



HAL
open science

Propriétés physiques des empilements de fibres macroscopiques : une approche expérimentale, théorique et numérique

Salvatore Salamone

► **To cite this version:**

Salvatore Salamone. Propriétés physiques des empilements de fibres macroscopiques : une approche expérimentale, théorique et numérique. Physique [physics]. Université de Strasbourg, 2018. Français. NNT : 2018STRAE007 . tel-02116181

HAL Id: tel-02116181

<https://theses.hal.science/tel-02116181>

Submitted on 30 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Remerciements

Tout d'abords je voudrais remercier les membres de mon jury de thèse pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, en particulier Florence Bertails-Descourbes et Elisabeth Charlaix les rapportrices qui ont contribué à améliorer la qualité de ce manuscrit, Jörg Baschnagel qui a présidé le jury et Jean-Marc Flesselles.

J'adresse un grand merci à Thierry, le valeureux directeur de thèse qui a su me supporter! "Enfin!", qu'il doit se dire. Ou bien "ouf". Il est toujours disponible, de bonne humeur et il a en plus la solution aux problèmes. Que demander de plus! J'ai vraiment apprécié de travailler en sa compagnie. Il m'a appris tant de choses, comme professeur et directeur de thèse, qu'en faire une liste serait vain. Il y a une chose qu'il n'aura pas réussi à me transmettre, c'est l'art de la contrepèterie. L'échec du disciple plutôt que du maître. J'espère que son prochain doctorant sera plus apte et aura les bonnes qualités!

Bien sûr je remercie également tous les membres de l'équipe MCube et Olivier pour l'accueil chaleureux et la bonne humeur quotidienne. Une équipe au poil ou au cheveu devrais-je dire. Les discussions animées politiques du midi vont me manquer terriblement! Merci à Carlos qui, malgré son emploi du temps chargé, a toujours pris le temps nécessaire pour discuter et me donner les bons conseils; merci à Fabrice pour m'avoir initié à Python! Qui eut cru que cela aurait eu une telle importance pour la thèse et l'après thèse. Grâce à vous ce doctorat fut une bonne expérience et j'en garde un excellent souvenir!

Un merci particulier à Damien, Marc et Olivier qui ont chacun dans leurs domaines respectifs contribué de façon majeur à l'aboutissement de ce travail! Merci!

Table des matières

Introduction	1
1 Motivations	3
1.1 À propos des fibres	3
1.2 Des propriétés individuelles aux propriétés collectives	4
1.3 Influence des fluctuations thermiques sur les interactions entre membranes	11
1.4 Mesure du module de courbure dans les systèmes thermalisés	15
2 Modèle d’empilement de fibres à désordre de forme	19
2.1 Géométrie d’une courbe plane	19
2.2 Modèle de champ moyen	22
2.3 Simulations numériques	28
Première partie : Matériels et méthodes	31
3 Protocoles expérimentaux	33
3.1 Analyse de forme	33
3.2 Mesure du module de courbure par étirement	34
3.3 Création des empilements fibres	36
3.4 Expérience de compression	37
4 Simulations numériques : mécanique moléculaire	41
4.1 Modèle de billes	41
4.2 Génération d’une configuration	43
Deuxième partie : Mesures des propriétés individuelles	47
5 Analyse de forme des fibres	49
5.1 Les fibres	49

5.2	Distribution des amplitudes des modes propres	52
6	Mesure du module de courbure	57
6.1	Estimation du module	57
6.2	Mesure par étirement	58
6.3	Mesure par vibration	61
Troisième partie : Propriétés collectives		65
7	Propriétés mécaniques d'empilements de fibres	67
7.1	Empilements de fibres	67
7.2	Courbes de compression	67
7.3	Comparaison des résultats au modèle auto-cohérent	68
7.4	Évolution cinétique	72
7.5	Discussion	76
8	Simulations numériques d'empilements de fibres à 2D	77
8.1	Système de référence parfaitement ordonné	77
8.2	Système désordonné à un mode	80
8.3	Système désordonné avec une distribution de modes en loi de puissance	82
9	Modèle continu d'empilements de fibres à désordre de forme	87
9.1	Modèle continu d'empilements de fibres à désordre en loi de puissance	87
9.2	Discussion générale des résultats expérimentaux, numériques et théoriques	91
10	Propriétés électriques d'empilements de fibres	95
10.1	Résultats expérimentaux	95
10.2	Simulations numériques	96
Conclusion		107
A	Fonctions propres de l'opérateur Laplacien carré	111
B	Élasticité d'une fibre - Équation d'état	115
C	Effet sur la contrainte d'une coupure aux petits modes	123

Table des figures

5.1	Échantillons de fibres	50
5.2	Images au microscope optique de la section de fibres	51
5.6	Analyses de forme des fibres	55
6.1	Mesure du module de courbure par dépliement des modes	60
6.2	Mesure du module de courbure par vibration	63
7.1	Photos des empilements	68
7.4	Élasticités des empilements de fibres	71
7.5	Φ_{exp} en fonction de α	72
7.8	Relaxation de la contrainte	75
8.2	Élasticité d'un empilement Ref	79
8.5	Élasticité d'un empilement à SMD	82
8.6	Fibres à désordre en loi de puissance	84
8.8	Élasticité des empilements à PLD	86
9.3	Résultats numériques / modèle continu	92
9.4	Résultats / modèles continu et discret	93
10.1	Conductivité en fonction de la contrainte pour les empilements expérimentaux	96
10.5	Conductivité électrique pour les empilements à DLP	102

Liste des tableaux

3.1 Propriétés des empilements	37
5.2 α et $c(\alpha)$ des fibres expérimentales	54
6.1 Estimation du module de courbure	58
6.3 Mesures du module de courbure	62
7.1 Paramètres d'ajustement expérimentaux Φ_{exp}	71
7.2 Taux de déformation des expériences réalisées	72
8.1 Paramètres d'ajustement numériques Φ_{num}	85

Liste des principaux symboles et dimensions

L_0	Longueur curviligne (L)
L	Longueur projetée sur un axe (L)
$\zeta(x)$	Forme d'une fibre (L)
$c(x), \zeta^{(2)}(x)$	Courbure locale (L^{-2})
$\langle \zeta_0 \rangle$	Amplitude quadratique moyenne (L)
$\langle \zeta_0^2 \rangle$	Carré de l'amplitude quadratique moyenne (L^2)
ζ_q	Amplitude du mode q (L)
$\phi_q(x)$	Fonction propre de l'opérateur Laplacien carré
κ	Module de courbure (EL)
μ	Module élastique (N) (EL^{-1})
G	Module élastique (Pa) (EL^{-3})
N	Nombre de fibres dans un empilement
D	Hauteur de l'empilement (L)
d	Distance entre deux fibres (L)
y	Distance réduite entre deux fibres
$\langle e \rangle$	Densité d'énergie moyenne (EL^{-2})
B	Module de compressibilité (EL^{-3})
F, P	Force et contrainte (EL^{-1}), (EL^{-3})
Φ_{exp}	Normalisation théorie-expérience
Φ_{num}	Normalisation théorie-numérique
n_c	Nombre de contacts entre fibres
$\langle l_c \rangle$	Longueur moyenne entre deux contacts (L)
R	Résistance électrique (Ω)
g	Conductivité électrique ($\Omega^{-1}L^{-1}$)
α	Paramètre de rugosité
β	Exposant de la loi d'échelle associée à l'élasticité
φ	Exposant de la loi d'échelle associée à g
ω	Exposant de la loi d'échelle associée à $\langle l_c \rangle$

Préface

Les objets constitués de fibres sont courants et nous entourent, depuis nos vêtements jusqu'à nos cheveux. Lorsque l'on tient une laine de fibres entre les mains, typiquement de la laine de verre ou de la paille de fer, la première envie est de déformer cet empilement et on se rend compte que cet objet possède une élasticité étonnante. Si l'on comprime l'empilement complètement, il parvient à garder sa structure globale et retrouve presque sa forme initiale. De plus, en piégeant de l'air dans sa structure, la laine devient un excellent isolant thermique. C'est cette classe de matériaux qui m'a intéressé dans le cadre de ma thèse. Lorsque je parle de leurs propriétés mécaniques et que je montre un de mes échantillons d'empilements à des physiciens, la première réaction est toujours perplexe et parfois s'ajoute une moquerie : pourquoi s'intéresser à cette thématique ? Fais plutôt un travail sérieux ! C'est alors que je commence à décrire l'empilement en lui-même, constitué d'un ensemble de fibres de forme uniques empilées les unes sur les autres et interagissant de façon stérique. La contrainte pour déformer l'empilement est liée au nombre de contacts présents, ce nombre augmentant avec la déformation. On se retrouve avec une vraie problématique de physique statistique à savoir la détermination du comportement collectif à partir des éléments individuels. Il existe peu de littérature à propos de cette thématique. Le premier à s'être intéressé aux laines est van Wyk [1] en 1946 en proposant un modèle d'élasticité d'une laine dont les fibres sont courtes, faiblement courbées entre les points de contacts et orientées aléatoirement dans l'empilement. Ce modèle est étendu par Toll [2] à une géométrie dont l'orientation des fibres est aléatoire mais confinée dans un plan. Les auteurs mettent en évidence une relation en loi de puissance entre la contrainte et la déformation dont l'exposant dépend du désordre d'orientation. L'équipe MCube (Membranes et Microforces) s'intéresse aux empilements dont le désordre ne provient pas de l'orientation mais de la forme des fibres. Les travaux

sur ce genre d'empilement concernent essentiellement les cheveux (Bertails et al. [3, 4]; Goldstein et al. [5]) et s'intéressent à la forme de la chevelure plutôt qu'à son élasticité. Un premier modèle développé dans notre équipe par Beckrich et al. [6] et qui sera présenté ultérieurement fait le lien entre le désordre de forme des fibres et l'élasticité des empilements. A priori il est surprenant qu'une équipe spécialisée dans les objets membranaires thermalisés microscopiques puisse s'intéresser à une physique macroscopique et athermique. Mais il est possible de faire une analogie profonde entre la physique des empilements de fibres macroscopiques et celle des empilements de membranes thermiques qui a inspiré le modèle théorique développé dans l'équipe. D'autre part, certaines méthodes de caractérisation des fibres que je vais utiliser sont aussi largement inspirées de cette physique. C'est la raison pour laquelle, contre toute attente, je présente un aperçu de la physique des systèmes microscopiques thermalisés pour ensuite présenter les travaux de l'équipe sur les fibres. Nous verrons que le modèle théorique décrit l'élasticité des empilements en partant des propriétés individuelles des fibres. La thèse est constituée en 3 parties. Tout d'abord je mesure les propriétés individuelles des fibres : le module de courbure et la distribution du désordre. Ensuite je teste nos modèles sur nos empilements (réels et numériques). Ces deux parties principales constituent le coeur du manuscrit : décrire l'élasticité de l'ensemble à partir des propriétés individuelles. Pour finir je me suis intéressé à la conduction électrique des empilements (réels et numériques).

Introduction

Chapitre 1

Motivations

1.1 À propos des fibres

Les fibres sont des objets en forme de filament que l'on peut classer en deux catégories : les fibres naturelles (végétales, animales ou minérales) et synthétiques. Les fibres végétales (coton, lin, papier, chanvre...) sont composées de cellulose, glucide constitué de glucose. La paroi des cellules végétales est en particulier constituée de cellulose. Les fibres animales (laine, soie) sont composées de protéines qui sont des macromolécules, dont les monomères sont les acides aminés. Les fibres synthétiques peuvent être d'origines organiques : polyamide (nylon), polyéthylène (PVC), polypropylène (corde) ou d'origine minérale : fibres de verre, fibres de carbone, céramique... Les fibres possèdent des propriétés thermiques, acoustiques et mécaniques intéressantes. Un matériau composé de fibres est un meilleur isolant qu'un matériau dense ce qui indique que la forme et l'agencement ont un rôle plus important que la nature du matériau pour ces propriétés. Les fibres sont aussi utilisées en tant que renfort d'un matériau matrice, l'ensemble étant appelé matériau composite. En générale les fibres sont en acier, verre, carbone ou en polyester. Par exemple dans l'industrie automobile cela permet de réduire significativement la masse des voitures et de réduire la consommation de carburant. Les fibres sont des éléments incontournables dans l'élaboration de matériaux renouvelables et durables : vêtements, isolation... Dans ce chapitre nous présentons d'abord des travaux de la littérature sur les fibres, puis discutons les motivations de ce travail et enfin terminons par l'introduction de quelques concepts utiles à la compréhension du manuscrit.

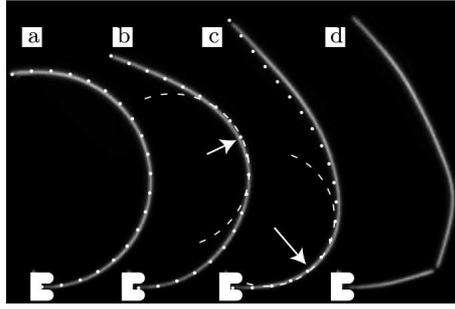


FIGURE 1.1 – Évolution de la forme d'un spaghetti au cours du temps. Les points correspondent à des simulations. Image issue de [7].

1.2 Des propriétés individuelles aux propriétés collectives

1.2.1 Du spaghetti aux cheveux

Les spaghettis. Les travaux de Audoly et al. [7] (prix Ig-Nobel 2006) qui montrent pourquoi les spaghettis ne se cassent jamais en deux parties égales mais en 3 ou 4 morceaux (voir la Fig. 1.1) sont un exemple d'étude originale des propriétés de fibre unique. La géométrie du spaghetti définit une courbure c locale. Le spaghetti, maintenu fixe en un point, est courbé jusqu'au seuil au delà duquel il se brise puis est relâché. La courbure évolue au cours du temps et l'équation d'évolution de la courbure est donnée par :

$$\frac{\partial^4 c}{\partial s^4} + \frac{\rho A}{\kappa} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2.1)$$

avec ρ la masse volumique, A l'aire de la section et κ le module de courbure du spaghetti. En posant une solution propagative du type :

$$c = c_0(s) \exp(j2\pi t/\tau), \quad (1.2.2)$$

où les variables spatiale et temporelle sont découplées, on obtient une relation de dispersion entre les modes q et la période temporelle τ des ondes mécaniques :

$$q^4(\tau) = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \frac{\rho A}{\kappa} = D^2 \frac{4\pi^2}{\tau^2}, \quad (1.2.3)$$

avec $D = (\kappa/\rho A)^{1/2}$ un coefficient homogène à une constante de diffusion. L'équation (1.2.3) fait apparaître la possibilité d'avoir des solutions imaginaires pour le vecteur d'onde q et donc une solution hyperbolique. Les

vibrations entraînent un champ de courbure qui peut localement être plus grand que la courbure de rupture à cause de ce caractère hyperbolique. La solution montre qu'il existe au moins 3 maxima locaux de courbure supérieurs à la courbure de rupture ce qui entraîne une cassure en plusieurs endroits.

Les cheveux. La compréhension des propriétés individuelles des fibres comme les cheveux ou la laine et le lien avec leurs structures moléculaires est importante pour différentes applications (cosmétologie, textile...), elle a intéressé la communauté de scientifiques depuis longtemps [8]. Les relations entre la structure et les propriétés mécaniques de cheveux continuent à susciter de nombreuses études [9].

Les propriétés collectives qui découlent des interactions entre les différentes fibres sont aussi importantes dans de nombreux domaines. La modélisation d'une chevelure trouve des applications dans des domaines comme le film d'animation, les jeux vidéo... La géométrie d'une chevelure est due aux formes individuelles des cheveux ainsi qu'à leur empilement. Bertails et al. [3] proposent une description statique d'une chevelure. Un cheveu ou une mèche possède une énergie de courbure et de torsion permettant par exemple de décrire sa forme par exemple dans le champ de pesanteur (voir Fig. 1.2a). Dans une chevelure, il faut prendre en compte une énergie potentielle élastique d'interaction entre les cheveux. La configuration de chaque cheveu dans la chevelure est obtenue en minimisant l'énergie totale. Le résultat est représenté en Fig. 1.2 où l'on peut constater que ce modèle ressemble bien à une chevelure réelle. Bertails et al. [4] proposent également une étude dynamique et reconstituent un mouvement réaliste de cheveux (Fig. 1.3). D'autres travaux de simulations de cheveux et de leurs collisions reconstruisent une chevelure réaliste [10, 11, 12, 13, 14].

Par ailleurs, Goldstein et al. [5] (prix Ig-Nobel 2012) se sont intéressés à la forme d'une queue de cheval. La contrainte interne d'empilement des cheveux au noeud fait adopter à la queue de cheval sa forme bien particulière (voir Fig. 1.4a). Les auteurs utilisent un formalisme de mécanique des fluides en considérant un cheveu comme une ligne de courant : le terme de courbure est analogue au terme cinétique et les interactions sont analogues à la pression. Ces interactions sont traitées par un potentiel de champ moyen ad hoc. La minimisation de l'énergie conduit à une équation d'état reliant la contrainte



FIGURE 1.2 – (a) Comparaison entre une mèche de cheveux simulée et une mèche réelle. (b) Comparaison d’une chevelure complète. Images issues de [3].



FIGURE 1.3 – Comparaison instantanée entre (a) : une chevelure réelle ; (b) : une chevelure simulée. Images issues de [4].

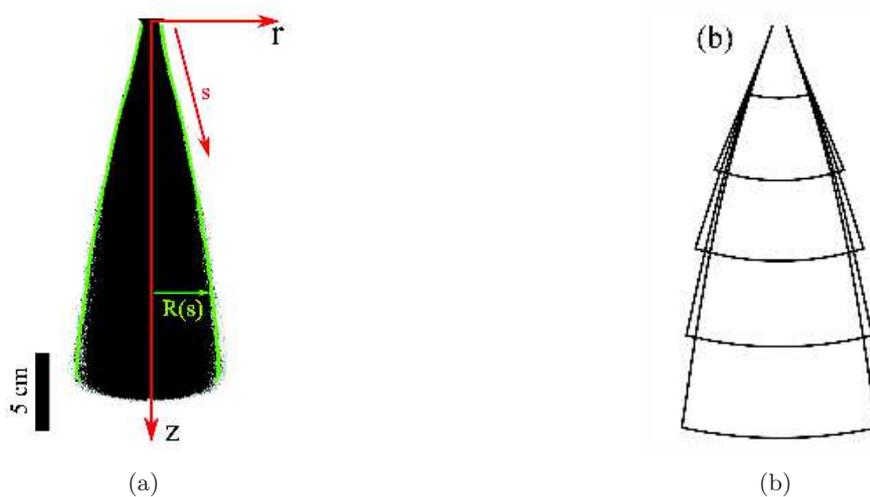


FIGURE 1.4 – (a) Profil d’une queue de cheval définissant le rayon $R(s)$. (b) Queue de cheval théorique en utilisant l’équation (1.2.5). Images issues de [5].

linéique $\Pi(R(s))$ au rayon de la queue de cheval $R(s)$:

$$\Pi(R(s)) = \frac{dR}{ds}(s) - (L_0 - s) \frac{d^2R}{ds^2}(s), \quad (1.2.4)$$

avec L_0 la longueur curviligne des cheveux. Le profil d'une queue de cheval représenté en Fig. 1.4 permet d'ajuster le rayon par un polynôme ce qui donne au final :

$$\Pi(R(s)) = \Pi_0 \left(1 - \frac{R(s)}{R^*} \right), \quad (1.2.5)$$

où R^* est la largeur maximale de la queue de cheval et Π_0 la contrainte au noeud. Le profil de l'équation (1.2.5) est représenté dans la Fig. 1.4b et ressemble au profil réel.

1.2.2 Motivations

L'intérêt de construire une théorie sur un objet en apparence simple comme les fibres peut paraître surprenant, cependant nous venons de constater l'étendue des phénomènes que l'on peut décrire. Nous nous sommes intéressés particulièrement aux empilements constitués de longues fibres ondulées et alignées. Sans donner immédiatement les détails techniques, nous présentons en Fig 1.5 des résultats expérimentaux de réponses à une déformation pour quatre empilements de fibres. La réponse à la déformation, essentiellement élastique, est très fortement non linéaire.

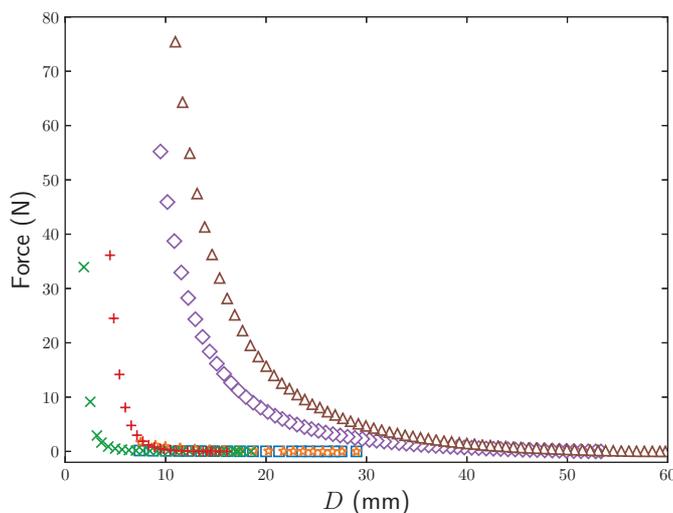


FIGURE 1.5 – Compressions d'empilement de fibres.

Nous pouvons nous demander d'où vient cette élasticité. À ce stade il est difficile de quantifier son origine cependant nous pouvons supposer sans trop nous avancer qu'elle provient de la nature et de la forme des fibres individuelles (propriétés intrinsèques) ainsi que de l'agencement entre elles dans l'empilement et de l'évolution de leurs points de contacts (propriété extrinsèque). Plusieurs auteurs se sont déjà intéressés à cette question dans le cadre de fibres plus courtes, et localement droites. Nous commençons par présenter rapidement leurs travaux.

1.2.3 Élasticité d'empilement de fibres athermiques

La plupart des travaux ont mis en évidence qu'un empilement de fibres enchevêtrées possède une élasticité linéaire suivie d'une élasticité fortement non linéaire [15, 16, 17]. L'élasticité fait apparaître un comportement en loi de puissance de la contrainte en fonction du taux de compression dans une gamme allant jusqu'à trois décades de contrainte. Masse et al. [15] ont fait des essais sur des empilements de fibres métalliques et mettent en évidence l'influence de l'orientation des fibres au sein de l'empilement dans la valeur de l'exposant de la loi de puissance. Plus le désordre d'orientation augmente plus l'exposant est petit car le volume accessible aux fibres est plus grand. Les Fig. 1.6a et 1.6b montrent que l'alignement augmente avec la densité, et donc que le désordre d'orientation diminue. La contrainte en fonction de la déformation pour trois densités différentes est représentée en Fig. 1.6c et nous constatons l'augmentation de l'exposant avec la densité initiale de l'empilement. Les exposants sont difficiles à comparer entre les auteurs car ils augmentent avec le taux de compression $\dot{\epsilon} = v/D_0$ avec v la vitesse de compression et D_0 la hauteur initiale. Cela signifie que la contrainte à exercer pour déformer rapidement est plus grande qu'une déformation lente toutes choses étant égales par ailleurs. Ceci indique le rôle primordiale joué par les ré-arrangements des contacts entre les fibres. Plusieurs auteurs ont obtenus ces résultats, pour des matériaux, formes et alignements différents. Quelques exemples de valeurs des exposants trouvées dans la littérature sont données dans la Fig. 1.6d. Il est important de noter que les auteurs de ces travaux ne proposent pas de mécanismes permettant de comprendre les comportements observés.

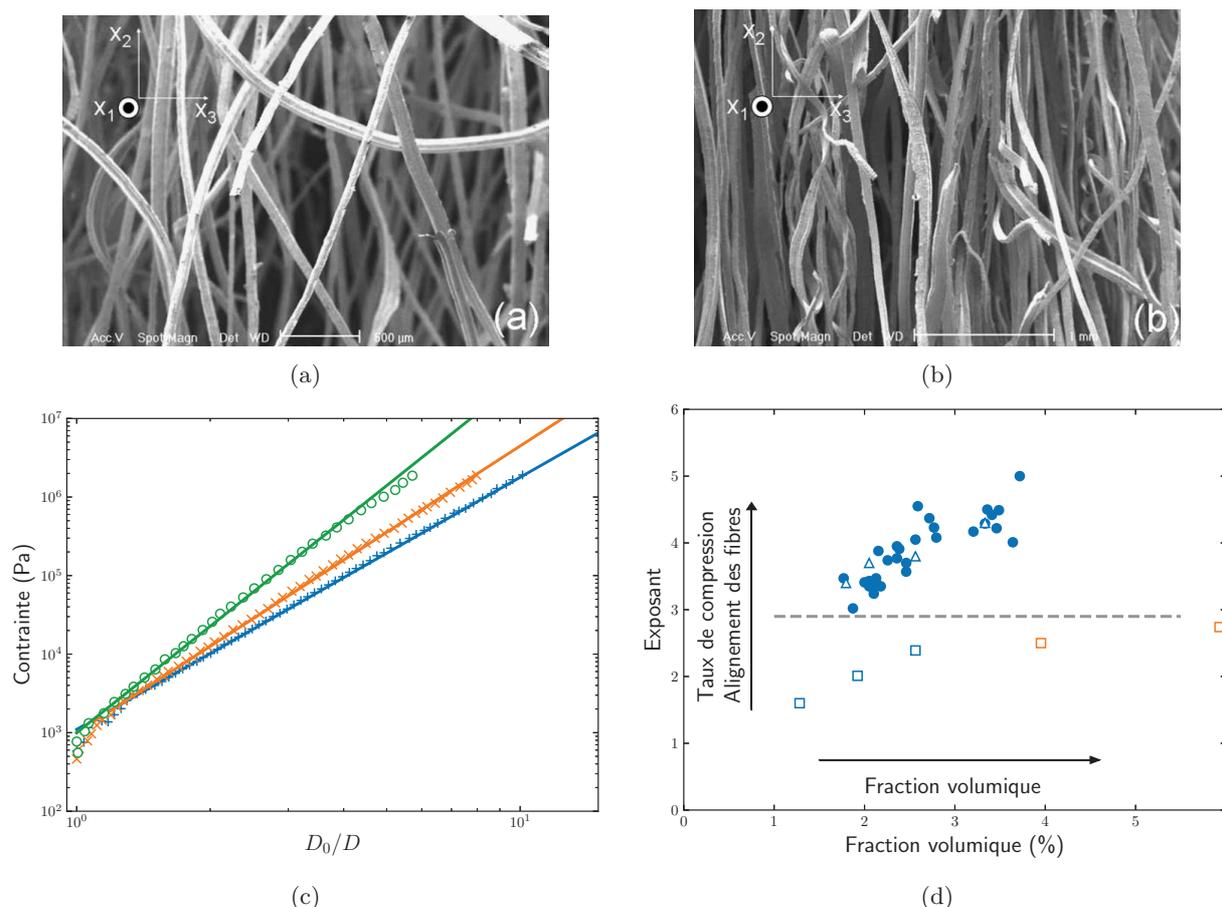


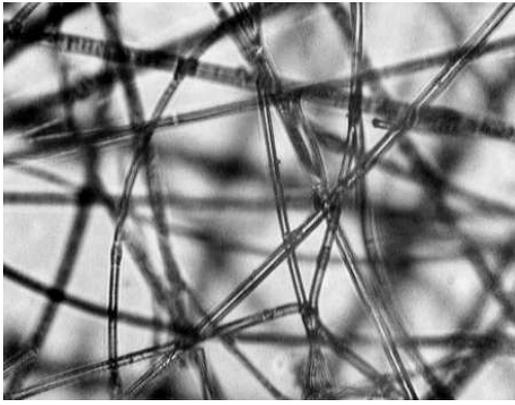
FIGURE 1.6 – (a) et (b) Images au microscope électronique à balayage de laines d’acier [15]. (a) 0.14 g/cm³; (b) 0.26 g/cm³. (c) Contrainte-déformation pour trois laines d’acier de densité différentes [15] : (+) 0.14 g/cm³; (×) 0.20 g/cm³; (◦) 0.26 g/cm³. (d) Exposants des loi de puissance en fonction de la densité des empilements. La série de points du bas correspond à des fibres alignées sans désordre d’orientation. Laine de fer : (◻) 1 mHz; (◻) 10 mHz; (●) 30 mHz; Laine de verre : (◻) 1 mHz. Données issues de [15, 16, 17].

1.2.4 Modèles d’élasticité

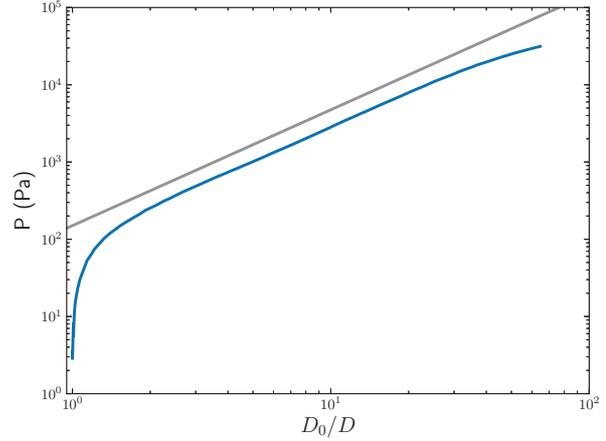
Van Wyk [1] est le premier à décrire les empilements de fibres en parlant de la laine. Baudequin et al. [18] reviennent sur ce modèle en l’appliquant à la laine de verre. Les fibres forment un réseau et la longueur entre contacts est notée l . Entre deux contacts la longueur est considérée sans courbure. Pour fléchir cette longueur d’une distance infinitésimale dh il faut appliquer une force dF :

$$dF = l^2 dP \propto \frac{dh}{l^3}, \quad (1.2.6)$$

écrite ici à un facteur numérique près dépendant de la géométrie de la fibre et en notant dP la contrainte locale. En considérant que les fibres sont orientées



(a)



(b)

FIGURE 1.7 – (a) Image au microscope optique d’un empilement de laine de verre. Image issue de [18]. (b) Contrainte en fonction de la déformation de la laine de verre. (—) Droite (en échelle log-log) de pente $-3/2$.

aléatoirement dans l’empilement, nous obtenons au final :

$$\begin{cases} \langle l \rangle \propto P^{-1/3}, \\ P = P_0 (\Phi^3 - \Phi_0^3), \end{cases} \quad (1.2.7)$$

avec Φ la fraction volumique. L’exposant prévu est donc de 3 pour une orientation aléatoire. La fraction volumique de la laine de verre utilisée par Baudequin et al. [18] (voir Fig. 1.7a) est de l’ordre de $\sim 1\%$ ce qui est très faible. La contrainte en fonction de la déformation est représentée en Fig. 1.7b et montre que la théorie est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Toll [2] approfondit le modèle en considérant des fibres orientées aléatoirement mais dans un plan. Au final il obtient :

$$\begin{cases} \langle l \rangle \propto P^{-1/5}, \\ P = P_0 (\Phi^5 - \Phi_0^5). \end{cases} \quad (1.2.8)$$

L’exposant théorique est 5. On observe donc que l’exposant augmente lorsque le désordre d’orientation diminue.

1.2.5 Contexte de notre étude

Les résultats expérimentaux existants dans la littérature et les modèles présentés traitent de fibres avec un désordre d’orientation, localement droites et courbées entre les points de contact. Nous nous sommes intéressés à des

empilements constitués de longues fibres, alignées selon une direction, et possédant un désordre de forme important comme le montre la Fig. 1.8.



FIGURE 1.8 – Image d'une de nos fibres.

Ce type de désordre fait penser au désordre thermique où l'agitation thermique déforme localement des objets comme les membranes. Un modèle développé, dans notre équipe par Beckrich et al [6], a exploité cette analogie. Nous le décrirons de manière détaillée plus loin, mais il nous semble intéressant de commencer par présenter quelques aspects de la physique des systèmes thermalisés.

1.3 Influence des fluctuations thermiques sur les interactions entre membranes

1.3.1 Généralités sur les membranes fluides

La cellule, unité biologique structurelle de base de tous les êtres vivants, est constituée d'une membrane qui sépare le cytoplasme (contenu de la cellule) et le noyau (si la cellule est eukaryote) du milieu extérieur. Cette membrane (Fig. 1.9) cellulaire est composée essentiellement de protéines, lipides, glucides et cholestérol. L'épaisseur d'une bicouche est d'environ 5 nm [19].

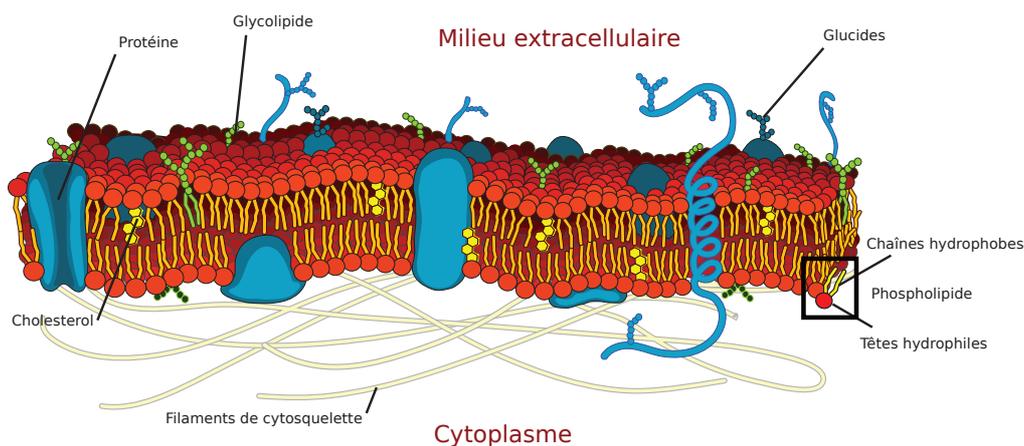


FIGURE 1.9 – Schéma d'une membrane cellulaire. Adapté d'après : <https://cellbiology.med.unsw.edu.au>.

Parmi les lipides présents dans la membrane nous trouvons des phospholipides composés d'une tête hydrophile polaire à base de phosphore ainsi

que les ester aliphatiques qui forment deux queues hydrophobes. Une chaîne aliphatique contient entre 12 et 20 atomes de carbone (voir Fig. 1.10) [19].

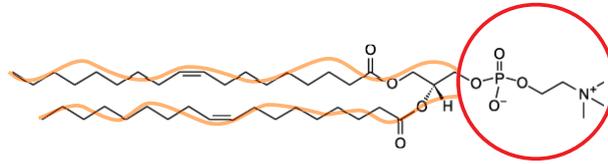


FIGURE 1.10 – Un phospholipide (DOPC).

Ces phospholipides ont la capacité de s'auto-organiser spontanément en double feuillet (bicouche de lipides) ou en liposome/micelle (voir la Fig. 1.11). À cause de la complexité de la structure d'une membrane, il est nécessaire de ne considérer que des systèmes modèles simplifiés. La membrane bicouche modèle est composée d'une ou de deux espèces de phospholipides. Les propriétés physiques des membranes nous renseignent sur leurs fonctions biologiques.

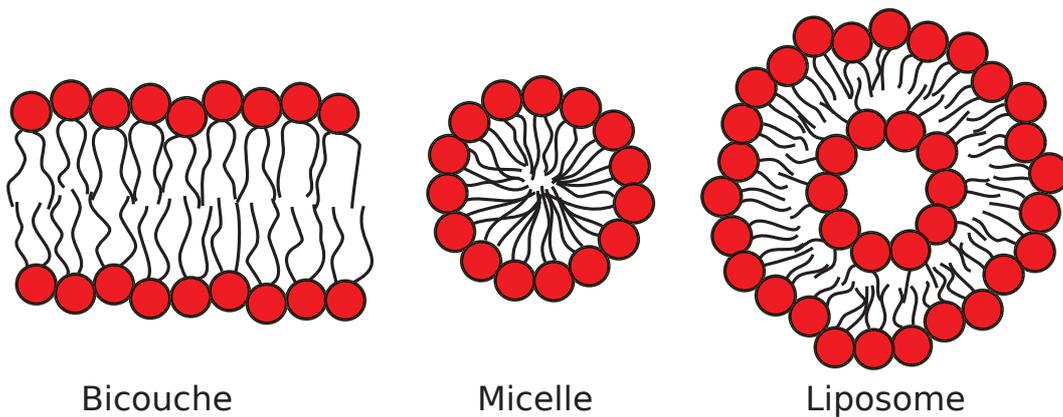
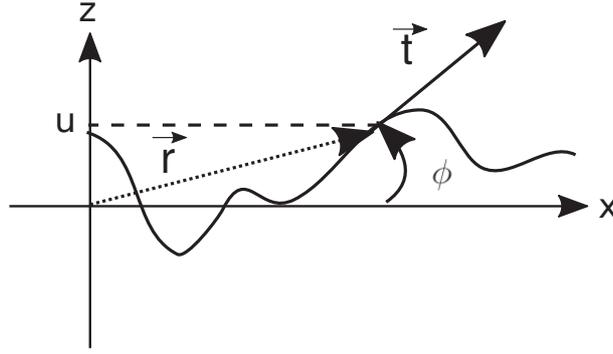


FIGURE 1.11 – Auto-organisation de phospholipides.

1.3.2 La membrane libre

Considérons une membrane libre, infiniment fine d'aire A , continue et quasi-plane. La membrane est sensible à l'agitation thermique $k_B T$ qui la déforme localement. Un point de la membrane est repéré par le vecteur $\mathbf{r}(x, y, z)$. Notons $u(x, y) = z$ le déplacement local de la membrane autour de son plan moyen et ϕ l'angle entre la tangente locale et le plan moyen (voir Fig. 1.12). Nous nous plaçons dans l'approximation des faibles amplitudes (comme la membrane est quasi-plane) ce qui entraîne [20] :

$$\|\overrightarrow{\text{grad}} u\| = \tan \phi \ll 1. \quad (1.3.1)$$

FIGURE 1.12 – Représentation dans un repère cartésien (plan $y = 0$) d'une membrane.

