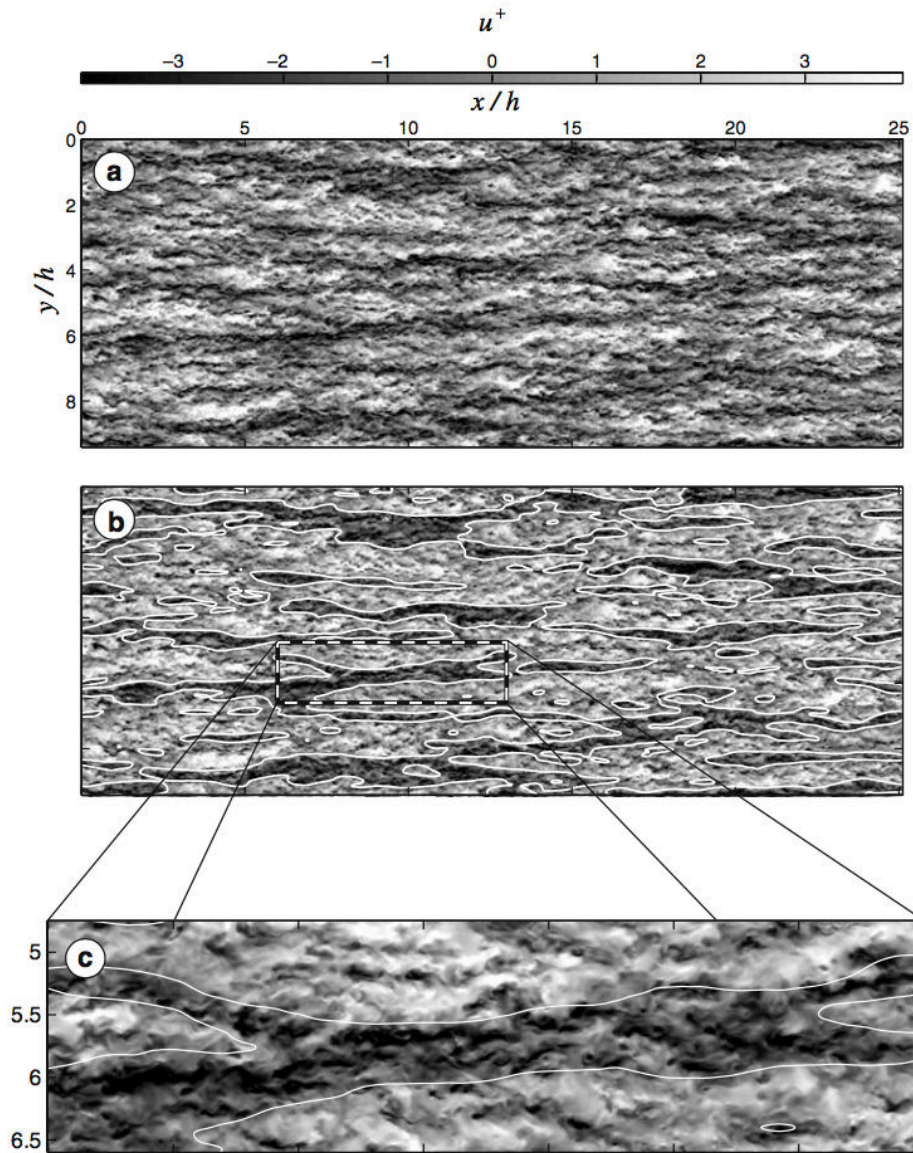


FIGURE 3.4 – (a) Champ instantané de la fluctuation de vitesse longitudinale à  $y^+ = 150$  dans une DNS de canal plan. (b) Idem après un filtre Gaussien. (c) Zoom de la région indiquée dans (b). D'après Marusic et Hutchins (2007)

de vitesses dans la zone interne est observée par Hutchins et Marusic (2007), Mathis et al. (2009) et Chung et McKeon (2010). D'autre part, comme indiqué par Smits et al. (2011) et Hutchins et Marusic (2007), les grandes structures contribuent à la production d'énergie dans la zone interne et donc à la dynamique des petites structures qui y sont présentes. Ces observations sont confirmées par l'étude numérique de Y. Hwang (2013) qui, en filtrant les grandes structures de la zone externe, observe une diminution des fluctuations turbulentes des vitesses longitudinale et transverse. Ainsi, les grandes structures de la zone externe ne sont pas simplement présentes au-dessus de la sous-couche visqueuse, mais impactent la dynamique de cette zone via un couplage principalement à sens unique (pour une couche limite à haut nombre de Reynolds).

Enfin, comme expliqué par Marusic et al. (2010a) grâce à une revue de différentes expériences, lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement augmente :

- la proportion d'énergie cinétique turbulente contenue dans la zone de recouvrement logarithmique est de plus en plus importante. D'après Smits et al. (2011), la contribution de cette zone devient prépondérante par rapport à celle de la sous-couche visqueuse à partir de  $Re_\tau \simeq 4200$ . Balakumar et Adrian (2007) estiment qu'entre 45% et 65% de l'énergie cinétique longitudinale est transportée par les VLSM (cette proportion augmentant avec le nombre de Reynolds);
- l'unidirectionnalité du couplage de la zone externe sur la zone interne est de plus en plus importante;
- le phénomène de modulation de l'amplitude des fluctuations des structures de la zone interne par celles de la zone externe est amplifié.

Il est à noter également que la contribution des structures de la zone externe au frottement turbulent est aussi de plus en plus importante lorsque le nombre de Reynolds augmente, comme expliqué par Y. Hwang (2013). Selon Balakumar et Adrian (2007), les VLSM contiennent 30% à 50% du frottement turbulent.

Par conséquent, ces résultats justifient l'existence d'approches numériques modélisant les effets de la zone interne à partir de données issues de la zone externe qui est résolue (en pratique, pour des raisons à la fois physique et numérique, il est expliqué à la section 4.2 qu'il est préférable que les données soient extraites dans la zone de recouvrement logarithmique). Plusieurs approches de ce type sont présentées au chapitre 4. Par ailleurs, il est important de remarquer que ces résultats ne sont pas valables pour des couches limites à un faible nombre de Reynolds. En effet, comme indiqué dans la revue de Robinson (1991), si l'effet de modulation de la zone externe sur la zone interne est toujours présent, la production d'énergie cinétique turbulente est principalement localisée dans la zone tampon (à  $y^+ \simeq 12$ ) et les structures turbulentes de la zone interne impactent celles de la zone externe (et contribuent même à leur formation).

### 3.4 Influence d'un gradient de pression longitudinal

Lorsqu'une couche limite est soumise à un gradient de pression longitudinal, les résultats présentés aux sections 3.2 et 3.3 ne sont en théorie plus valables. Hors, beaucoup d'écoulements industriels sont soumis à des gradients de pression. En particulier, l'écoulement dans :

- un compresseur est soumis à des gradients de pression adverse ;
- une turbine est soumis à des gradients de pression favorable.

Il est donc important de caractériser les effets de tels gradients sur une couche limite turbulente. De plus, étant donné l'objectif de ces travaux, il faut également étudier si une approche numérique modélisant les effets de la zone interne à partir de données issues de la zone externe est toujours possible lorsque la couche limite est soumise à un gradient de pression.

Dans la suite, afin d'isoler les effets de gradient de pression de ceux de courbure, seuls des cas de couche limite se développant le long d'une paroi plane sont considérés.

#### 3.4.1 Gradient de pression adverse

Lorsqu'une couche limite turbulente est soumise à un gradient de pression adverse (c'est-à-dire  $\frac{dp}{dx} > 0$ ), les vitesses dans la couche limite sont ralenties. Par rapport au cas d'un gradient de pression nul, le ratio de vitesses  $u/u_e$  et le coefficient de frottement pariétal sont diminués. Pour un gradient de pression adverse suffisamment élevé, la couche limite présente des recirculations : c'est le décollement de couche limite. Pour une couche limite bidimensionnelle, le point de décollement est défini par la position où le frottement pariétal moyen  $\bar{\tau}_w$  s'annule (et donc, de manière équivalente, la vitesse de friction  $u_\tau$ ). Cette dynamique est schématisée à la figure 3.5. De plus, comme schématisé à la figure 3.6, une couche limite est plus épaisse lorsqu'elle est soumise à un gradient de pression adverse. Dans le cadre d'une modélisation de paroi, comme justifié à la section 4.4, la priorité est donnée par la suite aux couches limites attachées.

Il est à noter que le décollement d'une couche limite laminaire soumise à un gradient de pression adverse provoque souvent une transition à la turbulence. En effet, en raison du gradient de pression adverse, les profils de vitesse présentent un point d'inflexion et l'écoulement est donc potentiellement instable vis-à-vis du théorème du point d'inflexion de Rayleigh (1880).

Il existe deux types de couches limites soumises à un gradient de pression adverse :

1. Les couches limites à l'équilibre ;
2. Les couches limites hors-équilibre.

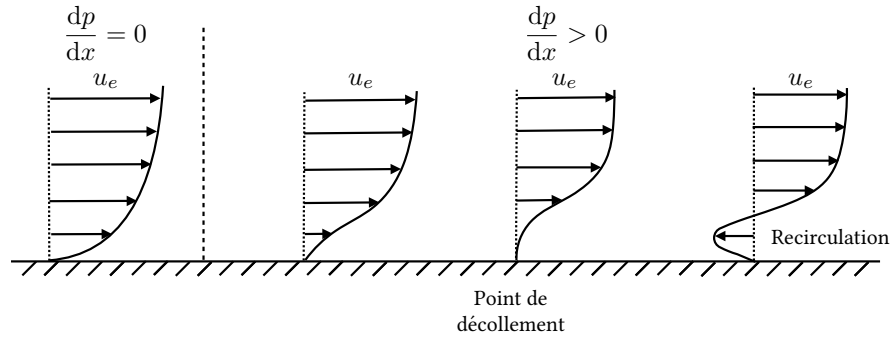


FIGURE 3.5 – Schéma de l'évolution du profil de vitesse moyenne dans une couche limite soumise à un gradient de pression adverse

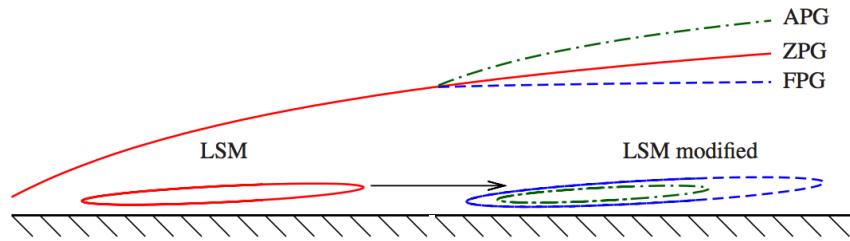


FIGURE 3.6 – Schéma d'une couche limite turbulente soumise à un gradient de pression, adapté d'Harun et al. (2013)

La notion de couche limite à l'équilibre est proposée par Clauser (1954, 1956). Ce dernier définit une couche limite à l'équilibre lorsque le paramètre de gradient de pression de Clauser,  $\beta$ , est constant;  $\beta$  étant défini par :

$$\beta = \frac{\delta^*}{\tau_w} \frac{dp}{dx}, \quad (3.32)$$

avec  $\delta^*$  l'épaisseur de déplacement. Lorsqu'une couche limite est à l'équilibre, une conséquence est d'avoir des profils de vitesses déficitaires  $(u_e - u)/u_\tau = f(y/\delta)$  auto-similaires, comme observé par Clauser (1956) et J. H. Lee (2016). D'après les théories de Townsend (1961) et Mellor et Gibson (1966), une condition suffisante pour que  $\beta$  soit constant est que la distribution de vitesse à l'extérieur de la couche limite  $u_e$  suive une loi en puissance, c'est-à-dire :

$$u_e(x) \sim x^m, \text{ avec } -\frac{1}{3} < m < 0 \quad (3.33)$$

Townsend (1961) montre également que si  $\beta$  est constant, le facteur de forme  $H = \delta^*/\theta$  est constant (avec  $\theta$  l'épaisseur de quantité de mouvement) et  $\delta^*$  varie linéairement dans la direction longitudinale de l'écoulement. Ces deux résultats sont vérifiés expérimentalement par Clauser (1954) et Skåre et Krogstad (1994). Dans la suite de cette section, l'ensemble des phénomènes décrits sont valables pour des couches limites en et hors-équilibre.

Une revue de différentes études de couche limite sur plaque plane soumise à un gradient de pression adverse est proposée au tableau 3.1. Il est observé qu'hormis les études de Spalart

et Watmuff (1993) et L. Wei et Pollard (2012) où une paroi non-glissante haute courbée permet d'imposer un gradient de pression favorable puis défavorable, seuls des cas de couche limite en équilibre sont considérés en DNS. De plus, ces DNS sont toutes à des nombres de Reynolds beaucoup plus faibles que ceux rencontrés sur des configurations aéronautiques.

Les études expérimentales permettent d'atteindre des nombres de Reynolds beaucoup plus élevés qu'en DNS. Cependant, comme expliqué à la section 3.3, l'augmentation du nombre de Reynolds dans les expériences est due à des progrès récents des moyens expérimentaux. Ces moyens sont naturellement utilisés dans un premier temps pour étudier des couches limites à haut nombre de Reynolds mais soumise à un gradient de pression nul (sans compter la difficulté d'imposer un gradient de pression). C'est pourquoi, parmi les expériences du tableau 3.1, peu d'entre elles sont à un nombre de Reynolds suffisamment élevés pour être représentatives des couches limites présentes dans des configurations aéronautiques : c'est le cas de celles de Monty et al. (2011) et Vila et al. (2017).

Par ailleurs, seuls des progrès récents permettent de mesurer le frottement pariétal sans formuler d'hypothèse sur la forme du profil de vitesse. En effet, en général, les expériences du tableau 3.1 à haut Reynolds antérieures à 2010 estiment la vitesse de friction  $u_\tau$  en utilisant la méthode de Clauser. Cette méthode, comme expliqué par T. Wei et al. (2005), consiste à déterminer  $u_\tau$  à partir des mesures du profil de vitesse  $u(y)$  et de la vitesse à l'extérieure de la couche limite  $u_e$  ainsi que de l'équation (3.24) écrite sous la forme :

$$\frac{u(y)}{u_e} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \ln\left(\frac{yu_e}{\nu}\right) + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \ln\left(\sqrt{\frac{C_f}{2}}\right) + B \sqrt{\frac{C_f}{2}}, \quad (3.34)$$

puisque le coefficient de frottement pariétal  $C_f$  est donné par  $C_f = 2(u_\tau/u_e)^2$ .  $C_f$  (et donc  $u_\tau$ ) est alors déterminé de manière à ce que la courbe correspondant au membre de droite de cette équation soit la plus proche de la courbe  $u(y)/u_e$  mesurée expérimentalement. Cela revient à supposer que la loi de paroi logarithmique (3.28) est d'une part valide et d'autre part que ses constantes  $\kappa$  et  $B$  sont universelles (ce qui n'est pas le cas en pratique, comme expliqué à la section 3.2.2). Il est donc logique que ces études expérimentales observent une résilience de la loi logarithmique (3.28) dans la zone inertielle. Dans les expériences de Nagano et al. (1998) et Houra et Nagano (2006), le faible nombre de Reynolds permet d'obtenir une sous-couche visqueuse suffisamment épaisse pour mesurer la vitesse directement dans la zone linéaire. La première étude expérimentale à haut Reynolds du tableau 3.1 mesurant la vitesse de friction indépendamment de la forme du profil de vitesse est celle de Monty et al. (2011) (issue des travaux de thèse d'Harun (2012)). Par ailleurs, il est intéressant de noter un regain d'intérêt ces dernières années pour des simulations DNS de couches limites soumises à un gradient de pression adverse.

	Configuration	$\phi_w$	État de la couche limite	$Re_\theta$	$Re_\tau$	$p^+$	$\beta$	Mesure de $u_\tau$ indépendante de la loi logarithmique
Blackwell et al. (1972)	expérience plafond courbé ( $u_e \propto x^m$ )	$\neq 0$	en équilibre (attachée)	[1718 ; 4533]	$\simeq 1000$	$\mathcal{O}(10^{-3})$	0.73 ; 1.6	Non
Orlando et al. (1974)	expérience plafond courbé ( $u_e \propto x^m$ )	$\neq 0$	en équilibre (attachée)	[2000 ; 5500]	$\leq 900$	$\mathcal{O}(10^{-2})$	$\simeq 6$	Non
Samuel et Joubert (1974)	expérience plafond courbé	$\neq 0$	hors-équilibre (attachée)	[5000 ; 30000]	$\mathcal{O}(10^4)$	.	[0.09 ; 8]	Non
Cutler et Johnston (1989)	expérience plafond courbé	0	hors-équilibre (attachée)	[12000 ; 25000]	$\mathcal{O}(10^3)$	.	[2 ; 12]	Non
Spalart et Watmuff (1993)	DNS plafond courbé	0	hors-équilibre (attachée)	[600 ; 1600]	$\leq 600$	.	[-0.3 ; 2]	-
Skåre et Krogstad (1994)	expérience plafond courbé	0	en équilibre (attachée)	[39120 ; 54000]	$\simeq 4000$	$\simeq 0.013$	[19.6 ; 21.4]	Non
Marusic et Perry (1995)	expérience plafond courbé	0	hors-équilibre (attachée)	[2206 ; 19133]	[600 ; 3000]	.	[0 ; 7.16]	Non
Nagano et al. (1998)	expérience plafond courbé	0	hors-équilibre (attachée)	[1290 ; 3350]	$\simeq 500$	[0.009 ; 0.029]	[0.77 ; 5.32]	Oui
Skote et al. (1998)	DNS $u_e \propto x^m$	0	en équilibre (attachée)	[390 ; 690]	$\simeq 200$	.	0.24 0.65	-

*Suite à la page suivante*



TABLE 3.1 – Suite de la page précédente

	Configuration	$\phi_w$	État de la couche limite	$Re_\theta$	$Re_\tau$	$p^+$	$\beta$	Mesure de $u_\tau$ indépendante de la loi logarithmique
Skote et Henningson (2002)	DNS $u_e \propto x^m$	0	en équilibre (décollée)	.	.	.	.	-
Houra et Nagano (2006) Houra et Nagano (2008)	expérience plafond courbé	$\neq 0$	hors-équilibre (attachée)	[1330 ; 2730]	$\simeq 500$	[0.009 ; 0.026]	[0.77 ; 3.95]	Oui
J.-H. Lee et Sung (2008)	DNS $u_e \propto x^m$	0	en équilibre (attachée)	[850 ; 1300] [1000 ; 1300] [1200 ; 1400]	$\simeq 400$	[0.002 ; 0.006] [0.006 ; 0.016] [0.01 ; 0.026]	0.25 0.73 1.68	-
J.-H. Lee et Sung (2009)	DNS $u_e \propto x^m$	0	en équilibre (attachée)	[1000 ; 1300] [1200 ; 1400]	$\simeq 400$	.	0.73 1.68	-
Monty et al. (2011) Harun (2012) Harun et al. (2013)	expérience plafond courbé	0	hors-équilibre (attachée)	[4300 ; 18500]	[1600 ; 3890]	.	[-0.52 ; 4.73]	Oui
Araya et Castillo (2012)	DNS plafond courbé tel que $u_e \propto x^m$	$\neq 0$	en équilibre (attachée)	[455 ; 690]	$\simeq 200$	.	.	-
L. Wei et Pollard (2012)	DNS plafond courbé	0	hors-équilibre (attachée)	.	$\leq 400$	.	[-0.47 ; 0.92]	-
Araya et Castillo (2013)	DNS plafond courbé tel que $u_e \propto x^m$	$\neq 0$	en équilibre (attachée)	[438 ; 633] [1029 ; 1512]	$\simeq 200$ $\simeq 500$	.	.	-

Suite à la page suivante

TABLE 3.1 – Suite de la page précédente

	Configuration	$\phi_w$	État de la couche limite	$Re_\theta$	$Re_\tau$	$p^+$	$\beta$	Mesure de $u_\tau$ indépendante de la loi logarithmique
A. G. Gungor et al. (2014)	DNS $v_e$ imposée	0	hors-équilibre (attachée)	[1700 ; 2200]	$\leq 200$	.	[5 ; 100]	-
A. Gungor et al. (2016)	DNS $v_e$ imposée	0	hors-équilibre (attachée)	[1003 ; 4638]	$\leq 400$	.	.	-
Kitsios et al. (2016)	DNS $v_e$ imposée	0	en équilibre (attachée)	[3500 ; 4800]	.	.	1	-
Kitsios et al. (2017)	DNS $v_e$ imposée	0	en équilibre (attachée)	[3100 ; 3440] [10000 ; 12300]	.	.	1 39	-
J. H. Lee (2016)	DNS $u_e \propto x^m$	0	en équilibre (attachée)	1605 2180 2840	364 346 318	.	0.73 2.2 9.0	-
Vila et al. (2017)	expérience plafond courbé	0	hors-équilibre (attachée)	[9070 ; 22240]	[1920 ; 4200]	[0.016 ; 0.080]	[1.3 ; 2.4]	Oui
Atkinson et al. (2018)	DNS $v_e$ imposée	0	en équilibre (attachée)	[8430 ; 12400]	$\simeq 800$	.	39	-
Yoon et al. (2018)	DNS $u_e \propto x^m$	0	en équilibre (attachée)	5400	834	.	1.45	-

TABLE 3.1 – Revue bibliographique de cas de couches limites sur plaque plane soumise à un gradient de pression adverse.  $\phi_w$  est le flux de chaleur pariétal.  $Re_\theta = u_e \theta / \nu_w$  et  $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu_w$  sont respectivement les nombres de Reynolds basés sur l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$  et sur la vitesse de friction  $u_\tau$ .  $\delta$  est l'épaisseur de couche limite.  $p^+ = \nu_w / (\rho_w u_\tau^3) dp/dx$  est le gradient de pression en unités de paroi et  $\beta = \delta^* / (\rho_w u_\tau^2) dp/dx$  est le paramètre de gradient de pression de Clauser (avec  $\delta^*$  l'épaisseur de déplacement).  $u_e$  et  $v_e$  sont respectivement les vitesses longitudinale et normale à la paroi à l'extérieures de la couche limite

Les études expérimentales de Monty et al. (2011) et Vila et al. (2017) permettent d'identifier trois effets d'un gradient de pression adverse sur le profil de vitesse exprimé en unités de paroi :

1. La zone de sillage démarre plus tôt, aux dépens de la zone inertielle (où, dans le cas d'une couche limite sans gradient de pression, la vitesse suit une loi logarithmique);
2. Le profil de vitesse moyenne est décalé sous la loi logarithmique dans la zone inertielle. D'après l'évaluation de  $y^+ du^+ / dy^+$  par Monty et al. (2011), la pente  $1/\kappa$  dans la zone inertielle semble résiliente au gradient de pression (une augmentation est observée mais suite au raccourcissement de la zone inertielle lorsque  $\beta$  augmente, des données à des nombres de Reynolds plus élevés sont requises pour statuer). Si  $1/\kappa$  est considéré constant, alors c'est la constante additive  $B$  de (3.28) qui est diminuée;
3. Le sillage dans la zone externe est renforcé.

Ces effets sont d'autant plus importants que  $\beta$  est élevé, comme illustré à la figure 3.7. Ce n'est pas le cas lorsque le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau$  augmente à  $\beta$  constant. Il est à noter que dans les DNS présentées au tableau 3.1, si ces trois effets sont également observés, le deuxième pourrait également être expliqué par des effets de faible Reynolds (comme c'est le cas pour les couches limites soumises à un gradient de pression nul).

Le profil de vitesse en unités de paroi dans la sous-couche visqueuse semble en revanche peu impacté par un gradient de pression adverse, comme indiqué par Monty et al. (2011). Toutefois, avec des valeurs de  $\beta$  beaucoup plus élevées (de plusieurs dizaines), A. Gungor et al. (2016) observent une déviation de  $u^+$  par rapport à  $y^+$ . Cependant, ce résultat est à relativiser car la couche limite étudiée par A. Gungor et al. (2016) est à un nombre de Reynolds de frottement faible. Sur une couche limite à l'équilibre avec  $\beta \simeq 39$ , Atkinson et al. (2018) continuent d'observer une asymptote  $u^+ \sim y^+$  dans la sous-couche visqueuse, même si la couche limite est à la limite du décollement (et que les définitions de  $u^+$  et  $y^+$  sont questionnables, puisque  $u_\tau \simeq 0$ ).

Un gradient de pression adverse induit également des modifications sur les structures turbulentes présentes dans la couche limite :

1. Les fluctuations turbulentes des vitesses longitudinale et normale augmentent, de manière beaucoup plus importante dans la zone externe que dans la zone interne, comme illustré sur les figures 3.7 et 3.8. Un pic de fluctuations apparaît alors dans la zone externe. Sa position s'éloigne de la paroi lorsque le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau$  augmente, mais varie très peu avec  $\beta$ . Il est important de remarquer que ce pic est bien dû à une augmentation des fluctuations turbulentes et non à une diminution de la vitesse de friction  $u_\tau$  (en raison du gradient de pression adverse).

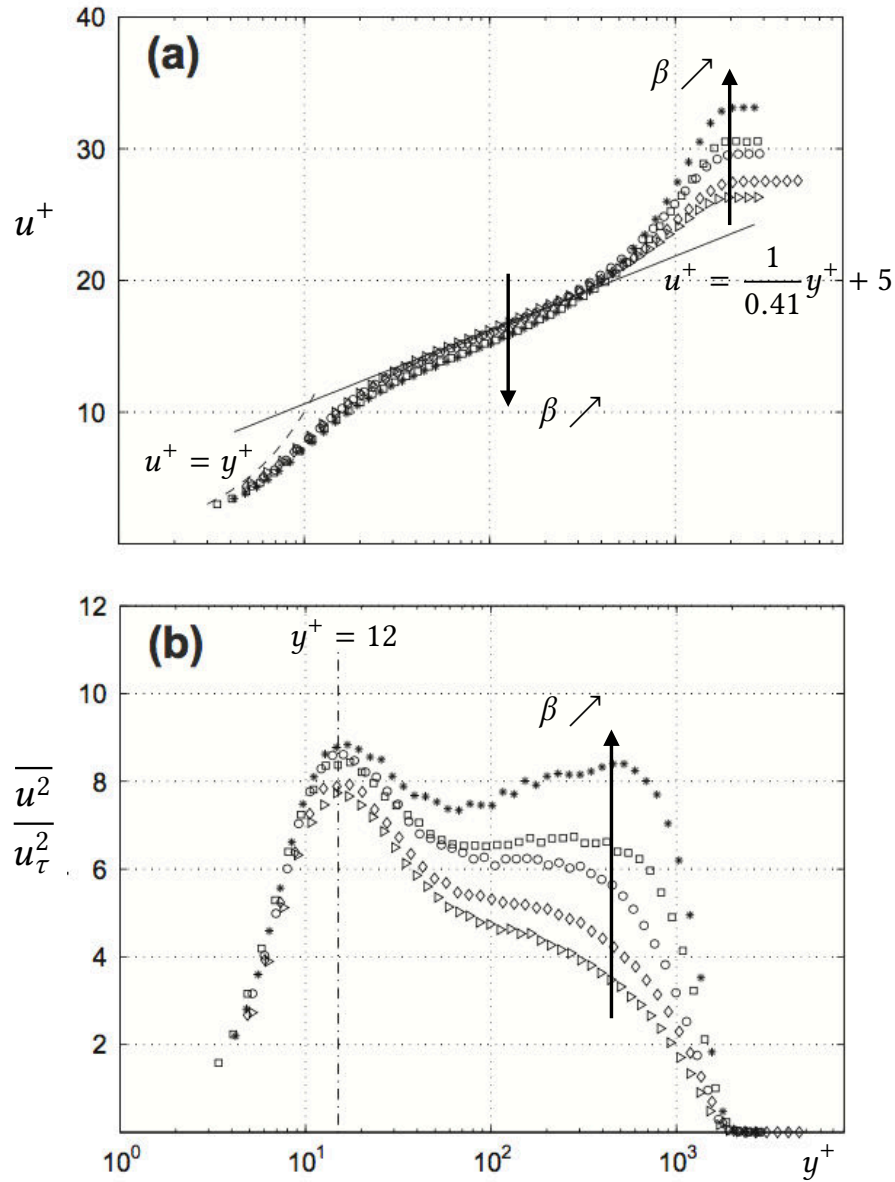


FIGURE 3.7 – Profils de vitesse moyenne (a) et de fluctuations turbulentes moyennes (b) en unités de paroi à  $Re_\tau \approx 1900$  pour des valeurs de  $\beta$  croissantes, adaptés de Monty et al. (2011)

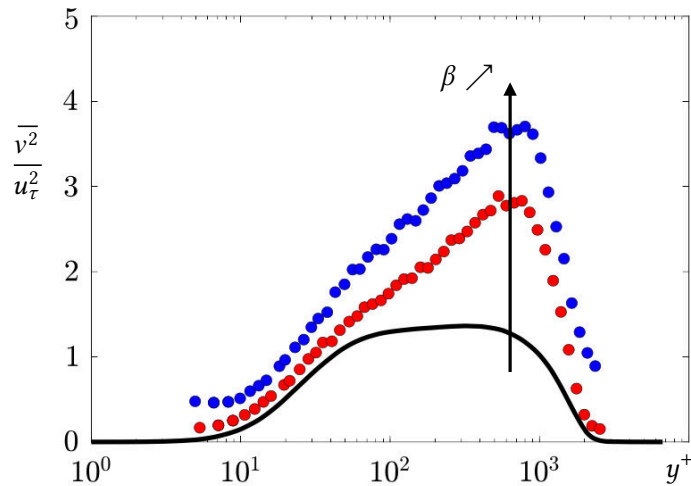


FIGURE 3.8 – Profils de fluctuations turbulentes moyennes de la vitesse normale à la paroi en unités de paroi à  $Re_\tau \simeq 1900$  pour des valeurs de  $\beta$  croissantes :  $\beta = 0$  (—),  $\beta = 1.3$  (●) et  $\beta = 2.4$  (●). Adapté de Vila et al. (2017)

En effet, en traçant les profils de fluctuations turbulentes de la vitesse longitudinale en variables externes, Harun (2012) continue d’observer un pic dans la zone externe. Pour des valeurs de  $\beta$  suffisamment élevées, le pic dans la zone externe pour les fluctuations turbulentes de la vitesse longitudinale peut notamment devenir plus important que son premier pic dans la zone interne (qui reste situé à  $y^+ \simeq 12$  et dont l’amplitude, en unités de paroi, augmente légèrement avec  $\beta$ ). En décomposant leurs profils de fluctuations de vitesse longitudinale, Monty et al. (2011) observent que l’augmentation des fluctuations est due à une hausse de l’énergie cinétique turbulente contenue dans les grandes structures (notamment les LSM) de la zone externe.

Il est à noter que sur une couche limite à un nombre de Reynolds de frottement plus faible, Yoon et al. (2018) observent également une hausse des fluctuations turbulentes de la vitesse transverse dans la zone externe et la formation d’un pic dans cette zone. Mais, contrairement aux autres vitesses, ces fluctuations sont également augmentées de manière importante dans la zone interne.

2. Le phénomène de modulation de l’amplitude des petites échelles par les grandes échelles est plus important, comme reporté par Harun et al. (2013) (pour les fluctuations de vitesse longitudinale des petites échelles) et par J. H. Lee (2016) et Yoon et al. (2018). En particulier, Yoon et al. (2018) expliquent l’augmentation des fluctuations turbulentes de la vitesse transverse dans la zone interne par le renforcement de leur modulation par les LSM.

De plus, le coefficient de dissymétrie (*skewness*) augmente, comme observé par Skäre et Krogstad (1994) et Monty et al. (2011). D’après Monty et al. (2011), cette hausse est due à l’augmentation de la quantité d’énergie contenue dans les grandes structures de

la couche limite. Et selon Marusic et al. (2010b), une dissymétrie plus élevée traduit également une modulation plus marquée de l'amplitude des petites échelles par les grandes échelles ;

3. Le frottement turbulent augmente ;
4. La contribution des LSM au frottement pariétal augmente, comme observé par Yoon et al. (2018).

Lorsque  $\beta$  augmente, c'est-à-dire lorsque l'intensité du gradient de pression adverse augmente, ces effets sont plus importants.

Ces résultats montrent que la quantité d'énergie cinétique turbulente contenue dans la zone externe devient plus importante lorsque la couche limite est soumise à un gradient de pression adverse, et représente une part plus élevée de son énergie cinétique totale. Il est important de noter que cette augmentation d'énergie dans la zone externe n'est pas causée par une modification des structures turbulentes qui y sont présentes. En effet, en obtenant des spectres d'énergies (dans la zone externe) dont les amplitudes sont augmentées mais de forme identique à ceux d'une couche limite soumise à un gradient de pression nul, Harun et al. (2013) suggèrent, comme Rahgozar et Maciel (2011) et J. H. Lee (2016), que ces modifications énergétiques ne sont pas dues à un changement de la structure des LSM, mais plutôt de leur nombre et de leur intensité. De plus, Harun et al. (2013) et Skåre et Krogstad (1994) observent que le pic du spectre d'énergie dans la zone inertielle est déplacé vers des LSM raccourcies, comme illustré à la figure 3.6. Il est à noter que l'influence accrue des LSM dans une couche limite soumise à un gradient de pression adverse est mise en évidence dès 1967 par Bradshaw.

Par ailleurs, en obtenant des spectres d'énergies dont le pic dans la zone tampon est quasiment indépendant du gradient de pression, Harun et al. (2013) expliquent que les petites structures turbulentes de la sous-couche visqueuse ne sont, à priori, pas affectées par la présence d'un gradient de pression.

En résumé, seuls des travaux expérimentaux permettent aujourd'hui d'étudier l'influence d'un gradient de pression adverse sur une couche limite hors-équilibre à haut nombre de Reynolds (même si, finalement, la plupart des effets observés dans les expériences le sont également sur les DNS de couche limite en-équilibre). Lorsqu'une couche limite est soumise à un gradient de pression adverse, l'énergie cinétique turbulente contenue dans la zone externe augmente. De plus, l'unidirectionnalité du couplage de la zone externe sur la zone interne devient plus importante. Ces changements s'opèrent sans pour autant que la forme des structures turbulentes dans la zone externe ne soit modifiée : c'est leur nombre et leur intensité qui augmentent.

Il est intéressant de noter qu'hormis l'apparition d'un deuxième pic sur les fluctuations turbulentes de vitesses et l'épaississement de la couche limite, l'impact d'un gradient de pression adverse sur une couche limite est analogue à celui d'une augmentation de son nombre de Reynolds.

Par conséquent, ces résultats justifient l'utilisation d'approches numériques (comme celle présentée au chapitre 4) modélisant les effets de la zone interne à partir des données issues de la zone externe, même pour une couche limite soumise à un gradient de pression adverse. Dans un contexte turbomachine, cela signifie que de telles approches numériques peuvent être considérées sur les écoulements présents dans les compresseurs.

Bien que dépassant le cadre de ces travaux, il est intéressant de remarquer que certaines études du tableau 3.1 considèrent un flux de chaleur non nul à la paroi afin d'étudier les effets d'un gradient de pression adverse sur le champ thermique. En particulier, ces études observent que le profil de température en unités de paroi  $T^+$  est beaucoup plus sensible à un gradient de pression adverse que le profil de vitesse, comme illustré à la figure 3.9. Le profil de  $T^+$  est décalé sous la loi logarithmique dans la zone inertielle mais ne semble pas impacté dans la sous-couche visqueuse. De plus, Araya et Castillo (2012) observent que les fluctuations de température en unités de paroi sont diminuées par rapport à une couche limite soumise à un gradient de pression nul et leur pic se rapprochent de la paroi. Ces derniers notent cependant que ces modifications s'expliquent par une forte augmentation de la température de frottement. Lorsque les fluctuations de température sont adimensionnées par la température à l'extérieur de la couche limite, le pic de fluctuations de température correspond au cas de gradient de pression le plus élevé. Toutefois, si tous ces comportements sont observés à de faibles nombres de Reynolds, des études à des nombres de Reynolds plus élevés sont nécessaires avant de conclure.

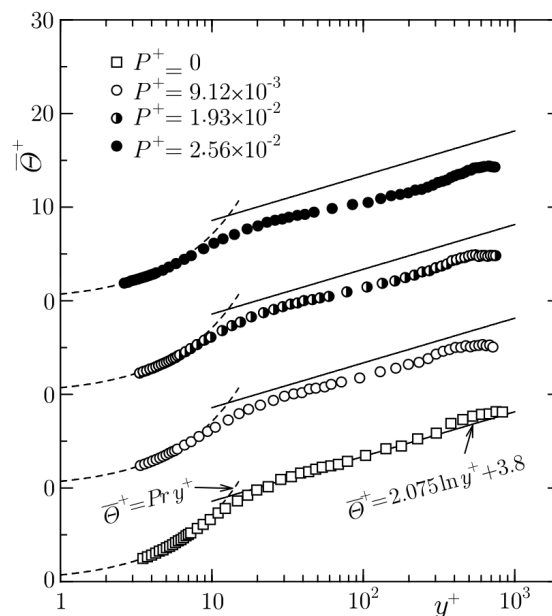


FIGURE 3.9 – Profil de température moyenne en unités de paroi  $\theta^+ = \bar{T}/T_\tau$  dans une couche limite soumise à un gradient de pression adverse, d'après Houra et Nagano (2006)

### 3.4.2 Gradient de pression favorable

Lorsqu'une couche limite turbulente est soumise à un gradient de pression favorable (c'est-à-dire  $\frac{dp}{dx} < 0$ ), les vitesses dans la couche limite sont accélérées. Comme expliqué par Cousteix (1989), par rapport au cas d'un gradient de pression nul, le ratio de vitesses  $u/u_e$  se rapproche de l'unité. Par conséquent, le facteur de forme de la couche limite diminue, le coefficient de frottement pariétal augmente et la couche limite s'amincit, comme schématisée à la figure 3.10. Pour un gradient de pression favorable suffisamment élevé, une couche limite turbulente peut relaminariser, comme expliqué par Narasimha et Sreenivasan (1973).

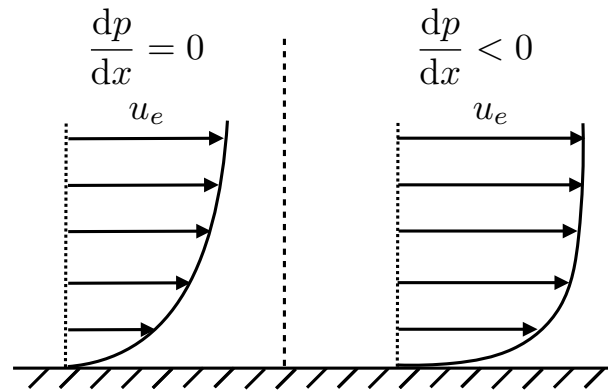


FIGURE 3.10 – Schéma de l'évolution du profil de vitesse moyenne dans une couche limite soumise à un gradient de pression favorable

Afin de caractériser l'intensité d'un gradient de pression favorable, le paramètre d'accélération  $K$  proposé par Launder (1963) peut être utilisé :

$$K = \frac{v_w}{u_e^2} \frac{du_e}{dx}. \quad (3.35)$$

D'après Narayanan et Ramjee (1969) et Jones et Launder (1972), une couche limite turbulente peut relaminariser pour des valeurs de  $K \gtrsim 3 \times 10^{-6}$ . Cependant, comme expliqué par Piomelli et Yuan (2013), une couche limite spatiale ne peut indéfiniment être soumise à un gradient de pression favorable ( $\frac{dp}{dx} < 0$  mais  $p > 0$ ). Une relaminarisation complète est donc rare, et la couche limite est plutôt dans un état quasi-laminaire, comme indiqué par Sreenivasan (1982). Lorsque le gradient de pression favorable s'arrête, l'écoulement redevient turbulent. Cette dynamique est schématisée à la figure 3.11.

Une revue d'expériences et de DNS de couche limite sur plaque plane soumise à un gradient de pression favorable est proposée au tableau 3.2. Hormis les résultats expérimentaux d'Harun (2012), l'ensemble des écoulements présentés au tableau 3.2 sont à des nombres de Reynolds relativement faibles. Ce constat s'explique, d'une part, pour les raisons présentées au section 3.4.1 et, d'autre part, par le fait qu'une couche limite s'amincit lorsqu'elle est soumise à un gradient de pression favorable. Au contraire, les hauts nombres de Reynolds atteints par Harun (2012) sont en partie dus aux faibles paramètres d'accélération imposés.



	Type	$\phi_w$	$Re_\theta$	$Re_\tau$	$K \times 10^6$
Narayanan et Ramjee (1969)	expérience	0	[140 ; 2300]	$\leq 200$	$\leq 8$
Blackwelder et Kovasznay (1972)	expérience	0	[500 ; 2500]	$\simeq 1000$	$\leq 5$
Jones et Launder (1972)	expérience	0	[276 ; 711]	$O(10^2)$	$\leq 3$
Spalart (1986)	DNS	0	$O(10^2)$	$\simeq 350$	$\leq 3$
Dixit et Ramesh (2008)	expérience	0	[393 ; 1337]	[130 ; 800]	$\leq 2.9$
Bourassa et F. O. Thomas (2009)	expérience	0	$\leq 4600$	$\simeq 1000$	$\leq 4.5$
Dixit et Ramesh (2010)	expérience	0	[223 ; 1325]	[130 ; 800]	$\leq 4.52$
Harun (2012) Harun et al. (2013)	expérience	0	[4300 ; 18500]	[1600 ; 3890]	$\leq 0.77$
Piomelli et Yuan (2013)	DNS	0	[200 ; 600]	$\simeq 200$	$\leq 8$
Araya et al. (2015)	DNS	0	[320 ; 420]	$\lesssim 300$	4
Castillo et Hussain (2017)	DNS	$\neq 0$	[320 ; 420]	$\lesssim 300$	4

TABLE 3.2 – Revue bibliographique de cas de couche limite sur plaque plane soumise à un gradient de pression favorable.  $\phi_w$  est le flux de chaleur pariétal.  $Re_\theta = u_e \theta / \nu_w$  et  $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu_w$  sont respectivement les nombres de Reynolds basés sur l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$  et sur la vitesse de friction  $u_\tau$ .  $\delta$  est l'épaisseur de couche limite.  $K = (\nu_w / u_e^2) du_e / dx$  est le paramètre d'accélération

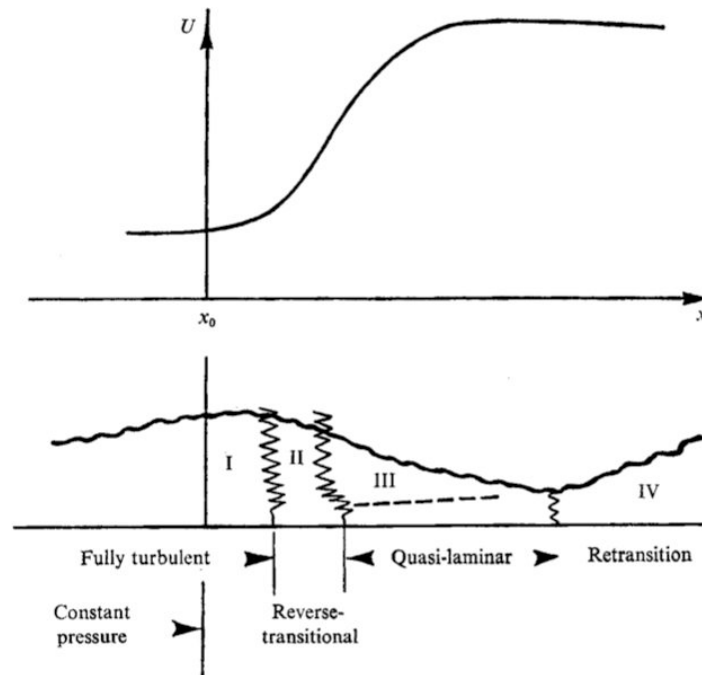


FIGURE 3.11 – Schéma de l'évolution d'une couche limite soumise à un gradient de pression favorable, d'après Narasimha et Sreenivasan (1973). ■■■ : séparation des zones interne et externe dans la région III

Lorsqu'une couche limite est soumise à un gradient de pression favorable, les profils de vitesse en unités de paroi sont modifiés. Pour des valeurs de  $K$  croissantes :

1. Le sillage diminue (Harun (2012)) jusqu'à disparaître (Dixit et Ramesh (2008), Bourassa et F. O. Thomas (2009), Dixit et Ramesh (2010), Piomelli et Yuan (2013) et Araya et al. (2015));
2. Si, pour des valeurs de  $K$  faibles ( $\sim 10^{-7}$ ), Harun (2012) observe une zone logarithmique plus étendue et une pente  $\kappa$  inchangée par rapport à une couche limite soumise à un gradient de pression nul, au contraire une zone logarithmique de plus en plus courte s'éloignant de la paroi (Dixit et Ramesh (2008) et Bourassa et F. O. Thomas (2009)) et des valeurs  $\kappa$  de plus en plus élevées (Bourassa et F. O. Thomas (2009), Araya et al. (2015) et Piomelli et Yuan (2013)) sont observées pour des valeurs de  $K$  élevées ( $\sim 10^{-6}$ ), jusqu'à ce que  $u^+$  soit quasiment constant (voir les résultats DNS à la figure 3.12);
3. La sous-couche visqueuse s'épaissit de plus en plus (Dixit et Ramesh (2008), Bourassa et F. O. Thomas (2009), Piomelli et Yuan (2013) et Araya et al. (2015)).

Par conséquent, Piomelli et Yuan (2013) et Araya et al. (2015) observent que, dans la sous-couche visqueuse, le profil  $u^+$  tend vers la solution de Blasius pour une couche limite laminaire, comme illustré à la figure 3.12.

Par ailleurs, dans la LES de Piomelli et Yuan (2013) (et en accord avec l'expérience de Warnack et Fernholz (1998) sur une couche limite axisymétrique), les deux derniers profils de vitesse, situés dans une zone où le gradient de pression redevient nul, retrouvent la loi logarithmique, comme illustré à la figure 3.12. Ce résultat montre que même après avoir été fortement accélérée jusqu'à relaminarisée, la couche limite redevient turbulente dès qu'elle n'est plus soumise à un gradient de pression favorable. Cet effet n'est toutefois pas observé sur la DNS de Piomelli et Yuan (2013). Cela peut s'expliquer soit par le plus faible nombre de Reynolds de l'écoulement, soit par les valeurs de  $K$  plus élevées imposées, ce qui, à priori, retarde la transition à la turbulence de la couche limite.

Malgré les modifications du profil de vitesse, il est intéressant de noter que Bourassa et F. O. Thomas (2009) et Piomelli et Yuan (2013) remarquent que la corrélation (3.26) entre  $\kappa$  et  $B$  reste valide.

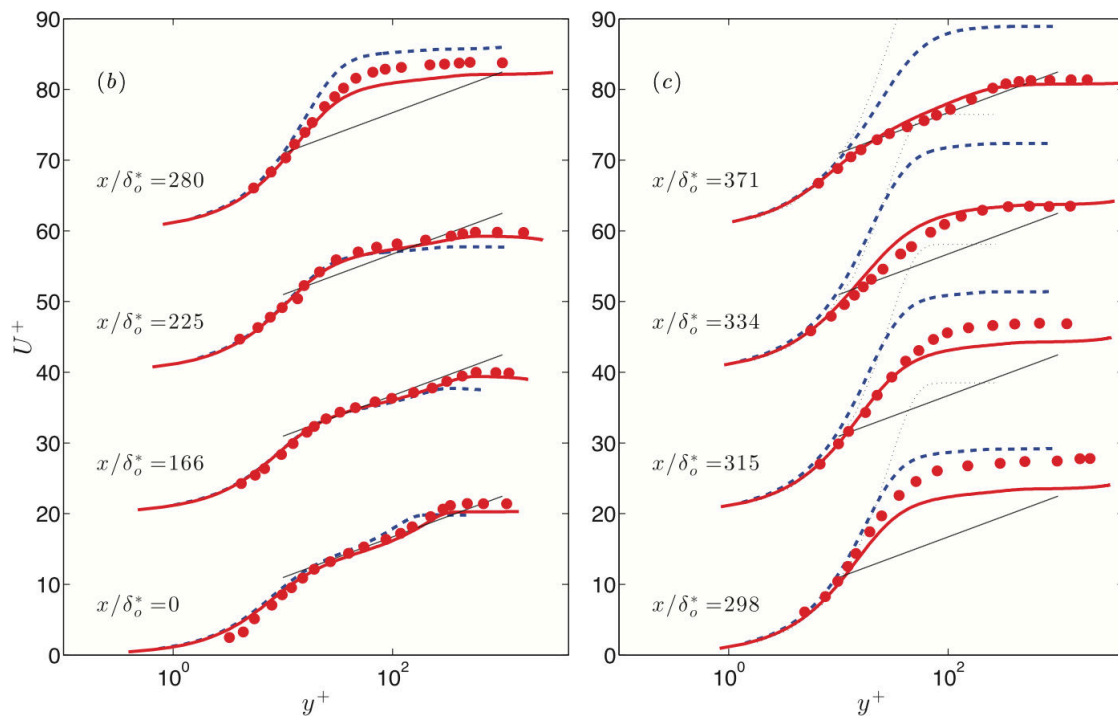


FIGURE 3.12 – Profils de vitesse en unités de paroi dans une couche limite soumise à un gradient de pression favorable, d'après Piomelli et Yuan (2013).  $\delta_o^*$  est l'épaisseur de déplacement au plan de recyclage.  $K$  est croissant pour  $x/\delta_o^* \in [50 ; 200]$ , décroissant pour  $x/\delta_o^* \in [200 ; 300]$  et nul pour  $x/\delta_o^* \geq 300$ . Chaque profil est décalé de 20 unités. DNS : ■■■ (Re $_{\theta,o}$  = 458), LES : — (Re $_{\theta,o}$  = 737), expérience de Warnack et Fernholz (1998) : ●, loi logarithmique : —, solution de Blasius (à  $\delta$  identique de la DNS) : .....

Un gradient de pression favorable induit également d'autres effets, notamment sur la turbulence pariétale :

1. Les fluctuations turbulentes de vitesses diminuent, comme montré sur la figure 3.13. Celles de la vitesse longitudinale sont réduites dans toute la couche limite, en particulier

dans la zone externe, comme observé par Bourassa et F. O. Thomas (2009) et Harun (2012). Les fluctuations turbulentes des vitesses normale et transverse diminuent également fortement et deviennent négligeables, d'après Piomelli et Yuan (2013). Bourassa et F. O. Thomas (2009) précisent toutefois que, contrairement aux fluctuations de la vitesse longitudinale, leur amplitude dans la zone interne est peu impactée.

Lorsque la couche limite a relaminarisé, Bourassa et F. O. Thomas (2009) observent que le profil de fluctuations turbulentes de la vitesse longitudinale exprimé en unités de paroi est à peu près auto-similaire. Si leur amplitude est négligeable dans la zone externe, un pic situé dans la zone interne à  $y^+ \approx 20$  subsiste, c'est-à-dire éloigné de la paroi par rapport au cas d'un gradient de pression nul. Au contraire, les profils de fluctuations des vitesses normale et transverse continuent de diminuer dans la zone externe. De plus, un pic dont l'amplitude augmente avec  $K$  se forme dans la zone interne, d'après Bourassa et F. O. Thomas (2009). La position de ce pic en unités de paroi semble constante.

Ces résultats indiquent que la quantité d'énergie cinétique turbulente dans la couche limite diminuent, comme montré à la figure 3.14. D'ailleurs, la production turbulente est réduite dans la zone externe pour des valeurs de  $K$  modestes ( $\sim 10^{-7}$ ), d'après Harun (2012), et aussi dans la zone interne pour des valeurs de  $K$  plus élevées ( $\sim 10^{-6}$ ), d'après Bourassa et F. O. Thomas (2009). La baisse d'énergie cinétique turbulente est beaucoup plus marquée dans la zone externe. La zone interne contient alors une part d'énergie cinétique turbulente de plus en plus importante. Une fois que la couche limite a relaminarisé, le profil d'énergie cinétique turbulente exprimé en unités de paroi semble auto-similaire avec un pic subsistant dans la zone interne. Une activité turbulente existe donc toujours (au moins) dans cette zone ;

2. Le phénomène de modulation de l'amplitude des petites échelles par les grandes échelles est réduit, comme reporté par Harun et al. (2013). En effet, le coefficient de dissymétrie diminue même à des valeurs de  $K$  faibles ( $\sim 10^{-7}$ ; Harun (2012)), ce qui, comme expliqué par Marusic et al. (2010b), traduit un effet moins marqué de la modulation de l'amplitude des petites échelles par les grandes échelles ;
3. Les contraintes de cisaillement diminuent (Bourassa et F. O. Thomas (2009) et Piomelli et Yuan (2013));
4. Si le coefficient de frottement pariétal augmente dans un premier temps, ce dernier diminue lorsque la couche limite relaminarise (Bourassa et F. O. Thomas (2009) et Piomelli et Yuan (2013)).

En observant une distribution spectrale de l'énergie dans la zone externe dont la forme est peu impactée par le gradient de pression favorable, Harun et al. (2013) suggèrent que ces changements énergétiques ne sont pas dus à une modification de la structure des LSM mais plutôt de leur nombre et de leur intensité. De plus, ces derniers notent que le pic de la distribution spectrale de l'énergie dans la zone inertielle est déplacé vers des LSM allongés, comme illustré à la figure 3.6. Ce résultat, obtenu à des valeurs de  $K$  faibles ( $\sim 10^{-7}$ ), est toujours observé à des valeurs de  $K$  plus élevées ( $\sim 10^{-6}$ ) par Dixit et Ramesh (2010).

En résumé, en raison de l'amincissement de la couche limite lorsqu'elle est soumise à un gradient de pression favorable, seuls des écoulements à des nombres de Reynolds relativement faibles sont considérés dans la littérature. Lorsqu'une couche limite est soumise à un gradient de pression favorable, la quantité d'énergie cinétique turbulente qu'elle contient diminue, surtout dans la zone externe. Une activité turbulente subsiste toutefois dans la zone interne, même lorsque la couche limite a relaminarisé. De plus, l'unidirectionnalité du couplage de la zone externe sur la zone interne est de moins en moins marquée.

Finale­ment, l'impact d'un gradient de pression favorable sur une couche limite est analogue à celui d'une diminution de son nombre de Reynolds. Il est toutefois important de noter que même lorsqu'elle a relaminarisé, une dynamique turbulente persiste (au moins) dans la zone interne. Une couche limite relaminarisée ne peut donc être considérée comme laminaire.

Par conséquent, ces résultats montrent que l'utilisation d'approches numériques (comme celle présentée au chapitre 4), modélisant les effets de la zone interne à partir des données issues de la zone externe, reste ouverte à débat pour une couche limite soumise à un gradient de pression favorable. Dans un contexte turbomachine, cela signifie que de telles approches numériques ne sont pas nécessairement pertinentes pour les écoulements existants dans les turbines basse pression. En effet, ils sont à un nombre de Reynolds modéré ( $\sim 10^5$  pour celui basé sur la corde d'une aube), comme indiqué par J. Tyacke et al. (2013). En revanche, toujours d'après ces derniers, le nombre de Reynolds (basé sur la corde) dans une turbine haute pression est souvent suffisamment élevé ( $\sim 10^6$ ) pour pouvoir modéliser la zone interne de leurs couches limites à partir d'informations issues de la zone externe. En outre, dans une turbine haute pression, les effets associés aux gradients de pression favorables sont compensés par les systèmes de refroidissement introduits sur les aubes qui contribuent à l'épaississement de leurs couches limites.

Bien que dépassant le cadre de ces travaux, il est à noter qu'il existe peu d'études thermiques sur des couches limites soumises à un gradient de pression favorable. À partir des travaux de Castillo et Hussain (2017), il est observé que, sous l'effet d'un gradient de pression favorable :

- le sillage du profil de température est réduit, jusqu'à disparaître, comme pour le profil de vitesse ;
- le profil de température en unités de paroi ne suit plus la loi logarithmique. Comme pour le profil de vitesse, la zone logarithmique est de plus en plus courte et éloignée de la paroi au profit de la sous-couche visqueuse (thermique) qui s'épaissit. En revanche, contrairement au profil de vitesse, la pente  $\kappa_T$  augmente. Par conséquent, le profil de température semble converger vers la solution de Blasius. Cette dynamique est illustrée à la figure 3.15 ;

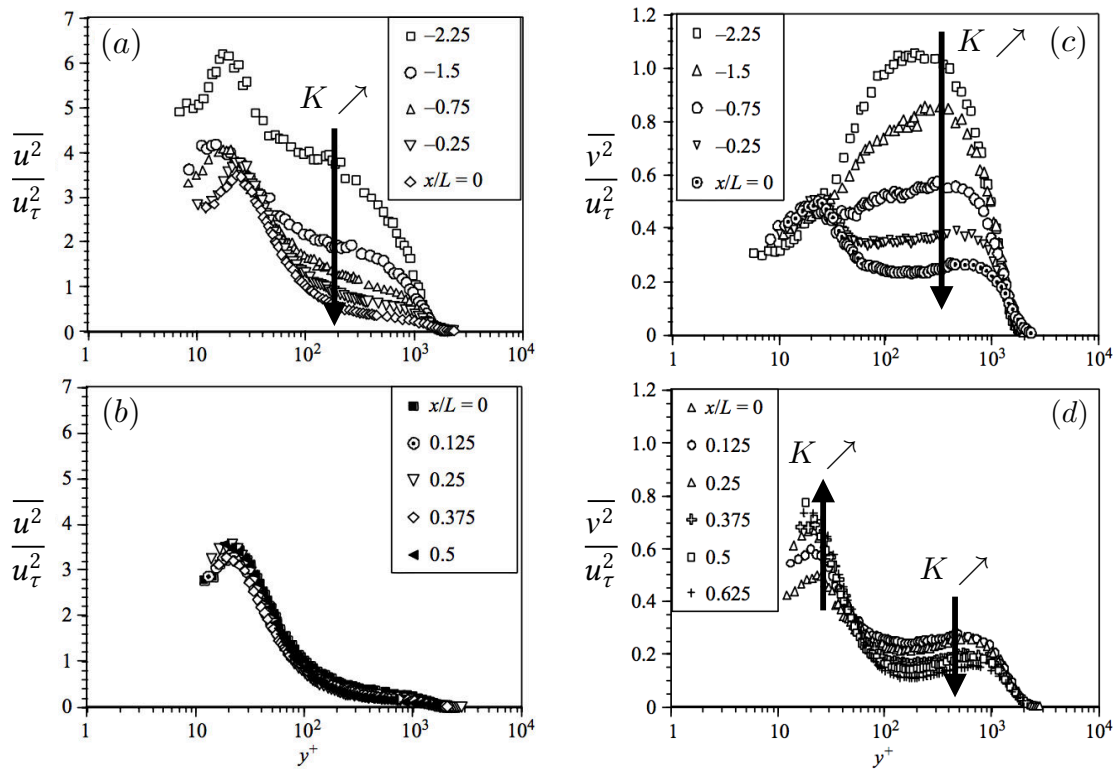


FIGURE 3.13 – Profils de fluctuations turbulentes moyennes des vitesses longitudinale ((a) et (b)) et normale à la paroi ((c) et (d)) en unités de paroi dans une couche limite soumise à un gradient de pression favorable, adaptés de Bourassa et F. O. Thomas (2009). Dans (b) et (d), la couche limite a relaminarisé

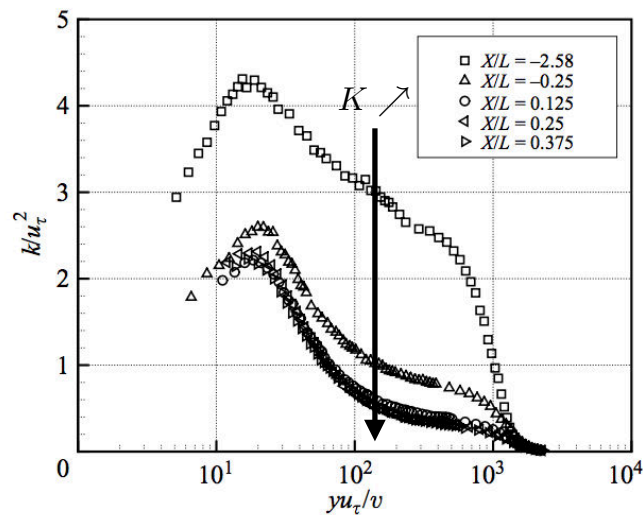


FIGURE 3.14 – Profils d'énergie cinétique turbulente moyenne  $k$  en unités de paroi dans une couche limite soumise à un gradient de pression favorable, adaptés de Bourassa et F. O. Thomas (2009). Pour  $X/L \geq 0$ , la couche limite a relaminarisé

- les fluctuations turbulentes de température sont peu impactées dans la zone linéaire mais augmentent dans la zone externe. De plus, le pic dans la zone tampon s'éloigne de la paroi, comme illustré à la figure 3.15. Ainsi, comme indiqué par Castillo et Hussain (2017), si le champ de vitesse relaminarise sous l'effet d'un gradient de pression favorable, ce n'est pas le cas du champ de température.

Cependant, il est important de remarquer qu'en raison du faible nombre de Reynolds de l'écoulement, le profil de température ne suit pas non plus la loi logarithmique (3.29) en amont de la région soumise à un gradient de pression favorable. Des résultats à des nombres de Reynolds plus élevés sont donc requis avant de pouvoir statuer sur l'influence d'un gradient de pression favorable sur le champ thermique.

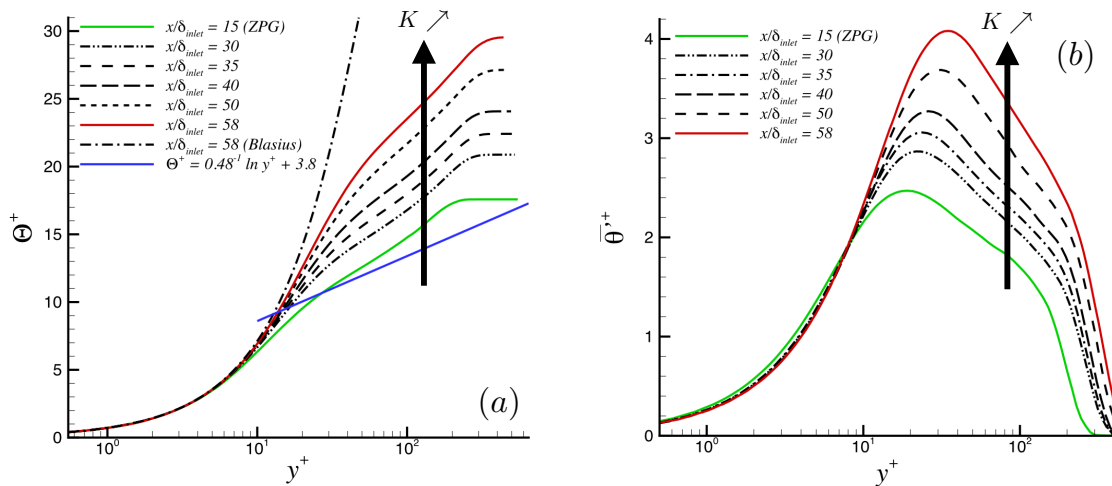


FIGURE 3.15 – Profils de température  $\Theta^+$  (a) et de fluctuations turbulentes  $\bar{\theta}'^+$  (b) moyennes en unités de paroi dans une couche limite soumise à un gradient de pression favorable, adapté de Castillo et Hussain (2017)

### 3.5 Effets de rotation

L'objectif de ces travaux étant la simulation numérique des écoulements présents dans les turbomachines, il est important d'étudier les effets de rotation (c'est-à-dire de la force de Coriolis) sur une couche limite. Hormis les DNS de J.-Y. Hwang et al. (2007) sur un cylindre en rotation, les deux principaux cas tests dans la littérature permettant d'étudier les effets de rotation sont :

1. Le cas de canal plan en rotation selon l'axe transverse ;
2. Le cas de canal circulaire en rotation selon l'axe axial.

Au regard de la finalité de ces travaux, le cas de canal circulaire est le plus pertinent, puisque l'axe de rotation correspond à la direction principale de l'écoulement. Une synthèse

des différentes données de référence disponibles pour ce cas est proposée au tableau 3.3. Il est à noter que l'ensemble des simulations disponibles ont été réalisées à l'aide de solveur incompressible. Il n'existe pas, a priori, d'étude des effets combinés de rotation et de compressibilité.

	Type	Paroi	$Re_b$	$Re_\tau$	$N$
Ould-Rouiss et al. (2010)	DNS	flux de chaleur imposé	5500	180	0–3
Satake et Kunugi (2002)	DNS	flux de chaleur imposé	5283	180	0–3
Orlandi et Fatica (1997)	DNS	adiabatique	4900	180	0–2
Reich et Beer (1989)	expérience	flux de chaleur imposé	5000–50000	-	0–5
Kikuyama et al. (1983)	expérience	adiabatique	600–50000	$\simeq 500$	0–3

TABLE 3.3 – Revue bibliographique de cas de canal circulaire en rotation selon l'axe axial.  $Re_b = u_b D / \nu$  est le nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne  $u_b$  et le diamètre  $D$  du canal.  $Re_\tau$  est le nombre de Reynolds de frottement (basé sur le rayon du canal).  $N = u_{\theta_w} / u_b$  est le nombre de rotation basé sur le ratio de la vitesse tangente à la paroi  $u_{\theta_w}$  et de la vitesse moyenne

Cependant, comme observé au tableau 3.3, il n'existe pas de données de référence numériques (c'est-à-dire de DNS) isolant les effets de rotation à un nombre de Reynolds de frottement suffisamment élevé pour valider une approche avec modélisation de paroi. En effet, comme expliqué à la section 4.2 à partir des résultats présentés aux sections 3.2 et 3.3, une modélisation de paroi n'est possible (et justifiée d'après la section 4.1) que pour des écoulements à des nombres de Reynolds élevés. D'ailleurs, sur les cas présentés au tableau 3.3, lorsque l'écoulement n'est soumis à aucune rotation, la loi de paroi logarithmique (3.28) n'est pas systématiquement vérifiée. De plus, bien que certaines des expériences montrées au tableau 3.3 soient à des nombres de Reynolds beaucoup plus élevés que les DNS aujourd'hui disponibles, elles ne proposent pas forcément de mesure dans la zone interne de la couche limite (notamment le profil  $u^+ = f(y^+)$ ). C'est pourquoi, dans le cadre de ces travaux, aucune étude spécifique des effets de rotation sur une couche limite n'est proposée.

### 3.6 Prise en compte des effets de compressibilité

Lorsque l'écoulement est compressible, les lois de parois logarithmiques (pour les profils de vitesse et de température) présentées à la section 3.2 ne sont plus valables, comme observé par Huang et Bradshaw (1995) et Coleman et al. (1995). En effet, ces lois (et l'échelle  $y^+$ ) sont formellement valables uniquement pour des écoulements incompressibles. Cependant,



ces résultats peuvent toujours être utilisés pour des écoulements compressibles grâce à l'hypothèse de Morkovin (1962) : le champ turbulent moyen d'une couche limite compressible est équivalent à celui d'une couche limite incompressible si les variations de densité sont prises en compte. Cette hypothèse a été vérifiée expérimentalement pour des nombres de Mach allant jusqu'à 10 dans le cas de parois adiabatique ou isotherme.

Un exemple d'application de l'hypothèse de Morkovin est qu'en considérant une transformation de la vitesse, un profil auto-similaire suivant la loi de paroi logarithmique (3.28) dans la zone interne d'une couche limite compressible peut être obtenu.

L'état de l'art actuel est d'utiliser la transformation de Van Driest. En utilisant une analyse d'ordre de grandeur, Rotta (1960) et Van Driest (1951) dérive un modèle de turbulence à longueur de mélange valable lorsque la viscosité laminaire est négligeable par rapport à la viscosité turbulente (donc au-dessus de la sous-couche visqueuse) :

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{\sqrt{\rho_w/\rho}}{\kappa y^+}. \quad (3.36)$$

Ainsi, les variations locales de densité sont prises en compte dans le gradient de vitesse.

En intégrant la forme différentielle de l'équation (3.36), la transformation de vitesse de Van Driest  $u_{\text{VDT}}^+$  est obtenue :

$$u_{\text{VDT}}^+ = \int_0^{u^+} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_w}} du^+, \quad (3.37)$$

et l'hypothèse de Morkovin permet d'écrire :

$$u_{\text{VDT}}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B(M_\tau, B_q). \quad (3.38)$$

Bien que souvent négligée, la dépendance de  $B$  au nombre de Mach de frottement  $M_\tau = u_\tau / \sqrt{\gamma r T_w}$  et au coefficient de flux de chaleur pariétal  $B_q = \phi_w / (\rho_w c_p u_\tau T_w)$  est précisée. De plus, il est à noter que lorsque l'écoulement est incompressible, cette relation se réduit à la loi de paroi logarithmique classique.

Plusieurs DNS de couches limites supersoniques (comme celles de Rai et al. (1995), Guarini et al. (2000), Pirozzoli et al. (2004), Pirozzoli et Bernardini (2011) et L. Wang et al. (2012)) se développant le long d'une paroi adiabatique observent que la transformation de Van Driest permet d'obtenir des profils de vitesses moyennes  $u_{\text{VDT}}^+$  auto-similaires dans la zone inertielle et suivant un profil logarithmique. Les mêmes conclusions sont observées pour des couches limites hypersoniques allant jusqu'à des nombres de Mach de 20, comme celles de Maeder et al. (2001), Pino Martín (2007), Duan et al. (2010) et Lagha et al. (2011).

Dans toutes ces DNS, il est également observé que la transformée de Van Driest  $u_{\text{VDT}}^+$  suit une loi linéaire dans la zone linéaire (et est donc auto-similaire) bien que la relation (3.36)

ne soit pas valable dans cette zone. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que près d'une paroi adiabatique, le rapport de densités  $\rho_w/\rho$  est proche de l'unité. Ainsi, il est possible en pratique d'écrire que :

$$u_{\text{VDT}}^+ = \begin{cases} y^+ & \text{dans la zone linéaire,} \\ \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B(M_\tau, B_q) & \text{dans la zone inertielle.} \end{cases} \quad (3.39)$$

C'est pourquoi certains auteurs, dont Bocquet et al. (2012), supposent que la transformée de Van Driest  $u_{\text{VDT}}^+$  suit la loi de Reichardt (1951) qui permet de lisser le profil par morceaux (3.28) :

$$u_{\text{VDT}}^+ \simeq \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + \left( B - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa \right) \left( 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{\delta_v}\right) - \frac{y^+}{\delta_v} \exp\left(-\frac{y^+}{C}\right) \right), \quad (3.40)$$

avec  $\delta_v = 11.13$  et  $C = 3$ .

Par ailleurs, il est possible de dériver une loi de paroi à partir de la relation (3.40), comme effectué par plusieurs auteurs dont Rotta (1960) et Huang et Coleman (1994). Cette loi de paroi est présentée au tableau 4.2.



# Chapitre 4

## Modélisation de la turbulence pariétale en LES

Les résultats du chapitre précédent justifient l'existence d'approches numériques modélisant la zone interne de la couche limite à partir de données issues de la zone externe. De telles approches sont présentées ici et correspondent à des méthodes hybrides RANS-LES. Tout d'abord, leur intérêt est démontré à travers l'estimation du coût de résolution d'une couche limite turbulente attachée en LES. Puis, la méthode de modélisation de paroi considérée dans le cadre de ces travaux (la WMLES, *Wall-Modeled Large-Eddy Simulation*) est présentée : son principe, les sources d'erreurs potentielles liées à son utilisation et son domaine d'application sont étudiés. Enfin, une autre classe de méthodes hybrides RANS-LES (les méthodes DES, *Detached-Eddy Simulation*) est présentée et comparée à la WMLES.

### 4.1 Coût de calcul d'une couche limite turbulente attachée incompressible en LES

Comme expliqué à la section 2.4, l'approche LES consiste à résoudre les grandes échelles de l'écoulement, qui contiennent le plus d'énergie, et à modéliser les plus petites. Étant donné que les structures cohérentes les plus énergétiques constituant une couche limite ont été identifiées à la section 3.3, il est possible d'estimer le coût de résolution numérique d'une couche limite turbulente attachée incompressible soumise à un gradient de pression nul se développant le long d'une paroi plane en LES.

La première estimation de ce coût est proposée par Chapman (1979). Une estimation plus récente est proposée par Choi et Moin (2012) et diffère de celle de Chapman (1979) par le fait que :

- une corrélation plus précise du coefficient de frottement pariétal pour les écoulements à haut nombre de Reynolds ( $Re_x \gtrsim 10^6$ ) est utilisée.  $Re_x = u_e x / \nu$  est le nombre de Reynolds basé sur la distance au bord d'attaque de la paroi, avec  $u_e$  la vitesse à l'extérieur de la couche limite ;

- l'évolution spatiale de l'épaisseur de couche limite est prise en compte pour estimer le coût de calcul dans la zone externe, alors que Chapman (1979) considère l'épaisseur de couche limite moyenne  $\bar{\delta} = 1/L_x \int_0^{L_x} \delta(x) dx$ , avec  $L_x$  la longueur de la plaque.

C'est pourquoi, dans la suite de cette section, le raisonnement de Choi et Moin (2012) est repris. La couche limite considérée se développe le long d'une paroi plane de longueur  $L_x$  et de largeur  $L_z$ . De plus, l'écoulement est supposé incompressible.

La corrélation considérée par Choi et Moin (2012) est :

$$C_f = 0.020 \text{Re}_\delta^{-1/6}, \quad (4.1)$$

avec  $C_f = 2\tau_w/(\rho u_e^2)$  le coefficient de frottement pariétal et  $\text{Re}_\delta = u_e \delta / \nu$ . En supposant, comme Chapman (1979), que le profil de vitesse dans la couche limite turbulente suit une loi en puissance  $1/7$  (qui, comme rappelé dans la section 3.2.2, est une approximation raisonnable dans la zone externe ; de plus, à haut nombre de Reynolds, l'épaisseur de la zone interne devient négligeable par rapport à celle de la zone externe), l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$  est donnée par :

$$\theta = \frac{7}{72} \delta. \quad (4.2)$$

En utilisant les équations (4.1) et (4.2), ainsi que  $C_f = 2 \frac{d\theta}{dx}$  (équation intégrale de von Kármán pour une couche limite soumise à un gradient de pression nul), les corrélations suivantes sont obtenues :

$$\frac{\delta}{x} = 0.16 \text{Re}_x^{-1/7}, \quad (4.3)$$

et

$$C_f = 0.027 \text{Re}_x^{-1/7}. \quad (4.4)$$

Il est à noter que le raisonnement suivi ci-dessus pour dériver les corrélations (4.3) et (4.4) est identique à celui de Chapman (1979), sauf que ce dernier considère la corrélation :

$$C_f = 0.045 \text{Re}_\delta^{-1/4}, \quad (4.5)$$

qui est valable pour  $\text{Re}_x \lesssim 10^6$ , et obtient donc :

$$\frac{\delta}{x} = 0.37 \text{Re}_x^{-1/5}, \quad (4.6)$$

et

$$C_f = 0.0577 \text{Re}_x^{-1/5}. \quad (4.7)$$

Dans la suite de cette section, la position longitudinale à partir de laquelle les corrélations données ci-dessus sont valables est notée  $x_0$ .

### 4.1.1 Zone interne

Dans la zone interne, le raisonnement suivi par Choi et Moin (2012) est identique à celui de Chapman (1979). L'idée est d'estimer le nombre de points requis pour discrétiser les structures turbulentes contenues dans une cellule élémentaire localisée dans la sous-couche visqueuse de la couche limite, puis de l'intégrer dans toute la couche limite.

Soit un domaine élémentaire de dimensions  $\delta x \times l_y \times \delta z$  situé dans la sous-couche visqueuse (dont la hauteur en unités de paroi est d'environ 50) de la couche limite en aval de  $x_0$ , avec  $l_y^+ = l_y u_\tau / \nu \simeq 50$ . Soit  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  les nombres de points contenus dans ce domaine respectivement dans les directions longitudinale, normale à la paroi et transverse. En notant  $\Delta x = \delta x / n_x$  et  $\Delta z = \delta z / n_z$  les discrétisations moyennes dans les directions longitudinale et transverse, la densité volumique  $\delta N$  de points de maillages contenus dans ce domaine est :

$$\delta N = \frac{n_x n_y n_z}{\delta x l_y \delta z} = \frac{n_y}{\Delta x l_y \Delta z}. \quad (4.8)$$

Le nombre de points en aval de  $x_0$  contenu dans la zone interne de la couche limite  $N_{\text{inner}}(x \geq x_0)$  est alors obtenu en intégrant cette équation :

$$N_{\text{inner}}(x \geq x_0) = \int_{x_0}^{L_x} \int_0^{L_z} \int_0^{L_{\text{inner}}} \delta N \, dx \, dy \, dz, \quad (4.9)$$

avec  $L_{\text{inner}}(x)$  la hauteur de la zone interne. En supposant, comme Chapman (1979), que le maillage dans la zone interne est composé de blocs selon la hauteur et qu'à chaque bloc,  $\Delta x$  et  $\Delta z$  sont constants et doublés par rapport au bloc situé en-dessous (le maillage est donc non coïncident), il est possible d'écrire :

$$\int_0^{L_{\text{inner}}} \delta N \, dy \simeq \frac{4}{3} \frac{n_y}{\Delta x_w \Delta z_w}, \quad (4.10)$$

avec  $\Delta x_w$  et  $\Delta z_w$  les valeurs respectives de  $\Delta x$  et  $\Delta z$  dans le premier bloc (adjacent à la paroi). Le facteur  $4/3$  tient compte du déraffinement dans les directions longitudinale et transverse ainsi que des points situés entre  $l_y$  et  $L_{\text{inner}}$ . Il est à noter que si un maillage coïncident est considéré, le facteur serait plus élevé que  $4/3$  mais ne modifierait pas la suite du raisonnement.

Ainsi :

$$\begin{aligned} N_{\text{inner}}(x \geq x_0) &\simeq \frac{4}{3} n_y \int_{x_0}^{L_x} \int_0^{L_z} \frac{1}{\Delta x_w \Delta z_w} \, dx \, dz \\ &= \frac{4}{3} \frac{n_y}{\rho v^2} \int_{x_0}^{L_x} \int_0^{L_z} \frac{\tau_w}{\Delta x_w^+ \Delta z_w^+} \, dx \, dz. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Comme expliqué à la section 3.3, la taille des structures énergétiques de la sous-couche visqueuse (les *streaks*) est constante en unités de paroi. Les discrétisations spatiales en unités

de paroi  $\Delta x_w^+$  et  $\Delta z_w^+$  sont ainsi supposées constantes dans la suite, d'où :

$$N_{\text{inner}}(x \geq x_0) = \frac{4}{3} \frac{n_y}{\Delta x_w^+ \Delta z_w^+} L_z \frac{\int_{x_0}^{L_x} \tau_w dx}{\rho v^2}. \quad (4.12)$$

Finalement, en estimant le frottement pariétal à l'aide de la corrélation (4.4) valable pour  $x \geq x_0$ , le nombre de points de maillage contenu dans la zone interne de la couche limite turbulente en aval de  $x_0$  est donné par :

$$\begin{aligned} N_{\text{inner}}(x \geq x_0) &= \frac{4}{3} \frac{n_y}{\Delta x_w^+ \Delta z_w^+} L_z \frac{\int_{x_0}^{L_x} \frac{\rho u_e^2}{2} 0.027 \text{Re}_x^{-1/7} dx}{\rho v^2} \\ &= \frac{4}{3} \frac{n_y}{\Delta x_w^+ \Delta z_w^+} L_z \frac{\frac{u_e^2}{2} 0.027 \left[ \frac{7}{6} \frac{v}{u_e} \text{Re}_x^{6/7} \right]_{x_0}^{L_x}}{v^2} \\ &= 0.021 \frac{n_y}{\Delta x_w^+ \Delta z_w^+} \frac{L_z}{L_x} \text{Re}_{L_x}^{13/7} \left[ 1 - \left( \frac{\text{Re}_{x_0}}{\text{Re}_{L_x}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Par conséquent :

$$N_{\text{inner}} \sim \text{Re}_{L_x}^{13/7} \text{ quand } \text{Re}_{L_x} \rightarrow +\infty. \quad (4.14)$$

En revanche, Chapman (1979), en utilisant la corrélation (4.7), obtient :

$$N_{\text{inner}}(x \geq x_1) = 0.05 \frac{n_y}{\Delta x_w^+ \Delta z_w^+} \frac{L_z}{L_x} \text{Re}_{L_x}^{9/5}, \quad (4.15)$$

avec  $x_1$  la position à partir de laquelle la corrélation (4.7) est valable (suite aux domaines de validité des corrélations considérées :  $x_1 < x_0$ ), et donc :

$$N_{\text{inner}} \sim \text{Re}_{L_x}^{9/5} \text{ quand } \text{Re}_{L_x} \rightarrow +\infty, \quad (4.16)$$

même si, comme noté par Choi et Moin (2012), la corrélation (4.7) est imprécise pour  $\text{Re}_x \gtrsim 10^6$ .

