



**HAL**  
open science

# Modélisations et Simulations numériques avancées pour les élastomères

Stéphane Lejeunes

► **To cite this version:**

Stéphane Lejeunes. Modélisations et Simulations numériques avancées pour les élastomères. Sciences de l'ingénieur [physics]. Aix Marseille Université, 2019. tel-02115239

**HAL Id: tel-02115239**

**<https://theses.hal.science/tel-02115239v1>**

Submitted on 30 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ  
LABORATOIRE DE MECANIQUE ET  
D'ACOUSTIQUE/UMR7031

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Stéphane LEJEUNES

Modélisations et Simulations numériques avancées pour les élastomères

Soutenue le 14/03/2019  
devant le jury composé de :

Noëlle Billon	Professeur, Mines ParisTech & Cemef	Rapporteur
Gérard Rio	Professeur, ENSIBS & IRDL	Rapporteur
Erwan Verron	Professeur, Ecole Centrale Nantes & GEM	Rapporteur
Patrick Chabrand	Professeur, Aix Marseille Univ. & ISM	Examineur
Dominique Eyheramendy	Professeur, Ecole Centrale Marseille & LMA	Examineur
Michael Kaliske	Professeur, TU. Dresde & ISA	Examineur
Nicolas Triantafillydis	Professeur, Ecole Polytechnique & LMS	Examineur
Adnane Boukamel	Directeur Scientifique, IRT Railenium	Invité
Stéphane Méo	Professeur, Univ. Tours & Gabriel Lamé	Invité





---

# Sommaire

<b>Notice individuelle</b>	<b>1</b>
1 Formation . . . . .	1
2 Parcours professionnel . . . . .	2
3 Activités pédagogiques et de formation . . . . .	2
4 Activités de recherche . . . . .	5
5 Activités administratives et d'intérêt collectif . . . . .	6
6 Activités de valorisation et de transfert . . . . .	7
7 Activités d'encadrement de la recherche . . . . .	8
8 Animation scientifique et rayonnement . . . . .	10
9 Production scientifique . . . . .	13
<b>Contexte général des travaux</b>	<b>19</b>
1 Contexte industriel autour des élastomères : description des principales applica- tions étudiées . . . . .	19
2 Contexte scientifique : les principaux verrous . . . . .	22
3 Approches suivies . . . . .	23
4 Organisation du manuscrit . . . . .	26
<b>Chapitre 1 Sur la modélisation du comportement des élastomères</b>	<b>27</b>
1.1 Comportement dynamique isotherme . . . . .	29



1.2	Prise en compte d'un endommagement par fatigue . . . . .	48
1.3	Sur le concept de l'énergie hybride . . . . .	53
1.4	Sur l'aspect validation des modèles . . . . .	56
1.5	Conclusion . . . . .	59
<b>Chapitre 2 Couplages Multiphysiques</b>		<b>61</b>
2.1	Couplage thermo-mécanique et énergie hybride . . . . .	63
2.2	Couplages thermo-chimio-mécaniques . . . . .	65
2.3	Vieillessement thermique . . . . .	69
2.4	Conclusion . . . . .	76
<b>Chapitre 3 Mise en oeuvre numériques</b>		<b>77</b>
3.1	Schémas locaux d'intégration en temps . . . . .	79
3.2	Problèmes couplés . . . . .	82
3.3	Analyse isogéométrique pour problèmes quasi-incompressibles . . . . .	89
3.4	Aspects logiciels . . . . .	100
3.5	Conclusion . . . . .	107
<b>Synthèse et perspectives des travaux</b>		<b>109</b>
1	Synthèse . . . . .	109
2	Travaux en cours et perspectives . . . . .	111
<b>Bibliographie</b>		



---

# Notice individuelle

## Etat civil/coordonnées

Nom : Lejeunes  
Prénom : Stéphane  
Date et lieu de naissance : 24 mars 1977 à Marseille  
Nationalité : Française  
Situation familiale : Marié, 1 enfant né en 2013  
Téléphone professionnel : 0484525597  
E-Mail : lejeunes@lma.cnrs-mrs.fr  
Adresse professionnelle : LMA, 4 impasse Nikola Tesla CS 40006 13453 Marseille Cedex 13

## 1 Formation

- 2006 - 2002 **Thèse de doctorat en mécanique.** Titre : *Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèle.* <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00090600v1>. Université de la Méditerranée.  
Soutenue le 20 mars 2006, financement : Bourse de Docteur Ingénieur CNRS  
Jury : Adanne Boukamel (co-directeur), Bruno Cochelin (directeur), Michel Potier-Ferry (président), Nicolas Moës (rapporteur), Christian Rey (rapporteur), Stéphane Méo, Elio Zoppitelli
- 2002 - 2001 **DEA de mécanique.** École doctorale en mécanique, physique et modélisation (ED353), mention bien, major de l'option solides.

- 2001 - 1999 **Diplômé de l'École Supérieure d'Ingénieurs de Marseille**, intégrée à l'Ecole Centrale Marseille en 2004. *Option mécanique et matériaux.*
- 1999 - 1998 **Maîtrise de mécanique, options solides**, UNIMECA, Université de la Méditerranée.

## 2 Parcours professionnel

depuis dec. 2007 **Ingénieur de Recherche CNRS**, 1ère classe depuis le 01/01/2017, emploi type : expert en calcul scientifique.

*Mes principales activités peuvent se décomposer en 4 catégories :*

- recherche : pilotage de l'activité autour du comportement des élastomères et implication dans d'autres thématiques telles que couplages multi-physiques, structures, multi-échelles.
- valorisation : mise en place et réalisation de prestations ou de collaborations industrielles, réalisation et diffusion de logiciels ou de composants logiciels.
- transmission du savoir : enseignements dispensés en école d'ingénieurs (voir détail ci-après), journées à destination du public, encadrement de stages ou de projets d'élèves ingénieurs, co-encadrement de stages de master et de thèses.
- administratives : co-responsable de l'équipe Matériaux et Structures (26 permanents, une vingtaine de non-permanents), implication dans diverses commissions internes au laboratoire depuis 2007 (conseil de laboratoire, commission scientifique, ...).

sept 2007 à dec 2007 **Ingénieur de Recherche contractuel** en calcul scientifique au CNRS : réalisation d'un outil métier pour le pré-dimensionnement de structures élastomères-métal dans le cadre d'un contrat de prestation avec la société Eurocopter.

2006 - 2007 **ATER à l'Ecole Centrale Marseille (section 26, temps plein)**, Analyse numérique (TD et TP), Modélisation de structures (Projets), Programmation structurée en langage C (TD et TP).

2005 - 2006 **ATER à l'Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille (section 26, temps partiel)**, Analyse numérique (TD et TP), Modélisation de structures (Projets)

## 3 Activités pédagogiques et de formation

Mes activités d'enseignements depuis 2003 ont principalement été effectuées à l'Ecole Centrale Marseille dans les 3 années de formation. Ces enseignements ont concerné différentes thématiques et différentes sections universitaires : mécanique, analyse numérique et informatique. Ces dernières années, j'interviens essentiellement dans l'option de 3ème année MECA parcours M3S (modélisation mécanique des matériaux et des structures) en tant que membre extérieur de l'équipe pédagogique (voir <https://wiki.centrale-marseille.fr/m3s/> pour plus de détail sur le parcours M3S). Ces enseignements peuvent également concerner des étudiants de master II.

2017-2010 **Ecole Centrale Marseille (vacataire) :**

- 3<sup>e</sup>année option MECA et M2 matériaux et structures avancés : comportement des matériaux. Je porte la seconde partie du cours intitulée «Grandes Déformations» qui comporte **12h de cours et 12h de TD** (la première partie étant réalisée par Thierry Désoyer). Ce cours vise à présenter les notions de cinématiques et de sthénique en grandes déformations, à détailler les équations d'équilibre et le cadre thermodynamique pour formuler des lois de comportement élastiques ou inélastiques en grandes déformations et aborde la résolution de problèmes thermo-mécaniques couplés. Mes supports de cours sont disponibles à l'adresse : <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01104172v2>
- 1<sup>re</sup>année, dimensionnement des structures élancées, cours optionnel ayant pour objectif d'initier les étudiants à des modèles de poutres pour le dimensionnement de structures de type treillis. Je participe à la partie numérique du cours qui consiste en des séances de TP éléments-finis d'initiation à Abaqus puis de dimensionnement de structures poutres par simulation numérique : **14h TP**.
- 3<sup>e</sup>année option MECA, projets modélisation mécanique : ces projets représentent 100h pour les élèves en binômes ou trinômes et peuvent être basés sur une activité de recherche ou sur une problématique industrielle en lien avec les enseignements de mécanique. Pour l'enseignant, les principales tâches consistent à définir un sujet à vocation pédagogique et à accompagner les élèves dans la réalisation du projet. J'encadre ou je co-encadre un ou plusieurs groupes de projet chaque année.
- Parcours R&D. Il s'agit de définir et de suivre la réalisation d'un projet de découverte de la recherche s'adressant à des élèves de 1er, 2eme ou 3eme année qui choisissent ce parcours optionnel. Les élèves effectuent un travail personnel et sont accueillis pour des courtes périodes en laboratoire (typiquement 3 à 4 semaines par année). J'ai défini, proposé et encadré trois de ces stages dans la période.

Total heures équivalent TD  $\simeq 69H/an$

- 2007-2006 **Ecole Centrale Marseille (ATER temps plein) :**
- 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> année, analyse numérique (tronc commun), **28h TD, 76h TP**. Il s'agit de TD et de TP sur machines (scilab) permettant de mettre en pratique et de manipuler les notions vues en cours (responsable : Jacques Liandrat), tel que : interpolation/approximation, intégration numérique, systèmes linéaires, résolution d'équations différentielles par différences finies/éléments-finis.
  - 1<sup>re</sup> année, programmation structurée, **28h TD, 40h TP**. Ces enseignements sont tous réalisés sur machines en langages C et C++, la partie TD est une application directe des concepts vus en cours (2h par séance). La partie TP permet d'aborder la question de l'architecture logiciel à travers la réalisation de minis-applications (4h par séance).
  - 1<sup>re</sup> année, projets d'analyse numérique, encadrement de projet. Ces projets représentent un volume horaire d'environ 24h pour les étudiants. Ils sont définis par les enseignants et doivent illustrer les notions vues en cours d'analyse numérique.
  - 3<sup>e</sup> année option MECA, projet modélisation mécanique, encadrement de projet (voir description plus haut)

Total heures équivalent TD : 195H

- 2006-2005 **Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille (ATER temps partiel) :**
- 1<sup>re</sup> année, analyse numérique, **20h TD, 44h TP** (voir description plus haut)
  - 1<sup>re</sup> année, projets d'analyse numérique, encadrement de projet (voir description plus haut)
  - 3<sup>e</sup> année, projets modélisation mécanique, encadrement de projet (voir description plus haut)
- Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille (vacataire) :**
- 3<sup>e</sup> année option mécanique et matériaux, modélisation des solides élastiques, **24h TD**. Il s'agit de TD sur machines visant à coder et à utiliser des éléments-finis (en HPP et élasticité). Un code de calcul en fortran 77 est fourni aux élèves avec des parties manquantes dans les calculs élémentaires (comportement et matrice tangente). Ils doivent formuler sur papier les calculs à réaliser puis compléter les éléments manquants dans le code. Après validation des développements, ils doivent réaliser un calcul de structure et rédiger une mini-note de calcul.

Total heures équivalent TD : 99H

- 2005-2004    **Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille (vacataire) :**
- 3<sup>e</sup>année option mécanique et matériaux, modélisation des solides élastiques, **24h TD** (voir descriptif plus haut)
  - 2<sup>e</sup>année, projets de méthodes numériques, encadrement de projets (idem projets analyse numérique)
- Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille (vacataire) :**
- 3<sup>e</sup>année, projets d'études, encadrement de projets (idem projets analyse numérique)

Total heures équivalent TD : 47H

- 2004-2003    **Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille (vacataire) :**
- 3<sup>e</sup>année option mécanique et matériaux, modélisation des solides élastiques, **24h TD** (voir descriptif plus haut)
  - 2<sup>e</sup>année, projet de méthodes numériques, encadrement de projet (idem projets analyse numérique)

Total heures équivalent TD : 32H

## 4 Activités de recherche

Mes activités de recherche concernent la modélisation du comportement de matériaux et de structures en élastomère et la simulation numérique en mécanique. Les approches que je développe s'appuient sur la mécanique des milieux continus avec un attachement tout particulier au respect d'un cadre thermodynamique rigoureux. L'objectif premier étant de faire progresser les connaissances sur le comportement complexe de ces matériaux dans un cadre multi-échelles et/ou multi-physiques. J'accorde également une grande importance au transfert de ces connaissances vers l'industrie ou vers la formation des futurs ingénieurs. Ma position d'ingénieur de recherche me permet de développer ces types de transferts (savoir et technologies) avec une grande liberté d'action.

**Ces activités font l'objet de collaborations avec différents chercheurs externes ou internes au laboratoire. J'en assure pleinement l'animation scientifique depuis 2010 ce qui me conduit également à développer ou à piloter des collaborations scientifiques avec différents partenaires industriels : Airbus Helicopter, SMAC, SNECMA, LORD, ...**

Ces activités peuvent être décomposées en 3 axes :

- **La modélisation du comportement dynamique des élastomères chargés.** Il s'agit d'établir des modèles de comportements en grandes déformations reproduisant la phénoménologie propre à ces matériaux y compris en fatigue. En particulier les diverses dépendances, non-linéaires, aux paramètres de chargement (vitesse, amplitude, température, chargements multi-axiaux, etc) et les effets d'histoire (viscosité, endommagement, réarrangement macro-moléculaire, etc). Pour ce faire, nous nous basons sur deux approches complémentaires : **les modèles phénoménologiques** et **l'homogénéisation** de VER idéalisés (intégrant les charges). Ces modèles sont développés et validés à par-

tir de campagnes expérimentales originales. Cet axe a fait l'objet des thèses de Farid Khédimi et Alexis Delattre.

- **Les couplages multi-physiques**, en particulier thermo-chimio-mécanique. Cet aspect doit permettre de faire le lien entre modèles de comportement mécanique et modèles thermo-cinétiques intégrant l'évolution physico-chimique de ces matériaux due aux effets d'environnement (chargement mécanique, thermique, vieillissement). En effet, ces effets peuvent avoir un impact très important sur le comportement mécanique à long terme et en particulier le comportement en fatigue. Cet axe de recherche combine des aspects expérimentaux, de la modélisation dans un cadre thermodynamique rigoureux et des développements numériques. Il concerne les thèses de Thien An NGuyen et de Komla Dela Ahose ainsi que le postdoc de Rami Bouaziz. La thèse de Flavien Sabourin s'inscrit également dans cet axe même si le matériau traité est complètement différent.
- **Les modèles numériques ou les algorithmes spécifiques**. La complexité des modèles de comportements développés (nombreuses variables internes et loi d'évolutions) combiné aux spécificités géométriques des structures étudiées (fort élancement et fort confinement) nécessite des stratégies de résolution adaptées. Cela peut concerner aussi bien la simulation de structures que l'identification des paramètres matériaux. Nous cherchons donc des algorithmes d'intégrations robustes et performants, des méthodes d'identifications originales, des modèles de structures spécifiques (type éléments finis enrichis réduits ou condensés) ou des méthodes numériques innovantes (analyse isogéométrique, solveur espace-temps). Ces aspects ont concerné ma thèse, partiellement celle de Alexis Delattre et celle de Christelle Saadé.

## 5 Activités administratives et d'intérêt collectif

**Co-responsable** avec Stéphane Bourgeois de l'équipe Matériaux et Structures (depuis janvier 2018). Il s'agit de l'équipe de mécanique des solides du LMA qui comporte 20 chercheurs/enseignants - chercheurs permanents, 4 ingénieurs de recherche, 1 ingénieur d'études, 1 gestionnaire et une vingtaine de non-permanents (stagiaires/doctorants/post-doctorants). Le budget annuel est de l'ordre de 100k€. Le rôle du responsable consiste en des aspects scientifiques (animation, demande de poste, communication, ...) des aspects RH (entretien d'activité, carrières ITA, ...) et des aspects de gestion financière/équipement.

**Membre du comité de direction** (depuis janvier 2018). Le comité de direction se réunit en moyenne tous les 15 jours. Il est composé de l'équipe de direction, des chefs d'équipes et de chargés de missions. Le Co-Dir est principalement chargé de l'opérationnel (mise en place du plan d'action de la direction) et constitue un espace d'échange entre la direction et les équipes.

**Membre élu** du conseil de laboratoire dans la période 2011-2017. Le conseil de laboratoire se réunit en moyenne 5 fois/an et a eu à traiter durant cette période un certain nombre de problématiques supplémentaires par rapport aux périodes précédentes en particulier à cause de la construction du nouveau bâtiment puis du déménagement du laboratoire à l'été 2015 sur le site de Château-Gombert.

**Membre nommé** du conseil scientifique du LMA pour la période 2011-2017. Le conseil scientifique a été consulté en moyenne 1 fois/an pour des questions de stratégies et de positionnement scientifique du laboratoire.

**Membre de diverses commissions internes** au laboratoire pour la période 2008-2017 :

- Informatique, commission permanente qui traite de la stratégie d'équipements (calculs, logiciels, stockage, etc), des remontés des besoins utilisateurs et du budget du service commun.
- Déménagement du laboratoire, commission éphémère chargée de traiter les questions pratiques liés au déménagement des équipements.
- Web, commission éphémère pour mettre en place le nouveau site Web du laboratoire (mis en place en 2013)
- Chateau Gombert, commission éphémère chargée de faire l'interface entre la maîtrise d'oeuvre (cabinet d'architectes G6), la maîtrise d'ouvrage (CNRS) et les utilisateurs du futur bâtiment.

**Expert HCERES** : membre d'un comité d'évaluation (laboratoire TPCIM, janvier 2019).

**Co-responsable des moyens de calcul** de l'équipe Matériaux et Structures : conception, achat, installation et administration de différents moyens (7 serveurs, 2 baies de disques et des services pour les utilisateurs).

**Administrateur et concepteur des différents sites web** de valorisation liés au aspects logiciels du LMA (Manlab, Craft, Homtools). Administrateur d'une plateforme interne de développement collaboratif (de type forge).

**Participation à divers événements de communication** à destination du grand public : fête de la science, visites du laboratoire par des extérieurs, etc. J'organise également des rencontres scientifiques avec des acteurs industriels et des chercheurs du laboratoire : j'ai par exemple organisé en 2016 une journée d'échange, multi-thématiques, Airbus Helicopters/LMA dans le cadre de l'aménagement dans le nouveau bâtiment (une trentaine de participants).

**Membre** de l'AFM, CSMA, Mecamat, Groupe Français des Polymères et de divers réseaux métiers (Calcul CNRS, Cesar, Devlog, Prodev, ...).

## 6 Activités de valorisation et de transfert

### Contrats de prestation

- Projet CABRI : Simulation en dynamique explicite de l'impact d'une hotte sur un châssis de protection du bac annexe, IRSN, 2004, note de calcul (Responsable scientifique : Adnane Boukamel)
- Étude de la chute d'un panier à étuis pour la protection de déchets nucléaires, Société KP1, 2006, note de calcul (Responsable scientifique : Adnane Boukamel)
- Réalisation d'un outil de prédimensionnement de paliers élastomériques (PredimLAM), Eurocopter, 2006, logiciel, documentation et rapport de validation (Responsable scientifique : Adnane Boukamel)
- Modélisation du comportement d'un élastomère pré-chargé en régime harmonique, Snecma, 2010, rapport technique (Responsables scientifiques : Adnane Boukamel et Dominique Eyheramendy)



- Détermination numérique de la perméabilité d'un matériau poreux à partir de microtomographies, Saint-Gobain, 2011, rapport technique (Responsables scientifiques : Stéphane Bourgeois et Stéphane Lejeunes)
- Evaluation numérique des propriétés mécanique effective d'un matériau poreux à partir de microtomographies, Saint-Gobain, 2012, rapport technique (Responsables scientifiques : Stéphane Bourgeois et Stéphane Lejeunes)
- Characterization and modeling of dual frequency behavior of dissipative elastomers, LORD, 2014, rapport technique (Responsables scientifiques : Stéphane Lejeunes et Dominique Eyheramendy)
- Modélisation de pièces amortissantes biconiques en élastomère, SMAC, 2017, rapport technique (Responsables scientifiques : Stéphane Lejeunes et Dominique Eyheramendy)
- Développement/extension de l'outil PredimLAM, Airbus Helicopters, 2018, en cours (Responsable scientifique : Stéphane Lejeunes)

*L'ensemble de ces contrats représentent un budget d'environ 150k€HT*

### Aspect logiciels

- projet Homtools : boîte à outils pour Abaqus servant à : générer des microstructures types (inclusions sphériques, ou polygonales : voronoï), automatiser la définition de conditions limites pour l'homogénéisation de matériaux hétérogènes (SUBC, KUBC, PBC) ou de structures hétérogènes (PBC) en petite ou grande déformations. Ce logiciel est constitué de scripts python et est diffusée en licence libre Cecill-C. Je porte ce projet avec Stéphane Bourgeois (voir <http://homtools.lma.cnrs-mrs.fr/>, 120 téléchargement par mois en moyenne provenant de différents pays)
- projet PredimLAM : outil métier pour Airbus Helicopters comportant une interface en C++ permettant de définir et de post-traiter très rapidement un problème à traiter sur différentes pièces typiques des architectures rotor (voir fig. 1) et un moteur de calcul éléments-finis, écrit en fortran, et utilisant des éléments-finis spécifiques (développés durant ma thèse). Ce logiciel est sous licence propriétaire Airbus Helicopter et a été initialement co-développé avec Adnane Boukamel.
- projet FemJAVA : plateforme de développement multi-physiques et multi-champs intégrant une interface de pré et post-traitement, et un moteur de calcul par éléments finis ou par analyse isogéométrique. Ce logiciel est en licence LGPL et va être diffusé prochainement. Ce projet est majoritairement écrit en Java. Je co-développe ce projet avec Dominique Eyheramendy qui en est le concepteur initial.

*L'ensemble de ces codes représentent plus de 200 000 lignes de codes dans différents langages et différentes architectures.*

## 7 Activités d'encadrement de la recherche

### Co-encadrement de thèses :

- **Flavien Sabourin**, Ingénieur ITER Organisation. Thèse démarrée en octobre 2017, dont le sujet est : Définition de loi de comportement thermomécanique non-linéaire des matériaux de structure d'ITER (type acier inox) pour les composants de la chambre à vide soumis à des chargements multi-physiques – Utilisé pour garantir l'intégrité structurelle des composants suivant les règles de conception et d'analyse applicables aux centrales électronucléaires. Co-encadrement avec Thierry Désoyer à hauteur de 50% (LMA-Ecole Centrale Marseille).



avec Dominique Eyheramendy.

- **Komla Dela Ahose** (50%, 2015) Vieillissement thermo-chimio-mécanique et endommagement dans les élastomères chargés sous sollicitations de fatigue. Co-encadrement avec Dominique Eyheramendy.
- **Pham Ba Tung** (50%, 2014) Etude de l'évolution des propriétés physico-chimiques d'un élastomère chargé sous sollicitation de fatigue. Co-encadrement avec Dominique Eyheramendy.
- **Farid Khédimi** (50%, 2007) Modélisation par éléments finis réduits de structures lamifiées élastomère-métal. Cas des lamelles courbes. Co-encadrement avec Adnane Boukamel.

#### Co-encadrement de stage de master I :

- **Pierre-Antoine Bou** (100%, 2018, Centrale Marseille) Validation d'un outil numérique pour la simulation d'élastomères techniques utilisés dans les rotors d'hélicoptères.
- **Louis Papillon** (50%, 2016, Centrale Nantes) Dimensionnement de butées élastomériques dans le domaine spatial. Co-encadrement avec Dominique Eyheramendy.
- **Bruno Franke Goularte** (50%, 2012, Centrale Marseille) Characterization and Modeling of LORD's Elastomers used as Lead-Lag Dumpers. Co-encadrement avec Dominique Eyheramendy.
- **Gabriel Heguy** (50%, 2011, Centrale Marseille) Détermination numérique de la perméabilité effective d'une céramique poreuse. Co-encadrement avec Stéphane Bourgeois.

#### Co-encadrement de stage de licence :

- **Saba Robinary** (100%, 2018, Aix Marseille Université) Caractérisation mécanique d'élastomères préalablement vieillis.

## 8 Animation scientifique et rayonnement

J'ai **co-organisé** (avec D. Eyheramendy et G. Machado) les évènements scientifiques suivants qui ont eu lieu au LMA ces deux dernières années :

- WMBR : Workshop Européen sur le comportement multiphysiques des élastomères, 30 nov. et 1. dec 2017, <http://wmbr2017.sciencesconf.org/>. Cet événement a été financé par le Labex MEC, Centrale Marseille, la Fédération Fabri de Peiresc et Zwick France. Il a regroupé 59 participants dont les principaux leaders Européens du domaine.
- ELASTO2016 : 4<sup>e</sup> journée sur la caractérisation mécanique des élastomères, 27 mai 2016, <http://elastomeres2016.sciencesconf.org/>. Cet événement a été financé avec le concours du Groupe transverse Mesure de champs et identification (AFM, AMAC, AUGC et Mecamat) et de l'école Centrale Marseille. La journée a permis de réunir 70 participants acteurs du domaine qu'ils soient industriels ou académiques.

J'ai également été **membre de différent comités** d'organisation de manifestations scientifiques :

- ECCMR 2007 Paris (European Conference on Constitutive Models for Rubber), organisé au Mines de Paris par A. Boukamel, L. Laiarinandrasana, S. Méo et E. Verron cette conférence internationale a regroupé 120 participants.
- CFM 2009 Marseille, organisé à St Charles par O. Débordes et C. Rey. Cette édition a regroupé plus de 1200 participants.

- CE2M10 2010 Briançon (école d'été CNRS changement d'échelles en mécanique des matériaux), organisé par M. Bornert, R. Brenner et O. Castelnau. Cette école a regroupé environ 80 participants issus du monde académique et industriel.

Je suis **reviewer** pour différentes revues internationales :

- Applied Mathematical Modelling
- Biomechanics and Modeling in Mechanobiology
- Composites Structures
- Comptes rendus Mécanique
- Continuum Mechanics and Thermodynamics
- International Journal of Solids and Structures
- Mechanics of Materials
- Polymer testing

J'ai été **Membre des jurys de thèses** suivants :

- Farid Khedimi, juillet 2010 Aix-Marseille I, en qualité de co-encadrant, composition du jury : A. Dogui, A. Boukamel, S. Bourgeois, S. Ahzi, L. Laiarinandrasana, C. Hochard, C. Fond
- Julie Devesvre, decembre 2011 Aix-Marseille I, en qualité d'extérieur, composition du jury : L. Champaney, M. Médale, J. Giordano, A. Boukamel, F. Plourde, Y. Burtschell
- Jean-Louis Poisson, juin 2012 Université de Tours, en qualité d'extérieur, composition du jury : F. Tran Van, F. Lacroix, S. Méo, W. Mars, N. Ranganathan, Y. Nadot, A. Chrysochoos, Y. Chauvin
- Thien An N'Guyen Van, novembre 2012 Aix Marseille Université en qualité de co-encadrant, composition du jury : J.C. Grandidier, N. Billon, M. Médale, L. Stainier, S. Méo, A. Boukamel, D. Eyheramendy
- Alexis Delattre, juillet 2014 Université de Tours, en qualité de co-encadrant, composition du jury : C. Richard, S. Méo, A. Chrysochoos, P. Pilvin, E. Verron, A. Boukamel, B. Petitjean, G. Fiochi, F. Lacroix
- Komla Dela Ahoese, decembre 2018 Aix Marseille Université, en qualité de co-encadrant, composition du jury : M. Nait Abdelaziz, L. Laiarinandrasana, S. Castagnet, Y. Marco, A. Boukamel, F. Sosson, P. Lamy, D. Eyheramendy

**Séminaires invité :**

- Stabilité matérielle et structurelle de lamifiés élastomère-métal, *club des utilisateurs ZeBuLoN (Centre des Matériaux, Mines de Paris, 2006)*
- Développement de Modèles Hyper-visco-plastiques dans ZeBuLoN, *club des utilisateurs ZeBuLoN (Centre des Matériaux, Mines de Paris, 2008)*
- Modélisation du comportement dynamique multi-axial d'élastomères chargés : effet de l'amplitude de chargement et de la température, *Journée du groupe de travail mécanique des polymères Mecamat (ENSAM Paris, 2016)*.
- Sur l'approche isogométrique pour des problèmes multi-physiques/multi-champs : de l'incompressibilité aux couplages thermo-(chimio)-mécaniques. *Séminaire du laboratoire Gabriel Lamé (Tours, 2018)*.

**Chairman de session** : 36<sup>emes</sup> Journées de Printemps de la SF2M, Paris 2017.

**Animation de collaboration scientifiques :**

- Responsable scientifique d'une collaboration avec le LMR (S. Méo et F. Lacroix) autour du comportement de structures lamifiées élastomères métal : réalisation d'essais mécaniques dynamiques mutli-axiaux avec mesure de champs et corrélation d'images. Développement et validation d'un modèle prédictif du comportement des lamifiés en 2012-2014.
- Co-responsable, avec Dominique Eyheramendy, d'une collaboration scientifique avec l'entreprise SMAC autour du vieillissement et du couplage thermo-chimio-mécanique dans les élastomères sur la période 2015-2018.
- Participant puis animateur de la collaboration scientifique autour des élastomères entre Airbus Helicopters et le LMA pour la période 2005-2018

## 9 Production scientifique

### Bilan des publications

Articles dans des revues à comité de lecture de rang A : **14**

Articles dans des revues nationale à comité de lecture : **1**

Conférences internationales : **24 dont 3 invités**

Conférences nationales : **23**

Chapitre d'ouvrage : **1**

### Chapitre d'ouvrage :

1. Advances in symbolic and numerical approaches in computational mechanics. D. Eyheramendy, S. Lejeunes, R. Saad, L. Zhang , ©Saxe-Cobourg Publications Chapter 3, 2014, pp. 61-88.

### Articles dans des revues a comités de lecture de rang A :

1. Characterization and Modeling of a filled rubber submitted to thermal aging, **International Journal of Solids and Structures** ; R. Bouaziz, K.D. Ahose, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, F. Sosson ; submitted
2. Hybrid free energy approach for nearly incompressible behaviors at finite strain, **Continuum Mechanics and Thermodynamics** ; S. Lejeunes, D. Eyheramendy ; 2018 ; on-line first.
3. A constitutive multiphysics modeling for nearly incompressible dissipative materials : application to thermo-chemo-mechanical aging of rubbers, **Mechanic of time dependant materials** ; S. Lejeunes, D. Eyheramendy, A. Boukamel, A. Delattre, S. Méo, K.D. Ahose ; 2018 ; vol 22, pp. 51-66
4. A thermodynamical framework for the thermo-chemo-mechanical couplings in soft materials at finite strain. **Mechanics of Materials** ; T.A. N'Guyen, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, A. Boukamel ; 2016 ; vol 95, pp. 158-171
5. On the dynamical multi-axial behavior of filled rubbers at different temperatures : experimental characterization and constitutive modeling. **International Journal of Solids and Structures** ; A. Delattre, S. Lejeunes, F. Lacroix, S. Méo ; 2016 ; vol 90, pp. 178-193
6. On the multiaxial amplitude and frequency dependent behavior of rubber : experiments and constitutive modeling. **Rubber Chemistry and Technology** ; A. Delattre, S. Lejeunes, F. Lacroix, C. Richard ; 2014 ; vol 87, pp. 557-578.
7. A micro-mechanically based continuum damage model for fatigue life prediction of filled rubbers. **Internation Journal of Solids and Structures** ; J. Grandcoin, A. Boukamel, S. Lejeunes ; 2013 ; vol 51, pp. 1274-1286
8. Linearized behavior of a dissipative rubber with large static preloads. **Computers and Structures** ; S. Lejeunes, T.A. Nguyen Van, A. Boukamel, D. Eyheramendy ; 2012 ; vol 96-97, pp. 46-53
9. Finite element implementation of nearly-incompressible rheological models based on multiplicative decompositions. **Computers and Structures** ; S. Lejeunes, A. Boukamel, S. Méo ; 2011 ; vol 89, pp. 411-421
10. Statistical approach for a hyper-visco-plastic model for filled rubber : Experimental characterization and numerical modeling. **European Journal of Mechanics A/Solids** ; J.M. Martinez, A. Boukamel, S. Méo, S. Lejeunes ; 2011 ; vol 30, pp. 1028-1039

11. A model reduction technique for laminated solids of revolution with a curved cross-section. **Archive of Applied Mechanics**; S. Lejeunes, A. Boukamel, F. Khedimi; 2010; vol 80, pp. 1085-1102
12. A direct numerical integration scheme for visco-hyperelastic models using radial return relaxation. **European Journal of Computational Mechanics**; S. Lejeunes, S. Méo, A. Boukamel; 2010; vol 19, pp.129-140
13. Méthode de réduction de modèles pour l'analyse de structures composites à matrice élastomérique. **European Journal of Computational Mechanics**; S. Lejeunes, A. Boukamel, B. Cochelin; 2007; vol 16, pp. 795-811
14. Analysis of laminated rubber bearings with a numerical reduction model method. **Archive of Applied Mechanics**; S. Lejeunes, A. Boukamel, B. Cochelin; 2006; vol. 76, pp. 311-326

#### Articles dans des revues nationales a comités de lecture (sur invitation) :

1. Model reduction method : an application to the buckling analysis of laminated rubber bearings. **Revue Européenne des Eléments Finis**; S. Lejeunes, A. Boukamel, B. Cochelin; 2006; vol. 15, pp. 281-292

#### Conférences internationales :

1. On the hybrid free energy for nearly incompressible behaviors, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, 2018, *11th International Conference on Advanced Computational Engineering and Experimenting*, Amsterdam, Pays-Bas, **Invited lecture**
2. Isogeometric analysis of coupled thermomechanical problems : Theoretical and implementation aspects, D. Eyheramendy, S. Lejeunes, L. Zhang, 2018, *10th International Conference on Engineering Computational Technology*, Sitges, Espagne, **Keynote lecture (co-auteur)**
3. Space-time isogeometric solvers for coupled multiphysics : A preliminary study, C. Saadé, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, L. Zhang, R. Saad, 2018, *10th International Conference on Engineering Computational Technology*, Sitges, Espagne
4. Thermo-mechanical modeling of the chemo-physical evolution of filled rubbers submitted to severe thermodynamic loadings, R. Bouaziz, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, K.D. Ahose, F. Sosson, 2018, *11th International Conference on the Mechanics of Time Dependent Materials*, Milano, Italie
5. Characterization and modeling of the thermal aging in a filled rubber, S. Lejeunes, K.D Ahose, D. Eyheramendy, F. Sosson, 2018, *International Conference on Plasticity, Damage, and Fracture*, San-Juan, Porto-Rico, **Keynote lecture**
6. On the relative influence of mechanical and thermal effects on aging of rubber, K.D Ahose, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, F. Sosson, 2017, *Workshop on the Multiphysics Behavior of Rubber*, Marseille, France
7. On the isogeometric approach for coupled thermomechanical problems at large strain, L. Zhang, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, 2017, *Workshop on the Multiphysics Behavior of Rubber*, Marseille, France
8. An isogeometric approach for coupled thermomechanical problems at large strain, L. Zhang, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, 2017, *V International Conference on Isogeometric Analysis*, Pavia, Italie

9. On the thermal aging of a filled butadiene rubber. K.D. Ahose, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, F. Sosson, 2017, *European Conference on Constitutive Models for Rubbers XI*, Munich, Germany
10. Constitutive modeling of a thermal aging behavior due to cyclic mechanical loadings with a multiphysics approach, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, A. Boukamel, K.D. Ahose, 2017, *11th International Conference on Advanced Computational Engineering and Experimenting*, Vienna, Austria, **Invited Lecture**
11. A constitutive multiphysics modeling for dissipative materials that can undergo chemical reaction : application to the thermo-chemo-mechanical aging of rubbers. S. Lejeunes, D. Eyheramendy, A. Boukamel, T.A. N Guyen, K.D. Ahose, 2016, *10th International Conference on Mechanics of Time Dependent Materials*, Paris, France
12. On the constitutive modeling of a filled rubber : frequency, temperature and amplitude effects. A. Delattre, S. Lejeunes, S. Méo, F. Lacroix, 2016, *10th International Conference on Mechanics of Time Dependent Materials*, Paris, France
13. An isogeometric analysis investigation for multiphysics formulations at large strains. L. Zhang, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, 2016, *ECCOMAS*, Hersonissos , Grèce.
14. Dynamical multi-axial behavior of filled elastomers. Numerical modelisation of elastomer-metal laminate. A. Delattre, S. Lejeunes, F. Lacroix, S. Méo, 2015, *Elastomers*, Tours, France
15. Advances in symbolic and numerical approaches in computational mechanics. D. Eyheramendy, S. Lejeunes, R. Saad, L. Zhang, 2014, *12th International Conference on Computational Structures Technology and 9th International Conference on Engineering Computational Technology*, Naples, Italy
16. Constitutive modelling of the dynamical properties of a filled rubber and simulation of laminated devices with a specific FEM tool. A. Delattre , S. Lejeunes, S. Méo, F. Lacroix, 2014, *RubberCon*, Manchester
17. Experimental and constitutive modeling of a filled rubber with emphasis on the dynamical properties. A. Delattre, S. Méo, F. Lacroix, C. Richard, S. Lejeunes, 2013, *European Conference on Constitutive Models for Rubbers IX*, San Sebastian, Espagne
18. A finite strain thermo-chemo-mechanical coupled model for filled rubber. T.A. Nguyen, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, A. Boukamel, 2012, *ECCOMAS*, Vienne, Autriche
19. A Finite Strain Thermo-Chemo-Mechanical Coupled Model for Filled Rubber. T.A. Nguyen, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, A. Boukamel, 2012, *8th International Conference on Engineering Computational Technology*, Dubrovnik, Croatie.
20. A thermo-chemo-mechanical coupled formulation, application to filled rubber. T.A. NGuyen, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, A. Boukamel, 2011, *European Conference on Constitutive Models for Rubbers VIII*, Dublin, Irlande
21. Un schéma direct d'intégration numérique de modèles visco-hyperélastiques par relaxation radiale. A. Boukamel, S. Lejeunes, S. Meo, 2009, *Congrès International Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques CMSM'2009*, Hammamet, Tunisie
22. Constitutive and numerical modeling of the fatigue behavior of a filled rubber J. Grandcoin, A. Boukamel, S. Lejeunes, 2009, *European Conference on Constitutive Models for Rubbers VII*, Dresden, Allemagne
23. FE-implementation of a statistical hyper-visco-plastic model. A. Boukamel, S. Méo, S. Lejeunes, 2007, *European Conference on Constitutive Models for Rubbers V*, Paris, France



24. Model reduction methods for composites structures with elastomeric matrix. S. Lejeunes, A. Boukamel, B. Cochelin, 2005, *European Conference on Constitutive Models for Rubbers IV*, Stockholm, Suède

### Conférences nationales :

1. Caractérisation et modélisation du comportement en fatigue d'élastomères techniques. A. Boukamel, S. Lejeunes, S. Méo, 2017, *36<sup>èmes</sup> Journées de Printemps SF2M*, Paris. **Conférence invité (co-auteur)**.
2. Sur l'endommagement par fatigue d'un polybutadiène chargé. A. Delattre, S. Méo, F. Lacroix, S. Lejeunes, 2017, *36<sup>èmes</sup> Journées de Printemps SF2M*, Paris.
3. Modélisation et simulation du comportement multiphysique quasi-incompressible d'élastomères en déformations finies. K.D. Ahose, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, L. Zhang, 2017, *CSMA*, Giens
4. Caractérisation de l'interaction entre les phénomènes de fatigue et vieillissement thermique d'un polybutadiène chargé. K.D. Ahose, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, F. Sosson, 2016, *4<sup>eme</sup> Journée thématique sur la caractérisation mécanique des élastomères*, Marseille.
5. Caractérisation de l'endommagement par fatigue sur un butadiène chargé. A. Delattre, S. Lejeunes, S. Méo, F. Lacroix, 2016, *4<sup>eme</sup> Journée thématique sur la caractérisation mécanique des élastomères*, Marseille.
6. Modélisation du comportement multi-axial d'un élastomère chargé et application à la simulation d'essais complexes sur éprouvettes lamifiés élastomère-métal. A. Delattre, S. Lejeunes, S. Meo, F. Lacroix, F. Mazerolle, 2015, *CSMA*, Giens
7. Numerical homogenization of heterogeneous media and periodic beams and plates : a simple formulation to drive the FE-computations of the RVE's problems. S. Bourgeois, S. Lejeunes. *Workshop MIST*, 2015, Montpellier, **Conférence invité (co-auteur)**
8. Validation d'un modèle de comportement à partir d'essais multi-axiaux sur palier lamifié : corrélations globales et locales. A. Delattre, S. Lejeunes, F. Mazerolle, S. Méo, F. Lacroix, 2014, *3<sup>eme</sup> Journée thématique sur la caractérisation mécanique des élastomères*, Nantes.
9. Caractérisation et modélisation d'un élastomère dissipatif : application au pré-dimensionnement de pièces lamifiées élastomère-métal. A. Delattre, S. Lejeunes, S. Méo, F. Lacroix, C. Richard, 2013, *CSMA*, Giens
10. FEMJava : une approche Java pour les calculs multiphysiques multichamps couplés en mécanique S. Lejeunes, T.A. Nguyen Van, D. Eyheramendy, A. Boukamel, 2013, *CSMA*, Giens
11. Sur un modèle de couplage Thermo-Chimio-Mécanique pour les élastomères chargés, T.A. NGuyen, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, A. Boukamel, 2013, *CSMA*, Giens
12. Une Toolbox Abaqus pour le calcul de propriétés effectives de milieux hétérogènes. S. Lejeunes, S. Bourgeois, 2011, *CSMA*, Giens
13. Une formulation du couplage thermo-chimio-mécanique, application aux matériaux élastomères chargés. T.A. NGuyen, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, A. Boukamel, 2011, *CFM*, Besançon
14. Le comportement linéarisé d'un élastomère pré-chargé en régime harmonique. T.A. Nguyen, S. Lejeunes, A. Boukamel, D. Eyheramendy, 2011, *CSMA*, Giens

15. Une approche statistique de comportement visco-hyper-plastique pour des élastomères chargés. S. Méo, A. Boukamel, J.M. Martinez, S. Lejeunes, 2009, *CFM*, Marseille
16. Modélisation mécanique et numérique de l'endommagement en fatigue d'un élastomère chargé. J. Grandcoin, A. Boukamel, S. Lejeunes, 2009, *CSMA*, Giens
17. Un schéma direct d'intégration numérique de modèles visco-hyperélastiques par relaxation radiale. S. Lejeunes, S. Meo, A. Boukamel, 2009, *CSMA*, Giens
18. Modélisation du comportement en fatigue de pièces en élastomère. J. Grandcoin, S. Lejeunes, J.M. Martinez, A. Boukamel, 2008, *Journées d'Etudes Techniques*, Marrakech, Maroc
19. Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal curvilignes par une méthode de réduction de modèles. F. Khédimi, S. Lejeunes, A. Boukamel, 2008, *Premier congrès tunisien de mécanique*, Tunisie
20. Méthode de réduction de modèles pour des structures élancées prise en compte des effets de bords. S. Lejeunes, A. Boukamel, B. Cochelin, 2007, *CSMA*, Giens
21. Méthode de réduction de modèles, applications à l'étude de stabilité d'un lamifié élastomère-métal. S. Lejeunes, A. Boukamel, B. Cochelin, 2005, *CSMA*, Giens
22. Méthode de réduction de modèles, applications à l'étude de pièces composites à matrice élastométrique. S. Lejeunes, A. Boukamel, B. Cochelin, 2005, *CFM*, Troyes
23. Stabilité matérielle et structurelle d'un lamifié élastomère-métal. S. Lejeunes, A. Boukamel, B. Cochelin, E. Zoppitelli, 2003, *CSMA*, Giens





---

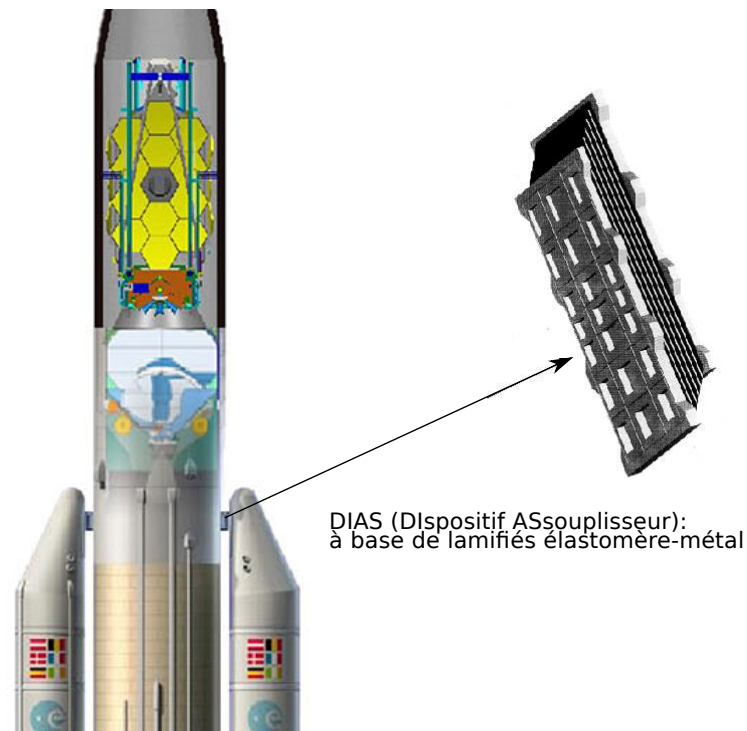
# Contexte général des travaux

L'unité de lieu de mon parcours professionnel depuis mes travaux de thèse a conduit de manière assez naturelle au développement de thématiques de recherches centrées autour d'un même sujet : la modélisation et la simulation du comportement des élastomères. Si j'ai également abordé d'autres aspects tel que les problématiques d'homogénéisation de matériaux et de structures en champs complets, d'architecture logicielle pour la mécanique des solides ou plus récemment de plasticité avec couplage thermomécanique pour les acier inox, j'ai principalement acquis une expertise technique et scientifique qui couvre différents aspects concernant les élastomères techniques utilisés dans l'industrie. Le présent document scientifique est donc sans surprises centré autour de ces points.

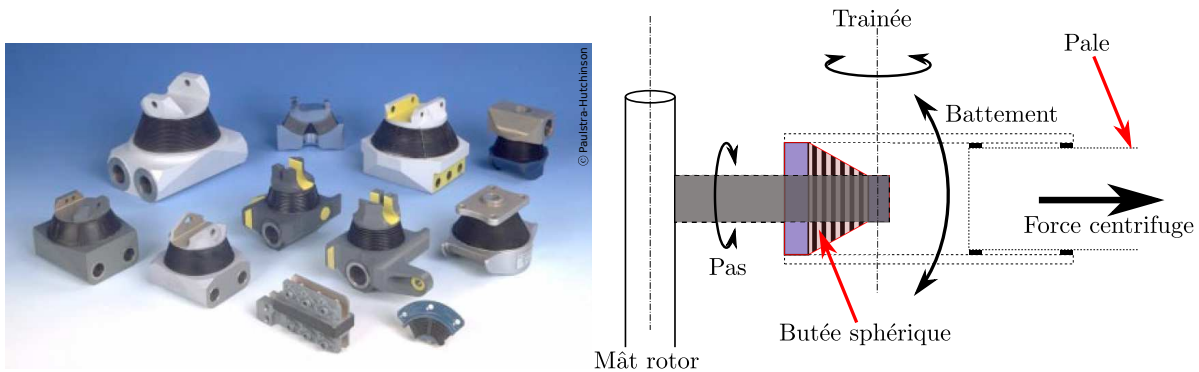
La partie introductive qui suit vise à présenter le contexte général des travaux, en commençant par le contexte industriel car il permet d'illustrer les développements théoriques que j'ai pu mener, voire même dans certains cas, de positionner les motivations scientifiques de certains sujets. Je présente ensuite quelques éléments du contexte scientifique en axant sur les principaux verrous puis je termine par le positionnement global de mes travaux.

## **1 Contexte industriel autour des élastomères : description des principales applications étudiées**

Mis à part les applications pneumatiques et les joints d'étanchéités qui sont assez particulières, les pièces techniques en élastomères peuvent globalement se ranger dans deux catégories ou type d'applications : les pièces de liaisons élastiques à raideurs contrôlées et les pièces amortissantes ou anti-vibratoires. Pour la première catégorie j'ai essentiellement étudié des pièces lamifiées élastomère/métal. Ces pièces sont généralement conçues pour supporter des effort permanents dans une direction et sont soumises à des sollicitations dynamiques multi-axiales. Deux exemples typiques de ce type de pièces sont les butées sphériques utilisées dans les architectures



(a) Paliers lamifiés du lanceur Ariane 5



(b) Butée sphérique Airbus Helicopters

FIGURE 1 – Exemple de pièces lamifiées élastomère/métal

rotors (fig. 1(b)) et les paliers DIAS (fig. 1(a)) utilisés dans les lanceurs Ariane 5.

