Sur la géométrie des solitons de Kähler-Ricci dans les variétés toriques et horosphériques

François Delgove

NNT : 2019SACLS084

THÈSE DE DOCTORAT

de

l'Université Paris-Saclay

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : Université Paris-Sud

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

François Delgove

Sur la géométrie des solitons de Kähler-Ricci dans les variétés toriques et horosphériques

Date de soutenance : 4 Avril 2019

Après avis des rapporteurs : Vestislav APOSTOLOV (Université du Québec à Montréal)
Joel FINE (Université libre de Bruxelles)

Jury de soutenance :

Joel FINE	(Université libre de Bruxelles)	Rapporteur
Nefton Pali	(Université Paris-Sud)	Directeur de thèse
Frédéric PAULIN	(Université Paris-Sud)	Président du jury
Nicolas PERRIN	(Université Versailles Saint-Quentin)	Examinateur
Yann ROLLIN	(Université de Nantes)	Examinateur
Rosa SENA-DIAS	(Instituto Superior Tecnico Lisboa)	Examinateur

En fait l'important ne serait pas de réussir sa vie,
mais de rater sa mort. - Jean Yanne

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier Nefton Pali pour avoir accepté d'encadrer cette thèse. Je voudrais tout de suite aussi remercier Frédéric Paulin pour son énorme travail durant ma quatrième année et notamment sa relecture attentive de ce manuscrit.

Je voudrais également remercier les deux rapporteurs : Vestislav Apostolov et Joel Fine pour ce travail et leurs retours nombreux et forts pertinents. Je suis aussi très reconnaissant à Rosa Sena-Dias, Joël Fine, Frédéric Paulin, Yann Rollin et Nicolas Perrin pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Une thèse est aussi faite de rencontres. En premier lieu, ce sont souvent des rencontres "mathématiques". Mes premières pensées vont alors à Serge Varjabédian et Jean-Paul Bonnet, mes professeurs en classe préparatoire. Sans vous, sans cette aide généreuse que vous avez apportée à l'étudiant que j'étais, sans votre enseignement et votre exemple, rien de tout cela ne serait arrivé. Trouvez ici la marque indélébile de ma gratitude. La seconde rencontre qui a fait éclore mon goût de la recherche mathématique est celle de Frédéric Paulin, qui a encadré mon stage de première année de magistère où notamment grâce à son aide, j'ai eu l'occasion de publier mon premier article. Je n'oublierai pas cette chance que vous m'avez donnée, les nombreuses heures que vous m'avez consacrées ni les nombreuses versions corrigées de mes écrits que je garde comme de sacro-saintes reliques [1]. Je pense aussi à Joël Merker qui a encadré mon mémoire de M1 ainsi pendant lequel ses nombreux conseils de rédactions qui n'ont pas manqué d'être utiles pour ce manuscrit. Durant ma thèse, j'ai aussi eu la chance de discuter de mes travaux avec différentes personnes, je pense en particulier à Eveline Legendre, Paul Gauduchon, Boris Pasquier, Michel Brion et Thibaut Delcroix. Je voudrais terminer ce paragraphe par remercier en particulier chaleureusement Antoine Chambert-Loir. En plus de m'avoir enseigné et fait découvrir la géométrie différentielle et algébrique, vous avez toujours trouvé les mots justes pour me re-motiver lors de mes moments de doute. Cette thèse est du moins une occasion pour vous dire ce que vous avez été et êtes toujours pour moi et pour vous assurer que vos efforts, votre travail et le cœur généreux que vous y mettiez sont toujours vivants chez un de vos étudiants qui, malgré l'âge, n'a pas cessé d'être votre reconnaissant élève.

Et puis, il y a les rencontres, disons moins "mathématiques", celles qui se produisent à la machine à café, lors d'un pot ou d'un repas où l'on échange sur tout et rien. À tout seigneur, tout honneur ! Je remercie donc Étienne Fouvry. Nos discussions au détour d'un pot ou d'une bonne bière ont marqué ma thèse et ont égayé mes journées parfois moroses [2]. Ma seconde pensée va à tout ceux qui sont passés par le bureau 106 ou 2D20 et qui ont fait que venir au bureau était un plaisir. Je pense notamment à Valérie, Pierre, Mor, Anthony. Il faut ensuite rajouter tous les doctorants avec qui j'ai bu un café, une pensée particulière pour Benjamin, Jeanne, Martin, Guillaume, Gabriel et Jacques. Terminons avec une pensée pour Léa (alias Micheline) qui a cherché tous les *Ric* pour les redresser !

La phase la plus difficile commence, celle des amis, il ne faut surtout pas en oublier sous peine de devoir faire un erratum à la thèse. On va même le faire par ordre alphabétique [3]. Je remercie donc Adrien pour nos nombreuses discussions autour d'un burger ou d'une pizza. En plus d'une thèse, j'ai, grâce à toi, du cholestérol ! Pour nos discussions courtes mais intenses, un grand merci à Anthony. Je remercie aussi Benjamin pour nos ballades à la bibliothèque et à la Poste. Vient ensuite le tour des Benoîts, le premier sera Duvocelle pour nos nombreuses discussions politiques ainsi que nos pendus durant la pause déjeuner, puis de Robert pour trop de choses qui ne peuvent se résumer, puis de Tran pour toutes les dégustations de bières faites

1. Je vous remercie aussi pour vos techniques de drague même si elles se révèlent peu efficaces.
2. J'ai oublié ! Merci pour les moules-frites.
3. Si je vous ai oublié, c'est que je n'avais pas votre numéro de téléphone.

ensemble. Je remercie également Céline Bonnet pour sa joie de vivre communicative, son soutien et son aide précieuse dans les moments les plus sombres de ma thèse. Pour la même raison, je remercie Juliette et Jeanne. À la lettre J, il y a aussi Jacques que je remercie pour ses cours de boxes. Il reste à la lettre J, une deuxième Juliette que je remercie ainsi que Pastel pour m'avoir appris à monter un oxer polonais. Pour toutes nos aventures à Douai puis à Orsay, un grand merci à Lydéric et Céline P., le Lylyguedon aura lieu un jour je l'espère ! Ensuite, comment ne pas remercier Maxime pour nos braquages de banques nocturnes et Méli pour ses délicieux mojitos qui m'ont permis d'oublier mes journées de travail difficiles. Et puis, il y a Pierre et toutes nos discussions littéraires et (pseudo) philosophiques ainsi que son soutien et conseils durant cette thèse. N'oublions pas Rémi pour avoir fait le pilier de bar avec moi. Enfin le dernier de la liste, et non des moindres, Samuel, que je remercie tout simplement d'être Samuel !

Il y a aussi quelques amis plus lointains que je tiens quand même à remercier, en particulier mes amis belges Dimitri, Thibault, Marc et Sébastien. Il y aussi ceux du Tap-Cul [4], j'ai une pensée émue pour M. Colaert décédé durant ma troisième année de thèse et pour Henri Hubert qui m'a appris à remucher des patates. Et terminons par Hervé Faye pour nos discussions autour d'un bon repas et d'une bouteille de vin (ou même plusieurs).

J'ai failli oublié B.A, Patapouf et Nounours pour leurs soutiens indéfectibles ainsi que M. Potam qui prend les coups à ma place !

Il me reste à remercier ma famille : mes parents pour m'avoir permis d'accomplir mon projet professionnel, mon frère pour son soutien et ses repas qu'il m'a mijoté avec amour et ma marraine et mon parrain pour toutes les bières qu'ils m'ont offertes !

J'aimerais terminer ces remerciements par un remerciement spécial. Une thèse est sans doute un moment heureux dans la vie de tout étudiant, mais il peut arriver qu'elle se transforme en cauchemar. J'ai eu la malchance de connaître cela mais j'ai eu la chance de m'en sortir grâce à l'aide de nombreuses personnes que je voudrais remercier ici. Tout d'abord, il y a le Dr Sammari qui par son travail m'a permis de retrouver confiance en moi et de retrouver le courage de reprendre le travail. Je pense aussi à Frédéric Paulin qui m'a aidé à pouvoir finir cette thèse dans de bonnes conditions malgré tout et à Antoine Chambert-Loir pour ses e-mails toujours aussi remotivant ! Et pour terminer, il y a surtout Céline, Juliette, Juliette (non je ne bégaye pas), Adrien, Benoît et Pierre. Vous avez été présents à chaque moment (et surtout dans les pires), je vous dois beaucoup, vous étiez la lumière dans ces ténèbres, vous m'avez montré que la vie peut être douce et agréable, que le monde n'est pas à l'image de mes craintes, et que j'y ai ma place. Pour tout cela, j'aimerais donc vous dédier à tous les six cette thèse.

4. Google Maps est votre ami.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Métriques de Kähler-Einstein

En 1915, Einstein publie l'équation suivante qui porte maintenant son nom :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, R est la courbure scalaire, $g_{\mu\nu}$ est le tenseur de la métrique lorentzienne i.e. de signature (+ - - -), Λ est la constante cosmologique, $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion et κ est la constante gravitationnelle d'Einstein. Dans cette équation, le terme de droite qui correspond au tenseur énergie-impulsion représente la répartition de masse et d'énergie dans l'espace-temps et le terme de gauche représente la courbure de l'espace-temps déterminée par la métrique. Cette équation permet de comprendre comment la distribution de masse-énergie agit sur la courbure de l'espace-temps. Un cas important est lorsque nous nous plaçons dans le vide i.e. $T_{\mu\nu} = 0$ alors :

$$R_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2} R - \Lambda \right) g_{\mu\nu}.$$

En prenant la trace de cette équation, nous obtenons que

$$R = \frac{2n}{n-2} \Lambda,$$

et donc *l'équation d'Einstein dans le vide* s'écrit :

$$R_{\mu\nu} = \left(\frac{2\Lambda}{n-2} \right) g_{\mu\nu}.$$

On pose alors $k := \frac{2\Lambda}{n-2}$ que l'on appelle *la constante d'Einstein*. Une métrique vérifiant cette propriété sera alors dite *métrique d'Einstein* et la variété sous-jacente sera *une variété (lorentzienne) d'Einstein*. Par la suite, les mathématiciens ont retiré l'hypothèse lorentzienne, ont travaillé en dimension quelconque et se sont ainsi mis à chercher des variétés riemanniennes qui admettent des métriques d'Einstein.

Dans cette thèse, nous nous placerons du point de vue de la géométrie complexe et nous travaillerons en particulier sur des variétés kählériennes compactes. Rappelons qu'une *variété kählérienne* est une variété hermitienne (M, h) telle que la $(1,1)-$forme $\omega := -\mathrm{Im}\, h$, appelée la *forme kählérienne*, soit fermée, et que l'on la munit de la métrique riemannienne $g := \mathrm{Re}\, h$ (qui détermine h donc ω). On s'intéresse à une équation similaire à celle d'Einstein :

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda \omega,$$

où $\mathrm{Ric}(\omega)$ *est la forme de Ricci associée à* ω et λ une constante. Une métrique kählérienne vérifiant une telle équation sera appelée dans ce cas *métrique de Kähler-Einstein*. Pour étudier cette équation, on peut par exemple utiliser *le flot de Ricci*. En effet, il existe un lien entre ces métriques et la convergence du *flot de*

Kähler-Ricci. Ce dernier consiste en une famille $(\omega_t)_t$ de métriques kählériennes dépendant d'un paramètre de temps t variant dans un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[0, T[$ où $T \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_t = -\operatorname{Ric}(\omega_t), \tag{1.1}$$

où ω_0 est une forme de Kähler fixée au départ. On peut montrer qu'il existe une solution maximale à cette équation définie sur un intervalle $[0, T_{max}[$ où $T_{max} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L'idée est de déterminer T_{max} et d'étudier la limite de ω_t quand t tend vers T_{max}. Ici, les résultats ne sont pas généraux et dépendent d'un invariant cohomologie de la variété kählérienne compacte M dans laquelle nous travaillons : *la première classe de Chern* $c_1(M)$. Nous pouvons la définir comme la classe de cohomologie (réelle) de la forme de Kähler $\operatorname{Ric}(\omega)$ (pour une forme de Kähler sur M quelconque, on montre qu'elle ne dépend pas d'un tel choix). Ce qui sera important, c'est le signe de $c_1(M)$. On dira que

- la première classe de Chern $c_1(M)$ est *positive* et on notera $c_1(M) > 0$ si elle est représentée par une $(1,1)$-forme réelle qui est définie positive,
- la première classe de Chern $c_1(M)$ est *négative* et on notera $c_1(M) < 0$ si elle est représentée par une $(1,1)$-forme réelle qui est définie négative,
- la première classe de Chern $c_1(M)$ est *nulle* et on notera $c_1(M) = 0$ si elle est représentée par la $(1,1)$-forme réelle nulle.

Si $c_1(M) < 0$ ou $c_1(M) = 0$ alors on peut montrer que $T_{max} = +\infty$ et que la solution maximale ω_t de l'équation du flot de Ricci (modulo renormalisation) converge vers une métrique de Kähler-Einstein. On pourra consulter le livre [9] pour plus de détails.

Par contre, le cas où $c_1(M) > 0$ est plus difficile. En effet, on peut montrer qu'il existe des variétés complexes compactes M dont la première classe de Chern est positive (on dit que c'est *une variété de Fano*) qui n'admettent pas de métriques de Kähler-Einstein, par exemple $\mathbb{CP}^2$ éclaté en un point (voir [55]). Nous introduisons donc la notion de *soliton de Kähler-Ricci*. On dit que (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci sur une variété complexe M si

- $X \in \eta(M)$ où $\eta(M)$ est l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes complexes sur M i.e. les sections holomorphes du fibré $T^{1,0}M$,
- g est une métrique kählérienne sur M

telle que

$$\operatorname{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \mathcal{L}_X(\omega_g), \tag{1.2}$$

où on a posé :

- ω_g la forme de Kähler associée à g,
- $\operatorname{Ric}(\omega_g)$ la forme de Ricci associée à ω_g,
- $\mathcal{L}_X(\omega_g)$ la dérivée de Lie de ω_g dans la direction de X.

On remarque immédiatement que cette équation généralise bien celle de Kähler-Einstein, en effet il suffit de prendre $X = 0$ pour la retrouver. La terminologie de soliton se justifie parce que ce sont des solutions auto-similaires i.e. qui évoluent le long des symétries du flot. Dans notre cas, ces symétries seront les renormalisations et les difféomorphismes. En effet, supposons qu'il existe un soliton de Kähler-Ricci (X, g) alors $\omega(t) := (1+t)\varphi_t^*\omega$ vérifie l'équation (1.1) où φ_t est le flot associé à $\operatorname{Re} X$.

1.2 Les solitons de Kähler-Ricci

1.2.1 Le champ de vecteurs solitonique

La première étape lorsqu'on cherche un soliton de Kähler-Ricci est de déterminer un "bon" candidat potentiel pour le champ de vecteurs solitonique. Pour cela, *l'invariant de Futaki* a été introduit dans [59]. Pour tout champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta(M)$ sur une variété kählérienne (M, g), de forme kählérienne $\omega_g \in 2\pi c_1(M)$, on définit la fonctionnelle F_X, appelée fonctionnelle de Futaki, par

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \eta(M) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ v & \longmapsto & \displaystyle\int_M v(h_g - \theta_X)e^{\theta_X}\omega_g^n \end{array} \right. .$$

où on note :

- h_g l'unique fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathrm{Ric}(\omega_g)-\omega_g=\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h_g,\ \int_M e^{h_g}\omega_g^n=\int_M\omega_g^n,$$

- θ_X l'unique fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ vérifiant

$$i_X\omega_g=\sqrt{-1}\ \overline{\partial}\theta_X,\ \int_M e^{\theta_X}\omega_g^n=\int_M\omega_g^n.$$

Cette fonctionnelle est un invariant holomorphe i.e. elle est indépendante de la métrique kählérienne ω_g choisie pour la calculer (voir la proposition 1.1. de [59]). Le résultat important est alors le lemme suivant (extrait aussi de [59]) :

Lemme 1.2.1 *Soit M une variété de Fano compacte et soit (X,g) un soliton de Kähler-Ricci sur M. Alors l'invariant de Futaki F_X pour le champ de vecteur X est nul i.e. $F_X\equiv 0$.*

Nous obtenons donc une condition nécessaire pour qu'un champ de vecteurs soit un champ de vecteurs solitonique. L'existence d'un tel champ de vecteurs est étudié dans le papier [59], on y trouve notamment la propostion 2.2 qui a été complétée par la suite par le résultat de [50]. On résume cela dans la proposition suivante :

Proposition 1.2.2 *Il existe un champ de vecteurs holomorphe $X\in\eta(M)$ tel que $F_X\equiv 0$.*

Si $X=0$ alors F_0 correspond à l'invariant de Futaki introduit pour les métriques de Kähler-Einstein (voir par exemple le livre [21]). Ainsi la fonctionnelle F_0 sera donc nul si M admet une métrique de Kähler-Einstein. Une étude détaillée de l'invariant de Futaki sera faite dans ce manuscrit. Elle apportera des précisions sur ces résultats.

1.2.2 La méthode de la continuité

Pour résoudre l'équation (1.2) et trouver la métrique, on peut utiliser la méthode de la continuité introduite à l'origine par Aubin et Yau comme dans les articles [19, 64, 49].

Considérons une variété de Fano (M,g^0) telle que $\omega_{g^0}\in 2\pi\,c_1(M)$ et (X,g) un soliton de Kähler-Ricci sur M. Nous avons alors, par le lemme $\partial\overline{\partial}$, qu'il existe une fonction $h\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{Ric}(\omega_{g^0})-\omega_{g^0}=\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}h.$$

En plus, toujours par le lemme $\partial\overline{\partial}$, il existe une unique fontion ψ appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que

$$\omega_g=\omega_{g^0}+\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\psi.$$

En remarquant que $\theta_X(g)=\theta_X(g^0)+X(\psi)$, on voit que résoudre l'équation des solitons de Kähler-Ricci est équivalent à trouver une fonction lisse ψ solution de l'équation de Monge-Ampère complexe suivante (voir par exemple [61]) :

$$\left\{\begin{array}{ll}\det(g^0_{i\overline{j}}+\psi_{i\overline{j}}) & =\det(g^0_{i\overline{j}})\exp(h-\theta_X(g^0)-X(\psi)-\psi)\\ (g^0_{i\overline{j}}+\psi_{i\overline{j}}) & >0.\end{array}\right. \tag{1.3}$$

On peut aussi l'écrire globalement sous la forme

$$\left\{\begin{array}{ll}(\omega_{g^0}+\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\,\psi)^n & =e^{h-\psi-\theta_X(g^0)-X(\psi)}\omega_{g^0}^n.\\ (\omega_{g^0}+\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\,\psi) & >0.\end{array}\right. \tag{1.4}$$

L'objectif pour démontrer le théorème d'existence d'une telle fonction ψ est d'appliquer la méthode de la continuité : on considère alors l'équation suivante d'inconnue $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ dépendant d'un paramètre $t\in[0,1]$:

$$\left\{\begin{array}{ll}\det(g^0_{i\overline{j}}+\varphi_{i\overline{j}}) & =\det(g^0_{i\overline{j}})\exp(h-\theta_X-X(\varphi)-t\varphi)\\ (g^0_{i\overline{j}}+\varphi_{i\overline{j}}) & >0.\end{array}\right. \tag{1.5}$$

On remarque tout de suite que l'équation des solitons de Kähler-Ricci correspond au cas où $t = 1$. Rappelons que la méthode de continuité consiste à considérer l'ensemble S des temps $t \in [0, 1]$ où il existe une solution φ_t à l'équation (1.5) et à montrer que S est un ouvert fermé non vide de $[0, 1]$. Ainsi, S sera égal à $[0, 1]$ donc il y a une solution au temps $t = 1$ i.e. à l'équation des solitons de Kähler-Ricci. On peut montrer, notamment grâce aux travaux de Yau dans [65] que cela se résume à chercher une borne supérieure uniforme pour les φ_t. C'est cette démarche que nous emploierons pour démontrer l'existence de solitons de Kähler-Ricci dans le cas horosphérique (voir ci-après pour plus d'explications).

1.2.3 Quelques exemples

Les premiers exemples que l'on peut donner de solitons de Kähler-Ricci sont les métriques de Kähler-Einstein. On peut donc penser à l'exemple le plus simple de l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ muni de la métrique de Fubiny-Study. Plus généralement, on a aussi les variétés de Fano compactes homogènes. On pourra consulter [7] pour le cas des métriques de Kähler-Einstein. Citons aussi les travaux récents de Delcroix [15] sur les compactifications de groupes de Lie complexes réductifs où l'on trouve des conditions nécessaires et suffisantes sur ces compactifications pour obtenir l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein.

Il est intéressant de trouver un exemple de variété qui admette un soliton de Kähler-Ricci (X, g) *non trivial* i.e. $X \neq 0$. C'est le cas de l'espace projectif $\mathbb{CP}^2$ éclaté en un point (voir par exemple [55] pour la preuve). On peut montrer qu'il admet un soliton de Kähler-Ricci puisqu'il se trouve être une variété torique. En effet, dans l'article [64], il est montré grâce à la méthode de la continuité que toutes les variétés toriques kählérienne de Fano admettent un soliton de Kähler-Ricci. Puisque $\mathbb{CP}^2$ éclaté en un point ne peut admettre une métrique de Kähler-Einstein alors son soliton est obligatoirement non trivial. Ce résultat fut étendu dans l'article [49] aux cas des fibrations toriques homogènes. Terminons en citant une dernière généralisation avec l'article [16] qui en utilisant des résultats de K-stabilité obtient des résultats concernant l'existence de solitons de Kähler-Ricci dans le cas horosphérique. Nous re-démontrerons ce résultat et nous le compléterons dans cette thèse par des méthodes analytiques.

1.2.4 Le flot de Ricci

L'idée derrière l'introduction des solitons de Kähler-Ricci était d'étudier la convergence du flot de Ricci dans le cas Fano. Malheureusement, on ne peut montrer de résultats généraux. Citons le résultat important de [60] qui stipule que si la variété admet un soliton de Kähler-Ricci alors le flot de Ricci convergera (au sens de Cheeger-Gromov) vers le soliton de Kähler-Ricci. De plus, il est possible de démontrer l'existence de solitons de Kähler-Ricci en étudiant le flot de Ricci. On peut retrouver les résultats des exemples de la section précédente par cette méthode, on pourra consulter les articles [30, 66] par exemple. De plus, dans un article en préparation qui sort du cadre de cette thèse car elle est consacrée aux aspects statiques des solitons de Kähler-Ricci, nous compléterons cette étude par une étude du flot de Ricci sur les variétés horosphériques (voir leur définition dans la partie 1.3). En particulier, nous démontrerons le résultat suivant :

Théorème 1.2.3 *Soit M une variété horosphérique lisse de Fano de groupe de Lie complexe réductif associé G et K un sous-groupe compacte maximal K de G. La solution ω_t définie pour $t \in [0, +\infty[$ au flot de Ricci renormalisé avec comme condition initiale une métrique K-invariante ω_0 converge au sens de Cheeger-Gromov vers une forme kählérienne ω_∞ quand t vers $+\infty$ telle que (X, g_∞) soit un soliton de Kähler-Ricci où X est un champ de vecteurs holomorphe annulant l'invariant de Futaki et g_∞ la métrique riemannienne associée à ω_∞.*

1.2.5 La décomposition solitonique

On fixe une variété de Fano (M, g^0). On considère cette fois-ci l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes réels sur cette variété i.e. l'ensemble des champs de vecteurs vérifiant $\mathcal{L}_X J = 0$, on notera cet ensemble $\eta^{\mathbb{R}}(M)$. On montre (voir [33]) que $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ est l'algèbre de Lie de la composante neutre $\mathrm{Aut}^0(M)$ du groupe des automorphismes de la variété M. Le principal résultat donnant une décomposition de ce groupe dans le cas Kähler-Einstein est donné par le *théorème de Matsushima* .

Théorème 1.2.4 ([39]) *Soit M une variété de Fano admettant une métrique de Kähler-Einstein. Alors la composante neutre $\mathrm{Aut}^0(M)$ du groupe des automorphismes de M est un groupe réductif complexe, et le groupe des isométries holomorphes d'une métrique de Kähler-Einstein est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Aut}^0(M)$.*

En corollaire immédiat, nous obtenons donc que $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ est une algèbre de Lie réductive. Et cela nous donne, en particulier, une obstruction à l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein. Ce résultat a été complété par le résultat suivant (voir le lemme 28 de [45] ou la proposition 7.2.4 de [23]). Avant de l'énoncer, nous avons besoin d'introduire la notion de laplacien pondéré. On définit le laplacien pondéré par $X \in \eta^{\mathbb{R}}(M)$ grâce à la formule suivante pour $u \in \mathcal{C}^{\infty}(M, \mathbb{R})$

$$\Delta_{g,J}^{X} u := \Delta_g u - \frac{1}{2} X^{1,0}(u).$$

De plus, puisque la structure complexe J de la variété M est antisymétrique pour g, on peut étendre la définition précédente par $\mathbb{C}$-linéarité aux fonctions $u \in \mathcal{C}^{\infty}(M, \mathbb{C})$. De même, on pondère le crochet de Poisson usuel de la façon suivante :

$$\{u, v\}_{\omega}^{X} := \{u, v\}_{\omega} - \int_M \{u, v\}_{\omega} e^{\theta_X} \omega_g^n,$$

où θ_X est la fonction vérifiant

$$i_{X^{1,0}} \omega_g = \sqrt{-1}\, \overline{\partial}\, \theta_X, \quad \int_M e^{\theta_X} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n.$$

Avant d'énoncer le théorème, rappelons que si E est un espace vectoriel complexe alors on note $\overline{E}$ le conjugué complexe de cet espace vectoriel complexe.

Théorème 1.2.5 (voir par exemple [45, 23]) *Soit M une variété kählérienne compacte de Fano. On suppose qu'il existe un soliton de Kähler-Ricci (X, g) sur la variété complexe M dont on note J la structure complexe.*

- *L'application entre algèbres de Lie suivante*

$$\begin{array}{rcl} \chi := \chi_{X,g} : \quad \left(\overline{\ker(\Delta_{g,J}^{X} - 2\mathbb{I})}, \sqrt{-1}\, \{\cdot, \cdot\}_{\omega}^{X}\right) & \xrightarrow{\sim} & \left(\eta^{\mathbb{R}}(M), [\cdot, \cdot]\right) \\ u & \longmapsto & \nabla_{g,J} u := \nabla_g \mathrm{Re}(u) + J\, \nabla_g \mathrm{Im}(u). \end{array}$$

  est alors bien définie et est un isomorphisme d'algèbres de Lie. En particulier, $\ker(\Delta_{g,J}^{X} - 2\mathbb{I})$ est alors de dimension finie.
- *La première valeur propre $\lambda_1(\Delta_{g,J}^{X})$ de l'opérateur $\Delta_{g,J}^{X}$ vérifie $\lambda_1(\Delta_{g,J}^{X}) \geq 2$ avec égalité si $\eta^{\mathbb{R}}(M) \neq 0$.*
- *L'application suivante est bien définie et définit un isomorphisme d'espaces vectoriels réels :*

$$J\nabla_g : \ker(\Delta_{g,J}^{X} - 2\mathbb{I}) \cap \mathcal{C}_X^{\infty}(M, \mathbb{R})_0 \longrightarrow \kappa(M).$$

  où on a noté $\kappa(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs de Killing de la variété M et

$$\mathcal{C}_X^{\infty}(M, \mathbb{R})_0 = \{f \in \mathcal{C}^{\infty}(M, \mathbb{R}) \ / \ \int_M f e^{\theta_X} \omega_g^n = 0\}.$$

- *La forme hermitienne définie sur $\overline{\ker(\Delta_{g,J}^{X} - 2\mathbb{I})}$ par*

$$(u, v) \mapsto \int_M \sqrt{-1} \{u, \overline{v}\}_{\omega}^{X} e^{\theta_X} \omega_g^n,$$

  est positive. Et si on note son spectre $(\mu_i)_{i=0,\cdots,N}$ pour le produit scalaire donné L^2 donné par la forme volume $e^{\theta_X} \omega_g^n$ alors on a la décomposition suivante :

$$\eta^{\mathbb{R}}(M) := \bigoplus_{i=1}^{N} V_{\mu_i},$$

  où

$$V_{\mu_i} := \{\xi \in \eta^{\mathbb{R}}(M) \ / \ [\xi, \nabla_g \theta_X] = \mu_i \xi\}.$$

  En particulier, on a $\mu_0 = 0$ et

$$V_0 = \kappa(M) + J\, \kappa(M),$$

  où $\kappa(M)$ est l'espace vectoriel des champs de vecteurs de Killing de M.

Nous étudierons en détails cet isomorphisme χ dans le cas torique dans cette thèse.

1.3 Plan de la thèse

Le chapitre 2 est un chapitre de rappels concernant la géométrie kählérienne et ne contient aucun nouveau résultat, il ne fait que fixer les notions et notations nécessaires à cette thèse. Notre princpal source est le polycopié [23].

Le chapitre 3 est un chapitre qui introduit la notion principale de cette thèse : les solitons de Kähler-Ricci. Nous les introduisons comme des solutions auto-similaires au flot de Ricci et nous proposons une étude détaillé qui s'inspire des travaux originels avec notamment [61, 59, 14].

Le chapitre 4 est une étude de la décomposition solitonique provenant du théorème 1.2.5 dans le cas d'une variété torique kählérienne compacte $(M, g_0, x, \mathbb{T})$ admettant un soliton de Kähler-Ricci. Rappelons qu'une variété torique kählérienne $(M, g_0, x, \mathbb{T})$ est une variété kählérienne compacte (X, g_0) de dimension complexe n munie d'une action effective et hamiltonienne pour la forme symplectique $\omega := \omega_g$ du tore compact $\mathbb{T} = \mathfrak{t}/\Lambda$ de dimension n où Λ est un $\mathbb{Z}$-réseau de l'espace vectoriel réel euclidien $\mathfrak{t}$ de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et dont on note $x : M \to \mathfrak{t}^*$ l'application moment. Rappelons que l'application moment x est une application vérifiant

$$\forall \xi \in \mathfrak{t}, \quad -i_{X_\xi}\omega = \langle dx, \xi \rangle,$$

où $X_\xi \in \Gamma(TM)$ est le champ de vecteurs fondamental associé à l'action du tore $\mathbb{T}$ i.e.

$$\forall z \in M, \quad X_\xi(z) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot z.$$

De plus, l'image de x dans $\mathfrak{t}^*$ est un polytope convexe P qui se trouve être l'enveloppe convexe des images par x des points fixes de l'action de $\mathbb{T}$ ([2]). On peut alors montrer que si P^0 est l'intérieur de P, alors $M^0 = x^{-1}(P^0)$ est un ouvert dense constitué des points où $\mathbb{T}$ agit librement et que l'on a un symplectomorphisme $\mathbb{T}$-équivariant :

$$M^0 \simeq P^0 \times \mathbb{T},$$

permettant de munir M^0 de coordonnées (x, t) avec $x \in P^0$ et $t \in \mathbb{T}$. Ce système de coordonnées sur M^0 est appelé *coordonnées actions-angles*. De plus, sur cet ouvert, toute métrique g qui est $\mathbb{T}$-invariante va s'écrire sous la forme

$$g := g_\phi = \sum_{i,j} G_{ij} dx_i \otimes dx_j + H_{ij} dt_i \otimes dt_j,$$

où $G = (G_{ij})$ est la matrice hessienne d'une application $\phi \in \mathcal{C}^\infty(P^0, \mathbb{R})$ appelé *potentiel symplectique* et $H = (H_{ij})$ est la matrice inverse de la matrice G.

De plus, puisque x est définie modulo une constante, on obtient que P est défini modulo translation. Dans le cas Fano, il existe un tel polytope privilégié, que l'on appelera *polytope algébrique* et qui s'écrit sous la forme

$$P_{alg} = \bigcap_{\rho \in \Delta(1)} \{x \in \mathfrak{t}^* \ / \ \langle x, b_\rho \rangle \leq -1\} \text{ tel que } x(M) = -P_{alg},$$

où $\Delta(1)$ est un ensemble fini et les b_ρ sont des vecteurs appartenant à $\mathfrak{t}$. On peut consulter la partie 4.1.3 pour les détails.

On peut montrer (voir [64]) qu'il existe un soliton de Kähler-Ricci (X, g) sur toute variété torique kählérienne de Fano et qu'en plus X sera de la forme $X = JX_a + \sqrt{-1}X_a$ où J est la structure complexe de M et X_a est le champ de vecteurs fondamental de l'action du tore $\mathbb{T}$ associé à un vecteur $a \in \mathfrak{t}$. On notera, dans ce cas, (g, a) le soliton de Kähler-Ricci, $\Delta^a_{g,J}$ le laplacien pondéré par le soliton (g, a) et $\chi_{g,a}$ l'isomorphisme du théorème 1.2.5.

Après quelques rappels nécessaires à notre étude, nous calculons le laplacien pondéré en coordonnées actions-angles (x, t) :

$$\Delta^a_{g,J} = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(H_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,j=1}^n G_{ij}\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} + 2\sum_{i,j=1}^n a_i H_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\sum_{j=1}^n 2\, a_j \frac{\partial}{\partial t_j},$$

où G est la matrice hessienne du potentiel symplectique de g et H la matrice inverse de G. Nous apportons alors une caractérisation du soliton (g, a) en termes de fonctions propres de ce laplacien pondéré :

Théorème 1.3.1 *Soit $(M, g, x, \mathbb{T})$ une variété torique kählérienne de Fano telle que $-P_{alg} = \mathrm{im}(x)$. Supposons que M admette un soliton de Kähler-Ricci (g, a). Alors pour tout $\beta \in \mathfrak{t}$, la fonction $\langle x, \beta\rangle$ est une fonction propre sur M pour le laplacien pondéré $\Delta^a_{g,J}$.*

Remarquons que ce résultat existe dans le cas des métriques de Kähler-Einstein (voir [35]). De plus l'action du tore $\mathbb{T}$ s'étend en une action effective et holomorphe du tore complexe $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$. Celui-ci s'injecte donc dans $\mathrm{Aut}^0(M)$ et induit une sous-algèbre de Lie $\eta_0^{\mathbb{R}}(M)$ de $\eta^{\mathbb{R}}(M)$. Nous déterminons alors la décomposition solitonique restreinte à l'algèbre de Lie $\eta_0^{\mathbb{R}}(M)$

Lemme 1.3.2 *Supposons que $(M, g, x, \mathbb{T})$ soit une variété torique kählérienne compacte de Fano telle que (g, a) soit un soliton de Kähler-Ricci. L'application $\chi^{-1}_{g,a}$ restreinte à $\eta_0^{\mathbb{R}}(M)$ est donnée par*

$$\chi^{-1}_{g,a}|_{\eta_0^{\mathbb{R}}(M)} : \begin{array}{ccc} \eta_0^{\mathbb{R}}(M) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}_0^{\mathbb{C}}(P) \\ b_1 + J\, b_2 & \longmapsto & -\langle x, b_2\rangle + \sqrt{-1}\,\langle x, b_1\rangle \end{array},$$

où $\mathrm{Aff}_0^{\mathbb{C}}(P)$ est l'ensemble des fonctions lisses définies sur M s'écrivant sous la forme $\langle x, b_1\rangle + \sqrt{-1}\,\langle x, b_2\rangle$ pour $(b_1, b_2) \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$.

Nous continuons alors notre étude de $\ker(\Delta^a_{g,J} - 2\mathbb{I})$ par le théorème de décomposition suivant :

Théorème 1.3.3 *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ une fonction propre du laplacien $\Delta^a_{g,J}$ pour la valeur propre 2. Alors on peut trouver des couples $(\alpha_k, m_k) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{N}^n$ pour $1 \le k \le d$ et des fonctions $f_{k,l} \in \mathcal{C}^\infty(P^0, \mathbb{C})$ pour $1 \le l \le m_k$ et où P^0 est l'intérieur de P tels que, en coordonnées actions-angles,*

$$f|_{M^0} = \sum_{k=1}^{d} \sum_{l \le m_k} f_{k,l}\, t^l\, e^{\langle \alpha_k, t\rangle}. \tag{1.6}$$

Nous complétons ce résultat en montrant que d est égal à 1 et que les α correspondent aux racines de Demazure associées au polytope algébrique P de la variété torique M. Rappelons que $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ est *une racine de Demazure* de P s'il existe $\rho_\alpha \in \Delta(1)$ tel que $\langle \alpha, b_{\rho_\alpha}\rangle = 1$ et $\langle \alpha, b_\rho\rangle \le 0$ pour tout $\rho \in \Delta(1)$ tel que $\rho \ne \rho_\alpha$. Nous obtenons alors l'un des résultats principaux de la thèse :

Théorème 1.3.4 *Soient $(M, g_0, x, \mathbb{T})$ une variété torique kählérienne compacte de Fano et $P := -\mathrm{im}(x)$ le polytope algébrique associé, dont on note $R(P)$ l'ensemble de ses racines de Demazure. Supposons que (g, a) soit un soliton de Kähler-Ricci sur la variété complexe M dont on note J la structure complexe.*

- *Nous avons la décomposition suivante :*

$$\ker\left(\Delta^a_{g,J} - 2\mathbb{I}\right) = \mathrm{Aff}_0^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R(P)} \mathbb{C}\,\widetilde{v_\alpha},$$

où $\mathrm{Aff}_0^{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des fonctions lisses sur M s'écrivant sous la forme $\langle x, b_1\rangle + \sqrt{-1}\langle x, b_2\rangle$ où $(b_1, b_2) \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$ et $\widetilde{v_\alpha}$ est la fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ telle qu'en coordonnées action-angles (x,t)

$$\widetilde{v_\alpha}|_{M^0} = (\langle x, b_{\rho_\alpha}\rangle + 1)\, e^{-\langle \alpha, \nabla\phi - \sqrt{-1}\, t\rangle},$$

où ϕ est le potentiel symplectique associé à g.

- *De plus, si on note V_{μ_i} les espaces propres de la décomposition solitonique et χ l'isomorphisme entre $\ker\left(\Delta^a_{g,J} - 2\mathbb{I}\right)$ et $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ du théorème 1.2.5, alors nous avons*

$$\chi^{-1}(V_0) = \mathrm{Aff}_0^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R(P), \langle \alpha, a\rangle = 0} \mathbb{C}\,\widetilde{v_\alpha}$$

et pour tout $i \ge 1$,

$$\chi^{-1}(V_{\mu_i}) = \bigoplus_{\alpha \in R(P), 2\,\langle \alpha, a\rangle = \mu_i} \mathbb{C}\,\widetilde{v_\alpha}.$$

- *En particulier, les fonctions $\widetilde{v_\alpha}$ sont des fonctions propres de l'opérateur $\Delta^a_{g,J} - 2\mathbb{I}$ pour la valeur propre $4\langle \alpha, a\rangle$.*

Le chapitre 5 est une étude analytique des variétés horosphériques. Soit G un groupe de lie complexe reductif (par exemple $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et B un sous-groupe de Borel (par exemple le sous-groupe des matrices triangulaires de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$), voir par exemple [54] pour des généralités. Rappelons qu'une variété *G-sphérique* X est une G-variété algébrique complexe (i.e. un schéma réduit de type fini sur $\mathbb{C}$ muni d'une action algébrique de G) normale et admettant une B-orbite ouverte et dense. On s'intéresse alors à une sous-classe des variétés sphériques, celle des variétés horosphériques. Une G-variété sphérique sera dite *horosphérique* si le stabilisateur H dans G d'un point x de la B-orbite ouverte et dense de G est horosphérique i.e. contient un sous-groupe unipotent maximal d'un conjugué de B. On dira alors que (X, x) est un plongement horosphérique. En particulier, X admettra G/H comme ouvert dense, appelé l'espace homogène horosphérique de X.

Rappelons maintenant que si T est un tore maximal de G alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G admet la décomposition en espaces de racines :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où Φ est le système de racines de (G, T), partie finie du *groupe $\mathfrak{X}(T)$ des caractères algébriques de T* i.e. des morphismes de groupes algébriques $T \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Maintenant, si nous supposons que le sous-groupe de Borel B de G contient T alors nous pouvons définir $\Phi^+ := \Phi^+(B)$ l'ensemble des racines positives de Φ tel que, si $\mathfrak{b}$ est l'algèbre de Lie de B et $\Phi^- = -\Phi^+$, alors

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

On aura, en particulier, l'existence d'un sous-groupe de Borel B^- dit sous-groupe de Borel opposé à B, tel que $B \cap B^- = T$.

On peut alors définir le polytope moment $\Delta^+ \subset \mathfrak{X}(T) \otimes \mathbb{R}$ associé à B de la variété horosphérique X comme le polytope moment de Kirwan de la variété kahlérienne (X, ω) pour l'action d'un sous-groupe compact maximal K de G, où ω est une forme kählérienne K-invariante dans $c_1(X)$ (voir [10, 31] pour plus de détails). Ce polytope va induire un sous-groupe de Levi L de G d'ensemble de racines Φ_L constitué des racines Φ qui sont orthogonales pour la forme de Killing de G à l'espace affine engendré par Δ^+. On pose alors $\Phi_P^+ = \Phi^+ \setminus \Phi_L$ et on note $2\rho_P$ la somme des éléments de Φ_P^+. On peut alors montrer que $P = N_G(H)$ est un sous-groupe parabolique d'ensemble de racines égale à $\Phi_L \cup \Phi_P^+$ (voir lemme 5.1.5).

Le premier résultat que nous démontrons est le résultat d'existence de solitons de Kähler-Ricci grâce à la méthode de la continuité :

Théorème 1.3.5 *Soit M une variété horosphérique lisse de Fano. Alors M admet un soliton (X, g) de Kähler-Ricci.*

Précisons que le résultat a déjà été montré dans [16] mais en utilisant la K-stabilité. Nous employons la démarche de [60]. Nous déterminons le champ de vecteurs solitonique et nous établissons l'équation de Monge-Ampère complexe associée au soliton de Kähler-Ricci que nous ramenons à une équation de Monge-Ampère réelle. En utilisant des arguments similaires à ceux de [60], nous concluons. Nous complétons alors le résultat en calculant la borne de Ricci $R(M)$. Rappelons que la borne de Ricci est définie comme

$$R(M) := \sup_{t\in[0,1]} \{\exists\omega \in c_1(M),\ \ \mathrm{Ric}(\omega) > t\,\omega\}.$$

Nous obtenons ainsi un autre des résultats principaux de cette thèse :

Théorème 1.3.6 *Supposons que M soit une variété horosphérique lisse d'espace homogène horosphérique G/H tel que H contienne le radical unipotent du sous-groupe de Borel opposé B^- de G. Notons $P = N_G(H)$ et Δ^+ le polytope moment associé à B de la variété horosphérique M . De plus, on suppose que $2\rho_P \neq \mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+)$ où $\mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+)$ est le barycentre du polytope Δ^+ pour la mesure de Duistermaat-Heckman. On a alors que $R(M)$ est l'unique $t \in]0, 1[$ tel que*

$$\frac{t}{t-1}(\mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+) + 2\,\rho_P) \in \partial\left(\Delta^+ + 2\,\rho_P\right).$$

Nous concluons cette thèse en développant l'exemple des *grassmanniennes impaires et symplectiques*, tiré d'un article [48] de Pasquier et Perrin, qui sont variétés horosphériques lisses de Fano dont le soliton de Kähler-Ricci est non-trivial. En effet, ces variétés sont des variétés horosphériques dont le groupe des automorphismes est non réductif. Ceci implique, par le théorème de Matsushima (voir [39]) qu'elles ne peuvent admettre de métriques de Kähler-Einstein. Or puisqu'elles admettent quand même un soliton de Kähler-Ricci, celui-ci ne peut-être que non-trivial. Nous déterminons en particulier le champ de vecteurs solitonique et la décomposition solitonique de ces variétés (voir partie 5.4).

Chapitre 2

Géométrie kählérienne

2.1 Étude des variétés presque complexes et complexes

Commençons par rappeler la définition d'une *variété complexe* :

Définition 2.1.1 *Soit M une variété différentielle réelle de dimension (réelle) $2n$.*

Une carte complexe de M est un couple (U, ψ) où U est un ouvert de M et ψ un difféomorphisme de U dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Si (U_1, ψ_1) et (U_2, ψ_2) sont deux cartes complexes alors on définit la fonction de transition par $\psi_{1,2} := \psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \to \psi_2 U_2 \cap U_1)$. On dit alors que M est une variété complexe de dimension complexe n si elle est munie d'un atlas maximal $\{U_i, \psi_i\}_{i \in I}$ de cartes complexes tel que les fonctions de transitions sont des fonctions holomorphes entre ouverts de $\mathbb{C}^n$.

Maintenant, si M est une variété complexe munie d'un atlas $\{U_i, \psi_i\}_{i \in I}$ de cartes complexes, alors on dit qu'une fonction $f : M \to \mathbb{C}$ est *holomorphe* si pour tout $i \in I$, on a que $f \circ \psi_i^{-1} : \psi(U_i) \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe. En particulier, nous voyons directement que si on écrit $\psi_i = (z_1, \cdots, z_n)$ alors les z_i sont des fonctions holomorphes. On dit alors que les z_i forment *un système de coordonnées holomorphes*. De plus, si $(w_1, \cdots, w_n)$ est un autre système de coordonnées holomorphes alors, comme les fonctions de transitions sont holomorphes, nous obtenons que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, la fonction w_i est holomorphe par rapport à $z_1, \cdots, z_n$.

Une autre manière de définir la notion de variété complexe passe par la notion de *structure presque complexe*. C'est ce point de vue que nous allons introduire maintenant, et nous verrons grâce au théorème 2.1.5 sous quelles conditions les deux points de vue coïncident.

2.1.1 Structure presque complexe et complexe

Commençons par introduire la notion de *structure presque complexe* :

Définition 2.1.2 *Soit M une variété différentielle réelle de dimension $2n$.*

Une structure presque complexe sur M est la donnée d'un endomorphisme $J : TM \to TM$ sur le fibré tangent réel de M vérifiant $J|_{T_pM}^2 = -\operatorname{id}_{T_pM}$ pour tout $p \in M$. On dit alors que le couple (M, J) est une variété presque complexe.

Remarque. De manière équivalente, cela revient à demander l'existence d'une structure d'espace vectoriel complexe sur T_pM pour tout $p \in M$ variant de manière lisse en p. En effet, $J|_{T_pM}$ permet de définir une structure d'espace vectoriel complexe sur V par la formule suivante :

$$\forall (a, b, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times T_pM, \;\; (a + \sqrt{-1} \cdot b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot J(v).$$

Et réciproquement si T_pM est un espace vectoriel complexe pour tout $p \in M$ variant de manière lisse en p, en définissant $J|_{T_pM}$ comme la multiplication par $\sqrt{-1}$ pour tout $p \in M$, nous obtenons bien une structure presque complexe sur M.

Les exemples les plus importants de variétés presque complexes sont donnés par les variétés complexes. En effet, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.1.3 *Si M est une variété complexe alors il existe une structure presque complexe naturelle sur M.*

Démonstration. Soit $\psi : U \subset M \to V \subset \mathbb{C}^n$ une carte holomorphe de M. Comme ψ est en particulier un difféomorphisme, nous obtenons que l'application tangente $d\psi$ induit un isomorphisme :

$$T_pM \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n \ \ \forall p \in U.$$

Maintenant, grâce à cet isomorphisme, nous pouvons définir la structure presque complexe J par

$$J(v) = \sqrt{-1} \cdot v, \ \ \forall v \in T_pM.$$

Pour que ceci soit correct , il faut s'assurer que cette application J ne dépend pas de l'identification choisie entre T_pM et $\mathbb{C}^n$ i.e. est indépendante de la carte holomorphe choisie. Or, ceci est une conséquence directe du fait que les changements de cartes sont holomorphes i.e. que leur différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire.

De plus, si nous prenons des coordonnées locales $(z_1, \cdots, z_n)$ dans M et que nous écrivons $z_j = x_j + \sqrt{-1} \cdot y_j$ où x_j et y_j sont des fonctions réelles, nous obtenons que $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$ est une base de T_pM et que J est alors définie par

$$J(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}, \ \ J(\frac{\partial}{\partial y_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \ \ i = 1, \cdots n.$$

□

Par contre, la réciproque n'est pas vraie. Une structure presque complexe n'induit pas toujours une structure de variété complexe. Ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.1.4 *Soit M une variété différentielle réelle munie d'une structure presque complexe J.*

On dit que J est une structure intégrable sur M si J est induite par une structure complexe (au sens de la proposition 2.1.3).

On dit alors que (M, J) est une variété complexe, ou que J est une structure complexe sur M.

Terminons cette section en donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure presque complexe soit complexe. Il s'agit du *Théorème de Newlander-Nirenberg*, que nous énonçons sans démonstration.