Pour finir d'estimer  $N_{\text{inner}}$  à partir de  $\text{Re}_{L_x}$ , il reste à déterminer  $n_y$ ,  $\Delta x_w^+$  et  $\Delta z_w^+$ . Afin de résoudre la sous-couche visqueuse (et donc les *streaks*), il est d'usage de construire un maillage vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta x_w^+ \simeq 50, \\ \Delta z_w^+ \simeq 12, \\ y_1^+ \simeq 1, \\ n_y \sim 20-30, \end{cases} \quad (4.17)$$

avec  $y_1^+$  la position du premier au-dessus de la paroi en unités de paroi. Il est à noter que  $n_y$  représente le nombre de points contenu dans la sous-couche visqueuse (c'est-à-dire jusqu'à  $y^+ \simeq 50$ ) et non dans la zone interne (qui s'étend environ jusqu'à  $0.1\delta$  à haut nombre de Reynolds). De plus, il est important d'observer qu'en plus de la direction normale à la paroi, la discrétisation dans la direction transverse est également fortement contrainte en raison des dimensions des *streaks*.

En suivant un raisonnement similaire, mais en considérant une discrétisation suffisamment fine pour résoudre les échelles dissipatives (c'est-à-dire jusqu'à l'échelle de Kolmogorov), Choi et Moin (2012) précisent le nombre de points  $N_{\text{inner-DNS}}$  nécessaire pour résoudre la zone interne en DNS :

$$N_{\text{inner-DNS}} \sim \text{Re}_{L_x}^{37/14} \text{ quand } \text{Re}_{L_x} \rightarrow +\infty. \quad (4.18)$$

Le coût de résolution en LES de la zone interne d'une couche limite n'est donc pas sensiblement plus faible que celui en DNS. C'est pourquoi, la LES est parfois considérée comme une « DNS sous-résolue » dans cette zone. De plus, cette forte dépendance au nombre de Reynolds induit un coût de calcul prohibitif à haut nombre de Reynolds, comme expliqué dans la suite à la section 4.1.3.

#### 4.1.2 Zone externe

De même que pour la zone interne, l'idée de Choi et Moin (2012) est d'estimer le nombre de points requis pour discrétiser les structures turbulentes contenues dans un domaine élémentaire localisé dans la zone externe de la couche limite, puis de l'intégrer dans toute la couche limite.

Soit un domaine élémentaire de dimensions  $\delta \times (\delta - l_y) \times \delta$  situé dans la zone externe de la couche limite en aval de  $x_0$ . Soit  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  les nombres de points contenus dans ce domaine respectivement dans les directions longitudinale, normale à la paroi et transverse et  $\Delta x = \delta/n_x$ ,  $\Delta y = \delta/n_y$  et  $\Delta z = \delta/n_z$  les discrétisations spatiales associées. La densité volumique  $\delta N$  de points de maillages contenue dans ce domaine est :

$$\delta N = \frac{n_x n_y n_z}{\delta(\delta - l_y)\delta}. \quad (4.19)$$

Le nombre de points en aval de  $x_0$  contenu dans la zone externe de la couche limite  $N_{\text{outer}}(x \geq x_0)$  est alors obtenu en intégrant cette équation :

$$N_{\text{outer}}(x \geq x_0) = \int_{x_0}^{L_x} \int_0^{L_z} \int_{l_y}^{\delta} \delta N \, dx \, dy \, dz = \int_{x_0}^{L_x} \int_0^{L_z} \frac{n_x n_y n_z}{\delta^2} \, dx \, dz. \quad (4.20)$$

Comme expliqué à la section 3.3, la taille caractéristique des structures énergétiques de la



zone externe (les LSM et les VLSM) est fonction de l'épaisseur locale de la couche limite. Ainsi, les discrétisations  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  sont supposées proportionnelles à l'épaisseur de couche limite locale.  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  sont alors constants et :

$$N_{\text{outer}}(x \geq x_0) = n_x n_y n_z \int_{x_0}^{L_x} \int_0^{L_z} \frac{1}{\delta^2} dx dz = n_x n_y n_z L_z \int_{x_0}^{L_x} \frac{1}{\delta^2} dx. \quad (4.21)$$

Finalement, en estimant l'épaisseur de la couche limite à l'aide de la corrélation (4.3), le nombre de points de maillage contenu dans la zone externe de la couche limite turbulente en aval de  $x_0$  est donné par :

$$\begin{aligned} N_{\text{outer}}(x \geq x_0) &= n_x n_y n_z L_z \int_{x_0}^{L_x} \left(0.16x \text{Re}_x^{-1/7}\right)^{-2} dx \\ &= \frac{1}{0.16^2} n_x n_y n_z L_z \left[ \frac{-7}{5} \frac{u_e}{\nu} \text{Re}_x^{-5/7} \right]_{x_0}^{L_x} \\ &= 54.6875 n_x n_y n_z \frac{L_z}{L_x} \text{Re}_{L_x} \left[ \frac{1}{\text{Re}_{x_0}^{5/7}} - \frac{1}{\text{Re}_{L_x}^{5/7}} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Par conséquent :

$$N_{\text{outer}} \sim \text{Re}_{L_x} \text{ quand } \text{Re}_{L_x} \rightarrow +\infty. \quad (4.23)$$

Si le raisonnement ci-dessus est repris avec la corrélation (4.6), il vient  $N_{\text{outer}} \sim \text{Re}_{L_x}^{2/7}$ . Toutefois, en utilisant la corrélation (4.6) et en considérant un domaine cubique de taille  $\bar{\delta} = 1/L_x \int_0^{L_x} \delta(x) dx$ , Chapman (1979) obtient :

$$N_{\text{outer}}(x \geq x_1) = 40 n_x n_y n_z \frac{L_z}{L_x} \text{Re}_{L_x}^{2/5}, \quad (4.24)$$

et donc :

$$N_{\text{outer}}(x \geq x_1) \sim \text{Re}_{L_x}^{2/5} \text{ quand } \text{Re}_{L_x} \rightarrow +\infty, \quad (4.25)$$

même si, comme noté par Choi et Moin (2012), la relation (4.6) est imprécise pour  $\text{Re}_x \gtrsim 10^6$ .

Pour finir d'estimer  $N_{\text{outer}}$  à partir de  $\text{Re}_{L_x}$ , il reste à déterminer  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$ . Si Chapman (1979) propose de prendre  $(n_x, n_y, n_z) = (10, 25, 10)$ , il est proposé, dans le cadre de ces travaux et de manière semblable à Larsson et al. (2016), de construire un maillage vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta x \simeq 0.08\delta, \\ \Delta z \simeq 0.05\delta, \end{cases} \quad (4.26a)$$

et  $n_y$  mailles dans la direction normale à la paroi, étirées progressivement telles que :

$$\begin{cases} n_y \sim 30-40, \\ \Delta y = 0.02\delta \text{ au début de la zone externe (situé entre } y^+ \simeq 50 \text{ et } y \simeq 0.1\delta), \\ \Delta y = 0.05\delta \text{ en haut de la couche limite (en } y = \delta). \end{cases} \quad (4.26b)$$

Ces recommandations sont basées sur les dimensions des structures turbulentes de la zone externe (notamment les LSM et les VLSM présentés à la section 3.3). Toutefois, ces préconisations ne sont pas universelles et dépendent des méthodes numériques considérées. En particulier, Larsson et al. (2016) considèrent un solveur basé sur la méthode des volumes finis où les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma compact d'ordre six dans leurs études (voir, par exemple, Kawai et Larsson (2012)).

Par ailleurs, ces recommandations signifient que le nombre de points  $N_{\text{outer}, (x,z)}$  contenu dans une coupe longitudinale de la couche limite est constant (en supposant  $L_z/\delta$  constant), puisque les dimensions du maillage sont proportionnelles à  $\delta$ . Ainsi, à une position longitudinale donnée, le coût de calcul de la zone externe est indépendant du nombre de Reynolds, comme indiqué par Larsson et al. (2016).

#### 4.1.3 Bilan

Les estimations obtenues précédemment sont synthétisées dans le tableau 4.1. Les résultats obtenus par Chapman (1979), valables pour  $Re_{L_x} \lesssim 10^6$ , sont également présentés. Si la dépendance du nombre de points estimé dans la zone interne au nombre de Reynolds est similaire entre Choi et Moin (2012) et Chapman (1979), les premiers prédisent un coût de calcul plus élevé dans la zone externe à haut nombre de Reynolds. Dans les deux cas, la dépendance au nombre de Reynolds du coût de résolution de la zone externe est bien plus réduite que celle de la zone interne.

Ces observations sont illustrées à la figure 4.1 qui permet de voir que :

1. À des nombres de Reynolds modérés ( $\lesssim 5 \times 10^5$ ), le coût de résolution de la zone interne est inférieur à celui de la zone externe ;
2. À haut nombre de Reynolds ( $\gtrsim 10^6$ ), le coût de résolution de la zone interne devient prohibitif vis-à-vis des moyens de calculs disponibles à ce jour. Sur cette plage de nombre de Reynolds, plus de 99% des points contenue dans la couche limite sont dans la sous-couche visqueuse, alors qu'elle ne représente qu'une fraction de l'épaisseur de couche limite ;
3. Sur les nombres de Reynolds typiques d'applications aéronautiques ( $Re_{L_x} \sim 10^6-10^7$ ), il est possible de résoudre la zone externe grâce aux moyens de calculs disponibles aujourd'hui.

Ainsi, le coût de calcul de la zone interne d'une couche limite turbulente attachée incompressible en LES est aujourd'hui trop élevé (vis-à-vis des moyens de calcul actuels) à haut nombre de Reynolds ( $\gtrsim 10^6$ ). En revanche, le coût réduit de la zone externe reste acceptable même à un nombre de Reynolds d'intérêt industriel. De plus, comme expliqué à la section 3.3, la zone externe contient la majorité de l'énergie cinétique turbulente et interagit avec la zone interne via un couplage à sens quasiment direct à haut nombre de Reynolds. Un moyen de simuler des écoulements pariétaux attachés rencontrés en aéronautique est donc de résoudre uniquement la zone externe, et de modéliser les effets de la zone interne à partir d'informations issues de la zone externe : c'est l'objectif de la méthode WMLES introduite à la section suivante.

	Chapman (1979)	Choi et Moin (2012)
Hypothèses	$\begin{cases} u/u_e = (y/\delta)^{1/7} \\ C_f = 0.045 \text{Re}_\delta^{-1/4} \end{cases}$	$\begin{cases} u/u_e = (y/\delta)^{1/7} \\ C_f = 0.020 \text{Re}_\delta^{-1/6} \end{cases}$
Corrélations déduites	$\begin{cases} \delta/x = 0.37 \text{Re}_x^{-1/5} \\ C_f = 0.0577 \text{Re}_x^{-1/5} \end{cases}$	$\begin{cases} \delta/x = 0.16 \text{Re}_x^{-1/7} \\ C_f = 0.027 \text{Re}_x^{-1/7} \end{cases}$
Domaine de validité	$\text{Re}_{L_x} \lesssim 10^6$	$\text{Re}_{L_x} \gtrsim 10^6$
$N_{\text{inner}}(x \geq x_0)$ quand $\text{Re}_{L_x} \rightarrow +\infty$	$\sim \text{Re}_{L_x}^{9/5}$	$\sim \text{Re}_{L_x}^{13/7}$
$N_{\text{outer}}(x \geq x_0)$ quand $\text{Re}_{L_x} \rightarrow +\infty$	$\sim \text{Re}_{L_x}^{2/5}$	$\sim \text{Re}_{L_x}$

TABLE 4.1 – Estimation du coût de calcul spatial d'une couche limite turbulente attachée incompressible en LES.  $N_{\text{inner}}$  et  $N_{\text{outer}}$  sont respectivement les nombres de points dans les zones interne et externe.  $x_0$  est la position longitudinale à partir de laquelle les corrélations utilisées sont valables

Comme expliqué par Piomelli et Balaras (2002), pour estimer le coût de calcul global d'une simulation instationnaire, il faut également prendre en compte le coût d'intégration temporelle des équations pendant une durée proportionnelle à l'échelle intégrale de l'écoulement avec un pas de temps limité par la résolution des plus petites structures. L'échelle de temps des plus petites structures est inversement proportionnelle à leur taille et donc, en LES ou en DNS, à la taille des cellules du maillage. Piomelli et Balaras (2002) estiment donc les nombres d'itérations temporelles dans les zones interne et externe comme étant respectivement proportionnelles à  $N_{\text{inner}}^{1/3}$  et  $N_{\text{outer}}^{1/3}$ . Le coût de résolution total d'une couche limite turbulente est donc donné par  $N_{\text{inner}}^{4/3}$  et  $N_{\text{outer}}^{4/3}$ , ce qui accroît le surcoût de résolution de la zone interne par rapport à celui de la zone externe.

Par ailleurs, il est important de rappeler que ces estimations et les préconisations de maillage (résumées à la figure 4.2) données ne sont pas universelles. D'une part, en fonction

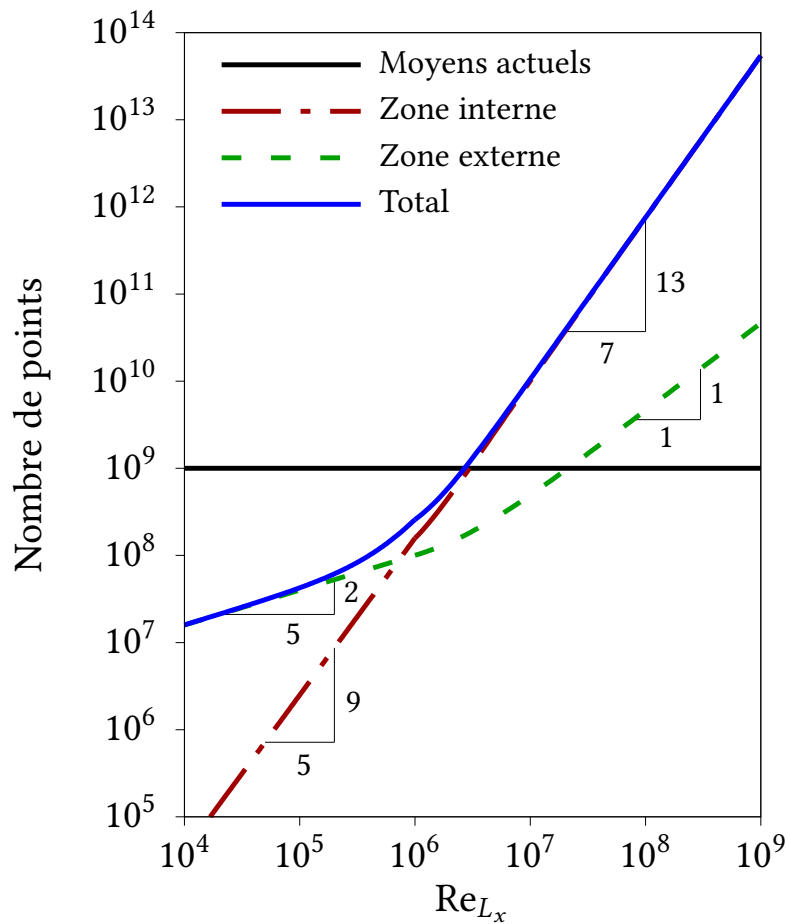


FIGURE 4.1 – Évolution du nombre de points dans une couche limite turbulente attachée incompressible en fonction du nombre de Reynolds. Pour  $Re_{L_x} \leq 10^6$ , le nombre de points est estimé à l'aide des corrélations de Chapman (1979) puis, pour  $Re_{L_x} \geq 10^6$ , à partir de celles de Choi et Moin (2012). Les valeurs suivantes sont utilisées :  $L_z/L_x = 1$ ,  $n_y = 30$  (sous-couche visqueuse),  $\Delta x_w^+ = 50$ ,  $\Delta z_w^+ = 12$ ,  $n_x = 1/0.08$ ,  $n_y = 40$  (zone externe),  $n_z = 1/0.05$  et  $Re_{L_{x_0}} = 5 \times 10^5$

de la méthode numérique utilisée (volumes finis, méthodes spectrales...) et en particulier, à une méthode donnée, des propriétés spectrales (dissipation et dispersion) du schéma convectif utilisé, le nombre de points nécessaire pour discrétiser une structure turbulente varie. D'autre part, les corrélations utilisées sont basées sur plusieurs hypothèses. Les coûts de calculs et critères de maillages donnés sont donc valables pour une couche limite turbulente attachée incompressible soumise à un gradient de pression nul. Ils diffèrent dans le cas d'un écoulement laminaire, compressible, soumis à un gradient de pression non nul ou décollé. En effet, dans ces cas, la turbulence pariétale est modifiée. Toutefois, grâce à l'hypothèse de Morkovin, introduite à la section 3.6, et à l'étude de l'influence d'un gradient de pression adverse sur la turbulence pariétale à la section 3.4.1, il est, à priori, possible de considérer les préconisations (4.17) et (4.26b) de maillage proposées comme toujours valables lorsque l'écoulement est compressible ou soumis à un gradient de pression adverse. En revanche, ce n'est pas le cas si la couche limite est laminaire, soumise à un gradient de pression favorable (comme vu à la section 3.4.2, la couche limite relaminarise), ou décollée (la couche limite ne peut plus être décomposée en zones interne et externe et n'est plus, à priori, composée de *streaks*, de LSM ou de VLSM). En pratique, les préconisations de maillage proposées pour la zone interne (4.17) continuent d'être appliquées et sont jugées suffisantes.

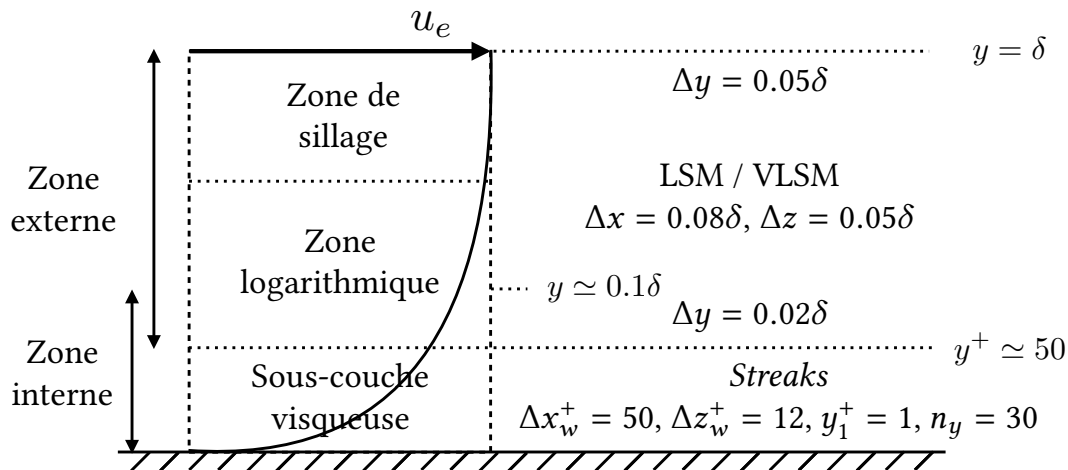


FIGURE 4.2 – Résumé des préconisations de maillage en LES dans une couche limite turbulente attachée incompressible

## 4.2 Présentation d'une méthode hybride RANS-LES : la WMLES

Dans la section précédente, il a été montré que le coût de calcul de la zone interne d'une couche limite (turbulente attachée) est prohibitif à haut nombre de Reynolds ( $\gtrsim 10^6$ ) en LES. Une méthode pour éviter cet écueil est de modéliser tout ou partie de la couche limite (incluant au moins la zone interne) avec une modélisation (U)RANS : c'est le principe des méthodes hybrides RANS-LES. Comme indiqué par Larsson et al. (2016), ces méthodes peuvent être classées en deux catégories :

1. Celles modélisant uniquement la zone interne (en (U)RANS) et résolvant la zone externe de la couche limite (en LES);
2. Celles modélisant l'ensemble de la couche limite (en (U)RANS).

Toutefois, il est important de noter qu'il n'y a pas unicité ni sur la manière de classer les différentes méthodes hybrides RANS-LES, ni sur la terminologie employée. Notamment, WMLES désigne ici les simulations LES utilisant un modèle de paroi pour modéliser les flux pariétaux, alors que dans les revues de Piomelli (2008) et Larsson et al. (2016), WMLES désigne plus largement l'ensemble des méthodes modélisant la zone interne de la couche limite. De même, les méthodes hybrides RANS-LES désigne ici l'ensemble des méthodes faisant appel à une modélisation (U)RANS (de manière explicite ou implicite), alors que dans la revue de Larsson et al. (2016), elles correspondent aux méthodes où les équations LES ne sont définies qu'à partir d'une certaine distance de la paroi.

Il existe plusieurs revue des différentes méthodes hybrides RANS-LES existantes, comme celles de Piomelli et Balaras (2002), Fröhlich et Terzi (2008), Piomelli (2008) et Larsson et al. (2016). Les deux méthodes hybrides RANS-LES les plus populaires sont :

1. La WMLES (*Wall-Modeled Large-Eddy Simulation*);
2. La DES (*Detached-Eddy Simulation*).

Dans le cadre de cette étude, l'approche WMLES est choisie et appartient à la première catégorie de méthodes hybrides RANS-LES. Cette approche est introduite dans la suite de cette section. Dans la section suivante, l'approche DES est brièvement présentée. Elle correspond à une classe de méthodes pouvant appartenir à chaque catégorie selon les variantes considérées.

#### 4.2.1 Principe de la WMLES

La WMLES est une approche consistant à résoudre les équations LES dans tout le domaine, mais contrairement à une LES résolue à la paroi, le maillage ne permet pas de résoudre la zone interne de la couche limite (au moins la sous-couche visqueuse). Dans la zone externe et à l'extérieur de la couche limite, les structures turbulentes sont résolues comme en LES. Les préconisations de maillage associées sont données dans la partie suivante. Dans un souci de simplification, seul le profil de vitesse et le frottement pariétal (et donc l'équation de quantité de mouvement) sont considérés dans cette partie, mais les explications suivantes sont également valables avec le profil de température et le flux de chaleur pariétal (et donc l'équation d'énergie).

Le fonctionnement de la WMLES, illustré à la figure 4.3 est intimement lié à celui de la LES. En LES, lorsque le solveur CFD effectue un bilan de quantité de mouvement dans une cellule adjacente à la paroi, le frottement pariétal  $\tau_w$  est requis. Par définition, ce dernier est proportionnel au gradient de vitesse pariétal. Si le maillage suit les recommandations données à la section 4.1.3, alors la turbulence pariétale est résolue, la vitesse au premier point au-dessus de la paroi est bien définie et le gradient de vitesse pariétal peut être approximé

par une différence finie :

$$\tau_w = \mu_w \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \approx \mu_w \frac{u_1}{y_1}, \quad (4.27)$$

en supposant, sans perdre de généralité dans la suite, que la paroi est fixe. Si ce raisonnement est appliqué en WMLES, le frottement est sous-estimé puisque, comme vu à la section 3.2.2, la vitesse ne suit pas une loi linéaire dans la zone externe.

C'est pourquoi, en WMLES, les effets de la zone interne sont modélisés à partir de données extraites dans la zone externe (en général, le premier point au-dessus de la paroi) afin d'estimer précisément les flux pariétaux : c'est le rôle du modèle de paroi. Les différents types de modèles de paroi sont présentés à la section 4.3. Comme expliqué à la section 3.3, la modélisation de la zone interne à partir d'informations de la zone externe est justifiée pour les écoulements à hauts nombres de Reynolds. En effet, à haut nombre de Reynolds, la majorité de l'énergie cinétique turbulente est contenue dans la zone externe. De plus, la zone externe interagit avec la zone interne à travers un couplage quasi-unidirectionnel.

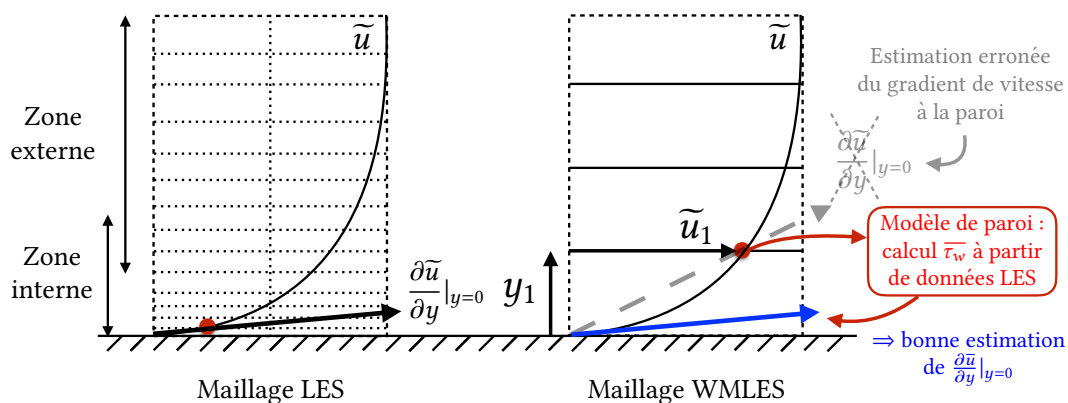


FIGURE 4.3 – Principe de la WMLES

Idéalement, les données d'entrée du modèle de paroi sont issues d'un point localisé dans la zone inertielle de la couche limite, situé entre  $y^+ \gtrsim 50$  et  $y/\delta \approx 0.1$ . En effet, cette région correspond à la dernière région où un profil de vitesse auto-similaire en unités de paroi est observé (sous certaines hypothèses présentées à la section 3.2), et donc à présenter un comportement universel. De plus, comme précisé dans la suite à la section 4.3, les modèles de paroi sont en général basés sur des équations (U)RANS. Il est donc primordial, comme expliqué par Piomelli et Balaras (2002) à partir de la figure 4.4, de ne pas utiliser des données issues de la sous-couche visqueuse (où les petites structures turbulentes ont une petite échelle de temps et sont donc fortement instationnaires) afin de prendre en compte les effets de la zone interne en moyenne (en accord avec sa modélisation (U)RANS), sans compter qu'en raison d'une turbulence pariétale mal résolue, les données d'entrée du modèle de paroi

seraient erronées. Pour cette même raison, Piomelli et Balaras (2002) indiquent également que, près de la paroi, le maillage dans les directions parallèles à la paroi doit être suffisamment grossier. C'est pourquoi, des éléments adaptés à la discrétisation de structures turbulentes anisotropes (hexahédres ou prismes) doivent être privilégiés à la paroi en WMLES.

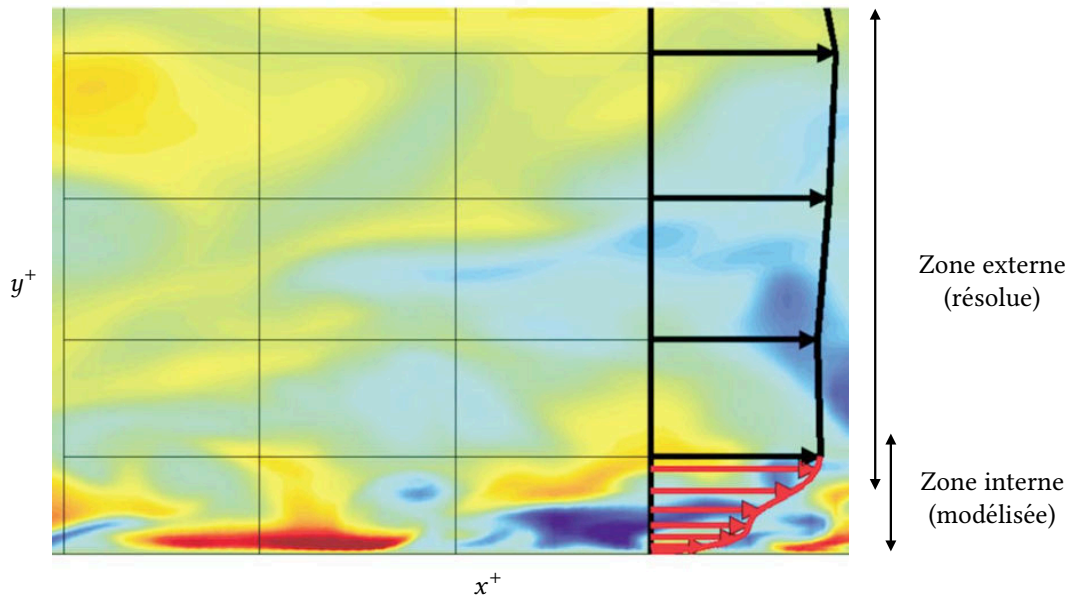


FIGURE 4.4 – Principe d'un maillage WMLES, adapté de Piomelli et Balaras (2002)

L'approche WMLES est donc une approche relativement simple à implémenter. En effet, le modèle de paroi est peu intrusif vis-à-vis du champ de calcul LES et peut même être perçu comme une boîte noire d'un point de vue informatique. Cette simplicité d'implémentation est d'autant plus vraie dans le cas d'un solveur volumes finis où la solution est calculée au centre des cellules, comme considéré dans le cadre de ces travaux (et présenté en annexe A) : la condition aux limites à la paroi correspond directement aux flux pariétaux. En outre, le rôle du modèle de paroi étant en général local, l'utilisation d'une approche WMLES est relativement aisée, et la modélisation de la zone interne se fait sans remettre en cause les propriétés de parallélisation du solveur CFD.

Toutefois, il est important de noter que malgré son apparente simplicité d'implémentation et d'utilisation, la présence d'un maillage grossier près de la paroi n'est pas sans conséquence et peut être source d'erreurs à la fois physiques et numériques, comme expliqué à la section 4.2.3. En particulier, l'implémentation d'un même modèle de paroi dans deux solveurs CFD différents aboutit, très souvent, à deux solutions différentes.

#### 4.2.2 Préconisation de maillage en WMLES

Les préconisations de maillage en WMLES sont basées sur celles de la LES. En effet, en WMLES, la zone externe de la couche limite est résolue comme en LES. Seule la zone interne est modélisée.



Ainsi, en se basant sur les recommandations de maillage LES dans la zone externe (4.26b), un maillage WMLES doit idéalement vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \Delta x \simeq 0.08\delta, \\ \Delta z \simeq 0.05\delta, \end{cases} \quad (4.28a)$$

et  $n_y$  mailles dans la direction normale à la paroi, étirées progressivement telles que :

$$\begin{cases} n_y \sim 30-40, \\ \Delta y_w = y_1 = 0.02\delta, \\ \Delta y = 0.05\delta \text{ en haut de la couche limite (en } y = \delta), \\ 50 \lesssim y_1^+ \text{ et } y_1 \lesssim 0.1\delta \text{ (} y_1 \text{ situé dans la zone externe),} \end{cases} \quad (4.28b)$$

avec  $\Delta y_w$  la distance entre la paroi (supposée sans perdre de généralité, située en  $y = 0$ ) et le premier point au-dessus de la paroi  $y_1$ .

Comme expliqué dans la section 4.1.2 pour la LES, ces critères de maillage sont : suffisants pour discrétiser et résoudre les structures turbulentes de la zone externe ; valables, à priori, uniquement pour une couche limite turbulente attachée incompressible à un nombre de Reynolds suffisamment élevé pour distinguer les zones interne et externe ; dépendants de la méthode numérique considérée. En particulier, dans le cadre de ces travaux, un solveur structuré utilisant la méthode des volumes finis est considéré, comme indiqué dans l'annexe A. Dans ce contexte, l'usage est d'autoriser des taux d'expansions des cellules entre  $\pm 5\%$  dans la (ou les) direction(s) principale(s) de l'écoulement afin de limiter les pertes de précisions et les problèmes de stabilités (en acoustique, ces taux sont limités à  $\pm 3\%$ ).

Ces critères de maillage permettent également de ne pas résoudre la sous-couche visqueuse de la couche limite. En effet, comme expliqué à la section 4.2.1 et illustré à la figure 4.4, il est important qu'un maillage WMLES ne soit pas trop fin près de la paroi, sinon les structures turbulentes de la sous-couche visqueuse commencent à être capturées mais en étant sous-résolues.

Par rapport aux préconisations de maillage (4.26b) données pour la résolution de la zone externe en LES, des critères supplémentaires sur  $y_1$  sont présents afin d'extraire les données d'entrée du modèle de paroi dans la zone inertielle, comme justifié dans la partie précédente. Ainsi, en WMLES,  $y_1$  doit vérifier à la fois des conditions en unités de paroi et en variables externes. Les préconisations de maillage (4.28b) peuvent donc être vérifiées si et seulement si le nombre de Reynolds de frottement est suffisamment élevé :

$$\begin{cases} \Delta y_w = y_1 = 0.02\delta \\ 50 \leq y_1^+ \\ y_1 \leq 0.1\delta \end{cases} \Rightarrow 0.02 \frac{u_\tau \delta}{\nu_w} \geq 50 \Rightarrow Re_\tau \geq 2500. \quad (4.29)$$

Il est intéressant de remarquer que les deux conditions  $50 \leq y_1^+$  et  $y_1 \leq 0.1\delta$  impliquent également  $0.1\delta u_\tau / \nu_w \geq 50$ , c'est-à-dire  $Re_\tau \geq 500$ . Cela peut être traduit comme un critère sur le nombre de Reynolds de frottement minimal pour observer une loi logarithmique, comme vu à la section 3.2.

Si  $Re_\tau \leq 2500$ , un compromis est requis. Il existe principalement deux types de stratégies, illustrées à la figure 4.5 :

1. Choisir  $y_1 > 0.02\delta$  tel que  $y_1^+ \geq 50$  et utiliser un taux d'expansion dans la direction normale à la paroi permettant de satisfaire la condition  $n_y \sim 30-40$ . Éventuellement, un taux d'expansion négatif (en %) peut être utilisé (au moins entre  $y_1$  et  $y_2$ );
2. Extraire les données d'entrée du modèle de paroi à un point  $y_{wm}$  plus éloigné que le premier point au-dessus de la paroi  $y_1$ .

Selon la méthode numérique considérée, ces stratégies sont applicables plus ou moins aisément.

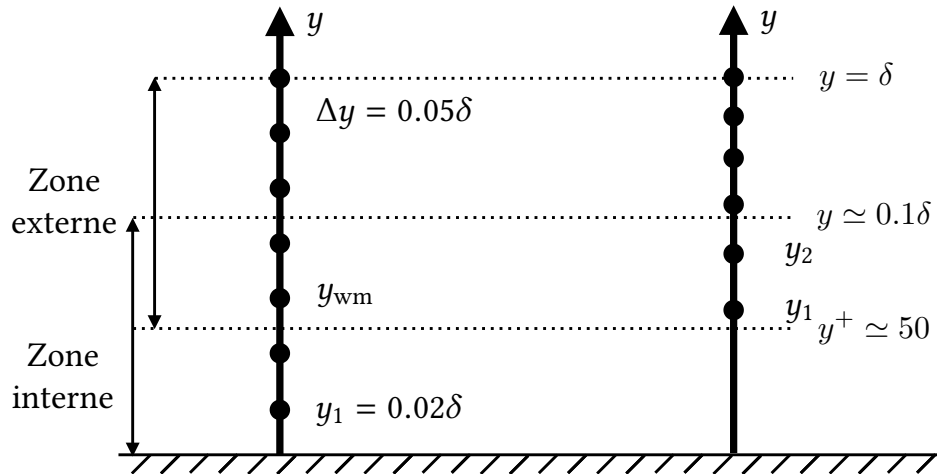


FIGURE 4.5 – Stratégies de maillage en WMLES pour une couche limite turbulente attachée à  $Re_\tau \leq 2500$ . À gauche : extraction des données du modèle de paroi à un point  $y_{wm}$  plus éloigné de la paroi que  $y_1$ . À droite : utilisation d'un taux d'expansion négatif (en %)

Dans le cadre volumes finis de ces travaux, un taux d'expansion de  $r = -5\%$  peut être appliqué comme indiqué ci-dessus. En prenant également  $y_1^+ = 50$  et  $n_y = 30$ , le nombre de Reynolds de frottement minimal visant à vérifier les préconisations de maillage (4.28) ainsi que la première stratégie de maillage est égal à :

$$\begin{aligned}
 Re_\tau &= \frac{u_\tau \delta}{\nu_w} = \frac{u_\tau}{\nu_w} \sum_{k=1}^{n_y} \Delta y_w^r \\
 &= \frac{u_\tau}{\nu_w} \sum_{k=1}^{n_y} y_1^r = y_1^+ (1 - r^{n_y}) / (1 - r) \\
 &= 785.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Néanmoins, dans ce cas, les cellules sont alors très petites en haut de la couche limite :  $\Delta y^+ \simeq 11$  en  $y = \delta$ , ce qui ne respecte pas l'objectif  $\Delta y = 0.05\delta$  en  $y = \delta$ . Le nombre de degrés de libertés à l'extérieur de la couche limite est alors plus élevé que dans une LES résolue et, surtout, l'avance en temps du calcul est limité (avec un schéma temporel explicite).

C'est pourquoi, dans le cadre de ces travaux et avec un solveur structuré volumes finis, il est préféré utiliser la première stratégie et extraire les données d'entrée du modèle de paroi en  $y_{\text{wm}} > y_1$ . En volumes finis, cela permet de satisfaire plus facilement le critère sur le nombre de points contenu dans la zone externe, tout en ayant  $\Delta y \simeq 0.05\delta$  en  $y = \delta$ . Par exemple, en prenant les données d'entrée du modèle de paroi au troisième point au-dessus de la paroi  $y_3$ , en supposant  $y_3^+ = y_{\text{wm}}^+ = 50$  et que le maillage est uniforme dans la direction normale à la paroi avec  $n_y = 30$ , le nombre de Reynolds de frottement minimal pour satisfaire les préconisations de maillage (4.28) ainsi que la seconde stratégie de maillage est égal à :

$$\begin{aligned} \text{Re}_\tau &= \frac{u_\tau \delta}{\nu_w} = \frac{u_\tau}{\nu_w} (y_3 + n_y \times \Delta y_w) \\ &= y_3^+ + n_y \times y_1^+ = y_3^+ \times (1 + n_y/3) \\ &= 550. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Extraire les données d'entrée du modèle de paroi au-dessus du premier point permet donc, dans un solveur structuré volumes finis, de respecter plus facilement les préconisations de maillage WMLES (4.28). Dans ce cas, il est possible de réécrire les critères de maillage WMLES sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta x \simeq 0.08\delta, \\ \Delta z \simeq 0.05\delta, \end{cases} \quad (4.32a)$$

et  $N_y$  mailles dans la direction normale à la paroi, étirées progressivement telles que :

$$\begin{cases} n_y \sim 30-40, \\ \Delta y_w = y_1 = 0.02\delta, \\ \Delta y = 0.05\delta \text{ en haut de la couche limite (en } y = \delta), \\ 50 \lesssim y_1^+ \text{ et } y_1 \lesssim 0.1\delta \text{ (} y_1 \text{ situé dans la zone externe),} \end{cases} \quad (4.32b)$$

avec  $\Delta y_w$  la distance entre la paroi (supposée sans perdre de généralité, située en  $y = 0$ ) et le premier point au-dessus de la paroi  $y_1$ .  $N_y$  est le nombre de points dans la direction normale à la paroi et  $n_y$  est le nombre de points situés dans la zone externe. En effet, comme les  $N_y - n_y$  points situés en dessous de  $y_{\text{wm}}$  ne sont pas nécessairement dans la zone externe (c'est-à-dire à  $y^+ \gtrsim 50$ ),  $n_y$  n'est plus forcément égal au nombre de points total  $N_y$  dans la direction normale à la paroi contenu dans la couche limite.

L'idée de prendre un point solution au-dessus de  $y_1$  est initialement proposé par Kawai et Larsson (2012), mais dans le but d'extraire les données d'entrée du modèle de paroi à une position où la turbulence est mieux résolue, comme expliqué dans la suite à la section 4.2.3. En se basant sur leur résultat WMLES de couche limite supersonique, ces derniers recommandent de prendre le troisième point  $y_3$  au-dessus de la paroi. Dans le cadre de cette étude, cette méthode est utilisée en premier lieu comme un compromis pour satisfaire les préconisations de maillage WMLES. Toutefois, il est important de noter que cette stratégie est limitée par la taille de la molécule de calcul (stencil) du schéma numérique. En effet, dans le cadre de ces travaux, il est observé que les premières cellules au-dessus de la paroi divergent et le calcul devient instable si les données d'entrée du modèle de paroi sont extraites au-delà de  $y_3$ . Cela peut s'expliquer par le fait qu'ici, un schéma centré d'ordre deux est utilisé pour discrétiser les termes convectifs dans un solveur volumes finis. Son stencil comporte trois cellules. Ainsi, lorsque les données d'entrée du modèle de paroi sont extraites à un point situé au-delà du troisième point au-dessus de la paroi, les flux pariétaux (calculés par le modèle de paroi) sont estimés à partir de données non corrélées à celles situées au premier point, ce qui rend le calcul instable. C'est pourquoi, dans le cadre de ces travaux, les données d'entrée du modèle de paroi sont extraites au plus haut en  $y_3$ . Il est à noter que Kawai et Larsson (2012) ne rencontrent pas de problème en considérant jusqu'au cinquième point au-dessus de la paroi, car ces derniers utilisent un schéma compact d'ordre six.

Cette stratégie est surtout applicable dans un solveur structuré, car la présence de direction topologique ( $IJK$ ) permet d'accéder facilement au  $n^e$  point au-dessus de la paroi. Dans un solveur non-structuré volumes ou éléments finis, la structure de données rend difficile l'accès aux points situés au-dessus du premier. En non-structuré, un équivalent possible est d'interpoler les données à une certaine distance de la paroi, comme réalisé par Park et Moin (2014) (ces derniers vont toutefois plus loin puisqu'un deuxième maillage structuré à la paroi non-coïncident est utilisé afin de résoudre les équations (U)RANS). Mais dans ce cas, la qualité des données d'entrée du modèle de paroi devient dépendante de l'algorithme d'interpolation et, a priori, comme en structuré, la distance d'extraction des données d'entrée du modèle de paroi est limitée par des questions de stabilité numérique.

En résumé, les critères de maillage WMLES sont basés sur ceux de la résolution de la zone externe de la couche limite en LES. Toutefois, des contraintes supplémentaires sont présentes en WMLES, notamment afin d'extraire les données d'entrée du modèle de paroi dans la zone inertielle de la couche limite.

Les critères de maillage WMLES ne peuvent idéalement être vérifiées que pour  $Re_\tau \geq 2500$ . À des nombres de Reynolds de frottement plus faibles, un compromis est requis. Dans le cadre de ces travaux, il est décidé d'extraire les données d'entrée du modèle de paroi à un point solution situé au-delà du premier point au-dessus de la paroi. Cette stratégie de maillage, facilement applicable dans un solveur structuré, est toutefois limitée par la taille de la molécule de calcul (stencil) du schéma numérique.

En particulier, un schéma centré d'ordre deux (donc basé sur un stencil composé de trois cellules) est utilisé dans ces travaux. Par conséquent, les données d'entrée du modèle de paroi sont extraites ici au plus haut au troisième point au-dessus de la paroi.

Par ailleurs, la présence d'un maillage près de la paroi ne permettant pas de résoudre la zone interne de la couche limite n'est pas sans conséquence et peut engendrer plusieurs erreurs. Ces dernières sont introduites dans la section suivante.

### 4.2.3 Erreurs induites par la WMLES

Malgré un principe de fonctionnement simple, la présence d'un maillage grossier près de la paroi en WMLES n'est pas anodine. Les modèles physiques et numériques doivent être soigneusement choisis pour tenir compte de cet aspect.

Bocquet (2013) classe les sources d'erreurs d'un calcul WMLES en quatre composantes :

1. L'erreur physique lié au modèle de paroi (prise en compte des effets de compressibilité, de gradients de pression...);
2. L'utilisation de données LES instationnaires comme données d'entrée de modèles de paroi basés sur des équations (U)RANS;
3. La modélisation des échelles de sous-maille dans les grandes cellules adjacentes à la paroi;
4. Les méthodes numériques dans les grandes cellules adjacentes à la paroi.

En WMLES, le modèle de paroi n'est donc qu'une composante d'un calcul précis.

L'erreur potentielle due à l'utilisation de données LES instationnaires dans un modèle de paroi basés sur des équations de nature stationnaires peut être réduite en :

- filtrant temporellement les données d'entrée, comme proposé par Yang et al. (2015);
- corrigeant la viscosité turbulente et la conductivité thermique dans les équations du modèle de paroi, comme Bocquet et al. (2012) ou M. Wang et Moin (2002) (une revue de cette approche est proposée par Bocquet (2013));
- augmentant la distance entre la paroi et le point d'extraction des données d'entrée du modèle de paroi (c'est-à-dire en augmentant  $y_{wm}$ , qu'il corresponde ou non à  $y_1$ ).

Bocquet (2013) explique que les grandes cellules adjacentes à la paroi influencent le développement des structures turbulentes pariétales à travers la modélisation de la viscosité de sous-maille et les méthodes numériques utilisées. D'une part, comme expliqué à la section 2.4, en LES la fréquence de coupure du filtre spatial (donnée par la taille des cellules dans le cadre de cette étude) doit placée dans la zone inertielle du spectre turbulent de

Kolmogorov. C'est pour cela qu'un maillage très fin est requis en LES dans la sous-couche visqueuse, puisque les structures turbulentes énergétiques y sont très petites comme vu à la section 3.3. Les échelles non capturées par le maillage, principalement les échelles dissipatives, sont alors prises en compte par le modèle de sous-maille en supposant qu'elles sont isotropes. En WMLES, en raison des grandes cellules adjacentes à la paroi, la fréquence de coupure locale n'est pas nécessairement dans la zone inertielle. Il n'y a alors pas de raison que la viscosité de sous-maille soit correctement estimée. C'est pourquoi, plusieurs auteurs, dont Bocquet et al. (2012), Cabot et Moin (2000) et P. Wu et Meyers (2013) proposent de corriger la viscosité de sous-maille. Sans correction, Bocquet (2013) observe, sur une WMLES de canal plan, que le coefficient de frottement pariétal est fortement sous-estimé avec un modèle de sous-maille de Smagorinsky. En revanche, avec le modèle de sous-maille WALE présenté à la section 2.4 et considéré dans le cadre de cette étude, la viscosité de sous-maille et le frottement pariétal sont correctement prédits même sans correction.

D'autre part, une autre conséquence de la présence d'un maillage grossier près de la paroi est la potentielle sous-résolution des structures turbulentes de la zone logarithmique. Comme expliqué à la section 4.2.1, en WMLES, les structures turbulentes de la zone externe doivent être résolues. De plus, les préconisations de maillage WMLES proposées à la section 4.2.2 sont dépendantes des méthodes numériques considérées. Si la turbulence de la zone externe est sous-résolue, les données d'entrée du modèle de paroi sont erronées. Par exemple, Bocquet (2013) montre sur une WMLES de canal plan que, si avec un schéma numérique centré non-dissipatif (le même que celui considéré dans ces travaux) il n'y a pas d'amortissement des structures turbulentes, un amortissement non-négligeable du cisaillement est observé dans les premières rangées de cellules au-dessus de la paroi lorsque de la dissipation artificielle est utilisée. Le frottement pariétal est alors mal prédit.

Il est à noter qu'en WMLES, contrairement à d'autres méthodes hybrides RANS-LES, le calcul est entièrement LES. Les structures turbulentes présentes près de la paroi sont alors de dimensions proportionnelles à celles des cellules du maillage. En WMLES, de grandes structures turbulentes sont donc présentes près de la paroi, comme schématisé à la figure 4.6. Plusieurs études numériques (comme celles de Flores et Jiménez (2006), Mizuno et Jiménez (2013) et Cossu et Y. Hwang (2017)) observent, en supprimant artificiellement les structures de la sous-couche visqueuse, que les LSM et les VLSM ne sont pas impactés par leur absence. La présence de grandes structures turbulentes à la paroi n'est donc, à priori, pas un problème.

Par ailleurs, comme expliqué à la section 4.2.1, si le maillage WMLES est trop fin près de la paroi, les structures turbulentes de la sous-couche visqueuse commencent à être capturées mais sont sous-résolues. Les données d'entrée du modèle de paroi sont alors erronées. Cela peut expliquer pourquoi les éléments de maillage tétraédriques ne sont pas adaptés en proche paroi avec une approche WMLES. Avec de tels éléments près de la paroi, les structures turbulentes de la sous-couche visqueuse commencent à être capturées dans les directions parallèles à la paroi mais sont sous-résolues. Ces éléments sont plus adaptés à la discrétisation d'une turbulence isotrope, ce qui n'est pas le cas en proche paroi. À priori, il n'existe pas de publications validant une approche WMLES avec un maillage composé

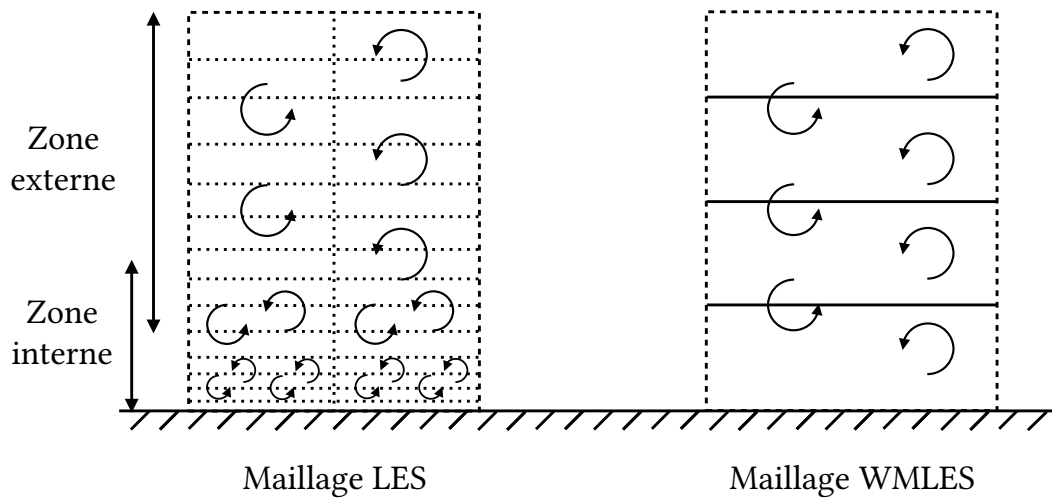


FIGURE 4.6 – Nature des structures turbulentes en WMLES

de tétraèdres à la paroi, excepté celle de Park et Moin (2014) où les données d'entrée sont interpolées à une certaine distance de la paroi. Dans ce cas, comme indiqué par Kawai et Larsson (2012), les données d'entrée sont issues d'une région où la turbulence est mieux résolue. De manière générale, des hexaèdres ou des prismes, adaptés à la discrétisation de structures turbulentes anisotropes, sont privilégiés à la paroi en WMLES. De même, si en LES un maillage plus fin permet de converger vers une simulation DNS et, en théorie, obtenir un résultat plus précis, ce n'est pas forcément le cas en WMLES : un maillage plus fin peut aboutir à une LES sous-résolue (en proche paroi) et donc une dégradation des résultats.

Une manière d'éviter les différentes erreurs liées à la présence de grandes cellules adjacentes à la paroi est d'extraire les données d'entrée du modèle de paroi à un point plus éloigné de la paroi où la turbulence est mieux résolue, comme proposé par Kawai et Larsson (2012). Le point étant plus éloigné de la paroi, les données extraites sont également plus adaptées pour servir de conditions limites aux équations (U)RANS des modèles de paroi. Cependant, comme expliqué à la section 4.2.2, cette approche dépend des méthodes numériques considérées, et est surtout accessible dans des solveurs structurés ou utilisant une méthode spectrale.

Un point important à noter est que si un décalage du profil de vitesse par rapport à la loi logarithmique est observé sur des cas où elle est pourtant valide (appelé *log-layer mismatch* dans la littérature), alors, comme expliqué par Larsson et al. (2016), cela induit directement une erreur sur l'estimation du coefficient de frottement pariétal  $C_f$  puisque ce dernier est défini par  $C_f = 2\tau_w/(\rho_w u_e^2) \propto u_e^{+2}$ .

En WMLES, l'imprécision du modèle de paroi n'est qu'une source d'erreurs parmi d'autres. En effet, en raison de l'utilisation d'un maillage grossier à la paroi (par rapport à la taille des structures turbulentes dans la zone interne), l'approche WMLES est

sujette à de nombreuses erreurs dégradant directement l'estimation des flux pariétaux.

En particulier, même si l'erreur associée au modèle de paroi même est nulle, il est vital que ses données d'entrée soient correctes. Cela implique qu'il faut que la turbulence pariétale en WMLES soit correctement résolue : les structures turbulentes de la zone externe (notamment les LSM et VLSM) doivent être résolues sans discrétiser celles de la zone interne (les *streaks*) qui seraient sinon sous-résolues. C'est pourquoi, les méthodes numériques et le modèle de sous-maille utilisés doivent être adaptés à la présence de grandes cellules adjacentes à la paroi.

La WMLES est donc très sensible aux modélisations numériques et physiques utilisées. C'est pour cela qu'il n'y a pas de raison d'obtenir un résultat identique lorsqu'un même modèle de paroi est implémenté dans deux solveurs CFD différents. D'ailleurs, à priori, l'évaluation d'un modèle de paroi sur une même configuration dans deux solveurs différents n'existe pas dans la littérature

Ainsi, avant de présenter les principaux modèles de paroi existants, il est à noter que les méthodes numériques utilisées dans le cadre de cette étude sont présentées à l'annexe A dans un souci de reproductibilité des résultats.

### 4.3 Modèles de paroi en WMLES

Les modèles de paroi utilisés en WMLES peuvent être classés en deux catégories : en-équilibre ou hors-équilibre. Les modèles de paroi en-équilibre sont, par définition, basés sur les équations de couche limite (3.1b) et (3.1d) où les termes instationnaires, de convection et de gradient de pression sont supposés se compenser, ainsi :

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} = 0, \quad (4.33a)$$

$$\frac{\partial(\bar{u}\bar{\tau} - \bar{\phi})}{\partial y} = 0, \quad (4.33b)$$

ce qui revient à ne prendre en compte que les effets de diffusion dans la direction normale à la paroi. De plus, comme indiqué à la section 3.2, ces équations impliquent que le cisaillement  $\tau$  est constant dans la zone interne de la couche limite. Les autres modèles de paroi sont considérés comme étant hors-équilibre. En général, les modèles de paroi sont basés sur les équations de couche limite (U)RANS. En-dehors de ces modèles, les deux approches de Nicoud et al. (2001) et Bose et Moin (2014) sont à noter. Nicoud et al. (2001) proposent d'estimer le frottement pariétal à partir d'une procédure d'optimisation, visant à minimiser la différence entre le profil de vitesse et la loi logarithmique. Bose et Moin (2014) proposent de modifier la condition de vitesse non-glissante à la paroi  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  par une condition glissante dérivée en appliquant un filtre différentiel aux équation LES. Cette approche offre l'avantage de ne pas se baser sur une forme donnée du profil de vitesse. Étant donné que la finalité de ces travaux est l'étude des écoulements existants dans les turbomachines, ces deux approches



ne sont toutefois pas considérées ici. En effet, la première suppose la connaissance à priori du profil de vitesse, tandis que la deuxième soulève des questions sur la conservation de la masse à la paroi (puisque la vitesse n'y est plus nulle). Dans la suite, seuls des modèles de paroi basés sur des équations (U)RANS sont présentés.

Pour chaque catégorie de modèles de paroi, il existe des modèles de paroi analytiques et numériques. C'est pourquoi, dans la suite, cette distinction est préférée pour classer les modèles de paroi. Avant de présenter en détails chaque type de modèle de paroi, l'interaction entre un solveur LES et un modèle de paroi est décrite.

### 4.3.1 Intégration des modèles de paroi dans un solveur LES

Comme expliqué à la section 4.2.1, les forts gradients de vitesse et de température à la paroi ne peuvent être correctement prédits en WMLES, à cause des grandes cellules utilisées. C'est pourquoi, à chaque itération du calcul, pendant le calcul des flux visqueux, les flux pariétaux moyens  $\overline{\tau_w}$  et  $\overline{\phi_w}$  sont calculés à l'aide d'un modèle de paroi (basés ici sur des équations (U)RANS). Bien que pouvant être assimilés à une boîte noire, les modèles de paroi sont fortement couplés avec le solveur LES, comme vu à la section 4.2.3. C'est pourquoi, il est important de préciser la manière dont les données d'entrée du champ LES sont utilisées par le modèle de paroi et dont ses sorties sont utilisées par le solveur LES. En effet, plusieurs choix sont possibles. Dans ce paragraphe, sans perdre de généralité, les données d'entrée sont supposées extraites au premier point au-dessus de la paroi.

Un premier choix possible est d'utiliser le vecteur vitesse  $\widetilde{\mathbf{u}}_1$  du champ LES de manière brute, c'est-à-dire sans modification, comme effectué par Kawai et Larsson (2013) pour un modèle de paroi considérant des équations hors-équilibre. Sinon, il est d'usage de considérer le vecteur vitesse projeté dans le plan parallèle à la paroi  $\widetilde{\mathbf{u}}_1'$  défini par :

$$\widetilde{\mathbf{u}}_1' = \widetilde{\mathbf{u}}_1 - (\widetilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad (4.34)$$

avec  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à la paroi. Comme indiqué par Larsson et al. (2016), la plupart des modèles de paroi font ce choix. Cela peut s'expliquer par le fait qu'ils sont basés sur des équations (U)RANS et que la vitesse normale à la paroi est statistiquement nulle dans une couche limite attachée se développant sur une plaque plane.

Un deuxième choix possible est de supposer que, dans chaque cellule à la paroi, le vecteur de frottement pariétal  $\overline{\tau_w}$  est aligné avec le vecteur vitesse instantané projeté dans le plan parallèle à la paroi. Cette hypothèse, schématisée à la figure 4.7, permet de simplifier les équations du modèle de paroi en se ramenant à un problème bidimensionnel et est en général couplée avec le choix de considérer  $\widetilde{\mathbf{u}}_1'$  au lieu de  $\widetilde{\mathbf{u}}_1$ . De plus, elle est surtout utilisée par les modèles de paroi basés sur des équations (U)RANS négligeant les effets de convection, comme les modèles de paroi analytiques présentés dans la suite à la section 4.3.2 ou les modèles numériques de Monfort et al. (2010) et Bocquet et al. (2012). Ainsi, Les équations du modèle de paroi sont résolues dans le repère local de la couche limite ( $\mathbf{t} = \widetilde{\mathbf{u}}_1' / \|\widetilde{\mathbf{u}}_1'\|, \mathbf{n}$ ). Seule la norme du vecteur vitesse est utile au modèle de paroi qui estime celle du vecteur de

frottement pariétal. Ensuite, comme ces deux vecteurs sont supposés alignés, les composantes  $\overline{\tau_w}$  dans le repère du solveur LES peuvent être calculées et renvoyées (avec le flux de chaleur pariétal) au solveur LES. Il est à noter que sous cette hypothèse, la couche limite est toujours perçue comme attachée par le modèle de paroi.

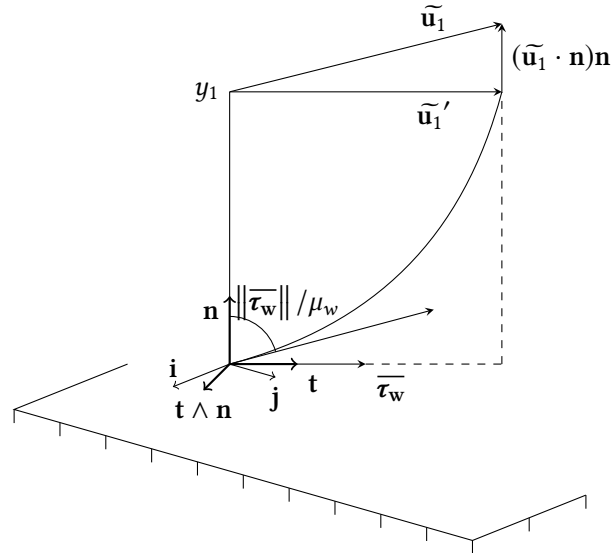


FIGURE 4.7 – Schéma de la projection du vecteur vitesse au premier point au-dessus de la paroi dans le repère local de la couche limite

Si les vecteurs de vitesse et de frottement pariétal ne sont pas supposés alignés, alors les composantes de ce dernier sont estimées directement par le modèle de paroi (qui fait apparaître de manière explicite ses composantes, comme dans les modèles de Balaras et Benocci (1996), Cabot et Moin (2000), M. Wang et Moin (2002), Kawai et Larsson (2013) et Yang et al. (2015)). Il est à noter que dans le cas où le modèle ne considère que des équations au plus bidimensionnelles (comme dans les modèles de paroi à l'équilibre), seule la norme du frottement pariétal peut être estimée. Il est possible, comme effectué par Schumann (1975), d'appliquer le modèle de paroi dans chaque direction parallèle à la paroi (longitudinale et transverse). Cependant, comme expliqué ci-dessus, ces modèles préfèrent en général supposer que les vecteurs de vitesse et de frottement pariétal sont alignés.

Par ailleurs, avant d'envoyer les données du champ LES au modèle de paroi, il est possible de les filtrer temporellement. Comme indiqué à la section 4.2.3 et aussi par Yang et al. (2015), cela permet de corriger l'erreur engendrée par l'introduction de données instationnaires LES dans des équations quasi-stationnaires (U)RANS. D'un point de vue pratique, cela permet également au modèle de paroi d'être plus robuste et plus stable.

En résumé, un modèle de paroi permet d'estimer les flux pariétaux à chaque itération du solveur pendant le calcul des flux visqueux. Il existe différents choix

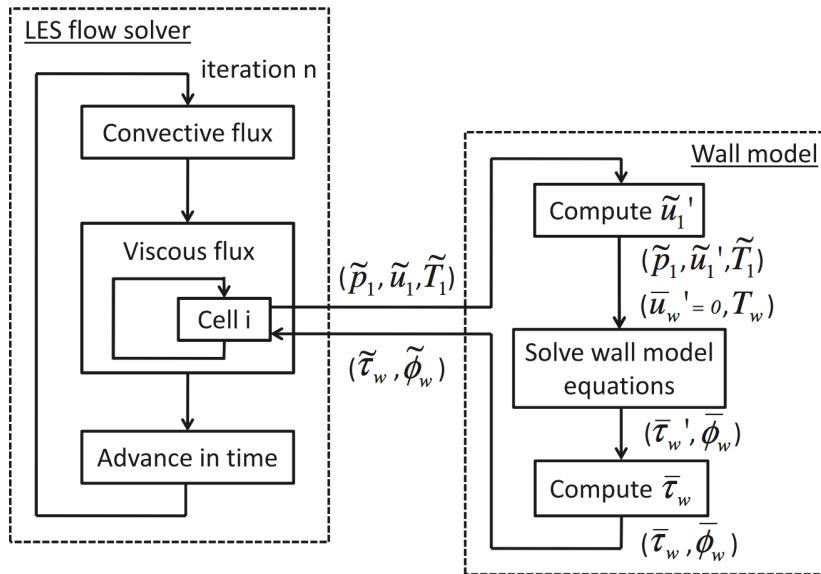


FIGURE 4.8 – Interaction entre un modèle de paroi et un solveur LES pour une paroi isotherme, d'après Bocquet et al. (2012). Les données d'entrée du modèle du paroi sont supposées extraites au premier point au-dessus de la paroi et les variables  $\tilde{u}_1'$  et  $\bar{\tau}_w$  sont respectivement les vecteurs vitesse et de frottement pariétal projetés dans le repère local de la couche limite

possibles concernant la manière dont les données d'entrée du champ LES sont utilisés par le modèle de paroi et dont les résultats ce dernier sont utilisés par le solveur.

Dans le cadre de ces travaux, le vecteur de frottement pariétal est supposé aligné dans chaque cellule avec le vecteur de vitesse local projeté dans le plan parallèle à la paroi. Cela permet de se ramener à un problème bidimensionnel. le fonctionnement et l'intégration d'un modèle de paroi est résumé dans ce cas à la figure 4.8. La paroi y est également considérée isotherme. Si la paroi est supposée adiabatique, le flux de chaleur pariétal est nul et n'a donc pas besoin d'être estimé par un modèle de paroi. De plus, les données d'entrée du modèle de paroi ne sont pas filtrées temporellement, excepté pour des raisons de stabilité dans l'étude du chapitre 7.

### 4.3.2 Modèles de paroi analytiques

Les modèles de paroi analytiques sont, par définition, constitués d'une ou plusieurs équations reliant explicitement les flux pariétaux  $\|\bar{\tau}_w\|$  et  $\bar{\phi}_w$  aux données issues de la zone inertielle de la couche limite. Si la paroi est adiabatique,  $\bar{\phi}_w = 0$  et donc une seule relation est requise pour déterminer  $\|\bar{\tau}_w\|$ .

L'existence des modèles de paroi analytiques est justifiée par le comportement auto-similaire des profils de vitesse et de température dans la zone interne sous certaines hypothèses (écoulement incompressible, statistiquement stationnaire et bidimensionnel, soumis à un gradient de pression nul et à un nombre de Reynolds infini), comme vu à la section 3.2.

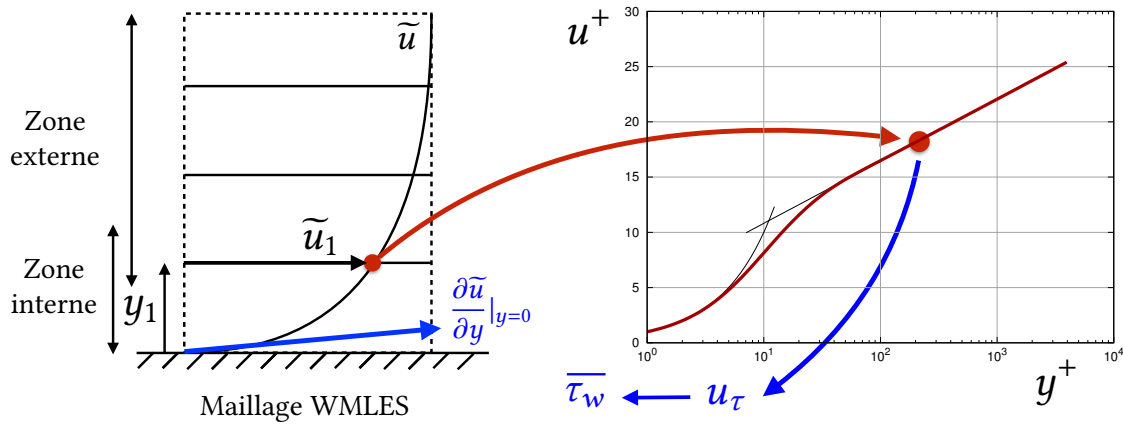


FIGURE 4.9 – Principe du calcul du frottement pariétal en WMLES à l'aide d'un modèle de paroi analytique

En effet, sous ces hypothèses, le cisaillement et le flux de chaleur sont constants dans la zone interne, ce qui permet de définir des échelles caractéristiques de vitesse  $u_\tau$  et de température  $T_\tau$  valables dans toute la zone interne. Ainsi, des profils auto-similaires peuvent être recherchés en unités de paroi sous les formes  $u^+ = f(y^+)$  et  $T^+ = f(y^+)$  qui sont appelés lois de paroi.

Un modèle de paroi analytique consiste donc à résoudre, à chaque itération du solveur LES, les équations  $\frac{\tilde{u}_1}{u_\tau} = f(y_1 u_\tau / \nu_w)$  et/ou  $\frac{\tilde{T}_1 - T_w}{T_\tau} = f(y_1 u_\tau / \nu_w)$  d'inconnues  $u_\tau$  et  $T_\tau$  (en supposant, sans perdre de généralité, que les données d'entrée du modèle de paroi sont extraites au premier point au-dessus de la paroi). En général, la méthode de Newton-Raphson est utilisée. Puis, les flux pariétaux sont donnés par  $\|\overline{\tau_w}\| = u_\tau^2 \overline{\rho_w}$  et  $\overline{\phi_w} = T_\tau \overline{\rho_w} c_p u_\tau$ . Le coût de calcul d'un modèle de paroi analytique est donc négligeable par rapport au coût de calcul d'une itération d'un solveur LES. C'est le principal avantage des modèles de paroi analytiques.

Par conséquent, comme schématisé à la figure 4.9, un modèle de paroi analytique force la vitesse instantanée  $\tilde{u}_1$  à suivre, à chaque itération du solveur LES, une loi de paroi valable en théorie uniquement en moyenne (puisque dérivée sous l'hypothèse d'un écoulement statistiquement stationnaire, c'est-à-dire d'équations RANS).

Les principales lois de paroi sont présentées au tableau 4.2. Les lois de paroi bi-couches (3.28) et (3.29), dérivées à la section 3.2, forment le modèle de paroi analytique (à l'équilibre) le plus simple. Les valeurs des constantes  $\kappa$ ,  $B$ ,  $\kappa_T(Pr)$  et  $B_T(Pr)$  ne sont pas universelles. Toutefois, comme les lois bi-couches sous-estiment les flux pariétaux dans la zone tampon, il est possible de considérer les lois de Reichardt (1951) et Kader (1981) afin de les lisser. Les profils sont alors des fonctions de  $y^+$  de classe  $C^\infty$ . La loi de paroi pour la vitesse de Spalding (1961) (non présentée ici) est une alternative et est caractérisée par une relation sous la forme  $y^+ = f(u^+)$ . Il est à noter également que dans les lois de paroi logarithmiques, la température de friction  $T_\tau$  dépend de la vitesse de friction  $u_\tau$ . Avec ces lois, l'erreur sur le frottement pariétal se répercute donc sur le flux de chaleur pariétal.

Loi (zone de validité)	Équations
Bi-couches (zones linéaire et inertielle)	$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{si } y^+ \leq \delta_v \\ \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B & \text{sinon} \end{cases}$ <p>avec <math>\kappa \simeq 0.41</math>, <math>B \simeq 5</math> et <math>\delta_v \simeq 11</math></p> $T^+ = \begin{cases} Pr y^+ & \text{si } y^+ \leq \delta_{vT} \\ \frac{1}{\kappa_T} \ln y^+ + B_T(Pr) & \text{sinon} \end{cases}$ <p>avec <math>\kappa_T \simeq \frac{1}{2.12}</math>, <math>B_T(Pr) = (3.85Pr^{1/3} - 1.3)^2 + \frac{1}{\kappa_T} \ln Pr</math> et <math>\delta_{vT} \simeq 22</math> (pour <math>Pr = 0.71</math>)</p>
Reichardt (1951) (zone interne)	$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + (B - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa) \left( 1 - \exp(-\frac{y^+}{\delta_v}) - \frac{y^+}{\delta_v} \exp(-\frac{y^+}{C}) \right)$ <p>avec <math>C \simeq 3</math> l'épaisseur de la zone linéaire</p>
Kader (1981) (zone interne thermique)	$T^+ = Pr y^+ \exp(-\Gamma) + \left( \frac{1}{\kappa_T} \ln(1 + y^+) + B_T(Pr) \right) \exp(-\frac{1}{\Gamma})$ <p>avec <math>\Gamma = \frac{0.01(Pr y^+)^4}{1 + 5Pr^3 y^+}</math></p>
Van Driest-I (zone inertielle; zone interne si loi de Reichardt (1951) utilisée dans le membre de droite)	$\frac{1}{R} \left( \arcsin \frac{R(u^+ + H)}{D} - \arcsin \frac{RH}{D} \right) = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$ $T = T_w + T_\tau Pr_t u^+ - \frac{\gamma - 1}{2} T_w Pr_t M_\tau^2 u^{+2}$ <p>avec <math>M_\tau = u_\tau / \sqrt{\gamma r T_w}</math>, <math>R = M_\tau \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2} Pr_t}</math>,</p> $H = -\frac{T_\tau}{T_w(\gamma - 1)M_\tau^2} \text{ et } D = \sqrt{1 + R^2 H^2}$
Afzal (1996), Skote et Henningson (2002) (zone inertielle)	$u^+ = \frac{1}{\kappa} \left( \ln y^+ - 2 \ln \frac{\sqrt{1 + p^+ y^+} + 1}{2} \right) + \frac{2}{\kappa} (\sqrt{1 + p^+ y^+} - 1) + B$
V. C. Patel (1973), Skote et Henningson (2002) (zone linéaire)	$u^+ = y^+ + \frac{1}{2} p^+ y^{+2}$
Afzal (1999) (zone inertielle thermique)	$T^+ = \frac{1}{\kappa_T} \ln y^+ - \frac{2}{\kappa_T} \ln \frac{\sqrt{1 + p^+ y^+} + 1}{2} + B_T(Pr)$

TABLE 4.2 – Principales lois de paroi

Le principal inconvénient d'un modèle de paroi analytique est d'avoir un domaine de validité défini par celui des lois de paroi sur lesquelles il est basé. En particulier, les lois de paroi logarithmiques ne sont valables d'un point de vue théorique que pour un écoulement incompressible, statistiquement stationnaire et bidimensionnel, soumis à un gradient de pression longitudinal nul et à un nombre de Reynolds infini. Les modèles de paroi analytiques sont donc restreints à des écoulements dont la physique pariétale est simple (de manière relative). Pour s'affranchir des hypothèses de compressibilité et de gradient de pression longitudinal nul associées à la dérivation des lois logarithmiques, il existe plusieurs possibilités. L'objectif est de ne plus supposer le cisaillement et le flux de chaleur constant dans la zone interne et ainsi de pouvoir dériver un modèle de paroi analytique hors-équilibre.

Pour prendre en compte les effets de compressibilité, l'état de l'art actuel est, comme expliqué à la section 3.6, de supposer que la transformée de Van Driest de la vitesse suit la loi logarithmique (3.28). Une loi de paroi pour la vitesse peut alors être dérivée : c'est la transformée de Van Driest-I. Cette loi de paroi a été proposée par plusieurs auteurs dont Rotta (1960) à partir des travaux de Van Driest (1951). Huang et Coleman (1994) l'ont validée sur les DNS de canal de Coleman et al. (1995) aux nombres de Mach (basés sur l'intégrale du profil de vitesse moyenne) de 1.5 et 3. Avec la transformée de Van Driest-I et la relation température-vitesse (écrite dans le tableau 4.2) nécessaire à sa dérivation, il est possible de définir un modèle de paroi analytique prenant en compte les effets de compressibilité via les variations de densité. Comme vu à la section 3.6 et effectué par Bocquet et al. (2012), il est possible en pratique de supposer que la transformée de Van Driest-I suit la loi de Reichardt (1951). Par ailleurs, contrairement aux modèles de paroi basés sur les lois logarithmiques,  $u_\tau$  et  $T_\tau$  sont couplés. Les erreurs sur  $\bar{\tau}_w$  et  $\bar{\phi}_w$  le sont donc également. Enfin, il est à noter que si la transformée de Van Driest-I se réduit bien à la loi logarithmique (3.28) dans le cas d'un écoulement incompressible le long d'une paroi adiabatique, ce n'est pas le cas lorsque la paroi est isotherme car dans ce cas, la relation température-vitesse écrite dans le tableau 4.2 ne se réduit pas à la loi logarithmique (3.29).

L'état de l'art actuel pour prendre en compte les effets d'un gradient de pression adverse est d'utiliser les lois de paroi d'Afzal (1996, 1999) (formulées dans le tableau 4.2) pour les profils de vitesse et de température. Ces lois sont obtenues par développements asymptotiques. Il est à noter que Skote et Henningson (2002) dérivent la même loi de paroi pour la vitesse via un raisonnement différent (en cherchant une échelle de vitesse permettant de produire un profil de frottement auto-similaire). Les lois d'Afzal font intervenir le gradient de pression en unités de paroi  $p^+$  comme défini par Mellor et Gibson (1966) :

$$p^+ = \frac{v_w}{\rho_w u_\tau^3} \frac{d\bar{p}}{dx}. \quad (4.35)$$

Les lois d'Afzal, qui dégénèrent bien en lois logarithmiques bi-couches (3.28) et (3.29) lorsque le gradient de pression est nul, présentent une dépendance en  $\sqrt{y^+}$ . L'existence d'une zone où le profil de vitesse en unités de paroi évolue en fonction de  $\sqrt{y^+}$  est également mise en valeur par plusieurs auteurs dont Daris (2002).

Dans la zone linéaire, comme vu à la section 3.4.1, certains auteurs dont A. Gungor et al. (2016) observent une déviation de  $u^+$  par rapport à l'asymptote  $y^+$ . Comme proposé par V. C. Patel (1973) et Skote et Henningson (2002) par une analyse d'ordre de grandeur des termes de l'équation de quantité de mouvement, il est possible de dériver une loi dans la zone linéaire prenant en compte les effets d'un gradient de pression adverse. Cette loi est écrite dans le tableau 4.2. Cependant, comme indiqué à la section 3.4.1, la déviation de  $u^+$  par rapport à l'asymptote  $y^+$  n'est pas systématiquement observée, en particulier à haut nombre de Reynolds (et même à faible nombre de Reynolds, en se référant, par exemple, aux DNS de Skote et Henningson (2002) ou de M. Lee et Moser (2015)). De toute manière, la modélisation de la sous-couche visqueuse par le modèle de paroi n'est pas primordiale puisque, comme vu à la section 4.2.1, les données d'entrée du modèle de paroi doivent être extraites dans la zone inertielle de la couche limite.

Un point important est qu'en prenant en compte le gradient de pression en unités de paroi  $p^+$ , les profils de vitesse et de température sont auto-similaires dans la zone interne si et seulement si  $p^+$  est constant, puisque désormais  $u^+ = f(y^+, p^+)$  et  $T^+ = g(y^+, p^+)$ . Mais comme montré par la figure 3.7, certains auteurs dont Monty et al. (2011) ou Vila et al. (2017) observent des profils de vitesse auto-similaires à des valeurs du gradient de pression en unités externe  $\beta$  constantes alors que  $p^+$  varie. Ces résultats indiquent que  $\beta$  semble être un paramètre plus pertinent pour dériver une loi de paroi prenant en compte un gradient de pression longitudinal. Un profil auto-similaire de la forme  $u^+ = f(y^+, \beta)$  pourrait être recherché. Toutefois, d'une part, l'intérêt d'une telle loi de paroi serait limitée en WMLES car  $\beta$ , contrairement à  $p^+$ , est une variable difficilement accessible au cours d'une itération de calcul dans un solveur CFD (par définition,  $\beta$  dépend de l'épaisseur de déplacement). D'autre part, J.-H. Lee et Sung (2009) observent une déviation de  $u^+$  par rapport à la loi logarithmique (3.28) dans la zone inertielle dès que  $\beta = 1.5$ , alors que Vila et al. (2017) n'en observent pas à  $\beta = 2.4$ . Les effets d'un gradient de pression sur le profil de vitesse dans la zone interne semblent donc être dépendants du nombre de Reynolds et ni  $\beta$ , ni  $p^+$  ne semblent pertinents pour dériver une loi de paroi.