Le palier DIAS a pour rôle d'assouplir la liaison entre les boosters et le corps du propulseur de manière à éviter que les vibrations dues à la poussée n'endommagent le dispositif d'accrochage ou le corps du propulseur. Cette pièce est conçue pour fonctionner en cisaillement et doit éviter des vibrations parasites latérales. Elle doit donc être largement plus rigide en compression/traction qu'en cisaillement ce qui explique sa conception lamifiée. Elle subit un chargement permanent en cisaillement dû au poids du lanceur qui conduit à de grandes déformations et des vibrations de faibles amplitudes en cisaillement se superposent à ce chargement statique lors du lancement (leurs fréquences peuvent aller jusqu'à 100Hz).

La butée sphérique située dans les rotors joue le rôle d'articulation mécanique, elle est sou-



(a) Amortisseur biconique pour applications spatiales (b) Adaptateur de fréquences pour architecture rotor

FIGURE 2 – Exemple de pièces amortissantes

mise à un très fort effort de compression dû à la force centrifuge auquel se superpose des sollicitations dynamiques conduisant à un état de déformation important et complètement multi-axial.

Pour ces deux exemples, l'enjeu de conception est majeur car il est directement relié à la sécurité et l'intégrité des systèmes. Les matériaux utilisés sont en général des matériaux chargés mais à dissipation faible ou moyenne. L'effet Mullins n'est pas problématique pour ces deux applications mais il faut parfaitement maîtriser le comportement dynamique dans des situations mutli-axiales avec du pré-chargement statique conduisant à de grandes déformations. A cette difficulté peut se rajouter des problématiques thermiques, les deux pièces devant fonctionner dans une plage thermique large ( $-55^{\circ}\text{C}/+70^{\circ}\text{C}$  pour les rotors par exemple). Enfin la conception en lamifié peut conduire à des problématiques numériques de taille de modèle dû à l'élancement des couches métal/élastomères. Dans le cas de la butée sphérique, par exemple, on a un facteur d'élancement compris entre 100 et 200 par lamelles pour un peu plus d'une dizaine de couches au total.

Pour les applications anti-vibratoires ou amortissantes on utilise d'autres type d'élastomères beaucoup plus dissipatifs. Il s'agit bien souvent d'élastomères synthétiques fortement chargés qui présentent sous chargement dynamique un important auto-échauffement. Les géométries des pièces et les chargements qui leur sont appliqués sont en général plus simples que dans le cas précédent. Les figures 2(b) et 2(a) en montrent deux exemples : des amortisseurs biconiques utilisés pour isoler des composants de satellites lors de la phase de lancement ou des adaptateurs de fréquences utilisés dans les architectures rotors pour amortir des vibrations dues à l'effort de traîné qui pourraient conduire à un phénomène de résonance amenant à la perte de contrôle du rotor (le phénomène de résonance air/sol lors du décollage en est un exemple). La maîtrise du comportement dynamique et les effets de la température, de la fréquence et de l'amplitude du chargement sont au moins aussi critiques que dans le cas précédent avec les pièces lamifiées. Les enjeux de conception se situent à différents niveaux dans le process d'industrialisation. Pour le fabricant de la pièce il s'agit de parfaitement maîtriser les caractéristiques et de respecter le cahier des charges. En général, cette maîtrise fait partie de son savoir faire interne acquis au fil des années et des développements. Pour le donneur d'ordre, l'enjeu n'est pas moindre car les pièces stratégiques ont un impact majeur dans le cycle de conception d'un produit fini (une erreur de cahier des charges est potentiellement la source de retards et de coûts supplémentaires).

A ces problématiques de maîtrise et de modélisation du comportement dynamique des élas-

tomères ce rajoute également la question de la fiabilité des pièces afin de préconiser d'une part des méthodes d'inspection de l'état des pièces et d'autre part des règles de remplacement périodique. Cela est particulièrement vrai pour les pièces critiques de l'architecture rotor. Il y a donc une première problématique liée à la fatigue mécanique et une seconde liée au vieillissement (par des effets d'environnement) des pièces. Ces deux problématiques : fatigue et vieillissement ne sont pas forcément indépendantes comme nous le verrons par la suite.

## 2 Contexte scientifique : les principaux verrous

Pour établir le contexte scientifique on peut tout d'abord tenter de lister les difficultés que peuvent représenter le traitement des problématiques abordées dans la section précédente. De mon point de vue ces difficultés ont deux origines : le matériau et l'application (ou plus exactement les conditions de fonctionnement des pièces décrites précédemment).

Pour le matériau, le fait d'utiliser des élastomères chargés (et réticulés chimiquement) implique les difficultés suivantes :

- **Origine des mécanismes de dissipation** : si pour les aciers les causes des irréversibilités observées macroscopiquement sont relativement claires il en va tout autrement des élastomères. Les différentes échelles qui rentrent en jeu (charge isolées, agrégats, agglomérats, chaînes macromoléculaires) et les mécanismes probables (cristallisation, changement d'état, réorganisation des chaînes, réorganisation du réseau et des agrégats/agglomérats, réactions physico-chimiques, ...) font qu'il est souvent impossible de relier précisément une cause ou un enchaînement de causes à un observable macroscopique. Il y a donc dans la littérature des visions différentes sur l'origine de la viscosité par exemple (reptation des chaînes, réorganisation des agglomérats et interaction gomme/charge, ...).
- **Concurrence d'effets antagonistes** : on peut citer par exemple le cas du couplage thermo-mécanique, la gomme est de nature entropique mais additionné de charges on observe un comportement dynamique énergétique (ou enthalpique). Ce qui conduit au fait qu'un élastomère, chargé, sollicité à une température supérieure à l'ambient paraîtra plus raide qu'à l'ambient si l'on a une vitesse de sollicitation extrêmement faible et plus souple dès que cette vitesse devient significative. Dans la même idée de concurrence on peut aussi avoir une compétition entre phénomènes de réorganisation physiques et chimiques : sous sollicitations thermique ou mécanique des chaînes peuvent se couper ou des interactions faibles peuvent se rompre tout en ayant en même temps des processus de formation de nouvelles liaisons chimiques ou physiques dans la gomme. Ces effets de concurrences impliquent d'une part un besoin de multiplier et de croiser les analyses avant de pouvoir dégager un mécanisme et peuvent représenter d'autre part une difficulté supplémentaire en terme de modélisation.
- **Influence du process de mise en œuvre** : comme la plupart des matériaux le comportement des élastomères est dépendant des conditions de mise en œuvre. A constituants identiques deux élastomères mise en œuvre dans des conditions différentes auront un comportement sensiblement différent. La température, la durée de la cuisson et la pression (ou plus généralement toute sollicitation mécanique) conditionnent par exemple le type et la densité des liaisons chimiques et physiques qui vont être créés ce qui peut avoir un impact sur certaines propriétés. D'autre part, les phénomènes de dilatation thermique et de retrait chimique peuvent conduire à des états de contraintes internes résiduelles (non-homogènes) sur des pièces ou l'élastomère est contraint par des parties métalliques par

exemple. Ces effets peuvent donc avoir un impact important si bien que dans certaines situations la validation sur pièces de comportements identifiés sur éprouvettes élémentaires ne donne pas les résultats attendus.

- **Non linéarités spécifiques** : ces matériaux exhibent des phénomènes spécifiques qui les caractérisent : cristallisation sous contraintes ou sous température, changement d'état amorphe/vitreux, forte dépendance à la fréquence ou à l'amplitude d'un chargement dynamique, dépendance à la précharge variable selon le mode de sollicitation, effet Mullins, forte sensibilité à l'environnement et évolution structurelle dans le temps (vieillessement), etc. Même dans le cas où l'on adopte une approche purement phénoménologique (i.e. sans chercher à répondre au premier point : origine des mécanismes), les phénomènes à prendre en compte sont suffisamment nombreux et complexes pour que sur chaque point évoqué on trouve dans la littérature quantité de modèles et de résultats expérimentaux ce qui implique d'avoir une certaine expertise pour pouvoir les analyser.

A ces complexités matérielles se rajoute également des complexités liées aux applications :

- **Grandes déformations et contrainte de faible compressibilité** : pour un grand nombre d'applications on ne peut se contenter d'approches en petites déformations. Il faut donc rajouter aux non-linéarités matérielles les non-linéarités géométriques dans un cas où l'on a un fort contraste entre module de cisaillement et module de compressibilité (en général de l'ordre de 1/1000). Cela peut conduire à des difficultés numériques si bien qu'avec les outils actuels et même en considérant des cas purement élastiques on peut atteindre les limites des modèles numériques bien plus rapidement que ce que l'on constate expérimentalement.
- **Chargements variables et longs** : c'est notamment le cas de la plupart des applications évoquées dans la section précédente. Les chargements dynamiques sont souvent variables au cours du temps avec une plus forte sensibilité à l'environnement (température, gaz, etc...) que les pièces métalliques. Il peut y avoir d'autre part un chargement permanent non-négligeable qui conduit sur le long terme à du fluage et à une réorganisation du réseau macro-moléculaire et qui va directement impacter les caractéristiques dynamiques de la pièce.
- **Aspect multiphysiques** : suivant le type d'application et la géométrie des pièces il peut être indispensable d'avoir à prendre en compte des phénomènes couplés. La mauvaise conduction thermique des élastomères associée à l'auto-échauffement peut conduire à des gradients de température importants sur certaines pièces entre le cœur et le bord des pièces. On comprend dans ce cas qu'il est indispensable de maîtriser, par exemple, le couplage thermo-mécanique. On peut étendre ce type de couplage au cas thermo-chimio-mécaniques entre autres.

Toutes ces difficultés font que la modélisation et la simulation de pièces à base d'élastomères chargés reste encore de nos jours, dans certain cas, un challenge. Si bien, qu'il n'y a pas à proprement parler de modèle(s) qui fasse(nt) l'unanimité dans la communauté scientifique que ce soit pour le comportement dynamique, la fatigue ou les comportements couplés.

### 3 Approches suivies

Sans trop rentrer dans les détails, je présente dans cette partie les différentes approches que j'ai pu développer pour traiter des problématiques expérimentales, de modélisation ou de



développement numérique. Cela permet de se faire une idée assez globale de la manière dont peuvent s'articuler les différents sujets abordés.

### 3.1 Caractérisation expérimentale

Pour ce qui concerne les aspects comportement dynamique, j'utilise une approche qui consiste à caractériser séparément les réponses dépendantes du temps (et donc de la vitesse de sollicitation) de celles indépendantes du temps (essais de relaxation par paliers par exemple). Pour la partie dépendante du temps ou de la vitesse de sollicitation, je m'intéresse aux réponses stabilisées afin de suivre des grandeurs caractéristiques telles que les aires d'hystérésis ou les raideurs apparentes. Ces grandeurs peuvent ensuite être utilisées pour la phase d'identification. Les essais de caractérisation sont réalisés à l'ambient ou à température contrôlée et sur différents modes de sollicitation (cisaillement simple, extension simple, compression, ...) sur des éprouvettes élémentaires qui peuvent être normalisées ou non. Les moyens utilisés sont standards (machines hydrauliques, enceintes climatiques, ...) seul les protocoles peuvent présenter une originalité et/ou un savoir faire particulier au domaine des élastomères.

J'ai également eu l'occasion de développer des essais moins classiques notamment pour la validation des modèles. Il s'agit d'essais sur mini-structures ou éprouvettes technologiques comme les paliers lamifiés en compression/cisaillement dans la thèse de Alexis Delattre par exemple. Ce type d'essais nécessite en amont la conception et la réalisation d'un montage dédié et je m'appuie en grande partie sur les compétences très précieuses de Frédéric Mazerolle, ingénieur en charge du centre d'essais mécanique du laboratoire. Pour ces essais nous pouvons utiliser des techniques de mesures de champ local (par corrélation d'images) pour compléter l'information plus globale obtenue avec des moyens de mesure classiques.

Pour la caractérisation en fatigue, nous (avec A. Boukamel et S. Méo) avons également mis en place des essais originaux pour essayer de suivre l'évolution de l'endommagement à travers les mêmes grandeurs caractéristiques qu'évoquées précédemment (raideurs/aire hystérésis) mais en isotherme (ou plutôt en quasi-isotherme), ce qui n'est pas le cas des courbes S-N standards. Il s'agit d'essais de fatigue interrompus par des blocs de caractérisations statiques et dynamiques pour laisser le temps au matériau de relaxer les contraintes dues au chargement de fatigue et à la température interne de s'équilibrer avec l'extérieur.

Pour le vieillissement thermique, nous (avec D. Eyheramendy) utilisons des analyses croisées physico-chimiques (gonflement, suivit des variations de masses et de volume) et mécanique (essais cycliques et de relaxations) afin d'évaluer les conséquences de l'évolution physico-chimique due au vieillissement thermique. Etant donné qu'il est très difficile de discriminer les différents mécanismes qui interviennent nous essayons de raisonner en comparatif en utilisant des formulations matériaux contrôlées ou nous essayons de faire varier uniquement un paramètre.

Lorsque cela est nécessaire, nous réalisons des analyses complémentaires dans des laboratoires partenaires de différents projets. Nous avons par exemple utilisé des analyses thermiques : DSC (Differential Scanning Calorimetry) et ATG (Analyse Thermogravimétrique) réalisées au LMR (nouvellement laboratoire Gabriel LaMé), des analyses par rayonnement électromagnétique : MEB (Microscope Electronique à Balayage) au Mines de Paris, ou de la Résonance Magnétique Nucléaire à l'ICR.

### 3.2 Modélisation

Pour les aspects modélisation, j'ai principalement utilisé des approches purement phénoménologiques (mais formulées de manière rigoureuse vis à vis de la thermodynamique). De manière beaucoup plus marginale, nous (avec S. Bourgeois et A. Boukamel) avons également tenté d'utiliser l'homogénéisation en champs complets. Pour les deux approches, les lois de comportements élémentaires sont traitées avec le même formalisme en se basant sur l'hypothèse de l'état local avec l'introduction de variables internes pour traduire les irréversibilités et des variables d'états standards (premier gradient du champ de déplacement et champ de température).

Pour ce qui concerne les aspects comportement dynamique, nous (avec S. Méo et A. Boukamel) avons proposé deux modèles de comportements : le premier basé sur une vision statistique de la viscosité avec une représentation probabiliste des temps caractéristiques de relaxations. Dans le second modèle, le spectre de relaxation est discrétisé par une approche de type Maxwell généralisée avec l'introduction d'un tenseur de directivité de l'écoulement visqueux (pour traduire le comportement multi-axial) et une prise en compte de l'effet Payne avec des variables internes s'apparentant à des variables d'endommagement.

Pour les aspects fatigue, nous (toujours avec S. Méo et A. Boukamel) avons utilisé une approche par cumul d'endommagement. Pour traduire les phénomènes observés au MEB, nous avons introduit deux variables d'endommagement qui sont couplées et dont l'évolution est reliée à des quantités mécaniques intégrées sur un cycle stabilisé.

Enfin, pour la modélisation des phénomènes de couplage thermo-mécanique ou thermo-chimio-mécanique, nous avons adopté une formulation basée sur la décomposition de la transformation et de l'énergie libre en parties thermique, mécanique et éventuellement chimique. L'énergie libre est formulée à partir d'une expression mixte ou hybride en remplaçant la variation de volume par une variable supplémentaire assimilable à une pression.

### 3.3 Numérique

Pour les aspect numériques, je cherche plutôt à mettre en place des idées originales qui sont moins basées sur une démarche incrémentale et/ou itérative que les aspects précédents. J'ai ainsi pu m'intéresser au développement d'éléments-finis spécifiques (éléments-finis réduits) ou une ou plusieurs directions de l'espace sont condensées dans la formulation en utilisant une propriété d'invariance géométrique et une projection des inconnues du problème sur une base de fonctions pré-définies (comme des polynômes de Lagrange ou de Tchebychev par exemple). J'ai également exploré différents algorithmes d'intégration de loi d'évolutions visqueuses (relaxation radiale ou directionnelle). Enfin, avec D. Eyheramendy, nous avons étudié l'analyse isogéométrique pour des applications multiphysiques ou plus récemment pour la construction de nouveau solveurs espace-temps.

En terme de plateforme de développement, j'ai travaillé sur différents environnements et différentes architectures de code : des codes internes en fortran 77, la plateforme Zset (C++), des user subroutines (UMAT en fortran 77) dans Abaqus, et dernièrement la plateforme Fem-Java (Java). Ceci m'a permis d'acquérir une culture numérique assez large et un goût pour les questions tournant autour de l'architecture logicielle.

## 4 Organisation du manuscrit

Le document scientifique est découpé autour des axes de recherche tels qu'ils sont décrits dans la notice individuelle, à savoir :

- Modélisation du comportement mécanique, isotherme, des élastomères chargés avec des approches phénoménologiques et/ou micro-mécaniques. Différents aspects sont abordés allant de la viscoélasticité non-linéaire à l'endommagement par fatigue.
- Modélisation du couplage thermo-mécanique et/ou thermo-chimio-mécanique afin d'intégrer les effets d'environnements, le phénomène d'auto-échauffement, le vieillissement thermique.
- Mise en œuvre numériques des problèmes précédents, cet aspect est indispensable pour pouvoir valider les modèles développés et sert de support au développement de méthodes numériques originales. Cela peut également concerner des aspects liés à l'architecture des codes de calculs avec le développement de paradigmes objets génériques et adaptés à diverses problématiques en mécanique des solides.

J'ai tenté d'écrire ce manuscrit dans un esprit de concision en focalisant uniquement sur les apports scientifiques de mes travaux de recherche. De ce fait la bibliographie est très largement incomplète et les développements théoriques sont réduits à leur plus simples expressions. Cela rendra certainement la lecture ardue aux non spécialistes du domaine et je m'en excuse.

# Sur la modélisation du comportement des élastomères

**D**ans ce chapitre, je présente les travaux conduits autour de la modélisation du comportement mécanique (sous entendu isotherme) des élastomères chargés. Cela concerne : la modélisation du comportement dynamique avec la prise en compte des effets spécifiques aux élastomères, une tentative d'approche multi-échelles en champs complets, la modélisation de l'endommagement par fatigue et la description du comportement volumique à partir d'une énergie hybride.

## Contents

---

<b>1.1</b>	<b>Comportement dynamique isotherme . . . . .</b>	<b>29</b>
1.1.1	Quelques éléments expérimentaux . . . . .	29
1.1.2	Développements basés sur l'approche phénoménologique . . . . .	32
1.1.3	Sur l'approche micro-mécanique en champs complets . . . . .	44
<b>1.2</b>	<b>Prise en compte d'un endommagement par fatigue . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>1.3</b>	<b>Sur le concept de l'énergie hybride . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>1.4</b>	<b>Sur l'aspect validation des modèles . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>1.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>59</b>

---

## 1.1 Comportement dynamique isotherme

### 1.1.1 Quelques éléments expérimentaux

Pour mieux positionner les travaux que nous avons réalisés, je propose de décrire ici quelques constats expérimentaux qui motivent nos développements en terme de modélisation. Les campagnes de caractérisations que j'ai pu mener (dans le cadre de contrat de prestation) ou encadrer (dans le cadre de travaux de thèses) ont concerné différents types de matériaux et différents types d'éprouvettes, normalisées ou non, mais en grande majorité il s'agissait d'essais en traction uniaxiale ou en glissement simple. Ces essais ont été réalisés au LMA avec l'appui de Frédéric Mazerolle ou au CERMEL avec l'aide de Stéphane Méo et Florian Lacroix.

En règle général nous cherchons à caractériser deux éléments essentiels du comportement : le comportement "statique" (au sens indépendant du temps) et le comportement "dynamique" (au sens dépendant du temps).

Pour le comportement statique, la figure 1.1 présente un exemple typique d'essai utilisé. Il s'agit d'effectuer des relaxations par paliers à différentes amplitudes<sup>(1)</sup>. On peut exploiter ces essais en utilisant les fins de relaxations, en charge et en décharge, ce qui nous permet de définir la réponse "statique" du matériau (l'idée étant de tenter d'effacer le comportement visqueux). Ce type d'essais a été initialement proposé par [76], et si l'on relie les point de fins de relaxation on observe une hystérésis communément appelée dans la littérature "hystérésis d'équilibre". On peut en étudier la dépendance à la température extérieure (cela a été également fait par [80, 64]), et l'on obtient le résultat de la figure 1.2(a). Cette hystérésis se retrouve sur différents modes de sollicitation et son origine n'est à ce jour pas clairement établie : viscosité aux temps longs (les relaxations durent 60 min) ? adaptation du réseau polymérique ? conséquence du couplage thermo-élastique ? autre effet inélastique ? Pour différents matériaux et pour tous les modes de sollicitation que nous avons étudiés, on obtient une augmentation de la raideur avec l'augmentation de la température, tant que l'on reste dans une plage assez éloignée de la transition vitreuse, ce qui est cohérent avec le comportement entropique de la matrice à l'état caoutchoutique (l'effet inverse est communément observé sous sollicitations dynamiques : assouplissement thermique). La figure 1.2(b), permet d'illustrer le fait que l'aire de l'hystérésis d'équilibre reste néanmoins petite devant celle obtenu pour un essai de charge/décharge à vitesse relativement lente.

Pour le comportement dynamique, nous utilisons des essais cycliques sinusoïdaux (ou triangulaires) en balayant différentes amplitudes et différentes fréquences (ou vitesses de sollicitations). Ces sollicitations harmoniques peuvent être appliquées en déformation ou en contrainte (ou éventuellement un mixte des deux) avec une valeur moyenne éventuellement non-nulle (on parle alors de pré-déformation, pré-contrainte ou de rapport de charge). Nous pouvons également piloter la température d'ambiance en utilisant une enceinte adiabatique. La gamme de fréquences et d'amplitudes étant choisie en rapport avec les applications visées<sup>(2)</sup>. Comme pour les essais précédents les éprouvettes sont au préalable systématiquement assouplies avant chaque essai. Nous exploitons ces essais en se focalisant sur le comportement stabilisé. La figure 1.3 présente

(1). L'éprouvette est au préalable assouplie par quelques cycles de plus grande amplitude que l'amplitude maximum atteinte par la suite dans la procédure d'essai afin de s'affranchir de l'effet Mullins

(2). Par exemple pour les applications rotors d'hélicoptères, les fréquences sont comprises entre 1 et 30Hz et les amplitudes vont de 5 à 100% (l'amplitude globale est beaucoup plus faible mais les possibles zones de concentrations sur pièces imposent de considérer une large gamme d'amplitude)

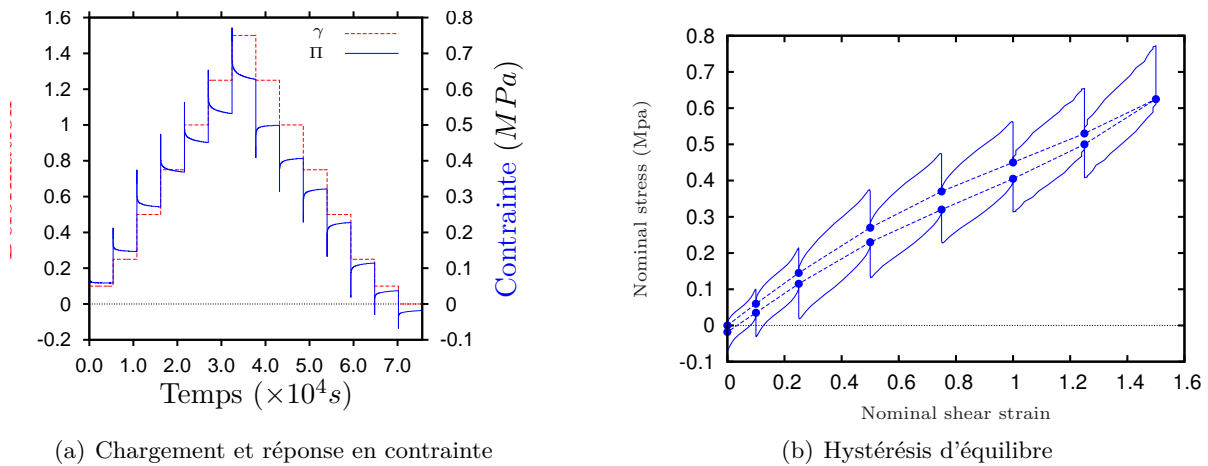


FIGURE 1.1 – Essai de relaxation par paliers en cisaillement à température ambiante sur un butadiène (c.f. thèse Alexis Delattre)

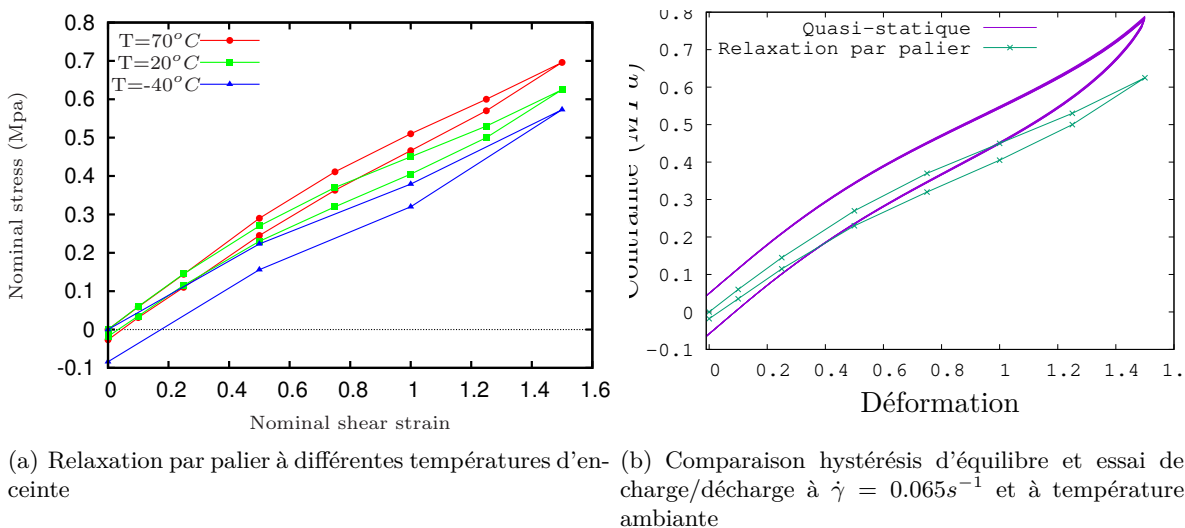


FIGURE 1.2 – Essai de relaxation par paliers en cisaillement sur un butadiène (c.f. thèse Alexis Delattre)

des cycles stabilisés obtenus en glissement simple pour différentes amplitudes à une fréquence fixée. De ces cycles stabilisés nous extrayons deux informations : l'aire de l'hystérésis qui traduit la quantité d'énergie dissipée et le module sécant à l'hystérésis qui traduit une rigidité "dynamique" moyenne. La figure 1.4 illustre une exploitation de ces quantités.

Ce que nous constatons sur ces essais et qui est en accord avec ce que l'on trouve par ailleurs dans la littérature peut-être synthétisé avec les principaux points suivants :

- A fréquence et température fixées le comportement dynamique montre une forte dépendance à l'amplitude de sollicitation, on constate une diminution du module sécant et une augmentation de l'aire d'hystérésis. Cet effet est communément appelé effet Payne (ou alternativement Fletcher-Gent, voir [35]) en référence au travaux de A.R. Payne sur ce

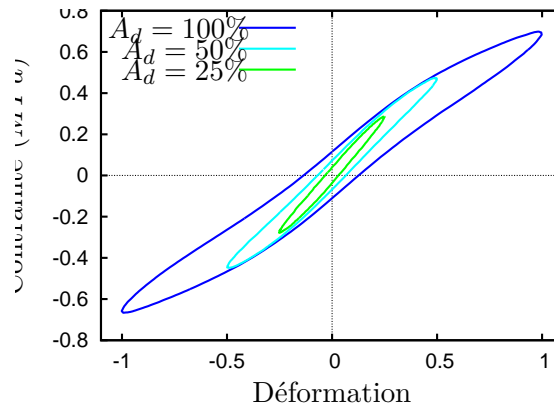
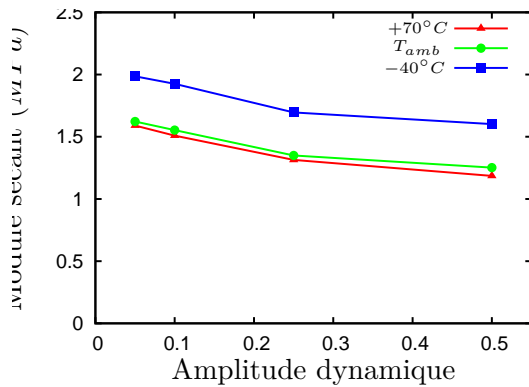
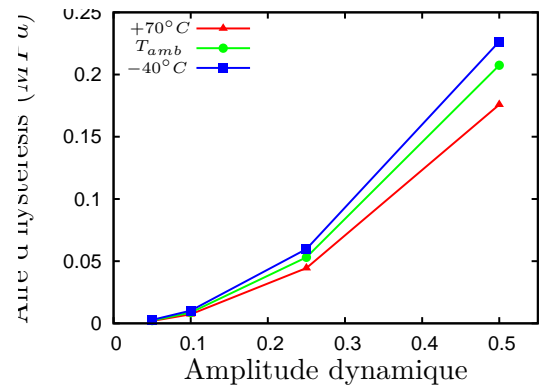


FIGURE 1.3 – Exemple de réponses stabilisées à différentes amplitudes dynamiques sur un butadiène sollicité en glissement simple à 3Hz et à l'ambient (c.f. thèse Alexis Delattre)



(a) Evolution du module sécant avec l'amplitude à différentes températures



(b) Evolution de l'aire d'hystérésis avec l'amplitude à différentes températures

FIGURE 1.4 – Effets de l'amplitude dynamique sur la raideur dynamique et sur la dissipation dans un cas de traction, avec 50% de pré-déformation, à une fréquence de 3Hz (c.f. thèse Alexis Delattre)

sujet (voir par exemple [94]).

- A amplitude et température fixées, le module sécant et l'aire d'hystérésis augmentent en fonction de la fréquence (jusqu'à des fréquences modérées).
- Lorsque l'on diminue la température d'enceinte on observe à fréquence et amplitude fixées une augmentation de l'aire d'hystérésis et du module sécant. On parle alors d'assouplissement thermique.
- Le pré-chargement (ou la déformation moyenne) impact le comportement dynamique mais pas de façon uniforme suivant le mode de déformation : en glissement simple l'impact est beaucoup moins prononcé qu'en extension/compression simple.
- Lorsque l'on augmente puis diminue les amplitudes dynamiques (à fréquence et température fixées) on constate une réversibilité partielle de l'effet Payne, voir figure 1.5 (ou [102]).



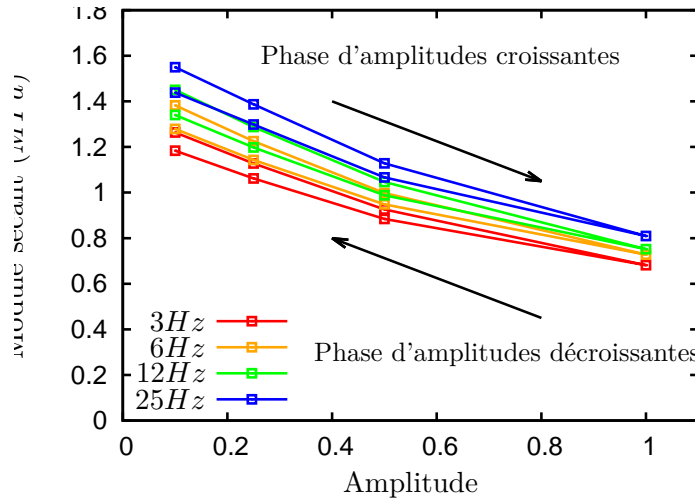


FIGURE 1.5 – Réversibilité de l'effet Payne en cisaillement (c.f. thèse de Alexis Delattre)

### 1.1.2 Développements basés sur l'approche phénoménologique

Les développements que nous avons menés sur le plan de la modélisation visent d'une part à reproduire les phénomènes présentés dans la section précédente (donc basés sur essais uniaxiaux et homogènes sur éprouvettes élémentaires) et d'autre part à produire des modélisations prédictives dans des situations réelles (donc en multi-axial et non homogène). Dans la littérature on trouve différentes approches mais très peu intègrent cette problématique dans son ensemble pour les gammes de sollicitations que nous visons. Pour être plus précis au moment de la thèse d'Alexis Delattre il n'y avait pas, à ma connaissance, de modèles pouvant couvrir l'ensemble de la problématique. En particulier, la question de l'effet Payne a été assez largement mise de côté par les équipes développant des modèles de viscoélasticité non-linéaire en grandes transformations dans les années 1990 et 2000.

Les modèles que nous avons développés se basent sur les hypothèses suivantes :

- Isothermie (et adiabaticité) : nous négligeons tout effet de couplage thermo-mécanique, si bien que l'on se place dans un cadre isotherme (mais le comportement peut dépendre de la température d'environnement).
- Isotropie : on se place dans un cadre d'isotropie matérielle, on peut donc utiliser le théorème de représentation avec l'introduction des invariants principaux (de la déformation ou de la contrainte).
- Séparation additive de la contrainte en une partie relaxée isochorique déviatorique, une partie élastique volumique et une partie visqueuse purement isochorique (comme fait par [10] par exemple). On suppose d'autre part que l'on reste dans le cadre quasi-incompressible (i.e. que les niveaux d'énergies associés à une déformation hydrostatique ou isochorique sont clairement très différents). On suit donc le cadre proposé par Paul Flory pour la décomposition volumique/isochorique (voir [36, 37]). On a donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{eq}^D + \boldsymbol{\sigma}_{neq}^D + \boldsymbol{\sigma}_{vol} \quad (1.1)$$

ou  $\boldsymbol{\sigma}_{eq}$  correspond à la contrainte (de Cauchy) relaxée,  $\boldsymbol{\sigma}_{neq}$  la contrainte visqueuse et  $\boldsymbol{\sigma}_{vol}$  la contrainte volumique.

- On utilise le cadre thermodynamique standard en mécanique des solides en adoptant d'une part l'hypothèse de l'état local avec introduction de variables internes et d'autre part en utilisant l'énergie libre de Helmholtz comme potentiel élémentaire. Les lois d'évolutions associées aux variables internes pouvant être construites de différentes manières (voir par exemple [40]).
- Enfin on adopte le cadre des états intermédiaires et la vision rhéologique qui y est associé tel que proposé par François Sidoroff (voir par exemple [107, 108]). Nous utilisons donc la décomposition multiplicative, arbitraire<sup>(3)</sup>, du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$ , en partie élastique et partie visqueuse ou viscoplastique tel que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_v, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_{ep} \mathbf{F}_p \quad (1.2)$$

avec  $\mathbf{F}_e, \mathbf{F}_{ep}$  des transformations élastiques,  $\mathbf{F}_v, \mathbf{F}_p$  des transformations visqueuse et viscoplastique ou plastique.

Un modèle de Maxwell généralisé, par exemple, dans ce cadre de modélisation va s'écrire en utilisant tout d'abord la décomposition isochorique/volumique tel que l'on ait :

$$\mathbf{F} = (J^{1/3} \mathbf{1}) \bar{\mathbf{F}} \quad (1.3)$$

ou  $J = \det(\mathbf{F})$ . On peut donc définir de manière unique un tenseur isochorique de Cauchy-Green droit,  $\bar{\mathbf{B}}$ , ou gauche,  $\bar{\mathbf{C}}$ , et les invariants associés,  $I_1, I_2$ . La déformation isochorique peut également être décomposée en  $n$  parties visqueuses et élastiques (isochoriques), tel que :

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_e^i \bar{\mathbf{F}}_v^i \quad i = 1..n \quad (1.4)$$

En utilisant des considérations d'isotropie<sup>(4)</sup>, on peut ainsi écrire l'énergie libre de Helmholtz,  $\psi$ , sous la forme générale suivante :

$$\psi = \psi_{eq}(\bar{\mathbf{B}}, \Theta) + \sum_{i=1}^n \psi_{neq}^i(\bar{\mathbf{B}}_e^i, \Theta) + \psi_{vol}(J, \Theta) \quad i, = 1..n \quad (1.5)$$

dans le cadre isotherme l'inégalité de Clausius-Duhem se résume en la positivité de la dissipation intrinsèque,  $\phi^{int}$ , tel que :

$$\begin{aligned} \phi^{int} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} = & \left( \boldsymbol{\sigma} - 2\rho \left( \bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right)^D - 2\rho \sum_{i=1}^n \left( \bar{\mathbf{B}}_e^i \frac{\partial \psi_{neq}^i}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e^i} \right)^D - \rho J \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1} \right) : \mathbf{D} \\ & + 2\rho \sum_{i=1}^n \left( \bar{\mathbf{B}}_e^i \frac{\partial \psi_{neq}^i}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e^i} \right) : \bar{\mathbf{D}}_v^{\circ i} \geq 0, \quad \forall \mathbf{D}, \bar{\mathbf{D}}_v^{\circ i} \end{aligned} \quad (1.6)$$

ou  $\mathbf{D}$  est le taux de déformation eulérien,  $\bar{\mathbf{D}}_v^{\circ i}$  le  $i^{\text{ème}}$  taux de déformation visqueux objectif :  $\bar{\mathbf{D}}_v^{\circ i} = \bar{\mathbf{R}}_e^i \bar{\mathbf{D}}_v^i \bar{\mathbf{R}}_e^{i\text{T}}$ . En utilisant une loi d'écoulement de type Maxwell qui relie le flux thermodynamique associé à la viscosité  $\bar{\mathbf{D}}_v^{\circ i}$  à la force thermodynamique correspondante (la contrainte

(3). Il faut noter que, d'une part ces décompositions sont définies à une rotation prêt, ce qui implique de prendre garde à l'objectivité des relations de comportement et complémentaires qui sont obtenues. D'autre part, le choix dans l'ordre de la décomposition conditionne le modèle obtenu puisque le produit simplement contracté n'est pas commutatif pour des tenseurs d'ordre supérieur ou égale à 2.

(4). Ou plus exactement le principe d'invariance des fonctions constitutives (voir [105, 106, 107])

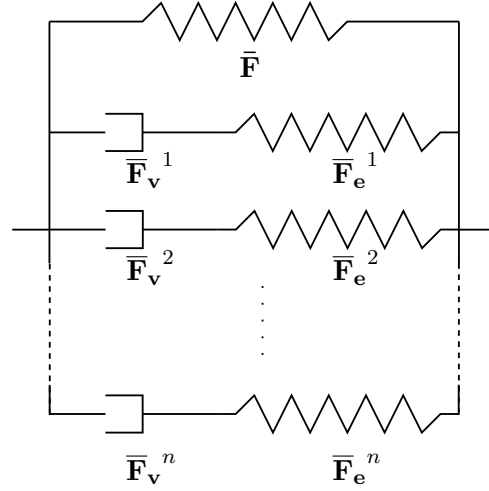


FIGURE 1.6 – Modèle de Maxwell généralisé

visqueuse) à travers un coefficient de viscosité  $\eta^i$ , on peut déduire de l'équation (1.6) les lois suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \overbrace{2\rho \left( \bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right)^D}_{\sigma_{eq}} + \sum_{i=1}^n \overbrace{\left( 2\rho \bar{\mathbf{B}}_e^i \frac{\partial \psi_{neq}^i}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e^i} \right)^D}_{\sigma_v^i} + \overbrace{\rho J \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1}}_{\sigma_{vol}} \quad (1.7)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_v^{oi} = \frac{1}{\eta^i} \boldsymbol{\sigma}_v^i, \quad i = 1..n \quad (1.8)$$

La figure 1.6 présente la schématisation rhéologique de ce modèle. Ce type de modèle, à viscosité discrète, est très largement utilisé dans la littérature pour décrire un large spectre de temps de relaxations. L'introduction d'une vision probabiliste des  $n$  décompositions multiplicatives permet d'offrir une alternative à la somme discrète de  $n$  mécanismes de viscosités, voir par exemple [82, 12, 91]. Il est intéressant de noter que ce type de formalisme peut se recouper avec des approches basées sur la physique statistique : dans [75], les auteurs retrouvent un modèle de type Maxwell tel que l'on peut le formuler avec la décomposition multiplicative de l'équation (1.4) sans pour autant introduire cette décomposition. Tous ces modèles échouent généralement à décrire l'effet Payne et peuvent éventuellement trouver leurs limites à traduire le comportement multi-axial de certains matériaux.

Pour tenter de répondre à ces deux problématiques (effet Payne et comportement multi-axial) nous avons développé un modèle de Maxwell généralisé étendu qui est décrit dans [28, 27, 26]. Le premier élément original que nous avons introduit consiste à modifier la loi d'écoulement visqueuse tel que l'équation (1.8) est remplacée par :

$$\bar{\mathbf{D}}_v^{oi} = \overbrace{\left( \frac{1}{\eta_1^i} \mathbb{I} + \left( \frac{1}{\eta_2^i} - \frac{1}{\eta_1^i} \right) \sum_{a=1}^3 \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a \right)}^{\mathbb{H}} : \boldsymbol{\sigma}_v^i \quad i = 1..n \quad (1.9)$$

ou les directions  $\mathbf{n}_a$  sont issues de la forme spectrale de  $\bar{\mathbf{B}} = \sum_{a=1}^n \lambda_a \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a$ . L'idée de cette loi d'évolution est d'introduire une dépendance de la viscosité au mode de sollicitation. En effet,

on peut remarquer que si  $\eta_1^i = \eta_2^i$  on retombe sur la loi précédente (Maxwell standard). D'autre part, dans le cas d'une traction uniaxial, les directions  $n_a$  sont colinéaires aux vecteurs de base si bien que seul le paramètre  $\eta_2^i$  intervient dans ce cas là (et l'on retrouve encore une loi de type Maxwell standard). Dans le cas d'un glissement simple, les directions  $n_a$  ne sont pas colinéaires aux vecteurs de base et les deux paramètres caractérisent la viscosité. L'isotropie et l'objectivité de cette loi est discutée dans [27].

Dans le modèle de Maxwell généralisé décrit plus haut, une sollicitation statique (ou à vitesse infiniment lente) conduit à une réponse purement hyperélastique. On ne peut donc pas reproduire l'hystérésis d'équilibre et les effets de plasticité qui apparaissent en général lorsque l'on se rapproche de la température de transition vitreuse. Pour traduire ces effets nous avons adopté une modélisation viscoplastique (la viscosité nous sert d'une part à régulariser la plasticité et d'autre part à traduire de la viscosité aux temps longs). Le potentiel  $\psi_{eq}$  introduit à l'équation (1.5) est modifié tel que l'on ait :

$$\psi_{eq} = \psi_{hyp}(\bar{\mathbf{B}}, \Theta) + \frac{G_p(\Theta)}{\rho_0} (I_1(\bar{\mathbf{B}}_{ep}) - 3) \quad (1.10)$$

ou  $G_p$  et un module de cisaillement fonction de la température,  $\psi_{hyp}$  un potentiel hyperélastique,  $\bar{\mathbf{B}}_{ep}$  le tenseur de Cauchy-Green gauche élastique défini en utilisant la décomposition suivante :

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_{ep} \bar{\mathbf{F}}_p \quad (1.11)$$

Pour la contrainte statique ou relaxé,  $\sigma_{eq}$  nous obtenons donc la forme suivante :

$$\sigma_{eq} = 2\rho \left( \bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \psi_{hyp}}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right)^D + 2 \frac{G_p(\Theta)}{J} \bar{\mathbf{B}}_{ep}^D \quad (1.12)$$

Enfin pour la loi d'écoulement viscoplastique nous avons adopté l'expression suivante

$$\bar{\mathbf{D}}_p^o = \frac{\langle f(\sigma_p, \Theta) \rangle}{\eta(\Theta)} \frac{\sigma_p}{\|\sigma_p\|}, \quad \sigma_p = 2 \frac{G_p(\Theta)}{J} \bar{\mathbf{B}}_{ep}^D \quad (1.13)$$

ou  $\eta(\Theta)$  est un paramètre de viscosité,  $f$  est la fonction seuil définissant le domaine élastique, tel que :

$$f(\sigma_p, \Theta) = \|\sigma_p\| - \chi(\Theta) \quad (1.14)$$

et  $\chi(\Theta)$  une contrainte seuil fonction de la température.

Pour tenir compte de l'effet Payne nous nous sommes inspirés des idées formulées notamment par Krauss (voir [62]) et étendues par d'autres ensuite (voir par exemple [79]). L'effet Payne est vu comme la conséquence de ruptures et de reformations du réseau d'interactions charges/charges (voir aussi [61] pour une discussion sur les probables mécanismes microscopiques en jeu). Nous avons donc choisi d'introduire  $n$  variables internes supplémentaires scalaires, notées  $\omega_i$  ( $\omega_i \in [0, 1]$  et  $\omega_i(t=0) = 1$ ), pour traduire la partie endommagement du réseau de charge qui conduit à l'assouplissement dynamique caractéristique de cet effet. Chaque variable  $\omega_i$  étant associée à un mécanisme de viscosité, i.e. un temps caractéristique de viscosité et donc un élément de Maxwell directionnel. Ces variables peuvent être vues comme la densité ou le pourcentage d'interactions charges/charges actives. Bien entendu nous avons supposé que cette endommagement n'induit

pas d'anisotropie (seul la viscosité directionnelle peut en induire) et qu'il est irréversible. Cette question de la réversibilité sera discutée par la suite mais en première approximation nous ne considérons que des amplitudes croissantes. Les énergies libres visqueuses de l'équation (1.5) sont modifiées pour adopter la forme suivante :

$$\psi_{neq}^i(\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i, \Theta, \omega_i) = \omega_i \psi_v^i(\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i, \Theta) \quad (1.15)$$

ce qui nous conduit aux contraintes visqueuses suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}_v^i = 2J^{-1} \rho_0 \omega_i \left( \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i \cdot \frac{\partial \psi_v^i}{\partial \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i} \right)^{\text{D}} \quad (1.16)$$

Lorsque la sollicitation mécanique augmente les mécanismes de viscosités associés aux plus faibles énergies d'activations sont endommagés de manière inversement proportionnelle à l'énergie élastique (ou une partie de l'énergie élastique). En première approximation, nous avons négligé l'influence directe de la vitesse de chargement sur la loi d'évolution régissant l'endommagement ou la rupture de pont vitreux (dans la gamme explorée expérimentalement et pour un matériau donnée nous n'avons pas vu d'effet de cette vitesse) et l'effet de la température (ce qui reste une hypothèse grossière surtout si l'on se rapproche de l'état vitreux). Nous proposons l'équation d'évolution suivante qui fait intervenir des temps caractéristiques (correspondant à une stabilisation de l'effet Payne),  $h_i$ , et qui est inspirée de modèles d'écoulement plastique afin de tenir compte d'une stabilisation de l'assouplissement lorsque l'amplitude de chargement ne varie plus :

$$\dot{\omega}_i = -\frac{1}{h_i} \left\langle \omega_i - \left( \frac{3}{I_1(\bar{\mathbf{B}})} \right)^{r_i} \right\rangle, \quad \omega_i(t=0) = 1 \quad (1.17)$$

avec  $r_i$  des paramètres sans dimensions. L'admissibilité thermodynamique de ces différentes lois est discutée dans [27].

En utilisant des potentiels visqueux de type néo-Hooke :  $\psi_v^i(\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i, \theta) = \rho_0^{-1} G_i(\Theta)(I_1(\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i) - 3)$ , La loi d'écoulement directionnelle de l'équation (1.9) peut également s'écrire sous la forme alternative suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{B}}}_{\mathbf{e}}^i &= \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i + \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i \cdot \mathbf{L}^{\text{T}} - \frac{2}{3}(\mathbf{1} : \mathbf{L})\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i - \frac{1}{J\tau_1^i} \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i{}^{\text{D}} \\ &- \left( \frac{1}{J\tau_2^i} - \frac{1}{J\tau_1^i} \right) \sum_{a=1}^3 (\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}}^i \cdot \mathbf{n}_a) \otimes (\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}}^i \cdot \mathbf{n}_a) (\mathbf{n}_a \cdot \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i{}^{\text{D}} \cdot \mathbf{n}_a), \quad \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{e}}^i(t=0) = \mathbf{1} \end{aligned} \quad i = 1..n \quad (1.18)$$

avec  $\tau_1$  et  $\tau_2$  les temps caractéristiques de viscosité (qui s'expriment d'après la relation :  $\tau_i = 4G_i/\eta_i$ ) et qui sont supposés indépendant de  $\omega_i$ . Le tenseur de déformation pure  $\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}}$  vient de la décomposition polaire  $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{e}}\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{e}}$ .