Cette approximation permet d'écrire :

$$C_m \approx \Delta u, \quad (1.3.2)$$

où C_m est la courbure moyenne de la surface (somme des deux courbures principales). En notant κ_c le module de courbure, l'énergie libre \mathcal{F} totale de la membrane s'écrit [20, 21, 22] :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \kappa_c \iint \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dx dy. \quad (1.3.3)$$

1.3.3 Distribution de désordre thermique

L'agitation thermique déforme la membrane et impose un désordre caractérisé par un spectre de fluctuation que nous souhaitons quantifier. L'amplitude du mode q est notée \tilde{u}_q . En décomposant l'amplitude de déformation en série de Fourier $u(\mathbf{r}) = \sum_q \tilde{u}_q \exp(j\mathbf{q}\mathbf{r})$, nous obtenons l'énergie libre de Helfrich :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \kappa_c A \sum_q q^4 |\tilde{u}_q|^2. \quad (1.3.4)$$

On constate que les modes sont indépendants et associés à une énergie quadratique. D'après le théorème d'équipartition de l'énergie, le degré de liberté associé au mode q contribue pour $k_B T/2$ à l'énergie totale. Ainsi nous obtenons la distribution d'amplitude des modes (spectre de fluctuation) de la membrane :

$$\langle |\tilde{u}_q|^2 \rangle = \frac{k_B T / A}{\kappa_c q^4}. \quad (1.3.5)$$

La distribution de *désordre* thermique est donnée par une loi de puissance d'exposant 4.

1.3.4 La membrane confinée : interaction de Helfrich

Considérons à présent une membrane confinée entre deux plaques (voir la Fig. 1.13). Pour simplifier, nous ne considérons que les interactions de volume exclu (interactions stériques) entre la membrane et les plaques [20, 23, 24]. Notons d la distance entre les plaques.

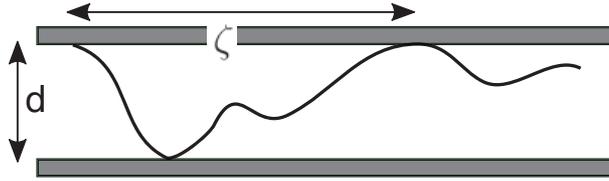


FIGURE 1.13 – Une membrane confinée entre deux plaques distantes de d . ζ est la distance caractéristique entre deux contacts avec une plaque. Schéma adapté d'après [23].

Décrire correctement les interactions entre la membrane et les plaques, ou entre deux membranes dans un empilement, est un problème de physique statistique complexe. Helfrich a été le premier à proposer une solution approchée dans le cadre d'un modèle auto-cohérent [21]. C'est cette approche qui a inspiré le modèle de Beckrich et al [6]. Nous ne présentons qu'une description simplifiée des travaux de Helfrich. L'amplitude quadratique moyenne des fluctuations est ici limitée par la distance entre les plaques :

$$\langle u^2(\mathbf{r}) \rangle \sim d^2. \quad (1.3.6)$$

La distance caractéristique entre deux contacts avec les plaques est notée ζ . Cette distance est la coupure des corrélations des fluctuations. Le plus petit nombre d'onde à prendre en compte est alors $2\pi/\zeta$. L'intégration de l'équation (1.3.5) donne :

$$\langle u^2(\mathbf{r}) \rangle \sim \frac{k_B T}{\kappa_c} \zeta \sim d^2. \quad (1.3.7)$$

La courbure moyenne de la membrane est $\sim d/\zeta^2$ soit une énergie de courbure :

$$\varepsilon \sim \kappa_c A \left(\frac{d}{\zeta^2} \right)^2 \sim \frac{(k_B T)^2}{\kappa} \frac{A}{d^2}. \quad (1.3.8)$$

Un calcul similaire montre que le terme entropique est du même ordre de grandeur et par conséquent l'énergie libre. La contrainte moyenne P exercée par les plaques sur la membrane est analogue à celle donnée par la théorie cinétique des gaz :

$$P \sim \frac{(k_B T)^2}{\kappa} d^{-3}. \quad (1.3.9)$$

Nous obtenons un exposant de 3. La contrainte est inversement proportionnelle au module de courbure ce qui peut apparaître comme contre-intuitif mais une membrane très rigide ne fluctue pratiquement pas et exerce peu de contrainte.

1.4 Mesure du module de courbure dans les systèmes thermalisés

La contrainte de déformation dépend du module de courbure, nous devons nous intéresser à sa mesure. Une méthode consiste à mesurer le degré de désordre due à l'agitation thermique. Une autre méthode consiste à mesurer l'énergie potentielle de courbure par étirement. Cela est valable pour les fibres thermiques mais aussi pour les vésicules. L'étude des fibres thermiques est intéressant car nous transposons ces méthodes directement pour mesurer le désordre (non thermique) ainsi que le module de courbure de nos fibres.

1.4.1 Mesure par les fluctuations thermiques

Considérons un filament libre de longueur curviligne L_0 , continu et semi-flexible. Notons $\theta(s)$ l'angle entre la tangente locale au point s et l'axe des abscisses. L'agitation thermique déforme le filament (voir Fig. 1.14). L'énergie libre du filament s'écrit [25, 26] :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \kappa \int_0^{L_0} ds \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2, \quad (1.4.1)$$

avec κ le module de courbure du filament. Au final nous obtenons :

$$\langle |\tilde{\theta}_q|^2 \rangle = \frac{k_B T / L_0}{\kappa q^2}. \quad (1.4.2)$$

Le spectre des fluctuations permet de mesurer le module de courbure. Il est possible d'écrire $\kappa = k_B T L_p$ en définissant L_p la longueur de persistance des modes de fluctuations d'origine thermique. C'est la longueur caractéristique

au delà de laquelle les corrélations du vecteur tangente sont négligeables. La rigidité du filament dépend du ratio entre L_p et L_0 :

- $L_p > L_0$: le filament est rigide. C'est le cas de l'actine avec $L_0 \sim 15 \mu\text{m}$ et $L_p \sim 18 \mu\text{m}$ [25, 26] (voir Fig. 1.14).
- $L_p < L_0$: le filament est semi-flexible. C'est le cas du microtubule avec $L_0 \sim 30 \mu\text{m}$ et $L_p \sim 5 \mu\text{m}$ [25, 26].
- $L_p \ll L_0$: le filament est souple. C'est le cas de l'ADN avec $L_0 \sim 10 - 100 \mu\text{m}$ et $L_p \sim 50 \text{nm}$ [27].

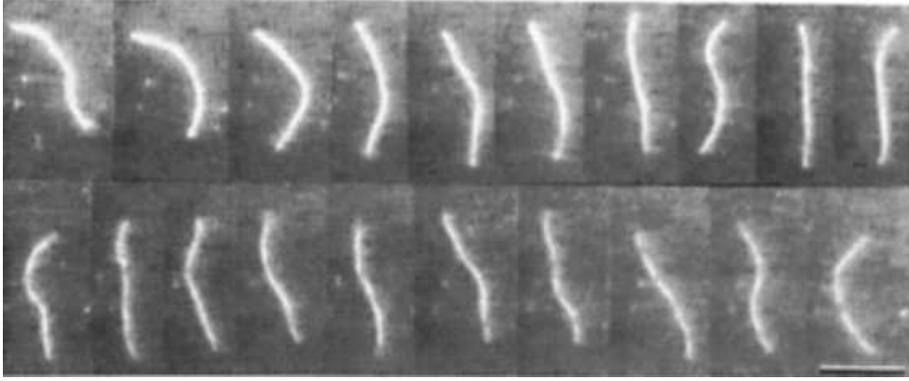


FIGURE 1.14 – Fluctuations thermiques d'un filament d'actine. La barre représente $10 \mu\text{m}$. Image de [25].

1.4.2 Mesure par dépliement du désordre

Fibres thermiques. Une autre façon de mesurer le module de courbure consiste à étirer le filament. La force caractéristique à exercer pour déplier tous les modes est de l'ordre de $k_B T / L_p \sim 0.1 \text{ pN} \sim 0.1 k_B T / \text{nm}$. L'énergie libre est changée en [27, 28] :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \kappa \int_0^{L_0} ds \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - Fx. \quad (1.4.3)$$

Après quelques manipulations classiques nous obtenons :

$$\langle \theta^2(s) \rangle = \frac{k_B T}{\sqrt{F} \kappa}. \quad (1.4.4)$$

L'extension x est donnée par $\int_0^{L_0} ds \cos \langle \theta^2(s) \rangle$. En développant au premier ordre et en utilisant (1.4.4) nous obtenons l'élasticité du filament :

$$\Pi = \frac{1}{4} \frac{(k_B T)^2}{\kappa} \frac{1}{(L_0 - x)^2}, \quad (1.4.5)$$

avec $\Pi = F/L_0^2$ qui a la dimension d'une contrainte. En mesurant la force F en fonction de l'allongement on peut déterminer κ .

Vésicules. L'aspiration par micro-pipette d'une vésicule est une méthode pour mesurer le module de courbure de sa membrane (voir Fig. 1.15). Dans une expérience de micro-pipette, il est possible de déformer une vésicule en appliquant une différence de pression ΔP qui aspire la vésicule dans la micro-pipette sur une longueur L et déplie les modes de fluctuations. Le module élastique de compression est noté κ_s (N/m). Pour des vésicules géantes $\kappa_s \sim 200$ mN/m $\sim k_B T / \text{\AA}^2$ [29, 30]. Au final :

$$\langle |\tilde{u}_q|^2 \rangle = \frac{k_B T / A}{\kappa_s q^2 + \kappa q^4}. \quad (1.4.6)$$

Il apparaît deux régimes de fluctuations. Les fluctuations de petites longueurs d'onde sont dominées par l'élasticité de courbure tandis que les fluctuations de grandes longueurs d'onde sont dominées par de la déformation d'étirement.

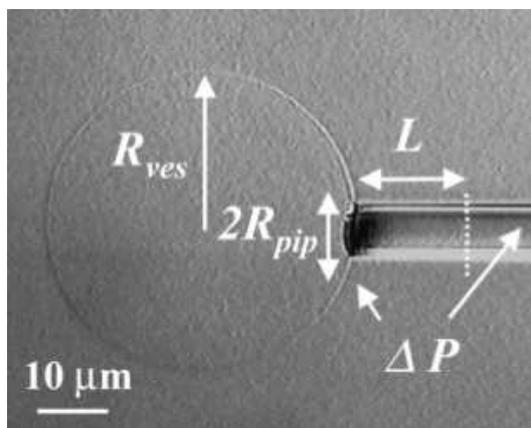


FIGURE 1.15 – Expérience de micro-pipette. La différence de pression ΔP aspire la vésicule dans la micro-pipette sur une longueur L . Photo d'après [31].

En utilisant l'équation (1.4.6), il est possible de relier ΔP à L et de déterminer κ et κ_s expérimentalement. La méthode que nous avons utilisée pour mesurer le module de courbure de nos fibres et qui sera présentée dans la suite s'inspire largement de cette technique.

Chapitre 2

Modèle d'empilement de fibres à désordre de forme

L'équipe MCube commence ses travaux sur les fibres par l'étude théorique d'un empilement à deux dimensions de fibres de forme aléatoire (Beckrich et al. [6]). Ils parviennent à déterminer de façon auto-cohérente le module de compressibilité B de l'empilement comme une fonction dépendant de la distribution de désordre. Ce travail se poursuit par la thèse de Nava Schulmann [32] qui effectue des simulations numériques sur des empilements similaires avec pour objectif de comprendre l'influence du désordre sur l'élasticité de l'empilement.

2.1 Géométrie d'une courbe plane

Nous commençons par définir les bases mathématiques que nous utiliserons par la suite. Considérons une courbe plane \mathcal{C} dans un repère plan ($x, y, z = 0$). L'abscisse curviligne le long de \mathcal{C} est notée s et la position d'un point M de \mathcal{C} est notée $\mathbf{r}(s)$ (Fig. 2.1). La tangente unitaire locale $\mathbf{t}(s)$ est définie par :

$$\mathbf{t} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (2.1.1)$$

L'angle local entre la tangente et l'axe des x est noté $\theta(s)$. Il existe un unique vecteur unitaire \mathbf{n} qui soit à la fois normal à \mathcal{C} (donc à la tangente) et contenu dans le plan (x, y) . La tangente et la normale s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{bmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Le vecteur unitaire $\mathbf{b} = \mathbf{e}_z = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ est appelé vecteur binormal et le repère $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ est orthonormé.

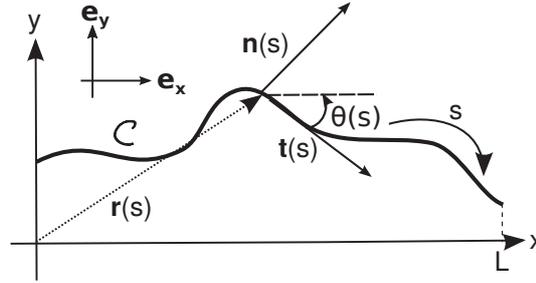


FIGURE 2.1 – Définition du repère (t, n, b) .

2.1.1 Courbure

La courbure locale de \mathcal{C} est la quantité qui caractérise l'écart de \mathcal{C} par rapport à sa tangente locale $\mathbf{t}(s)$. Si le prolongement de \mathcal{C} suit la tangente alors sa courbure est nulle. Afin d'en savoir plus, considérons qu'au point s puisse être défini un cercle tangent de rayon $R(s)$ qui approche au mieux \mathcal{C} (Fig. 2.2a). Ce cercle est le cercle osculateur. Une variation infinitésimale ds permet de définir une longueur d'arc infinitésimale :

$$ds = R(s)d\theta(s). \quad (2.1.3)$$

L'écart de \mathcal{C} par rapport à la tangente locale est le taux de rotation par unité de longueur :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} = c, \quad (2.1.4)$$

avec $c(s)$ la courbure locale. Une autre interprétation est possible, en dérivant les équations (2.1.2) nous obtenons :

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (2.1.5)$$

En posant le vecteur de Darboux :

$$\boldsymbol{\Omega} = c\mathbf{b}, \quad (2.1.6)$$

et en l'utilisant dans les équations (2.1.5) nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{t}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Les équations (2.1.7) sont similaires à une particule en rotation. Le long de \mathcal{C} les vecteurs (\mathbf{t}, \mathbf{n}) sont en rotation (plus exactement un taux de rotation par unité de longueur) avec une vitesse angulaire de norme égale à $|c(s)|$ (Fig. 2.2b).

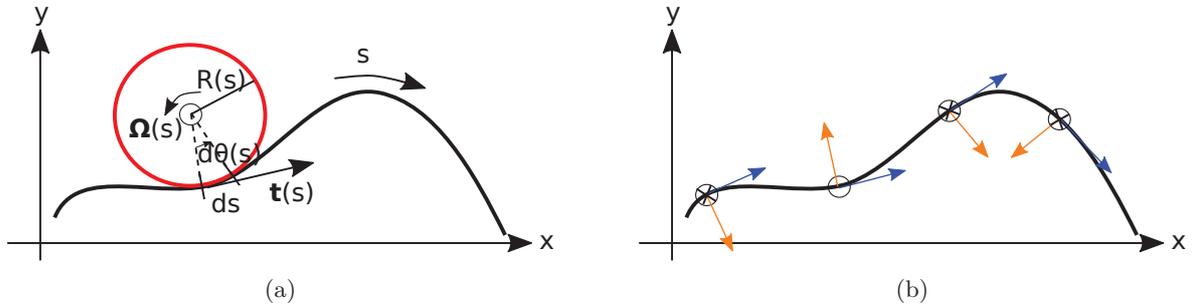


FIGURE 2.2 – (a) Le cercle osculateur définit la courbure locale. (b) La courbure peut être vue comme la rotation des vecteurs (\mathbf{t}, \mathbf{n}) le long de \mathcal{C} .

2.1.2 Énergie de courbure

Déformer l'arc nécessite de fournir un travail. Il y a donc une énergie potentielle emmagasinée dans la courbure. Considérons une configuration initiale $\{\boldsymbol{\Omega}_0(s)\}$ dont l'énergie de courbure d'une portion infinitésimale ds est notée $dE(\boldsymbol{\Omega}_0(s))$. Lors d'une déformation la courbure change de $\{\boldsymbol{\Omega}_0(s)\}$ à $\{\boldsymbol{\Omega}(s)\}$. Après un développement de Taylor au voisinage de $\boldsymbol{\Omega}_0(s)$ l'énergie de la nouvelle configuration s'écrit :

$$dE(\boldsymbol{\Omega}) = dE(\boldsymbol{\Omega}_0) + \left(\frac{dE}{d\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E}{d\boldsymbol{\Omega}^2}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0)^2 + \dots \right) ds. \quad (2.1.8)$$

Le premier terme est l'énergie de référence qui sera posée nulle par la suite. Les termes en puissance impaires sont nuls car l'énergie doit être inchangée par la transformation $(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0) \rightarrow -(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0)$ et les termes de puissance ≥ 2

sont négligés. Le terme de dérivée seconde est appelé module de courbure κ en J.m. Au final nous obtenons :

$$E = \frac{1}{2}\kappa \int_0^{L_0} (c(s) - c_0(s))^2 ds, \quad (2.1.9)$$

avec L_0 la longueur d'arc totale ou longueur curviligne.

2.1.3 Approximation de Monge

Dans le repère (x, y) l'arc est le graphe d'une fonction f définie par $y = f(x)$. Nous souhaitons connaître la courbure en fonction de f . Par géométrie nous obtenons l'angle :

$$\theta = \arctan\left(\frac{df}{dx}\right) = \arctan f^{(1)}, \quad (2.1.10)$$

où nous notons $f^{(n)} = d^n f / dx^n$. Une variation infinitésimale dx entraîne une variation $d\theta$ de :

$$d\theta = \left(\frac{f^{(2)}}{1 + (f^{(1)})^2}\right) dx, \quad (2.1.11)$$

ainsi la courbure s'écrit :

$$c = \frac{f^{(2)}}{1 + (f^{(1)})^2}. \quad (2.1.12)$$

Considérons une longueur d'arc de faible gradient, c'est-à-dire que $f^{(1)} \ll 1$ ce qui permet de linéariser la courbure :

$$c \simeq f^{(2)}. \quad (2.1.13)$$

C'est l'approximation de Monge et nous nous placerons désormais dans ce cadre pour décrire nos fibres.

2.2 Modèle de champ moyen

2.2.1 Énergie d'un empilement de fibres

Considérons un empilement de N fibres à deux dimensions dont la forme est quelconque. Un schéma est présenté en Fig. 2.3. La fibre n possède une

forme initiale $\zeta_{0,n}(x)$ et la distance moyenne entre deux fibres est notée d . Seules les plus proches voisines interagissent par des contacts stériques et on suppose que les fibres ne peuvent pas s'enchevêtrer. L'empilement n'est pas thermalisé, néanmoins Beckrich et al. [6] proposent d'utiliser un formalisme similaire à celui de Helfrich pour les membranes thermiques [21]. L'énergie interne de l'empilement est définie par :

$$E = \frac{1}{2}\kappa \sum_{n=1}^N \int_0^L \left(\zeta_n^{(2)} - \zeta_{n,0}^{(2)} \right)^2 dx + \frac{1}{2}B(d) \sum_{n=1}^N \int_0^L \left(\zeta_{n+1} - \zeta_n \right)^2 dx, \quad (2.2.1)$$

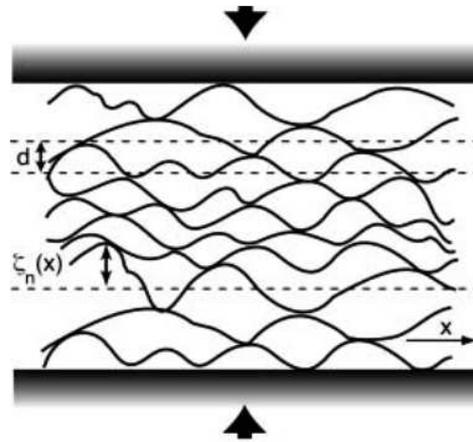


FIGURE 2.3 – Schéma d'un empilement à désordre de forme.

où B représente le module de compressibilité de l'empilement qui est la propriété mécanique collective des fibres que l'on cherche à déterminer. Le second terme représente les interactions entre les plus proches voisins. A priori l'interaction entre fibres augmente lorsque la distance entre les fibres augmente ce qui semble incohérent, mais il faut noter que B dépend de d et s'annule lorsque les fibres ne sont pas en contact.

2.2.2 Modes propres

À l'instar du traitement des membranes fluides en multicouches, nous allons décomposer l'amplitude $\zeta_n(x)$ en modes indépendants selon les deux directions. Selon l'abscisse les modes q correspondent au désordre de forme présent dans une fibre. Selon l'ordonnée les modes Q correspondent à l'alignement périodique (de période Nd) des fibres. Les modes q et Q sont indépendants (les deux termes de l'énergie sont quadratiques). Nous utilisons la

base propre $\phi_q(x)$ précisée en Annexe A.2 pour la décomposition de l'amplitude selon l'abscisse :

$$\phi_{q_i}(x) = \left(\frac{\cosh q_i L - \cos q_i L}{\sinh q_i L - \sin q_i L} \right) (\sinh q_i x - \sin q_i x) - (\cosh q_i x + \cos q_i x), \quad (2.2.2)$$

avec q_i donné par :

$$q_i = \left(\frac{1}{2} + i \right) \frac{\pi}{L}, \quad i \in N^*. \quad (2.2.3)$$

Pour la direction de l'amplitude la base propre est la base de Fourier de période Nd et de nombre d'onde Q_k :

$$Q_k = -\frac{\pi}{d} + 2 \left(\frac{k-1}{N-1} \right) \frac{\pi}{d}, \quad (2.2.4)$$

pour $k \in [1, N]$. Les indices i et k sont présents pour mettre en évidence la discrétisation des modes. Ainsi l'amplitude de la n -ième fibre est :

$$\zeta_n(x) = \sum_{q_i = \frac{3\pi}{2}}^{+\infty} \sum_{Q_k = -\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} \zeta_{n,q_i,Q_k} \phi_{q_i}(x) \exp(jQ_k nd), \quad (2.2.5)$$

où les coefficients ζ_{n,q_i,Q_k} sont donnés par la relation :

$$\zeta_{n,q_i,Q_k} = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^N \int_0^L \zeta_n(x) \phi_{q_i}(x) \exp(jQ_k nd) dx. \quad (2.2.6)$$

2.2.3 Équation d'équilibre

La déformation de l'empilement impose une forme d'équilibre $\zeta(x)$ des fibres que nous souhaiterions connaître. Cette forme est donnée par la minimisation fonctionnelle de l'énergie par rapport à $\zeta(x)$ pour toute déformation d'ordre de grandeur inférieur $\delta\zeta$:

$$\delta E = E[\zeta + \delta\zeta, \zeta_0] - E[\zeta, \zeta_0] = 0, \quad (2.2.7)$$

soit :

$$\delta E = \kappa \sum_{n=1}^N \int_0^L \left(\zeta_n^{(2)} - \zeta_{n,0}^{(2)} \right) \delta \zeta^{(2)} dx + B(d) \sum_{n=1}^N \int_0^L \left(\zeta_{n+1} - \zeta_n \right) \delta \zeta dx. \quad (2.2.8)$$

En utilisant les conditions aux limites (la fibre est libre aux extrémités¹) :

$$\begin{cases} \delta \zeta(0) = \delta \zeta^{(1)}(0) = 0, \\ \delta \zeta(L) = \delta \zeta^{(1)}(L) = 0, \end{cases} \quad (2.2.9)$$

et en intégrant par partie deux fois le terme de gauche nous obtenons :

$$\delta E = \sum_{n=1}^N \int_0^L \left[\kappa \left(\zeta_n^{(4)} - \zeta_{n,0}^{(4)} \right) + B(d) \left(\zeta_{n+1} - \zeta_n \right) \right] \delta \zeta dx, \quad (2.2.10)$$

qui conduit à l'équation d'équilibre de la n -ième fibre :

$$\kappa \left(\zeta_n^{(4)}(x) - \zeta_{0,n}^{(4)}(x) \right) + B(d) \left(\zeta_{n+1}(x) - \zeta_n(x) \right) = 0. \quad (2.2.11)$$

L'utilisation de la décomposition (2.2.5) conduit à la forme d'équilibre :

$$\zeta_{q_i, Q_k} = \zeta_{0, q_i, Q_k} \left(\frac{1}{1 + \frac{B_{Q_k}(d)}{\kappa q_i^4}} \right), \quad (2.2.12)$$

avec :

$$B_{Q_k}(d) = 2B(d)(1 - \cos(Q_k d)). \quad (2.2.13)$$

2.2.4 Densité d'énergie de l'empilement

En utilisant la forme d'équilibre 2.2.12 l'énergie interne d'interaction devient :

$$E = \frac{1}{2} \kappa L \sum_{q_i, Q_k} q_i^4 \left[\left(\zeta_{q_i, Q_k} - \zeta_{0, q_i, Q_k} \right)^2 + \frac{B_{Q_k}(d)}{\kappa q_i^4} \zeta_{q_i, Q_k}^2 \right]. \quad (2.2.14)$$

Si l'on introduit la densité d'énergie e :

$$e = \frac{E}{NLd}, \quad (2.2.15)$$

1. Ni force ni moment ne sont appliquées aux extrémités

alors :

$$e = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{Nd} \sum_{q_i, Q_k} q_i^4 \zeta_{0, q_i, Q_k}^2 \left(\frac{\frac{B_{Q_k}(d)}{\kappa q_i^4}}{1 + \frac{B_{Q_k}(d)}{\kappa q_i^4}} \right). \quad (2.2.16)$$

Rôle du désordre dans l'énergie d'interaction

Le seul terme qui est à l'origine du désordre est la forme spontanée des fibres caractérisées par ζ_{0, q_i, Q_k}^2 . La moyenne sur le désordre mène à $\langle \zeta_{0, q_i, Q_k}^2 \rangle$. En supposant que les fibres ont la même distribution de désordre on peut écrire $\langle \zeta_{0, q_i, Q_k}^2 \rangle = \langle \zeta_{0, q_i}^2 \rangle$. Ainsi la densité moyenne d'énergie est :

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{Nd} \sum_{q_i, Q_k} q_i^4 \langle \zeta_{0, q_i}^2 \rangle \left(\frac{\frac{B_{Q_k}(d)}{\kappa q_i^4}}{1 + \frac{B_{Q_k}(d)}{\kappa q_i^4}} \right). \quad (2.2.17)$$

Dans la limite de distribution continue de nombre d'onde Q ($N \gg 1$) la densité devient :

$$\langle e \rangle = \frac{\kappa}{4\pi} \sum_{q_i} q_i^4 \langle \zeta_{0, q_i}^2 \rangle \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} \left(\frac{\frac{B(Q, d)}{\kappa q_i^4}}{1 + \frac{B(Q, d)}{\kappa q_i^4}} \right) dQ, \quad (2.2.18)$$

qui conduit après intégration² à l'expression :

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{d} \sum_{q_i} q_i^4 \langle \zeta_{0, q_i}^2 \rangle \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4B(d)}{\kappa q_i^4}}} \right). \quad (2.2.19)$$

2.2.5 Équation auto-cohérente et contrainte de déformation

La densité d'énergie de l'empilement dépend du module de compressibilité que nous avons traité jusqu'à présent comme un paramètre mais nous n'avons pas, pour l'instant, d'information sur son comportement. Il nous faut une deuxième équation pour fermer ce problème. Le module de compressibilité et la contrainte P sont définis par l'équation auto-cohérente :

2. L'intégrande est paire et le changement de variable $Qd = \pi x$ facilite la résolution de l'intégration.

$$\begin{cases} P(d) = -\frac{d}{d}(\langle e \rangle d), \\ B(d) = \frac{d^2}{dd^2}(\langle e \rangle d). \end{cases} \quad (2.2.20)$$

Ainsi la relation entre la contrainte P et la compressibilité B est :

$$P(d) = - \int_{d_0}^d B(d') dd'. \quad (2.2.21)$$

Beckrich et. al se limitent aux fibres sinusoïdales de longueur d'onde λ et d'amplitude $\zeta_0 \approx d_0$ ce qui entraîne à forte compression :

$$\begin{cases} B(d) = 16\pi^4 \frac{\kappa}{\lambda^4} \left(\frac{d_0}{d}\right)^2, \\ P(d) = 16\pi^4 \frac{\kappa d_0}{\lambda^4} \left(\frac{d_0}{d}\right). \end{cases} \quad (2.2.22)$$

Nous pouvons étendre l'équation (2.2.20) à un désordre quelconque ce qui conduit à l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2 B}{dd^2} = \frac{B}{\sum_q \langle \zeta_{0,q}^2 \rangle \left(1 + \frac{4B}{\kappa q^4}\right)^{-3/2}} + \frac{6}{\kappa} \left(\frac{dB}{dd}\right)^2 \frac{\sum_q \langle \zeta_{0,q}^2 \rangle \left(1 + \frac{4B}{\kappa q^4}\right)^{-5/2}}{\sum_q \langle \zeta_{0,q}^2 \rangle \left(1 + \frac{4B}{\kappa q^4}\right)^{-3/2}}. \quad (2.2.23)$$

Si on connaît la distribution de désordre $\{q_i, \langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle\}$ alors l'équation (2.2.23) peut se résoudre par une méthode numérique en utilisant les deux conditions aux limites³ :

$$\begin{cases} B(d_0) = 0, \\ B^{(1)}(d_0) = t. \end{cases} \quad (2.2.24)$$

La valeur de t est inconnue et est déterminée par une méthode de tir. La contrainte s'obtient après intégration numérique de la solution de (2.2.23). Cette équation est valable quelque soit le désordre.

3. Première condition : le module de compressibilité est nul au premier contact

Grandeurs sans dimensions

L'échelle naturelle des longueurs est la longueur projetée L , celle des amplitudes est l'amplitude moyenne quadratique $\langle \zeta_0 \rangle$ et celle des énergies est le module κ . Ainsi l'échelle des courbures est $\zeta^{(2)} \sim \langle \zeta_0 \rangle \tilde{\zeta}^{(2)} / L^2$ ce qui entraîne que l'échelle de la densité d'énergie est $\langle e \rangle \sim \kappa \langle \zeta_0 \rangle / L^4 \langle \tilde{e} \rangle$. Au final les grandeurs réduites sont définies par :

$$\begin{cases} \langle \tilde{e} \rangle = \frac{\langle e \rangle L^4}{\kappa \langle \zeta_0 \rangle}, \\ \tilde{B} = \frac{BL^4}{\kappa}, \\ \tilde{P} = \frac{PL^4}{\kappa \langle \zeta_0 \rangle}. \end{cases} \quad (2.2.25)$$

En posant la distance moyenne entre fibres réduite $y = d / \langle \zeta_0 \rangle$ la densité d'énergie réduite s'écrit :

$$\langle \tilde{e} \rangle = \frac{1}{y} \sum_{q_i} (q_i L)^4 \frac{\langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle}{\langle \zeta_0^2 \rangle} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\tilde{B}}{(q_i L)^4}}} \right). \quad (2.2.26)$$

2.3 Simulations numériques

Nava Schulmann a effectué lors de sa thèse [32] dans notre laboratoire des simulations numériques d'empilements de fibres à deux dimensions afin de comprendre l'influence du désordre sur l'élasticité de l'empilement. Ces simulations commencent par un empilement sans désordre de fibres sinusoïdales dont l'élasticité est linéaire et exprimée de façon exacte par une description continue. Ensuite un faible désordre de phase est ajouté ainsi qu'une distribution étroite de longueurs d'onde. Cela entraîne une non linéarité de l'élasticité : un désordre, même réduit, conduit à un comportement non linéaire. Pour finir elle étudie une classe de fibres à désordre de forme très important. La forme est donnée par une gamme large de longueurs d'onde dont les amplitudes sont distribuées normalement et les variances suivent une loi de puissance. J'ai repris ses travaux et approfondi son étude dont le détail est discuté ultérieurement.

Résumé

Le modèle de champ moyen prédit une contrainte à deux dimensions qui dépend de la distribution du désordre de forme des fibres individuelles ainsi que de leurs module de courbure. Nous allons mesurer expérimentalement ces deux propriétés pour les fibres de la même manière que pour les fibres thermiques : la distribution du désordre par une analyse de la forme et le module de courbure par dépliement des modes décrivant ce désordre de forme. Nous pourrons alors comparer le modèle de champ moyen aux résultats expérimentaux et numériques.

Première partie

Matériels et méthodes

Chapitre 3

Protocoles expérimentaux

Le modèle théorique prédit que l'élasticité d'un empilement de fibres dépend de la distribution du désordre de forme des fibres individuelles ainsi que de leurs module de courbure. Dans ce chapitre nous présentons les protocoles que nous avons utilisé pour caractériser les fibres et les empilements. Nous commençons par présenter les méthodes de caractérisations des fibres individuelles (analyse de forme et module de courbure) puis les méthodes de mesures collectives (contrainte et résistance électrique).

3.1 Analyse de forme

Nous souhaitons analyser la forme des fibres individuelles expérimentales en déterminant la distribution d'amplitude ζ_{0,q_i} du mode propre q_i définie par :

$$\zeta_{0,q} = \frac{1}{N_p} \sum_{j=0}^{N_p-1} \zeta_0(x_j) \phi_{q_i}(x_j), \quad (3.1.1)$$

avec $1/N_p$, un facteur de normalisation et $\phi_{q_i}(x_j)$ la base propre qui minimise l'énergie de courbure de la fibre. D'après (A.2.7) :

$$\phi_{q_i}(x_j) = \left(\frac{\cosh q_i L - \cos q_i L}{\sinh q_i L - \sin q_i L} \right) (\sinh q_i x_j + \sin q_i x_j) - (\cosh q_i x_j + \cos q_i x_j), \quad (3.1.2)$$

où $q_i L = (i + 1/2)\pi$ et $1 \leq i \leq N_p$. Afin de savoir si l'équation (3.1.1) permet de mesurer les amplitudes des modes sur des fibres réelles, nous avons

généralisé une fibre témoin (initiale) de forme $\zeta_0^{(\text{ini})}(x)$ (Fig. 3.1a) à partir d'une distribution normale de modes connue $\zeta_{0,q}^{(\text{ini})}$ dont la variance est donnée par :

$$\langle \zeta_{0,q}^2 \rangle = \frac{c(\alpha)}{q^\alpha}, \quad (3.1.3)$$

avec $c(\alpha)$ et α les paramètres à retrouver. Cela correspond à la distribution en loi de puissance qui sera utilisée dans les simulations numériques, avec α le paramètre contrôlant la rugosité de la fibre. Nous avons ensuite imprimé et numérisé cette image (Fig. 3.1b). Nous utilisons le logiciel ImageJ afin d'extraire les coordonnées des points ce qui nous permet d'obtenir $\zeta_0^{(\text{num})}(x)$ (Fig. 3.1c). Nous appliquons ensuite notre procédure d'analyse de forme et nous obtenons la distribution de modes mesurée $\zeta_{0,q}^{(\text{mes})}$ (Fig. 3.1d) :

$$\zeta_{0,q}^{(\text{ini})} \longrightarrow \zeta_0^{(\text{ini})}(x) \longrightarrow \zeta_0^{(\text{num})}(x) \longrightarrow \zeta_{0,q}^{(\text{mes})}. \quad (3.1.4)$$

La figure 3.1 montre la comparaison entre $\zeta_0^{(\text{ini})}(x)$ et $\zeta_0^{(\text{num})}(x)$, et entre $\zeta_{0,q}^{(\text{ini})}$ et $\zeta_{0,q}^{(\text{num})}$. Le très bon accord obtenu permet de valider notre méthode. Nous appliquons cette analyse sur les fibres réelles permettant d'avoir $\langle \zeta_{0,q}^2 \rangle$.

3.2 Mesure du module de courbure par étirement

Nous souhaitons mesurer le module de courbure des fibres possédant un désordre de forme. Le module de courbure est liée à l'énergie de courbure (voir l'équation (2.1.9)). Le dépliage des modes décrivant la forme de la fibre nous permet de mesurer le module de courbure (voir Annexe B). Les fibres sont maintenues fixes par des aimants et nous utilisons le montage avec la balance (voir 3.4). Une photographie de la fibre est prise à chaque étape de l'étirement ce qui permet d'obtenir les longueurs curviligne L_0 et projetée L au cours de l'étirement (Fig. 3.3a) :

$$L = \int_0^{L_0} \cos(\theta) ds. \quad (3.2.1)$$

Les fibres sont "flambées", c'est-à-dire que nous avons introduit une flexion de grande longueur d'onde "artificielle" afin de ne pas déplier des modes dans la configuration initiale. Lors des premières étapes la fibre est redressée comme le montre la Fig. 3.2 et à partir de cette étape les modes intrinsèques sont dépliés. Nous choisissons cette étape comme état de référence.

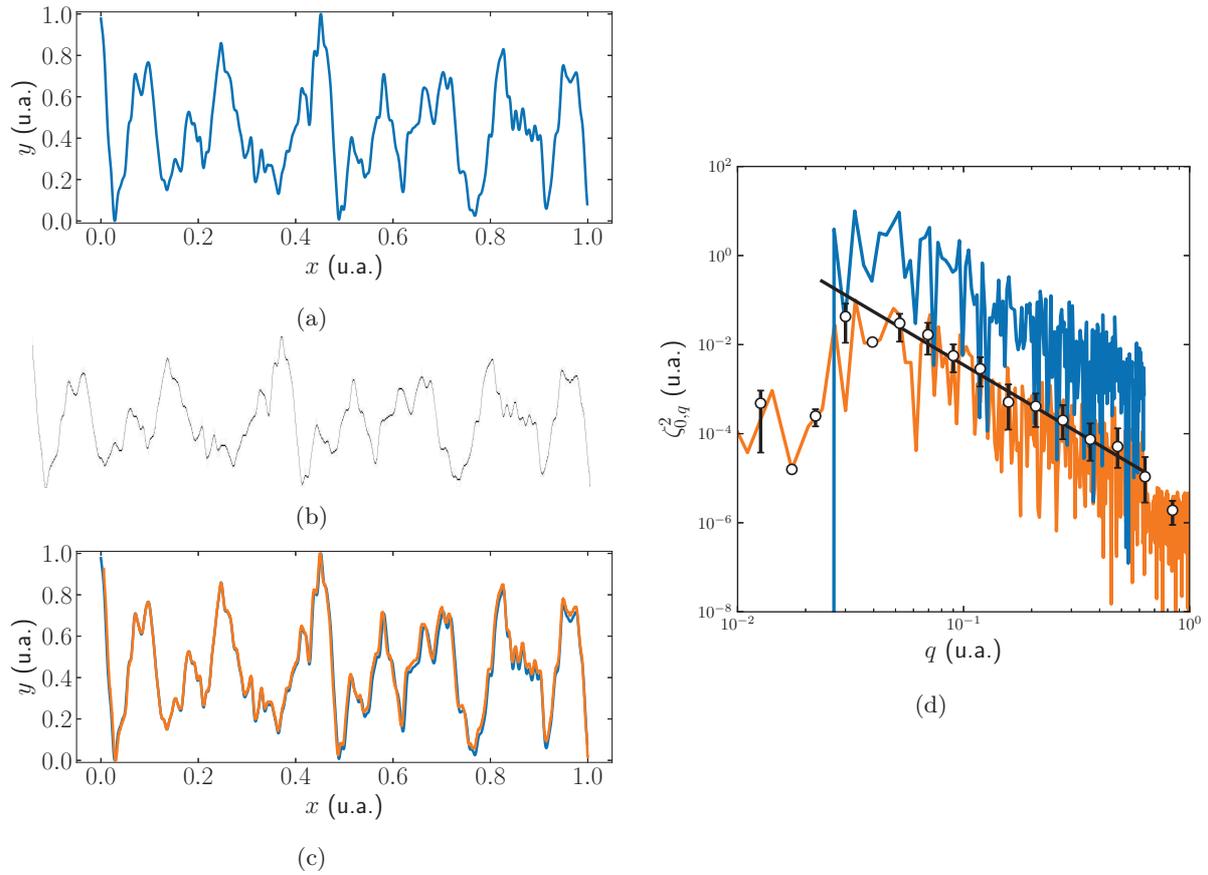


FIGURE 3.1 – (a) fibre de départ $\zeta_0^{(ini)}(x)$. (b) fibre imprimée puis numérisée $\zeta_0^{(num)}(x)$. (c) comparaison des formes de (a) et (b). (d) Analyse de forme de (a) et (c) : (—) $\zeta_0^{(ini)}$; (—) $\zeta_{0,q}^{(mes)}$; (◯) moyenne glissante ; (—) variance imposée. Les amplitudes sont volontairement décalées.