Pour cela, on introduit le *tenseur de Nijenhuis N^J* défini par

$$N^J(X, Y) := [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

Théorème 2.1.5 *[Théorème de Newlander-Nirenberg] Soit M une variété différentielle réelle munie d'une structure presque complexe J. Une condition nécessaire et suffisante pour que J soit une structure intégrable est que le tenseur de Nijenhuis N^J est nul.*

Démonstration. La preuve originiel est dans [41]. □

2.1.2 Fibré tangent d'une variété presque complexe

Si (M, J) est une variété presque complexe de dimension (réelle) $2n$, nous avons

$$J|^2_{T_pM} = -\operatorname{id}_{T_pM}, \ \ \forall p \in M,$$

ainsi pour tout $p \in M$, l'endomorphisme $J|_{T_pM}$ admet $X^2 + 1$ comme polynôme caractéristique et donc $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ comme valeurs propres. Cela induit la décomposition suivante :

$$T_p^{\mathbb{C}}M := T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0}_{J,p}M \oplus T^{0,1}_{J,p}M,$$

où $T^{1,0}_{J,p}M$ et $T^{0,1}_{J,p}M$ sont respectivement l'espace propre associé à $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, et comme cette décomposition est lisse en $p \in M$, nous obtenons une décomposition en somme directe du fibré vectoriel complexe

$$T^{\mathbb{C}}M := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0}_J M \oplus T^{0,1}_J M.$$

De plus, en remarquant que si $u \in T_pM$ alors

$$u = \frac{1}{2}(u - \sqrt{-1}Ju) + \frac{1}{2}(u + \sqrt{-1}Ju),$$

et que

$$\frac{1}{2}(u - \sqrt{-1}Ju) \in T^{1,0}_{J,p}M, \;\; \frac{1}{2}(u + \sqrt{-1}Ju) \in T^{0,1}_{J,p}M,$$

nous obtenons que $T^{1,0}_J M$ est engendré par les $(u - \sqrt{-1}Ju)$ pour $u \in TM$ et $T^{0,1}_J M$ par les $(u + \sqrt{-1}Ju)$ pour $u \in TM$. Par la suite, pour alléger les notations, on oubliera de mettre J pour les espaces $T^{0,1}M$ et $T^{0,1}M$ lorsque la structure complexe est claire.

De plus, si M est une variété complexe de dimension (complexe) n alors $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$ sont appelés respectivement *fibré tangent holomorphe et anti-holomorphe* de $T^{\mathbb{C}}M$. De plus si $z_1 = x_1 + \sqrt{-1}y_1, \cdots, z_n = x_n + \sqrt{-1}y_n$ sont des coordonnées locales holomorphes de M, alors en posant pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j})$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}),$$

nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 2.1.6 *Soit M une variété complexe. Le sous-fibré $T^{1,0}M$ (respectivement $T^{0,1}M$) est engendré localement par les sections $\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ (respectivement par les sections $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}$).*

2.1.3 Fibré cotangent d'une variété presque complexe

Soit (M, J) une variété presque complexe, on peut définir l'action de J sur le fibré cotangent T^*M par

$$J : \left| \begin{array}{ccc} T^*M & \longrightarrow & T^*M \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \circ J^{-1} \end{array} \right. .$$

Comme $J^{-1} = -J$, on peut aussi définir

$$J\alpha = -\alpha \circ J.$$

En remarquant que

$$J \circ J(\alpha) = \alpha \circ J^{-1} \circ J^{-1} = -\alpha, \;\; \forall \alpha \in T^*M,$$

nous obtenons que

$$J^2 = -\operatorname{id}_{T^*M} .$$

Ainsi, nous obtenons aussi une décomposition du complexifié du fibré cotangent

$$T^*M_{\mathbb{C}} := T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{*0,1}_J M \oplus T^{*1,0}_J M,$$

où les sous-fibrés $T^{*1,0}_J M$ et $T^{*0,1}_J M$ sont respectivement les espaces propres de J associés à la valeur propre $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. De plus, comme dans le cas du fibré tangent, on a que $T^{*1,0}_J M$ est engendré par la famille $\{\alpha + \sqrt{-1}J\alpha \,/\, \alpha \in T^*M\}$ et que $T^{*0,1}M$ est engendré par la famille $\{\alpha - \sqrt{-1}J\alpha \,/\, \alpha \in T^*M\}$. De même, par la suite, pour alléger les notations, on oubliera de mettre J pour les espace $T^{*0,1}M$ et $T^{*0,1}M$ lorsque la structure complexe est claire.

Le lemme suivant fait le lien entre la décomposition du fibré tangent et celui du fibré cotangent.

Lemme 2.1.7 *Soit (M, J) une variété presque complexe. On a alors*

$$T^{*1,0}M = \left\{\alpha \in T^*M_{\mathbb{C}} \,/\, \alpha(Z) = 0, \;\; \forall Z \in T^{0,1}M\right\}$$

et

$$T^{*0,1}M = \left\{\alpha \in T^*M_{\mathbb{C}} \,/\, \alpha(Z) = 0, \;\; \forall Z \in T^{1,0}M\right\}.$$

Démonstration. Faisons la démonstration pour le fibré $T^{*0,1}M$. Il suffit de montrer que

$$\forall (u,\omega) \in TM \times T^*M, \ \ (\omega - \sqrt{-1}J\omega)(u - \sqrt{-1}Ju) = 0.$$

En développant par linéarité et en utilisant la définition de J, le résultat en découle trivialement. □

De plus, en notant $\Lambda^{p,0}M$ et$\Lambda^{0,p}M$ les p-ième puissances extérieurs de $T^{*1,0}M$ et $T^{*0,1}M$ respectivement, on notera $\Lambda^{p,q}M = \Lambda^{p,0}M \otimes \Lambda^{0,q}M$. Nous obtenons grâce aux propriétés de la puissance extérieure que

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}}M \simeq \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}M.$$

Les sections de $\Lambda^{p,q}M$ sont appelées formes différentielles de type (p,q) et on notera l'espace des formes différentielles de type (p,q) par $\Omega^{p,q}M$. En particulier, nous avons aussi la décomposition suivante :

$$\Lambda^k\Omega_{\mathbb{C}}(M) = \sum_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M),$$

où $\Omega_{\mathbb{C}}(M)$ est le complexifié de l'espace des formes différentielles réelles Ω et $\Omega_{p,q}(M) = \Lambda^p\Omega^{1,0} \otimes \Lambda^q\Omega^{0,1}$.

De plus, si M est une variété complexe de dimension (complexe) n alors $T^{*1,0}M$ et $T^{*0,1}M$ sont appelés respectivement *fibré cotangent holomorphe et anti-holomorphe* de $T^*_{\mathbb{C}}M$. De plus si $z_1 = x_1 + \sqrt{-1}y_1, \cdots, z_n = x_n + \sqrt{-1}y_n$ sont des coordonnées locales holomorphes de M, alors en étendant par $\mathbb{C}$-linéarité la dérivée extérieure et en posant pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$:

$$dz_j := dx_j + \sqrt{-1}dy_j$$

et

$$d\overline{z}_j := dx_j - \sqrt{-1}dy_j$$

nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 2.1.8 *Soit M une variété complexe. Le sous fibré $\Lambda^{1,0}M$ (respectivement $\Lambda^{0,1}M$) est engendré localement par les sections $dz_1, \cdots, dz_n$ (respectivement par les sections $d\overline{z}_1, \cdots, d\overline{z}_n$). Et de plus, une base de $\Lambda^{p,q}M$ est donnée par*

$$\left\{dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}, \ \ i_1 < \cdots < i_p, \ \ j_1 < \cdots < j_q\right\}$$

Par la suite, on notera pour $I = (i_1, \cdots, i_p)$ tel que $i_1 < \cdots < i_p$

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p},$$

et

$$d\overline{z}_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{i_p}.$$

2.1.4 Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$

Dans cette partie, nous allons étudier plus en détails, les champs de vecteurs et les formes différentielles d'une variété complexe (M,J) de dimension (réelle) $2n$.

Nous avons vu dans la proposition 2.1.8 que l'ensemble

$$\left\{dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}, \ \ i_1 < \cdots < i_p, \ \ j_1 < \cdots < j_q\right\}$$

était localement une base du $\mathcal{C}^\infty(M)$-module $\Omega^{p,q}(M)$. Ainsi, comme $d(dz_I) = 0$, nous obtenons que si $\alpha = \sum_{I,J} \alpha_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z}_j$ où les $\alpha_{I,J}$ sont des fonctions réelles lisses alors

$$d\alpha = \sum_{I,J} d\alpha_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

Alors $d\alpha_{I,J}$ appartient à $\Omega(M)$ et nous pouvons décomposer $d\alpha_{I,J}$ en parties de type $(0,1)$ et de type $(1,0)$, et obtenir que $d\alpha$ est la somme d'une forme de type $(p,q+1)$ et d'une forme de type $(p+1,q)$.

Définition 2.1.9 *Pour toute forme différentielle α de type (p,q) sur une variété complexe M de dimension n, on définit $\overline{\partial}\alpha$ comme la composante $(p,q+1)$ de $d\alpha$ et $\partial\alpha$ comme la composante $(p+1,q)$ de $d\alpha$.*

On obtient ainsi deux applications :

$$\partial : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M)$$

et

$$\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M).$$

De la définition, il résulte les propriétés suivantes que nous résumons dans la proposition suivante :

Proposition 2.1.10 *Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ vérifient la règle de Leibniz i.e.*

$$\overline{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \overline{\partial}(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{d^\circ \alpha} \wedge \overline{\partial},$$

et

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{d^\circ \alpha} \wedge \partial.$$

De plus, on a

$$\partial + \overline{\partial} = d,$$

et

$$\overline{\partial}^2 = \partial^2 = \overline{\partial}\partial + \partial\overline{\partial} = 0.$$

Maintenant, nous allons interpréter la notion de fonctions holomorphes à l'aide des formes différentielles.

Proposition 2.1.11 *Soit $f : M \to \mathbb{C}$ une fonction lisse. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *la fonction f est holomorphe,*
2. *$Z(f) = 0, \forall Z \in T^{0,1}M$,*
3. *df est une forme différentielle de type $(1,0)$.*

Démonstration. Cela découle directement du fait que si f est une fonction lisse alors dans tout système de coordonnés locales $(z_1, \cdots, z_n)$ nous avons

$$\partial f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz^i \text{ et } \overline{\partial} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} d\overline{z}^i.$$

□

2.2 Étude des variétés kählériennes

2.2.1 Définitions générales

Rappelons qu'une *métrique riemannienne* g sur une variété différentielle M est un tenseur qui à tout point p de M associe un produit scalaire (i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive) sur l'espace vectoriel réel T_pM et variant de manière lisse en p. On dit alors que (M,g) est une *variété riemannienne*.

L'idée de cette partie est d'analyser les conditions sous lesquelles une métrique riemannienne est compatible avec une structure presque complexe.

Définition 2.2.1 *Soit g une métrique riemannienne sur une variété presque complexe (M,J).*

On dit que g est compatible avec la structure J si

$$\forall p \in M,\ \ \forall (X,Y) \in (T_pM)^2,\ \ g_p(X,Y) = g_p(JX,JY).$$

Si (M,g,J) est une variété riemannienne presque complexe telle que g soit compatible avec J, on définit alors *la forme de Kähler* ω_g associée à la métrique g comme la 2-forme vérifiant $\omega_g(X,Y) := g(JX,Y)$ pour tous champs de vecteurs X et Y sur M. De plus, comme g est définie positive, nous obtenons que ω_g est non-dégénérée. Remarquons aussi que l'on peut retrouver la métrique à partir de sa forme de Kähler par la formule $g = \omega_g(\cdot, J\cdot)$.

Définition 2.2.2 *Soit (M, J) une variété complexe de dimension n. Une métrique hermitienne h sur M est un tenseur qui à tout point p de M associe un produit scalaire hermitien (i.e. une forme hermitienne définie positive) sur l'espace vectoriel complexe $T_pM^{\mathbb{C}}$ qui varie de manière lisse en p. On dit alors que (M, h) (ou (M, h, J) si on veut préciser la structure complexe) est une variété hermitienne.*

Si (M, J) est une variété complexe alors toute métrique riemannienne g compatible avec J définit une métrique hermitienne en posant $h := g - \sqrt{-1}\omega$. Réciproquement se donner une métrique hermitienne h est équivalent à se donner une métrique riemannienne g compatible en prenant $g := \mathrm{Re}(h)$ et la forme de Kähler associée à g est alors $\omega = -\mathrm{Im}(h)$. On peut donc aussi parler de la forme de Kähler associée à une métrique hermitienne.

Définition 2.2.3 *On dit que la variété riemannienne presque complexe (M, g, J) est une variété kählérienne si*
- *g est compatible avec J,*
- *la structure presque complexe J est intégrable,*
- *la forme de Kähler associée $\omega := g(J\cdot, \cdot)$ est fermée.*

On dit alors que g (ou la métrique hermitienne associée h selon les auteurs) est une métrique kählérienne.

Remarque. Une définition équivalente est de dire qu'une variété kählérienne est une variété hermitienne telle que la forme de Kähler associée à la métrique hermitienne est fermée.

En particulier, nous obtenons que (M, ω) est une variété symplectique. Nous obtenons ainsi une autre définition d'une variété kählérienne qui fait le lien avec la géométrie symplectique :

Définition 2.2.4 *Une variété kählérienne (M, g, J, ω) est une variété complexe riemannienne et symplectique vérifiant*

$$g(J\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, \cdot),$$

où g est la métrique riemannienne, J la structure complexe et ω la forme symplectique.

2.2.2 Expressions en coordonnées locales

Dans cette section, nous donnons quelques expressions en coordonnées locales. Si M est une variété complexe de dimension n munie d'une métrique hermitienne h alors si on prend $(z_1, \cdots, z_n)$ des cordonnées locales dans un ouvert U de M alors on a

$$h|_U = \sum_{1 \leq j, \overline{k} \leq n} h_{j\overline{k}} dz_j \otimes d\overline{z}_k,$$

où $(h_{i\overline{j}})_{1 \leq i, \overline{j} \leq n}$ est une matrice hermitienne positive à coefficient $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, nous avons alors

$$\begin{aligned}
\omega|_U = -\mathrm{Im}(h)|_U &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\big(h - \overline{h}\big)|_U \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Big(\sum_{1 \leq j, \overline{k} \leq n} h_{j\overline{k}}\, dz_j \otimes d\overline{z}_k - \overline{\sum_{1 \leq j, \overline{k} \leq n} h_{j\overline{k}}\, dz_j \otimes d\overline{z}_k}\Big) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Big(\sum_{1 \leq j, \overline{k} \leq n} h_{j\overline{k}}\, dz_j \otimes d\overline{z}_k - \sum_{1 \leq j, k \leq n} \overline{h_{j\overline{k}}}\, d\overline{z}_j \otimes dz_k\Big) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Big(\sum_{1 \leq j, \overline{k} \leq n} h_{j\overline{k}}\, dz_j \otimes d\overline{z}_k - \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{k\overline{j}}\, d\overline{z}_j \otimes dz_k\Big) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{1 \leq j, \overline{k} \leq n} h_{j\overline{k}}\, \big(dz_j \otimes d\overline{z}_k - d\overline{z}_k \otimes dz_j\big).
\end{aligned}$$

Or on sait que

$$dz_j \wedge d\overline{z}_k = dz_j \otimes d\overline{z}_k - d\overline{z}_k \otimes dz_j,$$

d'où

$$\omega|_U = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{1\leq j,k\leq n} h_{j\overline{k}}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k.$$

En particulier, on voit clairement que ω est alors une 2-forme réelle (car partie imaginaire d'une métrique hermitienne) positive (car $(h_{i\overline{j}})_{1\leq i,j\leq n}$) est une matrice définie positive) de type $(1,1)$ (au vu de l'expression locale).

Maintenant, si M est une variété kählérienne alors $d\omega = 0$. Or comme ω est réelle, $d\omega = 0$ est équivalent à $\partial\omega = 0$, ce qui se traduit en coordonnées locales par l'égalité :

$$\frac{\partial h_{j\overline{k}}}{\partial z_l} = \frac{\partial h_{l\overline{k}}}{\partial z_j},\ \ 1 \leq j,k,l \leq n.$$

2.3 Courbure de Ricci

On suppose ici que M est une variété kählérienne compacte. Un calcul simple nous donne que dans un système de coordonnées locales :

$$\frac{\omega^{\wedge n}}{n!} = \det(h_{j\overline{k}}) \bigwedge_{1\leq j\leq n} \big(\frac{\sqrt{-1}}{2}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k\big) = \det(h_{j\overline{k}})\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n,$$

où $z_n = x_n + \sqrt{-1}y_n$. Ainsi la forme volume dV associée à la métrique riemannienne vaut

$$dV = \frac{\omega^n}{n!}.$$

Ce qui peut encore s'écrire puisque M est compacte sous la forme

$$\int_X \omega^n = n!\,\mathrm{Vol}_g(X) > 0.$$

Maintenant, soit Ω une forme volume sur M, qui s'écrit localement dans la carte $(U, z_1, \cdots, z_n)$ sous la forme

$$\Omega = \big(\sqrt{-1}\big)^n\, \widetilde{\Omega}(z_1, \cdots, z_n) dz^1 \wedge d\overline{z}^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\overline{z}^n,$$

où $\widetilde{\Omega}$ est une fonction lisse strictement positive définie sur U. En remarquant que $\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\widetilde{\Omega}$ ne dépend pas de la carte holomorphe choisie, on peut alors définir une $(1,1)$ forme globale $\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\Omega$ définie localement par sa restriction dans toute carte (U,φ) par la formule suivante

$$\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\Omega|_U := \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\widetilde{\Omega}.$$

Définition 2.3.1 *Soit (M,ω) une variété kählérienne compacte. On définit la forme de Ricci* $\mathrm{Ric}(\omega)$ *par la formule suivante :*

$$\mathrm{Ric}(\omega) := -\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\omega^n.$$

2.4 Classe de Chern

2.4.1 Cohomologie de Dolbeault

On fixe encore (M,ω) une variété kählérienne compacte. Soit α une forme différentielle. On dit que α est $\overline{\partial}$-fermée si $\overline{\partial}\alpha = 0$ et qu'elle est $\overline{\partial}$-exacte s'il existe une forme différentielle β telle que $\overline{\partial}\beta = \alpha$. En remarquant que grâce à la proposition 2.1.10 (qui nous dit en particulier que $\overline{\partial}^2 = 0$), nous avons que si α est $\overline{\partial}$-exacte alors α est $\overline{\partial}$-fermée, et nous pouvons définir *le groupe de cohomologie de Dolbeault* par la formule suivante :

$$H^{1,1}_{\mathbb{R}}(M) := \frac{\{\ (1,1)\text{-formes } \overline{\partial}\text{-fermées}\ \}}{\{\ (1,1)\text{-formes } \overline{\partial}\text{-exactes}\ \}}.$$

De plus, si α est une $(1,1)$-forme, on notera $[\alpha]$ sa classe de cohomologie. Nous avons alors un résultat important : le $\partial\overline{\partial}$-lemme.

Lemme 2.4.1 *Soit (M,ω) une variété kählérienne compacte et soit α une $(1,1)$-forme telle que $[\alpha]=0$. Alors il existe une fonction réelle lisse φ telle que $\alpha = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\,\varphi$. De plus, φ est unique modulo une constante addtive.*

Démonstration. On pourra consulter [17, 23]. □

2.4.2 Classe de Chern d'un fibré en droites

Soit $L \to M$ un fibré en droites complexes sur une variété compacte complexe M. Rappelons que L est donc la donnée d'un recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ et de fonctions holomorphes $t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$, dites *fonctions de transitions*, vérifiant

$$\begin{cases} t_{\alpha\beta}t_{\beta\gamma} = t_{\alpha\gamma} & \forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{A}^3 \\ t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha} = 1 & \forall(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Une *section* s de ce fibré est alors la donnée d'une famille $(s_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de fonctions holomorphes $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$s_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = t_{\alpha\beta}\cdot s_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}.$$

De même, une *métrique hermitienne* h sur L est la donnée d'une collection $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de fonctions telles que $h_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \mathbb{R}_+^*)$ pour tout $\alpha\in A$ et telles que l'on ait la relation

$$h_\alpha = |t_{\beta,\alpha}|^2\cdot h_\beta,\ \ \forall(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}^2.$$

La *norme* $|s|_h$ d'une section s pour la métrique h se définit alors sur l'ouvert de trivialisation U_α par la formule :

$$|s|_h = h_\alpha s_\alpha \overline{s}_\alpha.$$

On définit alors *la courbure* R_h de la métrique hermitienne h sur L comme la $(1,1)$-forme sur M que l'on définit localement sur l'ouvert U_α par la formule :

$$R_h := \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log h_\alpha.$$

On montre que cette formule ne dépend pas du recouvrement et on définit alors *la première classe de Chern* $c_1(L)$ du fibré en droites L par

$$c_1(L) := \frac{1}{2\pi}[R_h] \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(M).$$

Terminons par donner des propriétés de la première classe de Chern qui découlent directement de la définition.

Nous avons évité d'introduire la notion de courbure à partir des connexions car ces dernières ne sont pas nécessaires dans ce mémoire. On pourra consulter [7] pour les liens entre ces deux points de vue.

Un fibré en droites est entièrement déterminé par ses fonctions de transition. Il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalences (en un sens que nous ne rappelons pas ici) de fonctions de transition et l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés en droites. Grâce à ces deux remarques nous allons définir sur ce dernier ensemble une structure de groupe. Pour cela, partons de deux fibrés en droites L et $\widetilde{L}$. Quitte à prendre un recouvrement plus fin, on peut toujours supposer que les fonctions de transition de L et de $\widetilde{L}$ sont données sur le même recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de M, déterminés respectivement par les fonctions de transition $\{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ et $\{\widetilde{g}_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$. On définit le fibré en droites $L\otimes\widetilde{L}$ par les fonctions de transition $\{g_{\alpha,\beta}\cdot\widetilde{g}_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta\in\mathcal{A}}$, qui vérifient en particulier les conditions (2.1). On définit aussi un fibré en droites L^* par les fonctions de transition $\{g^{-1}_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ et on vérifie alors facilement que $L\otimes L^*$ correspond à un fibré trivialisable i.e. isomorphe au fibré trivial $\mathbb{C}\times M$, pour cela on notera L^* par L^{-1} dans cette thèse (parfois noté $-L$ dans la littérature). En particulier si s est une section non nulle de L, on définit s^{-1} la section pour le fibré inverse L^{-1}. Nous avons alors le lemme suivant.

Lemme 2.4.2 *Si E et F sont deux fibrés en droites, alors on a*
- $c_1(E\otimes F) = c_1(E) + c_1(F)$,
- $c_1(E^{-1}) = -c_1(E)$.

2.4.3 Classe de Chern d'une variété

Maintenant si M est une variété compacte complexe munie d'un recouvrement de cartes $(U_\alpha, (z_1^\alpha, \cdots z_n^\alpha))$, on définit *le fibré (en droites) canonique* K_M par ses fonctions de transition $t_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbb{C})$ de formule

$$t_{\alpha\beta} = \det\left(\left(\frac{\partial z_i^\beta}{\partial z_j^\alpha} \right)_{1\leq i,j\leq n} \right).$$

En effet, grâce aux formules de changement de variables et à la multiplicativité du déterminant, les fonctions $t_{\alpha\beta}$ vérifient bien

$$\begin{cases} t_{\alpha\beta}t_{\beta\gamma} = t_{\alpha\gamma} & \forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathcal{A}^3 \\ t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha} = 1 & \forall(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}^2 \end{cases}$$

Remarque. On peut montrer que le fibré K_M est isomorphe au fibré des formes différentielles de degré maximale i.e. à $\Omega^{n,0}(M)$ (si on note n la dimension complexe de M).

On définit alors le fibré anticanonique K_M^{-1} comme l'inverse du fibré canonique K_M et on a donc (voir lemme 2.4.2)

$$c_1(K_M^{-1}) = -c_1(K_M).$$

Définition 2.4.3 *Si M est une variété complexe, on définit la première classe de Chern de la variété M, et on la note $c_1(M)$, par*

$$c_1(M) = c_1(K_M^{-1}) = -c_1(K_M).$$

Soit (M, h, ω) une variété kählérienne. Alors la métrique h définit une matrice $(h_{ij}^\alpha)_{1\leq i,j\leq n}$ sur l'ouvert U_α. Cette matrice est hermitienne définie positive donc $\det(h^\alpha) > 0$. On pose

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}, \ \ h_\alpha := \det(h^\alpha)^{-1}.$$

On définit alors une collection $(h_\alpha)_{a\in\mathcal{A}}$ de fonctions telles que $h_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \mathbb{R}_+^*)$ qui vérifient grâce à la formule de changement de variables et à la multiplicativité du déterminant :

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}^2, \ \ h_\alpha = |t_{\beta,\alpha}|^2 h_\beta,$$

donc cette collection définit une structure hermitienne sur K_M.

Proposition 2.4.4 *Soit (M, ω) une variété kählérienne compacte. Alors on a*

$$c_1(M) = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Ric}(\omega)].$$

On dira que
- la première classe de Chern $c_1(M)$ est *positive* et on le notera $c_1(M) > 0$ si elle est représentée par une $(1,1)$-forme réelle qui est définie positive,
- la première classe de Chern $c_1(M)$ est *négative* et on le notera $c_1(M) < 0$ si elle est représentée par une $(1,1)$-forme réelle qui est définie négative,
- la première classe de Chern $c_1(M)$ est *nulle* et on le notera $c_1(M) = 0$ si elle est représentée par la $(1,1)$-forme réelle nulle.

Définition 2.4.5 *Soit M une variété complexe compacte. Si la première classe de Chern est positive i.e. $c_1(M) > 0$ alors on dit que la variété M est de Fano.*

2.5 Étude des variétés de Fano

2.5.1 Champs de vecteurs holomorphes et de Killing

Soit (M, J) une variété complexe compacte. On peut donc voir T_M comme un fibré vectoriel complexe via l'action de J que l'on notera $(T_{M,J})$.

Définition 2.5.1 *Soit $X \in \Gamma(T_{M,J})$. On dira que X est un champ de vecteurs holomorphe réel s'il vérifie*

$$\mathcal{L}_X J = 0,$$

où $\mathcal{L}_X$ est la dérivée de Lie dans la direction de X. On note $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphe réels.

De plus, comme $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$, nous avons alors que l'ensemble $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ des champs de vecteurs holomorphes réels est une sous-algèbre réelle de $\Gamma(T_M)$. De plus, en utilisant le fait que J soit intégrable, nous avons $\mathcal{L}_{JX}J - J\mathcal{L}_X J = 4N^J(X,Y) = 0$, nous obtenons que si X est réel holomorphe alors JX aussi. Ainsi, on peut donc dire que $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ est une sous-algèbre de Lie complexe (via l'action de J) de $\Gamma(T_M, J)$).

Une autre manière de définir la condition d'holomorphie est la suivante :

Définition 2.5.2 *Soit $X \in \Gamma(T_J^{1,0}M)$. On dit que X est un champ de vecteurs (complexe) holomorphe s'il est une section holomorphe du fibré vectoriel $T_J^{0,1}M$ i.e. s'il s'écrit localement dans toute carte holomorphe $(U, z_1, \cdots, z_n)$ sous la forme*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

où $X_i : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe. On notera alors $\eta(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs (complexes) holomorphes.

On va terminer en faisant le lien entre les deux types d'holomorphies. Pour cela, on rappelle que nous avons un isomorphisme entre $\Gamma(T_{M,J})$ et $\Gamma(T_M^{1,0})$ donné par l'application $\tau : X \in \Gamma(M, (T_M, J)) \mapsto X^{1,0} := \frac{1}{2}\left(Z - \sqrt{-1}JZ\right) \in \Gamma(M, T_M^{1,0})$ et donc l'inverse est donné par $\tau^{-1} : Z \in \Gamma(T_M^{1,0}) \mapsto Z + \overline{Z} \in \Gamma(T_{M,J})$. La seconde étape consiste alors à faire le lien entre les deux conditions d'holomorphie via l'isomorphisme précédent. En effet, si $Z \in \eta(M)$ alors il s'écrit localement $Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ et $\overline{\partial} Z = \sum_i \overline{\partial} Z^i \otimes \frac{\partial}{\partial z^i}$ que l'on peut écrire sous la forme $\overline{\partial}_Y Z = [Y^{0,1}, Z]^{1,0}$ pour tout $Z \in \Gamma(T_M^{1,0})$ et pour tout $Y \in \Gamma(T_M)$. Ainsi on obtient que via l'isomorphisme précédent $\overline{\partial}_Y Z = 2\mathrm{Re}([Y^{0,1}, \tau(Z)^{1,0}]^{1,0})$. Cette dernière égalité peut alors se ré-écrire grâce à l'annulation du tenseur N_J de Nijenhuis (dans le cas où (M, J) est une variété complexe) sous la forme $\overline{\partial}_Y Z = -\frac{1}{2}J(\mathcal{L}_X J)(Y)$. Pour plus de détails, on pourra consulter [23]. Résumons cela dans la proposition suivante :

Proposition 2.5.3 *Soit $X \in \Gamma(T_M)$. On dit que X est un champ de vecteurs holomorphe réel si et seulement si $X^{1,0} \in \Gamma(T_J^{1,0}M)$ est un champ de vecteurs holomorphe (complexe).* □

Maintenant, on suppose que M admette une métrique riemanienne g. On dira que $X \in \Gamma(T_M)$ est *un champ de vecteurs de Killing* s'il vérifie

$$\mathcal{L}_X g = 0.$$

On notera $\kappa(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs de Killing de M. Dans le cas kählérien, on peut alors montrer le lemme suivant.

Lemme 2.5.4 *Soit (M, g, J) une variété kählérienne compacte. Alors $\kappa(M)$ est une sous-algèbre de lie de $\eta_{\mathbb{R}}(M)$. De plus, $\kappa(M)$ est l'algèbre de Lie du groupe des isométries de (M, g) qui se trouve être un groupe de Lie compact.*

Démonstration. On pourra consulter le chapitre 2 de [23]. □

2.5.2 Décomposition des champs de vecteurs holomorphes

Maintenant, on suppose que la variété (M, ω_g) est une variété kählérienne compacte de Fano. Cela va nous donner un théorème de décomposition de l'espace $\eta(M)$.

Pour cela, remarquons que si on prend un champ de vecteurs holomorphe X alors $i_X\omega_g$ est une $(0,1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée. Pour le voir, on écrit X s'écrit localement en utilisant les conventions de sommation d'Einstein sous la forme

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

où les X^i sont des fonctions holomorphes, et donc nous obtenons

$$i_X\omega_g = \sqrt{-1}\, g_{i\overline{j}} X^i d\overline{z}^j.$$

Le calcul suivant montre finalement le résultat :

$$\begin{aligned}\overline{\partial}(i_X\omega_g) &= \sqrt{-1}\,\overline{\partial}_k(g_{i\overline{j}}X^i)d\overline{z}^k \wedge d\overline{z}^j \\ &= \sqrt{-1}\,\big(\overline{\partial}_k(g_{i\overline{j}})X^i + g_{i\overline{j}}\overline{\partial}_k(X^i)\big)d\overline{z}^k \wedge d\overline{z}^j \\ &= \sqrt{-1}\,\big(\overline{\partial}_k(g_{i\overline{j}})X^i\big)d\overline{z}^k \wedge d\overline{z}^j && \text{(car les } X^i \text{ sont holomorphes)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de la condition de Kähler qui nous donne que

$$\overline{\partial}_k(g_{i\overline{j}}) = \overline{\partial}_j(g_{i\overline{k}}),$$

or comme le produit extérieur est alterné i.e.

$$d\overline{z}^k \wedge d\overline{z}^j = -d\overline{z}^j \wedge d\overline{z}^k,$$

nous obtenons que pour tout i fixé :

$$\sum_{k,j} \overline{\partial_k}(g_{i\overline{j}})d\overline{z}^k \wedge d\overline{z}^j = 0,$$

ce qui permet de conclure.

Maintenant, *la théorie de Hodge* nous donne le résultat suivant

$$Z^{0,1}(M,\mathbb{C}) = \mathcal{H}^{0,1}(M,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Im}(\overline{\partial}),$$

où $\mathcal{H}^{0,1}(M,\mathbb{C})$ est l'ensemble des $(0,1)$-formes harmoniques sur M et $Z^{0,1}(M,\mathbb{C})$ l'ensemble des $(0,1)$-formes $\overline{\partial}$-fermées (voir [17] par exemple pour plus de détails). De plus, comme $c_1(M) > 0$, on a d'après *l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano* que

$$\mathcal{H}^{0,1}(M,\mathbb{C}) = 0, \tag{2.2}$$

i.e. il n'existe pas de $(0,1)$-forme harmonique sur M (voir par exemple [23, 17] pour plus de détails). Ainsi nous obtenons

$$Z^{0,1}(M,\mathbb{C}) = \mathrm{Im}(\overline{\partial}),$$

ce qui nous donne le lemme suivant.

Lemme 2.5.5 *Soit (M,ω_g) une variété kählérienne compacte de Fano. Pour tout champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta(M)$, il existe une unique fonction $\theta_X \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ vérifiant*

$$i_X\omega_g = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\theta_X, \quad \int_M e^{\theta_X}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n. \tag{2.3}$$

Nous avons alors l'égalité

$$\mathcal{L}_X\omega_g = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\theta_X. \tag{2.4}$$

Démonstration. L'existence vient de la discussion qui précède, tandis que l'unicité vient de la condition de normalisation (seconde équation). L'égalité 2.4 résulte de la formule de Cartan :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\omega_g &= d(i_X\omega_g) + i_X(d\omega_g) && \text{(formule de Cartan)} \\ &= d(i_X\omega_g) && \text{(car } \omega_g \text{ est fermée)} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}d(\overline{\partial}\theta_X) && \text{(grâce à l'équation 2.3)} \\ &= \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\theta_X && \text{(par le lemme 2.1.10).}\end{aligned}$$

□

Ce résultat peut aussi s'exprimer dans le cas des champs de vecteurs holomorphes réels. Avant d'énoncer le résultat, rappelons que si g est une métrique riemannienne alors, en utilisant le fait que g est une forme non-dégénérée, pour tout fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, il existe un champ de vecteurs $\nabla_g f$ dit *gradient riemannien* de f vérifiant $g(\nabla_g f,\cdot) = df$.

Lemme 2.5.6 *Soit (M, g, J, ω) une variété kählérienne compacte de Fano. Pour tout champ de vecteurs holomorphe réel $X \in \eta^{\mathbb{R}}(M)$, il existe deux fonctions f et g appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telles que*

$$X = \nabla_g f + J\nabla_g h.$$

De plus, quitte à renormaliser par une constante ces fonctions, on obtient que

$$2\,\theta_{X^{1,0}} = f + \sqrt{-1}\,h.$$

Démonstration. On traduit la propriété en utilisant l'isomorphisme $X \mapsto X^{1,0}$ entre les champs de vecteurs holomorphes complexes et réels. On pourra aussi consulter [23]. □

Remarque. De plus, si on pose $F = f + \sqrt{-1}h$ alors on notera $\nabla_{g,J} F := \nabla_g f + J\nabla_g h$.

2.5.3 Groupe des automorphismes

Rappelons pour commencer que nous notons $\mathrm{Aut}(M, J)$ le groupe des automorphismes holomorphes d'une variété complexe compacte (M, J). Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 2.5.7 *Soit (M, J) une variété compacte complexe. Alors $\mathrm{Aut}(M, J)$ est un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie est $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ (et donc par isomorphisme $\eta(M)$).*

Démonstration. On pourra consulter la preuve de la proposition 2.1.1 de [23] ou directement le théorème 1.1 du chapitre 3 de [33]. □

Si on se donne un champ de vecteurs holomorphe X, alors X agit sur toute fonction f définie sur M par la formule :

$$\forall x \in M,\ \ X(f)(x) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\left[f(\exp(tX)\cdot x)\right],$$

où $\exp$ est l'application exponentielle associée au groupe $\mathrm{Aut}(M)$. De plus, puisque $Aut(M)$ est un groupe de Lie, on peut parler de sa composante connexe de l'identité que nous noterons $\mathrm{Aut}^\circ(M)$. On a alors le théorème de décomposition suivant (dans le cas Fano).

Théorème 2.5.8 *Soit M une variété compacte kählérienne de Fano. La composante connexe de l'identité $\mathrm{Aut}^\circ(M)$ du groupe des automorphismes holomorphes $\mathrm{Aut}(M)$ de la variété M admet la décomposition suivante :*

$$\mathrm{Aut}^\circ(M) = \mathrm{Aut}(M) \ltimes R_u,$$

où $\mathrm{Aut}_r(M)$ est un sous-groupe réductif de $\mathrm{Aut}^\circ(M)$ et la complexification d'un sous-groupe compacte maximal K de $\mathrm{Aut}^0(M)$ et R_u le radical unipotent de $\mathrm{Aut}^\circ(M)$. De plus, si on note $\eta^{\mathbb{R}}(M)$, $\eta_r^{\mathbb{R}}(M)$ et $\eta_u^{\mathbb{R}}(M)$ les algèbres de Lie de $\mathrm{Aut}(M)$, $\mathrm{Aut}_r(M)$ et R_u respectivement, alors

$$\eta^{\mathbb{R}}(M) = \eta_r^{\mathbb{R}}(M) + \eta_u^{\mathbb{R}}(M).$$

Démonstration. D'après le corollaire 5.8 de [20], on a que l'application d'Albanese induit un morphisme de groupe de Lie entre $\mathrm{Aut}^0(M)$ et la variété d'Albanese $Alb(M)$ de la variété M et que le noyau de cette application est un groupe algébrique linéaire. Dans le cas Fano, le noyau se trouve alors être égale à $\mathrm{Aut}^0(M)$ et les résultats classiques, tels que le théorème de Chevalley, nous donnent alors la première décomposition. La seconde suit alors immédiatement. On pourra aussi consulter l'introduction de l'article [22] pour plus de détails. □

Remarque. Nous n'avons pas défini ici les termes de radical unipotent ou de réductif. Cela sera fait au chapitre 5, sinon on peut aussi directement consulter [54].

Chapitre 3

Les solitons de Kähler-Ricci

3.1 Les métriques de Kähler-Einstein

Dans cette section, on fixe une variété kählérienne compacte (M, g_0, ω_0, J_0) de dimension (complexe) n.

Définition 3.1.1 *Soit g une métrique de Kähler définie sur une variété complexe (M, J_0). On dit que g est une métrique de Kähler-Einstein s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la forme de Kähler ω associée à g vérifie*

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega. \tag{3.1}$$

On dit que λ est la constante d'Einstein de g.

Rappelons que nous pouvons écrire localement :

$$\omega = \sqrt{-1}\, g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j \tag{3.2}$$

et

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \sqrt{-1}\, R_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j, \text{ où } R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \log\det(g_{i\bar{j}}). \tag{3.3}$$

Ainsi, si on note $(g^{\bar{j}i})_{1\leq i,j\leq n}$ l'inverse de la matrice $(g_{i\bar{j}})_{1\leq i,j\leq n}$ et si on définit *la courbure scalaire R* par la formule suivante :

$$R := g^{\bar{j}i} R_{i\bar{j}},$$

alors nous obtenons, en utilisant l'équation (3.1), que

$$R = g^{\bar{j}i} R_{i\bar{j}} = \lambda g^{\bar{j}i} g_{i\bar{j}} = \lambda n.$$

Cela implique que la courbure scalaire est constante. De plus le signe de la constante d'Einstein λ est important. En effet, en prenant les classes de cohomologie de l'équation (3.1), nous obtenons par la proposition 2.4.4

$$2\pi\, c_1(M) = \lambda[\omega].$$

Nous avons donc trois possibilités pour la première classe de Chern $c_1(M)$:

(i) $c_1(M) < 0$ si $\lambda < 0$,

(ii) $c_1(M) = 0$ si $\lambda = 0$,

(iii) $c_1(M) < 0$ si $\lambda > 0$.

Nous avons alors des résultats concernant l'existence et l'unicité des métriques de Kähler-Einstein selon ces trois cas. Avant de les énoncer, nous allons expliquer la démarche pour les obtenir. L'idée est de ramener la recherche de telles métriques à la résolution d'une équation de Monge-Ampère complexe.

Soit ω une forme kählérienne et fixons une forme kählérienne de référence $\omega_0 \in [\omega]$. Supposons que $\lambda\omega$ et $\mathrm{Ric}(\omega)$ aient la même classe de cohomologie. On peut alors écrire grâce au $\partial\bar{\partial}$-lemme qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{Ric}(\omega_0) = \lambda\omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} f.$$

et qu'il existe aussi $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que

$$\omega = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi.$$

L'équation (3.1) s'écrit alors

$$\mathrm{Ric}(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi) = \lambda\left(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi\right).$$

Finalement, d'après ce qui précède, nous obtenons que

$$\mathrm{Ric}(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi) = \mathrm{Ric}(\omega_0) + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}(-f + \lambda\varphi).$$

En utilisant les expressions localement, cela nous donne, en notant $(g^0_{i\overline{j}})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de g_0,

$$\partial\overline{\partial}\ln\left(\frac{\det(g^0_{i\overline{j}} + \varphi_{i\overline{j}})}{\det(g^0_{i\overline{j}})}\right) = \partial\overline{\partial}(f - \lambda\varphi).$$

En remarquant que

$$\partial\overline{\partial}\ln\left(\frac{\det(g^0_{i\overline{j}} + \varphi_{i\overline{j}})}{\det(g^0_{i\overline{j}})}\right) = \partial\overline{\partial}\ln\left(\frac{\left(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi\right)^n}{\omega_0^n}\right),$$

nous obtenons que l'expression précédente est valable sur toute la variété M et en utilisant le principe du maximum sur la variété compacte M, nous avons donc

$$(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi)^n = e^{f-\lambda\varphi}\omega_0^n. \tag{3.4}$$

Nous avons incorporé la constante venant du principe du maximum dans la fonction f qui est définie modulo une constante additive. Cette équation de Monge-Ampère complexe en φ est alors équivalente à l'équation de Kähler-Einstein en ω. C'est cette démarche combinée à la méthode de la continuité qui a permis d'obtenir les résultats suivants.

Dans le cas où $c_1(M) < 0$, nous avons en particulier le *théorème d'Aubin-Yau* ([3]) qui nous donne l'existence et l'unicité de solutions à cette équation dans le cas où $c_1(M) < 0$.

Théorème 3.1.2 *Sur une variété complexe compacte M dont la première classe de Chern $c_1(M)$ est définie négative (i.e. $c_1(M) < 0$), il existe une unique métrique de Kähler-Einstein de constante d'Einstein $\lambda = -1$*

Dans le cas où $c_1(M) = 0$, *la conjecture de Calabi* démontrée par Yau (voir [65]) répond à la question de l'existence de solutions à l'équation de Kähler-Einstein :

Théorème 3.1.3 *Soit (M, ω) une variété kählérienne compacte et soit $\theta \in 2\pi\, c_1(M)$. Alors il existe une unique métrique $\widetilde{g}$ dont la forme de Kähler $\widetilde{\omega}$ vérifie*

$$[\omega] = [\widetilde{\omega}], \;\; \mathrm{Ric}(\widetilde{\omega}) = \theta.$$

En particulier, si $c_1(M) = 0$ alors il existe dans toute classe de cohomologie de $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(M)$ une métrique de Kähler-Einstein ω dont la constante d'Einstein est nulle.

Dans le cas où $c_1(M) > 0$, il existe des variétés dont la première classe de Chern est positive qui n'admettent pas de métrique de Kähler-Einstein. Il existe trois obstructions importantes à l'existence dans le cas Fano. Le première est le *théorème de Matsushima* [39].

Théorème 3.1.4 *Soit M une variété kählérinne compacte de Fano admettant une métrique de Kähler-Einstein. Alors la composante de l'identité $\mathrm{Aut}^0(M)$ du groupe des automorphismes de M est un groupe réductif complexe, et le groupe des isométries holomorphes d'une métrique de Kähler-Einstein est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Aut}^0(M)$.*

L'autre obstruction est la non-annulation de l'invariant de Futaki. En effet, Futaki a introduit dans [21] un invariant sur toute variété kählérienne compacte M de Fano. Il est défini par

$$F_{[\omega]} : \left| \begin{array}{ccc} \eta(M) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ X & \longmapsto & \int_M X(f)\,\omega^n, \end{array}\right.$$

où $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est définie par le $\partial\overline{\partial}$-lemme par

$$\mathrm{Ric}(\omega) - \lambda\omega = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}f,$$

où $\omega \in 2\pi c_1(M)$. Il est alors montré que cet invariant, appelé *invariant de Futaki*, ne dépend que de la classe de cohomologie de ω. Il est alors clair que si M admet une Kähler-Einstein alors $F_{[\omega]} \equiv 0$. Pour introduire le prochain invariant, nous avons besoin d'étudier la démarche de résolution par la méthode de la continuité :

3.2 Méthode de la continuité

Nous avons obtenu dans la section précédente que l'équation des métriques de Kähler-Einstein (renormalisée par $\lambda = 1$) est équivalente à l'équation de Monge-Ampère complexe suivante d'inconnue la fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$:

$$(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi)^n = e^{f-\varphi}\omega_0^n, \tag{3.5}$$

où f est définie comme précédemment par $\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}f$. On peut montrer que cela implique que la fonction f vérifie la condition de normalisation suivante :

$$\int_M e^f \omega_0^n = \int_M \omega_0^n.$$

L'équation de Monge Ampère complexe (3.5) en φ avec la condition $\omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi > 0$ est alors équivalente à l'équation de Kähler-Einstein en ω (renormalisée en $\lambda = 1$). En résumé, on s'intéresse au système d'inconnue $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \det(g^0_{i\overline{j}} + \varphi_{i\overline{j}}) & = \det(g^0_{i\overline{j}}) \exp(f - \varphi) \\ (g^0_{i\overline{j}} + \varphi_{i\overline{j}}) & > 0. \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Maintenant, on introduit un paramètre $t \in [0, 1]$ dans l'équation précédente :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \det(g^0_{i\overline{j}} + \varphi_{i\overline{j}}) & = \det(g^0_{i\overline{j}}) \exp(f - t\varphi) \\ (g^0_{i\overline{j}} + \varphi_{i\overline{j}}) & > 0. \end{array} \right. \tag{3.7}$$

On remarque tout de suite que la solution au temps $t = 1$ correspond à l'équation (3.6).

Pour conclure à l'existence d'une solution au temps $t = 1$, on montre que l'ensemble S des temps $t \in [0, 1]$ tels qu'il existe une fonction $\varphi_t \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ solution à l'équation (3.7) au temps t est un ouvert fermé non vide de $[0, 1]$ donc égal à $[0, 1]$. On doit donc montrer les trois propriétés suivantes :

- Il existe une solution pour le temps $t = 0$.
- S'il existe une solution φ_{t_0} au temps $t_0 \in [0, 1[$ alors il existe $\delta > 0$ tel qu'il existe une solution φ_t pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta[$.
- S'il existe une solution φ_t pour tout temps $t \in [0, \varepsilon_1[$ alors il existe une solution φ_{ε_1} au temps ε_1.

Pour l'existence au temps $t = 0$, c'est une conséquence du théorème de Calabi-Yau. Pour le caractère ouvert, on pose

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{3,\alpha}(M) \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathcal{C}^{1,\alpha}(M) \\ (\varphi, t) & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{\det(g^0_{i\overline{j}} + \varphi_{i\overline{j}})}{\det(g^0_{i\overline{j}})}\right) - (f - t\varphi) \end{array} \right. .$$

Maintenant, on calcule la dérivée de F dans la direction de ψ au point (φ_{t_0}, t_0) :

$$D_{(\varphi_{t_0}, t_0)}F(\psi) = \Delta^{'}\psi + t_0\psi,$$

où $\Delta^{'}$ est le laplacien par rapport à $\omega_{\varphi_{t_0}}$. Remarquons que si $\psi \in \ker D_{(\varphi_{t_0}, t_0)}F$ alors on a $\psi = 0$: en effet on a

$$0 \leq t_0 \int_M |\psi|^2 dV_{g_{t_0}} = \int_M \psi\, \Delta'\psi dV_{g_{t_0}} = -\int_M \|\nabla\psi\|_{g^2_{t_0}} dV_{g_{t_0}} \leq 0,$$

où g_{t_0} est la métrique riemanienne associé à $\omega_{\varphi_{t_0}}$. De plus, comme $D_{(\varphi_{t_0}, t_0)}$ est un opérateur est auto-adjoint, alors l'opérateur $D^*_{(\varphi_{t_0}, t_0)}$ a un noyau réduit à zéro et on obtient que $D_{(\varphi_{t_0}, t_0)}$ est un isomorphisme pour tout $t \in [0, 1[$, nous obtenons l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0, t_0 + \delta[$, il existe $\varphi_t \in \mathcal{C}^{3,\alpha}(M)$ vérifiant $F(\varphi_t, t) = 0$ et tel que l'application $t \mapsto \varphi_t$ est continue. Il faut aussi que ω_φ soit une métrique kählérienne. Quitte à réduire δ, le critère de Sylvester pour les matrices définies positives permet d'obtenir que les ω_{φ_t} soient kähleriennes puisque ω_0 l'est. Il reste à montrer que φ_t est lisse. Ceci est une conséquence directe du théorème de régularisation des solutions de l'équation de Monge-Ampère ([65, 28] pour plus de détails). De plus, le théorie des opérateurs elliptiques, notamment le théorème de régularisation elliptique, nous donne bien que la solution est bien lisse.

Le dernier point est la partie difficile. Celle-ci repose sur l'obtention d'une constante $C_k > 0$ indépendante du temps t, telle que la famille $(\varphi_t)_{t\in[\varepsilon_0,\varepsilon_1[}$ soit bornée pour la norme $\mathcal{C}^k$ i.e.

$$\|\varphi_t\|_{\mathcal{C}^k} \leq C.$$

En effet, le théorème d'Arzela-Ascoli permettra alors d'extraire une sous-suite φ_{t_i} qui convergera en norme $\mathcal{C}^{k-1}$ vers φ_∞ quand $t_i \to \varepsilon_1$. De plus, d'après les célèbres travaux de Yau dans [65], nous sommes au final réduit à chercher une estimation a priori en norme $\mathcal{C}^0$. De plus, rechercher $C > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}^0} \leq C,$$

est équivalent à chercher des constantes C et $\widetilde{C}$ telles que

$$\sup_M \varphi_t \leq C \;\text{ et }\; \widetilde{C} \leq \inf_M \varphi_t.$$

Or on a une inégalité de type Harnack :

$$-\inf_M \varphi_t \leq C(1 + \sup_M \varphi_t),$$

(voir [58, 53] pour plus de détails). Ceci permet de réduire uniquement à la recherche d'une borne supérieure. Le caractère fermé de S se résume donc à montrer

$$\exists C > 0,\;\; \forall t \in [0,1[,\;\; \sup_M \varphi_t \leq C.$$

Cette majoration n'étant pas automatique (sinon toute variété admettrait une métrique de Kähler-Einstein), nous introduisons un nouvel objet qui permet de mesurer le temps maximal d'existence de solutions pour l'équation (3.7).