Pour l'identification des paramètres matériaux, nous avons développés des procédures adaptées en utilisant les restrictions/hypothèses suivantes :

- Tout d'abord, nous supposons que l'aire d'hystérésis est obtenue en condition isotherme et que la température du matériau est strictement égale à celle de l'environnement. La fonction objectif de l'identification est construite en imposant la dépendance des paramètres matériaux à la température (soit le plus souvent une forme linéaire) et en utilisant l'ensemble des résultats expérimentaux (3 températures + 2 modes de sollicitation).

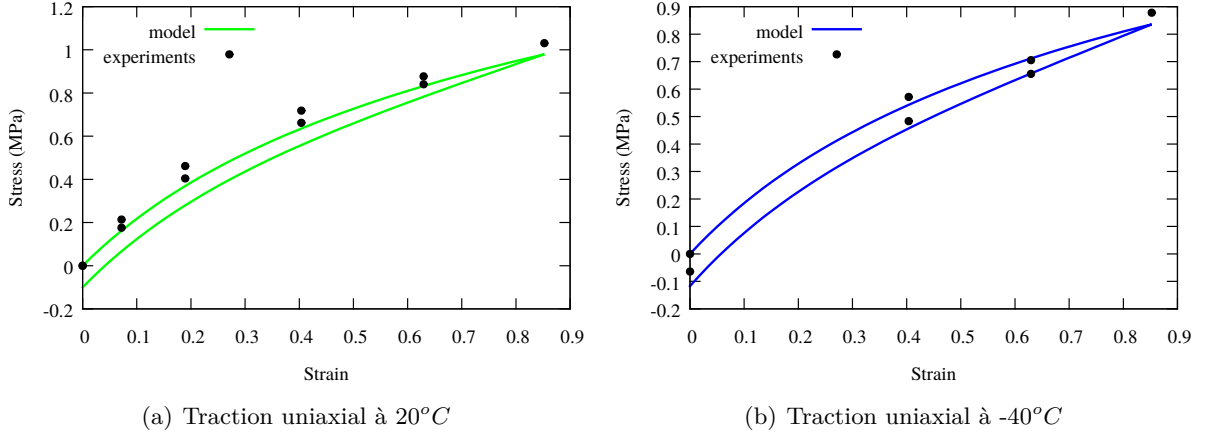


FIGURE 1.7 – Exemple de résultats de l'identification des hystérésis d'équilibres

- Nous séparons l'identification en deux parties : en premier lieu, nous identifions la contribution statique ou relaxé à partir des hystérésis d'équilibre puis la contribution dynamique. Nous effectuons des minimisations sous contraintes sur les paramètres matériaux de manière à respecter les conditions de polyconvéxité de l'énergie libre (voir [7, 66]).
- Nous ne fixons pas un nombre prédéfini de temps de relaxation. Le nombre d'élément de Maxwell  $n$  est donc déterminé par la procédure d'identification. Pour ce faire nous nous fixons des plages de variations pour certains paramètres et nous discrétisons les espaces de variations ainsi définis. Par exemple dans le cas du modèle précédemment décrit (avec la formulation de l'équation (1.18)), nous discrétisons l'espace de variation de  $\tau_1^i, \tau_2^i, h_i, r_i$ . Nous avons donc un grand nombre d'éléments de Maxwell avec viscosité directionnelle auxquels sont également associés des endommagements pour Payne. L'avantage est que nous pouvons pré-intégrer (avant la minimisation des autres paramètres) les lois d'évolutions. Nous formulons ensuite une fonction objectif qui dépend des autres paramètres, dans le cas précédent il reste les  $G_i(\Theta)$ . Cette fonction est construite à partir de quantités globales, aires d'hystérésis et modules dynamiques sécants, et non en calculant la distance point à point à une courbe expérimentale. La minimisation est construite sous contraintes  $G_i(\Theta) \geq 0$ , ce qui conduit à une première élimination des termes associés aux modules identifiés tel que  $G_i = 0$ . A la sortie de l'identification, on peut procéder à une deuxième élimination en ne gardant que les termes qui contribuent le plus à l'erreur, il suffit de se donner une tolérance sur la contribution à l'erreur, ce qui conduit *in fine* à déterminer le nombre d'éléments de viscosité  $n$ .

Nous obtenons ainsi une procédure qui converge dans des temps relativement courts et qui peut être en partie parallélisée, notamment les pré-intégrations des lois d'évolutions qui sont indépendantes les unes des autres. D'autre part, dans le cas où les potentiels d'énergies libres visqueuses dépendent linéairement des paramètres élastiques (les  $G_i$  par exemple dans le cas de potentiels de néo-Hooke) on peut formuler une expression quasi-analytique de la fonction objectif et l'on peut donc utiliser des méthodes performantes à gradient pour la minimisation.

Les figures 1.7(a)-1.7(b) illustrent les résultats de l'identification de l'hystérésis d'équilibre. On obtient qualitativement de bon résultats, sur une plage assez large de températures (mais suffisamment loin de la température de transition vitreuse qui est d'environ  $-85^\circ C$  sur ce ma-

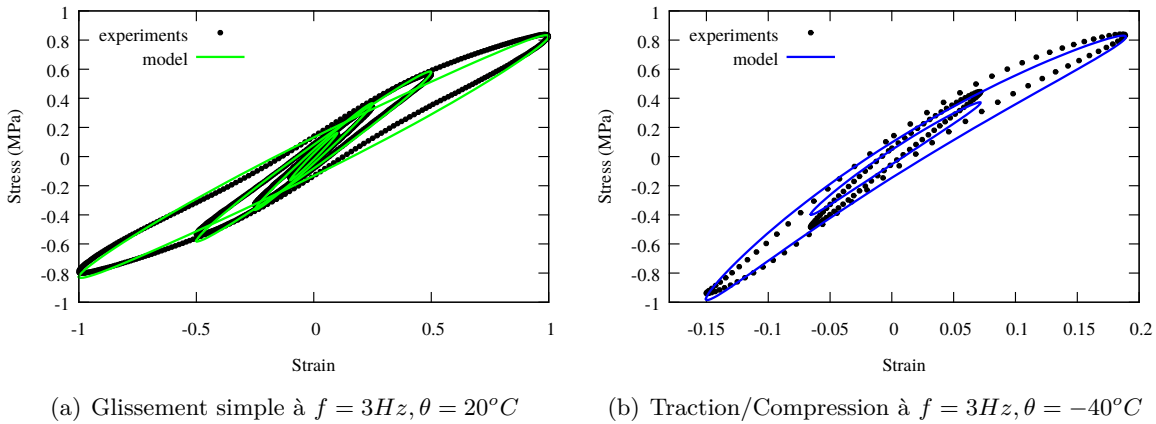


FIGURE 1.8 – Exemple de résultats d’identification en dynamique : prise en compte de l’effet Payne en traction et en cisaillement, et de l’effet de la température sur le comportement.

tériau). Un exemple typique de résultats d’identification sur cycles stabilisés est donnée par les figures 1.8 (des résultats plus détaillés sont disponibles dans [27, 26, 91, 12, 82]).

Les différentes approches développées sont suffisamment générales pour s’adapter à différents type d’élastomères chargés et permettent d’obtenir le comportement stabilisé dans une gamme assez large de températures, d’amplitudes et de vitesses de sollicitations correspondants aux applications que nous avons eu à traiter. Les figures 1.9, 1.10, illustrent des résultats de validations par comparaisons à des résultats expérimentaux obtenus sur différent matériaux et/ou par comparaison à des modèles standards de la littérature (figures 1.11, 1.12).

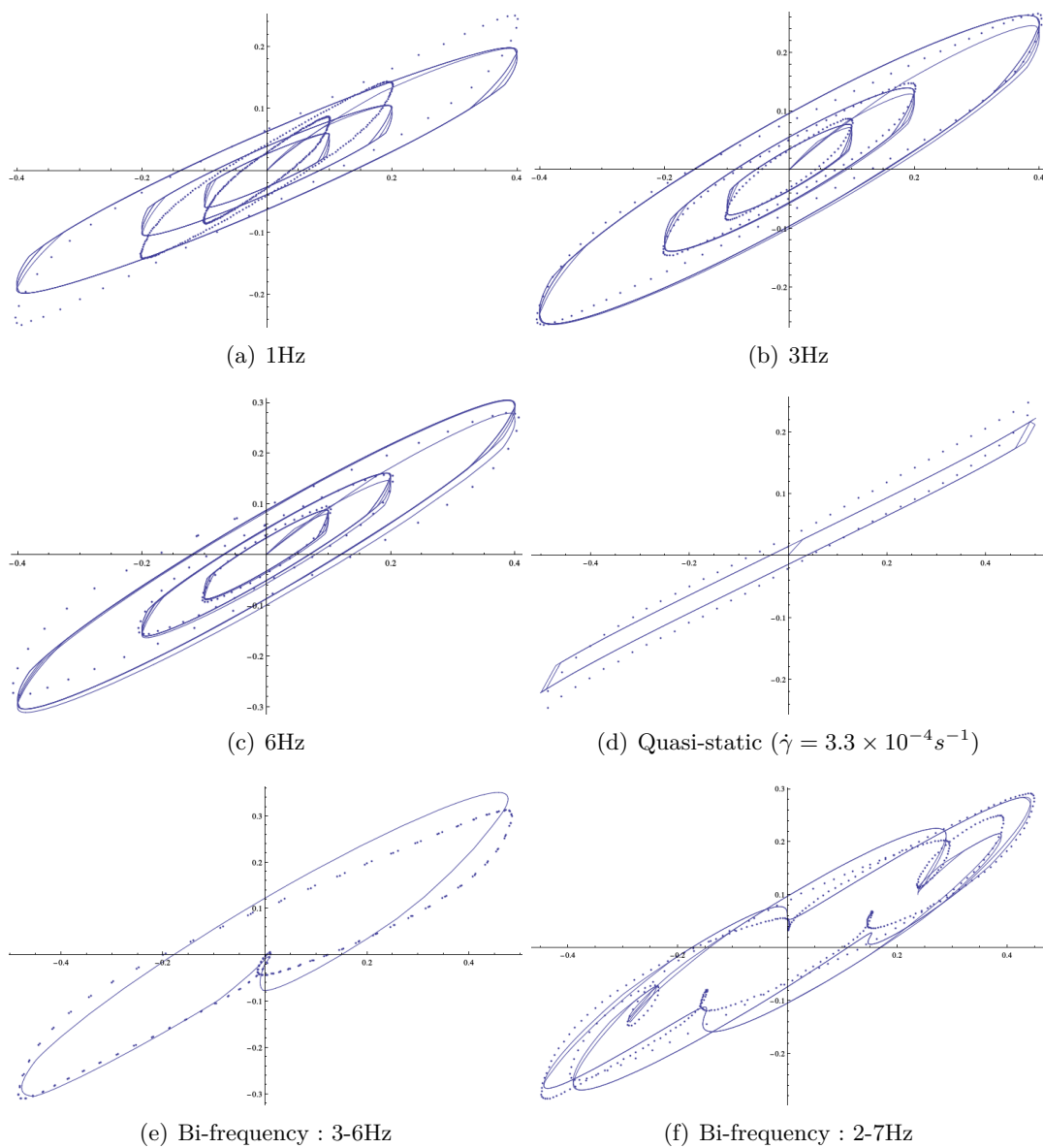


FIGURE 1.9 – Exemple de résultat sur un caoutchouc naturel chargé en noir de carbone pour le modèle de Martinez et al [82]



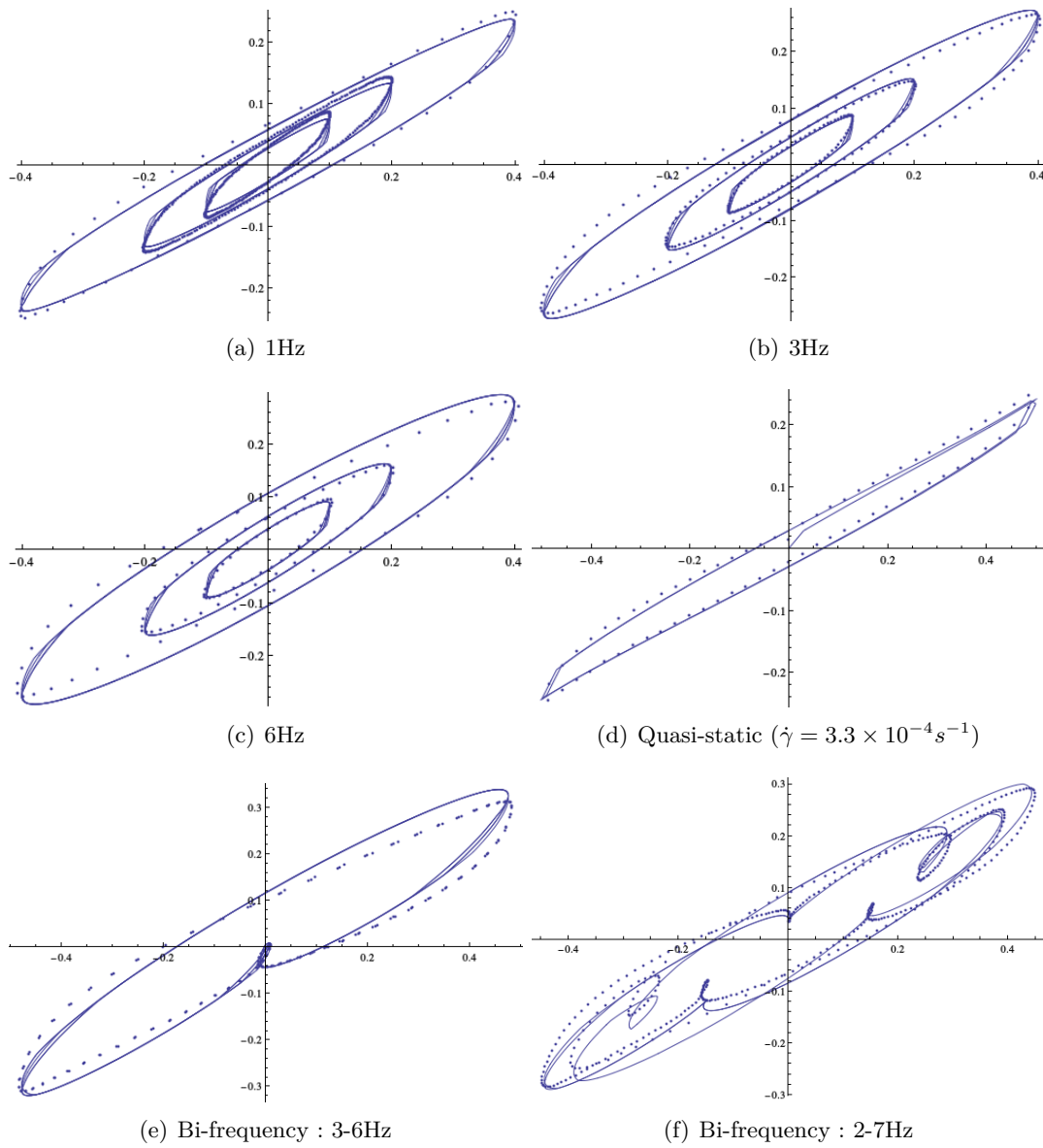


FIGURE 1.10 – Exemple de résultat sur un caoutchouc naturel chargé en noir de carbone pour le modèle de Delattre et al [27]

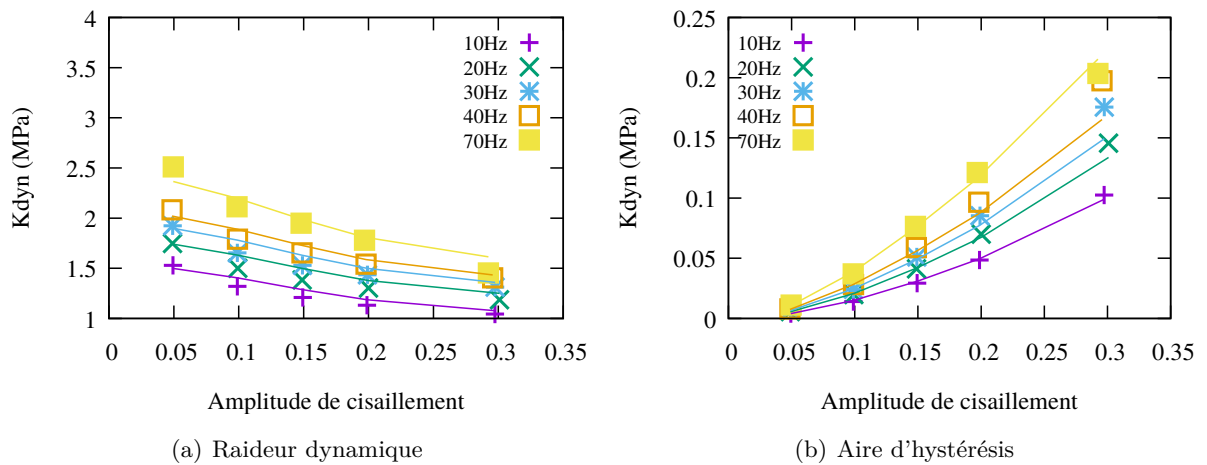


FIGURE 1.11 – Exemple de résultats d'identification sur un caoutchouc synthétique chargé en noir de carbone pour le modèle de Delattre et al [27], module et aire d'hystérésis en fonction de la fréquence (symbole=points expérimentaux, traits continus=modèle)

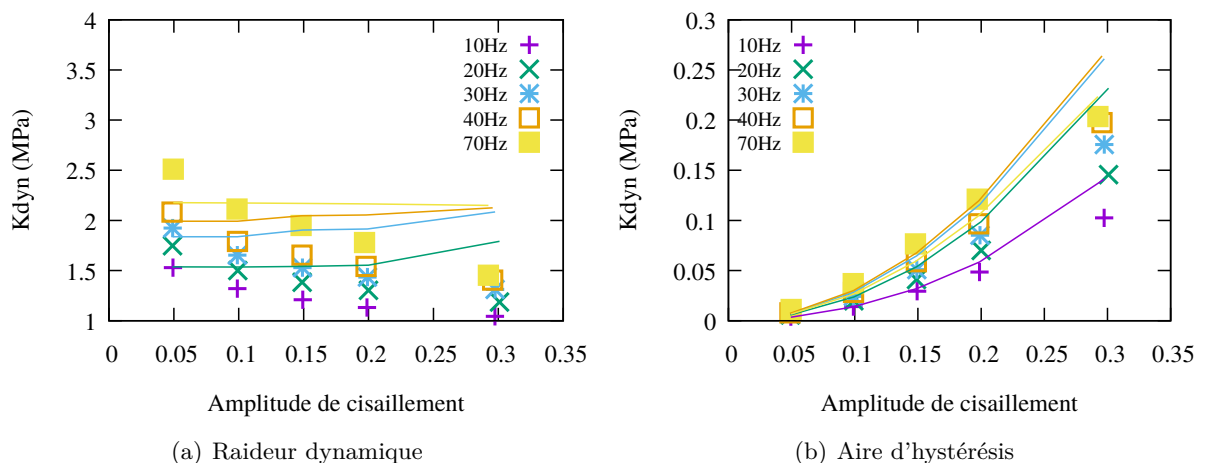


FIGURE 1.12 – Exemple de résultats d'identification sur un caoutchouc synthétique chargé en noir de carbone pour le modèle de Bergström-Boyce [10], module et aire d'hystérésis en fonction de la fréquence (symbole=points expérimentaux, traits continus=modèle)

Pour terminer cette partie sur l'approche phénoménologique et à titre d'ouverture, on peut revenir sur la question de la modélisation de la réversibilité de l'effet Payne. Ce type de phénomène à un intérêt dans le cas des chargements d'amplitudes variables ce qui est souvent le cas dans les chargements multi-harmoniques, typiques de certaines pièces (par exemple dans des rotors d'hélicoptères). Pour rendre compte de cet réversibilité, j'ai récemment travaillé dans le cadre d'un stage d'élève ingénieur sur une modélisation inspirée des modèles à changement de phase. En effet, d'un point de vue micromécanique on peut interpréter l'effet Payne comme étant la conséquence d'un mécanisme de rupture/reformation de ponts vitreux qui se retrouve

à l'intérieur des agglomérats ou qui relie des agglomérats/agrégats entre eux. On sait en effet qu'en plus des charges et de la matrice on a une zone de transition ou d'interface avec des propriétés ou un gradient de propriétés à l'interface charges/matrice. On peut donc tout à fait imaginer que cette zone évolue sous sollicitations (mécanique et thermique) pour changer d'état (totalement ou partiellement) vitreux/caoutchoutique. Nous avons donc travaillé sur un modèle intégrant ce changement en modifiant la  $i^{eme}$  énergie libre visqueuse isochorique par la forme suivante :

$$\psi_{neq}^i(\bar{\mathbf{B}}_{e_{vtr}}^i, \bar{\mathbf{B}}_{e_{caou}}^i, \Theta, \omega_i) = \omega_i \psi_{vtr}^i(\bar{\mathbf{B}}_{e_{vtr}}^i, \Theta) + (1 - \omega_i) \psi_{caou}^i(\bar{\mathbf{B}}_{e_{caou}}^i, \Theta) \quad (1.19)$$

Les indices  $caou$  et  $vtr$  font référence à la contribution d'une phase caoutchoutique ou vitreuse. Chaque phase est supposé visqueuse mais ayant un comportement et une loi d'évolution qui lui est propre, nous avons introduit les transformations élastiques  $\bar{\mathbf{F}}_{e_{vtr}}^i$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_{e_{caou}}^i$  et visqueuses  $\bar{\mathbf{F}}_{v_{vtr}}^i$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_{v_{caou}}^i$  de chacune des phases. En première approximation, nous avons adopté un comportement une loi d'évolution identiques pour chaque phase, nous avons uniquement modifié la rigidité élastique (et par conséquent le temps caractéristique de viscosité) de chaque phase. En utilisant des potentiels de néo-Hooke, des lois d'évolutions de Maxwell, et un coefficient,  $S$ , qui représente le rapport des modules de cisaillement de la phase vitreuse sur la phase caoutchoutique, nous obtenons les équations de comportement et d'évolutions suivantes :

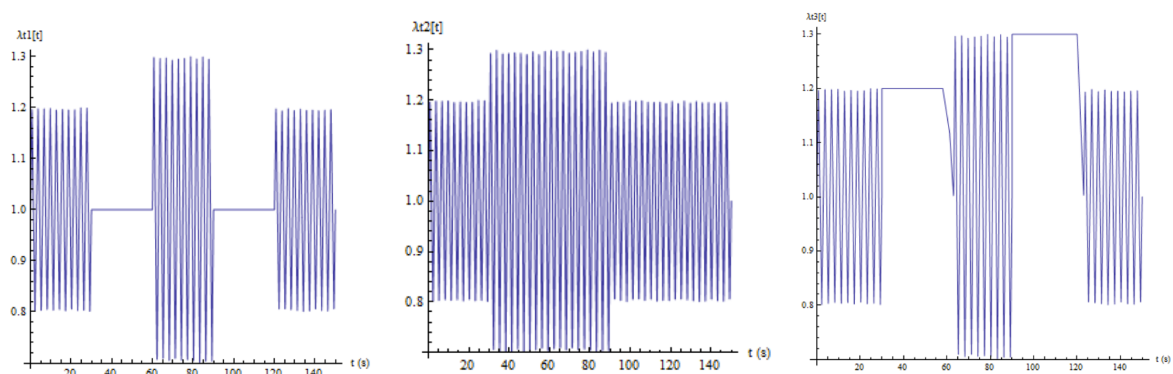
$$\begin{aligned} \sigma_v^i &= 2\mu_{caou} \left( S\omega_i J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{e_{vtr}}^{iD} + (1 - \omega_i) J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{e_{caou}}^{iD} \right) \\ \dot{\bar{\mathbf{B}}}_{e_{vtr}}^i &= \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{B}}_{e_{vtr}}^i + \bar{\mathbf{B}}_{e_{vtr}}^i \bar{\mathbf{L}}^T - \frac{4S\mu_{caou}}{\eta_{caou}} \bar{\mathbf{B}}_{e_{vtr}}^i \bar{\mathbf{B}}_{e_{vtr}}^{iD} \\ \dot{\bar{\mathbf{B}}}_{e_{caou}}^i &= \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{B}}_{e_{caou}}^i + \bar{\mathbf{B}}_{e_{caou}}^i \bar{\mathbf{L}}^T - \frac{4\mu_{caou}}{\eta_{caou}} \bar{\mathbf{B}}_{e_{vtr}}^i \bar{\mathbf{B}}_{e_{caou}}^{iD} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Le reste du modèle est inchangé par rapport à ce qui a été décrit précédemment. Ce modèle permet donc de prendre en compte un changement de phase (réversible) local, attribué à la sollicitation mécanique (il existe également un changement de phase thermique qui n'est pas pris en compte ici). La variable  $\omega_i$  devenant donc le pourcentage de phase vitreuse. Il nous faut ensuite définir une loi d'évolution pour  $\omega_i$ . Comme dans le modèle précédent nous souhaitons qu'elle soit inversement proportionnelle à l'énergie de déformation fournie et qu'elle fasse apparaître un temps caractéristique qui lui est propre. Dans ce travail nous avons étudié la forme suivante qui satisfait l'admissibilité thermodynamique :

$$\dot{\omega}_i = -\frac{1}{h_i} \left( \omega_i - \left( \frac{3}{I_1(\bar{\mathbf{B}})} \right)^{r_i} \right) \text{sign}(\psi_{vtr}^i(\bar{\mathbf{B}}_{e_{vtr}}^i, \Theta) - \psi_{caou}^i(\bar{\mathbf{B}}_{e_{caou}}^i, \Theta)) H(\omega_i) H(1 - \omega_i) \quad (1.21)$$

$$\omega_i(t=0) = 1$$

ou  $H()$  est la fonction de Heaviside permettant de restreindre l'évolution des variables  $\omega_i$  à l'intervalle  $[0, 1]$ . Ces développements récents sont en cours d'exploitation pour validation et publication. La figure 1.13(d), montre l'évolution du pourcentage de phase vitreuse,  $\omega_i$ , pour trois conditions de chargement harmoniques à amplitudes croissantes puis décroissantes en traction uniaxiale (cf. figures 1.13(a), 1.13(b) et 1.13(c)). On peut constater que l'on traduit bien une évolution réversible : le pourcentage de phase vitreuse diminue puis augmente lorsque l'on passe par des amplitudes croissantes puis décroissantes.



(a) premier cas de chargement cyclique

(b) deuxième cas de chargement cyclique

(c) troisième cas de chargement cyclique

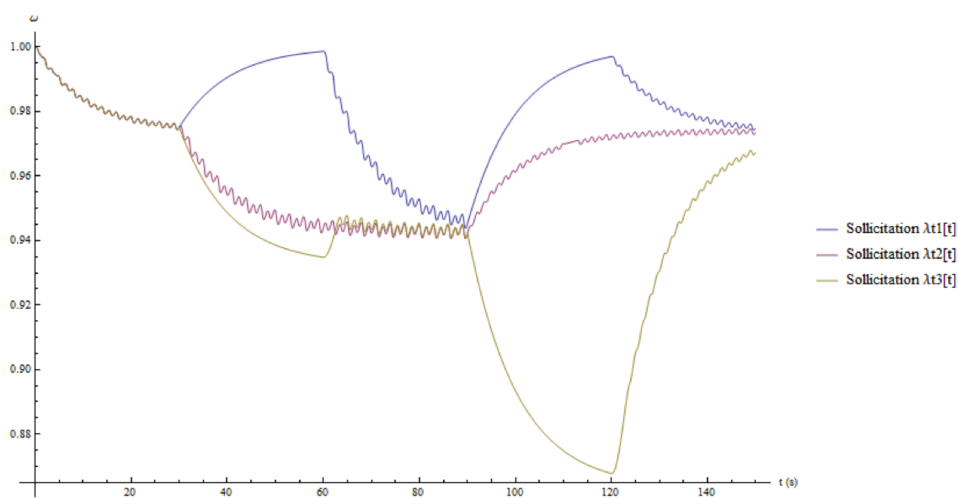
(d) Evolution au cours du temps de  $\omega$ 

FIGURE 1.13 – Evolution de la variable traduisant le changement de phase caoutchou-teux/vitreux, cas à une seule branche visqueuse, pour la loi d'évolution de l'éq. (1.21)) dans un cas de chargement de traction uniaxiale. Résultats issus du rapport de stage R&D de Jonathan Champagne.

### 1.1.3 Sur l'approche micro-mécanique en champs complets

La difficulté majeure de ce type d'approche sur les élastomères chargés est lié à la problématique de définition d'un ou de plusieurs VER. En effet les élastomères chargés sont des matériaux multi-échelles : une particule renforçante de charge de noir de carbone peut faire de 10nm à 500nm de diamètre, lors du mélangeage ces particules s'aggrègent en agrégats qui peuvent faire de 100nm à quelques micromètres et ces agrégats peuvent former des clusters ou des agglomérats pouvant dépasser les 100 $\mu$ m. Nous savons également que ces agrégats ou agglomérats possèdent une interface avec la gomme dont les dimensions caractéristiques et les propriétés (ou gradients de propriétés) ne sont pas connues précisément. Par ailleurs, il semble qu'à l'intérieur des agrégats les particules sont liées entre elles par une fine couche de polymère vitreux (de l'ordre de 2 à 5nm pour certains noirs de carbone d'après [84]). Suivant le taux de charge l'ensemble des agrégats ou agglomérats peuvent percoler et former un réseau de charge également liés par des ponts vitreux. Enfin, à ces différentes échelles on peut également rencontrer d'autres inclusions (que les charges renforçantes), des cavités ou des défauts, etc.

La problématique est donc double : définir les échelles à considérer et définir les propriétés mécanique des constituants sachant que seule celles des charges ou de la matrice peuvent être caractérisés de manière indépendante (le comportement mécanique et l'épaisseur des interfaces restant inconnues). A ces problématiques d'échelles peut se rajouter également la question du rôle de la température puisque la matrice est de nature entropique est que même pour des faibles niveau de déformation macroscopique, à des échelles microscopiques ou en deçà la localisation des déformations due au fort contraste de propriétés des phases peut conduire à des niveau de déformations importants et donc à une élévation locale non-négligeable de la température et à des variations de propriétés par rapport à l'ambient.

Ces problématiques de définition précise des échelles et des constituants font que les approches de changement d'échelles en champs complets sont relativement rares dans la littérature pour ce qui concerne les élastomères renforcés par des charges nanométriques. On peut néanmoins citer, par exemple, les travaux de [53, 63, 115, 24].

Nous avons donc tenté d'étudier le comportement d'un volume élémentaire idéalisé comportant trois phases : la matrice, des agrégats de charges de forme elliptique ou polygonale (diagramme de Voronoï) et une interface agrégats/matrice d'une épaisseur donnée. Pour ce faire nous avons mis en place des outils numériques qui nous permettent dans Abaqus d'effectuer des tirages aléatoires de volumes élémentaires, périodiques, idéalisés en 2D (déformations planes) ou en 3D tout en contrôlant certains paramètres comme les tailles moyennes des charges, l'épaisseur de l'interface, le taux de charge, etc (voir figure 1.14). Ce cadre nous permet d'utiliser des comportements élémentaires non-linéaires, faiblement compressible (pour la matrice et l'interface) en grandes déformations.

Nous avons également automatisé la génération des conditions aux limites à appliquer pour pouvoir traiter des conditions de périodicité (PBC), de déformation homogène sur le bord (KUBC) ou de contrainte homogène sur le bord (SUBC), voir [68]. Un exemple typique de résultats est donné par la figure 1.15. Cette génération de volumes élémentaires nous conduit rapidement à la question de la représentativité de ces volumes, pour ce faire on doit se fixer des critères dont par exemple l'invariance des propriétés macro obtenues à la taille du volume considéré (ou au nombre de particules à taille et concentration fixées) ou l'écart à l'isotropie

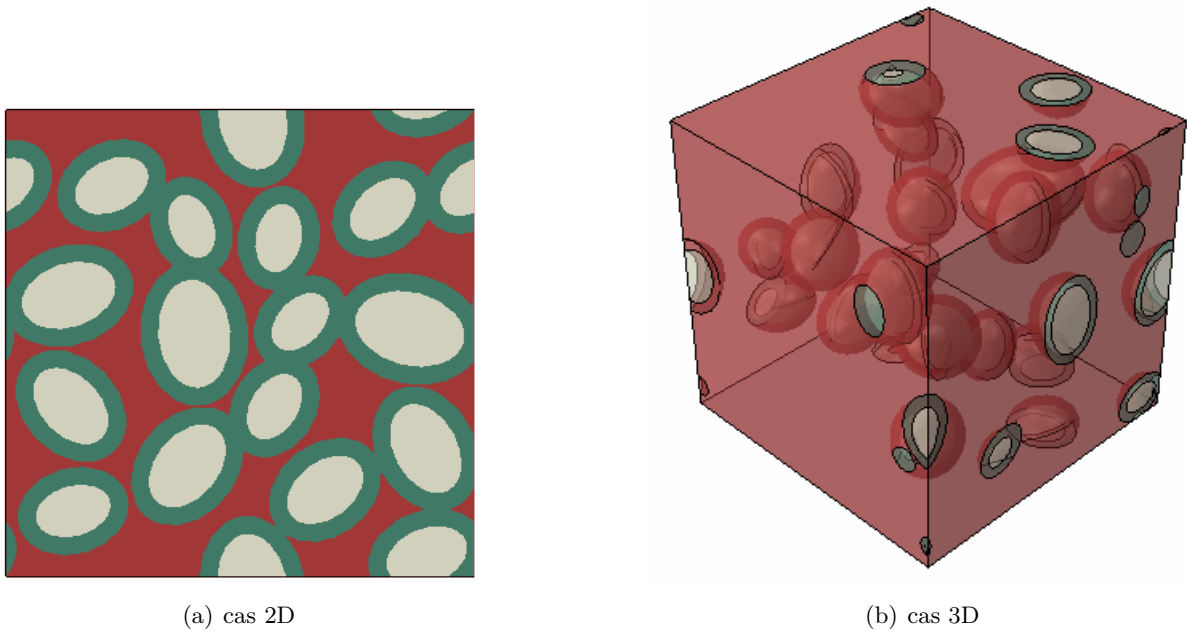


FIGURE 1.14 – Tirage aléatoire de volumes élémentaires périodiques à inclusions ellipsoïdales et interface matrice/inclusions (scripts python Abaqus)

(voir figure 1.16) ou d'autres critères, cf. par exemple [1, 114].

Dans la thèse de F. Khedimi [60], nous avons tenté à partir de ces tirages aléatoires de micro-structures, de dégager des paramètres micro-structuraux (tel que le rapport entre surface et volume des agrégats ou les écarts-types sur des variations de tailles des agrégats, l'épaisseur de l'interface, ...) autres que le taux de charge, qu'il faudrait prendre en compte pour développer un modèle mésoscopique micro-physiquement motivé. Cette démarche n'a pour l'instant pas aboutie et mériterait certainement d'être approfondie. Il n'en reste pas moins que ce type de démarche est fortement dépendante des hypothèses formulées sur le comportement des phases constituant le matériau et leurs évolutions/interaction notamment si l'on veut être en capacité d'intégrer des effets spécifiques tels que Payne sur la réponse macroscopique, malheureusement nous ne disposons pas à l'heure actuelle de tous les éléments nécessaires.

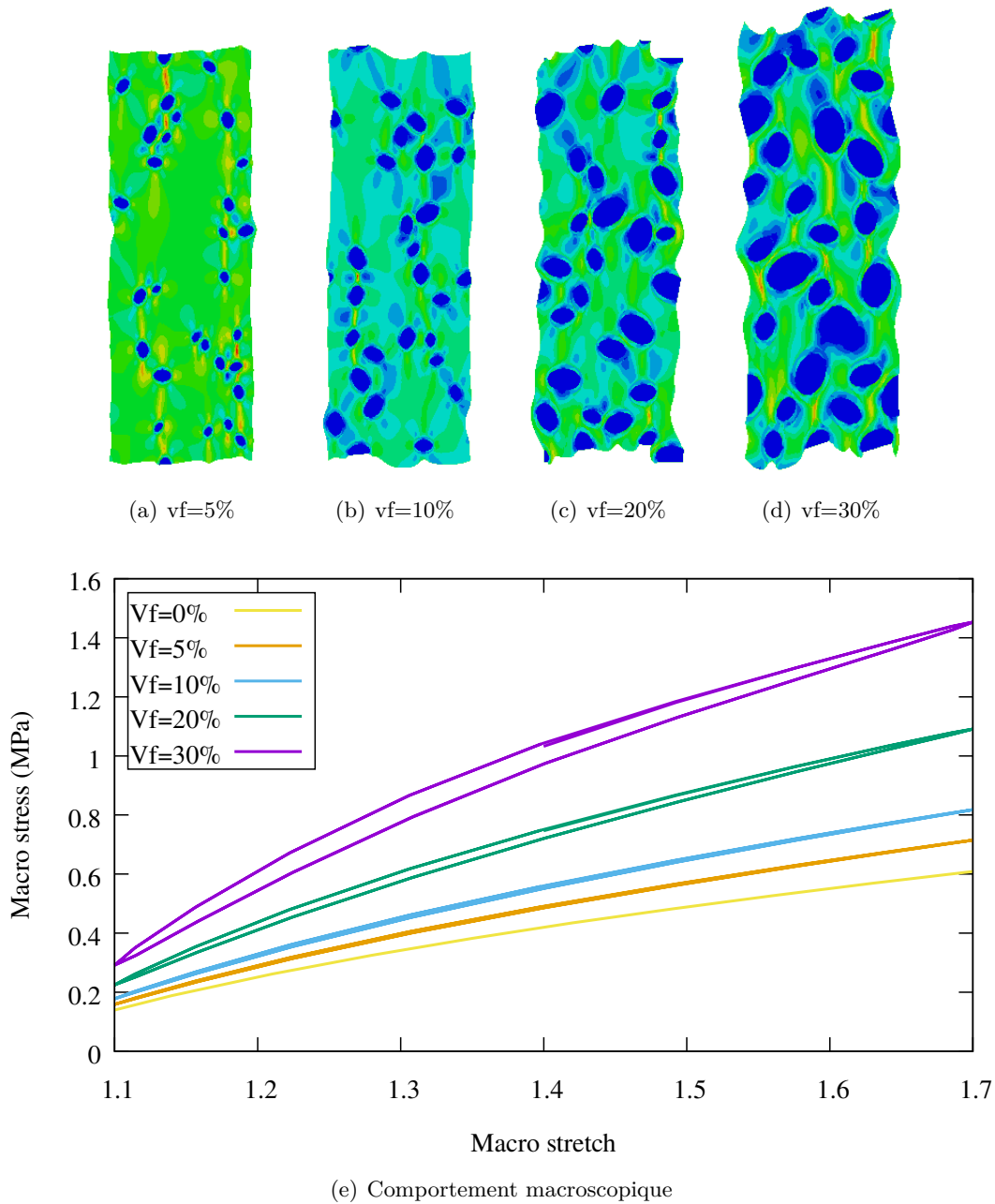
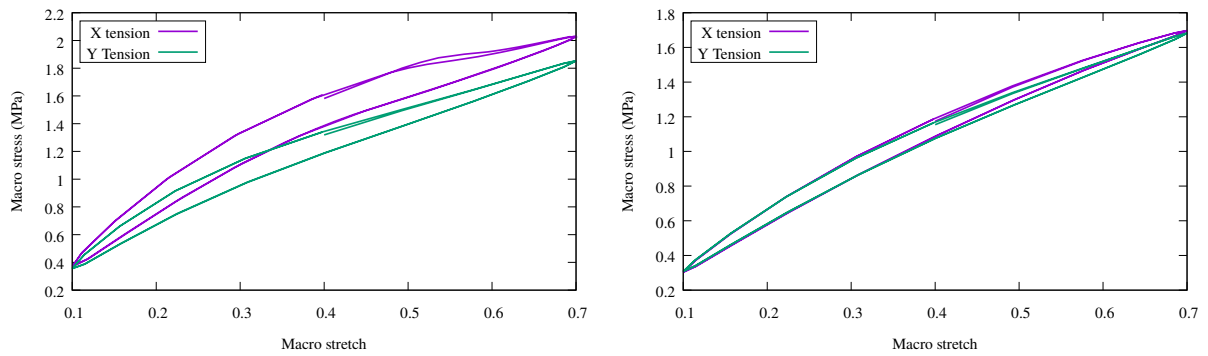
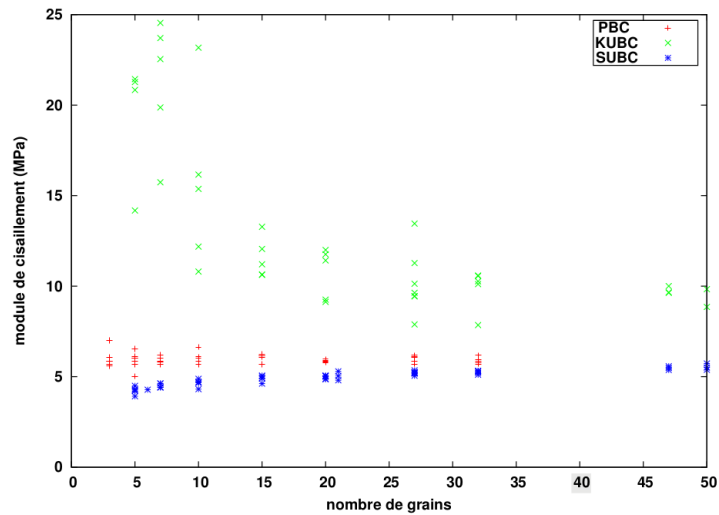


FIGURE 1.15 – Test de traction uniaxiale avec des conditions de périodicité. La matrice est hyperélastique faiblement compressible, l'interface est visco-hyperélastique avec un contraste de module de cisaillement de 10 par rapport à la matrice. Les charges sont élastiques et beaucoup plus rigides que la matrice ou l'interface ( $Vf =$  taux volumique de charges).



(a) écart à l'isotropie (réponse macro en traction dans deux directions) pour un tirage aléatoire (cas 2D)      (b) écart à l'isotropie (réponse macro en traction dans deux directions) pour un autre tirage aléatoire (cas 2D)



(c) sensibilité du module de cisaillement macro en fonction du nombre de particules considérées (à taille de domaine et taux de charge fixé) pour différentes méthodes d'homogénéisations (cas 2D, PBC : periodic boundary conditions, KUBC : kinematic uniform boundary conditions, SUBC : stress uniform boundary conditions)

FIGURE 1.16 – Étude de la représentativité de volumes élémentaires matrice/aggrégat générés de manière aléatoire



## 1.2 Prise en compte d'un endommagement par fatigue

Pour étudier le comportement en fatigue d'élastomères chargés nous avons mis en place une méthode de caractérisation expérimentale originale de suivi des caractéristiques mécaniques en isotherme d'une même éprouvette soumise à un chargement de fatigue (par opposition à des essais de fatigue standards qui sont en général ininterrompus et potentiellement non-isothermes à cause de l'auto-échauffement). Pour ce faire nous interrompons le chargement cyclique de fatigue le temps de laisser l'éprouvette relaxer les contraintes internes et de revenir à la température ambiante, nous effectuons ensuite des caractérisations quasi-statiques et dynamiques ce qui nous permet de suivre l'évolution de grandeurs caractéristiques tel que des modules, isothermes, statiques ou dynamiques en fonction du nombre de cycles de fatigue (voir figure 1.17). Cette approche a été initialement proposée par Adnane Boukamel (thèse de Julie Grandcoïn [42]), nous l'avons principalement utilisé dans la thèse d'Alexis Delattre.

La figure 1.18 présente un exemple de résultats obtenus dans la thèse de Alexis Delattre. Nous avons notamment pu vérifier que ce type d'essais de fatigue interrompus ne modifiaient pas outre mesure le comportement en fatigue en comparant le résultat d'un essai interrompu à un essai ininterrompu (cf. fig 1.19). Nous avons également effectué un suivi du champ de température au cours d'un essai ininterrompu, à l'aide d'une caméra thermique, sur une éprouvette diabolo en extension. La figure 1.20 synthétise quelques résultats de ce type d'essais. De ce type de campagne que nous avons mené sur deux matériaux un butadiène chargé de noir de carbone et un silicone chargé de silice, nous pouvons faire les constats suivants :

- La fréquence de l'essai de fatigue ne semble pas jouer de rôle majeur sur l'évolution des propriétés mécaniques isothermes, au moins dans une certaine plage. Par exemple, sur les figures 1.18 on peut voir que l'évolution des grandeurs est sensiblement la même pour des fréquences de 3Hz ou de 12Hz pour l'essai de fatigue.
- Si l'on s'intéresse aux conséquences du chargement cyclique de fatigue sur le comportement relaxé isotherme du matériau (en utilisant les hystérésis d'équilibres obtenues sur les essais interrompus) on peut constater une très légère baisse de raideur dans les premiers

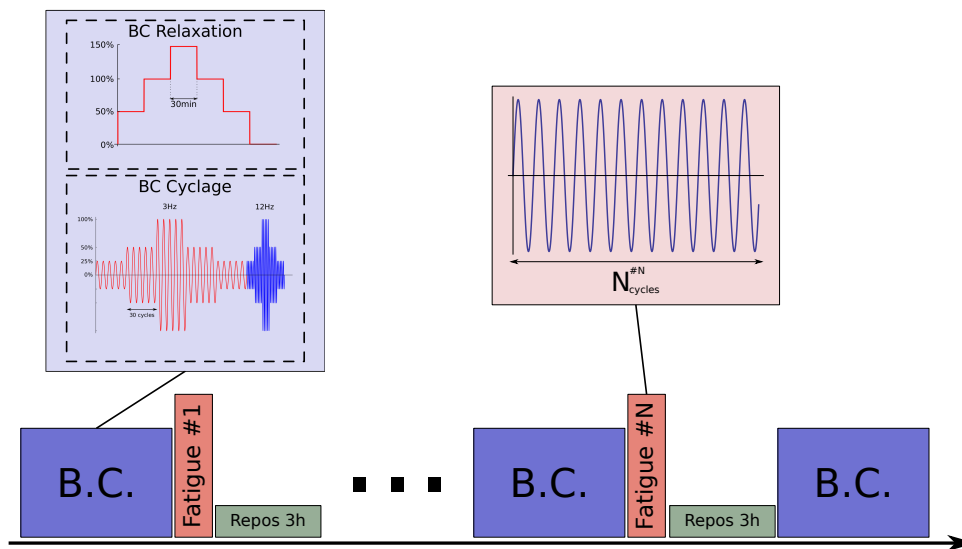


FIGURE 1.17 – Procédure de caractérisation de l'évolution du comportement mécanique isotherme d'une éprouvette au cours d'un essai de fatigue par blocs

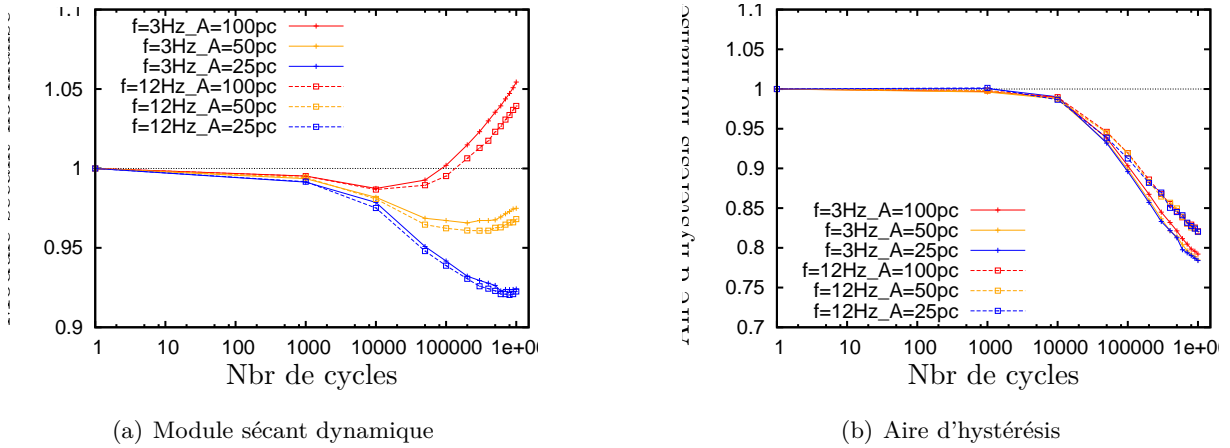
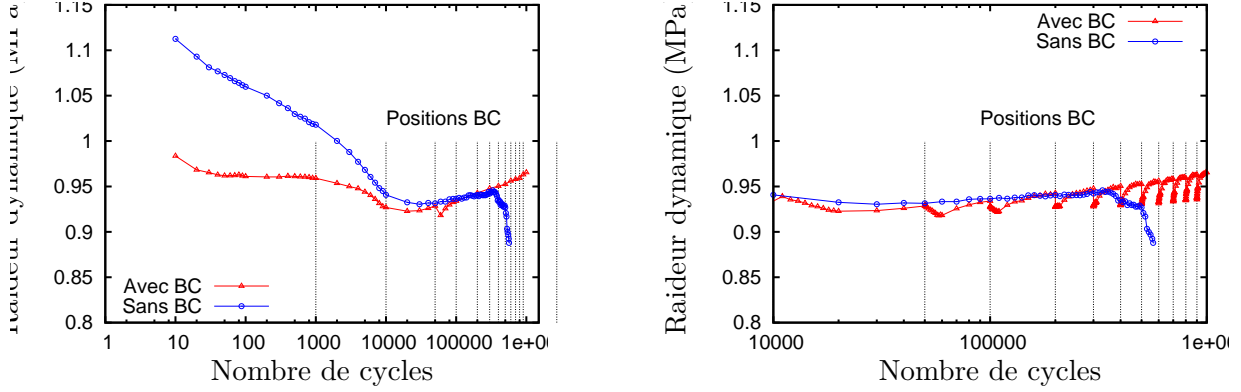


FIGURE 1.18 – Exemple de suivi de caractéristiques mécaniques isothermes pour différentes configurations d'essais de fatigue en glissement simple : module sécant dynamique et aire d'hystérésis sur un butadiène chargé en noir de carbone caractérisé en cisaillement à 12Hz et 50% d'amplitude dynamique

cycles suivi, dans certains cas, par une augmentation de cette raideur (voir figure 1.21). L'aire d'hystérésis semble peu évoluer. En corrélant ce type de résultat avec des mesures thermiques en cours d'essais de fatigue (voir figure 1.20) on peut se poser la question d'un couplage avec un effet de vieillissement thermique. En effet le phénomène de vieillissement chimique pourrait expliquer l'augmentation du module dynamique sécant qui suit la phase d'assouplissement thermique.