De plus, les lois d'Azfal ne prennent pas en compte les variations des constantes additives  $B$  et  $B_T(Pr)$  qui, comme vu à la section 3.4.1, peuvent varier de manière significative. Par exemple, Skote et Henningson (2002) utilisent  $B = 1.5$  à  $p^+ = 0.069$  dans une couche limite attachée et  $B = -2$  à  $p^+ = 0.076$  dans une couche limite décollée. Par ailleurs, ces lois ne sont pas définies pour un gradient de pression favorable (c'est-à-dire  $p^+ < 0$ ), ce qui, d'un point de vue numérique, est fortement probable dans un solveur compressible instationnaire, même si l'écoulement est soumis à un gradient de pression nul en moyenne. C'est pourquoi les lois d'Azfal ne sont pas considérées dans la suite de cette étude. Au final, il n'existe pas à ce jour (et a priori) de résultats permettant de conclure qu'une loi de paroi (et donc de modèle de paroi analytique) prenant en compte les effets d'un gradient de pression longitudinal soit en pratique plus précise qu'une loi de paroi logarithmique.

Il est à noter que lorsque la couche limite décolle, la vitesse de friction  $u_\tau$  s'annule (au point de décollement, par définition) et l'échelle de vitesse  $u^+$  n'est plus définie en théorie.

Certains auteurs, dont V. C. Patel (1973) et Skote et Henningson (2002), introduisent alors une échelle de vitesse  $u_p$  basée sur le gradient de pression et définie par :

$$u_p = \left( \frac{v_w}{\rho_w} \frac{d\bar{p}}{dx} \right)^{1/3} = p^{+1/3} u_\tau. \quad (4.36)$$

Les lois  $u^+ = f(y^+, p^+)$  du tableau 4.2 peuvent alors, comme expliqué par Skote et Henningson (2002) ou A. Gungor et al. (2016), être réécrites avec cette échelle :

$$\frac{\bar{u}}{u_p} = \begin{cases} \frac{1}{2} y^{p^2} + \gamma^2 y^p & \text{dans la zone linéaire,} \\ \frac{1}{\kappa} \left( 2\sqrt{\gamma^2 + y^p} + \gamma \ln y^p \right) - \frac{2\gamma}{\kappa} \ln \left( \sqrt{\gamma^2 + y^p} + \gamma \right) + C & \text{dans la zone inertielle,} \end{cases} \quad (4.37)$$

avec  $y^p = y u_p / \nu_w$  et  $\gamma = u_\tau / u_p$ . Ces lois offrent l'avantage d'être bien définies lorsque  $u_\tau$  s'annule, c'est-à-dire au point de décollement. En revanche, en plus d'être non définies dans le cas d'un gradient de pression favorable ( $u_p$  est non définie), elles le sont aussi dans le cas d'un gradient de pression nul ( $u_p = 0$ ). De plus, de même que pour les lois d'Azfal, les constantes additives restent fortement dépendantes du gradient de pression. De toute manière, comme expliqué dans la suite à la section 4.4, un modèle de paroi a peu de sens lorsqu'une couche limite est décollée.

Afin de proposer une loi valable quel que soit l'état de la couche limite turbulente (attachée ou décollée, soumise à un gradient de pression adverse ou favorable), Shih et al. (1999) proposent une loi de paroi définie à partir de l'échelle de vitesse  $u_c = u_\tau + u_p$  avec cette fois  $u_p = (v_w / \rho_w) \left| \frac{d\bar{p}}{dx} \right|$ .  $u_c$  est ainsi toujours strictement positive. Par une analyse d'ordre de grandeur et en décomposant la solution selon l'état de la couche limite (attachée ou décollée), Shih et al. (1999) obtiennent une loi de paroi équivalente à une combinaison linéaire de deux lois logarithmiques : une pour la couche limite attachée (3.28) et une pour la couche limite décollée (comme dérivé par Tennekes et Lumley (1972)). Ces deux lois sont pondérées respectivement par  $u_\tau / u_c$  et  $u_p / u_c$ . Ainsi, la loi de Shih et al. (1999) dégénère bien en loi logarithmique pour une couche limite soumise à un gradient de pression nul. Toutefois, la précision de cette loi est basée sur l'existence d'une loi logarithmique (en se basant sur l'échelle  $u_p$ ) lorsque la couche limite est décollée, ce qui n'est pas confirmé à ce jour. Par ailleurs, bien qu'étant bien définie dans le cas d'un gradient de pression favorable, cette loi n'est pas en accord avec les observations de la section 3.4.2. Enfin, la loi de Shih et al. (1999) reste sujette à l'incertitude entourant les constantes de la loi logarithmique. C'est pourquoi, cette loi de paroi n'est pas considérée dans le cadre de cette étude.

En résumé, un modèle de paroi analytique estime les flux pariétaux en imposant les profils de vitesse et de température à suivre à chaque itération du solveur LES des lois de parois. Ces lois sont principalement basés sur les lois de paroi logarithmiques.



Le principal intérêt des modèles de paroi analytiques est d'avoir un coût de calcul négligeable. En revanche, leur domaine de validité est restreint à des géométries simples. La finalité de ces travaux étant la simulation des écoulements présents dans les turbomachines avec une approche WMLES, il est notamment primordial que le modèle de paroi considéré prenne en compte les effets d'un gradient de pression. Bien qu'il existe en théorie de telles lois de paroi, leur utilisation en pratique soulève plusieurs questions. De plus, il n'existe pas a priori de résultats permettant de conclure quant à leur apport en terme de précision par rapport aux lois de parois classiques.

Un modèle de paroi analytique n'est donc pas adapté à la problématique de ces travaux.

### 4.3.3 Modèles de paroi numériques

Les modèles de paroi numériques sont, par définition, constitués d'une ou plusieurs équations différentielles basées, en général, sur les équations de couche limite (U)RANS (3.1). Les flux pariétaux  $\|\overline{\tau_w}\|$  et  $\overline{\phi_w}$  sont reliés implicitement aux données d'entrée extraites dans le champ LES. Bien que les équations d'un modèle de paroi numérique soient valables dans toute la couche limite, il est préférable, comme expliqué à la section 4.2.1, que les données d'entrée soient issues de la zone inertielle de la couche limite.

Un modèle de paroi numérique consiste donc à résoudre un système d'équations différentielles partielles à chaque itération du solveur LES, comme schématisé à la figure 4.10. Au cours de la résolution de ce système, les profils de vitesse et de température sont calculés sur un maillage secondaire. En général, ce maillage est intégré au maillage LES, c'est-à-dire coïncident dans les directions parallèles à la paroi, et seule la répartition des points dans la direction normale à la paroi est à définir. Cette répartition peut être calculée automatiquement, comme dans les modèles de Monfort et al. (2010) et Bocquet et al. (2012) où les équations sont intégrées sur des points de Gauss-Legendre. Un contre-exemple notable est le modèle de Park et Moin (2014) où un maillage non-coïncident est utilisé pour résoudre les équations URANS complètes à l'aide d'un solveur URANS dédié.

Une fois les équations différentielles résolues, les flux pariétaux  $\overline{\tau_w}$  et  $\overline{\phi_w}$  sont donnés par l'estimation des gradients  $\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}$  évalués à la paroi. Les conditions limites des équations sont celles de la condition de non-glissement à la paroi ainsi que les données d'entrée du modèle de paroi extraites dans le champ LES. Si les équations d'un modèle de paroi numérique sont de nature (U)RANS (comme considéré ici), alors il est à noter que le système d'équations est mal posé (de même que pour un modèle de paroi analytique), comme indiqué à la section 4.2.3.

Le principal avantage des modèles de paroi numériques par rapport aux modèles analytiques est d'avoir un domaine de validité plus étendu. En effet, si les modèles de paroi analytiques sont principalement basés sur les lois logarithmiques (3.28) et (3.29) dont la dérivation requiert beaucoup d'hypothèses comme expliqué à la section 4.3.2, les modèles de paroi numériques peuvent prendre en compte plus de phénomènes physiques (instationna-

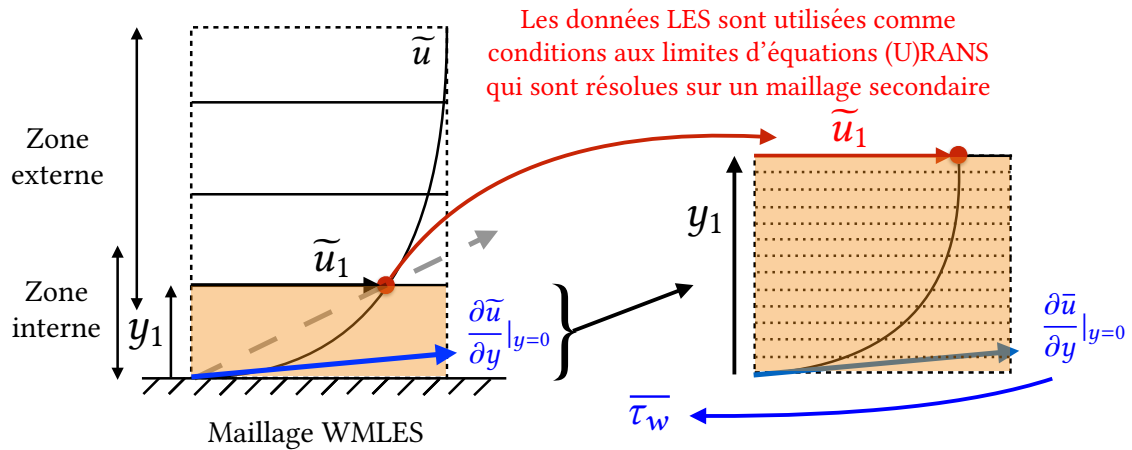


FIGURE 4.10 – Principe du calcul du frottement pariétal en WMLES à l'aide d'un modèle de paroi numérique

rité, convection...) suivant les équations différentielles considérées. De plus, ces équations ne supposent pas l'existence d'un profil de vitesse auto-similaire dans la zone interne de la couche limite (sauf éventuellement à travers le modèle de turbulence utilisé, comme expliqué à la fin de cette section).

En revanche, le principal inconvénient des modèles de paroi numériques par rapport aux modèles analytiques est leur coût de calcul beaucoup plus élevé, même si, évidemment, ce surcoût de calcul est relatif à la complexité du système d'équations à résoudre. Par ordre de complexité, les principaux modèles de paroi numériques considèrent les équations :

1. De couche limite bidimensionnelles à l'équilibre, comme Bocquet et al. (2012) (qui proposent une extension aux écoulements compressibles du modèle de paroi de Monfort et al. (2010)) :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ (\bar{\mu} + \bar{\mu}_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = 0, \quad (4.38a)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (4.38b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ -(\bar{\lambda} + \bar{\lambda}_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{u}(\bar{\mu} + \bar{\mu}_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = 0, \quad (4.38c)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} r \bar{T}. \quad (4.38d)$$

Ces équations permettent de définir le modèle de paroi numérique le plus simple à implémenter et à résoudre (et donc le moins coûteux en temps de calcul). Seuls les termes de diffusion normale à la paroi sont pris en compte. Les termes instationnaires, de convection et de gradient de pression sont supposés se compenser. Le modèle de paroi est alors en-équilibre. Bien que les lois logarithmiques soient une solution de ces équations (comme montré à la section 3.2), l'intérêt de les résoudre numériquement

est de pouvoir prendre en compte les effets de compressibilité et aussi thermiques, comme expliqué par Larsson et al. (2016). Comme indiqué ci-dessus, Monfort et al. (2010) et Bocquet et al. (2012) intègrent ces équations sur un maillage unidimensionnel composé de points de Gauss-Legendre. Par ailleurs, si l'écoulement est incompressible, l'équation (4.38c) n'a pas besoin d'être résolue et le modèle de paroi (4.38) se réduit à celui de Monfort et al. (2010).

Une hypothèse importante dans les équations de couche limite (3.1) est que les variations de pression selon la normale à la paroi sont négligées. Dans le contexte WMLES, ce résultat n'est pas sans conséquence. En effet, sous cette hypothèse, la pression est une donnée d'entrée issue du champ LES et n'a pas à être résolue par le modèle de paroi numérique.

En revanche, si la couche limite est hors-équilibre, les flux peuvent être mal prédits et donc des modèles de paroi basés sur des équations de couche limite hors-équilibre sont nécessaires ;

2. De couche limite bidimensionnelles à l'équilibre avec la prise en compte du terme de gradient de pression :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ (\bar{\mu} + \bar{\mu}_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \quad (4.39a)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (4.39b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ -(\bar{\lambda} + \bar{\lambda}_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{u}(\bar{\mu} + \bar{\mu}_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = 0, \quad (4.39c)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} r \bar{T}. \quad (4.39d)$$

Avec ces équations, le modèle de paroi numérique hors-équilibre le plus simple peut être formé, comme développé par Monfort et al. (2010) et Bocquet et al. (2012). Les travaux de Bocquet et al. (2012) ne permettent toutefois pas de quantifier l'intérêt de prendre en compte le terme de gradient de pression car dans le cas considéré (un canal plan bipériodique), ce terme est nul en moyenne. Sur un canal périodique avec une paroi bossue (appelé *hill flow* dans la littérature), Monfort et al. (2010) n'observent pas de différence sur les profils de vitesses moyennes lorsque le gradient de pression longitudinal est pris en compte dans les équations du modèle de paroi. Ces derniers notent toutefois une meilleure prédiction des fluctuations turbulentes.

L'étude de Hickel et al. (2012) est plus discriminante. En effet, en analysant le champ moyen d'une LES résolue d'une couche limite turbulente soumise à un gradient de pression adverse et d'une interaction choc/couche limite turbulente, ces derniers observent que les profils des termes de convection et de gradient de pression se compensent. En se basant sur cette étude, il est donc primordial de prendre en compte soit les termes de convection et de gradient de pression, soit aucun des deux ;

3. De couche limite tridimensionnelles complètes. Cette approche n'est, à priori, pas

considérée avec des solveurs compressibles dans la littérature. En supposant l'écoulement incompressible, ces équations se réduisent à :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (4.40a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\bar{\mu} + \bar{\mu}_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right], \quad (4.40b)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (4.40c)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\bar{\mu} + \bar{\mu}_t) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right], \quad (4.40d)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} r \bar{T}, \quad (4.40e)$$

et sont considérées, par exemple, par Cabot et Moin (2000) et M. Wang et Moin (2002). La vitesse normale à la paroi est, en général, déterminée en intégrant l'équation de continuité (4.40a). L'équation d'énergie n'est pas prise en compte dans le cadre d'un solveur incompressible.

Ici encore, la pression est supposée constante selon la normale à la paroi. C'est donc une donnée du champ LES qui n'a pas besoin d'être calculée par le modèle de paroi. En revanche, au lieu de considérer des équations RANS stationnaires prenant en compte les effets de la zone interne en moyenne, les équations (4.40) sont de nature URANS, ce qui permet de prendre en compte les basses fréquences. Un schéma temporel est alors requis. Il est d'usage de considérer soit un schéma Euler explicite (Yang et al. (2015)), soit le même schéma que celui utilisé pour résoudre les équations LES (M. Wang et Moin (2002)). De même, la prise en compte des termes convectifs requiert l'utilisation d'un schéma convectif, qui est en général soit un schéma centré d'ordre deux (Balaras et Benocci (1996)), soit le même que celui du champ LES (M. Wang et Moin (2002)).

Il est à noter que Balaras et Benocci (1996) considèrent une forme simplifiée des équations (4.40) en ne prenant en compte que les termes bidimensionnels de convection :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (4.41a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\bar{\mu} + \bar{\mu}_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right], \quad (4.41b)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (4.41c)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}\bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\bar{\mu} + \bar{\mu}_t) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right], \quad (4.41d)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} r \bar{T}. \quad (4.41e)$$

4. URANS complètes (2.36), comme Kawai et Larsson (2013) avec un solveur structuré et Park et Moin (2014) avec un solveur non-structuré (dont l'implémentation est détaillée par Park et Moin (2016)). Park et Moin (2014) proposent, a priori, la première implémentation d'un modèle de paroi hors-équilibre dans un solveur non-structuré. Les équations URANS constituent le modèle de paroi numérique le plus complet, mais aussi le plus coûteux à résoudre et le plus complexe à implémenter.

Il est à noter que Kawai et Larsson (2013) et Park et Moin (2014) intègrent les équations URANS du modèle de paroi avec un schéma temporel implicite d'ordre deux afin de ne pas être limité par la contrainte CFL, alors que le champ LES est intégré avec un schéma explicite de Runge-Kutta.

Si Kawai et Larsson (2013) résolvent les équations URANS sur un maillage intégré au maillage LES, Park et Moin (2014) vont plus loin en couplant leur solveur LES non-structuré avec un solveur URANS structuré ayant le rôle de modèle de paroi. Le solveur URANS requiert un maillage dédié autour des parois dont les couches limites sont modélisées. Les données d'entrée (c'est-à-dire les conditions aux limites) du solveur URANS sont obtenues par interpolation du champ LES à une certaine distance de la paroi, où la turbulence pariétale est mieux résolue, comme expliqué à la section 4.2.3. Toutefois, comme indiqué dans cette section, calculer les flux pariétaux à partir de données d'entrée situées au-dessus de la première rangée de cellules adjacentes à la paroi soulève des questions en terme de stabilité numérique, sans compter que la qualité de ces données dépend de l'algorithme d'interpolation utilisé. D'autre part, l'étape d'interpolation des données d'entrée du solveur URANS nécessite la lecture de la connectivité à chaque itération, augmentant le temps de calcul associé à la modélisation de paroi. En particulier, Park et Moin (2016) observent que la construction de cet algorithme d'interpolation (effectuée à l'initialisation du calcul) coûte autant en temps de calcul que 200 à 1000 itérations du solveur selon le cas considéré.

Mais le principal inconvénient de l'approche de Park et Moin (2014) est du point de vue du parallélisme. En effet, comme expliqué par Park et Moin (2016), le couplage entre deux solveurs induit des problèmes en terme de répartition de charge des unités de calcul. Ces derniers essayent deux stratégies. Dans la première stratégie, chaque solveur a un groupe de processeur dédié, mais cela entraîne une répartition de charge non optimale puisque lorsqu'un solveur tourne, les processeurs de l'autre solveur sont inactifs. Dans la seconde stratégie, chaque solveur utilise l'ensemble des processeurs, ce qui permet de limiter les moments d'inactivités d'un ou plusieurs processeurs. En revanche, dans ce cas, le nombre de processeurs pouvant être utilisé est limité par le nombre de degrés de libertés du maillage secondaire du solveur URANS. Park et Moin (2016) observent que la première stratégie est 10–15% plus rapide que la seconde.

L'intérêt, par rapport à une LES résolue à la paroi, d'un modèle de paroi résolvant des équations différentielles sous le formalisme (U)RANS est de pouvoir, d'une part, considérer des équations simplifiées et, d'autre part, résoudre ces équations sur un maillage suivant les préconisations de maillage (U)RANS dans la direction normale à la paroi (et aussi dans les

autres directions pour le modèle de Park et Moin (2014)).

La prise en compte de termes de convection réduit l'efficacité du parallélisme du solveur CFD (puisque un nombre plus important de données doit être échangé entre chaque cellule), tout en augmentant la difficulté d'implémentation du modèle de paroi. En outre, un point à remarquer est que le coût de résolution d'un modèle de paroi numérique (même à l'équilibre) varie non-linéairement avec le nombre de Reynolds. En effet, l'intégration de leur équations différentielles requiert, comme indiqué par Bocquet et al. (2012), un nombre de degrés de libertés plus important quand le nombre de Reynolds augmente et a un coût de calcul non-linéaire comme mesuré, par exemple, au chapitre 5 pour un modèle de paroi numérique à l'équilibre. Ainsi, bien que certains auteurs donnent une estimation du surcoût de calcul induit par un modèle de paroi numérique par rapport à une itération du solveur LES, il est important de se rappeler que ce surcoût dépend à la fois des équations considérées (leur complexité, l'efficacité de la méthode numérique choisie pour leur résolution, du nombre de degrés de libertés nécessaire à leur résolution qui est fonction du nombre de Reynolds), mais aussi et surtout du ratio entre le nombre de cellules adjacentes à la paroi sur le nombre de cellules totales dans le domaine. Ce ratio peut être important dans des écoulements internes, notamment dans les turbomachines.

Il est à noter que, contrairement aux modèles de paroi analytiques, si la paroi est adiabatique, le coût de calcul d'un modèle de paroi numérique dans un solveur compressible n'est pas réduit de manière significative par rapport au cas d'une paroi isotherme, comme mesuré par exemple au chapitre 5 pour un modèle de paroi numérique à l'équilibre. En effet, même si le flux de chaleur pariétal est nul et n'a donc pas besoin d'être calculé, le profil de température doit toujours être calculé. Le gain en temps de calcul est donc simplement lié à une simplification de l'équation d'énergie.

Par ailleurs, les équations des modèles de paroi numériques étant de nature (U)RANS, un modèle de turbulence est requis pour fermer le système d'équations. Si un modèle à équation de transport est utilisé, une condition limite peu évidente à formuler sur la variable turbulente doit être donnée. C'est pourquoi en général, comme indiqué par Larsson et al. (2016), un modèle de turbulence à longueur de mélange de la forme :

$$\bar{\mu}_t(y) = \bar{\rho} \kappa u_\tau y (1 - VD_A(y))^2 \quad (4.42)$$

est utilisé, par exemple par Cabot et Moin (2000), M. Wang et Moin (2002) et Kawai et Larsson (2013). La longueur de mélange est choisie égale à  $\kappa y$  en accord avec l'existence d'une loi logarithmique dans la zone inertielle.  $VD_A$  est la fonction d'amortissement de Van Driest définie par :

$$VD_A(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A}\right), \forall A \in \mathbb{R}^*. \quad (4.43)$$

Cette fonction permet d'étendre la validité du modèle à longueur de mélange dans toute la zone interne.  $A$  est généralement choisie égale à 17. D'autres formes du modèle à longueur

de mélange peuvent être choisies, comme celle utilisée par Bocquet et al. (2012) :

$$\bar{\mu}_t(y) = \bar{\rho}(\kappa y VD_{26}(y))^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|(y). \quad (4.44)$$

La solution d'un modèle de paroi numérique est, comme pour un solveur (U)RANS, très sensible au modèle de turbulence choisie. D'ailleurs, certains auteurs proposent de corriger la viscosité turbulente afin de, par exemple, réduire l'erreur liée à l'introduction de données LES instationnaires dans des équations RANS stationnaires (Bocquet et al. (2012)), ou imposer un frottement calculé par le solveur LES égal à celui calculé par le modèle de paroi numérique au point d'extraction des données d'entrée du modèle de paroi (M. Wang et Moin (2002)). Dans le deuxième cas, Kawai et Larsson (2013) proposent également de faire varier cette correction selon la distance à la paroi pour tenir compte de l'amortissement du frottement turbulent à l'approche de la paroi induit par l'anisotropie des cellules du maillage où sont résolues les équations du modèle de paroi. Ces derniers obtiennent alors, sur des couches limites supersoniques avec ou sans choc, des profils de vitesses non décalés avec la loi logarithmique (après transformation de Van Driest) et donc une meilleure estimation du coefficient de frottement pariétal.

Pour améliorer la prédiction des écoulements compressibles par ces modèles à longueur de mélange, il est possible d'introduire dans la fonction d'amortissement de Van Driest (4.43) l'échelle  $y_3^+$  définie par :

$$y_3^+ = \frac{\rho \sqrt{\tau_w} / \rho y}{\mu} = \frac{u_\tau \sqrt{\rho_w \rho}}{\mu}, \quad (4.45)$$

aussi notée  $y^*$  dans la littérature. Cette échelle utilise les valeurs locales de la densité et de la viscosité afin de tenir compte des effets de compressibilité. Comme indiqué par Aupoix et Viala (1995), elle peut être obtenue à partir d'une analyse dimensionnelle (Coakley et P. (1992)) ou par extension des travaux de Van Driest (Cebeci et A. Smith (1974)). En utilisant cette échelle dans des modèles de turbulence à longueur de mélange, Aupoix et Viala (1995) obtiennent une meilleure estimation des flux pariétaux sur des couches limites supersoniques (dans les cas d'une paroi isotherme ou adiabatique). De même, en introduisant cette échelle dans les équations d'un modèle de paroi numérique à l'équilibre, Bocquet et al. (2012) observent une meilleure estimation des flux pariétaux sur une WMLES d'un canal plan supersonique.

Si l'équation d'énergie (ou une forme simplifiée) est considérée, la conductivité thermique turbulente  $\bar{\lambda}_t$  doit également être modélisée. Elle peut être modélisée à partir d'un modèle à longueur de mélange, comme celui proposé par Cebeci et A. Smith (1974) et utilisé par Bocquet et al. (2012) dans un modèle de paroi numérique à l'équilibre :

$$\bar{\lambda}_t(y) = \bar{\rho} c_p (\kappa y)^2 VD_{26}(y) VD_{35}(y) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|(y), \quad (4.46)$$

qui prend en compte les variations du nombre de Prandtl turbulent avec la distance à la paroi.

$\bar{\lambda}_t$  peut également être modélisée par analogie avec la loi de Fourier et donc exprimée à partir de  $\bar{\mu}_t$  et  $Pr_t$  (voir (2.32)). Dans ce cas, le nombre de Prandtl turbulent doit être modélisé, et même corrigé d'après Kawai et Larsson (2013).

En résumé, un modèle de paroi numérique estime les flux pariétaux en résolvant à chaque itération du solveur LES un système d'équations différentielles, généralement basé sur les équations de couche limite (U)RANS (sensibles au modèle de turbulence utilisé). Une fois les profils de vitesse et de température déterminés, leur gradient à la paroi permet d'estimer les flux pariétaux.

Le principal intérêt des modèles de paroi numériques est d'avoir un domaine de validité plus étendu que les modèles de paroi analytiques, au prix d'un coût de calcul beaucoup plus élevé. L'étendu de ce domaine et ce surcoût de calcul dépendent de la complexité des équations différentielles considérées.

Compte tenu de la finalité de ces travaux, à savoir la simulation des écoulements présents dans les turbomachines avec une approche WMLES, il est important que le modèle de paroi considéré prenne en compte les effets d'un gradient de pression. Le terme de gradient de pression étant couplé à ceux de convection, il est également nécessaire d'inclure ces derniers dans les équations du modèle de paroi. C'est pourquoi, un modèle de paroi basé au moins sur l'équation (3.6b) est requis pour répondre à la problématique de ces travaux. Pour pouvoir être appliqué sur des configurations à géométries complexes, ses équations doivent également être résolues sur un maillage défini automatiquement.

#### 4.4 Domaine de validité d'une approche WMLES

Avant d'utiliser une approche WMLES pour simuler les écoulements existants dans des géométries complexes, il est vital de rappeler que les modèles de paroi n'ont pas vocation à modéliser l'ensemble des couches limites pouvant exister, mais seulement un certain type : les couches limites turbulentes attachées à haut nombre de Reynolds.

En effet, une approche WMLES, qui consiste à modéliser la zone interne d'une couche limite à partir d'informations de sa zone externe, n'est justifiée que pour les écoulements à hauts nombres de Reynolds : il est nécessaire que l'énergie cinétique turbulente de la couche limite soit majoritairement contenue dans la zone externe et que cette zone influe la zone interne sans rétroaction.

Cette notion de haut nombre de Reynolds dépend également de l'estimation du coût de calcul en LES d'une couche limite turbulente attachée incompressible illustrée à la figure 4.1. À  $Re_{L_x} \lesssim 10^6$ , il n'y a pas d'intérêt de modéliser la zone interne car son coût de résolution est inférieur ou équivalent à celui de la zone externe. Cela signifie aussi que lorsqu'une couche limite spatiale est calculée, l'ensemble de la paroi situé en amont de  $Re_{L_x} \lesssim 10^6$  et où la couche limite est turbulente devrait être résolu comme en LES plutôt qu'être traité avec



une approche WMLES. En particulier, si le nombre de Reynolds basé sur la corde d'un profil d'aile ou d'une aube de turbomachine est inférieur ou égal à  $10^6$ , alors une modélisation de paroi n'est utile (et justifiée) que vers le bord de fuite. Cette idée est illustrée par Larsson et al. (2016) à la figure 4.11. En se basant sur des préconisations de maillage LES et WMLES semblables à celles données dans les sections 4.1.1 et 4.1.2, ces derniers estiment que pour  $Re_\tau \lesssim 600$ , utiliser une approche WMLES afin de modéliser la zone interne ne réduirait le nombre de degrés de libertés qu'au plus d'un facteur deux par rapport à une approche LES. Bien qu'étant non-négligeable, ce gain ne compense pas la perte en précision associée.

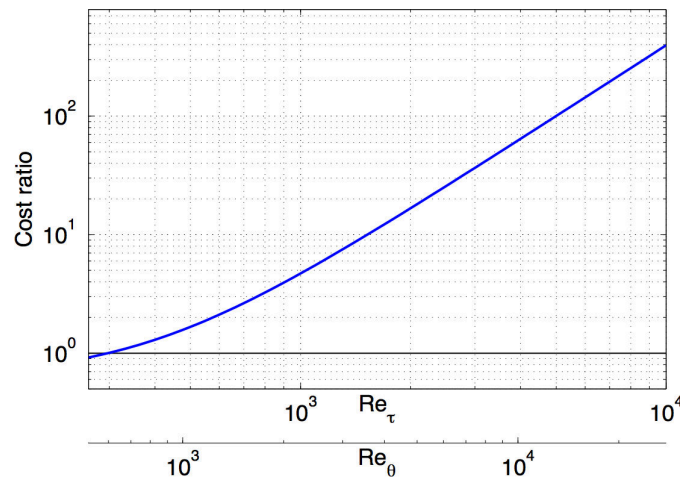


FIGURE 4.11 – Ratio entre le nombre de points requis pour résoudre un élément de taille  $\delta^3$  (avec  $\delta$  l'épaisseur de couche limite locale) en LES et celui requis en WMLES, d'après Larsson et al. (2016)

#### 4.4.1 Domaine de validité des modèles de paroi

En plus des limitations physiques (structure de la couche limite, séparation des échelles dans les zones interne et externe...) intrinsèques associées à l'approche WMLES, le domaine de validité des modèles de paroi doit également être pris en compte. Les lois de paroi constituant les modèles de paroi analytiques sont principalement basées sur les lois logarithmiques pour les profils de vitesse (3.28) et de température (3.29). Comme expliqué à la section 3.2, leur dérivation (et donc leur éventuelle existence) requiert plusieurs hypothèses. L'écoulement dans la couche limite est supposé :

1. Incompressible ;
2. Statistiquement stationnaire ;
3. Statistiquement bidimensionnel ;
4. Soumis à un gradient de pression nul ;
5. Se développer le long d'une plaque plane ;
6. Être à un nombre de Reynolds infini.

La couche limite est alors attachée. Comme indiqué à la section 4.3.2, ces hypothèses empêchent, en théorie, d'appliquer un modèle de paroi analytique à des configurations à géométries complexes. L'hypothèse d'écoulement statistiquement bidimensionnel est toutefois à relativiser dans un cadre WMLES puisque le point d'entrée du modèle de paroi étant situé très près de la paroi, seule une fraction de l'épaisseur de couche limite doit être statistiquement bidimensionnelle.

Grâce à un modèle de paroi numérique, et selon la complexité des équations le constituant, il est possible de s'affranchir d'une partie ou de l'ensemble des cinq premières hypothèses. Mais même avec le plus complexe des modèles de paroi numériques actuelles, l'hypothèse d'un écoulement à un nombre de Reynolds infini ne peut qu'être simplifiée à une hypothèse d'écoulement pleinement turbulent. En effet, les équations d'un modèle de paroi sont de nature (U)RANS, donc pleinement turbulentes comme expliqué à la section 2.5.

De même, les modèles de turbulence classiques (et en particulier les modèles à longueur de mélange utilisés dans la plupart des modèles de paroi numériques) ne sont pas adaptés pour traiter des couches limites décollées. En pratique, le modèle de paroi (analytique ou numérique) continue d'être appliqué et n'empêche pas d'obtenir des résultats satisfaisants, comme M. Wang et Moin (2002) sur le bord de fuite d'un profil d'aile. Cela peut s'expliquer par le fait que lorsque la couche limite est décollée, le frottement pariétal est, par définition, quasi-nul et n'influe plus de manière prépondérante sur la qualité de la solution. Une erreur importante sur la prédiction du frottement pariétal (due à la fois au contenu physique du modèle de paroi utilisé et à la disparition des zones interne et externe et donc, de la séparation des échelles associées entre ces zones) est alors, à priori, négligeable.

#### 4.4.2 Cas d'une couche limite transitionnelle

Lorsque la couche limite est transitionnelle, l'utilisation d'un modèle de paroi et même d'une approche WMLES dans les zones laminaire et transitionnelle n'est pas justifiée pour les raisons évoquées ci-dessus. Pour pouvoir bénéficier d'une approche WMLES dans la partie turbulente, il y a alors deux problématiques. Il faut :

1. Capturer la transition;
2. Détecter la transition.

Une simulation WMLES restant de nature LES, la première problématique ne peut être adressée qu'en résolvant la transition avec un maillage assez fin. Les préconisations de maillage dépendent alors de la nature de la transition qui est, comme expliqué à la section 1.2.1, généralement induite :

- naturellement;
- par *bypass*;
- par rugosité;
- par un bulbe de décollement.

Si en pratique, comme expliqué à la section 4.1.3, les préconisations de maillage pour résoudre la zone interne d'une couche limite turbulente (4.17) sont appliquées et jugées suffisantes pour capturer la transition d'une couche limite, il est à noter que dans les cas d'une transition induite par *bypass* ou par un bulbe de décollement, il n'est pas nécessaire de recourir à un maillage aussi fin. En effet, dans le premier cas, la transition est provoquée par des instabilités dont les dimensions sont liées à celles de la turbulence extérieure à la couche limite. Dans le deuxième cas, bien que plus petites que dans le premier cas, les instabilités restent plus faciles à capturer que les ondes de Tollmien-Schlichting.

En résumé, même dans le cadre d'une approche WMLES, un maillage équivalent à celui utilisé en LES doit être construit dans les zones non turbulentes. Cela est d'autant plus vrai qu'en général, les zones laminaires correspondent à des épaisseurs de couches limites très faible (comme sur un bord d'attaque de profil d'aile ou d'aube).

La deuxième problématique est également importante. En effet, si les flux pariétaux sont estimés à l'aide d'un modèle de paroi basé sur des équations (U)RANS dans la partie laminaire de la couche limite, alors ils sont surestimés car dans ce cas, les profils de vitesse et de température sont mieux approximés par une loi linéaire que par une loi logarithmique. Utiliser une loi linéaire revient à approximer le gradient de vitesse pariétal par une différence finie, comme dans une LES résolue à la paroi. Il est à noter que lorsqu'un modèle de paroi numérique est considéré, plutôt que de désactiver le modèle de paroi, il est possible d'imposer une viscosité turbulente nulle dans ses équations. En effet, les équations de couche limite turbulente et laminaire ne diffèrent que par le terme de diffusion turbulente. Néanmoins, la question de déterminer a priori le point de transition de la couche limite reste entière. Par exemple, pour simuler un profil d'aile, Kawai et Asada (2013) impose une viscosité turbulente nulle en amont du point de transition, mais ce dernier est estimé à partir de la LES résolue à la paroi de Mary et Sagaut (2002).

Pour distinguer les zones laminaires au cours du calcul, Bodart et Larsson (2012) proposent d'introduire un senseur  $s_{tl}$  défini par :

$$s_{tl}(t) = \frac{\langle \sqrt{u'_i u'_i / 2} \rangle}{\langle u_\tau \rangle}, \quad (4.47)$$

avec  $\langle . \rangle$  un opérateur de filtrage temporel, basé sur une moyenne mobile exponentielle afin de pouvoir calculer les valeurs filtrées uniquement à l'aide de deux itérations (celle en cours et la précédente). Les fluctuations de vitesse  $u'_i$  sont également définies à partir de ce filtrage :  $u'_i = \tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i \rangle$ . Ce senseur, calculé à chaque point où les données d'entrée du modèle de paroi sont extraites, vise à mesurer l'énergie cinétique turbulente moyenne locale normalisée par la vitesse de friction locale. En théorie, lorsque la couche limite est laminaire, ce senseur est strictement nul. Ainsi, si le senseur dépasse une valeur seuil (définie par l'utilisateur), la couche limite est considérée comme localement turbulente. Sinon, le modèle de paroi peut être désactivé, la viscosité turbulente constituant ses équations (dans le cas d'un modèle numérique) mise à zéro ou remplacé par une loi de Blasius. Néanmoins, sur des cas où la couche limite est laminaire mais périodiquement perturbée (comme un bord d'attaque

d'une aube de turbomachine impacté par de la turbulence provenant, par exemple, du sillage turbulent de l'aube amont), alors le senseur risque de déclarer le bord d'attaque comme turbulent (car la moyenne temporelle de l'énergie cinétique turbulente sera strictement positive) alors qu'en réalité, il ne l'est pas. De plus, la valeur seuil associée au senseur doit être définie par l'utilisateur, et semble dépendante de la configuration étudiée. Il semble donc difficile d'utiliser un tel senseur sur des configurations à géométries complexes.

C'est pourquoi, dans la littérature, les modèles de paroi sont, en général, validés sur des couches limites statistiquement bidimensionnelles se développant soit le long de parois planes en étant pleinement turbulentes (canal turbulent bipériodique, couche limite avec injection de turbulence en entrée...), soit sur des profils d'ailes où la transition à la turbulence est localisée près du bord d'attaque (comme sur un NACA4412).

En conclusion, un modèle de paroi est en théorie valable uniquement pour des couches limites turbulentes attachées. Pour pouvoir exploiter une approche WMLES, le nombre de Reynolds doit également être suffisamment élevé pour, d'une part, justifier la modélisation de la zone interne à partir d'informations extraites dans la zone externe et, d'autre part, pour que cette modélisation soit utile. En effet, le coût de résolution de la zone interne est excessif vis-à-vis de celui de la zone externe uniquement à haut nombre de Reynolds, comme montré à la figure 4.1. L'approche WMLES permet ainsi de réduire la forte dépendance d'un maillage LES au nombre de Reynolds pour résoudre la zone interne d'une couche limite turbulente attachée. En-dehors de cette région, le coût de calcul par rapport à une approche LES est inchangé, notamment dans la zone externe et dans les régions laminares et/ou décollées.

Par ailleurs, dans un contexte turbomachine, une approche WMLES est facilement justifiable pour les écoulements dans les compresseurs. En effet, ces derniers sont à un nombre de Reynolds élevé ( $\sim 10^6$  pour celui basé sur la corde de l'aube, d'après J. C. Tyacke et Tucker (2015)) et sont en plus caractérisés par des gradients de pression adverses dont la plupart des effets sont équivalents à ceux associés à une augmentation du nombre de Reynolds de la couche limite, comme montré à la section 3.4.1.

Au contraire, l'utilisation d'une approche WMLES pour des écoulements de turbines basse pression n'est pas un cas favorable car ils sont à un nombre de Reynolds modéré ( $\sim 10^5$ ) et sont caractérisés par des gradients de pression favorables favorisant la relaminarisation des couches limites, comme expliqué à la section 3.4.2. Cependant, sur la plage de leur nombre de Reynolds, une LES est déjà accessible en terme de coût de calcul, comme expliqué par J. Tyacke et al. (2013).

Concernant les turbines haute pression, leur écoulement est souvent à un nombre de Reynolds suffisamment élevé pour qu'une approche WMLES reste possible, les effets associés aux gradients de pression favorables étant contrebalancés par les systèmes de refroidissement introduits sur les aubes. En effet, ces systèmes contribuent à l'épaississement des couches limites et donc à l'augmentation de leur nombre de

Reynolds de frottement.

D'ailleurs, il est important de noter que lorsqu'une couche limite est soumise à un gradient de pression, la valeur du nombre de Reynolds basé sur la corde est à relativiser. En effet, la vitesse à l'extérieure de la couche limite n'est plus constante et l'évolution des flux pariétaux est également modifiée par rapport au cas d'un gradient de pression nul. En toute rigueur, c'est le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau$  qui importe dans un contexte WMLES. Cependant, il est rarement communiqué dans une turbomachine (car plus difficile à évaluer).

## 4.5 Présentation d'une autre classe de méthodes hybrides RANS-LES : la DES

L'approche WMLES n'est pas la seule méthode hybride RANS-LES existante. L'autre principale méthode est l'approche DES (*Detached-Eddy Simulation*), qui référence un ensemble de méthodes hybrides RANS-LES. L'objectif reste identique à celui de la WMLES : s'affranchir du coût de calcul excessif de la LES en proche paroi à haut nombre de Reynolds. Dans le cadre de ces travaux, les méthodes DES n'ont pas été considérées principalement par contrainte de temps. Elles sont présentées ici uniquement dans un but bibliographique. C'est pourquoi, seule l'approche DES originale proposée par Spalart et al. (1997) est présentée en détail dans la suite afin de situer cette classe de méthode par rapport à la WMLES. Ses principales variantes sont ensuite décrites succinctement. Enfin, une comparaison entre l'approches WMLES et l'approche DES originale est proposée, même s'il est acquis que cette comparaison est biaisée. En effet, il est admis dans la littérature que les variantes de la DES permettent de résoudre certains de ses défauts et que cette dernière ne représente plus l'état de l'art de la classe des approches DES. Une revue plus complète est proposée, par exemple, par Fröhlich et Terzi (2008), Spalart (2009), Laraufie (2012) ou Sagaut et al. (2013).

### 4.5.1 Présentation de la DES97

L'approche DES, proposée par Spalart et al. (1997) et notée DES97 dans la suite, vise à contourner les limites de la modélisation (U)RANS pour les écoulements décollés en traitant ces régions avec une modélisation LES. L'objectif est donc de résoudre les couches limites attachées avec une modélisation URANS et LES pour les zones décollées, ce qui permet de limiter le coût de calcul par rapport à une LES résolue à la paroi comme indiqué à la section 4.1. Contrairement à une LES, seules les échelles décollées sont résolues en DES97, d'où son nom. La première application de la DES97 est effectuée par Shur et al. (1999) sur un profil d'aile hypersustenté.

L'idée de l'approche DES97 est de modifier l'équation de transport de la pseudo-viscosité du modèle de turbulence de Spalart et Allmaras (1992) afin d'obtenir une équation de transport d'un modèle de sous-maille LES. Le terme de destruction de la pseudo-viscosité du

modèle de Spalart et Allmaras (1992) fait intervenir la distance à la paroi  $d_w$ . En remplaçant  $d_w$  par une échelle de longueur représentative des échelles résolues localement, alors l'équation de transport turbulente devient équivalente à une équation de transport pour un modèle de sous-maille LES. Comme indiqué par Fröhlich et Terzi (2008), introduire une échelle de longueur plus petite permet d'augmenter le terme de destruction et donc de réduire la pseudo-viscosité. En supposant que la production et la dissipation de la pseudo-viscosité se compensent, cette équation de transport aboutit alors à une viscosité de sous-maille similaire à celle donnée par le modèle de sous-maille de Smagorinsky.

Ainsi, Spalart et al. (1997) proposent de remplacer  $d_w$  par  $C_{DES}\Delta$ , avec  $C_{DES}$  une constante et

$$\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \quad (4.48)$$

le maximum (local) de la longueur  $\Delta x$ , hauteur  $\Delta y$  et largeur  $\Delta z$  de la cellule. La distance  $d_w$  est alors remplacée dans l'équation de transport de la pseudo-viscosité par :

$$d = \min(d_w, C_{DES}\Delta). \quad (4.49)$$

Près de la paroi,  $d_w < C_{DES}\Delta$  et donc l'écoulement est résolu via une modélisation URANS et en s'éloignant de la paroi,  $d_w > C_{DES}\Delta$  et l'écoulement est résolu en LES, comme illustré à la figure 4.12. Il est à noter que l'idée associée à l'approche DES97 peut être adaptée avec d'autres modèles de turbulence, comme réalisé par Strelets (2001) avec le modèle  $k-\omega$  de Menter (1994).

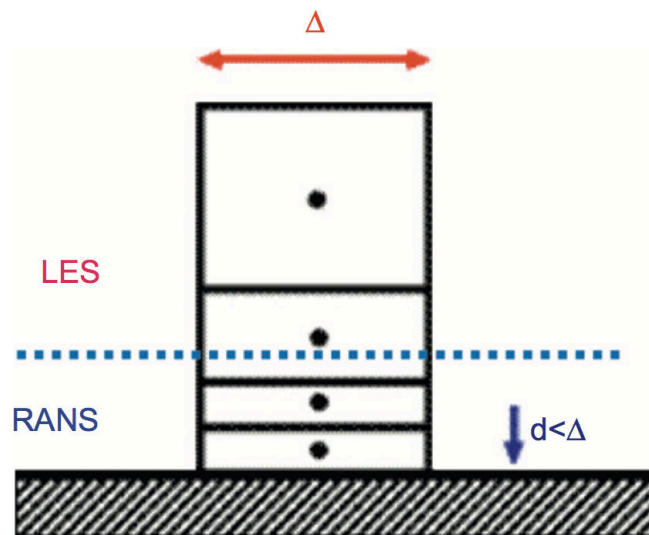


FIGURE 4.12 – Principe de la DES97, d'après Fröhlich et Terzi (2008)

Le principal inconvénient de la méthode DES97 est que la transition entre les zones URANS et LES dépend de la résolution locale du maillage. La qualité de la solution dépend alors fortement du maillage. En théorie, la méthode DES97 vise à traiter les couches limites attachées en URANS et les zones décollées en LES. Lors de la génération d'un maillage de

couche limite, utiliser des cellules dont les dimensions parallèles à la paroi (surtout  $\Delta x$  dans la direction longitudinale) sont très grandes (comme préconisé pour des maillages (U)RANS) permet de résoudre la couche limite avec une modélisation URANS. Cependant, comme indiqué par Spalart (2009), si le maillage est trop grossier, seule la modélisation URANS est utilisée dans (presque) tout le domaine. C'est le cas sur la plupart des premières simulations effectuées avec une approche DES97, comme remarqué par Spalart (2009). Par exemple, sur un calcul de jet réalisé par Shur et al. (2005) en DES97, la modélisation URANS est activée jusqu'à ce que l'épaisseur de la couche de mélange atteigne environ 40% du diamètre du jet, alors qu'il aurait été préférable d'utiliser une modélisation LES dès la formation de la couche de mélange.

Pour que seule la couche limite soit résolue en URANS et l'écoulement extérieur en LES, il faut alors, comme indiqué par Larauie (2012), que  $\Delta x = \delta/C_{DES}$  ce qui, en pratique, est difficilement réalisable. D'une part, l'épaisseur de couche limite locale  $\delta$  est inconnue et d'autre part, si le maillage est structuré alors la discrétisation pariétale se propage en-dehors des couches limites. Par conséquent, dans la pratique  $\delta > C_{DES}\Delta x$  et seule une partie de la couche limite est traitée en URANS, comme illustrée à la figure 4.13. L'approche DES97 est alors déclarée comme fonctionnant en mode WMLES. Il est toutefois important de noter que, contrairement à l'approche WMLES présentée à la section 4.2, la DES97 en mode WMLES utilise une modélisation URANS pour résoudre l'écoulement (et pas seulement les flux pariétaux) contenu dans une fraction de l'épaisseur de couche limite donnée par la condition  $\Delta x \geq \delta/C_{DES}$ , et pas forcément la zone interne. Une comparaison plus détaillée entre les approches WMLES et DES est présentée dans la suite à la section 4.5.3.

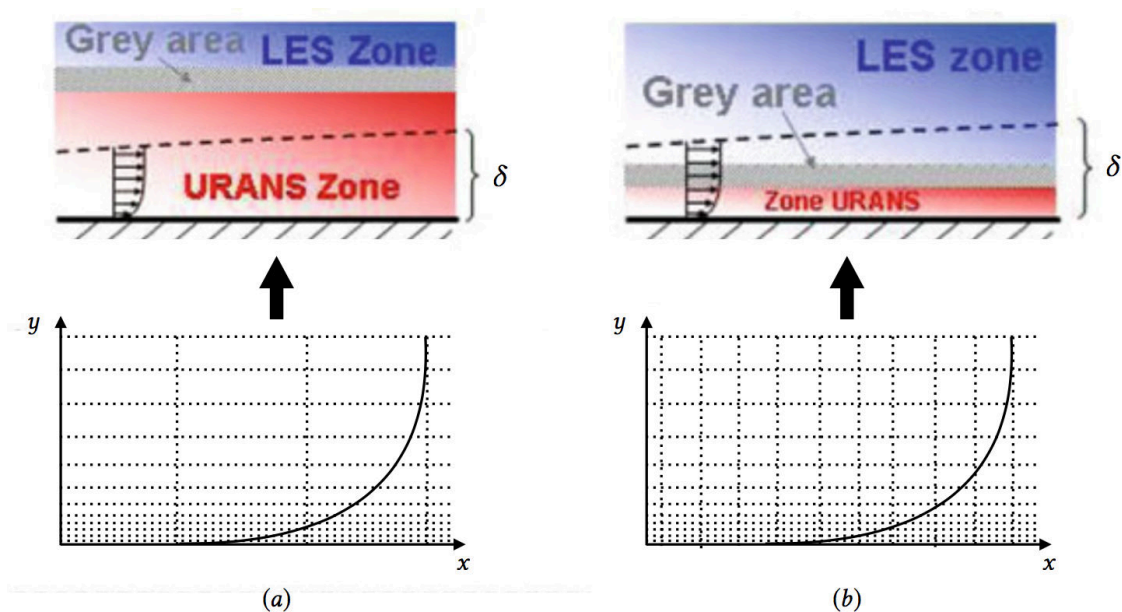


FIGURE 4.13 – Type de modélisation utilisée dans une couche limite attachée en DES97 selon que (a)  $\delta < C_{DES}\Delta x$  ou (b)  $\delta > C_{DES}\Delta x$ , adapté de Deck (2011)

En particulier, la figure 4.13 montre qu'en DES97, raffiner un maillage peut induire un comportement non désiré et donc dégrader la solution. En effet, dans le cas où la DES97 fonctionne en mode WMLES, trois phénomènes sont rencontrés :

- *Modeled-Stress Depletion* (MSD);
- *Logarithmic-Layer Mismatch* (LLM);
- *Grid-Induced Separation* (GIS).

Ces phénomènes sont dus à la zone grise existante entre les zones URANS et LES : en raison du passage d'une modélisation URANS faiblement instationnaire associée à une viscosité turbulente à une modélisation LES instationnaire associée à un modèle de sous-maille, la turbulence n'est pas physique dans cette zone. Par exemple, Hamba (2011) montre que des termes supplémentaires apparaissent dans l'équation de quantité de mouvement. Certains auteurs, dont Piomelli et al. (2003) et Keating et Piomelli (2006), proposent d'ajouter des termes de forçage stochastique pour les annuler, mais cette méthode n'a, à priori, été considérée que sur des cas académiques. Baggett (1998) montre également (à partir d'une simulation utilisant une approche différente de la DES97, mais présentant tout de même une zone de transition URANS-LES) la présence de structures turbulentes non physiques et plus étirées dans la direction longitudinale que les *streaks* présentés à la section 3.3, appelées *super-streaks*

Le phénomène de MSD, nommé par Spalart et al. (2006a), correspond à une diminution du frottement turbulent au niveau de la zone de transition URANS-LES. En effet, dans cette zone, le frottement turbulent modélisé (par le modèle de turbulence) diminue au profit du frottement turbulent résolu (en LES). Cependant, ce dernier est sous-estimé par rapport aux valeurs attendues, à la fois en raison d'une turbulence non physique et pas encore pleinement développée dans la région LES et en raison d'un maillage pas nécessairement assez fin pour discrétiser les structures turbulentes locales avec une approche LES.

Le phénomène de LLM se traduit, sur des écoulements se développant dans des canaux turbulents ou dans des couches limites turbulentes, par un décalage du profil de vitesse en unités de paroi par rapport à la loi logarithmique : la loi logarithmique dans la zone interne et sa pente dans la zone externe sont correctement prédites, mais la constante additive dans la zone externe est erronée. Comme remarqué par Larsson et al. (2016), ce décalage peut être positif ou négatif et impacte directement l'estimation du coefficient de frottement pariétal. Certains auteurs, dont Baggett (1998) ou Fröhlich et Terzi (2008), attribuent le phénomène de LLM à celui de MSD.

Le phénomène de MSD traduit également une réduction de l'énergie cinétique turbulente (et donc une certaine relaminarisation) de la couche limite lors de la transition à une modélisation LES. Sous l'effet d'un gradient de pression adverse (pouvant être induit par des effets de courbure présents sur des profils d'ailes), la couche limite décolle plus tôt : c'est le phénomène de GIS, observé, par exemple, par Menter et Kuntz (2004) sur un profil d'aile. En effet, comme indiqué par Cousteix (1989), une couche limite laminaire est plus sensible aux gradients de pression qu'une couche limite turbulente.



L'approche DES97, si elle s'avère efficace pour simuler des écoulements massivement décollés comme indiqué par Fröhlich et Terzi (2008) (en raison d'une réduction de l'influence du couplage entre les zones URANS et LES sur le résultat), éprouve des difficultés à traiter des couches limites turbulentes attachées. C'est pourquoi de nombreuses variantes sont proposées.

#### 4.5.2 Principales variantes de la DES97

Les variantes les plus répandues de la DES97 sont les approches :

- DDES (*Delayed DES*);
- IDDES (*Improved delayed DES*);
- ZDES (*Zonal DES*).

L'approche DDES, proposée par Spalart et al. (2006a) à partir des travaux de Menter et Kuntz (2004), consiste à ajouter une fonction de protection dans l'équation (4.49) afin de forcer la résolution des couches limites attachées en URANS quelle que soit la taille des cellules. Cela permet d'éviter de placer la transition URANS-LES dans la couche limite et donc les phénomènes de MSD, LLM et GIS. Spalart (2009) considère la DDES comme le nouveau standard des méthodes DES, à la place de la DES97. Cependant, la fonction de protection dépend de la pseudo-viscosité et donc de la solution. Comme montré par Fröhlich et Terzi (2008) sur un canal périodique avec une paroi bossue, différentes solutions peuvent être obtenues selon la condition initiale choisie en DDES.

L'IDDES, proposée par Shur et al. (2008), est une extension de la DDES. L'idée est de définir  $\Delta$  non seulement en fonction de la résolution locale du maillage comme dans l'équation (4.48), mais aussi selon la distance à la paroi. Cela permet, comme indiqué par Spalart (2009), de favoriser les instabilités à la transition URANS-LES et donc d'augmenter le frottement turbulent résolu en diminuant  $\Delta$  près des parois et en lui donnant une variation abrupte. En modifiant également la fonction de protection, l'IDDES permet alors de placer la transition URANS-LES dans la couche limite (et de fonctionner en mode WMLES) si la résolution du maillage est jugée suffisante pour modéliser l'écoulement en LES. Sinon, la résolution de la couche limite est forcée en URANS, comme en DDES.

Une première version zonale de la DES est proposée par Deck (2005). Le terme zonale a plusieurs définitions dans la littérature. Ici, une méthode est dite zonale si les régions URANS et/ou LES sont prescrites explicitement par l'utilisateur. Au contraire, les approches DES97, DDES et IDDES sont automatiques, dans le sens où les zones URANS et LES sont déterminées automatiquement (par des fonctions empiriques) sans intervention de l'utilisateur. Dans la première version de Deck (2005), les zones de couches limites attachées sont modélisées en URANS et le reste du domaine en DES97. Une méthode zonale permet de mieux maîtriser la position des interfaces URANS-LES, au prix d'une dépendance accrue à l'utilisateur et donc d'une prédictibilité réduite.

Deck (2011) proposent alors l'approche ZDES où il est possible d'imposer des zones URANS et DES, mais contrairement à la première version, chaque zone peut être traitée avec une variante DES différente (appelée mode). Cette approche est donc à la fois zonale et automatique. Cela permet de profiter des avantages de différentes formulations DES (DDES, IDDES...) selon la nature de l'écoulement. Il est à noter qu'il est également possible d'utiliser la ZDES en mode WMLES, comme expliqué par Renard et Deck (2015). La ZDES en mode WMLES a été appliquée, par exemple, sur l'écoulement dans une couche limite se développant le long d'une plaque plane par Deck et al. (2014a,b).

### 4.5.3 Comparaison des méthodes DES97 et WMLES

Dans un souci de simplicité, l'accent est mis sur une comparaison entre les méthodes WMLES et DES97, les variantes de cette dernière permettant de résoudre une ou plusieurs de ses limitations.

Bien que partageant le même objectif, les méthodes WMLES et DES97 ont des philosophies très différentes. Une différence fondamentale entre la WMLES et la DES97 est qu'en WMLES, la zone externe de la couche limite (soit près de 90% de l'épaisseur de couche limite à haut nombre de Reynolds) est résolue en LES, alors qu'en DES97 toute la couche limite est résolue en URANS. D'après Larsson et al. (2016), les méthodes hybrides RANS-LES résolvant la zone externe de la couche limite en LES (WMLES, ZDES en mode WMLES...) ont le potentiel d'être plus précises car les phénomènes hors-équilibre (comme un gradient de pression adverse) sont résolus et non modélisés par un modèle de turbulence comme en DES97.

L'autre différence fondamentale est qu'en WMLES, seuls les flux pariétaux sont estimés à partir d'équations (U)RANS. L'écoulement reste modélisé uniquement avec une approche LES. Au contraire, en DES97, une partie de l'écoulement est résolue en URANS. La modélisation URANS est donc plus intrusive en DES97 qu'en WMLES. Cette différence d'interaction entre les modélisations URANS et LES induit des erreurs d'origines différentes.

Tout d'abord, les structures turbulentes près de la paroi en WMLES et en DES97 ne sont pas les mêmes. En WMLES, les grandes cellules utilisées impliquent la présence uniquement de grandes structures turbulentes. Comme vu à la section 4.2.3, elles peuvent être sous-résolues et induire le phénomène de LLM. En DES97, la taille des structures est donnée par le modèle de turbulence qui les modélise. Il y a donc des petites structures près de la paroi. Cependant, si une modélisation (U)RANS permet en théorie d'obtenir un résultat indépendant du maillage, ce n'est pas le cas en DES97 qui va fonctionner en mode WMLES si le maillage est trop fin. La zone de transition entre les modélisations URANS et LES est alors située dans la couche limite et est à l'origine d'une sous-résolution de la turbulence dans cette région affectant la couche limite par les phénomènes de MSD, LLM et GIS. En WMLES, une certaine convergence en maillage est possible dans la zone externe, comme expliqué par Larsson et al. (2016). Il faut toutefois éviter que cette convergence en maillage permettent de commencer à résoudre la zone interne de la couche limite.

Puis, l'interaction entre les équations LES instationnaires et (U)RANS quasi-stationnaires

n'intervient pas au même niveau. En DES97, elle contribue à la formation de la zone grise et donc d'une turbulence sous-résolue. En WMLES, ce sont les équations du modèle de paroi (résolues sur un maillage secondaire dans le cas d'un modèle de paroi numérique) qui sont mal posées. D'ailleurs, la méthode d'estimation des flux pariétaux est également différente. En WMLES, ces flux sont prédits par le modèle de paroi en se basant sur des équations (U)RANS plus ou moins simplifiées (selon la complexité du modèle) alors qu'en DES97, ils sont estimés de manière identique à un calcul URANS résolu à la paroi.

Enfin, il est à noter que l'approche WMLES n'est justifiée qu'à un nombre de Reynolds suffisamment élevé pour qu'il y ait une séparation des échelles entre les zones interne et externe. C'est également le cas pour les méthodes DES fonctionnant en mode WMLES (où seule la zone interne est modélisée en URANS). En revanche, les approches DES résolvant l'ensemble de la couche limite en URANS n'ont pas besoin de cette hypothèse. De plus, comme noté par Larsson et al. (2016), les méthodes traitant l'ensemble de la couche limite en URANS ont un coût de calcul un à deux ordres de grandeurs plus faible que celles résolvant la zone externe en LES. En effet, si la couche limite est complètement résolue en URANS, la taille des cellules dans les directions parallèles à la paroi peut être très élevée (même si dans le cas d'un solveur structuré, cet avantage est limité par le fait que les discrétisations pariétales se propagent à l'extérieur de la couche limite). Toutefois, la présence d'une viscosité turbulente signifie que la couche limite est considérée comme pleinement turbulente.

Enfinement, les différences entre les approches WMLES et DES peuvent s'expliquer par leur contexte de développement. En effet, la DES97 a été développée et utilisée par une communauté d'utilisateurs RANS désirant introduire une modélisation LES pour capturer des phénomènes instationnaires (comme les décollements massifs). Au contraire, l'approche WMLES a été développée par une communauté LES désirant réduire la dépendance du maillage de la zone interne d'une couche limite turbulente attachée au nombre de Reynolds.

Malgré leurs différences, il est important de noter qu'à ce jour, aucune méthode hybride RANS-LES ne s'est imposée comme étant meilleure que les autres, que ce soit d'un point de vue théorique ou pratique. Le développement et l'industrialisation de telles méthodes reste un sujet de recherche actif et les travaux de thèse présentés dans la suite s'inscrivent dans ce contexte.

En particulier, l'approche WMLES est considérée dans la suite en raison de sa relative simplicité d'utilisation et d'implémentation ainsi que par sa modélisation entièrement LES de l'écoulement. En effet, comme expliqué à la section 2.5 à partir de la figure 2.4, une modélisation LES est souhaitée afin de prédire les phénomènes visqueux fortement instationnaires présents dans les couches limites des turbomachines. Toutefois, l'approche WMLES ne jouit pas de la maturité des autres méthodes hybrides RANS-LES. Cela s'explique principalement par l'absence d'un modèle de paroi permettant de prendre en compte les phénomènes physiques auxquels les couches limites

d'une turbomachine sont soumises, tout en ayant un impact limité sur le coût de calcul global de la simulation et une utilisation simple. C'est pourquoi, afin de pouvoir utiliser une approche WMLES sur les écoulements présents dans les turbomachines, un tel modèle de paroi est développé dans la suite.



## **Deuxième partie**

# **Développement et validation d'un modèle de paroi adapté aux configurations turbomachines**



## Introduction

Plusieurs points importants ont été montrés dans la première partie :

1. Une turbomachine est le siège d'écoulements pariétaux très complexes dont la compréhension et la prédiction sont nécessaires afin d'améliorer les pratiques de conception. En particulier, les écoulements dans les compresseurs sont soumis à des gradients de pression adverse et ceux dans les turbines à des gradients de pression favorable.
2. L'approche LES est adaptée à la capture de tels phénomènes, mais son coût de calcul prohibitif dans une couche limite à haut nombre de Reynolds la restreint aujourd'hui aux écoulements présents dans des configurations académiques.
3. À haut nombre de Reynolds, une séparation des échelles a lieu dans une couche limite turbulente attachée et se traduit par la formation de deux zones (interne et externe) dont la deuxième est a priori indépendante de la première. Cette séparation est plus marquée lorsque la couche limite est soumise à un gradient de pression adverse (tout en restant attachée), mais s'atténue dans le cas d'un gradient de pression favorable. Ainsi, il est possible sur certaines couches limites de recourir à une méthode hybride RANS-LES modélisant la zone interne en (U)RANS à partir d'informations de la zone externe résolue en LES. En particulier, les couches limites présentes dans les compresseurs sont propices à l'utilisation d'une telle modélisation ;
4. L'approche WMLES est une méthode hybride RANS-LES (relativement) simple à implémenter et à utiliser. La WMLES permet de profiter directement des avantages d'une approche LES tout en réduisant la dépendance de son maillage dans les couches limites au nombre de Reynolds grâce à l'utilisation d'un modèle de paroi. En revanche, son utilisation et sa validation dans la littérature restent limitées à des géométries simples. De plus, sa précision dépend à la fois des méthodes numériques et du modèle de paroi employés.

C'est pourquoi, dans la suite de ces travaux, seule l'approche WMLES est considérée. Puisque l'objectif final est de pouvoir simuler des configurations à géométries complexes (et en particulier les écoulements existants dans les compresseurs), cette seconde partie se présente de la manière suivante :

- tout d'abord, un modèle de paroi adapté aux géométries complexes est développé et validé (ainsi que les méthodes numériques considérées) ;
- puis, la capacité du modèle de paroi à prendre en compte les effets associés à un gradient de pression adverse (comme rencontré sur des aubes de compresseurs) est évaluée ;
- enfin, le modèle de paroi est appliqué sur l'écoulement présent dans un compresseur axial.





# Chapitre 5

## Développement d'un modèle de paroi intégral compressible : l'iWMLES

La première partie du manuscrit a permis de présenter différentes approches hybrides RANS-LES tout en justifiant leur existence et leur intérêt. L'approche considérée dans le cadre de ces travaux est la WMLES, en raison de sa (relative) simplicité d'implémentation et d'utilisation. Dans ce chapitre, un modèle de paroi adapté à la prise en compte de phénomènes physiques complexes, comme rencontrés sur des configurations turbomachines, est développé et validé.

### 5.1 Contexte et objectifs

En WMLES, comme vu au chapitre 4, un modèle de paroi permet d'estimer les flux pariétaux à partir d'informations issues de la zone inertielle de la couche limite. Les modèles de paroi peuvent être classés en deux catégories : analytiques et numériques. D'un côté, les modèles analytiques sont principalement basés sur les lois logarithmiques et offrent l'avantage d'avoir un coût de calcul négligeable. En revanche, leur domaine de validité est restreint aux écoulements existants dans des configurations académiques. D'un autre côté, les modèles de parois numériques résolvent un système d'équations différentielles (basées sur le formalisme (U)RANS), ce qui leur permet d'avoir un domaine de validité plus étendu et pouvant inclure les phénomènes physiques rencontrés par les écoulements présents dans des configurations à géométries complexes. Toutefois, la résolution des équations d'un modèle de paroi numérique est très coûteuse en temps de calcul, d'autant plus lorsqu'elles sont bi/tridimensionnelles puisque des données doivent être échangées entre chaque cellule, ce qui réduit l'efficacité parallèle du solveur. En effet, comme expliqué à la section 4.3.3 à partir de l'étude de Hickel et al. (2012), le terme de gradient de pression ne peut être considéré sans ceux de convection. L'utilisation d'un modèle de paroi numérique peut également être délicate si ses équations sont résolues sur un maillage non-coïncident au maillage LES, comme vu à la section 4.3.3.

C'est pourquoi, comme noté par Larsson et al. (2016), un modèle de paroi permettant

de prendre en compte des phénomènes physiques complexes (notamment les termes de convection et de gradient de pression) tout en résolvant une équation différentielle au plus unidimensionnelle en espace est intéressant à plus d'un titre. Le développement d'un tel modèle est l'objectif de ce chapitre.

## ***5.2 Extended integral wall-model for large-eddy simulations of compressible wall-bounded turbulent flows***

Récemment, un modèle de paroi hybride a été proposée par Yang et al. (2015) : l'iWMLES (*Integral Wall-Model for Large-Eddy Simulation*). Ce modèle de paroi a été développé pour des couches limites incompressibles se développant le long de parois adiabatiques. L'idée est basée sur la méthode de Kármán (1921) et Pohlhausen (1921) valable pour une couche limite laminaire : le profil de vitesse longitudinale est paramétrisé et forcé à respecter certaines conditions aux limites dont l'équation de quantité de mouvement intégrée selon la normale à la paroi. Par analogie, dans le cas d'une couche limite turbulente, l'iWMLES consiste à paramétriser le profil de vitesse longitudinale par une loi logarithmique accompagnée d'un terme de correction. Ce terme de correction est déterminé de manière à vérifier, entre autres conditions, l'équation de quantité de mouvement intégrée selon la normale à la paroi. L'iWMLES permet ainsi de prendre en compte plus de phénomènes physiques qu'un modèle de paroi analytique (instationnarité, convection, gradient de pression...) tout en ayant un coût de calcul bien plus réduit qu'un modèle de paroi numérique puisque seul un système d'équations différentielles scalaires indépendantes de la distance à la paroi doit être résolu.

Dans cette section, une extension de l'iWMLES pour les couches limites compressibles se développant le long de parois adiabatiques ou isothermes est proposée. Elle se présente sous la forme d'un article accepté pour publication. Après avoir décrit le solveur et les méthodes numériques utilisées, l'extension de l'iWMLES est introduite. Pour prendre en compte les effets de compressibilité et de gradients de température, le profil de température est également paramétrisé et l'équation d'énergie intégrée selon la normale à la paroi est considérée. Enfin, le modèle de paroi développé est validé sur des écoulements se développant dans des canaux plans bipériodiques dont les nombres de Mach (basés sur l'intégrale du profil de vitesse moyenne) varient de 0.2 à 1.7.

# Extended integral wall-model for large-eddy simulations of compressible wall-bounded turbulent flows

M. Catchirayer,<sup>1,2,a)</sup> J.-F. Boussuge,<sup>1,b)</sup> P. Sagaut,<sup>3,c)</sup> M. Montagnac,<sup>1</sup> D. Papadogiannis,<sup>2</sup> and X. Garnaud<sup>4</sup>

<sup>1</sup>CERFACS, 42 Avenue Gaspard Coriolis, 31057 Toulouse, France

<sup>2</sup>SAFRAN Tech, Rue des Jeunes Bois, Châteaufort–CS 80112, 78772 Magny-les-Hameaux, France

<sup>3</sup>Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, M2P2 UMR 7340, 13451 Marseille, France

<sup>4</sup>SAFRAN Aircraft Engines, Rond-Point René Ravaud, 77550 Moissy-Cramayel, France

(Received 26 March 2018; accepted 28 May 2018; published online 18 June 2018)

Wall-modeling is required to make large-eddy simulations of high-Reynolds number wall-bounded turbulent flows feasible in terms of computational cost. Here, an extension of the integral wall-model for large-eddy simulations (iWMLESs) for incompressible flows developed by Yang *et al.* [“Integral wall model for large eddy simulations of wall-bounded turbulent flows,” *Phys. Fluids* **27**(2), 025112 (2015)] to compressible and isothermal flows is proposed and assessed. The iWMLES approach is analogous to the von Kármán-Pohlhausen integral method for laminar flows: the velocity profile is parameterized, and unknown coefficients are determined by matching boundary conditions obeying the integral boundary layer momentum equation. It allows non-equilibrium effects such as pressure gradient and convection to be included at a computing cost similar to analytical wall-models. To take into account density variations and temperature gradients, the temperature profile is also parameterized and the integral compressible boundary layer energy equation is considered. Parameterized profiles are based on the usual logarithmic wall functions with corrective terms to extend their range of validity. Instead of solving a set of differential equations as wall-models based on the thin boundary layer equation approach, a simple linear system is solved. The proposed wall-model is implemented in a finite-volume cell-centered structured grid solver and assessed on adiabatic and isothermal plane channel flows at several friction Reynolds and Mach numbers. For low Mach number cases, mean profiles, wall fluxes, and turbulent fluctuations are in agreement with those of Direct Numerical Simulation (DNS). For supersonic flows, the results are in good agreement with the DNS data, especially the mean velocity quantities and the wall friction, while standard analytical wall-models show their limits. *Published by AIP Publishing.* <https://doi.org/10.1063/1.5030859>

## I. INTRODUCTION

Computational fluid dynamics (CFD) is widely used as a research or engineering tool in fluid mechanics. Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) modeling, which is based on statistical turbulence models, is the most popular paradigm. RANS simulations allow mean quantities to be computed at a reasonable accuracy and computational cost even for complex engineering flows.<sup>1</sup> But RANS modeling shows its limits in predicting highly unsteady phenomena like separation. Large-Eddy Simulation (LES) is a way to overcome these limitations and the next step toward achieving more accurate simulations.<sup>2–4</sup> In RANS simulations, the whole turbulent spectrum is modeled, while LES captures the large energetic scales of the flow, and only the small scales are modeled. However, near-wall turbulence contains very small scales (near-wall streaks<sup>5</sup>) and simulating them would require prohibitively fine meshes. A first estimation of LES computational cost, with or without wall-modeling, was given by Chapman.<sup>6</sup> Using a more accurate correlation for high Reynolds number flows, Choi

and Moin<sup>7</sup> recently updated these estimations: the number of mesh points to solve a boundary layer flow is approximately proportional to  $Re^{13/7}$  in the inner layer and  $Re^1$  in the outer layer with  $Re$  being the Reynolds number. In typical aeronautical applications, one has  $Re \sim 10^7$ ; thus, the inner layer requires more than 99% of the boundary layer grid points as illustrated by Piomelli and Balaras.<sup>8</sup>

Hybrid RANS/LES methods are a way to reduce this computational cost. Several reviews of these methods exist.<sup>8–11</sup> The two most popular are the Detached-Eddy Simulation (DES<sup>12</sup>) and the Wall-Modeled LES (WMLES<sup>2,13,14</sup>). Both methods have pros and cons but the same goal: to tackle LES limitations to high Reynolds number flows by using RANS modeling near walls. The number of required grid points,  $N$ , was estimated<sup>15,16</sup> to be  $N \sim Re_\theta^{2.17}$  and  $N \sim Re_\theta^{1.17}$  for wall-resolved and wall-modeled LES of the flat plate boundary layer.

On the one hand, the DES takes advantage of the similarity of the LES and RANS equations: in the near-wall region, the RANS equations are solved, and when the mesh is fine enough, the turbulent viscosity switches to a subgrid-scale model and LES behavior is obtained. The DES was historically developed with the Spalart-Allmaras turbulence model,<sup>17</sup> but other models are now available.<sup>18</sup> However, the transition region between RANS and LES modeling can be a cause

<sup>a)</sup>Electronic mail: catchirayer@cerfacs.fr

<sup>b)</sup>Electronic mail: boussuge@cerfacs.fr

<sup>c)</sup>Electronic mail: pierre.sagaut@univ-amu.fr

of errors. Indeed non-physical terms are generated near the transition region.<sup>19</sup> To cure this issue and depending on the case, stochastic forcing<sup>20,21</sup> methods can be calibrated and used in the transition region to cancel these terms and accelerate the transition between RANS and LES.

On the other hand, WMLES solves LES equations in all the computational domain, but as opposed to a resolved LES, the mesh is coarsened in the vicinity of walls. Then, a wall-model is used to compute the wall fluxes to take into account the effects of the inner layer part of boundary layers. Wall-models use LES data near walls as the input. So the near-wall treatment in WMLES is very localized which eases implementation, efficient parallel computation, and application to complex geometries. However, due to a coarse mesh near walls, the numerical methods and subgrid-scale model must be carefully chosen<sup>22,23</sup> to avoid the development of non-physical turbulent structures. Indeed, by definition, LES<sup>2,3</sup> solves the largest eddies and models the smallest ones, thanks to the subgrid-scale model. The frequency cutoff is generally given by the cell size of the computational grid and should be located within the inertial range of the turbulent energy spectrum. Due to this restriction, near-wall cells in resolved LES must be fine as the turbulent structures inside boundary layers are very small.<sup>5,24</sup> Eddies not captured by the grid are then taken into account by the subgrid-scale model, often assuming they are isotropic. In WMLES, the local LES filter is not expected to fall in the inertial range because of the coarse near-wall cells; thus, there is no reason to accurately predict the subgrid-scale viscosity. Corrections of the near-wall subgrid-scale viscosity have been proposed by several authors.<sup>23,25,26</sup> Bocquet, Sagaut, and Jouhaud<sup>23</sup> showed in a WMLES of a plane channel flow that without correction the subgrid-scale term is highly overestimated in the first off-wall cell.

Another consequence of the use of a coarse grid near the wall in WMLES is the potential under-resolution of the turbulent streaky structures<sup>5</sup> located in the logarithmic region. Indeed in WMLES, inner layer effects are modeled by the wall-model and only the outer layer is directly solved. Therefore, streaks in the viscous sublayer are not captured. The overlap (logarithmic) region is mainly composed of large-scale structures: Large-Scale Motions (LSM<sup>27</sup>) which have streamwise sizes of  $l_x \sim 2-3\delta$  and the Very-Large-Scale Motions (VLSM<sup>28,29</sup>) whose sizes scale with  $l_x \sim 10\delta$  with  $\delta$  being the boundary layer thickness. Since, in the outer region, a major contribution of the turbulent kinetic energy and Reynolds stress is due to these large structures, they must be well resolved. The number of grid points per wavelength required to resolve these structures depends on the numerical methods employed.<sup>22</sup> In the wall-normal direction, the wall-model input data should be placed in the overlap region, i.e., at  $y \approx 0.05-0.2\delta$ . If the turbulent motions are under-resolved, non-physical turbulent structures are present near walls like the super-streaks encountered in DES or other hybrid RANS/LES methods.<sup>13,20</sup> However, if the grid is too fine, under-resolved near-wall streaks start to be captured and are used as the input to steady wall-model equations.<sup>8</sup> Therefore, the physical and numerical modeling of the flow must be carefully chosen to accurately compute the skin friction. Otherwise the well-known log-layer mismatch appears.<sup>13</sup>

In the following, only WMLES is considered. Two types of wall-models exist: analytical and numerical. On the one hand, analytical wall-models are the simplest ones. Both the velocity and the temperature at a given point (usually the first off-wall point) are assumed to follow a mean solution. The treatment's cost is negligible compared to a LES time step, but the range of validity of an analytical wall-model is restricted to simple flows. Note that analytical wall-models using the standard logarithmic law of the wall<sup>10</sup> are also called equilibrium wall-models since this law is derived assuming a constant shear stress in the inner layer part of the turbulent boundary layer. Moreover, the logarithmic law of the wall is in theory only valid for a steady incompressible flow along a fully turbulent boundary layer at zero pressure gradient.

On the other hand, numerical wall-models solve a set of differential equations usually based on the thin boundary layer equation approximation under the RANS formalism on an implicit or separated<sup>30</sup> grid between the wall and the wall-model interface. Therefore, the effects of the turbulent structures located in the inner layer are taken into account globally.<sup>8</sup> Numerical wall-models have a larger domain of validity than analytical wall-models since they can take into account more physical terms: advection, unsteadiness, pressure gradient, etc. The cheapest and simplest numerical wall-models (called equilibrium wall-models) only consider the wall-normal diffusion. Unsteadiness is assumed to be negligible, and pressure gradients and convection terms balance exactly. Nevertheless, this hypothesis can lead to inaccurate estimation of the wall fluxes in non-equilibrium flows. To improve the wall flux prediction, non-equilibrium wall-models are thus required. To go beyond the equilibrium assumption, non-equilibrium wall-models take also into account the pressure gradient<sup>23</sup> and possibly the time derivative.<sup>31</sup> Bidimensional convective terms can also be added.<sup>32</sup> Most complete numerical wall-models consider the full three-dimensional unsteady RANS thin boundary layer equations.<sup>25,33-35</sup> Indeed, it is important to keep all terms of the thin boundary layer equations since the pressure gradient and the convective terms are coupled.<sup>36</sup> However, the computational cost of numerical wall-models is also higher due to the numerical resolution of complex two- or three-dimensional equations. Besides, to add non-equilibrium terms such as wall-parallel diffusion or convective terms, each wall-adjacent cell should exchange data with its neighbors, reducing the parallel efficiency of the CFD solver especially for unstructured solvers.<sup>30</sup>

To take into account compressibility effects and/or temperature gradients, the current state of the art in WMLES is to use an equilibrium numerical wall-model. Indeed, such a kind of wall-model has been successfully used on

- incompressible and compressible plane channel flows with or without heat transfer;<sup>23</sup>
- supersonic boundary layer flows;<sup>22</sup>
- oblique shock/boundary-layer interaction;<sup>37</sup>
- supersonic Couette flows with heat transfer.<sup>38</sup>

However, in flows with many walls (e.g., in turbomachinery flows), the computational overhead of such wall-models can be important. This is especially the case at very high Reynolds numbers since the computational cost of numerical

wall-models is often non-linear with respect to the Reynolds number due to the increased number of degrees of freedoms required to their resolution.