Définition 3.2.1 *Soit (M, ω_0) une variété kählérienne compacte de Fano. On pose alors*

$$R(M) := \sup\{t \in [0,1] \;/\; \exists \omega \in c_1(M),\;\; \mathrm{Ric}(\omega) > t\,\omega\}.$$

On appellera $R(M)$ la plus grande borne inférieure de Ricci.

Le théorème suivant permet de faire le lien entre l'équation de Monge Ampère (3.7) et $R(M)$.

Théorème 3.2.2 ([55]) *Les propositions suivantes sont équivalentes pour $0 \leq t < 1$:*
- *l'équation* (3.7) *admet une solution au temps t,*
- *il existe une forme kählérienne $\omega \in c_1(M)$ telle que* $\mathrm{Ric}(\omega) > t\,\omega$.

En particulier, cela implique bien que $R(M)$ est le temps maximal d'existence d'une solution à l'équation (3.7). En particulier, nous obtenons donc le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.3 *Soit (M, ω_0) une variété kählérienne compacte. Alors M admet une métrique de Kähler-Einstein si et seulement si $R(M) = 1$.*

3.3 Le flot de Ricci

Une autre manière de démontrer l'existence de métriques de Kähler-Einstein passe par *le flot de Ricci* et sa convergence. Nous l'introduisons dans la section suivante :

3.3.1 Définition

Avant de commencer, faisons quelques rappels sur les objets que nous allons utiliser dans cette section. Si on considère une variété kählérienne (M, ω) de dimension n, on rappelle que la forme de Kähler ω et la forme de Ricci $\mathrm{Ric}(\omega)$ ont les expressions locales suivantes :

$$\omega = \sqrt{-1}\, g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j \tag{3.8}$$

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \sqrt{-1}\, R_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j,\;\text{ où } R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \log\det(g_{i\bar{j}}). \tag{3.9}$$

3.3.2 Définitions

Maintenant, prenons (M, ω_0) une variété kählérienne compacte de dimension complexe n. On dit que la famille $(\omega_t)_{t\in I}$ de formes de Kähler (dépendant d'un paramètre $t \in I \subset \mathbb{R}$ où I est un intervalle contenant 0) est *solution du flot de Kähler-Ricci sur M avec comme condition initiale* ω_0 si elle vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_t = -\operatorname{Ric}(\omega_t), \quad \omega_{t=0} = \omega_0. \tag{3.10}$$

Par la suite, il nous faudra considérer (pour la convergence, voir section 3.3.4) l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\omega}_t = -\operatorname{Ric}(\widetilde{\omega}_t) - \nu\widetilde{\omega}_t, \quad \widetilde{\omega}_{t=0} = \omega_0, \tag{3.11}$$

où $\nu \in \{0, 1\}$ et on appelle cette équation : l'équation du *flot de Kähler-Ricci normalisé*.

En fait, on peut voir que l'équation (3.11) avec $\nu = 1$ est une renormalisation de l'équation (3.10). Plus précisément on a le lemme suivant.

Lemme 3.3.1 *Soit $(\omega_s)_{s\in\mathbb{R}}$ une solution de l'équation* (3.10) *définie sur $\mathbb{R}$. Alors $\widetilde{\omega}_t$ est une solution de l'équation* (3.11) *avec $\nu = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où*

$$\widetilde{\omega}_t = \frac{\omega_s}{s+1}, \;\; t = \log(s+1).$$

Démonstration. On commence par remarquer que

$$t = \ln(s+1) \Longleftrightarrow s = e^t - 1,$$

et grâce à l'expression (3.9), nous avons

$$\operatorname{Ric}(\widetilde{\omega}_t) = \operatorname{Ric}(\omega_s).$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\omega}_t &= \frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial s} \\
&= e^t \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\omega_s}{s+1}\right) \\
&= e^t \frac{\left((s+1)\frac{\partial}{\partial s}\omega_s - \omega_s\right)}{(s+1)^2} \\
&= \frac{1}{s+1}\left((s+1)\operatorname{Ric}(\omega_s) - \omega_s\right) \\
&= \operatorname{Ric}(\widetilde{\omega}_t) + \widetilde{\omega}_t,
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

3.3.3 Existence et unicité de solutions maximales

Dans cette section, nous allons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale pour l'équation (3.10). La première étape va être de déterminer une borne supérieure au temps d'existence d'une solution. En effet, supposons que (ω_t) soit une solution définie sur un intervalle $[0, t'[$. Alors en prenant les classes de cohomologie de l'équation (3.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}[\omega(t)] &= [\frac{\partial}{\partial t}\omega(t)] && \text{(car la dérivée par rapport au temps n'intervient} \\
& && \text{pas dans les calculs de cohomologie)} \\
&= -[Ric(\omega)] && \text{(d'après l'équation 3.10)} \\
&= -2\pi c_1(M)
\end{aligned}$$

Comme le membre de droite ne dépend plus de temps, on obtient donc

$$[\omega_t] = [\omega_0] - t\,2\pi c_1(M) \ \ \forall t \in [0, t'[, \tag{3.12}$$

or ω_t est une forme de Kähler i.e. $\omega_t > 0$. Nous obtenons ainsi une condition nécessaire pour que le flot existe sur $[0, t'[$: on doit avoir

$$t' \leq \sup\{t > 0 \ / \ [\omega_0] - t\,2\pi c_1(M) > 0\} =: T.$$

Nous pouvons montrer que la condition est, en fait, suffisante.

Théorème 3.3.2 *Il existe une solution maximale ω_t à l'équation du flot de Ricci-Kähler* (3.10) *définie sur l'intervalle* $]0, T[$.

Démonstration. On esquisse la démonstration. On pourra consulter [9] pour plus de détails.

On commence par fixer $T' \leq T$ et on montre qu'il existe une solution à l'équation (3.10) sur $[0, T'[$. Nous allons définir une forme de Kähler de référence $\hat{\omega}_t$ dans chaque classe de cohomologie $[\omega_0] - t\,2\pi\, c_1(M)$ pour $t \in]0, T'[$ (cette classe est de Kähler car $t < T' < T$). En particulier, il existe une forme de Kähler η telle que

$$\eta \in [\omega_0] - T'\,2\pi c_1(M).$$

Et on définit $\hat{\omega}_t$ comme le chemin linéaire entre ω_0 et η i.e.

$$\hat{\omega}_t := \omega_0 + t\chi \in [\omega_0] - t\,2\pi c_1(M), \ \ \forall t \in]0, T'[,$$

où

$$\chi := \frac{1}{T'}(\eta - \omega_0) \in -2\pi c_1(M).$$

En définissant la forme volume Ω sur M par $\Omega = e^f \omega_0$ où f vérifie $\chi = -\operatorname{Ric}(\omega_0) + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial} f$, nous obtenons qu'elle vérifie

$$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\Omega = \chi = \frac{\partial}{\partial t}\,\hat{\omega}_t \in -2\pi c_1(M). \tag{3.13}$$

On cherche maintenant une famille $(\varphi_t)_{t\in[0,T'[}$ de fonctions lisses définies sur M à valeurs réelles telle que

$$\frac{\partial\varphi_t}{\partial t} = \log\frac{(\hat{\omega}_t + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi_t)^n}{\Omega}, \ \ \hat{\omega} + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi_t > 0, \ \ \varphi_{t=0} = 0. \tag{3.14}$$

Et on a alors le résultat suivant :

Lemme 3.3.3 *Résoudre l'équation du flot de Kähler-Ricci* (3.10) *est équivalent à résoudre l'équation de Monge-Ampère* (3.14).

Démonstration. Soit φ_t une solution de l'équation (3.14). Posons alors

$$\omega_t = \hat{\omega}_t + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi_t.$$

On a donc, d'après la deuxième équation de 3.14, que $\omega_t > 0$ i.e. ω_t est une forme de Kähler. De plus, elle vérifie bien la condition initiale de valoir ω_0 au temps $t = 0$ d'après la troisième équation de (3.14) et le calcul suivant montre qu'elle est bien solution du flot de Kähler-Ricci (3.10) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\,\omega_t &= \frac{\partial}{\partial t}\,\hat{\omega}_t + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\hat{\omega}_t + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\big((\log(\hat{\omega}_t + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_t)^n\big) - \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\big(\log\Omega\big). && \text{(voir l'équation (3.14))}\end{aligned}$$

Grâce à la formule 3.13, le premier et le dernier termes se simplifient, on obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\,\omega_t &= \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\big((\log(\hat{\omega}_t + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_t)^n\big)\\ &= \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\big(\log\omega_t^n\big) && \text{(par définition de } \omega_t)\\ &= \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\big(\log\det((g_t)_{i\overline{j}})\big) && \text{où } g_t \text{ est la métrique riemannienne associé à } \omega_t\\ &= -Ric(\omega_t) && \text{(voir l'équation (3.9)) .}\end{aligned}$$

Réciproquement, si ω_t est une solution de l'équation (3.10) alors en prenant les classes de cohomogie de cette équation, nous obtenons que $[\omega_t] = [\omega_0] - t\,2\pi\,c_1(M)$, et puisque par définition $\hat{\omega}_t$ appartient aussi à cette classe, en utilisant le $\partial\overline{\partial}$-lemme, on peut trouver un potentiel $\widetilde{\varphi}_t$ tel que

$$\omega_t = \hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\widetilde{\varphi}_t.$$

Quitte à rajouter une constante, on peut supposer que $\widetilde{\varphi}_t$ vérifie

$$\int_M \widetilde{\varphi}_t \omega_0^n = 0.$$

De plus, le théorème de régularité parabolique, nous dit que l'application $(x,t) \mapsto \varphi_t(x)$ est lisse sur $M \times [0, T'[$. Donc nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\omega^n &= \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\det((g_t)_{i\overline{j}}) \\
&= -Ric(\omega_t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\omega_t && \text{(voir l'équation (3.10))} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\omega}_t + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\widetilde{\varphi}_t\right) && \text{(par définition de } \varphi_t\text{).} \\
&= \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\Omega + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right) && \text{(voir l'équation 3.13)}
\end{aligned}$$

Or M est une variété compacte donc les seules fonctions pluri-harmoniques sont les constantes, ce qui nous donne :

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi_t}}{\partial t} = \log\frac{\omega_t^n}{\Omega} + c(t),$$

où $c : [0, T'[\to \mathbb{R}$ est une fonction lisse. Maintenant, on pose

$$\varphi_t := \widetilde{\varphi}_t - \int_0^t c(s)ds - \widetilde{\varphi}_0,$$

et on a alors que φ est une solution de (3.14). En effet, il est clair que $\varphi_0 = 0$ et que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_t}{\partial t} &= \frac{\partial\left(\widetilde{\varphi}_t - \int_0^t c(s)ds - \widetilde{\varphi}_0\right)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial\widetilde{\varphi}_t}{\partial t} - c(t) \\
&= \log\frac{\omega_t^n}{\Omega} && \text{(par définition de } c(t)\text{)} \\
&= \log\frac{(\hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_t)^n}{\Omega} && \text{(par définition de } \omega_t\text{).}
\end{aligned}$$

□

3.3.4 Convergence du flot

3.3.5 Notions de convergence

Fixons une variété kählérienne compacte (M, ω). Si f est une fonction sur M, on définit *la norme $\mathcal{C}^0$ de f sur M* par

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0(M)} = \sup_M |f|,$$

et pour tout ouvert $U \subset M$,

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0(U)} = \sup_U |f|$$

On étend cette définition aux tenseurs réels. Pour cela, si on se donne W un tenseur réel, on définit $|W|_g^2$ en contractant par g, on définit alors *la norme sur M de W* par :

$$\|W\|_{\mathcal{C}^0(M,g)} = \| \, |W|_g \, \|_{\mathcal{C}^0(M)}.$$

Maintenant, en considérant la dérivée covariante réelle associée à la métrique g, on définit pour toute fonction f le tenseur $\nabla_{\mathbb{R}}^m f$ dont les composantes sont $(\nabla_{\mathbb{R}})_{i_1} \cdots (\nabla_{\mathbb{R}})_{i_m} f$, et de même pour tout tenseur W. On définit alors *la norme $\mathcal{C}^k$ sur M* pour tout fonction f et pour tout ouvert $U \subset M$:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k(U,g)} = \sum_{m=0}^{k} \|\nabla_{\mathbb{R}}^m f\|_{\mathcal{C}^0(U,g)},$$

et de manière similaire pour tout tenseur W.

Finalement, on dit que *la famille $(T_t)_t$ de tenseurs converge de manière $\mathcal{C}^\infty(M,g)$ vers T_∞* si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|T_t - T_\infty\|_{\mathcal{C}^k(M,g)} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Étude dans le cas où $c_1(M) < 0$

On considère une variété kählérienne compacte (M, ω_0) telle que $c_1(M) < 0$ et on suppose de plus que

$$\omega_0 \in -2\pi \, c_1(M).$$

En appliquant le théorème 3.3.2, on obtient qu'il existe une unique solution maximale à l'équation (3.10) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_t = -\operatorname{Ric}(\omega_t), \quad \omega_{t=0} = \omega_0,$$

et que cette équation est définie sur l'intervalle $[0, T[$ où

$$T := \sup\{t > 0 \ / \ [\omega_0] - t\, 2\pi \, c_1(M) > 0\}.$$

O.r on sait que $\omega_0 \in -2\pi \, c_1(M)$ et $c_1(M) < 0$ donc

$$\forall t > 0, \ \ [\omega_0] - t\, 2\pi \, c_1(M) = -(t+1)\, 2\pi \, c_1(M) > 0$$

d'où

$$T = +\infty.$$

On a donc une solution $\omega = \omega_t$ définie pour tout $t > 0$ à l'équation (3.10). En prenant les classes des cohomologies de cette équation, on obtient

$$[\omega_t] = (1+t)\, 2\pi \, c_1(M),$$

et donc ω_t diverge quand t tend vers l'infini. On ne peut espérer faire converger ce flot. Pour cette raison, on considère l'équation de Kähler-Ricci normalisée (3.11)

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_t = -\operatorname{Ric}(\omega_t) - \omega_t, \quad \omega_{t=0} = \omega_0.$$

Nous avons vu alors grâce au lemme 3.3.1 que cette équation admet aussi une solution ω_t définie pour tout $t > 0$. Cette fois-ci, en passant aux classes de cohomologie, on obtient que

$$[\omega_t] = -2\pi \, c_1(M).$$

Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 3.3.4 ([13]) *Soit $(\omega_t)_{t>0}$ la solution de l'équation du flot de Kähler-Ricci normalisée* (3.11)*. Alors ω converge de manière $\mathcal{C}^\infty$ vers une métrique de Kähler-Einstein $\omega_{KE} \in -2\pi \, c_1(M)$.*

Étude dans le cas où $c_1(M) = 0$

On considère une variété kählérienne compacte (M, ω_0) telle que $c_1(M) = 0$.

En appliquant le théorème (3.3.2), on obtient qu'il existe une unique solution maximale à l'équation 3.10 et que cette équation est définie sur l'intervalle $[0, T[$ où

$$T := \sup\{t > 0 \;/\; [\omega_0] - t\, 2\pi\, c_1(M) > 0\}.$$

or on sait que $c_1(M) = 0$ et $\omega_0 > 0$, donc

$$T = +\infty.$$

On a donc une solution ω_t définie pour tout $t > 0$ à l'équation (3.10). En prenant les classes de cohomologie de cette équation, on obtient

$$[\omega_t] = [\omega_0].$$

On peut alors montrer le résultat suivant :

Théorème 3.3.5 ([13]) *La solution ω_t à l'équation (3.10) converge de manière $\mathcal{C}^\infty$ vers l'unique métrique de Kähler-Einstein $\omega_{KE} \in [\omega_0]$.*

Étude dans le cas où $c_1(M) > 0$

Comme dit précédemment, il n'y a pas toujours existence de solutions à l'équation de Kähler-Einstein sur une variété M dont la première classe de Chern $c_1(M)$ est positive. On introduit donc des solutions "particulières" que l'on appelle soliton de Kähler-Ricci qui se trouvent être des solutions auto-similaires i.e. qui évoluent le long des symétries du flot (d'où la terminologie). Dans notre cas, nos symétries seront de renormalisation et de difféomorphismes. En effet, supposons qu'il existe $X \in \eta(M)$ tel que

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \mathcal{L}_X(\omega_g)$$

alors $h_t := (1+t)\varphi_t^* \omega$ où φ_t est le flot associé à $\mathrm{Re}\, X$ vérifie $\frac{\partial h_t}{\partial t} = -\,\mathrm{Ric}(h_t)$. Après cette brève introduction, nous allons étudier ces solutions plus en détails dans la section suivante.

3.4 Les solitons de Kähler-Ricci

3.4.1 L'équation des solitons de Kähler-Ricci

Soit (M, ω) une variété kählérienne compacte dont la première classe de Chern est positive $c_1(M) > 0$ i.e. M est une variété kählérienne compacte de Fano. Rappelons que nous notons $\eta(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes complexes sur M.

Définition 3.4.1 *Soit M une variété kählérienne compacte de Fano. On dit que le couple (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci si*

- *$X \in \eta(M)$ i.e. X est un champ de vecteurs holomorphe,*
- *g est une métrique kählérienne sur M*

telle que

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \mathcal{L}_X(\omega_g), \tag{3.15}$$

où

- *ω_g est la forme de Kähler associée g,*
- *$\mathrm{Ric}(\omega_g)$ est la forme de Ricci associée ω_g,*
- *$\mathcal{L}_X(\omega_g)$ est la dérivée de Lie de ω_g dans la direction de X.*

Remarque. Cette notion généralise la notion de métrique de Kähler-Einstein. En effet, si on prend $X = 0$, alors on retrouve l'équation de Kähler-Einstein (3.1.1).

Remarque. La condition d'être de Fano n'est pas nécessaire car elle découle de l'équation (3.15). En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g &= \mathcal{L}_X\omega_g \\ &= d(i_X\omega_g) + i_X(d\omega_g) && \text{(formule de Cartan)} \\ &= d(i_X\omega_g) && \text{(car } \omega_g \text{ est fermée).}\end{aligned}$$

Or $i_X\omega_g$ est une $(0,1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée (résultat démontré dans la suite). Donc d'après *la théorie de Hodge* (voir [63] pour plus de détails), elle s'écrit

$$i_X\omega_g = \alpha + \overline{\partial}\phi,$$

où α est une $(0,1)$-forme harmonique et ϕ une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$. Ainsi nous obtenons que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g &= \partial(i_X\omega_g) && \text{(car } i_X\omega_g \text{ est } \overline{\partial}\text{-fermée)} \\ &= \partial(\alpha + \overline{\partial}\phi) && \text{(d'après ce qui précède)} \\ &= \partial\overline{\partial}\phi && \text{(car } \alpha \text{ est harmonique).}\end{aligned}$$

Donc en passant aux classes de cohomologie et en utilisant le fait que $\mathrm{Ric}(\omega_g)$ est un représentant de $2\pi c_1(M)$, nous obtenons que $2\pi c_1(M)$ est représentée par la métrique ω_g et donc $c_1(M)$ est obligatoirement positive. Ceci nous donne une condition nécessaire pour que (X,g) soit un soliton Kähler-Ricci.

Lemme 3.4.2 *Soit M une variété de Fano compacte. Si (X,g) est un soliton de Kähler-Ricci alors la forme de Kähler ω_g associée à la métrique g vérifie $\omega_g \in 2\pi\, c_1(M)$.*

3.4.2 Les théorèmes d'existences et d'unicités

Les deux questions importantes lorsque nous étudions une équation sont l'existence et l'unicité de solutions. Dans le cas des solitons de Kähler-Ricci, il existe un résultat concernant l'unicité démontré dans [61, 59].

Proposition 3.4.3 *Soit une variété kählérienne de Fano compacte M. Si (X,g) et $(X^{'},g^{'})$ sont des solitons de Kähler-Ricci alors il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(M)^\circ$ tel que*

$$\omega_g = \sigma^*\omega_{g'}\,,\ \ X = (\sigma^{-1})_*(X^{'}).$$

où $\mathrm{Aut}(M)^\circ$ est la composante connexe de l'identité du groupe $\mathrm{Aut}(M)$ des automorphismes holomorphes de M.

Par contre, nous n'avons pas de résultats généraux concernant l'existence. Nous pouvons montrer l'existence sur des variétés de Fano particulières, par exemple sur les variétés toriques de Fano (voir la section 4.1).

Théorème 3.4.4 ([64]) *Il existe un soliton de Kähler-Ricci, qui est unique modulo les automorphismes holomorphes, sur toute variété kählérienne compacte torique de Fano.*

Pour démontrer ce résultat, Zhu et Wang commencent par déterminer le champ de vecteurs solitonique à l'aide de *l'invariant de Futaki* et ensuite ils se ramènent à une équation de Monge-Ampère réelle et concluent à l'aide de la méthode de la continuité.

3.4.3 Étude de l'équation des solitons de Kähler-Ricci

Dans cette section, nous allons étudier les conséquences de l'existence de solitons de Kähler-Ricci sur une variété de Fano compacte.

Pour cela, on fixe une variété de Fano compacte M et on considère un soliton de Kähler-Ricci (X,g) sur M. Par l'équation (3.15), les formes ω_g et $\mathrm{Ric}(\omega_g)$ sont des $(1,1)$-formes réelles, nous obtenons que $\mathcal{L}_X\omega_g$ est aussi une $(1,1)$-forme réelle i.e. $\mathcal{L}_{\mathrm{Im}X}\omega_g = 0$, où $\mathrm{Im}X$ est la partie imaginaire de X. Nous avons alors la proposition suivante.

Proposition 3.4.5 *Soit M une variété de Fano compacte et (X, g) un soliton de Kähler-Ricci sur M. Nous avons alors les conséquences suivantes :*

(i) la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X \omega_g$ est une $(1,1)$-forme réelle i.e. $\mathcal{L}_{\mathrm{Im} X}\omega_g = 0$,

(ii) la partie imaginaire $\mathrm{Im}X$ du champ de vecteurs X engendre un sous-groupe à un paramètre compact $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ composé d'isométries pour ω.

Démonstration.

Le premier point a déjà été prouvé.

Pour le second point, comme M est une variété compacte, le flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de $\mathrm{Im}X$ est global. De plus, par ce qui précède et par les propriétés du flot, on a

$$0 = \mathcal{L}_{\mathrm{Im} X}\omega_g = \frac{d}{dt}|_{t=0}((\phi_t)_*\omega).$$

ainsi, comme $\phi_0 = id$, nous obtenons

$$(\phi_t)_*\omega = (\phi_0)_*\omega = \omega, \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

ce qui permet de conclure. □

Avant d'étudier plus en détails cette équation, faisons quelques rappels afin de fixer les notations et conventions. Si g est une métrique kählérienne, alors g s'écrit localement

$$g = g_{i\bar{j}}\, dz^i \otimes d\bar{z}^j. \tag{3.16}$$

(On rappelle aussi que nous notons $(g^{\bar{j}i})$ l'inverse de la matrice $(g_{i\bar{j}})$.)

De plus, la forme de Kähler ω_g associée à g et la forme de Ricci $\mathrm{Ric}(\omega_g)$ associée à ω_g s'écrivent alors

$$\omega_g = \sqrt{-1} g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j, \tag{3.17}$$

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) = \sqrt{-1} R_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j, \text{ où } R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \log\det(g_{i\bar{j}}). \tag{3.18}$$

Avec ces notations, nous pouvons étudier l'équation des solitons de Kähler-Ricci. Pour commencer, nous avons le lemme suivant

Lemme 3.4.6 *Soit M une variété de Fano compacte. Alors pour toute métrique kählérienne g telle que sa forme de Kähler ω_g appartienne à $2\pi\, c_1(M)$, il existe une unique fonction $h_g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant*

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} h_g, \ \int_M e^{h_g}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n. \tag{3.19}$$

Démonstration. Puisque $\omega_g \in 2\pi\, c_1(M)$ et $\mathrm{Ric}(\omega)$ appartiennent à $2\pi\, c_1(M)$, nous obtenons par le $\partial\bar{\partial}$-lemme qu'il existe une fonction $h_g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} h_g.$$

De plus, h_g est entièrement déterminée modulo une constante, on normalise alors en demandant en plus que

$$\int_M e^{h_g}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n,$$

où $\omega_g^n = \omega_g \wedge \cdots \wedge \omega_g$ la forme volume associée à ω_g. En effet, comme ω_g^n est une forme volume, nous avons que

$$\int_M e^{h_g}\omega_g^n > 0 \ \text{ et } \ \int_M \omega_g^n > 0,$$

donc en posant

$$\theta := \log\left(\frac{\int_M \omega^n}{\int_M e^{h_g}\omega_g^n},\right),$$

on obtient bien que

$$\int_M e^{h_g+\theta}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n.$$

De plus, cette normalisation détermine entièrement h_g. En effet, supposons que h_g et $\widetilde{h}_g$ vérifient cette condition, alors par hypothèse on a que

$$\widetilde{h}_g = h_g + \theta,$$

en prenant l'intégrale, on obtient

$$e^\theta \int_M e^{h_g}\omega_g^n = \int_M e^{h_g+\theta}\omega_g^n = \int_M e^{\widetilde{h}_g}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n = \int_M e^{h_g}\omega_g,$$

donc comme $\int_M e^{h_g}\omega_g^n > 0$, nous obtenons que $e^\theta = 1$ i.e. $\theta = 0$. Ce qui permet de conclure à l'unicité. □

Exploitons maintenant le fait que M est une variété de Fano i.e. $c_1(M) > 0$. Rappelons (voir section 2.5) que pour tout champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta(M)$, il existe une unique fonction $\theta_X \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ vérifiant

$$i_X\omega_g = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\theta_X, \quad \int_M e^{\theta_X}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n. \tag{3.20}$$

Nous avons alors le résultat suivant qui fait le lien entre les fonctions θ_X et h_g :

Proposition 3.4.7 *En gardant les notations des lemmes 3.4.6 et 2.5.5, nous obtenons que si (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci alors $h_g = \theta_X$.*

Démonstration. Commençons par rappeler l'égalité (2.4) :

$$\mathcal{L}_X\omega_g = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\theta_X.$$

Comme (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci, par l'équation des solitons de Kähler-Ricci (3.15), nous avons que

$$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\theta_X = \mathcal{L}_X(\omega_g) = \mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g.$$

Or, par l'équation (3.19), nous avons aussi

$$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h_g = \mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g.$$

Ainsi θ_X et h_g vérifient la même équation, et de plus, par hypothèse, les fonctions θ_X et h_g vérifient la même condition de normalisation, on conclut alors par unicité de θ_X (voir le lemme 2.5.5). □

3.4.4 L'invariant de Futaki pour les solitons de Kähler-Ricci

Cette section s'inspire grandement de l'article originel [59].

Une première définition de l'invariant de Futaki

Dans cette section, on considère une variété de Fano compacte M et une métrique kählérienne g sur M telle que sa forme de Kähler ω_g appartienne à $2\pi\, c_1(M)$. On définit alors *l'invariant de Futaki pour les solitons de Kähler-Ricci* qui nous donnera une condition nécessaire pour que (X, g) soit un soliton de Kähler-Ricci.

Définition 3.4.8 *Soit M une variété de Fano compacte et soit g une métrique kählérienne sur M telle que $\omega_g \in c_1(M)$. Pour tout champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta(M)$, on définit la fonctionnelle F_X, appelée fonctionnelle de Futaki, par*

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \eta(M) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ v & \longmapsto & \displaystyle\int_M v(h_g - \theta_X)e^{\theta_X}\omega_g^n \end{array} \right.$$

où on note :

- *h_g l'unique fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant*

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}h_g, \quad \int_M e^{h_g}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n,$$

- *θ_X l'unique fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ vérifiant*

$$i_X\omega_g = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\theta_X, \quad \int_M e^{\theta_X}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n.$$

(voir les lemmes 3.4.6 et 2.5.5 pour plus de détails)

Au vu de la définition, il semblerait que la fonctionnelle F_X dépende de la métrique kählérinne g mais le lemme suivant montre qu'il n'en est rien et que la fonctionnelle de Futaki F_X est un invariant holomorphe appelé *invariant de Futaki* :

Lemme 3.4.9 *Soient M une variété kählérinne de Fano compacte et g une métrique kählérienne sur M telle que $\omega_g \in 2\pi\, c_1(M)$. Alors, pour tout $X \in \eta(M)$ la fonctionnelle F_X est indépendante de g.*

Démonstration. La preuve que nous donnons est tirée de [59]. Soit g' une autre métrique kählérienne telle que $\omega_{g'} \in 2\pi\, c_1(M)$. D'après le $\overline{\partial}\partial$-lemme, il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que

$$\omega_{g'} = \omega_g + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi.$$

- La première étape de notre démonstration consiste à montrer que

$$\theta_X(g') = \theta_X(g) + X(\phi) + c,$$

où c est une constante. Pour cela, on remarque que d'un côté nous avons

$$\sqrt{-1}\,\overline{\partial}[\theta_X(g) + X(\phi)] = i_X\omega_g + \sqrt{-1}\,\overline{\partial}[X(\phi)],$$

et de l'autre côté, nous avons

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\,\overline{\partial}\theta_X(g') = i_X(\omega_{g'}) &= i_X(\omega_g + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi)\\ &= i_X\omega_g + \sqrt{-1}i_X\big(\partial\overline{\partial}\phi\big).\end{aligned}$$

Maintenant, on remarque que

$$i_X\big(\partial\overline{\partial}\phi\big) = \overline{\partial}[X(\phi)].$$

En effet, si on écrit localement $X = X^i\partial_i$, nous avons alors d'une part

$$\partial\overline{\partial}\phi = (\partial_i\overline{\partial}_j\phi)\; dz^i \wedge d\overline{z}^j$$

d'où

$$i_X(\partial\overline{\partial}\phi) = (\partial_i\overline{\partial}_j\phi)\; X^i d\overline{z}^j.$$

Et d'autre part, nous avons aussi

$$X(\phi) = X^i(\partial_i\phi),$$

d'où

$$\begin{aligned}\overline{\partial}X(\phi) &= \overline{\partial}\big((\partial_i\phi)X^i\big)d\overline{z}^j\\ &= (\overline{\partial}_j\partial_i\phi)X^i d\overline{z}^j + (\partial_i\phi)(\overline{\partial}_j X^i)d\overline{z}^j\\ &= (\overline{\partial}_j\partial_i\phi)X^i d\overline{z}^j && \text{(car } X \text{ est holomorphe)}\\ &= (\partial_i\overline{\partial}_j\phi)X^i d\overline{z}^j && \text{(car } \phi \text{ est à valeurs réelles).}\end{aligned}$$

Ainsi, on remarque

$$i_X\omega_{g'} = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\left(\theta_X(g) + X(\phi)\right),$$

et donc, par la formule de Cartan,

$$\mathcal{L}_X\omega_{g'} = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\left(\theta_X(g) + X(\phi)\right).$$

De plus, par définition, nous avons aussi

$$\mathcal{L}_X \omega_{g'} = \sqrt{-1}\, \partial\overline{\partial}\, \theta_X(g').$$

et donc

$$\partial\overline{\partial}\, [\theta_X(g') - (\theta_X(g) + X(\phi))] = 0.$$

Par le principe du maximum, nous obtenons que

$$\theta_X(g') = \theta_X(g) + X(\phi) + c.$$

- La seconde étape consiste à montrer que la constante c est nulle i.e.

$$\theta_X(g') = \theta_X(g) + X(\phi).$$

Pour cela, nous définissons les métriques kählériennes ω_{g_s} par la formule

$$\omega_{g_s} := \omega_g + (s-1)\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi, \ \ \forall s \in [1,2].$$

Remarquons (nous démontrerons ces égalités à la fin de la preuve) que nous avons

$$\frac{d}{ds}\left(\, \omega_{g_s}^n \,\right) = \Delta_s \phi\, \omega_{g_s}^n, \tag{3.21}$$

où Δ_s est l'opérateur laplacien associé à ω_{g_s} et

$$X(f) = \langle \overline{\partial}\, \theta_X(g_s), \overline{\partial}\, \overline{f} \rangle_{\omega_{g_s}}, \ \ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}). \tag{3.22}$$

Nous pouvons aussi remarquer que la première étape de la démonstration nous donne que pour tout $s \in [1,2]$, il existe une constante c_s telle que

$$\theta_X(g_s) = \theta_X(g) + X(\phi) + c_s.$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\int_M \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi))\omega_{g_s}^n \\
&= \int_M \frac{d}{ds}\big(\exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi))\omega_{g_s}^n\big) && \text{(interversion dérivée et intégrale)} \\
&= \int_M \big(\Delta_s\phi + X(\phi)\big)\exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi))\omega_{g_s}^n && \text{(grâce à la formule (3.21)).}
\end{aligned}$$

Or, en utilisant la formule d'intégration par partie et la formule (3.22), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
&\int_M \Delta_s\phi\, \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi))\omega_{g_s}^n \\
&= -\int_M \langle \overline{\partial}\phi, \overline{\partial}[\overline{\exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi))}]\rangle\, \omega_{g_s}^n \\
&= -\int_M \langle \overline{\partial}\phi, \overline{\partial}[\overline{\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)}]\rangle\, \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi))\, \omega_{g_s}^n \\
&= -\int_M \langle \overline{\partial}\phi, \overline{\partial}[\overline{\theta_X(g) + (s-1)X(\phi) + c_s}]\rangle\, \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi))\, \omega_{g_s}^n \\
&= -\int_M \langle \overline{\partial}\phi, \overline{\partial}[\overline{\theta_X(g_s)}]\rangle\, \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi))\, \omega_{g_s}^n \\
&= -\int_M X(\phi)\exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi))\, \omega_{g_s}^n.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\frac{d}{ds}\int_M \exp(\theta_X(g)+(s-1)X(\phi))\omega_{g_s}^n. = 0,$$

donc nous avons

$$\int_M \exp(\theta_X(g)+(s-1)X(\varphi))\omega_{g_s}^n = \int_M \exp(\theta_X(g))\omega_g^n = \int_M \omega_g^n,$$

De plus, puisque ω_{g_s} et ω_g ont la même classe de Chern, par la formule de Stokes, nous avons

$$\int_M \omega_g^n = \int_M \omega_{g_s}^n,$$

ce qui nous donne

$$\int_M \exp(\theta_X(g)+(s-1)X(\varphi))\omega_{g_s}^n = \int_M \omega_{g'}^n.$$

et on conclut grâce à l'unicité démontrée dans le lemme 2.5.5, que

$$\theta_X(g)+(s-1)X(\varphi)=\theta_X(g_s),\ \ \forall s\in[1,2],$$

donc en particulier, en prenant $s=2$ que

$$\theta_X(g)+X(\varphi)=\theta_X(g'),$$

ce que nous voulions.

- La troisième étape consiste à remarquer que

$$h_g' = h_g - \log\frac{\omega_{g'}^n}{\omega_g^n} - \phi + c,$$

où c est une constante. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h_g' &= \mathrm{Ric}(\omega_{g'})-\omega_{g'}\\ &= \mathrm{Ric}(\omega_{g'})-\omega_g-\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi\\ &= \mathrm{Ric}(\omega_{g'})-\mathrm{Ric}(\omega_g)+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h_g-\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi.\end{aligned}$$

En écrivant cela en coordonnées, nous obtenons que

$$\partial\overline{\partial}[h_g'-h_g+\log\frac{\omega_{g'}^n}{\omega_g^n}+\phi]=0,$$

ce qui permet de conclure.

- La quatrième étape consiste à montrer que pour tout $(X,v)\in\eta(M)^2$, on a

$$\int_M v(h_g-\theta_X(g))e^{\theta_X(g)}\omega_g^n = \int_M v(h_{g'}-\theta_X(g'))e^{\theta_X(g')}\omega_{g'}^n,$$

ce qui achèvera donc la démonstration du lemme. Pour cela, on rappelle que nous avons défini les métriques kählériennes ω_{g_s} par la formule

$$\omega_{g_s} := \omega_g + (s-1)\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi,\ \ \forall s\in[1,2],$$

et nous posons aussi

$$h_s = h_g - \log\frac{\omega_{g'}^n}{\omega_g^n} - (s-1)\phi,\ \ \forall s\in[1,2].$$

Commençons par remarquer que

$$\mathrm{Ric}(\omega_{g_s})-\omega_{g_s}=\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h_s, \tag{3.23}$$

et que

$$\frac{dh_s}{ds} = -(\Delta_s \phi + \phi). \tag{3.24}$$

(Nous démontrerons ces deux égalité à la fin de la preuve.) Remarquons aussi tout de suite que nous avons

$$\frac{d\,\theta_X(g_s)}{ds} = \frac{d}{ds}[\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)] = X(\phi). \tag{3.25}$$

De plus, on rappelle qu'en faisant un raisonnement similaire à celui de la section 3.4, nous obtenons que pour tout $v \in \eta(M)$ fixé, il existe une fonction $\psi_s \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ telle que :

$$i_v(\omega_{g_s}) = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\psi_s,$$

et que nous avons la formule suivante :

$$\forall s \in [1,2], \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}),\;\; v(f) = \langle \overline{\partial}\,\psi_s, \overline{\partial}\,\overline{f}\rangle_{\omega_{g_s}}. \tag{3.26}$$

(on démontrera cette égalité à la fin de la preuve.)
On définit alors

$$f : \left| \begin{array}{rcl} [1,2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & \displaystyle\int_M v(h_s - \theta_X(g_s)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \end{array} \right. .$$

On va étudier la dérivée de f par rapport à la variable s et montrer qu'elle est nulle, ainsi $f(s)$ ne dépendra de s i.e.

$$f(s) = f(1),\;\; \forall s \in [1,2].$$

En particulier, nous aurons que

$$f(1) = f(2),$$

ce qui permettra de conclure. Passons au calcul, en utilisant les équations (3.23), (3.25) et (3.24), nous obtenons que

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\int_M v(h_s - \theta_X(g_s))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M \frac{d}{ds}[v(h_s - \theta_X(g_s))]\, e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n \\
&+ \int_M v(h_s - \theta_X(g_s))\frac{d}{ds}[e^{\theta_X(g_s)}]\omega_{g_s}^n \\
&+ \int_M v(h_s - \theta_X(g_s))e^{\theta_X(g_s)}\,\frac{d}{ds}[\omega_{g_s}^n]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M v(\frac{d}{ds}[h_s - \theta_X(g_s)])\, e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n \\
&+ \int_M v(h_s - \theta_X(g_s))\frac{d}{ds}[\theta_X(g_s)]\, e^{\theta_X(g_s)}\,\omega_{g_s}^n \\
&+ \int_M v(h_s - \theta_X(g_s))e^{\theta_X(g_s)}\,\frac{d}{ds}[\omega_{g_s}^n]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M v(-\Delta_s\phi - \phi - X(\phi))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n \\
&+ \int_M X(\phi)\, v(h_s - \theta_X(g_s))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n \\
&+ \int_M (\Delta_s\phi)\, v(h_s - \theta_X(g_s))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M v(-\Delta_s\phi - \phi - X(\phi))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n \\
&+ \int_M (\Delta_s\phi + X(\phi))\, v(h_s - \theta_X(g_s))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n.
\end{aligned}$$

De plus, grâce à l'équation (3.26), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{df(s)}{ds} &= -\int_M \langle\overline{\partial}\psi_s, \overline{\partial}(\overline{\Delta_s\phi_s + X(\phi)})\rangle_{\omega_{g_s}} e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n \\
&- \int_M \langle\overline{\partial}\psi_s, \overline{\partial}\phi\rangle_{\omega_{g_s}} e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n \\
&+ \int_M (\Delta_s\psi_s + X(\phi))\, v(h_s - \theta_X(g_s))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n.
\end{aligned}$$

Maintenant, en faisant une intégration par partie et la formule (3.22), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
-\int_M \langle\overline{\partial}\psi_s, \overline{\partial}\phi\rangle_{\omega_{g_s}} e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n &= -\int_M \langle\overline{\partial}(\psi_s\, e^{\theta_X(g_s)}), \overline{\partial}\phi\rangle_{\omega_{g_s}}\,\omega_{g_s}^n. \\
&+ \int_M \langle\overline{\partial}(e^{\theta_X(g_s)}), \overline{\partial}\phi\rangle_{\omega_{g_s}}\,\psi_s\,\omega_{g_s}^n. \\
&= \int_M (\Delta_s\phi)\,\psi_s\, e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n \\
&+ \int_M X(\phi)\,\psi_s\, e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n.
\end{aligned}$$

De même, on montre que

$$-\int_M \langle \overline{\partial}\psi_s, \overline{\partial}(\overline{\Delta_s\phi + X(\phi)})\rangle_{\omega_{g_s}} e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n = \int_M (\Delta_s\phi + X(\phi))(\Delta_s\psi_s + v(\theta_X(g_s)))\, e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n.$$

Ainsi, en utilisant les équations précédentes, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{df(s)}{ds} &= \int_M \big(\Delta_s\phi + X(\phi)\big)(\Delta_s\psi_s + v(\theta_X(g_s)))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n \\ &+ \int_M \psi_s(\Delta_s\phi + X(\phi))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n \\ &+ \int_M (\Delta_s\phi + X(\phi))\, v(h_s - \theta_X(g_s))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n.\end{aligned}$$

En simplifiant cette expression, nous obtenons que

$$\frac{df(s)}{ds} = \int_M (\Delta_s\phi + X(\phi))(\Delta_s\psi_s + \psi_s + v(h_s))e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n.$$

On pose maintenant

$$p = \Delta_s\psi_s + \psi_s + v(h_s)$$

et nous avons alors que

$$\overline{\partial}p = 0. \tag{3.27}$$

(Cette égalité sera démontré à la fin de la preuve.)
Donc en faisant une intégration par partie, nous obtenons que

$$\frac{df(s)}{ds} = \int_M \langle \overline{\partial}p, \overline{\partial}\phi\rangle_{\omega_{g_s}} e^{\theta_X(g_s)}\omega_{g_s}^n = 0.$$

Ainsi nous obtenons que $f(1) = f(2)$, ce qui permet de conclure.

Il nous reste à montrer les 5 égalités énoncées au cours de la démonstration.
• Commençons par montrer l'équation (3.21) :

$$\frac{d}{ds}\left(\, \omega_{g_s}^n \,\right) = \Delta_s\phi\, \omega_{g_s}^n.$$

En effet, on a

$$\frac{d}{ds}\left(\, \omega_{g_s}^n \,\right) = \frac{d}{ds}\left(\, \det[\omega_{i\bar{j}} + (s-1)\phi_{i\bar{j}}]\, dV \,\right)$$

(où on a posé $\phi_{i\bar{j}} := \partial_i\overline{\partial}_j\phi$ et dV la forme volume standard)

$$\begin{aligned}&= \omega_{g_s}^{\bar{i}j}\, \frac{d}{ds}\big(\omega_{i\bar{j}} + (s-1)\phi_{i\bar{j}}\big)\, \det(g_s)dV \\ &= \omega_{g_s}^{\bar{i}j}\, \phi_{i\bar{j}}\, \det(g_s)dV \\ &= \Delta_s\phi\, \omega_{g_s}^n\end{aligned}$$

(où Δ_s est l'opérateur laplacien associé à ω_{g_s}).

• Passons à la démonstration des équations (3.23) et (3.24) :

$$\mathrm{Ric}(\omega_{g_s}) - \omega_{g_s} = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}h_s, \quad \frac{dh_s}{ds} = -(\Delta_s\phi + \phi).$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} h_s &= h_g - \log \frac{\omega_{g'}^n}{\omega_g^n} - (s-1)\phi \\ &= h_g - \log \frac{\det g_s}{\det g} - (s-1)\phi. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\,h_s = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\,h_g - \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\det g_s + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\det - (s-1)\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\phi \quad = \mathrm{Ric}(\omega_s) - \omega_s.$$

L'équation (3.23) découle alors directement de l'égalité précédente en utilisant les expressions des différents termes de la somme. Pour l'autre égalité, le calcul suivant permet de conclure :

$$\begin{aligned} \frac{dh_s}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(\log \frac{\det g_s}{\det_g}\right) - \phi \\ &= -g_s^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial s}\left((g_s)_{i\bar{j}} \right) - \phi \\ &= -g_s^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial s}\left(g_{i\bar{j}} + (s-1)\partial_i\overline{\partial}_j\phi \right) - \phi \\ &= -g_s^{i\bar{j}} \left(\partial_i\overline{\partial}_j\phi\right) - \phi \\ &= -\Delta_s\phi - \phi. \end{aligned}$$

• Ensuite, il y a l'équation (3.26) :

$$v(f) = \langle \overline{\partial}\,\psi_s, \overline{\partial}\,\overline{f} \rangle_{\omega_{g_s}}.$$

Comme cette égalité est ponctuelle, pour la montrer nous pouvons nous placer dans un système normal pour g_s en un point quelconque et faire le calcul en ce point. Ainsi comme v est holomorphe, il s'écrit localement sous la forme $v = v^i\partial_i$. Ainsi, nous obtenons que

$$v(f) = v^i\partial_i f = v^i\overline{\overline{\partial}_i\,\overline{f}}.$$

Or, dans un système normal pour g_s, l'égalité $i_v(\omega_{g_s}) = \sqrt{-1}\partial\psi_s$ nous donne que $v^j = \overline{\partial}_j\psi_s$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, ainsi nous obtenons

$$v(f) = \overline{\partial}_i\,\psi_s\,\overline{\overline{\partial}_i\,\overline{f}}.$$

On conclut en se souvenant que nous sommes dans un système normal pour g_s et donc que dans ce système le membre de droite vaut bien $\langle \overline{\partial}\,\psi_s, \overline{\partial}\,\overline{f} \rangle_{\omega_{g_s}}$.

• De même, l'équation (3.22) est identique à la précédente (en remplaçant v par X).
• Il reste à démontrer l'égalité (3.27) :

$$\overline{\partial}p = 0.$$

Remarquons que l'équation est ponctuelle, on se place dans un système de coordonnées normal centré (en un point x de M quelconque) pour la métrique g_s i.e. au point x, nous avons $g_{i\bar{j}} = \delta_{i\bar{j}}$. Ainsi, l'égalité $i_v(\omega_{g_s}) = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\psi_s$ devient $v^i = \overline{\partial}_i\psi_s$ (où les v_i sont les cordonnées locales du champ de vecteurs v i.e. on a $v = v^i\partial_i$). Au point x, nous avons donc

$$\begin{aligned} p &:= \Delta_s\psi_s + \psi_s + v(h_s) \\ &= \partial_i\overline{\partial}_i\psi_s + \psi_s + v_i\,\partial_i h_s \\ &= \partial_i\overline{\partial}_i\psi_s + \psi_s + \overline{\partial}_i\psi_s\,\partial_i h_s. \end{aligned}$$

On peut encore l'écrire pour plus de lisibilité, avec $\psi = \psi_s$:

$$p = \psi_{\bar{i}i} + \psi + \psi_{\bar{i}}(h_s)_i.$$

On a donc, avec $R = \mathrm{Ric}(g_s)$ pour plus de lisibilité :

$$\begin{aligned}
p_{\bar{j}} &= \psi_{\bar{i}i\bar{j}} + \psi_{\bar{j}} + \psi_{\overline{ij}}(h_s)_i + \psi_{\bar{i}}(h_s)_{i\bar{j}} \\
&= \psi_{\overline{ij}i} + R_{m\bar{i}}\psi_{\overline{m}} + \psi_{\bar{j}} + \psi_{\overline{ij}}(h_s)_i + \psi_{\bar{i}}(h_s)_{i\bar{j}} && \text{(par les formules de Ricci)} \\
&= R_{m\bar{i}}\psi_{\overline{m}} + \psi_{\bar{j}} + \psi_{\bar{i}}(h_s)_{i\bar{j}} && \text{(puisque } \psi_{\bar{i}} = v^i \text{ est holomorphe)} \\
&= R_{m\bar{i}}\psi_{\overline{m}} + \psi_{\bar{j}} + \psi_{\bar{i}}(R_{i\bar{j}} - g_{i\bar{j}}) && \text{(par définition de } h_s) \\
&= 0 && \text{(par les formules de Ricci).}
\end{aligned}$$

□

La première propriété importante de cet invariant est qu'il nous donne une obstruction à l'existence de solitons de Kähler-Ricci. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.4.10 *Soit M une variété de Fano compacte et soit (X, g) un soliton de Kähler-Ricci sur M. Alors l'invariant de Futaki F_X pour le champs de vecteur X est nul i.e. $F_X \equiv 0$.*

Démonstration. Nous avons vu dans le lemme 3.4.9 que l'invariant de Futaki ne dépend pas de la métrique choisie, nous prenons donc la métrique g associée au soliton de Kähler-Ricci (X, g). Or, nous avons vu dans le lemme 3.4.7 que

$$h_g = \theta_X(g),$$

d'où

$$v(h_g - \theta_X(g)) = 0, \ \ \forall v \in \eta(M),$$

or par définition, la fonctionnelle F_X a pour expression :

$$F_X(v) = \int_M v(h - \theta_X(g))e^{\theta_X(g)}\omega_g^n,$$

ce qui permet de conclure. □

Une autre formulation de l'invariant de Futaki

On garde les notations introduites dans les sections précédentes. Rappelons que si on a une métrique kählérienne g telle que sa forme de kähler ω_g appartienne à $2\pi\, c_1(M)$, il existe une unique fonction $h_g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h_g, \ \ \int_M e^{h_g}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n. \tag{3.28}$$

De plus si X est un champ de vecteurs holomorphe alors il existe une unique fonction $\theta_X \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ vérifiant

$$i_X\omega_g = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\theta_X, \ \ \int_M e^{\theta_X}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n. \tag{3.29}$$

On a alors le lemme suivant.