- Pour le comportement dynamique, on constate assez nettement sur toutes les caractérisations une baisse des aires d'hystérésis au fur et à mesure que l'on fatigue l'éprouvette. Les raideurs dynamiques ou modules sécant à l'hystérésis évoluent de façon moins nette mais dans le sens d'une diminution de l'effet Payne. Cela semble indiquer que le réseau de charges s'endommage et modifie les capacités viscoélastiques du matériau.

A partir de ces observations phénoménologiques et d'observation faites au MEB (au centre des matériaux de l'école des Mines de Paris), nous avons dégagé le scénario suivant (qui est très proche de celui d'écrit par d'autres auteurs dans la littérature, voir par exemple [103, 16]) : en excluant toute présence de défauts évidents qui peuvent conduire à un endommagement précoce (cavités de grandes tailles, présence indésirée de particules micrométriques ou plus, voir par exemple [118]), l'endommagement s'initie près des agglomérats de charges par un mécanisme qui dépend de la nature de la gomme, du type de charge et de l'adhésion charge/matrice. Ce mécanisme peut-être de la décohésion interface/matrice, une rupture dans l'agglomérat ou une cavitation dans la matrice très proche de l'agglomérat qui agit comme un concentrateur de contrainte. La propagation à cette échelle dépend du mode de chargement et du matériaux mais conduit à partir d'une certaine taille critique à l'apparition d'un endommagement macroscopique (cavités ou fissures) qui va croître. D'un point de vue phénoménologique la signature de l'initiation de l'endommagement pourrait être relié à une baisse de l'aire de l'hystérésis mécanique (obtenue en caractérisation isotherme), la croissance et la diffusion de l'endommagement à une échelle supérieure (croissance de cavités ou propagations de fissures dans la matrice) conduit plus nettement à une baisse de la rigidité. Dans [43, 26], nous avons proposé d'introduire deux



(a) Comparaison d'un essai interrompu avec blocs de caractérisation mécanique et un ininterrompu (il s'agit de deux éprouvettes différentes et l'écart initial est dû à la différence de conditionnement : une éprouvette n'ayant pas subi d'assouplissement préalable)

(b) Zoom sur la partie finale

FIGURE 1.19 – Essais de fatigue sur éprouvette de double cisaillement à 12Hz sans pré-déformations et avec 50% d'amplitude dynamique

variables d'endommagement :  $d$  endommagement "micro" relié à la viscosité et  $D$  un endommagement "macro" relié au comportement relaxé (statique) attribué à la matrice dans un modèle phénoménologique du même type que ceux décrits précédemment (voir section 1.1). Les qualificatifs "micro" et "macro" n'ont pas pour objet de faire référence ici à une notion de changements d'échelles dans la modélisation (il n'y en a pas : les deux variables sont deux densités locales d'endommagement prises au même point matériel d'un domaine donné) mais sert uniquement à les distinguer et à relier leur motivations aux mécanismes observés, cf. figure 1.22.

On considère donc l'énergie libre suivante :

$$\psi = (1 - D)\psi_{eq} + (1 - d)\psi_{neq} + \psi_{vol} \quad (1.22)$$

Nous négligeons donc l'effet de la variation de volume induite par l'endommagement (un modèle de ce type de phénomènes est proposé dans [17]) et nous négligeons également l'endommagement volumique (essentiellement pour une raison : nous manquons de données expérimentales en sollicitations hydrostatiques ou d'information sur la variation de volume locale). Avec le même formalisme que dans la première section, nous obtenons sans surprises la loi de comportement suivante (dans une modélisation discrète de la viscosité de type Maxwell généralisé) :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\boldsymbol{\sigma}_{eq} + (1 - d)\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\sigma}_v^i + \boldsymbol{\sigma}_{vol} \quad (1.23)$$

Il nous reste à définir deux lois d'évolutions supplémentaires qui doivent à minima respecter les conditions :  $\dot{d} \geq 0$ ,  $\dot{D} \geq 0$  quel que soit l'état thermodynamique. Pour construire ces lois, nous avons adopté le formalisme de Lemaitre et Chaboche [73, 18], qui revient à considérer que l'évolution en temps peut être remplacée par un cumul cycle par cycle en supposant que l'on ait :  $\dot{d} = (1/T)\partial d/\partial N$  (idem pour  $\dot{D}$ ), ou  $T$  est la période d'un cycle et  $N$  le nombre courant

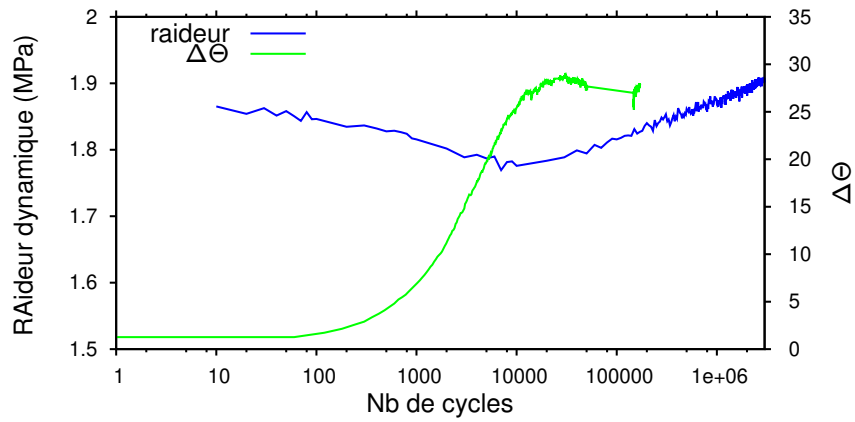
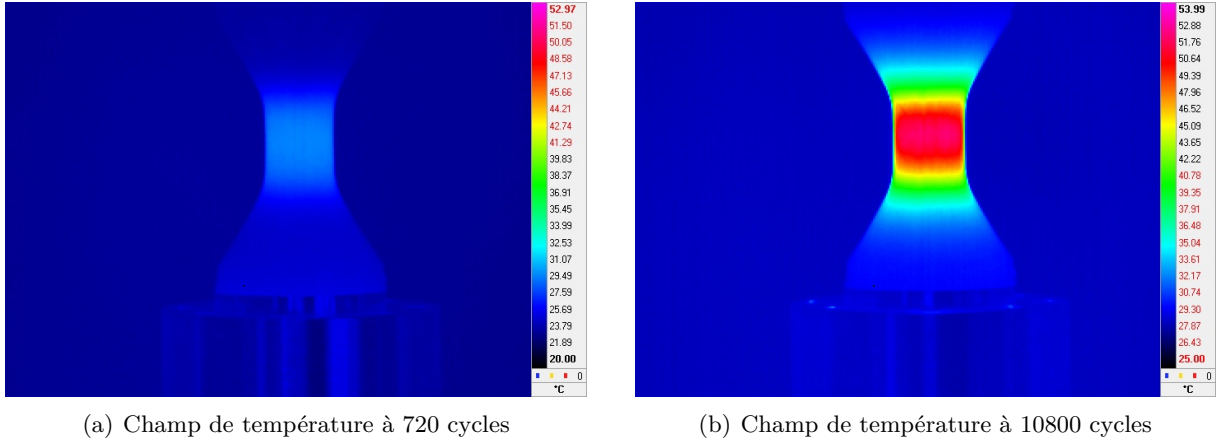


FIGURE 1.20 – Mesure du champ de température en surface d'une éprouvette diabolo pendant un essai de fatigue à 12Hz, 10% d'amplitude dynamique et 50% d'amplitude statique sur un butadiene chargé en noir de carbone

du cycle (on considère donc que la variation de l'endommagement sur un cycle est négligeable devant son évolution à grand nombre de cycles). Nous avons donc proposé des lois du type :

$$\frac{\partial d}{\partial N} = f(R_f, d) \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial D}{\partial N} = G(R_m, D)\mathcal{H}(d - d_0) \quad (1.25)$$

avec  $\mathcal{H}$  une fonction de Heaviside,  $d_0$  un paramètre de seuil,  $R_m$  et  $R_f$  des quantités énergétiques intégrées sur un cycle,  $f$  et  $G$  des fonctions à définir. Par exemple, dans la thèse de Delattre et pour un butadiene chargé de noir de carbone, nous avons proposé la forme suivante pour  $R_f$  (énergie libre visqueuse intégrée sur un cycle stabilisé) :

$$R_f = \int_{\text{cycle}} \psi_{neq} dt \quad (1.26)$$

en utilisant une fonction du type  $f(R_f, d) = B(R_f) \exp(A(R_f)d)$  avec  $A(R_f), B(R_f)$  des fonctions écrites en séries de  $\ln(R_f)$ , nous avons pu obtenir un accord qualitativement assez bon par

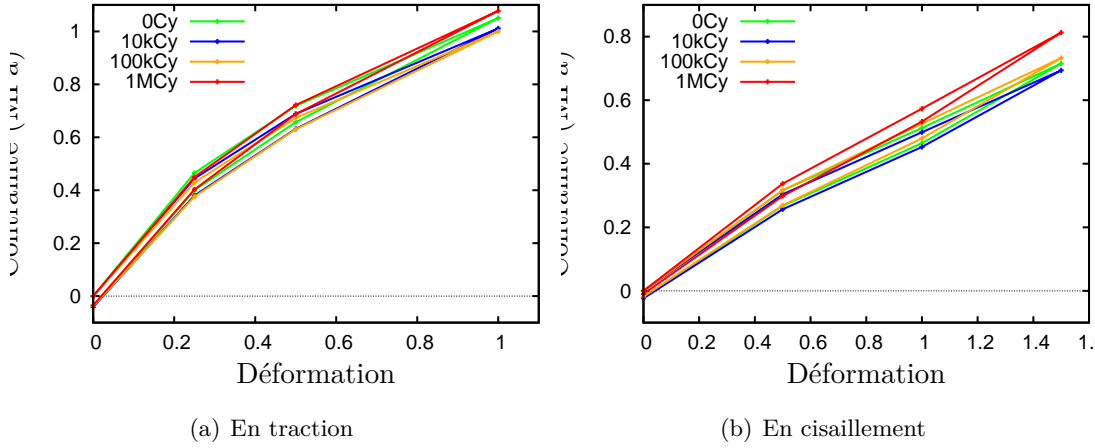


FIGURE 1.21 – Evolution de l'hystérésis d'équilibre d'une même éprouvette après chargement en fatigue à 12Hz (en traction : 50% de pré-déformation et 10% de déformation dynamique, en cisaillement : 50% d'amplitude dynamique sans pré-déformations)

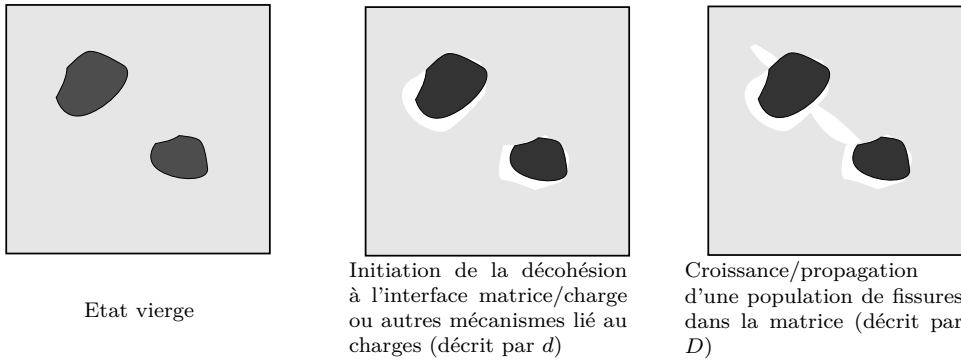


FIGURE 1.22 – Scénario et variables d'endommagement

rapport aux résultats expérimentaux obtenus à différents rapports de charges et pour différent modes de sollicitation (voir figure 1.23).

Dans [43], nous avons étudié un silicone chargé de silice et nous avons utilisé une forme différente pour  $R_f$  et  $R_m$  :

$$R_f = \int_{cycle} \langle \sigma_{neq} : \mathbf{D} - \phi^{neq} \rangle dt \quad (1.27)$$

$$R_m = \int_{cycle} \langle \sigma_{eq} : \mathbf{D} - \phi^{eq} \rangle dt \quad (1.28)$$

ou  $\langle \cdot \rangle$  dénote la partie positive et  $\phi^{neq}$  et  $\phi^{eq}$  respectivement la contribution à la dissipation de la partie isochorique visqueuse et relaxée.

Ces modèles présentent l'avantage d'être facilement intégrable à un code de calcul et sont très fortement liés au modèle de comportement mécanique. En contre partie, l'identification des paramètres de ces modèles requiert une campagne expérimentale longue et minutieuse. Par ailleurs, à l'heure actuelle nous ne sommes pas capable, avec ces modèles, de déterminer la fin de vie d'une pièce au sens rupture de la pièce. Nous pouvons juste déterminer un nombre de cycle

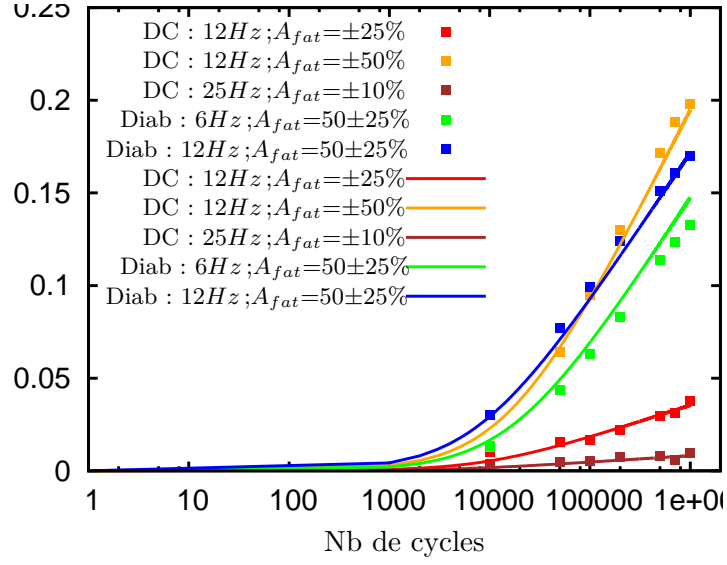


FIGURE 1.23 – Corrélation entre le modèle d'endommagement identifié et les données expérimentales pour différents chargements de fatigue en glissement simple et en tension (carrés=points expérimentaux, traits continus=modèle)

limite en intégrant les équations (1.24) et (1.25) et en déterminant la valeur de  $N$  pour laquelle nous avons  $D = 1$ , mais ceci nous donne uniquement une information locale. Les essais sont conduits jusqu'à apparition d'une chute de raideur (ce qui constitue dans certain cas un critère dans l'industrie) mais avant propagation d'une fissure macroscopique pour pouvoir exploiter l'essai comme un essai homogène (ce qui reste en soi une hypothèse à vérifier). Il faudrait donc coupler ce type d'approche à de la mécanique de la rupture pour décrire à la fois l'amorçage et la propagation car les élastomères se comportent rarement en matériau fragile et la phase de propagation peut varier en fonction des situations (chargement, géométrie des pièces et type de matériau employé).

### 1.3 Sur le concept de l'énergie hybride

La décomposition du gradient de transformation en partie isochorique et volumique proposée par Flory conduit à la séparation de l'énergie libre en une partie isochorique dépendant de la transformation isochorique et une partie volumique dépendante de la variation de volume. Dans certaines situations, il peut être intéressant de formuler cette dernière contribution en fonction d'une variable assimilable à la pression hydrostatique en lieu et place de la variation de volume. Pour ce faire nous avons proposé dans [69] de considérer l'énergie (hybride ou mixte) suivante :

$$\varphi(\bar{\mathbf{F}}, q, \alpha_i) = \psi(\bar{\mathbf{F}}, J, \alpha_i) + \beta(J, q) \quad i = 1..n \quad (1.29)$$

ou les  $\alpha_i$  sont des variables internes et  $q$  une quantité scalaire liée à la pression hydrostatique et pouvant être vue comme une variable interne supplémentaire. Le potentiel  $\beta$  permet de lier d'une part les variables  $q$  et  $J$  et d'autre part de déterminer le lien entre  $q$  et la pression hydrostatique  $p$ . En partant de la relation liant l'énergie hybride  $\varphi$  à l'énergie interne et l'entropie, tel que :

$$\varphi = e - s\Theta + \beta \quad (1.30)$$

On peut écrire les formes locales du premier et du second principe thermodynamique en fonction de cette énergie hybride. Dans le cas isotherme et élastique, nous obtenons les équations constitutives suivantes (en formalisme lagrangien avec le premier tenseur de Piola-Kirchoff) :

$$\mathbf{\Pi} = \bar{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{F}}} - \rho_0 J \frac{\partial \beta}{\partial J} \mathbf{F}^{-T} \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial \beta}{\partial q} \quad (1.32)$$

avec  $\bar{\mathbf{\Pi}} = \rho_0 \partial \varphi / \partial \bar{\mathbf{F}}$  et  $\mathbb{P}_{\bar{\mathbf{F}}}$  l'opérateur déviatorique en configuration mixte. Nous avons proposé de considérer les formes de potentiels suivantes :

$$\varphi = \varphi_{iso}(\bar{\mathbf{F}}) - \frac{g(q)}{\rho_0} \quad (1.33)$$

$$\beta = \frac{q}{\rho_0} (1 - J) \quad (1.34)$$

ceci conduit à l'égalité  $q = p$  ou  $p$  est la pression hydrostatique (dans cette situation la partie volumique de l'énergie libre hybride est homogène à une enthalpie libre volumique). La fonction  $g(q)$  permet de définir de nouveaux potentiels d'énergies libres volumiques formulés en pression<sup>(5)</sup>. Nous avons notamment proposé les formes suivantes :

$$g_1(q) = \frac{k}{a^2} \left( \exp\left(\frac{q}{k}\right) \right)^a - \frac{q}{a} - \frac{k}{a^2} \quad (1.35)$$

$$g_2(q) = \frac{b(1+c)k}{c} \log(1 + c \exp\left(\frac{q}{k}\right)) - bq - b\frac{k}{c}(1+c) \log(1+c) \quad (1.36)$$

ou  $k$  est le module infinitésimal de compressibilité et  $a, b$  et  $c$  des paramètres matériaux. En dérivant ces fonctions, on obtient les lois de compressibilité suivantes :

$$(J - 1) = \frac{1}{a} \left( \left( \exp\left(\frac{q}{k}\right) \right)^a - 1 \right) \quad (1.37)$$

$$(J - 1) = b \frac{\exp\left(\frac{q}{k}\right) - 1}{c \exp\left(\frac{q}{k}\right) + 1} \quad (1.38)$$

La figure 1.24 permet d'illustrer les lois de compressibilité obtenues pour quelques valeurs de paramètres. On peut constater qu'en jouant sur les paramètres  $a, b$  et  $c$ , on peut définir des limites de compressibilité en variations de volume au-delà desquelles le comportement devient purement incompressible (i.e. la pression tend vers l'infini).

Ces paramètres permettent également d'éviter des phénomènes non désirés comme des comportements non-monotoniques de la variation de volume. Dans [30], les auteurs considèrent un essai d'extension/compression uniaxiale homogène. Ils ont montré que suivant le modèle d'énergie volumique choisi (formulé en variation de volume dans un formalisme standard avec énergie libre d'Helmholtz) on peut obtenir une réponse non physique en compression avec une variation de volume qui tend vers zéro au lieu de varier faiblement. Avec les deux potentiels proposés, on peut constater à travers le résultat présenté en figure 1.25, que ce type de phénomènes se retrouve dans le cas où on ne définit pas de limite de compressibilité (cas  $a = b = c = 1$ ) ou disparaître si on s'en fixe (on obtient dans ce cas un comportement monotone).

(5). Avec les formes choisies pour  $\beta$  et  $\varphi$ , nous pouvons constater que le potentiel hybride peut-être interprété comme une transformée de Legendre partielle du potentiel de Helmholtz correspondant. La formulation proposée est néanmoins plus générale que ce type de transformation.

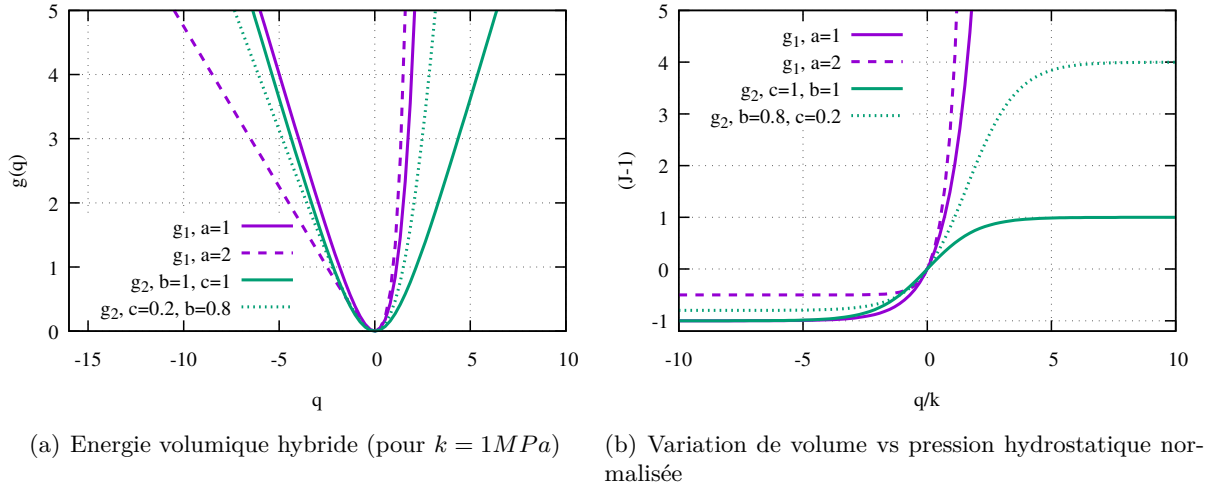


FIGURE 1.24 – Loi de compressibilité et potentiel volumique pour différentes valeurs de paramètres matériaux

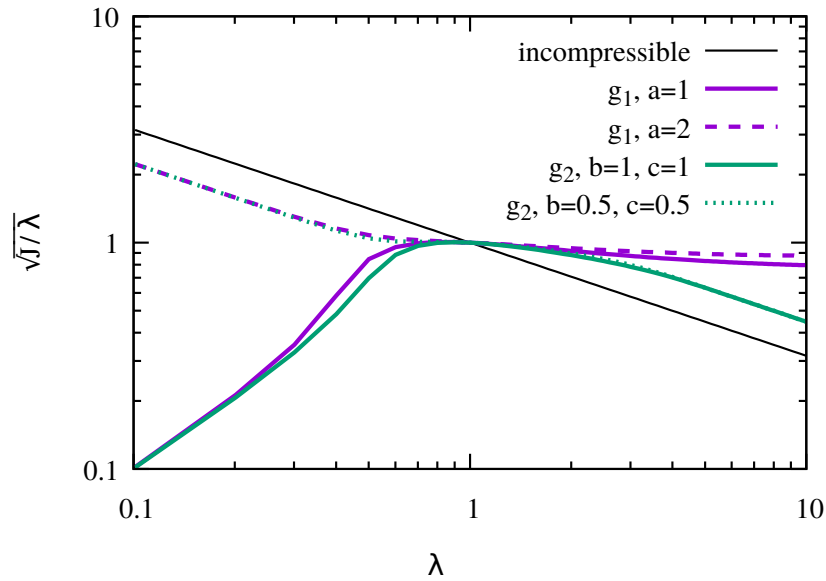


FIGURE 1.25 – Elongation latérale versus élancement pour un cas d'extension uniaxiale compressible ( $k/\mu = 5/3$ )

Ce type de formalisme permet également d'introduire d'autres types de modèles comme par exemple des modèles de viscosité en volume. Dans [69], nous avons proposé un modèle qui utilise la même fonction  $\beta$  que celle de l'équation (1.34) mais nous ne considérons pas un comportement élastique en volume et l'équation (1.32) ne s'applique pas dans ce cas. A la place nous obtenons la forme suivante de la dissipation intrinsèque ( $A_q$  étant la force thermodynamique associée à  $\dot{q}$ ) :

$$\phi^{int} = \overbrace{(1 - J + g'(q))}^{A_q} \dot{q} \geq 0 \quad (1.39)$$



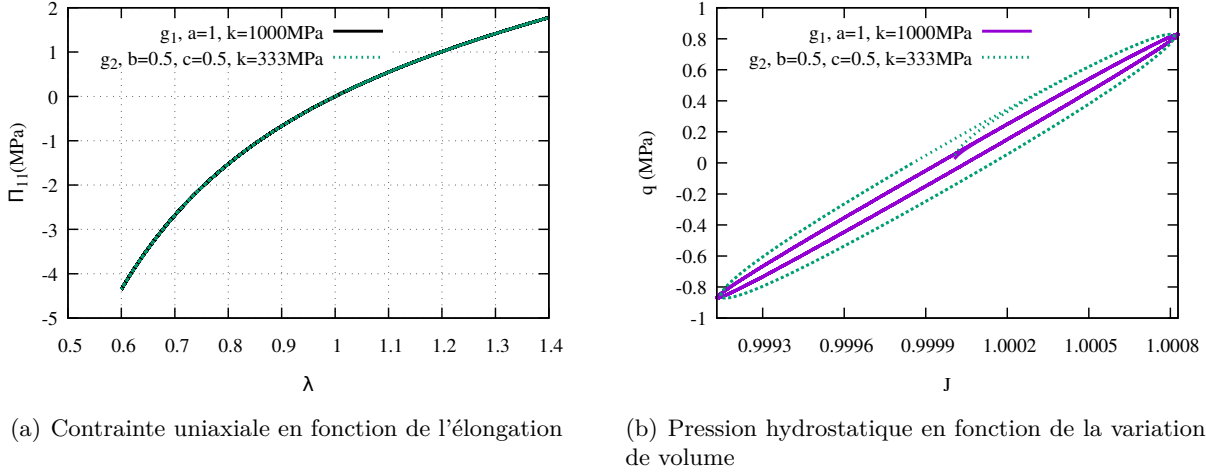


FIGURE 1.26 – Essais d’extension/compression uniaxiale cyclique avec une formulation de viscosité en volume

et nous avons proposé la loi d’évolution suivante (qui est admissible seulement si  $\eta \ll k$ ) :

$$\boxed{A_q = \frac{\eta}{k} \dot{J}} \quad (1.40)$$

La figure 1.26, montre le résultat d’un essai d’extension/compression uniaxial harmonique. On peut constater que si le comportement isochorique reste parfaitement élastique, le comportement volumique est lui de type visqueux. Ce type de formulation peut-être utile pour des mousses élastomériques par exemple.

L’énergie hybride présente également l’avantage d’unifier potentiels thermodynamiques et formulations variationnelles mixtes de type Hellinger-Reissner<sup>(6)</sup> (voir [101]) puisque l’on peut directement formuler une forme variationnelle à deux champs sans introduire de multiplicateur de Lagrange. Enfin cette formulation présente également un intérêt pour la modélisation des couplages thermomécaniques ou thermo-chimio-mécaniques comme nous le verrons au chapitre suivant.

## 1.4 Sur l’aspect validation des modèles

Pour valider les modèles de comportement que nous développons, nous utilisons des essais, non-homogènes, uniaxiaux ou multiaxiaux soit sur des pièces industrielles, soit sur des éprouvettes technologiques conçues spécifiquement en fonction de nos moyens d’essais. Il faut donc concevoir, dimensionner et réaliser des montages expérimentaux originaux et cette tâche est en grande partie portée par Frédéric Mazerolle.

En fonction des configurations étudiées, nous faisons des corrélations globales (en mesurant les efforts et les déplacements à travers les interfaces rigides du montage), et/ou des mesures plus locales avec par exemple de la mesure de champ cinématique par corrélation d’images. Cela

(6). qui repose finalement sur la même idée : utiliser une transformation de Legendre partielle mais sur la forme variationnelle

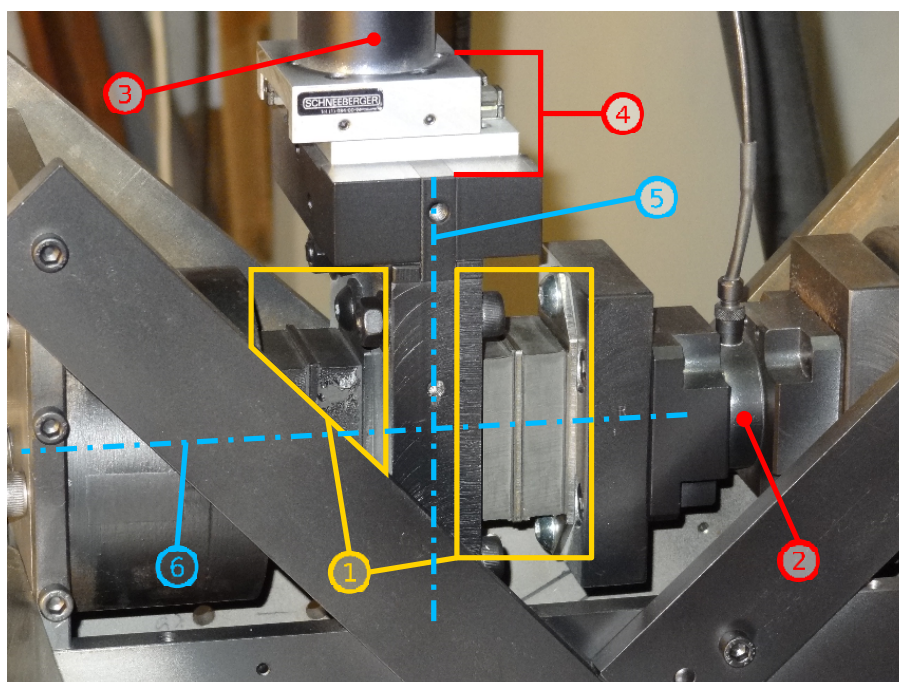
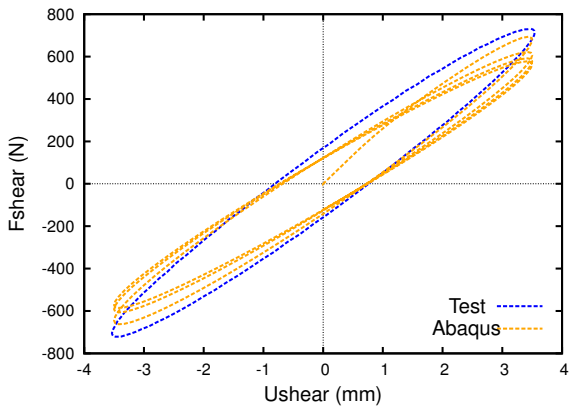


FIGURE 1.27 – Exemple de montage sur éprouvette technologique : palier lamifié élastomère/métal (encadrés en jaune) soumis à de la compression statique et à un cisaillement cyclique sinusoïdale.

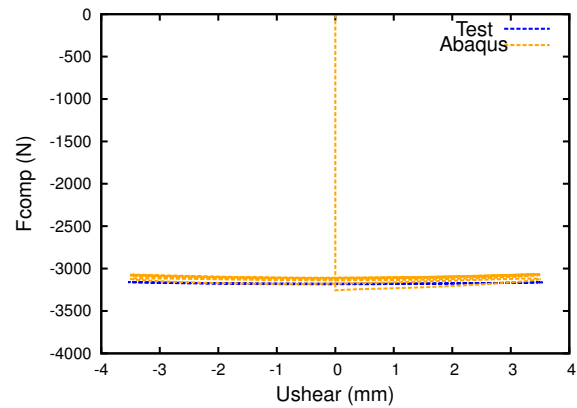
nécessite bien sûr d'implémenter les modèles développés sur des codes de calculs par E.F. par exemple ce qui peut amener à des développements numériques spécifiques en particulier pour intégrer les équations d'évolutions. Ce point sera abordé à la section 3.1.

Dans le cadre de la thèse d'Alexis Delattre, nous avons conçu le montage de la figure 1.27. Il s'agit de deux paliers élastomère-métal comportant chacun une intercalaire métallique et qui sont montés en vis à vis d'une armature rigide qui est reliée au vérin d'une machine hydraulique. Ce dispositif est complété d'une part par un système de deux pistons rigides auxquels nous pouvons appliquer un déplacement par un système de vis et d'autre part par un glissière qui nous assure un centrage correct sur l'axe de la machine. Au final les deux paliers sont soumis à une pré-déformation de compression (statique) d'amplitude contrôlée (mais que l'on peut faire varier) et un déplacement dynamique de cisaillement. Nous enregistrons en cours d'essai l'effort de compression et de cisaillement et nous pouvons, à des vitesses lentes (fréquence de 0.1Hz), enregistrer le champ de déplacement, local, tridimensionnel avec le système Aramis dont nous sommes équipés.

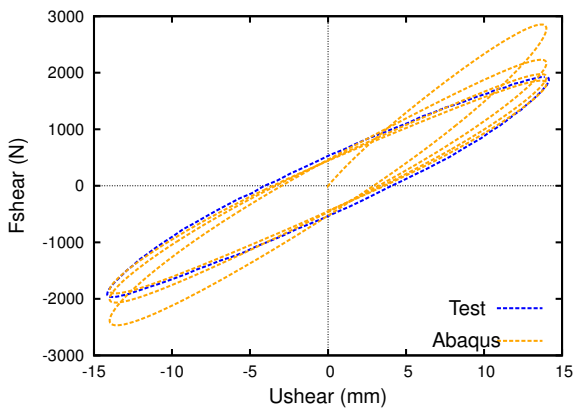
Les figures 1.28, présentent quelques résultats de comparaisons globales simulations / expériences pour deux amplitudes dynamiques de cisaillement. On peut constater que le modèle développé nous permet d'atteindre un très bon accord avec l'expérience dans des conditions multi-axiales. D'autres résultats sont disponibles dans la thèse d'Alexis (voir [26]) pour différentes conditions de chargement, nous sommes donc capable d'être prédictif pour une certaine gamme de vitesses et d'amplitudes de déformations (à priori la même que celle utilisé pour l'identification sur éprouvettes élémentaires). Ce point est à mon avis assez peu discuté dans la



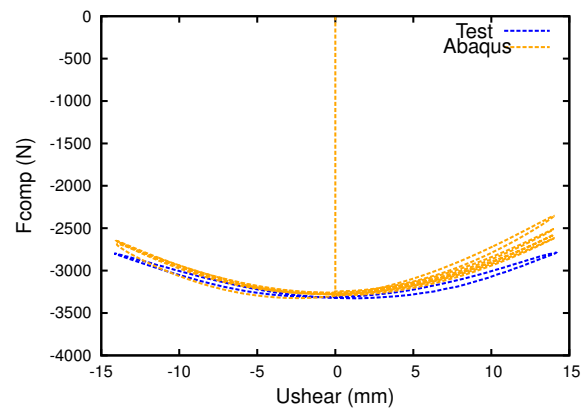
(a) Effort de cisaillement en fonction du déplacement de cisaillement (compression statique de 12mm, sollicitation en cisaillement à 4Hz)



(b) Effort de compression en fonction du déplacement de cisaillement (compression statique de 12mm, sollicitation en cisaillement à 4Hz)



(c) Effort de cisaillement en fonction du déplacement de cisaillement pour une amplitude plus importante (compression statique de 12mm, sollicitation en cisaillement à 4Hz)



(d) Effort de compression en fonction du déplacement de cisaillement pour une amplitude plus importante (compression statique de 12mm, sollicitation en cisaillement à 4Hz)

FIGURE 1.28 – Exemple de résultats de validations sur palier lamifié élastomère/métal (voir montage fig. 1.27)

littérature car d'une part l'aspect validation des modèles demande un travail expérimental spécifique en terme de conception et de mise au point et d'autre part certaines pièces industrielles sont couvertes par des accords de propriétés/confidentialité.

Les comparaisons locales nous donnent également un assez bon accord comme on peut le voir sur les cartes d'écart cinématiques (écart en chaque point du maillage E.F. entre le résultat de la simulation et le résultat de la corrélation d'image) présentées à la figure 1.29.

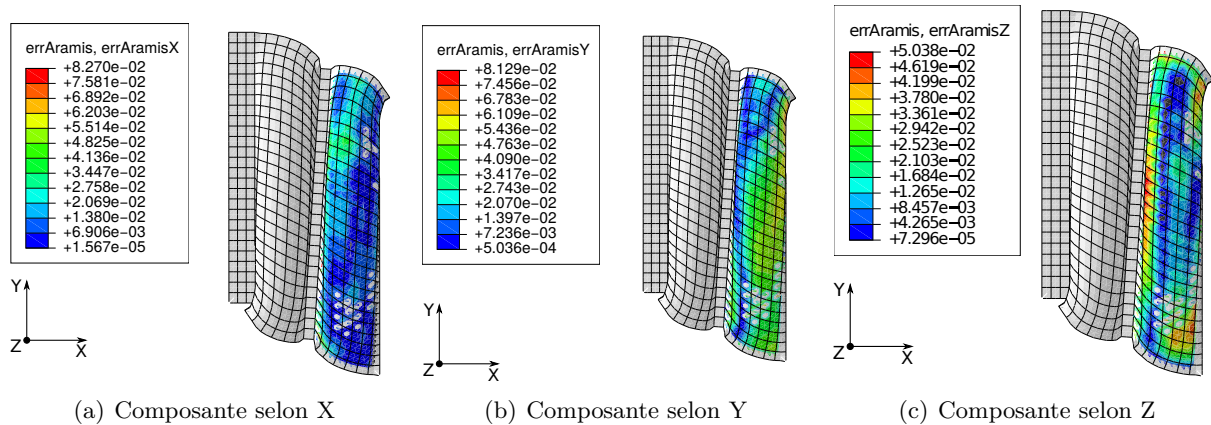


FIGURE 1.29 – Ecart local sur le champ cinématique entre le calcul E.F. et la mesure par corrélation d'image.

## 1.5 Conclusion

En conclusion sur cette partie modélisation du comportement, nous avons au fil du temps développé des modèles principalement basés sur l'approche phénoménologique. Ces modèles permettent de traduire le comportement de différents types d'élastomères chargés en adaptant les comportements élémentaires au matériau : viscoélasticité, viscoplasticité, endommagement, etc. Nous avons également travaillé sur les protocoles de caractérisation et sur l'identification des paramètres matériaux avec le développement de stratégies adaptées à nos modèles. La prise en compte des non-linéarités spécifiques de ces matériaux, notamment l'effet Payne, nous permet d'avoir un assez bon accord avec l'expérimental en situations multi-axiales et/ou pour des cas de chargement compliqués (multi-harmoniques, effet de la température, etc). Ces modèles s'inscrivent dans un cadre rigoureux dont nous avons pu généraliser certains éléments comme la construction d'énergies hybrides pour comportements faiblement compressibles. Pour l'aspect fatigue, nous avons proposé une modélisation originale mais qui nécessiterait d'intégrer d'autres effets comme par exemple le couplage avec des phénomènes d'évolutions physico-chimiques du matériau dans les situations où l'auto-échauffement joue un rôle important.



---

## 2 Couplages Multiphysiques

**L**es couplages abordés dans ce chapitre concernent principalement la formulation thermodynamique de problèmes thermo-mécaniques ou thermo-chimio-mécaniques dans un contexte de faible compressibilité mais avec prise en compte de variation de volumes libre de contraintes telle que la dilatation thermique ou le retrait chimique. J'aborde également la question de la caractérisation et de la modélisation du vieillissement thermique.

## Contents

---

2.1	Couplage thermo-mécanique et énergie hybride . . . . .	63
2.2	Couplages thermo-chimio-mécaniques . . . . .	65
2.3	Vieillessement thermique . . . . .	69
2.4	Conclusion . . . . .	76

---

## 2.1 Couplage thermo-mécanique et énergie hybride

Depuis les travaux de John Gough, [41], nous savons que les élastomères présentent un comportement entropique qui est pris en compte dans la théorie de l'élasticité entropique introduite notamment par [19]. Nous avons proposé dans [69] de reprendre cette théorie ou plutôt sa version modifiée (voir [20]) mais dans le cadre d'une énergie hybride. Ce type de développement a également été proposé dans [77] mais de manière moins générale et avec un objectif différent qui était d'étudier la calorimétrie en conditions isobariques. Hormis cet aspect les développements sont proches de ceux suivis, par exemple, dans [49, 85, 99].

En se restreignant par soucis de simplicité pour la présentation au cas thermoélastique (l'extension aux cas dissipatifs ne pose aucune difficultés particulières), nous pouvons considérer le découplage suivant de l'énergie libre hybride (c.f. section 1.3 pour le concept d'énergie hybride) :

$$\varphi(\bar{\mathbf{F}}, q, \Theta) = \varphi_{iso}(\bar{\mathbf{F}}, \Theta) + \varphi_{vol}(q, \Theta) + \varphi_{ther}(\Theta) = \varphi_{iso}(\bar{\mathbf{F}}, \Theta) - \frac{g(q, \Theta)}{\rho_0} + \varphi_{ther}(\Theta) \quad (2.1)$$

Dans le cas thermoélastique, le potentiel  $\beta$ , qui relie la variable  $q$  et la variation de volume, est choisi tel que :

$$\beta = (1 - J_m)q/\rho_0 \quad (2.2)$$

ou  $J_m(J, \Theta) = J/J_\theta$  désigne la variation de volume mécanique et  $J_\theta(\Theta)$  la variation de volume thermique, on peut obtenir après écriture de l'inégalité de Clausius-Duhem et en utilisant l'hypothèse de séparation de la dissipation en parties indépendamment positives intrinsèque et thermique, les équations de comportements suivantes (en configuration lagrangienne) :

$$s = -\frac{\partial \varphi_{iso}}{\partial \Theta} - \frac{\partial \varphi_{ther}}{\partial \Theta} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial g}{\partial \Theta} + \frac{Jq}{J_\theta^2 \rho_0} \frac{\partial J_\theta}{\partial \Theta} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \varphi_{iso}}{\partial \bar{\mathbf{F}}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + \frac{J}{J_\theta} q \mathbf{F}^{-T} = \bar{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + \frac{J}{J_\theta} q \mathbf{F}^{-T} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial q} = J_m - 1 \quad (2.5)$$

ou  $s$  est l'entropie spécifique. La pression hydrostatique est dans ce cas définie par :  $p = q/J_\theta$ . En reprenant les fonctions  $g$  choisies à l'eq. (1.35) ou (1.36), on peut remarquer que si l'on considère une sollicitation purement thermique, i.e.  $\mathbf{F} = J_\theta \mathbf{1}^{(1/3)}$ ,  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{1}$ ,  $J = J_\theta$  et  $J_m = 1$ , on obtient  $\bar{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{0}$  et  $q = 0$  (dilatation libre sans contraintes internes).

L'écriture du principe de conservation d'énergie (premier principe thermodynamique) nous amène à l'équation d'équilibre thermique locale suivante :

$$\rho_0 C_p \dot{\Theta} = l_m + l_q + \rho_0 r - \text{div}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q}_\Theta \quad (2.6)$$

ou  $\mathbf{Q}_\Theta$  est le flux de chaleur dans la configuration initiale,  $r$  est un terme de puissance volumique de chaleur apportée par l'extérieur,  $\text{div}_{\mathbf{X}}$  la divergence dans la configuration lagrangienne,  $C_p$



Density	$\rho_0(Kg/m^3)$ 1000			
paramètres thermiques	$\alpha(K^{-1})$ $6.e^{-4}$	$C_0(J/m^3/K)$ $1.6e^6$	$C_1(J/m^3/K)$ $3.6e^3$	$\Theta_0(K)$ 293
paramètres mécaniques	$c_{10}(Pa)$ $0.22e^6$			

TABLE 2.1 – Paramètres matériaux

définie la capacité calorifique à pression constante<sup>(1)</sup>, telle que :

$$C_p = -\Theta \left( \frac{\partial^2 \varphi_{ther}}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{iso}}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 g}{\partial \Theta^2} + \frac{2Jq}{J_\Theta^3 \rho_0} \left( \frac{\partial J_\Theta}{\partial \Theta} \right)^2 - \frac{Jq}{J_\Theta^2 \rho_0} \frac{\partial^2 J_\Theta}{\partial \Theta^2} \right) \quad (2.7)$$

et  $l_m, l_q$  sont des termes de couplages définis par :

$$l_m = \Theta \left( \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi_{iso}}{\partial \Theta \partial \mathbf{F}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} - \frac{Jq \mathbf{F}^{-T}}{J_\Theta^2} \frac{\partial J_\Theta}{\partial \Theta} \right) : \dot{\mathbf{F}} = \Theta \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial \Theta} : \dot{\mathbf{F}} \quad (2.8)$$

$$l_q = -\Theta \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \Theta \partial q} + \frac{J}{J_\Theta^2} \frac{\partial J_\Theta}{\partial \Theta} \right) \dot{q}$$

Cette formulation permet de considérer, par exemple, un essai d'extension uniaxiale adiabatique mais compressible dans le cas d'une énergie libre hybride entropique. Si l'on choisi :

$$\rho_0 \varphi_{iso} = c_{10} \frac{\Theta}{\Theta_0} (I_1(\bar{\mathbf{C}}) - 3), \quad \rho_0 \varphi_{ther} = C_0 \left( \Theta - \Theta_0 - \Theta \log \left( \frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right) - C_1 \frac{(\Theta - \Theta_0)^2}{2\Theta_0} \quad (2.9)$$

ou  $c_{10}, C_0$  et  $C_1$  sont des paramètres matériaux, avec une loi de dilatation thermique linéaire telle que :

$$J_\Theta = 1 + \alpha(\Theta - \Theta_0) \quad (2.10)$$

ou  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique, on peut résoudre numériquement les équations d'équilibre sans difficultés. En utilisant les paramètres matériaux donnés dans le tableau 2.1, on peut obtenir la solution de la figure 2.1 qui correspond au phénomène d'inversion thermoélastique (qui est une conséquence de la compétition entre dilatation thermique et élasticité entropique). On peut constater, à travers cet exemple, qu'avec ce type de formulation le point d'inversion thermoélastique dépend du module de compressibilité ce qui n'est pas le cas dans le formalisme adopté notamment par [49, 48].