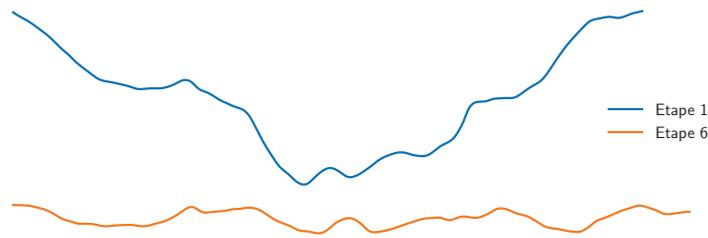


FIGURE 3.2 – Une fibre au cours d’une expérience d’étirement.

Il y a une erreur systématique (10 % maximum) dans la détermination du rapport L/L_0 . Notons δ l’écart (constant quelque soit la force) entre la valeur expérimentale et la valeur attendue de L/L_0 . Ainsi :

$$\left(\frac{L}{L_0}\right)_{\text{att}} + \delta = \left(\frac{L}{L_0}\right)_{\text{exp}}. \quad (3.2.2)$$

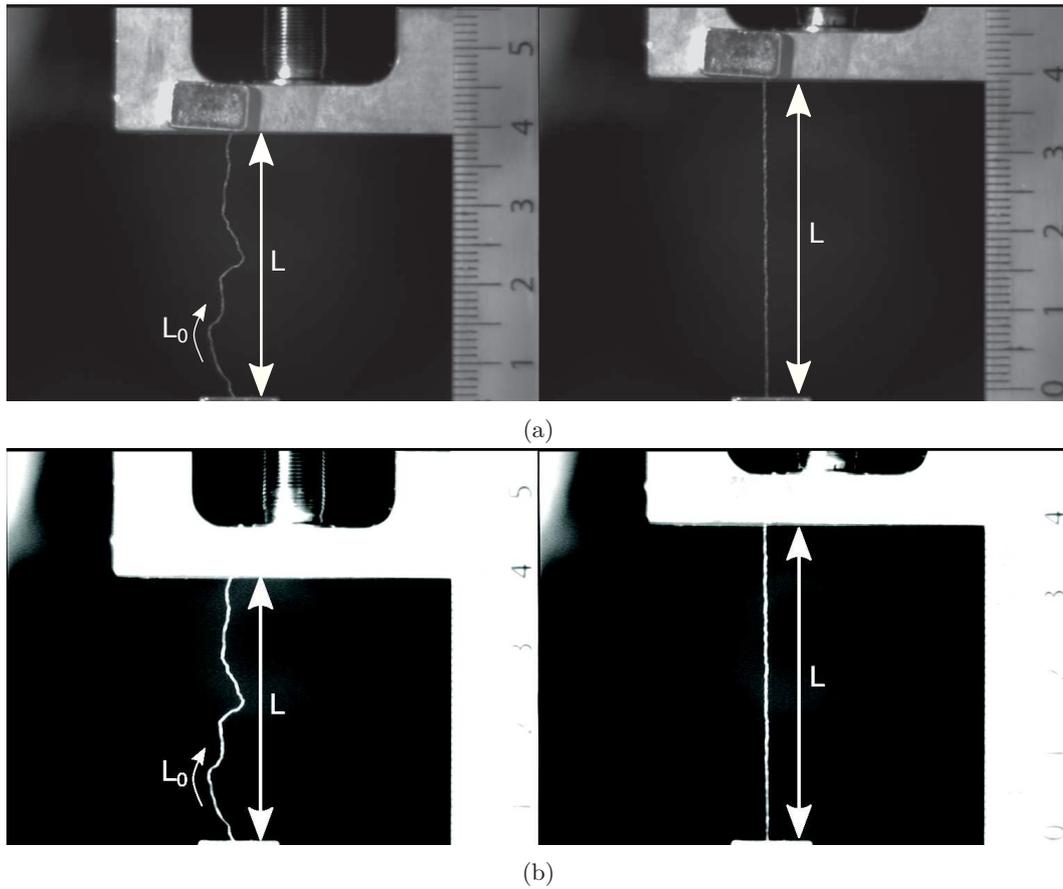


FIGURE 3.3 – (a) Photographies du montage expérimental. (b) Mêmes photographies mais avec un contraste plus grand pour la version papier.

Le point d'attache est difficile à maîtriser et à voir sur les images ce qui entraîne une sous-estimation de Δ de la longueur projetée :

$$\left(\frac{L}{L_0}\right)_{\text{exp}} \rightarrow \left(\frac{L + 2\Delta}{L_0}\right)_{\text{exp}}. \quad (3.2.3)$$

Le facteur 2 vient des deux fixations. Par identification on obtient :

$$\Delta = \frac{1}{2}L_0\delta \sim 2 \text{ mm}, \quad (3.2.4)$$

au maximum ce qui semble raisonnable.

3.3 Création des empilements fibres

Les fibres sont issues de cordes d'escalade commerciales en polypropylène (nommées PP1, PP2 et PP3), du tissu d'un pantalon standard en denim (DEN) ainsi que de pailles de fer (FE1 et FE2). Les empilements FE1 et

FE2 sont directement obtenus de ruban vendu dans le commerce (de marque Gerlon). Les cordes possèdent une double structure : des fibres lisses externes pour l'adhésion dont nous ne nous préoccupons pas ainsi que des fibres internes enroulées en paquets intermédiaires d'environ 50 à 70 fibres. Nous avons séparé les fibres les unes des autres à la main et nous les avons aligné comme le montre les photos en Fig. 3.4. Le choix des fibres est discuté dans le chapitre 5. Le nombre de fibres dans les empilements FE et PP est obtenu par pesée. La mesure de la masse M_0 (avec une balance de précision à 10^{-4} g) d'une fibre et de la masse de l'empilement M permet de connaître le nombre de fibres N au sein de l'empilement :

$$N = \frac{M}{M_0}, \quad (3.3.1)$$

tandis que pour l'empilement DEN les fibres sont comptées. En connaissant la masse volumique des fibres ρ_0 (voir la table 5.1) et la masse volumique de l'empilement ρ nous pouvons en déduire la fraction volumique Φ :

$$\Phi = \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (3.3.2)$$

L'ensemble de ces propriétés est résumé dans la table 3.1.

	ρ	M	N	Φ	Longueur	Largeur	Hauteur
	kg/m ³	g		%	cm	cm	cm
PP1	4.2	$(560.0 \pm 0.1) \times 10^{-3}$	1755 ± 15	0.42	8.0 ± 0.1	6.0 ± 0.1	2.8 ± 0.1
PP2	10	$(1780.0 \pm 0.1) \times 10^{-3}$	6070 ± 40	1.3	13.0 ± 0.1	4.5 ± 0.1	2.9 ± 0.1
PP3	27	$(765.0 \pm 0.1) \times 10^{-3}$	20000 ± 1000	3.9	7.5 ± 0.1	2.5 ± 0.1	1.7 ± 0.1
DEN	86	$(1733.7 \pm 0.1) \times 10^{-3}$	378 ± 1	22	5.7 ± 0.1	2.2 ± 0.1	1.5 ± 0.1
FE1	51	16.1818 ± 0.0001	9300 ± 100	0.65	10.5 ± 0.1	7.5 ± 0.1	4.0 ± 0.1
FE2	51	22.5244 ± 0.0001	2750 ± 50	0.65	7.5 ± 0.1	13.0 ± 0.1	4.5 ± 0.1

TABLE 3.1 – Propriétés des empilements.

3.4 Expérience de compression

Nous utilisons deux montages de mesure de force. Le premier montage (Fig. 3.5a) utilise une balance de précision de Mettler Toledo interfacée dont les caractéristiques qui nous intéressent sont :

- précision : $\pm 2 \times 10^{-4}$ N.

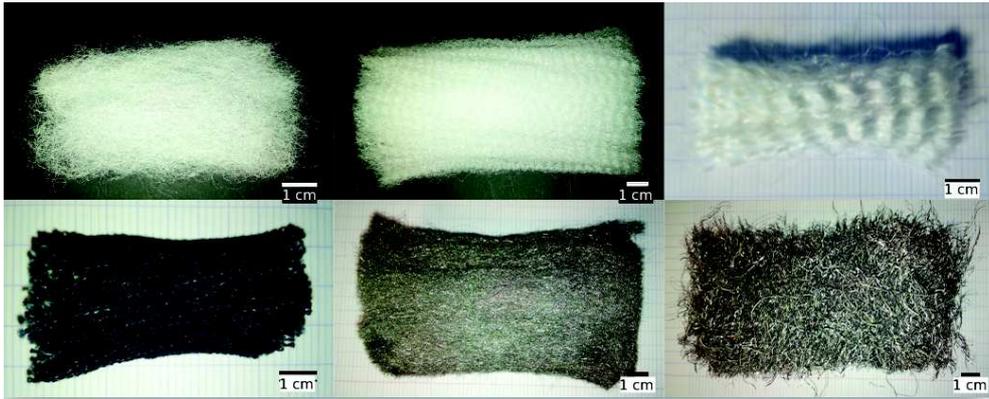


FIGURE 3.4 – Photographies des empilements de fibres. De gauche à droite et de haut en bas : PP1, PP2, PP3, DEN, FE1 et FE2. Les barres d’échelles représentent 1 cm.

- gamme de mesure : 2×10^{-4} - 40 N (six décades).
- raideur : ~ 10 MPa.

Nous déformons nos échantillons à l’aide d’une plaque reliée à un moteur pas-à-pas d’une course maximale de 22 mm. La hauteur de départ est mesurée à la règle graduée au demi-millimètre ce qui donne une incertitude de lecture de 1 mm. Ces incertitudes dominent les incertitudes de position du moteur. Les hauteurs typiques sont de l’ordre du cm soit une précision de mesure de l’ordre de quelques %. Lorsqu’une contrainte est exercée sur le plateau de la balance celui-ci s’enfonce de 1 mm tout au plus mais ce n’est pas négligeable en comparaison de la distance typique de déformation. Afin de mesurer cet enfoncement nous avons posé la plaque sur le plateau de la balance et lancé une acquisition (Fig. 3.5c). L’ajustement de ces données permet de connaître l’enfoncement pour chaque force appliquée. La plaque de déformation est un matériau polymère dont la raideur typique est de quelques dizaines de MPa ce qui est suffisant pour nos expériences. Le second montage (Fig. 3.5b) est une machine de force Electropuls E3000 de Instron dont les caractéristiques qui nous intéressent sont :

- précision : $\pm 10^{-2}$ N.
- gamme de mesure : 10^{-2} - 10 N. (trois décades, capteur 10 N).
- raideur : ~ 100 MPa.

La gamme de contraintes du second montage est plus faible mais il possède un système d’asservissement en position et en contrainte ce qui nous permet de faire des expériences de relaxation de contrainte. Pour les expériences électriques nous avons couvert les plaques avec du papier aluminium et nous

avons mesuré la résistance électrique entre les plaques avec un montage à quatre fils (Fig. 3.5d).

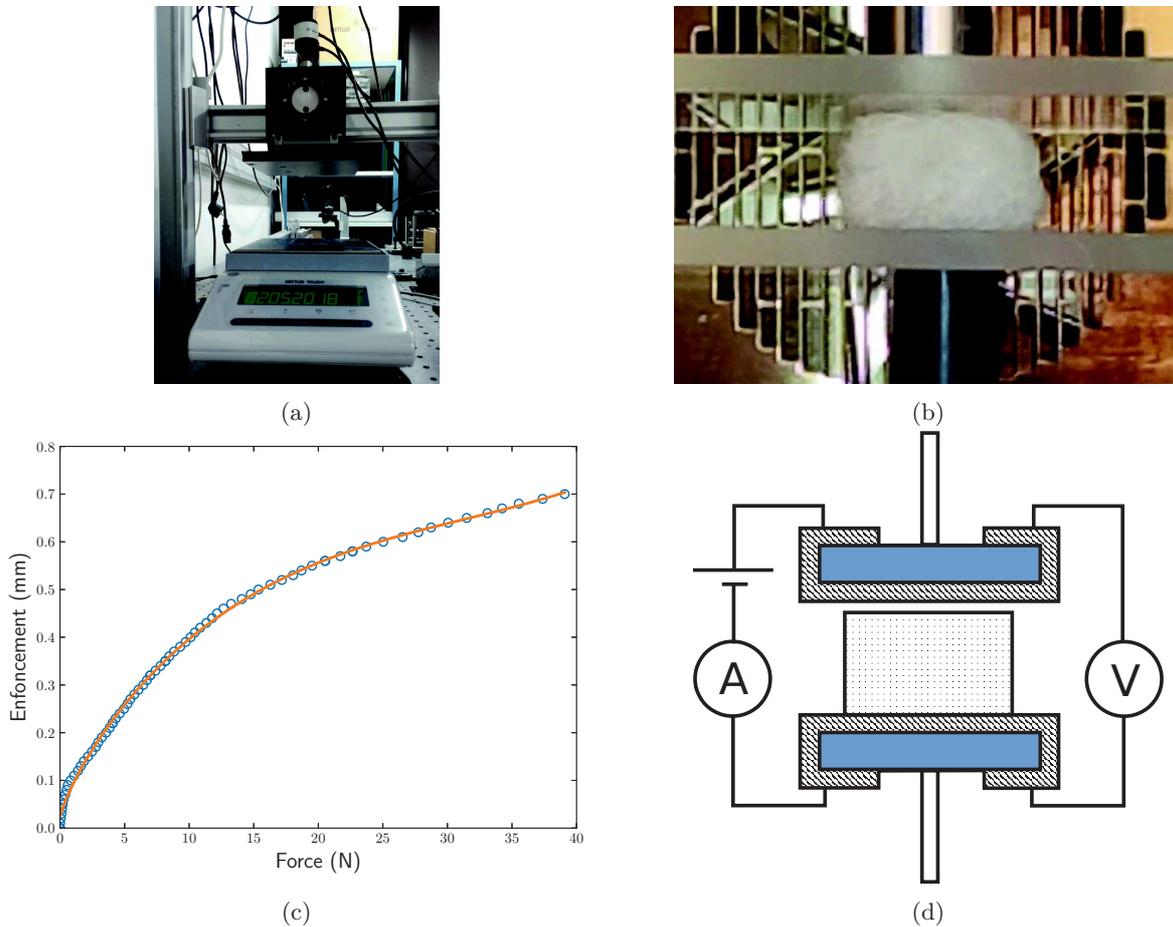


FIGURE 3.5 – (a) Photographie du premier montage. (b) Photographie du second montage. (c) Enfoncement du plateau de la balance en fonction de la force. (d) Schéma du montage de mesure de la résistance avec une méthode à 4 fils.

La hauteur initiale D_0 de l'empilement correspond à la distance entre les plaques lors de la mesure de la première force. Nous filmons les expériences de compression ce qui nous permet de connaître l'évolution de la largeur de contact l . Un exemple est donnée en Fig. 3.6a. La longueur varie très peu et peut être considérée comme constante, ainsi nous connaissons la surface de contact S au cours de la déformation.

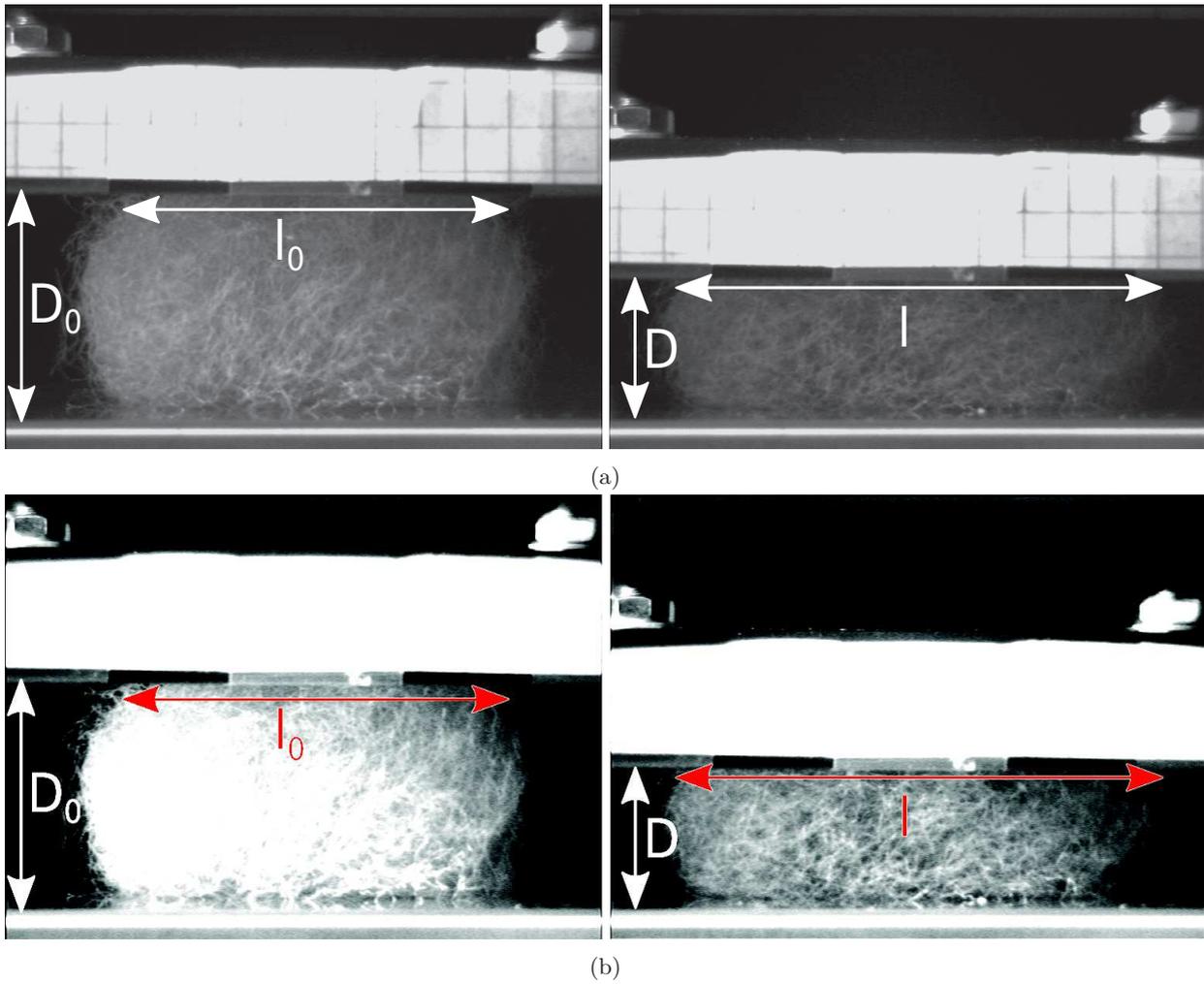


FIGURE 3.6 – (a) Photographies d'une expérience de compression. (b) Mêmes photographies mais avec un contraste plus grand pour la version papier.

Chapitre 4

Simulations numériques : mécanique moléculaire

Pour décrire nos fibres nous utilisons un modèle discret de billes, régulièrement utilisé en physique des polymères. Tout d'abords nous présentons le modèle de bille puis nous présentons les trois différentes classes d'empilements de fibres que nous avons étudié.

4.1 Modèle de billes

Une fibre est modélisée par une chaîne de N billes de diamètre σ . Le nombre de billes dans une fibre définit directement sa longueur curviligne. Deux billes adjacentes sont séparées d'une distance d'équilibre r_0 et l'angle spontanée entre deux liaisons adjacentes est θ_0 . L'ensemble $\{r_0, \theta_0\}$ définit la configuration spontanée de la fibre. Les billes d'une même fibre sont liées par un potentiel harmonique \mathcal{H}_b :

$$\mathcal{H}_b(r) = \frac{1}{2}b(r - r_0)^2. \quad (4.1.1)$$

La flexibilité d'une fibre est définie par un potentiel de courbure \mathcal{H}_θ :

$$\mathcal{H}_\theta(\theta) = K(\theta - \theta_0)^2, \quad (4.1.2)$$

avec K le module angulaire lié au module de courbure par $\kappa = 2Kr_0$. Les billes de deux fibres différentes interagissent entre elles avec un potentiel Lennard-Jones \mathcal{H}_{LJ} purement répulsif, tronqué et dont le minimum est nul (voir la Fig. 4.1a) :

$$\mathcal{H}_{LJ}(r) = 4\epsilon \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} + \epsilon, \quad r/\sigma \leq 2^{1/6}, \quad (4.1.3)$$

où ϵ est l'intensité du potentiel de répulsion et σ le diamètre des billes. Les billes de la même fibre n'interagissent pas avec ce potentiel. Le hamiltonien total \mathcal{H} du système d'empilement est :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_\theta + \mathcal{H}_{LJ}. \quad (4.1.4)$$

Les interactions sont schématisées en Fig. 4.1b.

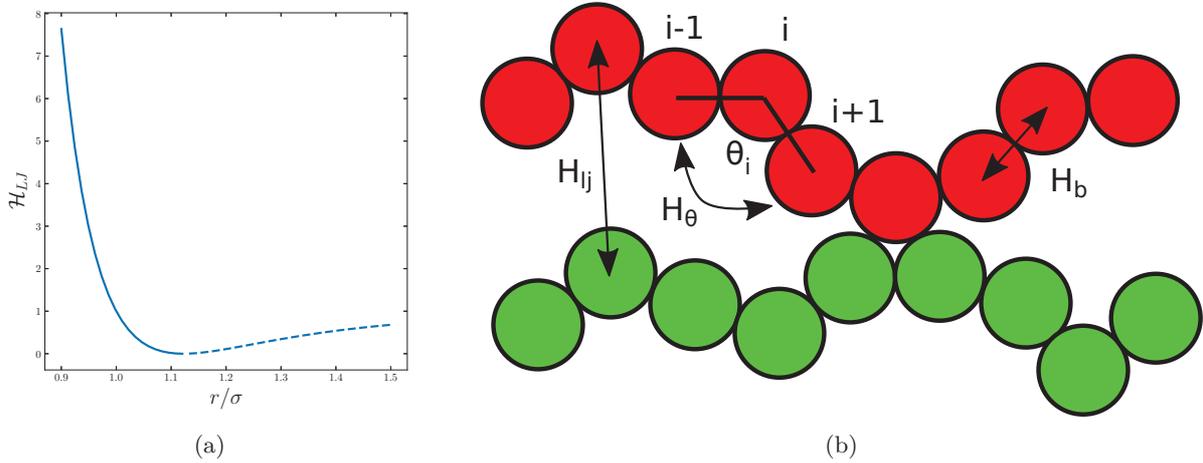


FIGURE 4.1 – (a) (—) Potentiel de LJ utilisé; (- - -) potentiel de LJ complet. (b) Définition des grandeurs utiles.

L'agitation thermique est imposée à 0 pour toutes les billes. Le tenseur des contraintes est alors donné par :

$$p_{ab} = \frac{1}{V} \sum_{i < j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_{ij}} \frac{r_{ij}^a r_{ij}^b}{r_{ij}}, \quad (4.1.5)$$

avec $a, b = x, y$ ou z . Nous nous sommes intéressés à la composante p_{yy} selon l'axe de déformation y . Pour toutes les simulations nous utilisons en unités LJ¹ :

1. Dans les unités LJ, les quantités sont sans dimension. Les distances sont en unité σ et les énergies en ϵ . Les quantités fondamentales sont égales à 1 et les grandeurs que nous définissons sont des multiples de ces quantités fondamentales.

$$\begin{cases} r_0 = 1, \\ b = 600, \\ \kappa = 2000, \\ \sigma = 1, \\ \epsilon = 1. \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Chaque étape de configuration est obtenue par une minimisation de l'énergie selon la méthode "steepest descent" qui consiste à suivre le chemin de plus forte pente afin de converger vers un minimum local. Nous utilisons le code de dynamique moléculaire classique LAMMPS (Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator). Bien que ce code soit conçu pour la dynamique moléculaire il est possible de l'utiliser pour de la mécanique moléculaire sans difficulté. L'angle dans LAMMPS est défini entre $[-\pi; \pi]$ ce qui conduit à une inversion de l'angle durant l'étape de minimisation et doit être redéfini entre $[0; 2\pi]$. La déformation de la boîte de simulation est faite par pas de 0.3% afin d'avoir des étapes de minimisation de l'énergie les plus rapides possibles sans pour autant perdre en précision.

4.2 Génération d'une configuration

Nous considérons trois classes de configuration. Dans la première classe que nous appelons état de référence les fibres sont sinusoïdales et parfaitement ordonnées (voir Fig. 4.2a). L'élasticité de cette classe peut être calculée analytiquement ce qui nous permet de calibrer notre méthode de simulation. Dans la seconde classe, état désordonné à un mode, nous ajoutons un désordre de phase ainsi qu'un désordre de longueur d'onde (voir Fig. 4.2b). Pour finir nous considérons une classe à fort désordre appelé état désordonné en loi de puissance.

État de référence parfaitement ordonné. La forme $\zeta_{0,n}(x)$ de la n -ième fibre dans l'empilement (Fig. 4.2a) est donnée par :

$$\zeta_{0,n}(x) = \frac{1}{2} \frac{D_0}{N} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x + \phi_n\right), \quad (4.2.1)$$

avec $n = 1, \dots, N$. Les conditions pour un empilement parfaitement ordonné sont :

$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda_0, \\ \phi_n = (1 - (-1)^n) \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

État désordonné à un mode. À présent le déphasage ϕ_n est distribué aléatoirement et homogènement dans l'espace des phases et la longueur d'onde λ_n est distribuée normalement de moyenne λ_0 et d'écart-type $\delta\lambda$:

$$\begin{cases} \phi_n \in [0, 2\pi], \\ \mathcal{P}(\phi_n) = \frac{1}{2\pi}, \\ \mathcal{P}(\lambda_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta\lambda} \exp\left(-\frac{(\lambda_n - \lambda_0)^2}{\delta\lambda^2}\right). \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Le déphasage de longueur d'onde est faible $\delta\lambda/\lambda_0 \sim 5\%$, mais suffisant pour empêcher un empilement compact des fibres (Fig. 4.2b).

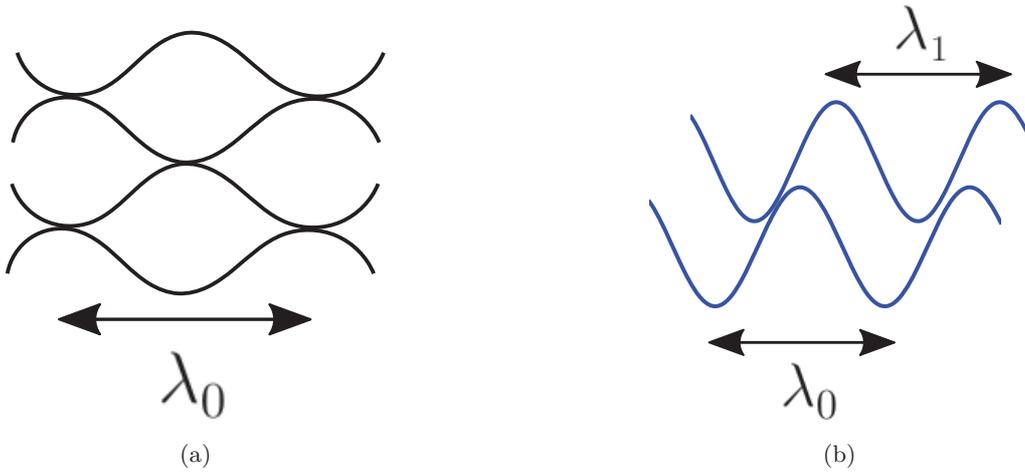


FIGURE 4.2 – (a) État de référence parfaitement ordonné. (b) État désordonné à un mode.

État désordonné en loi de puissance. La forme $\zeta_0(x)$ est obtenue à partir de la superposition des fonctions propres $\phi_{q_i}(x)$ de l'opérateur Laplacien carré précisé en Annexe A.2 :

$$\zeta_0(x) = \sum_i \zeta_{0,q_i} \phi_{q_i}(x), \quad (4.2.4)$$

avec ζ_{0,q_i} l'amplitude du mode q_i de la n -ième fibre. Les modes q_i sont choisis selon $q_i = (i + 1/2)\pi/L$ avec $i \in N^*$. L'amplitude d'un mode est distribuée normalement de moyenne nulle et de variance $\langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle$:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i = \left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}, \\ \mathcal{P}(\zeta_{0,q_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{\zeta_{0,q_i}^2}{\langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle}\right), \\ \langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle = \frac{c(\alpha)}{q_i^\alpha}. \end{array} \right. \quad (4.2.5)$$

La Fig. 4.3a représente la densité de probabilité des amplitudes tirées au sort pour générer les 100 fibres d'un empilement pour un mode q_i et pour trois empilements différents. La densité de probabilité obtenue est conforme à la distribution imposée. Nous avons coupé les sept premiers modes afin de ne pas avoir de modes proches de la longueur projetée. Cela change la fonction $\zeta(\alpha, 3/2)$ en $\zeta(\alpha, 7 + 3/2)$ dans les expressions. Des exemples de fibres obtenues sont montrées en Fig. 4.3c. La Fig. 4.3d montre que l'amplitude quadratique moyenne des fibres est en accord avec la valeur attendue (8.3.7).

Les fibres rugueuses dont $\alpha \leq 2.5$ présentent des interactions LJ intrafibre à longue portée schématisées en Fig. 4.4. Ces interactions sont gênantes car elles déforment la forme initiale de la fibre même lorsque celle ci est isolée. Afin de s'en affranchir une coupure aux grands modes est introduite. La distribution des amplitudes des modes pour chaque fibre est représentée en Fig. 4.3b.

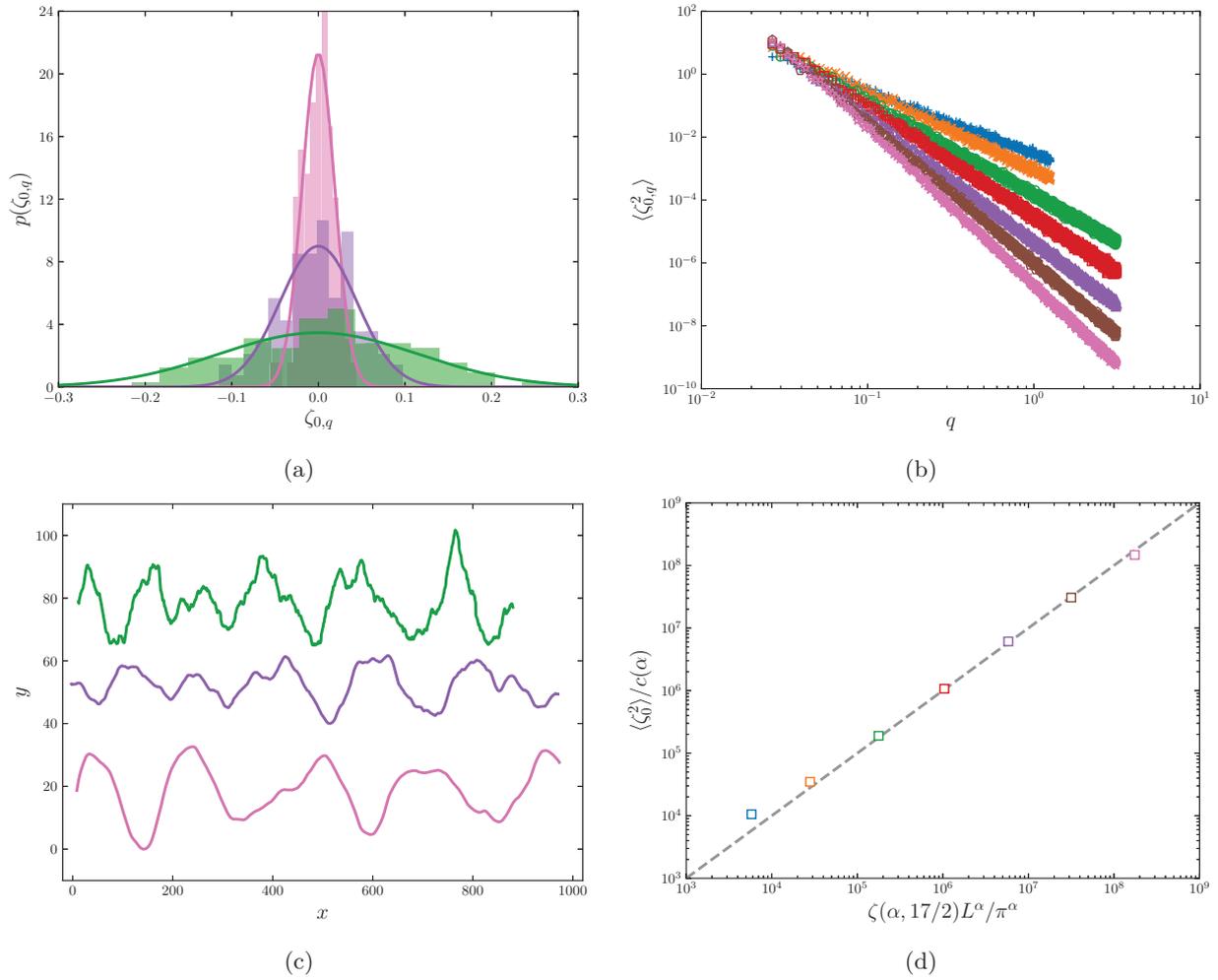


FIGURE 4.3 – (a) Densité de probabilité de tirer une amplitude $\zeta_{0,q}$ pour un mode donné : (■) $\alpha = 3.0$; (■) $\alpha = 4.0$; (■) $\alpha = 5.0$; (—) Distribution normale de moyenne 0 et de variance $\sigma = C/q^\alpha$. (b) Distribution moyenne de modes dans l’empilement : (+) $\alpha = 2.0$; (×) $\alpha = 2.5$; (○) $\alpha = 3.0$; (□) $\alpha = 3.5$; (△) $\alpha = 4.0$; (◇) $\alpha = 4.5$; (☆) $\alpha = 5.0$. (c) Fibres pour différentes valeurs de α : (—) $\alpha = 3.0$; (—) $\alpha = 4.0$; (—) $\alpha = 5.0$. (d) Comparaison du $\langle \zeta_0^2 \rangle$ des fibres obtenue au modèle théorique (8.3.6) : (□) $\alpha = 2.0$, (□) $\alpha = 2.5$; (□) $\alpha = 3.0$; (□) $\alpha = 3.5$; (□) $\alpha = 4.0$; (□) $\alpha = 4.5$; (□) $\alpha = 5.0$; (---) $y = x$.

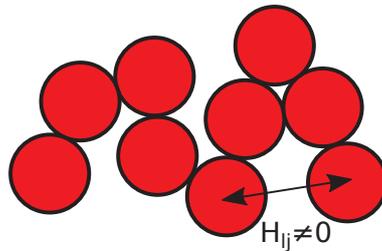


FIGURE 4.4 – Interactions à longue portée entre des billes d’une même fibre.

Deuxième partie

Mesures des propriétés individuelles

Le modèle auto-cohérent montre que l'élasticité d'un empilement de fibres dépend de la distribution du désordre de forme ainsi que du module de courbure des fibres individuelles. La première étape est d'obtenir ces propriétés intrinsèques. Nous décrivons le désordre de forme par une distribution d'amplitude de modes. Nous mettons en évidence deux types d'échantillons : les fibres possédant une distribution d'amplitude de modes bien décrite par un paramètre de rugosité et les fibres possédant en plus un mode dominant. Nous mesurons le module de courbure d'une fibre à l'aide de deux méthodes. Une méthode par le dépliement des modes décrivant sa forme. Cette méthode suppose une fibre élastique faiblement torsadée. Pour une fibre non élastique et possédant un fort module de torsion nous mesurons le module de courbure en étudiant les vibrations de la fibre.

Chapitre 5

Analyse de forme des fibres

La distribution de désordre dans l'empilement est nécessaire pour calculer la contrainte 2D de déformation. Ce chapitre décrit l'analyse de formes des fibres et comment nous en obtenons la distribution de désordre.

5.1 Les fibres

Les fibres étudiées proviennent du détraissage de cordes d'escalade commerciales en polypropylène (PP1, PP2 et PP3), d'un pantalon en denim standard (DEN) et de laine d'acier commerciales (FE1 et FE2). Une photographie de chaque type de fibres est présentée en Fig. 5.1a. Les fibres PP1 possèdent une distribution de longueurs d'onde intéressante, elles ressemblent à première vue aux fibres à désordre aléatoire générées pour les simulations numériques. Les fibres PP3 ont une longueur d'onde dominante de l'ordre de 10 mm. Les fibres PP2 sont intermédiaires à PP1 et PP3 : elles possèdent aussi une longueur d'onde dominante de l'ordre de 5 mm. Les fibres DEN sont crénelées. Les fibres FE1 et FE2 ressemblent aux fibres PP1 avec des longueurs d'onde et amplitudes plus grandes. Les fibres PP1, PP2 et FE1 sont légèrement torsadées mais l'amplitude moyenne quadratique transverse est négligeable devant $\langle \zeta_0 \rangle$. En Fig. 5.1b est présentée l'image au microscope optique de la section d'une fibre PP1.