Lemme 3.4.11 *Nous avons la relation suivante :*

$$\overline{\partial}[\Delta\theta_X + X(h_g) + \theta_X] = 0,$$

où Δ est le laplacien associé à ω_g.

Démonstration. On fait le calcul dans un système de coordonnées locales. En utilisant alors les formules (3.28) et (3.29), les trois termes séparément se simplifient alors mutuellement entre eux. □

Comme M est compacte, le principe du maximum nous dit que

$$-(\Delta\theta_X + X(h_g)) = \theta_X + c,$$

où c est une constante. On peut donc renormaliser la fonction θ_X en une fonction $\widetilde{\theta}_X$ qui vérifie donc

$$i_X\omega_g = \sqrt{-1}\overline{\partial}\widetilde{\theta_X}, \ \ \Delta\widetilde{\theta_X} + X(h_g) = -\widetilde{\theta_X}. \tag{3.30}$$

Remarquons que cette renormalisation est équivalente à demander que $\widetilde{\theta}_X$ vérifie

$$\int_M \widetilde{\theta}_X e^{h_g}\omega_g^n = 0.$$

En effet, cela résulte de la formule d'intégration par parties qui nous donne que

$$\begin{aligned}\int_M \Delta\widetilde{\theta}_X e^{h_g}\omega_g^n &= -\int_M \langle\overline{\partial}\theta_X, \overline{\partial}e^{h_g}\rangle_{\omega_g}\omega_g^n \\ &= -\int_M \langle\overline{\partial}\theta_X, \overline{\partial}h_g\rangle_{\omega_g} e^{h_g}\omega_g^n. \\ &= -\int_M X(h_g)e^{h_g}\omega_g^n\end{aligned}$$

(La dernière égalité résulte du fait que $\sqrt{-1}\overline{\partial}\theta_X = i_X\omega_g$). Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 3.4.12 *Soit (M,ω_g) une variété de Fano compacte. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que*

$$\omega_{g'} := \omega_g + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\phi.$$

soit une forme kählérienne pour une métrique g'. Alors la forme $\omega_{g'}$ appartient à $2\pi\, c_1(M)$ et donc pour tout $X \in \eta(M)$ il existe $\widetilde{\theta_X}(g') \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ telle que

$$i_X\omega_{g'} = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\widetilde{\theta_X}(g'),\ \ \Delta_{g'}\widetilde{\theta_X} + X(h_{g'}) = -\widetilde{\theta_X}(g'),$$

où $h_{g'}$ est définie par le lemme 3.4.6 pour la métrique g'. Nous avons alors la relation suivante :

$$\widetilde{\theta}_X(g') = \widetilde{\theta}_X(g) + X(\phi).$$

Démonstration. Commençons par introduire quelques notations. Pour tout $s \in [1,2]$, on pose

$$\omega_{g_s} = \omega_g + (s-1)\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi, \tag{3.31}$$

et

$$h_s = h_g - \log\frac{\omega_{g_s}^n}{\omega_g^n} - (s-1)\phi, \tag{3.32}$$

et $\widetilde{\theta}_X(g_s) \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ telle que

$$i_X\omega_{g_s} = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\widetilde{\theta}_X(g_s),\ \ \int_M \widetilde{\theta}_X(g_s)e^{h_{g_s}}\omega_{g_s}^2 = 0. \tag{3.33}$$

Remarquons que

$$\overline{\partial}[\widetilde{\theta}_X(g_s) - \widetilde{\theta}_X - (s-1)X(\phi)] = 0$$

(voir la démonstration du lemme 3.4.9 pour une preuve de ce fait). Ainsi par le principe du maximum, nous obtenons qu'il existe des constantes c_s dépendant de manière lisse en s telles que

$$\widetilde{\theta}_X(g_s) = \widetilde{\theta}_X + (s-1)X(\phi) + c_s. \tag{3.34}$$

Nous posons maintenant

$$G(s) = \int_M [\widetilde{\theta}_X + (s-1)X(\phi) + c_s]e^{h_s}\omega_{g_s}^n.$$

Par l'équation (3.32), on obtient que

$$G(s) = \int_M [\widetilde{\theta}_X + (s-1)X(\phi) + c_s]e^{-(s+1)\phi + h_g}\omega_g^n.$$

Ainsi nous obtenons grâce aux équations (3.31) et (3.34) que

$$\begin{aligned}\frac{dG}{ds}(s) &= \int_M (X(\phi) + \frac{d\,c_s}{ds} - (\widetilde{\theta}_X + (s-1)X(\phi) + c_s)\phi)e^{-(s+1)\phi + h_g}\omega_g^n \\ &= \int_M (X(\phi) + \frac{d\,c_s}{ds} - \widetilde{\theta}_X(g_s)\phi)e^{h_s}\omega_{g_s}^n.\end{aligned}$$

Or grâce à la formulation d'intégration par parties et la formule (3.30), nous avons que

$$\int_M (X(\phi) - \widetilde{\theta}_X(g_s)\phi)e^{h_s}\omega_{g_s}^n = 0.$$

Ainsi nous obtenons que

$$\frac{dG}{ds}(s) = \frac{d\,c_s}{ds}\int_M e^{h_s}\omega_{g_s}^n.$$

Maintenant, en remarquant que $h_{g_s} = h_s$ (voir l'équation (3.23) dans la démonstration du lemme 3.4.9 pour une preuve de ce fait), nous obtenons par la condition de normalisation de l'équation (3.33) que

$$G(s) = \int_M [\widetilde{\theta_X} + (s-1)X(\phi) + c_s]e^{h_{g_s}}\omega_{g_s}^n = 0.$$

Ainsi, comme $\int_M e^{h_s}\omega_{g_s}^n > 0$, nous avons

$$\frac{d\,c_s}{ds} = 0,$$

d'où

$$c_s = c_1 = 0, \forall s \in [1, 2].$$

Nous avons donc bien

$$\widetilde{\theta}_X(g') = \widetilde{\theta}_X(g_2) = \widetilde{\theta}_X + X(\varphi).$$

□

On considère maintenant la fonctionnelle suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \eta(M) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ Z & \longmapsto & \displaystyle\int_M e^{\widetilde{\theta}_Z}\omega_g^n \end{array} \right. .$$

Il semblerait que cette fonctionnelle dépende de la métrique kählérienne g mais il n'en est rien comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.4.13 *Soient M une variété de Fano compacte et g une métrique kählérienne sur M telle $\omega_g \in 2\pi\, c_1(M)$. Alors la fonctionnelle f est indépendante de g.*

Démonstration. Prenons une autre métrique g' telle que sa forme $\omega_{g'}$ soit aussi un représentant de $2\pi\, c_1(M)$ ainsi nous avons par le $\partial\overline{\partial}$-lemme qu'il existe $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que

$$\omega_{g'} = \omega_\phi = \omega_g + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi.$$

De plus, nous noterons

$$\omega_{t\phi} = \omega_g + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}(t\phi).$$

Remarquons tout de suite que $\omega_{t\phi}$ est aussi un représentant de $2\pi\, c_1(M)$. Passons maintenant à la démonstration.

• La première étape consiste à montrer que

$$\int_M e^{\widetilde{\theta}_Z + Z(\phi)}\omega_\phi^n = \int_M e^{\widetilde{\theta}_Z}\omega_g^n + \int_0^1\int_M (\Delta_t\phi + Z(\phi))e^{\widetilde{\theta}_Z + tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n \wedge dt,$$

où Δ_t est le laplacien associé à la forme $\omega_{t\phi}$. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n] &= \frac{d}{dt}[e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\det(g_{t\phi})]dV \\
&= Z(\phi)e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\det(g_{t\phi})dV + \frac{d}{dt}[\det(g_{t\phi})]e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}dV \\
&= Z(\phi)e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\det(g_{t\phi})dV + (g_{t\phi})^{i\bar{j}}\frac{d}{dt}[(g_{t\phi})_{i\bar{j}}]\det(g_{t\phi})e^{\widetilde{\theta}+tZ(\phi)}dV \\
&= Z(\phi)e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\det(g_{t\phi})dV + (g_{t\phi})^{i\bar{j}}\frac{d}{dt}[g_{i\bar{j}}+t\phi_{i\bar{j}}]\det(g_{t\phi})e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}dV \\
&= Z(\phi)e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\det(g_{t\phi})dV + (g_{t\phi})^{i\bar{j}}\phi_{i\bar{j}}\det(g_{t\phi})e^{\widetilde{\theta}+tZ(\phi)}dV \\
&= Z(\phi)e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\det(g_{t\phi})dV + \Delta_t\phi\det(g_{t\phi})e^{\widetilde{\theta}+tZ(\phi)}dV
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}[e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n] = (Z(\phi)+\Delta_t\phi)e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n.$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_M(\Delta_t\phi+Z(\phi))e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n\wedge dt &= \int_0^1\int_M\left(\frac{d}{dt}[e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n]\right)\wedge dt \\
&= \int_0^1\frac{d}{dt}\left[\int_M\left(e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n\right)\right]\wedge dt \\
&= \int_M e^{\widetilde{\theta}_Z+Z(\phi)}\omega_\phi^n - \int_M e^{\widetilde{\theta}_Z}\omega_g^n.
\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure.

• La seconde étape consiste à montrer que

$$\int_M e^{\widetilde{\theta}_Z+Z(\phi)}\omega_\phi^n = \int_M e^{\widetilde{\theta}_Z}\omega_g^n.$$

Cela est une conséquence de la formule d'intégration par partie qui nous donne que

$$\int_M(\Delta_t\phi+Z(\phi))e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n = 0.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\int_M\Delta_t\phi\, e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n &= -\int_M\langle\overline{\partial}e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)},\overline{\partial}\phi\rangle_{\omega_{t\phi}}\omega_{t\phi}^n. \\
&= -\int_M\langle\overline{\partial}[\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)],\overline{\partial}\phi\rangle_{\omega_{t\phi}}e^{\widetilde{\theta}_Z+Z(\phi)}\omega_{t\phi}^n.
\end{aligned}$$

O.r d'après le lemme 3.4.9, on a que $i_Z\omega_{t\phi} = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}(\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi))$ donc

$$\int_M\Delta_t\phi\, e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n = \int_M -Z(\phi)e^{\widetilde{\theta}_Z+tZ(\phi)}\omega_{t\phi}^n.$$

Ce qui nous donne alors le résultat souhaité.

• La dernière étape consiste à conclure par unicité de $\widetilde{\theta_X}$ en utilisant l'équation 3.30. □

Maintenant, on veut étudier la dérivée de f au point $X\in\eta(M)$ par rapport à $v\in\eta(M)$. Le lemme suivant nous donne une expression de cette dérivée et montre en particulier qu'elle est un multiple de l'invariant de Futaki introduit précédemment.

Lemme 3.4.14 *Soit M une variété de Fano compacte. Soit f la fonctionnelle définie par*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \eta(M) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ Z & \longmapsto & \displaystyle\int_M e^{\widetilde{\theta}_Z}\omega_g^n \end{array} \right. .$$

La dérivée au point $X \in \eta(M)$ par rapport à $v \in \eta(M)$ de f a pour expression

$$f'_X(v) = \int_M \widetilde{\theta}_v e^{\widetilde{\theta}_X}\omega_g^n. \tag{3.35}$$

De plus nous avons qu'il existe une constante C non nulle telle que

$$f'_X(v) = C \cdot F_X(v),$$

où F_X est l'invariant de Futaki pour le champ de vecteurs X. En particulier, nous avons donc

$$f'_X(v) = 0 \Longleftrightarrow F_X(v) = 0.$$

Démonstration. On sait que

$$f'_X(v) = \lim_{t\to 0}\frac{f(X+tv) - f(X)}{t}.$$

En remplaçant f par son expression, nous obtenons que

$$f'_X(v) = \lim_{t\to 0}\int_M \frac{e^{\widetilde{\theta}_{X+tv}} - e^{\widetilde{\theta}_X}}{t}\omega_g^n.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\widetilde{\theta}_{X+tv} &= i_{X+tv}\omega_g \\ &= i_X\omega_g + t\, i_v\omega_g \\ &= \sqrt{-1}\overline{\partial}\widetilde{\theta}_X + \sqrt{-1}\,\overline{\partial}(t\,\widetilde{\theta}_v). \end{aligned}$$

d'où

$$\widetilde{\theta}_{X+tv} = \widetilde{\theta_X} + t\,\widetilde{\theta}_v + c,$$

où c est une constante. De plus, par la condition de normalisation des différentes fonctions, nous obtenons

$$\int_M \widetilde{\theta}_{X+tv}e^{h_g}\omega_g^n = 0, \quad \int_M \left(\widetilde{\theta}_X + t\,\widetilde{\theta}_v e^{h_g}\right)\omega_g^n = 0,$$

d'où

$$c\int_M e^{h_g}\omega_g^n = 0.$$

Ceci nous donne $c = 0$ puisque $\int_M e^{h_g}\omega_g^n > 0$. Ainsi notre dérivée a pour expression

$$\begin{aligned} f'_X(v) &= \lim_{t\to 0}\int_M \frac{e^{\widetilde{\theta}_{X+t\cdot\theta_v}} - e^{\widetilde{\theta}_X}}{t}\omega_g^n \\ &= \lim_{t\to 0}\int_M e^{\widetilde{\theta}_X}\frac{(1 - e^{t\cdot\widetilde{\theta}_v})}{t}\omega_g^n \\ &= \int_M \lim_{t\to 0}\frac{(1 - e^{t\cdot\widetilde{\theta}_v})}{t}e^{\widetilde{\theta}_X}\omega_g^n \\ &= \int_M \widetilde{\theta}_v e^{\widetilde{\theta}_X}\omega_g^n. \end{aligned}$$

Cela démontre la première partie du lemme. Pour la seconde, nous allons exploiter le fait (voir la formule (3.30)) que

$$\widetilde{\theta}_v = -\Delta\widetilde{\theta}_v - v(h_g).$$

Ainsi, nous avons

$$f'_X(v) = -\int_M \left(\Delta\widetilde{\theta}_v + v(h_g)e^{\widetilde{\theta}_X}\right)\omega_g^n.$$

Or grâce à la formulation d'intégration par parties, nous avons que

$$f'_X(v) = -\int_M v(\widetilde{\theta}_v - h_g)e^{\widetilde{\theta}_X}\omega_g^n.$$

Or on sait qu'il existe une constante c' telle que

$$\widetilde{\theta}_X = \theta_X + c',$$

d'où

$$f'_X(v) = -e^{c'}\int_M v(\theta_X - h_g)e^{\theta_X}\omega_g^n = -e^{c'}F_X(v).$$

De plus, comme $e^{c'} \neq 0$, nous avons donc bien

$$F'_X(v) = 0 \Longleftrightarrow F_X(v) = 0.$$

□

Rappelons que si (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci alors $F_X \equiv 0$ (voir le lemme 3.4.10). Nous pouvons reformuler ce fait sous la forme suivante.

Lemme 3.4.15 *Soit M une variété kählérienne de Fano compacte. Si (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci sur M alors X est un point critique de l'application*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \eta(M) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ Z & \longmapsto & \displaystyle\int_M e^{\widetilde{\theta}_Z}\omega_g^n \end{array} \right. .$$

C'est cette vision de l'invariant de Futaki que nous allons exploiter dans la section suivante afin de trouver un champ de vecteurs l'annulant.

Étude de l'invariant de Futaki

Rappelons pour commencer les notations et la décomposition introduites dans le théorème 2.5.8.

Si K est un sous-groupe compact maximal de la composante connexe de l'identité $\mathrm{Aut}^\circ(M)$ du groupe des automorphismes holomorphes $\mathrm{Aut}(M)$ de la variété M, alors nous avons

$$\mathrm{Aut}^\circ(M) = \mathrm{Aut}_r(M) \ltimes R_u,$$

où $\mathrm{Aut}_r(M)$ est un sous-groupe réductif de $\mathrm{Aut}^\circ(M)$ et la complexification de K et R_u le radical unipotent de $\mathrm{Aut}^\circ(M)$. De plus, si on note $\eta^{\mathbb{R}}(M)$, $\eta_r^{\mathbb{R}}(M)$, $\eta_u^{\mathbb{R}}(M)$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de $\mathrm{Aut}(M), \mathrm{Aut}_r(M), R_u$ et K respectivement, alors on a

$$\eta^{\mathbb{R}}(M) = \eta_r^{\mathbb{R}}(M) + \eta_u^{\mathbb{R}}(M).$$

Rappelons que nous avons noté $\eta(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes complexes et qu'il existe un isomorphisme entre $\eta(M)$ et $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ donnée par $X \mapsto X^{1,0}$. Si on note $\eta_r(M)$ et $\eta_u(M)$ l'image de $\eta_r^{\mathbb{R}}(M)$ et $\eta_u^{\mathbb{R}}(M)$ respectivement par l'isomorphisme précédent. Nous obtenons alors une décomposition

$$\eta(M) = \eta_r(M) + \eta_u(M).$$

Lemme 3.4.16 *En gardant les notations qui précèdent, il existe un unique champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta_r(M)$ tel que* $\mathrm{Im}(X) \in \mathfrak{k}$ *et vérifiant*

$$F_X(v) = 0, \ \forall v \in \eta_r(M).$$

Démonstration. En gardant les notations introduites dans le lemme 3.4.15, ce problème est équivalent à chercher un point critique à la fonction f. On rappelle que $f'_X(v)$ désigne la dérivée de f en X dans la direction v.

Puisque f'_X est indépendante de la métrique kählérienne g, nous pouvons choisir une métrique kählérienne g qui est K-invariante. De plus, comme F_X est linéaire sur $\eta_r(M)$ et que $\mathrm{Aut}_r(M)$ est le complexifié de K, on peut se restreindre à calculer $F_X(v)$ pour $v \in \eta_r(M)$ tel que $\mathrm{Im}(v) \in \mathfrak{k}$.

Par le lemme 2.5.5 et la renormalisation de la démonstration du lemme 3.4.11, pour tout $Z \in \eta_r(M)$ tel que $\mathrm{Im}(Z) \in \mathfrak{k}$, il existe une fonction $\widetilde{\theta}_Z \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ telle que

$$i_Z\omega_g = \sqrt{-1}\overline{\partial}\widetilde{\theta}_Z \text{ et } \int_M \widetilde{\theta_X} e^{h_g}\omega_g^n = 0.$$

En utilisant la formule de Cartan et le fait que $i_X\omega_g$ est une $(0,1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée, on a

$$\mathcal{L}_Z\omega_g = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\widetilde{\theta}_Z.$$

De plus, on remarque que $i_{\overline{Z}}\omega_g = \overline{i_Z\omega_g}$. En effet, si on écrit que localement $Z = Z^i\partial_i$ alors on a d'une part que

$$i_{\overline{Z}}\omega_g = -\sqrt{-1}g_{i\bar{j}}\overline{Z}^{\bar{j}}dz^i.$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned}\overline{i_Z\omega_g} &= \overline{\sqrt{-1}g_{i\bar{j}}Z^i d\bar{z}^j}\\ &= -\sqrt{-1}g_{j\bar{i}}\overline{Z}^{\bar{i}}dz^j.\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons grâce à la formule de Cartan que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\overline{Z}}\omega_g &= d\circ i_{\overline{Z}}\omega_g\\ &= d\circ(\overline{i_Z\omega_g})\\ &= \overline{d\circ i_Z\omega_g}\\ &= -\sqrt{-1}\,\overline{\partial\overline{\partial}\widetilde{\theta}_Z}\\ &= -\sqrt{-1}\,\overline{\partial}\partial\overline{\widetilde{\theta}_Z}\\ &= \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\overline{\widetilde{\theta}_Z}.\end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats, nous obtenons que

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}[\widetilde{\theta}_Z - \overline{\widetilde{\theta}_Z}] &= \mathcal{L}_{Z-\overline{Z}}\omega_g\\ &= \mathcal{L}_{2\sqrt{-1}\mathrm{Im}(Z)}\omega_g\\ &= 2\sqrt{-1}\mathcal{L}_{\mathrm{Im}(Z)}\omega_g\\ &= 0 \qquad\qquad \text{(car } g \text{ est } K\text{-invariante et } \mathrm{Im}(Z)\in\mathfrak{k}).\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons que

$$\widetilde{\theta}_Z = \overline{\widetilde{\theta}_Z} + c,$$

où c est une constante. Or, nous avons que

$$\int_M \widetilde{\theta}_X e^{h_g}\omega_g^n = 0,$$

et comme h_g est une fonction réelle, en prenant le conjugué de cette intégrale, nous obtenons aussi

$$\int_M \overline{\widetilde{\theta}_X} e^{h_g}\omega_g^n = 0.$$

Ainsi $c = 0$ et donc $\widetilde{\theta}_Z$ est une fonction à valeurs réelles. De plus, en se souvenant que

$$\widetilde{\theta}_{(1-t)X+tY} = (1-t)\widetilde{\theta}_X + t\widetilde{\theta}_Y$$

(voir par exemple la démonstration du lemme 3.4.14) et que l'exponentielle est une fonction convexe, on obtient que f est une fonction convexe sur $\eta_r(M)$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour conclure, il suffit donc de montrer que f est propre i.e. $f(Z)$ diverge quand Z tend vers l'infini dans l'espace vectoriel $\eta_r(M)$ de dimension finie normé par $Z \mapsto \int_M |Z|_g \omega_g^n$.

Soit $(B_i)_{i=1,\cdots,m}$ une base de $\eta_r(M)$ (en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel). Comme $\mathrm{Aut}_r(M)$ est le complexifié de K, on peut supposer que pour tout i, on a $\mathrm{Im}(B_i) \in \mathfrak{k}$. De plus, grâce au procédé de Gram-Schmith pour le produit scalaire induit par la métrique g, on peut considérer que $(B_i)_{1\leq l\leq m}$ est une base orthonormée. De plus, par le même raisonnement qu'au début de la démonstration, on voit que les fonctions $\widetilde{\theta}_{B_i}$ associées aux champs de vecteurs Z_i par l'équation (3.30) sont à valeurs réelles

Prenons maintenant une suite $(Z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de champs de vecteurs holomorphes dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\eta_r(M)$ telle que $\int_M |Z_l|_g \omega_g^n \to +\infty$. Il faut donc montrer que $f(Z_l) \to +\infty$. Il existe donc m suites réelles $(t_l^i)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que $Z_l = \sum_i t_l^i Z_i$, et comme nous avons pris une base orthonormée, nous avons que

$$|Z_l|_g^2 = \sum_i |t_i^l|^2$$

.

Comme $\int_M |Z_l|_{\omega_g} \omega_g^n \to +\infty$, quitte à extraire, cela signifie qu'il existe au moins une suite $(t_l^i)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que $|t_l^i| \to +\infty$. On peut donc extraire des sous-suites $(t_{l_k}^i)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$|t_{l_k}^1| \geq |t_{l_k}^i|, \ \ \forall i \in \{1, \cdots, m\}.$$

La suite $\left(\frac{|t_{l_k}^i|}{|t_{l_k}^1|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ étant bornée, quitte à extraire à nouveau, on peut supposer que les suites $\left(\frac{|t_{l_k}^i|}{|t_{l_k}^1|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergentes pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$. Terminons en remarquant que l'on peut supposer aussi que $t_{l_k}^i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$. En effet, il existe un nombre infini de termes positifs ou de termes négatifs dans cette suite, quitte à remplacer Z_i par $-Z_i$ et à extraire à nouveau, on peut donc bien faire cette hypothèse.

Grâce à ces hypothèses, on a que

$$Z_1 + \sum_{l=2}^{m} \frac{t_{l_k}^i}{t_{l_k}^1} Z_i \to Z_0, \ \ l \to +\infty,$$

où Z_0 appartient à $\eta_r(M)$ (vu $\mathbb{R}$-espace vectoriel). On notera $\widetilde{\theta}_{Z_0}$ la fonction associée au champ de vecteurs holomorphe Z_0 par l'équation (3.30), on remarque tout de suite que cette fonction est non identiquement nulle comme Z_0 n'est pas identiquement nul. De plus, par le même raisonnement qu'au début de la démonstration, on voit que $\widetilde{\theta}_{Z_0}$ est à valeurs réelles. Maintenant, comme nous avons que $\int_M \widetilde{\theta}_{Z_0} e^{h_g} \omega_g^n = 0$, que $e^{h_g} > 0$ (car h_g est à valeurs réelles) et que $\widetilde{\theta}_{Z_0} \not\equiv 0$, nous obtenons qu'il existe un ouvert $U \subset M$ telle $\widetilde{\theta}_{Z_0} > 0$ sur $\overline{U}$.

En remarquant que

$$\widetilde{\theta}_{Z_1 + \sum_{i=1}^m (t_{l_k}^i / t_{l_k}^1) Z_i} = \widetilde{\theta}_{Z_1} + \sum_{i=1}^{m} (t_{l_k}^i / t_{l_k}^1) \widetilde{\theta}_{Z_i}$$

(voir la démonstration du lemme 3.4.14 pour une démonstration de cette propriété), nous obtenons par passage à la limite :

$$\widetilde{\theta}_{Z_1} + \sum_{i=1}^{m} \frac{t_{l_k}^i}{t_{l_k}^1} \widetilde{\theta}_{Z_i} \to \widetilde{\theta}_{Z_0}, \ \ l_k \to +\infty.$$

On en déduit donc qu'il existe $\epsilon > 0$ assez petit tel qu'à partir d'un certain rang, nous obtenons que sur U

$$\widetilde{\theta}_{Z_1} + \sum_{i=1}^{m} \frac{t_{l_k}^i}{t_{l_k}^1} \widetilde{\theta}_{Z_i} > \epsilon > 0.$$

Ce qui nous donne donc

$$\begin{aligned}
f(Z_{l_k}) &= \int_M \exp\left(\sum_{i=1}^m t^i_{l_k}\widetilde{\theta}_{Z_i}\right)\omega_g^n \\
&= \int_M \exp\left(t^1_{l_k}\left(\widetilde{\theta}_{Z_1} + \sum_{i=2}^m \frac{t^i_{l_k}}{t^1_{l_k}}\widetilde{\theta}_{Z_i}\right)\right)\omega_g^n \\
&\geq \int_U e^{\epsilon t^1_{l_k}}\omega_g^n \to +\infty, \;\; l_k \to +\infty.
\end{aligned}$$

Cela permet de conclure. En effet, la seule valeur d'adhérence possible pour la suite $(|f(Z_l)|)_{l\in\mathbb{N}}$ est $+\infty$. Supposons le contraire i.e. la suite admet une valeur d'adhérence finie que l'on notera $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Il existe alors une sous-suite $(|f(Z_{l_k}|)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l. Comme nous avons pris la suite $(Z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ complètement arbitraire, nous pouvons faire le même raisonnement pour la suite extraite $(Z_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et donc obtenir que par unicité de la limite $\lambda = +\infty$, ce qui est absurde. La suite $(|f(Z_l)|)_{l\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme unique valeur d'adhérence, elle converge donc vers cette valeur d'adhérence. Ceci permet de conclure que f est propre et donc termine la preuve. □

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 3.4.17 *En gardant les notations précédentes, il existe un unique champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta_r(M)$ avec $\mathrm{Im}(X) \in \mathfrak{k}$ tel que $F_X(\cdot)$ s'annule sur $\eta_r(M)$. De plus, X est nul ou il appartient au centre de $\eta_r(M)$ i.e. $[X, Y] = 0$ pour tout $Y \in \eta_r(M)$, et nous avons*

$$F_X([u, v]) = 0, \;\; \forall (u, v) \in \eta_r(M) \times \eta(M).$$

En d'autres termes, $F_X(\cdot)$ est un caractère de Lie sur $\eta_r(M)$.

Démonstration. La première partie de la proposition est une conséquence directe du lemme précédent. Maintenant, on va traiter deux cas séparément.

1. Supposons que le centre de $\eta_r(M)$ soit réduit à $\{0\}$. Alors comme $\eta_r(M)$ est une algèbre de Lie réductive, nous avons $\eta_r(M) = [\eta_r(M), \eta_r(M)]$. Remarquons que la fonctionnelle de Futaki en $X = 0$ devient
$$F_0(v) = \int_M v(h_g)\omega_g^n.$$
Cette fonctionnelle coïncide avec l'invariant de Futaki "usuelle" pour les métriques de Kähler-Einstein définie par exemple dans [21]. On voit, en particulier, F_0 est un morphisme d'algèbre de Lie sur $\eta(M)$. En effet, si on pose $\tau \in \mathrm{Aut}(M)$ et $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le sous-groupe à un paramètre engendré par $Re(v)$, alors on a
$$\begin{aligned}
\int_M (\tau\cdot\sigma_t\cdot\tau^{-1})^*(h_g)\omega_g^n &= \int_M h_g((\tau\,\sigma_t\,\tau^{-1})^{-1})^*(\omega_g^n) \\
&= \int_M h_g((\tau\cdot\sigma_t)^{-1})^*(\tau^*\omega_g^n) \\
&= \int_M (\tau\cdot\sigma_t)^* h_g(\tau^*\omega_g^n) \\
&= \int_M (\sigma_t)^*(\tau^*(h_g))(\tau^*\omega_g^n).
\end{aligned}$$
En dérivant cette égalité en $t = 0$, en se souvenant que l'invariant de Futaki ne dépend pas de la métrique kählérienne et en remarquant que $(\tau\cdot\sigma_t\cdot\tau^{-1})$ est le sous-groupe engendré par $Ad_\tau(Re(v))$ et que $\tau^*(h_g)$ vérifie $\mathrm{Ric}(\tau^*\omega_g) - \tau^*\omega_g = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\tau^* h_g$, nous obtenons
$$F_0(Ad_\tau v) = F_0(v).$$
Maintenant, si on prend $\tau = \tau_s$ où $(\tau_s)_{s\in\mathbb{R}}$ le groupe à un paramètre engendré par $Re(u)$ où $u \in \eta(M)$ alors en dérivant en $s = 0$ l'équation précédente, nous obtenons que
$$F_0([u, v]) = 0, \;\; \forall (u, v) \in \eta(M)^2.$$

Ce qui montre que F_0 est bien un morphisme d'algèbres de Lie. Ainsi comme $\eta_r(M) = [\eta_r(M), \eta_r(M)]$, nous obtenons que F_0 est identiquement nulle sur $\eta_r(M)$. Comme 0 vérifie les hypothèses du lemme précédent, par unicité, nous avons $X = 0$, ce qui permet de conclure dans ce cas.

2. Supposons que le centre $\eta_c(M)$ de $\eta_r(M)$ ne soit pas réduit à zéro. En considérant la fonctionnelle f restreinte à $\eta_c(M)$, on montre en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve précédente que l'on peut trouver un unique champ de vecteurs holomorphe $X' \in \eta_c(M)$ avec $\mathrm{Im}(X') \in \mathfrak{k}$ tel que $f'_{X'}$ s'annule sur $\eta_c(M)$. Il reste donc à montrer que

$$f'_{X'}([u,v]) = 0, \ \ \forall (u,v) \in \eta_r(M) \times \eta(M).$$

Soient $v \in \eta(M)$, $\tau \in \mathrm{Aut}(M)$ et $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le sous-groupe à un paramètre engendré par $\mathrm{Re}\, v$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
&\int_M (\tau\sigma_t\tau^{-1})^*(h_g - \theta_{X'})e^{\theta_{X'}}\omega_g^n \\
&= \int_M (h_g - \theta_{X'})((\tau\sigma_t\tau^{-1})^{-1})^*(e^{\theta_{X'}}\omega_g^n) \\
&= \int_M (h_g - \theta_{X'})((\tau\sigma_t)^{-1})^*(\tau^*(e^{\theta_{X'}}\omega_g^n)) \\
&= \int_M (\tau\sigma_t)^*(h_g - \theta_{X'})(\tau^*(e^{\theta_{X'}}\omega_g^n)) \\
&= \int_M (\sigma_t)^*(\tau^*(h_g - \theta_{X'}))(\tau^*(e^{\theta_{X'}}\omega_g^n)) \\
&= \int_M (\sigma_t)^*(\tau^*(h_g) - (\tau^*(\theta_{X'}(\omega_g)))e^{\theta_{X'}(\tau^*\omega_g)}\tau^*(\omega_g^n)
\end{aligned}$$

où $\theta_{X'}$ est la fonction associée au champ de vecteurs X' par l'équation 3.30. Maintenant, remarquons que $(\tau \cdot \sigma_t \cdot \tau_{t\in\mathbb{R}}$ est le sous-groupe à un paramètre engendré par $Ad_\tau(\mathrm{Re}\, v)$, que h_g vérifie $\mathrm{Ric}(\tau^*\omega_g) - \tau^*\omega_g = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\tau^*h_g$ et que $\tau^*(\theta_{X'}(\omega_g))$ vérifie $i_{X'}(\tau^*\omega_g) = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}[(\tau^*(\theta_{X'}(\omega_g))]$. Ainsi, en dérivant cette égalité en $t = 0$ et en se souvenant que l'invariant de Futaki ne dépend pas de la métrique kählérienne nous obtenons

$$F_X(Ad_\tau(v)) = F_X(v).$$

Maintenant si nous prenons $u \in \eta_r(M)$ tel que $\mathrm{Im}(u) \in \mathfrak{k}$ et $(\tau = \tau_s)_{s\in\mathbb{R}}$ est le groupe à un paramètre engendré par u alors, en différentiant l'égalité précédente, nous trouvons que

$$F_{X'}([u,v]) = 0, \ \ \forall (u,v) \in \eta_r(M) \times \eta(M).$$

Ce que nous voulions. Ainsi, nous voyons que $F_{X'}$ s'annule sur $\eta_r(M)$. Par unicité, on conclut que $X = X'$. Ce qui permet de conclure.

□

Concernant la sous-algèbre $\eta_u(M)$, nous avons le résultat suivant provenant de [50] :

Proposition 3.4.18 *Pour tout $X \in \eta_r(M)$ tel que $Im(X) \in \mathfrak{k}$, on a $F_X|_{\eta_u(M)} \equiv 0$.*

3.5 Décomposition solitonique de $\eta^{\mathbb{R}}(M)$

Rappelons le *théorème de Matsushima* (voir [39]) qui donne une décomposition de $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ dans le cas de Kähler-Einstein .

Théorème 3.5.1 *Soit M une variété de Fano compacte admettant une métrique de Kähler-Einstein. Alors la composante de l'identité $\mathrm{Aut}^0(M)$ du groupe des automorphismes complexes de M est un groupe réductif complexe, et le groupe des isométries holomorphes d'une métrique de Kähler-Einstein est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Aut}^0(M)$.*

Si on note $\kappa(M)$ l'algèbre de Lie du groupe des isométries de M alors on obtient que

$$\eta^{\mathbb{R}}(M) = \kappa(M) + J\,\kappa(M),$$

où J est la structure complexe sur $\eta^{\mathbb{R}}(M)$. En particulier, on voit que $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ est une algèbre de Lie complexe réductive. De plus, on peut montrer (voir le chapitre 2 de [23]) que $\kappa(M)$ correspond aux champs de vecteurs de Killing sur M. L'objectif de cette section va être de donner un équivalent à cette décomposition dans le cas des solitons de Kähler-Ricci. Dans le cas solitonique, il existe un premier résultat que l'on trouve dans [61].

Théorème 3.5.2 *Si (M, ω^0) est une variété kählérienne compacte admettant un soliton de Kähler-Ricci (X, g) alors le sous-groupe compact connexe maximal de $\mathrm{Aut}^0(M)$ est conjugué à la composante connexe de l'identité du groupe $Isom_g(M)$ des isométries de (M, g).*

Ce résultat a été précisé par la suite. Pour l'énoncé, il faut commencer par pondérer le laplacien par le champ de vecteurs solitonique. Pour cela, on rappelle que nous avons les deux fonctions :

- h_g est l'unique fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h_g, \quad \int_M e^{h_g}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n,$$

- θ_X est l'unique fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ vérifiant

$$i_X\omega_g = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\theta_X, \quad \int_M e^{\theta_X}\omega_g^n = \int_M \omega_g^n.$$

Précédemment, on a vu que si (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci alors $h_g = \theta_X$ (voir lemme 3.4.7) et qu'en particulier θ_X est une fonction à valeurs réelles. On considère alors *le laplacien pondéré* pour $u \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\Delta^X_{g,J}u := \Delta_g u - du\left(\nabla_g h_g - \sqrt{-1}J\nabla_g h_g\right) = \Delta_g u - \frac{1}{2}X(u). \tag{3.36}$$

De plus, on étend cette définition par $\mathbb{C}$-linéarité aux fonctions $u \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ De même, on pondère le crochet de Poisson usuel de la façon suivante :

$$\{u, v\}^X_\omega := \{u, v\}_\omega - \int_M \{u, v\}_\omega e^{h_g}\omega_g^n = dv(J\nabla_g u) - \int_M \{u, v\}_\omega e^{h_g}\omega_g^n.$$

Nous avons alors le théorème suivant (voir le lemme 28 de [45] ou la proposition 7.2.4 de [23]).Avant d'énoncer le théorème, rappelons que si E est un espace vectoriel complexe alors on note $\overline{E}$ le conjugué complexe de cet espace vectoriel complexe.

Théorème 3.5.3 *Soit M une variété kählérienne compacte de Fano. On suppose qu'il existe un soliton de Kähler-Ricci (X, g) sur la variété complexe M dont on note J la structure complexe.*

- *L'application entre algèbres de Lie suivante*

$$\begin{array}{rccl} \chi := \chi_{X,g} : & \left(\overline{\ker(\Delta^X_{g,J} - 2\mathbb{I})}, \sqrt{-1}\,\{\cdot,\cdot\}^X_\omega\right) & \xrightarrow{\sim} & \left(\eta^{\mathbb{R}}(M), [\cdot,\cdot]\right) \\ & u & \longmapsto & \nabla_{g,J}u := \nabla_g \mathrm{Re}(u) + J\,\nabla_g \mathrm{Im}(u). \end{array}$$

  est alors bien définie et est un isomorphisme d'algèbres de Lie. En particulier, $\ker(\Delta^X_{g,J} - 2\mathbb{I})$ est alors de dimension finie.
- *La première valeur propre $\lambda_1(\Delta^X_{g,J})$ de l'opérateur $\Delta^X_{g,J}$ vérifie $\lambda_1(\Delta^X_{g,J}) \geq 2$ avec égalité si $\eta^{\mathbb{R}}(M) \neq 0$.*
- *L'application suivante est bien définie et définit un isomorphisme d'espaces vectoriels réels :*

$$J\nabla_g : \ker(\Delta^X_{g,J} - 2\mathbb{I}) \cap \mathcal{C}^\infty_X(M, \mathbb{R})_0 \longrightarrow \kappa(M).$$

  où on a noté $\kappa(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs de Killing de la variété M et

$$\mathcal{C}^\infty_X(M, \mathbb{R})_0 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \ / \ \int_M f e^{\theta_X}\omega_g^n = 0\}.$$

- *La forme hermitienne définie sur* $\overline{\ker(\Delta^X_{g,J} - 2\mathbb{I})}$ *par*

$$(u, v) \mapsto \int_M \sqrt{-1}\{u, \overline{v}\}^X_\omega e^{\theta_X} \omega_g^n,$$

est positive. Et si on note $(\gamma_i)_{i=1,\cdots,N}$ *son spectre pour le produit scalaire* L^2 *donné par la forme volume* $e^{\theta_X} \omega_g^n$ *alors on a la décomposition suivante :*

$$\eta^{\mathbb{R}}(M) := \bigoplus_{i=1}^N V_{\gamma_i},$$

où

$$V_{\gamma_i} := \{\xi \in \eta^{\mathbb{R}}(M) \ / \ [\xi, \nabla_g \theta_X] = \gamma_i \xi\}.$$

En particulier, on a $\mu_0 = 0$ *et*

$$V_0 = \kappa(M) + J\,\kappa(M),$$

où $\kappa(M)$ *est l'espace vectoriel des champs de vecteurs de Killing de* M*.*

Chapitre 4

Propriétés spectrales des variétés toriques

Dans ce chapitre, nous supposerons que toutes nos variétés sont connexes sauf mention explicite du contraire.

4.1 Rappel de géométrie torique

4.1.1 Géométrie symplectique

On dit que (M, ω) est une variété *symplectique* si M est une variété différentielle lisse et ω est une 2-forme fermée non dégénérée sur M que l'on appellera *forme symplectique*. L'existence de cette forme symplectique implique que la dimension (réelle) de M sera paire, on la notera $m := 2n$. Un difféomorphisme entre deux variétés symplectiques $f : (M, \omega) \longrightarrow (N, \eta)$ sera appelé un *symplectomorphisme* s'il vérifie $f^*\eta = \omega$. De plus, on remarque que sur la variété (M, ω) les automorphismes qui sont des symplectomorphismes forment un groupe (pour la composition usuelle des fonctions) qui sera noté $Symp(M, \omega)$.

Puisque ω est non-dégénérée, nous avons un isomorphisme entre fibré tangent et cotangent de M. Cela va nous donner un lien entre les fonctions lisses de M et les champs de vecteurs de M par l'intermédiaire de leur application tangente. Plus précisément, l'isomorphisme (de fibrés vectoriels) entre TM et T^*M est donné par

$$\omega^\flat : \left| \begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & T^*M \\ X \in T_xM & \longmapsto & (Y \mapsto \omega_x(Y, X) \in T_x^*M). \end{array} \right.$$

Et maintenant, si $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ alors $d_xf \in T_x^*M$, donc l'isomorphisme précédent nous donne l'existence et l'unicité d'un champ de vecteurs X_f que l'on appelle le *champ de vecteurs hamiltonien associé à* f vérifiant

$$i_{X_f}(\omega) = -df.$$

On appelle aussi X_f le gradient symplectique et on le note $\nabla_\omega f$ (voir [23] par exemple).

Les champs de vecteurs pour lesquels il existe une application $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant la relation précédente seront importants pour la suite, ce qui nous conduit à la définition suivante.

Définition 4.1.1 *Soit X un champ de vecteurs sur une variété symplectique (M, ω). On dit que X est hamiltonien si $i_X\omega$ est exacte i.e. si*

$$\exists f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \;\; i_X\omega = -df.$$

On dit que X est localement hamiltonien si $i_X\omega$ est fermée i.e. si

$$d(i_X\omega) = 0.$$

On note $\mathcal{H}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens et $\mathcal{H}_{loc}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs localement hamiltoniens.

Remarquons que nous avons aussi la caractérisation suivante : le champ de vecteurs X est localement hamiltonien si et seulement si le flot local $(\phi_t)_{t\in I}$ de X préserve la forme symplectique ω de M i.e. $\phi_t^*\omega = \omega$ pour tout $t \in I$.

4.1.2 Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique

Dans cette partie, on fixe une variété symplectique (M, ω) et un groupe de Lie G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, qui agit sur M par l'application :

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} G \times M & \longrightarrow & M \\ (g, x) & \longmapsto & g\,x. \end{array} \right.$$

Remarque. On rappelle que si G agit sur M alors on définit le *stabilisateur* d'un point $x \in M$ par

$$G_x = \{g \in G, \;\; g \cdot x = x\}.$$

Alors on dit que l'action de G est *fidèle* si

$$\bigcap_{x \in M} G_x = \{1\},$$

et que l'action de G est *libre* si

$$\forall x \in M, \;\; G_x = \{1\}.$$

On rappelle aussi que ϕ induit un morphisme de groupes entre G et le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M par

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Diff}(M) \\ g & \longmapsto & \phi(g, \cdot). \end{array} \right.$$

En particulier, l'action est fidèle si et seulement si ρ est injective.

Action symplectique

Commençons par la définition d'une *action symplectique*.

Définition 4.1.2 *On dit que ϕ est une action symplectique si*

$$g^*\omega = \omega, \;\; \forall g \in G,$$

autrement dit, si ϕ est un morphisme de groupes entre G et le groupe des symplectomorphismes $\mathrm{Symp}(M)$ *de M.*

Pour définir la notion d'action hamiltonienne, nous avons besoin de la notion de *champs de vecteurs fondamentaux*.

Soit $\xi \in \mathfrak{g}$. On peut associer à ξ un champ de vecteurs X_ξ, dit *champ de vecteurs fondamental associé à ξ (pour l'action de ϕ)* par la formule :

$$X_\xi : \left| \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & TM \\ x & \longmapsto & \dfrac{d}{dt}\phi(\exp(t\xi), x)|_{t=0} \end{array} \right. .$$

Remarque. Une propriété importante qui découle de la définition est que X_ξ est le champ de vecteurs sur M dont le flot est donné par $(t, x) \mapsto \phi(\exp(t\xi), x)$.

Le lemme suivant permettra de chercher une condition nécessaire et suffisante pour que tout champ de vecteurs fondamental soit hamiltonien.

Lemme 4.1.3 *Soit ϕ une action symplectique. Tout champ de vecteurs fondamental X_ξ (pour l'action de ϕ) est localement hamiltonien i.e. pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, le flot de X_ξ préserve la forme symplectique de ω de M.*

Démonstration. D'après la remarque précédente, le flot local de X_ξ est donné par $\phi_t : x \mapsto \phi(\exp(t\xi), x)$. Or cette application préserve la forme symplectique car l'action ϕ est symplectique, ce qui permet de conclure.
$\square$

Action hamiltonienne

Passons à la définition d'une *action hamiltonienne*.

Définition 4.1.4 *On dit que ϕ est une action hamiltonienne s'il existe une application $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ vérifiant*

1. *ϕ est une action symplectique.*
2. *Pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs fondamental X_ξ est hamiltonien i.e.*

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}, \exists \mu^\xi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \;\; i_{X_\xi}\omega = -d\mu^\xi.$$

3. *L'application*

$$\Theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \\ \xi & \longmapsto & \mu^\xi \end{array} \right.$$

est un morphisme d'algèbres de Lie (où $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est munie du crochet de Poisson).

On pose alors

$$\mu : \left| \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ p & \longmapsto & (\xi \mapsto \mu^\xi(p)) \end{array} \right. ,$$

L'application μ est appelée l'application moment de l'action de G par ϕ.

On peut montrer (voir [4]) que les actions hamiltoniennes sont définies à partir de l'application moment de la façon suivante.

Définition 4.1.5 *On dit que ϕ est une action hamiltonienne s'il existe une application $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ vérifiant*

1. *ϕ est une action symplectique.*
2. *Pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, si on pose $\mu^\xi := p \mapsto \langle \mu(p), \xi \rangle$ alors*

$$d\mu^\xi = -i_{X_\xi}\omega,$$

i.e μ^ξ est l'application hamiltonienne du champ de vecteurs fondamental associé à ξ.

3. *L'application μ est G-équivariante i.e.*

$$\forall m \in M, \;\; \forall \xi \in \mathfrak{g}, \;\; \langle \mu(g \cdot m), \xi \rangle = \langle Ad^*_g \, \mu(m), \xi \rangle,$$

où Ad^* est l'action coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$.

4.1.3 Variété torique symplectique

On passe à la définition principale.

Définition 4.1.6 *Un quadruplet $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ est une variété torique symplectique de dimension $2n$ si (M, ω) est une variété symplectique connexe compacte de dimension $2n$ munie d'une action hamiltonienne et fidèle du tore $\mathbb{T}^n$ de dimension n et d'application moment μ. On note $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de $\mathbb{T}^n$ et Λ le réseau déterminé par $\mathbb{T}$ dans $\mathfrak{t}$ i.e. $T = \mathfrak{t}/\Lambda$.*

L'application moment μ vérifie des propriétés intéressantes que nous résumons dans la proposition suivante dont on renvoie à [4] pour des démonstrations. Avant d'énoncer ces propriétés, rappelons qu'un *polytope de Delzant* est un polytope convexe dans le dual $\mathfrak{t}^*$ de $\mathfrak{t}$ définie par $d > n$ inégalités de la forme

$$\langle \nu_r, x \rangle + \lambda_r \geq 0,$$

où ν_r appartient à Λ et $\lambda_r \in \mathbb{R}$ et tel que tout sommet est l'intersection de n faces de codimension 1 dont les vecteurs normaux forment une base de Λ.