Au final, on peut rapprocher ces développements de la théorie entropique modifiée proposée par [20] et reprise notamment par [87, 49] dans le cas de la décomposition isochorique/volumétrique. La motivation de départ est la même : combiner comportement isochorique entropique pur et comportement volumique énergétique permettant de traduire une situation de

(1). Dans ce formalisme, la capacité calorifique est définie à pression constante (capacité isobarique) qui correspond exactement à celle mesurée par DSC ce qui constitue un avantage par rapport à une formulation basée sur l'énergie libre de Helmholtz pour laquelle on obtient la capacité calorifique isovolumique. En thermoélasticité linéaire, les deux quantités peuvent être reliées avec la formule :  $C_p - C_v = 9\Theta_0 K \alpha^2 / \rho$  ou  $K$  est le module de compressibilité ce qui peut conduire à des écarts importants si le module de compressibilité et le coefficient de dilution sont importants (voir [46])

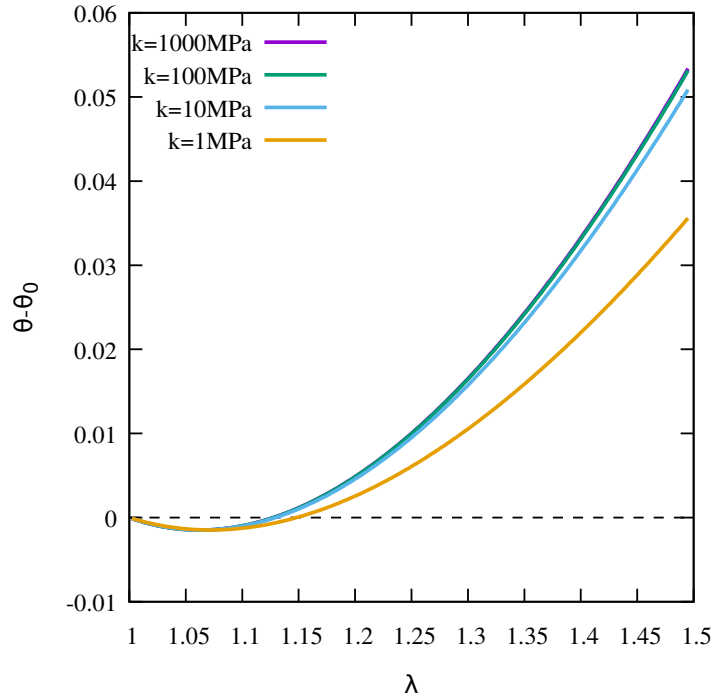


FIGURE 2.1 – Variation de température pour une extension adiabatique compressible

dilatation libre due à une variation de température sans contraintes internes. Dans l'approche proposée, nous pouvons retrouver la décomposition de l'énergie interne volumique proposée par [20] en linéarisant  $J_m$  tel que l'on puisse écrire :  $J_m = J - \alpha(\Theta - \Theta_0) + o(\alpha(\Theta - \Theta_0))$  (faible coefficient d'expansion thermique et/ou faibles variations de température).

Enfin, comme mentionné précédemment un avantage de la formulation à partir d'une énergie hybride de problèmes thermo-mécaniques est que l'on peut écrire sans difficultés une forme variationnelle multi-champs (cinématique/pression/température) capable de tenir compte de la contrainte de quasi-incompressibilité de manière complètement consistante avec le formalisme thermodynamique. On est ainsi assuré de prendre correctement en compte l'ensemble des termes de couplage lors de l'implémentation.

## 2.2 Couplages thermo-chimio-mécaniques

En présence d'un milieu réactif dont nous pouvons identifier les réactants et les produits, nous pouvons en général écrire l'équilibre d'un système réactif de  $n$  espèces chimiques avec  $m$  réactions en utilisant les conditions de stœchiométrie, tel que le schéma réactif s'écrive sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^n \nu_{ij} M_j = 0 \quad i = 1..m \quad (2.11)$$

ou  $\nu_{ij}$  est le coefficient stœchiométrique de l'espèce  $j$  intervenant dans la  $i^{eme}$  réaction et  $M_j$  est la masse molaire de la  $j^{eme}$  espèce. Les concentrations de chaque espèces peuvent être exprimées en volume ( $\text{mol}/\text{m}^3$ ), notées  $\hat{n}_j$ , ou en masse ( $\text{mol}/\text{kg}$ ), notées  $n_j$ , à partir des densités élémentaires

$\rho_j(\mathbf{x}, t)$ , tel que :

$$\hat{n}_j = \frac{\rho_j}{M_j} \quad \text{ou} \quad n_j = \frac{\hat{n}_j}{\rho} \quad (2.12)$$

En l'absence de diffusion d'espèces, la conservation locale de la masse peut s'écrire :

$$\sum_{j=1}^n (\dot{\hat{n}}_j + \hat{n}_j \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})) M_j = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^n \dot{n}_j M_j = 0 \quad (2.13)$$

Pour d'écrire l'état thermodynamique d'un système réactif, on peut donc choisir de définir une énergie libre de Gibbs,  $G$ , ou d'Helmholtz,  $\psi$ , fonction des  $n$  concentrations massiques ou volumiques, tel que par exemple  $G(\boldsymbol{\sigma}, \Theta, n_1, n_2, \dots, n_n)$ , les variables duales associées à ces concentrations sont les potentiels chimiques des  $n$  espèces, tel que :

$$\mu_i = \rho \frac{\partial G}{\partial n_i} \quad i = 1..n \quad (2.14)$$

L'évolution des variables internes chimiques (les concentrations) est ensuite définie par des équations complémentaires reliant potentiels chimiques et variations des concentrations. C'est l'approche décrite et adoptée par [58] par exemple. On peut remarquer qu'il y a au plus  $n - 1$  équations d'évolutions indépendantes de part la condition de conservation eq. (2.13).

Une alternative consiste à introduire les avancées de réactions  $\eta_j$ ,  $j = 1..m$  définies par :

$$\eta_j = \frac{n_1^j(t) - n_1^j(0)}{\nu_{j1}} = \frac{n_2^j(t) - n_2^j(0)}{\nu_{j2}} = \dots = \frac{n_n^j(t) - n_n^j(0)}{\nu_{jn}} \quad (2.15)$$

avec  $n_k^j$  la contribution de la  $j^{\text{eme}}$  réaction à la variation de la concentration massique de l'espèce  $k$ . On peut donc relier concentration massique et avancée de réaction connaissant les concentrations initiales tel que :

$$\begin{pmatrix} n_1(t) - n_1(0) \\ n_2(t) - n_2(0) \\ \vdots \\ n_n(t) - n_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{21} & \dots & \nu_{m1} \\ \nu_{12} & \nu_{22} & \dots & \nu_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \nu_{1n} & \nu_{2n} & \dots & \nu_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

On peut donc également considérer que les avancées de réactions sont des variables internes chimiques pertinentes et dans ce cas, l'énergie libre de Helmholtz peut prendre la forme :  $\psi(\mathbf{F}, \Theta, \eta_1, \dots, \eta_m)$ . Les variables duales des avancées de réactions sont dans ce cas les affinités chimiques de chaque réactions au sens de De Donder (voir [25]) :

$$\mathcal{A}_j = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \eta_j} \quad j = 1..m \quad (2.17)$$

Il y a donc dans cette approche au plus  $m$  variables indépendantes car la conservation de la masse est automatiquement satisfaite. Cette approche a été utilisé dans [4] par exemple. On peut également normaliser les avancées de réaction et introduire les grandeurs normalisées  $\xi_j$ , tel que :

$$\xi_j = \frac{\eta_j}{\eta_j^{\max}} \quad j = 1..m \quad (2.18)$$

Nous avons utilisé cette approche dans [93], pour simplifier la présentation nous avons considéré le cas d'un matériau viscoélastique réactif à une réaction chimique :  $m = 1$  et  $\xi_1$  est noté  $\xi$ . Nous avons proposé une décomposition de l'énergie libre de Helmholtz en parties mécanique, thermique et chimique, partant du constat qu'un domaine pouvait rester un équilibre thermique et chimique pour des déformations infinitésimale ou en équilibre chimique et mécanique pour des petites variations thermiques. D'autre part, cette hypothèse simplifie la construction de l'énergie libre puisque l'on peut reprendre les travaux déjà effectués dans le cadre du couplage thermo-mécanique par exemple. Nous avons donc adopté la forme suivante :

$$\boxed{\psi = \psi_m(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e, \xi, \Theta, J) + \psi_\Theta(\Theta) + \psi_\xi(\Theta, \xi)} \quad (2.19)$$

Pour simplifier la présentation nous avons considéré pour la partie mécanique un comportement viscoélastique de type Zener à un seul temps caractéristique mais l'on peut sans difficultés particulières complexifier la partie mécanique en conservant le même formalisme.

L'écriture de l'inégalité de Clausius Duhem, nous amène à considérer les équations constitutives suivantes :

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \quad (2.20)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{2\rho \left( \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right)^D}_{\boldsymbol{\sigma}_{eq}} + \underbrace{2\rho \left( \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right)^D}_{\boldsymbol{\sigma}_{neq}} + \underbrace{\rho J \frac{\partial \psi}{\partial J} \mathbf{1}}_{\boldsymbol{\sigma}_{vol}} \quad (2.21)$$

et des contributions mécanique, chimique et thermique à la dissipation, tel que :

$$\begin{aligned} \phi &= \underbrace{2\rho \left( \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right)^D}_{\boldsymbol{\sigma}_{neq}} : \bar{\mathbf{D}}_v^o + \underbrace{\left( -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)}_{\mathcal{A}_\xi} \dot{\xi} + \underbrace{\left( -\frac{\text{grad}_x \Theta}{\Theta} \right)}_{\mathcal{A}_\Theta} \cdot \mathbf{q} \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{neq} : \bar{\mathbf{D}}_v^o + \mathcal{A}_\xi \dot{\xi} + \mathcal{A}_\Theta \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad \forall \bar{\mathbf{D}}_v^o, \dot{\xi}, \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.22)$$

ou  $\mathbf{q}$  est le flux de chaleur dans la configuration courante (Eulérienne). Les dissipations chimique  $\phi_c$ , mécanique  $\phi_m$  et thermique  $\phi_\Theta$  sont supposées indépendamment positives les unes des autres (pour les raisons décrites plus haut lors de la décomposition de l'énergie libre). Pour la partie mécanique, les contributions déviatoriques sont basées sur des modèles standards d'énergies libres issues de la littérature avec des paramètres matériaux qui sont pris dépendant de la température et de l'avancé de réaction. La contribution sphérique est construite en introduisant le découplage suivant de la variation de volume :

$$\boxed{J = J_m J_\Theta J_\xi} \quad (2.23)$$

avec les définitions suivantes pour la dilatation thermique et le retrait ou l'expansion chimique :

$$J_\Theta = 1 + \alpha(\Theta - \Theta_0) \quad (2.24)$$

$$J_\xi = 1 + \beta g(\xi) \quad (2.25)$$

$$J_m = J(J_\xi J_\Theta)^{-1} \quad (2.26)$$

avec  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique,  $\beta$  le coefficient de retrait (ou d'expansion) chimique et  $g$  une fonction à définir.

Dans [93], nous avons utilisé le potentiel volumique suivant :  $\psi_m^{vol} = K_v(J_m - 1)^2$  de manière à imposer la quasi-incompressibilité uniquement sur la variation de volume mécanique et ainsi permettre des configurations avec des variations de volume chimique et thermique libre de contraintes internes en l'absence de sollicitations mécaniques. On peut également utiliser l'approche basée sur l'énergie hybride présentée précédemment, ce que nous avons fait dans [70].

Pour la partie thermique on peut par exemple utiliser le même type de potentiel que présenté à l'équation (2.9) (voir aussi [100, 8]).

Dans l'approche que nous avons adoptée la partie chimique peut-être décrite soit par des modèles de cinétique chimique ou par des modèles plus phénoménologiques. On trouve dans la littérature de nombreux modèles de ce type permettant de décrire, de manière phénoménologique, la réticulation des polymères ou la vulcanisation des élastomères comme par exemple [97, 57, 96]. En s'inspirant du modèle de Prime et al., nous avons proposé une forme originale pour la contribution chimique qui fait intervenir de manière explicite une température d'induction,  $\Theta_i$ , au dessous de laquelle (en l'absence de sollicitations mécaniques) les réactions chimiques ne sont pas activées :

$$\rho_0 \psi_\xi(\Theta, \xi) = C_2 \left( \Theta_i \log \left( \frac{\Theta}{\Theta_i} \right) \frac{(1 - \xi)^{m+1}}{m+1} - \Theta_0 \log \left( \frac{\Theta_0}{\Theta_i} \right) \right) \quad (2.27)$$

Les paramètres  $C_2$ ,  $m$  et  $\Theta_i$  sont des paramètres matériaux à identifier. Pour décrire l'évolution, nous avons adopté une relation inspirée de la plasticité<sup>(2)</sup> qui relie affinité chimique et taux d'avancé de réaction :

$$\dot{\xi} = k(\Theta) \langle \mathcal{A}_\xi \rangle \quad (2.28)$$

le paramètre  $k(\Theta)$  est un paramètre de cinétique thermique qui peut être pris, par exemple, d'après une loi d'Arrhenius. En dérivant l'énergie libre par rapport à l'avancé de réaction ou par rapport à la température (dérivée seconde), on obtient un couplage fort entre thermique, chimique et mécanique, puisque la capacité calorifique dépend de l'avancé de réaction et l'affinité chimique dépend de l'état mécanique (sollicitations isochorique et pression hydrostatique).

L'écriture de la conservation d'énergie nous donne une équation d'équilibre thermique de la forme (en configuration Eulérienne) :

$$\rho C_v \dot{\Theta} = \phi_m + \phi_c + l_m + l_c + \rho r - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} \quad (2.29)$$

avec  $l_m$  et  $l_c$  des termes de couplages thermo-mécaniques ou thermo-chimiques. En fonction de l'énergie libre chimique retenue on peut décrire des réactions endothermiques ou exothermiques (le type de réactions est donné par le signe de  $\phi_c + l_c$ ).

Pour des cas homogènes et adiabatiques, on peut résoudre simplement de manière numérique des problèmes fortement couplés avec des comportements viscoélastiques réactifs. En considérant par exemple un modèle mécanique de type Zener avec le modèle de cinétique chimique

(2). Ceci nous permet de ne pas avoir de phénomènes non désirés et artificiels de réversion chimique.

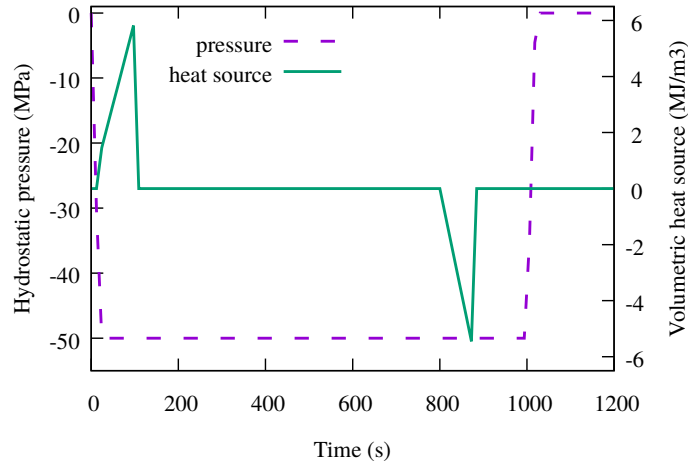


FIGURE 2.2 – Hydrostatic pressure and volumetric heating cycle.

précédemment décrit, on peut simuler un process de mise en œuvre d'un moulage sous pression. Pour simplifier, nous considérons un cas test homogène (0D), mais nous pouvons également traiter des cas tests non-homogènes en utilisant une formulation éléments-finis. Pour ce cas test, on impose un apport de chaleur extérieur suivit d'un refroidissement avec une mise en pression pendant la cuisson (voir figure 2.2 pour les signaux temporels des chargements).

Les figures 2.3 présentent les résultats de la simulation pour différentes valeur de la pression hydrostatique. Nous pouvons constater que cette pression influence fortement l'avancé de réaction en effet l'avancé de réaction est favorisée dans le cas d'une compression hydrostatique comparativement à un état de traction hydrostatique. Cette modélisation permet également d'obtenir un effet de retrait chimique. Sur la figure 2.4, nous pouvons constater que le volume final est plus petit que le volume initial.

Ce formalisme est suffisamment général pour être adapté à différents contextes ou des matériaux faiblement compressibles sont l'objet de réactions chimiques (simulation de cuisson, simulation de phénomènes de vieillissement, etc), tant que la diffusion d'espèces chimiques au sein du matériau ne joue pas un rôle important et peut-être négligée. En présence de diffusion il faut modifier le formalisme en reconsidérant la conservation locale de la masse et en introduisant des lois de diffusions comme cela est fait par exemple dans [98, 55, 14].

## 2.3 Vieillessement thermique

Dans bon nombre d'applications, les élastomères techniques sont soumis à des effets d'environnement. Il existe une littérature abondante sur ce sujet et qui traite différentes conditions de vieillissement. L'objet de ce document n'étant pas d'en faire une liste exhaustive, on peut néanmoins renvoyer au travaux de [59, 104, 9, 78, 54] pour le vieillissement thermique et/ou thermo-oxydatif, [65] pour le vieillissement accéléré dans de l'eau de mer.

Dans le cadre de la thèse de David Aho et du postdoc de Rami Bouaziz nous avons mis en place une étude sur un butadiène vulcanisé au soufre et chargé avec du noir de carbone qui vise

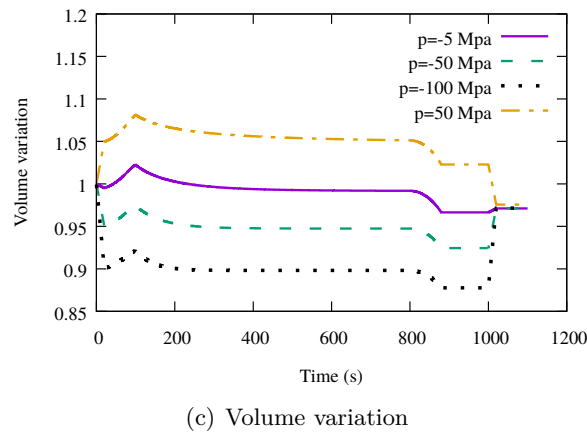
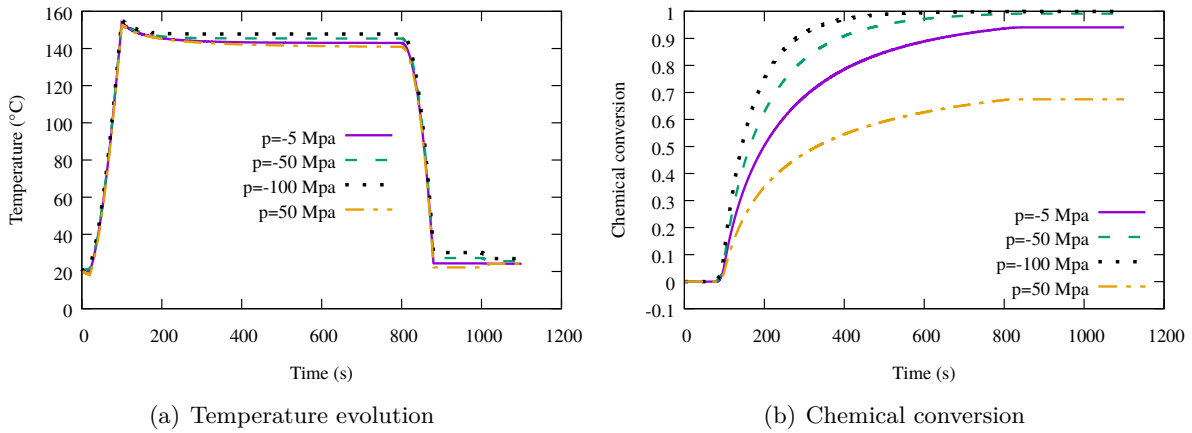


FIGURE 2.3 – Exemple d'un problème thermo-chimio-mécanique : réticulation par moulage sous pression

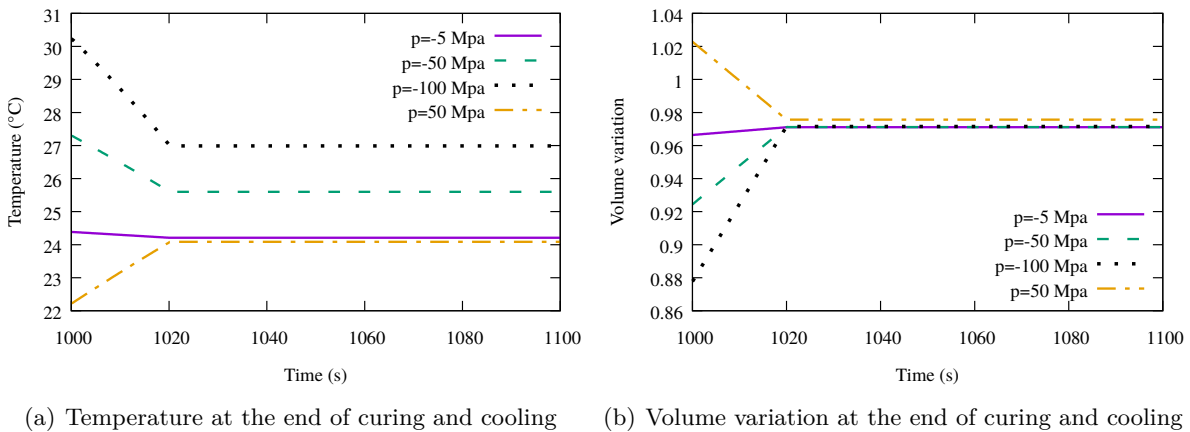


FIGURE 2.4 – Exemple d'un problème thermo-chimio-mécanique : réticulation par moulage sous pression : zoom à la fin de la cuisson.

d'une part à analyser des conditions couplées (thermique et mécanique) de vieillissement afin d'en étudier les conséquences et d'autre part à essayer de relier le vieillissement avec l'état initial du

Matériaux	A	B	C
Matrice	BR	BR	BR
Charges	CB (45 phr)	CB (45 phr)	CB (45 phr)
Température de cuisson	130°C	150°C	170°C
Temps de cuisson	55 min	17 min	7 min
Système de vulcanisation	Efficient	Efficient	Efficient
Gonflement dans du Xylene	300%	325%	345%

TABLE 2.2 – Matériaux considérés dans l'étude du vieillissement

matériau qui est conditionné par la formulation mais également par le process de mise en œuvre.

Notre hypothèse de travail est qu'en l'absence de chargement mécanique et sous des conditions non-oxydatives de vieillissement thermique en étuve, le phénomène de premier ordre est un accroissement de la densité de réticulation avec une dégradation (maturation) des ponts polysulfures en monosulfures. Malheureusement nous ne disposons pas de techniques expérimentales<sup>(3)</sup> permettant de mesurer des densités volumiques ou massiques d'un type particulier de liaison au soufre. Pour tenter de comprendre le rôle du type de liaison et étudier également l'influence du process sur le vieillissement nous avons étudié trois variétés d'un même mélange en modifiant uniquement les conditions de cuisson (les constituants sont strictement identiques, voir tableau 2.2).

Le temps de cuisson a été déterminé à chaque température de manière à obtenir le même degré de cuisson (98%) qui est mesuré par rhéométrie. En comparant le taux de gonflement initial (pour des matériaux vierges) dans un solvant de ces trois variétés (cf. tableau 2.2) nous pouvons constater que les conditions de cuisson conditionnent la densité de réticulation obtenue et certainement également le type de liaison vu que la quantité de soufre et d'accélérateur est initialement la même dans les trois variétés.

Pour étudier l'impact du vieillissement thermique nous avons mis en place une campagne expérimentale de vieillissement thermique sur les trois variétés matériaux principalement dans deux configurations : une configuration libre de contrainte (en conditions anaérobiques) et une configuration de vieillissement thermique avec fluage (sans précautions particulières vis à vis de l'oxydation). En prélevant périodiquement des éprouvettes vieilles en étuve et en menant des caractérisations mécaniques statiques et dynamiques nous faisons les constats suivant pour les trois matériaux étudiés en conditions de contraintes libres :

- Pour les éprouvettes utilisées (H2), nous n'avons pas constaté de variation de masse ou de dimension après vieillissement avec nos moyens de mesures (qui n'étaient peut-être pas adaptés à ce type d'éprouvettes).
- Nous avons vérifié par différentes analyses (DSC, RMN, dilatométrie,...) que la structure initiale du réseau macromoléculaire était bien identique à l'état vierge pour les trois variétés considérées. Ce qui nous permet de conjecturer que les résultats obtenus sur chaque variété sont principalement reliés à la différence de taux de réticulation et au type de ponts (mono-sulfures/poly-sulfures).
- Pour la durée de l'étude (30 jours max de vieillissement) l'évolution de la densité de

(3). On peut néanmoins penser à des techniques de gonflements différentiels. Il manque à mon sens à ces techniques des éléments permettant de quantifier les erreurs commises.



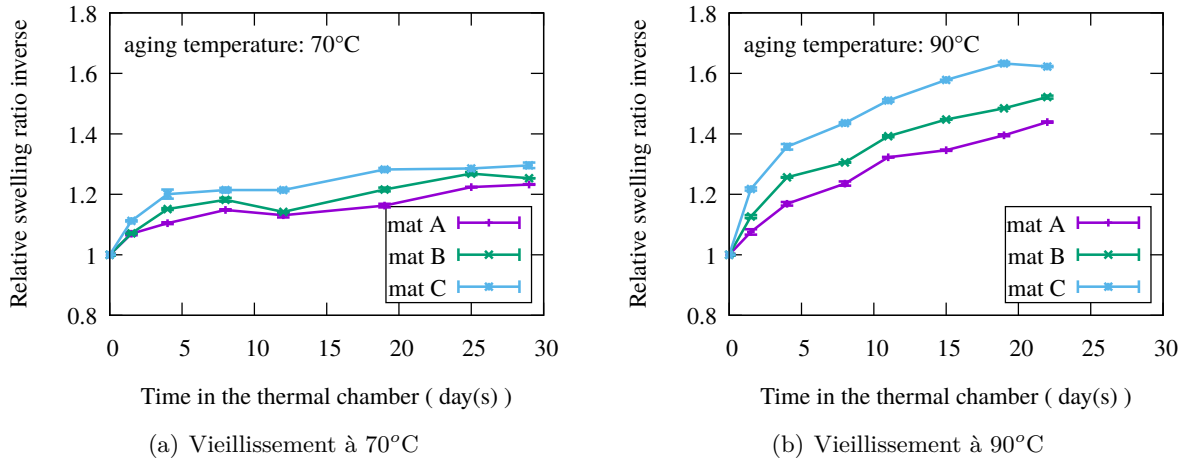


FIGURE 2.5 – Résultat des tests de gonflements sur éprouvettes prélevées au cours du vieillissement thermique (La densité de réticulation est liée à l'inverse du taux de gonflement)

réticulation est monotone (cf. fig. 2.5), elle s'accroît et son évolution est plus importante pour le matériau qui comprend, à priori, le plus de pont polysulfures ou de cycles soufrés à l'état initial.

- Les modules statiques (cf. fig. 2.6) et dynamiques semblent suivre la théorie statistique des réseaux réticulés (voir [45]) : l'évolution des modules est corrélée à l'augmentation de la densité de réticulation (ils augmentent de manière linéaire en fonction de la densité réticulation pour les trois températures de vieillissement considérées : 50°C, 70°C, 90°C).
- Les effets dynamiques, Payne et dépendance à la fréquence de sollicitation s'atténuent avec l'augmentation de la densité de réticulation.
- La limite d'extensibilité décroît fortement à cause du raccourcissement des distances inter-ponts.
- Les temps caractéristiques de viscosité semblent être augmentés, cela s'accompagne également d'une baisse des aires d'hystérésis mécaniques sur les essais cycliques.
- Les évolutions à 50°C sont très faibles sur 30 jours ce qui laisse à penser qu'il existe une température limite proche de 50°C pour laquelle nous ne verrions aucune évolution.
- A partir d'essais de compressions eudiométrique sur plots après vieillissement, nous avons constaté que le module de compressibilité semblait insensible au vieillissement thermique.

Pour étudier le couplage d'une sollicitation mécanique avec du vieillissement thermique, nous avons mis en place des essais de vieillissement sous fluage soit sur des éprouvettes H2, soit sur des plaques, sollicités en extension. Pour ces essais nous n'avons pas pris de précautions particulières en terme de protection vis à vis de phénomènes oxydatifs. A partir de ces essais nous pouvons principalement faire les constats suivants :

- La présence d'une sollicitation mécanique concomitante au vieillissement thermique a un impact sur le phénomène de vieillissement chimique comme on peut le constater avec les figures 2.7. En fonction du type de ponts, la sollicitation mécanique semble avoir un impact favorable (matériau C) ou défavorable (matériau A) sur la densité de réticulation effective.

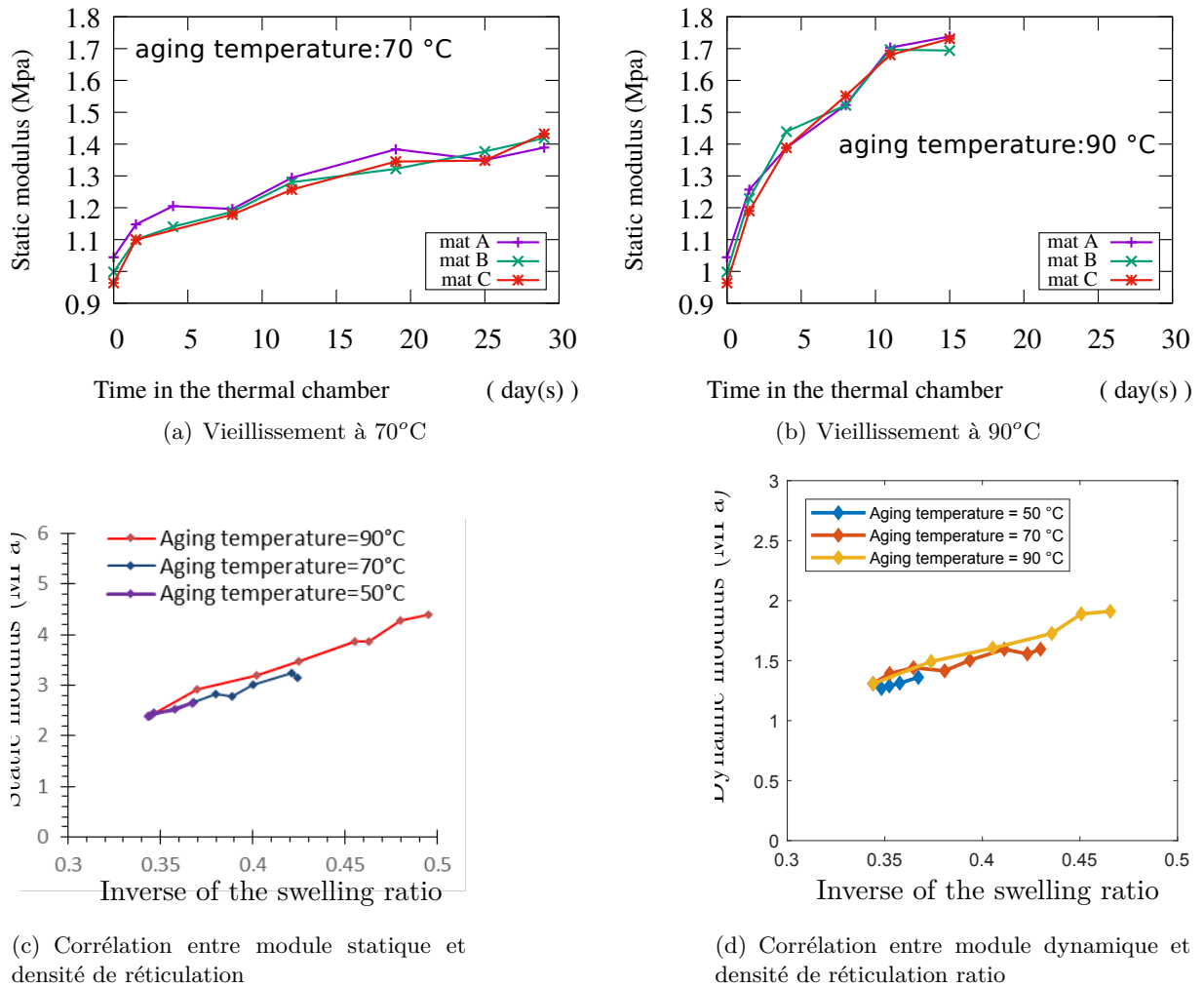
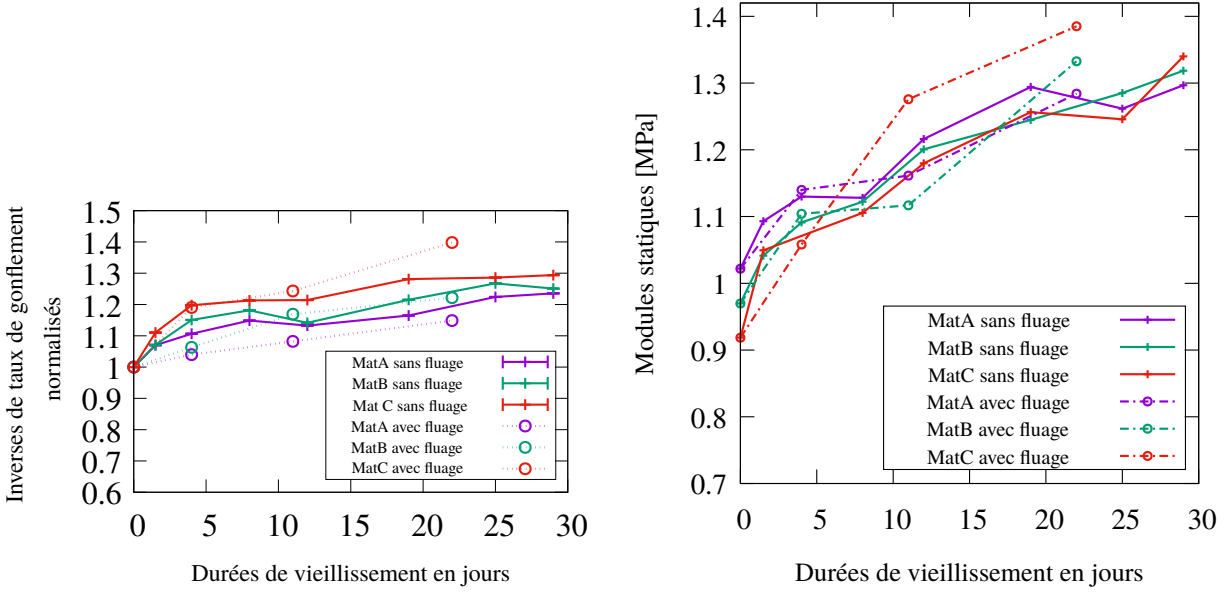


FIGURE 2.6 – Résultat des tests de relaxation par paliers sur éprouvettes prélevées au cours du vieillissement thermique

- Dans le cas d'un vieillissement avec fluage, pour le matériau A, on observe une inhomogénéité des valeurs de densité de réticulation obtenues par gonflement : dans la zone centrale les densités observées sont moindres que dans les talons des éprouvettes, ceci illustre le couplage réciproque entre évolution chimique et état mécanique.
- A partir de découpe d'éprouvettes H2 dans différentes directions réalisées après vieillissement sous fluage dans les plaques nous avons constaté qu'il n'y a pas d'anisotropie induite par le vieillissement sous contraintes (au moins pour le niveau de fluage et les conditions de vieillissement thermiques que nous avons considérées).

Suite à ces essais nous pensons que le phénomène dominant est effectivement une maturation des ponts polysulfures qui se couple à des effets de dé-enchevêtrement des chaînes macromoléculaires dans le cas du matériau C alors que cet effet se ferait moins ressentir sur le matériau A (qui est à priori majoritairement constitué de ponts mono-sulfures).

Pour modéliser ces effets couplés thermo-chimio-mécaniques nous avons retenu le même



(a) Comparaison des tests de gonflement pour des éprouvettes vieilles sans aucune sollicitation et sous fluage mécanique permanent durant le vieillissement

(b) Comparaison des modules statiques pour des éprouvettes vieilles sans aucune sollicitation et sous fluage mécanique permanent durant le vieillissement

FIGURE 2.7 – Résultats de caractérisation pour du vieillissement avec fluage mécanique

formalisme que celui décrit dans la section précédente. Nous supposons néanmoins qu'il n'y a pas de variation de volume liée à l'évolution physico-chimique. Nous relierons l'inverse des taux de gonflements mesurés expérimentalement à la variable  $\xi$  présentée précédemment en normalisant les résultats ( $\xi = 0$ , pas de vieillissement,  $\xi = 1$  saturation du phénomène de maturation des ponts). Le comportement mécanique est décrit avec un modèle de Maxwell généralisé intégrant l'effet Payne avec le formalisme décrit avec les eqs. (1.15) et (1.17). Les paramètres matériaux mécaniques sont supposés dépendant de la température et de  $\xi$ . L'originalité du modèle repose sur la contribution physico-chimique qui, comme dans la partie précédente, couple évolution non-arhénienne et influence de l'état mécanique, tel que :

$$\dot{\xi} = \exp\left(-\frac{E_a}{R\Theta}\right) \langle A_\xi \rangle \quad (2.30)$$

et

$$\begin{aligned} A_\xi = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = & J^{-1} A C_2 \tanh\left(m \frac{\Theta - \Theta_{ind}}{\Theta_{ind}}\right) (1 - \xi)^n - A J^{-1} \frac{\partial C_{10}}{\partial \xi} (I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3) \\ & - A J^{-1} \frac{\partial C_{01}}{\partial \xi} (I_2(\bar{\mathbf{B}}) - 3) - A J^{-1} \sum_{i=1}^N \omega_i \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_i}{\partial \xi} (I_1(\bar{\mathbf{B}}_e^i) - 3) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Les paramètres  $A$  et  $C_2$  permettent de jouer sur l'influence de l'état mécanique sur l'évolution physico-chimique et  $\Theta_{ind}$  est une température d'induction en dessous de laquelle il n'y a pas d'évolution physico-chimique. Le modèle adopté est décrit plus précisément dans [2, 11]. L'identification est réalisée en trois étapes :

1. On identifie tout d'abord l'évolution physico-chimique (en condition de contrainte libre) à partir des tests de gonflement. Un exemple de résultat est donné à la figure 2.8(b)

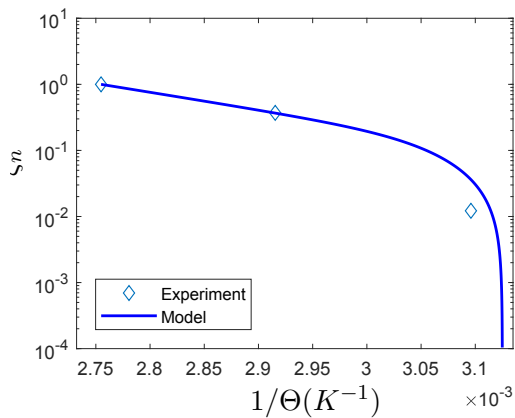
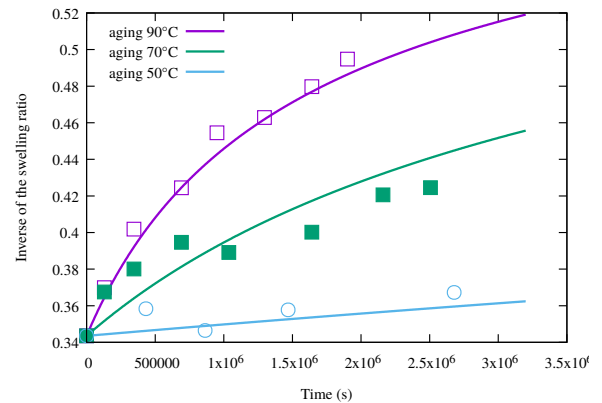
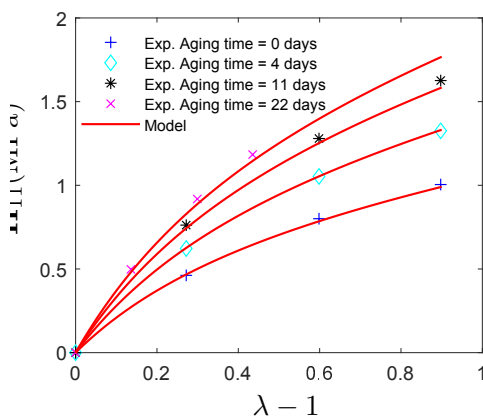
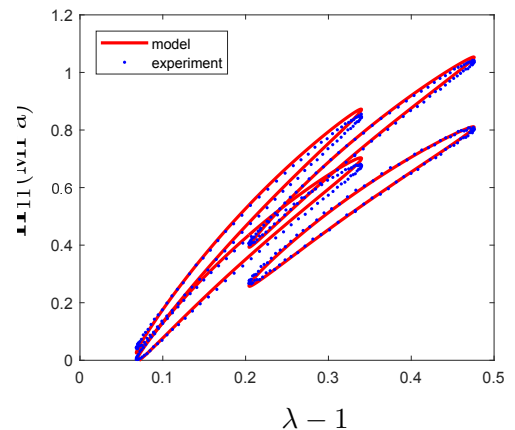
(a) partie cinétique (paramètres  $E_a, m$ )(b) Identification des autres paramètres chimiques  $AC_2, n, Q_\infty$ 

FIGURE 2.8 – Identification de l'évolution physico-chimique lié au vieillissement thermique pour le matériau A



(a) Composante hyperélastique identifiée à partir des essais de relaxations par paliers



(b) Contribution visqueuse et effet Payne identifiés à partir des essais cycliques, comparaisons après 8 jours de vieillissement

FIGURE 2.9 – Exemple d'identification des paramètres mécaniques pour le matériau A

2. On identifie ensuite les paramètres mécaniques en supposant que seul les paramètres intervenant dans l'énergie libre dépendent linéairement de la température et du vieillissement. Un exemple de résultat est donné à la figure 2.9
3. A partir de simulations E.F. on détermine le paramètre de couplage chimio-mécanique en utilisant les essais de fluages sur H2 (voir figure 2.10).

Comprendre, caractériser et modéliser ces phénomènes de vieillissement couplés à la mécanique devient un enjeu de plus en plus fort que ce soit dans le monde académique ou dans le monde industriel. En particulier, le couplage entre endommagement et évolution du réseau macromoléculaire, que nous n'avons pas abordé jusqu'à présent, pose question pour les applications anti-vibratoires.

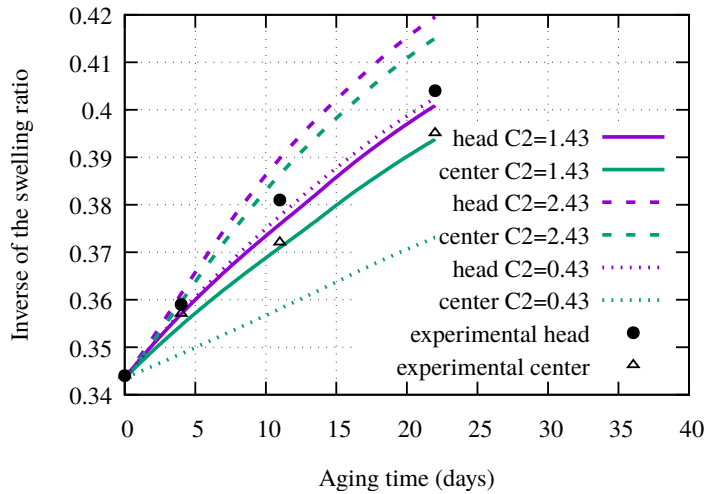


FIGURE 2.10 – Comparison des résultats des simulations par E.F. et des données expérimentales de gonflement sur les éprouvettes H2 après vieillissement et fluage sur le matériau A. La tête de l'éprouvette qui n'est pas soumise à un chargement mécanique (head) a une densité de réticulation plus élevée que la zone utile (center).

## 2.4 Conclusion

J'ai proposé dans ce chapitre un aperçu des travaux que nous avons pu mener sur la formulation des couplages thermo-mécaniques ou thermo-chimio-mécanique dans un cadre de faible compressibilité et avec le souci de ne négliger à priori aucun terme de couplages devant un autre (dilatation thermique, retrait chimique, élasticité entropique, etc). La question de la prise en compte de réactions chimiques dans un milieu déformable et surtout de l'interaction réciproque entre état mécanique et réactions chimiques reste à mon sens à explorer (avec ou sans diffusion d'espèces chimiques). Le cadre thermodynamique général permet d'intégrer de nombreux phénomènes mais un des enjeux étant à mon sens l'intégration à priori (et de manière consistante) de l'ensemble des mécanismes pour éviter par exemple d'avoir à corriger un bilan énergétique avec des facteurs correctifs purement phénoménologiques. Concernant le vieillissement thermique, nous avons tenté de mettre au point une campagne expérimentale qui vise à mettre en évidence le phénomène de maturation des ponts de réticulation ainsi que l'influence de l'état initial (i.e. du processus de mise en œuvre) sur celui-ci. Cette campagne nous a permis de développer et d'identifier un modèle multi-physique qui reste à valider. Dans un futur proche, nous souhaitons coupler ce type d'approche avec des modèles d'endommagement par fatigue pour être en mesure de décrire des évolutions potentiellement concurrentes (maturation chimique/endommagement dans la matrice).

## Aspects numériques liés à la résolution de problèmes de structures à base d'élastomères

**L**es différents aspects présentés dans ce chapitre couvrent les développements numériques que j'ai réalisés après ma thèse. Par soucis de concision (et pour éviter de réécrire les développements de la thèse), j'ai donc occulté l'aspect réduction de modèle ou éléments-finis spécifiques pour des structures élancées à invariance géométrique. Je m'intéresse donc au algorithmes d'intégration de lois d'évolutions, à la formulation des problèmes couplés avec contrainte de quasi-incompressibilité et à l'approche isogéométrique dans un contexte multi-champs.

## Contents

---

<b>3.1</b>	<b>Schémas locaux d'intégration en temps . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>3.2</b>	<b>Problèmes couplés . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>3.3</b>	<b>Analyse isogéométrique pour problèmes quasi-incompressibles . . .</b>	<b>89</b>
<b>3.4</b>	<b>Aspects logiciels . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>107</b>

---

### 3.1 Schémas locaux d'intégration en temps

Les équations d'évolutions associées aux différents modèles que nous développons sont généralement intégrées numériquement, localement (au niveau des points de Gauss), par un schéma qui s'insère dans l'algorithme global de résolution (usuellement de type Newton-Raphson). Les équations à intégrer peuvent être fortement non-linéaires et exhiber des localisations fortes en temps ou en espace. D'un point de vue numérique on peut donc être confronté à des systèmes dit "raides" qui peuvent pénaliser fortement la résolution globale. Pour éviter de trop pénaliser le pas de temps global, on utilise des sous-discrétisations locales en temps (à chaque point de Gauss donc) afin d'être capable de faire des grands pas de temps là où la localisation ne pose pas de problèmes et des petits pas de temps locaux ailleurs (ce qui peut permettre une parallélisation des différentes intégrations locales qui sont indépendantes les unes des autres). Pour la viscosité en grandes transformations il existe dans la littérature des schémas numériques standards, Euler, BDF, etc. et des schémas plus spécifiques qui approximent l'évolution en temps, comme par exemple l'approximation en exponentiel (exponential mapping) proposé par [119] et utilisé par [100] pour un modèle de Zener.