In the frame of this work, the aim is to develop a wall-model capable of taking into account the physical phenomena encountered in turbomachinery systems. Usually, in turbomachinery flows, Mach numbers are up to 1.5,<sup>39–43</sup> Reynolds numbers<sup>44,45</sup> between  $10^5$  and  $10^7$ , and temperature gradients in the order of ten to hundred Kelvin.<sup>46</sup> As pointed out by Tyacke and Tucker,<sup>47</sup> if the flow in low-pressure turbines can be simulated with LES due to their relatively low-Reynolds number, the flows in the other components require a wall-modeling in order to reduce computational requirements at high Reynolds numbers. The interest of a wall-modeling for compressor flows is also highlighted by Gourdain *et al.*<sup>48</sup>

Recently, a hybrid wall-model, namely, integral Wall-Model for Large-Eddy Simulation (iWMLES), has been developed for adiabatic incompressible flows.<sup>49</sup> In iWMLES, the longitudinal velocity profile is parameterized and imposed to satisfy some boundary conditions and among them the vertically integrated momentum thin boundary layer equation. This method can include more physical phenomena than an analytical wall-model, like pressure gradients, roughness effects, or curvature effects while keeping the computational cost very low compared to a standard numerical wall-model as only a weak solution is sought. iWMLES has been applied to attached boundary layer flows with a rough surface<sup>49</sup> or separated flow along a smooth surface.<sup>50</sup>

In this study, an extension of iWMLES for compressible and isothermal flows on smooth walls is proposed. In Sec. II, the flow solver and the wall-model implementation are described. Then, in Sec. III, the iWMLES approach is explained along with its numerical resolution. Finally, in Sec. IV, the integral wall-model developed in this study is tested on quasi-incompressible and supersonic bi-periodic plane channel flows, whose Mach numbers and temperature gradients are representative of typical turbomachinery flows. Wall fluxes, velocity, temperature mean profiles, and fluctuations are compared to the Direct Numerical Simulation (DNS) data.

## II. DESCRIPTION OF THE FLOW SOLVER

Even though wall-models can be seen as black boxes which compute wall fluxes using LES data such as the velocity, pressure, or temperature at some distance from the wall, they are strongly coupled with the flow solver. Indeed numerical choices must be made on how (i) the LES data are used as inputs of the wall-model; (ii) the outputs of the wall-model are used by the LES flow solver; and (iii) to take into account the coarse near-wall cells.

### A. Physical and numerical modeling of the flow

The CFD solver used for this study (*elsA-ONERA*<sup>51</sup>) is based on a cell-centered finite-volume approach to solve LES equations. The fluid is assumed to be a perfect gas, and the viscosity  $\mu$  varies with the temperature  $T$  according to Sutherland's law,

$$\mu(T) = \mu_{\text{ref}} \left( \frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \frac{T_{\text{ref}} + S}{T + S}, \quad (1)$$

with Sutherland's constant  $S = 110.4$  K.  $\mu_{\text{ref}}$  and  $T_{\text{ref}}$  are, respectively, the reference viscosity and the reference temperature.

Compressible LES equations are written under the Favre averaging and on implicit mesh filtering formalism. In the following, RANS and LES variables would be denoted, respectively, with a bar ( $\bar{f}$ ) and a tilde ( $\tilde{f}$ ).

The subgrid-scale model is estimated by the Wall-Adapting Local Eddy-viscosity (WALE<sup>52</sup>) subgrid-scale model which is based on the velocity gradient,

$$\nu_{sgs} = (C_w \Delta)^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}}, \quad (2)$$

with the constant being  $C_w = 0.5$ ,  $\Delta$  being the cell volume,  $\tilde{u}_i$  being the velocity components,  $\tilde{S}_{ij} = (\partial \tilde{u}_i / \partial x_j + \partial \tilde{u}_j / \partial x_i) / 2$  being the components of the strain rate tensor, and

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_m} \delta_{ij}, \quad (3)$$

where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker symbol.

In the finite volume framework, thanks to the Gauss divergence theorem, the divergence of the convective and diffusive terms of the Navier-Stokes equations is reduced to a sum of fluxes. Convective fluxes are estimated using a second-order centered scheme without artificial dissipation in the skew-symmetric form, which is observed to reduce aliasing errors.<sup>53</sup> To determine the diffusive fluxes, the laminar viscosity, the subgrid-scale model, the velocity gradient, and the temperature gradient at each interface between cells are required. The laminar viscosity and subgrid-scale model at the interface are evaluated by averaging the two adjacent cells' values. Velocity and temperature gradients are computed using the Gauss divergence theorem on a shifted control volume (centered on the interface). This discretization leads to a three-point stencil second-order scheme. At walls, two fictitious cells are introduced in order to keep the same schemes.

When dealing with moderate or high Reynolds number flows, the convective fluxes are expected to be dominant over the diffusive fluxes, except in the walls' vicinities. However, in WMLES, the velocity and temperature gradients' discretization is erroneous at wall interfaces since the near-wall coarse mesh used cannot capture high gradients. Therefore, velocity and temperature gradients at each wall interface are evaluated using a wall-model as explained in Subsection II B.

Time advancement is performed explicitly using a low-storage Runge-Kutta scheme with four stages. For a differential equation  $\partial u / \partial t = f(u, t)$ , the steps are given by

$$\begin{cases} u^{(0)} = u^n, \\ u^{(1)} = u^n + \frac{\Delta t}{4} R^{(0)}, \\ u^{(2)} = u^n + \frac{\Delta t}{3} R^{(1)}, \\ u^{(3)} = u^n + \frac{\Delta t}{2} R^{(2)}, \\ u^{n+1} = u^n + R^{(3)}, \end{cases} \quad (4)$$



with  $\Delta t$  being the time step and  $R^{(i)}$  being the intermediate residuals defined by

$$\begin{cases} R^{(0)} = f(u^{(0)}, t^n), \\ R^{(1)} = f(u^{(1)}, t^n + \frac{\Delta t}{4}), \\ R^{(2)} = f(u^{(2)}, t^n + \frac{\Delta t}{3}), \\ R^{(3)} = f(u^{(3)}, t^n + \frac{\Delta t}{2}). \end{cases} \quad (5)$$

This scheme is fourth-order if  $f$  is linear, second-order otherwise. In all the following simulations, a constant time step is chosen such that the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) number is around 0.7.

This numerical framework has already been proposed and validated,<sup>23</sup> except here the WALE subgrid-scale model is employed instead of the selective Smagorinsky model to better predict supersonic flows.

## B. Relation between the flow solver and the wall-model

Due to the coarse mesh used in WMLES, high velocity and temperature gradients at walls cannot be properly captured. That is why at each time step, during the viscous flux computation, the wall fluxes are computed by the wall-model. Given information from the LES field at the matching point (the first off-wall cell in the frame of this work) like the velocity vector, pressure, density, or temperature, the wall friction vector  $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}_w$  and the wall heat flux  $\widetilde{\phi}_w$  are returned by the wall-model. Note that  $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}_w$  and  $\widetilde{\phi}_w$  are not exactly LES variables as they are the outputs of RANS-based wall-model equations.

The wall friction vector  $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}_w$  is assumed to be aligned with the velocity vector at the first off-wall point projected in the plane parallel to the wall,  $\widetilde{\mathbf{u}}_{1\parallel}$ . Therefore, only two-dimensional equations can be considered in wall-models, reducing their complexity and computational cost. The projection step is briefly reminded here. At each call of the wall-model, the velocity vector at the first off-wall point  $\widetilde{\mathbf{u}}_1$  is projected in the plane parallel to the wall as shown in Fig. 1, with  $\mathbf{n}$  being

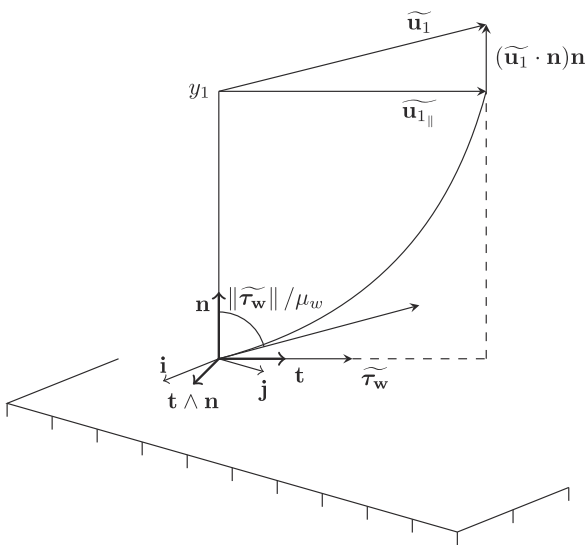


FIG. 1. Scheme of the projection of the first off-wall point velocity onto the local boundary layer frame.

the wall-normal vector,  $y_1$  being the distance between the wall and the first off-wall cell, and  $\mathbf{t} = \widetilde{\mathbf{u}}_{1\parallel} / \|\widetilde{\mathbf{u}}_{1\parallel}\|$  being the local velocity direction. The wall-model equations are solved in the local boundary layer frame  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ , and the wall friction modulus  $\|\widetilde{\boldsymbol{\tau}}_w\|$  and the wall heat flux are returned to the LES solver. As  $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}_w$  is assumed to be aligned with  $\widetilde{\mathbf{u}}_{1\parallel}$ , the wall friction vector coordinates in the flow solver frame can be computed and used as a boundary condition by the flow solver. It can be noticed that from the wall-model point of view, the boundary layer is always attached.

## C. Analytical wall-model

A fair comparison between wall-models can only be made in a given flow solver since there is a strong coupling between the two. Therefore, a standard analytical wall-model is implemented in order to assess the wider range of validity of numerical wall-models with respect to analytical ones. It is based on the turbulent boundary layer equations under zero pressure gradient for an incompressible flow. Turbulence is assumed to be statistically bidimensional and the mean flow steady. Under these hypotheses, the wall-normal momentum equation implies that the wall-normal variation of pressure is of the order of the boundary layer thickness. So this variation can be neglected with respect to the streamwise pressure gradient, and the pressure is assumed to be constant along the wall-normal direction. Moreover, by an order-of-magnitude analysis, it can be shown that in the limit of infinite Reynolds number, the shear stress  $\bar{\tau}$  is constant in the inner layer part of the boundary layer and therefore equal to the wall shear stress  $\bar{\tau}_w$ . This result is the key point to justify the use of wall-laws because a single velocity scale  $u_\tau = \sqrt{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_w\|/\bar{\rho}_w}$  in the whole inner layer can be defined and a velocity profile  $\bar{u}^+ = \bar{u}/u_\tau$ , independent of the outer layer, can be sought. With this velocity scale, a linear profile  $\bar{u}^+ = y^+$  in the linear sublayer and a logarithmic profile  $\bar{u}^+ = (1/\kappa) \ln y^+ + B$  in the inertial sublayer are found. Similarly, for an isothermal wall, the heat flux  $\bar{\phi}$  is constant and equal to the wall heat flux  $\bar{\phi}_w$  in the inner layer region and a temperature scale  $T_\tau = \bar{\phi}_w / (\bar{\rho}_w c_p u_\tau)$  can be defined with  $c_p$  being the specific heat capacity at constant pressure and  $\bar{\rho}_w$  being the wall density. A self-similar temperature profile  $\bar{T}^+ = (\bar{T} - T_w)/T_\tau$  following a linear law in the linear sublayer and a logarithmic law in the inertial sublayer is found, where  $T_w$  is the wall temperature.

Based on these results, Reichardt<sup>54</sup> and Kader<sup>55</sup> proposed smooth velocity and temperature wall-laws in the whole inner layer. They provide an explicit relation between the mean velocity and temperature and the wall fluxes  $\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_w\|$  and  $\bar{\phi}_w$ . From these two laws, an analytical wall-model<sup>23,56</sup> can be built,

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1\parallel}^+ = \bar{u}_1^+ = \frac{\bar{u}_1}{u_\tau} &= \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y_1^+) + (B - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa) \\ &\times (1 - \exp(\frac{-y_1^+}{11}) - \frac{y_1^+}{11} \exp(\frac{-y_1^+}{3})), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^+ = \bar{T}_1^+ = \frac{\bar{T}_1 - T_w}{T_\tau} &= Pr y_1^+ \exp(-\Gamma) \\ &+ (\frac{1}{\kappa_t} \ln(1 + y_1^+) + \beta) \exp(-1/\Gamma), \end{aligned} \quad (7)$$

with  $Pr$  being the Prandtl number and

$$\kappa = 0.41, \quad (8a)$$

$$B = 5.25, \quad (8b)$$

$$\kappa_t = \frac{1}{2.12}, \quad (8c)$$

$$\Gamma = \frac{10^{-2}(Pr y_1^+)^4}{1 + 5Pr^3 y_1^+}, \quad (8d)$$

$$\beta = (3.85Pr^{1/3} - 1.3)^2 + \frac{1}{\kappa_t} \ln(Pr). \quad (8e)$$

As explained in Subsection II B, the bidimensional unsteady velocity  $\widetilde{u}_{1\parallel}$  and temperature  $\widetilde{T}_1$  at the first off-wall cell are imposed to follow a mean wall-law at each time step. Given LES data at the first off-wall point, the following procedure is applied in order to compute the wall fluxes:

1. The pressure is assumed to be constant in the wall-normal direction, allowing the wall density to be determined, thanks to the perfect gas relation  $\overline{\rho}_w = \widetilde{p}_1/(rT_w)$  with  $\widetilde{p}_1$  being the pressure at the first point and  $r$  being the perfect gas constant. In the case of an adiabatic boundary condition, the wall temperature is supposed to be equal to the friction temperature  $\overline{T}_\tau = \widetilde{T}_e(1 + Pr^{1/3}(\gamma - 1)/2\widetilde{M}_{e\parallel}^2)$ . As the values at the outer edge of the boundary layer like temperature  $\widetilde{T}_e$  and Mach number  $\widetilde{M}_{e\parallel} = \widetilde{u}_{e\parallel}/\sqrt{\gamma r \widetilde{T}_e}$  are not accessible in complex geometries, their values at the first off-wall cell are taken.
2. Before being used as the input by the wall-model, the velocity vector is projected along the plane parallel to the wall as explained in Subsection II B.
3. The friction velocity  $u_\tau = \sqrt{\|\overline{\boldsymbol{\tau}}_w\|/\overline{\rho}_w}$  is computed, thanks to Eq. (6) and the Newton-Raphson algorithm.
4. For an isothermal wall, the friction temperature  $T_\tau = -\overline{\phi}_w/(\overline{\rho}_w c_p u_\tau)$  is computed, thanks to Eq. (7) and the Newton-Raphson algorithm.
5. The wall friction vector components in the flow solver frame are computed by switching from the boundary layer frame to the flow solver frame.

In the following, this analytical wall-model will be denoted as aWMLES.

### III. COMPRESSIBLE INTEGRAL WMLES APPROACH

In this section, an integral wall-model for the LES (iWMLES) of compressible flows along adiabatic or isothermal smooth plates is presented. First, the key idea of the wall-model is described. As it is based on the integral thin boundary layer equations, these equations are formulated before explaining how to solve them. Finally, the overall wall-model resolution is summarized.

#### A. Description of the iWMLES approach

For a laminar boundary layer, Kármán<sup>57</sup> and Pohlhausen<sup>58</sup> proposed a method to estimate the local velocity profile without solving differential equations. Instead of directly solving

the boundary layer equations, the longitudinal velocity profile is approximated by a fourth-order polynomial. Then, the only unknowns to fully determine the velocity profile are the polynomial coefficients. They are computed to impose the local longitudinal velocity to verify physical boundary conditions and among them the vertically integrated boundary layer momentum equations. Thus, a velocity profile taking into account the pressure gradient is built at a very low computational cost. In the case of the laminar boundary layer with zero pressure gradient, the friction coefficient computed presents 2% of error compared to the exact Blasius solution.

Here, a formulation of iWMLES for compressible and isothermal flows on smooth walls is proposed and assessed. This wall-model is analog to the von Kármán-Pohlhausen integral method except the boundary layer is assumed to be fully turbulent. To handle these kinds of flows, the velocity and the temperature profiles are parameterized. Then, the unknown coefficients are computed so that velocity and temperature profiles satisfy some boundary conditions and among them the vertically integrated bidimensional turbulent boundary layer momentum and energy equations. Therefore the computed profiles represent a weak solution of the integral boundary layer equations and take into account more physics than analytical wall-models. Instead of solving directly the thin boundary layer equations and using expensive numerical algorithms, a weak solution is sought and a simple scalar equation system has to be solved. So iWMLES can be seen as a hybrid wall-model: either an analytical wall-model with dynamic coefficients or a numerical wall-model where only a weak solution is searched.

#### B. Integral compressible thin boundary layer equations

In this subsection, the vertically integrated boundary layer momentum and energy equations required in iWMLES are formulated. In the following, the longitudinal and normal velocities are, respectively,  $u$  and  $v$ , and the longitudinal and wall-normal directions are, respectively, the  $x$  and  $y$  axes. The other variables follow conventional nomenclature. As opposed to the original formulation of iWMLES for incompressible flows,<sup>49</sup> only bidimensional equations are considered here due to the projection step explained in Subsection II B. The two-dimensional turbulent thin boundary layer equations in Cartesian coordinates for a perfect gas are

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho v}}{\partial y} = 0, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho v u}}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau}}{\partial y}, \quad (9b)$$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho v^2}}{\partial y} = 0, \quad (9c)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho c_p T}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u c_p T}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho v c_p T}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \overline{\tau} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial y}, \quad (9d)$$

$$\overline{p} = \overline{\rho} r \overline{T}, \quad (9e)$$



with the shear stress  $\bar{\tau} = (\bar{\mu} + \bar{\mu}_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  and the heat flux  $\bar{\phi} = -(\bar{\lambda} + \bar{\lambda}_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ , and  $\bar{\lambda} = \frac{c_p \bar{\mu}}{Pr}$  is the molecular thermal conductivity.  $\bar{\mu}_t$  and  $\bar{\lambda}_t$  are the turbulent viscosity and the thermal conductivity, respectively, and  $v'$  is the fluctuating part of the wall-normal velocity. Equation (9a) is related to the conservation of mass, and Eqs. (9b) and (9c) are the longitudinal and wall-normal momentum conservation equations. Equation (9d) is the energy equation, and the perfect gas law (9e) closes the equation system. In the above equations, the diffusion term along the longitudinal direction  $x$  is neglected.

In the following, for the sake of simplicity, any vertically integrated quantities  $f$  between  $y=0$  and  $y=y_1$  will be denoted as

$$L_f = \int_0^{y_1} \bar{f} dy.$$

According to Eq. (9c), the wall-normal pressure gradient is of the order of magnitude of the boundary layer thickness and therefore is small compared to the streamwise pressure gradient. This involves an important result in the boundary layer theory: the pressure can be assumed to be constant along the wall-normal direction, which means that it is an input of the wall-model extracted from the LES field. Taking advantage of this approximation and the perfect gas law (9e), Eqs. (9a), (9b), and (9d) are integrated along the wall-normal direction between the wall (assumed without the loss of generality to be located at  $y=0$ ) and the first off-wall point at  $y=y_1$ ,

$$\bar{\rho}_1 \bar{v}_1 = - \int_0^{y_1} \left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} \right) dy, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial L_{\rho u}}{\partial t} - \bar{u}_{1\parallel} \frac{\partial L_{\rho}}{\partial t} + M_x = \bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_w, \quad (10b)$$

$$\left( \frac{c_p}{r} - 1 \right) \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial t} y_1 - c_p \bar{T}_1 \frac{\partial L_{\rho}}{\partial t} + M_{T_x} = L_{\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_w, \quad (10c)$$

with  $\bar{u}_{1\parallel}$ ,  $\bar{T}_1$ , and  $\bar{p}_1$  being the LES data at  $y_1$ . The convective terms are expressed as follows:

$$M_x = \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} y_1 + \frac{\partial L_{\rho u^2}}{\partial x} - \bar{u}_{1\parallel} \frac{\partial L_{\rho u}}{\partial x}, \quad (11)$$

$$M_{T_x} = \frac{c_p}{r} \bar{p}_1 \frac{\partial L_u}{\partial x} - c_p \bar{T}_1 \frac{\partial L_{\rho u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} L_u. \quad (12)$$

Scalar equations (10b) and (10c) are, respectively, the vertically integrated momentum and energy equations. Velocity and temperature profiles in iWMLES will be constrained to be solutions of these equations. Note that these equations

require only the values of turbulence models at the first off-wall cell and of the vertically integrated shear stress. Thus, iWMLES is less sensitive to turbulence models than numerical wall-models. Indeed, in numerical wall-models, turbulence models are involved over the entire wall-normal direction and need to be carefully chosen.<sup>23,25,33,34</sup> Therefore, standard mixing-length models are used,

$$\bar{\mu}_t(y) = \bar{\rho} (\kappa y VD_{26}(y))^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|(y), \quad (13)$$

$$\bar{\lambda}_t(y) = \bar{\rho} c_p (\kappa y)^2 VD_{26}(y) VD_{35}(y) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|(y), \quad (14)$$

with  $VD$  being the Van-Driest damping function defined by

$$VD_a(y) = 1 - \exp\left(\frac{-y_3^+}{a}\right), \quad \forall a \in \mathbb{R}^*, \quad (15)$$

$$y_3^+(y) = \frac{y \bar{\rho} \sqrt{\bar{\tau}_w / \bar{\rho}}}{\bar{\mu}} = \frac{y u_{\tau} \sqrt{\bar{\rho}_w \bar{\rho}}}{\bar{\mu}}. \quad (16)$$

An  $y_3^+$  scaling (also denoted as  $y^*$  in the literature) is used to improve compressibility effect prediction in Eqs. (13) and (14). Using this scaling, a better prediction of the wall fluxes on supersonic boundary layers is obtained<sup>59</sup> for either adiabatic or isothermal walls. Better behavior is also observed for velocity fluctuations and the Reynolds stress<sup>60,61</sup> with the  $y_3^+$  scaling compared to  $y^+$ .

### C. Parameterized profiles

Instead of directly solving Eqs. (10b) and (10c), a weak solution is sought by parameterizing velocity and temperature profiles. Analytical results show that for a steady incompressible fully turbulent boundary layer flow with zero pressure gradient, the longitudinal velocity follows a logarithmic law. Even if the existence and the universality of this law are still debated,<sup>62,63</sup> it is observed to hold even for low Mach number flows with or without pressure gradients<sup>64,65</sup> or curvature effects.<sup>66</sup>

Thus, the velocity and temperature profiles are parameterized based on the logarithmic laws of the wall defined in Eqs. (6) and (7) with corrective terms,

$$\begin{aligned} \bar{u}(y; u_{\tau}; \delta_v; A) &= u_{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + (B - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa) \right. \\ &\quad \times \left( 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11} \exp\left(\frac{-y^+}{3}\right) \right) \\ &\quad \left. + A y^+ \left( 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{\delta_v}\right) \right) \right), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{T}(y; u_{\tau}; T_{\tau}; \delta_c; A_T) = T_w + T_{\tau} \left( Pr y^+ \exp(-\Gamma) + \left( \frac{1}{\kappa_t} \ln(1 + y^+) + \beta \right) \exp(-1/\Gamma) + A_T y^+ \left( 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{\delta_c}\right) \right) \right) \text{ for isothermal wall,} \\ \bar{T}(y; \bar{u}) = \bar{T}_1 \left( 1 + Pr^{1/3} \frac{\gamma-1}{2} \bar{M}_{1\parallel}^2 \left( 1 - \frac{\bar{u}^2}{\bar{u}_{1\parallel}^2} \right) \right) \text{ for adiabatic wall,} \end{cases} \quad (18)$$

with  $\bar{M}_{1\parallel} = \bar{u}_{1\parallel} / \sqrt{\gamma r \bar{T}_1}$  being the local Mach number based on the velocity projected in the plane parallel to the wall ( $\bar{u}_{1\parallel}$ ) and  $A, A_T, \delta_c, \delta_v, u_{\tau}$ , and  $T_{\tau}$  being six scalar unknowns.

The correction terms  $A$  and  $A_T$  aim to simulate the deviation from the logarithmic law and build a local dynamic wall-law which satisfies the vertically integrated momentum and energy equations (10b) and (10c). A linear correction term is added to the temperature profile, and a square root correction term is added to the velocity profile as previous studies have shown that a square root region appears when the boundary layer is not at equilibrium.<sup>67,68</sup> Since the viscous sublayer seems to be only slightly affected by non-equilibrium effects, correction terms are applied only in the inertial sublayer, thanks to the Van-Driest damping function  $1 - \exp(-y^+/\delta_v)$ .

For an adiabatic boundary condition, the wall heat flux is zero and only the wall friction vector needs to be determined by the wall-model. Moreover, the temperature profile does not follow the logarithmic law of the wall. Thus, in this case, the temperature is determined from Walz's law.<sup>69</sup> In theory, this relation needs the values at the outer edge of the boundary layer, but these quantities are not easily accessible in complex geometries or in unstructured solvers. Local values at first off-wall cell are then used, and this approximation will be validated *a posteriori*. Besides, as the wall heat flux does not need to be computed, the vertically integrated energy equation (10c) is not solved as it will be explained in Subsection III D.

As the  $y^+$  scaling does not take into account the wake region, selected profiles and turbulence models (13) and (14) are only valid in the inner layer of the boundary layer. From a physical viewpoint, improved stability and accuracy are obtained when the wall-model interface is located in the overlap region between the inner and outer layers.<sup>8,13</sup> Thus, the wall-model interface is aimed to be at about 5%–15% of the boundary layer thickness and  $y^+ \gtrsim 50$ . This is also the case of the analytical wall-model defined by Eqs. (6) and (7).

#### D. Evaluation of the profile parameters: Selected boundary conditions

To completely define the velocity and temperature profiles given by Eqs. (17) and (18), three scalar unknowns must be

computed in the case of an adiabatic wall:  $u_\tau$ ,  $\delta_v$ , and  $A$ . If the wall is considered to be isothermal, there are three additional scalar unknowns:  $T_\tau$ ,  $\delta_c$ , and  $A_T$ . They are determined according to boundary conditions and vertically integrated boundary layer equations:

1. the velocity profile defined in Eq. (17) must match with the LES velocity field at  $y_1$  in order to be continuous,

$$\bar{u}_1(y_1; u_\tau; \delta_v; A) = \tilde{u}_{1\parallel}; \quad (19)$$

2. the diffusive layer thickness  $\delta_v$  is supposed to be constant,

$$\delta_v = 11, \quad (20)$$

and this value corresponds to the intersection point between the linear law  $u^+ = y^+$  and the logarithmic law of the wall in the case of an incompressible flow;

3. the velocity profile defined in Eq. (17) must be the solution of the vertically integrated momentum equation (10b);

4. in the case of an isothermal boundary condition, three additional unknowns  $A_T$ ,  $\delta_c$ , and  $T_\tau$  must be computed:

- (a) the temperature profile defined in Eq. (18) must match with the LES temperature field at  $y_1$  in order to be continuous,

$$\bar{T}_1(y_1; u_\tau; T_\tau; \delta_c; A_T) = \tilde{T}_1, \quad (21)$$

- (b) as with the diffusive layer thickness  $\delta_v$ , the convective layer thickness  $\delta_c$  is supposed to be constant and

$$\delta_c = 11, \quad (22)$$

- (c) the velocity and temperature profiles defined in Eqs. (17) and (18) must be the solution of the vertically integrated energy equation (10c).

All these equations form a system of three or six (depending on whether the wall is supposed to be adiabatic or isothermal) scalar equations,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\tau \left( \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y_1^+) + (B - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa) (1 - \exp(\frac{-y_1^+}{11}) - \frac{y_1^+}{11} \exp(\frac{-y_1^+}{3})) \right) \\ \quad + A y_1^+ (1 - \exp(\frac{-y_1^+}{\delta_v})) = \tilde{u}_{1\parallel}, \\ \delta_v = 11, \\ \frac{\partial L_{\rho u}}{\partial t} - \tilde{u}_1 \frac{\partial L_\rho}{\partial t} + M_x = \bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_w, \end{array} \right. \quad (23a)$$

and if the boundary condition is isothermal,

$$\left\{ \begin{array}{l} T_w + T_\tau \left( P r y_1^+ \exp(-\Gamma) + (\frac{1}{\kappa_t} \ln(1 + y_1^+) + \beta) \exp(-1/\Gamma) \right) \\ \quad + A_T y_1^+ (1 - \exp(\frac{-y_1^+}{\delta_c})) = \tilde{T}_1, \\ \delta_c = 11, \\ \left( \frac{c_p}{r} - 1 \right) \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} y_1 - c_p \tilde{T}_1 \frac{\partial L_\rho}{\partial t} + M_{T_x} = L_{\tilde{\tau}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_w, \end{array} \right. \quad (23b)$$

which is much easier to solve than numerical wall-model differential equations.

For an adiabatic boundary condition, the list of unknowns is reduced to three as only the wall friction vector has to be computed by the wall-model. Indeed in this case, the friction temperature  $T_\tau$  is zero as well as the wall heat flux. As explained in Subsection III C, Walz's law<sup>69</sup> is used to link the temperature to the velocity profile and the correction term  $A_T$  is not required. Therefore, in this case, only the velocity profile needs to be determined with the friction

velocity  $u_\tau$ , the diffusive layer thickness  $\delta_\nu$ , and the correction term  $A$ .

### E. Numerical resolution of the integral equations

The method to solve the system of Eqs. (23) written in Subsection III D is now detailed in the case of an isothermal wall. For an adiabatic wall, the resolution is simpler as the

temperature profile is determined from the velocity profile using Eq. (18). In this section, variables at the current time step will be denoted with a superscript  $n$  and  $n - 1$  for those at the previous time step.

At each wall interface, using LES data located at the first off-wall cell  $y_1$ , thanks to Eqs. (19)–(22), the scalar unknowns  $A^n$ ,  $\delta_\nu$ ,  $A_T^n$ , and  $\delta_c$  are expressed as functions of  $u_\tau^n$  and  $T_\tau^n$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} A^n(u_\tau^n; T_\tau^n) = \frac{\frac{\bar{u}_{1\parallel}^n}{u_\tau^n} - \left( \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y_1^{+n}) + (B - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa)(1 - \exp(\frac{-y_1^{+n}}{11}) - \frac{y_1^{+n}}{11} \exp(\frac{-y_1^{+n}}{3})) \right)}{y_1^{+n}(1 - \exp(\frac{-y_1^{+n}}{\delta_\nu}))}, \\ \delta_\nu = 11, \\ A_T^n(u_\tau^n; T_\tau^n) = \frac{\frac{\bar{T}_1^n - T_w}{T_\tau^n} - (Pr y_1^{+n} \exp(-\Gamma) + (\frac{1}{\kappa_t} \ln(1 + y_1^{+n}) + \beta) \exp(-1/\Gamma))}{y_1^{+n}(1 - \exp(\frac{-y_1^{+n}}{\delta_c}))}, \\ \delta_c = 11. \end{array} \right. \quad (24)$$

Thus, system (23) is reduced to a non-linear system of two equations [(10b) and (10c)] with two unknowns:  $u_\tau^n$  and  $T_\tau^n$ . The temporal derivatives in these equations are discretized with an explicit scheme and the spatial derivatives with a second-order centered scheme. An upwind scheme is used if the wall interface is adjacent to another boundary condition. Then Eqs. (10b) and (10c) become

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{\rho u}^n(u_\tau^n; T_\tau^n) - \bar{u}_{1\parallel}^{n-1} L_\rho^n(u_\tau^n; T_\tau^n) = L_{\rho u}^{n-1}(1 - \bar{u}_{1\parallel}^{n-1}) + \Delta t(-M_x^{n-1} + \bar{\tau}_1^{n-1} - \bar{\tau}_w^{n-1}), \\ c_p \bar{T}_1^{n-1} L_\rho^n(u_\tau^n; T_\tau^n) = \left( \frac{c_p}{r} - 1 \right) y_1 (\bar{p}_1^n - \bar{p}_1^{n-1}) + c_p \bar{T}_1^{n-1} L_\rho^{n-1}, \\ -\Delta t(-M_{T_x}^{n-1} + L_\tau^{n-1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\phi}_1^{n-1} + \bar{\phi}_w^{n-1}), \end{array} \right. \quad (25a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_p \bar{T}_1^{n-1} L_\rho^n(u_\tau^n; T_\tau^n) = \left( \frac{c_p}{r} - 1 \right) y_1 (\bar{p}_1^n - \bar{p}_1^{n-1}) + c_p \bar{T}_1^{n-1} L_\rho^{n-1}, \\ -\Delta t(-M_{T_x}^{n-1} + L_\tau^{n-1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\phi}_1^{n-1} + \bar{\phi}_w^{n-1}), \end{array} \right. \quad (25b)$$

where the terms depending on the unknowns  $u_\tau^n$  and  $T_\tau^n$  are specified and with  $\Delta t$  being the time step of the LES solver. Given data located at the first off-wall point  $y_1$  at the current and previous time steps along with the wall fluxes at previous iteration  $u_\tau^{n-1}$  and  $T_\tau^{n-1}$ ,  $u_\tau^n$  and  $T_\tau^n$  are computed by solving Eqs. (25a) and (25b), thanks to bidimensional Newton-Raphson's algorithm whose corresponding Jacobian matrix is given in Appendix A.  $u_\tau^{n-1}$  and  $T_\tau^{n-1}$  are chosen as initial guesses of the algorithm. At the first iteration of the flow solver, i.e., at  $n = 0$ , wall fluxes are estimated by a first-order finite difference scheme like in wall-resolved LES.

Integral terms  $L_f$  in Eqs. (25a) and (25b) cannot be determined analytically unless the density is constant.<sup>49</sup> Besides, since the pressure is assumed to be constant along the wall-normal direction, the density profile can be determined from the temperature profile using the perfect gas law. Thus, a Gauss-Legendre quadrature is used to compute the  $L_f$  terms: definite integrals are approximated as a weighted sum of function values at  $N$  points. For a function  $f: [0; y_1] \rightarrow \mathbb{R}$ , the quadrature implies

$$\int_0^{y_1} f(y) dy \approx \frac{y_1}{2} \sum_{i=0}^N w_i f\left(\frac{y_1}{2}(1 + \xi_i)\right), \quad (26)$$

with  $(w_i)_{0 \leq i \leq N}$  and  $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N}$ , respectively, being the weights and the Gauss nodes. In the case of the Gauss-Legendre

quadrature,  $w_i$  and  $\xi_i$  are chosen in such a way that the quadrature is exact for Legendre polynomials of degree less than or equal to  $2N - 1$ .

Figure 2 shows the observed computational overhead of iWMLES and an equilibrium numerical wall-model<sup>23</sup> (denoted as TBLE in the following) with respect to an analytical model aWMLES in the cases of an isothermal or adiabatic wall. The iWMLES computational cost is much lower compared to the TBLE one, although the former takes into account

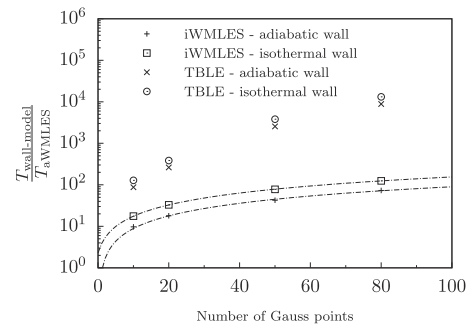


FIG. 2. Ratio of the observed computational cost  $T_{\text{wall-model}}$  of the iWMLES and a numerical wall-model for LES (TBLE) based on the equilibrium thin boundary layer equations with respect to the cost  $T_{\text{aWMLES}}$  of an analytical wall-model per cell interface for adiabatic and isothermal walls. For iWMLES, corresponding linear regression is in dashed lines.

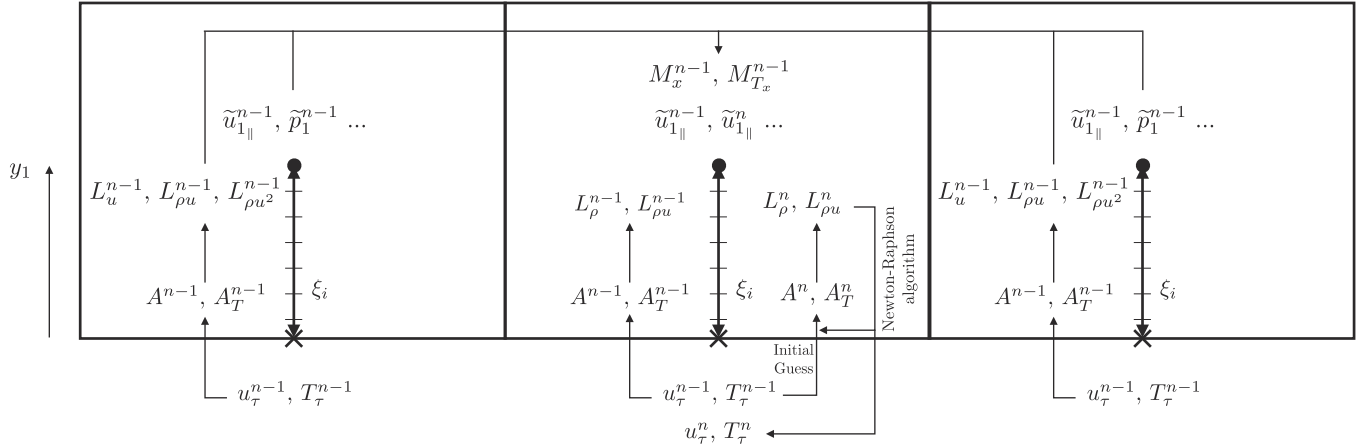


FIG. 3. Scheme of the iWMLES resolution algorithm.

convective terms. Besides, and as opposed to TBLE, the iWMLES algorithm scales linearly with the number of Gauss nodes  $N$  used. The iWMLES algorithm is nearly twice as fast when the wall is assumed to be adiabatic instead of isothermal. Indeed, in this case, the integral energy equation is not solved and a velocity-temperature relation is used. Such improvement is also observed for TBLE but in a reduced proportion as the temperature profile still needs to be computed. In the following,  $N$  is taken equal to 10.

The iWMLES resolution algorithm is illustrated in Fig. 3 and can be summarized as follows:

1. At the first iteration, wall fluxes are computed by a nearest-cell approximation as in a standard resolved LES.
2. Then, at each wall interface, the LES data at matching point  $y_1$  at the previous and current iterations  $n$  along with the wall fluxes at previous iteration  $n - 1$  are used as the input to the iWMLES model in order to compute the wall fluxes at the current iteration.
  - (a) As with the analytical wall-model described in Subsection II C, wall density  $\rho_w^n$  is computed from the perfect gas relation.
  - (b) The velocity at the current iteration  $n$  is projected along the plane parallel to the wall as explained in Subsection II B.
  - (c) At each wall interface and given data at the previous solver iteration, the scalar parameters  $A^{n-1}$ ,  $A_T^{n-1}$ ,  $\delta^v$ , and  $\delta_c$  are computed from  $u_\tau^{n-1}$  and  $T_\tau^{n-1}$ , thanks to Eq. (24) in order to define the velocity and temperature profiles given by Eqs. (17) and (18).
  - (d) These profiles are used to compute the right-hand side terms of Eqs. (25a) and (25b). Integral terms  $L_f^{n-1}$  are approximated with a Gauss-Legendre quadrature. Note that the density profile is determined from the temperature profile using the perfect gas relation Eq. (9e). Convective terms  $M_x^{n-1}$  and  $M_{T_x}^{n-1}$  are computed using a second-order centered scheme. Knowing the form of the velocity and temperature profiles, their wall-normal derivatives can be analytically derived. They are given in Appendix B. Then, turbulent viscosity  $\mu_t^{n-1}$  and thermal conductivity  $\lambda_t^{n-1}$  are given by Eqs. (13) and (14).

- (e) The wall fluxes at the current time step  $u_\tau^n$  and  $T_\tau^n$  are determined in such a way that the left-hand sides of Eqs. (25a) and (25b) equal their right-hand sides using the Newton-Raphson algorithm.  $u_\tau^{n-1}$  and  $T_\tau^{n-1}$  are used as the initial guess. For each evaluation, the scalar parameters  $A^n$ ,  $A_T^n$ ,  $\delta_c$ , and  $\delta^v$  are computed and the corresponding velocity and temperature profiles are used to approximate integral terms  $L_f^n$ , thanks to the Gauss-Legendre quadrature.
- (f) Once the Newton-Raphson algorithm has converged, the wall friction modulus  $\|\tau_w^n\|$  and wall heat flux  $\tilde{\phi}_w^n$  are fed back to the LES solver. The wall friction vector components in the flow solver frame are finally determined by switching from the boundary layer to the flow solver frame as explained in Subsection II B.

#### IV. APPLICATION TO BI-PERIODIC PLANE CHANNEL FLOWS

The integral wall-model for compressible flows described in Sec. III is assessed on plane channel flows, and results are compared to the available DNS data. After presenting the selected DNS configurations, the numerical setup used to launch WMLES computation is described. Finally, the results on quasi-incompressible and supersonic cases are presented.

##### A. Test cases

In order to evaluate the capacity of the integral wall-model to accurately predict wall fluxes, several DNS of bi-periodic plane channel flows are considered as summarized in Table I.

For incompressible DNS, several friction Reynolds numbers  $Re_\tau$  are available (1020,<sup>70</sup> 2003,<sup>71</sup> 4179,<sup>72</sup> and 5186<sup>73</sup>). For the  $Re_\tau = 1020$  DNS, a temperature gradient is imposed by a constant and uniform heat flux at walls. To reproduce this DNS in WMLES, a constant wall temperature  $T_w$  is applied and the flow is forced such that  $T_b/T_w = 1.1$  with  $T_b = \int_0^{2h} \rho u T dy / \int_0^{2h} \rho u dy$  being the bulk temperature and  $h$  being the half-height channel. In the other DNS, the wall

TABLE I. Plane channel flow DNS considered.

DNS	$(N_x, N_y, N_z)$	Boundary conditions	$M_b$	$Re_\tau$	$Re_b$	$M_\tau$	$T_b/T_w$	$-B_q/Nu$
Abe, Kawamura, and Matsuo <sup>70</sup>	(2048, 448, 1536)	Uniform heat-flux	...	1020	20 721	...	...	.../83.0
Hoyas and Jiménez <sup>71</sup>	(6144, 633, 4608)	Adiabatic	...	2003	43 590	...	...	...
Lozano-Durán and Jiménez <sup>72</sup>	(-,1081,-)	Adiabatic	...	4179	98 302	...	...	...
Lee and Moser <sup>73</sup>	(10240, 1536, 7680)	Adiabatic	...	5186	124 862	...	...	...
Modesti and Pirozzoli <sup>75</sup>	(2048, 512, 1024)	Isothermal	1.5	1015	17 000	0.065	1.35	0.038/123.5
Trettel and Larsson <sup>76</sup>	(800, 246, 400)	Isothermal	1.7	663	10 000	0.077	1.45	0.053/68.9
Trettel and Larsson <sup>76</sup>	(896, 384, 480)	Isothermal	1.7	972	15 500	0.073	1.45	0.050/112.7

is considered adiabatic. For the WMLES, a small temperature gradient  $T_b/T_w = 1.1$  will also be applied in order to assess the accuracy of the wall heat flux computation. The adiabatic DNS friction coefficients are still considered as reference. The reference Nusselt number  $Nu = 2h\phi_w/(\lambda(T_w - T_b))$  is computed from Kays's correlation,<sup>74</sup>

$$Nu = \frac{0.023Re_f^{0.8}Pr}{0.88 + 2.03(Pr^{2/3} - 0.78)Re_f^{-0.1}}, \quad (27)$$

with  $Re_f = 2h\rho_f u_b/\mu_f$  being the Reynolds number based on the film density  $\rho_f = 2\rho_w\rho_b/(\rho_w + \rho_b)$ , the film viscosity  $\mu_f$  computed from Sutherland's law, and the film temperature  $T_f = (T_b + T_w)/2$ .  $\rho_b = \int_0^{2h} \rho dy/(2h)$  is the bulk density.

For the compressible DNS under consideration,  $Re_\tau$  is equal to 1015, 663, or 972. At  $Re_\tau = 1015$ , the Mach number  $M_b = u_b/\sqrt{\gamma r T_w}$  based on the bulk velocity  $u_b = \int_0^{2h} \rho u dy/(2h\rho_b)$  is equal to 1.5. In the other two cases,  $M_b = 1.7$ . For all cases, only non-adiabatic boundary conditions exist.

For all plane channel flow simulations, the flow is forced to prevent the decrease in kinetic energy due to dissipation. The compressible DNS are reproduced here by applying a constant wall temperature  $T_w$  and forcing the bulk temperature  $T_b$  to get the same ratio  $T_b/T_w$  as in the corresponding DNS.

In all cases, it has to be noted that the friction Reynolds number is an output of the computation as it depends on the friction velocity  $u_\tau$ . It is the bulk Reynolds number  $Re_b = \rho_b u_b h/\mu_b$  which defines the flow, where  $\mu_b$  is the bulk viscosity obtained from Sutherland's law and the bulk temperature  $T_b$ . The wall heat flux coefficient  $B_q$  is defined by  $B_q = \frac{\phi_w}{\rho_w c_p u_\tau T_w}$  and the friction Mach number  $M_\tau$  by  $M_\tau = u_\tau/\sqrt{\gamma r T_w}$ .

## B. Simulation setups

The cell-centered finite volume flow solver *elsA-ONERA* described in Subsection II A is used to carry out all the simulations. In all adiabatic WMLES cases, the Prandtl number  $Pr$  is set to 0.72. In the other cases,  $Pr$  is chosen according to the DNS values: at  $Re_\tau = 1020$ ,  $Pr$  is set at 0.71, and in all supersonic cases,  $Pr = 0.7$ . For all cases, the turbulent Prandtl number  $Pr_t$  is assumed constant and equal to 0.9. In fact, using Germano-like dynamic calibration, one can observe that this parameter is not constant and is spatially varying. In practice, it appears to have a minor influence only.<sup>77,78</sup>

The computational domain's size is defined by  $(x, y, z) \in \Omega = [0; 2\pi\delta] \times [0; 2\delta] \times [0; \pi\delta]$  with  $\delta$  being the boundary layer thickness which is equal to the channel half-height  $h$  and  $x$ ,  $y$ , and  $z$ , respectively, being the coordinates in the longitudinal, wall-normal, and spanwise directions. For high-Reynolds number flows like those considered in this study, the computational domain size is big enough to capture turbulent eddies and has been used in previous studies.<sup>23,56,79</sup>

Two uniform grids G1 and G2 are considered:  $25 \times 21 \times 21$  and  $49 \times 41 \times 41$ . On the former mesh, the first off-wall cell is located at  $y_1 = 0.05\delta$ , while on the latter,  $y_1 = 0.025\delta$ . Since cell sizes are approximately given by  $\Delta x = 5.2y_1$  and  $\Delta z = \pi y_1$ , the cell aspect ratio follows the outer-layer turbulent structure's size. All cases' parameters are summarized in Tables II–IV.

In order to enforce the correct mass flow rate and bulk temperature, energy is injected in the domain through two volumic source terms  $S_x$  and  $Q_x$  which are, respectively, added to the streamwise momentum and energy equations,

$$S_x(t) = (\rho u)_{b_{\text{target}}} - \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega} \rho u \, d\Omega, \quad (28)$$

$$Q_x(t) = T_{b_{\text{target}}} - \frac{\int_{\Omega} \rho u T \, d\Omega}{\int_{\Omega} \rho u \, d\Omega} + u S_x. \quad (29)$$

TABLE II. Adiabatic quasi-incompressible plane channel flow cases in WMLES.

Case name	$(N_x, N_y, N_z)$	$M_b$	$Re_\tau$	$Re_b$	$\Delta_x^+$	$y_1^+$ (at cell)	$\Delta_z^+$
G1_M0.2_R2003_adia	(25, 21, 21)	0.2	2003	43 590	524	100	315
G2_M0.2_R2003_adia	(49, 41, 41)	0.2	2003	43 590	262	50	157
G1_M0.2_R4179_adia	(25, 21, 21)	0.2	4179	98 302	1094	209	656
G2_M0.2_R4179_adia	(49, 41, 41)	0.2	4179	98 302	547	104	328
G1_M0.2_R5186_adia	(25, 21, 21)	0.2	5186	124 862	1358	259	815
G2_M0.2_R5186_adia	(49, 41, 41)	0.2	5186	124 862	679	130	407



TABLE III. Isothermal quasi-incompressible plane channel flow cases in WMLES.

Case name	$(N_x, N_y, N_z)$	$M_b$	$Re_\tau$	$Re_b$	$T_w/T_b$	$\Delta_x^+$	$y_1^+$ (at cell)	$\Delta_z^+$
G1_M0.2_R1020	(25, 21, 21)	0.2	1020	20 721	1.1	267	51	160
G2_M0.2_R1020	(49, 41, 41)	0.2	1020	20 721	1.1	134	26	80
G1_M0.2_R2003	(25, 21, 21)	0.2	2003	43 590	1.1	524	100	315
G2_M0.2_R2003	(49, 41, 41)	0.2	2003	43 590	1.1	262	50	157
G1_M0.2_R4179	(25, 21, 21)	0.2	4179	98 302	1.1	1094	209	656
G2_M0.2_R4179	(49, 41, 41)	0.2	4179	98 302	1.1	547	104	328
G1_M0.2_R5186	(25, 21, 21)	0.2	5186	124 862	1.1	1358	259	815
G2_M0.2_R5186	(49, 41, 41)	0.2	5186	124 862	1.1	679	130	407

TABLE IV. Isothermal supersonic plane channel flow cases in WMLES.

Case name	$(N_x, N_y, N_z)$	$M_b$	$Re_\tau$	$Re_b$	$T_b/T_w$	$\Delta_x^+$	$y_1^+$ (at cell)	$\Delta_z^+$
G1_M1.5_R1015	(25, 21, 21)	1.5	1015	17 000	1.35	266	51	159
G2_M1.5_R1015	(49, 41, 41)	1.5	1015	17 000	1.35	133	25	80
G1_M1.7_R663	(25, 21, 21)	1.7	663	10 000	1.45	174	33	104
G2_M1.7_R663	(49, 41, 41)	1.7	663	10 000	1.45	87	17	52
G1_M1.7_R972	(25, 21, 21)	1.7	972	15 500	1.45	254	49	153
G2_M1.7_R972	(49, 41, 41)	1.7	972	15 500	1.45	127	24	76

$S_x$  aims to force the flow to reach a given bulk Reynolds number by imposing the correct mass flow rate  $(\rho u)_{b_{\text{target}}}$  while  $Q_x$  forces the bulk temperature. These two terms are computed at each iteration of the flow solver. Constant parts can be added to  $S_x$  and  $Q_x$  in order to accelerate flow convergence.<sup>80</sup> The source terms are also taken into account in iWMLES equations (25a) and (25b). Moreover, numerical experiments showed that identical results are obtained when  $M_x$  and  $M_{T_x}$  are taken into account if the wall-model input data are filtered in time.<sup>49,81</sup> Indeed in plane channel flows, convective terms are statistically zero, but due to the unsteady nature of LES, non-filtered  $M_x$  and  $M_{T_x}$  terms are always oscillating even after reaching flow convergence. In order to reduce the computational cost of the simulations, convective terms are neglected in the following.

The initial condition is built from a steady state based on a power-law velocity profile,

$$\forall (x, y, z) \in \Omega, \begin{cases} u(x, y, z, t = 0) = \frac{8}{7} u_{b_{\text{target}}} \left(1 - \left|1 - \frac{y}{h}\right|\right) \\ v(x, y, z, t = 0) = 0 \\ w(x, y, z, t = 0) = 0 \\ T(x, y, z, t = 0) = T_w, \end{cases} \quad (30)$$

which is perturbed with an additional random noise applied to the velocity field. The noise maximum amplitude is equal to 10% in the longitudinal direction and 5% in the other directions of the bulk velocity. It can be noted that random noise is enough to force turbulent transition of the flow because coarse grids are considered in this study. For finer grids as encountered in resolved LES, vortex rings are added to the initial flow to mimic turbulent structures.<sup>56,82</sup> However, WMLES grids are not fine enough to discretize these kinds of structures.

For all simulations, flow convergence toward a statistically steady state is assumed to be reached once the kinetic energy's variation in the whole domain does not exceed 0.01% of its mean value. Then, statistics are obtained by time averaging the

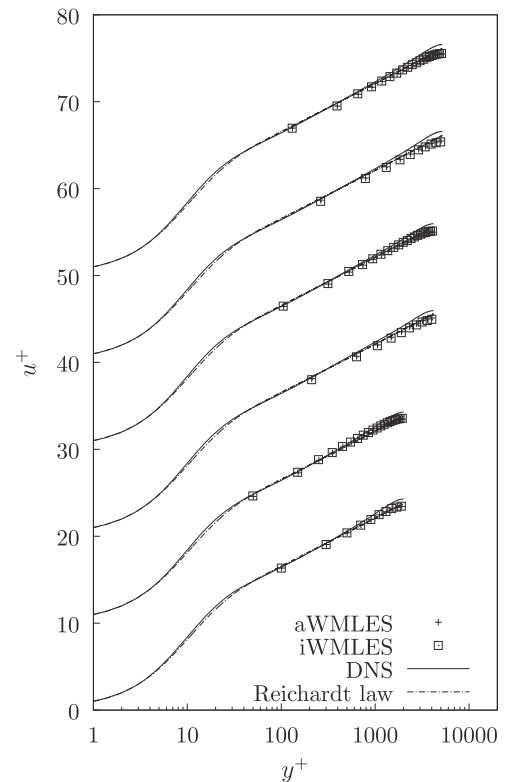


FIG. 4. Mean velocity profiles in wall units for adiabatic quasi-incompressible cases. Profiles are shifted by multiples of 10. From bottom to top: G1\_M0.2\_R2003\_adia, G2\_M0.2\_R2003\_adia, G1\_M0.2\_R4179\_adia, G2\_M0.2\_R4179\_adia, G1\_M0.2\_R5186\_adia, G2\_M0.2\_R5186\_adia.

flow over  $200 \times 2\pi\delta/u_b$  periods through the channel. Space averaging along the longitudinal and spanwise directions is also done before comparing the mean profiles with DNS data.

### C. Results for quasi-incompressible flows

Before evaluating the capacity of iWMLES to take into account complex physical phenomena such as compressibility effects, it is required to check whether iWMLES is able to recover standard results where aWMLES is known to be accurate. As explained in Subsection IV A, four incompressible DNS are considered. Besides, a small temperature gradient is also applied on all adiabatic cases in order to evaluate iWMLES on quasi-incompressible isothermal flows. Therefore, seven quasi-incompressible cases in terms of Reynolds numbers and wall boundary conditions are computed with aWMLES and iWMLES. All numerical and physical case parameters are summarized in Tables II and III.

Mean profiles in wall units for adiabatic and isothermal cases are, respectively, shown in Figs. 4 and 5. In all cases,

iWMLES recovers the logarithmic law of the wall and is in agreement with the DNS profiles, which means that the corrective terms added in the parameterized velocity and temperature profiles cancel out for different Reynolds numbers and grids. Similar profiles are obtained with aWMLES. No log-layer mismatch is observed unlike other hybrid RANS/LES methods,<sup>10,13</sup> which justifies the numerical setup employed in this study.

Velocity and temperature fluctuations at  $Re_\tau = 1020$  and 5186 are shown in Figs. 6–8. In all cases, aWMLES and iWMLES predict almost identical turbulent fluctuations whose overall levels are either in good agreement with DNS when it is available or coherent otherwise. The near-wall peak on streamwise velocity is not captured due to the coarse grid used and seems to start to be captured when the grid is refined. The only major difference between iWMLES and aWMLES occurs in the temperature fluctuation profiles at the first off-wall cell. As only DNS data at  $Re_\tau = 1020$  are available, it cannot be said whether iWMLES's temperature fluctuation estimation at the first cell is more accurate than that of aWMLES.

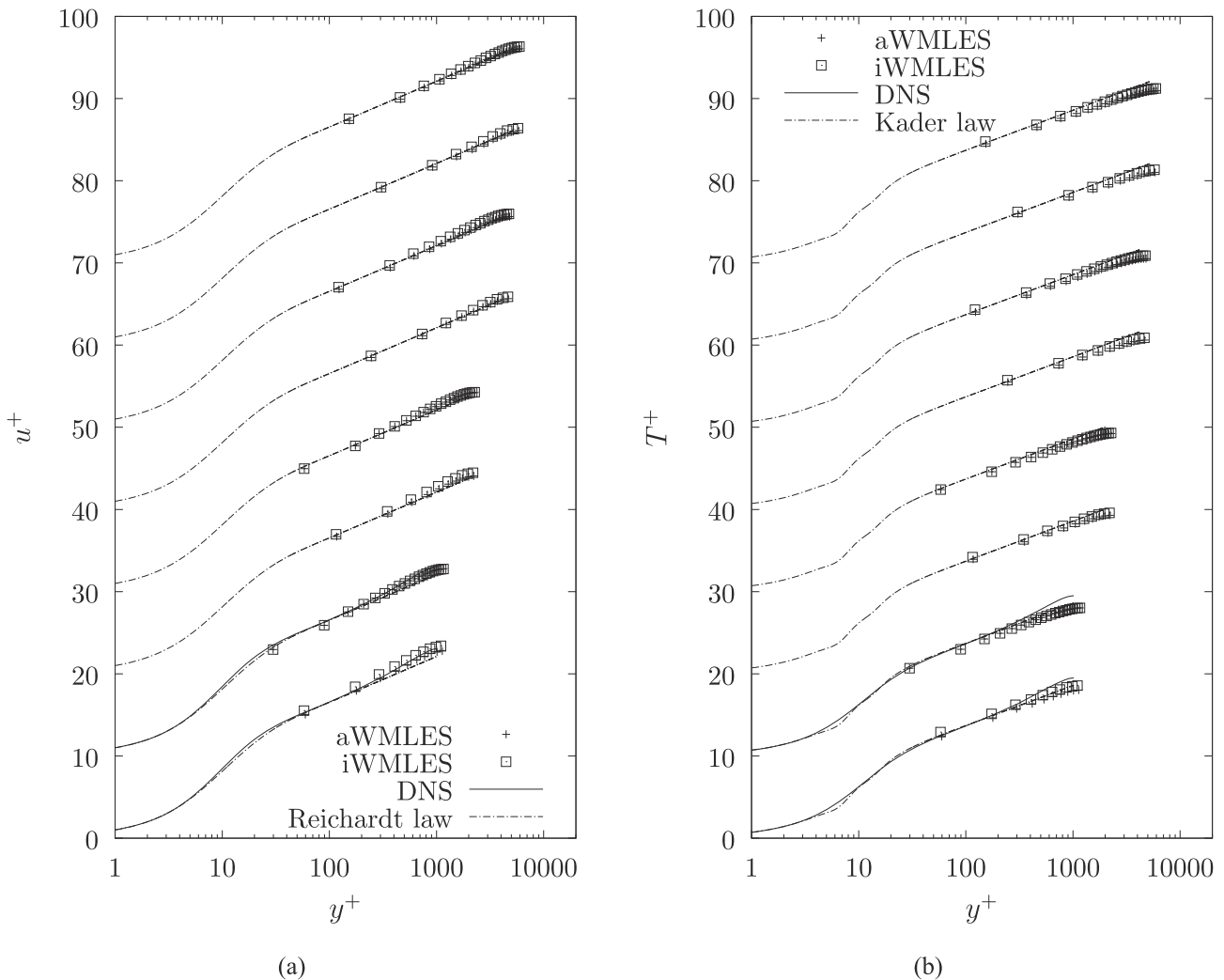


FIG. 5. Mean velocity (a) and temperature (b) profiles in wall units for isothermal quasi-incompressible cases. Profiles are shifted by multiples of 10. From bottom to top: G1\_M0.2\_R1020, G2\_M0.2\_R1020, G1\_M0.2\_R2003, G2\_M0.2\_R2003, G1\_M0.2\_R4179, G2\_M0.2\_R4179, G1\_M0.2\_R5186, G2\_M0.2\_R5186.

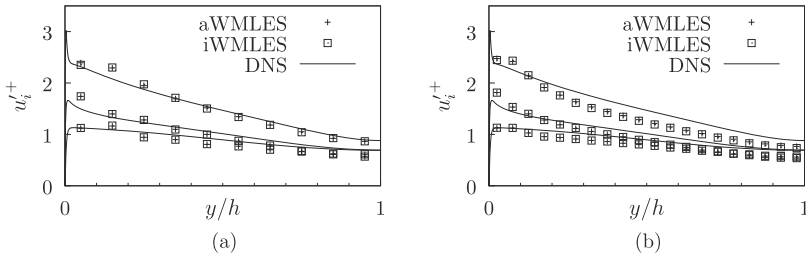


FIG. 6. Velocity fluctuations for adiabatic cases. For each case, from bottom to top:  $v^+$ ,  $w^+$ , and  $u^+$ . (a) Case G1\_M0.2\_R5186\_adia. (b) Case G2\_M0.2\_R5186\_adia.

Relative errors on the bulk friction coefficient and the Nusselt number are shown in Table V. As observed with the mean profiles, accurate wall friction fluxes are predicted by both iWMLES and aWMLES. In adiabatic cases, a maximum error of 3.1% is obtained. In isothermal cases, errors on the friction coefficient increase with the Reynolds number with maximum errors of 9.1% for aWMLES and 8.5% for iWMLES. For  $Re_\tau \geq 2003$ , the reference wall friction is taken from incompressible adiabatic DNS. In WMLES, as a compressible code is considered and due to the imposed temperature gradient, a density gradient exists. Therefore, the assumption

that the DNS friction coefficient is still valid may not hold when the Reynolds number increases. The largest errors on the Nusselt number occur at the lowest Reynolds number. This result may be due to the position of the first off-wall cell approaching the buffer layer. At higher Reynolds number cases, iWMLES and aWMLES are both in agreement with Kays’s correlation.

To sum up, iWMLES is able to recover the standard logarithmic laws for both the velocity and temperature profiles. Velocity and temperature profiles (mean and fluctuations) are in good agreement with adiabatic and isothermal DNS data.

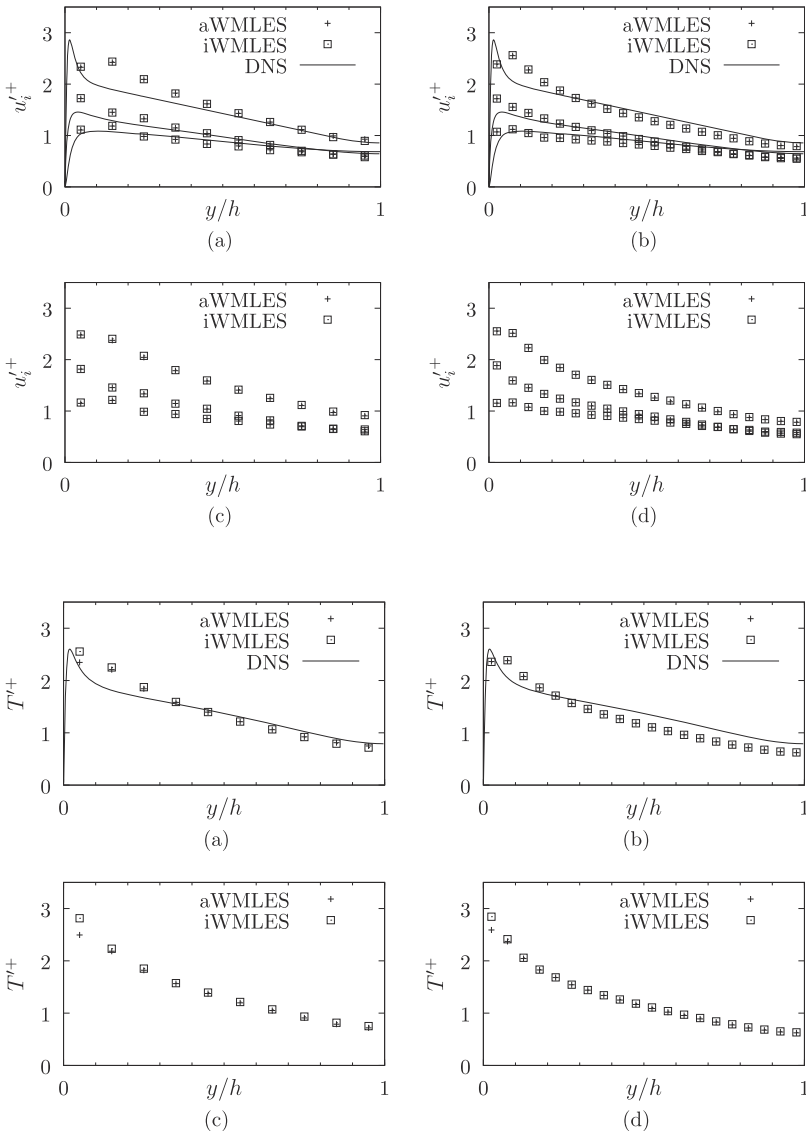


FIG. 7. Velocity fluctuations for isothermal cases. For each case, from bottom to top:  $v^+$ ,  $w^+$ , and  $u^+$ . (a) Case G1\_M0.2\_R1020\_isot. (b) Case G2\_M0.2\_R1020\_isot. (c) Case G1\_M0.2\_R5186\_isot. (d) Case G2\_M0.2\_R5186\_isot.

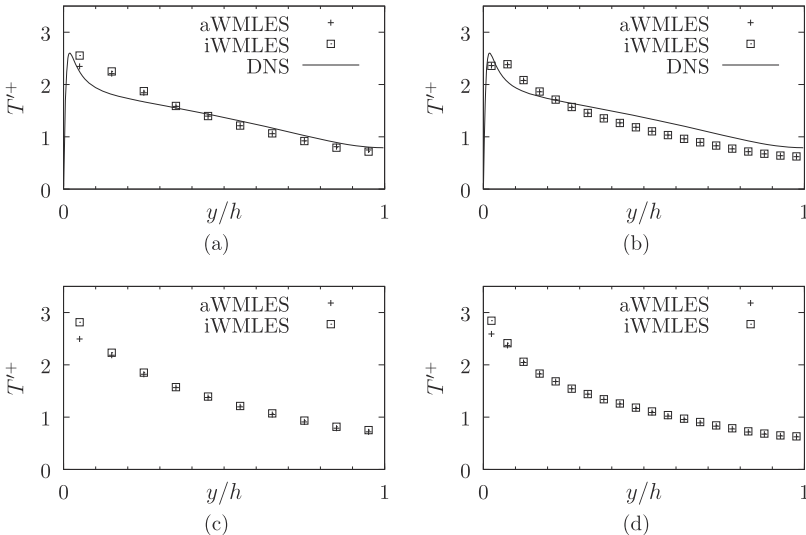


FIG. 8. Temperature fluctuations for isothermal cases. (a) Case G1\_M0.2\_R1020\_isot. (b) Case G2\_M0.2\_R1020\_isot. (c) Case G1\_M0.2\_R5186\_isot. (d) Case G2\_M0.2\_R5186\_isot.



TABLE V. Relative errors in % on the bulk friction coefficient  $C_{fb} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_b u_b^2}$  and the Nusselt number  $Nu = \frac{2h\phi_w}{\lambda(T_w - T_b)}$  for quasi-incompressible plane channel flow cases in WMLES.

Case	Wall-model	$\Delta(C_{fb})$ in %	$\Delta(Nu)$ in %
G1_M0.2_R2003_adia	aWMLES	0.3	...
G2_M0.2_R2003_adia	aWMLES	0.7	...
G1_M0.2_R4179_adia	aWMLES	1.3	...
G2_M0.2_R4179_adia	aWMLES	2.5	...
G1_M0.2_R5186_adia	aWMLES	2.3	...
G2_M0.2_R5186_adia	aWMLES	3.1	...
<hr/>			
G1_M0.2_R2003_adia	iWMLES	-0.3	...
G2_M0.2_R2003_adia	iWMLES	-0.1	...
G1_M0.2_R4179_adia	iWMLES	2.0	...
G2_M0.2_R4179_adia	iWMLES	1.4	...
G1_M0.2_R5186_adia	iWMLES	2.5	...
G2_M0.2_R5186_adia	iWMLES	2.3	...
<hr/>			
G1_M0.2_R1020	aWMLES	3.8	13.7
G2_M0.2_R1020	aWMLES	5.1	14.6
G1_M0.2_R2003	aWMLES	5.3	-1.9 <sup>a</sup>
G2_M0.2_R2003	aWMLES	5.3	-1.3 <sup>a</sup>
G1_M0.2_R4179	aWMLES	7.1	-0.04 <sup>a</sup>
G2_M0.2_R4179	aWMLES	8.0	1.0 <sup>a</sup>
G1_M0.2_R5186	aWMLES	8.2	0.7 <sup>a</sup>
G2_M0.2_R5186	aWMLES	9.1	1.8 <sup>a</sup>
<hr/>			
G1_M0.2_R1020	iWMLES	1.2	7.4
G2_M0.2_R1020	iWMLES	7.1	14.0
G1_M0.2_R2003	iWMLES	4.7	-4.5 <sup>a</sup>
G2_M0.2_R2003	iWMLES	6.5	-2.2 <sup>a</sup>
G1_M0.2_R4179	iWMLES	7.7	-1.8 <sup>a</sup>
G2_M0.2_R4179	iWMLES	6.8	-2.2 <sup>a</sup>
G1_M0.2_R5186	iWMLES	7.9	-1.5 <sup>a</sup>
G2_M0.2_R5186	iWMLES	8.5	-0.7 <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Reference Nusselt number is computed from Kays's correlation.

It is interesting to note that the WMLES using either aWMLES or iWMLES predicts nearly identical fluctuations even if they are based on two different approaches. From a numerical point of view, differences could be observed using high-order schemes. From a physical point of view, velocity and temperature fluctuations are expected to be much more dependent on the features of the numerical methods (convective flux scheme, subgrid-scale model, etc.) used than on the wall-model. Indeed, this result is supported by recent studies of Cossu and Hwang.<sup>83</sup> They show that outer layer large-scale structures of wall-bounded turbulent flows can self-sustain without near-wall smaller-scale, by extracting energy from the mean flow. In WMLES, near-wall grids are too coarse to capture near-wall streaks but only large turbulent structures. Therefore, turbulence fluctuations would depend mostly on the resolution of these large-scale structures. Unlike near-wall small-scale structures, they are not expected to depend heavily on wall fluxes. This could explain the relative independence of the velocity fluctuations with respect to the wall-model used.

## D. Results for isothermal supersonic flows

More discriminant test cases, namely, supersonic channel flows, are now considered. Three different cases in terms of Reynolds and Mach numbers are computed as shown in Table IV. In all cases, a constant wall temperature is imposed in order to cool the flow and evacuate the injected energy through forcing terms as pointed out by Trettel and Larsson.<sup>76</sup> Usual logarithmic laws of the wall are not expected to hold on such flows. Thanks to its correction terms and computation of a weak solution of the vertically integrated boundary layer equations, iWMLES is expected to be more accurate than aWMLES.

Mean velocity profiles in wall units are shown in Fig. 9. As expected, aWMLES imposes the first off-wall cell to follow Reichardt's law which is incorrect here. Due to compressibility effects, velocity profiles are shifted upwards. This effect has also been observed on boundary layer flows.<sup>84</sup> Therefore, the friction velocity is overestimated and the whole velocity profiles in wall units are below the DNS profiles. On the contrary, iWMLES predicts correctly the wall friction. In all cases, the first off-wall point is in agreement with the DNS data as well as the whole profile. Only the second and third off-wall cells are shifted under the DNS velocity profiles for the case G2\_M1.7.663 ( $Re_\tau = 663$  on the finer grid G2). This can be due to the position of the wall-model interface which is in the buffer layer.

Likewise, mean temperature profiles in wall units for the aWMLES are not in agreement with the DNS profiles as shown in Fig. 9. The wall heat flux is systematically underestimated as the first off-wall cell is above the DNS. Temperature profiles are known to be more affected than velocity profiles.<sup>64,85</sup> The iWMLES model predicts more accurate wall heat flux than aWMLES, and more coherent temperature profiles are obtained. As observed for the velocity in case G2\_M1.7.663, the temperature profile does not follow the usual trend observed in other cases: the wall heat flux is slightly overestimated in iWMLES and the temperature profile is below the DNS reference.

Observations on mean profiles are confirmed by the measured errors on the friction Mach number  $M_\tau$  and the heat flux coefficient  $B_q$  in Table VI. Indeed larger errors are obtained with aWMLES compared to iWMLES. The maximum error on the friction Mach number is of 6.7% with the former and only 2.7% with the latter. For the heat flux coefficient, larger errors are computed as it is underestimated by at most 21.3% with aWMLES and 15.2% with iWMLES. Here, the aWMLES model shows its limits as the standard logarithmic laws are no longer valid on these kinds of flows. In all cases, iWMLES predicts more accurately wall fluxes than aWMLES.

Velocity and temperature fluctuations for  $Re_\tau = 972$  are shown, respectively, in Figs. 10 and 11. Other cases are not displayed for conciseness, as equivalent results and conclusions are obtained. Despite predicting different mean profiles, velocity fluctuations are very similar between iWMLES and aWMLES even if the former takes into account more physics than the latter in order to compute wall fluxes. Indeed, wall-models implemented here influence only the mean profiles

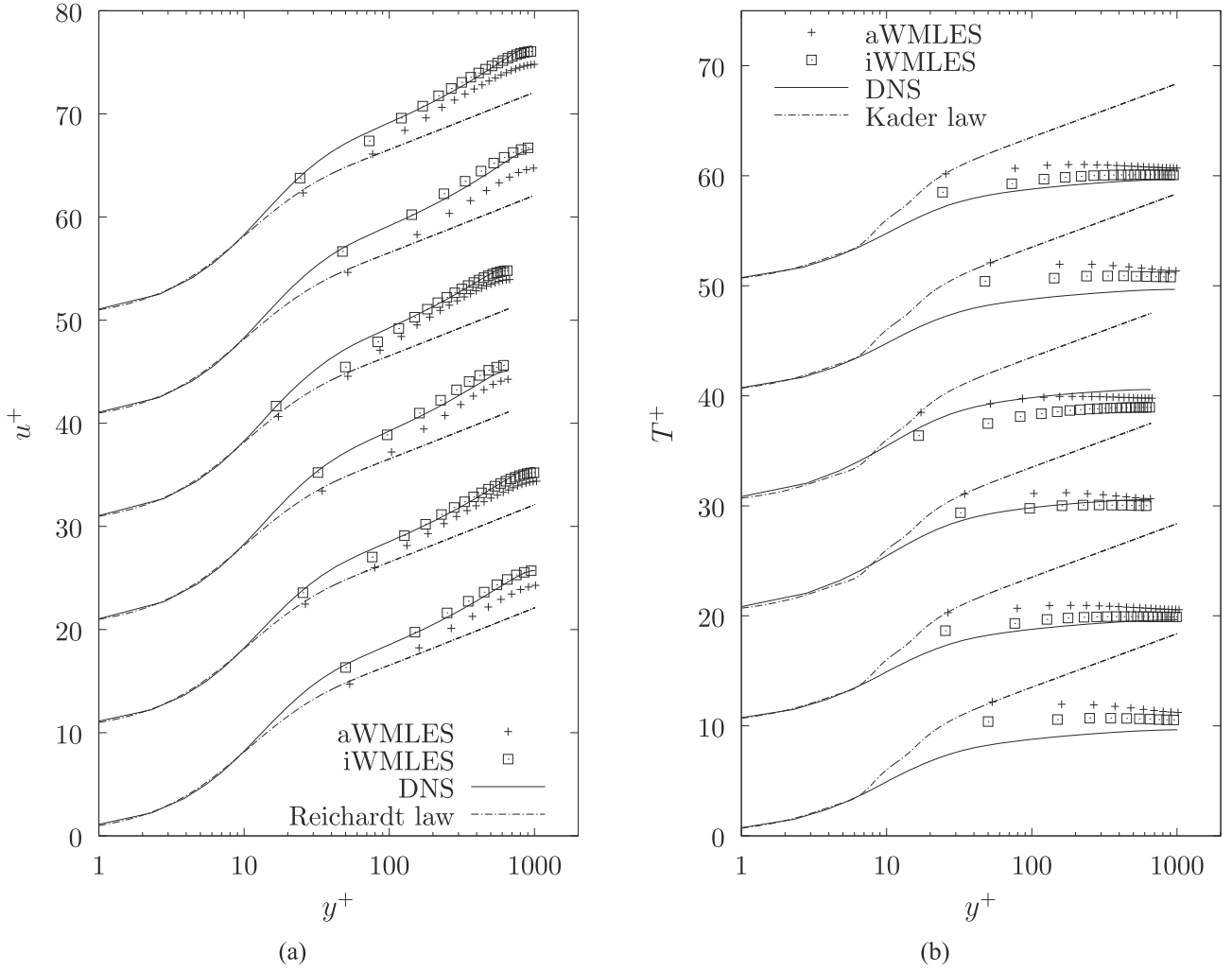


FIG. 9. Mean velocity (a) and temperature (b) profiles in wall units for isothermal supersonic cases. Profiles are shifted by multiples of 10. From bottom to top: G1\_M1.5\_R1015, G2\_M1.5\_R1015, G1\_M1.7\_R663, G2\_M1.7\_R663, G1\_M1.7\_R972, G2\_M1.7\_R972.

and do not interact directly with the second-order fluctuation terms. Like in quasi-incompressible flow cases, overall values of velocity fluctuations are in good agreement with the DNS

TABLE VI. Relative errors in % on the friction Mach number  $M_\tau = \frac{u_\tau}{c_w}$  ( $c_w$  is the speed of sound) and the wall heat flux coefficient  $B_q = \frac{\phi_w}{\rho_w c_p u_\tau T_w} = -\frac{T_\tau}{T_w}$  for supersonic plane channel flow cases in WMLES.

Case	Wall-model	$\Delta(M_\tau)$ in %	$\Delta(B_q)$ in %
G1_M1.5_R1015	aWMLES	6.7	-20.5
G2_M1.5_R1015	aWMLES	5.9	-14.3
G1_M1.7_R663	aWMLES	3.9	-21.3
G2_M1.7_R663	aWMLES	4.1	-12.7
G1_M1.7_R972	aWMLES	6.1	-21.1
G2_M1.7_R972	aWMLES	4.9	-15.2
G1_M1.5_R1015	iWMLES	0.2	-13.4
G2_M1.5_R1015	iWMLES	1.8	-6.8
G1_M1.7_R663	iWMLES	-2.7	-14.2
G2_M1.7_R663	iWMLES	0.5	-1.8
G1_M1.7_R972	iWMLES	-2.2	-15.2
G2_M1.7_R972	iWMLES	-0.2	-8.2

data, except the first rows of cells above the wall where the fluctuations are overestimated. Compared to quasi-incompressible flow DNS, the near-wall peak is more spread out in supersonic flows. This can explain the overestimation of the fluctuations near walls. Indeed when the grid is refined, the near-wall peak is better captured and better agreement with the DNS data is obtained.

Finally, in contrast to the velocity fluctuations, the temperature fluctuations are not similar between aWMLES and iWMLES. Indeed, temperature fluctuations with iWMLES are in correct agreement with the DNS profiles on the coarser grid, while aWMLES strongly overestimates it. Moreover, when the grid is refined, better agreement is obtained as the first off-wall cell is located at the near-wall peak position and the iWMLES approach predicts temperature fluctuations close to the DNS reference.

To sum up, iWMLES has a wider domain of validity and is able to compute more accurate wall fluxes than aWMLES, especially the wall friction. Better mean profiles are obtained with iWMLES. Furthermore, as shown in Subsection III E, iWMLES cost is only slightly more expensive compared to aWMLES.

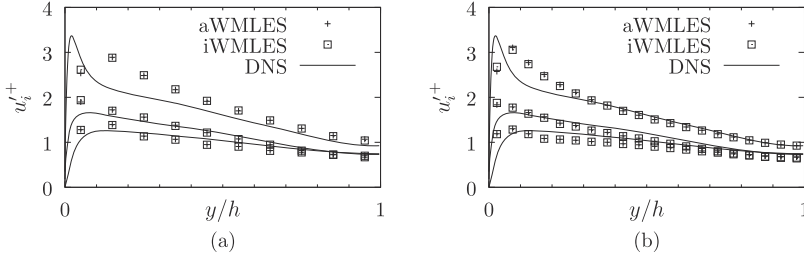


FIG. 10. Velocity fluctuations for isothermal supersonic cases. For each case, from bottom to top:  $v'^+$ ,  $w'^+$ , and  $u'^+$ . (a) Case G1\_M1.7\_R972\_isot. (b) Case G2\_M1.7\_R972\_isot.