Proposition 4.1.7 ([2],[27], [26]) *Nous avons les propriétés suivantes :*

- *L'image de μ dans $\mathfrak{t}^*$ est un polytope convexe P qui se trouve être l'enveloppe convexe des images par μ des points fixes de l'action de $\mathbb{T}^n$. On montre que ce polytope est un polytope de Delzant et que réciproquement tout polytope de Delzant est l'image par une application moment d'une variété torique.*

- *Pour chaque face F de P, le stabilisateur de tout point $z \in \mu^{-1}(\mathrm{Int}(F))$ pour l'action de $\mathbb{T}^n$ est le tore de dimension égale à la codimension de F et dont l'algèbre de Lie est l'annulateur dans $\mathfrak{t}$ du sous-espace vectoriel de $\mathfrak{t}^*$ correspondant à F.*
- *En particulier, si on note P^0 l'intérieur de P, alors l'action de $\mathbb{T}^n$ sur $M^0 := \mu^{-1}(P^0)$ est libre et donc $\mu : M^0 \to P^0$ est une $\mathbb{T}^n$-fibration principale. De plus, M^0 est un ouvert dense de M.*

Ainsi si P est un polytope de Delzant, alors il s'écrit sous la forme

$$P = \bigcap_{i=1}^{r} \{x \in \mathfrak{t}^* \ / \ L_i(x) := \langle x, \nu_i \rangle + \lambda_i \geq 0\},$$

où $\nu_i \in \Lambda$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Une face est alors déterminée par un ensemble $I_F \subset \{1, \cdots, r\}$ tel que

$$F = P \cap \bigcap_{i \in I_F} \{x \in \mathfrak{t}^* \ / \ L_i(x) = 0\}.$$

On notera $\mathcal{F}(P)$ l'ensemble des faces du polytope P. Le deuxième point de la proposition 4.1.7 signifie que pour toute face $F \in \mathcal{F}(P)$ d'intérieur F^0, si on note $\mathbb{T}_F := \mathfrak{t}_F/\Lambda_F$ où $\mathfrak{t}_F$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{t}$ engendré par les $\{\nu_i \ : \ i \in I_F\}$ et Λ_F est le sous-réseau de Λ engendré par les $\{\nu_i \ : \ i \in I_F\}$, nous obtenons

$$\mu^{-1}(F^0) = F^0 \times \mathbb{T}^n/\mathbb{T}_F.$$

Le troisième point de la proposition 4.1.7 signifie alors que M^0 est symplectomorphe à $P^0 \times \mathbb{T}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ que l'on a muni de la forme symplectique induite par la forme symplectique standard de $\mathbb{R}^{2n}$. Ainsi en identifiant $\mathfrak{t} \simeq \mathbb{R}^n$ et $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^n$, nous obtenons que

$$M^0 \simeq P^0 \times \mathbb{T}^n = \left\{(x,t) \in P^0 \times \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)\right\}.$$

Ce système de coordonnées sur M^0 sera appelé le système de *coordonnées actions-angles*. L'action de $\mathbb{T}^n$ sera alors donnée par

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^n, \ \ \theta \cdot (x,t) = (x, t+\theta),$$

et la forme symplectique ω s'écrira simplement sous la forme

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dt_j.$$

On peut l'écrire matriciellement sous la forme :

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Rappelons que nous avons défini l'application moment $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ la formule

$$\forall b \in \mathfrak{t}, \ \ -d\langle \mu, b\rangle = i_{X_b}\omega, \tag{4.2}$$

où $X_b(z) := \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tb) \cdot z$. Ainsi dans le système de coordonnées actions-angles, nous avons :

$$\forall b \in \mathfrak{t}, \ \ X_b = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial t_i}. \tag{4.3}$$

4.1.4 Variété torique kählérienne

Soit $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ une variété torique. On rajoute une structure complexe J qui soit $\mathbb{T}^n$-invariante et telle que (M, ω, J) soit une variété kählérienne i.e. $g := \omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemannienne. On dira alors que $(M, \omega, J, \mathbb{T}^n, \mu)$ *est une variété torique kählérienne*.

La première conséquence est que, puisque J est intégrable, alors $\mathbb{T}^n$ s'étend en une action holomorphe du tore complexe $\mathbb{T}_{\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{C}^\times)^n$. En particulier, nous obtenons alors un système de coordonnées holomorphes sur M^0 :

$$M^0 \simeq (\mathbb{C}^\times)^n \simeq \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\,\mathbb{T}^n = \left\{u + \sqrt{-1}\,v \ / \ u \in \mathbb{R}^n \ \ v \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n\right\}. \tag{4.4}$$

Dans ce système, nous avons

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^n, \;\; \theta \cdot \left(u + \sqrt{-1}v\right) = u + \sqrt{-1}\;(v + \theta)\,.$$

La structure complexe J est alors simplement donnée par la multiplication par $\sqrt{-1}$ i.e.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

De plus, grâce à l'équation (4.4), on sait que $M^0 \simeq \mathbb{T}_{\mathbb{C}}$, cette dernière étant une variété de Stein (voir [17] pour plus de détails), il existe un potentiel $f \in \mathcal{C}^\infty(M^0, \mathbb{R})$ tel que

$$\omega = 2\sqrt{-1}\partial\overline{\partial} f. \tag{4.6}$$

Puisque ω est $\mathbb{T}^n$-invariante, le potentiel f ne va dépendre que de la variable u. Ainsi nous obtenons

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & F \\ -F & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

où F est la matrice hessienne de f pour la variable u. De plus, puisque $g = \omega(\cdot, J\cdot)$, nous avons aussi

$$g = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Un rappel sur l'étude des métriques kählériennes $\mathbb{T}^n$-invariantes est donné dans la section suivante.

De plus, nous allons travailler sur des variétés de Fano, cette propriété se traduit sur le polytope moment par l'existence d'un *centre privilégié* : si P est un polytope de $\mathfrak{t}^*$, il existe des formes affines $L_1, \cdots L_d$ sur $\mathfrak{t}^*$ avec $d \geq n$ telles que

$$P = \bigcap_{k=1}^{d} \{x \in \mathfrak{t}^* \;/\; L_k(x) \geq 0\},$$

alors on dit que P admet un centre privilégié s'il existe $x \in \mathfrak{t}^*$ tel que $L_1(x) = \cdots = L_d(x)$. Un tel x est alors unique et on l'appelle le centre privilégié de P. Nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.1.8 ([19], [64]) *Soit $(M, \omega, J, g, \mathbb{T}^n, \mu)$ une variété torique kahlérienne compacte. Alors M est de Fano si et seulement si $P = \mathrm{im}(\mu)$ admet un centre privilégié.*

On pourra consulter aussi la section 4.1.6 pour plus de détails.

4.1.5 L'espace des métriques kählériennes $\mathbb{T}^n$-invariantes

Avant de déterminer l'ensemble des métriques kählériennes $\mathbb{T}^n$-invariantes, nous introduisons quelques notations. Puisque P est un polytope de $\mathfrak{t}^*$, il existe des formes affines $L_1, \cdots L_d$ sur $\mathfrak{t}^*$ avec $d \geq n$ telles que

$$P = \cap_{k=1}^{d} \{x \in \mathfrak{t}^* \;/\; L_k(x) \geq 0\},$$

et où $\nabla L_k = \nu_k \in \Lambda$. On définit alors *l'ensemble des potentiels symplectiques* $S(P)$ comme l'ensemble des fonctions $\phi \in \mathcal{C}^0(P)$ telles que sa restriction à P^0 ou à l'intérieur de toute face non vide de P soit lisse et strictement convexe et telle que si $\phi_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} L_k \log L_k$ alors $\phi - \phi_0$ soit la restriction à P d'une fonction lisse définie sur un ouvert contenant P. Nous avons alors le résultat suivant (on pourra consulter [1]).

Théorème 4.1.9 *L'ensemble des métriques $\mathbb{T}^n$-invariantes sur $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ est en bijection avec le quotient de $S(P)$ par l'ensemble $\mathrm{Aff}(P, \mathbb{R})$ des sur P. De plus la bijection est donnée par l'application $\phi \mapsto g_\phi$ où*

$$\forall \phi \in S(P), \;\; g_\phi|_{M^0} = \sum_{i,j} G_{ij} dx_i \otimes dx_j + H_{ij} dt_i \otimes dt_j, \tag{4.9}$$

dans le système de coordonnées actions-angles où $G = (G_{ij})_{1\leq i,j\leq j}$ est la matrice hessienne de ϕ et $H = (H_{ij})_{1\leq i,j\leq j}$ est la matrice inverse de la matrice G.

On dira alors que ϕ est le *potentiel symplectique* de g_ϕ.

Commençons par remarquer que le potentiel ϕ_0 dont l'expression est donné par

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} L_k \log L_k, \tag{4.10}$$

définit un potentiel symplectique que l'on appelle *potentiel de Guillemin*. De plus, on peut écrire matriciellement les différentes expressions précédentes dans le système de coordonées actions-angles. Commençons en rappelant que $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dt_i$ d'où

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

De plus, en utilisant l'expression (4.9), on écrit $g = g_\phi$ sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

et donc

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -H \\ G & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Ces expressions nous permettent de calculer le gradient riemannien et symplectique pour une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Nous obtenons donc

$$\nabla_g \psi = \sum_{i,j=1}^{n} H_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} G_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial t_i} \tag{4.14}$$

et

$$\nabla_\omega \psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4.15}$$

On peut aussi calculer la forme de Ricci $\mathrm{Ric}(\omega)$ dans ce système de coordonnées, nous obtenons donc

$$\mathrm{Ric}(\omega) = - \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \frac{1}{2} H_{li,ik}\, dx_k \wedge dt_l, \tag{4.16}$$

où on a adopté la notation

$$H_{li,ik} := \frac{\partial H_{li}}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Terminons par *la formule du laplacien* pour la métrique g :

$$\Delta^g = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(H_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial t_i} \left(G_{ij} \frac{\partial}{\partial t_j} \right), \tag{4.17}$$

et par *la formule d'Abreu* (voir [1]) pour la courbure scalaire :

$$Scal_g = \mu^* S(H), \text{où } S(H) = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H_{ij}}{\partial \mu_i \partial \mu_j}. \tag{4.18}$$

Terminons cette section en faisant le lien entre les deux systèmes de coordonnées (x, t) et (u, v). En effet, on peut remarquer que l'application moment μ est donnée en coordonnées complexes par :

$$\mu(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Ainsi par restriction, on peut voir que $\mu(u, 0)$ est un difféomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et P^0. Le changement de coordonnées est donc donné par le difféomorphisme suivant :

$$x = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad t = v. \tag{4.19}$$

On pourra consulter [1, 12] pour plus de détails.

4.1.6 Construction algébrique

Cette section qui s'inspire de l'article [37] rappelle la construction "algébrique" d'une variété torique kählérienne de Fano. Cette construction nous apporte des précisions sur l'application moment et sur la décomposition du groupe des automorphismes d'une variété torique (et de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes).

Éventails et construction algébrique

Soit A un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n. On pose alors $B := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$ le groupe des morphismes (de modules) de A dans $\mathbb{Z}$. On alors un accouplement bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : B \times A \to \mathbb{Z}$.

On peut étendre B et A en deux espaces vectoriels réels de dimension n en prenant leur produit tensoriel avec $\mathbb{R}$: on pose donc $B_{\mathbb{R}} := B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $A_{\mathbb{R}} := A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. L'accouplement $\mathbb{Z}$-bilinéaire s'étend alors en une application $\mathbb{R}$-bilinéaire entre $B_{\mathbb{R}}$ et $A_{\mathbb{R}}$.

Définition 4.1.10 *Soit σ sous-ensemble de $A_{\mathbb{R}}$. On dit que l'ensemble σ est un cône s'il existe $(a_1, \cdots, a_s) \in A^s$ tel que*
- $\sigma = \mathbb{R}^+ a_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ a_s$,
- $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

On définit alors *le cône dual* de σ par $\sigma^\vee := \{x \in B_{\mathbb{R}} \ / \ \langle x, y \rangle \geq 0 \ \ \forall y \in \sigma\}$. De plus, on dit qu'un sous-ensemble τ de σ est *une face* de σ, et on note $\tau \leq \sigma$, s'il existe $b_0 \in \sigma^\vee$ tel $\tau = \sigma \cap b_0^\perp = \{y \in \sigma \ / \ \langle b_0, y \rangle = 0\}$.

Définition 4.1.11 *Un éventail de A est un ensemble Δ de cônes de $A_{\mathbb{R}}$ telle que*
- $\forall \sigma \in \Delta, \tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta$
- $\forall (\sigma, \sigma') \in \Delta^2, \ \ \sigma \cap \sigma' \leq \sigma$ *et* $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$.

On dit alors que l'ensemble $(a_1, \cdots, a_n s)$ sont *les générateurs fondamentaux* de σ. Pour tout éventail Δ, on définit *le support* $|\Delta|$ de Δ dans A par $|\Delta| := \cup_{\sigma \in \Delta} \sigma$. De plus pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, on pose

$$\Delta(i) := \{\sigma \in \Delta \ / \ \dim \sigma = i\},$$

où $\dim \sigma$ désigne la dimension de l'espace vectoriel réel engendré par σ dans $A_{\mathbb{R}}$. On dira que Δ est *un éventail non-singulier* si pour tout $\sigma \in \Delta(n)$, les générateurs fondamentaux $(a_1, \cdots, a_n)$ de σ forment de $\mathbb{Z}$-base de A.

Avec ces notations, on a alors le théorème suivant, que l'on tire du théorème 1.4 de [37], mais dont on peut trouver des preuves dans [18], [42]. Avant de l'énoncer, rappelons qu'un espace topologique est *irréductible* s'il n'est pas la réunion de deux fermés propres.

Théorème 4.1.12 *Soit Δ un éventail non singulier de A. On peut lui associer une unique variété algébrique complexe lisse $\mathbb{T}_\Delta$ qui vérifiera les propriétés suivantes.*
- *$\mathbb{T}_\Delta$ est une compactification $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-équivariante de $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ irréductible de dimension n.*
- *Pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$ et pour tout $\sigma \in \Delta(i)$, il existe une unique orbite O^σ sous l'action de $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ telle que*

  $$\mathbb{T}_\Delta = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} O^\sigma.$$

  De plus, l'adhérence $D(\sigma)$ de O^σ est une sous-variété $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-stable de $\mathbb{T}_\Delta$ topologiquement irréductible lisse et de dimension $n - i$ qui admet la décomposition suivante :

  $$D(\sigma) = \bigsqcup_{\tau \geq \sigma} O^\tau$$

- *Pour tout $\sigma \in \Delta(n)$, $U_\sigma := \cup_{\tau \leq \sigma} O^\tau$, est un voisinage affine ouvert et $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-stable de O^σ dans $\mathbb{T}_\Delta$ tel que*

  $$\mathbb{T}_{\mathbb{C}} \subset U_\sigma \simeq \mathbb{A}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n,$$

  et

  $$\mathbb{T}_\Delta = \bigcup_{\sigma \in \Delta(n)} U_\sigma.$$

Terminons cette sous-section avec la réciproque au théorème précédent (voir le théorème 4.1 de [43]) :

Théorème 4.1.13 *Toute variété X algébrique complexe lisse irréductible de dimension n, sur laquelle $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ agit de manière fidèle et régulière, est $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-equivariament isomorphe à une variété de la forme $\mathbb{T}_\Delta$ pour un éventail Δ non-singulier d'un $\mathbb{Z}$-module libre A de rang n.*

Polytope (algébrique) et application moment

Dans cette section, nous gardons les notations introduites précédemment. L'objectif, maintenant, est d'obtenir une caractérisation sur l'éventail Δ pour que la variété $\mathbb{T}_\Delta$ soit de Fano. Ensuite, nous ferons, à l'aide de l'application moment, le lien avec la construction symplectique et avec le polytope de Delzant associé à cette construction.

On fixe une variété algébrique complexe irréductible compacte torique M lisse dont l'éventail est noté Δ i.e. $M = \mathbb{T}_\Delta$ où Δ est un éventail d'un $\mathbb{Z}$-module libre A de rang n. On note $b_\rho \in A$ l'unique générateur fondamental de $\rho \in \Delta(1)$. On considère le diviseur

$$K := -\Sigma_{\rho\in\Delta(1)} D(\rho)$$

sur M. On a alors le théorème suivant (théorème 2.1 de [37] et [18]). Nous n'utiliserons que l'équivalence entre les condition (1) et (4). Nous ne rappelons donc pas la définition d'un diviseur ample et très ample.

Théorème 4.1.14 *Avec ces notations, K est un diviseur canonique de $\mathbb{T}_\Delta$ et on a l'équivalence entre les propositions suivantes :*

1. *M est une variété de Fano,*
2. *K est ample,*
3. *K est très ample,*
4. *$P_{alg} := \{a \in B_\mathbb{R} \ : \ \langle a, b_\rho\rangle \leq 1 \ \ \forall \rho \in \Delta(1)\}$ est un polytope convexe compact dont les sommets sont les $\{a_\tau \ : \ \tau \in \Delta(n)\}$, où a_τ est l'unique élément de $B_\mathbb{R}$ tel que $\langle a_\tau, b\rangle = 1$ pour tout générateur b de τ.*

Pour cela, on commence par rappeler que $\mathbb{T}_\mathbb{C}$ est un ouvert dense de $\mathbb{T}_\Delta$. De plus, on sait qu'il existe un sous-groupe compact maximal $\mathbb{T}_\mathbb{R}$ dans $\mathbb{T}_\mathbb{C}$ tel que

$$\{(t_1, \cdots, t_n) \ / \ t_i \in \mathbb{C}^\times, |t_i| = 1\} = \mathbb{S}_1^n \simeq \mathbb{T}_\mathbb{R} \subset \mathbb{T}_\mathbb{C} \simeq (\mathbb{C}^\times)^n = \{(t_1, \cdots, t_n) \ / \ t_i \in \mathbb{C}^\times\}$$

Si on note $(t_1, \cdots, t_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ le système de coordonnées holomorphes usuelles de $\mathbb{T}_\mathbb{C}$, alors on peut définir, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, des fonctions $x_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}_\mathbb{C}, \mathbb{R})$ par la formule suivante :

$$t_i \, \overline{t_i} = \exp(-x_i).$$

Ainsi, toute fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en les variables $(x_1, \cdots, x_n)$ peut être vue comme une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n_\mathbb{C}, \mathbb{C})$ en les variables complexes $(t_1, \cdots, t_n)$ qui sera $\mathbb{T}_\mathbb{R}$-invariante.

Considérons maintenant, la fonction u^0 définie sur $\mathbb{R}^n$ (identifié à $A_\mathbb{R}$ par le choix d'une $\mathbb{Z}$-base de A) par

$$u^0 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log[\displaystyle\sum_{\tau\in\Delta(n)} \exp(\langle a_\tau, x\rangle)] \end{array} \right. .$$

Un calcul direct nous permet de voir que cette fonction est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ et que $\mu_{u^0} := \nabla u^0 : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\partial_1 u^0(x), \cdots, \partial_n u^0(x)) \in \mathbb{R}^n$ (où $\mathbb{R}^n$ est identifié $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})_\mathbb{R}$ par le choix de la $\mathbb{Z}$-base duale de la $\mathbb{Z}$-base choisie pour A) est un difféomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et l'intérieur P^0_{alg} du polytope P_{alg} défini au théorème 4.1.14. On a que la 2-forme ω_{g^0} sur $\mathbb{T}_\mathbb{C}$ définie (via l'identification précédente) par

$$\omega_{g^0} := \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\, u^0,$$

est une métrique kählérienne $\mathbb{T}_\mathbb{R}$-invariante sur $\mathbb{T}_\mathbb{C}$. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 4.1.15 *La métrique ω_{g^0} s'étend sur M en une métrique kählérienne $\mathbb{T}_\mathbb{R}$-invariante vérifiant en plus $\omega_{g^0} \in 2\pi\, c_1(M)$. De plus, on a que ω_{g^0} s'étend en une forme kählérienne sur M telle que $\mathrm{im}(\mu_{u^0}) = P_{alg}$.*

Démonstration. On pourra consulter la section 3 de [5] pour la première assertion et le théorème 4.2 de [37] pour la seconde assertion. □

De plus, si on se donne une autre métrique kählérienne $\mathbb{T}_\mathbb{R}$-invariante g telle que $\omega_g \in 2\pi\, c_1(M)$ alors d'après le $\partial\overline{\partial}$-lemme, nous obtenons qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que $\omega = \omega_{g^0} + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi$. En remarquant que ψ est donc $\mathbb{T}$-invariant, nous avons alors, sur $\mathbb{T}_\mathbb{C}$, l'égalité

$$\omega = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}u, \ \text{où}\ u = u^0 + \psi.$$

On retrouve ainsi la définition du potentiel kählérien définie à la section 4.1.4. De plus, puisque la fonction ψ est globalement définie sur M, elle est bornée, et donc on a $\mathrm{im}(\mu_u) = \mathrm{im}(\mu_{u^0}) = P_{alg}$. On pourra consulter [5] ou [64] pour plus de détails.

On a le corollaire suivant qui fait le lien avec la construction symplectique.

Corollaire 4.1.16 *Soit $(M, \omega, g, J, \mathbb{T}_{\mathbb{C}}, \mu)$ une variété kählérienne compacte torique de Fano, d'application moment μ telle que $\omega \in 2\pi\, c_1(M)$. On peut associer à cette variété deux polytopes $P_{symp} = \mu(M)$ et le polytope P_{alg} provenant d'un éventail Δ construit à la section précédente. Nous avons alors*

$$P = P_{symp} = -P_{alg}.$$

En particulier, si on écrit que

$$P_{symp} = \bigcap_{r=1}^{d} \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, \nu_r \rangle \geq -\lambda_r\},$$

alors d est égal au cardinal de $\Delta(1)$ et pour tout $r = 1, \cdots, d$, il existe un unique $\rho \in \Delta(1)$ tel que $\nu_r = b_\rho$ et $\lambda_r = 1$ i.e.

$$P_{symp} = \bigcap_{\rho \in \Delta(1)} \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, b_\rho \rangle \geq -1\}. \tag{4.20}$$

Démonstration. Avec les notations précédentes, puisque $t_i \overline{t_i} = \exp(-x_i)$ pour $1 \leq i \leq n$, on a que $\mu_{u^0} = -\mu$. Ceci permet de conclure. $\square$

Groupe des automorphismes

Rappelons pour commencer que le groupe des automorphismes d'une variété complexe compacte M est un groupe de Lie complexe de dimension finie dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $\eta^{\mathbb{R}}(M)$.

Supposons qu'en plus M soit torique de Fano i.e. $(M, \omega, J, g, \mathbb{T}^n, \mu)$ est une variété kählérienne compacte torique de Fano, et que μ est l'application moment vérifie $\mathrm{im}(\mu) = -P_{alg}$. Cela signifie que l'action de $\mathbb{T}^n$ s'étend en une action du tore complexe $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ qui agit de manière fidèle et holomorphe sur M avec une orbite ouverte et dense. En particulier, $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ va définir un tore complexe maximal de $\mathrm{Aut}(M)$. De plus, comme $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ est connexe, on a que $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ appartient à $\mathrm{Aut}^0(M)$, donc nous avons

$$\mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathrm{Aut}^0(M) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(M).$$

Pour décrire $\mathrm{Aut}(M)^0$ et son algèbre de Lie, nous allons introduire la notion de *racines de Demazure*. Notons $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de $\mathbb{T}^n$.

Définition 4.1.17 *Un élément $a \in \mathfrak{t}^*$ est une racine de Demazure de P_{alg} s'il existe un unique $\rho_a \in \Delta(1)$ tel que $\langle a, b_{\rho_a} \rangle = 1$ et $\langle a, b_\rho \rangle \leq 0$ pour tout $\rho \in \Delta(1)$ tel que $\rho \neq \rho_a$.*

On note $R(P_{alg})$ l'ensemble des racines de Demazure de P_{alg}. On définit alors

$$S(P_{alg}) := R(P_{alg}) \cap -R(P_{alg}) = \{a \in R(P_{alg}) \;/\; -a \in R(P_{alg})\}$$

et

$$U(P_{alg}) = R(P_{alg}) \backslash S(P_{alg}) = \{a \in R(P_{alg}) \;/\; a \notin S(P_{alg})\}.$$

Avec ces notations, nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.1.18 (Proposition 7 [18]) *Le groupe $\mathrm{Aut}^0(M)$ est isomorphe à un produit semi-direct $R_u(M) \rtimes \mathrm{Aut}_r(M)$ tel que $R_u(M)$ est le radical unipotent de $\mathrm{Aut}^0(M)$ et $\mathrm{Aut}_r(M)$ est un groupe algébrique réductif contenant le tore $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$. De plus, si on note $\eta(M)$, $\eta_u(M)$, $\eta_r(M)$ et $\eta_0(M)$ les algèbres de Lie de respectivement $\mathrm{Aut}(M)$, $R_u(M)$, $\mathrm{Aut}_r(M)$ et $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ alors nous avons les décompositions suivantes :*

$$\eta(M) = \eta^0(M) \oplus \bigoplus_{\alpha \in R(P_{alg})} \mathbb{C}\, V_\alpha,$$

$$\eta_r(M) = \eta^0(M) \oplus \bigoplus_{\alpha \in S(P_{alg})} \mathbb{C}\, V_\alpha,$$

$$\eta_u(M) = \bigoplus_{\alpha \in U(P_{alg})} \mathbb{C}\, V_\alpha,$$

où pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in R(P_{alg})$, *le champ de vecteurs* $V_\alpha \in \eta(M)$ *est un champ de vecteurs défini sur* $\mathbb{T}_\mathbb{C} = \{(t_1, \cdots, t_n) \ : \ t_i \in \mathbb{C}^\times\}$ *par :*

$$V_\alpha|_{\mathbb{T}_\mathbb{C}} = \prod_{i=1}^n t_i^{-\alpha_i} \sum_{k=1}^n (b_{\rho_\alpha})_k \, t_k \frac{\partial}{\partial t_k}. \tag{4.21}$$

Pour plus de détails, on pourra par exemple consulter la section 3 de [42].

4.2 Solitons de Kähler-Ricci dans le cas torique

On fixe une variété (M, J, g_0, ω_0) kählérienne compacte de Fano de dimension réelle $2n$. On rappelle que le couple (g, X), composé d'un champ de vecteurs holomorphe X sur M et d'une métrique kählérienne g sur M, est *un soliton de Kähler-Ricci* s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$, dite *constante de Kähler-Einstein*, telle que

$$\mathrm{Ric}(\omega) - \lambda\omega = \mathcal{L}_X(\omega), \tag{4.22}$$

où ω est la forme de Kähler associée à g, $\mathrm{Ric}(\omega)$ est la forme de Ricci associée à ω et $\mathcal{L}_X(\omega)$ est la dérivée de Lie de ω dans la direction de X. La notion de soliton de Kähler-Ricci généralise la notion de *métrique de Kähler-Einstein*, en effet si on prend $X = 0$, on retrouve *l'équation de Kähler-Einstein* $\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$.

Le fait que X soit un champ de vecteurs holomorphe et que M soit une variété de Fano compacte implique, par la théorie de Hodge, qu'il existe une fonction $\theta_X \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $\mathcal{L}_X(\omega) = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\,\theta_X$ (voir par exemple [61, 59] et le lemme 2.5.5). Ainsi, si nous prenons les classes de cohomologie de l'équation (4.22), nous avons alors par la proposition 2.4.4 la relation suivante :

$$\lambda[\omega] = 2\pi c_1(M).$$

De plus en prenant le produit extérieur de l'équation (4.22) avec ω^{n-1} et en intégrant, nous obtenons

$$\int_M \mathrm{Ric}(\omega) \wedge \omega^{n-1} - \lambda \int_M \omega^n = \sqrt{-1} \int_M \partial\overline{\partial}\theta_X \wedge \omega^{n-1}.$$

Pour toute $(1,1)$-forme réelle α, on définit sa trace par rapport à ω par la formule : $(\mathrm{Tr}_\omega\, \alpha)\cdot\omega^n = 2n\,\alpha\wedge\omega^{n-1}$, ce qui nous donne

$$\int_M \mathrm{Tr}_\omega(\mathrm{Ric}(\omega))\omega^n - 2n\,\lambda \int_M \omega^n = \sqrt{-1} \int_M \mathrm{Tr}_\omega(\partial\overline{\partial}\theta_X)\omega^n.$$

Maintenant, par définition, on a que $Scal_g = \mathrm{Tr}_\omega(\mathrm{Ric}(\omega))$ et $\Delta^g = \mathrm{Tr}_\omega(\sqrt{-1}\partial\overline{\partial})$, ce qui nous donne

$$\int_M Scal_g\, \omega^n - \lambda \int_M \omega^n = \int_M \Delta^g \theta_X\, \omega^n.$$

En remarquant que le dernier terme est nul par la formule d'intégration par partie, nous obtenons

$$\lambda = \frac{1}{2n}\overline{Scal}, \tag{4.23}$$

où n est la dimension complexe de M et $\overline{Scal} := \int_M Scal_g\, \omega^n / \int_M \omega^n$ la courbure scalaire moyenne de (M, g) (on rappelle que $Scal_g$ est la courbure scalaire de g).

Supposons que $(M, J, g, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ soit une variété kählérienne compacte torique de Fano. On peut montrer ([64]) qu'il existe un unique soliton de Kähler-Ricci (modulo l'action des automorphismes holomorphes de M) et que le champ de vecteurs solitonique est de la forme

$$X = JX_a + \sqrt{-1}X_a$$

où X_a est *le champ de vecteurs fondamental pour l'action du tore* $\mathbb{T}$ *associé à un vecteur* $a \in \mathfrak{t}$. En particulier, nous avons

$$\mathcal{L}_X\omega = -2\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\,\langle \mu, a\rangle. \tag{4.24}$$

En effet, on a par d'une part

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X\omega &= di_X\omega\\
&= d[\omega(JX_a + \sqrt{-1}X_a, \cdot)]\\
&= d[\omega(JX_a, \cdot)] + \sqrt{-1}\,d[\omega(X_a, \cdot)]\\
&= d[\omega(JX_a, \cdot)] - \sqrt{-1}\,d^2[\langle \mu, a\rangle, \cdot)]\\
&= -d[g(X_a, \cdot)]\\
&= -d[\sum_{i,j=1}^{n} a^i H_{ij} dt_j]\\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{n} a^i H_{ij,k} dx_k \wedge dt_j,
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
-2\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\langle \mu, a\rangle &= -dd^c\langle \mu, a\rangle\\
&= -d[\sum_{i=1^n} a^i J dx_i] && \text{(puisque } d^c\langle \mu, a\rangle = Jd\langle \mu, a\rangle\text{)}\\
&= -d[\sum_{i,j=1}^{n} a^i H_{ij} dt_j] && \text{(en utilisant l'équation (4.13))}\\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{n} a^i H_{ij,k} dx_k \wedge dt_j.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne bien que

$$\mathcal{L}_X\omega = -2\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\langle \mu, a\rangle = -dd^c\langle \mu, a\rangle = -\sum_{i,j,k=1}^{n} a^i H_{ij,k} dx_k \wedge dt_j. \tag{4.25}$$

Ainsi, en prenant la trace par rapport à la forme ω de l'équation (4.22), nous sommes ramenés à chercher les couples (g, a) composés d'une métrique kählérienne g sur M et d'un vecteur $a \in \mathfrak{t}$ vérifiant

$$Scal_g - \overline{Scal} = -2\,\Delta^g\langle \mu, a\rangle. \tag{4.26}$$

Ainsi, sur les variétés toriques, un soliton de Kähler-Ricci peut être vu comme un couple (g, a) vérifiant l'équation (4.26). En fait, on peut montrer (voir [36, 24, 25]) que cette définition est en fait équivalente dans le cas d'une variété torique kählérienne compacte de Fano à la définition classique d'un soliton.

Terminons en rappelant que le vecteur $a \in \mathfrak{t}$ est entièrement déterminé par la combinatoire du polytope $\mathrm{im}(\mu)$ associé à la variété torique symplectique $(M, \omega, \mathbb{T}, \mu)$ grâce à l'annulation de l'invariant de Futaki. Cette dernière condition s'exprime (voir la fin de la section 2 de [64] pour les détails calculatoires) de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathrm{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R}), \quad \int_P e^{-2\langle a,x\rangle} f\,dv(x) = f(p)\int_P e^{-2\langle a,x\rangle}\,dv(x), \tag{4.27}$$

où p est *le centre privilégié* de P, dv la formule volume euclidienne standard et $\mathrm{Aff}(\mathfrak{t}^*, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions affines réelles sur $\mathfrak{t}^*$. On pourra consulter [19, 64].

4.3 Le laplacien pondéré sur une variété torique de Fano

4.3.1 La première valeur propre du laplacien pondéré

On fixe une variété kählérienne compacte de Fano torique $(M^{2n}, J, g_0, \omega_0, \mathbb{T}^n, \mu)$ telle que (g, a) soit un soliton de Kähler-Ricci. Lorsqu'on travaille sur les solitons de Kähler-Ricci, il est important de pondérer le laplacien comme expliqué dans [44, 45]. Dans notre cas, en utilisant l'équation (4.24), on définit alors *le laplacien pondéré* par la formule suivante :

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}), \quad \Delta^{g,a} v := \Delta^g + dv\left(\nabla_g \langle \mu, 2a\rangle\right).$$

En utilisant les formules (4.17), (4.14) et (4.9), on obtient donc l'expression de $\Delta^{g,a}$ dans les coordonnées actions-angles :

$$\Delta^{g,a} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(H_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,j=1}^{n} G_{ij}\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_i H_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{4.28}$$

De plus, comme nous travaillons sur des variétés kählériennes, il faut aussi tenir compte de la structure complexe J en rajoutant un multiple du terme $B^a_{g,J}$ donné par

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}), \quad B^a_{g,J} v := g\left(\nabla_g v, \nabla_\omega \langle \mu, 2\,a\rangle\right) = dv\left(\nabla_\omega \langle \mu, 2\,a\rangle\right). \tag{4.29}$$

Le laplacien complexe pondéré est alors donné par la formule

$$\Delta^a_{g,J} := \Delta^{g,a} - \sqrt{-1}B^a_{g,J}. \tag{4.30}$$

Remarquons que l'on retrouve la formule (3.36) grâce au fait que $h_g = \theta_X = -2\langle \mu, a\rangle$ à constante près comme il découle de l'équation (4.24). De plus, puisque la structure complexe J de la variété M est antisymétrique pour g, on peut étendre la définition précédente par $\mathbb{C}$-linéarité aux fonctions $u \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$. En utilisant la formule (4.15), nous obtenons que

$$B^a_{g,J} = \sum_{j=1}^{n} 2\,a_j \frac{\partial}{\partial t_j}. \tag{4.31}$$

d'où

$$\Delta^a_{g,J} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(H_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,j=1}^{n} G_{ij}\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_i H_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{n} 2\,a_j\frac{\partial}{\partial t_j}. \tag{4.32}$$

Terminons en remarque que si u et v sont des fonctions $\mathbb{T}^n$-invariantes i.e. indépendantes de la variable t alors

$$\Delta^a_{g,J}(uv) = v\,\Delta^{g,a}u + u\,\Delta^{g,a}v - 2\sum_{i,j=1} \frac{\partial u}{\partial x_i} H_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}. \tag{4.33}$$

Maintenant, nous nous intéressons aux *valeurs propres* de ce laplacien et aux *fonctions propres* (appelées aussi *potentiels*) associées i.e. on cherche des nombres complexes $\nu \in \mathbb{C}$ et des fonctions non nulles $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ vérifiant

$$\Delta^a_{g,J} f = \nu\, f.$$

Le résultat fondamental concernant les valeurs propres du laplacien pondéré complexe $\Delta^a_{g,J}$ est le lemme 28 de [45]. En particulier, il montre que, en renormalisant l'équation (4.22) pour avoir $\lambda = 1$, la première valeur propre est 2. Pour le compléter, nous avons alors les deux résultats nouveaux suivants qui nous donnent des fonctions propres associées à cette première valeur propre. De plus, il généralise aussi la proposition 2.4 de [35] qui traite le cas des métriques de Kähler-Einstein sur les variétés toriques :

Lemme 4.3.1 *Soit une variété torique kählérienne compacte de Fano $(M^{2n}, J, g_0, \omega_0, \mathbb{T}^n, \mu)$. Alors le couple (g,a) est un soliton de Kähler-Ricci si et seulement si modulo une constante additive on a*

$$\forall b \in \mathfrak{t}, \quad 2\lambda\langle \mu, b\rangle = \Delta^{g,a}\langle \mu, b\rangle,$$

où λ est la constante de Kähler-Einstein dans l'équation des solitons (4.22).

Démonstration. La preuve suit la démarche de la proposition 2.4 de [35] en rajoutant les termes nécessaires dans le cas solitonique.

Soit (g,a) un soliton de Kähler-Ricci. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Ric}(\omega) - \lambda\omega = \mathcal{L}_X\omega,$$

où ω est la forme de Kähler de g et

$$X = JX_a + \sqrt{-1}X_a.$$

Commençons par remarquer que nous avons, pour tout $b \in \mathfrak{t}$,

$$\begin{aligned} d\left[\Delta^g \langle \mu, b\rangle\right] &= d\left[\Delta^g\left(\sum_{i=1}^n b_i x_i\right)\right] \\ &= -d\left[\sum_{i,j=1} b_j H_{ij,i}\right] && \text{(par la formule (4.17))} \\ &= -\sum_{i,j,k=1}^n b_j H_{ij,ik} dx_k \\ &= -2\, i_{X_b} \operatorname{Ric}(\omega). \end{aligned}$$

De plus, nous avons aussi (voir la formule (4.25)) :

$$\mathcal{L}_X \omega = -\sum_{i,j,k=1}^n a_i H_{ij,k} dx_k \wedge dt_j, \tag{4.34}$$

d'où

$$\begin{aligned} i_{X_b}\left(\mathcal{L}_X \omega\right) &= \sum_{i,j,k=1}^n a_i H_{ij,k} b_j dx_k \\ &= d\left[\sum_{i,j=1}^n a_i H_{ij} b_j\right] \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n a_i H_{ij,k} b_j dx_k \\ &= d\left[d\langle \mu, b\rangle \left(\nabla_g \langle \mu, a\rangle\right)\right] && \text{(par la formule (4.14)).} \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons grâce à l'équation des solitons (4.22)

$$\begin{aligned} d\Delta^{g,a}\langle \mu, b\rangle &= i_{X_b}\left(-2\operatorname{Ric}(\omega) + 2\mathcal{L}_X \omega\right) \\ &= -2\lambda\, i_{X_b}\omega \\ &= 2\lambda d\left[\langle \mu, b\rangle\right] && \text{(grâce à la formule (4.2)).} \end{aligned}$$

On conclut alors en utilisant le fait que la variété M est compacte connexe donc il existe bien une constante $c_b \in \mathbb{C}$ telle que

$$\Delta^{g,a}\langle \mu, b\rangle = 2\lambda\left[\langle \mu, b\rangle + c_b\right],$$

ainsi nous obtenons bien

$$\Delta^{g,a}\left(\langle \mu, b\rangle + c_b\right) = 2\lambda\left[\langle \mu, b\rangle + c_b\right].$$

Réciproquement, supposons que

$$\forall b \in \mathfrak{t},\ \ \exists c_b \in \mathbb{C},\ \ 2\lambda\left(\langle \mu, b\rangle + c_b\right) = \Delta^{g,a}\left(\langle \mu, b\rangle + c_b\right).$$

Ainsi on a, en utilisant la formule (4.32), pour tout $i = 1, \cdots, n$, où $b(i)$ a toutes ses coordonnées nulles sauf la i-ème,

$$2\lambda\left(x_i + c_{b_i}\right) = -\sum_{j=1}^n H_{ij,j} + 2\sum_{j=1}^n a_j H_{ji}. \tag{4.35}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(\omega) &= -\frac{1}{2}\sum_{i,k,l=1}^{n} H_{il,ik}\, dx_k \wedge dt_l \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i,k,l=1} \frac{\partial H_{il,i}}{\partial x_k} dx_k \wedge dt_l \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,l=1} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[2\lambda\,(x_l + c_{b(l)} - 2\sum_{i=1}^{n} a_i H_{il}\right] dx_k \wedge dt_l \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dt_k - \sum_{l,k,i=1}^{n} a_i H_{il,k}\, dx_k \wedge dt_l \\
&= \lambda\omega + \mathcal{L}_X \omega,
\end{aligned}$$

où on a posé $X = JX_a + \sqrt{-1}X_a$ (voir l'équation (4.25)). □

On peut étendre au cas complexe grâce au corollaire suivant :

Corollaire 4.3.2 *Pour tout $b \in \mathfrak{t}$, la fonction $\langle \mu, b\rangle$ (modulo une constante) est encore une fonction propre pour la valeur propre 2λ pour le laplacien complexe $\Delta^a_{g,J}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $B^a_{g,J}\langle \mu, b\rangle = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{t}$ par l'équation (4.31) car la fonction $\langle \mu, b\rangle$ ne dépend pas des coordonnées $t_1, \cdots, t_n$. □

Quitte à modifier l'application moment et donc à translater le polytope moment, on peut supposer que la constante est nulle. Le corollaire suivant nous dit que le polytope correspondant à la constante nulle est $-P_{alg}$.

Corollaire 4.3.3 *Soient $(M, g, \omega, J, \mathbb{T}^n, \mu)$ une variété torique kählérienne de Fano telle que $\mathrm{im}(\mu) = -P_{alg}$ et $a \in \mathfrak{t}$ tels que (g, a) soit un soliton de Kähler-Ricci. Alors pour tout $b \in \mathfrak{t}$, la fonction $\langle \mu, b\rangle$ est une fonction propre pour le laplacien pondéré $\Delta^a_{g,J}$.*

Démonstration. Pour tout $b \in \mathfrak{t}$, on sait, par le lemme 4.3.1 qu'il existe une constante c_b telle que

$$\Delta^a_{g,J}\langle \mu, b\rangle = 2\lambda\,\langle \mu, b\rangle + 2\lambda\, c_b.$$

On intègre alors par rapport à $e^{\theta_X}\omega_g^n$ où $X = JX_a + \sqrt{-1}\,X_a$ et on obtient en faisant une intégration par parties que

$$0 = \int_M \Delta^a_{g,J}\langle \mu, b\rangle\, e^{\theta_X}\omega_g^n = 2\,\lambda \int_M \langle \mu, b\rangle\, e^{\theta_X}\omega_g^n + 2\lambda\, c_b \int_M e^{\theta_X}\omega_g^n.$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\int_M \langle \mu, b\rangle\, e^{\theta_X}\omega_g^n = 0.$$

Puisque que $\theta_X = -2\langle \mu, a\rangle + \widetilde{c}_a$ (voir l'équation (4.24) où $\widetilde{c}_a$ est une constante, il suffit de montrer que

$$\int_M \langle \mu, b\rangle\, e^{-2\langle \mu, a\rangle}\omega_g^n = 0.$$

Rappelons que d'après l'équation (4.20), le polytope de Delzant $P = P_{symp} = \mu(M)$ est

$$P = \bigcap_{\rho\in\Delta(1)} \{y \in \mathbb{R}^n, \langle y, b_\rho\rangle \geq -1\},$$

et qu'en particulier le centre privilégié de P est l'origine et que de plus si f est le potentiel kahlérien de $\omega = 2\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial} f$ alors

$$\mu = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_n}\right).$$

Ainsi nous devons montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{b} b_k \frac{\partial f}{\partial u_k} \exp\left(-2\sum_{l=1}^{n} a_l \frac{\partial f}{\partial u_l}\right) \det(f_{ij})\, du = 0$$

Et en faisant le changement de variable $x_i = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}$, nous devons finalement montrer que

$$\int_P \sum_{k=1}^{b} b_k\, x_k \exp\left(-2\sum_{l=1}^{n} a_l x_l\right) dx = 0.$$

Cette dernière intégrale est bien nulle car elle correspond à l'annulation de l'invariant de Futaki (voir l'équation (4.27)) en remarquant que le centre privilégié de $\mathrm{im}(\mu) = -P_{alg}$ est l'origine par définition de P_{alg}. $\square$

4.3.2 Théorème de décomposition pour la première valeur propre

Pour commencer, introduisons une notation pour simplifier les expressions par la suite. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$, si on pose e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que toutes ses coordonnées soient nulles sauf la i-ième qui est égale à 1 alors on note $X_{e_i} \cdot f := \mathcal{L}_{X_{e_i}} f$ la dérivée de Lie de f dans la direction du champ de vecteur fondamental X_{e_i}. En particulier $X_{e_i} \cdot f$ est une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$. On peut alors itérer la dérivée de Lie. On définit alors par récurrence $X_{e_i}^0 \cdot f = f$ et $X_{e_i}^n \cdot f = X_{e_i} \cdot \left(X_{e_i}^{n-1} \cdot f\right)$ pour tout $n \geq 1$.

Lemme 4.3.4 *Soient $(M, J, g_0, \omega_0, \mathbb{T}^n, \mu)$ une variété kählérienne compacte de Fano torique et (g, a) un soliton de Kähler-Ricci. Pour toute fonction propre $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ du laplacien pondéré $\Delta^{g,a}$ pour la valeur ν et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la fonction $X_{e_1}^{\alpha_1} \cdot X_{e_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot X_{e_n}^{\alpha_n} \cdot f$ est aussi une fonction propre pour la valeur propre ν. Le résultat est encore vrai pour le laplacien pondéré complexe $\Delta_{g,J}^a$.*

Démonstration. Commençons par remarquer qu'en coordonnées actions-angles, nous avons

$$X_{e_1}^{\alpha_1} \cdot X_{e_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot X_{e_n}^{\alpha_n} \cdot f|_{M^0} = \frac{\partial^{|\alpha|} f|_{M^0}}{\partial t^\alpha}.$$

Maintenant, on remarque aussi par l'équation (4.28) que

$$\begin{aligned}
\nu \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^{|\alpha|}(\nu f)}{\partial t^\alpha} \\
&= \frac{\partial^{|\alpha|}(\Delta^{g,a} f)}{\partial t^\alpha} \\
&= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^\alpha}\left[-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(H_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,j=1}^{n} G_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_i H_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right].
\end{aligned}$$

Or les fonctions H_{ij} et G_{ij} ne dépendent que des variables d'action x_i et les a_i sont constants donc on peut commuter la dérivée d'angle avec les autres dérivées dans l'expression et obtenir

$$\begin{aligned}
\nu \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha} &= \left[-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(H_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha}\right)\right) - \sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}\left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha}\right) - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_i H_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha}\right)\right] \\
&= \Delta^{g,a}\left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Pour étendre cette égalité à toute la variété, la fonction $X_{e_1}^{\alpha_1} \cdot X_{e_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot X_{e_n}^{\alpha_n} \cdot f$ est une fonction globalement définie sur M et donc l'égalité précédente se lit

$$\nu\, X_{e_1}^{\alpha_1} \cdot X_{e_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot X_{e_n}^{\alpha_n} \cdot f|_{M^0} = \Delta^{g,a}\left(X_{e_1}^{\alpha_1} \cdot X_{e_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot X_{e_n}^{\alpha_n} \cdot f\right)|_{M^0}.$$

L'égalité s'étend alors par densité à toute la variété M. Ce qui permet de conclure.

Dans le cas complexe, il suffit de remarquer par l'équation (4.29) que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{|\alpha|}\left(B^a_{g,J} f\right)}{\partial t^\alpha} &= \sum_{i=1}^n 2\,a_j \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial t_j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^n 2\,a_j \frac{\partial \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha}}{\partial t_j}\\ &= B^a_{g,J}\left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha}\right).\end{aligned}$$

□

L'expression des fonctions propres est alors donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.3.5 *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ une fonction propre du laplacien complexe pondéré $\Delta^a_{g,J}$ pour la valeur propre 2λ. Alors on peut trouver des couples $(\alpha_k, m_k) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{N}^n$ pour $1 \leq k \leq d$ et des fonctions $f_{k,l} \in \mathcal{C}^\infty(P^0,\mathbb{C})$ pour $1 \leq l \leq m_k$ où P^0 est l'intérieur de P tels que, en coordonnées actions-angles,*

$$f|_{M^0} = \sum_{k=1}^d \sum_{l \leq m_k} f_{k,l}\, t^l\, e^{\langle \alpha_k, t\rangle}. \tag{4.36}$$

Démonstration. Soit f une fonction propre associé à la valeur propre 2λ. On sait que l'espace propre associé à 2λ est de dimension finie (voir le théorème 3.5.3 où la normalisation $\lambda = 1$ a été utilisée). On a donc qu'il existe pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, un entier $p_{f,i} > 0$ et des nombres complexes $c_{k,i} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\frac{\partial^{p_{f,i}} f}{\partial t_i^{p_{f,i}}} = \sum_{k=0}^{p_{f,i}-1} c_{k,i} \frac{\partial^k f}{\partial t_i^k}.$$

On peut alors résoudre cette équation en passant sous forme matricielle. En effet, en fixant i et en ne considérant que la dérivation par rapport à t_i on pose :

$$X = \begin{pmatrix} f & f^{(1)} & \cdots & f^{(p_{f,i}-1)} \end{pmatrix},$$

et on doit donc résoudre :

$${}^tX' = A_i\, {}^tX,$$

où A_i est la transposée de la matrice compagnon :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{0,i}\\ 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1,i}\\ 0 & 1 & \ddots & 0 & c_{2,i}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{p_{f,i}-1,i}\end{pmatrix}.$$

Cela implique que

$${}^tX = \exp(t_i A_i)\, {}^tX_0,$$

où X_0 est un vecteur appartenant à $(\mathcal{C}^\infty(M^0))^{p_{f,i}}$ et ne dépendant pas de la variable t_i. Maintenant en remarquant que les coefficients de la matrice $\exp(t_i A)$ sont des combinaisons linéaires des $T_{i,k,l}$ qui sont définies par

$$T_{k,i,l} := t_i^l \cdot \exp(\alpha_{i,k}\, t_i),$$

où les $\alpha_{i,k}$ sont les d_i valeurs valeurs propres de A_i de multiplicité $m_{i,k}$ et où $l \in \{0, \cdots, m_{i,k}-1\}$, on obtient donc que

$$f|_{M^0} = \sum_{k=1}^{d_i} \sum_{l=0}^{m_{i,k}} f_{k,i,l} \cdot T_{i,k,l}$$

où les $f_{k,i,l}$ ne dépendant pas de t_i. On conclut alors par récurrence en remarquant que les $T_{i,k,l}$ forment une famille libre. □

4.3.3 Le sous-espace $\eta_0^{\mathbb{R}}$

A partir de maintenant et pour le reste du chapitre, on fixe une variété torique kählérienne compacte de Fano $(M, J, g_0, \mathbb{T}^n, \mu)$ et on note (X, g) l'unique soliton de Kähler-Ricci dont on note $a \in \mathfrak{t}$ l'élément tel que $X = JX_a + \sqrt{-1}\, X_a$. De plus, on suppose que la constante d'Einstein est normalisée pour avoir $\lambda = 1$.