En s'inspirant d'algorithmes proposés par Simo pour la plasticité (voir par exemple [52]) nous avons introduit de nouveaux type de schémas pour la viscosité ou viscoplasticité. Pour les modèles se basant sur la décomposition multiplicative du gradient de la transformation, les équations d'évolutions peuvent être mises sous la forme générale suivante sur un intervalle de temps  $[t_k, t_{k+1}]$  :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e &= \mathcal{H}(\bar{\mathbf{B}}_e, \mathbf{L}) + \mathcal{I}(\bar{\mathbf{B}}_e, \bar{\mathbf{B}}) \\ \bar{\mathbf{B}}_e(t_k) &= \bar{\mathbf{B}}_{e|_k} \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{H}$  est un opérateur élastique (identique quel que soit le modèle) et  $\mathcal{I}$  un opérateur inélastique qui peut, par exemple, prendre les formes suivantes pour quelques modèles de la littérature :

$$\mathcal{I}(\bar{\mathbf{B}}_e, \bar{\mathbf{B}}) = \begin{cases} -\frac{2}{\eta} \boldsymbol{\sigma}_{neq} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e & \text{pour Zener} \\ -\frac{2}{\eta} \boldsymbol{\sigma}_{eq} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \frac{4}{J\eta} \psi_{neq,1} \left( \bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{B}} : \bar{\mathbf{B}}_e^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_e \right) + \\ \frac{4}{J\eta} \psi_{neq,2} \left( \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{B}}^{-1} : \bar{\mathbf{B}}_e) \bar{\mathbf{B}}_e \right) & \text{pour Poynting-Thomson} \\ -2 \frac{\langle f(\boldsymbol{\sigma}_{neq}) \rangle}{\eta} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{neq}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{neq}\|} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e & \text{pour Bingham} \end{cases} \quad (3.2)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}_{neq}$  une fonction de  $\bar{\mathbf{B}}_e$  et  $\boldsymbol{\sigma}_{eq}$  une fonction de  $\bar{\mathbf{B}}$ . L'intervalle de temps  $[t_k, t_{k+1}]$  correspond à un incrément de Newton-Raphson pour lequel toutes les variables sont connues à l'instant  $t_k$  et l'on dispose d'une prédiction du gradient  $\mathbf{F}$  à l'instant  $t_{k+1}$ . Pour résoudre le système différentiel de l'équation (3.1), nous avons proposé une méthode originale de type prédicteur-correcteur. Le pas de temps global est d'abord découpé en sous pas de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ . A partir d'un prédicteur  $\bar{\mathbf{B}}_e^*$ , qui est la solution de (3.1) en annulant  $\mathcal{I}$  (solution élastique) :

$$\bar{\mathbf{B}}_e^* = \bar{\mathbf{F}}_{|_{n+1}} \cdot \bar{\mathbf{F}}_{|_n}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{e|_n} \cdot \bar{\mathbf{F}}_{|_n}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{F}}_{|_{n+1}}^T \quad (3.3)$$



nous approximations le système initial par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = \mathcal{I}(\bar{\mathbf{B}}_e, \bar{\mathbf{B}}) & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \bar{\mathbf{B}}_e(t_n) = \bar{\mathbf{B}}_e^* \end{cases} \quad (3.4)$$

et nous cherchons la solution sous la forme suivante :

$$\bar{\mathbf{B}}_e(t) = b(t)\mathbf{N} + s(t)\mathbf{1} \quad (3.5)$$

ou  $\mathbf{N}$  est choisi sous la forme :

$$\mathbf{N} = \frac{\bar{\mathbf{B}}_e^{*\text{D}} + h\mathcal{I}(\bar{\mathbf{B}}_e^*, \bar{\mathbf{B}}_{|_{n+1}})^{\text{D}}}{\left\| \bar{\mathbf{B}}_e^{*\text{D}} + h\mathcal{I}(\bar{\mathbf{B}}_e^*, \bar{\mathbf{B}}_{|_{n+1}})^{\text{D}} \right\|} \quad (3.6)$$

Le système tensoriel de l'équation (3.4) est donc remplacé par un système différentiel de deux équations à deux inconnues du type :

$$\begin{cases} \dot{b} = \mathcal{M}(b, s, \mathbf{N}, \bar{\mathbf{B}}) & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \dot{s} = \mathcal{N}(b, s, \mathbf{N}, \bar{\mathbf{B}}) \\ s(t_n) = s^*, \quad b(t_n) = b^* \end{cases} \quad (3.7)$$

Nous avons ensuite adopté deux méthodes pour résoudre ce système : un schéma classique de type Euler Implicite avec adaptation du pas de temps (que nous avons appelé BETS : Backward Euler with Time Stepping) qui implique de résoudre à chaque sous pas de temps un système d'équations non-linéaires avec une méthode de Newton, et un schéma linéarisé (que nous avons appelé LBETS : Linearized Backward Euler with Time Stepping) qui conduit à une approximation de la solution sous la forme d'une exponentiel en temps (voir [71, 67]).

Nous avons étudié la convergence de ces différents schémas sur un cas test d'extension uniaxiale homogène pour lequel nous avons une solution numérique de référence. Nous avons comparé la solution donnée par les deux schémas proposés, BETS et LBETS, par rapport à une résolution avec un schéma explicite du système tensoriel initial, eq. (3.1), avec une méthode de type Runge-Kutta-Fehlberg (qui est théoriquement d'ordre 4 dans la version utilisée).

Les figures 3.1, montrent une représentation de l'erreur obtenue sur la solution en contrainte à la fin de la rampe de chargement en fonction du pas de temps global et pour différentes valeurs de précision des schémas auto-adaptatifs (le paramètre TOL dans les figures). Il est donc normal de ne pas retrouver les ordres de convergences théoriques des schémas d'intégration qui utilisent une sous discrétisation en temps. On remarque que le schéma linéarisé est le moins performant surtout dans le cas de modèles fortement non-linéaires de type Poynting-Thomson ou Bingham. D'autre part, comme attendu, le schéma explicite de Runge-Kutta montre l'ordre de convergence le plus grand mais en contre partie, il peut exhiber des instabilités comme dans le cas par exemple d'un modèle de Poynting-Thomson. Le schéma de type Euler implicite semble donc être le plus intéressant.

Depuis ces travaux, nous avons adopté d'autres type de schémas et en particulier un schéma BDF (Backward Differentiation Formula) d'ordre 2 qui est particulièrement intéressant pour l'auto-adaptation du pas de temps car on dispose d'une approximation de l'erreur de troncature

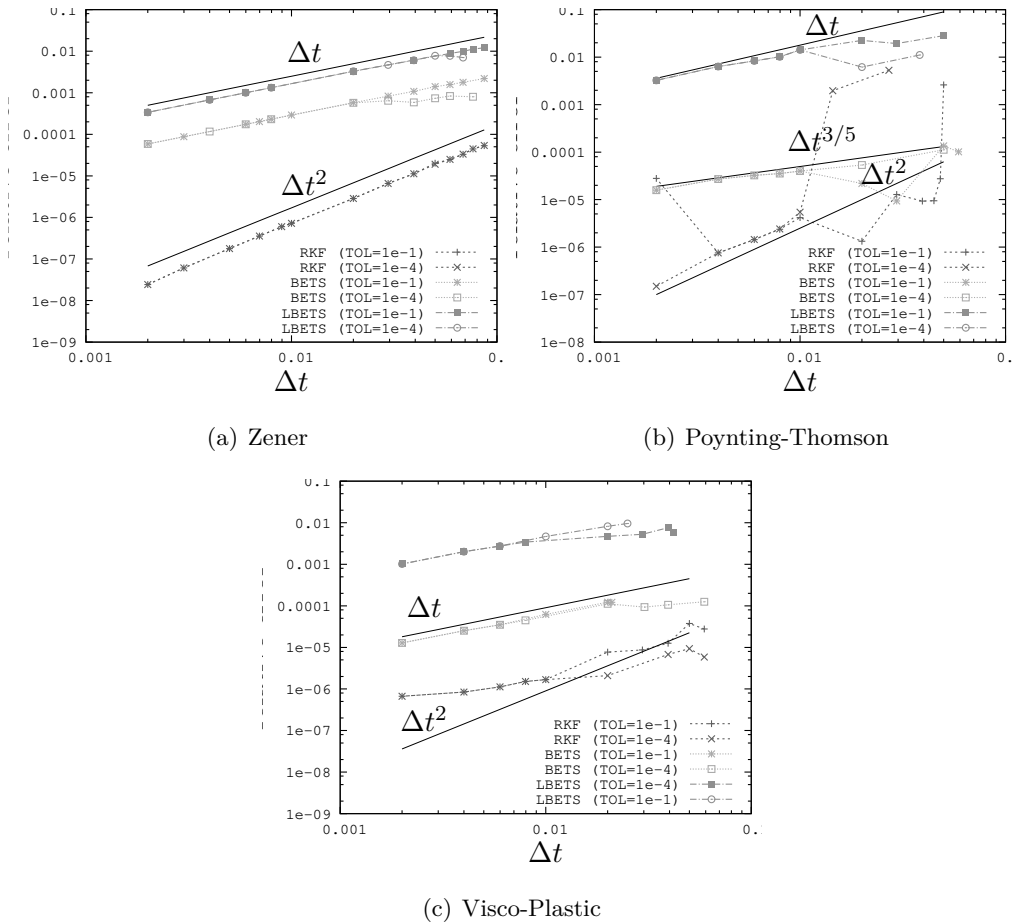


FIGURE 3.1 – Étude de convergence des différents schémas sur un cas d'extension uniaxiale à amplitude imposée (vitesse constante)

sans effectuer d'évaluations supplémentaires du système différentiel (voir par exemple [13, 29]). De plus nous pouvons obtenir un opérateur tangent consistant par rapport au schéma numérique ce qui permet de ne pas pénaliser la vitesse de convergence du schéma de Newton-Raphson global.

L'inconvénient majeur de l'ensemble de ces schémas reste à mon sens lié au fait que l'on itère, séparément, et à deux niveaux vers une solution d'équilibre qui doit vérifier les équations d'équilibre mécanique et les loi d'évolutions en même temps (ou plutôt alternativement). A l'erreur de troncature et de discrétisation du schémas numérique d'intégration local des équations d'évolutions on rajoute une erreur liée à la prédiction de l'état au temps suivant. Une résolution simultanée des différentes équations avec de nouveaux types de schémas (qui pourraient être issus de nouvelles formes variationnelles) mériterais d'être étudiée (travail que nous avons initié dans la thèse de Christelle Saadé).

### 3.2 Problèmes couplés (thermo-mécanique ou thermo-chimio-mécanique) avec comportements quasi-incompressible

La formulation variationnelle adoptée se base sur une forme standard à trois (couplage thermo-mécanique) ou quatre champs (couplage thermo-chimio-mécanique) en partant de l'écriture du cadre thermodynamique avec une énergie hybride (voir section 2.1).

En négligeant les effets d'inertie, l'équilibre mécanique prend la forme locale suivante dans la configuration initiale :

$$\text{DIV}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Pi} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_0, \quad \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial\Omega_{f_0}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{u_d} \quad (3.8)$$

ou  $\mathbf{\Pi} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}}$  est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff,  $\mathbf{f}$  sont les efforts volumiques (définis par unité de surface non-déformée),  $\mathbf{t}$  sont les efforts surfacique (définis par unité de surface non-déformée) et qui s'appliquent sur  $\partial\Omega_{f_0}$ ,  $\mathbf{N}$  est la normale sortante à la surface initiale ou s'applique les efforts de surface,  $\mathbf{u}_0$  est le déplacement imposé sur le bord (non déformé)  $\partial\Omega_{u_0}$ . Pour la thermique, on peut considérer un cas général (dissipatif) tel que l'on obtienne la forme locale suivante (dans le cas termo-mécanique) :

$$\begin{aligned} \rho_0 C_p \dot{\Theta} &= J\phi_m + Jl_m + Jl_q + \rho_0 \mathbf{r} - J\text{DIV}_{\mathbf{X}}\mathbf{Q} \quad \text{dans } \Omega_0, \quad \Theta(t=0) = \Theta_0, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_h \quad \text{sur } \partial\Omega_{Q_0}, \quad \Theta = \Theta_d \quad \text{sur } \partial\Omega_{\Theta_0} \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec  $\mathbf{Q}$  le flux de chaleur dans la configuration initiale (défini par unité de surface non-déformée),  $C_p$  la capacité calorifique isobarique,  $\phi_m$  la dissipation intrinsèque,  $l_m, l_q$  les termes de couplages thermo-mécaniques,  $r$  un apport extérieur de chaleur (défini par unité de masse),  $\mathbf{Q}_h$  est le flux imposé (par unité de surface non-déformée) et  $\Theta_d$  la température imposée.

La forme faible de ces équations peut s'écrire simplement, en ajoutant l'équation (2.5), on obtient une formulation à trois champs qui est adaptée aux cas faiblement compressibles :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{u}, \Theta, q) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{T} \times L^2(\Omega_0)) \text{ tel que } \forall (\delta\mathbf{u}, \delta\Theta, \delta q) \in (\mathcal{U}^0 \times \mathcal{T}^0 \times L^2(\Omega_0)) : \\ &\int_{\Omega_0} (\bar{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + q \frac{J}{J_{\Theta}} \mathbf{F}^{-\text{T}}) : \text{GRAD}_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \delta\mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_{f_0}} \mathbf{t} \delta\mathbf{u} dS = 0 \\ &\int_{\Omega_0} \rho_0 C_p \dot{\Theta} \delta\Theta d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (J\phi_m + Jl_m + Jl_q + \rho_0 r) \delta\Theta d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} J\mathbf{Q} \text{GRAD}_{\mathbf{X}} \delta\Theta d\Omega_0 \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_{Q_0}} \mathbf{Q}_h \mathbf{N} \delta\Theta dS = 0 \\ &\int_{\Omega_0} \left( (J_m - 1) - \frac{\partial g}{\partial q} \right) \delta q d\Omega_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Les espaces  $\mathcal{U}, \mathcal{U}^0, \mathcal{T}, \mathcal{T}^0$  sont tels que  $\mathcal{U}^0 = \{\delta\mathbf{u} \in (H^1(\Omega_0))^n, \delta\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{u_d}\}$ ,  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega_0))^n, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } \partial\Omega_{u_d}\}$ ,  $\mathcal{T}^0 = \{\delta\Theta \in (H^1(\Omega_0))^n, \delta\Theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\Theta_0}\}$  et  $\mathcal{T} = \{\Theta \in (H^1(\Omega_0))^n, \Theta = \Theta_d \text{ sur } \partial\Omega_{\Theta_0}\}$ , avec  $n$  la dimension de l'espace physique. Aux équations précédentes s'ajoutent des équations de comportements et des équations d'évolutions qui sont traitées localement.

Une version discrétisée de cette forme faible peut être obtenue en utilisant un schéma de type Euler implicite en temps puis une discrétisation en espace à l'aide d'éléments-finis ou

d'analyse iso-géométrique. On obtient un problème incrémental en temps ou la solution discrète  $(\mathbf{u}_h^n, \Theta_h^n, q_h^n)$  est connue au temps  $t_n$  et l'on cherche  $(\mathbf{u}_h^{n+1}, \Theta_h^{n+1}, q_h^{n+1})$  au temps  $t_{n+1}$  tel que :

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^{n+1}, \Theta_h^{n+1}, q_h^{n+1}) \text{ tel que } \forall (\delta \mathbf{u}_h, \delta \Theta_h, \delta p_h) : \\
\mathbf{r}_u &= \sum_e \int_{\Omega_e} (\bar{\mathbf{\Pi}}^{n+1} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}^{n+1}} + q_h^{n+1} \frac{J_h^{n+1}}{J_{\Theta_h^{n+1}}} \mathbf{F}^{n+1-T}) : \text{GRAD}_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_h d\Omega_e - \sum_e \int_{\Omega_e} \mathbf{f}^{n+1} \delta \mathbf{u}_h d\Omega_e \\
& - \sum_e \int_{\partial\Omega_{f_e}} \mathbf{t}^{n+1} \delta \mathbf{u}_h dS_e = 0 \\
r_\Theta &= \sum_e \int_{\Omega_e} \rho_0 \frac{C_p^{n+1}}{\Delta t} (\Theta_h^{n+1} - \Theta_h^n) \delta \Theta_h d\Omega_e - \sum_e \int_{\Omega_e} (J^{n+1} \phi_m^{n+1} + J^{n+1} l_m^{n+1} + J^{n+1} l_q^{n+1} \\
& + \rho_0 r^{n+1}) \delta \Theta_h d\Omega_e - \sum_e \int_{\Omega_e} J^{n+1} \mathbf{Q}^{n+1} \text{GRAD}_{\mathbf{X}} \delta \Theta d\Omega_e \\
& + \sum_e \int_{\partial\Omega_{Q_e}} \mathbf{Q}_h^{n+1} \mathbf{N} \delta \Theta dS_e = 0 \\
r_q &= \sum_e \int_{\Omega_e} \left( (J_m^{n+1} - 1) + \left( \frac{\partial g}{\partial q} \right)_h^{n+1} \right) \delta q_h d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ce système, non-linéaire, peut ensuite être linéarisé, non sans un certain effort de calcul, (dans le cadre d'un schéma de type Newton-Raphson) et nous obtenons le système par bloc suivant :

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{d} = \mathbf{r} \tag{3.12}$$

avec  $\Delta \mathbf{d} = \mathcal{A}_e \{ \Delta \mathbf{u}_e^{n+1}, \Delta \Theta_e^{n+1}, \Delta q_e^{n+1} \}$  et  $\mathbf{r} = \mathcal{A}_e \{ r_{u_e}^{n+1}, r_{\Theta_e}^{n+1}, r_{q_e}^{n+1} \}$  :

$$\mathbf{K}_t = \mathcal{A}_e \mathbf{K}_t^e, \quad \mathbf{K}_t^e = \begin{bmatrix} K_{t_{uu}}^e & K_{t_{u\Theta}}^e & K_{t_{uq}}^e \\ K_{t_{\Theta u}}^e & K_{t_{\Theta\Theta}}^e & K_{t_{\Theta q}}^e \\ K_{t_{qu}}^e & K_{t_{q\Theta}}^e & K_{t_{qq}}^e \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

L'opérateur tangent élémentaire n'est pas symétrique. Des méthodes alternatives permettent de traiter ces cas de couplages forts comme les approches de type étagées ("staggered schemes" qui sont souvent utilisées en mécanique des fluides, voir par exemple [34]) ou découplées ("opérateur splitting", voir par exemple [109]) qui permettent de conserver des opérateurs tangents symétriques. Il existe également des formulations variationnelles spécifiques qui permettent de garantir certaines propriétés comme la symétrie de l'opérateur tangent dans un cadre de couplage fort avec une résolution monolithique (voir par exemple [111]). Les approches étagées ou découplées ne sont pas toujours stables et nécessitent de traiter avec soin les termes de couplages en particulier dans le cas faiblement compressible mais avec dilatation thermique. Le fait d'avoir une approche en énergie hybride nous permet d'avoir une formulation variationnelle complètement consistante vis à vis de la formulation thermodynamique et d'éviter l'introduction de variables supplémentaires pour traiter la question de la quasi-incompressibilité. Dans la littérature cette question de la faible compressibilité est souvent traitée à l'aide des mêmes formulations que dans le cas purement mécanique. Ainsi dans les approches d'opérateurs splitting, [110, 87] des champs supplémentaires sont introduits pour prendre en compte l'incompressibilité dans le problème mécanique isentropique mais également dans le problème de conduction thermique. Dans [110] il y a jusqu'à 4 champs supplémentaires qui sont condensés au niveau élémentaire. Nous utilisons également une technique de condensation statique élémentaire des

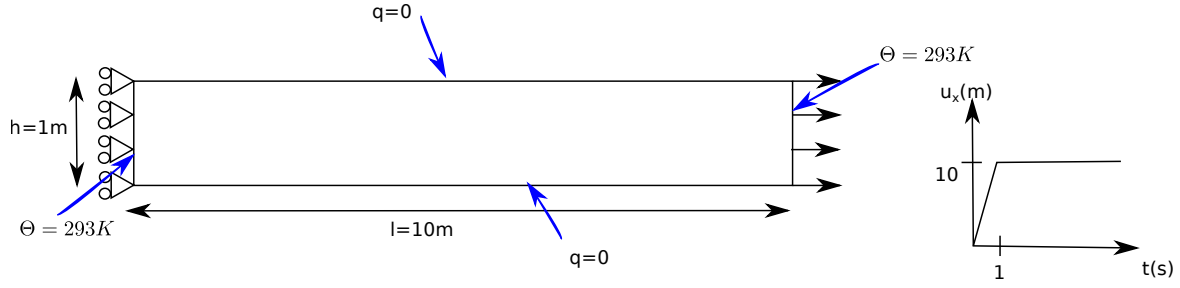


FIGURE 3.2 – Géométrie et chargement du barreau hyperélastique en extension

degrés de libertés associés au champ de pression,  $q$ , lorsque nous utilisons une interpolation discontinue entre éléments (ce qui est le cas dans nos modèles éléments-finis mais pas avec l'analyse isogéométrique).

Afin de comparer deux choix d'interpolations que l'on peut rencontrer dans la littérature, on peut considérer le cas test suivant : il s'agit de l'extension en déformation plane d'un barreau hyperélastique. Les dimensions et le chargement sont donnés à la figure 3.2. On adopte le potentiel d'énergie suivant :

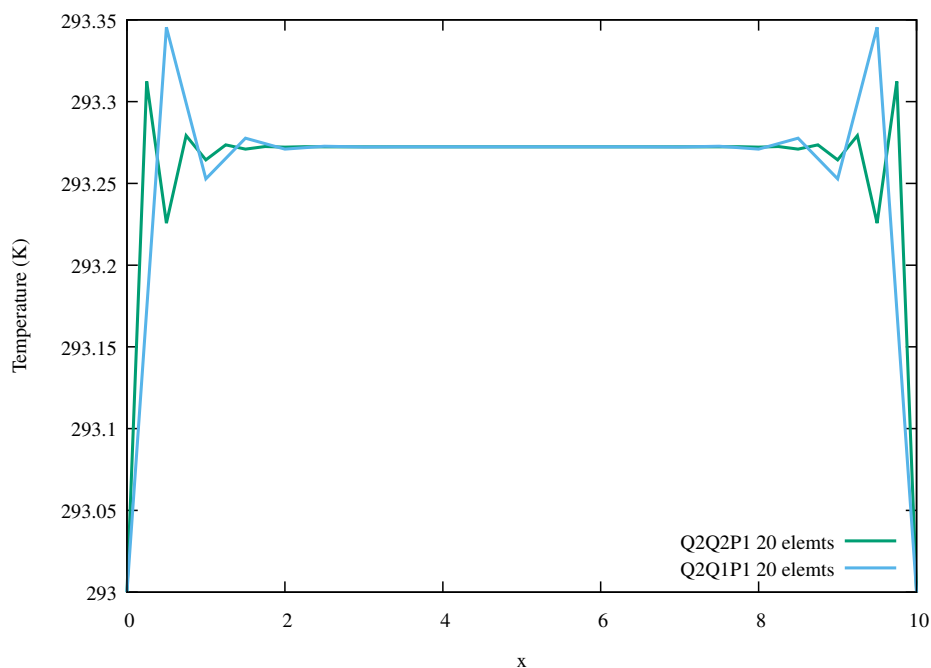
$$\varphi = c_{10} \frac{\Theta}{\Theta_0} (\bar{I}_1 - 3) + C_0 \left( \Theta - \Theta_0 - \Theta \log \left( \frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right) - C_1 \frac{(\Theta - \Theta_0)^2}{2\Theta_0} + \frac{k}{a^2} \left( \exp \left( \frac{q}{k} \right) \right)^a - \frac{q}{a} - \frac{k}{a^2} \quad (3.14)$$

Les paramètres matériaux associés sont donnés dans le tableau 3.1. La transformation dans ce cas test est quasi-homogène avec un champ de température qui doit présenter un très fort gradient sur le bord (avec une forme de type cloche). La vitesse de chargement est choisi de manière à ne pas atteindre immédiatement l'état stationnaire thermique afin de pouvoir comparer la réponse stationnaire et instationnaire. Nous pouvons ainsi comparer le résultat de deux types d'interpolations : Q2Q1P1, quadratique en déplacement, linéaire en température, linéaire discontinu en pression ou Q2Q2P1, quadratique en déplacement, quadratique en température, linéaire discontinu en pression.

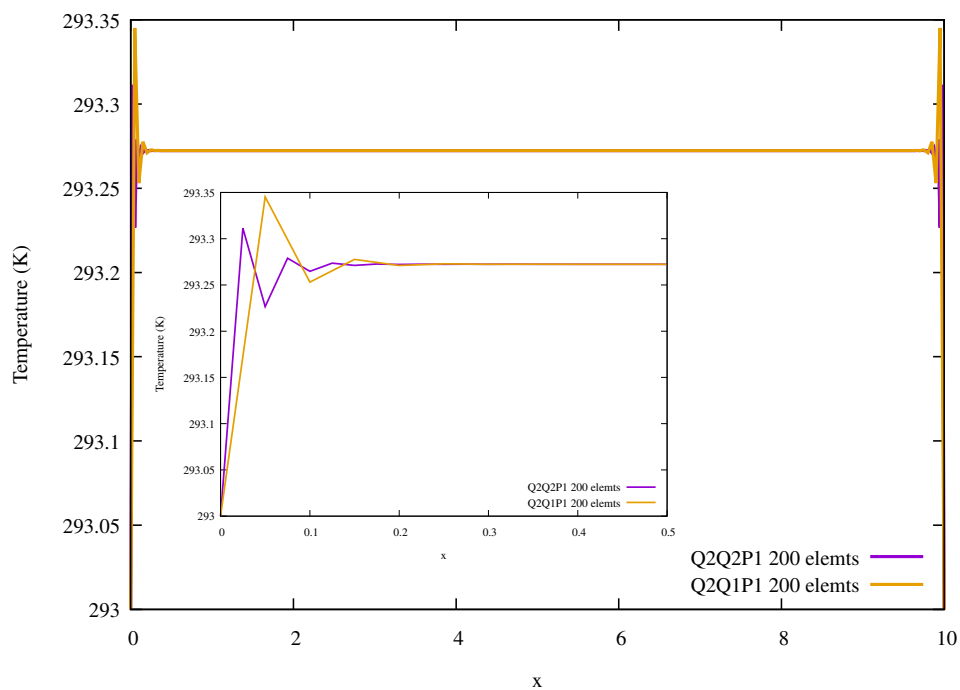
A la fin de la montée en charge, à l'état instationnaire, on peut constater que le champ de température présente des oscillations dans la zone de transition près des conditions de bords en température (voir figures 3.3). Ces oscillations du champ de température semblent moins prononcées avec l'interpolation de type Q2Q2P1. On peut également constater que le niveau des oscillations semble peu impacté par le raffinement du maillage et nous avons vérifié que le pas de temps n'avait également pas d'impact sur ce résultat.

A l'état stationnaire, on peut voir, à la figure 3.4, que l'interpolation de type Q2Q2P1 permet de converger plus vite en espace vers la solution attendue de type cloche. Des oscillations peuvent apparaître mais elles sont plus clairement liées à la discrétisation en espace (elles disparaissent lorsque l'on raffine le maillage).

On constate également le même type d'oscillations sur un cas de compression d'un bloc hyperélastique (même potentiel que précédemment). Pour ce cas test seul un quart de la structure est représenté, on applique une compression en déplacements imposés sur un quart de la surface supérieur d'un bloc (en son centre). Sur cette même surface on applique un refroidissement en



(a) 20 éléments dans la longueur



(b) 200 éléments dans la longueur

FIGURE 3.3 – Champ de température le long de l'abscisse du barreau à la fin de la rampe de chargement ( $t=1s$ )

température imposée (de 293K à 288K) durant la compression. Les autres faces sont supposées adiabatiques (voir figure 3.5). Comme dans le cas précédent, le gradient du champ de température

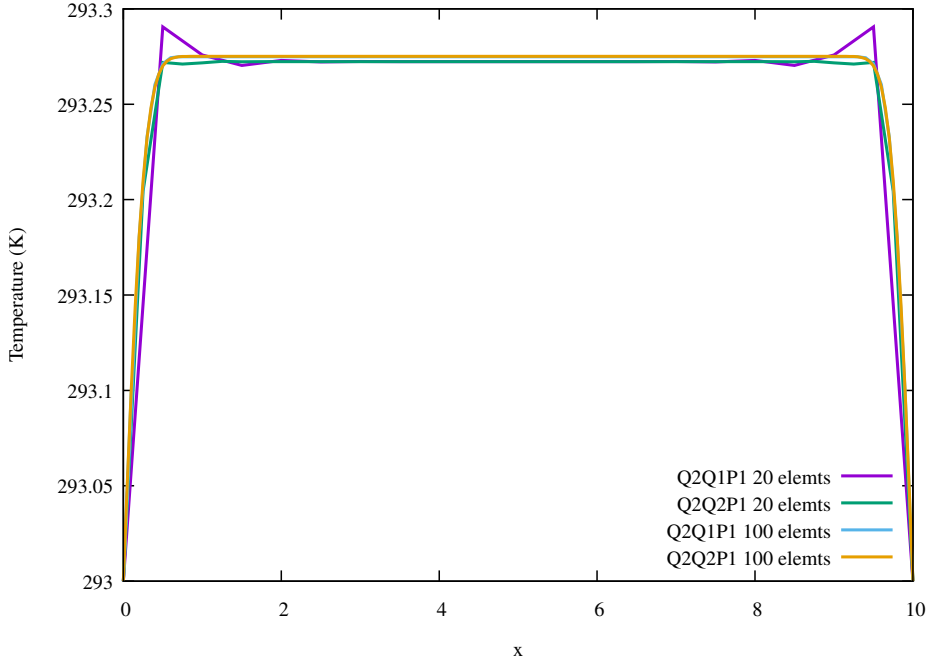


FIGURE 3.4 – Champ de température le long de l’abscisse du barreau à l’état stationnaire ( $t=10000s$ )

Density	$\rho_0(Kg/m^3)$ 1000				
Paramètres thermiques	$\alpha(K^{-1})$ $6.e^{-4}$	$C_0(J/m^3/K)$ $1.6e^6$	$C_1(J/m^3/K)$ $3.6e^3$	$\Theta_0(K)$ 293	$k_t(W/m/K)$ 3.6
Paramètres mécaniques	$c_{10}(Pa)$ $0.22e^6$	$k(Pa)$ $1500e^6$	$a$ 1.		

TABLE 3.1 – Paramètres matériaux

est important ce qui conduit à quelques oscillations. La figure 3.6 permet d’illustrer qu’encore une fois l’interpolation de type de Q2Q2P1 donne un niveau d’oscillation qui semble plus faible même si la zone concernée semble légèrement plus grande qu’avec l’interpolation de type Q2Q1P1.

Pour le couplage thermo-chimio-mécanique, le jeu d’équations (3.11) est légèrement modifié pour intégrer les termes de couplage supplémentaires et il est complété par une équation supplémentaire du type :

$$r_\xi = \sum_e \int_{\Omega_e} \left( \frac{\xi_h^{n+1} - \xi_h^n}{\Delta t} - k_\xi(\Theta_h^{n+1}) < A_\xi^{n+1} > \right) \delta \xi_h d\Omega_e = 0 \quad (3.15)$$

qui correspond à la discrétisation temporelle de l’évolution chimique (dans le cas d’un modèle à une réaction) par le même schéma en temps (Euler implicite) que l’équation de la chaleur. Les problèmes thermiques et chimiques étant couplés fortement, on choisi donc de traiter avec la même forme variationnelle le problème complet thermo-chimio-mécanique. Le champ supplémentaire lié à la conversion chimique,  $\xi_h$  est approximé avec les mêmes fonctions de formes que

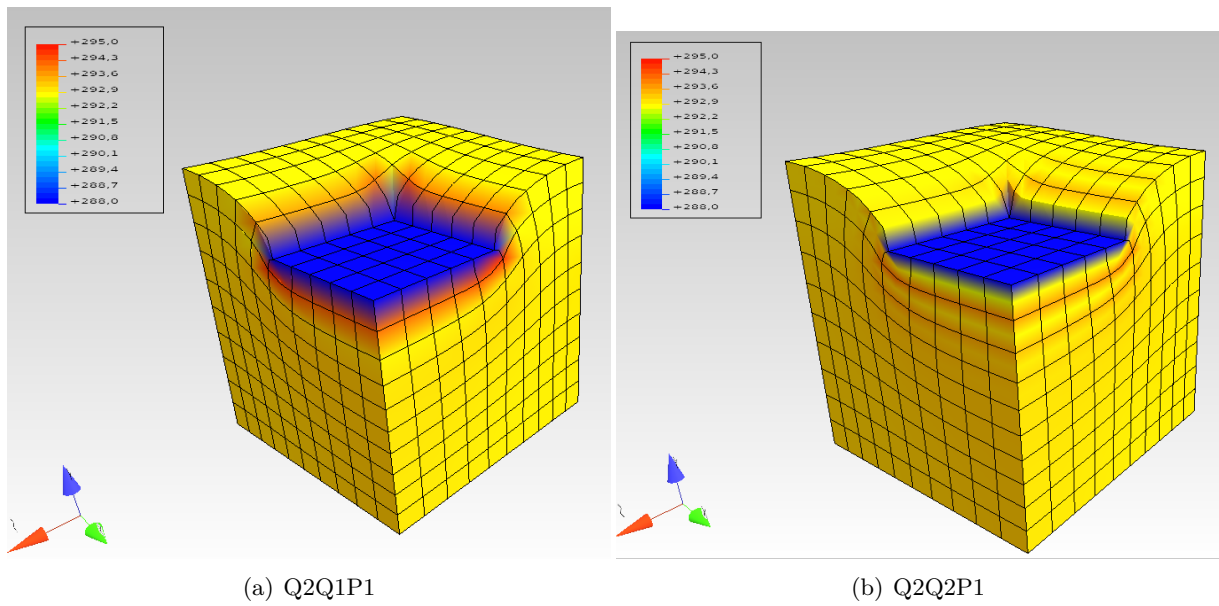


FIGURE 3.5 – Compression d’un bloc de caoutchouc avec refroidissement localisé, champ de température.

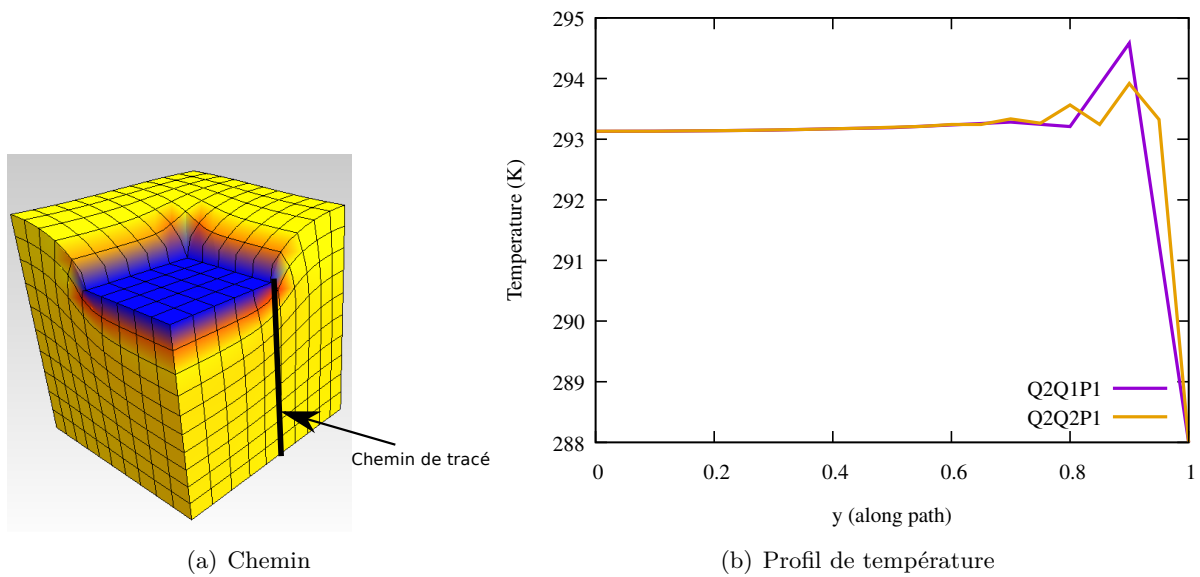
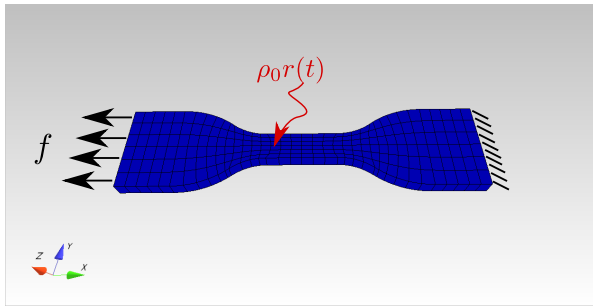


FIGURE 3.6 – Compression d’un bloc de caoutchouc avec refroidissement localisé, champ de température.

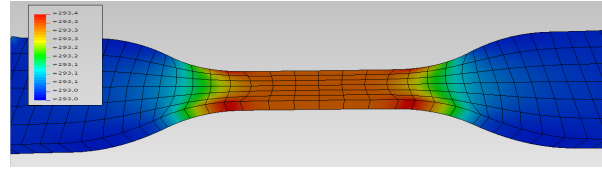
le champ de température.

La figure 3.7, permet d’illustrer le résultat de la simulation d’un test de vieillissement thermique sous fluage mécanique avec ce type de formulation. On peut notamment traduire des effets d’hétérogénéités du vieillissement dus à la contrainte mécanique permanente que l’on constate par ailleurs expérimentalement : la zone centrale voit une contrainte plus importante que les

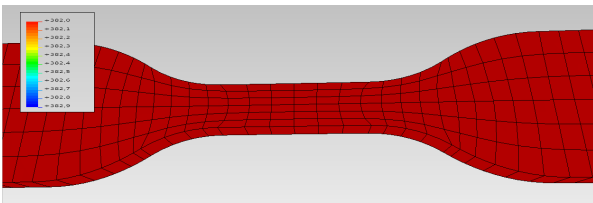




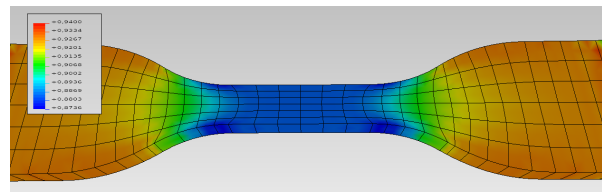
(a) Conditions aux limites du test de fluage sous environnement thermique : un effort mécanique permanent est appliqué à une extrémité, l'élévation de température est imposée par une puissance volumique externe.



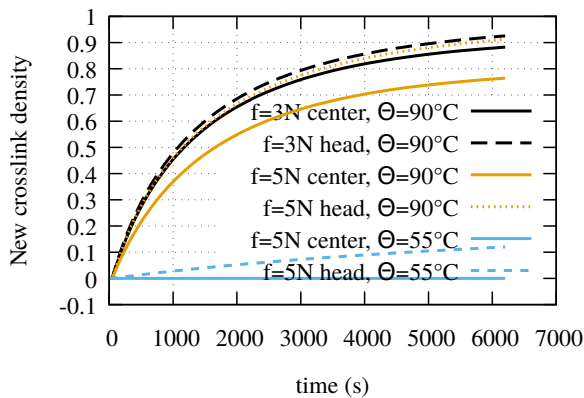
(b) champ de température après extension (avant chauffage)



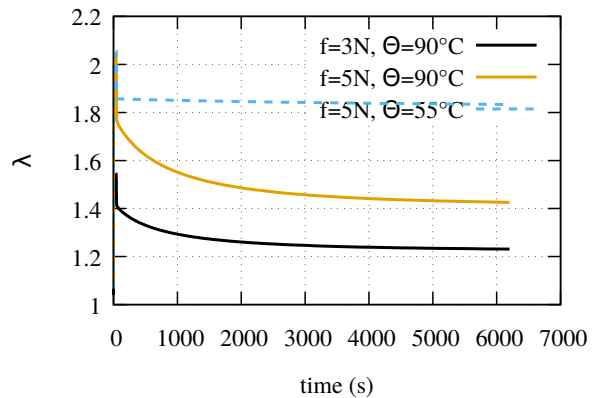
(c) champ de température à la fin du chauffage



(d) conversion chimique à la fin du test



(e) conversion chimique pour différentes températures de vieillissement prise en deux points du maillage (au centre et près du bord du talon de l'éprouvette)



(f) variation de l'élongation sous fluage en cours d'essai (compétition entre rigidification chimique et assouplissement thermique)

FIGURE 3.7 – Test de vieillissement chimique sous fluage mécanique.

talons et le niveau de conversion chimique y est donc plus faible.

Sur ce type de formulation nous n'avons pas observé de phénomènes d'instabilités numériques même si il nous reste à mener des études de convergences plus systématiques (encore faut-il définir des cas tests pertinents car nous ne disposons pas de solutions analytiques pour ce type de problèmes). Le principal enjeu se situe à l'heure actuelle au niveau de la discrétisation en temps des équations car les temps intrinsèques de chaque physique peuvent être très différents suivant la nature du problème à traiter. La stratégie d'utiliser le même schéma d'Euler implicite pour les équations thermiques et chimiques n'est donc certainement pas optimal.

### 3.3 Analyse isogéométrique pour problèmes quasi-incompressibles

L'analyse isogéométrique est aujourd'hui une méthode largement répandue dans de nombreux champs d'applications. L'ouvrage de référence pour avoir un aperçu de la méthode est [23]. De mon point de vue, son principal intérêt réside dans la souplesse d'utilisation offerte par la méthode pour contrôler les propriétés des approximations des champs inconnus (continuité, ordre). Nous avons étudié cette méthode pour des problématiques multi-champs notamment pour des structures à base d'élastomères dans le cadre de la thèse de Lei Zhang, à laquelle j'ai participé de manière marginale (voir [120] pour plus de détail).

L'application de cette méthode à des problèmes faiblement compressibles a fait l'objet d'assez peu de travaux dans la littérature (comparativement à d'autres champs d'applications ou la méthode c'est plus largement répandue). Pour des applications en mécanique des solides on trouve principalement la méthode de projection de type  $\bar{\mathbf{F}}$  développée principalement par Thomas Elguedj (voir par exemple [31, 32]) une technique de subdivision dans le cas d'une formulation mixte déplacement/pression (voir [56]) ou d'ordre et de continuité variable toujours dans le cas d'une formulation déplacement/pression (voir [83]). La principale difficulté consiste à obtenir des schémas numériques stables et à éviter des phénomènes d'oscillations qui peuvent apparaître sur les champs de pression ou de cinématique. Les développements que nous avons menés visaient, entre autre, à étudier différentes approximations dans le cadre d'une formulation mixte déplacement/pression dans l'objectif d'obtenir des schémas stables et performants.

On considère donc le problème multi-champs, continu, classique pour les problèmes quasi-incompressibles :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in (\mathcal{U} \times L^2(\Omega_0)) \text{ tel que } \forall (\delta \mathbf{u}, \delta p) \in (\mathcal{U}^0 \times L^2(\Omega_0)) : \\ & \int_{\Omega_0} (\bar{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + p \mathbf{J} \mathbf{F}^{-\text{T}}) : \text{GRAD}_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\partial \Omega_{f_0}} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dS = 0 \\ & \int_{\Omega_0} \left( (J - 1) - \frac{\partial g(p)}{\partial p} \right) \delta p d\Omega_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

ou la fonction  $g$  peut-être prise, par exemple, selon une des formes données aux équations (1.37) ou (1.38).

L'approximation isogéométrique ne passe pas par un maillage de l'espace physique (cf. fig. 3.8), le domaine géométrique  $\Omega_0$  est décrit par des fonctions NURBS (Non-Uniform Rational Bezier Spline) qui sont construites à partir d'un espace paramétrique et plus précisément à partir de points de cet espace (on parle de knot vector ou vecteur de nœuds). Il y a donc une notion assimilable à un maillage dans cet espace et l'on peut s'en servir comme supports d'intégration élémentaires. La forme discrète du problème 3.17 devient :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}^h, p^h) \in (\mathcal{U}^h \times L^2(\Omega_0)) \text{ tel que } \forall (\delta \mathbf{u}^h, \delta p^h) \in (\mathcal{U}^{0h} \times L^2(\Omega_0)) : \\ & \sum_{i=1}^{nel} \int_{\Omega_i} (\bar{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + p^h \mathbf{J} \mathbf{F}^{-\text{T}}) : \text{GRAD}_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}^h \det(J_{parphy} J_{parref}) d\Omega_i \\ & - \sum_{i=1}^{nel} \int_{\Omega_i} \mathbf{f} \delta \mathbf{u}^h \det(J_{parphy} J_{parref}) d\Omega_i - \sum_{i=1}^{nel} \int_{\partial \Omega_{f_i}} \mathbf{t} \delta \mathbf{u}^h \det(J_{parphys} J_{parref_s}) dS_i = 0 \\ & \sum_{i=1}^{nel} \int_{\Omega_i} \left( (J - 1) - \frac{\partial g(p)}{\partial p} \right) \delta p^h \det(J_{parphy} J_{parref}) d\Omega_i = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

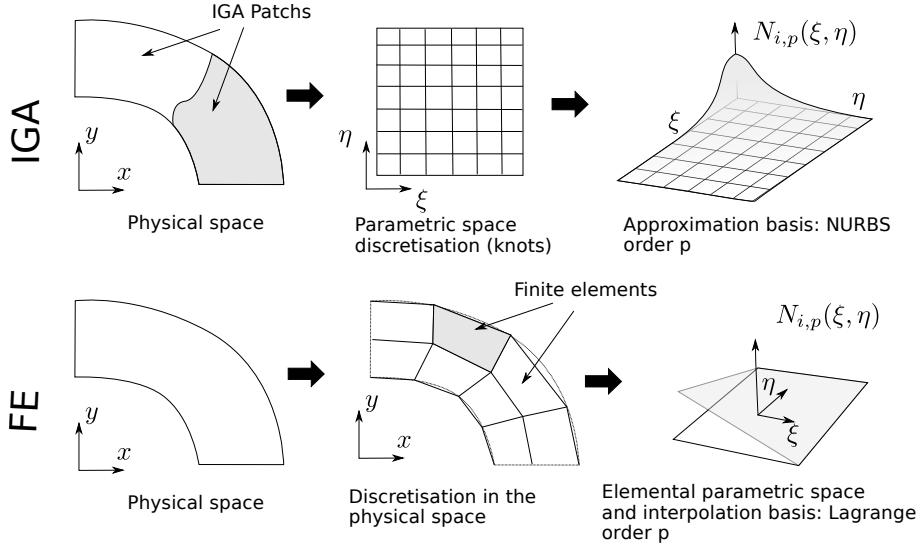


FIGURE 3.8 – Comparaison analyse isogéométrique/éléments-finis

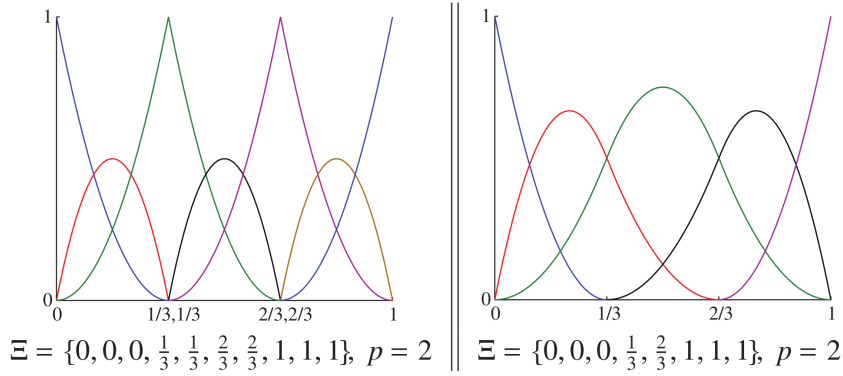


FIGURE 3.9 – Exemple de construction de b-spline pour un ordre et un vecteur de nœud donné : contrôle de la continuité en répétant certains nœuds (issue de [23])

avec  $J_{parphy}$  la jacobienne du passage de l'espace paramétrique vers l'espace physique et  $J_{parref}$  celle du passage d'un élément de l'espace paramétrique vers l'élément de référence (qui sert à construire un schéma d'intégration unique). Les champs approximés s'écrivent de la manière suivante (en 2D) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(x, y) &= \sum_i \sum_j R_i^p(\xi) R_j^p(\eta) B_{ij}^u \\ \mathbf{p}^h(x, y) &= \sum_i \sum_j R_i^q(\xi) R_j^q(\eta) B_{ij}^p \end{aligned} \quad (3.18)$$

ou les exposants  $p$  et  $q$  définissent l'ordre des fonctions NURBS de chaque champs,  $R_j$  et  $R_i$  sont construites de manière récursive à partir du vecteur de nœud. Les  $B_{ij}$  constituent les degrés de liberté (on parle de points de contrôles pour la géométrie) et se voient attribuer un poids qui est prédéfini et qui permet de décrire des géométries coniques. On peut jouer sur la continuité des fonctions d'approximation en répétant des nœuds et l'on peut donc devenir interpolant en certain point à la condition de répéter ces nœuds  $p + 1$  fois sur le bord de l'espace paramétrique

et  $p$  fois à l'intérieur (cf. fig. 3.9). On voit donc que l'on a une structure complètement similaire à des éléments finis à l'exception des deux points suivants :

- l'intégration numérique par quadrature de type schémas de Gauss ne peut être exacte et nécessite plus de points que dans le cas d'éléments finis standard du fait de l'approximation NURBS
- le support des fonctions d'approximations ne correspond pas à un élément de l'espace paramétrique, cela conduit à des systèmes linéaires beaucoup plus plein qu'avec des éléments finis

Enfin, comme avec des éléments-finis on peut raffiner le maillage ou utiliser des approximations d'ordre plus élevé à maillage (et continuité) fixée (h-method et p-method), mais on peut aussi faire évoluer les deux en même temps en assurant la continuité la plus élevée possible on parle alors de raffinement  $k$ . De manière générale, le raffinement (h-p ou k) est plus simple à gérer qu'avec des éléments-finis (simplicité de l'espace paramétrique et algorithmes de raffinement déjà développés pour la CAO, voir [95]).

Dans la suite, pour les approximations IGA, on utilise la notation suivante :  $Up_{sub}^{cont}Pq_{sub}^{cont}$  ou  $p$  et  $q$  sont les ordres d'approximations de chaque champs (il peuvent être différents ou égaux pour la cinématique et la pression), les indices *sub* indiquent le nombre de subdivision du vecteur de nœuds initial ( $sub = 1$ , pas de subdivision) et *cont* indique la multiplicité des nœuds intérieurs à l'espace paramétrique et contrôle donc la continuité de chaque champ ( $cont = 1$  indique une multiplicité de 1 et une continuité intérieure  $C_p$  du champ). Le nombre de degré de liberté de chaque champs est donc déterminé par les paramètres  $p$  (ou  $q$ ), *cont*, *sub*, et le nombre de nœuds par directions de l'espace paramétrique.