Nous avons aussi observé la section transversales des fibres au microscope optique. Celles-ci sont représentées en Fig. 5.2. Les sections des fibres PP1 et PP2 sont de formes étoilées, de diamètres de l'ordre de 50 - 100 μm soit l'ordre de grandeur de l'épaisseur d'un cheveu. Les sections des fibres PP3

sont ovales et bien plus fines avec un diamètre de l'ordre de 20 μm . Les fibres DEN sont constituées de plusieurs fibres trop fines pour être extraites. Les fibres de fer sont des rubans dont le grand diamètre est de l'ordre de 200 μm . Les formes sont très particulières. Elles sont probablement imposées par le processus de fabrications des fibres (extrusion, rabotage...) et très certainement modifiées lorsque nous les coupons. Pour toutes ces raisons nous utiliserons les valeurs obtenues avec précautions, et uniquement pour obtenir des ordres de grandeurs de certaines quantités physiques.

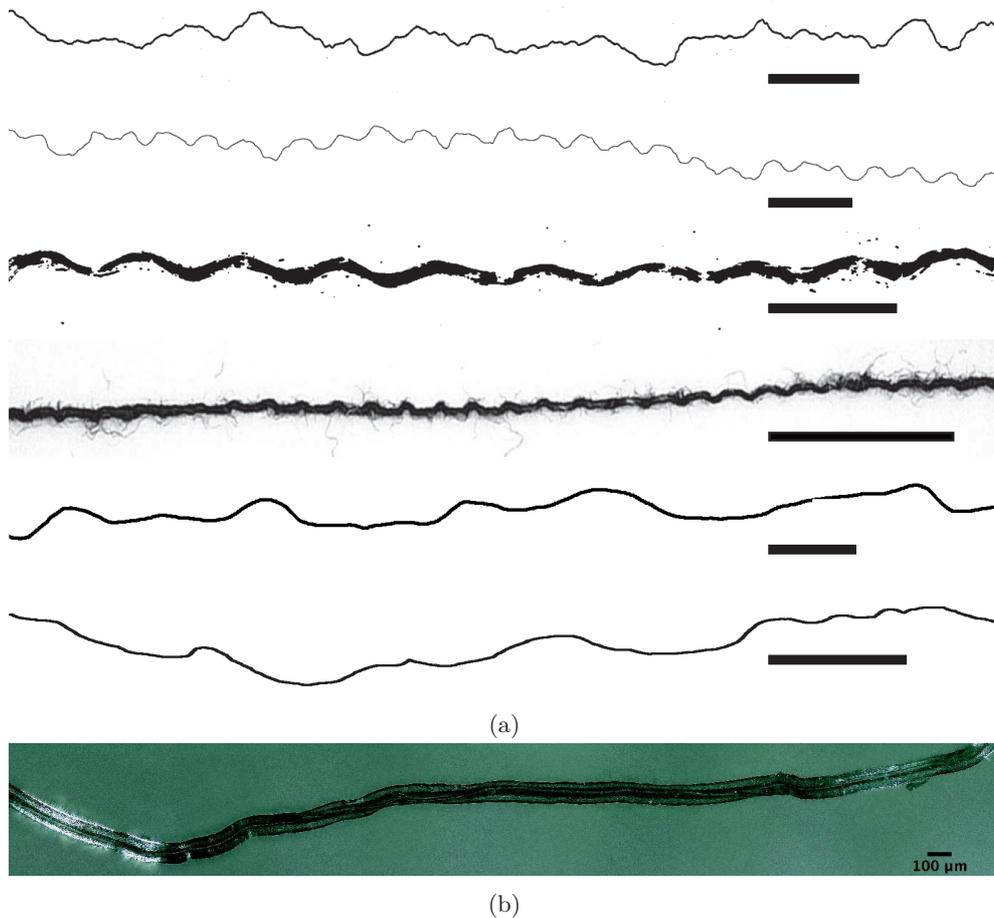


FIGURE 5.1 – Échantillons de fibres. (a) Images des fibres étudiées : de haut en bas : PP1, PP2, PP3, DEN, FE1 et FE2. Les barres d'échelles représentent 1 cm. (b) Image au microscope optique d'une fibre PP1. Les fibres PP1 ne sont pas cylindrique. L'image est réalisée à l'aide d'un microscope optique numérique qui balaye en altitude en prenant des images et reconstitue une image finale avec chaque plan de focalisation net.

La mesure de la masse M_0 et de la longueur totale L_0 de quelques fibres permet d'obtenir la masse linéique M_0/L_0 . La mesure de l'aire de la section A d'une fibre par microscopie optique permet d'estimer sa masse volumique

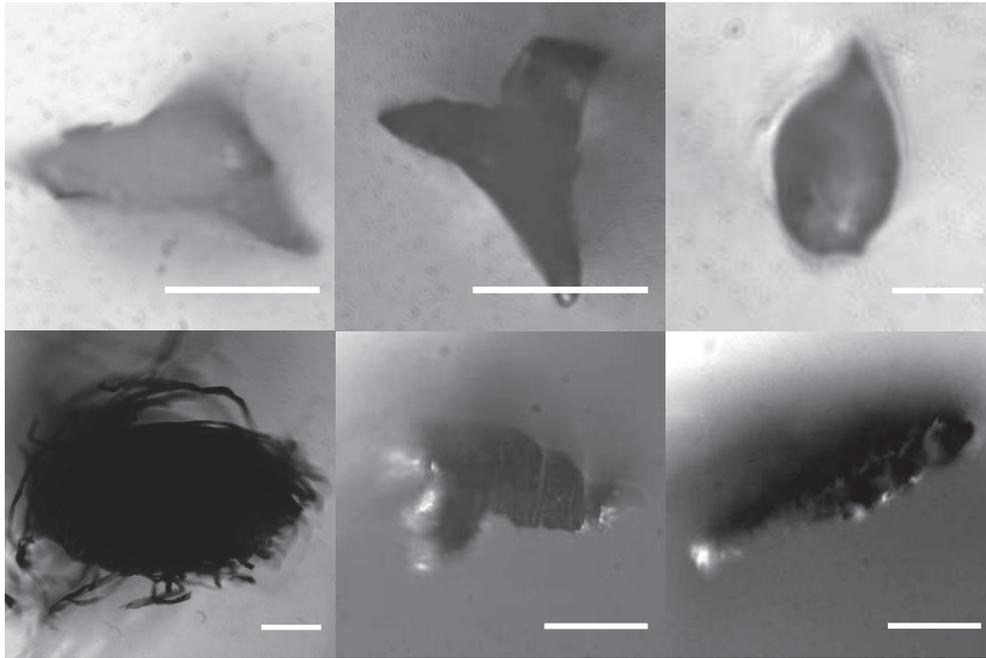


FIGURE 5.2 – Images au microscope optique par réflexion de la section de fibres. En haut, de gauche à droite : PP1, PP2 et PP3. En bas, de gauche à droite : DEN, FE1 et FE2. Les barres d'échelles sont différentes ; PP1 et PP2 : 50 μm , PP3 : 20 μm , DEN, FE1 et FE2 : 100 μm .

ρ_0 en supposant que la section est uniforme le long de la fibre :

$$\rho_0 = \frac{M_0}{L_0 A}. \quad (5.1.1)$$

Les valeurs des masses volumiques mesurées sont cohérentes avec les valeurs tabulées pour le PP. La masse volumique des fibres DEN est bien en dessous de l'ordre de grandeur attendu pour de la cellulose ce qui suggère que la fraction volumique des fils de trame est de $\sim 25\%$. L'ensemble de ces propriétés sont représentées dans la Table 5.1.

	M_0/L_0	A	ρ_0	ρ_{tab}
	$\mu\text{g}/\text{cm}$	$\mu\text{m}^2 \times 10^{-3}$	kg/m^3	kg/m^3
PP1	24.3 ± 0.7	2.45 ± 0.06	0.99 ± 0.04	0.65 - 0.97
PP2	17.4 ± 0.5	2.20 ± 0.02	0.79 ± 0.03	0.65 - 0.97
PP3	4.7 ± 0.5	0.68 ± 0.01	0.69 ± 0.08	0.65 - 0.97
DEN	853 ± 9	218 ± 2	0.39 ± 0.05	1.5
FE1	110 ± 2	18.6 ± 0.3	5.9	7.9
FE2	607 ± 11	11.4 ± 0.3	5.3	7.9

TABLE 5.1 – Propriétés géométriques des fibres. Les valeurs tabulées sont issues de [33].

5.2 Distribution des amplitudes des modes propres

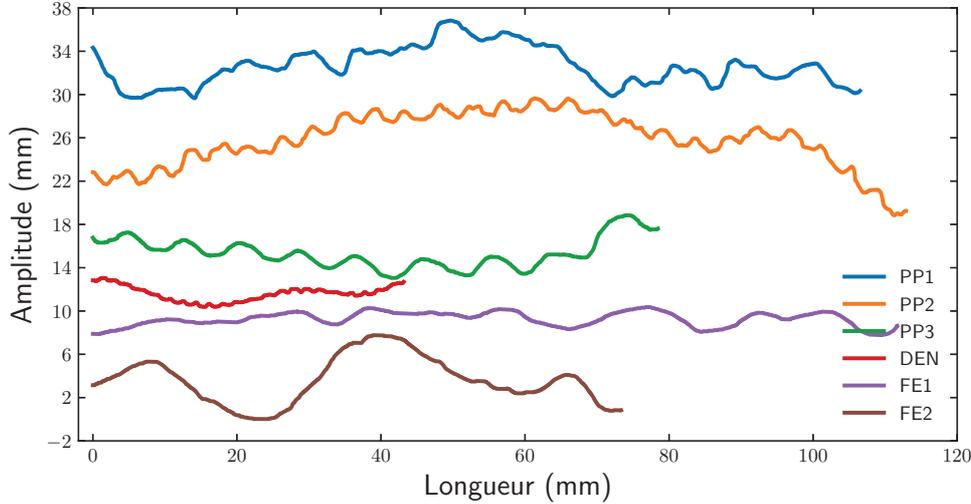


FIGURE 5.3 – Différentes formes de fibres numérisées.

Nous souhaitons connaître la distribution des amplitudes des modes décrivant la forme d'une fibre car elle détermine le désordre dans l'empilement. Nous avons numérisé 40 fibres de chaque type (12 fibres pour PP3 car elles sont suffisamment régulières) afin d'avoir un échantillon représentatif. Nous avons appliqué à chaque fibres la méthode décrite en 3.1. La difficulté est de réaliser une image d'une fibre à l'état libre, c'est-à-dire sans l'étirer auquel cas nous déformons l'amplitude de certains modes. Nous avons fait le choix de flamber légèrement les fibres : cela ajoute des longueurs d'onde de l'ordre de la longueur de la fibre qui ne sont pas présentes dans les empilements. Ce problème est résolu en ne tenant pas compte de ces amplitudes dans le calcul de la contrainte théorique. Le spectre du carré de l'amplitude $\zeta_{0,q}^2$ des nombres d'onde pour une fibre PP1 est représenté en Fig. 5.4a. En Fig. 5.4b est également représentée le spectre de l'ensemble des 40 fibres PP1. La dispersion des valeurs est grande et s'étale sur 2 à 4 décades. La distribution spectrale moyenne pour les fibres PP1 est représentée en Fig 5.5, les barres d'incertitudes sont statistiques. Le spectre en échelle log-log possède un domaine linéaire ce qui suggère une distribution en loi de puissance du type :

$$\langle \zeta_{0,q}^2 \rangle = \frac{c(\alpha)}{q^\alpha}, \quad (5.2.1)$$

avec α le paramètre de rugosité. Les spectres obtenus sont représentés en Fig. 5.6. Les valeurs de $c(\alpha)$ et α obtenues pour chaque type de fibres sont données dans la table 5.2. Les amplitudes dominantes sont présentes pour $\lambda \geq 3$ mm. Nous observons pour PP2 une longueur d'onde dominante de 4.3 mm d'amplitude 0.25 mm (amplitude pic-à-pic de 0.5 mm) et pour PP3 la longueur d'onde est de 9.0 mm d'amplitude 0.25 mm ce qui semble cohérent avec les images de la Fig. 5.1a. Il s'agit de la plus grande longueur d'onde présente spontanément dans les fibres PP2 et PP3, la présence de longueurs d'onde plus grandes est l'effet du flambage lors de la préparation des analyses d'images. Les fibres PP1, FE1 et FE2 sont bien décrites par un couple $\{c(\alpha), \alpha\}$ tandis que les fibres PP2, PP3 et DEN possèdent en plus un mode dominant.

Nous avons mesuré la distribution du désordre dans nos empilements, il faut à présent mesurer le module de courbure des fibres individuelles.

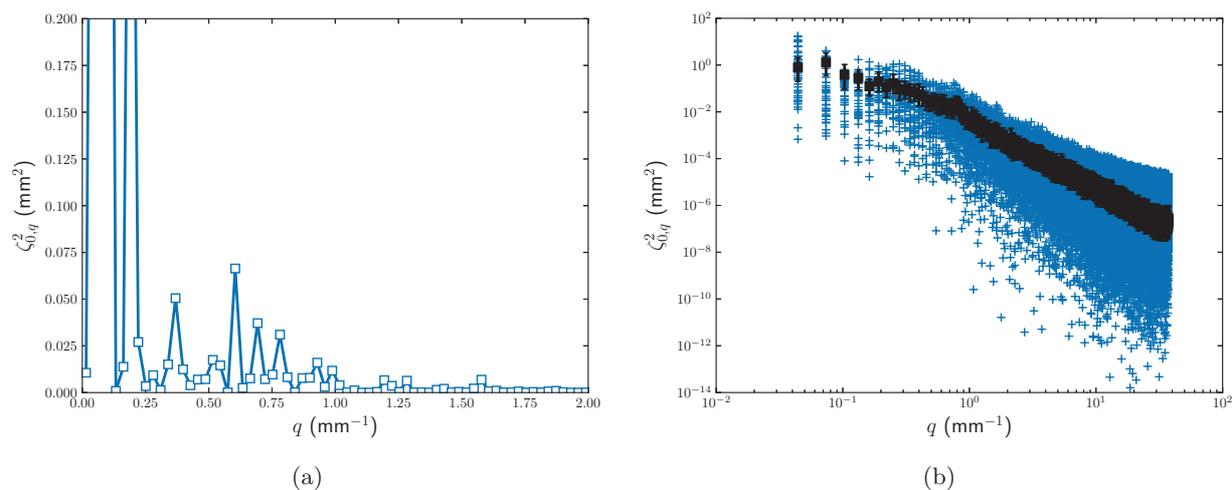


FIGURE 5.4 – (a) Analyse spectrale d'une fibre PP1. (b) (+) Distribution statistique des fibres PP1; (■) valeur moyenne.

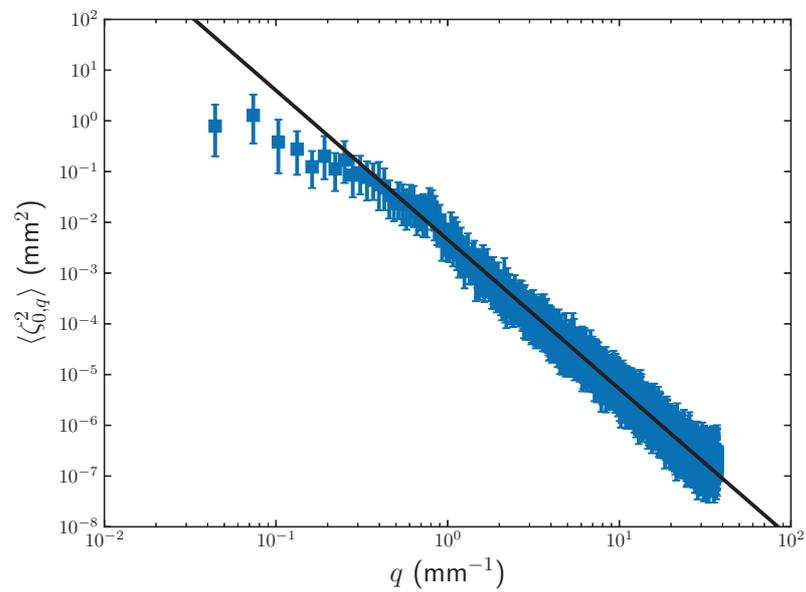


FIGURE 5.5 – (■) Analyse de forme des fibres PP1 ; (—) meilleur ajustement en loi d'échelle. Les barres correspondent à la dispersion statistique (40 échantillons).

	$c(\alpha)$	α
	longueur en mm $\times 10^{-3}$	
PP1	4.6	2.94 ± 0.05
PP2	5.0	3.10 ± 0.05
PP3	4.0×10^{-1}	2.50 ± 0.05
DEN	8.0	3.10 ± 0.05
FE1	8.0×10^{-1}	3.11 ± 0.05
FE2	3.8	2.88 ± 0.05

TABLE 5.2 – Résultat des ajustements.

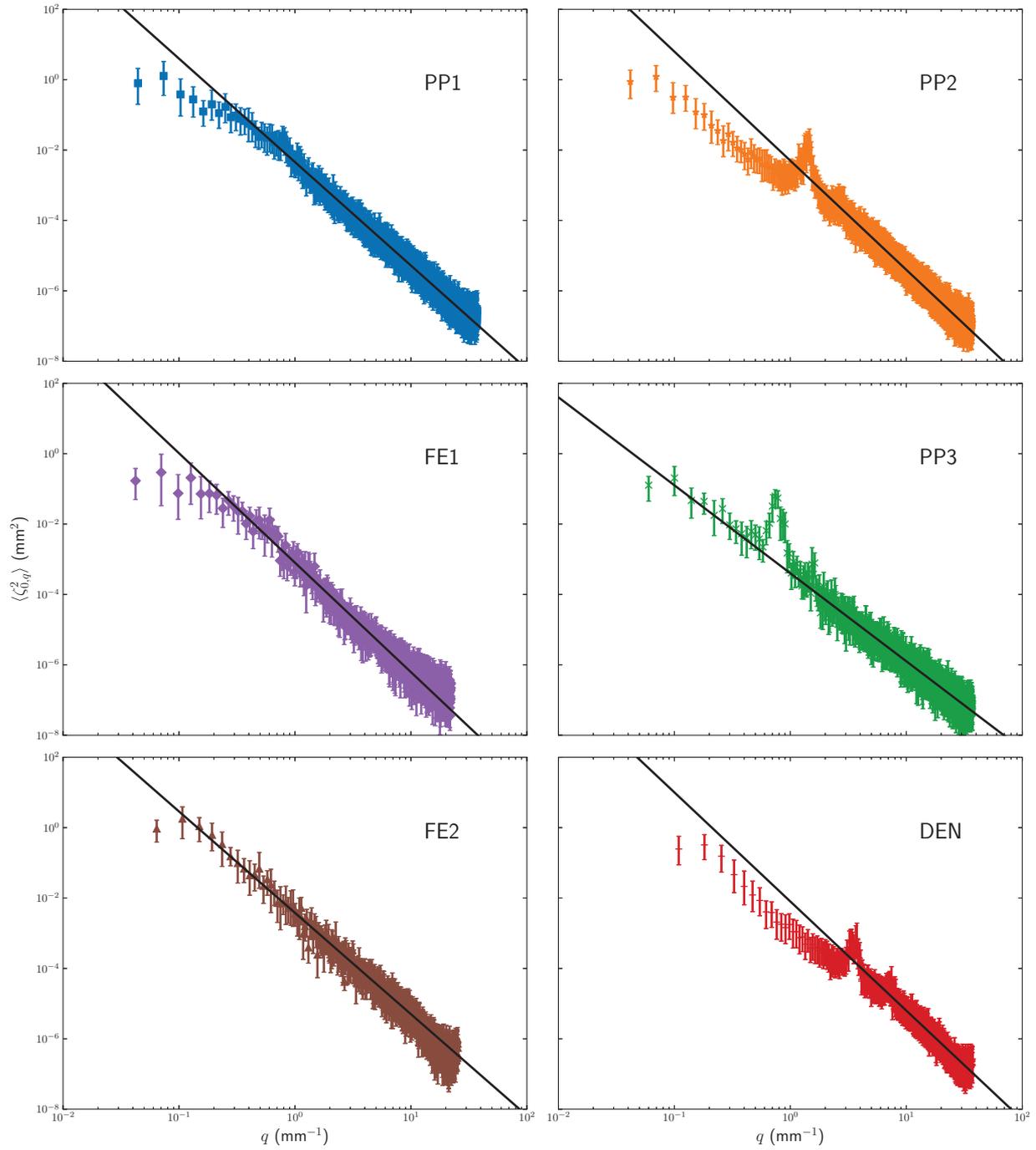


FIGURE 5.6 – Analyses de forme des fibres. (■) PP1; (★) PP2; (×) PP3; (+) DEN; (◆) FE1; (▲) FE2; (—) meilleurs ajustements en loi d'échelle. Les barres correspondent à la dispersion statistique.

Chapitre 6

Mesure du module de courbure

Le module de courbure des fibres est nécessaire pour calculer la contrainte 2D de déformation. Il existe plusieurs façons de mesurer un module de courbure. L'exemple le plus simple est le fléchissement d'un matériau sous son poids. Cependant, au vu de la géométrie et de la dimension des fibres ce n'est pas une bonne voie. Nous utilisons deux méthodes de mesure qui sont plus adaptées. La méthode par dépliement des modes est inspirée de la méthode pour les fibres thermiques présentée en introduction.

6.1 Estimation du module

Dans un premier temps, à partir de la section d'une fibre (Fig. 5.1a) nous calculons son moment quadratique de flexion I_s selon son axe principal. D'après [34] :

$$\kappa = GI_s, \quad (6.1.1)$$

avec G le module élastique de la fibre. En utilisant les valeurs tabulées du module élastique nous obtenons le module de courbure dont les valeurs pour chaque type de fibres sont regroupées dans la Table 6.1. Cette méthode suppose que les fibres sont homogènes et de section constante, ce qui n'est pas le cas. Le module de courbure obtenu estimé n'est pas fiable principalement à cause de la forme de la section qui n'est pas facile de visualiser et de plus nous la déformons lorsque nous coupons les fibres avec des ciseaux. Il nous faut une méthode plus fiable pour mesurer le module de courbure.

	A $\mu\text{m}^2 \times 10^3$	I_s μm^4	G GPa	κ_{att} Jm
PP1	2.5	3.2×10^5	1.1 à 1.6	$(3.5 - 5.1) \times 10^{-10}$
PP2	2.2	4.5×10^5	1.1 à 1.6	$(4.9 - 7.0) \times 10^{-10}$
PP3	0.68	2.3×10^4	1.1 à 1.6	$(2.5 - 3.8) \times 10^{-11}$
DEN	180	1.4×10^9	3 à 36	$(4.2 - 50) \times 10^{-6}$
FE1	20	7.2×10^6	200	1.4×10^{-6}
FE2	12	2.2×10^6	200	4.4×10^{-7}

TABLE 6.1 – Estimation du module de courbure. Les valeurs tabulées sont issues de [33].

6.2 Mesure par étirement

La mesure par étirement est basée sur le dépliement des modes décrivant une fibre. Ce protocole s'inspire des références [35, 36, 37] dont le détail est donné en Annexe B. Nous étirons une fibre selon son axe principal ce qui déplie les modes décrivant la forme de la fibre. La force F nécessaire pour changer la courbure de $\theta_0^{(1)}(s)$ à $\theta^{(1)}(s)$ est donnée par la relation de Kirchoff :

$$\left(\theta^{(1)}(s) - \theta_0^{(1)}(s)\right)^2 = \frac{F}{\kappa} \sin(\theta(s)). \quad (6.2.1)$$

Le changement de courbure modifie la longueur projetée L (voir 3.2). Au final nous obtenons, après projection sur une base de Fourier :

$$\frac{L}{L_0} = 1 - \frac{1}{4} \sum_q \frac{q^4 \theta_{0,q}^2}{(F/\kappa + q^2)^2}, \quad (6.2.2)$$

avec L_0 la longueur curviligne. Cette relation n'est valable que dans le cas où la fibre est inextensible. Une fibre en polypropylène est extensible et le module élastique est noté μ (N). Une force appliquée allonge à la fois la longueur curviligne et déplie la courbure. L'élongation de la fibre entraîne un changement de courbure de second ordre. D'après [36, 37] la relation entre le rapport des longueurs projetée sur curviligne et la force d'étirement est :

$$\frac{L}{L_0} = 1 + \frac{F}{\mu} - \frac{1}{4} \left(1 + 2\frac{F}{\mu}\right) \sum_q \frac{q^4 \theta_{0,q}^2}{(F/\kappa + q^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\mu} \sum_q \frac{q^4 \theta_{0,q}^2}{F/\kappa + q^2}. \quad (6.2.3)$$

L'élasticité ne dépend que de sa forme dans l'état de référence. Nous prenons une photographie de la fibre lors de l'étirement ce qui nous permet d'obtenir la longueur projetée, la longueur curviligne ainsi que la courbure :

$$\theta_{0,q} = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \theta(s) \exp(jq s) ds = q \zeta_{0,q}. \quad (6.2.4)$$

L'ajustement des courbes d'étirement par l'équation (6.2.3) nous permet de mesurer les modules κ et μ . La forme d'une fibre PP1 au cours de quelques étapes d'une expérience d'étirement est représentée en Fig. 6.1a. La Fig. 6.1b représente la Transformée de Fourier Discrète (TFD) des formes pour les étapes correspondantes. Nous avons fait le choix d'utiliser une base de Fourier au lieu de la base (A.2.7) pour garder un formalisme similaire aux travaux de [35, 36]. Une fibre est légèrement flambée à l'étape initiale : la longueur projetée initiale est inférieure à la longueur projetée spontanée afin de ne pas étirer les plus petits modes de la fibre. Dans cet exemple l'étape de référence est l'étape 6. Le flambage apparaît à l'étape 1 et les oscillations du spectre correspondent à cette longueur d'onde. Les étapes 6 à 12 montrent que ce sont les grandes longueurs d'onde qui sont d'abord dépliées. Les spectres montrent que les amplitudes des modes $q_1 = 0.5 \text{ mm}^{-1}$ et $q_2 = 1.0 \text{ mm}^{-1}$ (soit $\lambda_1 \approx 12 \text{ mm}$ et $\lambda_2 \approx 6 \text{ mm}$) diminuent significativement plus que les autres amplitudes. À partir de l'étape 15 la déformation correspond à de l'élongation. Les spectres de ces étapes n'ont pas de différences significatives. Finalement, la fibre s'est cassée avant que nous puissions déplier l'ensemble des modes.

La force en fonction de l'étirement est représentée en Fig. 6.1c. On distingue un régime linéaire aux grandes forces correspondant à de l'élongation pure. Le μ d'une fibre PP est de l'ordre de 1 N (100 N pour une fibre DEN), il faut exercer une force de l'ordre de 1 N pour être dans le régime d'élasticité linéaire. Dans le cas où la force appliquée est faible devant 1 N la relation (6.2.3) se simplifie :

$$\frac{L}{L_0} \approx 1 - \frac{1}{4} \sum_q \frac{q^6 \zeta_{0,q}^2}{(F/\kappa + q^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\mu} \sum_q \frac{q^6 \zeta_{0,q}^2}{F/\kappa + q^2}. \quad (6.2.5)$$

À faible force le dépliement des courbures est dominant :

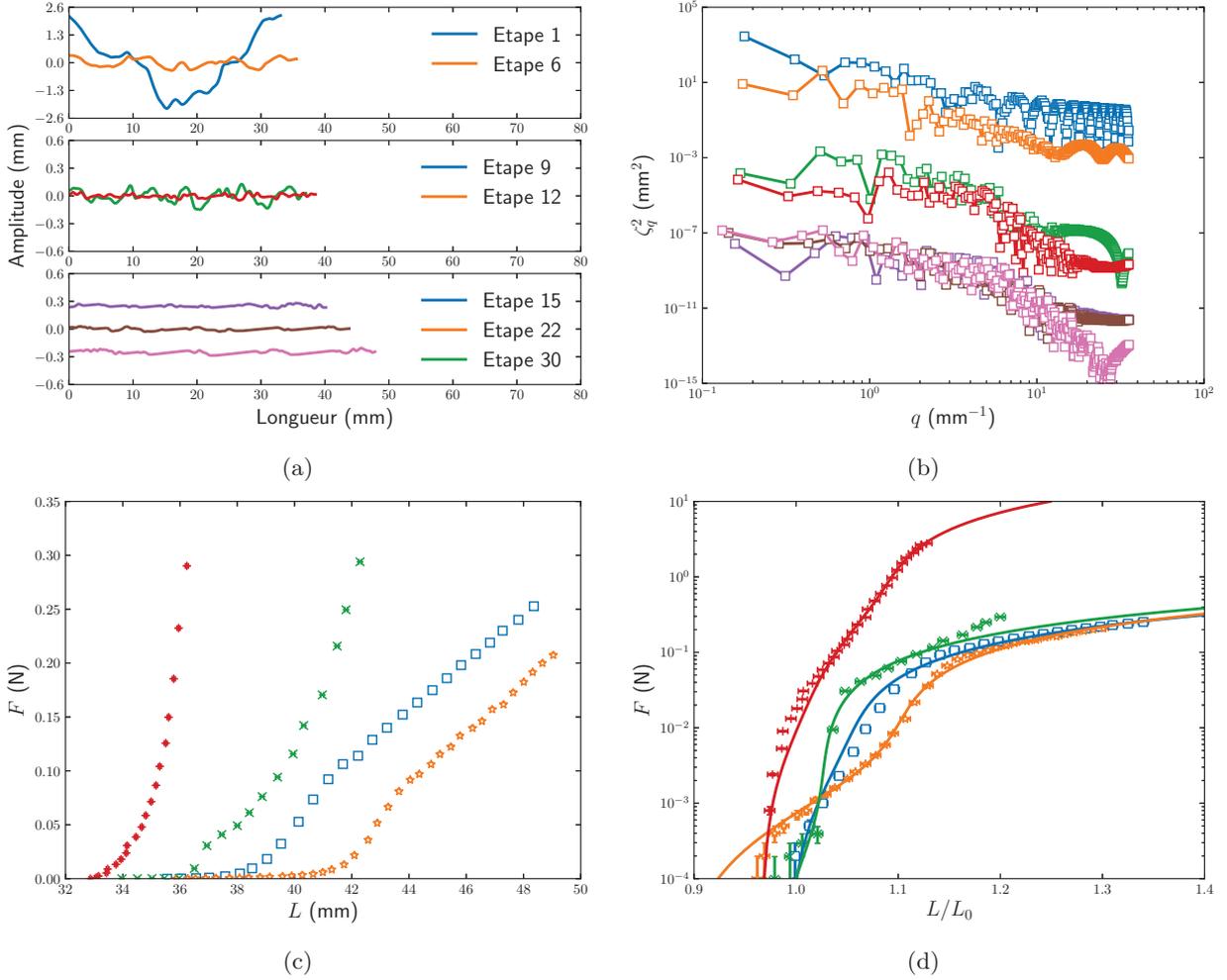


FIGURE 6.1 – (a) Images d’une fibre PP1 à différentes étapes. (b) TFD de la forme d’une fibre PP1 à différentes étapes. Les courbes supérieures (resp. inférieures) sont augmentées (resp. diminuées) d’un facteur 1000 pour plus de lisibilité. (c) Étirement des fibres. (d) Échelle semi-logarithmique. (\square) PP1; (\star) PP2; (\times) PP3; ($+$) DEN; (—) meilleurs ajustements avec l’équation 6.2.3.

$$\frac{L}{L_0} \approx 1 - \frac{1}{4} \sum_q \frac{q^6 \zeta_{0,q}^2}{(F/\kappa + q^2)^2}, \quad (6.2.6)$$

ce qui correspond à l’équation établit par Kabla et Mahadevan [35] pour des fibres inélastiques (l’élongation ne joue aucun rôle). Aux forces intermédiaires le terme à droite de l’équation (6.2.5) n’est plus négligeable : les modes sont dépliés et la fibre s’allonge. L’ajustement des courbes expérimentales par l’équation (6.2.3) est représenté en Fig. 6.1d et les modules sont résumés dans la Table 6.2. Les valeurs sont deux ordres en dessous des valeurs estimées initialement. Nous n’avons pas pu utiliser cette méthode

pour mesurer les modules élastiques des fibres métalliques à cause de leurs torsions, plus importantes que celles des fibres PP.

	κ	μ	G
	$\text{Jm} \times 10^{-12}$	N	GPa
PP1	3.2 ± 1.7	1.0 ± 0.2	0.38 ± 0.07
PP2	3.5 ± 1.8	1.3 ± 0.2	0.64 ± 0.09
PP3	0.43 ± 0.30	1.0	1.4
DEN	$(3.8 \pm 3.2) \times 10^3$	92 ± 46	0.4 ± 0.2

TABLE 6.2 – Modules élastiques moyens. Les incertitudes sont statistiques.

6.3 Mesure par vibration

La mesure est basée sur les vibrations de flexion des poutres. Considérons un filament droit, encasté à une extrémité tandis qu'une force de fléchissement est appliquée sur l'autre (voir la Fig. 6.2a). Si cette extrémité est relâchée l'amplitude $y(x)$ d'un point de la poutre oscille autour de sa valeur d'équilibre (voir la Fig. 6.2b) selon la relation :

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{m}{\kappa} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad (6.3.1)$$

avec m la masse linéique de la fibre. La résolution de cette équation différentielle est proche du calcul réalisé en Annexe A.2 mais avec des conditions aux limites différentes puisqu'un bout est encasté. Cela entraîne l'existence de modes propres de vibration de flexion. La fréquence de vibration f_i est liée au module de courbure par :

$$f_i = \frac{\alpha_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{\kappa}{m} \right)^{1/2}, \quad (6.3.2)$$

avec $\alpha_i = (i + 1/2)\pi$ pour $i > 1$ et $\alpha_0 \approx 1.875$. L'amplitude du fondamental domine les autres amplitudes et en première approximation nous négligeons les modes suivants. La mesure de la fréquence du fondamentale permet d'obtenir le module de courbure :

$$\kappa = 3.194 \times mL^4 f_0^2. \quad (6.3.3)$$

Nous filmons les oscillations avec une caméra ultra-rapide et ensuite à l'aide du logiciel ImageJ nous avons pointé l'extrémité libre image par image pour

plusieurs échantillons. Le résultat est représentée en Fig. 6.2e. Nous ne pouvons pas obtenir un film suffisamment long pour obtenir l'équilibre à cause de la limitation en mémoire de la caméra. Toutefois nous observons que la fibre parvient à l'équilibre et les courants d'air ne participent pas à l'oscillation. La Transformée de Fourier Discrète (TFD) de l'amplitude (6.2f) nous donne la fréquence de vibration ce qui nous permet d'obtenir le module de courbure pour les fibres FE1 et FE2 résumé dans la Table 6.3. Nous obtenons pour ces fibres un module de courbure plus fiable que la valeur estimée par la géométrie. Les fibres métalliques ont une section du même ordre de grandeur que les fibres en polypropylène mais un module de Young deux ordres supérieur et nous retrouvons ce ratio pour les modules de courbure.

	κ
	$\text{Jm} \times 10^{-12}$
PP1	3.2 ± 1.7
PP2	3.5 ± 1.8
PP3	0.43 ± 0.30
DEN	$(3.8 \pm 3.2) \times 10^3$
FE1	$(7.8 \pm 4.2) \times 10^1$
FE2	$(1.6 \pm 0.7) \times 10^2$

TABLE 6.3 – Valeurs des modules de courbure obtenues par vibration et par étirement. Les incertitudes sont statistiques.

Nous avons réussi à mesurer le désordre des fibres ainsi que leurs modules de courbure, nous pouvons maintenant étudier les propriétés collectives des empilements et tester nos modèles.

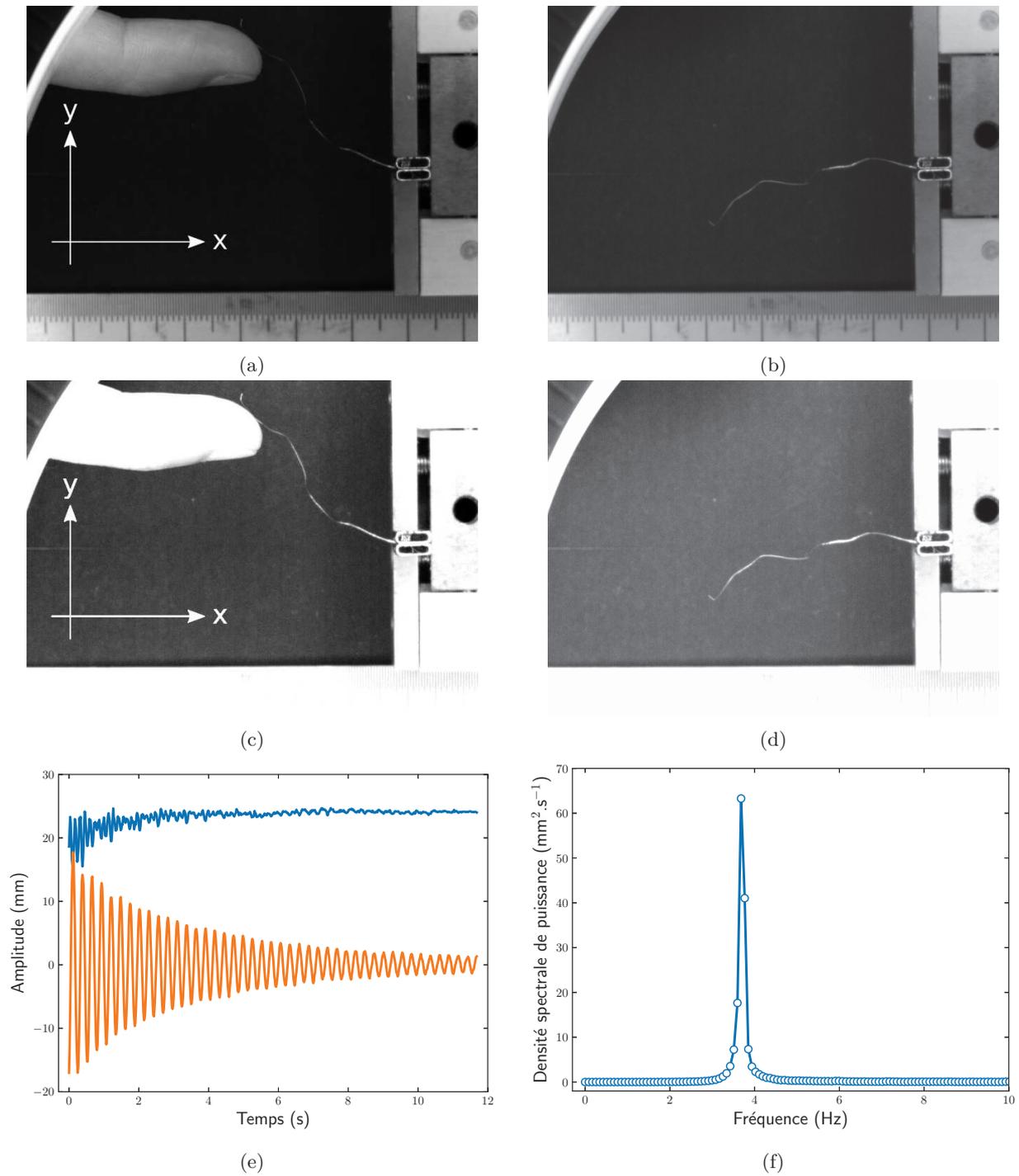


FIGURE 6.2 – (a) $t < t_0$: force de fléchissement imposée à une fibre FE2. (b) $t > t_0$: oscillations de la fibre. (c) et (d) Pour la version papier. (e) (—) $x(t)$; (—) $y(t)$. (f) TFD de $y(t)$.