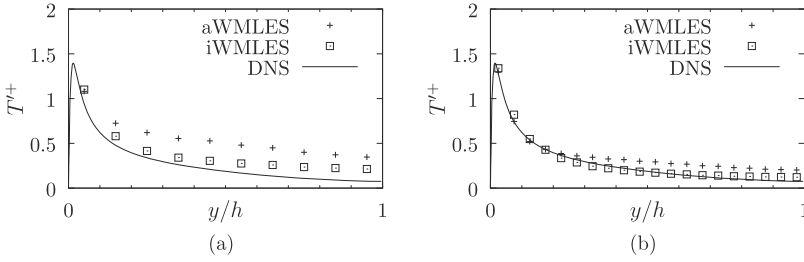


FIG. 11. Temperature fluctuations for isothermal supersonic cases. (a) Case G1\_M1.7\_R972\_isot. (b) Case G2\_M1.7\_R972\_isot.

## V. CONCLUDING REMARKS

In this study, an attempt is made to develop a valid wall-model for a typical turbomachinery flow range, i.e., flows with Mach numbers up to about 1.5, Reynolds numbers between  $10^6$  and  $10^7$ , and temperature gradients in the order of ten to hundred Kelvin. For this purpose, a compressible extension of the integral wall-model approach originally introduced for incompressible flows has been proposed, namely, the iWMLES. To this end, both the mean velocity and the mean temperature profiles have been parameterized using logarithmic laws of the wall with additional correction terms. These profiles are coupled to integral relations for compressible thin boundary layers in order to determine unknown parameters. Therefore, iWMLES takes into account more physics than standard equilibrium wall-models. Besides, the computational cost is reduced by a factor of about 100 compared to wall-models based on the numerical resolution of thin boundary layer equations since only a local simple scalar system is solved. An analytical wall-model, namely, the aWMLES, based on the standard logarithmic laws of the wall, is also implemented and used as a basis of comparison.

iWMLES is validated on both isothermal and adiabatic wall cases and is observed to accurately predict both subsonic and supersonic flows. Indeed, in subsonic flows, mean velocity and temperature profiles are in agreement with the DNS reference data, as well as the turbulent fluctuation profiles. iWMLES is therefore able to recover the standard logarithmic laws of the wall. In supersonic flows, as expected, aWMLES fails to predict the mean flow. On the contrary, iWMLES, by estimating more accurately the wall fluxes, is able to obtain results in agreement with the DNS data. Interestingly, both wall-models considered in this study predict nearly identical velocity fluctuations. This result indicates that the turbulent fluctuations are weakly dependent on the wall-model.

To go further, and before applying iWMLES to turbomachinery applications, it could be interesting to apply iWMLES in flows with (i) strong non-equilibrium effects,

(ii) strong compressibility effects, and (iii) complex wall boundaries. These effects could be studied by simulating an oblique shock/boundary-layer interaction, hypersonic flows, or wavy walls.<sup>86,87</sup> For the latter case, taking into account curvature effects could be considered. However, this case has, for the moment, not been simulated at a Reynolds number high enough for WMLES. Furthermore, DNS of spatially evolving supersonic boundary layers with isothermal walls<sup>88–92</sup> has been recently performed. Friction Reynolds numbers reached are increasing, and these cases could later be used as reference cases in order to evaluate wall-models for heat transfer prediction. Nonetheless, iWMLES, by taking into account more physics, is able to extend the domain of validity observed with a standard analytical wall-model with similar computational cost.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge A. Trettel and J. Larsson for kindly providing the DNS data of their supersonic channel flows. This work was supported by the *Association Nationale de la Recherche et de la Technologie* (ANRT; Grant No. 2015/0193).

## APPENDIX A: JACOBIAN MATRIX OF THE iWMLES EQUATIONS

As explained in Subsection III E, the Newton-Raphson algorithm is used to solve the system of Eqs. (25). In this appendix, the corresponding Jacobian matrix is detailed in the case of an isothermal boundary condition. If the wall is considered to be adiabatic, the Jacobian matrix is reduced to a one-dimensional function.

Let  $f$  and  $g$  be two functions defined by

$$f(u_\tau^n, T_\tau^n) = L_{\rho u}^n - \tilde{u}_{1\parallel}^{n-1} L_\rho^n - L_{\rho u}^{n-1} (1 - \tilde{u}_{1\parallel}^{n-1}) - \Delta t (-M_x^{n-1} + \bar{\tau}_1^{n-1} - \bar{\tau}_w^{n-1}), \quad (\text{A1})$$

$$g(u_\tau^n; T_\tau^n) = c_p \bar{T}_1^{n-1} L_\rho^n - \left( \frac{c_p}{r} - 1 \right) y_1 (\bar{p}_1^n - \bar{p}_1^{n-1}) - c_p \bar{T}_1^{n-1} L_\rho^{n-1} \\ + \Delta t (-M_{T_x}^{n-1} + L_\tau^{n-1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\phi}_1^{n-1} + \bar{\phi}_w^{n-1}). \quad (\text{A2})$$

Variables at time step  $n - 1$  are known and can be considered as constant scalars of the equation system as well as the pressure  $\bar{p}^n$  which is an input from the LES to the wall-model equations. Friction velocity  $u_\tau^n$  and temperature  $T_\tau^n$  at time step  $n$  are the unknowns. The system of Eqs. (25) can be simply written as

$$f(u_\tau^n; T_\tau^n) = 0, \quad (\text{A3}) \\ g(u_\tau^n; T_\tau^n) = 0,$$

and the corresponding Jacobian matrix  $J$  is by definition

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_\tau^n} & \frac{\partial f}{\partial T_\tau^n} \\ \frac{\partial g}{\partial u_\tau^n} & \frac{\partial g}{\partial T_\tau^n} \end{pmatrix}. \quad (\text{A4})$$

$J$  components are given by

$$\frac{\partial f}{\partial u_\tau^n} = \frac{\partial L_{\rho u}^n}{\partial u_\tau^n} - \bar{u}_{1\parallel}^{n-1} \frac{\partial L_\rho^n}{\partial u_\tau^n}, \quad (\text{A5a})$$

$$\frac{\partial f}{\partial T_\tau^n} = \frac{\partial L_{\rho u}^n}{\partial T_\tau^n} - \bar{u}_{1\parallel}^{n-1} \frac{\partial L_\rho^n}{\partial T_\tau^n}, \quad (\text{A5b})$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_\tau^n} = c_p \bar{T}_1^{n-1} \frac{\partial L_\rho^n}{\partial u_\tau^n}, \quad (\text{A5c})$$

$$\frac{\partial g}{\partial T_\tau^n} = c_p \bar{T}_1^{n-1} \frac{\partial L_\rho^n}{\partial T_\tau^n}. \quad (\text{A5d})$$

Thus,  $J$  is completely defined by the derivatives of integral terms  $L_\rho^n$  and  $L_{\rho u}^n$  with respect to  $u_\tau^n$  and  $T_\tau^n$ . As the fluid is supposed to be a perfect gas, density and temperature profiles are linked with pressure  $\bar{\rho}^n(y) = \bar{p}_1^n / (r \bar{T}^n(y))$  and

$$\frac{\partial L_\rho^n}{\partial u_\tau^n} = \frac{\bar{p}_1^n}{r} \int_0^{y_1} - \left( \frac{1}{\bar{T}^n} \right)^2 \frac{\partial \bar{T}^n}{\partial u_\tau^n} dy, \quad (\text{A6a})$$

$$\frac{\partial L_\rho^n}{\partial T_\tau^n} = \frac{\bar{p}_1^n}{r} \int_0^{y_1} - \left( \frac{1}{\bar{T}^n} \right)^2 \frac{\partial \bar{T}^n}{\partial T_\tau^n} dy, \quad (\text{A6b})$$

$$\frac{\partial L_{\rho u}^n}{\partial u_\tau^n} = \frac{\bar{p}_1^n}{r} \int_0^{y_1} \frac{\frac{\partial \bar{u}^n}{\partial u_\tau^n} \bar{T}^n - \bar{u}^n \frac{\partial \bar{T}^n}{\partial u_\tau^n}}{\bar{T}^n{}^2} dy, \quad (\text{A6c})$$

$$\frac{\partial L_{\rho u}^n}{\partial T_\tau^n} = \frac{\bar{p}_1^n}{r} \int_0^{y_1} \frac{\frac{\partial \bar{u}^n}{\partial T_\tau^n} \bar{T}^n - \bar{u}^n \frac{\partial \bar{T}^n}{\partial T_\tau^n}}{\bar{T}^n{}^2} dy. \quad (\text{A6d})$$

Temperature  $\bar{T}^n$  and velocity profile  $\bar{u}^n$  between the wall assumed to be located at  $y = 0$  and the first off-wall point  $y_1$  are given by Eqs. (17) and (18), so

$$\frac{\partial \bar{u}^n}{\partial u_\tau^n} = \frac{\bar{u}^n}{u_\tau^n} + u_\tau^n \left( \frac{y^{+n}}{u_\tau^n (1 + \kappa y^{+n})} + (B - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa) \frac{y^{+n}}{11 u_\tau^n} \left[ \exp(-\frac{y^{+n}}{11}) + (\frac{y^{+n}}{3} - 1) \exp(-\frac{y^{+n}}{3}) \right] + A^n \sqrt{y^{+n}} \frac{y^{+n}}{\delta_\nu u_\tau^n} \exp(-\frac{y^{+n}}{\delta_\nu}) \right. \\ \left. + \frac{\partial A^n}{\partial u_\tau^n} \sqrt{y^{+n}} (1 - \exp(-\frac{y^{+n}}{\delta_\nu})) + \frac{A^n \sqrt{y^{+n}}}{2 u_\tau^n} (1 - \exp(-\frac{y^{+n}}{\delta_\nu})) \right), \quad (\text{A7a})$$

$$\frac{\partial \bar{u}^n}{\partial T_\tau^n} = 0, \quad (\text{A7b})$$

and

$$\frac{1}{T_\tau^n} \frac{\partial \bar{T}^n}{\partial u_\tau^n} = Pr y^{+n} \exp(-\Gamma) \left( \frac{1}{u_\tau^n} - \frac{\partial \Gamma}{\partial u_\tau^n} \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial u_\tau^n} \frac{\exp(-\frac{1}{\Gamma})}{\Gamma^2} \\ \times \left( \frac{1}{\kappa_t} \ln(1 + y^{+n}) + \beta \right) + \exp(-\frac{1}{\Gamma}) \frac{y^{+n}}{\kappa_t u_\tau^n (1 + y^{+n})} \\ + A_T \frac{y^{+n2}}{\delta_c u_\tau^n} \exp(-\frac{y^{+n}}{\delta_c}) + \left( \frac{\partial A_T}{\partial u_\tau^n} + \frac{A_T}{u_\tau^n} \right) y^{+n} \\ \times (1 - \exp(-\frac{y^{+n}}{\delta_c})), \quad (\text{A8a})$$

$$\frac{\partial \bar{T}^n}{\partial T_\tau^n} = \frac{\bar{T}^n - T_w}{T_\tau^n} + T_\tau \frac{\partial A_T}{\partial T_\tau} y^{+n} (1 - \exp(-\frac{y^{+n}}{\delta_c})), \quad (\text{A8b})$$

with  $\kappa$ ,  $\kappa_t$ ,  $\beta$ , and  $\Gamma$  defined in Eq. (8). So

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u_\tau^n} = 10^{-2} (Pr y^{+n})^4 \frac{4 + 15 Pr^3 y^{+n}}{u_\tau^n (1 + 5 Pr^3 y^{+n})^2}. \quad (\text{A9})$$

The derivatives of  $A^n$  and  $A_T^n$  are obtained from Eq. (24),

$$\frac{\partial A^n}{\partial u_\tau^n} = \left\{ \left[ -\frac{\bar{u}_{1\parallel}^n}{u_\tau^n{}^2} - \frac{y_1^{+n}}{u_\tau^n (1 + \kappa y_1^{+n})} - (B - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa) \frac{y_1^{+n}}{11 u_\tau^n} \left( \exp(-\frac{y_1^{+n}}{11}) + \exp(-\frac{y_1^{+n}}{3}) (\frac{y_1^{+n}}{3} - 1) \right) \right] \times \sqrt{y_1^{+n}} (1 - \exp(-\frac{y_1^{+n}}{\delta_\nu})) \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{2 y_1^{+n}}{\delta_\nu} - 1 \right) \exp(-\frac{y_1^{+n}}{\delta_\nu}) + 1 \right] \times A^n \frac{y_1^{+n}}{2 u_\tau^n} (1 - \exp(-\frac{y_1^{+n}}{\delta_\nu})) \right] \bigg/ (y_1^{+n} (1 - \exp(-\frac{y_1^{+n}}{\delta_\nu}))^2), \quad (\text{A10a})$$

$$\frac{\partial A_T^n}{\partial u_\tau^n} = \left\{ \left[ -Pr y_1^{+n} \exp(-\Gamma_1) \left( \frac{1}{u_\tau^n} - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_\tau^n} \right) - \exp\left(-\frac{1}{\Gamma_1}\right) \left( \frac{y_1^{+n}}{\kappa_t u_\tau^n (1+y_1^{+n})} + \left( \frac{1}{\kappa_t} \ln(1+y_1^{+n}) + \beta \right) \frac{1}{\Gamma_1^2} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_\tau^n} \right) \right] \times y_1^{+n} (1 - \exp(-\frac{y_1^{+n}}{\delta_c})) \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{y_1^{+n}}{\delta_c} - 1 \right) \exp(-\frac{y_1^{+n}}{\delta_c}) + 1 \right] \times A_T^n \frac{y_1^{+n2}}{u_\tau^n} (1 - \exp(-\frac{y_1^{+n}}{\delta_c})) \right] \left/ \left( y_1^{+n} (1 - \exp(-\frac{y_1^{+n}}{\delta_c})) \right)^2 \right. \right\} \quad (\text{A10b})$$

$$\frac{\partial A_T^n}{\partial T_\tau^n} = - \frac{\tilde{T}_1^n - T_w}{T_\tau^n y_1^{+n} (1 - \exp(-\frac{y_1^{+n}}{\delta_c}))}, \quad (\text{A10c})$$

where  $\Gamma_1 = \Gamma(y_1)$ . Note that  $\frac{\partial A_T^n}{\partial T_\tau^n} = 0$ .

Therefore, using Eqs. (A7), (A8), and (A10), the integrated terms in Eqs. (A6) and so the Jacobian matrix components (A5) can be expressed analytically. From an initial guess  $(u_{\tau_0}^n, T_{\tau_0}^n)$ , the Newton-Raphson algorithm consists in computing a solution to Eq. (A3) by iteration

$$u_{\tau_{i+1}}^n = u_{\tau_i}^n + \frac{\frac{\partial f}{\partial T_\tau^n} g - f \frac{\partial g}{\partial T_\tau^n}}{\frac{\partial f}{\partial u_\tau^n} \frac{\partial g}{\partial T_\tau^n} - \frac{\partial f}{\partial T_\tau^n} \frac{\partial g}{\partial u_\tau^n}}, \quad (\text{A11}) \\ T_{\tau_{i+1}}^n = T_{\tau_i}^n - \frac{f + \frac{\partial f}{\partial u_\tau^n} \left( \frac{\partial f}{\partial T_\tau^n} g - f \frac{\partial g}{\partial T_\tau^n} \right)}{\frac{\partial f}{\partial T_\tau^n} \left( \frac{\partial f}{\partial u_\tau^n} \frac{\partial g}{\partial T_\tau^n} - \frac{\partial f}{\partial T_\tau^n} \frac{\partial g}{\partial u_\tau^n} \right)}.$$

As explained in Subsection III E, the wall friction velocity and the wall friction temperature at previous time step are taken as initial guess. At each iteration of the algorithm, a Gauss-Legendre quadrature is used to compute the Jacobian matrix components. The algorithm is stopped once  $f(u_\tau^n; T_\tau^n)$  and  $g(u_\tau^n; T_\tau^n)$  are both below a given threshold. In this study, the threshold is set at  $10^{-13}$ .

In the case of an adiabatic boundary condition,  $T_\tau$  is zero. Therefore,  $\frac{\partial f}{\partial u_\tau^n}$  is the only component of  $J$  and

$$\frac{\partial T_\tau^n}{\partial u_\tau^n} = -\tilde{T}_1^n Pr^{1/3} (\gamma - 1) \tilde{M}_{1\parallel}^{n2} \frac{\bar{u}^n}{u_{1\parallel}^n} \frac{\partial \bar{u}^n}{\partial u_\tau^n}, \quad (\text{A12})$$

where  $\frac{\partial \bar{u}^n}{\partial u_\tau^n}$  is given by Eq. (A7a).

## APPENDIX B: WALL-NORMAL DERIVATIVES OF THE PARAMETERIZED PROFILES

In iWMLES equations (25), flux values at the first off-wall point  $\bar{\tau}_1 = (\mu + \bar{\mu}_t|_{y_1}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}|_{y_1}$  and  $\bar{\phi}_1 = -(\lambda + \bar{\lambda}_t|_{y_1}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}|_{y_1}$ , as well as the wall-normal integral of  $\bar{\tau} \partial \bar{u} / \partial y$ , are required. Turbulent viscosity  $\bar{\mu}_t$  and thermal conductivity  $\bar{\lambda}_t$  are modeled by mixing-length models [see Eqs. (13) and (14)]. Therefore, wall-normal derivatives of the velocity and temperature are needed. As explained in Subsection III E, they are obtained by derivation of the parameterized profiles (17) and (18). Their expressions are given here,

$$\frac{1}{u_\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{y^+}{y(1+\kappa y^+)} + (B - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa) \frac{y^+}{11y} \left( \exp(-\frac{y^+}{11}) + (\frac{y^+}{3} - 1) \right. \\ \left. \times \exp(-\frac{y^+}{3}) \right) + \frac{A\sqrt{y^+}}{2y} \left( 1 + (2\frac{y^+}{\delta_v} - 1) \exp(-\frac{y^+}{\delta_v}) \right), \quad (\text{B1a})$$

$$\frac{1}{T_\tau} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = Pr y^+ \exp(-\Gamma) \left( \frac{1}{y} - \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right) + \exp(-\frac{1}{\Gamma}) \\ \times \left( \frac{y^+}{\kappa_t y (1+y^+)} + \left( \frac{1}{\kappa_t} \ln(1+y^+) + \beta \right) \frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right) \\ + A_T \frac{y^+}{y} \left( 1 + \left( \frac{y^+}{\delta_c} - 1 \right) \exp(-\frac{y^+}{\delta_c}) \right), \quad (\text{B1b})$$

with

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y} = 10^{-2} (Pr y^+)^4 \frac{4 + 15 Pr^3 y^+}{y(1 + 5 Pr^3 y^+)^2}. \quad (\text{B2})$$

- <sup>1</sup>N. Gourdain, L. Y. M. Gicquel, and E. Collado, "RANS and LES for the heat transfer prediction in turbine guide vane," *J. Propul. Power* **28**, 423 (2012).
- <sup>2</sup>P. Sagaut, in *Large-eddy Simulation for Incompressible Flows*, 3rd ed., edited by Springer (Springer, 2005).
- <sup>3</sup>E. Garnier, N. Adams, and P. Sagaut, in *Large-Eddy Simulation for Compressible Flows*, edited by Springer (Springer, 2009).
- <sup>4</sup>P. Sagaut and S. Deck, "Large eddy simulation for aerodynamics: Status and perspectives," *Philos. Trans. R. Soc., A* **367**, 2849 (2009).
- <sup>5</sup>A. J. Smits, B. J. McKeon, and I. Marusic, "High-Reynolds number wall turbulence," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43**, 353 (2011).
- <sup>6</sup>D. R. Chapman, "Computational aerodynamics development and outlook," *AIAA J.* **17**, 1293 (1979).
- <sup>7</sup>H. Choi and P. Moin, "Grid-point requirements for large eddy simulation: Chapman's estimates revisited," *Phys. Fluids* **24**, 011702 (2012).
- <sup>8</sup>U. Piomelli and E. Balaras, "Wall-layer models for large-eddy simulations," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34**, 349 (2002).
- <sup>9</sup>P. Sagaut, S. Deck, and M. Terracol, in *Multiscale and Multiresolution Approaches in Turbulence*, 2nd ed., edited by I. C. Press (Imperial College Press, 2013).
- <sup>10</sup>U. Piomelli, "Wall-layer models for large-eddy simulations," *Prog. Aerosp. Sci.* **44**, 437 (2008).
- <sup>11</sup>J. Fröhlich and D. von Terzi, "Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows," *Prog. Aerosp. Sci.* **44**, 349 (2008).
- <sup>12</sup>P. R. Spalart, "Detached-eddy simulation," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41**, 181 (2009).
- <sup>13</sup>J. Larsson, S. Kawai, J. Bodart, and I. Bermejo-Moreno, "Large eddy simulation with modeled wall-stress: Recent progress and future directions," *Mech. Eng. Rev.* **3**, 15-00418 (2016).
- <sup>14</sup>S. T. Bose and G. I. Park, "Wall-modeled large-eddy simulation for complex turbulent flows," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **50**, 535 (2018).
- <sup>15</sup>S. Deck, N. Renard, R. Laraufie, and P. Sagaut, "Zonal detached eddy simulation (ZDES) of a spatially developing flat plate turbulent boundary layer over the Reynolds number range  $3150 \leq Re_\theta \leq 14000$ ," *Phys. Fluids* **26**, 025116 (2014).
- <sup>16</sup>S. Deck and N. Renard, "Improvements in zonal detached eddy simulation for wall modeled large-eddy simulation," *AIAA J.* **53**, 3599 (2015).
- <sup>17</sup>P. Spalart and S. Allmaras, "A one-equation turbulence model for aerodynamic flows," in *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* [American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 1992].
- <sup>18</sup>M. Strelets, "Detached eddy simulation of massively separated flows," in *39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001).



- <sup>19</sup>F. Hamba, "Analysis of filtered Navier–Stokes equation for hybrid RANS/LES simulation," *Phys. Fluids* **23**, 015108 (2011).
- <sup>20</sup>U. Piomelli, E. Balaras, H. Pasinato, K. D. Squires, and P. R. Spalart, "The inner-outer layer interface in large-eddy simulations with wall-layer models," *Int. J. Heat Fluid Flow* **24**, 538 (2003).
- <sup>21</sup>A. Keating and U. Piomelli, "A dynamic stochastic forcing method as a wall-layer model for large-eddy simulation," *J. Turbul.* **7**, N12 (2006).
- <sup>22</sup>S. Kawai and J. Larsson, "Wall-modeling in large eddy simulation: Length scales, grid resolution, and accuracy," *Phys. Fluids* **24**, 015105 (2012).
- <sup>23</sup>S. Bocquet, P. Sagaut, and J. Jouhaud, "A compressible wall model for large-eddy simulation with application to prediction of aerothermal quantities," *Phys. Fluids* **24**, 065103 (2012).
- <sup>24</sup>J. Jiménez, "Cascades in wall-bounded turbulence," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **44**, 27 (2012).
- <sup>25</sup>W. Cabot and P. Moin, "Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow," *Flow, Turbul. Combust.* **63**, 269 (2000).
- <sup>26</sup>P. Wu and J. Meyers, "A constraint for the subgrid-scale stresses in the logarithmic region of high Reynolds number turbulent boundary layers: A solution to the log-layer mismatch problem," *Phys. Fluids* **25**, 015104 (2013).
- <sup>27</sup>L. S. G. Kovasznay, V. Kibens, and R. F. Blackwelder, "Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer," *J. Fluid Mech.* **41**, 283 (1970).
- <sup>28</sup>K. C. Kim and R. J. Adrian, "Very large-scale motion in the outer layer," *Phys. Fluids* **11**, 417 (1999).
- <sup>29</sup>N. Hutchins and I. Marusic, "Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers," *J. Fluid Mech.* **579**, 1 (2007).
- <sup>30</sup>G. I. Park and P. Moin, "Numerical aspects and implementation of a two-layer zonal wall model for les of compressible turbulent flows on unstructured meshes," *J. Comput. Phys.* **305**, 589 (2016).
- <sup>31</sup>G. Hoffmann and C. Benocci, "Approximate wall boundary conditions for large eddy simulations," in *Fluid Mechanics and its Applications* (Springer Netherlands, 1995), p. 222.
- <sup>32</sup>E. Balaras and C. Benocci, "Two-layer approximate boundary conditions for large-eddy simulations," *AIAA J.* **34**, 1111 (1996).
- <sup>33</sup>M. Wang and P. Moin, "Dynamic wall modeling for large-eddy simulation of complex turbulent flows," *Phys. Fluids* **14**, 2043 (2002).
- <sup>34</sup>S. Kawai and J. Larsson, "Dynamic non-equilibrium wall-modeling for large eddy simulation at high Reynolds numbers," *Phys. Fluids* **25**, 015105 (2013).
- <sup>35</sup>G. I. Park and P. Moin, "An improved dynamic non-equilibrium wall-model for large eddy simulation," *Phys. Fluids* **26**, 015108 (2014).
- <sup>36</sup>S. Hickel, E. Toubert, J. Bodart, and J. Larsson, "A parametrized non-equilibrium wall-model for large-eddy simulations," in *Proceedings of the 2012 Center for Turbulence Research Summer Program* (Stanford University, 2012), pp. 127–136.
- <sup>37</sup>I. Bermejo-Moreno, L. Campo, J. Larsson, J. Bodart, D. Helmer, and J.-K. Eaton, "Confinement effects in shock wave/turbulent boundary layer interactions through wall-modelled large-eddy simulations," *J. Fluid Mech.* **758**, 5 (2014).
- <sup>38</sup>X. I. A. Yang, J. Urzay, S. Bose, and P. Moin, "Aerodynamic heating in wall-modeled large-eddy simulation of high-speed flows," *AIAA J.* **56**, 731 (2018).
- <sup>39</sup>A. Weber, H.-A. Schreiber, R. Fuchs, and W. Steinert, "3-d transonic flow in a compressor cascade with shock-induced corner stall," *J. Turbomach.* **124**, 358 (2002).
- <sup>40</sup>C. Hah, "Large eddy simulation of transonic flow field in nasa rotor 37," Technical Report TM-2009–215627, 2009.
- <sup>41</sup>X. Ottavy, N. Courtiade, and N. Gourdain, "Experimental and computational methods for flow investigation in high-speed multistage compressor," *J. Propul. Power* **28**, 1141 (2012).
- <sup>42</sup>T. Léonard, L. Y. M. Gicquel, N. Gourdain, and F. Duchaine, "Steady/unsteady Reynolds-averaged Navier–Stokes and large eddy simulations of a turbine blade at high subsonic outlet mach number," *J. Turbomach.* **137**, 041001 (2014).
- <sup>43</sup>N. Gourdain, "Prediction of the unsteady turbulent flow in an axial compressor stage. Part 1: Comparison of unsteady RANS and LES with experiments," *Comput. Fluids* **106**, 119 (2015).
- <sup>44</sup>J. Tyacke, P. Tucker, R. Jefferson-Loveday, N. R. Vadlamani, R. Watson, I. Naqavi, and X. Yang, "Large eddy simulation for turbines: Methodologies, cost and future outlooks," *J. Turbomach.* **136**, 061009 (2013).
- <sup>45</sup>P. G. Tucker and J. C. Tyacke, "Eddy resolving simulations in aerospace—invited paper (numerical fluid 2014)," *Appl. Math. Comput.* **272**, 582 (2015).
- <sup>46</sup>T. Arts and M. Lambert de Rouvroit, "Aero-thermal performance of a two-dimensional highly loaded transonic turbine nozzle guide vane: A test case for inviscid and viscous flow computations," *J. Turbomach.* **114**, 147 (1992).
- <sup>47</sup>J. C. Tyacke and P. G. Tucker, "Future use of large eddy simulation in aero-engines," *J. Turbomach.* **137**, 081005 (2015).
- <sup>48</sup>N. Gourdain, F. Sicot, F. Duchaine, and L. Gicquel, "Large eddy simulation of flows in industrial compressors: A path from 2015 to 2035," *Philos. Trans. R. Soc., A* **372**, 20130323 (2014).
- <sup>49</sup>X. Yang, J. Sadique, R. Mittal, and C. Meneveau, "Integral wall model for large eddy simulations of wall-bounded turbulent flows," *Phys. Fluids* **27**(2), 025112 (2015).
- <sup>50</sup>F. Cadieux, J. Sadique, X. I. Yang, C. Meneveau, and R. Mittal, "Wall-modeled large eddy simulation of laminar and turbulent separation bubble flows," in *46th AIAA Fluid Dynamics Conference* (American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2016).
- <sup>51</sup>L. Cambier, S. Heib, and S. Plot, "The onera elsA CFD software: Input from research and feedback from industry," *Mech. Ind.* **14**, 159–174 (2013).
- <sup>52</sup>F. Nicoud and F. Ducros, "Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor," *Flow, Turbul. Combust.* **62**, 183 (1999).
- <sup>53</sup>A. Kravchenko and P. Moin, "On the effect of numerical errors in large eddy simulations of turbulent flows," *J. Comput. Phys.* **131**, 310 (1997).
- <sup>54</sup>H. Reichardt, "Complete representation of the turbulent velocity distribution in smooth pipes," *Z. Angew. Math. Mech.* **31**, 208 (1951).
- <sup>55</sup>B. A. Kader, "Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers," *Int. J. Heat Mass Transfer* **24**, 1541 (1981).
- <sup>56</sup>S. L. Bras, H. Deniau, C. Bogey, and G. Daviller, "Development of compressible large-eddy simulations combining high-order schemes and wall modeling," *AIAA J.* **55**, 1152 (2017).
- <sup>57</sup>T. V. Kármán, "Über laminare und turbulente reibung," *Z. Angew. Math. Mech.* **1**, 233 (1921).
- <sup>58</sup>K. Pohlhausen, "Zur näherungsweise integration der differentialgleichung der laminaren grenzschicht," *Z. Angew. Math. Mech.* **1**, 252 (1921).
- <sup>59</sup>B. Aupoix and S. Viala, "Compressible turbulent boundary layer modelling," in *Transitional and Turbulent Compressible Flows*, Fluids Engineering Division Vol. 224, edited by L. D. Kraland, E. F. Spina, and C. Arakawa (ASME, Hilton Head Island, 1995), p. 139.
- <sup>60</sup>G. N. Coleman, J. Kim, and R. D. Moser, "A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow," *J. Fluid Mech.* **305**, 159 (1995).
- <sup>61</sup>P. G. Huang, G. N. Coleman, and P. Bradshaw, "Compressible turbulent channel flows: DNS results and modeling," *J. Fluid Mech.* **305**, 185 (1995).
- <sup>62</sup>H. M. Nagib and K. A. Chauhan, "Variations of von Kármán coefficient in canonical flows," *Phys. Fluids* **20**, 101518 (2008).
- <sup>63</sup>W. K. George, "Is there a universal log law for turbulent wall-bounded flows?," *Philos. Trans. R. Soc., A* **365**, 789 (2007).
- <sup>64</sup>T. Houra and Y. Nagano, "Effects of adverse pressure gradient on heat transfer mechanism in thermal boundary layer," *Int. J. Heat Fluid Flow* **27**, 967 (2006).
- <sup>65</sup>R. Johnstone, G. N. Coleman, and P. R. Spalart, "The resilience of the logarithmic law to pressure gradients: Evidence from DNS," *J. Fluid Mech.* **643**, 163 (2010).
- <sup>66</sup>J. C. Gillis and J. P. Johnston, "Turbulent boundary-layer flow and structure on a convex wall and its redevelopment on a flat wall," *J. Fluid Mech.* **135**, 123 (1983).
- <sup>67</sup>N. Afzal, "Analysis of a turbulent boundary layer subjected to a strong adverse pressure gradient," *Int. J. Eng. Sci.* **21**, 563 (1983).
- <sup>68</sup>M. Skote and D. S. Henningson, "Direct numerical simulation of a separated turbulent boundary layer," *J. Fluid Mech.* **471**, 107 (2002).
- <sup>69</sup>A. Walz, *Strömungs- und Temperaturgrenzschichten* (Braun, 1966) [translation in *Boundary Layers of Flow and Temperature* (MIT Press, 1969)].
- <sup>70</sup>H. Abe, H. Kawamura, and Y. Matsuo, "Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 1020$  with  $Pr = 0.025$  and  $0.71$ ," *Int. J. Heat Fluid Flow* **25**, 404 (2004).
- <sup>71</sup>S. Hoyas and J. Jiménez, "Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2003$ ," *Phys. Fluids* **18**, 011702 (2006).
- <sup>72</sup>A. Lozano-Durán and J. Jiménez, "Effect of the computational domain on direct simulations of turbulent channels up to  $Re_\tau = 4200$ ," *Phys. Fluids* **26**, 011702 (2014).
- <sup>73</sup>M. Lee and R. D. Moser, "Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau \approx 5200$ ," *J. Fluid Mech.* **774**, 395 (2015).

- <sup>74</sup>W. M. Kays, M. E. Crawford, and A. Weigand, *Convective Heat and Mass Transfer* (McGraw-Hill, Texas, 2004).
- <sup>75</sup>D. Modesti and S. Pirozzoli, "Reynolds and mach number effects in compressible turbulent channel flow," *Int. J. Heat Fluid Flow* **59**, 33 (2016).
- <sup>76</sup>A. Trettel and J. Larsson, "Mean velocity scaling for compressible wall turbulence with heat transfer," *Phys. Fluids* **28**, 026102 (2016).
- <sup>77</sup>D. Li, "Revisiting the subgrid-scale Prandtl number for large-eddy simulation," *J. Fluid Mech.* **802**, R2 (2016).
- <sup>78</sup>P. Moin, K. Squires, W. Cabot, and S. Lee, "A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport," *Phys. Fluids A* **3**, 2746 (1991).
- <sup>79</sup>C. C. de Wiart, K. Hillewaert, L. Bricteux, and G. Winckelmans, "Implicit les of free and wall-bounded turbulent flows based on the discontinuous galerkin/symmetric interior penalty method," *Int. J. Numer. Methods Fluids* **78**, 335 (2015).
- <sup>80</sup>O. Cabrit, "Modélisation des flux pariétaux sur les tuyères des moteurs à propergol solide," Ph.D. thesis, Université de Montpellier II, 2009.
- <sup>81</sup>C. Meneveau, T. S. Lund, and W. H. Cabot, "A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence," *J. Fluid Mech.* **319**, 353 (1996).
- <sup>82</sup>F. Kremer, Étude numérique d'écoulements de paroi compressibles: Méthodes d'intégration temporelle semi-implicites et application au canal plan turbulent, Ph.D. thesis, École Centrale de Lyon, 2012.
- <sup>83</sup>C. Cossu and Y. Hwang, "Self-sustaining processes at all scales in wall-bounded turbulent shear flows," *Philos. Trans. R. Soc., A* **375**, 20160088 (2017).
- <sup>84</sup>M. Lagha, J. Kim, J. D. Eldredge, and X. Zhong, "A numerical study of compressible turbulent boundary layers," *Phys. Fluids* **23**, 015106 (2011).
- <sup>85</sup>P. G. Huang and P. Bradshaw, "Law of the wall for turbulent flows in pressure gradients," *AIAA J.* **33**, 624 (1995).
- <sup>86</sup>J. W. Nam and F. S. Lien, "A ghost-cell immersed boundary method for large-eddy simulations of compressible turbulent flows," *Int. J. Comput. Fluid Dyn.* **28**, 41 (2014).
- <sup>87</sup>Z. Sun, Y. Zhu, Y. Hu, and S. Zhang, "Direct numerical simulation of a fully developed compressible wall turbulence over a wavy wall," *J. Turbul.* **19**, 72 (2018).
- <sup>88</sup>M. F. Shahab, G. Lehnasch, T. B. Gatski, and P. Comte, "Statistical characteristics of an isothermal, supersonic developing boundary layer flow from DNS data," *Flow, Turbul. Combust.* **86**, 369 (2011).
- <sup>89</sup>Y.-B. Chu, Y.-Q. Zhuang, and X.-Y. Lu, "Effect of wall temperature on hypersonic turbulent boundary layer," *J. Turbul.* **14**, 37 (2013).
- <sup>90</sup>A. Hadjadj, O. Ben-Nasr, M. S. Shadloo, and A. Chaudhuri, "Effect of wall temperature in supersonic turbulent boundary layers: A numerical study," *Int. J. Heat Mass Transfer* **81**, 426 (2015).
- <sup>91</sup>M. S. Shadloo, A. Hadjadj, and F. Hussain, "Statistical behavior of supersonic turbulent boundary layers with heat transfer at  $M_\infty = 2$ ," *Int. J. Heat Fluid Flow* **53**, 113 (2015).
- <sup>92</sup>M. S. Shadloo and A. Hadjadj, "Laminar-turbulent transition in supersonic boundary layers with surface heat transfer: A numerical study," *Numer. Heat Transfer, Part A* **72**, 40 (2017).

### 5.3 Bilan

Un modèle de paroi intégral, appelé et noté iWMLES dans la suite, est proposé et validé. En particulier, il a été montré dans l'étude de la section précédente que :

1. L'iWMLES est un modèle de paroi hybride : les profils de vitesse et de température sont paramétrisés par des lois logarithmiques auxquelles sont rajoutées des termes de correction afin de respecter les équations de quantité de mouvement et d'énergie intégrées selon la normale à la paroi ;
2. L'iWMLES a un coût de calcul dix à cent fois plus faible qu'un modèle de paroi numérique en-équilibre (qui ne prend donc en compte que les termes de diffusion normale à la paroi) ;
3. Contrairement à la version originale de l'iWMLES proposée par Yang et al. (2015), un maillage secondaire est requis pour estimer les grandeurs intégrales. Toutefois, l'utilisation de points de Gauss-Legendre permet de définir ce maillage de manière automatique et donc de faciliter l'utilisation de l'iWMLES sur des configurations à géométries complexes. De plus, le coût de calcul de l'iWMLES est linéaire avec le nombre de points de Gauss-Legendre utilisé ;
4. L'iWMLES permet de conserver l'efficacité parallèle du solveur en limitant les échanges entre les cellules à des scalaires ;
5. La dépendance aux modèles de turbulences de l'iWMLES est plus faible qu'un modèle de paroi numérique. En effet, seules leurs valeurs intégrées selon la normale à la paroi et au point d'extraction du modèle de paroi sont requises ;
6. L'iWMLES a un domaine de validité plus étendu qu'un modèle de paroi analytique. En effet, dans les cas quasi-incompressibles considérés, l'iWMLES permet d'obtenir des résultats similaires à un modèle de paroi analytique et donc en accord avec les données de référence DNS. Dans les cas supersoniques, l'iWMLES, contrairement à un modèle analytique, prédit un frottement pariétal et un profil de vitesse en accord avec les résultats DNS. Concernant le flux de chaleur pariétal et le profil de température, l'iWMLES reste plus précis mais montre ses limites. Pour prédire de manière précise le champ thermique (qui est, en général, plus difficile à prédire que le champ aérodynamique car le premier dépend du second), un modèle de paroi numérique semble plus adapté ;
7. Aucun phénomène de LLM n'est observé sur les profils de vitesse et de température moyennes, validant ainsi les méthodes numériques choisies (et basées sur les travaux de Bocquet (2013)). La turbulence pariétale peut donc être considérée correctement résolue dès le premier point au-dessus de la paroi (toutefois, il est à noter qu'une surestimation de  $u'^+$  est observée sur les deuxième et troisième rangées de cellules au-dessus de la paroi).

Toutefois, si le cas de canal plan considéré dans ce chapitre a permis de démontrer que les effets de compressibilité ainsi que les effets thermiques sont bien prédits par l'iWMLES à



un coût réduit, il ne permet pas de valider la capacité de l'iWMLES à prendre en compte les effets associés à un gradient de pression. C'est l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 6

## Validation de l'iWMLES : couche limite soumise à un gradient de pression

Le modèle de paroi iWMLES proposé dans le chapitre précédent permet de prendre en compte plus de phénomènes physiques qu'un modèle de paroi analytique tout en ayant un coût de calcul jusqu'à deux ordres de grandeurs plus faible qu'un modèle de paroi numérique classique. Pour ces raisons, ainsi que pour sa simplicité d'utilisation, l'iWMLES est adapté au traitement de géométries complexes.

L'aptitude de l'iWMLES à prendre en compte les effets de compressibilité et les effets thermiques a été validée dans le chapitre précédent. Avant de pouvoir considérer des écoulements se développant dans des turbomachines, la faculté de l'iWMLES à prédire les effets associés aux gradients de pression (qui sont une caractéristique des couches limites présentes dans ces écoulements) doit être évaluée. C'est l'objectif de ce chapitre.

### 6.1 Contexte et objectifs

Les couches limites se développant dans une turbomachine sont soumises à des gradients de pression ainsi qu'à des effets de courbure. Il est donc primordial que le modèle de paroi proposé dans cette étude, l'iWMLES, soit capable de prendre en compte ces effets.

Comme indiqué par V. Patel et Sotiropoulos (1997), une paroi courbée induit un gradient de pression qui est souvent l'effet prépondérant sur la couche limite. En particulier, une paroi convexe est à l'origine d'un gradient de pression adverse et une paroi concave d'un gradient de pression favorable. Les effets de courbure étant donc assimilables à ceux d'un gradient de pression, il est possible de sélectionner un cas de validation d'une couche limite soumise à un gradient de pression et se développant sur une paroi plane.

À partir des résultats de la section 3.4, il est expliqué à la section 4.4 que les écoulements dans les compresseurs sont les plus à même de pouvoir bénéficier d'une approche WMLES. D'une part, leur nombre de Reynolds est élevé. D'autre part, les gradients de pression adverses qui caractérisent leurs couches limites induisent des effets équivalents à une augmentation

du nombre de Reynolds de ces dernières. C'est pourquoi, il est choisi dans le cadre de ces travaux d'étudier en priorité une couche limite soumise à un gradient de pression adverse.

Une revue bibliographique des données de référence (DNS et expériences) de couches limites se développant sur une paroi plane et soumises à un gradient de pression adverse est présentée au tableau 3.1. Comme indiqué à la section 3.4.1, les couches limites calculées en DNS sont aujourd'hui à des nombres de Reynolds trop faibles pour être représentatives de celles présentes dans des configurations aéronautiques. Sans compter qu'à leur nombre de Reynolds de frottement, la séparation d'échelles entre les zones interne et externe n'est pas suffisante pour autoriser une approche WMLES. Par ailleurs, il est observé qu'hormis les études de Spalart et Watmuff (1993) et L. Wei et Pollard (2012) où une paroi non-glissante haute courbée permet d'imposer un gradient de pression favorable puis défavorable, seuls des cas de couche limite en équilibre sont considérés en DNS.

Afin de définir un cas de validation représentatif du contexte dans lequel ces travaux s'inscrivent, il est donc nécessaire de se tourner vers des études expérimentales. Comme vu à la section 3.4.1, ces dernières considèrent des couches limites (hors-équilibres) à des nombres de Reynolds beaucoup plus élevés qu'en DNS. Néanmoins, seules des expériences récentes mesurent le frottement pariétal sans formuler d'hypothèse sur la forme du profil de vitesse. Par conséquent, parmi les expériences du tableau 3.1, seules deux d'entre elles s'inscrivent dans le contexte de cette étude : les expériences réalisées par Monty et al. (2011) (issue des travaux de thèse d'Harun (2012)) et par Vila et al. (2017). Étant donné que la deuxième a été publiée après le début de ces travaux, c'est la première qui est considérée dans la suite.

En revanche, la définition de la géométrie utilisée dans cette expérience n'est pas connue ici. Une méthodologie numérique permettant de soumettre une couche limite à un gradient de pression donné est donc requise. Une remarque importante est qu'à ce jour, il n'existe pas, a priori, de telle étude avec un solveur compressible. En effet, les études numériques du tableau 3.1 sont toutes réalisées à l'aide d'un solveur incompressible. Dans ce cas, il est ainsi possible d'imposer directement la distribution de vitesse longitudinale  $u_e$  ou normale à la paroi  $v_e$  à la condition aux limites en haut du domaine (et, en général, une condition glissante est appliquée aux autres vitesses). En LES, les études de Hickel et Adams (2008) et Inoue et al. (2013) peuvent également être notées. Dans leur étude, la pression est directement imposée en haut du domaine. Avec un solveur compressible, de telles conditions aux limites ne peuvent être considérées sinon les ondes acoustiques (générées par les oscillations de pression présentes dans un solveur compressible) sont totalement réfléchies, ce qui peut dégrader la solution voire rendre la simulation instable.

Il est à noter qu'il est aussi possible d'imposer une certaine distribution de vitesse, et donc un gradient de pression, en faisant varier la hauteur du domaine de manière à suivre une ligne de courant. Une condition de paroi glissante y est alors appliquée. Cette approche, exploitée par Araya et Castillo (2012, 2013) dans une DNS de couche limite incompressible, n'est toutefois pas exploitée ici, car de nombreuses simulations sont nécessaires pour déterminer l'évolution de la hauteur du domaine. De même, les éventuelles études réalisées avec un solveur compressible suivant cette approche ne sont pas considérées.

Les objectifs de ce chapitre sont donc de :

- proposer une méthodologie numérique permettant d'imposer un gradient de pression donné avec un solveur compressible ;
- reproduire numériquement l'expérience d'Harun (2012) de couche limite soumise à un gradient de pression adverse ;
- valider la capacité de l'iWMLES à prendre en compte les effets associés à un gradient de pression.

## 6.2 Présentation de l'expérience d'Harun (2012)

L'expérience considérée dans ce chapitre est celle réalisée par Harun (2012), qui en donne une présentation détaillée dans son manuscrit de thèse. Elle est réalisée à partir d'une soufflerie en circuit ouvert, déjà utilisée précédemment par Marusic et Perry (1995) pour étudier une couche limite soumise à un gradient de pression adverse. L'expérience d'Harun (2012) diffère de celle de Marusic et Perry (1995) principalement en raison de l'utilisation :

- d'un film d'huile pour mesurer le frottement pariétal (*oil-film interferometry*, noté aussi OFI dans la littérature) ;
- d'un nouveau plafond flexible.

La méthode de mesure du frottement pariétal à l'aide d'un film d'huile consiste à mesurer la déformation de cette huile (appliquée sur la paroi) sous l'action des contraintes de cisaillement. Cette méthode, présentée plus en détails par Ng et al. (2007) et Madad et al. (2010), permet ainsi d'estimer le frottement pariétal sans formuler d'hypothèses sur la forme du profil de vitesse (au contraire de la méthode de Clauser introduite à la section 3.4.1 et utilisée par Marusic et Perry (1995)).

D'après Harun (2012), l'ancien plafond flexible de la soufflerie était ondulé et perturbait l'écoulement. En outre, le nouveau plafond permet d'imposer plus finement le gradient de pression visé grâce à une hauteur réglable sur une longueur de 4.2 m. Le plafond est défini de manière à imposer un gradient de pression nul de l'entrée du domaine en  $x = 0$  m à  $x \approx 3$  m, puis constant jusqu'à  $x = 6.7$  m. La longue zone à gradient de pression nul permet de s'assurer que la couche limite est stable (et bien développée) avant de la soumettre à un gradient de pression. Pour imposer un gradient de pression constant, la hauteur évolue de manière à ce que la section de la soufflerie augmente exponentiellement. En particulier, la hauteur est de 375 mm à  $x = 0$  m, 400 mm à  $x = 3$  m et 550 mm à  $x = 5$  m. L'épaisseur de la couche limite ne représente alors pas plus de 20% de la hauteur du domaine et n'interagit pas avec la couche limite se développant sur le plafond. Un schéma de la géométrie est montré à la figure 6.1. Il est à noter que la largeur de cette tuyère (c'est-à-dire selon la direction transverse) mesure 940 mm.

Dans ses travaux de thèse, Harun (2012) impose deux évolutions différentes du coefficient de pression  $C_p$  pour  $x \geq 3$  m : une définie par un gradient de pression adverse constant et une

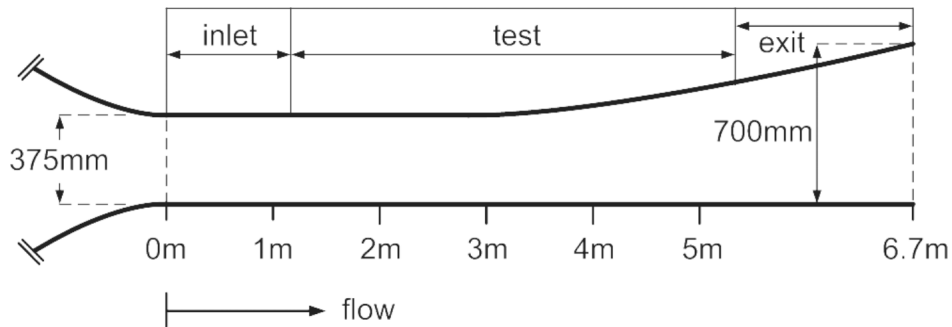
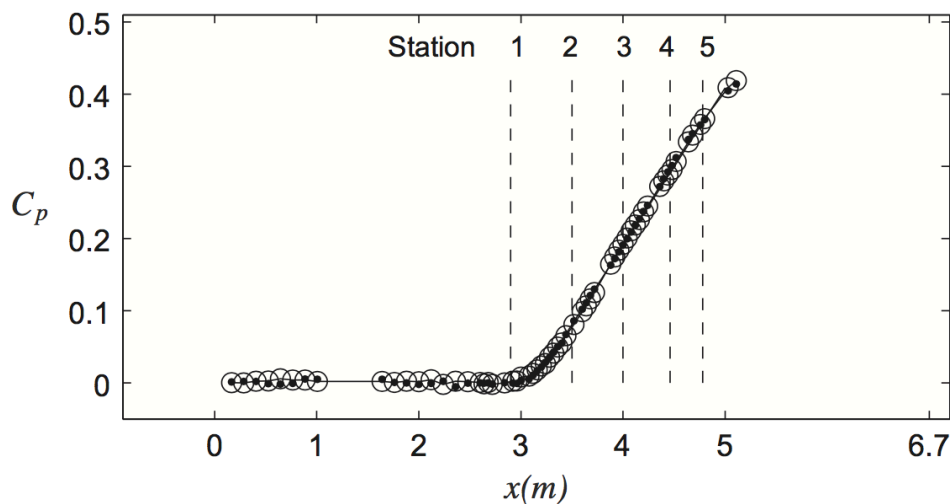


FIGURE 6.1 – Schéma de la géométrie de la soufflerie, d'après Harun (2012)

autre par un gradient de pression favorable. Comme justifié dans la section précédente, seule la première est considérée ici et est illustrée à la figure 6.2. Cette figure montre également que l'évolution de  $C_p$  est quasiment insensible aux variations de la vitesse en entrée ( $x = 0$  m)  $u_{in}$  dans la plage de valeurs considérée.  $C_p$  est défini par :

$$C_p = \frac{p(x) - p_{in}}{\frac{1}{2}\rho u_{in}^2} = 1 - \left(\frac{u_e(x)}{u_{in}}\right)^2, \quad (6.1)$$

avec  $p_{in}$  la pression statique à l'entrée du domaine.  $u_e$  est la vitesse longitudinale au-dessus de la couche limite. La pression statique  $p$  est mesurée à la paroi.

FIGURE 6.2 – Évolution longitudinale du coefficient de pression  $C_p$  dans l'expérience d'Harun (2012) pour deux valeurs de  $u_{in}$  :  $10.5 \text{ m s}^{-1}$  (●) et  $15.9 \text{ m s}^{-1}$  (○). - - - : plans de mesures 1 à 5 des profils de vitesse longitudinale et du frottement pariétal. Tiré de Monty et al. (2011)

Selon l'objectif visé (mesures à  $Re_\tau$  constant, à  $\beta$  constant...), la vitesse  $u_{in}$  est comprise entre  $8$  et  $22 \text{ m s}^{-1}$ . Les mesures considérées dans la suite sont celles associées à une valeur de  $u_{in}$  fixée (à savoir  $u_{in} = 15.9 \text{ m s}^{-1}$ ), afin de suivre l'évolution spatiale de la couche limite.

Dans ce cas, les profils de vitesse longitudinale et le frottement pariétal sont mesurés en cinq positions longitudinales, comme résumé au tableau 6.1 et illustré à la figure 6.2.

Plan	$x$ (m)	$u_e$ ( $\text{m s}^{-1}$ )	$\delta$ (m)	$\text{Re}_\tau$	$\beta$	$p^+$ ( $\times 10^{-3}$ )
1	2.9	15.68	0.061	2330	0	0
2	3.5	15.13	0.076	2670	1.16	2.75
3	4.0	14.42	0.076	2380	1.58	3.71
4	4.46	13.42	0.090	2500	2.76	5.42
5	4.78	12.93	0.102	2500	4.27	7.72

TABLE 6.1 – Données expérimentales de l'expérience d'Harun (2012) dans le cas d'une couche limite soumise à un gradient de pression adverse avec  $u_{\text{in}} = 15.9 \text{ m s}^{-1}$ .  $\beta$  est le paramètre de gradient de pression de Clauser (3.32) et  $p^+$  est le gradient de pression en unités de paroi (4.35)

Ainsi, le plafond flexible utilisé par Harun (2012) permet d'imposer un gradient de pression adverse constant en obtenant une configuration analogue à une tuyère divergente, comme schématisé à la figure 6.1.

L'objectif de ce chapitre est de reproduire numériquement cette expérience avec une approche WMLES afin de valider la capacité de l'iWMLES à prédire les phénomènes dus à un gradient de pression. Un point important est que la définition de la géométrie expérimentale n'est pas connue ici. Par ailleurs, pour économiser du temps de calcul, une méthode d'injection de turbulence est nécessaire en entrée du domaine de calcul. Sinon, un maillage fin est nécessaire pour résoudre la transition, comme vu à la section 4.4. De plus, étant donné qu'un solveur structuré est utilisé dans ces travaux, les lignes de maillage se propagent dans tout le domaine. Il serait donc difficile de construire un maillage dans la zone turbulente respectant les préconisations de maillage WMLES (4.32). L'avance temporelle serait également pénalisée avec un schéma temporel explicite. En outre, la transition à la turbulence de la couche limite est forcée dans l'expérience en  $x = 0 \text{ m}$ . Même en plaçant l'entrée du domaine de calcul à  $x = 0 \text{ m}$ , il serait difficile de reproduire fidèlement la transition à la turbulence de la couche limite.

Par conséquent, une méthode d'injection de turbulence est nécessaire. Cette méthode doit être adaptée à une approche WMLES, tout en générant le moins de bruit possible pour ne pas perturber le champ de pression (et donc son gradient). Avant de reproduire l'expérience d'Harun (2012), une telle méthode est proposée et validée dans la section suivante.

Par ailleurs, il est à noter que cette configuration a déjà été reproduite numériquement par Inoue et al. (2013) en modélisant une partie de la couche limite. Toutefois, en toute rigueur, l'approche considérée par ces derniers (et proposée par Chung et Pullin (2009)) diffère de l'approche WMLES présentée à la section 4.2. En effet, dans cette approche, si le frottement pariétal est estimé en résolvant une équation obtenue en filtrant l'équation de couche limite de quantité de mouvement à partir de données issues du champ LES à une hauteur donnée  $h_1$  (tel un modèle de paroi numérique), ce frottement est en revanche ensuite utilisé pour reconstruire la vitesse longitudinale sur une paroi fictive située à une hauteur  $h_0 < h_1$ . Le volume compris entre celle-ci et la paroi n'est pas inclus dans le domaine de calcul et une condition limite de type Dirichlet sur la vitesse (les composantes autres que la vitesse longitudinale sont imposées nulles) est alors appliquée sur la paroi fictive. De plus, un solveur incompressible est utilisé, comme indiqué à la section précédente.

### 6.3 Validation d'une méthode d'injection de turbulence pariétale non-réfléchissante

Afin de reproduire l'expérience d'Harun (2012) en WMLES, une méthode d'injection de turbulence adaptée à un maillage WMLES et générant le moins de bruit possible est requise, comme expliqué à la section précédente.

Avant d'introduire la méthode d'injection de turbulence choisie, une synthèse des principales méthodes existantes est proposée. Puis, l'implémentation de la méthode choisie dans une condition d'entrée non-réfléchissante est présentée. Cette implémentation est enfin validée sur une LES de couche limite soumise à un gradient de pression nul.

#### 6.3.1 Choix d'une méthode d'injection de turbulence pariétale

Le développement de méthodes d'injection de turbulence est un sujet de recherche actif dans la littérature. Des revues de ces méthodes sont proposées, par exemple, par Bocquet (2013), Sagaut et al. (2013) et X. Wu (2017). La principale difficulté réside dans le fait que la turbulence étant de nature chaotique, il est difficile de générer un champ turbulent réaliste.

Les principales techniques d'injection de turbulence consistent à :

- générer les données en entrée du domaine à l'aide d'une simulation précurseur (*precursor simulation*) ou concurrente ;
- recycler l'écoulement en entrée du domaine (*recycling methods*) ;
- ajouter des perturbations à l'écoulement en entrée du domaine afin de générer une turbulence synthétique (*synthetic turbulence*). Cette technique regroupe un ensemble de méthodes, notamment les méthodes :
  - spectrales (aussi appelées *synthetic random Fourier methods* dans la littérature),

- à filtrage numérique (*synthetic digital filtering methods*),
- d'imitation d'échelles turbulentes cohérentes (*synthetic coherent eddy methods*),
- de forçage volumique (*synthetic volume forcing methods*).

La méthode d'injection de turbulence basée sur une simulation précurseur, illustrée à la figure 6.3, consiste à extraire puis stocker à chaque itération du calcul le champ de vitesses dans un plan parallèle au plan d'entrée dans une simulation annexe effectuée en amont de la simulation d'intérêt. Ensuite, cette séquence de plans est utilisée comme donnée d'entrée de la simulation d'intérêt (en général à travers une condition aux limites de type Dirichlet). L'utilisation d'une simulation précurseur permet ainsi de générer une turbulence réaliste en entrée du domaine, au prix d'un surcoût de calcul et de stockage important. Dans le cas d'une simulation concurrente, le principe est identique à la différence près que la simulation annexe est calculée en parallèle de celle d'intérêt. Les plans sont alors obtenus dynamiquement, ce qui permet de ne pas avoir à les stocker.

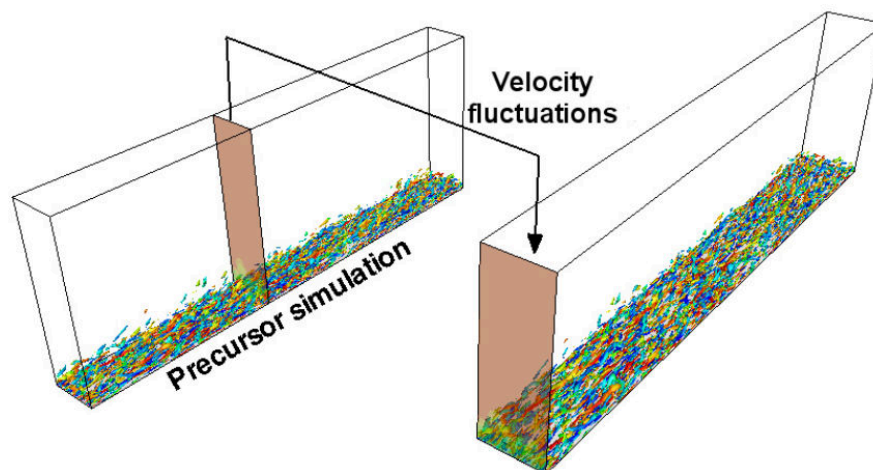


FIGURE 6.3 – Principe d'injection de turbulence grâce à l'utilisation d'une simulation précurseur ou concurrente, tiré de Sagaut et al. (2013)

Les méthodes de recyclage, dont notamment celle proposée par Lund et al. (1998) pour une couche limite incompressible (se développant spatialement), consiste à extraire un plan de l'écoulement puis à le réintroduire à l'entrée du domaine, comme illustré à la figure 6.4. Pour tenir compte de l'épaississement de la couche limite entre l'entrée du domaine et le plan d'extraction, les données issues de ce dernier sont mises à l'échelle avant d'être utilisées. Cette mise à l'échelle repose sur l'existence de profils auto-similaires pour l'écoulement moyen et les fluctuations turbulentes moyennes. En particulier, dans la méthode de Lund et al. (1998), les profils dans la couche limite sont décomposés et mis à l'échelle séparément dans les zones interne et externe puisque, comme vu à la section 3.2, chacune de ces zones a



une échelle de longueur caractéristique qui lui est propre. Ensuite, les profils dans la couche limite sont obtenus par une moyenne pondérée des profils dans les zones interne et externe (à partir d'une fonction du ratio entre la distance à la paroi et l'épaisseur de couche limite en entrée). Les méthodes de recyclage permettent d'obtenir rapidement une couche limite turbulente. En revanche, elles souffrent de plusieurs limitations dont surtout :

- l'initialisation du domaine de calcul. En effet, les méthodes de recyclage permettent d'entretenir un état turbulent développé en entrée du domaine mais la génération de cet état demeure problématique. Si des perturbations ne sont pas ajoutés, le temps de calcul de l'état transitoire est très élevé ;
- leur restriction à des géométries simples. Notamment, la méthode proposée par Lund et al. (1998) n'est valable que pour une couche limite incompressible soumise à un gradient de pression nul. Araya et al. (2009) proposent une extension pour prendre en compte un gradient de pression longitudinal. Une extension aux écoulements compressibles est introduite par Urbin et Knight (2001) et repose sur la transformée de Van Driest présentée à la section 3.6. Toutefois, Sagaut et al. (2004) observent avec cette extension une dérive en temps de l'écoulement moyen et décident alors d'imposer le champ moyen en entrée et de recycler uniquement les fluctuations turbulentes ;
- l'apparition d'une fréquence de forçage non-physique due à l'introduction d'une périodicité non-naturelle dans l'écoulement. Comme expliqué par Sagaut et al. (2013), cette fréquence est inversement proportionnelle à la distance entre le plan d'entrée du domaine et le plan de recyclage. Pour empêcher le développement de cette fréquence, des solutions sont proposées comme celle de Spalart et al. (2006b) qui introduisent un déphasage dans la direction transverse aux données réintroduites à l'entrée du domaine.

Les méthodes visant à générer une turbulence synthétique, à défaut de pouvoir formuler une turbulence physique, ajoutent à l'écoulement des perturbations construites de manière à respecter certaines propriétés turbulentes. Par exemple, les méthodes spectrales les définissent de manière à respecter un spectre d'énergie donnée, en se basant soit sur une transformée de Fourier inverse du champ de vitesse, comme effectué par S. Lee et al. (1992), soit sur une somme de modes de Fourier, comme proposé par Kraichnan (1970). Originellement développées pour injecter de la turbulence homogène isotrope, des méthodes spectrales ont été proposées pour injecter une turbulence pariétale anisotrope, par exemple par Smirnov et al. (2001), Batten et al. (2004) et Davidson et Billson (2006).

Comme expliqué par X. Wu (2017), si les méthodes spectrales permettent d'obtenir une turbulence spatialement cohérente à chaque instant (puisque le spectre d'énergie est imposé), le champ de perturbations ajouté n'a aucune cohérence temporelle et peut être perçu temporellement comme un bruit blanc. Béchara et al. (1994) imposent alors une cohérence temporelle en filtrant numériquement ce champ par convolution avec une fonction gaussienne (c'est-à-dire grâce à un filtre de Gauss). Suivant le même principe, Klein et al. (2003) imposent une cohérence spatiale à des données initialement aléatoires. En particulier, cette méthode permet d'imposer des tenseurs de Reynolds et d'autocorrélation donnés.

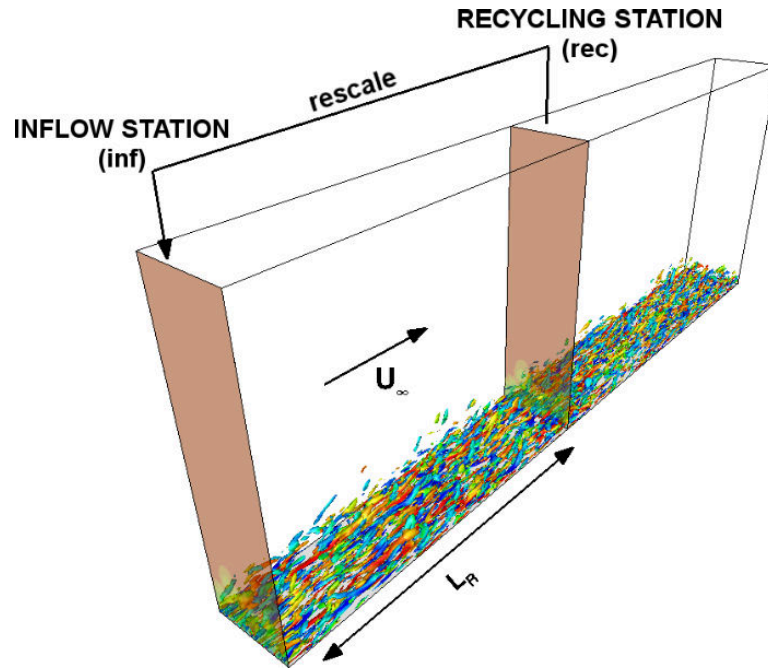


FIGURE 6.4 – Principe d'injection de turbulence grâce à l'utilisation d'une méthode de recyclage, tiré de Sagaut et al. (2013)

Contrairement aux méthodes d'injection de turbulence synthétique présentées jusqu'à présent, les méthodes d'imitations d'échelles turbulentes cohérentes cherchent à définir un champ de perturbations turbulentes selon une approche structurale. En effet, leur objectif est d'injecter des structures similaires aux échelles turbulentes (notamment, dans le cas d'une couche limite, les *streaks*, LSM et VLSM introduits à la section 3.3). Ces structures sont supposées se convecter en aval à une vitesse de référence  $u_{\text{ref}}$  constante en suivant l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor (1935) qui permet, comme expliqué par Sagaut (2013), les identifications suivantes :

$$t \longleftrightarrow \frac{x}{u_{\text{ref}}}, \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow u_{\text{ref}} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (6.2b)$$

Ce type de méthode a été utilisée par Jarrin et al. (2006) afin d'injecter des spots turbulents. Dans le cas d'une couche limite se développant spatialement, Sandham et al. (2003) la décomposent en zones interne et externe pour injecter dans la première zone des petites structures assimilables à des *streaks* et dans la seconde zone des structures allongées semblables aux LSM et VLSM. De même, Pamiès et al. (2009) divisent le plan d'entrée en plusieurs zones (dont les zones tampon, logarithmique et de sillage) et définissent dans chacune de ces zones des perturbations dont les échelles de temps et de longueurs caractéristiques sont représentatives des échelles turbulentes locales.

Le dernier groupe de méthodes d'injection de turbulence synthétique sont les méthodes à forçage volumique. Elles consistent à ajouter un ou plusieurs termes de forçage dans les équations de Navier-Stokes dans un volume donné de l'écoulement (situé près de l'entrée du domaine). Leur utilisation peut être couplée à une des méthodes présentées précédemment. Par exemple, dans une LES de couche limite, Spille-Kohoff et Kaltenbach (2001) ajoutent un terme source dynamique dans l'équation de quantité de mouvement normale à la paroi dans le but de minimiser l'écart entre le frottement turbulent  $-\overline{u'v'}$  calculé et celui visé (prédit par un calcul (U)RANS ou mesuré expérimentalement), en modulant les fluctuations de vitesse normale à la paroi. Une approche similaire est proposée par Schlatter et Örlü (2010, 2012).

Les principales méthodes d'injection de turbulence sont présentées. Parmi ces différentes méthodes, certaines sont plus adaptées pour injecter une turbulence homogène isotrope (comme les méthodes spectrales), d'autres pour une turbulence pariétale de nature anisotrope (comme les méthodes d'imitations d'échelles turbulentes cohérentes). Dans le cadre de ces travaux, une injection de turbulence anisotrope est nécessaire.

En outre, ces méthodes ont été développées pour des approches LES ou DNS. Dans un contexte WMLES, la zone interne de la couche limite est non-résolue, ce qui ajoute une contrainte supplémentaire à la méthode d'injection choisie. Dans la littérature, une méthode de recyclage est généralement considérée en WMLES, par exemple par Kawai et Larsson (2012) dans le cas d'une couche limite supersonique. Cependant, cette méthode est difficile à implémenter et calibrer. Sans compter qu'il faut toujours initialiser le domaine et une dérive en temps peut apparaître.

Bocquet (2013) propose alors d'utiliser la méthode d'injection de Sandham et al. (2003) qui, en plus d'être plus simple à implémenter et utiliser que les autres méthodes d'injection de turbulence synthétique, offre l'avantage de décomposer le champ de perturbations en modes situés dans les zones interne et externe de la couche limite. Bocquet (2013) se sert de cette méthode pour effectuer la WMLES d'une couche limite turbulente en utilisant uniquement les modes de la zone externe, puisque seule cette zone est résolue en WMLES. C'est pourquoi, la méthode de Sandham et al. (2003) est considérée dans la suite de ces travaux.

En revanche, Bocquet (2013) a implémenté cette méthode dans une condition d'entrée stationnaire donc totalement réfléchive. Sur le cas de couche limite soumise à un gradient adverse considéré ici, des oscillations sont alors observées sur le champ de pression, provoquant le développement d'une turbulence pariétale non-physique.

Par conséquent, dans le cadre WMLES de ces travaux, il est nécessaire de pouvoir utiliser la méthode d'injection de turbulence de Sandham et al. (2003) à travers une condition d'entrée non-réfléchissante. La méthode de Sandham et al. (2003) et son implémentation dans une telle condition aux limites sont présentées en détail dans les deux sections suivantes.

Par ailleurs, il est à noter qu'il existe différents critères pour mesurer l'efficacité d'une méthode d'injection de turbulence, comme résumé par Bocquet (2013). L'objectif est de déterminer si la turbulence injectée est adaptée, c'est-à-dire ayant un comportement naturel et ne contenant plus d'effets historiques associés à la méthode d'injection considérée. Ces critères peuvent être basés sur des grandeurs :

- instantanées (isosurfaces de vitesse, de vorticité, de critère  $Q$ ...);
- moyennes (profils de vitesse en unités de paroi, de fluctuations turbulentes, d'énergie cinétique turbulente...);
- intégrales (évolution du coefficient de frottement pariétal, épaisseurs de couche limite, de déplacement ou de quantité de mouvement, facteur de forme...).

En général, l'efficacité d'une méthode d'injection de turbulence est quantifiée par le rapport entre la distance d'adaptation de la turbulence et l'épaisseur de la couche limite en entrée du domaine.

Dans la suite, il est choisi de considérer l'évolution du coefficient de frottement pariétal et le profil de vitesse en unités de paroi pour déterminer si la turbulence injectée est adaptée.

### 6.3.2 Présentation de la méthode d'injection de turbulence de Sandham et al. (2003)

Comme vu à la section précédente, la méthode d'injection de turbulence synthétique proposée par Sandham et al. (2003) cherche à injecter des structures similaires à celles présentes dans une couche limite turbulente. Le champ de perturbations est défini comme la somme de quatre modes (désignés par l'indice  $j$  dans la suite) de fluctuations de vitesse : un dans la zone interne ( $j = 0$ ) et trois ( $j = 1, 2$  ou  $3$ ) dans la zone externe de la couche limite. Le mode dans la zone interne vise à imiter les *streaks* présents dans cette zone avec un pic de fluctuations situé à  $y_{p,0}^+ = 12$ , alors que les modes dans la zone externe (dont les pics de fluctuation sont respectivement situés à  $y = \delta_{in}^*, 1.5\delta_{in}^*$  et  $2\delta_{in}^*$ ) reproduisent des structures analogues aux LSM et VLSM.

Les modes de perturbations pour les fluctuations des vitesses longitudinale  $u'$  et normale à la paroi  $v'$  sont définis par :

$$u' = u'_{inner} + u'_{outer} \quad (6.3a)$$

$$v' = v'_{inner} + v'_{outer} \quad (6.3b)$$

avec

$$u'_{\text{inner}} = c_{1,0} y^+ \exp\left(-\frac{y^+}{y_{p,0}^+}\right) \sin(\omega_0 t) \cos(\beta_0 z + \phi_0), \quad (6.3c)$$

$$v'_{\text{inner}} = c_{2,0} (y^+)^2 \exp\left(-\left(\frac{y^+}{y_{p,0}^+}\right)^2\right) \sin(\omega_0 t) \cos(\beta_0 z + \phi_0), \quad (6.3d)$$

$$u'_{\text{outer}} = \sum_{j=1}^3 c_{1,j} \left(\frac{y}{y_{p,j}}\right) \exp\left(-\frac{y}{y_{p,j}}\right) \sin(\omega_j t) \cos(\beta_j z + \phi_j), \quad (6.3e)$$

$$v'_{\text{outer}} = \sum_{j=1}^3 c_{2,j} \left(\frac{y}{y_{p,j}}\right)^2 \exp\left(-\left(\frac{y}{y_{p,j}}\right)^2\right) \sin(\omega_j t) \cos(\beta_j z + \phi_j). \quad (6.3f)$$

Chaque mode est caractérisé par une fréquence de forçage  $\omega_j$ , un nombre d'onde  $\beta_j$ , un déphasage  $\phi_j$  et une amplitude  $c_{i,j}$  ( $i = 1$  pour les modes de vitesse longitudinale et  $i = 2$  pour ceux de la vitesse normale à la paroi). Les valeurs de ces paramètres sont choisies en fonction des échelles caractéristiques des structures cohérentes que chaque mode veut imiter.

En particulier, le mode interne correspond à des structures de longueur d'onde longitudinale  $\lambda_x^+ \simeq 500\pi$ , convectées à une vitesse d'environ  $10u_\tau$  et espacées dans la direction transverse de  $\lambda_z^+ \simeq 100$  (c'est-à-dire l'écart observé entre les *streaks*, comme indiqué à la section 3.3). Les coefficients des modes externes sont obtenus en supposant que les structures ont une longueur d'onde  $\lambda_x \simeq 16\delta_{\text{in}}^*$  et se déplacent à une vitesse d'environ  $0.75u_e$  en étant espacées dans la direction transverse de manière à occuper tout le domaine. Par ailleurs, les amplitudes des modes externes (données par les coefficients  $c_{i,j>0}$ ) sont plus élevées que celles du mode interne puisque ce dernier représente des *streaks* de faibles vitesses.

Finalement, les fluctuations de vitesse transverse sont déterminées afin que le champ de perturbations soit à divergence nulle et ainsi éviter d'introduire des fluctuations de pression à l'entrée du domaine. Sandham et al. (2003) ajoutent également du bruit blanc aux fluctuations de vitesses (d'amplitude maximale égale à  $0.04u_e$ ) pour empêcher toute corrélation d'exister entre les différents modes. Dans la suite, pour éviter de perturber le champ de pression, aucun bruit blanc n'est ajouté aux fluctuations de vitesses.

En appliquant cette méthode sur le cas d'une couche limite à un nombre de Mach de 0.6 et à un nombre de Reynolds (basé sur  $u_e$ ,  $\nu_e$  et  $\delta_{\text{in}}^*$ ) de 1000, Sandham et al. (2003) annoncent une distance d'adaptation de  $40\delta_{\text{in}}^*$  en observant le profil de vitesse en unités de paroi et ceux de fluctuations turbulentes à cette position.

La méthode d'injection de turbulence proposée par Sandham et al. (2003) consiste à injecter un champ de perturbations visant à reproduire les structures cohérentes

présentes dans une couche limite turbulente. Dans ce but, les fluctuations de vitesses longitudinale et normale à la paroi sont décomposées en modes. Celles de la vitesse transverse sont définies de manière à obtenir un champ de perturbations à divergence nulle.

Comme expliqué précédemment, d'après Bocquet (2013), cette méthode est adaptée dans le cadre d'une approche WMLES car les modes définissant les fluctuations de vitesses sont situés dans les zones interne et externe. Étant donné que seule la zone externe est résolue en WMLES, Bocquet (2013) propose d'utiliser uniquement les modes présents dans cette zone.

### 6.3.3 Formulation de l'injection de turbulence pariétale non-réfléchissante utilisée

Comme résumé par Colonius (2004), différentes conditions aux limites non-réfléchissantes sont proposées dans la littérature. Les conditions aux limites considérées dans le cadre de ces travaux sont les conditions NSCBC (*Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions*) développées par T. J. Poinot et Lele (1992). Il s'agit d'une méthode par ondes caractéristiques. Une présentation de cette méthode est donnée dans l'annexe A.3 dont les notations sont conservées dans cette section. De plus, seules les modifications effectuées pour prendre en compte l'injection de turbulence sont présentées ici.

L'injection de turbulence à travers une condition d'entrée non-réfléchissante est un sujet de recherche actif. Notamment, dans un contexte NSCBC, Guézennec et T. Poinot (2009) proposent la méthode VFCBC (*Vortical-Flow Characteristic Boundary Conditions*). Cette méthode consiste à modifier l'amplitude des ondes entrantes afin de pouvoir injecter des ondes de vorticité (c'est-à-dire de la turbulence ou des vortex) sans réfléchir les ondes acoustiques. En revanche, la méthode VFCBC n'a pas permis ici de contrôler finement la turbulence injectée. Cela peut s'expliquer par le fait que dans le système d'équations caractéristiques considéré dans ces travaux, des termes de rappels sont ajoutés pour éviter à l'écoulement de diverger. Néanmoins, même en retirant ces termes, les profils de vitesses ont un comportement différent de celui attendu.

C'est pourquoi, il est décidé dans la suite d'inclure les fluctuations de vitesses dans les termes de rappels. Les amplitudes des ondes entrantes  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$  et  $\mathcal{L}_4$  sont alors données par :

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_5 + \gamma_V(u - (\bar{u}^t + u')), \quad (6.4a)$$

$$\mathcal{L}_2 = \gamma_V(v - (\bar{v}^t + v')), \quad (6.4b)$$

$$\mathcal{L}_3 = \gamma_V(w - (\bar{w}^t + w')). \quad (6.4c)$$

Cela permet de contrôler facilement les profils de vitesses injectés ainsi que la plage de fréquences filtrées. En effet, comme expliqué par Selle et al. (2004), les termes de rappels agissent comme des filtres passe-bas. cette méthode s'est avérée suffisante par rapport aux objectifs visés. Par contre, son efficacité dans le cadre d'un problème acoustique n'a pas été vérifiée et le développement d'une méthode plus avancée dépasse le cadre de ces travaux.

Il est à noter qu'ici, pour construire un champ de perturbations à divergence nulle, l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor (6.2) est utilisée pour déterminer les fluctuations de vitesse transverse  $w'$ .

Une méthode pour injecter de la turbulence à travers une condition d'entrée NSCBC est proposée. Avant d'appliquer cette méthode pour reproduire l'expérience d'Harun (2012), il est nécessaire de la valider. C'est l'objet des deux sections suivantes.

#### 6.3.4 Présentation du cas de validation et des méthodes numériques utilisées

L'utilisation de la méthode d'injection de turbulence de Sandham et al. (2003) (6.3) à travers une condition aux limites d'entrée NSCBC est validée sur une LES de couche limite se développant le long d'une plaque plane (soumise à un gradient de pression nul), à un nombre de Mach de 0.6 et un nombre de Reynolds (basé sur  $u_e$ ,  $v_e$  et  $\delta_{in}^*$ ) de 1000. Il s'agit du même cas de validation utilisé par Sandham et al. (2003).

Dans ce cas test, les données sont adimensionnées par l'épaisseur de déplacement en entrée  $\delta_{in}^*$  et par les densité, température et vitesse du son totales en entrée au-dessus de la couche limite. Si Sandham et al. (2003) considèrent un domaine de calcul de taille  $L_x \times L_y \times L_z = 50 \times 10 \times 8$  (avec  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$  respectivement les longueur, hauteur et largeur du domaine), il est décidé ici de prendre un domaine de taille  $200 \times 15 \times 8$  afin de suivre le développement de la turbulence injectée sur une plus longue distance. Le maillage est composé de  $N_x \times N_y \times N_z = 769 \times 193 \times 65 = 9.65 \times 10^6$  points et est construit de manière à obtenir une résolution en unités de paroi équivalentes à celle de Sandham et al. (2003) à l'entrée du domaine :  $\Delta x_{in}^+ \simeq 13$ ,  $\Delta z_{in}^+ \simeq 6.3$  et  $y_{1,cell}^+ \simeq 0.47$ . La vitesse de frottement en entrée est estimée à partir des données de maillage dans la direction longitudinale du calcul LES de Sandham et al. (2003) :  $u_{\tau,in} = v_e \Delta x_{in}^+ / \Delta x_{in}$ . Le maillage est uniforme dans les directions longitudinale et transverse et un ratio d'expansion de 1.2% est appliqué dans la direction normale à la paroi. Il y a alors dix cellules entre la paroi et  $y^+ = 10$  et 40 jusqu'à  $y^+ = 50$ . Les préconisations de maillage (4.17) sont donc respectées.