On veut étudier l'isomorphisme χ donné par le théorème 3.5.3. Rappelons que le tore compact $\mathbb{T}^n$ s'étend en un tore complexe $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ qui s'injecte dans le groupe $\mathrm{Aut}^0(M)$, on note $\iota : \mathbb{T}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Aut}^0(M)$ cette injection. Ainsi, si $\mathfrak{t}$ est l'algèbre de Lie de $\mathbb{T}$ et $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie de $\mathbb{T}_C$, nous obtenons que $\eta_0^{\mathbb{R}}(M) = d\iota(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ est une sous-algèbre de Lie de $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ et qu'elle est aussi égale à la complexification de $d\iota(\mathfrak{t})$ i.e. $\eta_0^{\mathbb{R}}(M) = d\iota(\mathfrak{t}) \oplus J\, d\iota(\mathfrak{t})$. En particulier, on a que $\eta_0^{\mathbb{R}}(M)$ est isomorphe à $\mathfrak{t} \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{t}$.

Nous avons alors le lemme suivant qui caractérise la restriction de χ^{-1} à $\eta_0^{\mathbb{R}}(M)$.

Lemme 4.3.6 *L'application χ^{-1} restreinte à $\eta_0^{\mathbb{R}}(M)$ est donnée via l'isomorphisme ι par*

$$\chi^{-1}|_{\eta_0^{\mathbb{R}}} : \left| \begin{array}{rcl} \eta_0^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathrm{Aff}_0^{\mathbb{C}}(P) \\ d\iota(b_1) + J\, d\iota(b_2) & \longmapsto & -\langle \mu, b_2\rangle + \sqrt{-1}\langle \mu, b_1\rangle \end{array} \right. ,$$

où $\mathrm{Aff}_0^{\mathbb{C}}(P)$ est l'ensemble des fonctions lisses définies sur M s'écrivant sur M^0 et en coordonnées actions-angles sous la forme $\langle \mu, b_1\rangle + \sqrt{-1}\langle \mu, b_2\rangle$ pour $(b_1, b_2) \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$.

Démonstration. Commençons par remarquer que $\mathrm{Aff}_0^{\mathbb{C}}(P)$ est bien inclus dans $\ker(\Delta^a_{g,J} - 2\mathbb{I})$ grâce au corollaire 4.3.2. Grâce à l'action du tore, $b_1 \in \mathfrak{t}$ induit un champ de vecteurs X_{b_1} qui se trouve être égal à $\nabla_\omega \langle \mu, b_1\rangle$ (voir formule (4.15)). Puisque $g = \omega(\cdot, J\cdot)$, ce dernier est égal à $J\,\nabla_g \langle \mu, b_1\rangle$. Ainsi si $b_2 \in \mathfrak{t}$ alors $\sqrt{-1}\, b_2$ induit le champ de vecteurs $-\nabla_g \langle \mu, b_2\rangle$. Ceci permet de conclure en utilisant l'isomorphisme χ donné par le théorème 3.5.3. □

Pour le reste de l'espace $\eta^{\mathbb{R}}(M)$, il est préférable de travailler avec les champs de vecteurs holomorphes complexes, nous allons donc transporter la décomposition solitonique dans cet espace et l'étudier ensuite.

4.3.4 La décomposition solitonique complexe

Commençons par remarquer que nous pouvons traduire l'isomorphisme pour les champs de vecteurs holomorphes. En effet, l'algèbre de Lie $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ est isomorphe à $\eta(M)$ via l'application $X \mapsto X^{1,0}$. Nous obtenons donc l'isomorphisme

$$\widetilde{\chi} : \left| \begin{array}{rcl} \overline{\ker(\Delta^a_{g,J} - 2\mathbb{I})} & \longrightarrow & \eta(M) \\ v & \longmapsto & (\nabla_{g,J} v)^{1,0}. \end{array} \right.$$

De plus, d'après le théorème 4.1.18, nous avons

$$\eta(M) = \eta_0(M) \oplus \bigoplus_{\alpha \in R(P_{alg})} \mathbb{C}\, V_\alpha.$$

Or, l'espace $\eta_0(M)$, qui est isomorphe à $\eta_0^{\mathbb{R}}(M)$ via $X \mapsto X^{1,0}$ étant déjà compris, grâce au lemme 4.3.6, on est donc ramené à rechercher une fonction $v_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{rl} (\nabla_{g,J} v_\alpha)^{1,0} & = V_\alpha \\ (\Delta^a_{g,J} \overline{v_\alpha} - 2\, \overline{v_\alpha}) & = 0. \end{array} \right. \tag{4.37}$$

Résolution locale du système (4.37)

Maintenant, on considère les coordonnées logarithmiques sur $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ i.e. $t_i = \exp(z_i)$ où $z_i = u_i + \sqrt{-1} v_i$. Dans ce système, nous obtenons, par l'équation (4.21), que

$$V_\alpha|_{\mathbb{T}_{\mathbb{C}}} = \exp\left(\langle -\alpha, z\rangle\right) \sum_{k=1}^n (b_{\rho_\alpha})_k \frac{\partial}{\partial z_k},$$

où la notation $\langle \alpha, z\rangle$ désigne, avec $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$,

$$\langle \alpha, z\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(u_i + \sqrt{-1} v_i\right).$$

On cherche donc une fonction $v_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ solution du système d'équations (4.37). Commençons par remarquer que nous avons

$$\omega((\nabla_{g,J}v_\alpha)^{1,0},\cdot) = \sqrt{-1}\,\overline{\partial} v_\alpha,$$

et donc nous devons avoir

$$\omega(V_\alpha,\cdot) = \sqrt{-1}\,\overline{\partial} v_\alpha.$$

Si on se place dans le système de coordonnées actions-angles, nous obtenons donc que

$$\forall j = 1,\cdots,n,\ \ \frac{\partial v_\alpha}{\partial \overline{z}_j} = 2\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\left(\exp\left(\langle -\alpha, z\rangle\right)\,(b_{\rho_\alpha})_i\right),$$

où on rappelle que f est le potentiel kählérien de ω (voir l'équation (4.6)). En particulier, cela nous dit que

$$\begin{aligned}
v_\alpha|_{M^0} &= 2\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i}\,(b_{\rho_\alpha})_i\,\exp\left[\langle -\alpha, z\rangle\right] + v_\alpha^0 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i}\,(b_{\rho_\alpha})_i\,\exp\left[\langle -\alpha, z\rangle\right] + v_\alpha^0 && \text{(puisque le potentiel kählérien est } \mathbb{T}^n\text{-invariant)} \\
&= \langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\,\exp\left(\langle -\alpha, \nabla\phi + \sqrt{-1}t\rangle\right) + v_\alpha^0 && \text{(par l'équation (4.19))}
\end{aligned}$$

où ϕ est le potentiel symplectique (voir le théorème 4.1.9) de g et v_α^0 est une fonction holomorphe sur M^0.

Il reste à déterminer v_α^0. Pour cela, on utilise la seconde équation de (4.37). On pose alors

$$v'_\alpha = \langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\, e^{\langle -\alpha, \nabla\phi + \sqrt{-1}t\rangle}$$

et on calcule

$$\Delta^a_{g,J}\overline{v'_\alpha} - 2\overline{v'_\alpha}.$$

Remarquons que nous avons, grâce à l'équation (4.33) et au corollaire 4.3.3,

$$\begin{aligned}
\Delta^a_{g,J}\overline{v'_\alpha} &= \Delta^a_{g,J}\left(\langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\,\exp\langle -\alpha, \nabla\phi - \sqrt{-1}t\rangle\right) \\
&= \Delta^a_{g,J}\left(\langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\,\exp\langle -\alpha, \nabla\phi\rangle\right)\exp\langle \alpha, \sqrt{-1}t\rangle + \left(\langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\,\exp\langle -\alpha, \nabla\phi\rangle\right)\Delta^a_{g,J}\left(\exp\langle \alpha, \sqrt{-1}\,t\rangle\right) \\
&= \Delta^a_{g,J}\left(\langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\right)\,\exp\langle -\alpha, \nabla\phi\rangle)\exp\langle \alpha, \sqrt{-1}t\rangle + \left(\langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\right)\,\Delta^a_{g,J}\left(\exp\langle -\alpha, \nabla\phi\rangle\right)\exp\langle \alpha, \sqrt{-1}t\rangle \\
&\quad + \left(\langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\,\exp\langle -\alpha, \nabla\phi\rangle\right)\Delta^a_{g,J}\left(\exp\langle \alpha, \sqrt{-1}\,t\rangle\right) \\
&= 2\,\left(\langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\right)\,\exp\langle -\alpha, \nabla\phi\rangle)\exp\langle \alpha, \sqrt{-1}t\rangle + \left(\langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\right)\,\Delta^a_{g,J}\left(\exp\langle -\alpha, \nabla\phi\rangle\right)\exp\langle \alpha, \sqrt{-1}t\rangle \\
&\quad + \left(\langle \mu, b_{\rho_\alpha}\rangle\,\exp\langle -\alpha, \nabla\phi\rangle\right)\Delta^a_{g,J}\left(\exp\langle \alpha, \sqrt{-1}\,t\rangle\right).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

De plus, nous avons, par l'équation (4.32) et puisque $\langle \alpha + \sqrt{-1}t\rangle$ ne dépend pas de $x_1,\cdots,x_n$,

$$\Delta^a_{g,J}\left(\exp\langle \alpha, \sqrt{-1}\,t\rangle\right) = \left({}^t\alpha G\alpha + 2\langle \alpha, a\rangle\right)\exp\langle \alpha, \sqrt{-1}t\rangle. \tag{4.39}$$

En utilisant à nouveau l'équation (4.32) et en se souvenant que la matrice de G est la matrice hessienne de ϕ,

$$\Delta^a_{g,J}\left(\exp\langle -\alpha, \nabla\phi\rangle\right) = -\left({}^t\alpha G\alpha + 2\langle \alpha, a\rangle\right)\,\exp\langle -\alpha, \nabla\phi\rangle. \tag{4.40}$$

Nous avons donc finalement, à l'équation (4.38), que

$$\Delta^a_{g,J}\overline{v'_\alpha} = 2\overline{v'_\alpha} + 2\langle \alpha, b_{\rho_\alpha}\rangle\exp\langle -\alpha, \nabla\phi - \sqrt{-1}t\rangle. \tag{4.41}$$

Or $\langle \alpha, b_{\rho_\alpha}\rangle = 1$ (puisque α est une racine de Demazure, voir la définition 4.1.17) donc nous avons finalement :

$$\Delta^a_{g,J}\overline{v'_\alpha} - 2\overline{v'_\alpha} = 2\exp\langle -\alpha, \nabla\phi - \sqrt{-1}t\rangle.$$

Remarquons alors que, grâce aux équations (4.39) et (4.40),

$$\Delta^a_{g,J}\left(\exp\langle -\alpha, \nabla\phi - \sqrt{-1}t\rangle\right) = 0.$$

Donc finalement

$$\Delta^a_{g,J}\left(\overline{v'_\alpha}+\exp\langle-\alpha,\nabla\phi-\sqrt{-1}t\rangle\right)=2\left(\overline{v'_\alpha}+\exp\langle-\alpha,\nabla\phi-\sqrt{-1}t\rangle\right).$$

Nous posons alors la fonction suivante :

$$v_\alpha:=(\langle\mu,b_{\rho_\alpha}\rangle+1)\,\exp\langle-\alpha,\nabla\phi+\sqrt{-1}t\rangle\in\mathcal{C}^\infty(M^0,\mathbb{C}).$$

On l'appellera *la fonction de racine* α.

Théorème 4.3.7 *La fonction de racine α est une solution locale i.e. sur M^0 au système d'équations* (4.37).

Démonstration. La seconde équation de (4.37) est vraie d'après ce qui précède, il s'agit donc de regarder si le terme additif

$$v^0_\alpha=\exp\langle-\alpha,\nabla\phi+\sqrt{-1}t\rangle$$

n'interfère pas dans la résolution de la première équation. Or en coordonnées logarithmiques ce terme s'écrit

$$v^0_\alpha=\exp\langle-\alpha,z\rangle.$$

Cette fonction est clairement holomorphe sur M^0. Ceci permet de conclure. □

Résolution globale du système (4.37)

On veut maintenant trouver une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ qui vérifie le système d'équations (4.37). On va donc montrer le résultat suivant.

Théorème 4.3.8 *La fonction $v_\alpha\in\mathcal{C}^\infty(M^0,\mathbb{C})$ s'étend en une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$.*

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons montrer que v_α est une fonction continue sur la variété M. On sait que la fonction v_α a pour expression

$$v_\alpha=(\langle\mu,b_{\rho_\alpha}\rangle+1)\,\exp\langle-\alpha,\nabla\phi+\sqrt{-1}t\rangle.$$

Or la théorie des potentiels symplectiques (voir le théorème 4.1.9), nous dit que ϕ peut s'écrire

$$\phi=\phi_0+h,$$

où ϕ_0 est le potentiel de Guillemin (voir l'équation (4.10)) et $h\in\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant P. Ainsi, on peut écrire

$$v_\alpha=(\langle\mu,b_{\rho_\alpha}\rangle+1)\,\exp\langle-\alpha,\nabla\phi_0\rangle\cdot\exp\langle-\alpha,\nabla h+\sqrt{-1}t\rangle.$$

Remarquons tout de suite que $\exp\langle-\alpha,\nabla h+\sqrt{-1}t\rangle$ s'étend en une fonction continue sur $P\times\mathbb{T}^n$. Pour le terme restant, en utilisant l'expression du potentiel de Guillemin (voir l'équation (4.10)), on obtient que

$$(\langle\mu,b_{\rho_\alpha}\rangle+1)\,\exp\langle-\alpha,\nabla\phi_0\rangle=e^{-\frac{1}{2}\langle\alpha,\sum_{\rho\in\Delta(1)}b_\rho\rangle}\,(\langle\mu,b_{\rho_\alpha}\rangle+1)\prod_{\rho\in\Delta(1)}(\langle\mu,b_\rho\rangle+1)^{-\frac{1}{2}\langle\alpha,b_\rho\rangle}.$$

Par les propriétés des racines de Demazure (voir la définition 4.1.17), nous avons

$$\langle\alpha,b_{\rho_\alpha}\rangle=1,\ \ \langle\alpha,b_\rho\rangle\leq0\ \ \forall\rho\neq\rho_\alpha.$$

Ceci permet d'étendre (par la même formule) de manière continue la fonction $(\langle\mu,b_{\rho_\alpha}\rangle+1)\,\exp\langle-\alpha,\nabla\phi_0\rangle$ au bord du polytope. Nous avons donc montré que v_α définit une fonction continue sur $P\times\mathbb{T}^n$. De plus, nous avons

$$\forall t\in\mathbb{T}^n,\ \ \forall F\in\mathcal{F}(P),\ \ \forall x\in F,\ \ \forall\rho\in I_F,\ \ v_\alpha(x,b_\rho+t)=v_\alpha(x,t).$$

En effet, il y a deux cas à traiter :

- Supposons que $\langle\alpha,b_\rho\rangle=0$ alors par définition la fonction v_α vérifie la propriété demandée.
- Il reste à traiter le cas où $\langle\alpha,b_\rho\rangle\neq0$. Dans ce cas, la fonction v_α est nulle sur la face correspondante donc la propriété est vérifiée.

Ainsi, nous obtenons que v_α induit (par la même expression) une fonction continue sur $F \times \mathbb{T}^n/\mathbb{T}_F$ et donc nous obtenons que v_α définit une fonction continue sur l'espace $\bigsqcup_{F\in\mathcal{F}(P)} F \times \mathbb{T}^n/\mathbb{T}_F$.

Pour conclure, on sait (voir par exemple la section 2.1 de [34]) que l'espace topologique sous-jacent à la variété M peut se décrire comme

$$M \simeq \left(\bigsqcup_{F\in\mathcal{F}(P)} F \times \mathbb{T}^n/\mathbb{T}_F \right) \; / \; \sim$$

où $(x,t) \in F \times \mathbb{T}^n/\mathbb{T}_F \sim (x',t') \in F' \times \mathbb{T}^n/\mathbb{T}_{F'}$ si et seulement si $x = x'$ et $t = t' \mod \mathbb{T}_{F\cap F'}$. Il faut et suffit donc de montrer que si $(x,t) \in F \times \mathbb{T}^n/\mathbb{T}_F \sim (x',t') \in F' \times \mathbb{T}^n/\mathbb{T}_{F'}$ alors $v_\alpha(x,t) = v_\alpha(x,t')$. Ce qui est le cas par définition de la fonction v_α.

Maintenant, on va montrer que la fonction v_α est lisse. Pour cela, on remarque qu'elle définit une fonction lisse sur M^0 qui vérifie

$$(\nabla_{g,J} v_\alpha)^{1,0} = V_\alpha \text{ sur } M^0.$$

Or on sait (par la théorie de Hodge) qu'il existe une fonction $\theta_{V_\alpha} \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ telle que

$$(\nabla_{g,J} \theta_{V_\alpha})^{1,0} = V_\alpha \text{ sur } M,$$

et donc par restriction sur M^0. Cela signifie que sur M^0, nous avons

$$\overline{\partial}\,[\theta_{V_\alpha} - v_\alpha] = 0.$$

Cela signifie qu'il existe une fonction holomorphe θ^0_α définie sur M^0 tel que

$$\theta_{V_\alpha} - v_\alpha = \theta^0_\alpha.$$

Le membre de gauche étant borné puisque continu sur la variété compacte M, nous obtenons que θ^0_α est une constante et donc par densité nous obtenons que $\theta_{V_\alpha} = v_\alpha$ modulo une constante additive sur M et donc v_α est aussi lisse. □

Nous pouvons résumer ce que nous venons de démontrer dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.9 *Soit $(M,\omega_0,J,\mathbb{T}^n,\mu)$ une variété torique kählérienne compacte de Fano telle que $P := \mathrm{im}(\mu)$ soit le polytope algébrique associé dont on note $R(P)$ l'ensemble de ses racines de Demazure. Supposons que (g,a) soit un soliton de Kähler-Ricci tel que sa constante de Kähler-Einstein soit égale à 1 sur la variété complexe (M,J).*

- *Nous avons la décomposition suivante :*

$$\overline{\ker\left(\Delta^a_{g,J} - 2\mathbb{I}\right)} = \mathrm{Aff}^{\mathbb{C}}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in R(P)} \mathbb{C}\,\widetilde{v_\alpha},$$

  où $\mathrm{Aff}^{\mathbb{C}}_0$ est l'ensemble des fonctions lisses sur M s'écrivant sous la forme $\langle x, b_1\rangle + \sqrt{-1}\langle x, b_2\rangle$ où $(b_1,b_2) \in \mathfrak{t}\times\mathfrak{t}$ et $\widetilde{v_\alpha}$ est la fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ telle qu'en coordonnées action-angles (x,t)

$$\widetilde{v_\alpha}|_{M^0} = (\langle x, b_{\rho_\alpha}\rangle + 1)\, e^{-\langle \alpha, \nabla\phi - \sqrt{-1}\,t\rangle},$$

  où ϕ est le potentiel symplectique associé à g.

- *De plus, si on note V_{γ_i} les espaces propres de la décomposition solitonique et χ l'isomorphisme entre $\overline{\ker\left(\Delta^a_{g,J} - 2\mathbb{I}\right)}$ et $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ du théorème 3.5.3, alors nous avons*

$$\chi^{-1}(V_0) = \mathrm{Aff}^{\mathbb{C}}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in R(P),\langle\alpha,a\rangle=0} \mathbb{C}\,\widetilde{v_\alpha}$$

  et pour tout $i \geq 1$,

$$\chi^{-1}(V_{\gamma_i}) = \bigoplus_{\alpha\in R(P),\,2\langle\alpha,a\rangle=\gamma_i} \mathbb{C}\,\widetilde{v_\alpha}.$$

- *En particulier, les fonctions $\widetilde{v_\alpha}$ sont des fonctions propres de l'opérateur $\Delta^a_{g,-J} - 2\mathbb{I}$ pour la valeur propre $4\langle\alpha,a\rangle$.*

Démonstration. Le premier point est une conséquence de la discussion qui précède. Le second point est une conséquence de l'isomorphisme χ énoncé dans le théorème 3.5.3 et du fait que les $\overline{\widetilde{v_\alpha}}$ sont bien des solutions au système d'équations (4.37). Le troisième point est alors un calcul direct. □

4.4 Exemples de décompositions solitoniques dans le cas torique

4.4.1 L'espace projectif

L'exemple le plus simple est de considérer l'espace projectif. Pour encore plus de simplicité, on va se limiter à $\mathbb{CP}^2$ avec sa structure complexe standard, sa métrique de Fubini-Study et l'action de $\mathbb{T}^n$ donnée par $(t_1, t_2) \cdot [z_0, z_1, z_2] = [z_0, t_1\, z_1, t_2\, z_2]$. Le polytope de Delzant est alors donné (voir [1]) par

$$P = \bigcap_{i=1}^{3} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \langle x, b_i \rangle + 1 \geq 0 \right\}$$

où $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique (e_1, e_2) et de son produit scalaire usuel permettant de l'identifier avec son dual, et

$$b_1 := e_1 \ \ , b_2 := e_2, \ \ b_3 := -e_1 - e_2.$$

De plus, on sait que la métrique de Fubini-Study de $\mathbb{CP}^2$ est une métrique de Kähler-Einstein dont le potentiel symplectique est le potentiel de Guillemin ϕ_0 donné par

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} l_r \ln l_r,$$

où on a posé $l_r := \langle x, b_r \rangle + 1$. On pourra consulter [35] ou [1]. Nous obtenons alors que

$$\nabla \phi_0 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} (1 + \ln l_r)\, b_r = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1 + 1}{1 - x_1 - x_2}\, e_1 + \frac{1}{2} \ln \frac{x_2 + 1}{1 - x_1 - x_2}\, e_2.$$

On veut maintenant déterminer la décomposition solitonique. Il faut donc déterminer les racines de Demazure :

1. On cherche $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ tel que
$$\begin{cases} \langle \alpha, e_1 \rangle & = 1 \\ \langle \alpha, e_2 \rangle & \leq 0 \\ \langle \alpha, -e_1 - e_2 \rangle & \leq 0 \end{cases}$$
On obtient deux racines :
$$\alpha_{1,1} := e_1, \ \ \alpha_{1,2} := e_1 - e_2.$$
2. De même on obtient :
$$\alpha_{2,1} := e_2, \ \ \alpha_{2,2} := -e_1 + e_2.$$
3. On doit terminer en résolvant :
$$\begin{cases} \langle \alpha, e_1 \rangle & \leq 0 \\ \langle \alpha, e_2 \rangle & \leq 0 \\ \langle \alpha, -e_1 - e_2 \rangle & = 1 \end{cases}$$
On obtient aussi deux racines :
$$\alpha_{3,1} := -e_1, \ \ \alpha_{3,2} := -e_2.$$
Cela nous donne donc la liste de fonctions propres suivantes :
$$\begin{aligned}
v_{\alpha_{1,1}} &:= (x_1 + 1)^{1/2} (1 - x_1 - x_2)^{1/2} \ e^{-\sqrt{-1} t_1}, \\
v_{\alpha_{1,2}} &:= (x_1 + 1)^{1/2} (x_2 + 1)^{1/2} \ e^{-\sqrt{-1}(t_1 - t_2)}, \\
v_{\alpha_{2,1}} &:= (x_2 + 1)^{1/2} (1 - x_1 - x_2)^{1/2} \ e^{-\sqrt{-1} t_2}, \\
v_{\alpha_{2,2}} &:= (x_2 + 1)^{1/2} (x_1 + 1)^{1/2} \ e^{-\sqrt{-1}(t_2 - t_1)}, \\
v_{\alpha_{3,1}} &:= (x_1 + 1)^{1/2} (1 - x_1 - x_2)^{1/2} \ e^{\sqrt{-1} t_1}, \\
v_{\alpha_{3,2}} &:= (x_2 + 1)^{1/2} (1 - x_1 - x_2)^{1/2} \ e^{\sqrt{-1} t_2}.
\end{aligned}$$

Remarquons que puisqu'il s'agit d'une métrique de Kähler-Einstein, ces fonctions propres correspondent aux fonctions propres du laplacien usuel comme calculées par exemple dans le chapitre 3 section C de [6] mais exprimées dans le système de coordonnées actions-angles.

4.4.2 $\mathbb{CP}^2$ éclaté en un point

On considère le cas où la variété complexe M est $\mathbb{CP}^2$ éclaté en un point, que nous noterons par la suite M_1. On sait (voir chapitre 1 de [27]) que le polytope P associé à cette variété torique est le trapèze $\widetilde{\tau}$ donné par :

$$\widetilde{\tau} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall i = 1, \cdots, 4 \ \langle x, \nu_i \rangle \geq -1 \right\},$$

où

$$\nu_1 := e_2, \ \ \nu_2 := -e_1, \ \ \nu_3 := e_1, \ \ \nu_4 := e_1 - e_2.$$

On peut déjà calculer les racines de Demazure de ce trapèze :

$$\alpha_{1,1} := e_2, \ \ \alpha_{2,1} := -e_1, \ \ \alpha_{2,2} := -e_1 - e_2, \ \ \alpha_{4,1} := -e_2.$$

De plus, on devra considérer le trapèze τ qui se trouve être le trapèze translaté du trapèze $\widetilde{\tau}$ par le vecteur $(2, 1)$. On montre alors que $\sigma : (x, y) \in [1, 3] \times [0, 1] \mapsto (x, xy) \in \widetilde{\tau}$ est un difféomorphisme. Cela entraîne que M_1 est une *variété torique de Calabi*. Avant de définir cette notion, nous avons besoin de la définition d'un *trapèze de Calabi*.

Définition 4.4.1 *Un trapèze de Calabi est un polytope de $\mathbb{R}^2$ qui est égal à l'image d'un rectangle $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2] \subset \mathbb{R}^2$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\beta_1 \geq 0$ par l'application $\sigma : (x, y) \mapsto (x, xy)$.*

On fixe maintenant un trapèze de Calabi donné par l'image d'un rectangle $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$. On peut alors écrire les normales à chaque arête sous la forme

$$u_{\alpha_1} = C_{\alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ C_{\alpha_1} > 0$$

$$u_{\alpha_2} = C_{\alpha_2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ C_{\alpha_2} < 0$$

$$u_{\alpha_1} = C_{\beta_1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \ C_{\beta_1} < 0$$

$$u_{\beta_2} = C_{\beta_2} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \ C_{\beta_2} > 0.$$

Ainsi le couple formé du trapèze de Calabi et ses vecteurs normaux (appelé trapèze de Calabi étiqueté dans l'article [35]) est entièrement déterminé par 8 paramètres :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2}).$$

Si on prend le trapèze de Calabi dont les paramètres sont $(1, 3, 0, 1, 1, -\frac{1}{3}, -1, 1)$, alors on retrouve le polytope $\widetilde{\tau}$ associé à M_1. On notera μ l'application moment telle que $\operatorname{im} \mu = \tau$ et $\widetilde{\mu}$ l'application moment telle que $\operatorname{im} \widetilde{\mu} = \widetilde{\tau}$. En particulier, on a $\widetilde{\mu} = \mu - (2, 1)$.

Terminons en rappelant le résultat fondamental qui nous servira par la suite à chercher les solitons de Kähler-Ricci.

Définition 4.4.2 *Soit $(M, \omega, J, \mathbb{T}^2, \mu)$ une variété torique kählérienne compacte connexe de dimension réelle 4. On dit que M est torique de Calabi s'il existe deux fonctions $\mathbb{T}^2$-invariantes x et $y \in \mathcal{C}^\infty(M)$ strictement positives telles que l'application moment μ soit donnée par $\mu = (x, xy)$. On appelle alors (x, y) les coordonnées de Calabi.*

On remarque que le polytope associé à M est alors un trapèze de Calabi. Nous avons la proposition 4.9 de [35].

Proposition 4.4.3 *Soit $(M, \omega, J, \mathbb{T}^2, \mu)$ une variété torique de Calabi ayant pour polytope le trapèze de Calabi donné par les paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, C_{\beta_1}, C_{\beta_2})$ et ayant pour coordonnées de Calabi (x, y). Remarquons que $\operatorname{Im} x = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\operatorname{Im} y = [\beta_1, \beta_2]$. On pose (t, s) les deux cordonnées d'angles correspondantes sur M^0. Alors nous avons qu'il existe deux fonctions $A \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $B \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telles que*

- *les fonctions A et B ne dépendent respectivement que de la variable x et y et sont strictement positives sur M^0,*

- *la métrique g, dite métrique de Calabi, a une expression particulière sur M^0 :*

$$g|_{M^0} = \frac{x}{A(x)}dx^2 + \frac{x}{B(y)}dy^2 + \frac{A(x)}{x}(dt+yds)^2 + xB(y)ds^2, \tag{4.42}$$

- *on a les conditions au bord suivantes pour $i=1,2$:*

$$A(\alpha_i)=0, \;\; B(\beta_i)=0, \tag{4.43}$$

et

$$A'(\alpha_i) = \frac{2}{C_{\alpha_i}}, \;\; B'(\beta_i) = \frac{2}{C_{\beta_i}}. \tag{4.44}$$

□

De plus, on montre alors que

$$Scal_g = \frac{A''(x)+B''(y)}{x}$$

et

$$\overline{Scal} := \frac{4}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\left(\frac{1}{C_{\alpha_1}} - \frac{1}{C_{\alpha_2}}\right) - \frac{1}{\beta_2-\beta_1}\left(\frac{1}{C_{\beta_1}} - \frac{1}{C_{\beta_2}}\right)\right).$$

La recherche de solitons de Kähler-Ricci à l'aide du théorème précédent est faite dans l'article [36] où il est montré le résultat suivant (lemme 3.8).

Lemme 4.4.4 *Supposons que g est une métrique torique de Calabi pour $A \in \mathcal{C}^\infty([\alpha_1,\alpha_2])$ et $B \in \mathcal{C}^\infty([\beta_1,\beta_2])$. Pour tout $a \in \mathfrak{t}$, en écrivant $\langle \mu, a\rangle = a_1 x + a_2 xy$, le couple (g,a) est un soliton de Kähler-Ricci si*

$$-A''(x) - 2a_1 A'(x) - x\,\overline{Scal} = m, \;\; B''(y) = m, \tag{4.45}$$

où $m = \frac{1}{\beta_2-\beta_1}\left(\frac{2}{C_{\beta_1}} - \frac{2}{C_{\beta_2}}\right)$. En particulier, on a que $a_2 = 0$.

Remarque. Nos conventions sont différentes d'où la différence de signes dans l'équation (4.45).

Revenons à $\mathbb{CP}^2$ éclaté en 1 point. On sait qu'il n'admet pas de métriques de Kähler-Einstein (voir [55]) donc on doit chercher à résoudre l'équation (4.45) avec $a_1 \neq 0$. Rappelons que les paramètres de Calabi sont donnés par

$$(1,3,0,1,1,-\frac{1}{3},-1,1).$$

Un calcul direct nous donne que

$$m = -4, \tag{4.46}$$

et

$$\overline{Scal} = -4. \tag{4.47}$$

On peut alors résoudre l'équation (4.45) et on obtient :

$$A(x) = \frac{-1}{{a_1}^3}\left[\left({a_1}^2 - \frac{1}{2}\right)\exp(-2a_1(x-1)) + {a_1}^2 x^2 - (2{a_1}^2 + a_1)\,x + \left(a_1 + \frac{1}{2}\right)\right], \tag{4.48}$$

et la fonction B a pour expression

$$B(y) = -2\,(y-1)\,y = -2y^2 + 2y. \tag{4.49}$$

On peut aussi calculer a_1 grâce à l'invariant de Futaki et on obtient que a_1 est la solution non nulle de

$$\left(a_1^2 - \frac{1}{2}\right)\exp(-4a_1) + 3\,a_1^2 - 2\,a_1 + \frac{1}{2} = 0. \tag{4.50}$$

On peut alors calculer la matrice H associée au potentiel symplectique du soliton. Pour cela, on rappelle que nous avons (voir le lemme 3.8 de [36])

$$H(x,y) = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} A(x) & y\,A(x) \\ y\,A(x) & x^2B(y) + y^2\,A(x), \end{pmatrix}$$

Cette fonction H peut aussi s'écrire sous la forme

$$H(\mu_1,\mu_2) = \frac{1}{\mu_1}\begin{pmatrix} A(\mu_1) & \dfrac{\mu_2}{\mu_1}A(\mu_1) \\ \dfrac{\mu_2}{\mu_1}A(\mu_1) & \mu_1^2B(\mu_1,\mu_2) + \left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 A(\mu_1), \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

On calcule alors la matrice G inverse de la matrice H :

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{A(x)} + \dfrac{y^2}{xB(y)} & -\dfrac{y}{xB(y)} \\ -\dfrac{y}{xB(y)} & \dfrac{1}{xB(y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu_1}{A(\mu_1)} + \dfrac{\mu_2^2}{\mu_1^3B(\mu_1,\mu_2)} & -\dfrac{\mu_2}{\mu_1^2B(\mu_1,\mu_2)} \\ -\dfrac{\mu_2}{\mu_1^2B(\mu_1,\mu_2)} & \dfrac{1}{\mu_1B(\mu_1,\mu_2)} \end{pmatrix},$$

où

$$A(\mu_1) = \frac{-1}{a^3}\left[\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)\exp(-2a\,(\mu_1 - 1)) + a^2\,\mu_1^2 - (2a^2 + a)\,\mu_1 + \left(a + \frac{1}{2}\right)\right]$$

et

$$B(\mu_1,\mu_2) = -2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right).$$

On peut alors se ramener au polytope algébrique en utilisant l'expression

$$\mu = \widetilde{\mu} + (2,1).$$

Notons ϕ le potentiel symplectique associé à la métrique de Calabi telle que la matrice G ci-dessus soit la matrice hessienne de ϕ. Nous obtenons que les fonctions propres sont données par

$$v_{\alpha_{1,1}} := (\widetilde{\mu}_2 + 1)\cdot e^{(\nabla\phi)_2 + \sqrt{-1}\,t_2},$$

$$v_{\alpha_{2,1}} := (-\widetilde{\mu}_1 + 1)\cdot e^{(\nabla\phi)_1 - \sqrt{-1}\,t_1},$$

$$v_{\alpha_{2,2}} := (-\widetilde{\mu}_1 - \widetilde{\mu}_2 + 1)\cdot e^{(\nabla\phi)_1 + (\nabla\phi)_2 - \sqrt{-1}\,(t_1+t_2)},$$

$$v_{\alpha_{4,1}} := (-\widetilde{\mu}_2 + 1)\cdot e^{(\nabla\phi)_2 - \sqrt{-1}\,t_2}.$$

Chapitre 5

Existences de solitons de Kähler-Ricci dans les variétés horosphériques

5.1 Les variétés horosphériques

Dans cette section, nous faisons quelques rappels sur la théorie des groupes algébriques et sur les variétés horosphériques. Une bonne référence pour la théorie des groupes est [54]. Pour la notion de variété horosphérique, on renvoie à [47, 62].

5.1.1 Groupe réductif

Soit G un *groupe algébrique linéaire connexe complexe* i.e. G est un sous-groupe algébrique connexe de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$. On définit *le sous-groupe dérivé* $\mathcal{D}(G)$ du groupe G comme le sous-groupe engendré par les commutateurs de G i.e. les éléments de la forme $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$ pour g et h des éléments de G. On peut alors définir la *suite dérivée* $(D^n(G))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \geq 1,\ \ \mathcal{D}^0(G) = G,\ \ \mathcal{D}^n(G) = \mathcal{D}\left(\mathcal{D}^{n-1}(G)\right).$$

On dit alors que G est *résoluble* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $\mathcal{D}^n(G) = \{e\}$. De plus, on définit *le radical* $\mathcal{R}(G)$ du groupe G comme le sous-groupe distingué connexe résoluble de G maximal pour ces propriétés et pour l'inclusion.

Maintenant, un groupe algébrique linéaire complexe connexe G est dit *unipotent* s'il est isomorphe à un sous-groupe fermé de UT_n où UT_n est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On définit *le radical unipotent* $\mathcal{R}_u(G)$ du groupe G comme le sous-groupe distingué connexe unipotent de G maximal pour ces propriétés et pour l'inclusion.

Définition 5.1.1 *On dit qu'un groupe algébrique linéaire complexe connexe G est réductif si $\mathcal{R}_u(G) = \{e\}$ et que G est semi-simple si $R(G) = \{e\}$.*

Puisque $\mathcal{R}_u(G) \subset \mathcal{R}(G)$ alors nous avons directement que si G est semi-simple alors G est réductif. De plus, nous avons la définition équivalente suivante :

Proposition 5.1.2 ([51]) *Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Alors G est réductif si et seulement si G est isomorphe à la complexification de K.*

Ainsi, si on note K un sous-groupe compact maximal de G tel que G soit la complexification de K, alors si nous notons l'algèbre de Lie de K par $\mathfrak{k}$, nous obtenons

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus J\mathfrak{k},$$

où J est la structure complexe de $\mathfrak{g}$.

Terminons avec cette proposition qui nous donne la décomposition de l'algèbre de Lie des groupes réductifs.

Proposition 5.1.3 ([54]) *Soit G un groupe réductif. Alors $\mathcal{R}(G)$ est la composante connexe de l'identité du centre $Z(G)$ du groupe G et $\mathcal{R}(G)$ se trouve être alors un tore. De plus, $\mathcal{D}(G)$ est un sous-groupe semi-simple de G et G est le quotient de $\mathcal{D}(G) \times \mathcal{R}(G)$ par un sous-groupe central fini. Et nous avons alors*

$$\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Maintenant, on considère un tore maximal T de G. On note $\Phi \subset \mathfrak{X}(T)$ *le système de racines* de (G, T) où $\mathfrak{X}(T)$ est *le groupe des caractères algébriques de T* i.e. des morphismes de groupes algébriques $T \longrightarrow \mathbb{C}^*$. On rappelle que nous avons *la décomposition en racines* :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

où $\mathfrak{t}$ est l'algèbre de Lie de T et pour tout $\alpha \in \mathfrak{X}(T)$, $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \ : \ \forall h \in \mathfrak{t} \ \ \mathrm{ad}(h)(x) = \alpha(h)x, \}$ de sorte que $\mathfrak{g}_\alpha$ soit une droite complexe si et seulement si $\alpha \in \Phi$. Pour la suite, on rappelle ici que l'on définit *le groupe de Weyl* de G par rapport à T par

$$W = W(G, T) := N_G(T)/T,$$

où $N_G(T)$ est le normalisateur de T dans G i.e. $N_G(T) := \{g \in G \ / \ gTg^{-1} = T\}$.

5.1.2 Sous-groupe de Borel et paraboliques

On garde les notations introduites dans la section précédente. Puisque Φ contient à la fois α et $-\alpha$, nous voulons définir la notion de racines positives (et négatives). Pour cela, nous utilisons la notion de sous-groupe de Borel. Rappelons qu'un *sous-groupe de Borel B* est un sous-groupe fermé connexe résoluble maximal pour ces propriétés et pour l'inclusion et qu'il est unique à conjugaison près. Maintenant, si nous prenons un sous-groupe de Borel B de G contenant T alors nous pouvons définir $\Phi^+ := \Phi^+(B)$ l'ensemble des racines positives définies par B par

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha,$$

On définit alors les racines négatives $\Phi^- := \Phi^-(B)$ de Φ associé à B par

$$\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-,$$

et on a donc

$$\Phi^- = -\Phi^+ \text{ i.e. } \alpha \in \Phi^+ \Longleftrightarrow -\alpha \in \Phi^-.$$

De plus, il existe un unique sous-groupe de Borel B^- de G appelé le *sous-groupe Borel opposé à B par rapport à T* vérifiant $B \cap B^- = T$. Nous avons donc

$$\Phi^+(B^-) = \Phi^-(B).$$

Remarquons aussi que nous avons la décomposition suivante pour les algèbres de Lie de B et B^- :

$$\mathfrak{b}^- = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Terminons en remarquant que si on note U le sous-groupe unipotent maximal de B alors son algèbre de Lie est

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Maintenant on introduit la notion de sous-groupe parabolique. Pour cela, on commence par définir *l'ensemble Σ des racines simples* comme l'ensemble des racines de Φ^+ qui ne peuvent pas s'écrire comme somme de deux autres éléments de Φ^+. Les sous-groupes paraboliques sont alors paramétrés par les sous-ensembles I de Σ. Si on se donne un tel sous-ensemble I et si on note Φ_I le sous-ensemble de Φ engendré par les racines contenus dans I alors *le sous-groupe parabolique contenant B* associé I sera noté $P := P_I$ et est défini comme le sous-groupe fermé connexe de G dont l'algèbre de Lie est

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \cup \Phi_I} \mathfrak{g}_\alpha.$$

On pose alors
$$\Phi_P := \Phi^+ \cup \Phi_I.$$
On peut définir *le sous-groupe parabolique opposé à* P, que l'on notera $Q := Q_I$, comme le sous-groupe parabolique associé à I pour le sous-groupe de Borel B^- i.e. le sous-groupe connexe fermé d'algèbre de Lie
$$\mathfrak{q} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^- \cup \Phi_I} \mathfrak{g}_\alpha.$$
Rappelons qu'un sous-groupe fermé L de P est dit *sous-groupe de Levi* si la multiplication $L \times R_U(P) \to$ est un isomorphisme de variétés. Dans notre cas, on montre que $L = P \cap Q$ est un sous-groupe de Levi de P qui se trouve être le sous-groupe de Lie connexe fermé dont l'algèbre de Lie est
$$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_I} \mathfrak{g}_\alpha.$$
Maintenant, on définit l'ensemble Φ_P^+ comme l'ensemble des racines de G qui ne sont pas dans $\Phi_Q = \Phi^- \cup \Phi_I$ i.e. on a
$$\Phi_P^+ \sqcup \Phi_Q = \Phi.$$
De manière équivalente, cela revient à définir Φ_P^+ comme l'ensemble des racines de P qui ne sont pas dans $\Phi_L = \Phi_I$ i.e.
$$\Phi_P^+ \sqcup \Phi_L = \Phi_P.$$
En particulier, on voit que Φ_P^+ est l'ensemble des racines du radical unipotent U de P, que nous avons donc
$$\Phi = \Phi_P^+ \sqcup \Phi_L \sqcup \Phi_Q^+,$$
et que
$$\Phi_Q^+ = -\Phi_P^+.$$
Terminons en définissant
$$2\rho_P = \sum_{\alpha \in \Phi_P^+} \alpha.$$

5.1.3 Sous-groupes horosphériques et espaces homogènes horosphériquse

Sous-groupe horosphérique

On garde encore les notations précédentes. Nous pouvons alors passer à la définition d'un sous-groupe horosphérique :

Définition 5.1.4 *Soit H un sous-groupe algébrique fermé d'un groupe algébrique linéaire complexe connexe réductif G. On dit que H est un sous-groupe horosphérique de G si H contient le radical unipotent U d'un sous-groupe de Borel B.*

La proposition suivante permet de construire des sous-groupes horosphériques à l'aide de sous-groupes paraboliques. Pour cela, on rappelle que $N_G(H) := \{g \in G \ / \ gHg^{-1} = H\}$ est appelé le normalisateur de H dans G.

Proposition 5.1.5 ([46]) *Supposons que H est un sous-groupe horosphérique de G. Si on pose $P := N_G(H)$ alors P est un sous-groupe parabolique de G contenant le sous-groupe de Borel B, et le quotient $P/H = T/T \cap H$ est un tore. Réciproquement, si H est un sous-groupe algébrique fermé connexe de G tel que $N_G(H)$ est un sous-groupe parabolique P de G et P/H est un tore, alors H est horosphérique. Nous avons alors que la fibration*
$$G/H \longrightarrow G/P.$$
de fibre P/H est une fibration en tore au dessus d'une variété de drapeaux généralisés.

Nous obtenons alors la décomposition suivante de l'algèbre de Lie de H :
$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_P} \mathfrak{g}_\alpha, \text{ où } \mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}.$$

Espace homogène horosphérique

Maintenant, on remarque si H est horosphérique alors G/H est un espace homogène, ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 5.1.6 *Supposons que H est un sous-groupe horosphérique de G, alors on dit que G/H est un espace homogène horosphérique.*

Étudions un peu cet espace homogène G/H. Le normalisateur $P := N_G(H)$ agit sur G/H par multiplication à droite par l'inverse. De plus, H est inclus dans P et agit de manière triviale. On peut alors définir une action de $G \times P/H$ sur G/H de la manière suivante :

$$(g, pH) \cdot xH = gxp^{-1}H.$$

De plus, on remarque que le groupe d'isotropie de eH est donné par $\{(p, pH) \in G \times P/H \ : \ p \in P\}$. On appelle ce groupe $diag(P)$ qui se trouve être isomorphe à P par la première projection.

5.1.4 Groupes des caractères et sous-groupes à un paramètre

Comme à l'accoutumée, on garde les notations introduites dans les sections précédentes. On pose

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{t} \cap J\mathfrak{k}.$$

Nous avons une identification entre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{N}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ où $\mathfrak{N}(T)$ est le groupe des sous-groupes à un paramètres de T i.e. $\lambda \in \mathfrak{N}(T)$ si et seulement si $\lambda : \mathbb{C}^\times \longrightarrow T$ est un morphisme de groupes algébriques. L'identification est alors donnée par la dérivée au point 1 de la restriction de λ à $\mathbb{R}^+_*$. Cela permet d'obtenir

$$\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{N}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

De plus, comme $T \cap H$ définit un sous-tore de T alors $\mathfrak{N}(T \cap H)$ définit un sous-réseau de $\mathfrak{N}(T)$ correspondant aux sous-groupes à un paramètre qui sont triviaux sur $T \cap H$. Nous obtenons donc l'existence d'un sous-espace vectoriel réel $\mathfrak{a}_0$ de $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{N}(T \cap H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et tel que

$$\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{a}_0 \oplus J\mathfrak{a}_0.$$

Rappelons que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est l'algèbre de Lie du groupe $\mathcal{D}(G)$ qui est semi-simple et donc la forme de Killing κ de $\mathfrak{g}$ définit un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ sur $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. De plus κ est nulle sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Ainsi on peut définir un produit scalaire global $\mathfrak{a}$ en prenant un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl W sur $\mathfrak{a} \cap Z(\mathfrak{g})$ et en supposant $\mathfrak{a} \cap Z(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sont orthogonaux pour $(\cdot, \cdot)$. On définit alors $\mathfrak{a}_1$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_0$ pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et nous avons

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus J\mathfrak{a}_0 \oplus J\mathfrak{a}_1,$$

et

$$\mathfrak{p}/\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{a}_1 \oplus J\mathfrak{a}_1.$$

Enfin, nous rappelons qu'il existe un accouplement naturel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre $\mathfrak{N}(T)$ et $\mathfrak{X}(T)$ défini par $\chi \circ \lambda(z) = z^{\langle \lambda, \chi \rangle}$. De plus, l'accouplement naturel entre $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $\mathfrak{N}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ obtenu par extension $\mathbb{R}$-linéaire peut être vu comme $\langle \chi, a \rangle = \ln \chi(\exp a)$ pour tout $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ et $a \in \mathfrak{a} \simeq \mathfrak{N}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Puisque $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire, pour $\chi \in \mathfrak{X}(T)$, nous définissons t_χ comme l'élément unique de $\mathfrak{a}$ tel que

$$\forall a \in \mathfrak{a}, \ \ (\chi, a) = \langle \chi, a \rangle. \tag{5.1}$$

On peut grâce à cette dernière égalité définir pour tout $\alpha \in \Phi$, le générateur e_α de la droite complexe $\mathfrak{g}_\alpha$ tel que $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = t_\alpha$ où t_α est donc l'unique élément de $\mathfrak{a}$ tel que pour tout $a \in \mathfrak{a}, \ (t_\alpha, a) = \langle \alpha, a \rangle$. Terminons cette section par la décomposition polaire.

Proposition 5.1.7 ([16]) *L'image de $\mathfrak{a}_1$ dans G par l'application exponentielle est un domaine fondamental pour l'action de $K \times H$ sur G où K agit par multiplication à gauche et H par multiplication par l'inverse à droite. Par conséquent, on obtient que $\{\exp(a)H \ / \ a \in \mathfrak{a}_1\} \subset G/H$ est un domaine fondamental pour l'action de K sur G/H.*

5.1.5 Variété horosphérique

Plongement horosphérique

Commençons par rappeler la définition d'un *plongement homogène* et d'une *variété homogène*.
Rappelons qu'une G-variété algébrique complexe est un schéma réduit de type fini sur $\mathbb{C}$ muni d'une action algébrique de G.

Définition 5.1.8 *Une G-variété algébrique complexe normale X sera dit G-sphérique si elle admet une B-orbite ouverte et dense.*

Notons que X est alors connexe.
On s'intéresse alors à une sous-classe des variétés sphériques, celle des variétés horosphériques.

Définition 5.1.9 *Une G-variété sphérique X sera dite horosphérique si le stabilisateur H dans G d'un point x de la B-orbite ouverte et dense de G est horosphérique.*

On dira alors que (X, x) est *un plongement horosphérique*. En particulier, X admettra G/H comme ouvert dense. De plus, on dira alors que deux plongements horosphériques (X, x) et (X', x') sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme G-équivariant de X sur X' envoyant x sur x'.
Dans notre cas, nous allons supposer que X est lisse. Grâce aux théorèmes GAGA (voir [52]), la variété X est donc une variété (analytique) complexe projective de Fano et en particulier X est une variété kählérienne de Fano compacte connexe pour la métrique induite par la métrique de Fubini-Study de l'espace projectif.