Pour étudier la stabilité de différentes approximations dans un cadre grandes déformations il nous faut recourir à des tests numériques puisque nous n'avons pas d'outil mathématique nous permettant de garantir cette stabilité dans un cadre non-linéaire. On peut néanmoins appliquer des méthodes développées dans un cadre linéaire pour éliminer les approximations instables. En effet une approximation instables en petites déformations sera instable en non-linéaire géométrique mais la contraposée n'est pas forcément vrai (stable en petite déformation n'implique pas forcément stable en grandes). Parmi ces méthodes on peut utiliser le test numérique de [21] comme l'a fait [56] ou les patch tests proposés par [121, 122] dans le cadre des éléments-finis. La figure 3.10, résume l'application directe de ces patch tests à différentes approximations IGA. Deux approximations ne passent pas le test dans le cas à un seul élément : différence d'un ordre entre la cinématique et la pression ou même ordre mais baisse de la continuité sur la cinématique.

Pour confirmer ce résultat, on peut considérer le test classique de la membrane de Cook en déformation plane dans le cadre de la formulation mixte précédente et avec un potentiel d'énergie libre, hybride, très simple :

$$\rho_0\varphi = \frac{\mu}{2}(I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3) - k_v \exp \frac{p}{k_v} + p + k_v \quad (3.19)$$

Les conditions aux limites de ce test correspondent à un encastrement sur la partie gauche et un effort linéique sur la partie droite (de direction constante, verticale et d'amplitude  $f$ ). La figure 3.11(b) nous confirme bien que l'approximation à un ordre d'écart entre pression et cinématique est instable.

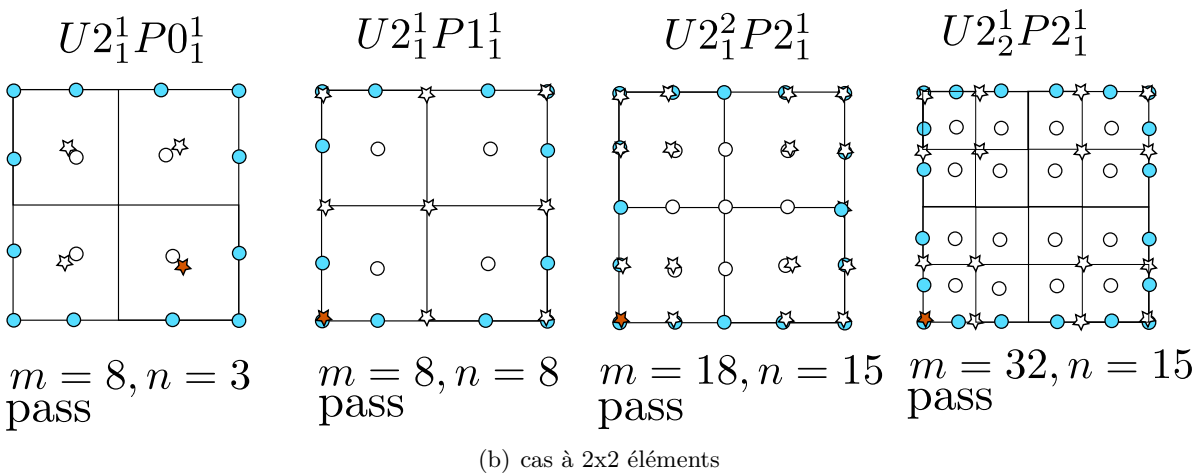
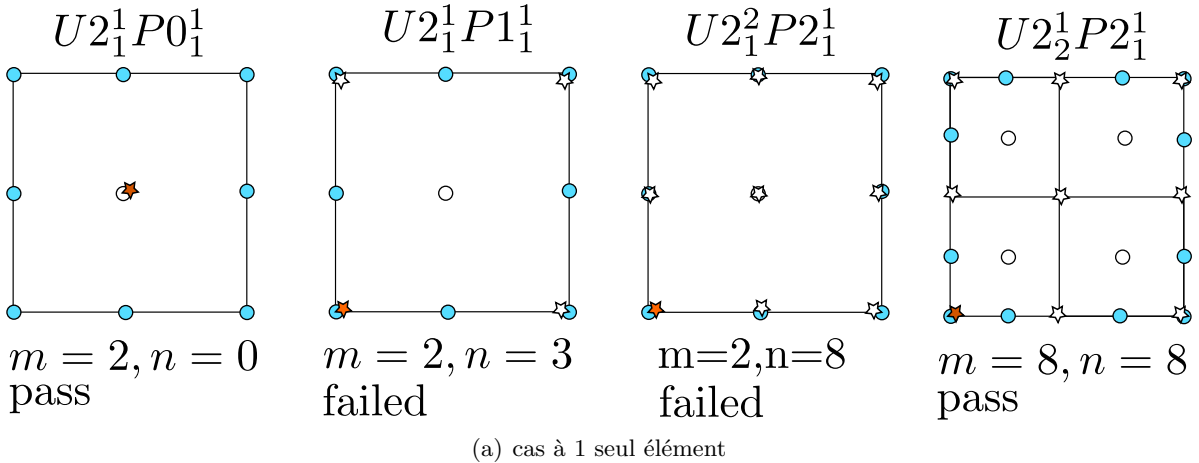


FIGURE 3.10 – Patch test issu de [121], les étoiles symbolisent les DDLs de pression, les cercles ceux de la cinématique.

Si l'on s'intéresse uniquement au champ de pression, la deuxième approximation qui ne passe pas le patch test semble donner un résultat correct (cf. fig. 3.11(d)) même si les valeurs numériques maximum obtenues sont largement plus grandes que pour tous les autres cas.

Si l'on s'intéresse au champ cinématique on observe également des phénomènes locaux d'oscillations qui ont une origine moins claire, voir fig. 3.12(d). On peut tout de même constater que ce sont les approximations de même ordre entre la cinématique et la pression qui semblent générer ces oscillations (et qui ne semblent pas poser de problèmes lorsque la déformation est petite, c.f. [56] pour le cas de la subdivision). Il nous reste donc le cas où l'ordre d'approximation de la pression est de deux ordres inférieurs à celui de la cinématique et pour lequel on obtient des résultats encourageant de convergence, voir notamment fig. 3.13.

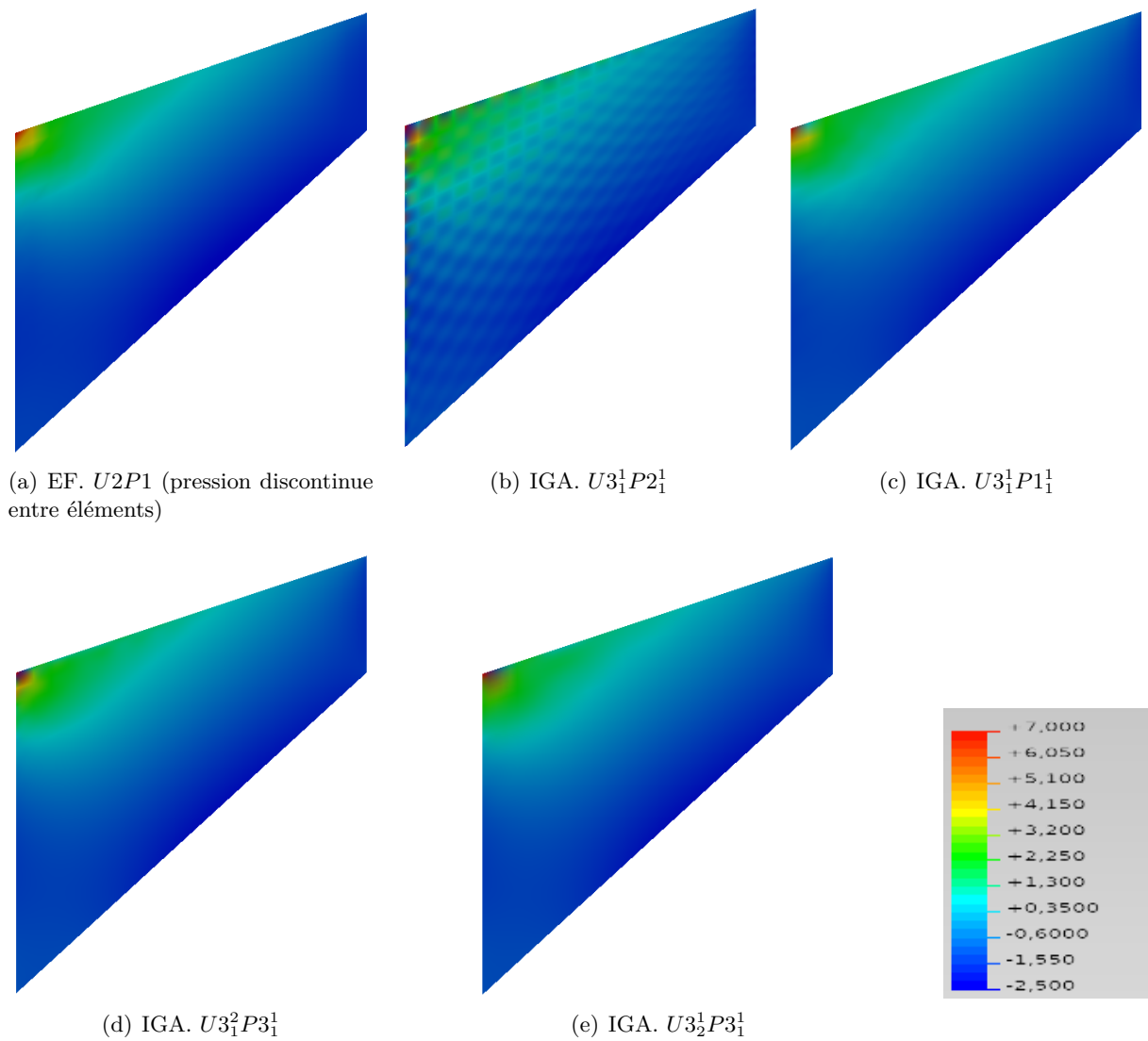


FIGURE 3.11 – Champ de pression, en  $MPa$ , pour le test de la membrane de Cook avec une formulation mixte déplacement/pression, même échelle d'isocouleurs, représentation en non-déformé ( $\mu = 4.62MPa$ ,  $k_v = 1500MPa$ ,  $f = 1N/mm$ ).

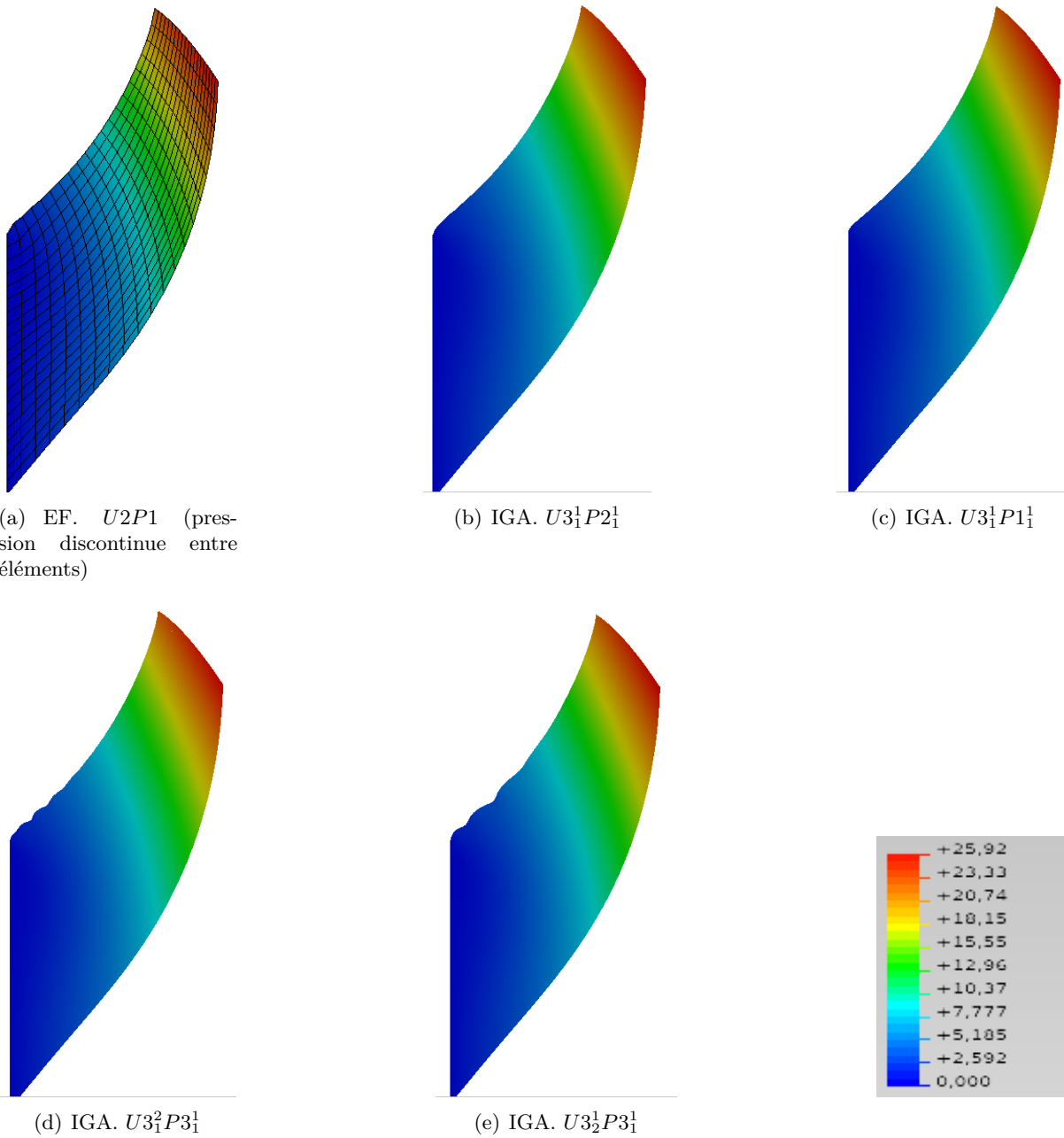


FIGURE 3.12 – Composante verticale du champ de déplacement, en  $mm$ , pour le test de la membrane de Cook avec une formulation mixte déplacement/pression ( $\mu = 4.62MPa$ ,  $k_v = 1500MPa$ ,  $f = 1N/mm$ ).

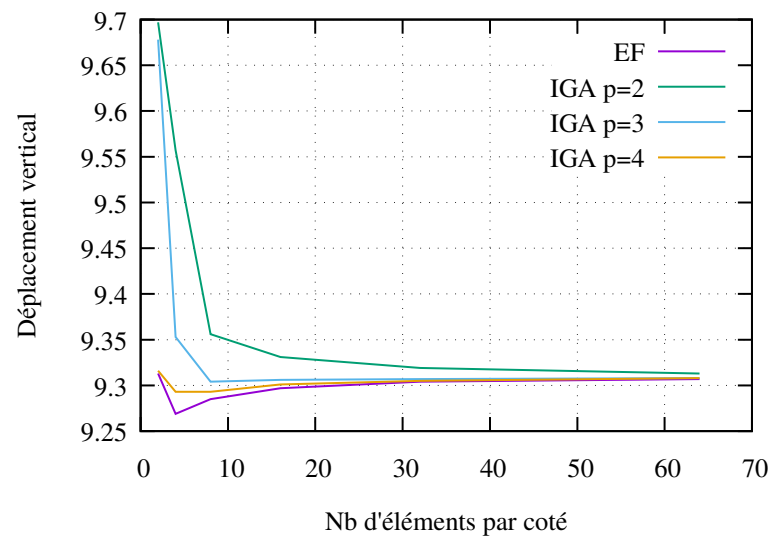


FIGURE 3.13 – Déplacement maxi vertical pour le test de la membrane de Cook, approximation IGA de type  $Up_1^1Pp - 2_1^1$  ( $\mu = 4.62MPa$ ,  $k_v = 1500MPa$ ,  $f = 0.25N/mm$ )



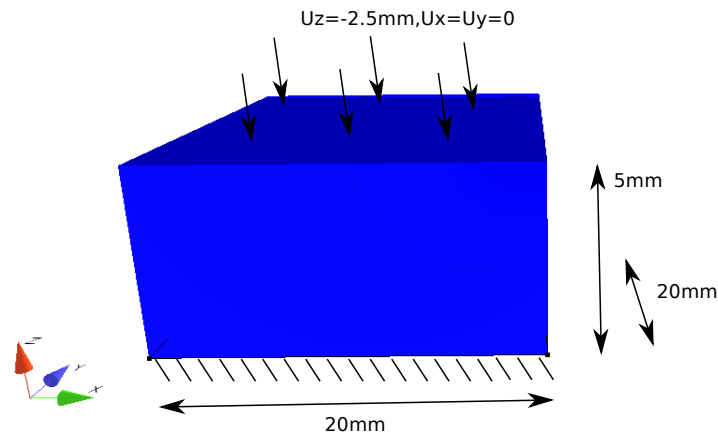


FIGURE 3.14 – Géométrie et conditions aux limites d'un bloc en compression

Un autre cas test que l'on peut considérer correspond au cas d'un bloc d'élastomère hyperélastique mis en compression. La géométrie et les conditions aux limites sont définies à la figure 3.14. Pour des raisons de symétrie, nous ne modélisons qu'un quart de la structure (un huitième pourrait suffire). Le comportement est identique à l'exemple précédent (défini à l'équation (3.19)) et le chargement s'effectue en déplacement à un niveau très important (50% de l'épaisseur). Ce niveau de chargement conduit en général à des difficultés de convergence : le pourcentage de chargement diminue avec le raffinement du maillage. Ceci est dû à la localisation des déformations et du champ de pression dans les éléments extrêmes des bords libres. On peut donc se poser la question de la pertinence de la méthode IGA qui permet d'introduire un support élémentaire potentiellement plus grand que les éléments-finis, à pression discontinue, que nous utilisons.

La figure 3.15 montre les résultats obtenus en terme de champ cinématique et de maximum de chargement atteint pour des maillages grossiers avec des approximations IGA basées sur des approximations quadratique, cubique et quartique pour la cinématique et à deux ordres d'écarts pour la pression. On constate tout d'abord que l'analyse isogéométrique permet d'atteindre des plus grands niveaux de chargement qu'en éléments-finis pour des ordres quadratiques et cubiques. Cependant pour ces ordres, la discrétisation IGA est trop grossière et nous obtenons des solutions peu physiques au maximum du chargement comme on peut le voir sur les figures 3.15(b) et 3.15(c). Lorsque l'on raffine le maillage on obtient une réponse cohérente quel que soit l'ordre d'approximation IGA. On peut constater également que l'analyse isogéométrique nous permet d'atteindre des niveaux de chargement plus importants que les éléments-finis (voir figures 3.16).

Si l'on s'intéresse à la réponse globale de ce test (effort vertical résultant du déplacement appliqué), on peut constater un très bon accord des solutions E.F. et IGA au début de la courbe (jusqu'à 1mm) de chargement et un comportement plus non-linéaire et plus raide de l'IGA.

L'analyse isogéométrique avec une formulation mixte déplacement/pression se positionne donc en alternative tout à fait crédible aux éléments-finis dans un cadre fortement non-linéaire. L'approximation à deux ordres d'écarts permet d'éviter des phénomènes d'oscillations et respecte les patch tests standards. Ce point n'a à ma connaissance pas été discuté dans la littérature. Par ailleurs, en situation non-linéaire le nombre de point de Gauss du schéma d'intégration a

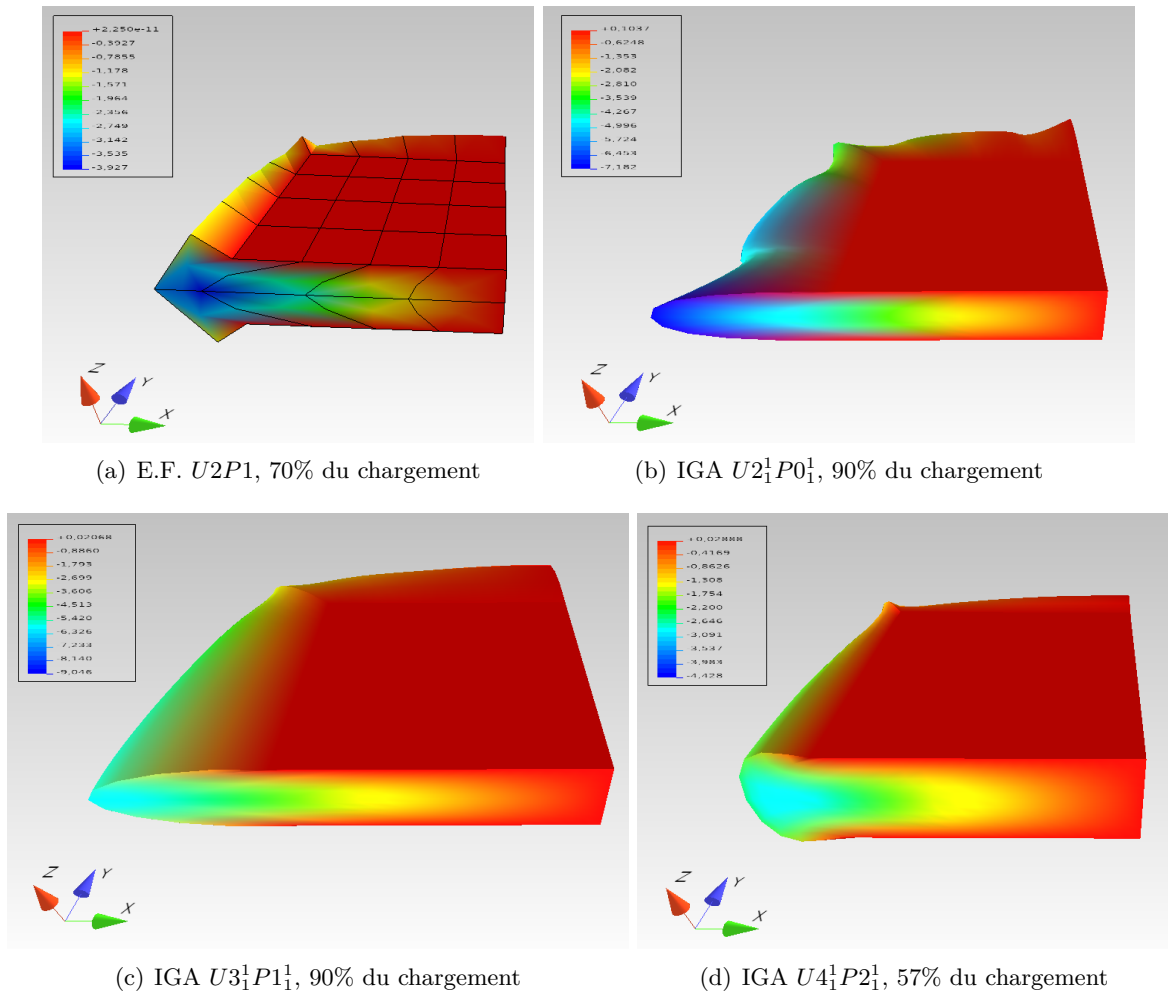


FIGURE 3.15 – Composante  $u_x$  du champ cinématique pour des maillages grossiers : 2 éléments dans l'épaisseur ( $h = 2.5mm$ ).

un impact très important sur la réponse numérique et doit donc être étudié avec soin (comme mentionné précédemment l'intégration numérique ne peut être exact comme avec des polynômes de Lagrange). La figure 3.18 présente une illustration qualitative de l'influence du nombre de point de Gauss sur la réponse. On constate qu'un nombre trop faible de point de Gauss conduit à un important bourrelet au niveau des bords libres. Le choix du schéma d'intégration représente donc un enjeu très important pour cette méthode, d'une part pour avoir une réponse d'une bonne qualité (d'autant plus en incompressible avec des grandes déformations) et d'autre part pour optimiser les performances numériques de la méthode.

D'autres résultats, notamment pour des applications thermo-mécaniques sont disponibles dans la thèse de Lei Zhang ([120]).

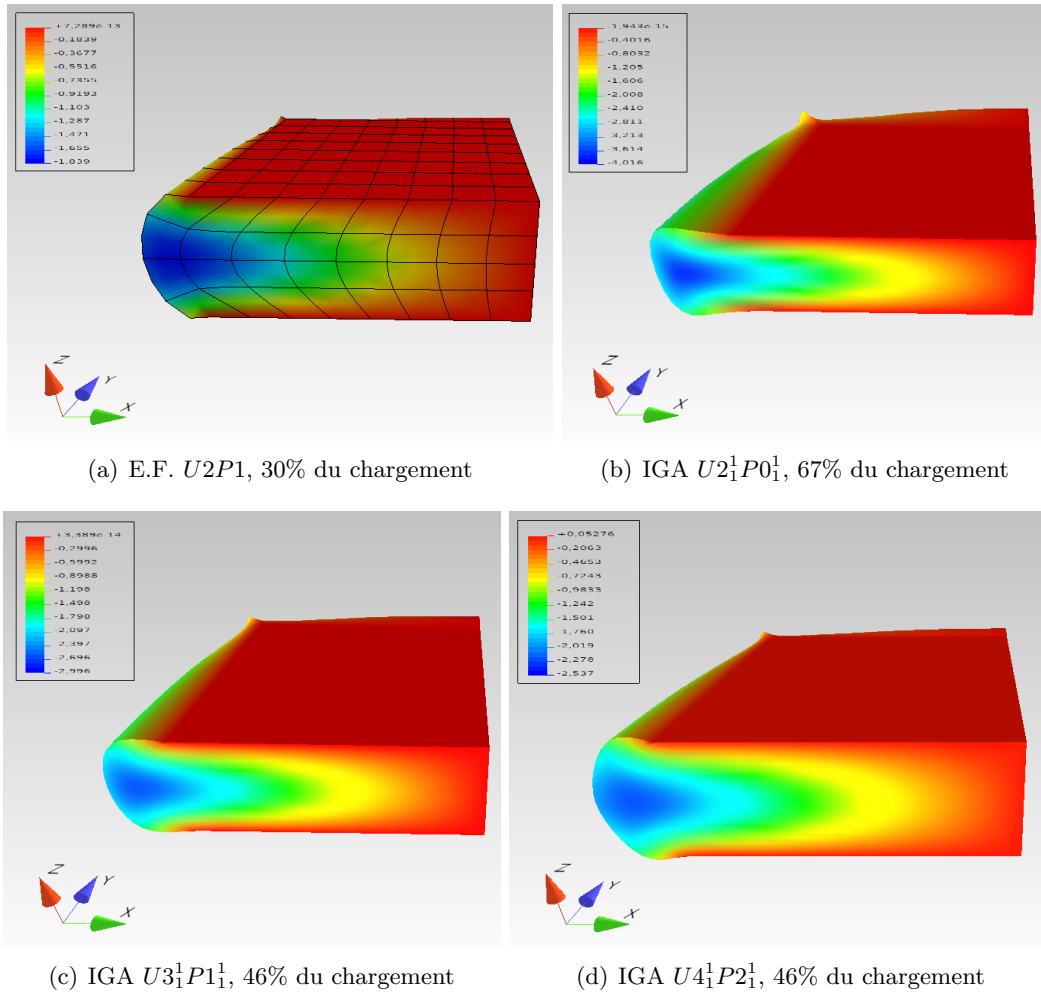


FIGURE 3.16 – Composante  $u_x$  du champ cinématique pour des maillages avec 4 éléments dans l'épaisseur ( $h = 1.25mm$ ).

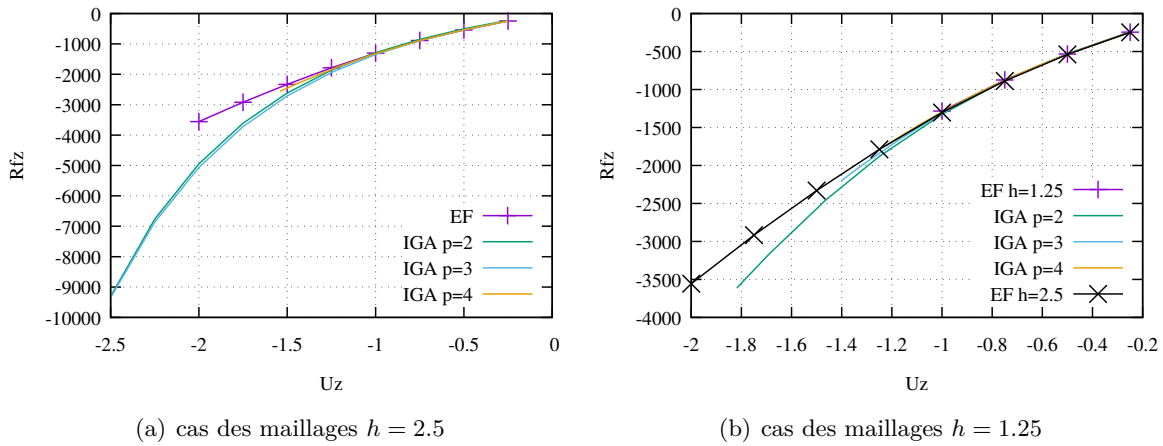


FIGURE 3.17 – Réactions verticales en fonction du déplacement vertical appliqué pour le cas test de compression

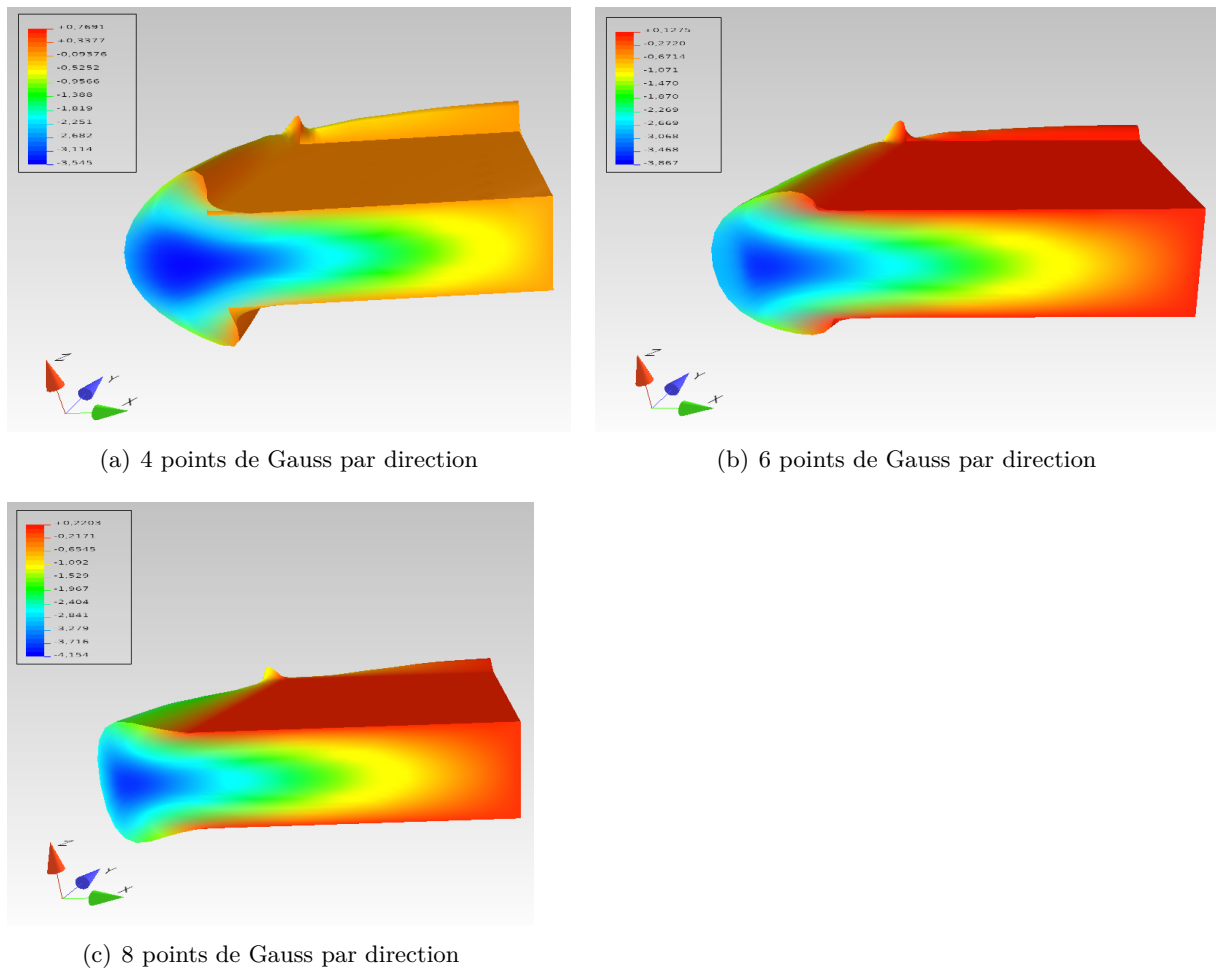


FIGURE 3.18 – Influence du nombre de point d'intégration par direction sur la réponse IGA à 70% du chargement, champ cinématique  $u_x$  (cas  $U2_1^1P0_1^1$  à 4 éléments dans l'épaisseur)

### 3.4 Aspects logiciels

Pour clore ce chapitre, je propose ici des éléments de discussion plus spécifiques sur la question de la structuration logiciel avec comme objectif le traitement de lois de comportements fortement non-linéaires ou l'implémentation de formulations couplées.

J'ai eu l'opportunité de développer des codes de calculs dans différents langages et différentes plateformes commerciales ou libres. L'approche orientée objet (ou POO pour programmation orientée objet) qui est utilisée de manière relativement marginale dans le calcul scientifique offre à mon sens de multiples avantages qui compensent en partie (voir entièrement suivant les objectifs que l'on se fixe) le principal reproche que l'on peut lui faire : être moins performante que des approches basées sur des langages structurés tel le fortran ou le C. Le premier de ces avantages concerne la souplesse de gestion des données indispensables aux calculs. Terminé les tableaux ou sous-tableaux d'index pour accéder à telle ou telle partie des données, il suffit de concevoir à l'origine la structuration des données pour avoir de multiples accès qui vont au final offrir plus de souplesse. Par exemple la description d'un champ inconnu peut se faire au niveau global, sur un domaine donné (donc lié à la géométrie) ou à un niveau plus local, sur un élément-fini par exemple (donc lié au maillage). Avec cette vision on sépare clairement différents aspects fondamentaux : géométrie, champs inconnus, entités de maillage, ... ce qui permet de ne pas réécrire un élément fini (une entité de maillage) à chaque fois qu'on change de formulation variationnelle et que l'on ajoute des champs inconnus par exemple (cinématique, thermique, chimie, etc). Ce type de structuration constitue la base de FemJAVA <sup>(1)</sup>. Le deuxième avantage c'est la lisibilité : manipuler des objets mathématiques (tel que des tenseurs par exemple) presque comme on le ferait sur une feuille de papier permet de gagner en lisibilité notamment lorsque le code est partagé entre différentes personnes. Cela constitue un gain de temps pour celui qui découvre le code (stagiaire, doctorant, etc) et un gain de temps pour celui qui le relit souvent avec un temps de décalage (le directeur de thèse par exemple). Bien sûr, le choix de la POO à elle seule ne garanti en rien que les choix architecturaux que l'on fait à un instant donné ne conduiront pas à une impasse quelques années plus tard. Il faut donc ne pas négliger ces aspects (architecture, structuration des données, etc) pour garantir la pérennité d'un code.

Afin d'illustrer ce travail de conception, on peut tout d'abord s'intéresser à l'aspect intégration/implémentation de lois de comportements. Si l'on prend en exemple le modèle de Delattre et al. présenté au premier chapitre de ce manuscrit, le diagramme de la figure 3.19 permet synthétiser les grandes lignes d'architecture de l'implémentation de ce type de modèle. La classe `Delattre` implémente la classe virtuelle `Material`. Cette dernière possède deux propriétés fondamentales : une liste de comportements élémentaires (classe virtuelle `Behavior`) et une liste de propriétés matérielles, classe `MaterialProperty` qui peuvent dépendre d'un certain nombre de variables (internes ou d'état). Un matériau est donc vu comme un assemblage de comportements élémentaires. Le matériau doit définir comment sont assemblés ces comportements (par défaut le gradient de déformation est commun à chaque comportement et la contrainte est la somme des contraintes élémentaires). Chaque comportement doit intégrer des éventuelles lois d'évolutions (à travers la classe virtuelle `Integrator`) et calculer une contrainte et un comportement tangent. Dans des formulations couplées (TM ou TCM), l'objet qui implémente `Material` doit également calculer un certain nombre de termes : dissipation intrinsèque, variation de la contrainte par rap-

(1). FemJAVA est un projet initialement développé par Dominique Eyheramendy durant son HDR. L'architecture du code n'a pas changé de manière fondamentale depuis et nous avons surtout travaillé les aspects formulations grandes déformations, matériaux, visualisation pré et post et l'IGA.

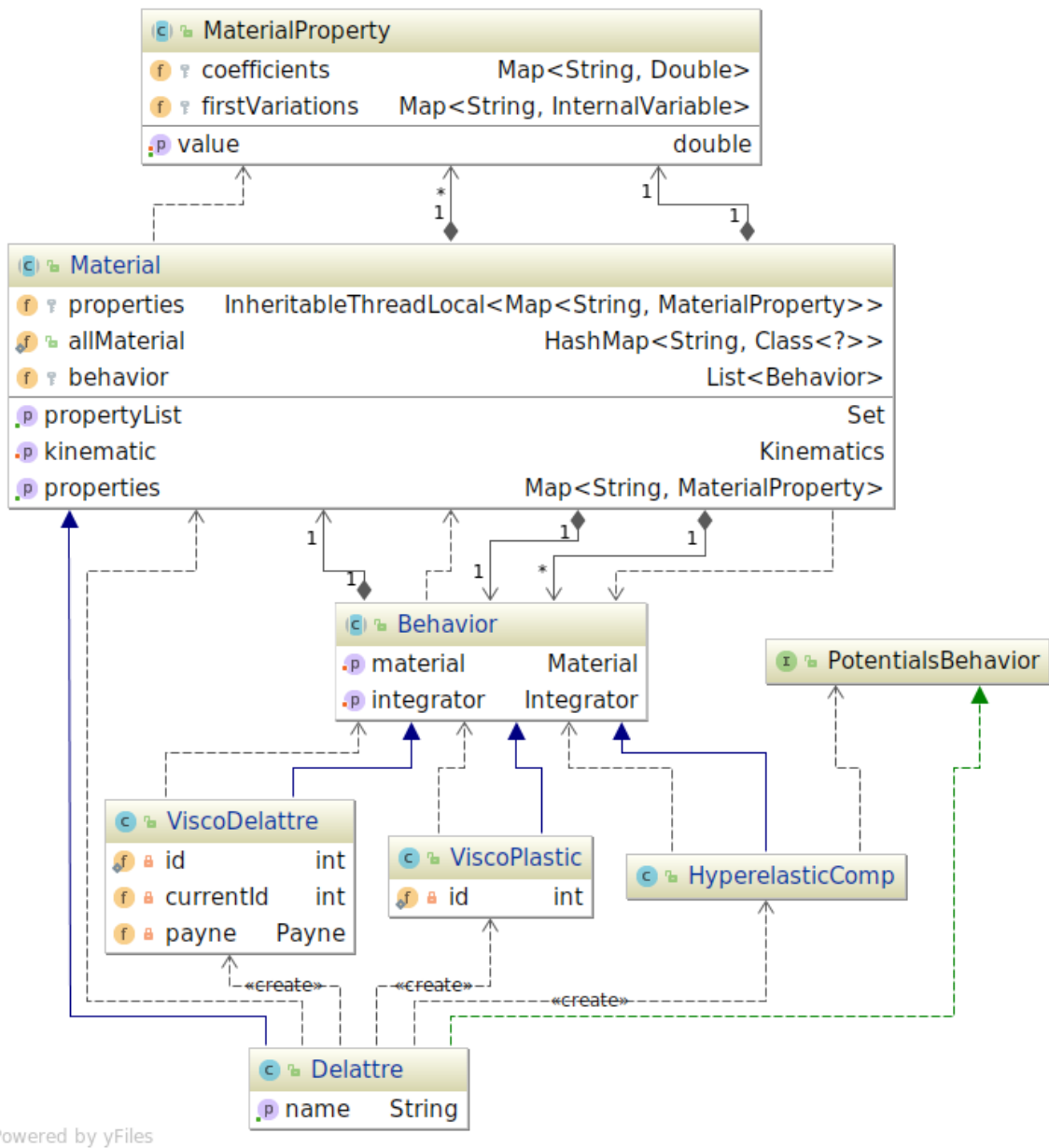


FIGURE 3.19 – Structuration des classes pour la gestion des lois de comportements dans Fem-JAVA

port à la température (d'où l'intérêt d'avoir des objets qui implémentent `MaterialProperty`). On peut ainsi très facilement combiner des éléments standard comme : de l'hyperélasticité (classe `HyperelasticComp`) de la viscoplasticité (classe `ViscoPlastic`), etc. Une fois implémentés les comportements élémentaires, la classe `Delattre` est donc très simple à écrire, elle va prendre la forme suivante :

```

public class Delattre extends Material implements PotentialsBehavior {
    public Delattre(HashMap<String, Double> param) {
        super(new HyperelasticComp());
        this.addBehavior(new ViscoPlastic());
    }
}
  
```

```

    for(int i=0;i<6;i++)
        this.addBehavior(new ViscoDelattre());

    for (Iterator<String> i = param.keySet().iterator(); i.hasNext(); ) {
        String key = i.next();
        this.addProperty(key, param.get(key));
    }
}

public double elasticEnergy(double I1, double I2, double J, GaussPoint gp) {
    ....
}
public void computeIsochoricTerms(double I1, double I2, GaussPoint gp) {
    ....
}
public void computeVolumetricTerms(double J, double p, GaussPoint gp) {
    ....
}
public double intrinsicDissipation(GaussPoint gp) {
    ....
}
public void computeFiniteStrainState(FiniteStrainKinematic finiteStrain,
                                    TimeStep ts) {
    ....
}
}

```

Les fonctions `elasticEnergy()`, `computeIsochoricTerms()`, `computeVolumetricTerms()`, `intrinsicDissipation()` implémentent l'interface `PotentialsBehavior` et permettent de personnaliser les potentiels d'énergies utilisés dans `HyperelasticComp`. On peut donc très facilement réutiliser les objets élémentaires pour implémenter de nouveaux modèles sans se soucier du stockage des données en minimisant l'effort de développement.

La figure 3.20 présente la structure élémentaire des intégrateurs locaux (en un point de Gauss) de lois d'évolutions. Pour un type d'intégrateur, ici par exemple la classe `BDF2`, on implémente la classe virtuelle `Integrator` en utilisant l'interface `DifferentialSystem` qui permet de manipuler différent type de donnés (tenseurs, scalaires). On a ainsi des intégrateurs génériques qui peuvent être utilisés pour différentes lois d'évolution.

A titre d'exemple voici comment implémenter une loi d'écoulement de type Maxwell :

```

public class Maxwell extends Behavior implements DifferentialSystem<Tensor2, Tensor4> {
    public Maxwell() {
        id++;
        currentId=id;
        integrator = new BDF2.BDF2Tensor2(this);
    }
    public FullMatrix computeConstitutiveMatrix(Tensor2 Fo, Tensor2 F, Element element,
        GaussPoint gp, TimeStep ts) {
        ....
    }
    public Tensor2 f(Tensor2 y, double t, double t0, double tfin) {
        FiniteStrainKinematic fsk = Formulation.getFiniteStrain();
        double Jt=fsk.getDouble("Jt");
        Tensor2 Lbt=fsk.getTensor("Lbt");
        double tautinv = 4. * material.getProperty("G"+currentId) / (Jt *

```

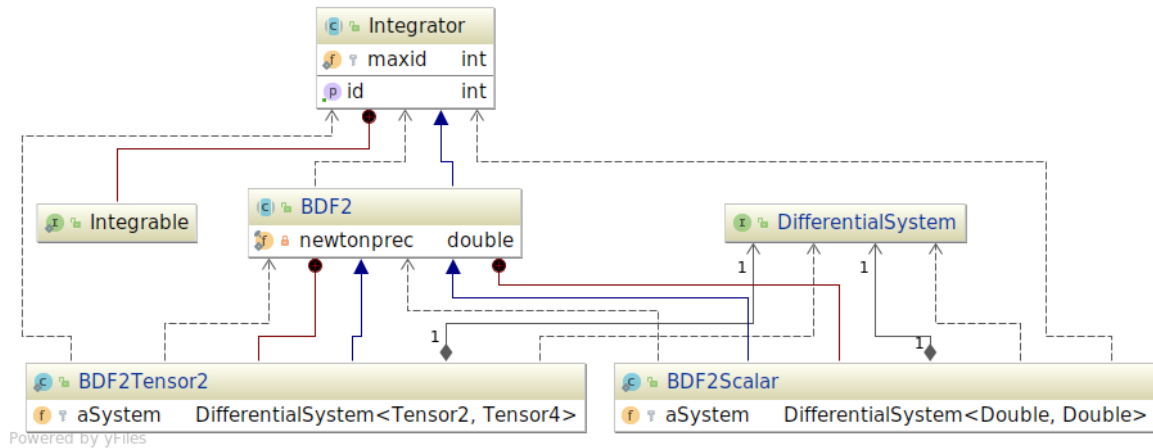


FIGURE 3.20 – Exemple d’implémentation d’intégrateurs de lois d’évolutions formulées sous forme de systèmes différentiels dans FemJAVA

```

        material.getProperty("eta"+currentId));

    Tensor2 answer = (Lbt.times(y)).Plus(y.times(Lbt.transpose()));
    answer.minus((y.times(y.deviator())).times( tautinv));
    return answer;
}
...
public Tensor4 df(Tensor2 y, double t,double t0,double tfin) {
    ...
}
}

```

La fonction  $f()$  implémente l’interface `DifferentialSystem` et permet de définir un système à intégrer du type  $\dot{y} = f(y, t, \dots)$  sur l’intervalle de temps  $[t_0, t_{fin}]$  qui correspond à l’incrémenta-tion courante du schéma de Newton-Raphson global. Le schéma d’intégration local (BDF2 dans ce cas) utilise une sous-discrétisation, qui est gérée dans l’intégrateur et qui nécessite d’évaluer plusieurs fois la fonction  $f$  à des temps  $t \in [t_0, t_{fin}]$ . Si le système est non-linéaire il faut également calculer les dérivées de  $f$  par rapport à  $y$  (ceci est fait dans la fonction `df()`). On peut donc très facilement changer d’intégrateur sans réécrire l’implémentation des équations de base décrivant la loi d’évolution.

Le passage à des cas couplés nécessite assez peu de modifications comparativement à une formulation purement mécanique. La figure 3.21 présente le cas d’une loi thermo-viscohyperélastique de type Zener. La différence principale avec le cas précédent (voir figure 3.19) est que la classe `ThermoZener` dérive de la classe abstraite `ThermoMecanique` et qu’elle implémente deux interfaces supplémentaires `LatentHeatTerms` et `DissipationTerms`. Le reste est inchangé : le comportement mécanique est décrit à partir d’un assemblage de comportements élémentaires qu’on peut réutiliser dans d’autres situations.