Les méthodes numériques sont identiques à celles utilisées au chapitre 5. L'avance temporelle est effectuée grâce à un schéma de Runge-Kutta (explicite) à quatre étapes et d'ordre deux. Le pas de temps  $\Delta t$  est constant et égal à 0.0137 (soit  $\Delta t^+ = \Delta t u_{\tau,in}^2 / \nu_e \simeq 0.0198$ ), ce qui correspond à un nombre de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) d'environ 0.9. Les échelles de sous-maille sont modélisées grâce au modèle de WALE introduit à la section 2.4. Les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma centré d'ordre deux. Toutefois, par rapport au chapitre 5, un terme de dissipation artificielle (proposé par Jameson et al. (1981) et présenté à la annexe A.2.1) est ajouté pour stabiliser le schéma centré. Comme expliqué

à la annexe A.2.1, un senseur numérique permet de limiter son impact sur la solution. Le coefficient  $\kappa_4$  quantifiant l'intensité de ce terme est ici imposé à  $10^{-4}$ .

Une condition aux limites de sortie NSCBC (présentée à la annexe A.3.2) est utilisée à la sortie du domaine. La pression statique est imposée constante en haut du domaine. Une zone éponge de trente cellules est aussi introduite en sortie du domaine et consiste à appliquer un filtre Gaussien sur l'écoulement (plus de détails sont donnés dans les travaux de Fosso (2011)). En entrée, une condition aux limites d'entrée NSCBC est utilisée et modifiée pour utiliser la méthode d'injection de turbulence de Sandham et al. (2003), comme expliqué à la section précédente. Les paramètres utilisés pour définir les modes de perturbations sont donnés au tableau 6.2. Une condition de vitesse non-glissante est appliquée à la paroi qui est également supposée isotherme de température égale à la température totale en entrée du domaine.

	$j$	$c_{1,j}/u_e$	$c_{2,j}/u_e$	$\omega_j$	$\beta_j$	$\phi_j$	$y_{p,j}^+$	$y_{p,j}$
Zone interne	0	0.1	-0.0016	0.1	$\pi$	0	12	-
Zone externe	1	0.3	-0.06	0.25	$0.75\pi$	0	-	1
	2	0.3	-0.06	$\omega_1/2$	$2\beta_1/3$	0.1	-	$1.5y_{p,1}$
	3	0.3	-0.06	$\omega_1/4$	$\beta_1/3$	0.15	-	$2y_{p,1}$

TABLE 6.2 – Paramètres utilisés pour la méthode d'injection de turbulence de Sandham et al. (2003)

La condition initiale est uniforme dans les directions parallèles à la paroi et est définie par :

$$\forall(x, y, z), \begin{cases} \rho(x, y, z, t = 0) = \rho_e, \\ u(x, y, z, t = 0) = \min(u_{\tau, \text{in}} \times u^+(y_{\text{in}}^+), u_e), \\ v(x, y, z, t = 0) = 0, \\ w(x, y, z, t = 0) = 0, \\ \rho E(x, y, z, t = 0) = \frac{p_e}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho u^2, \end{cases} \quad (6.5)$$

avec  $u^+(y_{\text{in}}^+)$  la loi de Reichardt (1951) présentée au tableau 4.2. Comme expliqué à la annexe A.3, des termes de rappels sont ajoutés dans les équations caractéristiques des conditions aux limites NSCBC afin de rappeler l'écoulement vers un état moyen. Ici, l'état moyen est donné par la condition initiale (6.5). Le profil de vitesse moyen (6.5) en entrée du domaine vérifie ainsi  $\delta_{\text{in}}^* \simeq 0.99$ , en accord avec le nombre de Reynolds visé en entrée.

La solution initiale est évacuée pendant  $30 L_x/u_e$  temps de convection. Puis, les statistiques sont obtenues en moyennant l'écoulement pendant  $90 L_x/u_e$  périodes ( $\simeq 44856 \nu_e/u_{\tau, \text{in}}^2 \simeq 0.281 \delta_{\text{in}}^2/\nu_e \simeq 2250 \delta_{\text{in}}/u_e$ , avec  $\delta_{\text{in}}$  l'épaisseur de couche limite en entrée). Enfin, ces dernières sont moyennées dans la direction transverse avant de tracer les résultats qui sont présentés à la section suivante. L'injection de turbulence est introduite dès le début de la simulation.



### 6.3.5 Résultats et bilan

Les résultats sont montrés aux figures 6.5 à 6.8. Dans le but d'étudier l'évolution de la turbulence injectée le long de la paroi, les profils de vitesse et de fluctuations turbulentes sont considérés à différentes positions longitudinales. En revanche, les profils en aval de  $x = 170$  et en amont de  $x = 30$  ne sont pas présentés. Les premiers sont affectés par la zone éponge présente à la sortie du domaine. L'action de cette dernière est visible par le pic non-physique en  $x \simeq 195$  sur le coefficient de pression  $C_p$  calculé à la première cellule au-dessus de la paroi. Les deuxièmes sont situés dans une zone où l'écoulement n'est pas encore dans un état turbulent. En particulier, les profils de vitesse en unités de paroi ne suivent pas une loi logarithmique dans la zone interne. D'après la figure 6.5, ce comportement est en partie vrai pour celui à  $x = 30$ .

À partir de  $x = 40$ , les profils de vitesse en unités de paroi suivent la loi de Reichardt (1951). En  $x = 40$ , le profil obtenu par Sandham et al. (2003) est montré et possède un sillage plus développé que le profil calculé ici. Cette différence peut s'expliquer, d'une part, par les méthodes numériques différentes considérées (Sandham et al. (2003) utilisent un schéma centré en différences finies d'ordre quatre et un schéma temporel d'ordre trois) et, d'autre part, par le fait que la turbulence est ici injectée à travers une condition non-réfléchissante. Pour  $x \geq 70$ , un profil de vitesse suivant la loi logarithmique dans la zone interne et dont le sillage est mieux défini est obtenu. Le fait que la turbulence est adaptée pour  $x \gtrsim 70$  est confirmé par les profils de fluctuations turbulentes, présentés à la figure 6.6. En effet, à partir de  $x \simeq 70$ , leurs profils en unités de paroi ont un comportement de nature auto-similaire, avec un pic dans la zone interne en  $y^+ \simeq 12$ .

L'évolution longitudinale du coefficient de frottement  $C_f$ , montré à la figure 6.7, permet d'affiner les observations réalisées sur les profils de vitesse et de fluctuations turbulentes. Le coefficient de frottement évolue de manière non-physique jusqu'à  $x \simeq 50$  avant de décroître en  $Re_x^{-1/5}$  pour  $x \gtrsim 70$ , c'est-à-dire en accord avec la corrélation (4.7) utilisée par Chapman (1979). La turbulence semble donc adaptée à partir de  $x \simeq 70$ . Par ailleurs, la réduction marquée du frottement pariétal pour  $x \gtrsim 190$  s'explique par la présence de la zone éponge en sortie du domaine.

Même si la couche limite considérée ici est soumise à un gradient de pression nul, il est important d'étudier l'évolution du coefficient de pression  $C_p$  puisque l'objectif de cette étude est de vérifier que la méthode proposée à la section 6.3.3 permet d'injecter de la turbulence en minimisant le bruit généré. L'évolution de  $C_p$  est présentée à deux hauteurs : à la première cellule au-dessus de la paroi  $y_1$  (c'est-à-dire dans la couche limite) et à la dernière cellule au-dessus de la paroi  $y_{N_y}$  (dans l'écoulement libre). Comme expliqué précédemment, le pic de pression statique pour  $x \gtrsim 180$  correspond à la zone éponge où un filtre Gaussien est appliqué à l'écoulement. Pour  $x \lesssim 70$ , des variations de pression sont observées dans la couche limite mais restent mesurées et s'amenuisent au cours de l'adaptation de la turbulence injectée. En particulier, le champ de pression ne présente aucune oscillation d'origine numérique, qui pourrait exister en raison de l'utilisation dans le cadre de ces travaux d'un schéma centré (phénomène appelé *checkerboard oscillations* dans la littérature).

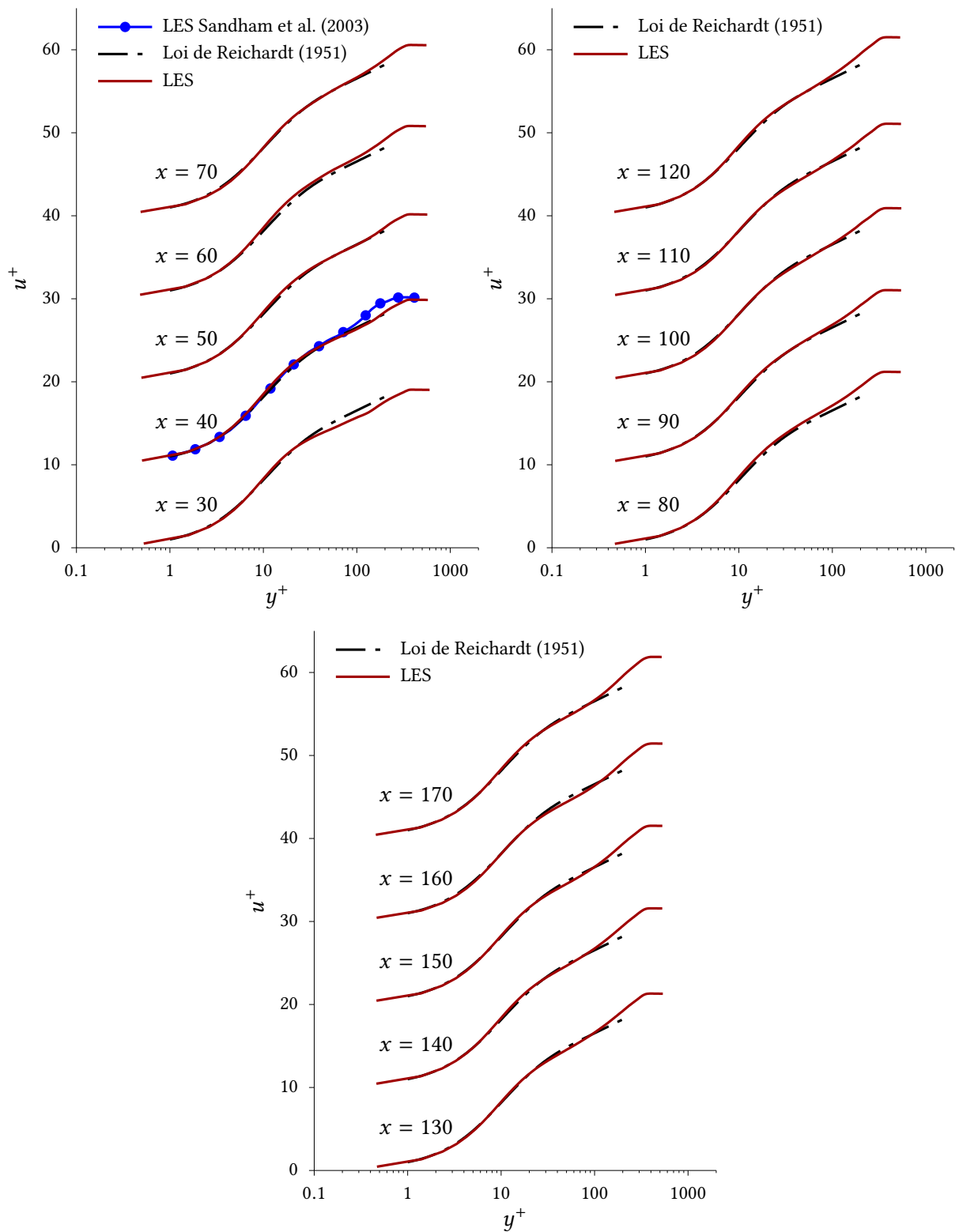


FIGURE 6.5 – Profils de vitesse moyenne en unités de paroi le long de la paroi entre  $x = 30$  et  $x = 170$ . À  $x = 40$ , le profil de vitesse obtenu par Sandham et al. (2003) est présenté. Les profils sont décalés d'un multiple de 10 unités de paroi

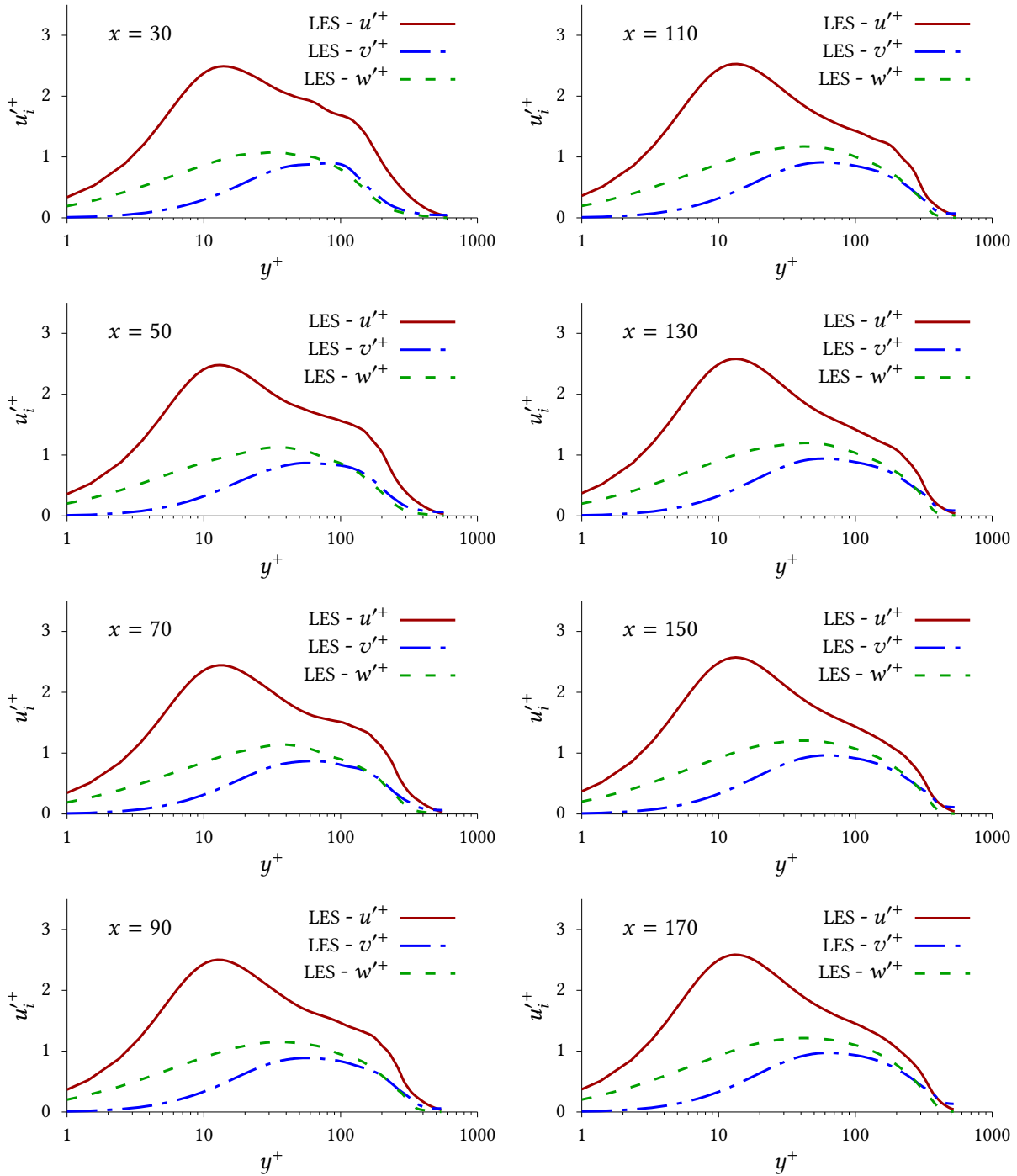


FIGURE 6.6 – Profils de fluctuations turbulentes en unités de paroi le long de la paroi entre  $x = 30$  et  $x = 170$

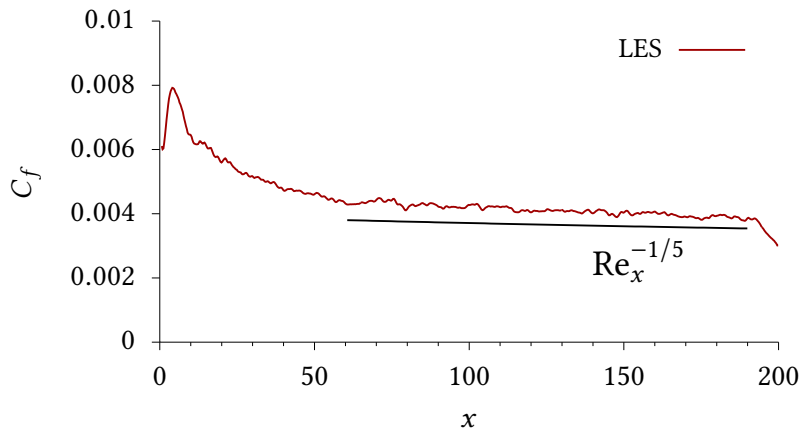


FIGURE 6.7 – Évolution longitudinale du coefficient de frottement  $C_f = 2\tau_w/(\rho_e u_e^2)$

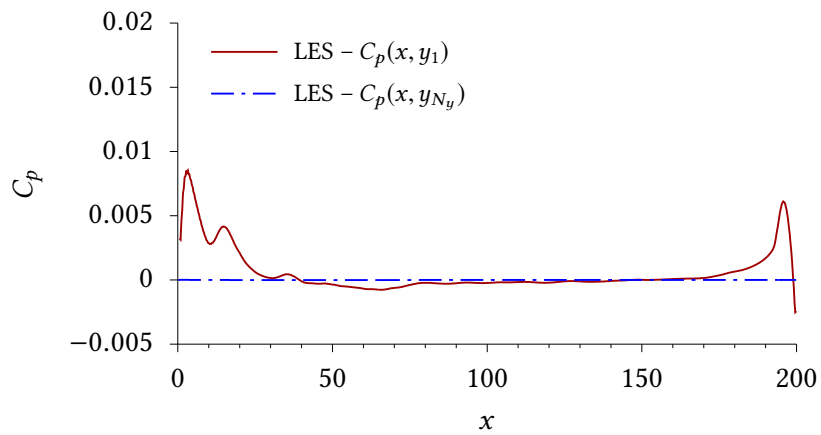


FIGURE 6.8 – Évolution longitudinale du coefficient de pression  $C_p = 2(p - p_e)/(\rho_e u_e^2)$  aux première et dernière cellules au-dessus de la paroi (notées respectivement  $y_1$  et  $y_{N_y}$ )

Ces résultats indiquent que la méthode d'injection de turbulence de Sandham et al. (2003) reste efficace lorsqu'elle est utilisée à travers une condition aux limites d'entrée NSCBC selon la méthode proposée à la section 6.3.3. Si les profils de vitesse en unités de paroi suivent la loi logarithmique dès  $x = 40$  (soit au bout d'environ  $5\delta_{in}$ , l'évolution du coefficient de frottement montre que la turbulence est adaptée plutôt à partir de  $x = 70$  (soit environ  $9\delta_{in}$ ). Bien que plus élevée qu'escomptée, cette distance d'adaptation reste faible (surtout vis-à-vis du coût de résolution d'une transition naturelle à la turbulence d'une couche limite). De plus, la méthode proposée permet de minimiser le bruit généré par l'injection de turbulence, conformément à l'objectif visé dans cette étude.

Ainsi, maintenant que l'utilisation d'une méthode d'injection de turbulence anisotrope à travers une condition d'entrée non-réfléchissante est validée, il est possible de l'employer pour reproduire numériquement l'expérience de couche limite soumise à un gradient de pression adverse présentée à la section 6.2. C'est l'objet des sections suivantes.

## 6.4 Simulation WMLES de l'expérience d'Harun (2012)

L'expérience d'Harun (2012) peut désormais être reproduite en WMLES. Dans un premier temps, la stratégie de maillage et les méthodes numériques considérées sont introduites. Puis, dans un second temps, les résultats WMLES sont présentés.

### 6.4.1 Maillage

Étant donné qu'un solveur structuré est considéré dans le cadre de ces travaux, les lignes de maillage se propagent dans tout le domaine. Ainsi, le maillage d'une couche limite se développant le long d'une paroi plane est piloté par les conditions d'entrée du domaine. De plus, un maillage orthogonal est considéré ici. Selon les préconisations de maillage WMLES (4.28), une trentaine de points est nécessaire selon la normale à la paroi dans la zone externe de la couche limite et le premier point au-dessus de la paroi est idéalement situé dans la zone inertielle. Pour respecter ces préconisations, il faut donc que la turbulence injectée en entrée s'adapte rapidement pour que l'épaisseur de couche limite en entrée du domaine  $\delta_{in}$  soit suffisamment élevée.

$\delta_{in}$ , la position du plan d'entrée  $x_{in}$  et le nombre de Reynolds de frottement en entrée  $Re_{\tau_{in}}$  sont dans un premier temps estimés à l'aide des corrélations (4.3) et (4.4) en se basant sur une distance d'adaptation de la turbulence de  $30\delta_{in}$  (cette distance est attendue plus élevée en WMLES qu'en LES, puisque la zone interne n'est pas résolue en WMLES). Puis, ces valeurs sont modifiées à posteriori afin que la vitesse de frottement décroisse de manière physique (comme à partir de  $x = 70$  sur la figure 6.7) et soit en accord avec la première mesure expérimentale, située en amont de l'introduction du gradient de pression adverse en  $x_1 = 2.9$  m. Les paramètres d'entrée utilisés en WMLES sont donnés au tableau 6.3.

Il est à noter que, bien que dans l'expérience la vitesse  $u_{\text{in}}$  en amont de la couche limite ( $x = 0$  m) soit égale à  $15.9 \text{ m s}^{-1}$ , il est choisi dans la WMLES de prendre la vitesse en entrée du domaine au-dessus de la couche limite  $u_{e_{\text{in}}}$  égale à la vitesse mesurée expérimentalement en  $x_1$  :  $u_{\text{exp}}(x_1) = 15.68 \text{ m s}^{-1}$ . En effet, dans l'expérience d'Harun (2012), de l'air est prélevé entre  $x \simeq 0.5$  m et  $x \simeq 1.5$  m pour contrôler le gradient de pression. Ainsi, même si un gradient de pression environ nul est mesuré à la paroi, il existe un écart entre  $u_{\text{in}}$  et  $u_{\text{exp}}(x_1)$ .

Variables	
$x_{\text{in}}$ (m)	1.12
$Pr$	0.72
$c_v$ ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )	717.5
$\rho_{e_{\text{in}}}$ ( $\text{kg m}^{-3}$ )	1.2
$\rho_{w,\text{in}}$	$\rho_{e_{\text{in}}}$
$\mu_{e_{\text{in}}}$ ( $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ )	$1.789 \times 10^{-5}$
$\mu_{w,\text{in}}$	$\mu_{e_{\text{in}}}$
$T_{e_{\text{in}}}$ (K)	293
$p_{e_{\text{in}}}$ (Pa)	100909.2
$u_{e_{\text{in}}}$ ( $\text{m s}^{-1}$ )	15.68
$\delta_{\text{in}}$ (m)	0.06
$Re_{\tau,\text{in}}$	1266.76

TABLE 6.3 – Paramètres d'entrée de la WMLES de l'expérience d'Harun (2012)

Le domaine de calcul est de longueur  $L_x = 4.718$  m et de hauteur  $L_y = 0.409$  m. La largeur  $L_z$  est définie comme un multiple de l'épaisseur de couche limite à la dernière position de mesure expérimentale en  $x_5 = 4.78$  m :  $L_z = 3.25 \times \delta_{\text{XP}}(x_5) = 0.3315$  m. Ce domaine est discrétisé avec un maillage composé de  $N_x \times N_y \times N_z = 871 \times 100 \times 149 \simeq 12.98 \times 10^6$  points. Afin de respecter les préconisations de maillage WMLES (4.28), les cellules du maillage sont étirées dans la direction longitudinale avec un taux d'expansion constant égal à 0.17%. Dans la direction normale à la paroi, les 78 premières cellules au-dessus de la paroi sont étirées de 1% et les 21 dernières de 5%. En revanche, l'écoulement étant homogène dans la direction transverse, le maillage est uniforme dans cette direction. Les données de maillage sont présentées au tableau 6.4.

#### 6.4.2 Méthodes numériques

Les conditions aux limites doivent être soigneusement choisies afin d'imposer le même gradient de pression adverse que dans l'expérience d'Harun (2012). Comme indiqué à la section 6.1, il n'existe pas a priori dans la littérature d'étude de couche limite soumise à un gradient de pression donnée avec un solveur compressible. Seules des études avec des solveurs incompressibles sont réalisées, où les champs de vitesses ou de pression peuvent être directement imposés en haut du domaine. En compressible, les fluctuations de densité

$x_i$ (m)	$\frac{\Delta x}{\delta_{XP}(x_i)}$	$\frac{\Delta z}{\delta_{XP}(x_i)}$	$\frac{y_{1,node}}{\delta_{XP}(x_i)}$	$\frac{\delta_{XP}(x_i)}{L_y}$	$N_y(y \leq \delta_{XP}(x_i))$	$\Delta x^+$	$\Delta z^+$	$y_1^+$	$y_3^+$
2.9	0.089	0.037	0.035	0.15	26	205	85	40	201
3.5	0.084	0.030	0.028	0.19	31	222	78	37	184
4.0	0.096	0.030	0.028	0.19	31	233	72	34	170
4.46	0.090	0.025	0.023	0.22	36	226	63	30	149
4.78	0.084	0.022	0.021	0.25	40	219	57	27	135

TABLE 6.4 – Données de maillage de la WMLES de l'expérience d'Harun (2012), estimées à partir de l'épaisseur de couche limite  $\delta_{XP}$  et de la vitesse de frottement (pour les données en unités de paroi) mesurées expérimentalement.  $N_y(y \leq \delta_{XP})(x_i)$  est le nombre de points selon la normale à la paroi contenu dans la couche limite.  $y_1$  et  $y_3$  sont respectivement les première et troisième cellules au-dessus de la paroi.  $y_{1,node}$  est le premier noeud au-dessus de la paroi

gènèrent des ondes acoustiques que les conditions aux limites doivent évacuer pour assurer la stabilité de la simulation. Un gradient de pression ne peut alors être directement imposé en haut du domaine.

En entrée du domaine, la méthode d'injection de turbulence de Sandham et al. (2003) est utilisée à travers une condition d'entrée NSCBC selon la méthodologie proposée à la section 6.3.3 et validée à la section 6.3.5. Comme expliqué lors de sa présentation à la section 6.3.2, cette méthode d'injection est adaptée à une approche WMLES car les fluctuations de vitesses sont décomposées en modes situés dans les zones interne et externe de la couche limite. En WMLES, comme proposé par Bocquet (2013), seuls les modes de la zone externe sont considérés. Les valeurs des coefficients utilisés dans cette étude correspondent à celles préconisées par Sandham et al. (2003) et sont données au tableau 6.5. Comme indiqué dans la suite, le profil de vitesse moyenne en entrée est basé sur un profil en puissance  $(y/\delta_{in})^{1/7}$ , ainsi :  $\delta_{in} = 8\delta_{in}^*$ .

	$j$	$\frac{c_{1,j}}{u_{e_{in}}}$	$\frac{c_{2,j}}{u_{e_{in}}}$	$\omega_j$	$\beta_j$	$\phi_j$	$y_{p,j}^+$	$y_{p,j}$
Zone interne	0	0	0	–	–	–	–	–
	1	0.3	-0.06	$2\pi \frac{0.75 u_e}{16\delta_{in}/8}$	$\frac{0.75\pi}{\delta_{in}/8}$	0	–	$\delta_{in}/8$
Zone externe	2	0.3	-0.06	$\omega_1/2$	$2\beta_1/3$	0.1	–	$1.5y_{p,1}$
	3	0.3	-0.06	$\omega_1/4$	$\beta_1/3$	0.15	–	$2y_{p,1}$

TABLE 6.5 – Paramètres pour la méthode d'injection de turbulence de Sandham et al. (2003) dans la WMLES de l'expérience d'Harun (2012)

Pour imposer le gradient de pression, une condition de sortie NSCBC est utilisée en haut du domaine. Comme expliqué à la annexe A.3.2, un terme de rappel est ajouté dans l'équation caractéristique de la pression statique afin de rappeler l'écoulement vers une pression de référence  $p_{\text{ref}}$ . Ici, dans le but de reproduire le coefficient de pression expérimental, cette pression est définie par :

$$\forall(x, z), p_{\text{ref}}(x, z) = \begin{cases} p_{e_{\text{in}}} & \text{pour } x \leq 2.9 \text{ m,} \\ \sum_{i=0}^5 a_i x^i & \text{pour } x \in [2.9 \text{ m}; 3.5 \text{ m}], \\ b_1 x + b_0 & \text{pour } x \geq 3.5 \text{ m,} \end{cases} \quad (6.6)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &\simeq 54500.33, & a_1 &\simeq 71044.33, \\ a_2 &\simeq -43283.28, & a_3 &\simeq 13118.81, \\ a_4 &\simeq -1978.59, & a_5 &\simeq 118.86, \\ b_0 &\simeq 100804.58, & b_1 &\simeq 33.18. \end{aligned} \quad (6.7)$$

$p_{\text{ref}}$  est définie à partir de deux fonctions linéaires. La première permet d'imposer un gradient de pression nul jusqu'à  $x = 2.9$  m et la seconde un gradient de pression constant à partir de  $x = 3.5$  m, comme dans l'expérience d'Harun (2012). Elles sont liées à l'aide d'un polynôme de degré cinq pour lisser leur raccord et obtenir un champ de pression de classe  $C^2$ . En sortie du domaine, une condition de sortie NSCBC est utilisée, permettant de relaxer la pression statique afin d'évacuer les ondes acoustiques sortantes tout en rappelant l'écoulement vers la pression de sortie de référence  $p_{\text{ref}}(x = L_x)$ . En revanche, aucune zone éponge n'est introduite en sortie du domaine. Comme observé à la figure 6.8, cela génère du bruit et impacte le champ de pression qui s'éloigne alors des valeurs visées. Finalement, une condition de paroi adiabatique non-glissante est imposée à la paroi.

En plus des conditions aux limites, les dimensions du domaine doivent également être adaptées. En effet, l'information du gradient de pression étant donnée en haut du domaine de calcul, le temps que cette information se propage vers la paroi un écart se crée entre les pressions en haut du domaine et à la paroi. En particulier, le gradient de pression imposé à partir de  $x \simeq 3$  m en haut du domaine est perçu plus tôt à la paroi. Plus la hauteur du domaine  $L_y$  est élevée, plus cet écart est important. C'est pourquoi, un terme source est ajouté dans l'équation d'énergie afin de rappeler l'écoulement local vers la pression de référence  $p_{\text{ref}}$  :

$$S = \sigma_1(p - p_{\text{ref}}), \quad (6.8)$$

avec  $\sigma_1$  un paramètre de relaxation (constant). Pour éviter une dérive du champ de densité  $\rho$ , un terme source est ajouté dans l'équation de continuité :

$$S_2 = \sigma_2(\rho - \rho_{e_{\text{in}}}), \quad (6.9)$$



avec  $\sigma_2$  un deuxième paramètre de relaxation (constant). Par ailleurs, dans une simulation de couche limite, cette hauteur est définie par rapport à l'épaisseur de couche limite maximale. Donc plus la longueur du domaine est élevée, plus la couche limite se développe (et son épaisseur augmente) et plus  $L_y$  doit augmenter en conséquence. Finalement, les données de maillage et les conditions aux limites considérées sont synthétisées sur la figure 6.9.

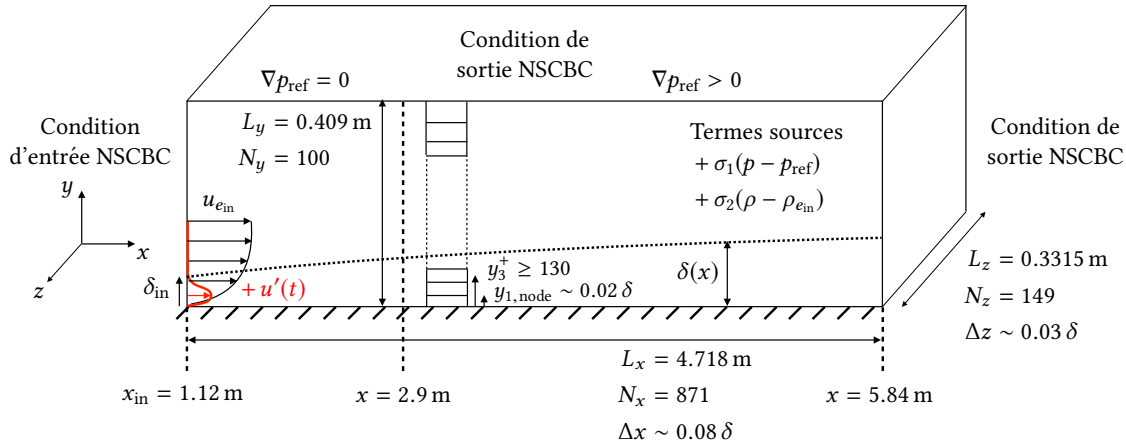


FIGURE 6.9 – Schéma de la WMLES de l'expérience d'Harun (2012)

La condition initiale est uniforme dans les directions parallèles à la paroi et est définie par :

$$\forall(x, y, z), \begin{cases} \rho(x, y, z, t = 0) = \rho_{e_{in}}, \\ u(x, y, z, t = 0) = u_{e_{in}} \min \left( 1, \left( \frac{y}{\delta_{in}} \right)^{1/7} \right), \\ v(x, y, z, t = 0) = 0, \\ w(x, y, z, t = 0) = 0, \\ \rho E(x, y, z, t = 0) = \frac{p_{ref}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2. \end{cases} \quad (6.10)$$

Le profil de vitesse moyenne en entrée du domaine est donc basé sur un profil de vitesse en puissance  $(y/\delta_{in})^{1/7}$ , qui est une approximation raisonnable d'un profil turbulent, comme indiqué à la section 3.2.2.

D'après les données de maillage résumées au tableau 6.4, la première cellule au-dessus de la paroi n'est pas située dans la zone inertielle dans tout le domaine. La stratégie proposée à la section 4.2.2 est alors appliquée : les données d'entrée du modèle de paroi sont extraites à la troisième cellule  $y_3$  au-dessus de la paroi, dont les valeurs en unités de paroi sont montrées au tableau 6.4. Par ailleurs, de même qu'au chapitre 5, deux modèles de paroi sont considérés : l'iWMLES et l'aWMLES. Pour rappel, l'aWMLES est un modèle de paroi analytique correspondant à la loi de Reichardt (1951) dans le cas d'une paroi adiabatique. L'objectif est de démontrer l'apport de l'iWMLES par rapport à un modèle analytique pour la prise en compte des effets associés à un gradient de pression.

Enfin, les modèles numériques et physiques employés sont identiques à ceux utilisés jusqu'à présent. Les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma centré d'ordre deux. Le coefficient  $\kappa_4$  quantifiant l'intensité du terme de dissipation artificielle introduit pour stabiliser le schéma centré (et présenté à la annexe A.2.1) est ici imposé à  $10^{-4}$ . Les échelles de sous-maille sont modélisées grâce au modèle de WALE introduit à la section 2.4. Un schéma de Runge-Kutta (explicite) à quatre étapes et d'ordre deux permet d'avancer temporellement. Le pas de temps  $\Delta t$  est constant et égal à  $3.25 \times 10^{-6}$  s, ce qui correspond à un nombre de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) inférieur à 0.9. La solution initiale est évacuée pendant 3 s, soit environ  $10 L_x/u_{e_{in}}$  temps de convection. Les paramètres de relaxation présents dans les équations NSCBC sont initialement choisis nuls puis progressivement augmentés au cours de cette période transitoire. Puis, les statistiques sont obtenues en moyennant l'écoulement pendant 6 s, soit environ  $20 L_x/u_{e_{in}}$  périodes. Enfin, ces dernières sont moyennées dans la direction transverse avant de tracer les résultats présentés à la section suivante. L'injection de turbulence est introduite dès le début de la simulation.

Une méthodologie numérique permettant de soumettre une couche limite à un gradient de pression donnée avec un solveur compressible est proposée (et résumée à la figure 6.9). L'injection de turbulence est réalisée à travers une condition d'entrée NSCBC. Le gradient de pression est imposé grâce une condition de sortie NSCBC en haut du domaine.

En plus des conditions aux limites, la hauteur du domaine est également un paramètre influent car l'information du gradient de pression est donnée en haut du domaine. En effet, le temps que cette information se propage jusqu'à la paroi. un écart de pression peut exister entre le haut du domaine et la paroi. Afin de corriger cette écart, un terme source est ajouté dans l'équation d'énergie pour rappeler l'écoulement vers la pression visée.

Grâce à cette méthodologie, l'expérience d'Harun (2012) de couche limite soumise à un gradient de pression adverse peut être reproduite numériquement à l'aide d'un solveur compressible. Pour démontrer l'intérêt de l'iWMLES, un modèle de paroi analytique basé sur la loi de Reichardt (1951) (noté aWMLES) est également considéré. Les résultats obtenus avec chacun de ces modèles de paroi (dont les données d'entrée sont extraites à la troisième cellule au-dessus de la paroi) sont présentés et comparés dans la section suivante.

### 6.4.3 Résultats

Les résultats sont illustrés sur les figures 6.10 à 6.18 et sont comparés aux données expérimentales d'Harun (2012). Par concision, seules les évolutions longitudinales obtenues avec l'iWMLES de la vitesse longitudinale au-dessus de la couche limite et des variables associées au champ de pression obtenues sont présentées, car ces dernières sont ici quasiment indépendantes de la modélisation de paroi considérée. En effet, d'une part, les données

extraites au-dessus de la couche limite sont indépendantes des flux pariétaux. D'autre part, le gradient de pression auquel la couche limite est ici soumise n'est pas suffisamment intense pour que les flux pariétaux estimés par les modèles de paroi considérés divergent au point d'aboutir à des champs de pression différents.

L'évolution du coefficient de pression  $C_p$  le long de la paroi est montrée à la figure 6.10. En haut du domaine, un excellent accord avec l'expérience est obtenu. À la première cellule au-dessus de la paroi, le coefficient de pression en WMLES est légèrement plus élevé en entrée du domaine à cause de l'injection de turbulence. Il est important de noter que, grâce à l'injection de turbulence implémentée à travers une condition d'entrée NSCBC, aucune oscillation n'est observée sur le champ de pression. De plus, le gradient de pression est perçu plus tôt à la paroi et un léger écart existe entre la pression près de la paroi et celle en haut du domaine. En sortie du domaine, la condition de sortie NSCBC relaxe la pression pour évacuer l'écoulement. La pression diverge alors de celle visée. Cet effet est plus important à la paroi en raison de la turbulence contenue dans la couche limite.

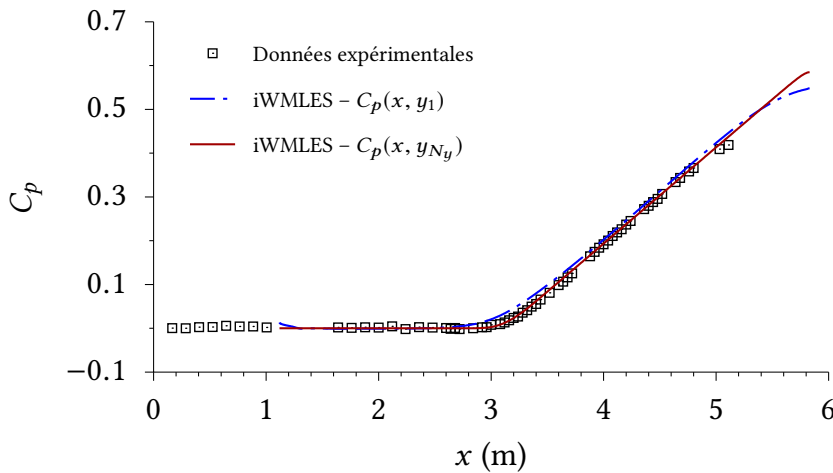


FIGURE 6.10 – Évolution longitudinale du coefficient de pression  $C_p = 2(p - p_e)/(\rho_e u_{e_{in}}^2)$  aux première et dernière cellules au-dessus de la paroi (notées respectivement  $y_1$  et  $y_{N_y}$ )

Ces observations sont confirmées par l'évolution longitudinale du gradient de pression, montrée à la figure 6.11. En haut du domaine, le gradient de pression est nul jusqu'à  $x \approx 2.9$  m puis positif et constant entre  $x \approx 3.4$  m et  $x \approx 5.7$  m. En sortie du domaine, la pression est relaxée par la condition aux limites NSCBC et son gradient diminue. Près de la paroi, l'injection de turbulence induit un gradient de pression favorable à l'entrée du domaine. Ce phénomène d'adaptation de la turbulence est similaire à celui observé précédemment à la figure 6.8. Les intervalles où le gradient de pression est nul puis constant (et adverse) sont également présents mais sont plus courts qu'en haut du domaine. Notamment, l'effet de relaxation de la pression en sortie du domaine est perçu dès  $x \approx 5$  m, ce qui reste en aval du dernier plan de mesures expérimentales situé à  $x = 4.78$  m.

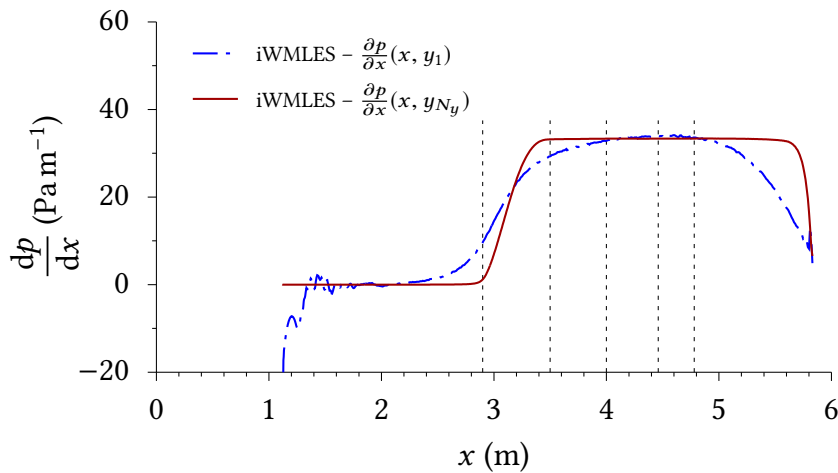


FIGURE 6.11 – Évolution longitudinale du gradient de pression  $\frac{dp}{dx}$  aux première et dernière cellules au-dessus de la paroi (notées respectivement  $y_1$  et  $y_{N_y}$ ). Les lignes verticales en pointillé désignent les plans de mesures expérimentales

Ces différents résultats permettent ainsi de valider les méthodes numériques choisies pour imposer le gradient de pression. En outre, la vitesse longitudinale au-dessus de la couche limite, présentée à la figure 6.12 et évaluée en  $y = 0.3$  m afin de ne pas être influencée par la condition aux limites en haut du domaine, est en accord avec les mesures expérimentales. Il en est également de même avec le gradient de pression en unités de paroi  $p^+$  montré à la figure 6.13, dont les valeurs sont semblables aux valeurs expérimentales, aussi bien en haut du domaine que près de la paroi.

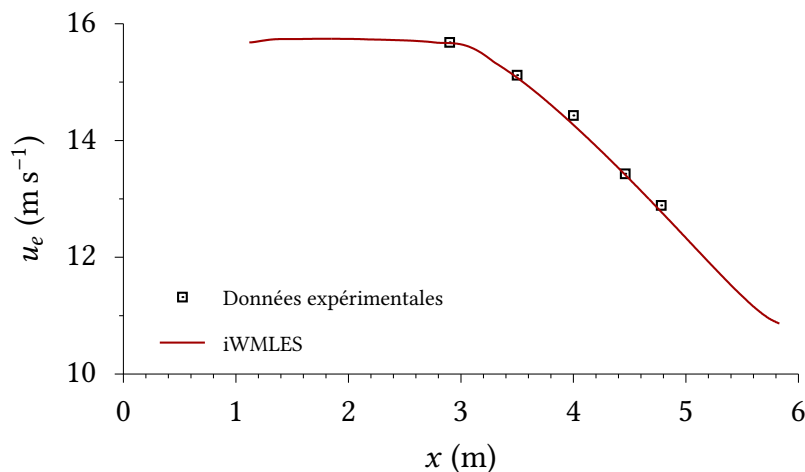


FIGURE 6.12 – Évolution longitudinale de la vitesse  $u_e$  au-dessus de la couche limite

Cela signifie que le frottement pariétal prédit par l'iWMLES présente un faible écart avec celui mesuré expérimentalement, puisque le gradient de pression dimensionné est en accord

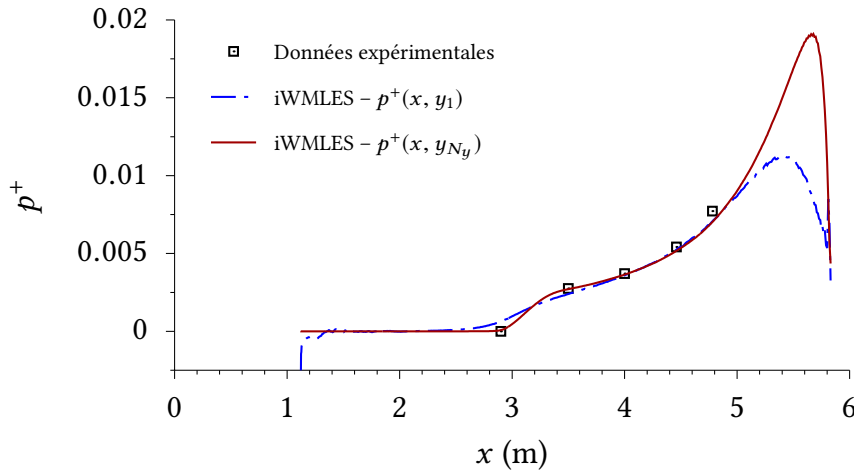


FIGURE 6.13 – Évolution longitudinale du gradient de pression en unités de paroi  $p^+ = \nu_w / (\rho_w u_\tau^2) \frac{dp}{dx}$  aux première et dernière cellules au-dessus de la paroi (notées respectivement  $y_1$  et  $y_{N_y}$ )

avec celui imposé dans l'expérience comme expliqué précédemment. C'est effectivement le cas, d'après l'évolution longitudinale du coefficient de frottement pariétal  $C_f$  illustrée à la figure 6.14. Si l'iWMLES prédit un frottement légèrement supérieur à l'aWMLES, les deux sont très proches et comparables au coefficient de frottement expérimental. Un gradient de pression plus intense est nécessaire pour confirmer ou infirmer cette tendance. Par ailleurs, le pic de  $C_f$  observé au début du domaine est dû à l'adaptation de la turbulence injectée, de manière similaire à la figure 6.7. À partir de  $x \approx 2.5$  m,  $C_f$  décroît de manière similaire à l'expérience, montrant que la turbulence injectée est adaptée. À l'entrée du domaine, la différence de frottement entre l'iWMLES et l'aWMLES a pour origine un gradient de pression non nul en entrée (en raison de l'injection de turbulence). Il est à noter que  $C_f$  est défini à partir de la vitesse longitudinale  $u_e$  locale et non de la vitesse d'entrée au-dessus de la couche limite  $u_{e_{in}}$ .

Le paramètre de gradient de pression de Clauser  $\beta$ , montré à la figure 6.15, est tout de même légèrement surévalué en WMLES pour  $x \gtrsim 4$  m, Cela s'explique par le fait qu'en WMLES, la couche limite est plus épaisse que dans l'expérience d'Harun (2012), comme illustré à la figure 6.16. Cette surestimation peut en partie être attribuée à l'évolution longitudinale de l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  dans l'expérience. En effet, cette dernière est identique en  $x = 3.5$  m et en  $x = 4$  m alors que, d'après la section 3.4.1, elle est censée augmenter sous l'influence d'un gradient de pression adverse. Par ailleurs,  $\delta$  est ici calculée à l'aide de la définition usuelle :  $u(x, y = \delta) = 0.99u_e(x)$ .

Cette surestimation de  $\delta$  est également observée sur les profils de vitesse et de fluctuations turbulentes en unités de paroi, présentés aux figures 6.17 et 6.18. Pour rappel, les données d'entrée des modèles de paroi sont ici extraites à la troisième cellule au-dessus de la paroi. L'épaisseur de couche limite plus élevée induit une surestimation du nombre de Reynolds

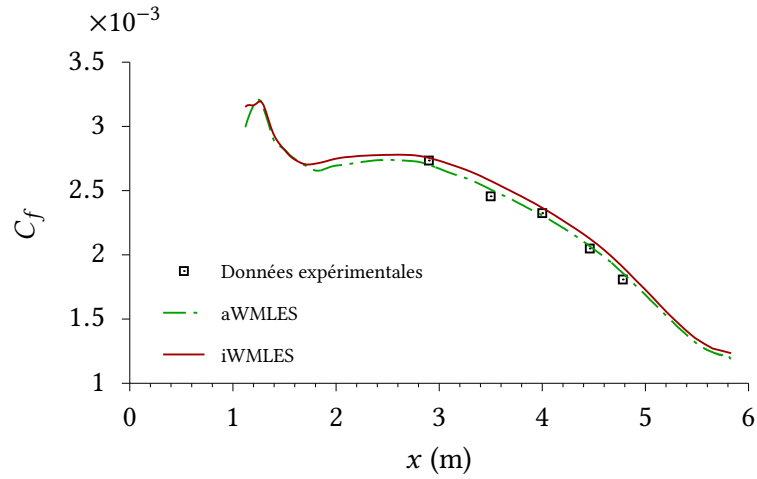


FIGURE 6.14 – Évolution longitudinale du coefficient de frottement  $C_f = 2\tau_w/(\rho_e u_e^2)$

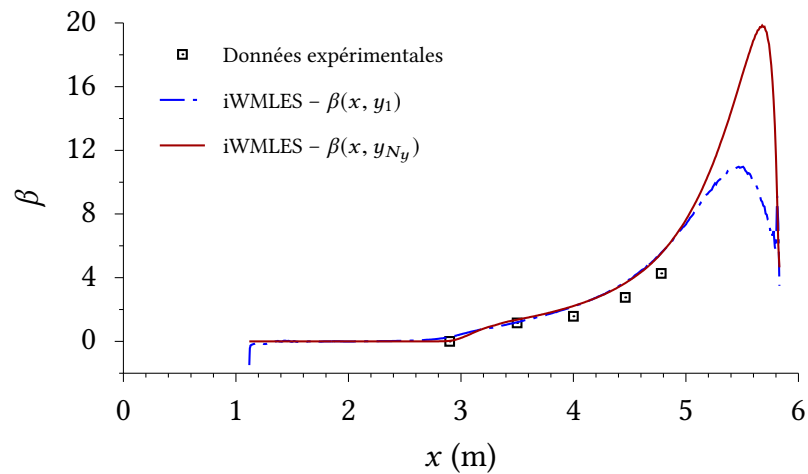


FIGURE 6.15 – Évolution longitudinale du paramètre de gradient de pression de Clauser  $\beta = \frac{\delta^*}{\tau_w} \frac{dp}{dx}$  aux première et dernière cellules au-dessus de la paroi (notées respectivement  $y_1$  et  $y_{N_y}$ )

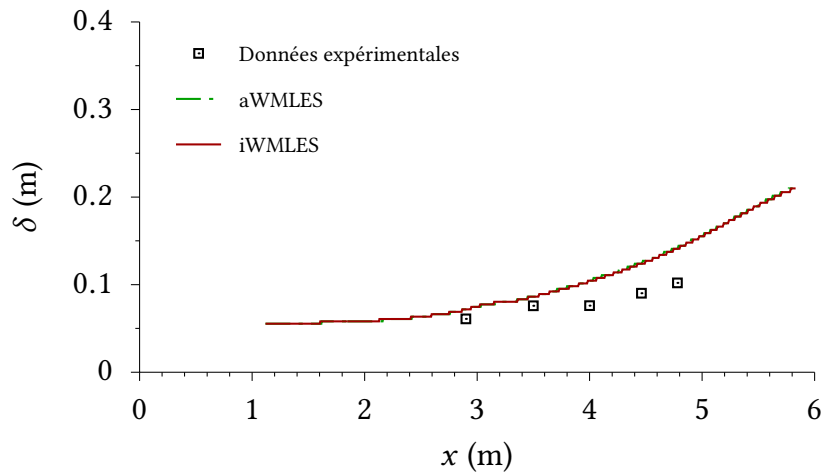


FIGURE 6.16 – Évolution longitudinale de l'épaisseur de couche limite

de frottement. Par contre, le décalage des profils de vitesse dans la zone inertielle sous la loi logarithmique (qui, comme indiqué à la section 3.4.1, est caractéristique des couches limites soumises à un gradient de pression adverse) est bien prédit par l'iWMLES, alors que l'aWMLES n'est pas valide (puisque basé sur une loi de Reichardt (1951)). Ces résultats montrent que l'iWMLES a un domaine de validité plus étendu qu'un modèle de paroi analytique en étant capable de prendre en compte les effets associés à un gradient de pression. En outre, l'intensification du sillage sous l'effet du gradient de pression adverse est bien prédite, à la fois par l'iWMLES et par l'aWMLES. En effet, en WMLES, seule la zone interne est modélisée et la zone externe est résolue. Ainsi, comme expliqué par Larsson et al. (2016), des phénomènes hors-équilibre présents dans la zone externe peuvent être capturés même avec un modèle de paroi supposant la couche limite en-équilibre, tel que l'aWMLES.

Il en est de même pour le pic de fluctuations turbulentes situé dans la zone externe, typique des couches limites soumises à un gradient de pression adverse. À  $x = 4.78$  m, l'amplitude de ce pic sur les fluctuations de la vitesse longitudinale obtenue en WMLES (que ce soit avec l'iWMLES ou l'aWMLES) est en accord avec celle de l'expérience, qui devient équivalente à celle du pic dans la zone interne à  $y^+ \approx 12$ . En raison d'une couche limite plus épaisse, la position de ce pic en WMLES est décalée par rapport à l'expérience. Le pic dans la zone interne n'est également pas capturé en WMLES puisque cette zone n'est pas résolue. De plus, il est observé que l'iWMLES et l'aWMLES prédisent des fluctuations turbulentes quasiment identiques. Cela corrobore les résultats du chapitre 5 où le modèle de paroi n'a aucune influence fondamentale sur les fluctuations turbulentes. Au chapitre 5, ce résultat est justifié à partir des travaux de Cossu et Y. Hwang (2017) qui montrent qu'à haut nombre de Reynolds, les structures contenues dans la zone interne n'influent pas sur celles de la zone externe. En particulier, ces dernières sont autosuffisantes et relativement indépendantes des flux pariétaux. Étant donné qu'un gradient de pression adverse a des effets analogues à une augmentation du nombre de Reynolds (d'après la section 3.4.1), la séparation d'échelles

entre les zones interne et externe est encore plus marquée. Les fluctuations turbulentes en WMLES restent ainsi, à priori, relativement indépendantes des flux pariétaux.

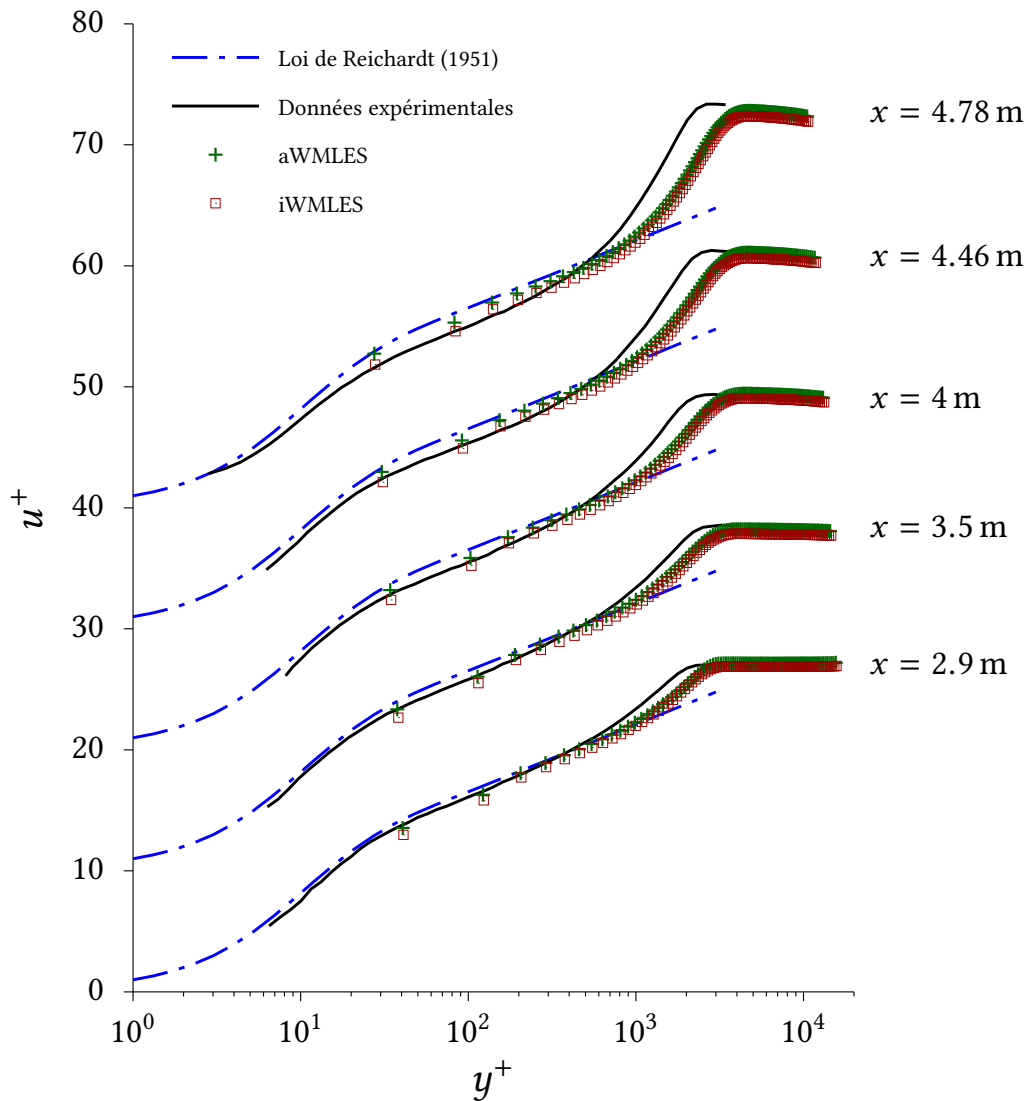


FIGURE 6.17 – Profils de vitesse moyenne en unités de paroi le long de la paroi entre  $x = 2.9$  m et  $x = 4.78$  m. Les profils sont décalés d'un multiple de 10 unités de paroi. De bas en haut :  $x = 2.9$  m,  $x = 3.5$  m,  $x = 4$  m,  $x = 4.46$  m et  $x = 4.78$  m

Grâce aux méthodes numériques choisies, un gradient de pression fidèle à celui existant dans l'expérience d'Harun (2012) est imposé. Cette méthodologie numérique offre la possibilité d'évaluer un modèle de paroi dans un solveur compressible sur une couche limite soumise à un gradient de pression donné.

Par conséquent, en utilisant l'iWMLES, l'ensemble des phénomènes associés à un



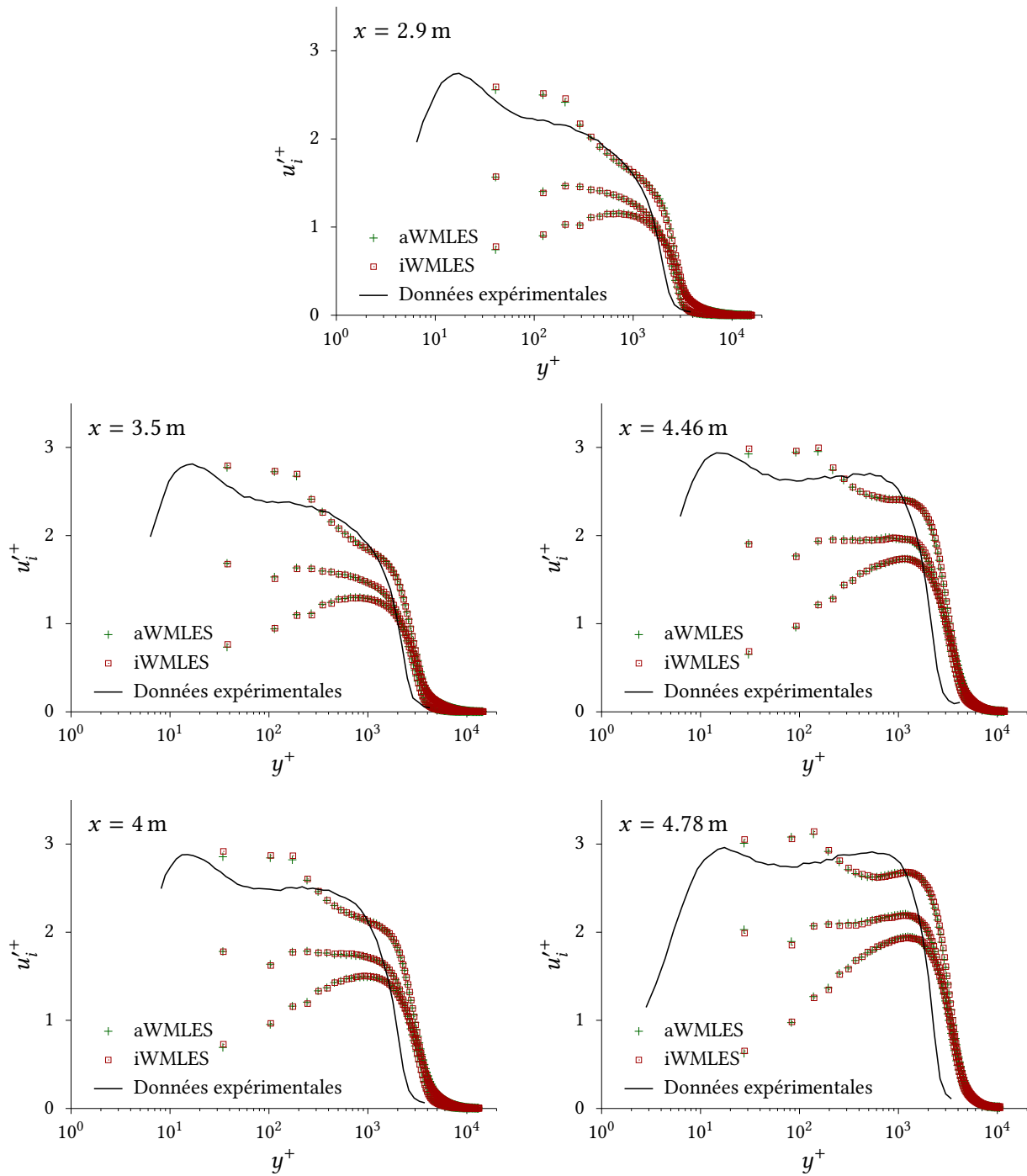


FIGURE 6.18 – Profils de fluctuations turbulentes en unités de paroi le long de la paroi entre  $x = 2.9$  m et  $x = 4.78$  m. De bas en haut :  $v'^+$ ,  $w'^+$  et  $u'^+$

gradient de pression adverse est capturé : le décalage du profil de vitesse en unités de paroi sous la loi logarithmique dans la zone inertielle, le renforcement de la zone de sillage et le pic de fluctuations turbulentes dans la zone externe. Ainsi, la capacité de l'iWMLES à prédire ces phénomènes est validée.

Par ailleurs, il est à noter qu'hormis le décalage du profil de vitesse sous la loi logarithmique, un modèle de paroi analytique basé sur cette loi permet d'obtenir des résultats cohérents avec les données expérimentales. Des données de référence à des gradients de pression plus élevés permettraient de discriminer davantage les modèles de paroi. Toutefois, comme expliqué à la section 6.1, l'expérience d'Harun (2012) fait déjà partie des cas les plus discriminants au regard du contexte dans lequel ces travaux s'inscrivent.

## 6.5 Bilan

L'aptitude de l'iWMLES à prendre en compte les effets associés à un gradient de pression est validée. En effet, dans ce chapitre :

1. Une méthode d'injection de turbulence adaptée à une approche WMLES et utilisée à travers une condition d'entrée non-réfléchissante est proposée. Cette manière d'injecter de la turbulence est validée sur une LES de couche limite soumise à un gradient de pression nul ;
2. Grâce à la méthodologie proposée, l'expérience de couche limite soumise à un gradient de pression adverse réalisée par Harun (2012) est reproduite en WMLES en proposant une méthodologie numérique permettant d'imposer un gradient de pression donné avec un solveur compressible. Cette méthodologie repose notamment sur la méthode d'injection de turbulence précédemment validée ;
3. En comparant les résultats de l'iWMLES avec ceux d'un modèle de paroi analytique, il est observé que l'iWMLES a un domaine de validité plus étendue qu'un modèle de paroi analytique lorsqu'il s'agit de prédire des phénomènes associés à un gradient de pression. Notamment, les profils de vitesses en unités de paroi prédits par l'iWMLES sont en accord avec ceux mesurés expérimentalement par Harun (2012).

Les résultats des chapitres précédent et actuel montrent donc que l'iWMLES est un modèle de paroi capable de prendre en compte les effets de compressibilités, thermiques et liés à un gradient de pression. De plus, ce modèle de paroi est adapté aux simulations de géométries complexes en raison de son coût de calcul faible et de sa simplicité d'utilisation (aucun maillage secondaire défini explicitement n'est requis).

En particulier, l'iWMLES peut être appliqué sur les écoulements présents dans les turbomachines, où les couches limites sont affectées entre autres par des effets de compressibilité et de gradients de pression. C'est l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 7

## Application de l'iWMLES à l'écoulement dans un compresseur axial

Les études précédentes montrent que le modèle de paroi iWMLES est capable de prendre en compte les phénomènes physiques affectant les couches limites présentes dans une turbomachine. Sa simplicité d'utilisation et son coût de calcul réduit le rend également adapté au traitement de géométries complexes. L'iWMLES peut donc désormais être considéré pour de telles configurations. Dans ce chapitre, une application sur l'écoulement dans une turbomachine est présentée.

### 7.1 Contexte et objectifs de l'étude

À partir du modèle de paroi iWMLES développé et validé dans les chapitres 5 et 6, une approche WMLES peut être considérée pour simuler les écoulements présents dans les turbomachines. En effet, l'iWMLES est capable de prendre en compte les effets de compressibilité, thermiques et d'un gradient de pression auxquelles les couches limites dans une turbomachine sont soumises. De plus, l'utilisation de l'iWMLES ne requiert pas un maillage secondaire pour résoudre ses équations. Ces dernières sont résolues sur des points de Gauss-Legendre automatiquement déterminés en fonction de la géométrie de la paroi.

À la section 4.4, il est justifié que les écoulements dans les compresseurs sont les plus propices à l'utilisation d'une approche WMLES. Cela s'explique principalement par le fait que, d'après la section 3.4, les gradients de pression adverses qui les caractérisent ont des effets sur leurs couches limites semblables à une augmentation de leur nombre de Reynolds. Entre autres, la séparation d'échelles entre les zones interne et externe est plus marquée. Au contraire, une couche limite soumise à un gradient de pression favorable voit son nombre de Reynolds diminuer.

C'est pourquoi, il est décidé dans la suite d'appliquer l'iWMLES à l'écoulement dans

un compresseur axial. La géométrie considérée est celle du CME2. Après l'avoir introduite, les méthodes numériques employées sont données. Finalement, les résultats obtenus sont présentés.

En considérant la géométrie du CME2, les objectifs de ce chapitre sont donc :

- d'appliquer l'iWMLES à l'écoulement présent dans une turbomachine et démontrer ainsi sa robustesse vis-à-vis d'écoulements industriels ;
- dégager une méthodologie numérique pour l'utilisation d'une approche WMLES sur de tels écoulements.

## 7.2 Présentation de la configuration et des données de référence

Le CME2, schématisé à la figure 7.1, est un compresseur axial mono-étage conçu par Safran Aircraft Engines pour étudier les interactions rotor/stator ayant lieu dans un compresseur haute-pression. Les rotor et stator sont respectivement composés de trente et quarante aubes. Le point de fonctionnement nominal est défini par une vitesse de rotation du rotor  $\Omega$  de  $6330 \text{ tr min}^{-1}$  et un débit massique  $Q$  égal à  $10.50 \text{ kg s}^{-1}$ . À ce point de fonctionnement, le nombre de Reynolds de l'écoulement moyen basé sur la corde  $C_{\text{rot}}$  d'une aube du rotor et la vitesse en sortie de cette dernière est de l'ordre de  $7 \times 10^5$ , le nombre de Mach à l'extrémité des aubes du rotor est de 0.53, le ratio de pression totale  $\Pi$  est égal à 1.15 et le rendement isentropique  $\eta_c$  est de 0.92. Les principales données géométriques et de fonctionnement du CME2 sont résumées au tableau 7.1.

Le CME2 a été étudié expérimentalement, notamment par Faure et al. (2001) au point de fonctionnement nominal et par Michon et al. (2005) en dehors. Numériquement, des calculs ont été réalisés par Gourdain (2015a,b) avec des approches URANS et LES (à partir du même solveur CFD que celui considéré dans le cadre de cette étude et introduit à l'annexe A).

Dans la suite, par contrainte de temps, seul le point de fonctionnement nominal du CME2 est étudié. En outre, les résultats URANS de Gourdain (2015a,b) ne sont pas considérés. En effet, l'objectif de ces travaux est d'accélérer l'utilisation d'une approche LES dans un contexte industriel, et non de démontrer son intérêt par rapport à une approche URANS. De plus, sur l'écoulement dans un compresseur au point de fonctionnement nominal, une simulation URANS permet déjà de capturer la plupart des phénomènes d'intérêts, comme montré à la figure 2.4. Enfin, une comparaison entre les résultats LES et URANS est déjà réalisée par Gourdain (2015a,b).

Dans ce chapitre, la priorité est ainsi donnée à une comparaison entre les approches WMLES et LES, autant sur la méthodologie numérique employée que sur les résultats obtenus.

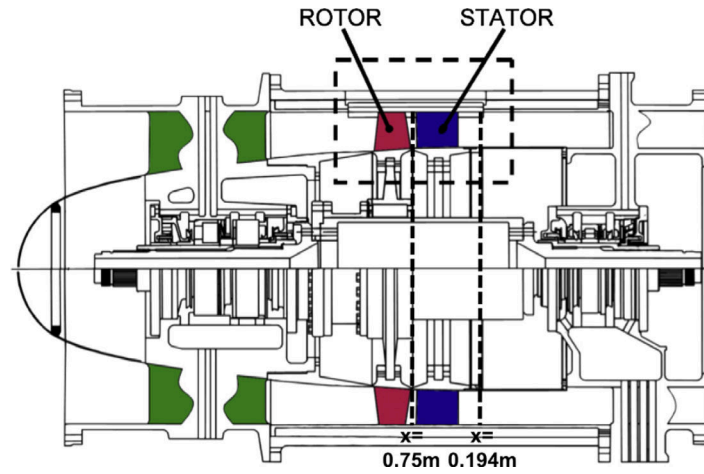


FIGURE 7.1 – Coupe axiale du CME2. Le plan à  $x = 75$  mm est localisé en aval du rotor à une distance de  $0.18C_{rot}$  et celui à  $x = 194$  mm est en aval du stator à une distance de  $0.5C_{sta}$ , avec  $C_{rot}$  et  $C_{sta}$  les cordes respectives du rotor et du stator. Le cadre en pointillés correspond au domaine de calcul considéré dans la suite. Tiré de Gourdain (2015a)

Débit massique $Q$	$10.5 \text{ kg s}^{-1}$
Ratio de pression totale $\Pi$	1.15
Rendement isentropique $\eta_c$	0.92
Vitesse de rotation $\Omega$ du rotor	$6330 \text{ tr min}^{-1}$
Fréquence de passage de pales $f_{BPF}$	3165 Hz
Nombre d'aubes du rotor	30
Nombre d'aubes du stator	40
Corde des aubes du rotor $C_{rot}$	84 mm
Corde des aubes du stator $C_{sta}$	77 mm
Nombre de Reynolds basé sur $C_{rot}$ et sur la vitesse en sortie du rotor à mi-hauteur	$7 \times 10^5$
Hauteur du jeu (rotor)	0.5 mm
Vitesse de rotation $(\omega R)_{tip}$ du jeu (rotor)	$182 \text{ m s}^{-1}$
Ratio des rayons du moyeu et du carter	0.78
Nombre de Mach relatif à l'extrémité du rotor	0.53
Distance axiale entre les bords de fuite d'une aube du rotor et d'attaque d'une aube du stator (à mi-hauteur)	20 mm

TABLE 7.1 – Données géométriques et paramètres de fonctionnement au point nominal du CME2, d'après Gourdain (2015a)

### 7.3 Méthodologie numérique en WMLES et en LES

La méthodologie numérique employée en WMLES est ici présentée et comparée à celle de la LES de Gourdain (2015a,b). Après avoir présenté le domaine de calcul et les maillages considérés, les méthodes numériques (conditions aux limites, schémas temporels et convectifs, condition initiale...) utilisées sont introduites.

#### 7.3.1 Maillage

La roue du rotor du CME2 étant composé de trente aubes et celle du stator de quarante aubes (identiques dans chaque roue), l'écoulement admet une périodicité naturelle en  $2\pi/10$ . Par conséquent, les domaines de calculs en WMLES et en LES sont chacun constitués de trois aubes du rotor et quatre du stator. Dans les deux cas, toute la hauteur de veine est considérée, incluant ainsi les jeux existants entre le carter et les extrémités des aubes du rotor.

Gourdain (2015a) construit trois maillages pour la LES : M0, M1 et M2. M0 et M1 correspondent à des maillages respectivement en un point sur quatre et un point sur deux dans chaque directions du maillage M2. Seuls les résultats obtenus sur le maillage le plus fin (M2) sont considérés dans la suite. Ce dernier est d'ailleurs le seul à être en accord avec les recommandations de maillage LES (4.17), comme illustré dans la suite à la figure 7.2. De plus, il est généré en appliquant une topologie de maillage de type O-H autour des aubes. La distance axiale entre le plan d'entrée et les bords d'attaques des aubes du rotor est environ égale à  $C_{rot}$ . Le plan de sortie est situé à une distance d'environ  $1.5C_{sta}$  en aval des aubes du stator.

Dans la WMLES, deux maillages sont construits : WM1 et WM2, WM2 étant le plus fin. La stratégie de maillage employée, qui vise à respecter les préconisations de maillage WMLES (4.32), est détaillée dans la suite à la section 7.4.1. Par ailleurs, les plans d'entrée et de sortie sont respectivement situés à une distance d'environ  $2C_{rot}$  des bords d'attaques des aubes du rotor et  $2C_{sta}$  des bords de fuites des aubes du stator.

Finalement, les nombres de points dans chaque roue et dans le domaine de calcul sont donnés au tableau 7.2.

	Rotor	Jeu (rotor)	Stator	Domaine de calcul
M2	$127 \times 10^6$	$377 \times 97 \times 161$	$108 \times 10^6$	$857 \times 10^6$
WM1	$8 \times 10^6$	$209 \times 49 \times 13$	$8 \times 10^6$	$57 \times 10^6$
WM2	$22 \times 10^6$	$241 \times 77 \times 53$	$28 \times 10^6$	$179 \times 10^6$

TABLE 7.2 – Nombre de points par passage de pale dans chaque roue, dans le jeu à l'extrémité d'une aube du rotor et dans le domaine de calcul

### 7.3.2 Conditions aux limites

Les calculs WMLES et LES sont réalisés dans le repère relatif de chaque roue. En LES, Gourdain (2015a) impose la pression totale  $P_{i,0} = 101\,325$  Pa, la température totale  $T_{i,0} = 288$  K et l'angle d'incidence de l'écoulement  $\alpha = 0^\circ$  en entrée du domaine en se basant sur les données expérimentales. De plus, un champ de perturbations est ajouté au vecteur vitesse dans la rangée de cellules adjacentes à l'interface d'entrée du domaine. Ce champ de perturbations, d'amplitude égale à 2% de la vitesse axiale en entrée, repose sur le principe des méthodes d'injection de turbulence synthétique présentées à la section 6.3.1. Il est à noter que dans les essais expérimentaux, le taux de turbulence en amont du rotor n'est pas mesuré.

À la sortie du domaine, la pression statique en un point (appelé point pivot) est donnée par une condition de vanne en LES :

$$p_{n+1,\text{pivot}} = p_{\text{ref}} + \lambda Q_n^2, \quad (7.1)$$

avec  $p_{n+1,\text{pivot}}$  la pression statique au point pivot à l'itération  $n + 1$ ,  $p_{\text{ref}}$  une pression de référence prise égale à  $P_{i,0}$  et  $Q_n$  le débit à l'itération  $n$ .  $\lambda$  est appelé le paramètre de vanne. Puis, le champ de pression statique sur l'interface de sortie est déterminé à partir d'une condition d'équilibre radial simplifiée. Ainsi, cette condition aux limites permet de parcourir les différents points de fonctionnement d'une turbomachine (à une vitesse de rotation donnée) en faisant varier le paramètre de vanne  $\lambda$ .

En WMLES, des conditions d'entrée et de sortie non-réfléchissantes NSCBC sont utilisées respectivement en entrée et en sortie du domaine. Comme expliqué à l'annexe A.3, des termes de relaxation empêchent l'écoulement de diverger en le rappelant vers un état de référence. Cet état est ici défini par la condition initiale de la WMLES donnée dans la suite à la section 7.3.4. À la sortie du domaine, une zone éponge est introduite sur les vingt dernières cellules du domaine afin de dissiper la turbulence avant que l'écoulement n'atteigne la condition aux limites de sortie. Cette zone éponge consiste à ajouter des termes sources dans les équations de Navier-Stokes rappelant l'écoulement vers un état de référence (toujours défini ici par la condition initiale). En revanche, aucune injection de turbulence n'est employée à l'entrée du domaine.

À l'interface rotor/stator, une condition aux limites est nécessaire entre le domaine associé à la roue du rotor mobile et celui de la roue du stator fixe. Cette condition est définie par une frontière de raccord non-coïncidente où les flux sont interpolés de chaque côté de cette frontière, en assurant leur conservation. À chaque itération, cette étape d'interpolation est renouvelée en tenant compte de la rotation de la frontière du côté du rotor. Pour réduire son coût de calcul, la table des cellules requises pour chaque interface et à chaque itération est stockée (durant le premier passage de pale) puis réutilisée.

Finalement, en LES et en WMLES, toutes les parois sont supposées adiabatiques et des conditions périodiques sont appliquées sur les sections latérales. Par contrainte de temps, seul le modèle de paroi iWMLES est considéré dans la suite. Comme expliqué dans la suite



à la section 7.4.1, les données d'entrée du modèle de paroi sont extraites à la troisième cellule  $n_3$  au-dessus de chaque interface pariétale, excepté au carter où une condition de paroi non-glissante est appliquée avec le maillage WM2. De plus, il est à noter qu'au lieu de prendre le vecteur vitesse à la troisième cellule au-dessus d'une interface pariétale  $\mathbf{u}_3$  comme expliqué à la section 4.3.1, le vecteur vitesse utilisé comme donnée d'entrée du modèle de paroi est  $\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_e$  (avec  $\mathbf{u}_e$  la vitesse d'entraînement de la paroi). Cela permet de toujours résoudre les équations du modèle de paroi dans le repère associé à la paroi. En outre, comme indiqué à la section 4.3.1, les données d'entrée du modèle de paroi sont ici filtrées temporellement à l'aide d'un lissage exponentiel simple dont l'échelle de temps  $T$  est identique à celle employée par Yang et al. (2015) :  $T = d_{\text{wm}}/(\kappa u_\tau)$ , avec  $d_{\text{wm}}$  la distance entre la paroi et le point d'extraction des données d'entrées du modèle de paroi.