Troisième partie

Propriétés collectives

Nous montrons que l'élasticité d'un empilement de fibres est non linéaire et qu'elle est bien décrite par le modèle auto-cohérent appliqué à la distribution discrète de modes. Nous généralisons l'étude expérimentale par une étude numérique nous permettant de varier la rugosité ce qui nous permet de tester la robustesse de notre modèle. Nous montrons que notre modèle décrit fidèlement les résultats expérimentaux et numériques mais à un facteur numérique près que nous tentons de comprendre. Nous comparons également nos résultats à un modèle continu que nous établissons. Pour finir nous réalisons une étude électro-mécanique et nous tentons d'en expliquer les résultats à l'aide de nos modèles.



Chapitre 7

Propriétés mécaniques d'empilements de fibres

Dans ce chapitre nous nous concentrons sur l'étude expérimentale des propriétés mécaniques des empilements de fibres. Nous montrons que l'élasticité est non-linéaire et qu'elle dépend du taux de déformation à cause du réarrangement des contacts. C'est un paramètre supplémentaire qui n'est pas autorisé dans notre modèle théorique. Nous montrons par quels arguments nous pouvons simplifier notre étude afin de comparer notre modèle 2D sans ré-arrangements à des empilements 3D.

7.1 Empilements de fibres

Les fibres sont alignées manuellement selon leurs longueurs projetées et sont superposées les unes aux autres. Une photographie de chaque échantillon est présentée en Fig. 7.1. Les propriétés sont résumées dans la Table 3.1.

7.2 Courbes de compression

La distance entre la plaque et le plateau de la balance est notée D . La hauteur initiale de l'empilement est D_0 . La surface de contact S augmente au cours de la compression, nous l'avons mesurée afin d'avoir la contrainte réelle. Les courbes de compression sont représentées en Fig. 7.2a et l'évolution de la surface de contact en Fig. 7.2c. Nous observons que l'élasticité est non linéaire et reproductible (Fig. 7.2b). La surface de contact augmente linéairement jusqu'à atteindre un plateau aux fortes déformations. La contrainte en

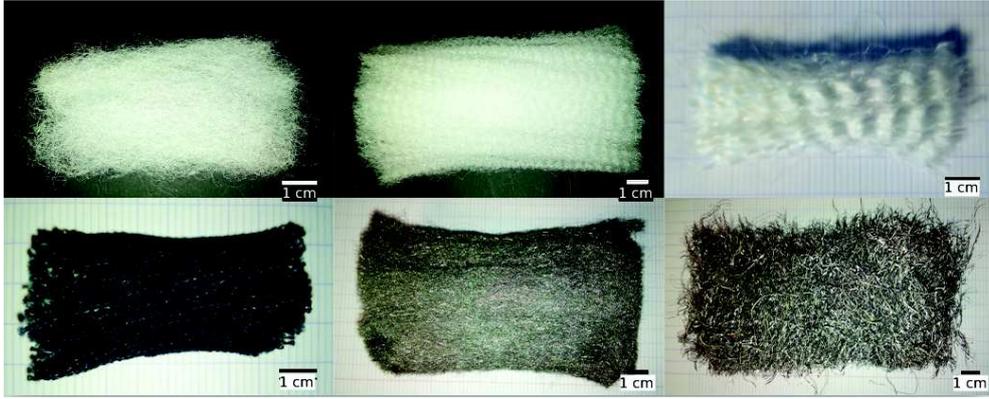


FIGURE 7.1 – Photos des empilements de fibres. De gauche à droite et de haut en bas : PP1, PP2, PP3, DEN, FE1 et FE2. Les barres d'échelles représentent 1 cm.

fonction de la déformation en échelles logarithmiques est représentée en Fig. 7.2d. Nous observons quatre à six décades de contrainte pour une décade de déformation. On distingue deux régimes. Un régime à faible déformation où la contrainte augmente de deux décades pour des déformations de l'ordre de 10 à 30 %, et un régime à grande déformation qui semble bien décrit par une loi de puissance.

7.3 Comparaison des résultats au modèle auto-cohérent

7.3.1 Calcul de la contrainte 2D

D'après le chapitre 2, nous avons la contrainte de l'empilement à partir de la distribution de désordre des fibres et de leur module de courbure. Les équations à résoudre sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 B}{dD^2} = \frac{B/N_y^2}{\sum_q \langle \zeta_{0,q}^2 \rangle \left(1 + \frac{4B}{\kappa q^4}\right)^{-3/2}} + \frac{6}{\kappa} \left(\frac{dB}{dD}\right)^2 \frac{\sum_q \frac{\langle \zeta_{0,q}^2 \rangle}{\kappa q^4} \left(1 + \frac{4B}{\kappa q^4}\right)^{-5/2}}{\sum_q \langle \zeta_{0,q}^2 \rangle \left(1 + \frac{4B}{\kappa q^4}\right)^{-3/2}}, \\ P_{2d}(D) = - \int_{D_0}^D B(D') dD'. \end{array} \right. \quad (7.3.1)$$

Nous utilisons la distribution de désordre obtenue expérimentalement (équation 5.6) dans le chapitre 5 ainsi que le module de courbure (tableau 6.3) dans le chapitre 6. L'intégration s'effectue avec une méthode de Runge-

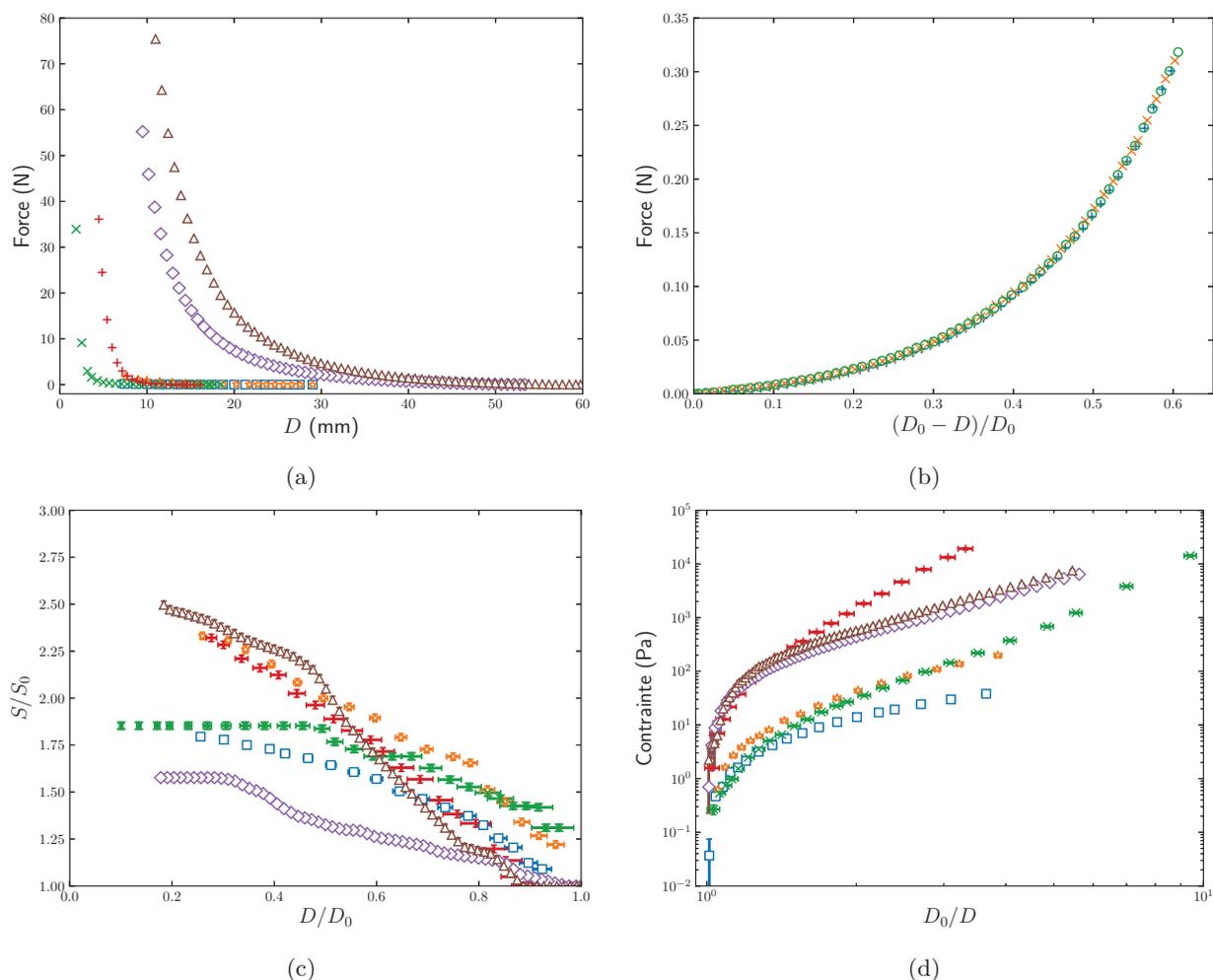


FIGURE 7.2 – Courbes expérimentales. (a) Élasticité des empilements. (b) Reproductibilité de l'élasticité de l'empilement PP1. Les symboles correspondent à trois essais différents. (c) Évolution de la surface de contact en fonction de la déformation. (d) Élasticité des empilements en échelles logarithmiques. (a), (c), (d) : (□) PP1; (☆) PP2; (×) PP3; (+) DEN; (◇) FE1; (△) FE2.

Kutta d'ordre 4. Trois intégrations¹ permettent d'obtenir P_{2d} . Il nous reste à déterminer la contrainte P à 3 dimensions.

7.3.2 Modèle 3D

Considérons un empilement de N fibres, schématisé en Fig. 7.3, comme une succession de N_x plans selon la largeur l et N_y plans selon la hauteur D_0 . Les fibres sont confinées dans leurs plans d'origine. En supposant une géométrie rectangulaire de l'empilement on peut écrire :

$$N = N_x N_y. \quad (7.3.2)$$

1. Deux intégrations pour obtenir le module de compressibilité.

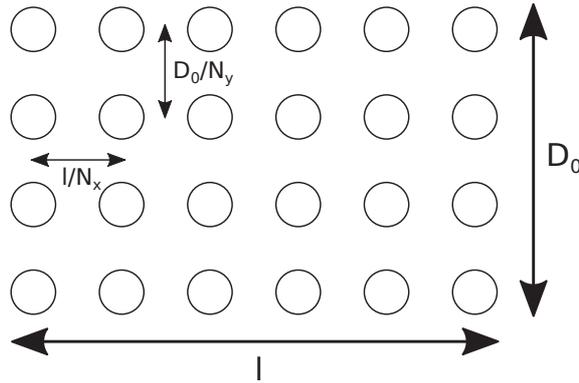


FIGURE 7.3 – Schéma du modèle 3D d'empilement.

Si on suppose de plus que les densités linéiques de fibres ρ selon la hauteur et largeur sont égales avant déformation on peut écrire :

$$\rho = \sqrt{\frac{N}{lD_0}}. \quad (7.3.3)$$

La contrainte 2d s'applique pour chaque plan ainsi la contrainte 3d, notée P s'écrit :

$$P(D) = \rho P_{2d}(D). \quad (7.3.4)$$

La contrainte théorique est comparée aux valeurs expérimentales dans la Fig. 7.4c. Nous obtenons un bon accord à une constante multiplicative près² Φ_{exp} discutée plus tard. Cette constante ne change pas l'allure de la courbe mais uniquement son l'amplitude. L'incertitude sur Φ_{exp} provient de l'incertitude statistique sur le module de courbure. Les valeurs de Φ_{exp} sont résumées dans la Table 7.1 et tracées en fonction de α dans la Fig. 7.5. Le modèle auto-cohérent ne décrit pas les premières étapes d'élasticité linéaire correspondant à la déformation des grandes longueurs d'ondes. Pour prendre en compte cette contribution, nous avons ajouté une contrainte linéaire (voir l'équation (8.1.8) avec comme paramètre d'ajustement une longueur d'onde λ_{eff}) en plus de la contrainte de champ moyen dans la Fig. 7.4d. La contrainte totale est en très bon accord avec les valeurs expérimentales.

2. $P(D) = \Phi_{\text{exp}} \rho P_{2d}(D)$

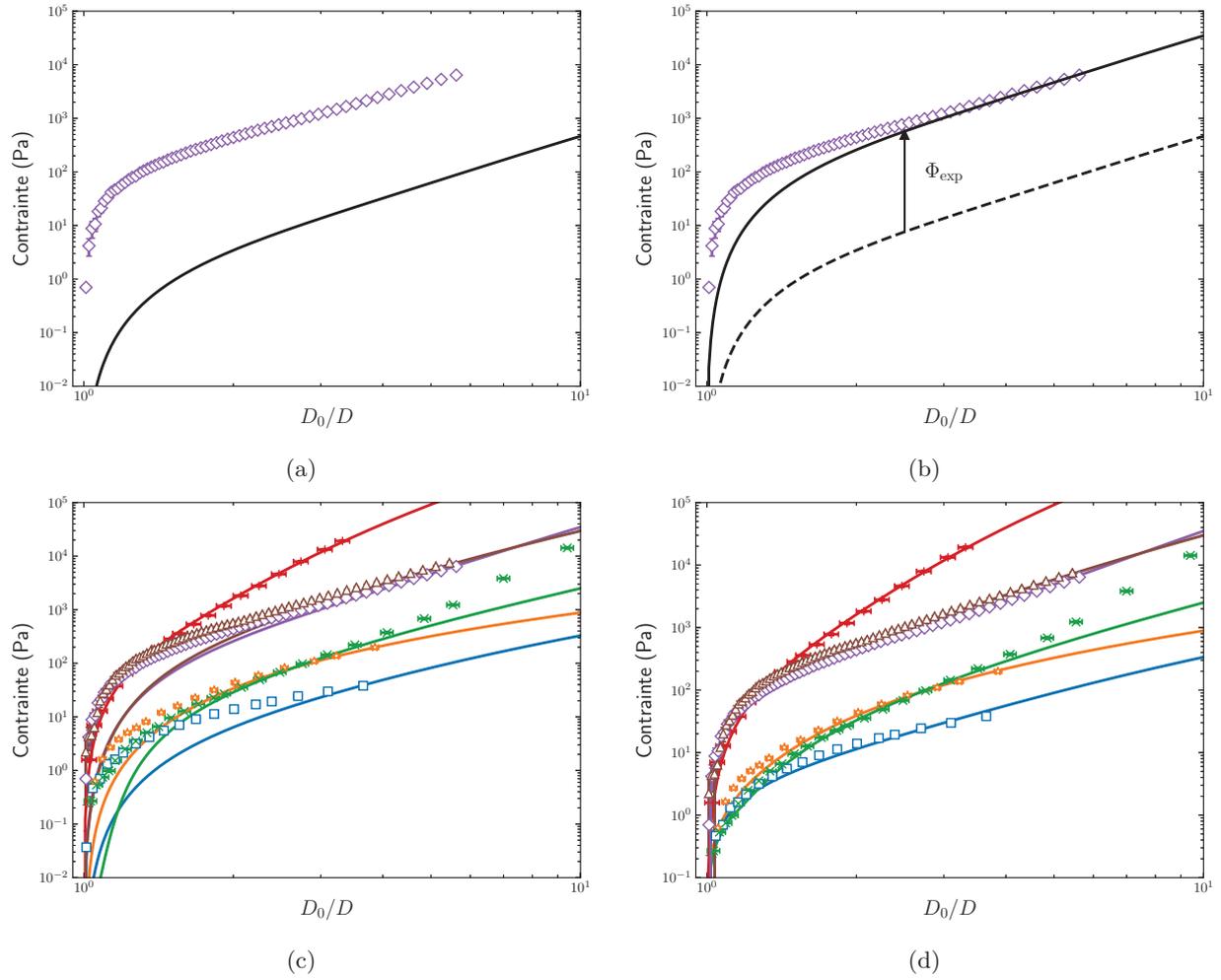
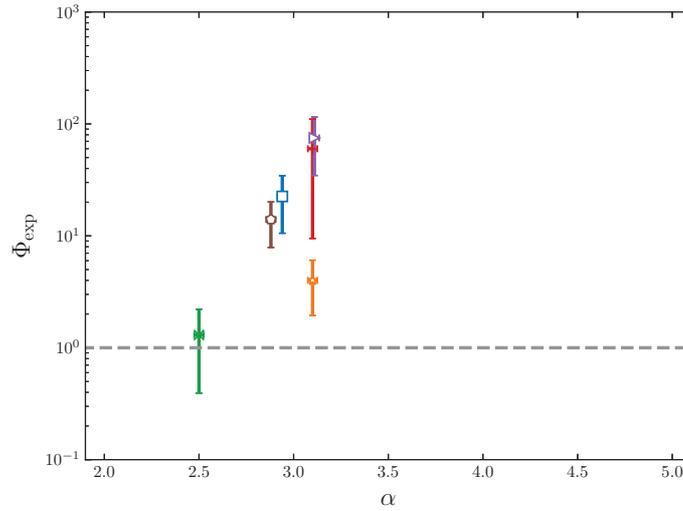


FIGURE 7.4 – Comparaison de $P(D)$ avec les mesures expérimentales. (a) (—) $P(D)$ en utilisant l'équation (7.3.4). (b) (—) Ajustement des mesures expérimentales par un facteur multiplicatif Φ_{exp} . (c) Élasticités des empilements de fibres avec la prédiction du modèle auto-cohérent. (d) Élasticités des empilements de fibres avec une contribution linéaire. (\square) PP1; (\star) PP2; (\times) PP3; (+) DEN; (\diamond) FE1; (\triangle) FE2.

	Φ_{exp}	λ_{eff} mm
PP1	22 ± 12	6.7
PP2	4 ± 2	8.3
PP3	1.3 ± 0.9	5.9
DEN	60 ± 50	
FE1	75 ± 40	8.4
FE2	14 ± 6	7.2

TABLE 7.1 – Paramètres d'ajustement expérimentaux Φ_{exp} et λ_{eff} .

FIGURE 7.5 – Φ_{exp} en fonction de α .

7.4 Évolution cinétique

7.4.1 Taux de compression

Nous nous sommes rendus compte que selon la vitesse de compression les réponses sont significativement différentes. Un exemple pour l'empilement PP1 pour deux taux de compression différents est présenté en Fig. 7.6. On constate que plus la compression est rapide (taux de compression $\dot{\epsilon}$ élevé) plus la contrainte est grande. Lorsque l'on comprime un empilement, les fibres se réarrangent afin de minimiser l'énergie de configuration totale de l'empilement. Dans notre modèle 2D les fibres ne peuvent pas se réarranger et l'élasticité théorique dépend de la configuration de départ. L'idéal est donc de faire des compressions le plus rapidement possible afin de ne pas laisser aux fibres le temps de se réarranger. Les taux de déformation sont résumés dans le tableau 7.2.

Empilements	PP1	PP2	PP3	DEN	FE1	FE2
Taux de compression (mHz)	57	65	39	47	67	67

TABLE 7.2 – Taux de déformation des expériences réalisées.

7.4.2 Relaxation de la contrainte

Afin d'en savoir plus nous avons réalisé des expériences de relaxation de contrainte sur les empilements PP1 et FE1. Nous avons imposé une défor-

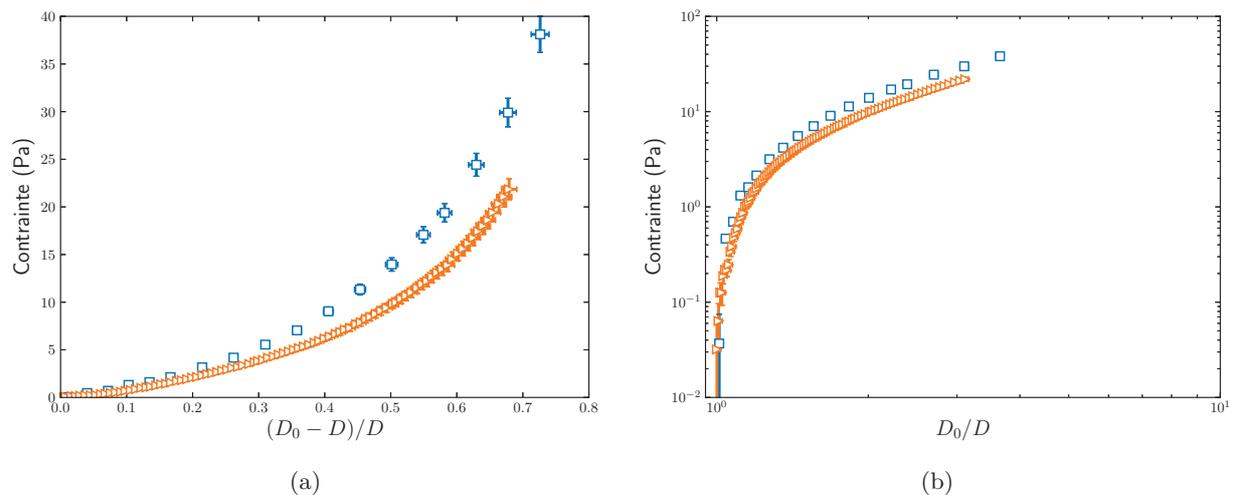


FIGURE 7.6 – Élasticité des empilements PP1 selon le taux de déformation. (a) Échelle linéaire. (b) Échelle logarithmique. (\square) $\dot{\epsilon} = 57$ mHz ; (\triangleright) $\dot{\epsilon} = 5$ mHz.

mation de 50 % en 2 s pour chaque échantillon et mesuré l'évolution de la contrainte pendant 5 h. Sur un essai (PP1) nous avons laissé relaxer pendant 22 h afin de nous assurer de la stabilisation de la contrainte. Nous observons une relaxation importante pour PP1 avec une contrainte finale 40 % plus faible qu'au départ tandis que pour FE1 la baisse n'est que de 5 % maximum. Au bout de 10 min seulement la contrainte de PP1 a relaxée de 50 % tandis que pour FE1 au bout de 1h la contrainte n'a relaxé que de 1 %. Nous avons imposé une déformation de 65 % pour un essai sur FE1 mais seule l'amplitude de la relaxation change, la relaxation est reproductible et ne semble pas dépendre du taux de déformation. L'ensemble des résultats est représenté en Fig. 7.7. Les artefacts sont dus au passage de personnes se promenant dans la salle. Un taux de déformation de 5 mHz correspond à une expérience réalisée en 200 s soit une relaxation de l'ordre de 30 % d'après la Fig. 7.7b ce qui semble cohérent avec les essais présentés en Fig. 7.6. Nous pouvons conclure que comprimer en moins de 20 s permet de s'affranchir de l'essentiel des ré-arrangements de fibres.

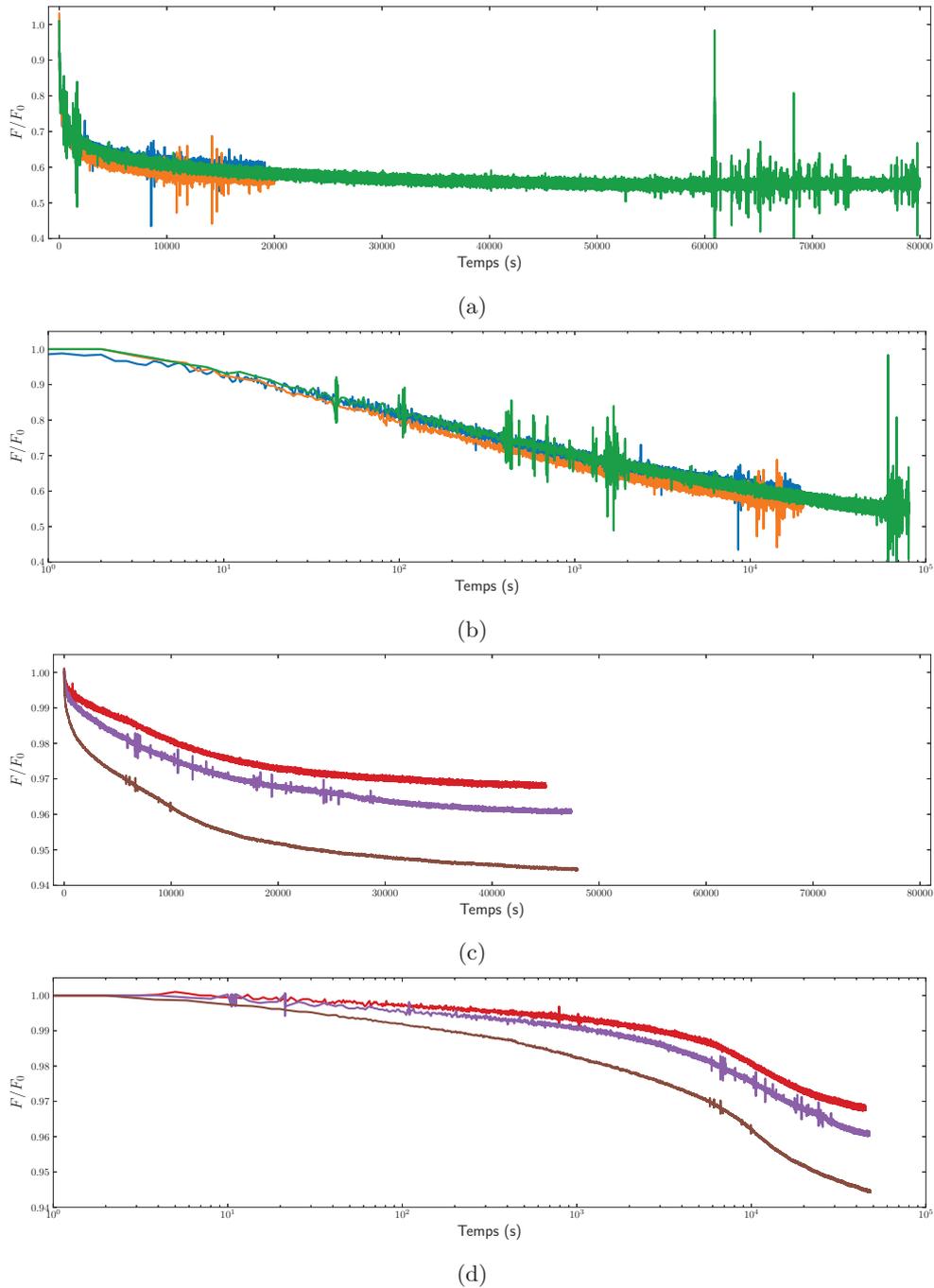


FIGURE 7.7 – Relaxation de la contrainte des échantillons. (a) Échelle linéaire, PP1. (b) Échelle logarithmique, PP1. (c) Échelle linéaire, FE1. (d) Échelle logarithmique, FE1. (a)-(d) Déformation de 50 % en 2s sauf pour FE1 (—) : déformation de 65 % en 2s.

7.4.3 Temps caractéristiques de relaxation

La relaxation de la contrainte est complexe et possède plusieurs temps caractéristiques de relaxation. Pour les obtenir nous effectuons une transformée

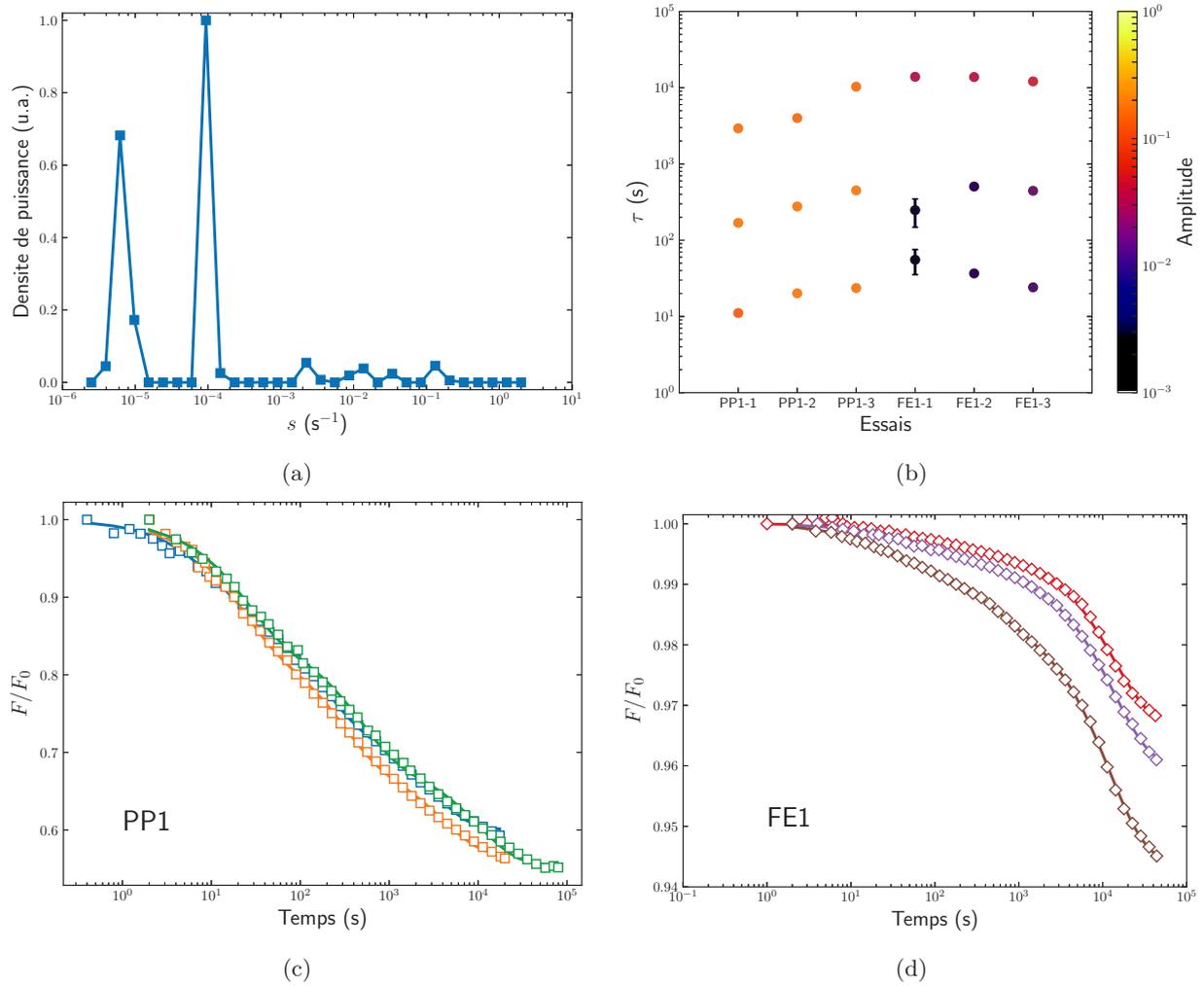


FIGURE 7.8 – (a) Résultat de l’algorithme de Contin pour un essai FE1. (b) Temps caractéristiques et amplitudes des ajustements. (c) Relaxations de la contrainte sur l’échantillon PP1 avec leurs meilleurs ajustements en traits pleins. (d) Relaxations de la contrainte sur l’échantillon FE1 avec leurs meilleurs ajustements en traits pleins.

de Laplace inverse grâce à l’algorithme de Contin [38, 39] :

$$\frac{F(t)}{F_0} = \int_0^{+\infty} \Phi(s) \exp(-st) ds, \quad (7.4.1)$$

avec s le temps réciproque (s^{-1}), $F_0 = F(t = 0)$ et Φ la fonction que nous recherchons. L’algorithme de Contin permet d’obtenir la fonction $\Phi(s)$. Un exemple de résultat pour une relaxation de FE1 est donné en Fig. 7.8a. Nous observons deux temps réciproques dominants séparés d’une décade ainsi que plusieurs pics vers $s \sim 10^{-3} - 10^{-1} s^{-1}$ d’amplitudes 10 fois plus faibles. Il s’agit probablement d’un seul pic mais mal résolu par l’algorithme. Nous

trouvons 3 pics pour l'ensemble des relaxations. Nous ajustons les mesures expérimentales par la relation suivante, en prenant comme valeurs initiales les résultats de l'algorithme de Contin :

$$\frac{F(t)}{F_0} = 1 - \sum_{i=1}^3 A_i (1 - \exp(-t/\tau_i)), \quad (7.4.2)$$

avec A_i l'amplitude associée au temps caractéristique τ_i . Les ajustements sont représentés en Fig. 7.8c et leurs valeurs sont détaillées en Fig. 7.8b. Les temps caractéristiques sont espacés d'une décade environ ce qui semble indiquer qu'il y a d'autres phénomènes que les ré-arrangements de contacts. Il est aussi possible de décrire partiellement les courbes de relaxation PP1 par une loi logarithmique. De tels comportements ont été observés par Matan et al. [40], lors d'expériences de fluages sur du papier froissé. La décroissance logarithmique de la largeur du papier a pour origine un processus avec une barrière d'énergie, associé à de la dissipation d'énergie (friction et/ou déformation plastique dans les zones de grandes courbures). Cette approche proposée pour des expériences de fluage n'est pas directement transposable à nos expériences de relaxation de la contrainte et nous n'avons pas approfondi ce point par la suite.

7.5 Discussion

Nous avons développé un modèle de champ moyen à deux dimensions et nous l'avons étendu à trois dimensions. Ce modèle prend en compte la distribution du désordre de forme et le module de courbure des fibres constituant l'empilement. L'accord avec les résultats expérimentaux est remarquable mais nous avons introduit un facteur multiplicatif Φ_{exp} qui ne change que l'amplitude de la contrainte théorique. L'origine de ce paramètre d'ajustement n'est pas le glissement des contacts car nous avons montré que nous pouvions raisonnablement les négliger au vu des taux de compression utilisés. Nous avons deux hypothèses. Soit c'est le passage à trois dimensions qui est trop simpliste et les plans ne sont pas indépendants soit c'est l'approximation de champ moyen qui est à l'origine de Φ_{exp} . Pour tester la première hypothèse nous réalisons des simulations à deux dimensions. Cela nous permet aussi d'explorer une gamme de valeurs de α plus large.

Chapitre 8

Simulations numériques d'empilements de fibres à 2D

Nous ne contrôlons pas la forme des fibres expérimentales et de ce fait nous sommes limités à des échantillons dont le α varie autour de 3. Afin de couvrir une gamme α plus large nous effectuons des simulations numériques. Nous commençons par des empilements sans désordre afin de valider nos résultats sur les systèmes à désordre en loi de puissance.

8.1 Système de référence parfaitement ordonné

Dans le but de calibrer notre méthode de simulation, nous commençons par un système d'empilement de fibres de formes sinusoïdales en opposition de phase et confinées par deux murs parallèles (Fig. 8.1a). L'empilement est parfaitement ordonné et la faible rugosité des chaînes prévient tout glissement. La forme d'une fibre est donnée par :

$$\zeta_{0,n}(x) = \frac{1}{2} \frac{D_0}{N} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x + \phi_n\right), \quad (8.1.1)$$

avec $n = 1, \dots, N$ la n -ième fibre et N le nombre de fibres dans l'empilement. Les conditions pour un empilement parfaitement ordonné sont :

$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda_0, \\ \phi_n = (1 - (-1)^n) \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (8.1.2)$$

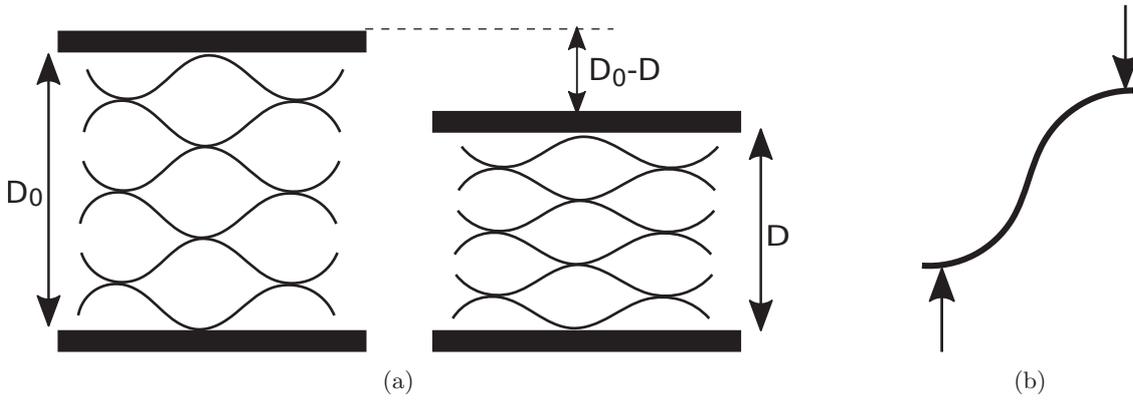


FIGURE 8.1 – (a) Déformation d'un empilement d'une hauteur initiale D_0 . La distance entre les deux plaques au cours de la déformation est D . (b) L'élasticité de l'empilement est équivalente à l'élasticité d'une demie période.