Polytope associé à un plongement horosphérique

On fixe un espace homogène horosphérique G/H i.e. G est un groupe algébrique linéaire complexe connexe réductif et H un sous-groupe horosphérique de G. Rappelons, voir par exemple le chapitre 38 de [57], que puisque l'ensemble Φ des racines de G définit un système de racines, il existe un unique élément $\alpha^\vee \in \mathfrak{X}(T)^* \simeq \mathfrak{N}(T)$ tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$. Avec nos notations précédentes, on a que $\alpha^\vee = \frac{2}{\|t_\alpha\|^2}\, t_\alpha$. De plus, on définit alors $a_\alpha \in \mathbb{Z}$ par $a_\alpha = \langle 2\rho_P, \alpha^\vee \rangle$ et *la chambre de Weyl dominante fermée* $\mathfrak{C}$ par

$$\mathfrak{C} = \{\chi \in \Lambda := \mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \;/\; \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \;\; \forall \alpha \in \Phi^+\}.$$

et *la chambre de Weyl dominante ouverte* comme l'intérieur de la chambre de Weyl dominante fermée. De plus, on définit le semi-groupe des poids dominants par $\Lambda^+ := \mathfrak{X}(T) \cap \mathfrak{C}$.
On a la définition suivante introduite dans [46].

Définition 5.1.10 *Soit G/H un espace homogène horosphérique. Un polytope convexe Q de $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{N}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est dit G/H-réflexif s'il vérifie les trois conditions suivantes :*

(1) Q est à sommets dans $\mathfrak{N}(T) \cup \left\{ \frac{\alpha^\vee}{a_\alpha} \;:\; \alpha \in \Phi_P^+ \right\}$ et contient 0 dans son intérieur,

(2) le polytope dual Q^* associé au polytope Q est à sommets dans $\mathfrak{X}(T)$,

(3) pour tout $\alpha \in \Phi_P^+$, nous avons $\dfrac{\alpha^\vee}{a_\alpha} \in Q$.

Avec cette définition, on a alors la proposition suivante. Avant de l'énoncer, nous avons besoin de la définition du polytope moment. On peut définir *le polytope moment* $\Delta^+ \subset \mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ associé au sous-groupe de Borel B de la variété horosphérique X comme le *polytope moment de Kirwan* de la variété kahlérienne (X, ω) pour l'action d'un sous-groupe compact maximal K de G, où ω est une forme kählérienne K-invariante dans $2\pi\, c_1(X)$ (voir [10, 31] pour plus de détails). Une autre manière passe par la théorie des représentations. Soit L un fibré en droites G-linéarisé ample d'une G-variété sphérique X. On fixe un sous-groupe de Borel B de G et T un tore maximal de B. Notons V_λ une représentation irréductible de G de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ par rapport au sous-groupe de Borel B. Comme X est sphérique, pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble fini $\Delta_r \subset \mathfrak{X}(T)$ tel que $H^0(X, L^r) = \oplus_{\lambda \in \Delta_r} V_\lambda$. Le polytope moment Δ^+ par rapport à B est l'adhérence de $\cup_{r \in \mathbb{N}} \frac{\Delta_r}{r}$ dans $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On pourra consulter [10, 11] pour plus de détails. On a alors la proposition suivante.

Proposition 5.1.11 ([46]) *Soit G/H un espace homogène horosphérique. Il existe une bijection entre l'ensemble des plongements horosphériques de Fano de G/H à isomorphisme près et l'ensemble des polytopes G/H-réflexifs de $\mathfrak{a}$. De plus, on a alors que le polytope $2\rho_P + Q^*$ est le polytope moment de X associé au sous-groupe de Borel B. La condition (3) est alors équivalente au fait que $\Delta^+ = 2\rho_P + Q^*$ est inclus dans $\mathfrak{C}$. En particulier, on voit que $0 \in \mathrm{Int}(Q)$ et que donc $-2\rho_P \in \mathrm{Int}(\Delta^+)$.*

Automorphismes G-équivariants d'une variété horosphérique

On fixe un plongement horosphérique (X, x) de G/H et on note $P := N_G(H)$. La classification des variétés horosphériques montre que nous avons un isomorphisme entre les automorphismes G-équivariants de X et ceux de G/H :

$$\mathrm{Aut}_G(X) \simeq \mathrm{Aut}_G(G/H).$$

Cet isomorphisme est simplement donné par l'application de restriction à l'orbite ouverte. On pourra consulter [32] qui traite le problème dans le cadre plus général des variétés sphériques. De plus, nous avons aussi

$$\mathrm{Aut}_G(G/H) \simeq P/H,$$

où P/H agit sur G par multiplication à droite par l'inverse. On pourra consulter [62] et en particulier la proposition 1.8. On résume cette section par la proposition suivante.

Proposition 5.1.12 *Soit (X, x) un plongement horosphérique de l'espace homogène horosphérique G/H. Notons $P := N_G(H)$. Nous avons alors*

$$\mathrm{Aut}_G(X) \simeq P/H.$$

5.1.6 Fibré en droites $(G \times P/H)$-linéarisé au dessus d'une variété homogène G/H

Dans cette section, on fixe un groupe algébrique linéaire complexe connexe réductif G et H un sous-groupe horosphérique G et on pose $P = N_G(H)$. Commençons par rappeler la définition d'un fibré linéarisé dans notre situation.

Définition 5.1.13 *Soit $\Pi : L \to G/H$ un fibré en droites au dessus de G/H. On dit que L est $(G \times P/H)$-linéarisé s'il existe une action $\Theta : (G \times P/H) \times L \to L$ notée $(x, y) \mapsto \Theta_x(y)$ telle que*
- *$\Pi : L \to M$ est un morphisme G-équivariant,*
- *pour tous les $g \in G$ et $p \in P$, l'application induite par l'action de $\Theta_{(e,pH)}$ entre les fibres L_{gH} et $L_{gxp^{-1}H}$ est linéaire.*

Remarquons qu'à tout fibré en droites $(G \times P/H)$-linéarisé, on peut associer un caractère de P. En effet, pour tout $p \in P$, l'action de $(p, pH) \in diag(P)$ est triviale sur la classe triviale dans G/H. Ainsi, $\Theta_{(p,pH)}$ induit un isomorphisme linéaire (d'inverse $\Theta_{(p^{-1},p^{-1}H)}$) entre L_{eH} et L_{eH} et donc une représentation linéaire de dimension 1 de $diag(P) \simeq P$ i.e. il existe un caractère $\chi \in \mathfrak{X}(P)$ tel que

$$(p, ph) \cdot \xi = \chi(p)\xi, \ \ \forall \xi \in L_{eH}.$$

Considérons la projection $\pi : G \longrightarrow G/H$. On peut alors définir le fibré tiré-en-arrière π^*L au dessus de G, qui est un fibré en droites. De plus, comme π est G-équivariant, le fibré π^*L admet une G-linérisation. En particulier, on peut alors définir une section globale s sur π^*L. Pour cela, on choisit un élément $s(e) \in (\pi^*L)_e$ et on pose :

$$s : g \in G \mapsto g \cdot s(e) \in (\pi^*L)_g. \tag{5.2}$$

Maintenant considérons l'inclusion $\iota : P/H \longrightarrow G/H$. On peut définir le fibré restriction ι^*L défini au dessus de P/H qui est un fibré en droites. De plus, comme ι est équivariant pour l'action de $P \times P/H$, nous obtenons que ι^*L est un fibré $(P \times P/H)$-linéarisé. On peut alors aussi définir deux sections globales :

$$s_r : pH \in P/H \mapsto (p, eH) \cdot s'(e), \tag{5.3}$$

$$s_l : pH \in P/H \mapsto (e, p^{-1}H)s'(e), \tag{5.4}$$

où l'élément $s'(e)$ appartenant à $(\iota^*L)_e$ est tel que $s'(e)$ et $s(e)$ s'envoient sur le même élément de L_{eH} par les applications canoniques $\pi^*L \to L$ et $\iota^*L \to L$. On remarque que ces sections sont reliées par la formule :

$$s_r(pH) = \chi(p)s_l(pH).$$

Terminons cette section, en résumant ce que nous venons de définir avec un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\pi^*L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] & \iota^*L \arrow[l] \arrow[d] \\
G \arrow[r, "\pi"'] \arrow[u, bend left, "s"] & G/H & P/H \arrow[l, "\iota"] \arrow[u, bend left, "s_l"] \arrow[u, bend right, "s_r"']
\end{tikzcd}$$

Métriques hermitiennes sur les fibrés $(P \times P/H)$-linéarisés au dessus de G/H

Rappelons qu'une *métrique hermitienne* q sur une fibré vectoriel complexe L au dessus d'une variété complexe X est la donnée pour tout $x \in X$ d'une métrique hermitienne q_x sur la fibre L_x de L telle que l'application $x \mapsto q_x$ est lisse. Prenons maintenant une trivialisation s de L au-dessus d'un ouvert U de X. Si L est un fibré en droites, cela revient à dire que pour tout $x \in U$ le vecteur $s(x)$ est une base de L_x et donc définir q_x se résume à se donner un réel strictement positif a_x qui sera égal à la norme au carré de $s(x)$ par rapport à la forme hermitienne q_x i.e. $a_x = |s(x)|_q^2$. On définit alors *le potentiel local de q (par rapport à la trivialisation s)* par $\varphi : x \in U \mapsto -\ln a_x \in \mathbb{R}$. Notons que la métrique h est entièrement déterminée par tous ses potentiels locaux et que q est lisse si et seulement si tous ses potentiels locaux sont lisses.

Finissons en rappelant que l'on peut associer, à toute métrique q hermitienne, une $(1,1)$-forme ω_q appelée *courbure de q*. Pour ce faire, nous définissons localement $\omega_q|_U = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi$ où φ est le potentiel local associé à une trivialisation au dessus de U. Nous vérifions que $\omega_q|_U$ ne dépend pas de la trivialisation et donc définit une $(1,1)$ - forme globale. De plus, nous pouvons montrer que $\omega_q \in 2\pi\, c_1(L)$. On dira aussi que L *est à courbure positive* s'il existe une métrique q telle que ω_q est une forme de Kähler. Il y a aussi une notion de potentiel global. Pour le définir, on définit une métrique hermitienne de référence q^0 sur L et pour toute métrique hermitienne q, on définit la fonction lisse ψ sur X, appelée *potentiel global de q par rapport à q^0* par la formule suivante :

$$\forall \xi \in L_x, \;\; |\xi|_q^2 = e^{-\psi(x)}|\xi|_{q^0}^2.$$

Par définition des $(1,1)$-formes ω_q et ω_{q^0} et en faisant un calcul dans des cartes locales, on voit que la fonction ψ satisfait la relation suivante :

$$\omega_{q^0} = \omega_q + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\,\psi.$$

On pourra consulter [17] pour plus de détails.

Soient G/H un espace homogène horosphérique, L un fibré en droites $(G \times P/H)$-linéarisé sur G/H et q une métrique K-invariante hermitienne sur L. On peut alors considérer la métrique π^*q sur le fibré π^*L et définir le potentiel local (qui est en fait défini sur tout G) ϕ par rapport à la section s de l'équation (5.2) :

$$\phi : g \in G \mapsto -2\ln|s(g)|_{\pi^*q} \in \mathbb{R}.$$

On peut aussi définir un autre potentiel $u : \mathfrak{a}_1 \to \mathbb{R}$ associé à la restriction à ι^*L :

$$u : x \in \mathfrak{a}_1 \mapsto -2\ln|s_r(\exp(x)H)|_{\iota^*q} \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Nous avons la proposition suivante qui permet de relier les deux potentiels.

Proposition 5.1.14 ([16]) *En gardant les notations précédentes, nous avons*

$$\phi(k\,\exp(x)\,h) = u(x) - 2\ln|\chi(\exp(x)h)|,$$

pour tous les $k \in K$, $x \in \mathfrak{a}_1$, $h \in H$.

Courbure

Dans cette section, nous rappelons le calcul de la courbure de fibré en droite sur G/H dans une base adaptée. La première étape consiste à définir cette base. À cet effet, nous rappelons que nous pouvons identifier l'espace tangent de G/H en eH avec $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq \oplus_{\alpha\in\Phi_P^+}\mathbb{C}e_{-\alpha} \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus J\mathfrak{a}_1$. On peut alors obtenir une base complexe de l'espace tangent $T_{eH}(G/H)$ comme concaténation d'une base $(l_i)_{1\le i\le r}$ sur $\mathfrak{a}_1$ et des $(e_{-\alpha})_{\alpha\in\Phi_P^+}$. Sur P/H, nous pouvons définir pour $\xi \in T_{eH}(G/H)$ le champ de vecteurs holomorphes réel :

$$R\xi : pH \mapsto (H, p^{-1}H)\cdot\xi. \tag{5.6}$$

Nous avons alors une base complexe de $T^{1,0}(P/H)$ donnée par les $(Rl_j - \sqrt{-1}JRl_j)/2$ pour $1 \le j \le r$ et $(Re_{-\alpha} - \sqrt{-1}JRe_{-\alpha})/2$ pour tout $\alpha \in \Phi_P^+$, et nous notons par $(\gamma_j)_{1\le j\le r}\cdot(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\Phi_P^+}$ la base duale. Avec cette base, nous pouvons calculer la courbure.

Théorème 5.1.15 ([16]) *Soit ω la $(1,1)$-forme de courbure K-invariante d'une métrique K-invariante q sur un $(G\times P/H)$-linéarisé fibré en droites L sur G/H, dont on note χ le caractère associé. La forme ω est déterminée par sa restriction à P/H, donnée pour tout $x\in\mathfrak{a}_1$ par*

$$\omega_{\exp(x)H} = \sum_{1\leq j_1,j_2\leq r} \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial l_{j_1}\partial l_{j_2}}(x)\sqrt{-1}\,\gamma_{j_1}\wedge\overline{\gamma}_{j_2} + \sum_{\alpha\in\Phi_P^+}\langle\alpha,\frac{1}{2}\nabla u(x)-t_\chi\rangle\sqrt{-1}\,\gamma_\alpha\wedge\overline{\gamma}_\alpha,$$

où $\nabla u\in\mathfrak{a}_1$ est le gradient de la fonction u sur $\mathfrak{a}$ définie par l'équation (5.5) *pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. De plus, on a, en posant $\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u)=\det(\mathrm{Hess}(u))$,*

$$\omega^n_{\exp(x)H} = \frac{\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u)(x)}{4^r 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}}\prod_{\alpha\in\Phi_P^+}\langle\alpha,\nabla u(x)+4t_\chi\rangle\,\Omega,$$

où

$$\Omega := \Big(\bigwedge_{1\leq j\leq r}\gamma_j\wedge\overline{\gamma}_j\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{\alpha\in\Phi_P^+}\gamma_\alpha\wedge\overline{\gamma}_\alpha\Big).$$

De plus, en choisissant convenablement $s(e)$ pour la formule (5.3), nous obtenons la formule

$$\omega^n_{\exp(x)H} = \frac{\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u)(x)}{4^r 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}}\prod_{\alpha\in\Phi_P^+}\langle\alpha,\nabla u(x)+4t_\chi\rangle s_r^{-1}\wedge\overline{s_r}^{-1}. \tag{5.7}$$

Pour cela, on pose

$$S := \Big(\bigwedge_{1\leq j\leq r}\gamma_i\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{\alpha\in\Phi_P^+}\gamma_\alpha\Big),$$

qui définit donc une section du fibré $\iota^*K_{G/H}$ où $K_{G/H}$ est le fibré canonique de G/H. En particulier, on a $S|_{eH}\in(\iota^*K)_{eH}$, et en utilisant les isomorphismes suivants

$$(K_{P/H})_{eH}\simeq(\iota^*K_{G/H})_{eH}\simeq(K_{G/H})_{eH}\simeq(\pi^*K_{G/H})_{eH},$$

nous posons via ces isomorphisme $s(e):=S|_{eH}$. Nous obtenons alors, par définition de Ω et s_r (formules (5.6) et (5.3)), que

$$\forall x\in\mathfrak{a}_1,\ \ s_r(\exp(x)H)=s(\exp(x)H),$$

et ceci permet de conclure. Nous utiliserons constamment par la suite ce choix de section .

Lien avec le polytope moment et conséquences

Dans cette section, on considère un plongement horosphérique, de groupe réductif G et de sous-groupe horosphérique H. On notera $P=N_G(H)$ le normalisateur de H dans G. Rappelons que P est un sous-groupe parabolique et qu'il existe un autre sous-groupe parabolique Q tel qu'il existe un sous-groupe de Levi L vérifiant $P\cap Q=L$. Dans cette partie, on considère que le sous-groupe parabolique P contient le sous-groupe de Borel opposé B^- i.e. $\Phi_P^+=\Phi^-\backslash\Phi_L=-(\Phi^+\backslash\Phi_L)$. Rappelons que nous avons introduit le polytope moment Δ^+ de X par rapport au sous-groupe B de Borel. Maintenant, nous définissons

$$\Delta := -2\rho_P-\Delta^+ \text{ où } \rho_P=\sum_{\alpha\in\Phi_P^+}\alpha \tag{5.8}$$

et *la fonction support* $v_{2\Delta}$ par

$$v_{2\Delta}:\left|\begin{array}{ccc} 2\Delta & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \sup_{p\in2\Delta}(x,p).\end{array}\right. \tag{5.9}$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes qui découlent directement de la définition :

- $\forall x\in\mathfrak{a}_1^*,\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}_*^+,\ \ v(\alpha\,x)=\alpha v(x)$
- $\forall(x,y)\in(\mathfrak{a}_1^*)^2,\ \ v(x+y)\leq v(x)+v(y)$
- $\forall x\in\mathfrak{a}_1^*,\ \ v(x)\leq d\,\|x\|$ où $d=\sup_{p\in2\Delta}\|p\|$.

De plus, si $x \in \mathfrak{a}_1^*$ est tel que $\|x\| = 1$, alors 2Δ est contenu dans le demi-espace $\{y \in \mathfrak{a}_1^* \ / \ (x, y) \leq v_{2\Delta}(x)\}$ et au moins un point de 2Δ est dans la frontière de ce demi-espace i.e. dans $\{y \in \mathfrak{a}_1^* \ / \ (x, y) = v_{2\Delta}(x)\}$.

Proposition 5.1.16 ([16]) *Soit q une métrique hermitienne à courbure positive K-invariante sur le fibré en droites K_X^{-1} et soit $u : \mathfrak{a}_1 \to \mathbb{R}$ le potentiel convexe défini par l'équation* (5.5). *Alors u est une fonction lisse et strictement convexe telle que l'application $du : x \mapsto d_x u \in \mathfrak{a}_1^*$ vérifie $\mathrm{im}(du) = 2\Delta$ et la fonction $u - v_{2\Delta}$ est bornée sur $\mathfrak{a}_1$. En particulier, le polytope $2\,\Delta$ est indépendant de la métrique q choisie.*

En utilisant la section 5.1.5, nous pouvons faire deux remarques. La première est que, puisque $-2\rho_Q = 2\rho_P$ appartient à $\mathrm{Int}(\Delta^+)$ par la proposition 5.1.11, nous avons

$$0 \in \mathrm{Int}(\Delta). \tag{5.10}$$

Rappelons maintenant que $\Delta^+ \subset \mathfrak{C}$, où $\mathfrak{C}$ est la chambre de Weyl pour le sous-groupe de Borel B (voir la proposition 5.1.11). Ainsi nous avons

$$\forall \alpha \in \Phi^+(B), \forall p \in \Delta^+, \ \ \langle p, \alpha^\vee \rangle \geq 0.$$

Cette dernière peut encore s'écrire sous la forme

$$\forall \alpha \in \Phi^+(B), \forall p \in \Delta^+, \ \ (p, \alpha) \geq 0.$$

Puisque $\Phi_P^+ \subset \Phi^+(B^-) = \Phi^-(B)$, nous avons alors

$$\forall \alpha \in \Phi_P^-, \forall p \in -\Delta^+, \ \ (p, \alpha) \geq 0.$$

Donc par compacité de Δ^+, nous obtenons qu'il existe $f > 0$ tel que

$$\forall \alpha \in \Phi_P^+, \ \ \forall p \in -\Delta^+, \ \ 0 \leq (\alpha, p) \leq f. \tag{5.11}$$

Nous terminons cette section avec la notion de *barycentre d'un polytope associé à une mesure*. On considère une mesure de probabilité ν sur le polytope Δ^+. Pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_1^*)$, on considère alors l'application

$$\int_{x \in \Delta^+} f d\nu : \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \int_{x \in \Delta^+} \langle f(x), z \rangle \, d\nu(x). \end{array} \right.$$

Il découle directement de la définition que $\int_{2\Delta} f d\nu \in \mathfrak{a}_1^*$. De plus lorsque l'on prend pour application f l'application identité, on appelle $\int_{\Delta^+} x \, d\nu$ *le barycentre* du polytope 2Δ pour la mesure $d\nu$ et on le note $Bar_{d\nu}(\Delta^+)$. De plus, si la mesure ν est juste finie (non nulle) alors on définit le barycentre pour la mesure $\frac{\nu}{V}$ où V est le volume de $\mathfrak{a}_1$ pour la mesure ν.

Pour la suite, on définit l*a mesure de Duistermaat-Heckman μ_{DH}* sur le polytope moment Δ^+ comme la mesure ayant pour densité

$$p \mapsto \prod_{\alpha \in \Phi_Q^+} (\alpha, p),$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur Δ^+. On notera alors $\mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+)$ le barycentre de Δ^+ pour la mesure de $\frac{\mu_{DH}}{V}$ où V est le volume de Δ^+ pour la mesure de Duistermaat-Heckman.

5.2 Existence de solitons de Kähler-Ricci dans le cas horosphérique

On fixe une variété kählérienne compacte de Fano M. Rappelons pour commencer que le groupe des automorphismes complexes $\mathrm{Aut}(M)$ de M est un groupe de Lie de dimension finie dont l'algèbre de Lie est l'ensemble des champs de vecteurs réels holomorphes noté $\eta^{\mathbb{R}}(M)$.

Si K est un sous-groupe compact maximal de la composante connexe de l'identité $\mathrm{Aut}^\circ(M)$ du groupe des automorphismes holomorphes $\mathrm{Aut}(M)$ de la variété M, alors nous avons

$$\mathrm{Aut}^\circ(M) = \mathrm{Aut}_r(M) \ltimes R_u,$$

où $\mathrm{Aut}_r(M)$ est un sous-groupe réductif de $\mathrm{Aut}^\circ(M)$ et la complexification de K et R_u le radical unipotent de $\mathrm{Aut}^\circ(M)$. De plus, si on note $\eta^{\mathbb{R}}(M)$, $\eta_r^{\mathbb{R}}(M)$, $\eta_u^{\mathbb{R}}(M)$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de $\mathrm{Aut}(M), \mathrm{Aut}_r(M), R_u$ et K respectivement, alors on a

$$\eta^{\mathbb{R}}(M) = \eta_r^{\mathbb{R}}(M) + \eta_u^{\mathbb{R}}(M).$$

Rappelons que nous avons noté $\eta(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes complexes et qu'il existe un isomorphisme entre $\eta(M)$ et $\eta^{\mathbb{R}}(M)$ donnée par $X \mapsto X^{1,0}$. Si on note $\eta_r(M)$ et $\eta_u(M)$ l'image de $\eta_r^{\mathbb{R}}(M)$ et $\eta_u^{\mathbb{R}}(M)$ respectivement par l'isomorphisme précédent. Nous obtenons alors une décomposition

$$\eta(M) = \eta_r(M) + \eta_u(M).$$

On suppose maintenant que (M, x) est un plongement horosphérique sous l'action du groupe réductif $\mathrm{Aut}_r(M) =: G$ et que $x \in M$ est tel que son groupe d'isotropie H dans G soit le sous-groupe horosphérique dans G contenant le radical unipotent du sous-groupe de Borel opposé B^-. On pose aussi $P := N_G(H)$ et L le sous-groupe de Levi de P. En utilisant les décompositions de la section précédentes, nous obtenons en notant $\mathfrak{g} = \eta_r^{\mathbb{R}}(M)$ l'algèbre de Lie de G que :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus J\mathfrak{a}_1 \oplus J\mathfrak{a}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_P^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_L} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_P^-} \mathfrak{g}_\alpha$$

En particulier, l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathrm{Aut}_G(M)$ des automorphismes G-équivariants de M s'identifie à l'algèbre de Lie de P/H qui correspond au facteur $\mathfrak{a}_1 \oplus J\mathfrak{a}_1$ dans la décomposition précédente. On peut remarquer que, par définition de $\mathrm{Aut}_G(M)$, cette algèbre de Lie s'identifie aussi au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

On fixe maintenant une métrique riemanienne g^0 de forme kählérienne $\omega_{g^0} \in 2\pi\, c_1(M)$ sur M. En utilisant le $\partial\overline{\partial}$-lemme, il existe une unique fonction h in $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{Ric}(\omega_{g^0}) - \omega_{g^0} = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}h, \quad \int_M e^h \omega_{g^0}^n = \int_M \omega_{g^0}^n. \tag{5.12}$$

De plus, si nous fixons une métrique hermitienne m^0 sur K_M^{-1} telle que $\omega_{m^0} = \omega_{g^0}$ alors nous pouvons définir un volume dV sur M donné dans une trivialisation locale s de K_M^{-1} par

$$dV = |s|_{m^0} s^{-1} \wedge \overline{s^{-1}} = e^{-\varphi} s^{-1} \wedge \overline{s^{-1}},$$

où φ est le potentiel local associé à la trivialisation s. Modulo une constante, nous obtenons que h est égal au logarithme du potentiel de dV par rapport à $\omega_{g^0}^n$, donc nous renormalisons pour les faire correspondre i.e. nous obtenons

$$e^h \omega_{g^0}^n = dV. \tag{5.13}$$

Pour le voir, en écrivant localement dans un ouvert de trivialisation U l'égalité (5.12), nous obtenons que

$$\partial\overline{\partial}\left(\ln\det(g_{i\bar{j}}) + h\right) = \partial\overline{\partial}\left(\ln\det(\varphi_{i\bar{j}}) + h\right) = \partial\overline{\partial}\varphi.$$

Cette dernière équation peut finalement s'écrire globalement sous la forme

$$\partial\overline{\partial}\left(\ln e^h \frac{\omega_{g^0}^n}{dV}\right) = 0.$$

On conclut alors grâce au principe du maximum.

5.2.1 Détermination du champ de vecteurs solitonique

La première étape consiste à déterminer le champ de vecteurs solitonique. Pour cela, on utilise l'invariant de Futaki. On sait que nous avons le résultat suivant (provenant de la proposition 2.1 de [59]) :

Proposition 5.2.1 *En gardant les notations précédentes, il existe un unique champ de vecteurs holomorphe complexe $X \in \mathfrak{g}^{1,0}$ avec $\mathrm{Im}(X) \in \mathfrak{k}$ tel que l'invariant de Futaki en X, noté $F_X(\cdot)$, s'annule sur $\mathfrak{g}^{1,0}$. De plus, X est nul ou il appartient au centre de $\mathfrak{g}^{1,0}$, et nous avons*

$$\forall (u, v) \in \mathfrak{g}^{1,0} \times \eta(M), \quad F_X([u, v]) = 0.$$

En particulier $F_X(\cdot)$ est un caractère de Lie sur $\mathfrak{g}^{1,0}$.

En appliquant ce théorème au cas horosphérique, nous obtenons la proposition suivante

Proposition 5.2.2 *Supposons que M est une variété horosphérique lisse sous l'action de $G = \mathrm{Aut(M)}_r$. Le champs de vecteurs $X \in \eta_r(M) = \mathfrak{g}^{1,0}$ annulant l'invariant de Futaki a la forme suivante :*

$$X = \xi - \sqrt{-1}J\,\xi \text{ où } \xi \in \mathfrak{a}_1.$$

Démonstration. On sait que l'on cherche $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^{1,0})$ tel que $\mathrm{Im}X \in \mathfrak{k}$, or $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^{1,0}) = (\mathfrak{p}/\mathfrak{h})^{1,0} = (\mathfrak{a}_1 + J\mathfrak{a}_1)^{1,0}$ et donc $\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{a}_1 + J\mathfrak{a}_1) = J\mathfrak{a}_1$, ainsi X sera bien de la forme

$$X = \xi - \sqrt{-1}J\,\xi \text{ où } \xi \in \mathfrak{a}_1.$$

□

Maintenant, nous voulons calculer l'invariant Futaki dans notre cas. On rappelle (voir l'équation (3.35)) que nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$F_X(Y) = \int_M \widetilde{\theta}_Y e^{\widetilde{\theta}_X} \omega_g^n,$$

où $\widetilde{\theta}_X$ vérifie

$$i_X\omega_g = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\,\widetilde{\theta}_X, \quad \int_M \widetilde{\theta}_X e^{h_g}\omega_g^n = 0. \tag{5.14}$$

Tout d'abord, nous utilisons l'invariance par K de la forme de Kähler ω_g pour remarquer le fait suivant :

$$\mathcal{L}_X\omega_g = \mathcal{L}_{\xi-\sqrt{-1}J\xi}\omega_g = \mathcal{L}_\xi\omega_g - \sqrt{-1}\mathcal{L}_{J\xi}\omega_g = \mathcal{L}_\xi\omega_g,$$

car ω_g est K-invariant et $J\xi \in \mathfrak{k}$. Donc nous calculons juste $\mathcal{L}_\xi\omega_g$. Nous avons la proposition suivante (tirée de la proposition 4.14 de [15] avec une convention différente, nous faisons agir à gauche et non à droite d'où la différence de signe).

Proposition 5.2.3 *Soit $\zeta \in \mathfrak{a}_1$. Si on pose $Y = \zeta - \sqrt{-1}J\zeta \in \mathfrak{a}_1^{1,0}$ alors la fonction θ_Y est K-invariante et*

$$\forall x \in \mathfrak{a}_1, \;\; \widetilde{\theta}_Y(\exp(x)H) = (\nabla u(x), \zeta), \tag{5.15}$$

où ∇u est le gradient du potentiel convexe u défini par la formule (5.5) *pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$.*

Avec ce résultat, nous pouvons calculer l'invariant de Futaki F_X.

Proposition 5.2.4 *Soit $X = \xi - \sqrt{-1}J\xi$ le champ de vecteurs annulant l'invariant de Futaki. Nous avons alors*

$$\forall \zeta \in \mathfrak{a}_1, \;\; \int_{\Delta^+} \langle p + 2\rho_P, \zeta\rangle e^{\langle -2p-4\rho_p, \xi\rangle} \prod_{\alpha\in\Phi_Q^+} (\alpha, p)\,dp = 0. \tag{5.16}$$

Démonstration.
On va calculer $F_X(Y)$ quand $X = \xi - \sqrt{-1}J\xi$ et $Y = \zeta - \sqrt{-1}J\zeta$. Nous avons alors

$$F_X(Y) = \int_M \widetilde{\theta}_Y e^{\widetilde{\theta}_X}\omega_g^n = \int_{G/H} \widetilde{\theta}_Y e^{\widetilde{\theta}_X}\omega_g^n,$$

puisque G/H est dense dans M. On sait que G/H est une fibration au dessus de G/P de fibre P/H (voir la proposition 5.1.5). Par K-invariance, par les formules (5.15) et (5.7), nous obtenons, en faisant une intégration le long de la fibre (voir la proposition 6.15 de [8] par exemple), qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ξ et ζ telle que, en notant par abus ∇u la fonction définie sur P/H qui à $pH \mapsto \nabla u(x)$ où $x \in \mathfrak{a}_1$ est l'unique élément de $\mathfrak{a}_1$ telle que $\exp(x)H = pH$.

$$F_X(Y) = C\int_{P/H} (\nabla u, \zeta) e^{(\nabla u, \xi)} \prod_{\alpha\in\Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u + 4t_{\rho_P}\rangle\, \mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u)\, s_r^{-1} \wedge \overline{s_r}^{-1}.$$

En utilisant la décomposition polaire (voir la proposition 5.1.7), nous obtenons qu'il existe des constantes C_0, C_1, C_2, C_3 non nulles indépendantes de ξ et ζ telles que

$$\begin{aligned}
F_X(Y) &= C_0 \int_K \left(\int_{\mathfrak{a}_1} (\nabla u(x), \zeta) e^{(\nabla u(x), \xi)} \prod_{\alpha \in \Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u(x) + 4t_{\rho_P} \rangle \, \mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u)(x) dx \right) dk \\
&= C_1 \int_{x \in \mathfrak{a}_1} (\nabla u(x), \zeta) e^{(\nabla u(x), \xi)} \prod_{\alpha \in \Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u(x) + 4t_{\rho_P} \rangle \, \mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u)(x) \, dx \\
&= C_2 \int_{p' \in 2\Delta} \langle p', \zeta \rangle e^{\langle p', \xi \rangle} \prod_{\alpha \in \Phi_P^+} (\alpha, p' + 4\rho_P) \, dp \\
&= C_3 \int_{p \in \Delta^+} \langle p + 2\rho_P, \zeta \rangle e^{\langle -2p - 4\rho_P, \xi \rangle} \prod_{\alpha \in \Phi_Q^+} (\alpha, p) \, dp.
\end{aligned}$$

Nous obtenons l'avant-dernière égalité en faisant le changement de variable $p' = d_x u$ grâce à la proposition 5.1.16 et en utilisant la dualité en particulier l'égalité $\langle \alpha, t_{\rho_P} \rangle = (\alpha, \rho_P)$ (voir l'équation (5.1)). Nous utilisons le changement de variables $p' = -2p - 4\rho_P$ et la formule (5.8) pour obtenir la dernière égalité. □

5.2.2 Equation de Monge-Ampère dans le cas horosphérique

Cas général

Soit (X, g) un soliton de Kähler-Ricci i.e.

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \mathcal{L}_X \omega_g.$$

En utilisant le $\partial\overline{\partial}$-lemme, il existe une unique fontion ψ à constante additive près appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que

$$\omega_g = \omega_{g^0} + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi.$$

En se souvenant que $\theta_X(g) = \theta_X(g^0) + X(\phi)$, on voit que résoudre l'équation des solitons de Kähler-Ricci est équivalent à trouver une fonction lisse ψ solution en coordonnées locales de l'équation de Monge-Ampère suivante :

$$\begin{cases} \det(g^0_{i\bar{j}} + \psi_{i\bar{j}}) & = \det(g^0_{i\bar{j}}) \exp(h - \theta_X(g^0) - X(\psi) - \psi) \\ (g^0_{i\bar{j}} + \psi_{i\bar{j}}) & > 0, \end{cases} \tag{5.17}$$

où $h = h_{g^0}$ est l'unique fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathrm{Ric}(\omega_g^0) - \omega_g^0 = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}h, \ \int_M e^h \omega_{g^0}^n = \int_M \omega_{g^0}^n,$$

On peut aussi l'écrire globalement sous la forme

$$\begin{cases} (\omega_{g^0} + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi)^n & = e^{h - \psi - \theta_X(g^0) - X(\psi)} \omega_{g^0}^n. \\ \omega_{g^0} + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi & > 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

Cas horosphérique

Supposons maintenant que M est une variété horosphérique sous l'action de $G = \mathrm{Aut_r(M)}$ telle que g^0 est une métrique kählérienne invariante par K. Déjà, on sait (voir la proposition 5.2.2) que le champ de vecteur solitonique X s'écrit sous la forme $X = \xi - \sqrt{-1}J\xi$ avec $\xi \in \mathfrak{a}_1$. Comme la forme ω_g^0 est K-invariante, nous voulons de plus trouver une solution K-invariante ψ. Grâce à la densité de G/H dans M, nous pouvons réduire notre étude à cet espace homogène. De plus, par K-invariance, par la décomposition polaire et l'équation (5.15), on peut simplement calculer cette équation pour les valeurs $\exp(x)H$ pour $x \in \mathfrak{a}_1$. En notant u et u^0 les potentiels définies par l'équation (5.5) pour les métriques q et q^0 sur le fibré K_M^{-1} où

q et q^0 sont des métriques telles que respectivement $\omega_{q^0} = \omega_{g^0}$ et $\omega_q = \omega_g$, on a, puisque la fonction ψ est K-invariante,

$$\forall x \in \mathfrak{a}_1, \quad u(x) = u^0(x) + \psi(\exp(x)H). \tag{5.19}$$

Ainsi, l'équation (5.17) s'écrit sur P/H, en utilisant l'équation (5.15), sous la forme

$$\prod_{\alpha\in\Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u(x) + 4t_{\rho_P}\rangle \frac{\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u)(x)}{4^r\, 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}} \cdot \Omega =$$
$$e^{h-\psi-(\nabla u(x),\xi)} \prod_{\alpha\in\Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u^0(x) + 4t_{\rho_P}\rangle \frac{\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u^0)(x)}{4^r\, 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}} \cdot \Omega.$$

Nous pouvons simplifier cette expression. Pour cela, nous utilisons les formules (5.13) et (5.7) qui s'écrivent sur P/H sous la forme

$$e^h \prod_{\alpha\in\Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u^0(x) + 4t_{\rho_P}\rangle \frac{\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u^0)(x)}{4^r\, 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}} \cdot \Omega = e^{-u^0}\,\Omega.$$

et puisque $u = u^0 + \psi$ nous obtenons donc :

$$\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u)(x) \cdot \frac{\prod_{\alpha\in\Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u(x) + 4t_{\rho_P}\rangle}{4^r\, 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}} = e^{-u-(\nabla u(x),\xi)}. \tag{5.20}$$

5.2.3 La méthode de la continuité

Nous voulons maintenant montrer l'existence de solitons de Kähler-Ricci. Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode de continuité. Pour commencer, nous introduisons dans l'équation de Monge-Ampère un paramètre $t \in [0,1]$:

$$\begin{cases} \det(g^0_{i\bar{j}} + \psi_{i\bar{j}}) & = \det(g^0_{i\bar{j}}) \exp(h - \theta_X - X(\psi) - t\psi) \\ (g^0_{i\bar{j}} + \psi_{i\bar{j}}) & > 0. \end{cases} \tag{5.21}$$

Remarquons que l'équation (5.17) est l'équation précédente avec $t = 1$. De plus, si une solution existe au temps t, nous la dénotons par ψ_t. Puisque $\omega_{g^0} + \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\partial\,\psi_t$ défini une métrique kählérienne K-invariante, elle a un potentiel convexe u_t définie par l'équation (5.5) pour une métrique q_t sur K_M^{-1} telle que $\omega_{q_t} = \omega_{g_t}$. En faisant la même simplification que précédemment, la première équation de (5.21) peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u_t)(x) \cdot \frac{\prod_{\alpha\in\Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u(x) + 4t_{\rho_P}\rangle}{4^r\, 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}} = \exp\left[-\left(u^0(x) + t\,u(x)\right) - (\nabla u(x),\xi)\right]. \tag{5.22}$$

Finalement, en posant $w_t = t \cdot u_t + (1-t)\cdot u^0$, et en remarquant que $u_t = u^0 + \psi_t$ et donc $w_t = u^0 + t\psi_t$, on est ramené à étudier l'équation de Monge-Ampère réelle suivante :

$$\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u_t)(x) \cdot \frac{\prod_{\alpha\in\Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u_t(x) + 4t_{\rho_P}\rangle}{4^r\, 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}} = \exp\left[-w_t(x) - (\nabla u_t(x),\xi)\right]. \tag{5.23}$$

Rappelons que la méthode de continuité consiste à considérer l'ensemble S des temps où il existe une solution :

$$S := \{t \in [0,1] \ : \ \text{il existe une solution } \psi_t \text{ à l'équation (5.21) au temps } t\},$$

et à montrer que S est un ouvert fermé non vide de $[0,1]$.

Le caractère ouvert et l'existence d'une solution au temps $t = 0$ proviennent de l'étude des équations de Monge-Ampères faites dans [3, 65]. On pourra aussi consulter [61] pour une étude faite dans le cas des solitons de Kähler-Ricci.

De plus, grâce au théorème d'Arzelà-Ascoli, il suffit d'avoir une estimation a priori $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \geq 3$ des potentiels ψ_t pour obtenir le caractère fermé (voir par exemple la section 3.1 de [56] pour plus de détails).

Or grâce aux travaux de Yau et de Calabi faits dans l'appendice A de [65], on peut ramener ce problème à trouver une estimation $\mathcal{C}^0$. De plus, par l'inégalité de type Harnack suivante ([61, 64] pour plus de détails) :

$$-\inf_M \psi_t \leq C(1+\sup_M \psi_t),$$

on est ramené à chercher une borne supérieure uniforme pour les ψ_t pour les temps $t \in [0,1]$.

5.2.4 Preuve de l'estimation a priori

La démarche employée dans cette section s'inspire de celle de [64].

On doit démontrer une estimation a priori pour $t \in [0,1]$. Maintenant, en utilisant le fait que $0 \in S$ et que S est ouvert, on peut réduire cela à démontrer l'estimation a priori sur $[t_0, 1]$ pour $t_0 > 0$. On fixe un tel t_0 pour le reste de la section. De plus, par simplicité, on note r la dimension réelle de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}_1$ et on choisit une base $(a_1, \cdots, a_r)$ de $\mathfrak{a}_1$ avec $(x_1, \cdots, x_r)$ les coordonnées associées dans $\mathfrak{a}_1$. On identifie donc $\mathfrak{a}_1$ avec $\mathbb{R}^r$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^r$.

On commence par un lemme qui nous sera utile par la suite.

Lemme 5.2.5 *On a*

$$\forall \zeta \in \mathfrak{a}_1, \quad \int_{\mathfrak{a}_1} \frac{\partial w_t}{\partial \zeta} e^{-w_t} dx = 0.$$

Démonstration. Il suffit par linéarité de montrer :

$$\forall i = 1, \cdots, r, \quad \int_{\mathbb{R}^r} \frac{\partial w_t}{\partial x_i} e^{-w_t} dx = 0.$$

On peut écrire grâce au théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^r} \frac{\partial w_t}{\partial x_i} e^{-w_t} dx &= -\int_{\mathbb{R}^r} \frac{\partial e^{-w_t}}{\partial x_i} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial e^{-w_{t,i}}}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \cdots \hat{dx_i} \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \left[e^{-w_{t,i}} \right]_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n
\end{aligned}$$

où $w_{t,i} : s \in \mathbb{R} \mapsto (x_1, \cdots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$ et où les autres coordonnées x_k sont fixées. Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\lim_{s \to \pm\infty} e^{-w_{i,t}(s)} = 0.$$

Pour démontrer cela, on remarque que, par définition de la fonction w_t et grâce à la proposition 5.1.16 appliqué à u^0 et u, on a

$$e^{-w_t(x)} = \left(e^{-u^0}\right)^{1-t} \cdot \left(e^{-u}\right)^t \leq C e^{-v_{2\Delta}(x)}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^r.$$

où C est une constante indépendante de x et $v_{2\Delta}$ est la fonction support de 2Δ i.e. $v_{2\Delta}(x) = \sup_{p \in 2\Delta}(x, p)$. Donc, on a pour tout $p \in 2\Delta$

$$\begin{aligned}
v_{2\Delta}(x) \geq (x,p) &= x_i(a_i, p) + \sum_{j=1, j\neq i} x_j(a_j, p) \\
&\geq x_i(a_i, p) + \inf_{p \in 2\Delta} \left(\sum_{j=1, j\neq i} x_j(a_j, p) \right).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\forall p \in 2\Delta, \ \ 0 \leq e^{-w_{t,i}(s)} \leq \widetilde{C} e^{-s(a_i, p)},$$

où $\widetilde{C}$ est une constante indépendante de t. Pour conclure, il suffit de remarquer que, grâce au fait que $0 \in 2\Delta$, il existe une boule centrée 0 et de rayon $\delta > 0$ contenue dans 2Δ et donc il existe $p_1 \in 2\Delta$ tel que $(a_i, p_1) > 0$ et $p_2 \in 2\Delta$ tel que $(a_i, p_2) < 0$. $\square$

Lemme 5.2.6 *La fonction w_t atteint son minimum m_t en $x_t \in \mathfrak{a}_1$.*

Démonstration. La démonstration repose sur le fait qu'une fonction convexe sur $\mathbb{R}^r$ qui admet un point critique admet un minimum global. Pour appliquer ce résultat, on remarque que w_t est une fonction convexe car barycentre des fonctions convexes u et u^0 (voir la proposition 5.1.16). Pour conclure, il suffit donc de montrer que $0 \in \nabla w_t(\mathbb{R}^n)$ Cela provient du fait que

$$\begin{aligned}
\nabla w_t(\mathfrak{a}_1) &= t\nabla u(\mathfrak{a}_1) + (1-t)\nabla u^0(\mathfrak{a}_1) && \text{(par définition de } w\text{)}\\
&= 2\,t\,\mathrm{Int}(\Delta) + 2\,(1-t)\ \mathrm{Int}(\Delta) && \text{(proposition 5.1.16)}\\
&= 2\,\mathrm{Int}(\Delta) && \text{(car } 2\Delta \text{ est convexe)}
\end{aligned}$$

et on a $0 \in 2\,\mathrm{Int}(\Delta)$ (voir la formule (5.10)). □

Lemme 5.2.7 *On a la propriété suivante :*

$$\exists C > 0, \forall t \in [t_0, 1], m_t \leq C.$$

Avant de commencer la preuve, on rappelle un résultat concernant les domaines convexes qui nous sera utile.

Lemme 5.2.8 ([29]) *Soit Ω un domaine convexe borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellipsoïde E, appelé ellipsoïde minimal de Ω, dont le volume est minimal parmi les ellipsoïdes contenant Ω. De plus, E vérifie*

$$\frac{1}{n}E \subset \Omega \subset E.$$

Soit T une transformation affine de partie vectorielle de déterminant 1, préservant le centre x_0 de E i.e. $T(x) = T_{vect}(x - x_0) + x_0$ pour une matrice $T_{vect} \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ et telle que $T(E)$ est une boule B_R de centre x_0 pour un certain $R > 0$ (dépendant de E). En particulier, nous avons $B_{R/n} \subset T(\Omega) \subset B_R$.

Maintenant, on passe à la preuve du lemme 5.2.7.

Démonstration. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$A_k := \{x \in \mathbb{R}^r \;/\; m_t + k \leq w_t(x) \leq m_t + k + 1\},$$

et on a les propriétés élémentaires suivantes :
- l'ensemble A_k est borné pour $k \geq 0$ et $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathfrak{a}_1$
- $x_t \in A_0$.
- $\bigcup_{i=0}^{k} A_i$ est convexe pour $k \geq 0$.