Concernant l’aspect formulation, je prend ici à titre d’exemple le cas de la formulation variationnelle thermo-mécanique qui est décrite par le jeu d’équations (3.11). Cette formulation est implémente dans la classe `NonLinearThermoHyperFormulation`. Sur la figure 3.22, on peut voir que cette classe dérive de la classe abstraite `Formulation` qui stocke les information concernant



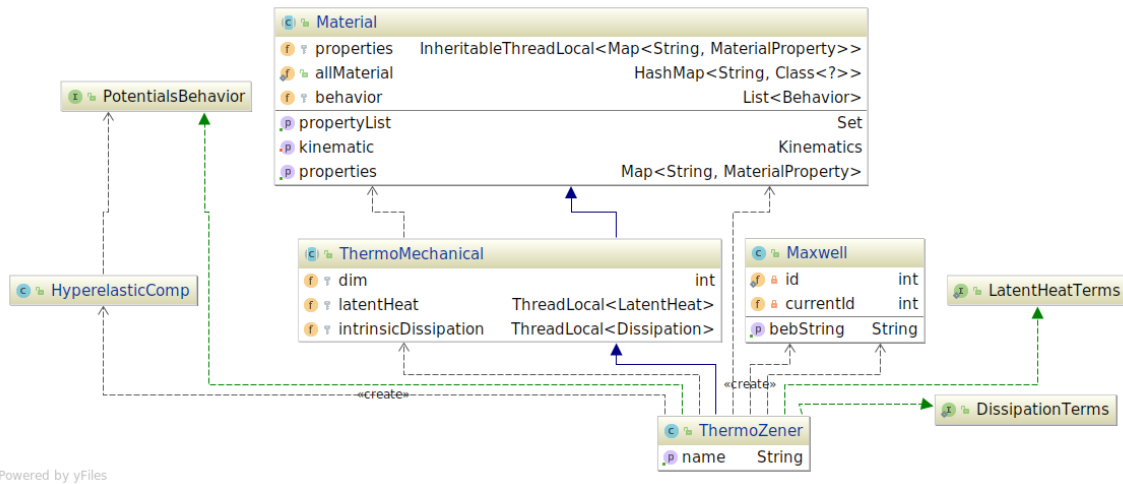


FIGURE 3.21 – Exemple de loi de comportement thermo-mécanique visco-élastique dans Fem-JAVA

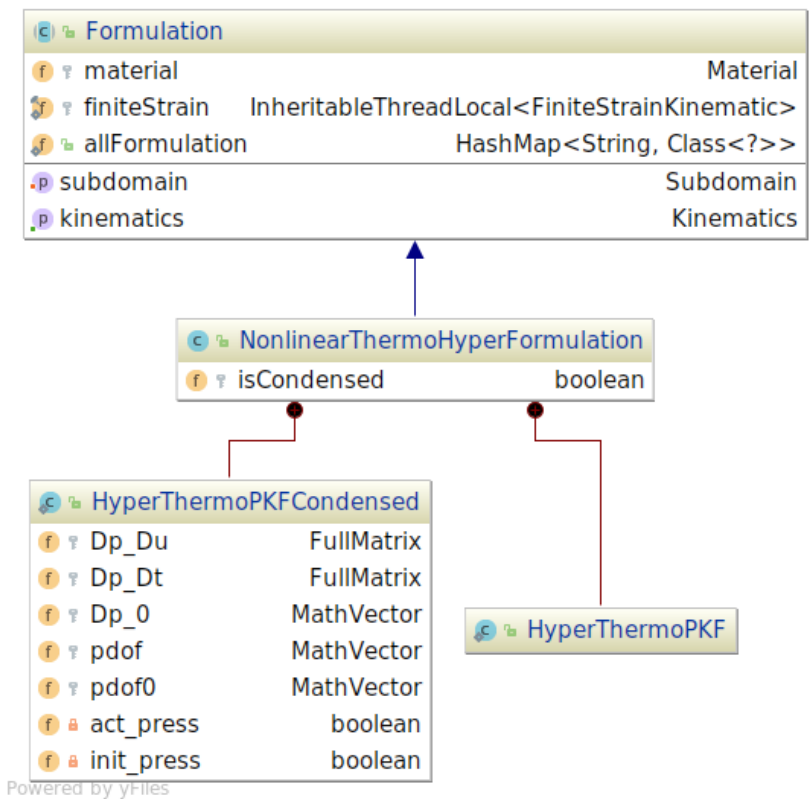


FIGURE 3.22 – Structure d’une formulation thermo-mécanique quasi-incompressible

le matériau, variable `material`, et les grandeurs cinématiques locales, variable `finiteStrain`, (qui sont partagée par les comportements élémentaires). Elle implémente deux classes internes : `HyperThermoPKFCondensed` et `HyperThermoPKF` qui correspondent à une version ou les degrés

de libertés associés à la pression sont condensés dans l'élément (cas à approximation discontinue entre éléments) ou non. L'implémentation de la classe `NonLinearThermoHyperFormulation` est très réduite elle se résume aux lignes suivantes (si l'on extrait les deux classes internes mentionnés précédemment) :

```
public class NonlinearThermoHyperFormulation extends Formulation {
    protected boolean isCondensed;

    public NonlinearThermoHyperFormulation() {
        isCondensed = true;
    }

    public NonlinearThermoHyperFormulation(boolean isCondensed) {
        this.isCondensed = isCondensed;
    }

    public Material defaultMaterial() {
        return new ThermoKelvinvoigt();
    }

    protected Kinematics defaultKinematics() {
        return new Kinematics.PlaneStrain();
    }

    public void initialize(Domain domain) {
        if (isCondensed) {
            Field[] fields = new Field[3];
            fields[0] = domain.createAVectorField(0, "Kinematic");
            fields[1] = domain.createAScalarField(1, "Temperature");
            fields[2] = domain.createATensorFieldAtGaussPoints(2, "Stress");
            domain.setFields(fields);
            domain.setNumberOfUnknownFields(2);
        }else{
            Field[] fields = new Field[4];
            fields[0] = domain.createAVectorField(0, "Kinematic");
            fields[1] = domain.createAScalarField(1, "Temperature");
            fields[2] = domain.createAScalarField(2, "Hydrostatic Pressure");
            fields[3] = domain.createATensorFieldAtGaussPoints(3, "Stress");
            domain.setFields(fields);
            domain.setNumberOfUnknownFields(3);
        }

        super.finalizeDomain(domain);
        initializeFiniteStrain();
    }

    public Element getElement(ElementalGeometry aGeom, Quadrature aQuadrature,
        ElementalField[] flds, int nb, Material m, Kinematics k) {
        if (isCondensed)
            return new HyperThermoPKFCondensed(aGeom, aQuadrature, flds, nb, m, k);
        return new HyperThermoPKF(aGeom, aQuadrature, flds, nb, m, k);
    }
}
```

On peut constater que la manipulation des champs est très simple puisque l'on manipule de la même manière des champs scalaires et vectoriels définis aux nœuds dans un cadre éléments-finis, ou sur le patch dans un cadre isogéométrique, et des champs tensoriels définis aux points de Gauss. La formulation est ainsi complètement indépendante de la méthode de discrétisation choisie E.F. ou IGA.

Les classes internes implémentent la classe virtuelle `Element` qui permet d'avoir accès à l'élément d'intégration et aux fonctions d'interpolation/approximation. Si l'on prend l'exemple de la classe `HyperThermoPKF`, on va avoir l'implémentation suivante :

```
public static class HyperThermoPKF extends Element {

    public HyperThermoPKF(ElementalGeometry aGeom,
                          Quadrature aQuadrature, ElementalField[] flds, int nb,
                          Material m, Kinematics k) {
        super(aGeom, aQuadrature, flds, nb, m, k);
        m.addInternalVariableAtGP(flds[3].getGaussPoints(),"T",Double.class,true);
        for(GaussPoint gp: flds[3].getGaussPoints()){
            gp.getInternalVariable("T").setSaved(true);
        }
        m.addInternalVariableAtGP(flds[3].getGaussPoints(),"dpress",Double.class,false);
        m.initialize(flds[3].getGaussPoints());
    }

    public Hashtable computeElementalMatrices(TimeStep ts) {
        Hashtable elementalMatrices = new Hashtable(4);
        ElementalBlockMatrix stiffness = new ElementalBlockMatrix(3,3,
            this);
        ElementalBlockMatrix mass = new ElementalBlockMatrix(3, 3, this);

        int nudof = elementalField[0].computeNumberOfDofs();
        int ntdof = elementalField[1].computeNumberOfDofs();
        int npdof = elementalField[2].computeNumberOfDofs();
        ElementalFullMatrix Kuu = new ElementalFullMatrix(nudof, nudof,
            elementalField[0].equationNumbers(),
            elementalField[0].equationNumbers());
        ....
        MathVector udof, tdof, pdof;
        udof = elementalField[0].computeVectorOfDofsValues();
        tdof = elementalField[1].computeVectorOfDofsValues();
        pdof = elementalField[2].computeVectorOfDofsValues();
        ElementalGeometry dispElmGeo = elementalField[0].getGeometry();
        ElementalGeometry presElmGeo = elementalField[2].getGeometry();
        ElementalGeometry tempElmGeo = elementalField[1].getGeometry();

        for (int i = 0; i < quadrature.numberofGaussPoints(); i++) {
            double[] gp = quadrature.point(i);
            double w = quadrature.weight(i);

            double[] shapeU = dispElmGeo.computeShapeFunctionsAt(gp);
            MathVector shapeP = new MathVector(presElmGeo.computeShapeFunctionsAt(gp));
            double[][] shapeDerUDetJ = dispElmGeo
                .computeShapeFunctionsFirstOrderDerivatives(gp);
            double[] shapeT = tempElmGeo.computeShapeFunctionsAt(gp);

            ...
            Map<String,FullMatrix> D=material.computeConstitutivesMatrix(Fo,F,this,
                gaussPoints[i], ts);
            ...
        }
        ...
    }
}
```

On peut constater que l'on a pas à se préoccuper de la gestion des champs qui est déléguée

à d'autres objets. On a par contre très facilement accès au degrés de libertés élémentaires et aux fonctions d'interpolations et leurs dérivées indépendamment du support géométrique que l'on considère. Ceci permet d'utiliser strictement la même formulation quelque soit l'élément géométrique et la méthode de discrétisation (IGA ou E.F.). Cette vision permet également d'être complètement générique en terme de nombre de champ que l'on considère et de pouvoir très rapidement manipuler des formulations multi-champs et mutli-physiques (pour ceux qui sont familiers avec des codes comme Abaqus, l'écriture d'un élément mélangeant plusieurs champs présente une tout autre complexité et une ré-utilisabilité quasi nulle sans parler de la limitation en terme de degrés de libertés).

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai présenté différents aspects qui concernent la mise en œuvre numérique de problèmes associés au comportement des élastomères (y compris en terme d'architecture logiciel). Les différentes non-linéarités, le caractère faiblement compressible et la complexité des lois d'évolutions nécessite encore aujourd'hui des développements spécifiques pour améliorer la performance et pour pouvoir être en capacité de proposer des outils numériques robustes. Derrière ces aspects se cachent des problèmes très calculatoires, opérateurs tangents consistants notamment, que j'ai occulté dans cette présentation. Il y a également des questions mathématiques et numériques qui se posent, phénomènes d'oscillations par exemple. De mon opinion, l'approche IGA qui a jusque ici été assez peu utilisée dans le cadre de problématiques liées aux élastomères représente une alternative tout à fait intéressante aux éléments-finis et mérite certainement des développements futurs.





---

# Synthèse et perspectives des travaux

## 1 Synthèse

Comme annoncé dans la partie introductive, j'ai rédigé ce manuscrit avec pour objectif de couvrir, de manière concise, les différents axes de recherches que j'ai pu développer. Certains points sont exposés plus en détails dans les différentes publications que nous avons pu faire, d'autres plus récents ou qui n'ont pas fait l'objet de publication mériteraient peut-être d'être étendus et publiés. Avant d'en effectuer la synthèse, je souhaiterais mentionner que j'ai eu la chance de pouvoir porter et développer très librement ces axes de recherches au laboratoire ce qui n'était pas une évidence au vu du contexte. Ils s'inscrivent dans les thématiques "Structures" et "Couplages Multiphysiques" de l'équipe Matériaux et Structures et sont le fruits de collaborations avec des membres de l'équipe ou d'autres laboratoires.

Concernant l'aspect **comportement dynamique des élastomères chargés**, nous avons pu développer les points suivants :

- Proposition d'un modèle phénoménologique basé sur une description discrète de la viscosité (multi-branches de type Maxwell généralisé) avec une loi tensorielle et directionnelle d'écoulement visqueux ainsi que la prise en compte de l'effet Payne inspiré de modèles d'endommagement continu (cf. [26, 27, 28]) ;
- Proposition d'une méthode d'identification des paramètres matériaux du modèle précédent ou d'un modèle multi-branches de type Maxwell généralisé à partir de quantités phénoménologiques : modules sécants et aires des hystérésis et avec une pré-intégration des lois d'évolutions (cf. [26, 27]).
- Implémentation éléments-finis des différents modèles et validation à partir d'essais multi-axiaux sur "structures" (cf [26]).
- Tentative d'homogénéisation en champs complets d'élastomères chargés idéalisés et étude de l'influence de certains paramètres micro-structuraux sur la réponse mécanique (cf. [60]). Ce travail a conduit au développement de l'outil Homtools qui est plus général et

disponible en licence libre (voir [68]).

- Linéarisation des modèles viscoélastiques autour d'un état pré-chargé avec prise en compte de grandes rotations (cf. [72]).

Pour l'aspect **endommagement par fatigue**, nous avons étudié :

- Le suivi des propriétés mécaniques isothermes d'une même éprouvette en utilisant une méthode de caractérisation par blocs intégrée au protocole de fatigue. Des essais de caractérisations et des pauses pour atteindre l'état isotherme sont intercalés dans un essai de fatigue (cf. [26]).
- La modélisation avec une approche par cumul d'endommagement cycle par cycle en utilisant deux variables d'endommagement couplées et des lois d'évolutions basées sur des quantités énergétiques (cf. [43, 26]). Cette modélisation est intégrée dans les modèles de comportement dynamique que nous avons développés.
- L'intégration des modèles d'endommagement développés dans des codes éléments-finis (cf. [43, 44]).

Ces différents travaux nous ont ensuite poussé à nous intéresser à la question des **couplages multiphysiques** qui jouent un rôle important pour les élastomères chargés. Comme pour les points précédents nous avons travaillé sur des aspects caractérisations, modélisations et simulations, avec :

- Le développement d'une approche en énergie hybride permettant d'une part de faire le lien avec des formulations variationnelles mixtes adaptées au contexte faiblement compressible et d'autre part d'introduire des potentiels d'énergies volumiques basés sur une formulation en contrainte plutôt qu'en variation de volume (voir par exemple [69]).
- La caractérisation du vieillissement thermique (couplé ou non à une sollicitation mécanique) et de son impact sur l'évolution des propriétés physico-chimiques et mécaniques d'un élastomère chargé (voir [3, 11]).
- La proposition d'un cadre de modélisation rigoureux thermodynamiquement pour prendre en compte des couplages thermo-chimio-mécanique dans le contexte associé aux élastomères : grandes déformations, faible compressibilité, viscoélasticité ou viscoplasticité (voir par exemple [93, 70]).
- Le développement d'éléments finis multi-champs pour résoudre des problèmes thermo-chimio-mécanique de manière monolithique et implicite [92].

Enfin, pour ce qui concerne plus spécifiquement les **aspects numériques et logiciels**, nous avons proposé :

- Des schémas d'intégration, locaux, de lois d'évolution de type viscoélastiques ou viscoplastiques, utilisant une approximation sur l'écoulement visqueux (colinéarité des déformation et des contraintes visqueuses) et s'inscrivant dans un schéma élément-finis standard (voir par exemple [71, 67]).
- Une étude sur l'analyse isogéométrique dans un contexte de faible compressibilité avec des méthodes mixtes, multi-champs (c.f. [120]).
- Une réflexion sur la structuration des données et des schémas numériques en P.O.O. pour applications multi-physiques et multi-champs (c.f. [33]).

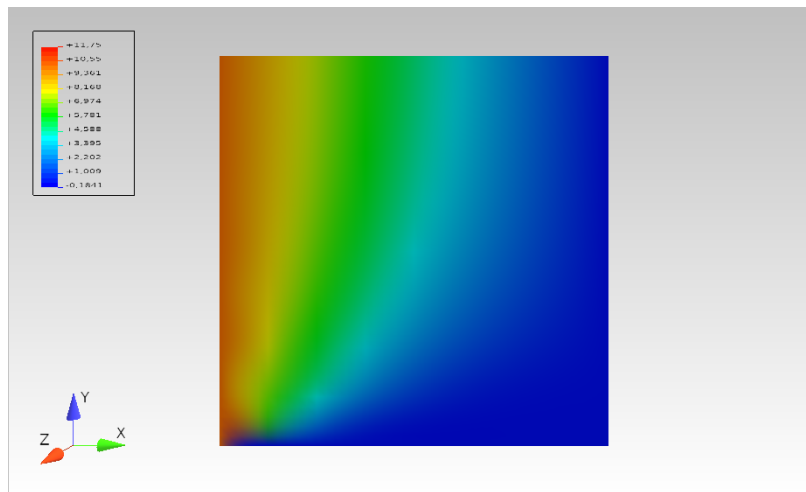


FIGURE 1 – Illustration d’une résolution espace-temps en IGA d’un problème de conduction de la chaleur dans un barreau (1D en espace) : l’axe des  $X$  correspond à l’espace, l’axe des  $Y$  au temps. Les conditions aux limites correspondent à deux conditions de Dirichlet en température à droite et à gauche, la condition initiale correspond à une Dirichlet homogène en  $Y = 0$

## 2 Travaux en cours et perspectives

Les développements que nous avons collectivement réalisés m’ont permis d’acquérir un certain nombre de connaissances et d’explorer un champ assez ouvert de thématiques que ce soit en terme de caractérisation, de modélisation ou de simulations numériques. Pour autant, mon sentiment est que nous sommes encore loin d’avoir fait le tour des questions qui se posent encore sur le comportement des élastomères. Les progrès en termes de moyens expérimentaux (essais in-situ à petites échelles) et le développement de méthodes et d’outils numériques toujours plus performants nous permettent d’adresser des questions nouvelles, par exemple concernant l’exploration in-situ des mécanismes de déformations ou d’endommagement à l’échelle des agglomérats (voir par exemple [51, 81]) et bientôt des charges, ou alors de revisiter des problématiques connues avec de nouveaux outils comme par exemple la simulation de propagation de fissures quasi-statiques dans une matrice élastique avec une méthode en champs diffus ou champs de phase (voir par exemple [89]).

Les travaux que je souhaiterais mener dans les années qui viennent, s’inscrivent dans ce cadre : adresser des questions nouvelles autour de sujets qui me sont familiers et revisiter certaines problématiques sous un nouvel angle.

Je peux ranger dans cette deuxième catégorie les travaux que nous (avec Dominique Eyheramendy) avons initié concernant les **solveurs espace-temps isogéométriques** à travers la thèse de Christelle Saadé démarrée en octobre 2017. Les éléments-finis espace-temps ont émergée à partir des années 1970 (cf. [5, 50]) et se basent sur des méthodes de Galerkin continues puis discontinues. Ces méthodes n’ont pas connu par la suite le même essor que les méthodes basées sur des éléments finis en espace et des différences finis en temps. Le développement des moyens de calculs et les architectures logicielles modernes font que les éléments qui constituaient leur points faibles (taille mémoire et temps de calcul, difficulté d’implémentation) ne sont plus de nos jours des points limitants. D’autre part, la richesse et la souplesse de la méthode isogéométrique



font que nous souhaitons étudier de nouveau ces méthodes pour bâtir des schémas d'intégration en temps nouveaux et performant. L'idée est donc d'associer méthode isogéométrique en temps et en espace et méthode de Galerkin discontinue pour résoudre des problèmes évolutifs tels que rencontrés dans les structures à base d'élastomères : des calculs de viscoélasticité en sollicitations cycliques (quasi-statique ou éventuellement dynamique) ou multiphysiques (couplage thermo-mécanique par exemple). Bien entendu, ces idées de solveurs espace-temps isogéométriques sont dans l'air du temps et nous ne sommes pas la seule équipe à s'y intéresser (voir notamment [47, 90]). Les premiers résultats que nous avons obtenus sur un problème parabolique unidimensionnel en espace (propagation de la chaleur dans un barreau, voir figure 1, propagation d'ondes ou problème de viscoélasticité linéaire) sont encourageants : les propriétés de convergence optimale de la méthode isogéométrique, pour des problèmes simples, semblent être conservées en espace et en temps.

Nous envisageons également de coupler cette étude avec la question de **l'intégration des lois d'évolutions des variables internes** notamment dans le cas de la viscoélasticité. On peut en effet se demander si le traitement local de ces équations ne conduit pas à sur-contraindre l'algorithme global de résolution. Sous l'hypothèse d'une certaine régularité en temps et en espace des solutions on peut donc envisager de traiter ces équations dans un formalisme faible en se basant sur l'approche de Galerkin. On peut ensuite imaginer utiliser soit des solveurs espace-temps globaux pour ces équations soit d'autres méthodes tels que la méthode asymptotique numérique (voir [22]).

La méthode asymptotique numérique a déjà fait l'objet d'applications dans un cadre d'hyperélasticité quasi-incompressible (voir [39]). Cependant, son implémentation nécessitait d'une part l'écriture sous forme quadratique des équations et d'autre part une structuration particulière du code pour intégrer les développements en séries des différentes inconnues. Les développements récents réalisés autour de l'outil manlab (voir <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>) devraient permettre de lever les limitations en terme d'implémentation. Ces développements devraient permettre d'ouvrir un certain nombre de perspectives qui pourrait concerner le traitement plus systématique des **diagrammes de bifurcations en présence d'instabilités** comme on peut en trouver dans les élastomères renforcés soumis à de la compression (voir par exemple [74]) ou en présence de porosités (voir [86]) ou encore dans le cas de structures minces de type membrane (voir [117]). On peut également penser à utiliser cette méthode conjointement au principe de la balance harmonique qui permet de trouver les solutions périodiques de systèmes dynamiques sollicités de manière harmonique.

En parallèle de ces développements plutôt numériques, nous souhaitons poursuivre nos travaux sur **l'évolution des réseaux macromoléculaires** sous sollicitations thermomécaniques ou liées à l'environnement et le **lien avec la composition et la mise en œuvre**. Nous avons initié cette démarche dans la thèse de Komla Dela Ahose (soutenance prévue en 2018) en étudiant à iso-formulation l'impact des conditions de process (température et temps de cuisson) sur le comportement au vieillissement thermique. Sur le plan expérimental, il faudrait étudier plus finement, i.e. quantitativement, l'impact de l'état initial (qui est lié au process) : type de pontage, densité de chaînes élastiquement actives, etc. Ce type de développements sont à l'heure actuelle complexes à réaliser car il n'existe pas de techniques d'observations ou de mesures directes de ces quantités. Il faut donc combiner différentes techniques et analyses et également développer des partenariats avec des physiciens et des chimistes des polymères. On peut également s'interroger sur la nature des évolutions dues au vieillissement thermique dans les agglomérats de charges ou

à l'interface avec la matrice. Une expérimentation in-situ (microtomographie par exemple) sur matériaux vierges et vieillis thermiquement permettrait peut-être de savoir si les phénomènes d'évolutions des densités pontales sont diffus ou localisés à ces échelles. Sur le plan de la modélisation, il serait intéressant de s'appuyer sur la théorie statistique de l'élasticité entropique (c.f. [116]) et sur **les modèles de réseaux** (comme par exemple dans [6, 88]) pour y introduire d'une part la notion de différents types de liaisons et d'autre part de décrire leurs possibles évolutions y compris en y intégrant des mécanismes de dé-enchevêtrement des chaînes. Cette modélisation permettrait peut-être de prendre en compte de manière plus naturelle les effets de couplages chimio-mécanique qui semblent ce manifester lorsque l'on considère du vieillissement thermique couplé à un chargement mécanique.

Un autre axe de développement pourrait concerner le **couplage entre l'évolution des réseaux macromoléculaires par effet thermique et l'endommagement sous chargement de fatigue**. En effet, on peut se poser cette question pour des matériaux fortement dissipatifs car en fonction de la géométrie de la pièce ou de l'éprouvette étudiée, l'auto-échauffement couplé à la faible conductivité thermique du matériau pourrait activer des évolutions des réseaux macromoléculaires du même type que ceux observés pour du vieillissement thermique seul et induire donc des hétérogénéités qui impactent la réponse mécanique et l'endommagement. Ce point nécessite à la fois des études expérimentales plus poussées et des développements en terme de modélisation.

Enfin le lien entre **initiation et croissance d'un endommagement diffus et propagation d'une ou d'un réseau de fissures** à l'échelle macroscopique dans un cadre thermomécanique est à mon sens un challenge futur pour la recherche pour pouvoir être prédictif en terme de fin de vie d'une pièce en élastomère soumise à un chargement de fatigue d'autant que l'aspect propagation dans les matériaux chargés présente à lui seul un verrou certain vu la complexité des mécanismes en jeu (voir par exemple [113, 15] pour des aspects expérimentaux ou [38, 123, 112] pour des aspects numériques). Cette thématique nécessite de développer à la fois des aspects numériques liés à la propagation en utilisant par exemple une approche variationnelle et des méthodes en champs diffus ainsi que des aspects expérimentaux complexes. Il pourrait notamment être intéressant dans ce contexte de tester la méthode isogéométrique dans un cadre thermomécanique (l'analyse isogéométrique ayant par ailleurs déjà été utilisé dans le contexte de la mécanique de la rupture avec des résultats prometteurs). Nous envisageons pour ce point de mettre en place une collaboration avec d'autres équipes de recherches plus spécialistes de ce domaine (propagation de fissures).



---

# Bibliographie

- [1] Jean A., Jeulin D., Forest S., Cantournet S., and N’Guyen F. A multiscale microstructure model of carbon black distribution in rubber. *Journal of Microscopy*, 241(3) :243–260, 2011. (cité en page 45.)
- [2] K.D. Ahose. *Caractérisation et modélisation du vieillissement thermique d’élastomères chargés par une approche multiphysique*. PhD thesis, Aix Marseille Université, 2018. (cité en page 74.)
- [3] Komla Dela Ahose, Stéphane Lejeunes, Dominique Eyheramendy, and Franck Sosson. On the thermal aging of a filled butadiene rubber. In Michael Johlitz Alexander Lion, editor, *10th European Conference on Constitutive Models for Rubber (ECCMR2017)*, Constitutive Models for Rubber X, pages 59–64, Munich, Germany, August 2017. Taylor & Francis. (cité en page 110.)
- [4] M. André and P. Wriggers. Thermo-mechanical behaviour of rubber materials during vulcanization. *International Journal of Solids and Structures*, 42(16–17) :4758 – 4778, 2005. (cité en page 66.)
- [5] J.H. Argyris and D.W. Scharpf. Finite elements in time and space. *Nuclear engineering and design*, 10, 1969. (cité en page 111.)
- [6] Ellen M. Arruda and Mary C. Boyce. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(2) :389 – 412, 1993. (cité en page 113.)
- [7] J. M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 63 :337–403, 1977. (cité en page 37.)
- [8] Ronny Behnke, Hüsnü Dal, and Michael Kaliske. An extended tube model for thermo-viscoelasticity of rubberlike materials : Parameter identification and examples. *PAMM*, 11(1) :353–354, 2011. (cité en page 68.)
- [9] Mouna Ben Hassine. *Modélisation du vieillissement thermique et mécanique d’une protection externe en EPDM de jonctions rétractables à froid*. PhD thesis, Arts et Métier ParisTech, 2013. (cité en page 69.)
- [10] J.S. Bergström and M.C. Boyce. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(5) :931 – 954, 1998. (cité en pages 32 and 41.)
- [11] R. Bouaziz, K.D. Ahose, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, and F. Sosson. Characterization and modeling of filled rubber submitted to thermal aging. *International Journal of Solids and Structures*, submitted(-) :-, 2019. (cité en pages 74 and 110.)

- 
- [12] A. Boukamel. *Modélisations mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères*. Habilitation à diriger des recherches, Université d'Aix Marseille II, 2006. (cité en pages 34 and 38.)
- [13] K.E. Brenan, S.L. Campbell, and L.R. Petzold. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996. (cité en page 81.)
- [14] Lukas Böger, Aref Nateghi, and Christian Miehe. A minimization principle for deformation-diffusion processes in polymeric hydrogels : Constitutive modeling and fe implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 121 :257 – 274, 2017. (cité en page 69.)
- [15] J. B. Le Cam, B. Huneau, E. Verron, and L. Gornet. Mechanism of fatigue crack growth in carbon black filled natural rubber. *Macromolecules*, 37, 2004. (cité en page 113.)
- [16] Jean-Benoît Le Cam, Bertrand Huneau, and Erwan Verron. Fatigue damage in carbon black filled natural rubber under uni- and multiaxial loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 52 :82 – 94, 2013. (cité en page 49.)
- [17] S. Cantournet, K. Layouni, L. Laiarinandrasana, and Ro. Piques. Experimental investigation and modelling of compressibility induced by damage in carbon black-reinforced natural rubber. *Comptes Rendus Mécanique*, 342(5) :299 – 310, 2014. *Frontiers of micro and nanomechanics of materials : Soft or amorphous matter, surface effects*. (cité en page 50.)
- [18] J.L. Chaboche. Continuum damage mechanics : Part i - general concepts. *Journal of Applied Mechanics*, 55 :59–64, 1988. (cité en page 50.)
- [19] P. Chadwick. Thermo-mechanics of rubberlike materials. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 276(1260) :371–403, 1974. (cité en page 63.)
- [20] P. Chadwick and C.F.M. Creasy. Modified entropic elasticity of rubberlike materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 32(5) :337 – 357, 1984. (cité en pages 63, 64, and 65.)
- [21] D. Chapelle and K.J. Bathe. The inf-sup test. *Computers & Structures*, 47(4) :537 – 545, 1993. (cité en page 91.)
- [22] Bruno Cochelin, Nouredine Damil, and Michel Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Methodes numériques. Hermes Lavoissier, 2007. (cité en page 112.)
- [23] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, and Y. Bazilevs. *Isogeometric Analysis : Toward Integration of CAD and FEA*. Wiley, 2009. (cité en pages 89 and 90.)
- [24] Mats Danielsson, David M. Parks, and Mary C. Boyce. Micromechanics, macromechanics and constitutive modeling of the elasto-viscoplastic deformation of rubber-toughened glassy polymers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(3) :533 – 561, 2007. (cité en page 44.)
- [25] Théophile De Donder. *L'affinité*. M. Lamertin, Bruxelles, 1928. (cité en page 66.)
- [26] A. Delattre. *Caractérisation et modélisation du comportement hyper-viscoélastique d'un élastomère chargé pour la simulation de pièces lamifiées élastomère-métal et étude en fatigue*. Thèse de doctorat, Université François Rabelais de Tours, 2014. (cité en pages 34, 38, 49, 57, 109, and 110.)

- 
- [27] A. Delattre, S. Lejeunes, F. Lacroix, and S. Méo. On the dynamical behavior of filled rubbers at different temperatures : Experimental characterization and constitutive modeling. *International Journal of Solids and Structures*, 90 :178 – 193, 2016. (cité en pages 34, 35, 36, 38, 40, 41, and 109.)
- [28] Alexis Delattre, Stéphane Lejeunes, Stéphane Méo, Florian Lacroix, and Caroline Richard. On the multiaxial amplitude and frequency dependent behavior of rubber : experiments and constitutive modeling. *Rubber Chemistry and Technology*, 87(3) :557–578, 2014. (cité en pages 34 and 109.)
- [29] S. Eckert, H. Baaser, D. Gross, and O. Scherf. A bdf2 integration method with step size control for elasto-plasticity. *Computational Mechanics*, 34(5) :377–386, 2004. (cité en page 81.)
- [30] W. Ehlers and G. Eipper. The simple tension problem at large volumetric strains computed from finite hyperelastic material laws. *Acta Mechanica*, 130 :17 – 27, 1998. (cité en page 54.)
- [31] T. Elguedj, Y. Bazilevs, V.M. Calo, and T.J.R. Hughes. B and f projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order nurbs elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(33) :2732 – 2762, 2008. (cité en page 89.)
- [32] T. Elguedj and T.J.R. Hughes. Isogeometric analysis of nearly incompressible large strain plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 268 :388 – 416, 2014. (cité en page 89.)
- [33] Dominique Eyheramendy, Stéphane Lejeunes, Roy Saad, and Lei Zhang. Advances in Symbolic and Numerical Approaches in Computational Mechanics. In B.H.V. Topping and P. Iványi, editors, *Computational Methods for Engineering Technology*, pages 61–88. Saxe-Coburg Publications, 2014. (cité en page 110.)
- [34] Carlos A. Felippa, K.-C. Park, and Charbel Farhat. Partitioned analysis of coupled systems. In E. Onate, S.R. Idelsohn, and E. Dvorkin, editors, *Computational Mechanics, New Trends and Applications*, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998. (cité en page 83.)
- [35] W.P. Fletcher and A.N. Gent. Nonlinearity in the dynamic properties of vulcanized rubber compounds. *Rubber Chemistry and Technology*, 27(1) :209–222, 1954. (cité en page 30.)
- [36] P. J. Flory. *Principles of polymer chemistry*. Cornell University Press, 1953. (cité en page 32.)
- [37] P. J. Flory. Thermodynamic relations for highly elastic materials. *Transactions of the Faraday Society*, 57 :829–838, 1961. (cité en page 32.)
- [38] Legrain G., Moës N., and Verron E. Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(2) :290–314, 2005. (cité en page 113.)
- [39] Isabelle Galliet. *Une version parallèle des méthodes asymptotiques numériques : application à des structures complexes à base d'élastomères*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille II, 2000. (cité en page 112.)
- [40] P. Germain, Q.S. Nguyen, and P. Suquet. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :1010–1020, 1983. (cité en page 33.)
- [41] J. Gough. A description of a property of caoutchouc or indian-rubber. *Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester*, 1, 1802. (cité en page 63.)

- [42] J. Grandcoïn. *Contribution à la modélisation du comportement dissipatif des élastomères chargés : d'une modélisation micro-physiquement motivée vers la caractérisation de la fatigue*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II, 2008. (cité en page 48.)
- [43] J. Grandcoïn, A. Boukamel, and S. Lejeunes. A micro-mechanically based continuum damage model for fatigue life prediction of filled rubbers. *International Journal of Solids and Structures*, 51(6) :1274 – 1286, 2014. (cité en pages 49, 52, and 110.)
- [44] Julie Grandcoïn Laneyrie, Adnane Boukamel, and Stéphane Lejeunes. Constitutive and numerical modeling of the fatigue behavior of a filled rubber. In *European Conference on Constitutive Models for Rubber (Dresden Germany)*, pages 229–234, Dresden, Germany, September 2009. Balkema. (cité en page 110.)
- [45] Yeoh O. H. and Fleming P. D. A new attempt to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity. *Journal of Polymer Science Part B : Polymer Physics*, 35(12) :1919–1931, 1997. (cité en page 72.)
- [46] P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer, 2002. (cité en page 64.)
- [47] C. Hofer, U. Langer, M. Neumüller, and I. Touloupoulos. Time-multipatch discontinuous galerkin space-time isogeometric analysis for parabolic evolution problems, 2017. RICAM Report. (cité en page 112.)
- [48] G.A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics : A Continuum Approach for Engineering*. Wiley, 2000. (cité en page 64.)
- [49] G.A. Holzapfel and J.C. Simo. Entropy elasticity of isotropic rubber-like solids at finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 132(1–2) :17 – 44, 1996. (cité en pages 63 and 64.)
- [50] T.J.R. Hughes and G.M. Hulbert. Space-time finite element methods for elastodynamics : formulation and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66 :339 – 363, 1988. (cité en page 111.)
- [51] B. Huneau, I. Masquelier, Y. Marco, V. Le Saux, S. Noizet, C. Schiel, and P. Charrier. Fatigue crack initiation in a carbon black-filled natural rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 89(1) :126 – 141, 2016. (cité en page 111.)
- [52] Simo J.C. and Hughes T.J.R. *Computational Inelasticity*. Springer, 2000. (cité en page 79.)
- [53] Aurélie Jean. *Etude d'un élastomère chargé de la nanostructure au macro-comportement*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Fev 2009. (cité en page 44.)
- [54] M. Johlitz, J. Retka, and A. Lion. Chemical ageing of elastomers : Experiments and modelling. In *European Conference on Constitutive Models for Rubber VII (Dublin Ireland)*, pages 113–118, Dublin, Ireland, 2012. Balkema. (cité en page 69.)
- [55] Michael Johlitz and Alexander Lion. Chemo-thermomechanical ageing of elastomers based on multiphase continuum mechanics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25(5) :605–624, Sep 2013. (cité en page 69.)
- [56] C. Kadapa, W.G. Dettmer, and D. Perić. Subdivision based mixed methods for isogeometric analysis of linear and nonlinear nearly incompressible materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 305 :241 – 270, 2016. (cité en pages 89, 91, and 92.)
- [57] M. R. Kamal and S. Sourour. Kinetics and thermal characterization of thermoset cure. *Polymer Engineering & Science*, 13(1) :59–64, 1973. (cité en page 68.)

- 
- [58] K. Kannan and K. Rajagopal. A thermodynamical framework for chemically reacting systems. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 62 :331–363, 2011. 10.1007/s00033-010-0104-1. (cité en page 66.)
- [59] Christopher Kartout. *Vieillessement thermo-oxydant et rupture d'un EPDM*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2016. (cité en page 69.)
- [60] Farid Khedimi. *Modélisation micromécanique des élastomères chargés*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille 1, 2011. (cité en pages 45 and 109.)
- [61] Manfred Klüppel. The role of disorder in filler reinforcement of elastomers on various length scales. In B. Capella, M. Geuss, M. Klüppel, M. Munz, E. Schulz, and H. Sturm, editors, *Filler-Reinforced Elastomers/Sanning Force Microscopy*, volume 164 of *Advances in Polymer Science*, pages 1–86. Springer Berlin Heidelberg, 2003. (cité en page 35.)
- [62] G. Kraus, C. W. Childers, and K. W. Rollmann. Stress softening in carbon black reinforced vulcanizates. strain rate and temperature effects. *Rubber Chemistry and Technology*, 39(5) :1530–1543, 1966. (cité en page 35.)
- [63] L. Laiarinandrasana, A. Jean, D. Jeulin, and S. Forest. Modelling the effects of various contents of fillers on the relaxation rate of elastomers. *Materials & Design*, 33 :75 – 82, 2012. (cité en page 44.)
- [64] H. Laurent, G. Rio, A. Vandenbroucke, and N. Aït Hocine. Experimental and numerical study on the temperature-dependent behavior of a fluoro-elastomer. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 18(4) :721–742, Nov 2014. (cité en page 29.)
- [65] Vincent Le Saux. *Fatigue and ageing of rubbers under marine and thermal environments : from accelerated tests to structure numerical simulations*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale - Brest, October 2010. (cité en page 69.)
- [66] S. Lejeunes. *Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, 2006. (cité en page 37.)
- [67] S. Lejeunes, A. Boukamel, and S. Méo. Finite element implementation of nearly-incompressible rheological models based on multiplicative decompositions. *Computers and Structures*, 89 :411–421, 2011. (cité en pages 80 and 110.)
- [68] S. Lejeunes and S. Bourgeois. Une toolbox abaqus pour le calcul de propriétés effectives de milieux hétérogènes. In *10<sup>e</sup> Colloque National en Calcul des Structures*, 2011. (cité en pages 44 and 110.)
- [69] S. Lejeunes and D. Eyheramendy. Hybrid free energy approach for nearly incompressible behaviors at finite strain. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2018. To appear. (cité en pages 53, 55, 63, and 110.)
- [70] S. Lejeunes, D. Eyheramendy, A. Boukamel, A. Delattre, S. Méo, and K. D. Ahoose. A constitutive multiphysics modeling for nearly incompressible dissipative materials : application to thermo-chemo-mechanical aging of rubbers. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 22(1) :51–66, Feb 2018. (cité en pages 68 and 110.)
- [71] S. Lejeunes, S. Méo, and A. Boukamel. A direct numerical integration scheme for visco-hyperelastic models using radial return relaxation. *European Journal of Computational Mechanics*, 19 :129–140, 2010. (cité en pages 80 and 110.)
- [72] S. Lejeunes, T.A. Nguyen Van, A. Boukamel, and D. Eyheramendy. Linearized behavior of a dissipative rubber with large static preloads. *Computers & Structures*, 96-97 :46 – 53, 2012. (cité en page 110.)



- 
- [73] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J. Eng. Matter. Technol.*, 107 :83–89, 1985. (cité en page 50.)
- [74] E. Lignon, P. Le Tallec, and N. Triantafyllidis. Onset of failure in a fiber reinforced elastomer under constrained bending. *International Journal of Solids and Structures*, 50(2) :279 – 287, 2013. (cité en page 112.)
- [75] Christian Linder, Mykola Tkachuk, and Christian Miehe. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(10) :2134 – 2156, 2011. (cité en page 34.)
- [76] A. Lion. A constitutive model for carbon black filled rubber : Experimental investigations and mathematical representation. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 8(3) :153–169, 1996. (cité en page 29.)
- [77] A. Lion, B. Dippel, and C. Liebl. Thermomechanical material modelling based on a hybrid free energy density depending on pressure, isochoric deformation and temperature. *International Journal of Solids and Structures*, 51(3–4) :729 – 739, 2014. (cité en page 63.)
- [78] A. Lion and M. Jöhlich. On the representation of chemical ageing of rubber in continuum mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 49(10) :1227 – 1240, 2012. (cité en page 69.)
- [79] A. Lion and C. Kardelky. The payne effect in finite viscoelasticity : constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales. *International Journal of Plasticity*, 20(7) :1313 – 1345, 2004. (cité en page 35.)
- [80] Alexander Lion. On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(11) :1805 – 1834, 1997. (cité en page 29.)
- [81] R. Liu and E. Sancaktar. Identification of crack progression in filled rubber by micro x-ray ct-scan. *International Journal of Fatigue*, 111 :144 – 150, 2018. (cité en page 111.)
- [82] J.M. Martinez, A. Boukamel, S. Méo, and S. Lejeunes. Statistical approach for a hyper-visco-plastic model for filled rubber : Experimental characterization and numerical modeling. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30(6) :1028 – 1039, 2011. (cité en pages 34, 38, and 39.)
- [83] K.M. Mathisen, K.M. Okstad, T. Kvamsdal, and S.B. Raknes. Isogeometric analysis of finite deformation nearly incompressible solids. *Journal of Structural Mechanics*, 44 :260 – 278, 2011. (cité en page 89.)
- [84] Johann G. Meier and Manfred Klüppel. Carbon black networking in elastomers monitored by dynamic mechanical and dielectric spectroscopy. *Macromolecular Materials and Engineering*, 293(1) :12–38, 2008. (cité en page 44.)
- [85] S. Meo, A. Boukamel, and O. Debordes. Analysis of a thermoviscoelastic model in large strain. *Computers & Structures*, 80(27–30) :2085 – 2098, 2002. (cité en page 63.)
- [86] J.C. Michel, O. Lopez-Pamies, P. Ponte Castañeda, and N. Triantafyllidis. Microscopic and macroscopic instabilities in finitely strained porous elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(5) :900 – 938, 2007. (cité en page 112.)
- [87] C. Miehe. Entropic thermoelasticity at finite strains. aspects of the formulation and numerical implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 120(3) :243 – 269, 1995. (cité en pages 64 and 83.)

- 
- [88] C. Miehe, S. Göktepe, and F. Lulei. A micro-macro approach to rubber-like materials—part i : the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(11) :2617 – 2660, 2004. (cité en page 113.)
- [89] Christian Miehe and Lisa-Marie Schänzel. Phase field modeling of fracture in rubbery polymers. part i : Finite elasticity coupled with brittle failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 65 :93 – 113, 2014. (cité en page 111.)
- [90] S.E. Moore. Space-time multi-patch discontinuous galerkin isogeometric analysis for parabolic evolution problems, 2017. preprint. (cité en page 112.)
- [91] S. Méo. *Modélisation du comportement (thermo-)mécanique des élastomères et prévision de leur tenue en fatigue*. Habilitation à diriger des recherches, Université de François Rabelais de Tours, 2012. (cité en pages 34 and 38.)
- [92] Thien An Nguyen Van. *On the modeling and the simulation of the thermo-chemo-mechanical coupled behavior of filled rubber*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université, November 2012. (cité en page 110.)
- [93] T.A. N’Guyen, S. Lejeunes, D. Eyheramendy, and A. Boukamel. A thermodynamical framework for the thermo-chemo-mechanical couplings in soft materials at finite strain. *Mechanics of Materials*, 95 :158 – 171, 2016. (cité en pages 67, 68, and 110.)
- [94] A.R. Payne. The dynamic properties of carbon black-loaded natural rubber vulcanizates. part i. *Journal of Applied Polymer Science*, 6(19) :57–63, 1962. (cité en page 31.)
- [95] Les Piegl and Wayne Tiller. *The NURBS Book (second edition)*. Springer, 1997. (cité en page 91.)
- [96] G.O. Piloyan, I.D. Ryabchikov, and O.S. Novikova. Determination of activation energies of chemical reactions by differential thermal analysis. *Nature*, 212, 1966. (cité en page 68.)
- [97] R. Bruce Prime. Differential scanning calorimetry of the epoxy cure reaction. *Polymer Engineering & Science*, 13(5) :365–371, 1973. (cité en page 68.)
- [98] Gaëlle Rambert, Jean-Claude Granddier, and Elias C. Aifantis. On the direct interactions between heat transfer, mass transport and chemical processes within gradient elasticity. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 26(1) :68 – 87, 2007. (cité en page 69.)
- [99] Stefanie Reese and Sanjay Govindjee. Theoretical and numerical aspects in the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 1 :357–396, 1997. (cité en page 63.)
- [100] Stefanie Reese and Sanjay Govindjee. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 35(26–27) :3455 – 3482, 1998. (cité en pages 68 and 79.)
- [101] Eric Reissner. On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 29(1-4) :90–95, 1950. (cité en page 56.)
- [102] Martin Rendek and Alexander Lion. Amplitude dependence of filler-reinforced rubber : Experiments, constitutive modelling and fem – implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 47(21) :2918 – 2936, 2010. (cité en page 31.)
- [103] N. Saintier. *Fatigue multiaxiale dans un élastomère de type NR : mécanismes d’endommagement et critère local d’amorçage de fissure*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2001. (cité en page 49.)
- [104] Amin Shabani. *Thermal and Radiochemical Aging of neat and ATH filled EPDM : Establishment of Structure/Property Relationships*. PhD thesis, Arts et Métier ParisTech, 2013. (cité en page 69.)

- [105] F. Sidoroff. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic finite strain. *Arch. Mech.*, 25, 1973. (cité en page 33.)
- [106] F. Sidoroff. Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, 13, 1974. (cité en page 33.)
- [107] F. Sidoroff. Variables internes en viscoélasticité, 3. milieux avec plusieurs configurations intermédiaires. *J. Méc.*, 15(1) :85–118, 1976. (cité en page 33.)
- [108] F. Sidoroff. Rhéologie non-linéaire et variables internes tensorielles. In *Symposium franco-polonais*, Cracovie, 1977. (cité en page 33.)
- [109] J.C. Simo and C. Miehe. Associative coupled thermoplasticity at finite strains : Formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98(1) :41 – 104, 1992. (cité en page 83.)
- [110] J.C. Simo and C. Miehe. Associative coupled thermoplasticity at finite strains : Formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98 :41–104, 1992. (cité en page 83.)
- [111] L. Stainier and M. Ortiz. Study and validation of a variational theory of thermo-mechanical coupling in finite visco-plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 47(5) :705 – 715, 2010. (cité en page 83.)
- [112] Christian Steinke, Imadeddin Zreid, and Michael Kaliske. On the relation between phase-field crack approximation and gradient damage modelling. *Computational Mechanics*, 59(5) :717–735, May 2017. (cité en page 113.)
- [113] Beurrot Stéphanie, Huneau Bertrand, and Verron Erwan. In situ sem study of fatigue crack growth mechanism in carbon black-filled natural rubber. *Journal of Applied Polymer Science*, 117(3) :1260–1269, 2010. (cité en page 113.)
- [114] Jose Teixeira-Pinto, Carole Nadot-Martin, Fabienne Touchard, Mikaël Gueguen, and Sylvie Castagnet. Towards the size estimation of a representative elementary domain in semi-crystalline polymers. *Mechanics of Materials*, 95 :116 – 124, 2016. (cité en page 45.)
- [115] Marion Touboul. *Approche multi-échelles morphologique et directe pour une classe de composites particuliers fortement chargés hyperélastiques et visco-hyperélastiques*. Thèse de doctorat, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique - Poitiers, November 2007. (cité en page 44.)
- [116] L.R.G. Treloar. *The physics of rubber elasticity*. Clarendon & Oxford University Press, 1975. (cité en page 113.)
- [117] E. Verron and G. Marckmann. Numerical analysis of rubber balloons. *Thin-Walled Structures*, 41(8) :731 – 746, 2003. (cité en page 112.)
- [118] Le Saux Vincent, Marco Yann, Calloch Sylvain, and Charrier Pierre. Evaluation of the fatigue defect population in an elastomer using x-ray computed micro-tomography. *Polymer Engineering & Science*, 51(7) :1253–1263, 2011. (cité en page 49.)
- [119] G. Weber and L. Arnand. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic hyperelastic-viscoplastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79 :173–202, 1990. (cité en page 79.)
- [120] Lei Zhang. *Sur une approche isogéométrique pour problèmes multi-champs couplés en grandes transformations*. Thèse de doctorat, Ecole centrale de Marseille, 2016. (cité en pages 89, 97, and 110.)

- 
- [121] O.C. Zienkiewicz, S. Qu, R.L. Taylor, and Nakazawa S. The patch test for mixed formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23 :1873 – 1883, 1986. (cité en pages 91 and 92.)
- [122] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The finite element patch test revisited a computer test for convergence, validation and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149(1) :223 – 254, 1997. Containing papers presented at the Symposium on Advances in Computational Mechanics. (cité en page 91.)
- [123] K. Özenç and M. Kaliske. An implicit adaptive node-splitting algorithm to assess the failure mechanism of inelastic elastomeric continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 100(9) :669–688, 2014. (cité en page 113.)