Considérons un empilement de N fibres. L'énergie potentielle de l'empilement est la somme des énergies des fibres individuelles :

$$E = \frac{1}{2} \kappa \sum_{n=1}^N \int_0^L \left(\zeta_n^{(2)} - \zeta_{0,n}^{(2)} \right)^2 dx. \quad (8.1.3)$$

L'équation d'état de la déformation de l'empilement s'obtient facilement en utilisant les symétries du système. L'empilement peut se réduire à l'étude d'une demie période d'une fibre contenue entre deux plans distants de D_0 . La plaque du haut se déplace d'une distance $D_0 - D$ et impose à la fibre une forme ζ donnée par la résolution de l'équation différentielle :

$$\zeta^{(4)}(x) = \zeta_0^{(4)}(x). \quad (8.1.4)$$

En utilisant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \zeta(0) = \zeta^{(1)}(0) = 0, \\ \zeta(\lambda/2) = \zeta^{(1)}(\lambda/2) = D, \end{cases} \quad (8.1.5)$$

nous obtenons la forme d'une fibre pour une demie période :

$$\zeta(x) - \zeta_0(x) = 12 \frac{x^2}{\lambda^2} (D - D_0) \left(1 - \frac{4x}{3\lambda} \right). \quad (8.1.6)$$

En utilisant les équations (8.1.6) et (8.1.3) l'énergie de courbure pour $x \in [0, \lambda/2]$ s'écrit :

$$E = 96 \frac{\kappa D_0^2}{\lambda^3} \left(\frac{D_0 - D}{D_0} \right)^2, \quad (8.1.7)$$

et la contrainte :

$$P = \frac{1}{\lambda} \frac{dE}{dD} = 192 \frac{\kappa D_0}{\lambda^4} \left(\frac{D_0 - D}{D_0} \right). \quad (8.1.8)$$

L'élasticité est linéaire et similaire à un oscillateur harmonique de constante de raideur κ_e :

$$\kappa_e = 96 \frac{\kappa D_0^2}{\lambda^3}. \quad (8.1.9)$$

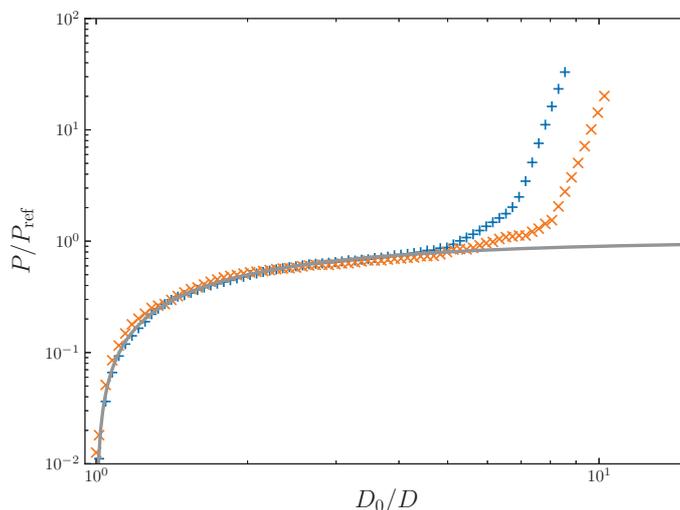


FIGURE 8.2 – P en fonction de la densité réduite D_0/D pour le système de référence : (+) $D_0 = 6$; (×) $D_0 = 8$; (—) $1 - 1/x$.

L'évolution de la contrainte en fonction de la densité est représentée en Fig. 8.2 pour des empilements à D_0 différents. La contrainte est normalisée par $P_{\text{ref}} = 192\kappa D_0/\lambda^4$. L'augmentation brutale de contrainte vers $D_0/D \sim 8$ correspond à la déformation du potentiel de coeur des billes. L'équation (8.1.8) est tracée sans paramètre d'ajustement et l'accord est excellent. La distribution de force le long des chaînes est représentée en Fig. 8.3 pour trois densités différentes. Au départ la contrainte est localisée dans les zones de grandes courbures : aux contacts et aux points d'inflexion la contrainte exercée sur les billes est nulle. Ensuite la contrainte est localisée essentiellement dans les contacts dont les longueurs augmentent progressivement avec la densité.

Par la suite nous ferons référence à ce système par l'état de référence (Réf). Le modèle discret de billes se compare parfaitement au modèle élastique continu en dehors du régime de déformation du potentiel de coeur des billes. Notre méthode de simulation est valide et nous pouvons à présent tester nos modèles avec désordre.

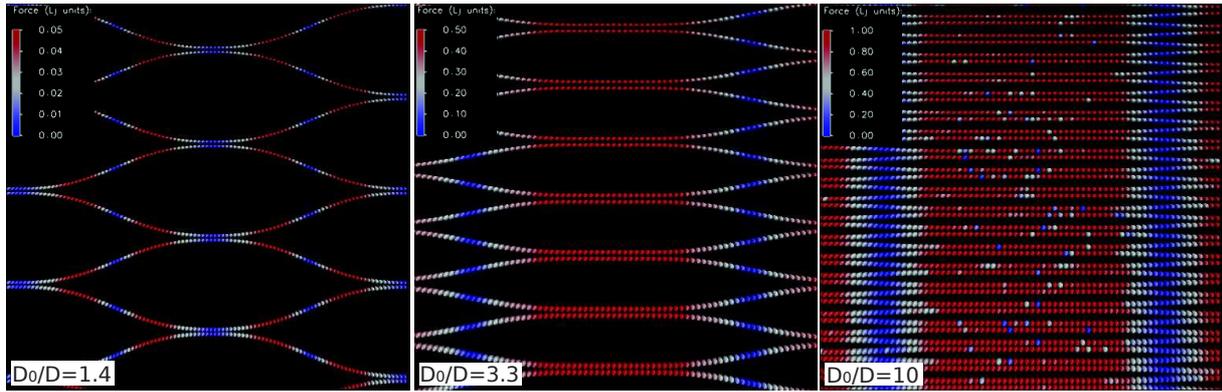


FIGURE 8.3 – Distribution de la force le long des fibres.

8.2 Système désordonné à un mode

Considérons une première classe de désordre en ajoutant un déphasage aléatoire ϕ_n distribué de façon homogène dans l'espace des phases dans l'équation (8.1.1). Avec le système tel quel, la minimisation de l'énergie entraîne un empilement parfait des fibres. Il faut ajouter une dispersion des longueurs d'onde λ_i distribuée normalement de moyenne λ_0 et d'écart type $\delta\lambda$ (Fig. 8.4b) :

$$\begin{cases} \phi_n \in [0, 2\pi], \\ \mathcal{P}(\phi_n) = \frac{1}{2\pi}, \\ \mathcal{P}(\lambda_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta\lambda} \exp\left(-\frac{(\lambda_n - \lambda_0)^2}{\delta\lambda^2}\right). \end{cases} \quad (8.2.1)$$

Ce système est inspiré de la *Boophone-disticha* (Fig. 8.4a), une plante à bulbe originaire d'Afrique. L'empilement n'est plus parfaitement ordonné et les fibres ne sont plus en opposition de phase (voir la Fig. 8.4b). Cela change les conditions aux limites :

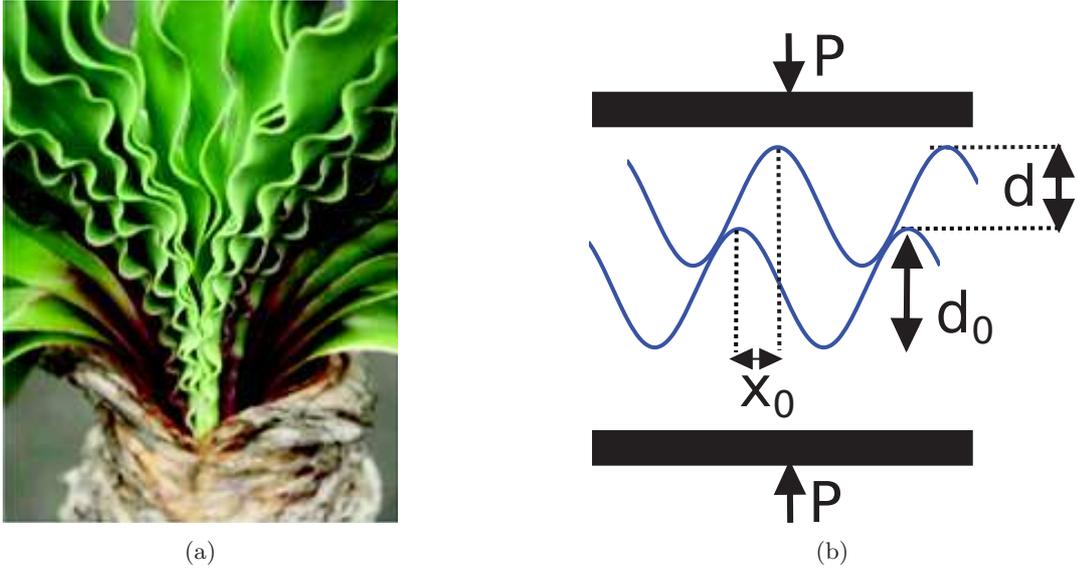


FIGURE 8.4 – (a) Photographie d'une plante *Boophone-disticha*. (b) Schéma du système désordonné à un mode.

$$\begin{cases} \zeta(0) = \zeta^{(1)}(0) = 0, \\ \zeta(\lambda - x_0) = \zeta^{(1)}(\lambda - x_0) = D. \end{cases} \quad (8.2.2)$$

En intégrant sur une demie période l'énergie de courbure (8.1.7) devient :

$$E(\bar{x}_0) = 96 \frac{\kappa D_0^2}{\lambda^3} \frac{(1 + \cos 2\pi \bar{x}_0 - D/D_0)^2}{(1 - 2\bar{x}_0)^2 (1 + 4\bar{x}_0)^4}, \quad (8.2.3)$$

avec $\bar{x}_0 = x_0/\lambda$, \bar{x}_0 représentant le désordre de phase par rapport à la longueur d'onde. Si $\bar{x}_0 = 0$ alors le désordre de phase est nul (alignement des fibres avec un déphasage parfait d'une demie période) et l'énergie de courbure d'un contact devient :

$$E(x_0) = E, \quad (8.2.4)$$

ce qui correspond bien à la situation de fibres sans désordre de phase. La contrainte pour un contact s'écrit :

$$P(x_0) = P_{\text{ref}} \frac{(1 + \cos 2\pi \bar{x}_0 - D/D_0)}{(1 - 2\bar{x}_0)^2 (1 + 4\bar{x}_0)^4}. \quad (8.2.5)$$

La contrainte de l'empilement est obtenue en sommant toutes les positions possibles pour \bar{x}_0 soit :

$$P = 2P_{\text{ref}} \int_0^{\bar{x}_{0,\text{max}}} \frac{(1 + \cos 2\pi\bar{x}_0 - D/D_0)}{(1 - 2\bar{x}_0)^2(1 + 4\bar{x}_0)^4} d\bar{x}_0, \quad (8.2.6)$$

avec $2\pi\bar{x}_{0,\text{max}} = \arccos(D/D_0 - 1)$. Le résultat des simulations est représenté en Fig. 8.5 pour des empilements avec des écarts types $\delta\lambda$ différents. Les résultats montrent que l'élasticité ne dépend pas de $\delta\lambda$. L'introduction d'un désordre, même faible, entraîne une non linéarité. L'équation (8.2.6) est tracée sans paramètre d'ajustement. Nous ferons référence à ce système par *Single Mode Disordered System* (SMD).

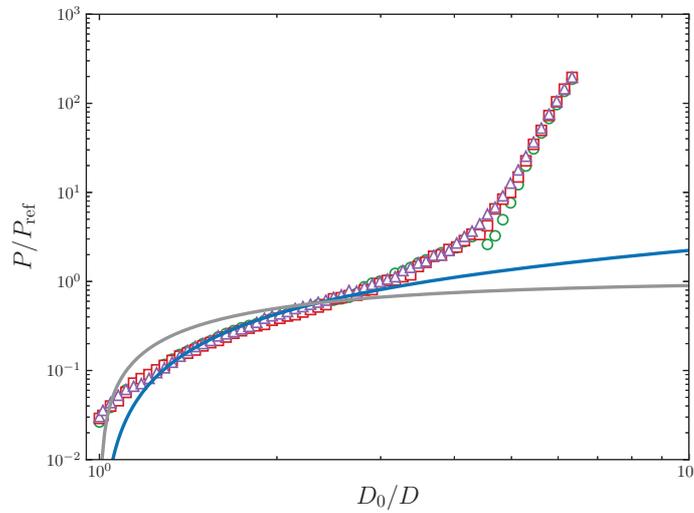


FIGURE 8.5 – P en fonction de la densité réduite D_0/D pour le système de désordre à un mode : $D_0 = 6$ et $\lambda_0 = 40$; (\circ) $\delta\lambda = 1$; (\square) $\delta\lambda = 2$; (\triangle) $\delta\lambda = 3$; (—) équation (8.2.6); (—) $1 - 1/x$.

8.3 Système désordonné avec une distribution de modes en loi de puissance

8.3.1 Distribution du désordre en loi de puissance

Pour finir, considérons un désordre plus important en ajoutant une large distribution de modes q_i . La forme $\zeta_{0,n}(x)$ est obtenue à partir de la superposition des fonctions propres $\phi_{q_i}(x)$ de l'opérateur Laplacien carré précisé en Annexe A.2 :

$$\zeta_{0,n}(x) = \sum_i \zeta_{0,n,q_i} \phi_{q_i}(x), \quad (8.3.1)$$

avec :

$$\phi_{q_i}(x) = \left(\frac{\cosh q_i L - \cos q_i L}{\sinh q_i L - \sin q_i L} \right) (\sinh q_i x - \sin q_i x) - (\cosh q_i x + \cos q_i x), \quad (8.3.2)$$

où L est la longueur curviligne de la fibre et ζ_{0,n,q_i} l'amplitude du mode q_i de la n -ième fibre. Les modes q_i sont choisis selon $q_i = (i + 1/2)\pi/L$ avec $i \in N^*$. L'amplitude d'un mode est distribuée normalement de moyenne nulle et de variance $\langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle$:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i = \left(i + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L}, \\ \mathcal{P}(\zeta_{0,q_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{\zeta_{0,q_i}^2}{\langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle} \right), \\ \langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle = \frac{c(\alpha)}{q_i^\alpha}, \end{array} \right. \quad (8.3.3)$$

avec α le paramètre de rugosité compris entre 2 et 5 et sera précisé plus loin. Nous ferons référence à ce système par *Power Law Disordered System* (PLD).

8.3.2 Paramètre de rugosité des fibres

Plus α est grand moins les petites longueur d'ondes (grands nombre d'ondes) sont significatifs et moins la fibre est rugueuse. $c(\alpha)$ est relié à l'amplitude moyenne quadratique de la fibre. D'après le théorème de Parseval :

$$\langle \zeta_0^2 \rangle = \sum_{q_i} \langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle = c(\alpha) \frac{L^\alpha}{\pi^\alpha} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + i \right)^{-\alpha}. \quad (8.3.4)$$

Cela conduit à¹ :

$$c(\alpha) = \frac{\pi^\alpha}{\zeta\left(\alpha, \frac{3}{2}\right)} \frac{\langle \zeta_0^2 \rangle}{L^\alpha}, \quad (8.3.6)$$

d'où :

1. $\zeta(\alpha, 3/2)$ est la fonction de Riemann Zeta donnée par :

$$\zeta\left(\alpha, \frac{3}{2}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2} + i\right)^\alpha}. \quad (8.3.5)$$

$$\langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle = \frac{\pi^\alpha}{\zeta\left(\alpha, \frac{3}{2}\right)} \frac{\langle \zeta_0^2 \rangle}{q_i^\alpha L^\alpha}. \quad (8.3.7)$$

Des exemples pour $\alpha = 2, 3, 4$ et 5 sont donnés en Fig. 8.6. Pour $\alpha \geq 4$ il n'y a plus de rugosité détectable à nos échelles.

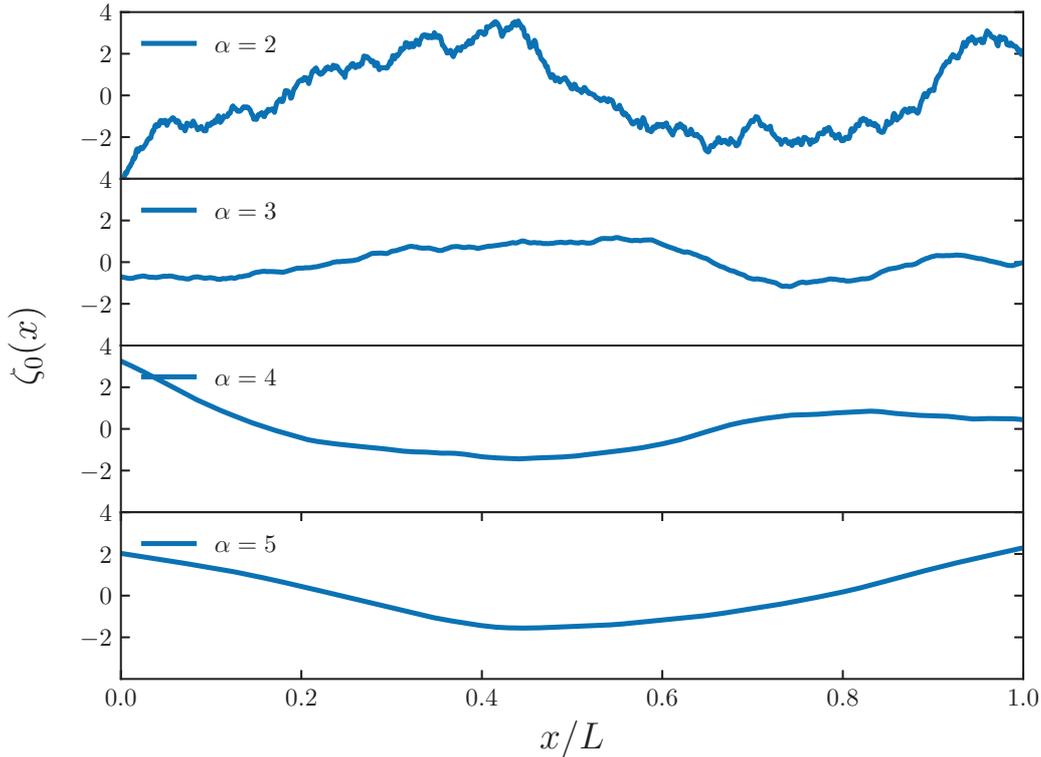


FIGURE 8.6 – Influence de α sur la forme des fibres.

8.3.3 Résultats

Nous avons effectué des simulations numériques pour $\alpha = 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5$ et 5.0 . Les courbes numériques sont présentées en Fig. 8.8a. On distingue 3 régimes. Un régime à faible densité $\langle \zeta_0 \rangle / d \leq 1$ où la contrainte augmente d'environ une décade par décade de densité avec peu de contact entre les fibres (Fig. 8.7a). Un régime à grande densité $1 \leq \langle \zeta_0 \rangle / d \leq 3.0$ avec environ 1 à 10 % des billes en contact (Fig. 8.7b) et un régime compact au-delà $\langle \zeta_0 \rangle / d > 3.0$ dans lequel les fibres ne possèdent presque plus de courbures. Ce régime correspond à la déformation des billes. En utilisant la distribution d'amplitudes des modes (voir la Fig. 4.3) nous pouvons

comparer les résultats numériques au modèle discret et le résultat est présenté en Fig. 8.8b. Le modèle ne décrit pas les faibles densités. Cependant, comme pour les fibres expérimentales, ce régime est très bien décrit par le modèle linéaire (équation (8.1.8)). La contribution des deux modèles de déformation de courbure (Fig. 8.8d et Fig. 8.8e) décrit fidèlement les simulations numériques. Ce résultat est obtenu à un facteur numérique Φ_{num} près dépendant faiblement de α (Fig. 8.8c) résumé dans la Table 8.1. Cela valide notre modèle discret de champ moyen et l'approche expérimentale que nous avons eu jusqu'à présent. Nous comparerons les résultats numériques et expérimentaux plus loin.

α	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
L	677.14	774.33	890.63	945.81	967.89	973.24	976.71
$\langle \zeta_0 \rangle$	5.61	5.57	5.3	5.66	5.5	5.5	5.41
Φ_{num}	0.48	2.2	9	13	15	16	12

TABLE 8.1 – Paramètres caractéristiques des simulations numériques.

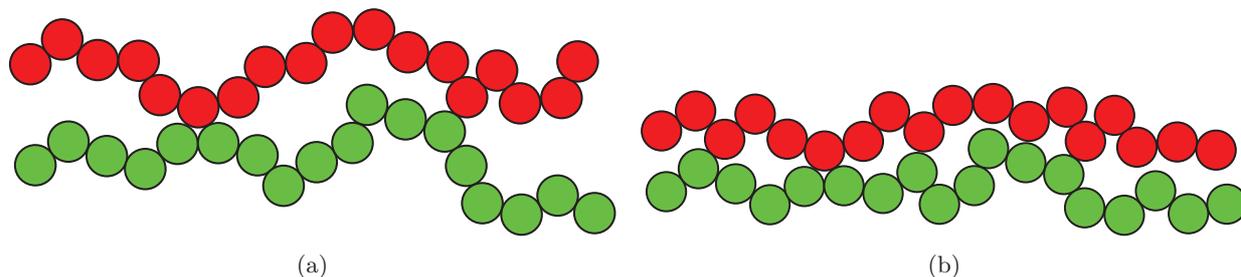


FIGURE 8.7 – (a) Régime linéaire. (b) Régime à loi d'échelle.

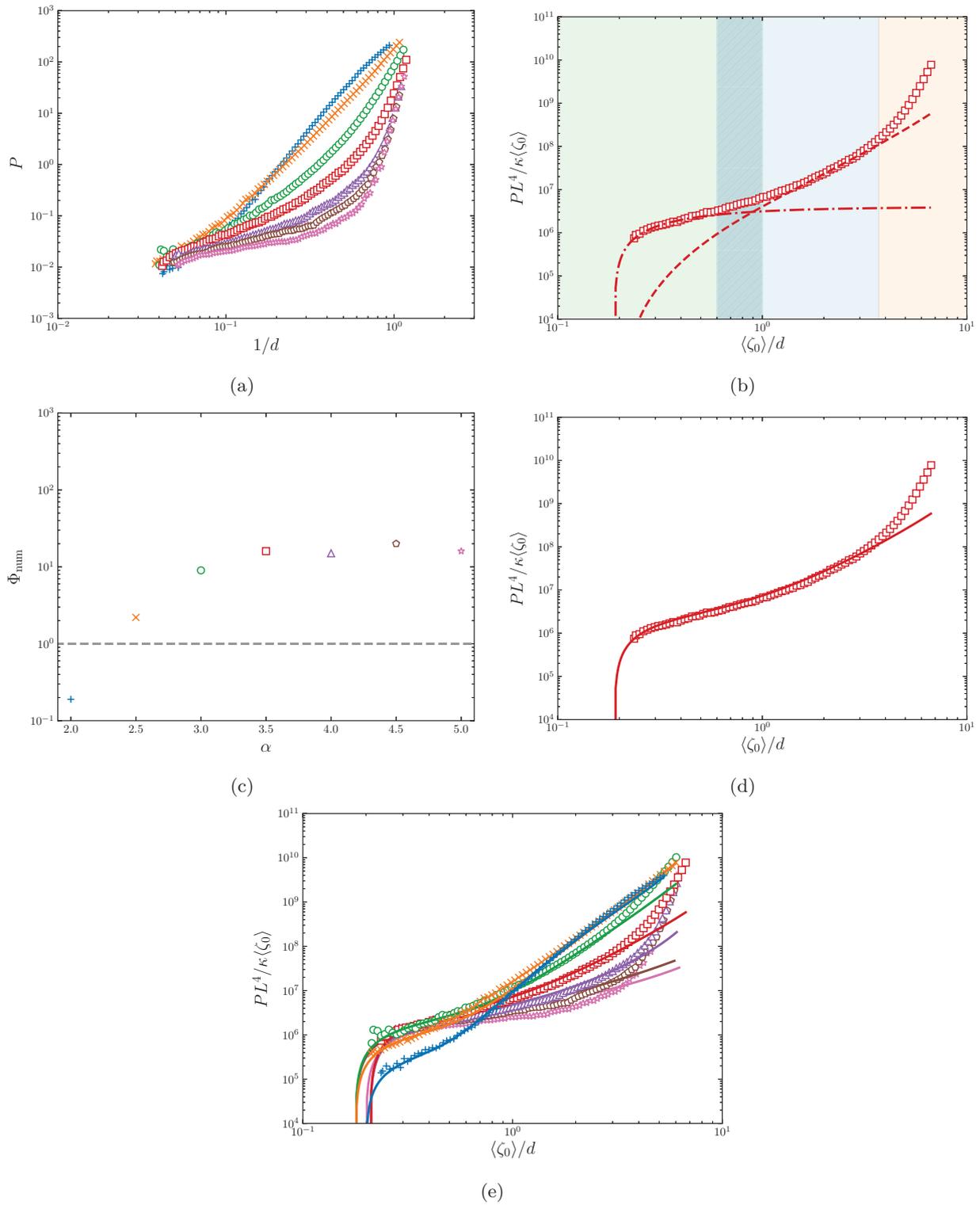


FIGURE 8.8 – (a) Résultats numériques. (b) Prédictions des modèles linéaire (— · —) et de champ moyen (— — —) pour le cas $\alpha = 3.5$. Les domaines colorés représentent les 3 régimes et la zone hachurée correspond à la transition vers le régime de champ moyen. (c) Φ_{num} en fonction de α . (d) Addition des deux contributions. (e) Résultats numériques avec les prédictions théoriques. (+) $\alpha = 2.0$; (×) $\alpha = 2.5$; (○) $\alpha = 3.0$; (□) $\alpha = 3.5$; (△) $\alpha = 4.0$; (◇) $\alpha = 4.5$; (☆) $\alpha = 5.0$; (—) contribution linéaire et de champ moyen.

Chapitre 9

Modèle continu d'empilements de fibres à désordre de forme

Ce chapitre développe le modèle discret pour les fibres à désordre en loi de puissance. Nous obtenons une expression analytique simple décrivant une élasticité en loi de puissance qui ne dépend que de la forme de départ des fibres. Pour finir nous comparons nos modèles à nos résultats expérimentaux.

9.1 Modèle continu d'empilements de fibres à désordre en loi de puissance

Nous avons vu dans le chapitre 8.3.1 que le désordre est donné par la relation (8.3.7) :

$$\langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle = \frac{\pi^\alpha}{\zeta\left(\alpha, \frac{3}{2}\right)} \frac{\langle \zeta_0^2 \rangle}{q_i^\alpha L^\alpha}. \quad (9.1.1)$$

La densité linéaire d'énergie devient :

$$\langle \tilde{e} \rangle = \frac{\pi^\alpha}{\zeta\left(\alpha, \frac{3}{2}\right)} \frac{1}{y} \sum_{q_i} (q_i L)^{4-\alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\tilde{B}(y)}{(q_i L)^4}}} \right). \quad (9.1.2)$$

9.1.1 Approximation continue

Lorsque la longueur projetée de la fibre est suffisamment grande la distribution de nombre d'onde peut être approchée par une distribution continue $q_i \rightarrow q$:

$$\langle \zeta_{0,q_i}^2 \rangle \rightarrow \langle \zeta_{0,q}^2 \rangle = \frac{c(\alpha)}{q^\alpha}. \quad (9.1.3)$$

Dans la limite continue nous avons :

$$\langle \tilde{e} \rangle = \frac{\pi^{\alpha-1}}{\zeta\left(\alpha, \frac{3}{2}\right)} \frac{1}{y} \int_{u \approx 0}^{+\infty} u^{4-\alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\tilde{B}(y)}{u^4}}} \right) du, \quad (9.1.4)$$

avec $u = qL$, ce qui donne¹ :

$$\langle \tilde{e} \rangle = g(\alpha) \frac{1}{y} \tilde{B}(y)^{(5-\alpha)/4}, \quad (9.1.5)$$

avec $1 < \alpha < 5$ et $g(\alpha)$ ² donnée par :

$$g(\alpha) = -\frac{\pi^{\alpha-\frac{3}{2}} 2^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)}}{\zeta\left(\alpha, \frac{3}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{7-\alpha}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-5}{4}\right). \quad (9.1.6)$$

La fonction $g(\alpha)$ est représentée en Fig. 9.1a.

9.1.2 Comportement en loi d'échelle

Avec (9.1.5), (2.2.20) devient :

$$\tilde{B}(y) = g(\alpha) \frac{d^2}{dy^2} \tilde{B}(y)^{(5-\alpha)/4}. \quad (9.1.7)$$

En supposant qu'à grande déformation le module de compressibilité suit une loi du type $B(y) = B_0(\alpha)y^\nu$, l'équation (9.1.7) devient :

$$B_0(\alpha) = \left(2g(\alpha) \frac{(5-\alpha)(9-\alpha)}{(1-\alpha)^2} \right)^{4/(\alpha-1)}, \quad (9.1.8)$$

1. Le résultat de l'intégration est $2^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{7-\alpha}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-5}{4}\right) \tilde{B}(y)^{(5-\alpha)/4}$

2. $\Gamma(x)$ la fonction Gamma est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

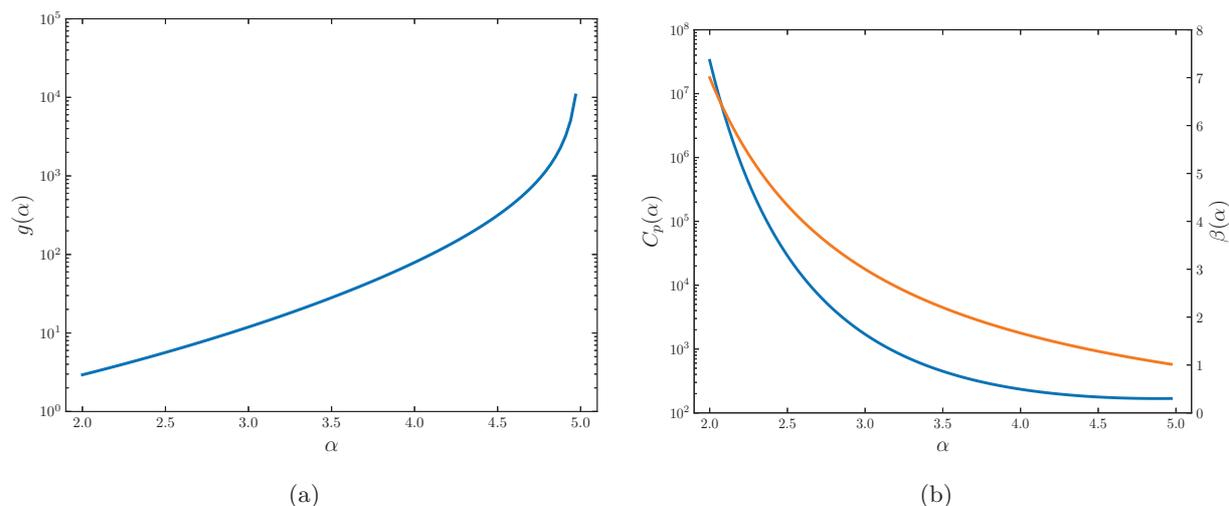


FIGURE 9.1 – Solution numérique de l'équation (2.2.20). (a) $g(\alpha)$ en fonction de α . (b) Évolutions de $C_p(\alpha)$ et $\beta(\alpha)$ en fonction de α : (—) $C_p(\alpha)$; (—) $\beta(\alpha)$.

et

$$\nu(\alpha) = \frac{8}{1 - \alpha}. \quad (9.1.9)$$

On a alors :

$$\tilde{P}(y) = C_p(\alpha) \left(1 - y^{-\beta(\alpha)}\right), \quad (9.1.10)$$

avec :

$$\begin{cases} C_p(\alpha) = \frac{B_0(\alpha)}{\beta(\alpha)}, \\ \beta(\alpha) = \frac{9 - \alpha}{\alpha - 1}. \end{cases} \quad (9.1.11)$$

Les variations du coefficient de la loi d'échelle $C_p(\alpha)$ et de l'exposant $\beta(\alpha)$ par rapport à α sont représentées en Fig. 9.1b et montrent que l'élasticité pour un empilement de fibres rugueuses (c'est-à-dire pour de faibles valeurs de α) est plus dure que pour un empilement de fibres moins rugueuses.

9.1.3 Solution complète

En utilisant le changement de variables $\tilde{B}(y) = b^{4/(5-\alpha)}$ dans l'équation (9.1.7) nous obtenons l'équation différentielle à résoudre pour obtenir l'élasticité :

$$\frac{d^2b}{dy^2} = g(\alpha)^{-1} b^{4/(5-\alpha)}. \quad (9.1.12)$$

(9.1.12) peut être résolue numériquement avec les conditions aux limites $b(y = y_0) = 0$ et sa dérivée $b'(y = y_0)$ qui n'est pas encore connue. La solution générale de (9.1.12) est $b = b_0 y^p f(y)$. Si $f(y) = 1$ alors l'élasticité est une loi d'échelle. En utilisant les équations (9.1.8) et (9.1.9) cela conduit à :

$$b_0(\alpha) = \widetilde{B}_0(\alpha)^{(5-\alpha)/4}, \quad (9.1.13)$$

et :

$$p = 2 \left(\frac{5 - \alpha}{1 - \alpha} \right). \quad (9.1.14)$$

Un autre changement de variables $y = \exp(-x)$ permet une meilleur compréhension de la condition aux limites $b'(y = y_0)$. D'après (9.1.12), l'équation différentielle de $f(x)$ est :

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 4 \left(\frac{5 - \alpha}{1 - \alpha} \right) \frac{df}{dx} + 2 \frac{(5 - \alpha)(9 - \alpha)}{(1 - \alpha)^2} \left[f^{4/(5-\alpha)} - f \right]. \quad (9.1.15)$$

L'équation (9.1.15) représente le mouvement d'une particule fictive dans un potentiel $U(f)$:

$$U(f) = 2 \frac{(5 - \alpha)(9 - \alpha)}{(1 - \alpha)^2} \left[\frac{1}{2} f^2 - \left(\frac{5 - \alpha}{9 - \alpha} \right) f^{(9-\alpha)/(5-\alpha)} \right], \quad (9.1.16)$$

et soumise à une force de friction de coefficient $4(5-\alpha)/(1-\alpha)$. La condition $b'(y = y_0)$ est équivalente à la vitesse initiale de la particule fictive $f'(x = 0)$. Le potentiel est représenté en Fig. 9.2a pour différentes valeurs de α . Si la vitesse initiale est trop petite pour permettre à la particule de franchir la barrière de potentiel alors la solution tends vers $\widetilde{B} = 0$. Si la vitesse est trop grande alors $\widetilde{B} \rightarrow +\infty$. La seule solution acceptable est la loi d'échelle à $f = 1$ avec une vitesse initiale f'_c telle que la vitesse est nulle à $f = 1$. Une telle condition peut être obtenue par une méthode de tir. La Fig. 9.2b représente la contrainte selon les valeurs de $f'(x = 0)$.

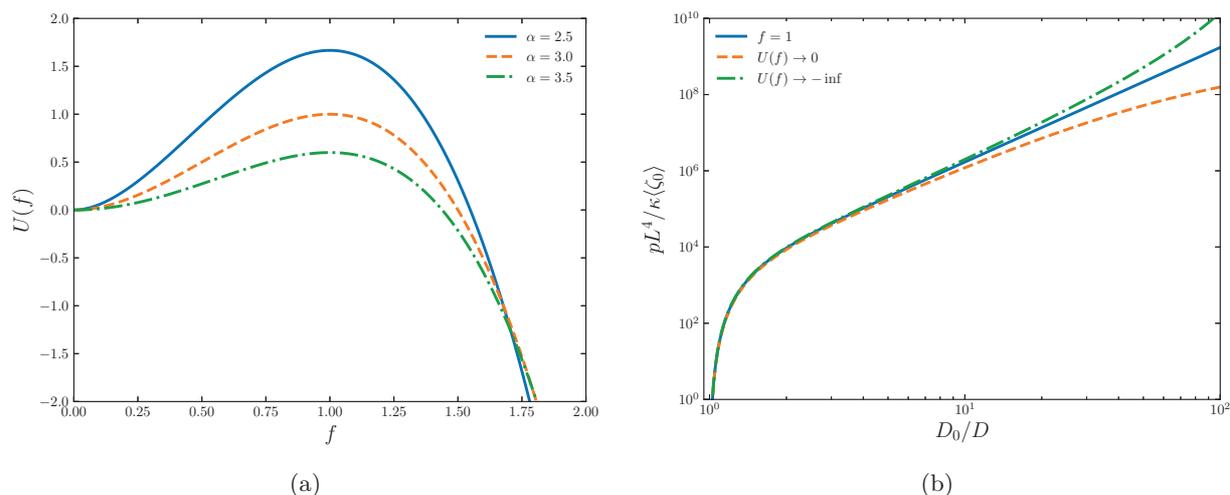


FIGURE 9.2 – Solution numérique de l'équation (2.2.20). (a) Potentiel $U(f)$ pour (—) $\alpha = 2.5$; (- - -) $\alpha = 3.0$; (- · -) $\alpha = 3.5$. (b) Contrainte normalisée en utilisant (9.1.12) pour $\alpha = 3.0$ pour trois conditions initiales : (—) $f' = f'_c$; (- - -) $f' < f'_c$; (- · -) $f' > f'_c$.

9.2 Discussion générale des résultats expérimentaux, numériques et théoriques

9.2.1 Modèle continu

Le modèle continu ne permet de décrire les résultats numériques que si nous ajustons la valeur de α . Nous obtenons les courbes en traits pleins dans la Fig. 9.3a. L'accord avec les résultats numériques est bon dans le régime de forte densité ce qui est propre au modèle de champ moyen. En particulier les $\alpha = 2.0$ et 2.5 présentent un accord remarquable sur 1 décade de densité. Les paramètres α ajustés sont appelés α_{eff} et sont représentés en Fig. 9.3b en fonction de α . Il semble y avoir un plateau à faible α (fibres rugueuses).

9.2.2 Résumé

Le modèle continu prévoit une loi de puissance dont l'exposant β ne dépend que de α . Nous avons ajusté au mieux les courbes de compression expérimentales par une loi de puissance et nous les comparons aux valeurs numériques et théoriques dans la Fig. 9.4a. En particulier les cas PP1, FE1 et FE2 sont les fibres qui ressemblent le plus à notre modèle à loi de puissance. Les fibres les plus rugueuses ($\alpha = 2, 3$), qui sont celles présentant le plus grand désordre de forme, sont globalement bien décrites par le modèle auto-cohérent dans l'approximation continue.