De plus, comme u_t et u^0 sont convexes, les matrices des dérivées partielles secondes $((u_t)_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ et $(u^0_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ sont positives et donc nous obtenons (c'est une conséquence directe de la formule de Minkowski, voir par exemple la page 115 [38])

$$\det((w_t)_{ij}) = \det(t\,(u_t)_{ij} + (1-t)u^0_{ij}) \geq \det((u_t)_{ij}) + \det((1-t)u^0_{ij}).$$

Puisque $\det((1-t)u^0_{ij}) \geq 0$, nous obtenons, en utilisant l'équation (5.23),

$$\begin{aligned}
\det((w_t)_{ij}) &\geq \det(t \cdot (u_t)_{ij}) = t^r \cdot \det((u_t)_{ij})\\
&= \frac{e^{-w_t(x)-(\nabla u_t(x),\xi)}}{\prod_{\alpha\in\Phi_P^+}\langle \alpha, \nabla u_t(x) + 4t_{\rho_P}\rangle} \cdot \left(4^r 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}\right)\\
&\geq t^r\,\frac{4^r 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}}{d'} \cdot e^d \cdot e^{-w_t}
\end{aligned}$$

où on a posé

$$d = \inf\left\{(p,\xi) \;/\; p \in -2\Delta^+ - 4\rho_P\right\} \in \mathbb{R}$$

et, grâce à la formule (5.11),

$$0 < d' = \sup_{p \in -2\Delta^+} \left\{ \prod_{\alpha \in \Phi_P^+} \langle \alpha, p \rangle \right\} < +\infty.$$

Finalement, comme $t \in [t_0, 1]$ on peut écrire, avec $C_0 > 0$ une constante,

$$\det((w_t)_{ij}) \geq C_0 e^{-m_t} \text{ sur } A_0. \tag{5.24}$$

En utilisant le lemme 5.2.8, il existe une transformation affine de partie vectorielle de déterminant 1 et préservant le centre de l'ellipsoïde minimal A_0 telle que

$$B_{R/r} \subset T(A_0) \subset B_R, \tag{5.25}$$

et donc, nous obtenons que

$$\det((w_t)_{ij}) \geq C_0 e^{-m_t} \text{ dans } T(A_0) \tag{5.26}$$

Montrons que

$$R \leq \sqrt{2} r C_0^{-1/2r} e^{m_t/2r}. \tag{5.27}$$

En effet, on pose

$$v : y \in \mathfrak{a}_1 \longmapsto \frac{1}{2} C_0^{1/r} e^{-m_t/r} \left[\|y - y_t\|^2 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] + m_t + 1 \in \mathbb{R}$$

où y_t est le centre de l'ellipsoïde minimal de A_0. Un calcul direct nous donne

$$\det(v_{ij}) = C_0 e^{-m_t} \quad \text{sur } T(A_0),$$

et, donc d'après l'équation (5.26),

$$\det(v_{ij}) \leq \det((w_t)_{ij}) \text{ sur } T(A_0) \ ,$$

et

$$v(y) \geq m_t + 1 \geq w_t(y) \text{ sur } \partial T(A_0).$$

On applique alors le principe de comparaison pour les équations de Monge-Ampère réelles (voir par exemple [28]) et on obtient

$$v \geq w \text{ sur } T(A_0).$$

En particulier, on obtient

$$m_t \leq v(y_t) = -\frac{1}{2} C_0^{1/r} e^{-m_t/r} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + m_t + 1.$$

Maintenant, grâce à la convexité de w, on a

$$A_k \subset \bigcup_{i=0}^{k} A_k \subset (k+1) \cdot A_0,$$

où $(k+1) \cdot A_0$ est la dilatation de A_0 de facteur $(k+1)$. De plus, grâce à l'équation (5.25) et au fait que w_t est convexe, on obtient

$$T(A_k) \subset T(((k+1) \cdot A_0)) \subset (k+1) \cdot T(A_0) = B_{(k+1)R}.$$

Maintenant, si on note ω_r le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^r$ alors on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{a}_1} e^{-w_t} &\leq \sum_k \int_{A_k} e^{-w_t} \\
&= \sum_k e^{-m_t-k}\ \mathrm{Vol}(A_k) && \text{(comme } w_t \geq m_t + k \text{ sur } A_k) \\
&= \sum_k e^{-m_t-k}\ \mathrm{Vol}(T(A_k)) && \text{(comme } T \text{ préserve le volume)} \\
&\leq \omega_r \sum_k e^{-m_t-k}\ ((k+1)R)^r && \text{(comme } T(A_k) \subset B_{(k+1)R}) \\
&= \omega_r \frac{(R)^r}{e^{m_t}} \sum_k \frac{(k+1)^r}{e^k} \\
&\leq C_1 e^{-m_t/2} && \text{(par l'équation (5.27) ci dessus),}
\end{aligned}$$

où $C_1 > 0$ est une constante indépendante du temps t. Finalement, on obtient

$$e^{-m_t/2} \geq \frac{1}{C_1} \int_{\mathfrak{a}_1} e^{-w_t}.$$

De plus, grâce à l'équation (5.23) et au calcul effectué à la fin de la démonstration de la proposition 5.2.4, on a

$$\begin{aligned}
e^{-m_t/2} &\geq \frac{1}{C_1} \int_{\mathfrak{a}_1} \mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u_t) e^{\langle \nabla u_t(x), \xi \rangle} \frac{\prod_{\alpha \in \Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u_t(x) + 4t_{\rho_P} \rangle}{4^r\, 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}} dx \\
&= \frac{1}{C_1} \int_{\Delta^+} e^{\langle -2p - 4\rho_P, \xi \rangle} \frac{\prod_{\alpha \in \Phi_Q^+} (\alpha, p)}{4^r\, 2^{\mathrm{Card}(\Phi_P^+)}} dp =: \frac{C_2}{C_1}
\end{aligned}$$

où C_2 est une constante indépendante de t et strictement positive car Δ^+ est d'intérieur non vide. Finalement, cela nous donne que

$$m_t \leq C,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante du temps t. □

Lemme 5.2.9 *On a la propriété suivante :*

$$\exists \widetilde{C} > 0, \forall t \in [t_0, 1],\ \ m_t \geq \widetilde{C}.$$

Démonstration. Ici, la preuve ne s'inspire plus de [64] mais de [19] utilisé aussi dans la proposition 6.19 de [15]. Pour commencer, rappelons que $\|\nabla w_t\| \leq d_0 := \sup\{\|x\| \ : \ x \in 2\Delta\}$. Ainsi, par le théorème des accroissement finis, on a

$$\forall x \in \mathfrak{a}_1,\ \ |w_t(x) - m_t| \leq d_0\, \|x - x^t\|.$$

Ainsi, pour tout $x \in B(x^t, \frac{1}{d_0})$, nous avons

$$|w_t(x) - m_t| \leq 1,$$

ce qui nous dit que $x \in A_0$ et donc

$$B\left(x^t, \frac{1}{d_0}\right) \subset A_0.$$

Et nous avons donc

$$\int_{A_0} dx = \mathrm{Vol}(A_0) \geq \int_{B\left(x^t, \frac{1}{d_0}\right)} dx = \mathrm{Vol}(B\left(x^t, \frac{1}{d_0}\right)) = c, \tag{5.28}$$

où c ne dépend plus du temps puisque $\mathrm{Vol}(B(x^t, \frac{1}{d_0}) = \mathrm{Vol}(B(0, \frac{1}{d_0})$

Rappelons aussi que grâce au calcul précédent, il existe une constante C_2 indépendante du temps telle que

$$C_2 = \int_{\mathfrak{a}_1} e^{-w_t} dx.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} C_2 = \int_{\mathfrak{a}_1} e^{-w_t} dx &= \int_{\mathfrak{a}_1} \int_{w_t(x)}^{+\infty} e^{-s} ds dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s} \left(\int_{\mathfrak{a}_1} \mathbb{1}_{\{w_t \leq s\}} dx \right) ds \\ &= \int_{-m_t}^{+\infty} e^{-s} \operatorname{Vol}(\{w_t \leq s\}) ds \\ &= e^{-m_t} \int_{0}^{+\infty} e^{-s} \operatorname{Vol}(\{w_t \leq s\}) ds \\ &\geq e^{-m_t} \int_{1}^{+\infty} e^{-s} \operatorname{Vol}(A_0) \, ds. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'équation (5.28), nous obtenons que

$$C_2 \geq e^{-m_t} \, c \int_1^{+\infty} e^{-s} ds,$$

que l'on peut écrire

$$\ln(C_2) \geq -m_t + \ln \left(c \int_1^{+\infty} e^{-s} ds \right).$$

Ceci permet de conclure. □

Lemme 5.2.10 *Soit $x^t = (x_1^t, \cdots, x_n^t)$ le point où est atteint le minimum de w_t. On a*

$$\|x^t\| \leq C',$$

où C' est une constante indépendante du temps t.

Démonstration. On raisonne par l'absurde, on suppose donc que

$$\forall C' > 0, \ \ \exists t \in [t_0, 1], \ \ \psi_t \text{ est défini et } \|x^t\| > C'.$$

Pour usage ultérieur, notons que ceci implique en particulier que $\|x^t\| \neq 0$. Rappelons que grâce au calcul précédent, on a

$$\int_{\mathfrak{a}_1} e^{-w_t} dx = C_2 > 0.$$

Rappelons aussi que $\|\nabla w_t\| \leq d_0 := \sup\{\|x\| \ : \ x \in 2\Delta\}$ donc il existe un rayon $R' > 0$ indépendant de t tel que $\inf\{w_t(x) \ : \ x \in \partial B(x^t, R')\} \geq m_t + 1$. Maintenant par convexité, on a

$$\forall x \in \mathfrak{a}_1 \setminus B(x^t, R'), \ \ w_t(x) \geq \frac{1}{R'} \|x - x^t\| + m_t.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \geq R'$ indépendant de t tel que, par le lemme 5.2.9,

$$\int_{\mathfrak{a}_1 \setminus B(x^t, \delta)} e^{-w_t(x)} dx \leq e^{-\widetilde{C}} \int_{\mathfrak{a}_1 \setminus B(x^t, \delta)} e^{-\frac{1}{R'} \|x - x^t\|} dx \leq \varepsilon. \tag{5.29}$$

On fixe ε et δ qui vérifient la propriété ci-dessus. Nous utilisons ici un argument de [16] (utilisé notamment dans le théorème 6.30) plutôt que l'argument originel de [64]. Puisque u^0 est une fonction convexe d'asymptote $v_{2\Delta}$ et que ∇u^0 est un difféomorphisme de $\mathfrak{a}_1$ dans $\operatorname{Int}(2\Delta)$ et $0 \in \operatorname{Int}(2\Delta)$(voir la proposition 5.1.11), par inégalité de convexité, nous obtenons que

$$\forall x \in B(x^t, \delta), \ \ \frac{\partial u^0}{\partial \zeta}(x) \geq \frac{1}{2} a_0,$$

où $\zeta = x^t/\|x^t\|$ et $a_0 = \inf\{|v_{2\Delta}(\xi)| \ : \ \xi \in \mathfrak{a}, \|\xi\| = 1\} > 0$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_{B(x^t,\delta)} \frac{\partial u^0}{\partial \zeta}(x) e^{-w_t} dx &\geq \frac{1}{2} a_0 \int_{B(x_t,\delta)} e^{-w_t}\, dx \\ &\geq \frac{1}{2} a_0 \left(\int_{\mathfrak{a}_1} e^{-w_t}\, dx - \int_{\mathfrak{a}_1 \backslash B(x^t,\delta)} e^{w_t(x)}\, dx \right) \\ &\geq \frac{1}{2} a_0 \left(\int_{\mathfrak{a}_1} e^{-w_t}\, dx - \varepsilon \right) && \text{(par l'équation (5.29))} \\ &\geq \frac{1}{4} a_0 C_2 && \text{(quitte à prendre } \varepsilon \text{ assez petit).}\end{aligned}$$

Donc pour ε assez petit,

$$\int_{\mathfrak{a}_1} \frac{\partial u^0}{\partial \zeta}(x) e^{-w_t} dx > 0. \tag{5.30}$$

Maintenant, montrons que pour tout $\zeta \in \mathfrak{a}_1$, on a

$$\int_{\mathfrak{a}_1} \frac{\partial u^0}{\partial \zeta} e^{-w_t} dx = 0. \tag{5.31}$$

En effet, la proposition 5.2.4 et sa démonstration nous donne que :

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathfrak{a}_1} (\nabla u_t(x), \zeta) e^{-(\nabla u_t(x),\xi)} \prod_{\alpha \in \Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u_t(x) + 4t_{\rho_P} \rangle \, \mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u_t)(x) dx \\ &= C_0' \int_{\mathfrak{a}_1} (\nabla u_t(x), \zeta) e^{-w_t(x)} dx && \text{(pour une constante } C_0' > 0\text{, par l'équation (5.23))} \\ &= C_0' \int_{\mathfrak{a}_1} \frac{\partial u_t}{\partial \zeta}(x) e^{-w_t(x)} dx \\ &= C_0' \frac{1-t}{t} \int_{\mathfrak{a}_1} \frac{\partial u^0}{\partial \zeta}(x) e^{-w_t(x)} dx - C_0' \frac{1}{t} \int_{\mathfrak{a}_1} \frac{\partial w_t}{\partial \zeta}(x) e^{-w_t(x)} dx \\ &= C_0' \frac{1-t}{t} \int_{\mathfrak{a}_1} \frac{\partial u^0}{\partial \zeta}(x) e^{-w_t(x)} dx && \text{(lemme 5.2.5).}\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\forall \zeta \in \mathfrak{a}_1, \quad \int_{\mathfrak{a}_1} \frac{\partial u^0}{\partial \zeta}(x) e^{-w_t(x)} dx = 0.$$

Ceci montre l'équation (5.31), qui est en contradiction avec l'équation (5.30). Ceci termine la preuve. □

On conclut alors la preuve de l'estimation a priori grâce au lemme suivant.

Lemme 5.2.11 *Soit ψ_t une solution à l'équation* (5.21) *où $t \in [t_0, 1]$. On a*

$$\sup_M \psi_t \leq C'',$$

pour une constante C'' indépendante de t.

Démonstration. Par densité et par K-invariance, il suffit de montrer que

$$\sup_{y \in \mathfrak{a}_1} \psi_t(\exp(y)H) \leq C''.$$

Par convexité de u_t, on a

$$\forall y \in \mathfrak{a}_1, \ \ u_t(0) + (\nabla u_t(y), y) \geq u_t(y).$$

Par définition de $v_{2\Delta}$ et puisque $\nabla u_t(\mathfrak{a}_1) = 2\,\mathrm{Int}(\Delta)$ par la proposition 5.1.11, on a

$$v_{2\Delta}(y) + u_t(0) \geq u_t(y).$$

Maintenant, on a par l'égalité (5.19),

$$\begin{aligned}
\psi_t(\exp(y)H) &= u_t(y) - u_0(y) \\
&\leq v_{2\Delta}(y) + u_t(0) - u_0(y) \\
&\leq a + u_t(0) && \text{(car } v_{2\Delta} - u_0 \text{ est bornée).}
\end{aligned}$$

Donc il suffit de montrer que $u_t(0)$ admet une borne supérieure indépendante du temps t.

Pour cela, rappelons que x^t est le point où w_t atteint son minimum. Comme $\nabla w_t(\mathfrak{a}_1) = \mathrm{Int}(2\Delta)$ qui est un polytope borné, on a

$$|\nabla w_t(\mathfrak{a}_1)| \leq d_0 := \sup\{\|x\| \ : \ x \in 2\,\Delta\},$$

et donc

$$|w_t(0) - w_t(x^t)| \leq d_0\|x^t\|.$$

De plus, grâce au lemme 5.2.10, on a $C' > 0$ indépendant de t tel que $\|x^t\| \leq C'$, ce qui implique

$$|w_t(0) - w_t(x^t)| \leq d_0 C'.$$

Par le lemme 5.2.7, on a $w_t(x^t) = m_t \leq C$ où C est une constante indépendante t. Donc on a

$$w_t(0) \leq C + d_0 C.$$

Mais $w_t = tu_t + (1-t)u^0$ donc

$$tu_t(0) \leq C + d_0 C' - (1-t)u^0(0).$$

Finalement, comme $t \in [t_0, 1]$, on obtient

$$u_t(0) \leq \Theta,$$

où Θ est une constante indépendante de t. □

Nous obtenons ainsi une majoration des solutions ψ_t à l'équation (5.21) sur P/H indépendante du temps t appartenant à $[t_0, 1]$. Cette majoration s'étend par K-invariance et densité à M. Ceci permet donc d'obtenir l'estimation a priori nécessaire pour conclure à l'existence de solitons de Kähler-Ricci sur les variétés horosphériques par la méthode de la continuité. On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 5.2.12 *Soit M une variété horosphérique de Fano lisse. Alors il existe un soliton de Kähler-Ricci sur M.*

5.3 Métrique de Kähler-Einstein dans le cas horosphérique

Dans cette section, on étudie à quelles conditions nécessaires et suffisantes le soliton (X, g) est trivial i.e. $X = 0$ et donc quand g est une métrique de Kähler-Einstein. Cette partie s'inspire des travaux de thèse de Delcroix [15].

5.3.1 Condition d'existence

Nous venons de démontrer que toute variété horosphérique lisse de Fano admet un soliton de Kähler-Ricci. On peut compléter ce résultat par le corollaire suivant.

Corollaire 5.3.1 *Supposons que M soit un plongement horosphérique d'un espace homogène horosphérique G/H tel que H contienne le radical unipotent du sous-groupe de Borel opposé B^- de G. Notons Δ^+ le polytope moment de X associé au sous-groupe de Borel B. Alors M admet une métrique de Kähler-Einstein si et seulement si*

$$\mathrm{Bar}(\Delta^+)_{DH} = -2\rho_P,$$

où on a posé $P := N_G(H)$ et $\mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+)$ est le barycentre du polytope Δ^+ pour la mesure de Duistermaat-Heckman.

Démonstration. On sait qu'il existe un soliton (X, g). Par unicité du soliton de Kähler-Ricci, il faut et suffit donc de montrer que $X = 0$ si et seulement si $\mathrm{Bar}(\Delta^+)_{DH} = -2\rho_P$. En particulier, grâce aux résultats théoriques concernant l'invariant de Futaki, il s'agit donc de montrer que F_0 est identiquement nulle si et seulement si $Bar(\Delta^+)_{DH} = -2\rho_P$. On rappelle (voir l'équation (3.35)) que F_0 s'écrit pour $\chi \in \mathfrak{g}^{1,0}$ (telle que sa partie réelle s'identifie au champ de vecteur défini par $x \mapsto \frac{d}{dt}\exp(t\mathrm{Re}(\chi))x$) :

$$F_0(\chi) = \int_M \widetilde{\theta}_\chi\, \omega_g^n.$$

où

$$\mathcal{L}_\chi \omega_g = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\,\widetilde{\theta}_\chi, \quad \int_M \widetilde{\theta}_\chi e^{h_g} \omega_g^n = 0, \tag{5.32}$$

et où la fonction $h_g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ (définie modulo une constante additive) vérifie

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial} h_g.$$

De plus, on sait que nous devons uniquement nous intéresser à l'annulation de F_0 sur $\mathfrak{p}/\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. On obtient alors, grâce à l'équation (5.16), pour tout $\zeta \in \mathfrak{a}_1$:

$$F_0(\zeta) = \widetilde{M} \int_{\Delta^+} \langle p + 2\rho_P, \zeta\rangle \prod_{\alpha\in\Phi_Q^+} (\alpha, p)\, dp,$$

où $\widetilde{M}$ est une constante indépendante de ζ. Nous avons que g est donc une métrique de Kähler-Einstein si et seulement si

$$\forall\zeta \in \mathfrak{a}_1, \quad \int_{\Delta^+} \langle p + 2\rho_P, \zeta\rangle \prod_{\alpha\in\Phi_Q^+} (\alpha, p)\, dp = 0.$$

Cette dernière égalité peut encore s'écrire sous la forme

$$\langle \mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+) + 2\rho_P, \zeta\rangle = 0.$$

Ce qui nous donne bien que g est une métrique de Kähler-Einstein si et seulement si

$$\mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+) = -2\rho_P.$$

□

5.3.2 Équation de Monge-Ampère et borne inférieure de Ricci

Reprenons les notations introduites dans la partie 5.2. Pour démontrer l'existence de métriques de Kähler-Einstein via la méthode de la continuité, il suffit de prendre $X = 0$ dans l'équation (5.21) et $\xi = 0$ dans l'équation (5.23). Nous obtenons l'équation de Monge-Ampère complexe suivante d'inconnue $\psi_t \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \det(g^0_{i\bar{j}} + \psi_{i\bar{j}}) & = \det(g^0_{i\bar{j}})\exp(h - t\psi) \\ (g^0_{i\bar{j}} + \psi_{i\bar{j}}) & > 0 \end{cases} \tag{5.33}$$

et donc l'équation de Monge-Ampère réelle d'inconnue $u_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a}_1, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u_t)(x) \cdot \prod_{\alpha\in\Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u_t(x) + 4t_{\rho_P}\rangle = \exp\left[-w_t(x)\right], \tag{5.34}$$

où on a posé $w_t = t\, u_t + (1-t)\, u^0$ (on rappelle que u^0 est le potentiel définie par l'équation (5.5) pour la métrique de référence g^0). Cette définition étant inchangée, les démonstrations des lemmes 5.2.5, 5.2.6, 5.2.7 et 5.2.11 peuvent s'appliquer à ce cas. En particulier, on obtient donc la proposition suivante.

Proposition 5.3.2 *Il existe une solution au temps $t_0 > 0$ à l'équation* (5.33) *s'il existe une constante $C > 0$ indépendante du temps t telle que*

$$\sup_{t\in[0,t_0[} |x^t| < C,$$

où x^t est le point où est atteint le minimum de la fonction w_t.

Nous obtenons directement le corollaire suivant.

Corollaire 5.3.3 *La borne inférieure de Ricci $R(M)$ est égale à*

$$R(M) = \sup\left\{t_0 \in [0,1] \ : \ \exists C > 0, \ \ \forall t < t_0, \ \ |x^t| < C\right\}.$$

5.3.3 Calcul de la plus grande borne inférieure de Ricci

On va calculer $R(M)$ dans le cas horosphérique en s'inspirant des travaux de [15]. Avant de commencer, remarquons que, grâce à l'équation, (5.34)

$$\int_{\mathfrak{a}_1} e^{-w_t(x)} dx = V, \tag{5.35}$$

où V est le volume de Δ^+ pour la mesure de Duistermaat-Heckman.

Théorème 5.3.4 *Supposons que M soit un plongement horosphérique d'un espace homogène horosphérique G/H tel que H contienne le radical unipotent du sous-groupe de Borel opposé B^- de G. Notons $P = N_G(H)$ et Δ^+ le polytope moment de X associé au sous-groupe de Borel B. De plus, on suppose que $2\rho_P \neq \mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+)$ où $\mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+)$ est le barycentre du polytope Δ^+ pour la mesure de Duistermaat-Heckman. On a alors que $R(M)$ est l'unique $t \in]0,1[$ tel que*

$$\frac{t}{t-1}(\mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+) + 2\rho_P) \in \partial\left(\Delta^+ + 2\rho_P\right).$$

Démonstration. Rappelons que nous avons

$$\int_{\mathfrak{a}_1} e^{-w_t} dx = V.$$

Rappelons aussi que $\|\nabla w_t\| \leq d := \sup\{\|x\| \ : \ x \in 2\Delta^+\}$ donc il existe un rayon $R' > 0$ indépendant de t tel que $\inf\{w_t(x) \ : \ x \in \partial B(x^t, R)\} \geq m_t + 1$. Maintenant par convexité, on a

$$\forall x \in \mathfrak{a}_1 \setminus B(x_t, R'), \ \ w_t(x) \geq \frac{1}{R}\|x - x^t\| + m_t.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta := \delta_\varepsilon \geq R'$ indépendant de t tel que

$$\int_{\mathfrak{a}_1 \setminus B(x^t,\delta)} e^{-w_t(x)} dx \leq e^{-\widetilde{C}} \int_{\mathfrak{a}_1 \setminus B(x^t,\delta)} e^{-\frac{1}{R'}\|x-x^t\|} dx \leq \varepsilon. \tag{5.36}$$

Posons $t_\infty = R(M)$ qui est strictement inférieur à 1 puisque M n'admet pas de métrique de Kähler-Einstein.

Commençons par remarquer que

$$\lim_{t \to t_\infty} \|x^t\| = +\infty.$$

En effet, si $\|x^t\|$ admet une valeur d'adhérence alors l'équation (5.21) admet une solution en $t = t_\infty$ et puisque l'ensemble des solutions est ouvert, il existe un $\delta > 0$ tel qu'il existe une solution en $t = t_\infty + \delta$. Ceci contredit la maximalité de $R(M) = t_\infty$. De plus, en posant pour tout $t \in [0, t_\infty]$, $\xi_t := \frac{x^t}{\|x^t\|}$, on peut trouver une suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $[0, t_\infty]$ telle que $t_i \to t_\infty$ et $\xi_{t_\infty} \in \mathfrak{a}_1$ vérifiant

$$\lim_{i\to\infty} \xi_{t_i} = \xi_{t_\infty}.$$

Commençons par remarquer que pour tout $t \in [0, t_\infty]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{a}_1} (\nabla u_t, \xi_t) e^{-w_t} dx &= \int_{\mathfrak{a}_1} (\nabla u_t, \xi_t)\, \mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(u_t) \cdot \prod_{\alpha \in \Phi_P^+} \langle \alpha, \nabla u_t + 4\rho_P \rangle dx \\
&= \int_{2\Delta} \langle p, \xi_t \rangle \cdot \prod_{\alpha \in \Phi_P^+} (\alpha, p + 4\rho_P)\, dp \\
&= \int_{\Delta^+} -\langle p + 2\rho_P, \xi_t \rangle \cdot \prod_{\alpha \in \Phi_Q^+} (\alpha, p)\, dp \\
&= -\langle \mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+) + 2\rho_P, \xi_t \rangle V.
\end{aligned}$$

Nous obtenons en passant à la limite que

$$\lim_{i\to+\infty}\int_{\mathfrak{a}_1}(\nabla u_{t_i},\xi_{t_i})e^{-w_{t_i}}\,dx=-\langle \mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+)+2\rho_P,\xi_{t_\infty}\rangle V. \tag{5.37}$$

Rappelons que nous avons défini la fonction support $v_{2\Delta}$ par l'équation (5.9). Avec cette défintion, on veut montrer que

$$\lim_{i\to+\infty}\int_{\mathfrak{a}_1}(\nabla u^0,\xi_{t_i})e^{-w_{t_i}}=v_{2\Delta}(\xi_{t_\infty})V. \tag{5.38}$$

On fixe un réel $\varepsilon>0$. On pose $\theta:=\varepsilon/6d$ où $d:=\sup_{x\in 2\Delta}\|x\|$ et on a, par la formule (5.36) avec $\delta=\delta_\theta$, que

$$\int_{\mathfrak{a}_1\setminus B(x^t,\delta)}e^{-w_t}dx\leq\theta.$$

Donc nous obtenons que

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathfrak{a}_1\setminus B(x^t,\delta)}(\nabla u^0,\xi_t)\,e^{w_t}dx\Big| &\leq \int_{\mathfrak{a}_1\setminus B(x^t,\delta)}|(\nabla u^0,\xi_t)|\,e^{-w_t}dx\\ &\leq d\int_{\mathfrak{a}_1\setminus B(x^t,\delta)}e^{-w_t}dx\\ &\leq d\theta.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne par définition de θ :

$$\Big|\int_{\mathfrak{a}_1\setminus B(x^t,\delta)}(\nabla u^0,\xi_t)\,e^{-w_t}dx\Big|\leq\varepsilon/6. \tag{5.39}$$

De plus, puisque $\nabla u^0(\mathfrak{a}_1)=\mathrm{Int}(2\Delta)$ (proposition 5.1.16), on a

$$\forall x\in B(x^t,\delta),\;\;(\nabla u^0(x),\xi_t)\leq v_{2\Delta}.(\xi_t).$$

Puisque u^0 est une fonction convexe, on a

$$\forall x\in B(x^t,\delta),\;\;(\nabla u^0(x),\xi_t)\geq\frac{u^0(x)-u^0(x-x^t)}{\|x_t\|}.$$

Pour tout $x\in B(x^t,\delta)$, on a $x-x^t\in B(0,\delta)$ d'où l'existence d'une constante $C_0\in\mathbb{R}$ indépendante du temps t tel que

$$\forall x\in B(x^t,\delta),\;\;u^0(x-x^t)\geq C_0.$$

De plus, on sait (proposition (5.1.16)) qu'il existe $C_1>0$ indépendante du temps telle que

$$\forall x\in\mathfrak{a}_1,\;\;-C_1<u^0(x)-v_{2\Delta}(x)<C_1.$$

Ainsi en posant $C=-C_0-C_1$, nous obtenons que

$$\forall x\in B(x^t,\delta),\;\;(\nabla u^0(x),\xi_t)\geq\frac{C+v_{2\Delta}}{\|x^t\|}.$$

En écrivant $x=x^t+(x-x^t)$, on obtient puisque la fonction support $v_{2\Delta}$ est positivement homogène

$$\forall x\in B(x^t,\delta),\;\;(\nabla u^0(x),\xi_t)\geq v_{2\Delta}\left(\xi_t+\frac{x-x^t}{\|x^t\|}\right)+\frac{C}{|x^t|}.$$

Maintenant, puisque la fonction support $v_{2\Delta}$ est une fonction continue positivement homogène et sous-additive, on obtient, pour tout $x\in B(x^t,\delta)$,

$$\begin{aligned}(\nabla u^0(x),\xi_t) &\geq v_{2\Delta}(\xi_t)-v_{2\Delta}\left(-\frac{x-x^t}{\|x^t\|}\right)+\frac{C}{\|x^t\|}\\ &\geq v_{2\Delta}(\xi_t)-\frac{\|x-x^t\|}{\|x^t\|}v_{2\Delta}\left(\frac{x^t-x}{\|x^t-x\|}\right)+\frac{C}{\|x^t\|}\\ &\geq v_{2\Delta}(\xi_t)+\frac{C}{\|x^t\|}-\frac{\delta}{\|x^t\|}\inf_{\|y\|=1}v_{2\Delta}(y).\end{aligned}$$

Nous avons donc qu'il existe une constante $C' > 0$ indépendante du temps t telle que

$$\frac{C'}{\|x^t\|} \leq (\nabla u^0(x), \xi_t) - v_{2\Delta}(\xi_t) \leq 0.$$

En particulier, puisque $\|x^t\|$ diverge quand $t \to t_\infty$, nous obtenons

$$\exists i_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall i \geq i_0, \ \ |(\nabla u^0(x), \xi_t) - v_{2\Delta}(\xi_{t_i})| \leq \varepsilon/3V,$$

et donc

$$\Big| \int_{B(x^t,\delta)} \big(\nabla u^0(x) - v_{2\Delta}(\xi_t)\big)\, e^{-w_t(x)} dx \Big| \leq \varepsilon/3. \tag{5.40}$$

En utilisant à nouveau l'inégalité (5.36) avec $\delta = \delta_\theta$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \Big| v_{2\Delta}(\xi_t) V - \int_{B(x^t,\delta)} v_{2\Delta}(\xi_t)\, e^{-w_t(x)} dx \Big| &= \Big| \int_{\mathfrak{a}_1} v_{2\Delta}(\xi_t)\, e^{-w_t(x)} dx - \int_{B(x^t,\delta)} v_{2\Delta}(\xi_t)\, e^{-w_t(x)} dx \Big| \\ &= \Big| \int_{\mathfrak{a}_1 \setminus B(x^t,\delta)} v_{2\Delta}(\xi_t)\, e^{-w_t(x)} dx \Big| \\ &\leq d\theta. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\Big| v_{2\Delta}(\xi_t) V - \int_{B(x^t,\delta)} v_{2\Delta}(\xi_t)\, e^{-w_t(x)} dx \Big| \leq \varepsilon/6. \tag{5.41}$$

Terminons en remarquant par continuité de $v_{2\Delta}$ que

$$\exists i_1 \in \mathbb{N}, \ \ \forall i > i_1, \ \ |v_{2\Delta}(\xi_{t_i}) V - v_{2\Delta}(\xi_{t_0}) V| \leq \varepsilon/3. \tag{5.42}$$

On peut alors conclure, grâce aux formules (5.39), (5.40), (5.41), (5.42), que :

$$\forall i \geq \max(i_0, i_1), \ \ \Big| \int_{\mathfrak{a}} (\nabla u^0(x), \xi_{t_i}) e^{-w_{t_i}(x)} dx - v_{2\Delta}(\xi_\infty) V \Big| \leq \varepsilon.$$

Nous avons donc bien la formule (5.38).

Maintenant, d'après le lemme 5.2.5, nous avons

$$0 = \int_{\mathfrak{a}_1} (\nabla w_t(x), \xi_t)\, e^{-w_t(x)} dx = t \int_{\mathfrak{a}_1} (\nabla u_t, \xi_t)\, e^{-w_t} dx + (1-t) \int_{\mathfrak{a}_1} (\nabla u^0, \xi_t)\, e^{-w_t(x)} dx.$$

Ainsi, par passage à la limite, nous obtenons que

$$-t_\infty \, \langle \mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+) + 2\rho_P, \xi_{t_\infty} \rangle + (1 - t_\infty)\, v_{2\Delta}(\xi_{t_\infty}) = 0,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$-\frac{t_\infty}{t_\infty - 1} \langle \mathrm{Bar}_{DH}(2\Delta^+) + 2\rho_P, \xi_{t_\infty} \rangle = v_{2\Delta}(\xi_\infty). \tag{5.43}$$

Étudions donc la fonction

$$f : t \in [0,1[\mapsto -\frac{t}{t-1} \big(\mathrm{Bar}(2\Delta^+)\big) + 2\rho_P \in \mathfrak{a}_1^*.$$

Remarquons que $f(0) = 0 \in \mathfrak{a}_1^*$. Or nous savons que $0 \in 2\,\mathrm{Int}(\Delta)$ donc $f(0) \in \mathrm{Int}(\Delta)$. Ainsi, puisque la fonction $t/(t-1)$ est une fonction strictement décroissante sur $[0,1[$ à valeurs dans $]-\infty, 0]$, les valeurs de f parcourent la demi-droite d'origine 0 et de direction $-(\mathrm{Bar}_{DH}(2\Delta^+) + 2\rho_P)$. Grâce à l'équation (5.43), nous obtenons que $f(t_\infty)$ est un vecteur où son évaluation atteint la valeur $v_{2\Delta}(\xi_{t_0})$, cela signifie que $f(t_\infty)$ appartient à l'hyperplan support défini par ξ_{t_∞}. Ainsi t_∞ est l'unique temps $t \in [0,1[$ tel que

$$-\frac{t}{t-1} \left(\mathrm{Bar}_{DH}(2\Delta^+) + 2\rho_P\right) \in \partial\,(2\Delta)\,.$$

En utilisant l'équation (5.8), on peut ré-écrire cette dernière condition sous la forme

$$\frac{t}{t-1} \left(\mathrm{Bar}_{DH}(\Delta^+) + 2\rho_P\right) \in \partial \left(\Delta^+ + 2\rho_P\right).$$

□

5.4 Exemple dans le cas horosphérique

Il est intéressant de se demander s'il existe des variétés horosphériques dont le soliton de Kähler-Ricci est non-trivial. La réponse est affirmative, il existe des exemples en nombre infinis notamment donnés dans l'article [47]. Ces variétés horosphériques ont un groupe d'automorphisme non réductif, cela implique (par le théorème de Matsushima, voir [39]) qu'elles ne peuvent admettre de métriques de Kähler-Einstein. Or puisqu'elles admettent quand même un soliton de Kähler-Ricci, celui-ci ne peut-être que non-trivial. Nous allons nous intéresser à un exemple particulier, celui des *grassmanniennes impaires et symplectiques*. Nous rappelons leur définition dans le paragraphe suivant.

On fixe un espace vectoriel complexe E de dimension $2n+1$ et on prend $\omega \in \bigwedge^2 E^*$ de rang maximal i.e une 2-forme alternée de rang $2n$. On note alors $Gr_\omega(i, E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels V de E de dimension i isotropes pour ω i.e. $V_\omega^\perp \subset V$. Par la suite, on prendra $E = \mathbb{C}^{2n+1}$ et on notera alors $Gr_\omega(i, 2n+1)$. Il est montré dans [40] que pour $i \in \{2, \cdots, n-1\}$ et $n > 2$, la variété $Gr_\omega(i, 2n+1)$ est une variété horosphérique dont le groupe des automorphismes est le groupe projectif symplectique impair $PSp_{2n+1} := Sp_{2n+1}/\{\pm\mathbb{I}\}$ qui se trouve être un groupe non-réductif et connexe (voir la section 3 de [40]).

Rappelons que Sp_{2n+1} est le stabilisateur dans GL_{2n+1} de la forme ω. Si on considère une base symplectique impaire $(e_0, e_1, \cdots, e_{2n})$ i.e. elle vérifie $\omega(e_i, e_j) = \delta_{i,2n+1-j}$ pour $0 \leq i, j \leq 2n$ alors $M \in Sp_{2n+1}$ si et seulement si elle s'écrit dans la base $(e_0, e_1, \cdots, e_{2n})$ sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & l \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $l \in \mathbb{C}^{2n}$ et $a \in Sp_{2n}$ où Sp_{2n} est le groupe symplectique de dimension $2n$. De plus, on remarque que $\mathbb{C}^*$ s'injecte dans Sp_{2n+1} comme les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et Sp_{2n} comme les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

De plus, on note alors U le sous-groupe de Sp_{2n+1} de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & I_{2n} \end{pmatrix},$$

avec $l \in \mathbb{C}^{2n}$. Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 5.4.1 *Le sous-groupe U est le radical unipotent de Sp_{2n+1} et $(\mathbb{C}^* \times Sp_{2n})$ est un sous-groupe réductif. En particulier on a l'égalité suivante :*

$$Sp_{2n+1} = U \rtimes (\mathbb{C}^* \times Sp_{2n}).$$

Démonstration. Voir la section 3 de [40]. □

On sait que le champs de vecteur solitonique va appartenir au centre de l'algèbre de lie de $\mathbb{C}^* \times Sp_{2n}$. Or cette algèbre de Lie est égale au facteur $\mathbb{C} \times \mathfrak{sp}_{2n}$ et son centre va donc être égal à $\mathbb{C}$ puisque $\mathfrak{sp}_{2n}$ est simple donc son centre est nul. On résume cela dans la proposition suivante :

Proposition 5.4.2 *Pour tout $n > 2$ et $i \in \{2, \cdots, n-1\}$, le champ de vecteurs solitonique de la variété $Gr_\omega(i, 2n+1)$ est de la forme :*

$$X := \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$.

Démonstration. Le seul point qui reste encore à justifier est le fait que $\lambda_0 \neq 0$ mais cela est une conséquence du fait que la variété $Gr_\omega(i, 2n+1)$ admet un soliton non trivial (puisque son groupe d'automorphisme est non-reductif). □

On veut maintenant étudier la décomposition solitonique de $Gr_\omega(i, 2n+1)$. Pour cela, on commence par remarquer que, grâce à la proposition 5.4.1, l'algèbre de Lie de Sp_{2n+1} que l'on notera $\mathfrak{sp}_{2n+1}$ admet la décomposition suivante :

$$\mathfrak{sp}_{2n+1} = (\mathbb{C} \times \mathfrak{sp}_{2n}) \oplus \mathfrak{u}, \tag{5.44}$$

où $\mathfrak{u}$ est l'algèbre de Lie de U égale à :

$$\mathfrak{u} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; : \; l \in \mathbb{C}^{2n} \right\}.$$

On notera $(L_i)_{i=1,\cdots,2n}$ la base de $\mathfrak{u}$ donnée par

$$L_i := \begin{pmatrix} 0 & e_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que pour tout $i \in \{1, \cdots, 2n\}$

$$[X, L_i] = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & e_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 \, e_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_0 \, L_i. \tag{5.45}$$

Cela nous donne donc la décomposition solitonique.

Théorème 5.4.3 *Pour tout $n > 2$ et $i \in \{2, \cdots, n-1\}$, la variété $Gr_\omega(i, 2n+1)$ admet un soliton de Kähler-Ricci dont le champs de vecteur solitonique est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}_{2n+1}, \;\; \lambda_0 \in \mathbb{C}^*.$$

On a la décomposition solitonique suivante :

$$\mathfrak{sp}_{2n+1} = V_0 \oplus V_{\lambda_0},$$

où $V_0 = (\mathbb{C} \times \mathfrak{sp}_{2n})$ i.e.

$$\forall Y \in (\mathbb{C} \times \mathfrak{sp}_{2n}), [X, Y] = 0,$$

et $V_{\lambda_0} = \mathfrak{u}$ i.e.

$$\forall L \in \mathfrak{u}, [X, L] = \lambda_0 \, L.$$

Démonstration. Par le théorème 3.5.3, $\mathfrak{sp}_{2n+1}$ admet une décomposition sous la forme

$$\mathfrak{sp}_{2n+1} = V_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} V_{\nu_i},$$

avec $N \geq 1$ (puisque le soliton de Kähler-Ricci sur les variétés grassmanniennes impaires est non trivial) et où

$$V_{\lambda_i} = \{ Y \in \mathfrak{sp}_{2n+1} \; : \; [X, Y] = \nu_i \, Y \}.$$

Déjà on remarque, par un calcul direct, que

$$\forall Y \in (\mathbb{C} \times \mathfrak{sp}_{2n}), \;\; [X, Y] = 0,$$

et donc

$$(\mathbb{C} \times \mathfrak{sp}_{2n}) \subset V_0.$$

De plus, par l'équation (5.45), nous avons

$$\mathfrak{u} \subset V_{\lambda_0}.$$

Or, l'équation (5.44) nous donne que

$$\mathfrak{sp}_{2n+1} = (\mathbb{C} \times \mathfrak{sp}_{2n}) \oplus \mathfrak{u},$$

et donc les inclusions précédentes sont des égalités et cela nous donne donc la décomposition solitonique souhaitée. $\square$

Bibliographie

[1] ABREU, M. Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates. In *Symplectic and contact topology : interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001)*, vol. 35 of *Fields Inst. Commun.* Amer. Math. Soc., 2003, pp. 1–24.

[2] ATIYAH, M. F. Convexity and Commuting Hamiltonians. *Bull. London Math. Soc. 14*, 1 (01 1982), 1–15.

[3] AUBIN, T. Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. *Bull. Sci. Math. 102* (1978), 63 – 95.

[4] AUDIN, M. *Torus Actions on Symplectic Manifolds*. Progress in Math. Birkhäuser, 2012.

[5] BATYREV, V. V., AND SELIVANOVA, E. N. Einstein-Kähler metrics on symmetric toric Fano manifold. *J. reine angew. Math. 512* (1999), 225–236.

[6] BERGER, M., GAUDUCHON, P., AND MAZET, E. *Le Spectre D'une Variété Riemannienne*. Lecture Notes in Math. 194. Springer, 1971.

[7] BESSE, A. *Einstein Manifolds*. Classics in mathematics. Springer, 1987.

[8] BOTT, R., AND TU, L. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Math. Springer, 1995.

[9] BOUCKSOM, S., EYSSIDIEUX, P., AND GUEDJ, V. *An Introduction to the Kähler-Ricci Flow*. Lecture Notes in Math. volume 2086. Springer, 2013.

[10] BRION, M. *Sur l'image de l'application moment*. Springer, 1987, pp. 177–192.

[11] BRION, M. Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphŕiques. *Duke Math. J.* (04 1989), 397–424.

[12] CALDERBANK, D. M. J., DAVID, L., AND GAUDUCHON, P. The Guillemin formula and Kähler metrics on toric symplectic manifolds. *J. Symplectic Geom. 1* (2002), 767–784.

[13] CAO, H.-D. Deformation of Kähler matrics to Kähler-einstein metrics on compact Kähler manifolds. *Inventiones math. 81* (1985), 359–372.

[14] CAO, H.-D., TIAN, G., AND ZHU, X. Kähler–Ricci solitons on compact complex manifolds with $C_1(M) > 0$. *GAFA 15* (2005), 697–719.

[15] DELCROIX, T. *Kähler-Einstein metrics on group compactifications*. PhD thesis, Univ. Grenoble Alpes, 2015.

[16] DELCROIX, T. K-Stability of Fano spherical varieties. *ArXiv e-prints*, arXiv :1608.01852 (Aug. 2016).

[17] DEMAILLY, J. P. Complex analytic and differential geometry. Notes de cours.

[18] DEMAZURE, M. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. *Annales scient de l'Éc. Norm. Sup. 3* (1970), 507–588.

[19] DONALDSON, S. K. Kähler geometry on toric manifolds, and some other manifolds with large symmetry. In *Handbook of geometric analysis. No. 1*. Inter. Press, 2008, pp. 29–75.

[20] FUJIKI, A. On automorphism groups of compact Kähler manifolds. *Invent.. math. 44* (1978), 225–258.

[21] FUTAKI, A. An obstruction to the existence of Einstein-Kähler metrics. *Invent. Math. 73* (1983), 437–443.

[22] FUTAKI, A., AND MABUCHI, T. Bilinear forms and extremal Kähler vector fields associated with Kähler classes. *Math. Ann. 301* (1995), 199–210.

[23] GAUDUCHON, P. Calabi's extremal Kähler metrics : An elementary introduction. http ://germanio.math.unifi.it/wp-content/uploads/2015/03/dercalabi.pdf.

[24] GUAN, D. Quasi-Einstein metrics. *International J. Math. 6* (1995), 371–379.

[25] GUAN, D. Extremal solitons and exponential convergence of the modified Calabi flow on certain $\mathbb{CP}^1$ bundles. *Pacific J. Math. 233* (11 2007).

[26] GUILLEMIN, V., S. S. Convexity properties of the moment mapping. *Inventiones mathematicae 67* (1982), 491–514.

[27] GUILLEMIN, V. *Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n-space*. Progress in Probability. Birkhäuser, 1994.

[28] GUTIERREZ, C. *The Monge-Ampère Equation*. Birkhäuser, 2001.

[29] GUZMÁN, M. *Differentiation of Integral in $\mathbb{R}^n$*. Lecture Notes in Math. Springer, 1975.

[30] HUANG, H. Kahler-Ricci flow on homogeneous toric bundles. *ArXiv e-prints* (2017).

[31] KIRWAN, F., MATHER, J., AND GRIFFITHS, P. *Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry*. Princeton Univ. Press, 1984.

[32] KNOP, F. The Luna-Vust theory of spherical embeddings. Notes de conférence, 1991.

[33] KOBAYASHI, S. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Springer, 2012.

[34] LEGENDRE, E. Toric Kähler–Einstein metrics and convex compact polytopes. *The Journal of Geom. Ana. 26* (2015), 399–427.

[35] LEGENDRE, E., AND SENA-DIAS, R. Toric aspects of the first eigenvalue. *The Journal of Geom. Ana. 28* (2018), 2395–2421.

[36] LEGENDRE, E., AND TØNNESEN-FRIEDMAN, C. Toric generalized Kähler–Ricci solitons with Hamiltonian 2-form. *Math. Z. 274* (2013), 1177–1209.

[37] MABUCHI, T. Einstein-Kähler forms, Futaki invariants and convex geometry on toric Fano varieties. *Osaka J. Math. 24* (1987), 705–737.

[38] MARCUS, M., AND MINC, H. *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*. Dover Pub., 1992.

[39] MATSUSHIMA, Y. Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne. *Nagoya Math. J. 11* (1957), 145–150.

[40] MIHAI, I. A. Odd symplectic flag manifolds. *Transformation Groups 12* (2007), 573–599.

[41] NEWLANDER, A., AND NIRENBERG, L. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math. (2) 65* (1957), 391–404.

[42] ODA, T. *Convex Bodies and Algebraic Geometry : An Introduction to the Theory of Toric Varieties*. Ergebnisse Math. Grenz. Springer, 2012.

[43] ODA, T., AND MIYAKE, K. *Lectures on torus embeddings and applications*. Tata Institute of Fundamental Research. Springer, 1978.

[44] PALI, N. The Soliton Kähler-Ricci Flow over Fano Manifolds. *New York J. Math. 20* (2014), 845–919.

[45] PALI, N. The Soliton-Ricci Flow with variable volume forms. *Complex Manifolds 3* (2014), 41–144.

[46] PASQUIER, B. *Fano horospherical varieties*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006.

[47] PASQUIER, B. On some smooth projective two-orbit varieties with Picard number 1. *Math. Ann. 344* (2009), 963–987.

[48] PASQUIER, B., AND PERRIN, N. Local rigidity of quasi-regular varieties. *Math. Z. 265* (2010), 589–600.

[49] PODESTÀ, F., AND SPIRO, A. Kahler-Ricci solitons on homogeneous toric bundles. *J. reine angew. Math. 642* (2010), 109–127.

[50] SAITO, S. On the vanishing of the holomorphic invariants for Kähler-Ricci solitons. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 90* (2014), 57–59.

[51] SCHWARZ, G. W. *The Topology of Algebraic Quotients*. Birkhäuser, 1989.

[52] SERRE, J. P. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. de l'Inst. Fourier 6* (1956), 1–42.

[53] SIU, Y.-T. The existence of Kahler-Einstein metrics on manifolds with positive anticanonical line bundle and a suitable finite symmetry group. *Annals of Mathematics 127* (1988), 585–627.

[54] SPRINGER, T. *Linear Algebraic Groups*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, 1998.

[55] SZEKELYHIDI, G. Greatest lower bounds on the Ricci curvature of Fano manifolds. *Compositio Math. 147* (2011), 319–331.

[56] SZÉKELYHIDI, G. *An Introduction to Extremal Kähler Metrics*. Amer. Math. Soc., 2014.

[57] TAUVEL, P., AND YU, R. *Lie Algebras and Algebraic Groups*. Springer, 2006.

[58] TIAN, G. On Kähler-Einstein metrics on certain Kahler manifolds with $C_1(M) > 0$. *Inventiones math. 89* (1987), 225–246.

[59] TIAN, G., AND ZHU, X. A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons. *Comment. Math. Helv. 77* (2002), 297–325.

[60] TIAN, G., AND ZHU, X. Convergence of Kahler Ricci flow. *J. Amer. Math. Soc. 20* (2006), 675–699.

[61] TIAN, G.AND ZHU, X. Uniqueness of Kähler-Ricci solitons. *Acta Math. 184* (2000), 271–305.

[62] TIMASHEV, D. *Homogeneous Spaces and Equivariant Embeddings*. Springer, 2011.

[63] VOISIN, C., AND SCHNEPS, L. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I :*. Cambridge Studies in Adv. Math.+ Vol 1. Cambridge Univ. Press, 2002.

[64] WANG, X.-J., AND ZHU, X. Kähler–Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class. *Adv. in Math. 188* (2004), 87 – 103.

[65] YAU, S.-T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I. *Comm. on Pure and Applied Math. 31* (1978), 339–411.

[66] ZHU, X. Kähler-Ricci flow on a toric manifold with positive first Chern class. In *Differential geometry*, vol. 22 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*. Int. Press, 2012, pp. 323–336.

Université Paris-Saclay

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Titre : Sur la géométrie des solitons de Kähler-Ricci dans les variétés toriques et horosphériques

Mots Clefs : Solitons de Kähler-Ricci, métriques de Kähler-Einstein, variétés toriques, Géométrie Kählérienne

Résumé : Cette thèse traite des solitons de Kähler-Ricci qui sont des généralisations naturelles des métriques de Kähler-Einstein. Elle est divisée en deux parties. La première étudie la décomposition solitonique de l'espace des champs de vecteurs holomorphes dans le cas des variétés toriques. La seconde partie étudie de manière analytique les variétés horosphériques en redémontrant par la méthode de la continuité l'existence de solitons de Kähler-Ricci sur ces variétés et en calculant après la borne supérieure de Ricci.

Title : On the geometry of Kähler-Ricci solitons on toric and horospherical manifold

Keys words : Kähler-Ricci solitons, Kähler-Einstein metrics, toric manifold, Kähler geometry

Abstract : This thesis deal with Kähler-Ricci solitons that are natural generalizations of Kähler-Einstein metrics. It is divided into two parts. The first one studies the solitonic decomposition of the space of holomorphic vector spaces in the case of toric manifold. The second one studies is an analytic way the existence of horospherical Kähler-Ricci solitons on thoses manifolds and then computes the greatest Ricci lower bound.