### 7.3.3 Modélisations physique et numérique de l'écoulement

En LES, les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma décentré d'ordre trois. Les termes diffusifs sont calculés par un schéma centré d'ordre deux (identique à celui utilisé dans les chapitres 5 et 6). Les échelles de sous-maille sont modélisées grâce au modèle de WALE introduit à la section 2.4. L'avance temporelle est réalisée à l'aide d'un schéma implicite d'ordre deux de Gear (1971). Un algorithme de Newton est utilisé pour résoudre la boucle « temporelle » interne (en moins de dix sous-itérations). Le pas de temps est fixé à  $\Delta t^+ = \Delta t \times f_{\text{BPF}} = 1.25 \times 10^{-3}$ , soit  $\Delta t = 3.95 \times 10^{-7}$  s. 800 itérations sont ainsi nécessaires pour un passage de pale du rotor, et 24 000 pour une rotation complète. D'après Gourdain (2015a), le nombre de CFL reste inférieur à douze.

En WMLES, les modèles employés sont identiques excepté pour le schéma convectif qui reste le schéma centré considéré jusqu'ici. Le coefficient  $\kappa_4$  quantifiant l'intensité du terme de dissipation artificielle introduit pour stabiliser ce schéma (et présenté à la annexe A.2.1) est imposé à 0.004.

Par conséquent, l'utilisation d'une approche WMLES ne permet pas ici de réduire de manière directe le coût temporel par rapport à une LES. Seul un gain substantiel (difficilement mesurable) sur la vitesse de convergence de la boucle « temporelle » interne du schéma de Gear (1971) est obtenu. En théorie, un maillage WMLES permet de lever la contrainte sur le nombre de CFL due aux petites cellules présentes à la paroi en LES. Toutefois, il est expliqué dans la suite à la section 7.4.1 que le maillage au carter est piloté par la taille du jeu existant à l'extrémité d'une aube du rotor. Les plus petites cellules en WMLES et en LES sont donc dans ce cas de tailles similaires. De plus, en turbomachine, le pas de temps est limité par la fréquence de passage de pale  $f_{\text{BPF}}$ . Ainsi, même si le nombre de CFL des cellules dans la couche limite est plus faible en WMLES qu'en LES, il n'est pas forcément possible d'augmenter le pas de temps en WMLES (pour se ramener à un nombre de CFL équivalent à celui de la LES). Enfin, il est à noter que le choix entre un schéma temporel explicite ou implicite n'est pas évident dans un contexte turbomachine. En effet, en raison des conditions aux limites entre les roues du rotor et du stator, des calculs de connectivités sont requis pour interpoler les flux aux interfaces entre chaque roue. Le surcoût de calcul

d'une itération d'un schéma temporel implicite par rapport à un schéma explicite est alors à relativiser car un nombre de connectivités supplémentaires doit être calculé en explicite (il est possible de les stocker mais le coût de stockage est parfois trop important).

#### 7.3.4 Condition initiale et méthodologie de simulation

Comme expliqué à la section 1.1, sous l'effet des gradients de pression adverses présents dans un compresseur, ce dernier est affecté par différentes instabilités dont notamment le pompage. L'initialisation du calcul de l'écoulement dans un compresseur doit alors être soignée.

À partir de la solution finale d'une simulation URANS, Gourdain (2015a) initialise son calcul LES sur le maillage M0 et ainsi de suite jusqu'au maillage M2. La solution LES sur le maillage M0 est convergée au bout d'une rotation complète du rotor, et celles sur les maillages M1 et M2 au bout d'un demi-tour chacune. Enfin, les statistiques de l'écoulement LES sur le maillage M2 (et considérées dans la suite) sont moyennées pendant une rotation complète.

En WMLES, deux simulations RANS au point de fonctionnement nominal sont d'abord effectuées sur les maillages WM1 et WM2 afin de définir les états de référence pour les conditions aux limites NSCBC d'entrée et de sortie ainsi que dans la zone éponge introduite en sortie du domaine. Ces simulations RANS sont elles-même initialisées à partir d'un état de référence défini notamment à partir des conditions d'entrées  $P_{i,0}$  et  $T_{i,0}$ . Il est à noter que pour les calculs RANS, les conditions aux limites sont identiques à celles employées dans la LES de Gourdain (2015a), excepté à l'interface rotor/stator où un plan de mélange est introduit.

La WMLES sur le maillage WM1 est ensuite initialisée à partir de la solution finale RANS associée. Pour réduire le coût de calcul lié à l'évacuation de la solution RANS (et de manière similaire à Gourdain (2015a)), deux rotations complètes du rotor sont d'abord effectuées sur un maillage en un point sur deux dans chaque direction. D'ailleurs, sur la première rotation, un schéma décentré d'ordre deux est utilisé pour accroître la robustesse du processus de convergence. Pendant la deuxième, le niveau de dissipation artificielle est progressivement réduit jusqu'à une valeur de  $\kappa_4 = 0.004$ , comme indiqué précédemment à la section 7.3.3. Puis, une rotation est réalisée sur le maillage complet avant de collecter les statistiques pendant deux rotations.

Finalement, la solution finale sur le maillage WM1 permet d'initialiser le calcul sur le maillage WM2. Après avoir évacué cette solution initiale pendant une rotation et demie, les statistiques sur le maillage M2 sont collectées pendant deux rotations.

#### 7.3.5 Coût de calcul et synthèse

Une comparaison des coûts de calcul en WMLES (sur le maillage WM2) et en LES est donnée au tableau 7.3. Il est observé que l'approche WMLES permet d'obtenir un coût de calcul environ dix fois plus faible qu'une approche LES (à pas de temps identique, comme

expliqué à la section 7.3.3). En toute rigueur, il est toutefois important de noter que la LES de Gourdain (2015a) est effectuée sur des noeuds de calcul de génération plus ancienne que ceux utilisés pour la WMLES. En contrepartie, le ratio entre le nombre de points du maillage et le nombre de coeurs de processeurs utilisés est plus élevée en LES qu'en WMLES. La répartition de charge est alors moins efficace en WMLES. Par ailleurs, un résumé des méthodes numériques employées en WMLES et en LES est présenté au tableau 7.4.

	WMLES (WM2)	LES
Nombre de points ( $\times 10^6$ )	179	857
Nombre de coeurs (CPU)	360	1024
Nombre d'heures de calcul par rotation ( $\times 10^3$ h)	106	1091

TABLE 7.3 – Comparaison du coût de calcul entre les approches WMLES (sur le maillage WM2) et LES pour la géométrie du CME2. La LES est réalisée par Gourdain (2015a)

	WMLES (WM2)	LES
Condition d'entrée	NSCBC	$P_t, H_t$ et ajout de perturbations
Condition de sortie	NSCBC	Équilibre radial et condition de vanne
Schéma convectif	Centré d'ordre 2 ( $\kappa_4 = 0.004$ )	Décentré d'ordre 3
Modèle de sous-maille	WALE	
Schéma temporel	Implicite ( $\Delta t = 3.95 \times 10^{-7}$ s)	

TABLE 7.4 – Synthèse des méthodes numériques employées pour la WMLES (sur le maillage WM2) du CME2 et comparaison avec celles de la LES réalisée par Gourdain (2015a)

## 7.4 Résultats

Comme expliqué à la section 7.3.2, par contrainte de temps, seul le modèle de paroi iWMLES est considéré. Dans la suite, les résultats WMLES sont alors notés iWMLES. De plus, comme indiqué à la section 7.2, ces résultats sont comparés à ceux de la LES effectuée par Gourdain (2015a,b) et aux mesures expérimentales de Faure et al. (2001) puisque seul le point de fonctionnement nominal est ici traité. Après avoir présenté les stratégies de maillage employées pour générer les maillages WM1 et WM2, les performances prédites par l'approche WMLES sont données. L'écoulement obtenu sur le maillage WM2 est alors étudié plus finement en analysant les couches limites sur les aubes de chaque roue et les

interactions mutuelles de ces dernières. Il est à noter que les résultats iWMLES sont extraits là où des données LES sont disponibles, c'est-à-dire pour la plupart à mi-hauteur de veine ( $h/H = 50\%$ ).

#### 7.4.1 Maillage : convergence et stratégie

Comme montré au tableau 7.2 où est donné le nombre de points de chaque maillage, deux maillages sont considérés en WMLES : WM1 et WM2. Les données de ces maillages sur les aubes sont présentées en unités de paroi à la figure 7.2 et comparées à celles de la LES. Pour construire WM1, les dimensions des cellules près des parois sont estimées à partir des résultats LES, notamment l'estimation de l'épaisseur de couche limite sur une aube du rotor du côté intrados à 80% de corde, et des préconisations de maillage WMLES (4.32). En raison du nombre de Reynolds relativement faible de l'écoulement, et comme indiqué à la section 7.3.2, les données d'entrée de l'iWMLES sont extraites à la troisième cellule au-dessus de chaque interface pariétale. Ainsi, c'est la distance à la paroi de la troisième cellule  $n_3^+$  qui est représentée à la figure 7.2 pour les maillages WM1 et WM2. De plus, il est choisi d'utiliser des tailles de premières mailles constantes le long de chaque paroi.

Suite au calcul sur le maillage WM1, il est observé qu'il n'est pas possible de bénéficier d'une modélisation de paroi sur le carter. En effet, étant donné qu'un solveur structuré est considéré dans cette étude, le maillage est construit par nappes dans la direction radiale et ses lignes se propagent dans tout le domaine. Au carter, c'est donc la hauteur du jeu existant au-dessus d'une aube du rotor qui pilote le maillage dans cette direction. Malgré seulement treize points dans ce jeu dans la direction radiale pour le maillage WM1,  $n^+ \approx 4$  au carter. C'est pourquoi, comme indiqué à la section 7.3.2, une condition de paroi non-glissante est appliquée au carter pour le calcul sur le maillage WM2 à la place d'une modélisation de paroi. La couche limite sur le carter est alors entièrement résolue et le nombre de points dans le jeu pour le maillage WM2 est augmenté en conséquence, comme présenté au tableau 7.2.

Par ailleurs, sur une coupe à mi-hauteur de veine du champ instantané d'entropie massique sur le maillage WM1 (figure 7.3), les sillages des aubes du rotor dans les espaces inter-aubes du stator sont partiellement dissipés lors de leur convection. Pour cette raison, le maillage WM2 est construit en raffinant WM1. La figure 7.2 montre que ce raffinement est essentiellement effectué dans la direction radiale.

Par conséquent, dans la suite, seuls les résultats iWMLES obtenus sur le maillage WM2 sont présentés et analysés.

#### 7.4.2 Performances globales

Les performances au point de fonctionnement nominal prédites par les approches iWMLES et LES sont données au tableau 7.5. Il est observé que l'iWMLES prédit des performances très proches de celles mesurées expérimentalement. Le rendement isentropique

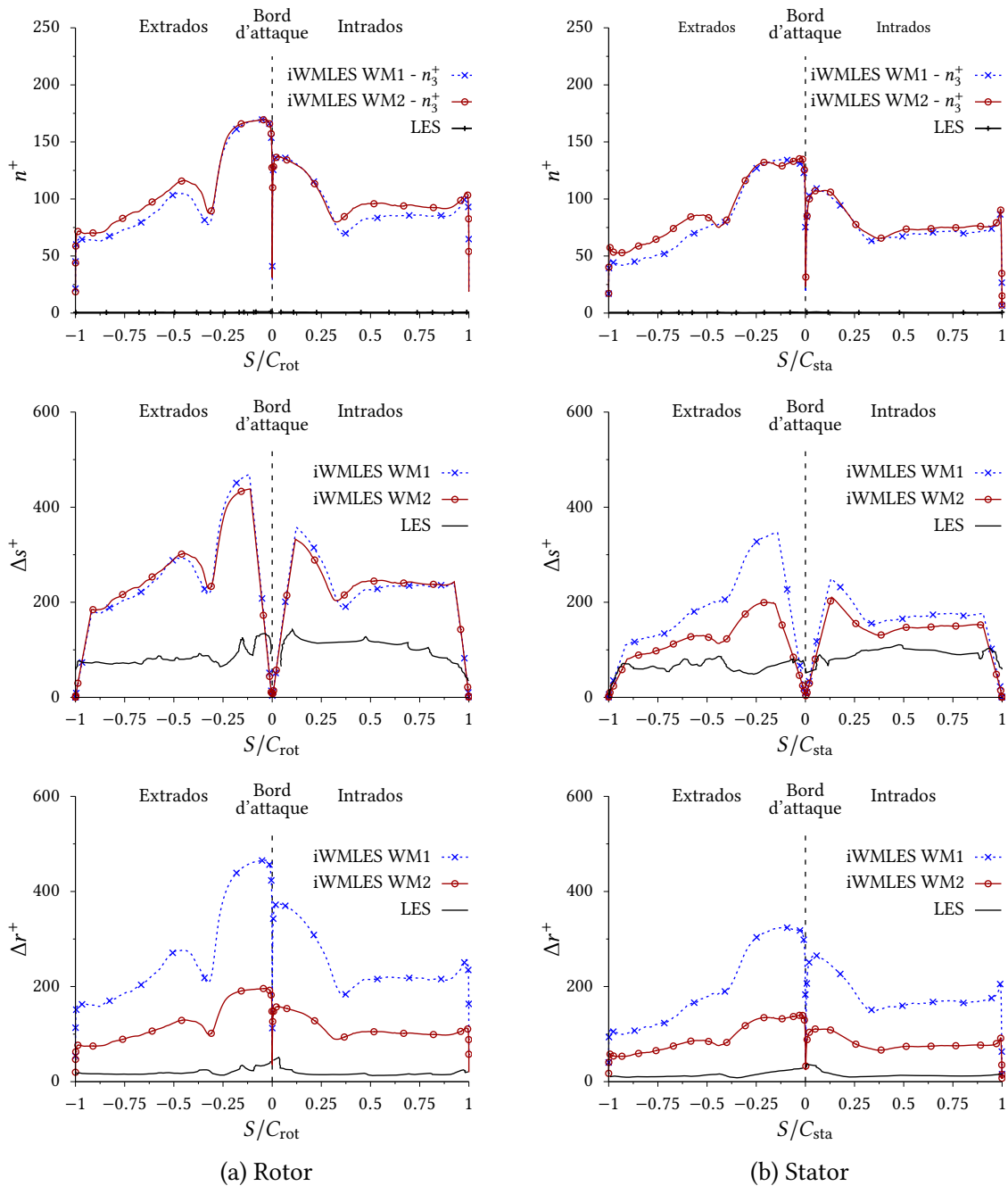


FIGURE 7.2 – Maillage en unités de paroi le long des aubes du rotor (colonne de gauche) et du stator (colonne de droite) du CME2 à  $h/H = 50\%$ .  $S$  est la distance au bord d'attaque de l'aube. De haut en bas : taille des cellules dans la direction normale à la paroi ( $n^+$  et  $n_3^+$  sont respectivement les première et troisième cellules au-dessus de la paroi), le long de la paroi  $\Delta s^+$  et dans la direction radiale  $\Delta r^+$

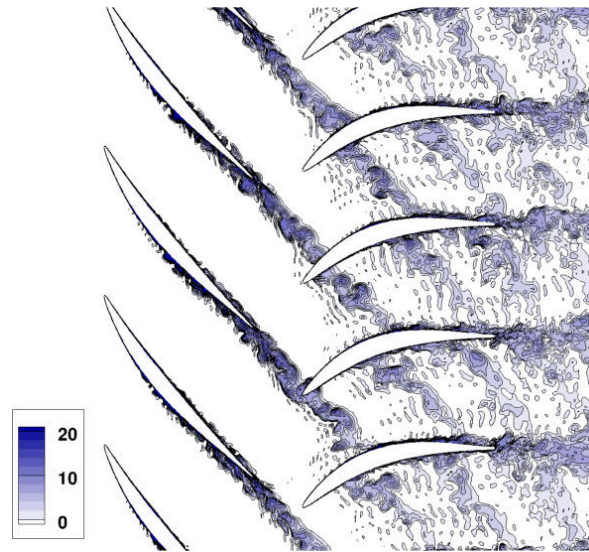


FIGURE 7.3 – Champ instantané de l’entropie massique ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) à  $h/H = 50\%$  en iWMLES avec le maillage WM1

$\eta$  et le ratio de pression totale  $\Pi$  sont légèrement surestimés de respectivement 0.75% et 0.47%, contre 2.95% et 0.70% en LES. Toutefois, l’analyse dans les sections suivantes de l’écoulement obtenu en iWMLES montrent que ces excellents résultats sont plutôt dus à une compensation d’erreurs. En effet, certains phénomènes (tel que le tourbillon de jeu) ne sont pas correctement estimés en iWMLES. Si les performances prédites en iWMLES et en LES sont en accord avec les mesures expérimentales, il ne peut donc être affirmé que les résultats iWMLES sont plus précis que ceux de la LES.

	$Q$	$\Pi$	$\eta$
Mesures expérimentales	$10.50 \text{ kg s}^{-1}$	1.150	0.92
iWMLES	+0.28%	+0.47%	+0.75%
LES	+2.40%	+0.70%	+2.95%

TABLE 7.5 – Performances au point de fonctionnement nominal du CME2. Les valeurs prédites par les approches iWMLES et LES sont données relativement aux mesures expérimentales

### 7.4.3 Analyse des couches limites

Les résultats relatifs aux couches limites se développant sur les aubes du rotor et du stator sont illustrés sur les figures 7.4 à 7.8.

Le coefficient de frottement moyen  $C_f$  le long des aubes à  $h/H = 50\%$ , montré à la figure 7.4, est surestimé en iWMLES au bord d’attaque et dans les premiers pourcentages de corde par rapport à celui estimé en LES. Cette surestimation peut être attribuée à l’utilisation d’une modélisation de paroi sur des zones où ce n’est pas justifiée, comme expliqué à la

section 4.4. En effet, les premiers pourcentages de corde correspondent aux zones où les couches limites sont laminaires. Dans les zones turbulentes, l'iWMLES prédit un frottement en meilleur accord avec celui estimé en LES, en particulier du côté intrados des aubes. Par ailleurs, il semble y avoir des bulbes de décollement à  $S/C \simeq \pm 35\%$  sur les aubes du rotor en iWMLES.

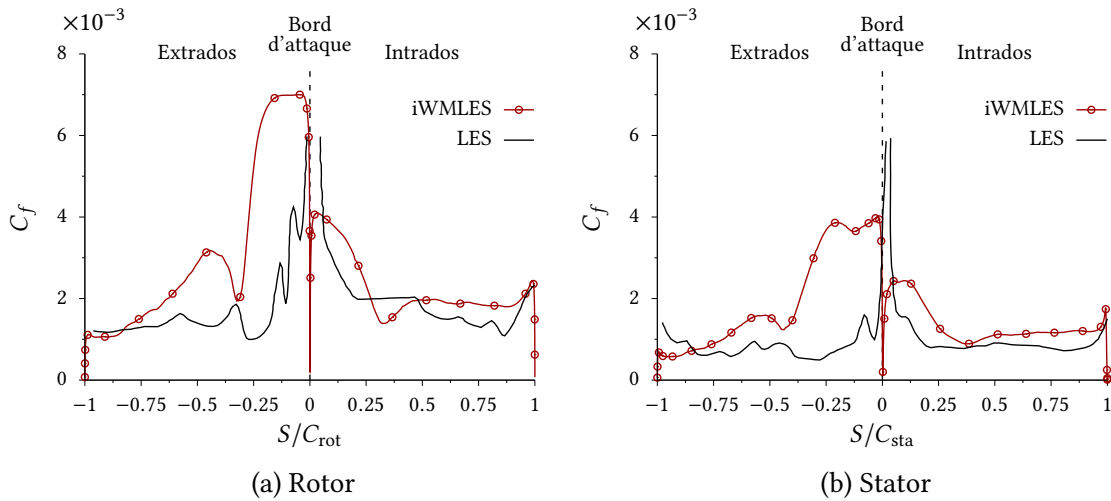


FIGURE 7.4 – Évolution le long d'une aube du rotor (a) et du stator (b) du coefficient de frottement moyen  $C_f = 2\tau_w/(\rho_{i,0}(\omega R)_{\text{tip}}^2)$  à  $h/H = 50\%$ .  $\rho_{i,0}$  est la densité totale en entrée du domaine et  $S$  est la distance au bord d'attaque de l'aube

Le coefficient de pression moyenne  $C_p$  le long des aubes à  $h/H = 50\%$  prédit en iWMLES et LES, visible à la figure 7.5, est en accord sur les aubes des deux roues et permet d'affiner les observations précédentes. Sur le côté extrados d'une aube du rotor, la couche limite est d'abord soumise à un gradient de pression favorable entre le bord d'attaque et  $S/C \simeq 0.15$ , puis à un gradient de pression adverse de  $S/C \simeq 0.20$  jusqu'au bord de fuite. Ce gradient de pression est beaucoup plus intense que du côté intrados et atteint son maximum en iWMLES vers  $S/C \simeq 0.30$ , soit proche du bulbe de décollement observé à la figure 7.4. Il est aussi légèrement en amont de celui en LES qui est vers  $S/C \simeq 0.37$ . Une dynamique similaire est observée sur les aubes du stator. En effet, un gradient adverse d'intensité relativement faible existe du côté intrados. À l'extrados, la couche limite est soumise à un gradient de pression d'abord favorable du bord d'attaque jusqu'à  $S/C \simeq 0.25$  puis adverse sur le reste de la corde. Toutefois, sur les premiers pourcentage de corde des aubes du rotor et du stator, le coefficient de pression est légèrement surestimé en iWMLES par rapport à la LES (hormis du côté extrados des aubes du rotor). Ce phénomène, également observé dans des études WMLES de profil d'aile (par exemple celle de Bose et Moin (2014) sur un NACA4412), est attribué à l'utilisation d'une approche WMLES sur une zone laminaire. Enfin, à l'extrados des aubes du stator, un bulbe de décollement semble exister en LES à mi-corde, mais pas en iWMLES.

L'énergie cinétique turbulente moyenne  $k$  le long des aubes à  $h/H = 50\%$  est illustrée à la

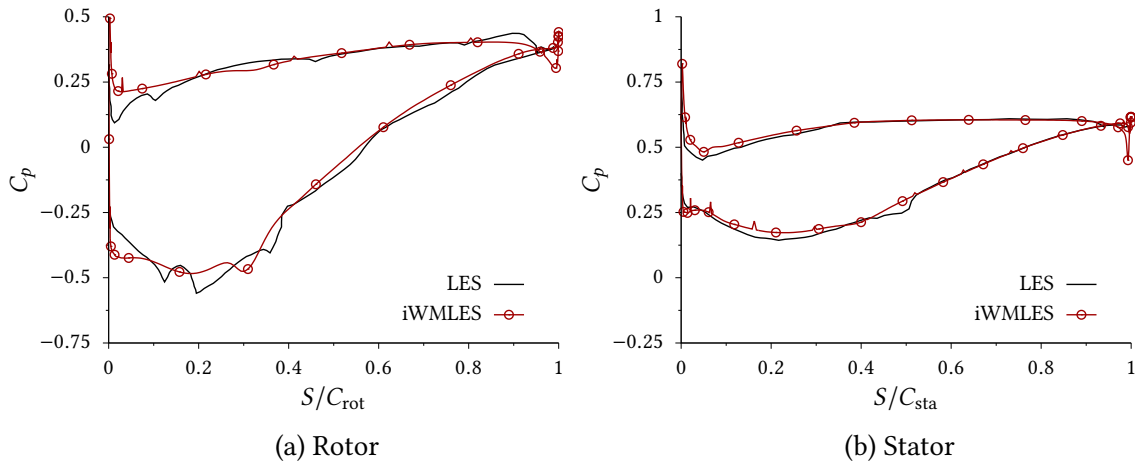


FIGURE 7.5 – Évolution le long d’une aube du rotor (a) et du stator (b) du coefficient de pression moyen  $C_p = 2(p_w - p_0)/(\rho_{i,0}(\omega R)_{tip}^2)$  à  $h/H = 50\%$ .  $\rho_{i,0}$  est la densité totale en entrée du domaine et  $S$  est la distance au bord d’attaque de l’aube

figure 7.6. En iWMLES, les couches limites sur les aubes du rotor et du stator transitionnent à la turbulence vers  $S/C \approx \pm 0.35$ . En particulier, à l’extrados des aubes du rotor, cette position correspond à celle du maximum du gradient de pression adverse observé à la figure 7.5. Par contre, à l’exception du côté intrados des aubes du stator, les couches limites transitionnent plus tôt en iWMLES qu’en LES. Cela peut s’expliquer par la surestimation du frottement pariétal indiqué précédemment, qui accélère la formation des bulbes de décollement. De plus, hormis à l’intrados des aubes du rotor où  $k$  continue de croître en LES même après la transition de la couche limite, des niveaux d’énergie cinétique turbulente comparables sont obtenus entre les approches iWMLES et LES avec un pic à la transition puis une décroissance jusqu’au bord de fuite.

Les profils de vitesse moyenne, d’énergie cinétique turbulente moyenne et de fluctuations turbulentes moyennes dans la couche limite d’une aube du rotor à  $h/H = 50\%$  et  $S/C = 0.80$  (côté extrados), donnés à la figure 7.7, confirment que la couche limite y est turbulente. Les profils prédits par l’iWMLES sont en accord avec ceux de la LES. Par ailleurs, les pics sur les fluctuations turbulentes (et donc sur  $k$ ) sont capturés en iWMLES car ces derniers sont ici situés vers  $n/\delta \approx 0.10$  (d’après la LES), soit dans la zone externe de la couche limite. Sur une couche limite incompressible turbulente attachée statistiquement stationnaire et bidimensionnelle, le pic de fluctuations de la vitesse longitudinale est situé dans la zone interne vers  $y^+ \approx 12$ . Ce dernier ne peut alors être prédit en WMLES.

En outre, un pic d’énergie cinétique turbulente est observé au bord d’attaque des aubes du stator à la figure 7.6, que ce soit en iWMLES ou en LES. Ce pic est dû aux sillages des aubes du rotor qui induisent une augmentation périodique de  $k$ , comme illustré à la figure 7.8 où est montré l’évolution de  $k$  au cours de deux passages de pales à  $h/H = 50\%$  et  $h/H = 80\%$ . Il est observé sur cette figure qu’il semble subsister des zones laminaires dans les couches limites des aubes du stator en iWMLES, et non en LES. Cela s’explique par le fait que les



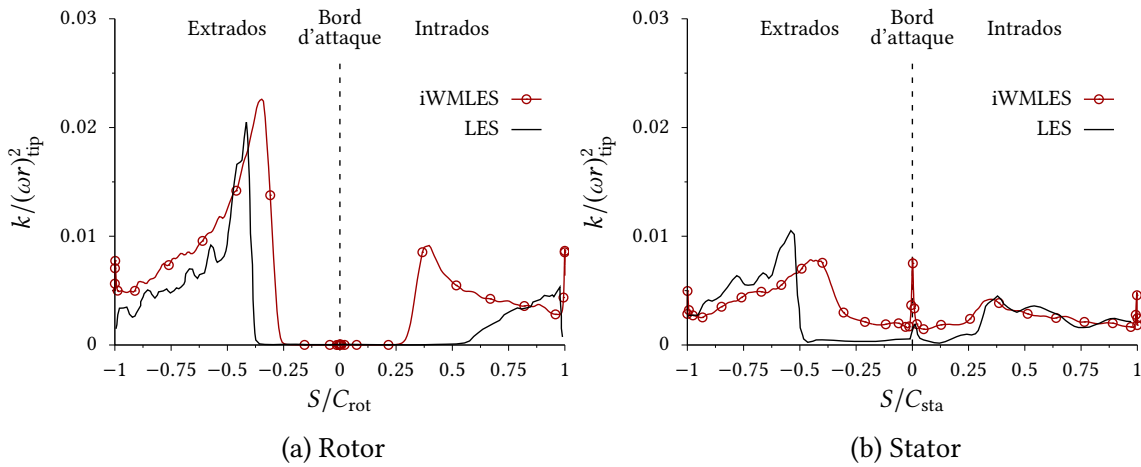


FIGURE 7.6 – Évolution le long d'une aube du rotor (a) et du stator (b) de l'énergie cinétique turbulente moyenne  $k$  à une distance de la paroi d'environ  $100 \mu\text{m}$  ( $n/\delta \approx 0.03$ ) à  $h/H = 50\%$ .  $S$  est la distance au bord d'attaque de l'aube

résultats LES sont moyennés en phase (à partir de  $f_{BPF}$ ), au contraire des résultats iWMLES.

La figure 7.8 permet également d'observer que les sillages des aubes du rotor en iWMLES sont plus épais, contiennent plus d'énergie et se propagent plus en aval (en particulier du côté extrados) qu'en LES, ce qui explique les quantités d'énergie cinétique turbulente plus élevées au bord d'attaque obtenues en iWMLES et observées à la figure 7.6. De plus, aucune trace du tourbillon de jeu n'est présente en iWMLES à  $h/H = 80\%$ . Ces deux points sont étudiés en détails dans la section suivante. Enfin, si une zone calme est observée du côté extrados des aubes du stator en LES (que ce soit à  $h/H = 50\%$  ou  $h/H = 80\%$ ), ce n'est pas aussi clair en iWMLES où la transition semble due aux sillages des aubes du rotor. Ce mécanisme paraît également présent à l'intrados et est prédit de manière équivalente par les deux approches iWMLES et LES à  $h/H = 50\%$  et  $h/H = 80\%$ .

#### 7.4.4 Analyses de l'interaction rotor/stator et du tourbillon de jeu

Les résultats concernant les interactions rotor/stator et l'écoulement de jeu sont montrés sur les figures 7.9 à 7.16.

Le champ de vitesse axiale à l'interface rotor/stator en  $x = 78 \text{ mm}$  est présenté à la figure 7.9. Le déficit de vitesse induit par l'effet potentiel des aubes du stator ainsi que leur position sont globalement en accord entre les approches iWMLES et LES. Toutefois, entre deux aubes du stator, les vitesses axiales les plus élevées sont atteintes sur une zone plus étendue en iWMLES. L'écoulement de jeu a également en iWMLES un impact réduit par rapport à la LES. Il est à noter qu'en LES, la couche limite se développant le long du moyeu a peu d'influence sur le champ de vitesse axiale, au contraire du champ obtenu en iWMLES.

Les profils de vitesse axiale en  $x = 78 \text{ mm}$  et à  $h/H = 50\%$  et  $h/H = 80\%$ , présentés à la figure 7.10 (et qui correspondent donc à des coupes à hauteur constante de la figure 7.9),

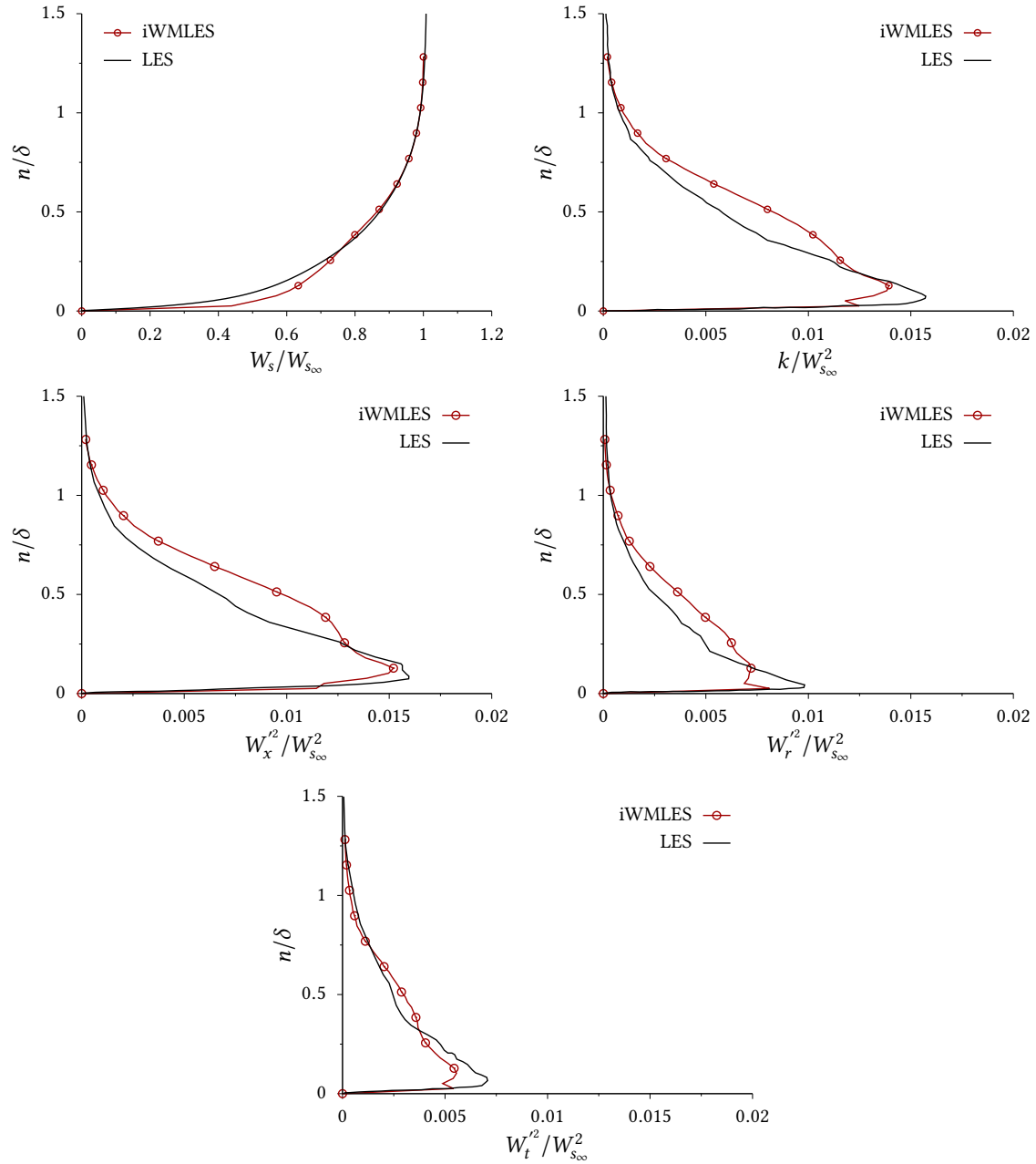


FIGURE 7.7 – Profils de la vitesse moyenne  $W_s$  le long de la paroi, de l'énergie cinétique turbulente moyenne  $k$  et des fluctuations turbulentes moyennes  $W_i'$  dans la couche limite extrados d'une aube du rotor à  $h/H = 50\%$  et  $S/C_{\text{rot}} = 80\%$ , avec  $S$  la distance au bord d'attaque de l'aube.  $W_{s_\infty}$  est la vitesse le long de la paroi à l'extérieur de la couche limite

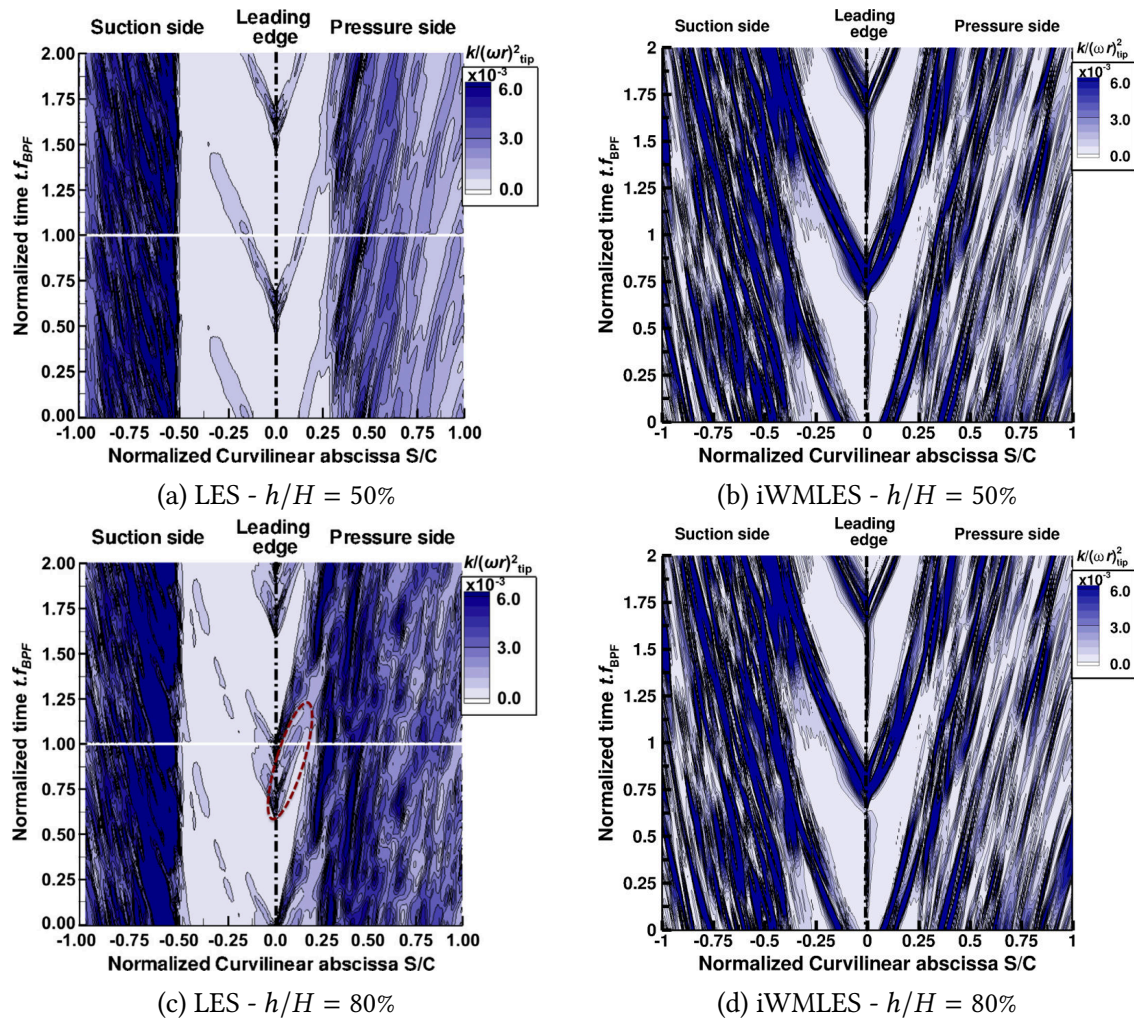


FIGURE 7.8 – Évolution de l'énergie cinétique turbulente  $k$  dans la couche limite d'une aube du stator à une distance de la paroi d'environ  $100\ \mu\text{m}$  ( $n/\delta \simeq 0.03$ ) à  $h/H = 50\%$  et  $h/H = 80\%$ .  $S$  est la distance au bord d'attaque de l'aube. Le cercle en pointillés sur la figure (c) indique la position du tourbillon de jeu. Il est à noter que les résultats LES sont moyennés en phase (à partir de  $f_{BPF}$ ), au contraire des résultats iWMLES

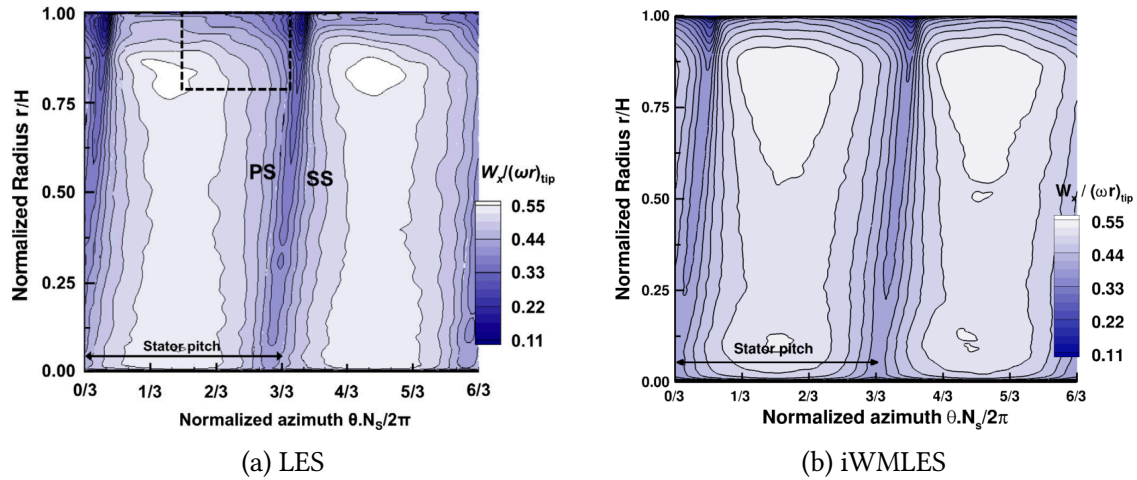


FIGURE 7.9 – Champ bidimensionnel de la vitesse axiale moyenne  $W_x$  à l'interface rotor/stator ( $x = 78$  mm). Sur la figure (a), l'intrados (PS) et l'extrados (SS) d'une aube du rotor sont indiqués. Ces données sont identiques sur la figure (b). Le cadre en pointillés sur la figure (a) indique la position de l'écoulement de jeu

permettent d'affiner les observations précédentes. À  $h/H = 50\%$  et  $h/H = 80\%$ , les approches iWMLES et LES prédisent toutes les deux des profils dont la forme est en accord avec les profils mesurés expérimentalement, de même que l'amplitude du déficit de vitesse causé par l'effet potentiel des aubes du stator. Par contre, à  $h/H = 50\%$ , les deux approches sous-estiment la vitesse axiale dans l'écoulement principal, en particulier l'iWMLES. À  $h/H = 80\%$ , un excellent accord entre les résultats numériques et expérimentaux est obtenu, excepté le maximum de vitesse axiale qui est légèrement sous-estimé en iWMLES et légèrement sur-estimé en LES par rapport aux données expérimentales.

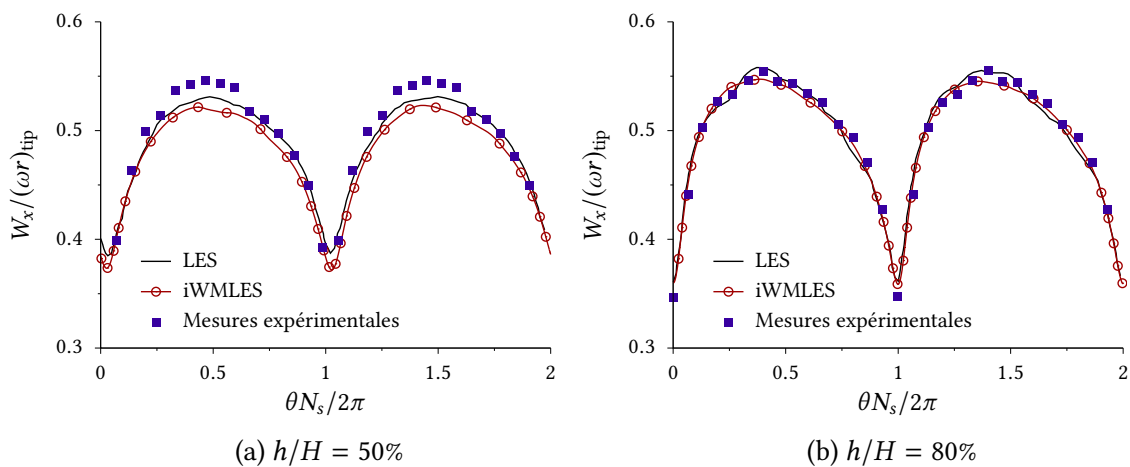


FIGURE 7.10 – Vitesse axiale moyenne  $W_x$  à l'interface rotor/stator ( $x = 78$  mm) à (a)  $h/H = 50\%$  et (b)  $h/H = 80\%$

Les signaux de vitesse axiale moyennés en phase (à partir de  $f_{\text{BPF}}$ ), extraits à l'interface rotor/stator en  $x = 78 \text{ mm}$ , à  $h/H = 50\%$  et  $h/H = 80\%$  à une position azimuthale équidistante des bords d'attaque de deux aubes du stator, sont illustrés à la figure 7.11 et permettent d'analyser les sillages des aubes du rotor. Les positions de ces sillages en iWMLES et en LES sont en accord avec les données expérimentales. À  $h/H = 50\%$ , les deux approches iWMLES et LES estiment une vitesse axiale quasiment identique autour du sillage, mais en deça de celle mesurée expérimentalement. À  $h/H = 80\%$ , la vitesse axiale continue d'être sous-estimée en LES autour du sillage, alors qu'un bon accord est obtenu par l'iWMLES. En revanche, un sillage plus épais et de profondeur plus importante est établie en iWMLES à  $h/H = 50\%$ . Cela rejoint les observations effectuées dans la section précédente à partir de la figure 7.8.

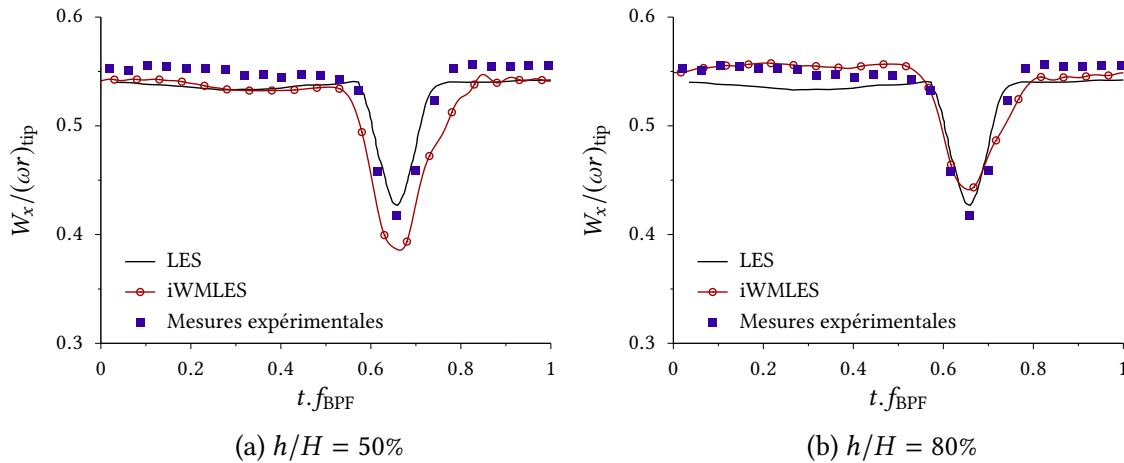


FIGURE 7.11 – Vitesse axiale  $W_x$  moyennée en phase à l'interface rotor-stator ( $x = 78 \text{ mm}$ ) à équidistance de deux aubes du stator, à (a)  $h/H = 50\%$  et (b)  $h/H = 80\%$

Grâce aux diagrammes  $\theta$ -temps de la vitesse axiale à l'interface rotor/stator montrés à la figure 7.12 (en  $x = 75 \text{ mm}$  et  $h/H = 50\%$ ), il est possible de suivre et d'analyser plus finement l'évolution temporelle des sillages des aubes du rotor. Les lignes horizontales correspondent au déficit de vitesse associé à l'effet potentiel des aubes du stator et les lignes diagonales aux sillages des aubes du rotor. Un déficit de vitesse plus important apparaît lorsque ces deux phénomènes interagissent. Les approches iWMLES et LES prédisent ainsi une dynamique similaire. Néanmoins, des sillages plus épais et des déficits de vitesse axiale plus importants sont obtenus en iWMLES. Les diagrammes  $\theta$ -temps de la partie instationnaire de la vitesse axiale  $W_x^{\prime\prime}$  (qui quantifie, comme indiqué par Gourdain (2015b), l'ensemble des instationnarités de l'écoulement), définie par :

$$W_x^{\prime\prime}(\theta, t) = (W_x(\theta, t) - \overline{W_x}(\theta))^2, \quad (7.2)$$

permettent de voir à nouveau ce phénomène à la figure 7.13. En outre, près du carter à  $h/H = 80\%$ , si l'influence de l'écoulement de jeu est aperçue avec les deux approches, ses



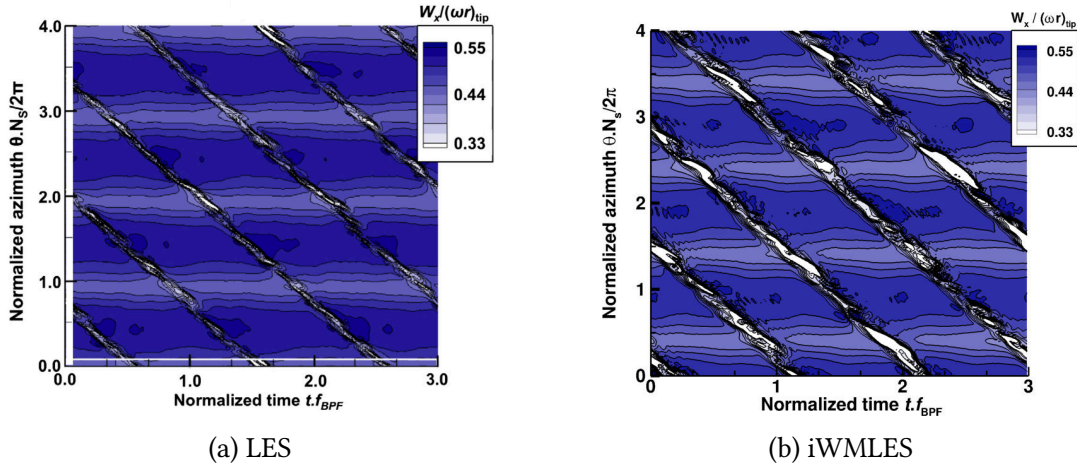


FIGURE 7.12 – Diagramme  $\theta$ -temps de la vitesse axiale  $W_x$  à l'interface rotor-stator, en  $x = 75$  mm et  $h/H = 50\%$

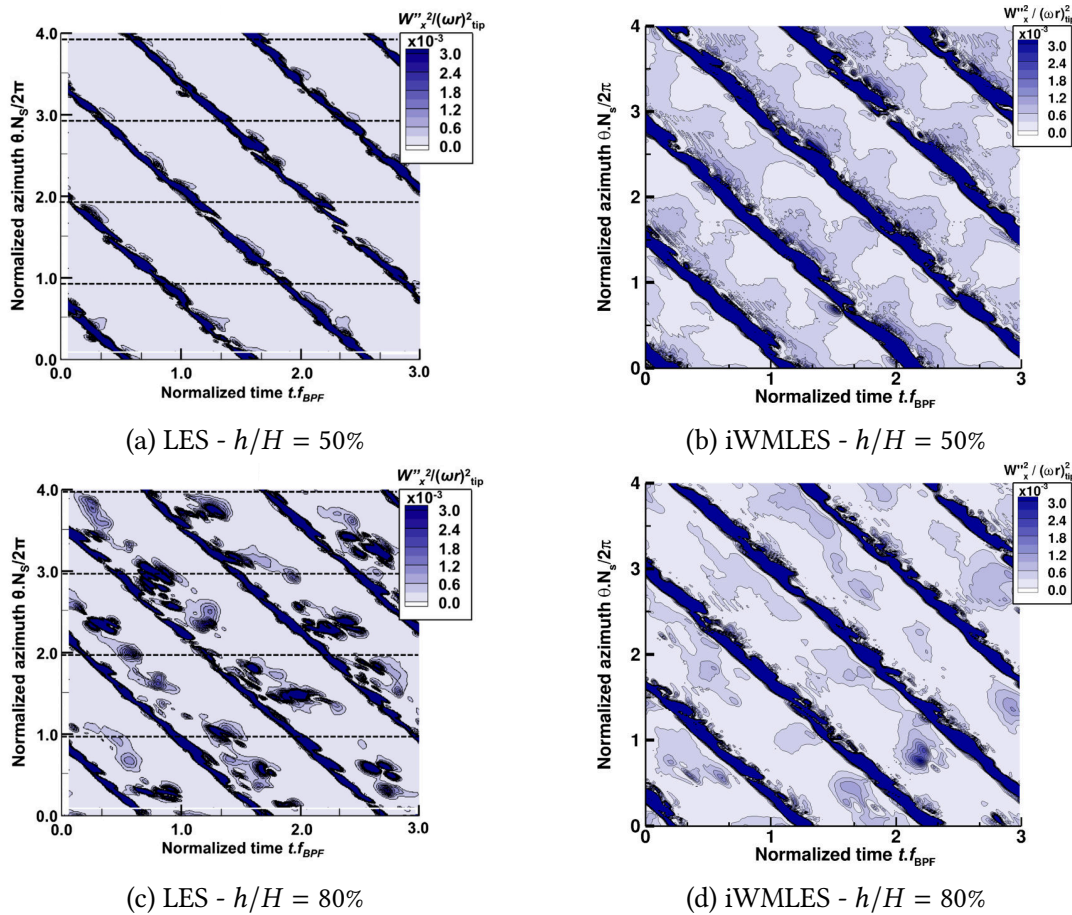


FIGURE 7.13 – Diagramme  $\theta$ -temps de la partie instationnaire de la vitesse axiale  $W_x^{ns2}(\theta, t) = (W_x(\theta, t) - \overline{W_x}(\theta))^2$  à l'interface rotor-stator ( $x = 75$  mm) à  $h/H = 50\%$  (première ligne) et  $h/H = 80\%$  (deuxième ligne)

structures semblent sous-résolues en iWMLES.

Comme expliqué à la section 1.1, l'entropie peut être utilisée pour identifier les pertes dans une turbomachine puisque les parois sont ici supposées adiabatiques. Les champs d'entropie massique à  $h/H = 80\%$ ,  $x = 78$  mm et  $x = 194$  mm, montrés respectivement aux figures 7.14 à 7.16, confirment les observations précédentes. En effet, à  $h/H = 80\%$ , l'écoulement de jeu ne génère plus de pertes à cette hauteur en iWMLES, ce qui n'est pas le cas en LES. Des pertes réduites sont également à noter à l'intrados des aubes du stator en iWMLES par rapport au résultat LES. Le champ d'entropie massique à l'interface rotor/stator, présenté à la figure 7.15, permet de voir que si le tourbillon de jeu n'est pas visible à  $h/H = 80\%$  en iWMLES, c'est parce-qu'il reste confiné près du carter. Il est également plus dispersé dans la direction azimutale, probablement en raison d'un maillage pas assez fin pour le discrétiser et le convecter. Une fois de plus, il est observé que les sillages des aubes du rotor sont plus épais en iWMLES qu'en LES. Une explication de ce phénomène est proposée dans la section suivante. Par contre, des pertes plus élevées sont obtenues en iWMLES près du moyeu. Cela peut s'expliquer par le fait qu'en iWMLES, comme indiqué à la section 7.3.1, le plan d'entrée est situé plus en amont qu'en LES. La couche limite se développant le long du moyeu est donc plus épaisse en iWMLES qu'en LES. Le champ d'entropie massique en aval des aubes du stator, donné à la figure 7.16, montre des résultats similaires ainsi que des sillages d'aubes du rotor qui continuent d'interagir avec ceux des aubes du stator. Les sillages sont toutefois plus dissipés et dispersés en iWMLES qu'en LES, traduisant la nécessité d'un maillage plus fin pour les convecter, comme expliqué dans la section suivante où une synthèse des résultats analysés jusqu'à présent est donnée.

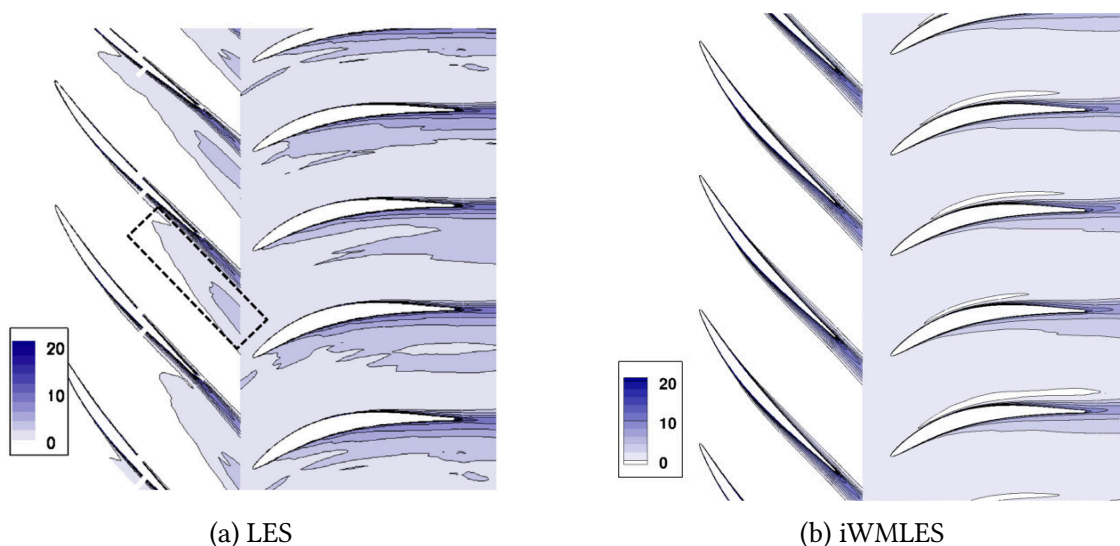


FIGURE 7.14 – Champ moyen de l'entropie massique ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) en  $h/H = 80\%$ . Le cadre en pointillés sur la figure (a) indique les pertes dues à l'écoulement de jeu

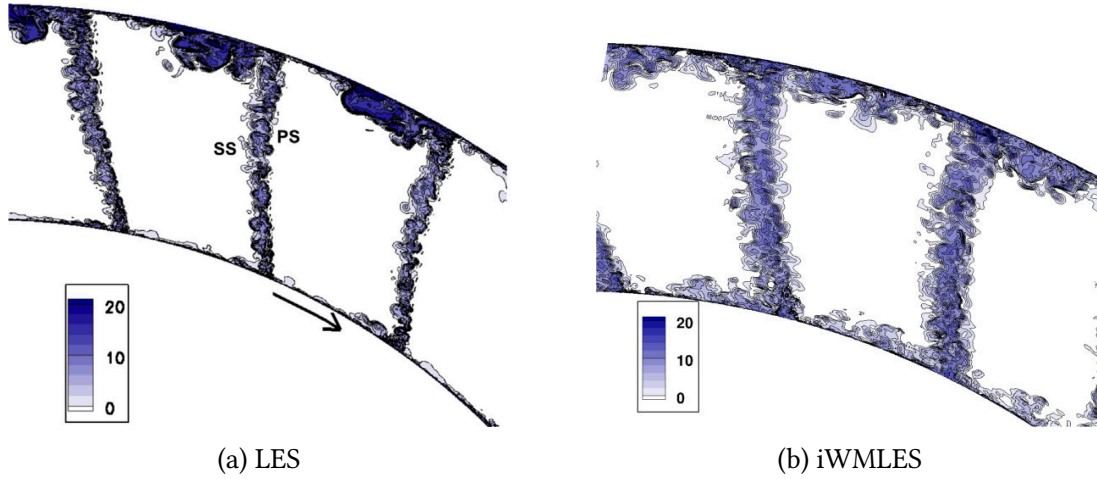


FIGURE 7.15 – Champ instantané de l'entropie massique (en  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) à l'interface rotor/stator ( $x = 75 \text{ mm}$ ). Sur la figure (a), le sens de rotation, l'intrados (PS) et l'extrados (SS) d'une aube du rotor sont indiqués. Ces données sont identiques sur la figure (b)

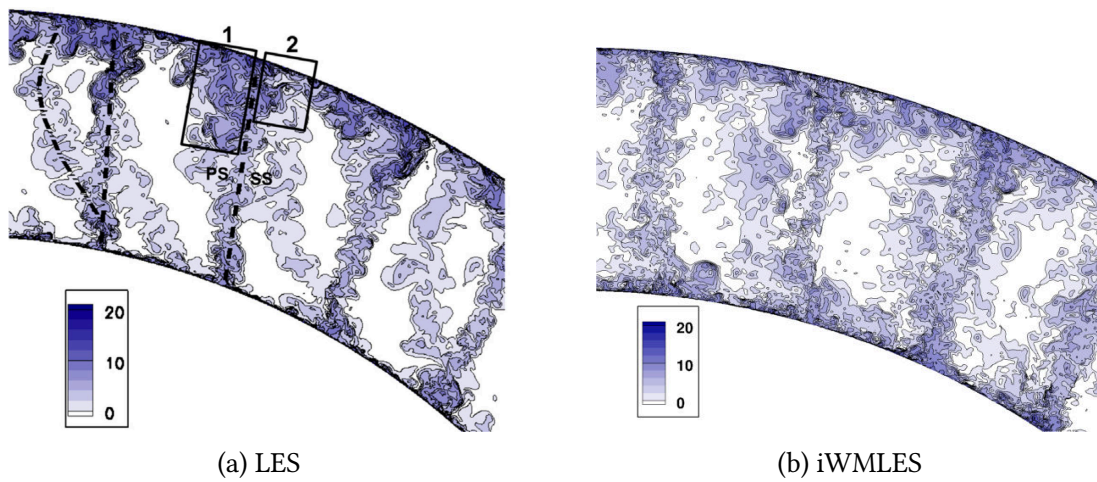


FIGURE 7.16 – Champ instantané de l'entropie massique (en  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) en aval du stator, en  $x = 194 \text{ mm}$ . Sur la figure (a), l'intrados (PS) et l'extrados (SS) d'une aube du stator sont indiqués. Ces données sont identiques sur la figure (b). Sur la figure (a), les lignes en pointillés désignent les sillages des aubes du stator et du rotor et les zones d'accumulations d'entropie sont encadrées



#### 7.4.5 Synthèse des résultats

Une simulation du CME2 au point de fonctionnement nominal est réalisée en iWMLES. Les résultats, comparés à ceux de la LES de Gourdain (2015a,b) et aux mesures expérimentales de Faure et al. (2001), indiquent que l'iWMLES est capable de capturer les phénomènes d'intérêts existants dans l'écoulement se développant dans une turbomachine. Notamment, les performances globales du CME2 prédites en iWMLES sont en accord avec celles du banc d'essai expérimental (l'excellente précision obtenue étant toutefois à relativiser puisque due à une compensation d'erreurs).

L'analyse de l'écoulement obtenu en iWMLES permet une comparaison plus précise entre les résultats iWMLES et LES. Les couches limites se développant sur les aubes ont une dynamique semblable dans les deux simulations. En particulier, leur coefficient de pression moyenne à  $h/H = 50\%$  est en accord. Cependant, il est remarqué que les couches limites en iWMLES transitionnent à la turbulence légèrement plus tôt qu'en LES, alors qu'en LES des perturbations sont ajoutées en entrée du domaine. Cela peut s'expliquer par le fait qu'en iWMLES, le frottement pariétal est surestimé au bord d'attaque et dans les premiers pourcentages de corde des aubages. Cette surestimation, due à l'utilisation d'un modèle de paroi dans des zones laminaires, semble accélérer la formation d'un bulbe de décollement au sein des couches limites des aubes du rotor qui, lorsqu'elles réattachent, deviennent turbulentes. Ces transitions sont donc « forcées ». Sur les aubes du stator, le frottement pariétal est de même surestimé dans les premiers pourcentages de corde, mais il est difficile de déterminer si leurs couches limites transitionnent à la suite d'un bulbe de décollement ou en raison des perturbations issues des sillages des aubes du rotor. Par contre, dans les deux roues, une fois que les couches limites ont transitionné à la turbulence, un faible écart est observé sur leur niveau d'énergie cinétique turbulente et sur le coefficient de frottement des aubages par rapport aux valeurs obtenues en LES. Les profils de vitesse et de fluctuations turbulentes sont aussi en accord avec ceux obtenus en LES à l'extrados des aubes du rotor.

Ces transitions à la turbulence des couches limites des aubes du rotor situés plus en amont qu'en LES permettent également d'expliquer leur sillage plus épais noté précédemment. En effet, une transition plus en amont induit une couche limite plus épaisse. De plus, en raison de l'utilisation d'une taille de première maille constante le long de chaque paroi (visant à respecter les préconisations de maillage WMLES (4.32)), il est probable que les structures turbulentes se développant à la transition des couches limites soient sous-résolues, contribuant ainsi à la surestimation de leur épaisseur.

Par ailleurs, les différentes interactions rotor/stator (effet potentiel des aubes du stator, champ de vitesse axiale, impact des sillages sur les couches limites des aubes en aval...) sont correctement capturés en iWMLES même si, en raison des sillages plus épais des aubes du rotor, des déficits de vitesse plus importants sont obtenus en iWMLES. Il est toutefois à noter qu'en aval des aubes du stator, les sillages sont dissipés et dispersés. Un maillage plus fin que WM2 est donc nécessaire.

Cela est aussi valable pour l'écoulement de jeu, puisque son influence est très peu visible à  $h/H = 80\%$  et sa convection n'est pas suffisamment précise avec le maillage WM2. Comme

expliqué précédemment à la section 7.4.1, la résolution de cet écoulement implique ici que l'ensemble de la couche limite sur le carter est résolu, car les lignes de maillage avec un solveur structuré se propagent dans tout le domaine.

Finalement, une fois que les couches limites se développant sur les aubages sont turbulentes, un accord satisfaisant entre le frottement pariétal prédit par le modèle de paroi iWMLES et celui estimé dans la LES de Gourdain (2015a,b) est obtenu. En revanche, il est observé que les plus grandes sources d'erreurs ne sont pas associées directement au modèle de paroi, mais au fait de recourir à une modélisation de paroi sur des régions où ce n'est pas justifié. Il faudrait être capable de revenir aux préconisations de maillage LES (4.17) dans ces régions.

De plus, le nombre de Reynolds de l'écoulement dans le CME2 est relativement faible. En terme de coût de calcul, une LES (et donc des données de référence) est alors accessible. Néanmoins, cela signifie aussi que seule une réduction modérée du nombre de points composant le maillage est possible avec une approche WMLES (conformément aux estimations données à la section 4.1 et illustrées à la figure 4.1). En effet, les couches limites qui se développent dans le CME2 sont propices à l'utilisation d'une approche WMLES seulement sur une partie réduite de la corde des aubes. Auparavant, leur nombre de Reynolds est trop faible pour permettre ou justifier une approche WMLES. D'ailleurs, les données d'entrée du modèle de paroi ont dû être extraites à la troisième cellule au-dessus de chaque interface pariétale afin d'être issues de la zone inertielle. Il est à noter que la réduction importante du nombre de points composant le maillage obtenue avec le maillage WM2 s'est faite au détriment de la résolution de l'écoulement de jeu et de la convection des sillages. Cette réduction ne peut en réalité être aussi excessive.

En fait, une approche WMLES permet de diminuer le coût de calcul d'une LES de manière beaucoup plus importante sur des écoulements à haut nombre de Reynolds. C'est le paradoxe de l'approche WMLES : elle est développée et efficace pour simuler des couches limites qui demeurent à ce jour inaccessibles en terme de coût de calcul en LES (et donc en DNS), mais leur validation requiert des données de référence.

## 7.5 Bilan

Dans ce chapitre, différents résultats sont à retenir :

1. L'iWMLES est appliqué sur un cas à géométrie complexe, démontrant sa robustesse ;
2. À partir d'une approche WMLES (ici basée sur l'iWMLES), il est possible de capturer les différents phénomènes ayant lieu dans l'écoulement dans une turbomachine (interactions rotor/stator, coefficient de pression, coefficient de frottement dans les zones turbulentes, source des pertes...). Les performances globales prédites sont notamment cohérentes ;

3. Les plus grandes sources d'erreurs lorsqu'une approche WMLES est utilisée sont toutefois principalement associées à la difficulté de générer un maillage respectant les préconisations de maillage WMLES (4.32) uniquement dans les zones éligibles à une telle approche. En particulier, comme illustré à la figure 7.17, des maillages équivalents à ceux utilisés en LES doivent être considérés au niveau :

- des jeux présents aux extrémités des aubes, car la taille d'un tourbillon de jeu est en général directement liée à la hauteur du jeu, et l'écoulement de jeu est caractérisé par différents décollements de couches limites,
- des bords d'attaques des aubes, car les couches limites  $y$  sont laminaires (ou au moins à un nombre de Reynolds pas assez élevé pour justifier une approche WMLES, comme expliqué à la section 4.4),

mais il est important de noter que plus le nombre de Reynolds basé sur la corde des aubes est élevé, plus les couches limites transitionneront à la turbulence près du bord d'attaque. La fraction de corde où un maillage adapté à une approche LES est requis sera alors de plus en plus faible, au profit d'un maillage respectant les préconisations de maillage WMLES. En outre, la solution sera de moins en moins impactée par le phénomène de surestimation du frottement au niveau du bord d'attaque si un maillage adapté à une approche WMLES  $y$  est tout de même utilisé.

Par ailleurs, si un modèle de paroi est appliqué dans les zones où un maillage de nature LES est utilisé, il est important que ce dernier dégénère bien en une loi linéaire en unités de paroi dans ces zones. En effet, un modèle de paroi prédisant une loi linéaire estime les flux pariétaux de manière équivalente à un calcul résolu à la paroi ;

4. Dans un contexte turbomachine, la réduction du coût d'intégration temporelle des équations apporté par l'utilisation d'une approche WMLES n'est pas aussi évidente qu'elle peut l'être sur un écoulement pleinement turbulent. En effet, lors de la résolution d'une couche limite turbulente en LES avec un schéma temporel explicite, le nombre de CFL est contraint par les plus petites cellules qui sont près des parois. Une approche WMLES permet donc de lever cette contrainte, comme expliqué à la section 4.1.3.

En revanche, dans une turbomachine, les plus petites cellules en WMLES peuvent être de même taille qu'en LES, tels que dans l'écoulement de jeu ou au niveau du bord d'attaque d'une aube, comme indiqué précédemment. Dans ce cas, aucune réduction du coût d'intégration temporelle n'est obtenue avec un schéma temporel explicite. D'ailleurs, le gain temporel estimé à la section 4.1.3 suppose une couche limite turbulente, sans prendre en compte sa transition à la turbulence.

Un premier moyen d'éviter cet écueil est de réaliser un compromis sur la finesse du maillage dans ces zones, notamment si elles ne font pas partie des zones d'intérêt industriel. Un deuxième moyen est de recourir à un schéma temporel implicite afin de s'affranchir de la contrainte sur le nombre de CFL (au prix d'une certaine dissipation et dispersion numérique sur les zones associées à cette contrainte).

Il est important de remarquer que si le nombre de Reynolds de l'écoulement est suffisamment élevé, les plus petites cellules en LES appartiennent à des zones pouvant

bénéficier d'une approche WMLES (c'est-à-dire les couches limites turbulentes attachées). L'utilisation d'une approche WMLES permet alors naturellement une réduction du coût d'intégration temporelle en levant la plus forte contrainte sur le nombre de CFL. Par ailleurs, le surcoût de calcul par itération d'un schéma temporel implicite est à relativiser vis-à-vis du coût de calcul des conditions aux limites aux interfaces entre les roues mobiles et fixes. Avec un schéma temporel explicite, le nombre d'itérations par passage de pale est plus élevé et ces conditions aux limites sont alors résolues plus de fois.

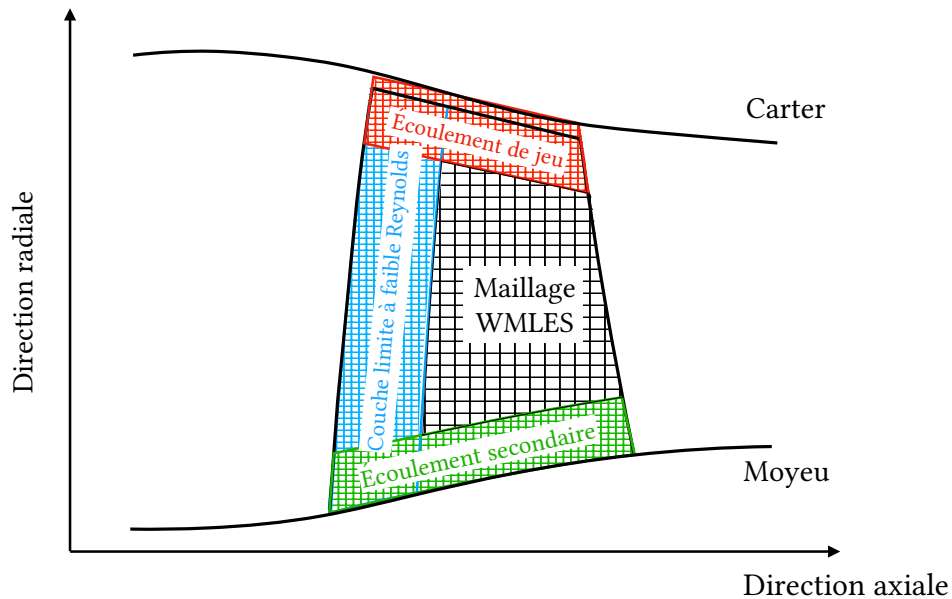


FIGURE 7.17 – Stratégie de maillage pour la WMLES d'une aube de turbomachine

Finalement, l'étude sur le CME2 permet de démontrer la robustesse et la simplicité d'utilisation du modèle de paroi iWMLES. Ainsi, ce dernier peut être utilisé sur des configurations à géométries complexes.

Cependant, la configuration CME2 a permis de montrer que la pierre angulaire de la méthodologie numérique d'une approche WMLES est d'avoir un maillage adapté à une telle approche. En effet, dans le cas contraire, il est observé qu'il s'agit de la principale source d'erreurs. Spécifiquement, la difficulté est de respecter les préconisations de maillage WMLES (4.28) uniquement sur les couches limites turbulentes attachées à haut nombre de Reynolds (comme justifié à la section 4.4), tout en conservant un maillage équivalent à celui d'une LES en-dehors. Cette difficulté est d'autant plus importante avec un solveur structuré basé sur la méthode des volumes finis, puisque les lignes de maillage se propagent dans tout le domaine. Par exemple, l'écoulement de jeu doit être résolu avec un maillage analogue à celui utilisé en LES. Ce dernier est piloté par la hauteur du jeu qui est généralement très faible. Un maillage fin est alors construit le long de tout le carter, dont la couche limite est ainsi vraisemblablement résolue. De plus, pour pouvoir convecter avec précision le

tourbillon de jeu, un maillage fin est également requis sur les 10–20 derniers pourcents de hauteur de la veine (si ce tourbillon reste confiné près du carter, ce qui est le cas sur le CME2 au point de fonctionnement nominal). Si la taille des cellules dans la direction radiale peut être augmentée progressivement selon la hauteur de la veine, ce n'est pas le cas dans les directions axiale et azimuthale. Des cellules fines sont ainsi présentes dans ces deux directions selon toute la hauteur de veine, sans que cela ne soit à priori nécessaire. L'utilisation d'une approche WMLES avec un solveur structuré ne permet pas alors une réduction du nombre de points maillage aussi élevée en pratique qu'en théorie. Par ailleurs, bien que non étudié ici (par absence de données de référence), il en est à priori de même pour les tourbillons contrarotatifs, de passage et de coin caractérisant les écoulements secondaires présents près du moyeu, comme illustré à la figure 7.17.

Il est à remarquer que la génération d'un maillage adapté à une approche WMLES n'a pas été un problème significatif dans les chapitres 5 et 6 car soit les couches limites sont turbulentes (chapitre 5), soit leur transition à la turbulence est forcée (chapitre 6).

# Conclusion

Afin d'accélérer l'emploi d'une approche LES pour prédire les écoulements présents dans les turbomachines et ainsi optimiser le fonctionnement de ces dernières, l'approche WMLES a été considérée.

Pour rappel, l'étude bibliographique réalisée dans la première partie de ces travaux a permis de justifier l'existence de la WMLES tout en cernant mieux ses avantages et limites :

1. Le coût de résolution de la zone interne d'une couche limite devient prohibitif lorsque cette dernière est attachée à un nombre de Reynolds élevé ( $\gtrsim 10^6$ ). Dans ce cas, une approche WMLES présente un intérêt en rendant sa résolution accessible aux nombres de Reynolds rencontrés sur des configurations aéronautiques. D'ailleurs, une WMLES n'est justifiée que sous ces hypothèses. En effet, une séparation doit exister entre les échelles turbulentes de la zone interne de la couche limite et celles de la zone externe. De plus, la majorité de l'énergie cinétique turbulente doit être contenue dans la zone externe et cette dernière doit interagir avec la zone interne à travers un couplage quasi-unidirectionnel. C'est le cas uniquement pour une couche limite turbulente attachée à haut nombre de Reynolds.

En-dehors de cette région, le coût de calcul d'une WMLES par rapport à une approche LES reste inchangé, notamment dans la zone externe et dans les régions d'écoulements laminaires et/ou décollés ;

2. Dans un contexte turbomachine, une approche WMLES est facilement applicable et justifiable aux écoulements dans les compresseurs. En effet, ces derniers sont, d'une part, généralement à un nombre de Reynolds élevé et sont, d'autre part, caractérisés par des gradients de pression adverses dont la plupart des effets sur une couche limite sont équivalents à ceux d'une augmentation de son nombre de Reynolds. Au contraire, les écoulements dans les turbines basse pression sont généralement à un nombre de Reynolds assez faible et sont caractérisés par des gradients de pression favorables favorisant la relaminarisation de leurs couches limites. Il est toutefois à noter que sur la plage de leur nombre de Reynolds, une LES est déjà accessible en terme de coût de calcul. Concernant les turbines haute pression, leur écoulement peut être à un nombre de Reynolds assez élevé pour devenir propice à une approche WMLES. En plus, les systèmes de refroidissement introduits sur leurs aubes contribuent à l'augmentation du nombre de Reynolds de frottement de leurs couches limites, ce qui contrebalance les effets associés aux gradients de pression favorables. En outre, il est à noter que

c'est le nombre de Reynolds de frottement qui est le plus éloquent dans un contexte WMLES ;

3. Par rapport aux autres méthodes hybrides RANS-LES, l'approche WMLES offre l'avantage d'être relativement simple à implémenter et à utiliser ainsi que de modéliser entièrement l'écoulement sous le formalisme LES. Toutefois, la WMLES ne jouit pas à ce jour de la maturité des autres méthodes hybrides RANS-LES. Cela s'explique principalement par l'absence d'un modèle de paroi adapté aux écoulements industriels.

C'est pourquoi, afin de pouvoir prédire les écoulements existants dans les turbomachines à l'aide d'une approche WMLES, un modèle de paroi approprié à de tels écoulements doit être considéré. Les deux types de modèles de paroi existants, analytique et numérique, souffrent de limitations. Si les premiers ont un coût de calcul négligeable par rapport à celui d'une itération d'un solveur LES, leur domaine de validité est restreint à une physique pariétale simple. Ces derniers ne sont donc pas adaptés à la problématique de ces travaux. Quant aux seconds, leur domaine de validité dépend de la complexité des équations différentielles considérées. En revanche, dans le cas où les termes de gradient de pression et de convection sont pris en compte, un modèle de paroi numérique a un coût de calcul important, impacte l'efficacité parallèle du solveur et, en général, nécessite la génération d'un maillage secondaire où sont résolues ses équations. Ce dernier point rend alors les modèles de paroi numériques difficiles à industrialiser.

Par conséquent, un modèle de paroi hybride, l'iWMLES, a été développé et validé dans la seconde partie de ces travaux :

1. L'iWMLES est un modèle de paroi proposé par Yang et al. (2015) dont le principe est analogue à la méthode de Kármán (1921) et Pohlhausen (1921) pour une couche limite laminaire. Il peut être qualifié d'hybride car, pour déterminer le frottement pariétal, l'équation de couche limite de quantité de mouvement intégrée selon la normale à la paroi est résolue en paramétrisant le profil de vitesse. Cette paramétrisation est basée sur la loi de paroi logarithmique sur laquelle les modèles de paroi analytiques sont fondés.