Le modèle auto-cohérent est aussi utilisé avec la distribution de modes réelle

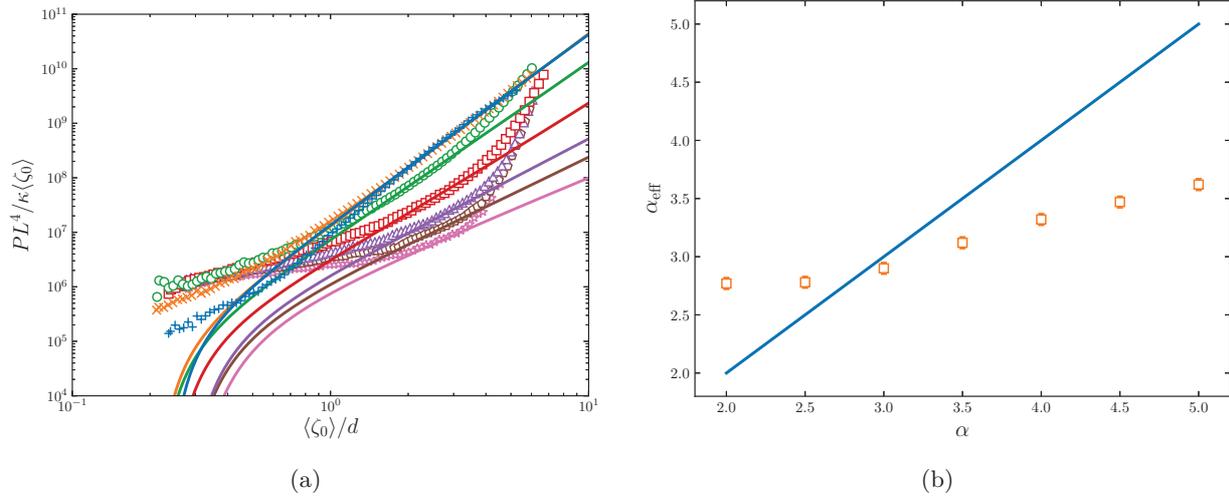
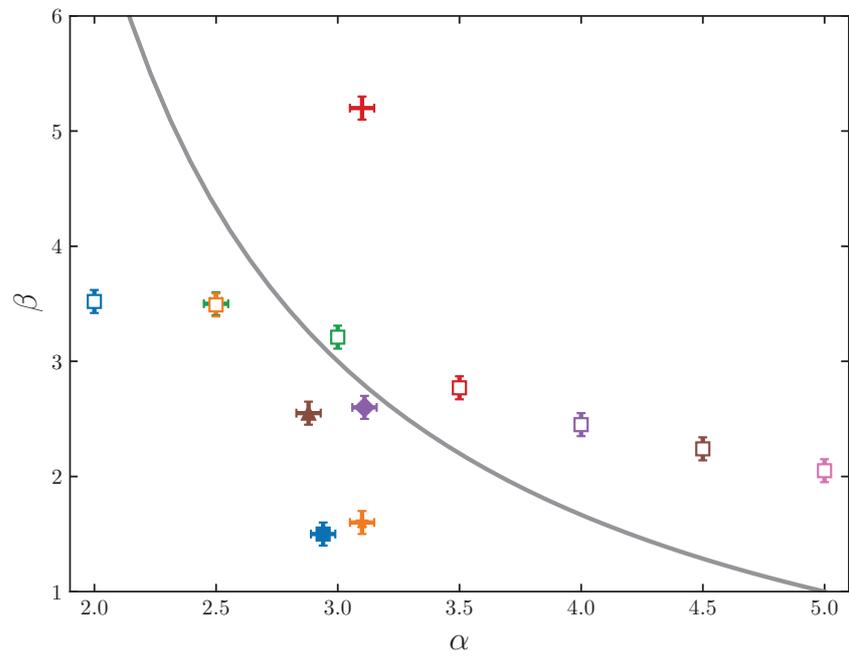


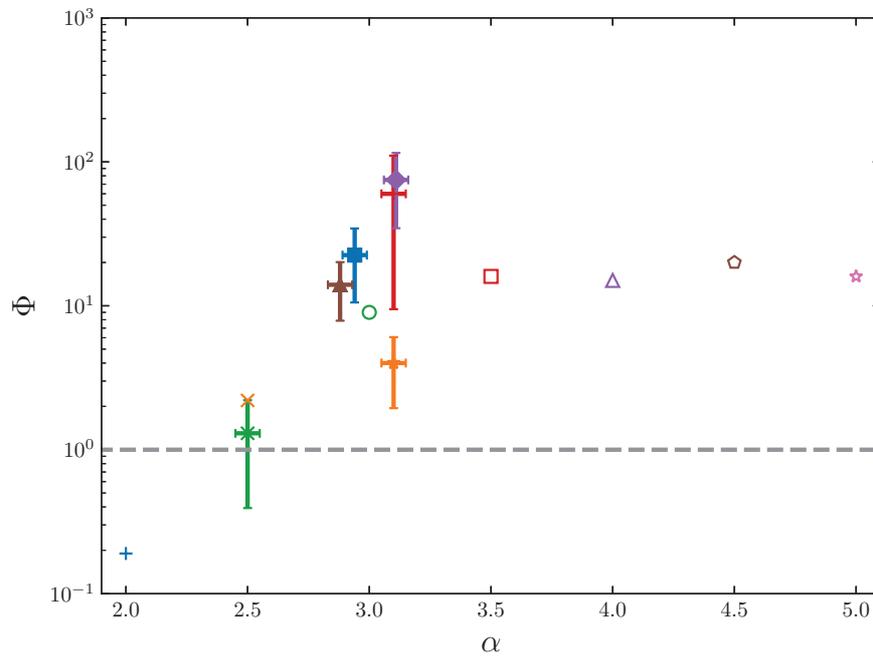
FIGURE 9.3 – (a) Comparaison entre les résultats numériques et le modèle continu. (+) $\alpha = 2.0$; (\times) $\alpha = 2.5$; (\circ) $\alpha = 3.0$; (\square) $\alpha = 3.5$; (\triangle) $\alpha = 4.0$; (\diamond) $\alpha = 4.5$; (\star) $\alpha = 5.0$; (—) modèle continu. (b) α_{eff} en fonction de α . (—) $y = x$.

lorsqu'elle est connue (expérimentalement ou numériquement). Nous montrons que celui-ci décrit très bien l'allure générale des courbes expérimentales ou numériques, mais qu'il faut introduire un facteur multiplicatif global noté Φ_{exp} et Φ_{num} pour obtenir un accord quantitatif. Les valeurs de ces coefficients sont comparés dans la Fig. 9.4b. Les coefficients Φ_{exp} et Φ_{num} suivent la même tendance, même si les incertitudes sur les valeurs expérimentales sont grandes, en partie en raison de l'incertitude statistique sur le module de courbure. L'existence de Φ_{num} dans une géométrie à deux dimensions montre que Φ_{exp} n'est pas causé par le passage à trois dimensions. L'origine de Φ_{exp} et Φ_{num} est probablement l'approximation de champ moyen.

Finalement, le modèle discret semble mieux décrire l'élasticité des empilements de fibres, au facteur d'ajustement près, que le modèle continu. Les simulations numériques montrent que nous retrouvons la tendance prévue par le modèle continu et que plus une fibre est rugueuse plus la réponse de l'ensemble est rigide.



(a)



(b)

FIGURE 9.4 – (a) β en fonction de α . (b) Φ_{exp} et Φ_{num} en fonction de α : (+) $\alpha = 2.0$; (\times) $\alpha = 2.5$; (\circ) $\alpha = 3.0$; (\square) $\alpha = 3.5$; (\triangle) $\alpha = 4.0$; (\diamond) $\alpha = 4.5$; (\star) $\alpha = 5.0$; (\square) PP1; (\star) PP2; (\times) PP3; (+) DEN; (\diamond) FE1; (\triangle) FE2; (—) équation (9.1.11); (—) $y = 1$.

Chapitre 10

Propriétés électriques d'empilements de fibres

Les laines d'acier présentent des propriétés électriques particulières. Les empilements peuvent être vu comme un réseau de résistances dont chaque élément est une longueur entre contacts. Nous tentons dans ce chapitre de caractériser la relation entre conductivité et contrainte pour les laines d'acier mais aussi pour les empilements numériques. Nous mettons en évidence une corrélation entre la distribution des longueurs entre contacts et la conductivité.

10.1 Résultats expérimentaux

Nous avons mesuré la résistance électrique R des empilements FE1 et FE2 lors de leurs compressions et le résultat est représenté en Fig. 10.1a. Nous observons une évolution de la résistance électrique sur trois décades pour quatre décades de contrainte. On distingue à forte contrainte que la résistance est bien décrite par une loi de puissance sur deux décades en résistance et contrainte. D'une manière remarquable, c'est le même domaine de contrainte qui est décrit par une loi d'échelle en déformation-contrainte. La conductivité électrique g en fonction de la contrainte est représentée en Fig. 10.1b. Nous normalisons la conductivité électrique de l'empilement par la conductivité des fibres individuelles g_0 dont les mesures donnent $(4.3 \pm 0.7) \text{ m}\Omega^{-1}.\text{mm}^{-1}$ pour les fibres FE1 et $(11.8 \pm 0.8) \text{ m}\Omega^{-1}.\text{mm}^{-1}$ pour les fibres FE2 ce qui est comparable à la valeur tabulée du fer de $\sim 10 \text{ m}\Omega^{-1}.\text{mm}^{-1}$. Cela rapproche

les courbes mais elles ne se superposent que si nous introduisons un facteur arbitraire de valeur 1.5. Nous ne comprenons pas encore la signification de ce facteur, mais les résistances des différentes fibres sont probablement très dispersées. Nous ajustons ces courbes par la loi de puissance :

$$\frac{g}{g_0} = c_g P^\varphi \quad (10.1.1)$$

avec un exposant φ .

A priori la conductivité électrique dépend de la distribution des chemins électriques possibles entre les deux plaques. Nous pouvons supposer que cette distribution dépend de la rugosité des fibres donc de α . Cela revient à supposer que $\varphi = \varphi(\alpha)$. Nous sommes limités à ces deux échantillons conducteurs et les valeurs de α sont quasi-identiques. Afin de vérifier notre hypothèse nous réalisons des simulations pour lesquelles il est possible de calculer exactement la valeur de la résistance.

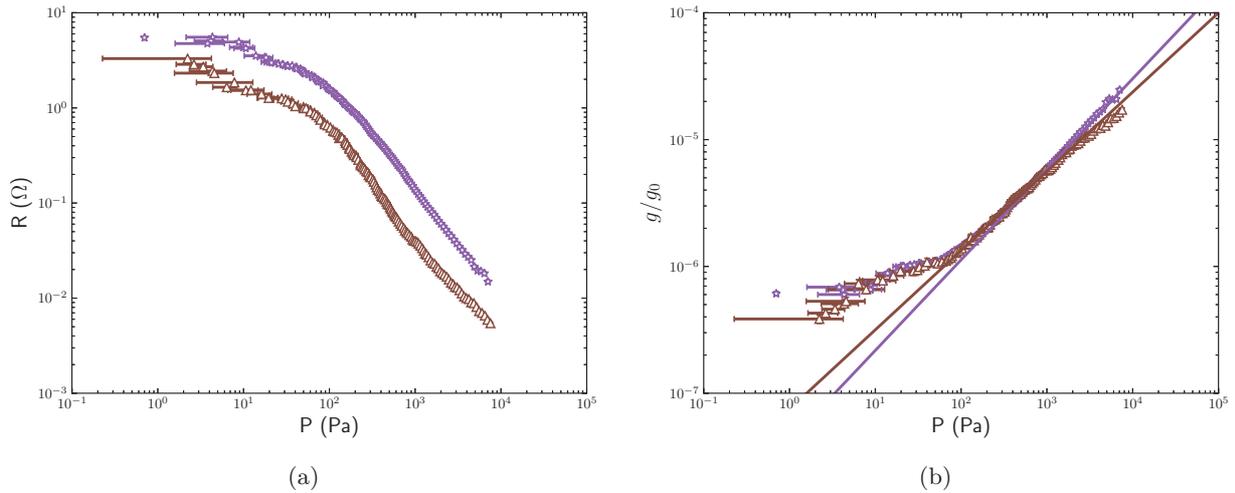


FIGURE 10.1 – (a) Résistance en fonction de la contrainte. (b) Conductivité en fonction de la contrainte pour les empilements (\diamond) FE1; (\triangle) FE2; (—) meilleur ajustement en loi de puissance. $\varphi_{\text{FE1}} = 0.71$; $\varphi_{\text{FE2}} = 0.63$.

10.2 Simulations numériques

10.2.1 À propos du calcul de la conductivité

Le courant circule le long des fibres et d'une fibre à la suivante lors d'un contact. Le potentiel d'une bille d'une fibre intermédiaire dépend du réseau de contacts. Ce réseau est complexe, aléatoire et les contacts évoluent au cours de la compression. Il existe plusieurs manières d'obtenir la résistance

du réseau. Nous avons tenté en premier lieu des opérations de réduction des contacts afin de simplifier le réseau mais ce fut vite abandonné au vu de la complexité du programme. Une méthode proposée par Derrida et al. [41, 42] consiste à calculer l'influence de l'ajout de noeuds supplémentaires à partir de l'étape précédente. Finalement nous avons choisi la façon la plus simple (plus coûteuse en temps de calcul, mais ce n'est pas un problème) en calculant la loi d'Ohm et des noeuds en chaque noeud.

10.2.2 Calcul de la conductivité

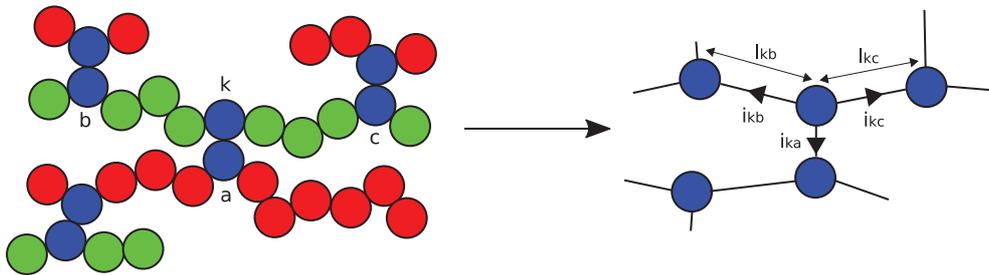


FIGURE 10.2 – L'empilement de fibres peut être vu comme un réseau de résistances. L'empilement est constitué d'une alternance de fibres. Les fibres successives sont représentées alternativement par des billes rouges ou vertes. Les billes bleues sont les billes de deux fibres différentes en contact. La bille k possède 3 contacts voisins : a , b et c .

Considérons un empilement de fibres conductrices de conductivités linéiques g_{bille} . La première fibre est en contact avec une ligne conductrice parfaite au potentiel E tandis que la dernière fibre est en contact avec une ligne au potentiel 0. Considérons une bille k au potentiel V_k . Elle est en contact avec la bille a d'une autre fibre au potentiel V_a comme le montre la Fig. 10.2. Les plus proches contacts à gauche et à droite sont b et c . Il est plus simple de construire un réseau en ne considérant que les contacts de fibres comme le schéma en Fig. 10.2 le suggère. La distance entre deux contacts k et j est notée l_{kj} . La loi des noeuds appliquée à la bille k entraîne :

$$\begin{cases} \sum_{j=a}^n i_{kj} = 0, \\ \sum_{j=a}^n i_{kj} = i_k \text{ si } k \text{ est en contact avec une ligne,} \\ \sum_k i_k = I \text{ pour tous } k \text{ en contact avec une ligne,} \end{cases} \quad (10.2.1)$$

avec $j = a, b, \dots, n$; n le nombre de contacts voisins et i_{kj} le courant algébrique de k vers j . La loi des mailles s'écrit :

$$(V_k - V_j)g_{bille}l_{kj}^{-1} = i_{kj}. \quad (10.2.2)$$

En combinant les équations (10.2.1) et (10.2.2) nous obtenons la loi de Millmann :

$$\begin{cases} V_k l_k^{-1} - \sum_{j=a}^n V_j l_{kj}^{-1} = 0, \\ V_k l_k^{-1} - \sum_{j=a}^n V_j l_{kj}^{-1} = i_k \text{ si } k \text{ est en contact avec une ligne,} \end{cases} \quad (10.2.3)$$

avec $l_k^{-1} = \sum_{j=a}^n l_{kj}^{-1}$, ce qui se réécrit sous forme matricielle comme :

$$\underline{\underline{G}}V = \underline{i}. \quad (10.2.4)$$

$\underline{\underline{G}}^1$ est la matrice de conductivité dont les éléments sont donnés par :

$$\begin{cases} g_{kj} = -l_{kj}^{-1} \text{ si } k \text{ et } j \text{ sont en contact,} \\ g_{kk} = l_k^{-1}, \\ g_{kj} = 0 \text{ si } k \text{ et } j \text{ ne sont pas en contact.} \end{cases} \quad (10.2.5)$$

Le vecteur V contient les tensions des billes et \underline{i} contient les conditions aux limites :

$$\begin{cases} i_k = I \text{ si } k \text{ est en contact avec une ligne,} \\ i_k = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (10.2.6)$$

Inverser $\underline{\underline{G}}$ permet de connaître la distribution de tension et de courant. La conductance G est alors :

$$G = \frac{I}{E}, \quad (10.2.7)$$

et la conductivité g :

$$g = \frac{L_y}{L_x} G, \quad (10.2.8)$$

1. La matrice est carrée et symétrique par construction. Sa taille est le nombre total de contacts (variant de 0 au nombre total de billes N au cours de la déformation). La somme des éléments d'une ligne / colonne est nulle.

avec L_x et L_y les dimensions de la boîte de simulation.

Difficultés rencontrées. Un nombre est codé et stocké sur quatre octets et un entier sur deux octets. Pour calculer la conductance nous avons besoin de $N \times N$ éléments avec N le nombre de billes soit $\sim 4N^2$ octets (en première approximation la matrice est composée essentiellement de zéros). Les simulations dans le chapitre 8 sont réalisées sur 100 fibres de 1000 billes, soit au moins 37 Go de mémoire vive pour initialiser la matrice. Nous avons réduit la taille des empilements à 25 fibres de 500 billes soit 1/8 ième de billes, afin de compenser nous effectuons quatre séries de simulations à partir de configurations initiales différentes.

10.2.3 Système de référence

Les résultats pour le système de référence sont représentés en Fig. 10.4. La conductance (Fig. 10.4a) augmente légèrement (de 0.1 à 0.2) jusqu'au régime de déformation des billes. Théoriquement la conductance doit rester constante puisque la longueur entre contacts ne varie pas. Cependant nous observons une légère évolution. La Fig. 10.4b représente le ratio entre nombre de contact n_c et le nombre de billes par demie-période n_λ en fonction de la conductance. Au départ il y a 1 contact par demie période puis ce nombre augmente jusqu'à atteindre la valeur asymptotique de 1 contact par bille. Cela confirme que le segment parcouru par le courant diminue en longueur donc la conductance augmente (Fig. 10.3). La conductivité attendue est définie par :

$$g = \left(\frac{2}{\lambda}\right) \frac{D}{L_0(D)}, \quad (10.2.9)$$

avec :

$$L_0(D) = n_\lambda - \left(\frac{n_c(D) - 1}{n_\lambda - 1}\right), \quad (10.2.10)$$

où $L_0(D)$ est la longueur du segment en tenant compte de sa diminution. La courbe en Fig. 10.4a correspond à la conductance calculée à partir de l'équation (10.2.10) et n_c (Fig. 10.4b). La Fig. 10.4c représente la conductivité en fonction de la densité où nous constatons que la conductivité diminue de moitié entre l'état de référence et le régime de déformation des billes. La conductivité attendue est conforme au résultat numérique. Pour finir la Fig.

10.4d représente la conductivité en fonction de la contrainte normalisée. Le résultat est qualitativement différent des courbes expérimentales.

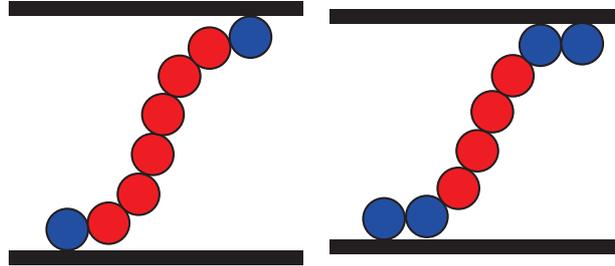


FIGURE 10.3 – Évolution du segment entre noeuds. À gauche : $n_c = 1$. À droite : $n_c = 3$. La dernière bille bleue appartient à la demie période suivante.

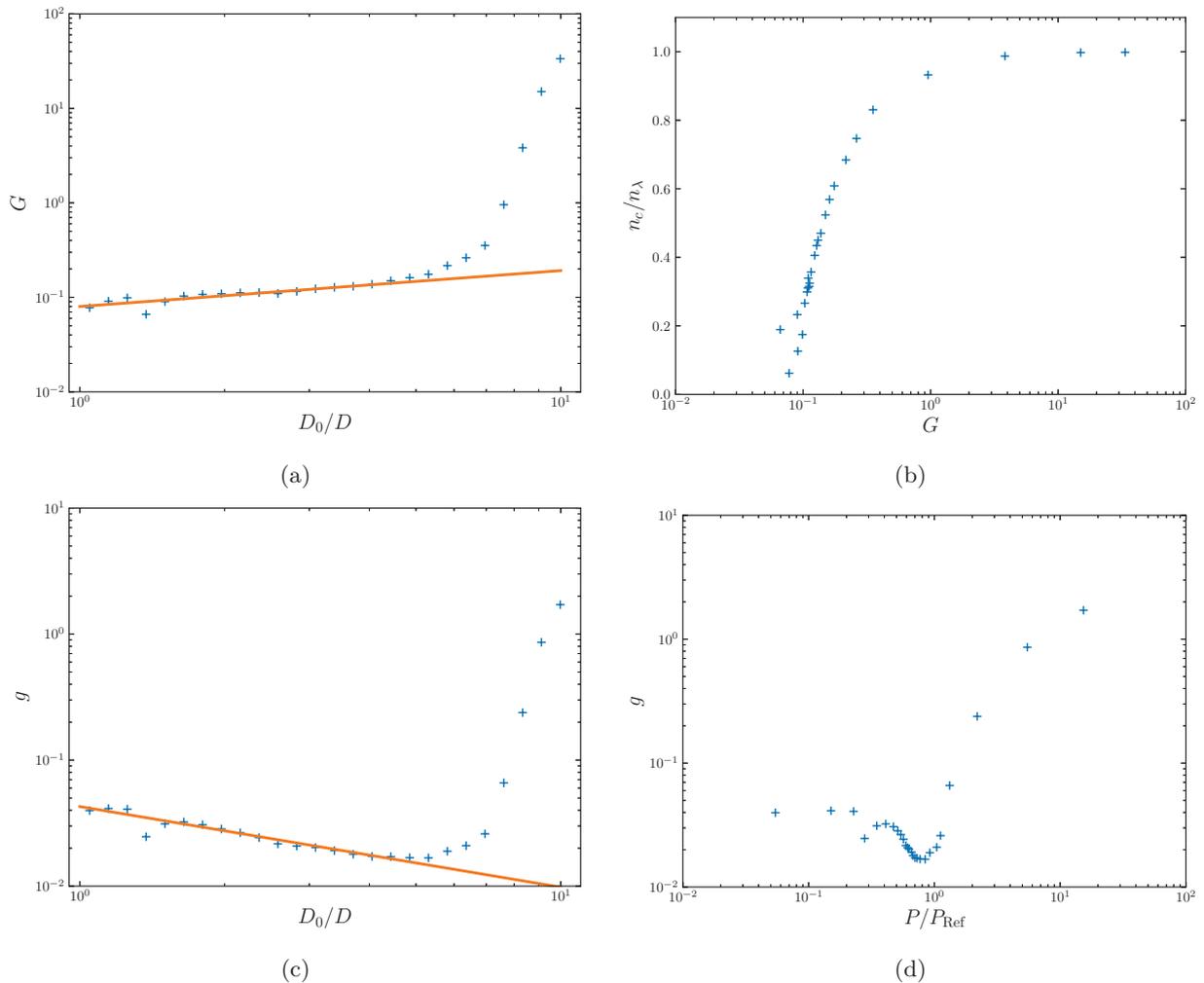


FIGURE 10.4 – Conductivité électrique pour les empilements Réf. (a) Conductance en fonction de la densité. (—) équation (10.2.10) avec les paramètres de la simulation. (b) Nombre de contact par demie période en fonction de la conductance. (c) Conductivité en fonction de la densité. (d) Conductivité en fonction de la contrainte.

10.2.4 Système à désordre en loi de puissance

À présent considérons les empilements à désordre en loi de puissance (PLD). Nous avons réalisé des simulations à partir de 4 configurations initiales pour chaque valeur de α . La conductivité en fonction de la contrainte est représentée en Fig. 10.5a. Les résultats numériques sont qualitativement comparables aux résultats expérimentaux (Fig. 10.1b) ce qui est encourageant. Nous observons en échelle log-log un comportement linéaire suggérant une loi de puissance :

$$g = c_g P^\varphi \quad (10.2.11)$$

dans un domaine étroit de contrainte. De façon intéressante, ce domaine de contrainte est celui qui est bien décrit par le modèle continu. La Fig. 10.5b met en évidence ce domaine pour le cas $\alpha = 3.5$ ce qui nous permet d'ajuster la courbe de conductivité (Fig. 10.5c) par l'équation (10.2.11). φ en fonction de α est représentée en Fig. 10.5d avec les valeurs expérimentales FE1 et FE2. Nous observons que φ diminue jusqu'à $\alpha = 3.5$ puis sa valeur augmente. Les valeurs expérimentales sont proches des valeurs numériques.

10.2.5 Longueur moyenne entre contacts

Nous venons de voir que le réseau de contacts influence la conductivité. La distribution des longueurs doit pouvoir être reliée à la conductivité. Nous avons mesuré le nombre de contacts n_c moyen par fibre et son évolution en fonction de la contrainte est représentée en Fig. 10.6a. Nous n'observons pas de comportement particulier. Dans le régime linéaire le nombre de contacts augmente fortement de deux décades pour une décade de contrainte puis son évolution est plus linéaire. $n_c = 1$ signifie qu'il y a en moyenne 1 contact par fibre ce qui explique l'absence de conductivité dans le régime linéaire (voir Fig. 10.5b). La valeur limite $n_c = L_0$ est plus rapidement atteinte pour les fibres non rugueuses. La longueur curviligne L_0 est reliée au nombre de contacts N_c dans une fibre par :

$$L_0 = \sum_{i=1}^{N_c+1} l_{c,i}, \quad (10.2.12)$$

avec $l_{c,i}$ la longueur entre deux contacts dans une fibre. Lorsque le nombre de contacts atteint une valeur suffisamment élevée, qu'il reste à déterminer, la

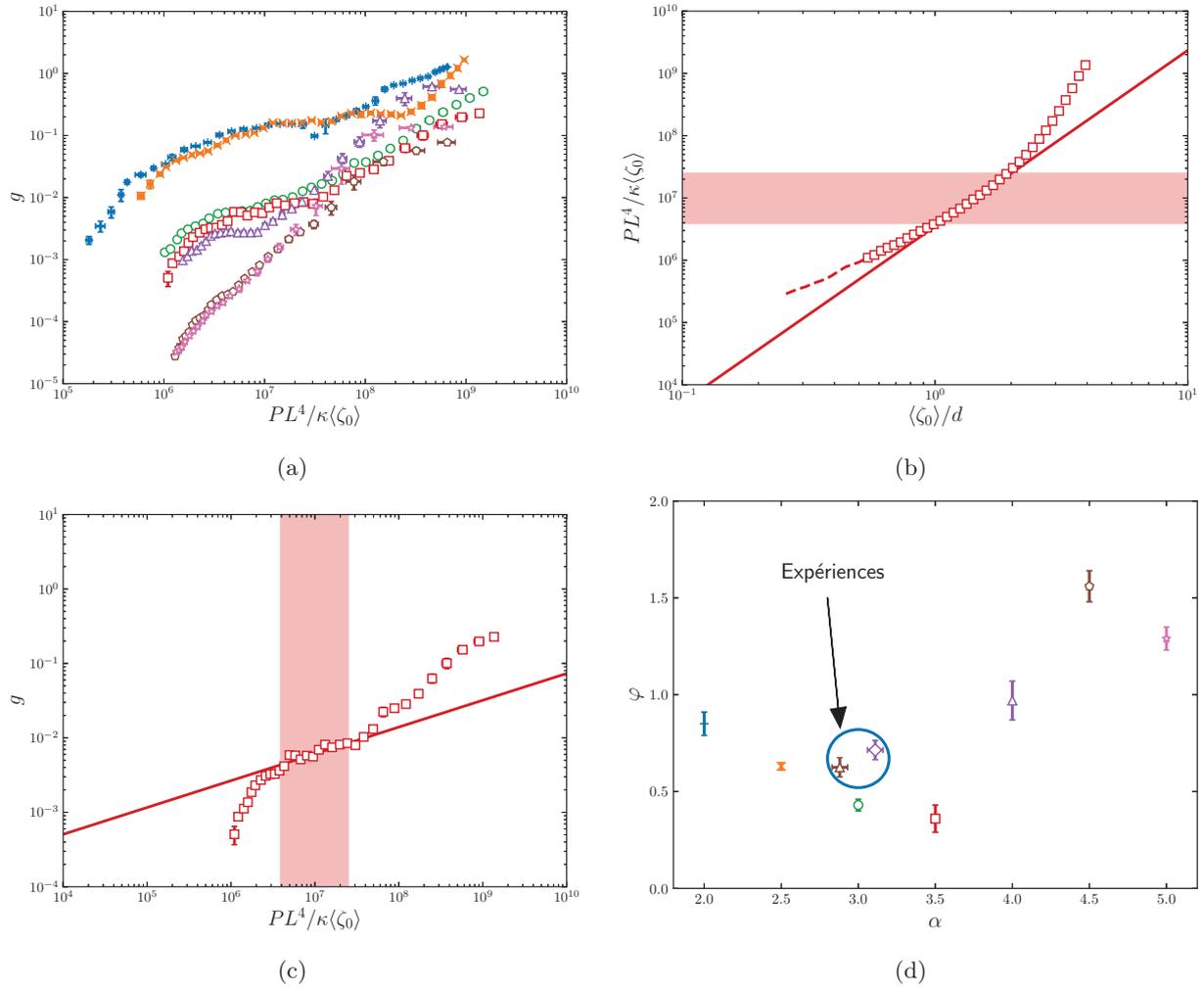


FIGURE 10.5 – (a) Conductivité en fonction de la contrainte pour les systèmes à DLP. La conductivité pour $\alpha = 2.0$ et 2.5 (resp. 4.5 et 5.0) est multipliée (resp. divisée) d'un facteur 10 afin d'améliorer la lisibilité. (b) Contrainte en fonction de la déformation pour $\alpha = 3.5$. (—) loi d'échelle du modèle continu; (■) domaine décrit par le modèle continu; (---) la conductivité est nulle (toutes les fibres ne sont pas en contacts). (c) Conductivité en fonction de la contrainte. (—) meilleur ajustement en utilisant l'équation (10.2.11). (d) Exposant de conductivité en fonction de l'exposant de forme. (+) $\alpha = 2.0$; (×) $\alpha = 2.5$; (○) $\alpha = 3.0$; (□) $\alpha = 3.5$; (△) $\alpha = 4.0$; (◇) $\alpha = 4.5$; (☆) $\alpha = 5.0$. Les barres d'erreurs sont statistiques.

longueur entre deux contacts est constant et vaut $\langle l_c \rangle$. On peut alors écrire :

$$L_0 = \langle l_c \rangle (n_c + 2), \quad (10.2.13)$$

soit :

$$\frac{1}{\langle l_c \rangle} = \frac{n_c}{L_0} + \frac{2}{L_0}. \quad (10.2.14)$$

La longueur moyenne entre contacts en fonction du nombre de contacts est

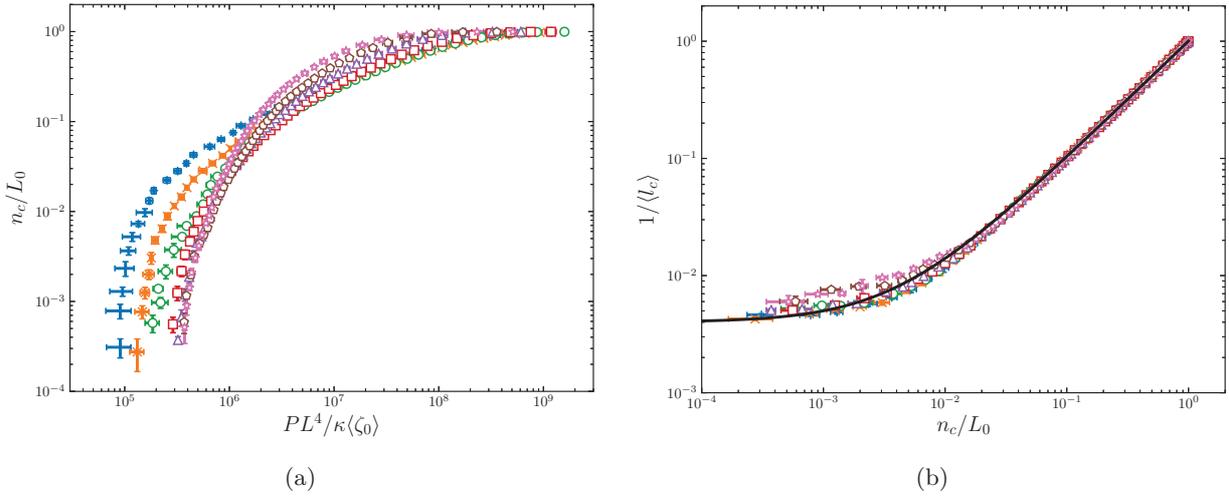


FIGURE 10.6 – Évolution du nombre de contact et du segment moyen entre deux contacts. (a) n_c en fonction de P . (b) $\langle l_c \rangle$ en fonction de n_c . (+) $\alpha = 2.0$; (x) $\alpha = 2.5$; (o) $\alpha = 3.0$; (□) $\alpha = 3.5$; (△) $\alpha = 4.0$; (◇) $\alpha = 4.5$; (☆) $\alpha = 5.0$; (—) équation (10.2.14).

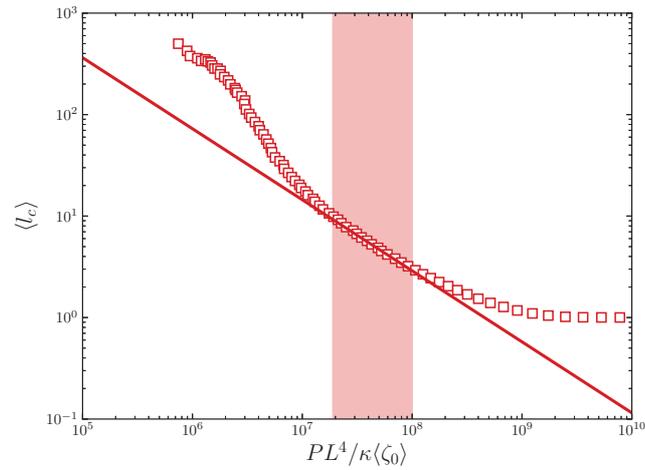
représentée en Fig. 10.6b et montre qu'à partir de quelques % de billes en contact la longueur moyenne entre contacts est bien décrite par l'équation (10.2.14). L'évolution de la longueur moyenne entre deux contacts en fonction de la contrainte est représentée en Fig. 10.7a pour le cas $\alpha = 3.5$. Elle possède un domaine linéaire (en échelle log-log) ce qui suggère une évolution en loi d'échelle avec un exposant ω :

$$\langle l_c \rangle = c_{l_c} P^{-\omega}. \quad (10.2.15)$$

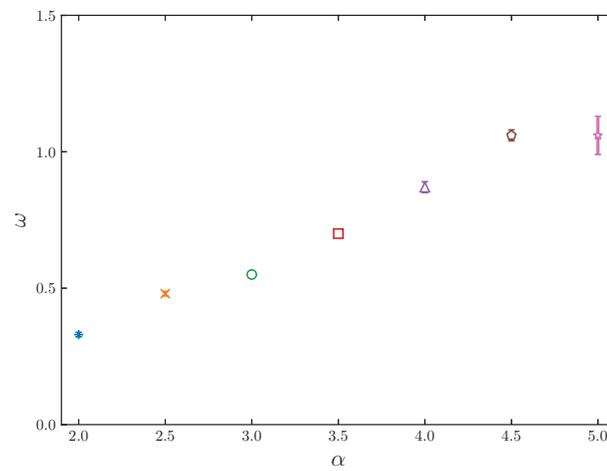
Ce domaine correspond au domaine décrit par le modèle continu auto-cohérent. Nous avons ainsi un lien entre la conductivité et la longueur de contacts moyenne dans l'empilement. L'évolution de ω en fonction de α est représentée en Fig. 10.7b. Plus une fibre est rugueuse plus l'exposant ω est petit ce qui veut dire que la longueur moyenne décroît moins vite lorsque la contrainte augmente. Finalement nous comparons la conductivité en fonction de la longueur moyenne entre contacts des empilements avec φ et ω en Fig. 10.7c. Il semble y avoir une corrélation entre ω et φ cependant nous ne pouvons pas affirmer avec certitude laquelle. En ajustant par une droite φ et ω en fonction de α pour les fibres rugueuses ($\alpha \leq 3.5$) nous obtenons que $\varphi = 1.5(1 - \omega)$. D'après les équations (10.2.11) et (10.2.15) nous avons :

$$g = \langle l_c \rangle^{-\varphi/\omega}. \quad (10.2.16)$$

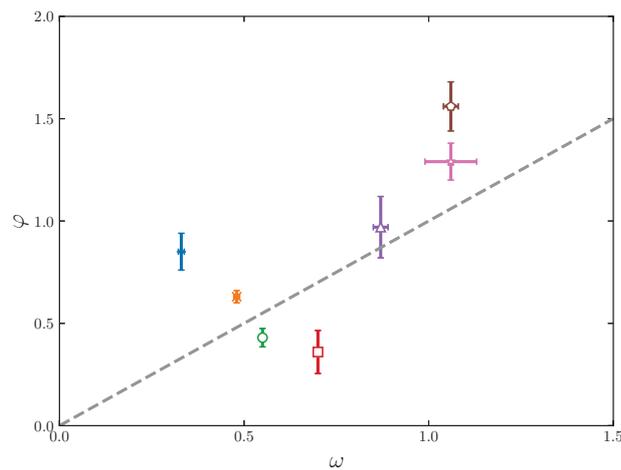
Pour des fibres très peu rugueuses ($\alpha > 3.5$) on s'attend à ce que la conductivité soit inversement proportionnelle à la longueur moyenne entre $g \sim 1/\langle l_c \rangle$, c'est-à-dire que $\varphi = \omega$. C'est globalement ce que l'on observe sur la figure 10.7c pour les fibres non rugueuses. Pour les fibres très rugueuses, il n'existe probablement pas de relation simple entre g et $\langle l_c \rangle$ et nous n'avons pas encore de modèle satisfaisant pour décrire la conductivité du système.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 10.7 – (a) $\langle l_c \rangle$ en fonction de P pour $\alpha = 3.5$; (■) domaine décrit par le modèle continu; (—) meilleur ajustement en loi d'échelle. (b) φ en fonction de α . (v) φ en fonction de ω . (+) $\alpha = 2.0$; (×) $\alpha = 2.5$; (○) $\alpha = 3.0$; (□) $\alpha = 3.5$; (△) $\alpha = 4.0$; (◇) $\alpha = 4.5$; (☆) $\alpha = 5.0$; (---) $y = x$.

Conclusion

Nous étudions dans cette thèse comment la forme intrinsèque de fibres individuelles contrôle les propriétés collectives d'empilement ou de faisceau de fibres, en nous intéressant particulièrement à leurs comportements mécaniques et électriques. Nous considérons des faisceaux de fibres longues, alignées selon une direction privilégiée et présentant un désordre de forme important. Expérimentalement, nous disposons de fibres dont la forme spontanée est décrite par deux classes de désordre. Pour la première, la distribution de désordre dépend comme une loi de puissance de la longueur d'onde. Pour la seconde, il existe en plus un mode dominant. Dans la littérature, on décrit ces systèmes de façon purement phénoménologique et macroscopique. Nous proposons un modèle à deux dimensions, de champ moyen auto-cohérent, décrivant l'élasticité collective de l'empilement à partir des propriétés individuelles des fibres : leur distribution de désordre ainsi que leur module de courbure. Notre traitement théorique conduit à une équation d'état reliant et déformation sous compression. Nous mesurons aussi expérimentalement ces propriétés pour différents systèmes de fibres. Notre équation d'état décrit avec un bon accord l'élasticité de nos empilements de fibres pour l'empilement 2D avec un seul paramètre ajustable Φ_{exp} . Nous avons étendu notre analyse à des simulations numériques à deux dimensions, dont les fibres présentent un désordre en loi de puissance. L'équation d'état décrit également avec un bon accord l'élasticité des empilements numériques en introduisant, comme pour les systèmes expérimentaux, un facteur numérique Φ_{num} . L'ordre de grandeur et l'évolution Φ_{exp} et Φ_{num} sont comparables aux incertitudes expérimentales près. Cela montre que notre modèle est cohérent et capable de décrire avec une bonne précision tout type de désordre de forme. Nous avons montré que l'approximation de champ moyen est probablement à l'origine de ce paramètre d'ajustement.

Nous proposons à partir de ce modèle une expression continue pour l'équation d'état, dans le cas particulier des fibres à désordre en loi de puissance. Cette description conduit à un résultat analytique qui relie explicitement la loi de puissance de la variation de la contrainte à la loi de puissance du désordre de forme des fibres. Cette approximation décrit qualitativement les simulations numériques, mais l'accord n'est pas aussi satisfaisant que l'approche discrète. Néanmoins, nous obtenons des exposants théoriques compris entre 1 (linéaire lorsqu'il n'y a plus de rugosité) et 7 et les exposants obtenus sont compris entre 2 et 3.5. Ces résultats sont à comparer aux modèles

décrits dans la littérature pour les empilements de fibres droites, orientées aléatoirement et faiblement courbées entre deux contacts. Dans ces cas sans désordre de forme les élasticités théoriques sont non linéaires et suivent des loi de puissance avec un exposant variant entre 3 pour des fibres orientées aléatoirement dans le volume et 5 si elles sont confinées dans un plan.

Pour finir nous étudions expérimentalement et numériquement les propriétés électriques des empilements. Nous observons expérimentalement une relation en loi de puissance entre la conductivité et la contrainte dans la gamme de contrainte décrite par notre modèle auto-cohérent. Nous mettons en évidence une corrélation entre la longueur moyenne entre deux contacts dans l'empilement et la conductivité. Toutefois nous ne disposons d'arguments théoriques permettant de prédire ce comportement.

Ce travail ouvre de nombreuses perspectives. Il serait intéressant d'effectuer des simulations numériques à trois dimensions, prenant en compte l'énergie de torsion des fibres. Une étude dynamique sur de tels systèmes numériques, prenant en compte les forces de frictions entre les fibres pourrait nous renseigner sur la nature des relaxations de contrainte que nous avons observé expérimentalement. L'étude de la dynamique de dés-enchevêtrement des fibres, par exemples dans une expérience de peignage, pourrait aussi ouvrir des perspectives intéressantes. Finalement, notre étude des propriétés électriques est assez préliminaire. Il serait important de réaliser des simulations numériques sur des systèmes de plus grandes tailles pour améliorer la statistique. Il deviendrait alors plus aisé de développer un modèle reliant les propriétés électriques et mécaniques.

Annexe A

Fonctions propres de l'opérateur Laplacien carré

Ce chapitre propose un calcul des fonctions propres de l'opérateur Laplacien carré.

A.1 Énergie de courbure

Dans l'approximation de Monge, l'énergie de courbure s'écrit :

$$E[\zeta, \zeta_0] = \frac{1}{2}\kappa \int_0^L \left(\zeta_0^{(2)}(x) - \zeta^{(2)}(x) \right)^2 dx. \quad (\text{A.1.1})$$

Les plaques déforment la fibre et elle adopte une forme d'équilibre $\zeta(x)$ que nous souhaiterions connaître. Cette forme dans le nouvel état d'équilibre est donnée par la minimisation fonctionnelle de l'énergie par rapport à $\zeta(x)$ pour toute déformation d'ordre de grandeur inférieur $\delta\zeta$:

$$\delta E = E[\zeta + \delta\zeta] - E[\zeta] = 0. \quad (\text{A.1.2})$$

En utilisant les conditions aux limites (la fibre est fixe aux extrémités) :

$$\begin{cases} \delta\zeta(0) = \delta\zeta^{(1)}(0) = 0, \\ \delta\zeta(L) = \delta\zeta^{(1)}(L) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.1.3})$$

dans (A.1.2) donne :

$$\delta E = \kappa \int_0^L \left(\zeta^{(2)}(x) - \zeta_0^{(2)}(x) \right) \delta \zeta^{(2)} dx \quad (\text{A.1.4})$$

En intégrant par partie deux fois l'équation (A.1.4) donne l'équation d'équilibre de la fibre :

$$\zeta^{(4)}(x) - \zeta_0^{(4)}(x) = 0, \quad (\text{A.1.5})$$

où l'on reconnaît l'opérateur Laplacien carré.

A.2 Fonctions propres

L'équation d'équilibre est résolue dans l'espace réciproque où la forme de la fibre est décomposée sur les fonctions propres $\phi_q(x)$ de l'opérateur qui n'est pas encore connue :

$$\zeta(x) = \sum_q \zeta_q \phi_q(x), \quad (\text{A.2.1})$$

avec les coefficients ζ_q :

$$\zeta_q = \frac{1}{L} \int_0^L \zeta(x) \phi_q(x) dx. \quad (\text{A.2.2})$$

La fonction ϕ_q est normalisée ce qui se traduit par :

$$\int_0^L \phi_q(x) \phi_{q'}(x) dx = \delta_{q,q'} L, \quad (\text{A.2.3})$$

et satisfait l'équation différentielle :

$$\phi_q^{(4)}(x) = q^4 \phi_q(x), \quad (\text{A.2.4})$$

avec les conditions aux limites¹ :

$$\begin{cases} \zeta^{(2)}(0) = \zeta^{(3)}(0) = 0, \\ \zeta^{(2)}(L) = \zeta^{(3)}(L) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2.5})$$

En utilisant (A.2.1), les conditions aux limites (A.2.5) deviennent :

1. Ni moment ni force aux extrémités de la fibre

$$\begin{cases} \phi_q^{(2)}(0) = \phi_q^{(3)}(0) = 0, \\ \phi_q^{(2)}(L) = \phi_q^{(3)}(L) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2.6})$$

Au final la fonction recherchée est :

$$\phi_{q_i}(x) = \frac{\cosh q_i L - \cos q_i L}{\sinh q_i L - \sin q_i L} (\sinh q_i x - \sin q_i x) - (\cosh q_i x + \cos q_i x), \quad (\text{A.2.7})$$

avec q_i donné par l'équation $\cos qL \cosh qL = 1$ ce qui donne avec une bonne approximation² :

$$q_i = \left(\frac{1}{2} + i\right) \frac{\pi}{L}, \quad i \in N^*. \quad (\text{A.2.8})$$

La fonction $\phi_{q_i}(x)$ est tracée en Fig. A.1 pour les quatre premiers modes.

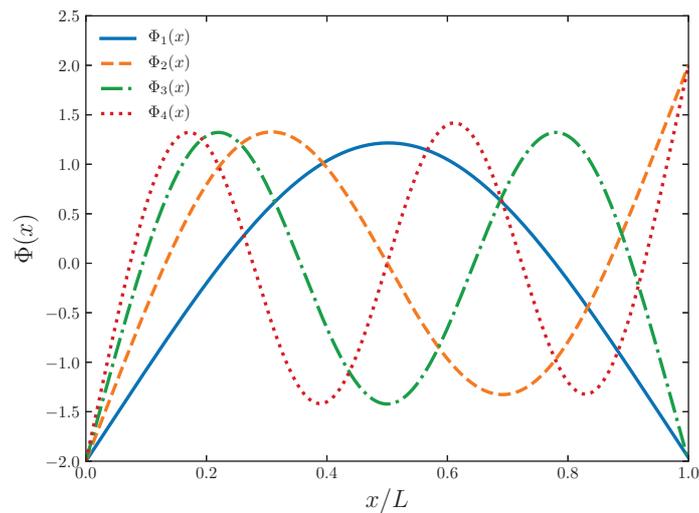


FIGURE A.1 – Fonctions propres d'une fibre isolée pour les quatre premiers nombre d'onde.

2. À 0.4 % près pour le plus mauvais cas $i = 1$.

Annexe B

Élasticité d'une fibre - Équation d'état

Cette annexe suit la référence [36] et établit l'équation d'état d'étirement d'une fibre possédant une courbure initiale. L'avantage de ce modèle est qu'il est valable pour les grandes déformations et grandes courbures. Le cas des fibres extensibles nous intéresse particulièrement pour la mesure du module de courbure.

B.1 Configuration initiale

Considérons une fibre élastique continue à 2 dimensions (Fig. B.1). Désignons la configuration de référence comme l'état droit mais sans étirement. Une des extrémités est fixée à l'origine en $x = 0$ tandis que la seconde est sur l'axe des x en $x = L_0$ et nous noterons S la distance curviligne depuis l'origine. Lorsque la fibre adopte une courbure, la configuration est dite déformée et l'extrémité initialement en $x = L_0$ est à présent en $\bar{x} = L$ avec L la distance bout-à-bout. L'abscisse curviligne s est donnée par :

$$s = \int_0^S |\bar{\mathbf{x}}'(S)| dS. \quad (\text{B.1.1})$$

Pour une fibre inextensible le terme $|\bar{\mathbf{x}}'(S)|$ vaut 1. Autrement dit ce terme représente l'étirement locale de la fibre. Pour simplifier les notations, ce terme sera noté par :

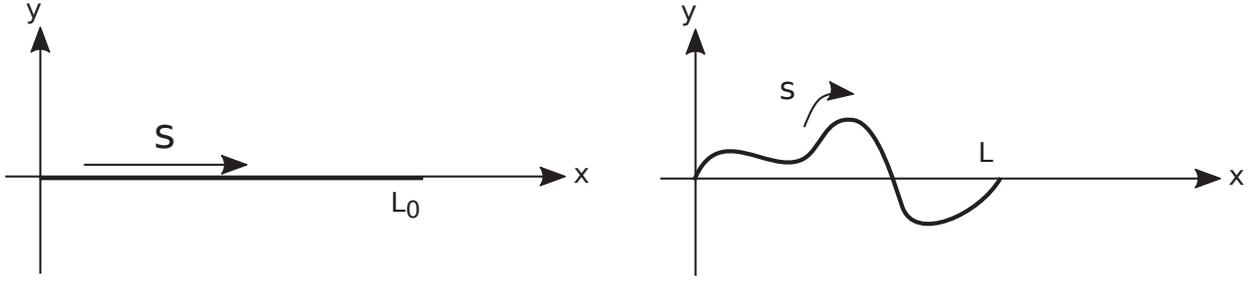


FIGURE B.1 – Gauche : configuration de référence. Droite : configuration déformée.

$$|\bar{\mathbf{x}}'(S)| = \lambda(S). \quad (\text{B.1.2})$$

$\lambda(S)$ est positif (allongement lors de l'étirement). La notation avec une barre désigne les grandeurs modifiées par l'étirement.

$$\bar{\mathbf{x}}'(S) = s'(S)\bar{\mathbf{x}}'(s) = \lambda(S)\mathbf{t}(s), \quad (\text{B.1.3})$$

avec \mathbf{t} la tangente unitaire à la fibre dans la configuration déformée :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.4})$$

où θ est l'angle local entre la tangente et l'axe des x et \mathbf{n} la normale unitaire. Cela induit :

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.5})$$

avec $c = \theta'$ la courbure dans la configuration déformée. Ainsi :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \lambda(S)c(s)\mathbf{n}(s), \\ \bar{\mathbf{x}}''(S) = \lambda'(S)\mathbf{t}(s) + \lambda^2(S)c(s)\mathbf{n}(s). \end{cases} \quad (\text{B.1.6})$$

La courbure locale est déformée par l'étirement de la fibre et devient $\bar{c}(S)$:

$$\bar{c}(S) = \lambda(S)c(s) = \lambda(S)\theta'(s) = \bar{\theta}'(S) \quad (\text{B.1.7})$$

Considérons une configuration initiale où la fibre adopte sa forme spontanée de courbure c_0 . Pour passer de la configuration de référence à cette confi-

guration initiale il faut imposer un étirement (plutôt une contraction) de λ_0 .

B.2 Équations d'équilibres

À présent la fibre est soumise à une force par unité de longueur \mathbf{F} . Cette force est décomposée en une composante tangentielle F_{\parallel} et normale F_{\perp} :

$$\mathbf{F} = F_{\parallel} \mathbf{t} + F_{\perp} \mathbf{n}. \quad (\text{B.2.1})$$

Le moment de cette force par rapport à l'origine est $\mathbf{x} \times \mathbf{F}$ et le couple $\mathbf{M} = M(\mathbf{t} \times \mathbf{n})$. L'équilibre de la fibre doit satisfaire :

$$M' + F_{\perp} = 0. \quad (\text{B.2.2})$$

S'il n'y a pas de force appliquée alors $F = 0$ et M est une constante donnée par la configuration initiale soit c_0 . S'il n'y a pas de courbure initiale alors $c_0 = 0$ et donc $M = \text{cste} = 0$ afin de satisfaire les conditions aux limites $x(0) = 0$ et $x(L_0) = L_0$. La présence d'une courbure initiale entraîne une force interne b de sorte que :

$$\mathbf{F}' + \mathbf{b}' = \mathbf{0}. \quad (\text{B.2.3})$$

Ainsi :

$$\begin{cases} F = F_{\parallel} \cos \theta - F_{\perp} \sin \theta, \\ -b = F_{\parallel} \sin \theta + F_{\perp} \cos \theta, \\ F_{\parallel} = F \cos \theta - b \sin \theta, \\ F_{\perp} = -F \sin \theta - b \cos \theta. \end{cases} \quad (\text{B.2.4})$$

Les équations (B.2.2) et (B.2.4) constituent les équations d'équilibre de la fibre possédant une courbure spontanée et soumise à une force extérieure.

B.3 Lois constitutives

Il reste à relier c à la courbure de la fibre. Considérons \mathcal{E} le potentiel élastique par unité de longueur emmagasiné dans la fibre dans la configuration initiale. À la fois l'étirement et la courbure contribuent au potentiel, donc $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\lambda, \bar{c})$. La force tangentielle et le moment de courbure sont les réponses linéaires du potentiel :

$$\begin{cases} F_{\parallel} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda}, \\ M = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \bar{c}}. \end{cases} \quad (\text{B.3.1})$$

Nous allons nous limiter à un modèle dont la dépendance en courbure est linéaire. De plus nous supposons que le potentiel est quadratique (puisque le modèle est linéaire) mais dont les dépendances en élasticité et courbure sont découplées :

$$\mathcal{E}(\lambda, \bar{c}) = \frac{1}{2}\mu_0(\lambda - 1)^2 + \frac{1}{2}\kappa_0\bar{c}^2, \quad (\text{B.3.2})$$

avec μ_0 le module élastique (en N) et κ_0 le module de courbure (en J.m). Cela conduit à :

$$\begin{cases} F_{\parallel} = \mu_0(\lambda - 1), \\ M = \kappa_0\bar{c}, \end{cases} \quad (\text{B.3.3})$$

avec le premier terme représentant l'élasticité hookéenne et le second l'élasticité de courbure. En utilisant les équations (B.3.3), (B.2.2) et (B.2.4) nous obtenons :

$$\kappa_0 c' = c \cos \theta + F \sin \theta. \quad (\text{B.3.4})$$

Lorsque la force est nulle, dans la configuration initiale la fibre adopte sa forme spontanée et $c = c_0$ ce qui permet d'établir la relation entre b et c_0 :

$$b \cos \theta = \kappa_0 c_0'. \quad (\text{B.3.5})$$

Ce qui donne l'équation différentielle qui est imposée à θ :

$$\kappa_0(c' - c_0') = F \sin \theta. \quad (\text{B.3.6})$$

B.4 Fibre inextensible

B.4.1 Rapport de la longueur projetée sur la longueur curviligne

L'équation (B.3.6) nous permet de connaître la configuration locale de la fibre pour chaque force. La grandeur globale qui nous intéresse est le rapport des longueurs projetée et curviligne. Ce ratio s'obtient en intégrant l'équation $x' = \cos \theta$ de $s = 0$ à $s = L_0$ et en divisant par L_0 :

$$\frac{L}{L_0} = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \cos \theta ds = \langle \cos \theta \rangle. \quad (\text{B.4.1})$$

En développant (B.4.1) jusqu'au second ordre :

$$\frac{L}{L_0} \simeq 1 - \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle, \quad (\text{B.4.2})$$

avec θ obtenu en résolvant l'équation différentielle :

$$\kappa_0(c' - c_0') = F \sin \theta \simeq F\theta \quad (\text{B.4.3})$$

B.4.2 Décomposition en série de Fourier

La résolution s'effectue en décomposant θ sur une base de Fourier. Les conditions aux limites $\zeta(s=0) = 0$ et $\zeta(s=L_0) = 0$ entraînent :

$$\theta(s=0) = 0, \quad \theta(s=L_0) = 0. \quad (\text{B.4.4})$$

La série de Fourier qui satisfait les conditions aux limites est sinusoïdale :

$$\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_{q_n} \sin(q_n s), \quad (\text{B.4.5})$$

avec $q_n = n\pi/L_0$ pour n un entier allant de 1 à $+\infty$ et θ_{q_n} l'amplitude de l'angle du mode q_n .

$$\frac{F}{\kappa_0} \sum_{n=1}^{+\infty} [\theta_{q_n} + q_n^2 (\theta_{q_n} - \theta_{0,q_n})] = 0, \quad (\text{B.4.6})$$

ce qui n'est possible que si chaque élément de la somme est nul, d'où :

$$\theta_{q_n} = \frac{q_n^2 \theta_{0,q_n}}{F/\kappa_0 + q_n^2}. \quad (\text{B.4.7})$$

Afin de déformer l'amplitude de l'angle d'un mode q_* il faut fournir une force F^* de l'ordre de :

$$F^* \sim q_*^2 \kappa_0, \quad (\text{B.4.8})$$

ce qui signifie qu'une grande longueur d'onde est déformée plus facilement qu'une petite longueur d'onde. Comme la base de Fourier est orthonormée, nous pouvons écrire :

$$\langle \theta^2 \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_{q_n}^2 \langle \sin^2(q_n s) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_{q_n}^2, \quad (\text{B.4.9})$$

En utilisant les équations (B.4.2) et (B.4.9) nous obtenons la relation recherchée :

$$\frac{L}{L_0} = 1 - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q_n^4 \theta_{0,q_n}^2}{(f/\kappa_0 + q_n^2)^2}. \quad (\text{B.4.10})$$

B.5 Fibre extensible

Dans le cas d'une fibre extensible il faut faire le changement $s \rightarrow S$ et toute grandeur dépendante de S est notée avec une barre :

$$a \rightarrow \bar{a} = \lambda a$$

B.5.1 Rapport de la longueur projetée sur la longueur curviligne

À présent nous nous intéressons au cas d'une fibre extensible. L'allongement de la fibre est dû au dépliement de la courbure et à son élasticité. L'équation d'équilibre (B.2.2) devient $\bar{M}' = -\lambda F_{\perp}$. Nous obtenons de la même manière que l'équation (B.3.4) le lien entre \bar{b} et la courbure spontanée :

$$\bar{b} \cos \bar{\theta} = \frac{\kappa_0}{\lambda} c_0' = \kappa c_0'. \quad (\text{B.5.1})$$

La relation est similaire en posant un module de courbure effectif κ dépendant de λ . L'équation différentielle sur $\bar{\theta}$ est similaire à (B.3.6). Les équations d'équilibres (B.2.4) deviennent :

$$F_{\parallel} = f \cos \bar{\theta} - \kappa c_0 \tan \bar{\theta}. \quad (\text{B.5.2})$$

D'après l'équation (B.3.3) $F_{\parallel} = \mu_0(\lambda - 1)$ nous avons la relation entre λ , la force et la courbure :

$$\lambda = 1 + \frac{F}{\mu_0} \cos \bar{\theta} - \frac{\kappa}{\mu_0} c_0 \tan \bar{\theta}. \quad (\text{B.5.3})$$

En suivant les mêmes étapes que pour la fibre inextensible, nous intégrons $\bar{x}' = \lambda \cos \bar{\theta}$:

$$\bar{x}' = \cos \bar{\theta} + \frac{F}{\mu_0} \cos^2 \bar{\theta} - \frac{\kappa}{\mu_0} c_0' \sin \bar{\theta}. \quad (\text{B.5.4})$$

Ainsi :

$$\frac{L}{L_0} = \langle \cos \bar{\theta} \rangle + \frac{F}{2\mu_0} (1 + \langle \cos 2\bar{\theta} \rangle) - \frac{\kappa}{\mu_0} \langle c_0' \sin \bar{\theta} \rangle \quad (\text{B.5.5})$$

Si nous développons l'équation (B.5.5) jusqu'au deuxième ordre nous obtenons :

$$\frac{L}{L_0} = 1 + \frac{F}{\mu_0} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2F}{\mu_0}\right) \langle \bar{\theta}^2 \rangle - \frac{\kappa}{\mu_0} \langle c_0' \bar{\theta} \rangle \quad (\text{B.5.6})$$

B.5.2 Décomposition en série de Fourier

D'après les équations (B.5.1) et (B.2.4) l'équation différentielle de $\bar{\theta}$ est :

$$\kappa(\bar{c}' - c_0') = F \sin \bar{\theta}. \quad (\text{B.5.7})$$

Cette équation est difficile à résoudre compte tenu de la relation (B.5.3) entre λ et $\bar{\theta}$. Cependant en nous limitant au premier ordre, nous obtenons l'équation suivante :

$$\kappa^{(0)}(\bar{c}' - c_0') = F\bar{\theta}, \quad (\text{B.5.8})$$

avec :

$$\kappa^{(0)} = \frac{\kappa}{\lambda^{(0)}}, \quad \lambda^{(0)} = 1 + \frac{F}{\mu_0}. \quad (\text{B.5.9})$$

La décomposition de $\bar{\theta}$ en série de Fourier entraîne :

$$\bar{\theta}_{q_n} = \frac{q_n^2 \theta_{0,q_n}}{F/\kappa^{(0)} + q_n^2}. \quad (\text{B.5.10})$$

Soit :

$$\frac{L}{L_0} = 1 + \frac{F}{\mu_0} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2F}{\mu_0}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q_n^4 \theta_{0,q_n}^2}{(F/\kappa^{(0)} + q_n^2)^2} - \frac{\kappa^{(0)}}{2\mu_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q_n^4 \theta_{0,q_n}^2}{F/\kappa^{(0)} + q_n^2}. \quad (\text{B.5.11})$$

Lorsque μ_0 tends vers $+\infty$, la fibre est non extensible et l'équation (B.5.11) tend vers la description inextensible (B.4.10). Le dernier terme représente la

compétition entre l'allongement et le dépliement de courbure. Aux grandes forces où $F \gg F^* = \kappa^{(0)}/q_*^2$, c'est-à-dire lorsque les modes sont tous dépliés, alors l'équation (B.5.11) tend vers une élasticité hookéenne linéaire. La Fig. B.2 représente l'élasticité d'une fibre mono-mode extensible et inextensible avec $F^* = 1$ N. Nous observons trois régimes. Le régime aux faibles forces jusqu'à $F \sim F^*$ correspond au dépliement de la courbure pure. Le régime aux grandes forces $F \gg F^*$ correspond à de l'allongement pure. Le régime intermédiaire est la transition discutée précédemment.

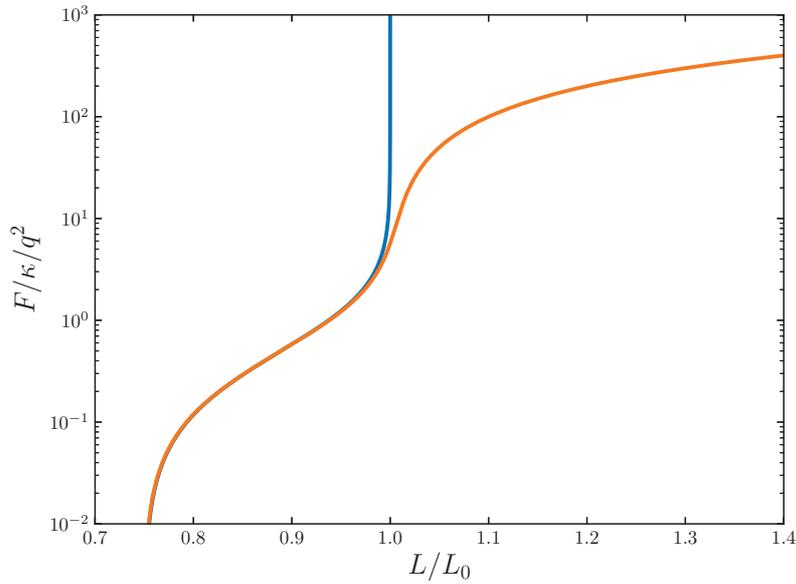


FIGURE B.2 – Élasticité d'une fibre mono-mode. (—) Équation (B.4.10) (fibre inextensible); (—) équation (B.5.11) (fibre extensible). Les paramètres sont : $q = 1$, $\theta_{0,q} = 1$, $\mu_0 = 1$ et $\kappa^{(0)} = 10^{-3}$.

Annexe C

Effet sur la contrainte d'une coupure aux petits modes

Nous effectuons des simulations numériques en coupant les sept premiers modes. Les résultats se comparent quantitativement à un facteur numérique multiplicatif près (plus grand que 1 et de plusieurs ordres de grandeurs) aux résultats obtenus par N. Schulmann (sans coupures). Nous proposons une explication de ce facteur numérique.

C.1 Densité d'énergie

Si les n premiers nombre d'ondes sont coupés alors l'amplitude quadratique moyenne $\langle \zeta_0^2 \rangle_n$ diminue largement¹ :

$$\langle \zeta_0^2 \rangle_n = c(\alpha) \frac{L^\alpha}{\pi^\alpha} \zeta\left(\alpha, \frac{3}{2} + n\right) = \langle \zeta_0^2 \rangle \frac{\zeta\left(\alpha, \frac{3}{2} + n\right)}{\zeta\left(\alpha, \frac{3}{2}\right)}. \quad (\text{C.1.1})$$

Donc :

$$\langle \zeta_0^2 \rangle_0 = \langle \zeta_0^2 \rangle \quad (\text{C.1.2})$$

$$\langle \zeta_0^2 \rangle_1 = \langle \zeta_0^2 \rangle \frac{\zeta\left(\alpha, \frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\alpha, \frac{3}{2}\right)} \quad (\text{C.1.3})$$

$$\vdots \quad (\text{C.1.4})$$

1. $\zeta(\alpha, \frac{5}{2})/\zeta(\alpha, \frac{3}{2}) \approx 0.52$ pour $\alpha = 2$ et 0.090 pour $\alpha = 5$.

La densité réduite d'énergie est changée en :

$$\langle \tilde{e} \rangle_n = \left(\frac{\zeta(\alpha, \frac{3}{2})}{\zeta(\alpha, \frac{3}{2} + n)} \right) \frac{1}{y} \frac{\pi^{\alpha-1}}{\zeta(\alpha, \frac{3}{2})} \int_{u_n}^{+\infty} u^{4-\alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\tilde{B}(y)}{u^4}}} \right) du, \quad (\text{C.1.5})$$

avec $u_n = (n + 3/2)\pi$. Ce qui conduit à² :

$$\langle \tilde{e} \rangle_n = g_0(\alpha) \left(\frac{f_1[\tilde{B}] - 1}{y} \right), \quad (\text{C.1.6})$$

avec :

$$g_0(\alpha) = \frac{\pi^{\alpha-1}}{\zeta(\alpha, \frac{3}{2})} \frac{u_n^{5-\alpha}}{(5-\alpha)} \left(\frac{\zeta(\alpha, \frac{3}{2})}{\zeta(\alpha, \frac{3}{2} + n)} \right), \quad (\text{C.1.7})$$

et³ :

$$f_1[\tilde{B}] = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha-5}{4}, \frac{\alpha-1}{4}, -\frac{4\tilde{B}(y)}{u_n^4} \right). \quad (\text{C.1.8})$$

C.2 Contrainte

L'équation différentielle pour le module de compressibilité devient :

$$\tilde{B}(y) = g_0(\alpha) \frac{d^2 f_1}{dy^2} [\tilde{B}]. \quad (\text{C.2.1})$$

Lorsque $\tilde{B}(y)$ est très grand, dans le régime de loi d'échelle, $f_1[\tilde{B}]$ se comporte comme :

$$f_1[\tilde{B}] \propto u_n^{\alpha-5} \tilde{B}(y)^{\frac{5-\alpha}{4}}, \quad (\text{C.2.2})$$

et l'amplitude $g_0(\alpha)$ tend vers la même valeur que la solution complète au facteur $\zeta(\alpha, \frac{3}{2})/\zeta(\alpha, \frac{1}{2} + n)$ près. Par conséquent, la coupure de n modes

2. Le résultat de l'intégration est $-\frac{u_n^{5-\alpha}}{5-\alpha} (1 - {}_2F_1[\frac{1}{2}, \frac{\alpha-5}{4}, \frac{\alpha-1}{4}, -\frac{4\tilde{B}(y)}{u_n^4}])$

3. ${}_2F_1(a, b, c, -x)$ est la fonction hypergéométrique définie par :

$${}_2F_1(a, b, c, -x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c-n+1)}{\Gamma(a-n+1)\Gamma(b-n+1)\Gamma(c+1)} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma(a, b, c, n) \frac{x^n}{n!}.$$

entraîne une augmentation de la contrainte par rapport à la contrainte sans coupure d'un facteur multiplicatif :

$$\left(\frac{\zeta(\alpha, \frac{3}{2})}{\zeta(\alpha, \frac{3}{2} + n)} \right)^{4/(\alpha-1)}. \quad (\text{C.2.3})$$

Nous avons coupé 7 modes soit un facteur compris entre 2400 pour $\alpha = 5$ et 3150 pour $\alpha = 2$.

Bibliographie

- [1] CM Van Wyk. 20—note on the compressibility of wool. *Journal of the Textile Institute Transactions*, 1946.
- [2] Toll Staffan. Packing mechanics of fiber reinforcements. *Polymer Engineering & Science*, 1998.
- [3] Florence Bertails, Basile Audoly, Bernard Querleux, Frédéric Leroy, Jean-Luc Lévêque, and Marie-Paule Cani. Predicting natural hair shapes by solving the statics of flexible rods. In *Eurographics short papers*. Eurographics, 2005.
- [4] Florence Bertails, Basile Audoly, Marie-Paule Cani, Bernard Querleux, Frédéric Leroy, and Jean-Luc Lévêque. Super-helices for predicting the dynamics of natural hair. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2006.
- [5] Raymond E. Goldstein, Patrick B. Warren, and Robin C. Ball. The shape of a ponytail and the statistical physics of hair fiber bundles. *Physical Review Letters*, 2012.
- [6] Beckrich P, Weick G, Marques C, and Charitat T. Compression modulus of macroscopic fiber bundles. *Europhysics Letters*, 2003.
- [7] Basile Audoly and Sébastien Neukirch. Fragmentation of rods by cascading cracks : why spaghetti does not break in half. *Physical review letters*, 2005.
- [8] Astbury W. T and Street A. X-ray studies of the structure of hair, wool, and related fibres.- i. general. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1931.
- [9] Yang Yu, Wen Yang, Bin Wang, and Marc André Meyers. Structure and mechanical behavior of human hair. *Materials Science and Engineering : C*, 2017.

-
- [10] Sunil Hadap and Nadia Magnenat-Thalmann. Modeling dynamic hair as a continuum. In *Computer Graphics Forum*, 2001.
- [11] Aleka McAdams, Andrew Selle, Kelly Ward, Eftychios Sifakis, and Joseph Teran. Detail preserving continuum simulation of straight hair. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2009.
- [12] Gilles Daviet, Florence Bertails-Descoubes, and Laurence Boissieux. A hybrid iterative solver for robustly capturing coulomb friction in hair dynamics. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2011.
- [13] Danny M Kaufman, Rasmus Tamstorf, Breannan Smith, Jean-Marie Aubry, and Eitan Grinspun. Adaptive nonlinearity for collisions in complex rod assemblies. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2014.
- [14] Chenfanfu Jiang, Theodore Gast, and Joseph Teran. Anisotropic elastoplasticity for cloth, knit and hair frictional contact. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2017.
- [15] Jean-Philippe Masse, Luc Salvo, David Rodney, Yves Bréchet, and Olivier Bouaziz. Influence of relative density on the architecture and mechanical behaviour of a steel metallic wool. *Scripta materialia*, 2006.
- [16] Dominique Poquillon, Bernard Viguié, and Eric Andrieu. Experimental data about mechanical behaviour during compression tests for various matted fibres. *Journal of materials science*, 2005.
- [17] Jean-Philippe Masse, F Volp, L Salvo, Yves Bréchet, O Bouaziz, F Pignard, et al. Influence of density on the electrical behaviour of a steel metallic wool. *18ème Congrès Français de Mécanique*, 2007.
- [18] Baudequin M, Ryschenkow G, and Roux S. Non-linear elastic behavior of light fibrous materials. *Europhysics Letters*, 1999.
- [19] Maddalena Venturoli, Maria Maddalena Sperotto, Marieke Kranenburg, and Berend Smit. Mesoscopic models of biological membranes. *Physics Reports*, 2006.
- [20] WSRM Helfrich and R-M Servuss. Undulations, steric interaction and cohesion of fluid membranes. *Il Nuovo Cimento D*, 1984.
- [21] W Helfrich. Steric interaction of fluid membranes in multilayer systems. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 1978.

- [22] Reinhard Lipowsky and Erich Sackmann. *Structure and dynamics of membranes : I. from cells to vesicles/II. generic and specific interactions*. Elsevier, 1995.
- [23] T Charitat, S Lecuyer, and G Fragneto. Fluctuations and destabilization of single phospholipid bilayers. *Biointerphases*, 2008.
- [24] C R. Safinya, Didier Roux, Gregory Smith, Sunil Sinha, P Dimon, Noel Clark, and A M. Bellocq. Steric interactions in a model multimembrane system : A synchrotron x-ray study. *Physical review letters*, 1986.
- [25] Frederick Gittes, Brian Mickey, Jilda Nettleton, and Jonathon Howard. Flexural rigidity of microtubules and actin filaments measured from thermal fluctuations in shape. *The Journal of cell biology*, 1993.
- [26] Herve Isambert, Pascal Venier, Anthony C Maggs, Abdelatif Fattoum, Ridha Kassab, Dominique Pantaloni, and Marie-France Carlier. Flexibility of actin filaments derived from thermal fluctuations. effect of bound nucleotide, phalloidin, and muscle regulatory proteins. *Journal of Biological Chemistry*, 1995.
- [27] John F Marko and Eric D Siggia. Stretching dna. *Macromolecules*, 1995.
- [28] Theo Odijk. Stiff chains and filaments under tension. *Macromolecules*, 1995.
- [29] J-B Fournier, A Ajdari, and L Peliti. Effective-area elasticity and tension of micromanipulated membranes. *Physical review letters*, 2001.
- [30] E Evans and W Rawicz. Entropy-driven tension and bending elasticity in condensed-fluid membranes. *Physical Review Letters*, 1990.
- [31] J-B Manneville, P Bassereau, S Ramaswamy, and J Prost. Active membrane fluctuations studied by micropipet aspiration. *Physical Review E*, 2001.
- [32] Schulmann Nava. *From polymer to fibers*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2012.
- [33] J.E. Mark. *Polymer Data Handbook*. Oxford University Press, 1999.
- [34] Landau L, Lifchitz E, and Kosevich A. *Physique théorique vol. 7. Théorie de l'élasticité*. Éditions Mir, deuxième édition, 1990.

-
- [35] A Kabla and L Mahadevan. Nonlinear mechanics of soft fibrous networks. *Journal of The Royal Society Interface*, 2007.
- [36] Gerhard A Holzapfel and Ray W Ogden. On the bending and stretching elasticity of biopolymer filaments. *Journal of elasticity*, 2011.
- [37] Gerhard A Holzapfel and Ray W Ogden. Elasticity of biopolymer filaments. *Acta biomaterialia*, 2013.
- [38] Stephen W. Provencher. A constrained regularization method for inverting data represented by linear algebraic or integral equations. *Computer Physics Communications*, 1982.
- [39] Stephen W. Provencher. Contin : A general purpose constrained regularization program for inverting noisy linear algebraic and integral equations. *Computer Physics Communications*, 1982.
- [40] Kittiwit Matan, Rachel B Williams, Thomas A Witten, and Sidney R Nagel. Crumpling a thin sheet. *Physical Review Letters*, 2002.
- [41] B Derrida and J_ Vannimenus. A transfer-matrix approach to random resistor networks. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 1982.
- [42] B Derrida, JG Zabolitzky, J Vannimenus, and D Stauffer. A transfer matrix program to calculate the conductivity of random resistor networks. *Journal of statistical physics*, 1984.