Originellement valable pour une couche limite incompressible se développant le long d'une paroi adiabatique, une extension de l'iWMLES aux écoulements compressibles et aux parois isothermes a été proposée dans cette étude. Pour tenir compte des variations de densité et de température, l'équation d'énergie intégrée selon la normale à la paroi a également été résolue en paramétrisant le profil de température.

L'iWMLES permet alors de prendre en compte l'ensemble des termes présents dans les équations de couche limite tout en ayant un coût de calcul un à deux ordres de grandeurs plus faible qu'un modèle de paroi numérique en-équilibre. De plus, seuls des scalaires sont échangés entre chaque cellule adjacente à la paroi, ce qui permet de conserver l'efficacité parallèle du solveur. En outre, aucun maillage secondaire ne doit être généré par l'utilisateur, rendant ainsi l'iWMLES simple d'utilisation ;

2. Grâce à l'examen de différents écoulements dans des canaux plans, il a été démontré que l'iWMLES est capable de prédire à la fois les résultats analytiques connus pour un

écoulement incompressible ainsi que les effets de compressibilité et thermiques sur une couche limite. En effet, dans les cas quasi-incompressibles considérés, l'iWMLES a retrouvé les lois de paroi logarithmiques valables pour une couche limite incompressible et a donc été en accord avec les résultats DNS. Dans les cas supersoniques, l'iWMLES, contrairement à un modèle de paroi analytique, a prédit un frottement pariétal et un profil de vitesse en accord avec les résultats DNS. Concernant le flux de chaleur pariétal et le profil de température, l'iWMLES est resté plus précis qu'un modèle analytique mais en montrant ses limites ;

3. Dans le but d'évaluer l'aptitude de l'iWMLES à prendre en compte les effets associés à un gradient de pression, une méthodologie numérique a été proposée afin de soumettre une couche limite turbulente à un gradient de pression donné avec un solveur compressible. Elle repose notamment sur une méthode d'injection de turbulence anisotrope utilisée ici à travers une condition d'entrée non-réfléchissante. Cette manière d'injecter de la turbulence a été validée avec une LES de couche limite soumise à un gradient de pression nul.

Grâce à cette méthodologie, l'expérience de couche limite soumise à un gradient de pression adverse réalisée par Harun (2012) a été reproduite en WMLES. Cela a permis alors de valider la capacité de l'iWMLES à prédire les principaux phénomènes associés à un gradient de pression : le décalage du profil de vitesse en unités de paroi sous la loi logarithmique, l'intensification de son sillage et le pic de fluctuations turbulentes dans la zone externe.

D'ailleurs, et de manière identique aux simulations réalisées sur les cas de canaux plans, il a été observé que les fluctuations turbulentes sont indépendantes du modèle de paroi considéré. Cela indique qu'à priori, les grandes structures turbulentes dans la zone externe d'une couche limite sont relativement indépendantes des flux pariétaux.

Finalement, l'iWMLES a été utilisé pour prédire l'écoulement dans l'étage d'un compresseur axial. Cette simulation a permis de montrer différents résultats :

1. L'iWMLES est un modèle de paroi suffisamment robuste pour être appliqué sur des géométries industrielles ;
2. Grâce à une approche WMLES et au modèle de paroi iWMLES, il est possible de prédire les principaux phénomènes ayant lieu dans une turbomachine, en particulier les interactions rotor/stator, le coefficient de pression, le coefficient de frottement dans les zones turbulentes et les source de pertes ;
3. Cependant, l'étude réalisée a révélé que les plus grandes sources d'erreurs lorsqu'une approche WMLES est utilisée dans un contexte turbomachine sont principalement liées à la difficulté de générer un maillage adapté. En effet, il est nécessaire de respecter les préconisations de maillage WMLES uniquement dans les zones éligibles à une telle approche, c'est-à-dire les couches limites turbulentes attachées à un nombre de Reynolds élevé. En-dehors de ces zones, des mailles de dimensions équivalentes à celles utilisées en LES sont censées être considérées, notamment aux bords d'attaques



des aubes et à leurs extrémités dans la direction radiale. Cette difficulté est d'autant plus importante avec un solveur structuré basé sur la méthode des volumes finis, puisque les lignes de maillage se propagent dans tout le domaine.

Malgré les difficultés associées à la construction du maillage, l'ensemble de ces résultats permet ainsi de montrer que l'iWMLES est un modèle de paroi adapté aux écoulements présents dans les turbomachines. En effet, l'iWMLES est capable, pour un coût de calcul faible, de prédire les phénomènes physiques affectant leurs couches limites en restant robuste et simple d'utilisation.

## Perspectives

À l'issue de ces travaux, plusieurs interrogations restent en suspens, ouvrant la voie à différentes perspectives de recherche.

### Couche limite décollée

La simulation de l'écoulement dans le CME2 a permis de montrer que l'iWMLES est un modèle de paroi assez robuste pour traiter des bulbes de décollement. Des questions subsistent toutefois vis-à-vis de la précision d'une approche WMLES pour prédire des décollements de couche limite. En particulier, dans un tel cas :

- est-il possible de considérer les critères de maillage WMLES donnant la taille des cellules en fonction de l'épaisseur de couche limite locale comme suffisants ?
- bien qu'il soit acquis qu'une modélisation de paroi n'a pas de sens d'un point de vue théorique lors d'un décollement, son utilisation dégrade-t-elle les résultats ? Si oui, comment minimiser les erreurs associées ?

Dans un contexte turbomachine, en plus des éventuels bulbes de décollements présents sur les aubes, des décollements sont présents au bord de fuite de ces dernières ainsi que dans les écoulements secondaires et de jeu. Les réponses à ces questions permettraient d'être plus conscient des erreurs générées par une approche WMLES, tout en précisant le niveau de raffinement de maillage nécessaire pour les prédire avec précision.

### Couche limite soumise à un gradient de pression adverse intense

L'étude d'une couche limite soumise à un gradient de pression adverse plus intense qu'au chapitre 6 permettrait de davantage discriminer les modèles de paroi considérés. En effet, dans le cas du chapitre 6, il est observé qu'un modèle de paroi basé sur la loi de paroi logarithmique permet, hormis les profils de vitesse en unités de paroi, d'obtenir des résultats cohérents avec ceux de référence.

### **Couche limite thermique soumise à un gradient de pression**

Il n'existe pas, à priori, de données de référence de couche limite à haut nombre de Reynolds soumise à la fois à un gradient de pression et à un gradient de température. L'influence d'un gradient de pression sur le champ thermique à un nombre de Reynolds représentatif d'un écoulement industriel reste ainsi à étudier.

### **Définition d'une base de validation adaptée à l'approche WMLES**

Un paradoxe existant lors du développement d'un modèle de paroi, et donc rencontré au cours de cette étude, est le fait que l'intérêt d'une approche WMLES réside dans sa capacité à pouvoir simuler des couches limites à haut nombre de Reynolds. À ce jour, ces dernières sont inaccessibles en terme de coût de calcul avec une approche DNS en-dehors de cas de canaux.

Or, pour valider un modèle de paroi, des données de référence sont requises. Pour surmonter cette difficulté, une possibilité est de se tourner vers des études expérimentales, comme réalisé ici au chapitre 6. Cependant, ce n'est que récemment que, d'une part, des couches limites à haut nombre de Reynolds peuvent être étudiées expérimentalement et, d'autre part, des méthodes mesurant le frottement pariétal indépendamment du profil de vitesse ont été développées.

À ce jour, la disponibilité de résultats de référence adaptés à la validation d'un modèle de paroi reste problématique. Il est donc souhaitable qu'un ensemble de cas tests académiques, permettant d'étudier séparément les phénomènes physiques auxquels les couches limites à un nombre de Reynolds élevé peuvent être soumises, soit proposé. Ainsi, les modèles de paroi pourraient être évalués, validés et discriminés plus aisément.

### **Configuration turbomachine hors design**

Seule une turbomachine à son point de fonctionnement nominal est étudiée au cours de ces travaux. La capacité d'une approche WMLES à prédire l'écoulement et les performances en-dehors de ce point reste à évaluer. En particulier, la prédiction de la marge de pompage d'un compresseur est critique pour un motoriste aéronautique. Il est à noter que ces résultats risquent d'être liés à la précision d'une approche WMLES pour des écoulements de couches limites décollées.

### **Utilisation simultanée d'une approche WMLES avec des conditions aux limites chorochroniques**

En plus d'une approche WMLES, une autre possibilité pour réduire le coût de calcul d'une turbomachine en LES est de recourir à des conditions aux limites chorochroniques. Couramment utilisées avec une approche URANS, elles permettent notamment de réduire le domaine de calcul à une seule aube par roue. Récemment, une telle méthode a été proposée par Mouret (2016) pour une approche LES. Son utilisation avec une approche WMLES permettrait

de réduire davantage le coût de calcul d'une configuration turbomachine. Toutefois, ces deux méthodes engendrent une perte de précision qu'il faut quantifier.

### **Couche limite transitionnelle dans une turbomachine**

En WMLES, les couches limites des aubes dans le CME2 ont transitionné à la turbulence à des positions en accord avec celles prédites en LES, malgré l'absence d'injection de turbulence à l'entrée du domaine. Cela a été dû à une surestimation du frottement pariétal aux bords d'attaques des aubes.

En théorie, comme expliqué précédemment, des mailles de dimensions équivalentes à celles utilisées en LES sont censées être considérées dans les régions laminaires. Cependant, pour capturer une transition à la turbulence d'une couche limite, il n'existe pas de préconisations de maillage LES établies. En effet, en pratique, les critères (4.17) valables pour une couche limite turbulente attachée continuent d'être appliqués en étant jugés suffisants. En WMLES, une stratégie de maillage doit être établie puisque les préconisations (4.17) d'une LES ne sont pas compatibles avec celles d'une WMLES (4.32). Cette stratégie doit permettre de générer un maillage suffisant pour résoudre la transition à la turbulence des couches limites tout en tirant profit ensuite d'une modélisation de paroi.

Dans une turbomachine, le mécanisme de transition est souvent de type *bypass* ou dû à un bulbe de décollement. Ces derniers sont plus simple à capturer qu'une transition naturelle. C'est pourquoi, dans un contexte turbomachine, une possibilité serait de construire un maillage suivant les critères de maillage WMLES (4.32) basés sur l'épaisseur de couche limite locale le long de toute la paroi. Ainsi, un maillage fin serait naturellement obtenu au début des couches limites et il serait possible de prédire correctement leur transition à la turbulence. En outre, pour correctement estimer le frottement pariétal dans les régions où un maillage fin est utilisé, il est important que le modèle de paroi considéré dégénère bien en une loi linéaire en unités de paroi dans la zone linéaire.

La stratégie de maillage proposée reste toutefois à confirmer en pratique. Par ailleurs, son application, et plus simplement la génération d'un maillage adapté à une approche WMLES, requiert la connaissance a priori de l'épaisseur de couche limite. L'adaptation de maillage apparaît alors comme une solution intéressante. Cette perspective est développée dans le paragraphe suivant.

### **Adaptation de maillage en WMLES**

Lors de l'utilisation d'une approche WMLES sur la géométrie du CME2, les erreurs les plus importantes ne sont pas dues au modèle de paroi mais au maillage. Notamment, la principale difficulté est de générer un maillage respectant les préconisations de maillage WMLES uniquement dans les zones éligibles à une telle approche.

Étant donné que ces préconisations sont données en fonction de l'épaisseur de couche limite locale qui est a priori inconnue, une adaptation de maillage basée sur ce critère apparaît comme un axe de recherche pertinent pour améliorer la précision d'une WMLES.

En particulier, cela implique une distance variable entre la paroi et le point d'extraction des données d'entrée du modèle de paroi. Idéalement, une simulation RANS permettrait d'estimer l'évolution le long d'une paroi de l'épaisseur de couche limite. Sinon, une simple corrélation peut être exploitée. En effet, l'objectif étant de générer un maillage initial, il n'est pas nécessaire de quantifier précisément cette épaisseur. D'ailleurs, même sur une plaque plane, l'épaisseur de couche limite est difficile à mesurer et plusieurs critères de mesures existent. Le plus important est donc d'en définir un suffisamment robuste pour des turbomachines. Afin d'éviter un problème mal posé dans le cas d'une épaisseur de couche limite nulle, des dimensions de cellules minimales pourraient être prescrites par l'utilisateur. Selon la taille de cellule minimale prescrite, les écoulements secondaires, dans les jeux ou aux bords d'attaques des aubes pourront être soit résolus, induisant alors une contrainte sur le nombre de CFL, soit sous-résolus pour effectuer un compromis sur le nombre de CFL au prix alors d'une perte de précision.

Par ailleurs, la difficulté de construire un maillage en WMLES ou de l'adapter dépend directement de la méthode numérique considérée. Un solveur basé sur la méthode des volumes finis et une mise en données de type structuré, comme considéré dans ces travaux, correspond à la méthode la moins flexible. En effet, dans ce cas, les lignes de maillage se propagent dans tout le domaine. Le gain en terme de nombre de points apporté par une approche WMLES par rapport à une LES n'est alors pas aussi élevé qu'escompté dans une turbomachine.

Les méthodes volumes finis basées sur une mise en données de type non-structuré, permettant notamment des maillages hybrides composés de couches de prismes et de tétraèdres, et les méthodes spectrales discontinues sont plus flexibles et offrent plus de possibilités en terme d'adaptation de maillage. En particulier, les méthodes spectrales discontinues, sont des cas intéressants. Avec ces méthodes, les deux stratégies de maillage illustrées à la figure 4.5 peuvent être employées. En effet, dans ces méthodes, chaque cellule contient plusieurs points solutions (selon le degré du polynôme utilisé). Il est donc aisé, même avec une mise en données de type non-structuré, d'accéder à un point solution plus éloigné de la paroi que le premier (mais en restant limité à la première cellule au-dessus de la paroi). En outre, il est possible de raffiner localement le maillage en augmentant l'ordre du schéma dans certaines cellules, comme celles dans la zone externe d'une couche limite. Ces méthodes autorisent également des taux d'expansions plus élevés qu'en volumes finis puisque la solution est continue dans chaque cellule. Par conséquent, les méthodes spectrales discontinues permettent d'appliquer plus facilement les préconisations de maillage WMLES de manière locale grâce à une plus grande flexibilité quant à la discrétisation de l'écoulement. Néanmoins, il est à noter qu'il est très difficile de ne pas mettre de points solutions dans la sous-couche visqueuse avec ces méthodes, car les points solutions à l'intérieur des cellules sont localisés près de leurs interfaces.



# Annexe A

## Méthodes numériques de résolution

Comme indiqué à la section 4.2.3, dans une WMLES, les méthodes numériques sont aussi importantes que le modèle de paroi. C'est pourquoi, les méthodes numériques utilisées au cours de ces travaux pour discrétiser les équations LES (2.49) sont brièvement présentées ici. Ces dernières ont déjà été détaillées, par exemple, par Colin (2007) et Bocquet (2013). En outre, les conditions aux limites non-réfléchissantes employées au chapitre 6 et au chapitre 7 sont également décrites.

### A.1 Principe de la méthodes des volumes finis

En omettant par concision les opérateurs de Reynolds et de filtrage spatial, le système d'équations LES (2.49) peut être reformulé ainsi :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_d) = 0, \quad (\text{A.1})$$

avec  $\mathbf{W}$  le vecteur des variables conservatives :

$$\mathbf{W} = (\rho, \rho \mathbf{u}, \rho E), \quad (\text{A.2})$$

$\mathbf{F}_c$  le vecteur des flux convectifs :

$$\mathbf{F}_c = (\rho \mathbf{u}, \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{1}_3, \rho E \mathbf{u} + p \mathbf{u}), \quad (\text{A.3})$$

et  $\mathbf{F}_d$  le vecteur des flux diffusifs :

$$\mathbf{F}_d = \left( \mathbf{0}, -\left(1 + \frac{\mu_{\text{sgs}}}{\mu}\right) \boldsymbol{\tau}, -\left(1 + \frac{\mu_{\text{sgs}}}{\mu}\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} + \left(1 + \frac{\mu_{\text{sgs}}}{\mu} \frac{Pr}{Pr_{\text{sgs}}}\right) \mathbf{q} \right). \quad (\text{A.4})$$

Le solveur CFD utilisé dans cette étude, *elsA*, tire profit de la méthode des volumes finis pour résoudre l'équation (A.1). Les données sont calculées et stockées au centre des cellules (*cell-centered*) et une mise en données de type structuré est employée. Dans ce cas,

en considérant une cellule  $(i, j, k)$  (avec  $i, j$  et  $k$  les directions topologiques du maillage) de volume  $V_{i,j,k}$  et grâce au théorème de Green-Ostrogradski, la discrétisation de l'équation (A.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} V_{i,j,k} \frac{\partial \mathbf{W}_{i,j,k}}{\partial t} + (F_{c_{i-1/2,j,k}} + F_{d_{i-1/2,j,k}}) \cdot \mathbf{S}_{i-1/2,j,k} + (F_{c_{i+1/2,j,k}} + F_{d_{i+1/2,j,k}}) \cdot \mathbf{S}_{i+1/2,j,k} \\ + (F_{c_{i,j-1/2,k}} + F_{d_{i,j-1/2,k}}) \cdot \mathbf{S}_{i,j-1/2,k} + (F_{c_{i,j+1/2,k}} + F_{d_{i,j+1/2,k}}) \cdot \mathbf{S}_{i,j+1/2,k} \\ + (F_{c_{i,j,k-1/2}} + F_{d_{i,j,k-1/2}}) \cdot \mathbf{S}_{i,j,k-1/2} + (F_{c_{i,j,k+1/2}} + F_{d_{i,j,k+1/2}}) \cdot \mathbf{S}_{i,j,k+1/2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

avec  $\mathbf{W}_{i,j,k}$  la valeur moyenne de  $\mathbf{W}$  sur la cellule  $(i, j, k)$  et  $F_{c_{i+1/2,j,k}}$  et  $F_{d_{i+1/2,j,k}}$  respectivement les tenseurs de flux convectif et diffusif à l'interface  $(i + 1/2, j, k)$ .  $\mathbf{S}_{i+1/2,j,k}$  est le vecteur surface à cette interface, de normale sortante.

## A.2 Discrétisation des flux

Pour estimer les tenseurs de flux, un schéma convectif et un schéma diffusif sont nécessaires. Les schémas considérés au cours de ces travaux sont présentés dans cette section.

### A.2.1 Discrétisation des flux convectifs

Les flux convectifs sont estimés à une interface donnée à l'aide d'un schéma centré d'ordre deux à partir de la moyenne du vecteur des variables conservatives  $\mathbf{W}$  au centre des deux cellules adjacentes. Ainsi, pour une interface  $(i + 1/2, j, k)$  :

$$F_{c_{i+1/2,j,k}} = F_{c_{i+1/2,j,k}} \left( \frac{\mathbf{W}_{i,j,k} + \mathbf{W}_{i+1,j,k}}{2} \right). \quad (\text{A.6})$$

Afin de stabiliser le schéma centré, le modèle de dissipation artificielle proposé par Jameson et al. (1981) est utilisé. Il consiste à remplacer  $F_{c_{i+1/2,j,k}} \cdot \mathbf{S}_{i+1/2,j,k}$  par  $F_{c_{i+1/2,j,k}} \cdot \mathbf{S}_{i+1/2,j,k} - \mathbf{d}_{i+1/2,j,k}$ , avec  $\mathbf{d}_{i+1/2,j,k}$  le flux de dissipation artificielle ajouté. Ce dernier est défini à partir des dérivées seconde et quatrième du vecteur des variables conservatives. Dans la mesure où les écoulements de cette étude ne comportent pas de choc, le terme de dérivée seconde est ici inutile et n'est donc pas présenté dans la suite. À une interface  $(i + 1/2, j, k)$ , le flux dissipatif est alors défini par :

$$\mathbf{d}_{i+1/2,j,k} = -\kappa_4 r_{i+1/2,j,k} (\mathbf{W}_{i+2,j,k} - 3\mathbf{W}_{i+1,j,k} + 3\mathbf{W}_{i,j,k} - \mathbf{W}_{i-1,j,k}), \quad (\text{A.7})$$

avec

$$r_{i+1/2,j,k} = \frac{\lambda(A)_{i,j,k} + \lambda(A)_{i+1,j,k}}{2}, \quad (\text{A.8})$$

où  $\lambda(A)_{i,j,k}$  est le rayon spectral de la matrice jacobienne  $A = \frac{\partial F_c \cdot \mathbf{S}}{\partial \mathbf{W}}$  évaluée au centre de la cellule  $(i, j, k)$  à partir de la moyenne des vecteurs surfaces des deux interfaces opposées

dans une direction donnée.  $\kappa_4$  est un paramètre constant permettant d'ajuster l'intensité de la dissipation artificielle.

L'ajout d'une dissipation artificielle trop importante peut détériorer la qualité des résultats. C'est pourquoi, pour limiter son impact, un senseur d'oscillations numérique  $S_d$  est introduit et est défini à chaque cellule  $(i, j, k)$  par :

$$S_{d_{i,j,k}} = \max_{l \in \{1, \dots, 5\}} (w_l(i), 1) \quad (\text{A.9})$$

avec

$$w_l(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } (f_l(i) + f_l(i+1)) \leq 0 \text{ et } (f_l(i-1) + f_l(i)) \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

et

$$f_l(i) = \begin{cases} -1 & \text{si } (w_{l_{\text{prim}}}(i+1) + w_{l_{\text{prim}}}(i))(w_{l_{\text{prim}}}(i) - w_{l_{\text{prim}}}(i-1)) \leq 0, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

où  $w_{l_{\text{prim}}}$ ,  $l \in \{1, \dots, 5\}$  désigne les variables primitives. Ainsi, le senseur est d'une valeur nulle (et de même pour le flux de dissipation) sauf si une oscillation est détectée sur au moins une des variables primitives sur un stencil de trois cellules dans la direction normale à l'interface considérée. Dans ce cas, la valeur du senseur est imposée égale à l'unité et le terme de dissipation artificielle est ajouté (dont l'intensité est pilotée par  $\kappa_4$ ). Avec ce senseur, l'usage au Cerfacs est de choisir une valeur de  $\kappa_4$  inférieure ou égale à 0.006.

### A.2.2 Discrétisation des flux diffusifs

Les flux diffusifs sont également évalués à l'aide d'un schéma centré d'ordre deux. Pour les évaluer, il est nécessaire de calculer les gradients de température et de vitesse. En tirant profit du théorème de Green-Ostrogradski, la discrétisation de ces gradients est donnée, pour une fonction scalaire  $f$  et à chaque cellule  $(i, j, k)$ , par :

$$\begin{aligned} (\nabla f)_{i,j,k} = \frac{1}{2V_{i,j,k}} & [(f_{i,j,k} + f_{i+1,j,k})\mathbf{S}_{i+1/2,j,k} + (f_{i,j,k} + f_{i-1,j,k})\mathbf{S}_{i-1/2,j,k} \\ & + (f_{i,j,k} + f_{i,j+1,k})\mathbf{S}_{i,j+1/2,k} + (f_{i,j,k} + f_{i,j-1,k})\mathbf{S}_{i,j-1/2,k} \\ & + (f_{i,j,k} + f_{i,j,k+1})\mathbf{S}_{i,j,k+1/2} + (f_{i,j,k} + f_{i,j,k-1})\mathbf{S}_{i,j,k-1/2}]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Finalement, à chaque interface  $(i+1/2, j, k)$ , le tenseur de flux diffusif  $F_{d_{i+1/2,j,k}}$  est estimé par :

$$F_{d_{i+1/2,j,k}} = \frac{1}{2}(F_{d_{i,j,k}} + F_{d_{i+1,j,k}}), \quad (\text{A.13})$$

où les flux diffusifs au centre des cellules sont évalués à l'aide des gradients calculés selon l'équation (A.12).



### A.3 Conditions aux limites non-réfléchissantes

Les conditions d'entrée et de sortie employées au cours de ces travaux sont basées sur une décomposition en variables caractéristiques des équations d'Euler, proposées par T. J. Poinso et Lele (1992) et appelées NSCBC (*Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions*). Une présentation détaillée de l'implémentation de ces conditions aux limites dans *elsA* est donnée, par exemple, par Fosso (2011).

Par concision, seul le cas d'un maillage cartésien et d'une interface dont la direction normale est selon  $x$  est considéré. De plus, les flux transverses ne sont ici pas pris en compte et ne sont alors pas présentés. Dans ce cas, une décomposition en variables caractéristiques permet d'écrire :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} d_1 \\ ud_1 + \rho d_2 \\ vd_1 + \rho d_3 \\ wd_1 + \rho d_4 \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)d_1 + \rho ud_2 + \rho vd_3 + \rho wd_4 + \frac{1}{\gamma-1}d_5 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

avec  $\mathcal{F}$  la dérivée partielle selon  $x$  du flux convectif  $F_c$  projeté dans cette direction,

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 + \frac{\rho}{2c}(\mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5) \\ \frac{1}{2}(\mathcal{L}_4 - \mathcal{L}_5) \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \\ \frac{\rho c}{2}(\mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

et  $\mathcal{L}$  le vecteur des amplitudes des ondes caractéristiques ( $c$  est la vitesse du son) :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} \\ (u+c)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \\ (u-c)\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

L'objectif des NSCBC est de déterminer  $\mathcal{F}$ , ce qui revient à calculer les composantes  $\mathcal{L}_i$  du vecteur  $\mathcal{L}$ . Selon le signe de la vitesse des ondes (c'est-à-dire de  $u$ ,  $u+c$  et  $u-c$ ), les ondes caractéristiques correspondantes sont des ondes entrantes ou sortantes du domaine. L'amplitude  $\mathcal{L}_i$  des ondes sortantes est estimée à l'aide d'un schéma décentré (vers l'intérieur du domaine) et des variables conservatives  $\mathbf{W}$ .

En NSCBC, l'amplitude des ondes entrantes est estimée en considérant l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathcal{F} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Cette équation néglige les effets visqueux et suppose un écoulement monodimensionnel (d'où l'appellation d'approche LODI, *Local One-Dimensional Inviscid*, utilisée dans la littérature). Ces hypothèses ne sont toutefois pas aussi restrictives qu'elles ne paraissent puisque seule l'amplitude  $\mathcal{L}_i$  des ondes entrantes est estimée à partir de l'équation (A.17).

Dans les deux paragraphes suivants, le calcul des  $\mathcal{L}_i$  est présenté pour une condition d'entrée subsonique puis pour une condition de sortie subsonique.

### A.3.1 Condition d'entrée subsonique

Dans le cas d'une condition d'entrée subsonique, seule l'onde de vitesse  $u - c$  et d'amplitude  $\mathcal{L}_5$  est une onde sortante. Les ondes de vitesse  $u$  et  $u + c$  sont des ondes entrantes. L'amplitude de ces dernières (c'est-à-dire les  $\mathcal{L}_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) est estimée à partir de l'équation (A.17) formulée pour les composantes  $u, v$  et  $w$  du vecteur vitesse et pour la température  $T$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c}(\mathcal{L}_4 - \mathcal{L}_5) = 0, \quad (\text{A.18a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}_2 = 0, \quad (\text{A.18b})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}_3 = 0, \quad (\text{A.18c})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{\rho c^2} \left( -\mathcal{L}_1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5) \right) = 0, \quad (\text{A.18d})$$

qui est équivalent à :

$$\mathcal{L}_4 = -2\rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_5, \quad (\text{A.19a})$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{\partial v}{\partial t}, \quad (\text{A.19b})$$

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{\partial w}{\partial t}, \quad (\text{A.19c})$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\rho c^2}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5). \quad (\text{A.19d})$$

Dans ces travaux, à l'exception de l'étude du chapitre 6 où une méthode d'injection de turbulence est introduite, l'écoulement à l'entrée du domaine est supposée stationnaire. Son état de référence est noté dans la suite  $(\bar{u}^t, \bar{v}^t, \bar{w}^t, \bar{T}^t)$ . Par ailleurs, des termes de rappel vers cet état sont ajoutés pour empêcher l'écoulement de dériver au cours du temps. Le système

d'équations (A.19) s'écrit alors :

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_5 + \gamma_V(u - \bar{u}^t), \quad (\text{A.20a})$$

$$\mathcal{L}_2 = \gamma_V(v - \bar{v}^t), \quad (\text{A.20b})$$

$$\mathcal{L}_3 = \gamma_V(w - \bar{w}^t), \quad (\text{A.20c})$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5) + \gamma_{V_T}(T - \bar{T}^t), \quad (\text{A.20d})$$

avec  $\gamma_V$  et  $\gamma_{V_T}$  les constantes de rappel. Plus ces constantes sont élevées, plus la condition d'entrée est réfléchissante. Il est à noter que d'après Selle et al. (2004), les termes de rappels agissent comme des filtres passe-bas.

### A.3.2 Condition de sortie subsonique

Dans le cas d'une condition de sortie subsonique, les ondes de vitesse  $u$  et  $u + c$  (d'amplitudes  $\mathcal{L}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) sont des ondes sortantes. Seule l'onde de vitesse  $u - c$  est une onde entrante. De manière équivalente au cas d'une condition d'entrée subsonique, l'amplitude  $\mathcal{L}_5$  de l'onde entrante est estimée à partir de l'équation (A.17) formulée pour la pression  $p$  :

$$\mathcal{L}_5 = -\mathcal{L}_4 + \gamma_{V_p}(p - \bar{p}^t), \quad (\text{A.21})$$

en supposant une pression de sortie de référence  $\bar{p}^t$  stationnaire, et en introduisant un terme de rappel pour éviter une dérive de l'écoulement au cours du temps.  $\gamma_{V_p}$  est la constante de rappel.

# Bibliographie

- Afzal, N. « Wake layer in a thermal turbulent boundary layer with pressure gradient ». In : *Heat and Mass Transfer* 35 (1999), p. 281-288 (cité p. 102, 103).
- « Wake Layer in a turbulent boundary layer with pressure gradient : a new approach ». In : *IUTAM* (1996), p. 95-118 (cité p. 102, 103).
- Anderson, J. D. *Computational Fluid Dynamics*. Sous la dir. de McGraw-Hill. McGraw-Hill, 1995 (cité p. 22).
- Antares. *Antares Documentation Release 1.12.0*. 2018 (cité p. xv).
- Araya, G. et L. Castillo. « Direct numerical simulations of turbulent thermal boundary layers subjected to adverse streamwise pressure gradients ». In : *Physics of Fluids* 25 (2013), p. 095107 (cité p. 58, 156).
- « DNS of turbulent thermal boundary layers up to  $Re_\theta = 2300$  ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55 (2012), p. 4003-4019 (cité p. 58, 64, 156).
- Araya, G., L. Castillo et F. Hussain. « The log behaviour of the Reynolds shear stress in accelerating turbulent boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 775 (2015), p. 189-200 (cité p. 66, 67).
- Araya, G., K. E. Jansen et L. Castillo. « Inlet condition generation for spatially developing turbulent boundary layers via multiscale similarity ». In : *Journal of Turbulence* 10 (2009), N36 (cité p. 162).
- Atkinson, C., A. Sekimoto, J. Jiménez et J. Soria. « Reynolds stress structures in a self-similar adverse pressure gradient turbulent boundary layer at the verge of separation. » In : *Journal of Physics : Conference Series* 1001 (2018), p. 012001 (cité p. 59, 60).
- Aupoix, B. et S. Viala. « Compressible Turbulent Boundary Layer Modelling ». In : *Transitional and Turbulent Compressible Flows*. 1995 (cité p. 112).
- Baggett, J. S. *On the feasibility of merging LES with RANS for the near-wall region of attached turbulent flows*. Rapp. tech. Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 1998 (cité p. 121).
- Balakumar, B. J. et R. J. Adrian. « Large- and very-large-scale motions in channel and boundary-layer flows ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 365.1852 (2007), p. 665-681 (cité p. 53).
- Balaras, E. et C. Benocci. « Two-Layer Approximate Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations ». In : *(AIAA) Journal* 34.6 (1996), p. 1111-1119 (cité p. 99, 109).

- Baldwin, B. et H. Lomax. « Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulentflows ». In : *16th Aerospace Sciences Meeting*. American Institute of Aeronautics et Astronautics, 1978 (cité p. 30).
- Batten, P., U. Goldberg et S. Chakravarthy. « Interfacing Statistical Turbulence Closures with Large-Eddy Simulation ». In : *AIAA Journal* 42.3 (2004), p. 485-492 (cité p. 162).
- Béchara, W., C. Bailly, P. Lafon et S. M. Candel. « Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows ». In : *AIAA Journal* 32.3 (1994), p. 455-463 (cité p. 162).
- Blackwelder, R. F. et L. S. G. Kovaszny. « Large-scale motion of a turbulent boundary layer during relaminarization ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 53.1 (1972), p. 61-83 (cité p. 66).
- Blackwell, B. F., W. M. Kays et R. J. Moffat. *The turbulent boundary layer on a porous plate : an experimental study of the heat transfer behavior with adverse pressure gradients*. Rapp. tech. HMT-16. NASA, 1972 (cité p. 57).
- Bocquet, S. « Modélisation de paroi et injection de turbulence pariétale pour la simulation des Grandes Échelles des écoulements aérothermiques ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Toulouse, 2013 (cité p. xv, 35, 94, 95, 153, 160, 164, 165, 167, 176, 223).
- Bocquet, S., P. Sagaut et J. Jouhaud. « A compressible wall model for large-eddy simulation with application to prediction of aerothermal quantities ». In : *Physics of Fluids* 24.6 (2012), p. 065103 (cité p. 75, 94, 95, 98, 100, 103, 106-108, 111, 112).
- Bodart, J. et J. Larsson. *Sensor-based computation of transitional flows using wall-modeled large eddy simulation*. Rapp. tech. Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 2012 (cité p. 116).
- Bose, S. T. et P. Moin. « A dynamic slip boundary condition for wall-modeled large-eddy simulation ». In : *Physics of Fluids* 26 (2014), p. 015104 (cité p. 97, 200).
- Bourassa, C. et F. O. Thomas. « An experimental investigation of a highly accelerated turbulent boundary layer ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 634 (2009), p. 359-404 (cité p. 66-69, 71).
- Boussinesq, J. « Essai sur la théorie des eaux courantes ». In : *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences XXIII*. T. 23. 1877. Chap. 1, p. 1-680 (cité p. 30, 33, 42).
- Bradshaw, P. « The turbulence structure of equilibrium boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 29 (1967), p. 625-645 (cité p. 63).
- Brown, G. L. et A. S. L. Thomas. « Large structure in a turbulent boundary layer ». In : *Physics of Fluids* 20.10 (1977), S243 (cité p. 50).
- Cabot, W. et P. Moin. « Approximate Wall Boundary Conditions in the Large-Eddy Simulation of High Reynolds Number Flow ». In : *Flow, Turbulence and Combustion* 63.1/4 (2000), p. 269-291 (cité p. 95, 99, 109, 111).
- Castillo, L. et F. Hussain. « The logarithmic and power law behaviors of the accelerating, turbulent thermal boundary layer ». In : *Physics of Fluids* 29.2 (2017), p. 020718 (cité p. 66, 70, 72).
- Cebeci, T. et A. Smith. *Analysis of Turbulent Boundary Layers*. T. 15. Applied Mathematics and Mechanics. Academic, 1974 (cité p. 112).

- Chapman, D. R. « Computational Aerodynamics Development and Outlook ». In : (*AIAA Journal* 17.12 (1979), p. 1293-1313 (cité p. xiv, 77-80, 82-85, 170).
- Choi, H. et P. Moin. « Grid-point requirements for large eddy simulation : Chapman's estimates revisited ». In : *Physics of Fluids* 24 (2012), p. 011702 (cité p. 77-85).
- Chung, D. et B. J. McKeon. « Large-eddy simulation of large-scale structures in long channel flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 661 (2010), p. 341-364 (cité p. 53).
- Chung, D. et D. I. Pullin. « Large-eddy simulation and wall modelling of turbulent channel flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 631 (2009), p. 281-309 (cité p. 160).
- Clauser, F. H. « The Turbulent Boundary Layer ». In : *Advances in Applied Mechanics*. Elsevier, 1956, p. 1-51 (cité p. 55).
- « Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients ». In : *Journal of the Aeronautical Sciences* 21.2 (1954), p. 91-108 (cité p. 55).
- Coakley, T. et H. P. « Turbulence modeling for high speed flows ». In : *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. American Institute of Aeronautics et Astronautics, 1992 (cité p. 112).
- Coleman, G. N., J. Kim et R. D. Moser. « A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 305 (1995), p. 159-183 (cité p. 73, 103).
- Coles, D. « The law of the wake in the turbulent boundary layer ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 1 (1956), p. 191-226 (cité p. 47).
- Colin, Y. « Simulation numérique de la distorsion g n r e par une entrée d'air de moteur civil par vent de travers ». Thèse de doct.  cole Nationale Supérieure de l'A ronautique et de l'Espace, 2007 (cité p. 223).
- Colonius, T. « Modeling Artificial Boundary Conditions for compressible flow ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 36 (2004), p. 315-45 (cité p. 167).
- Cornell, W. G. *Experimental Quiet Engine Program – Summary Report*. Rapp. tech. CR-2519. NASA, 1975 (cité p. 7).
- Cossu, C. et Y. Hwang. « Self-sustaining processes at all scales in wall-bounded turbulent shear flows ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 375.2089 (2017), p. 20160088 (cité p. 51, 95, 184).
- Cousteix, J. *Turbulence et couche limite*. CEPADUES, 1989 (cité p. 41, 45, 46, 65, 121).
- Cutler, A. D. et J. P. Johnston. « The relaxation of a turbulent boundary layer in an adverse pressure gradient ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 200 (1989), p. 367-387 (cité p. 57).
- Daris, T. «  tude des modèles de turbulence à quatre équations de transport pour la prévision des écoulements turbulents faiblement chauffés ». Thèse de doct.  cole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2002 (cité p. 103).
- Davidson, L. et M. Billson. « Hybrid LES-RANS using synthesized turbulent fluctuations for forcing in the interface region ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 27.6 (2006), p. 1028-1042 (cité p. 162).
- Deck, S. « Zonal-Detached-Eddy Simulation of the Flow Around a High-Lift Configuration ». In : *AIAA Journal* 43.11 (2005), p. 2372-2384 (cité p. 122).

- Deck, S., N. Renard, R. Laroche et P. Sagaut. « Zonal detached eddy simulation (ZDES) of a spatially developing flat plate turbulent boundary layer over the Reynolds number range  $3\,150 \leq Re_\theta \leq 14\,000$  ». In : *Physics of Fluids* 26.2 (2014), p. 025116 (cité p. 123).
- Deck, S., N. Renard, R. Laroche et P.-E. Weiss. « Large-scale contribution to mean wall shear stress in high-Reynolds-number flat-plate boundary layers up to 13650 ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 743 (2014), p. 202-248 (cité p. 123).
- Deck, S. « Recent improvements in the Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) formulation ». In : *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 26.6 (2011), p. 523-550 (cité p. 120, 123).
- Denton, J. D. « Loss Mechanisms in Turbomachines ». In : *Journal of Turbomachinery* 115.4 (1993), p. 621 (cité p. 9, 17, 19).
- Dixit, S. A. et O. N. Ramesh. « Large-scale structures in turbulent and reverse-transitional sink flow boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 649 (2010), p. 233-273 (cité p. 66, 67, 69).
- « Pressure-gradient-dependent logarithmic laws in sink flow turbulent boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 615 (2008), p. 445-475 (cité p. 66, 67).
- Dixon, S. L. et C. Hall. *Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery*. Butterworth-Heinemann, 2013 (cité p. 7-11, 15, 17, 18).
- Duan, L., I. Beekman et M. Pino Martín. « Direct numerical simulation of hypersonic turbulent boundary layers with varying freestream Mach number ». In : *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition 2010*. Sous la dir. d'AIAA. 2010 (cité p. 74).
- Eidson, T. M. « Numerical simulation of the turbulent Rayleigh-Bénard problem using subgrid modelling ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 158.-1 (1985), p. 245 (cité p. 34).
- Erlebacher, G., M. Y. Hussaini, C. G. Speziale et T. A. Zang. « Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 238.-1 (1992), p. 155 (cité p. 33).
- Faure, T. M., G.-J. Michon, H. Miton et N. Vassiliev. « Laser Doppler Anemometry Measurements in an Axial Compressor Stage ». In : *Journal of Propulsion and Power* 17.3 (2001), p. 481-491 (cité p. 190, 196, 210).
- Fleming, G., A. Malwitz, S. Balasubramanian, C. Roof, F. Grandi, B. Kim, S. Usdrowski, T. Elliff, C. Eyers, D. Lee et B. Owen. « Trends in global noise and emissions from commercial aviation for 2000 through 2025 ». In : *26th International Congress of the Aeronautical Sciences, Anchorage, AK, September 2008*. 2008 (cité p. xiii).
- Flores, O. et J. Jiménez. « Effect of wall-boundary disturbances on turbulent channel flows ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 566 (2006), p. 357-376 (cité p. 51, 95).
- Flores, O., J. Jiménez et J. C. Del Alamo. « Vorticity organization in the outer layer of turbulent channels with disturbed walls ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 591 (2007), p. 145-154 (cité p. 51).
- Fosso, A. « Schémas Volumes Finis précis : application à l'aéroacoustique numérique de jets subsoniques ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie, 2011 (cité p. 169, 226).

- Fröhlich, J. et D. von Terzi. « Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows ». In : *Progress in Aerospace Sciences* 44 (2008), p. 349-377 (cité p. 87, 118, 119, 121, 122).
- Gao, F., W. Ma, G. Zambonini, J. Boudet, X. Ottavy, L. Lu et L. Shao. « Large-eddy simulation of 3-D corner separation in a linear compressor cascade ». In : *Physics of Fluids* 27.8 (2015), p. 085105 (cité p. 15).
- Garnier, E., N. Adams et P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for compressible Flows*. Sous la dir. de Springer. Springer, 2009 (cité p. 31, 33, 34).
- Gear, C. W. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*. Prentice Hall PTR, 1971 (cité p. 194).
- George, W. K. « Is there a universal log law for turbulent wall-bounded flows ? » In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 365.1852 (2007), p. 789-806 (cité p. 47).
- Gourdain, N., F. Sicot, F. Duchaine et L. Gicquel. « Large eddy simulation of flows in industrial compressors : a path from 2015 to 2035 ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 372 (2014), p. 20130323 (cité p. 36, 39).
- Gourdain, N., F. Wlassow et X. Ottavy. « Effect of Tip Clearance Dimensions and Control of Unsteady Flows in a Multi-Stage High-Pressure Compressor ». In : *Journal of Turbomachinery* 134.5 (2012), p. 051005 (cité p. 18).
- Gourdain, N. « Prediction of the unsteady turbulent flow in an axial compressor stage. Part 1 : Comparison of unsteady RANS and LES with experiments ». In : *Computers & Fluids* 106 (2015), p. 119-129 (cité p. 190-196, 210, 211).
- « Prediction of the unsteady turbulent flow in an axial compressor stage. Part 2 : Analysis of unsteady RANS and LES data ». In : *Computers & Fluids* 106 (2015), p. 67-78 (cité p. 190, 192, 196, 206, 210, 211).
- Guarini, S. E., R. D. Moser, K. Shariff et A. Wray. « Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer at Mach 2.5 ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 414 (2000), p. 1-33 (cité p. 74).
- Guézennec, N. et T. Poinso. « Acoustically Nonreflecting and Reflecting Boundary Conditions for Vorticity Injection in Compressible Solvers ». In : *AIAA Journal* 47.7 (2009), p. 1709-1722 (cité p. 167).
- Gungor, A. G., Y. Maciel, M. P. Simens et J. Soria. « Analysis of a Turbulent Boundary Layer Subjected to a Strong Adverse Pressure Gradient ». In : *Journal of Physics : Conference Series* 506 (2014), p. 012007 (cité p. 59).
- « Scaling and statistics of large-defect adverse pressure gradient turbulent boundary layers ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 59 (2016), p. 109-124 (cité p. 59, 60, 104, 105).
- Hamba, F. « Analysis of filtered Navier—Stokes equation for hybrid RANS/LES simulation ». In : *Physics of Fluids* 23.1 (2011), p. 015108 (cité p. 121).



- Harun, Z. « The structure of adverse and favourable pressure gradient turbulent boundary layers ». Thèse de doct. University of Melbourne, 2012 (cité p. 56, 58, 62, 65-67, 69, 156-160, 168, 174-179, 182, 185, 187, 217).
- Harun, Z., J. P. Monty, R. Mathis et I. Marusic. « Pressure gradient effects on the large-scale structure of turbulent boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 715 (2013), p. 477-498 (cité p. 55, 58, 62, 63, 66, 69).
- Hawthorne, W. R. « Secondary Circulation in Fluid Flow ». In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 206.1086 (1951), p. 374-387 (cité p. 15).
- Hickel, S. et N. A. Adams. « Implicit LES applied to zero-pressure-gradient and adverse-pressure-gradient boundary-layer turbulence ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29 (2008), p. 626-639 (cité p. 156).
- Hickel, S., E. Toubert, J. Bodart et J. Larsson. *A parametrized non-equilibrium wall-model for large-eddy simulations*. Rapp. tech. Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 2012 (cité p. 108, 131).
- Houra, T. et Y. Nagano. « Effects of adverse pressure gradient on heat transfer mechanism in thermal boundary layer ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 27 (2006), p. 967-976 (cité p. 56, 58, 64).
- « Spatio-temporal turbulent structures of thermal boundary layer subjected to non-equilibrium adverse pressure gradient ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29 (2008), p. 591-601 (cité p. 58).
- Huang, P. G. et P. Bradshaw. « Law of the Wall for Turbulent Flows in Pressure Gradients ». In : *(AIAA) Journal* 33.4 (1995), p. 624-632 (cité p. 73).
- Huang, P. G. et G. N. Coleman. « Van Driest Transformation and Compressible Wall-Bounded Flows ». In : *(AIAA) Journal* 32.10 (1994), p. 2110-2113 (cité p. 75, 103).
- Hutchins, N. et I. Marusic. « Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 579 (2007), p. 1 (cité p. 51, 53).
- Hwang, J.-Y., K.-S. Yang et K. Bremhorst. « Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow Around a Rotating Circular Cylinder ». In : *Journal of Fluids Engineering* 129.1 (2007), p. 40 (cité p. 72).
- Hwang, Y. « Near-wall turbulent fluctuations in the absence of wide outer motions ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 723 (2013), p. 264-288 (cité p. 53).
- Inoue, M., D. I. Pullin, Z. Harun et I. Marusic. « LES of the adverse-pressure gradient turbulent boundary layer ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 44 (2013), p. 293-300 (cité p. 156, 160).
- Jameson, A., W. Schmidt et E. Turkel. « Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes ». In : *14th Fluid and Plasma Dynamics Conference*. American Institute of Aeronautics et Astronautics, 1981 (cité p. 168, 224).

- Jarrin, N., S. Benhamadouche, D. Laurence et R. Prosser. « A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 27.4 (2006), p. 585-593 (cité p. 163).
- Jiménez, J. « Cascades in Wall-Bounded Turbulence ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 44.1 (2012), p. 27-45 (cité p. 50, 51).
- Johnsen, I. A. et R. O. Bullock. *Aerodynamic design of axial-flow compressors*. Rapp. tech. SP-36. NASA, 1965 (cité p. 12).
- Jones, W. P. et B. E. Launder. « Some properties of sink-flow turbulent boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 56.2 (1972), p. 337-351 (cité p. 65, 66).
- Kader, B. A. « Temperature and Concentration Profiles in Fully Turbulent Boundary Layers ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 24.9 (1981), p. 1541-1544 (cité p. 101, 102).
- Kármán, T. von. « Über laminare und turbulente Reibung ». In : *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 1.4 (1921), p. 233-252 (cité p. 132, 216).
- Kawai, S. et K. Asada. « Wall-modeled large-eddy simulation of high Reynolds number flow around an airfoil near stall condition ». In : *Computers & Fluids* 85 (2013), p. 105-113 (cité p. 116).
- Kawai, S. et J. Larsson. « Dynamic non-equilibrium wall-modeling for large eddy simulation at high Reynolds numbers ». In : *Physics of Fluids* 25.1 (2013), p. 015105 (cité p. 98, 99, 110-113).
- « Wall-modeling in large eddy simulation : Length scales, grid resolution, and accuracy ». In : *Physics of Fluids* 24 (2012), p. 015105 (cité p. 83, 93, 96, 164).
- Keating, A. et U. Piomelli. « A dynamic stochastic forcing method as a wall-layer model for large-eddy simulation ». In : *Journal of Turbulence* 7 (2006), N12 (cité p. 121).
- Kikuyama, K., M. Murakami, K. Nishibori et K. Maeda. « Flow in an Axially Rotating Pipe : A calculation of flow in the saturated region ». In : *Bulletin of JSME* 26.214 (1983), p. 506-513 (cité p. 73).
- Kim, K. C. et R. J. Adrian. « Very large-scale motion in the outer layer ». In : *Physics of Fluids* 11.2 (1999), p. 417-422 (cité p. 51).
- Kitsios, V., C. Atkinson, J. Sillero, G. Borrell, A. Gungor, J. Jiménez et J. Soria. « Direct numerical simulation of a self-similar adverse pressure gradient turbulent boundary layer ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 61 (2016), p. 129-136 (cité p. 59).
- Kitsios, V., A. Sekimoto, C. Atkinson, J. A. Sillero, G. Borrell, A. G. Gungor, J. Jiménez et J. Soria. « Direct numerical simulation of a self-similar adverse pressure gradient turbulent boundary layer at the verge of separation ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 829 (2017), p. 392-419 (cité p. 59).
- Klein, M., A. Sadiki et J. Janicka. « A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations ». In : *Journal of Computational Physics* 186.2 (2003), p. 652-665 (cité p. 162).

- Kline, S. J., W. C. Reynolds, F. A. Schraub et P. W. Runstadler. « The structure of turbulent boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 30.4 (1967), p. 741-773 (cité p. 50).
- Kolmogorov, A. N. « Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence ». In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 434.1890 (1991), p. 15-17 (cité p. 26).
- « The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers ». In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 434.1890 (1991), p. 9-13 (cité p. 26).
- Kovasznay, L. S. G., V. Kibens et R. F. Blackwelder. « Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 41.2 (1970), p. 283-325 (cité p. 50).
- Kraichnan, R. H. « Diffusion by a Random Velocity Field ». In : *Physics of Fluids* 13.1 (1970), p. 22 (cité p. 162).
- Kremer, F. et C. Bogey. « Large-eddy simulation of turbulent channel flow using relaxation filtering : Resolution requirement and Reynolds number effects ». In : *Computers & Fluids* 116 (2015), p. 17-28 (cité p. 50, 51).
- Lagha, M., J. Kim, J. D. Eldredge et X. Zhong. « A numerical study of compressible turbulent boundary layers ». In : *Physics of Fluids* 23 (2011), p. 015106 (cité p. 74).
- Langston, L. S. « Crossflows in a Turbine Cascade Passage ». In : *Journal of Engineering for Power* 102.4 (1980), p. 866 (cité p. 15).
- Laraufie, R. « Simulations avancées de turbulence pariétale à haut nombre de Reynolds sur des géométries curvilignes par une approche hybride RANS/LES ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012 (cité p. 118, 120).
- Larsson, J., S. Kawai, J. Bodart et I. Bermejo-Moreno. « Large eddy simulation with modeled wall-stress : recent progress and future directions ». In : *Mechanical Engineering Reviews* 3.1 (2016), p. 15-00418-15-00418 (cité p. 45, 51, 82, 83, 86, 87, 96, 98, 108, 111, 114, 121, 123, 124, 131, 184).
- Launder, B. E. « The turbulent boundary layer in a strongly negative pressure gradient ». Thèse de doct. Massachusetts Institute of Technology, 1963 (cité p. 65).
- Lee, J. H. « Large-scale motions in turbulent boundary layers subjected to adverse pressure gradients ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 810 (2016), p. 323-361 (cité p. 55, 59, 62, 63).
- Lee, J.-H. et H. J. Sung. « Effects of an adverse pressure gradient on a turbulent boundary layer ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29 (2008), p. 568-578 (cité p. 58).
- « Structures in turbulent boundary layers subjected to adverse pressure gradients ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 639 (2009), p. 101 (cité p. 58, 104).
- Lee, M. et R. D. Moser. « Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau \simeq 5200$  ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 774 (2015), p. 395-415 (cité p. 104).
- Lee, S., S. K. Lele et P. Moin. « Simulation of spatially evolving turbulence and the applicability of Taylor's hypothesis in compressible flow ». In : *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* 4.7 (1992), p. 1521-1530 (cité p. 162).

- Li, D. « Revisiting the subgrid-scale Prandtl number for large-eddy simulation ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 802 (2016) (cité p. 34).
- Ligrani, P., G. Potts et A. Fatemi. « Endwall aerodynamic losses from turbine components within gas turbine engines ». In : *Propulsion and Power Research* 6.1 (2017), p. 1-14 (cité p. 15).
- Lund, T. S., X. Wu et K. D. Squires. « Generation of Turbulent Inflow Data for Spatially-Developing Boundary Layer Simulations ». In : *Journal of Computational Physics* 140 (1998), p. 233-258 (cité p. 161, 162).
- Madad, R., Z. Harun, K. Chauhan, J. Monty et I. Marusic. « Skin friction measurement in zero and adverse pressure gradient boundary layers using oil film interferometry ». In : *Proceedings of the 17th Australasian Fluid Mechanics Conference, Auckland*. 2010 (cité p. 157).
- Maeder, T., N. A. Adams et L. Kleiser. « Direct simulation of turbulent supersonic boundary layers by an extended temporal approach ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 429 (2001), p. 187-216 (cité p. 74).
- Mailach, R., I. Lehmann et K. Vogeler. « Periodical Unsteady Flow Within a Rotor Blade Row of an Axial Compressor : Part I — Flow Field at Midspan ». In : *Volume 6 : Turbo Expo 2007, Parts A and B*. ASME, 2007 (cité p. 13, 14).
- Marusic, I. et N. Hutchins. « Study of the Log-Layer Structure in Wall Turbulence Over a Very Large Range of Reynolds Number ». In : *Flow, Turbulence and Combustion* 81.1-2 (2007), p. 115-130 (cité p. 52).
- Marusic, I., R. Mathis et N. Hutchins. « High Reynolds number effects in wall turbulence ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 31.3 (2010), p. 418-428 (cité p. 53).
- « Predictive Model for Wall-Bounded Turbulent Flow ». In : *Science* 329.5988 (2010), p. 193-196 (cité p. 63, 69).
- Marusic, I., B. J. McKeon, P. A. Monkewitz, H. M. Nagib, A. J. Smits et K. R. Sreenivasan. « Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers : Recent advances and key issues ». In : *Physics of Fluids* 22.6 (2010), p. 065103 (cité p. 47, 48, 50).
- Marusic, I., J. P. Monty, M. Hultmark et A. J. Smits. « On the logarithmic region in wall turbulence ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 716 (2013), R3 (cité p. 47).
- Marusic, I. et A. E. Perry. « A wall-wake model for the turbulence structure of boundary layers. Part 2. Further experimental support ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 298 (1995), p. 389-407 (cité p. 57, 157).
- Mary, I. et P. Sagaut. « Large Eddy Simulation of Flow Around an Airfoil Near Stall ». In : *AIAA Journal* 40.6 (2002), p. 1139-1145 (cité p. 116).
- Mathis, R., N. Hutchins et I. Marusic. « Large-scale amplitude modulation of the small-scale structures in turbulent boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 628 (2009), p. 311-337 (cité p. 53).
- Mee, D. J., N. C. Baines, M. L. G. Oldfield et T. E. Dickens. « An Examination of the Contributions to Loss on a Transonic Turbine Blade in Cascade ». In : *Journal of Turbomachinery* 114.1 (1992), p. 155 (cité p. 10).

- Mellor, G. L. et D. M. Gibson. « Equilibrium turbulent boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 24 (1966), p. 225-253 (cité p. 55, 103).
- Menter, F. R. « Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications ». In : *(AIAA) Journal* 32.8 (1994), p. 1598-1605 (cité p. 30, 119).
- Menter, F. R. et M. Kuntz. « Adaptation of Eddy-Viscosity Turbulence Models to Unsteady Separated Flow Behind Vehicles ». In : *The Aerodynamics of Heavy Vehicles : Trucks, Buses, and Trains*. Springer Berlin Heidelberg, 2004, p. 339-352 (cité p. 121, 122).
- Meyer, R. X. « The Effect of Wakes on the Transient Pressure and Velocity Distributions in Turbomachines ». In : *Journal of Basic Engineering* 80 (1958), p. 1544-1552 (cité p. 13).
- Michon, G. J., H. Miton et N. Ouayhaya. « Unsteady Off-Design Velocity and Reynolds Stresses in an Axial Compressor ». In : *Journal of Propulsion and Power* 21.6 (2005), p. 961-972 (cité p. 190).
- Mizuno, Y. et J. Jiménez. « Wall turbulence without walls ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 723 (2013), p. 429-455 (cité p. 51, 95).
- Moin, P., K. Squires, W. Cabot et S. Lee. « A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport ». In : *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* 3.11 (1991), p. 2746-2757 (cité p. 34).
- Monfort, D., S. Benhamadouche et P. Sagaut. « Meshless approach for wall treatment in Large-Eddy Simulation ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.13-16 (2010), p. 881-889 (cité p. 98, 106-108).
- Monkewitz, P. A., K. A. Chauhan et H. M. Nagib. « Comparison of mean flow similarity laws in zero pressure gradient turbulent boundary layers ». In : *Physics of Fluids* 20.10 (2008), p. 105102 (cité p. 47).
- Monty, J., Z. Harun et I. Marusic. « A parametric study of adverse pressure gradient turbulent boundary layers ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 32 (2011), p. 575-585 (cité p. 56, 58, 60-62, 104, 156, 158).
- Morkovin, M. V. « Effects of compressibility on turbulent flows ». In : Favre, A. (ed.) *Mécanique de la Turbulence*. CNRS, 1962, p. 367-380 (cité p. 74).
- « On the Many Faces of Transition ». In : *Viscous Drag Reduction*. Springer US, 1969, p. 1-31 (cité p. 10).
- Mouret, G. « Adaptation of phase-lagged boundary conditions to large-eddy simulation in turbomachinery configuration ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse), 2016 (cité p. 11, 219).
- Murlis, J., H. M. Tsai et P. Bradshaw. « The structure of turbulent boundary layers at low Reynolds numbers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 122 (1982), p. 13-56 (cité p. 50).
- Nagano, Y., T. Tsuji et T. Houra. « Structure of turbulent boundary layer subjected to adverse pressure gradient ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 19 (1998), p. 563-572 (cité p. 56, 57).
- Nagarajan, S., S. K. Lele et J. H. Ferziger. « A robust high-order compact method for large eddy simulation ». In : *Journal of Computational Physics* 191.2 (2003), p. 392-419 (cité p. 34).

- Nagib, H. M. et K. A. Chauhan. « Variations of von Kármán coefficient in canonical flows ». In : *Physics of Fluids* 20 (2008), p. 101518 (cité p. 46).
- Narasimha, R. et K. R. Sreenivasan. « Relaminarization in highly accelerated turbulent boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 61.3 (1973), p. 417-447 (cité p. 65, 67).
- Narayanan, M. A. B. et V. Ramjee. « On the criteria for reverse transition in a two-dimensional boundary layer flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 35.2 (1969), p. 225-241 (cité p. 65, 66).
- Ng, H. C. H., I. Marusic, J. P. Monty, N. Hutchins et M. S. Chong. « Oil film interferometry in high Reynolds number turbulent boundary layers ». In : *Proceedings of the 16th Australasian Fluid Mechanics Conference, Gold Coast*. School of Engineering, The Univ. of Queensland, 2007 (cité p. 157).
- Nicoud, F., J. S. Baggett, P. Moin et W. Cabot. « Large eddy simulation wall-modeling based on suboptimal control theory and linear stochastic estimation ». In : *Physics of Fluids* 13.10 (2001), p. 2968-2984 (cité p. 97).
- Nicoud, F. et F. Ducros. « Subgrid-Scale Stress Modelling Based on the Square of the Velocity Gradient Tensor ». In : *Flow, Turbulence and Combustion* 62.3 (1999), p. 183-200 (cité p. 34).
- Öngören, A. *Heat transfer on the endwall of a turbine cascade with film cooling*. Rapp. tech. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1981 (cité p. 15, 16).
- Orlandi, P. et M. Fatica. « Direct simulations of turbulent flow in a pipe rotating about its axis ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 343 (1997), p. 43-72 (cité p. 73).
- Orlando, A., R. J. Moffat et W. M. Kays. *Turbulent transport of heat and momentum in a boundary suction and variable wall temperature*. Rapp. tech. HMT-17. NASA, 1974 (cité p. 57).
- Ottavy, X. « Cours de turbomachines à fluide compressible ». In : *École Centrale de Lyon* (2006) (cité p. 5).
- Ould-Rouiss, M., A. Dries et A. Mazouz. « Numerical predictions of turbulent heat transfer for air flow in rotating pipe ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 31.4 (2010), p. 507-517 (cité p. 73).
- Pamiès, M., P.-E. Weiss, G. Garnier, S. Deck et P. Sagaut. « Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows ». In : *Physics of Fluids* 21.4 (2009), p. 045103 (cité p. 163).
- Park, G. I. et P. Moin. « An improved dynamic non-equilibrium wall-model for large eddy simulation ». In : *Physics of Fluids* 26 (2014), p. 015108 (cité p. 93, 96, 106, 110, 111).
- « Numerical aspects and implementation of a two-layer zonal wall model for LES of compressible turbulent flows on unstructured meshes ». In : *Journal of Computational Physics* 305 (2016), p. 589-603 (cité p. 110).
- Patel, V. C. « A Unified View of the Law of the Wall Using Mixing-Length Theory ». In : *Aeronautical Quarterly* 24.1 (1973), p. 55-70 (cité p. 102, 104, 105).
- Patel, V. et F. Sotiropoulos. « Longitudinal curvature effects in turbulent boundary layers ». In : *Progress in Aerospace Sciences* 33.1-2 (1997), p. 1-70 (cité p. 155).

- Pino Martín, M. « Direct numerical simulation of hypersonic turbulent boundary layers. Part 1. Initialization and comparison with experiments ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 570 (2007), p. 347-364 (cité p. 74).
- Pino Martín, M., U. Piomelli et G. Candler. « Subgrid-Scale Models for Compressible Large-Eddy Simulations ». In : *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 13.5 (2000), p. 361-376 (cité p. 34).
- Piomelli, U. et E. Balaras. « Wall-Layer Models for Large-Eddy Simulations ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 34 (2002), p. 349-74 (cité p. 84, 87-89).
- Piomelli, U., E. Balaras, H. Pasinato, K. D. Squires et P. R. Spalart. « The inner-outer layer interface in large-eddy simulations with wall-layer models ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 24 (2003), p. 538-550 (cité p. 121).
- Piomelli, U. et J. Yuan. « Numerical simulations of spatially developing, accelerating boundary layers ». In : *Physics of Fluids* 25.10 (2013), p. 101304 (cité p. 65-69).
- Piomelli, U. « Wall-layer models for large-eddy simulations ». In : *Progress in Aerospace Sciences* 44.6 (2008), p. 437-446 (cité p. 87).
- Pirozzoli, S., F. Grasso et T. B. Gatski. « Direct numerical simulation and analysis of a spatially evolving supersonic turbulent boundary layer at  $M=2.25$  ». In : *Physics of Fluids* 16.3 (2004), p. 530-545 (cité p. 74).
- Pirozzoli, S. et M. Bernardini. « Turbulence in supersonic boundary layers at moderate Reynolds number ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 688 (2011), p. 120-168 (cité p. 74).
- Pohlhausen, K. « Zur näherungsweise integration der differentialgleichung der laminaren grenzschicht ». In : *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 1.4 (1921), p. 252-290 (cité p. 132, 216).
- Poinsot, T. J. et S. K. Lele. « Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows ». In : *Journal of Computational Physics* 101 (1992), p. 104-129 (cité p. 167, 226).
- Rahgozar, S. et Y. Maciel. « Low- and high-speed structures in the outer region of an adverse-pressure-gradient turbulent boundary layer ». In : *Experimental Thermal and Fluid Science* 35.8 (2011), p. 1575-1587 (cité p. 63).
- Rai, M., T. Gatski et G. Erlebacher. « Direct simulation of spatially evolving compressible turbulent boundary layers ». In : *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. American Institute of Aeronautics et Astronautics, 1995 (cité p. 74).
- Rayleigh, L. « On the stability, or instability, of certain fluid motions ». In : *Proceedings of the London Mathematical Society* 11.1 (1880), p. 57-72 (cité p. 54).
- Reich, G. et H. Beer. « Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe—I. Effect of rotation on turbulent pipe flow ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 32.3 (1989), p. 551-562 (cité p. 73).
- Reichardt, H. « Complete representation of the turbulent velocity distribution in smooth pipes ». In : *Z. Angew. Math. Mech* 31 (1951), p. 208 (cité p. 75, 101-103, 169-171, 178, 179, 184, 185).

- Renard, N. et S. Deck. « Improvements in Zonal Detached Eddy Simulation for Wall Modeled Large Eddy Simulation ». In : *AIAA Journal* 53.11 (2015), p. 3499-3504 (cité p. 123).
- Robinson, S. K. « Coherent Motions in the Turbulent Boundary Layer ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 23.1 (1991), p. 601-639 (cité p. 53).
- Rotta, J. C. *Turbulent Boundary Layers with Heat Transfer in Compressible Flow*. Rapp. tech. Advisory Group for Aeronautical Research et Development, Vol. 281, 1960 (cité p. 74, 75, 103).
- Sagaut, P. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Sous la dir. de Springer. Springer, 2006 (cité p. 32, 35, 38).
- « Turbulence : une introduction ». In : *Université Pierre et Marie Curie - Paris 6* (2013) (cité p. 30, 163).
- Sagaut, P., S. Deck et M. Terracol. *Multiscale and multiresolution approaches in turbulence, 2nd edition*. Sous la dir. d'I. C. Press. Imperial College Press, 2013 (cité p. 28, 39, 118, 160-163).
- Sagaut, P., E. Garnier, E. Tromeur, L. Larcheveque et E. Labourasse. « Turbulent Inflow Conditions for Large-Eddy-Simulation of Compressible Wall-Bounded Flows ». In : *AIAA Journal* 42.3 (2004), p. 469-477 (cité p. 162).
- Samuel, A. E. et P. N. Joubert. « A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 66 (1974), p. 481-505 (cité p. 57).
- Sandham, N., Y. Yao et A. Lawal. « Large-eddy simulation of transonic turbulent flow over a bump ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 24.4 (2003), p. 584-595 (cité p. 163-166, 168-171, 174, 176).
- Satake, S.-i. et T. Kunugi. « Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in an axially rotating pipe flow ». In : *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 12.8 (2002), p. 958-1008 (cité p. 73).
- Schlatter, P. et R. Örlü. « Assessment of direct numerical simulation data of turbulent boundary layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 659 (2010), p. 116-126 (cité p. 164).
- « Turbulent boundary layers at moderate Reynolds numbers : inflow length and tripping effects ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 710 (2012), p. 5-34 (cité p. 164).
- Schoppa, W. et F. Hussain. « Coherent structure generation in near-wall turbulence ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 453 (2002), p. 57-108 (cité p. 50).
- Schumann, U. « Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli ». In : *Journal of Computational Physics* 18.4 (1975), p. 376-404 (cité p. 99).
- Selle, L., F. Nicoud et T. Poinso. « Actual Impedance of Nonreflecting Boundary Conditions : Implications for Computation of Resonators ». In : *AIAA Journal* 42.5 (2004), p. 958-964 (cité p. 168, 228).
- Sharma, O. P. et T. L. Butler. « Predictions of Endwall Losses and Secondary Flows in Axial Flow Turbine Cascades ». In : *Journal of Turbomachinery* 109.2 (1987), p. 229 (cité p. 14, 15).



- Shih, T., L. A. Povinelli, N.-S. Liu, M. G. Potapczuk et J. L. Lumley. *A Generalized Wall Function*. Rapp. tech. NASA TM-1999-209398, 1999 (cité p. 105).
- Shur, M. L., P. R. Spalart et M. K. Strelets. « Noise Prediction for Increasingly Complex Jets. Part I : Methods and Tests ». In : *International Journal of Aeroacoustics* 4.3 (2005), p. 213-245 (cité p. 120).
- Shur, M. L., P. R. Spalart, M. K. Strelets et A. Travin. « Detached-eddy simulation of an airfoil at high angle of attack ». In : *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 4*. Elsevier, 1999, p. 669-678 (cité p. 118).
- Shur, M. L., P. R. Spalart, M. K. Strelets et A. K. Travin. « A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29.6 (2008), p. 1638-1649 (cité p. 122).
- Sieverding, C. H. et P. Van den Bosche. « The use of coloured smoke to visualize secondary flows in a turbine-blade cascade ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 134.1 (1983), p. 85 (cité p. 15).
- Skäre, P. E. et P. A. Krogstad. « A turbulent equilibrium boundary layer near separation ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 272 (1994), p. 319-348 (cité p. 55, 57, 62, 63).
- Skote, M. et D. S. Henningson. « Direct numerical simulation of a separated turbulent boundary layer ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 471 (2002), p. 107-136 (cité p. 58, 102-105).
- Skote, M., D. S. Henningson et R. A. W. M. Henkes. « Direct Numerical Simulation of Self-Similar Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients ». In : *Flow, Turbulence and Combustion* 60 (1998), p. 47-85 (cité p. 57).
- Slotnick, J. P., A. Khodadoust, J. J. Alonso, D. L. Darmofal, W. D. Gropp, E. A. Lurie, D. J. Mavriplis et V. Venkatakrishnan. « Enabling the environmentally clean air transportation of the future : a vision of computational fluid dynamics in 2030 ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 372.2022 (2014), p. 20130317-20130317 (cité p. xiii).
- Smirnov, A., S. Shi et I. Celik. « Random Flow Generation Technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling ». In : *Journal of Fluids Engineering* 123.2 (2001), p. 359 (cité p. 162).
- Smith, L. H. « Wake Dispersion in Turbomachines ». In : *Journal of Basic Engineering* 88.3 (1966), p. 688-690 (cité p. 13).
- Smits, A. J., B. J. McKeon et I. Marusic. « High—Reynolds Number Wall Turbulence ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 43.1 (2011), p. 353-375 (cité p. 48, 50, 53).
- Spalart, P. R. « Detached-Eddy Simulation ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 41 (2009), p. 181-202 (cité p. 36, 118, 120, 122).
- « Numerical study of sink-flow boundary layers ». In : 172 (1986), p. 307-328 (cité p. 66).
- Spalart, P. R. et S. Allmaras. « A one-equation turbulence model for aerodynamic flows ». In : *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. American Institute of Aeronautics et Astronautics (AIAA), 1992 (cité p. 118, 119).

- Spalart, P. R., S. Deck, M. L. Shur, K. D. Squires, M. K. Strelets et A. Travin. « A New Version of Detached-eddy Simulation, Resistant to Ambiguous Grid Densities ». In : *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 20.3 (2006), p. 181-195 (cité p. 121, 122).
- Spalart, P. R., W.-H. Jou, M. K. Strelets et S. R. Allmaras. « Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach ». In : *Advances in DNS/LES*. Sous la dir. de C. Liu et Z. Liu. Columbus, OH : Greyden Press, 1997, p. 137-147 (cité p. 118, 119).
- Spalart, P. R., M. Strelets et A. Travin. « Direct numerical simulation of large-eddy-break-up devices in a boundary layer ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 27.5 (2006), p. 902-910 (cité p. 162).
- Spalart, P. R. et J. H. Watmuff. « Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with pressure gradients ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 249 (1993), p. 337-371 (cité p. 55, 57, 156).
- Spalding, D. B. « A Single Formula for the "Law of the Wall" ». In : *Journal of Applied Mechanics* 28(3) (1961), p. 455-458 (cité p. 101).
- Spille-Kohoff, A. et H. J. Kaltenbach. « Generation of turbulent inflow data with a prescribed shear-stress profile ». In : *DNS/LES Progress and Challenges. Proceedings of the Third AFOSR International Conference on DNS/LES*. Texas University, Arlington, 2001 (cité p. 164).
- Sreenivasan, K. R. « Laminarescent, relaminarizing and retransitional flows ». In : *Acta Mechanica* 44.1 (1982), p. 1-48 (cité p. 65).
- Strelets, M. K. « Detached eddy simulation of massively separated flows ». In : *39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. American Institute of Aeronautics et Astronautics, 2001 (cité p. 119).
- Taylor, G. I. « Statistical Theory of Turbulence ». In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 151.873 (1935), p. 421-444 (cité p. 163).
- Tennekes, H. et J. L. Lumley. *A first course in turbulence*. MIT Press, 1972 (cité p. 105).
- Townsend, A. A. « Equilibrium layers and wall turbulence ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 11.1 (1961), p. 97-120 (cité p. 51, 55).
- Tyacke, J. C. et P. G. Tucker. « Future Use of Large Eddy Simulation in Aero-engines ». In : *Journal of Turbomachinery* 137 (2015), p. 081005 (cité p. 117).
- Tyacke, J., P. Tucker, R. Jefferson-Loveday, N. R. Vadlamani, R. Watson, I. Naqavi et X. Yang. « Large Eddy Simulation for Turbines : Methodologies, Cost and Future Outlooks ». In : *Journal of Turbomachinery* 136.6 (2013), p. 061009 (cité p. 70, 117).
- Urbain, G. et D. Knight. « Large-Eddy Simulation of a Supersonic Boundary Layer Using an Unstructured Grid ». In : *AIAA Journal* 39.7 (2001), p. 1288-1295 (cité p. 162).
- Van Driest, E. R. « Turbulent Boundary Layer in Compressible Fluids ». In : *Journal of the Aeronautical Sciences* 18.3 (1951), p. 145-160 (cité p. 74, 103).
- Vila, C. S., R. Örlü, R. Vinuesa, P. Schlatter, A. Ianiro et S. Discetti. « Adverse-Pressure-Gradient Effects on Turbulent Boundary Layers : Statistics and Flow-Field Organization ». In : *Flow, Turbulence and Combustion* 99.3-4 (2017), p. 589-612 (cité p. 56, 59, 60, 62, 104, 156).

- Vreman, B., B. Geurts et H. Kuerten. « Large-eddy simulation of the turbulent mixing layer ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 339 (1997), p. 357-390 (cité p. 34).
- « Subgrid-modelling in LES of compressible flow ». In : *Applied Scientific Research* 54.3 (1995), p. 191-203 (cité p. 34).
- Wang, L., S. Fu, A. Carnarius, C. Mockett et F. Thiele. « A modular RANS approach for modelling laminar–turbulent transition in turbomachinery flows ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 34 (2012), p. 62-69 (cité p. 74).
- Wang, M. et P. Moin. « Dynamic wall modeling for large-eddy simulation of complex turbulent flows ». In : *Physics of Fluids* 14.7 (2002), p. 2043-2051 (cité p. 94, 99, 109, 111, 112, 115).
- Warnack, D. et H. H. Fernholz. « The effects of a favourable pressure gradient and of the Reynolds number on an incompressible axisymmetric turbulent boundary layer. Part 2. The boundary layer with relaminarization ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 359 (1998), p. 357-381 (cité p. 68).
- Wei, L. et A. Pollard. « Direct numerical simulation of low Mach number turbulent wall bounded flow with favourable and adverse pressure gradients ». In : *Journal of Turbulence* 13.5 (2012), p. 1-25 (cité p. 55, 56, 58, 156).
- Wei, T., R. Schmidt et P. McMurtry. « Comment on the Clauser chart method for determining the friction velocity ». In : *Experiments in Fluids* 38.5 (2005), p. 695-699 (cité p. 56).
- White, F. M. *Viscous Fluid Flow (Mcgraw Hill Series In Mechanical Engineering)*. McGraw-Hill Education, 2005 (cité p. 11).
- Wilcox, D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. Sous la dir. de D. Industries. DCW Industries, 1993 (cité p. 30).
- Wu, P. et J. Meyers. « A constraint for the subgrid-scale stresses in the logarithmic region of high Reynolds number turbulent boundary layers : A solution to the log-layer mismatch problem ». In : *Physics of Fluids* 25.1 (2013), p. 015104 (cité p. 95).
- Wu, X. « Inflow Turbulence Generation Methods ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 49.1 (2017), p. 23-49 (cité p. 160, 162).
- Wu, X. et P. Moin. « Direct numerical simulation of turbulence in a nominally zero-pressure-gradient flat-plate boundary layer ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 630 (2009), p. 5-41 (cité p. 50).
- Yang, X., J. Sadique, R. Mittal et C. Meneveau. « Integral wall model for large eddy simulations of wall-bounded turbulent flows ». In : *Physics of Fluids* 27(2) (2015), :025112 (cité p. 94, 99, 109, 132, 153, 194, 216).
- Yoon, M., J. Hwang et H. J. Sung. « Contribution of large-scale motions to the skin friction in a moderate adverse pressure gradient turbulent boundary layer ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 848 (2018), p. 288-311 (cité p. 59, 62, 63).
- You, D., M. Wang, P. Moin et R. Mittal. « Large-eddy simulation analysis of mechanisms for viscous losses in a turbomachinery tip-clearance flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 586 (2007), p. 177 (cité p. 18).



## Résumé

Au regard des défis énergétiques rencontrés par les motoristes aéronautiques, une meilleure compréhension des écoulements régissant leurs turbomachines est nécessaire. La simulation aux grandes échelles (LES) est une approche adaptée à cette quête d'innovation. Cependant, dans le cas de couches limites à des nombres de Reynolds typiques de ceux rencontrés en aéronautique, son coût de résolution est prohibitif par rapport aux moyens de calcul actuels.

Une manière de surmonter cette limitation est de recourir à une approche WMLES (*Wall-Modeled LES*). Elle consiste à ne résoudre que la zone externe d'une couche limite et à en extraire les données nécessaires à l'estimation des flux pariétaux par un modèle de paroi, qui va modéliser les effets de la zone interne. Toutefois, l'utilisation d'une WMLES sur des géométries industrielles est encore une question ouverte. C'est pourquoi, un modèle de paroi adapté aux écoulements de turbomachines est ici développé : l'iWMLES (*integral WMLES*).

L'iWMLES est analogue à la méthode de von Kármán-Pohlhausen pour les écoulements laminaires : les profils de vitesse et de température sont paramétrisés, et les paramètres inconnus sont déterminés afin de vérifier des conditions aux limites issues des équations de couche limite intégrales. Cela permet à l'iWMLES de prendre en compte les effets de compressibilité, de gradients de température et de pression caractérisant les couches limites présentes dans une turbomachine, tout en étant peu gourmand en ressources de calcul et simple d'utilisation. Les profils paramétrisés sont basés sur les lois de paroi logarithmiques, auxquelles sont rajoutées des termes de correction pour étendre leur domaine d'application. Seul un système d'équations différentielles scalaires indépendantes de la distance à la paroi doit alors être résolu.

L'iWMLES est implémenté dans un solveur structuré basé sur la méthode des volumes finis et est validé sur des écoulements académiques. Tout d'abord, des écoulements de canal plan isothermes et adiabatiques à différents nombres de Reynolds et de Mach sont simulés. Dans tous les cas, les profils moyens, les flux pariétaux et les fluctuations turbulentes sont en accord avec les données de référence. En particulier, les cas d'écoulements supersoniques démontrent que l'iWMLES a un domaine de validité plus étendu que les modèles de paroi classiques. Puis, une expérience de couche limite soumise à un gradient de pression adverse est considéré. Un soin particulier est pris pour la reproduire numériquement. Notamment, une méthode d'injection de turbulence non-réfléchissante est proposée et validée avant d'être utilisée. Ici aussi, les moments statistiques jusqu'à l'ordre un sont bien prédits. Enfin, l'iWMLES est appliqué sur un étage de compresseur axial, démontrant sa robustesse, et les résultats sont comparés avec ceux d'une LES résolue en paroi.

**Mots-clés :** WMLES, modèle de paroi, couche limite, turbulence, turbomachine