Modélisation et simulation numérique à l'échelle des fibres du comportement dynamique d'un multifilament unidirectionnel en placement de fibres robotisé

Khalid El Azzouzi

▶ **To cite this version:**

Khalid El Azzouzi. Modélisation et simulation numérique à l'échelle des fibres du comportement dynamique d'un multifilament unidirectionnel en placement de fibres robotisé. Mécanique [physics]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2016. Français. NNT : . tel-02117834

HAL Id: tel-02117834

https://theses.hal.science/tel-02117834

Submitted on 2 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Khalid EL AZZOUZI

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'École centrale de Nantes
Label européen
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

École doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

Discipline : Génie mécanique
Unité de recherche : Research Institute of Civil Engineering and Mechanics

Thèse soutenue le 20 Octobre 2016

Modélisation et simulation numérique à l'échelle des fibres du comportement dynamique d'un multifilament unidirectionnel en placement de fibres robotisé

JURY

Président :	**M. Damien SOULAT**, Professeur des universités, ENSAIT, GEMTEX, Roubaix
Rapporteurs :	**M. Philippe BOISSE**, Professeur des universités, INSA Lyon, LaMCoS, Lyon **M. Gilles HIVET**, Professeur des universités, Université d'Orléans, PRISME, Orléans
Examinateurs :	**M. Damien DURVILLE**, Chargé de recherche CNRS, École Centrale Supélec, MSSMat, Paris **M. Mathieu RENOUF**, Chargé de recherche CNRS, LMGC, Université Montpellier II, Montpellier **M^{me} Anaïs BARASINSKI**, Ingénieur de recherche, GeM, École Centrale de Nantes, Nantes
Directeur de thèse :	**M. Christophe BINETRUY**, Professeur des universités, École Centrale de Nantes, GeM, Nantes
Co-directeur de thèse :	**M. Sébastien COMAS-CARDONA**, Professeur des universités, École Centrale de Nantes, GeM, Nantes

Table des matières

Table des matières iii

Table des figures vii

Table des tableaux ix

I Introduction générale 3

II Placement de fibres automatisé 9

1 Introduction 11

2 Procédés de mise en forme des composites structuraux à partir de fils et rubans (Procédés directs) 13
2.1 Introduction . . . 13
2.2 Enroulement filamentaire . . . 14
2.3 Pultrusion . . . 15
2.4 Placement de bandes ou nappes (Tape Laying) . . . 16
2.5 Placement de fils pré-imprégnés avec consolidation in-situ . . . 17

3 Placement de fils secs automatisé (Procédés indirects) 19
3.1 Introduction . . . 19
3.2 Description du procédé . . . 19
3.3 Problématique de la dépose . . . 20
3.4 Procédés de fabrication des pièces composites par moulage LCM . . . 22
3.4.1 Introduction . . . 22
3.4.2 Préformage . . . 22
3.4.3 Imprégnation, consolidation, polymérisation . . . 23

III Modélisation et simulation numérique de la dynamique d'un système 1-D telles qu'une fibre, une corde ou une tige 25

4 État de l'art 27
4.1 Introduction . . . 27
4.2 Modèles Éléments Finis . . . 28
4.2.1 Introduction . . . 28
4.2.2 Simulation statique . . . 28
4.2.3 Simulation dynamique . . . 29

4.2.4 Modèle de poutre à cinématique enrichie . . . 31
4.3 Modèles Éléments Discrets (DEM) . . . 33
4.3.1 Introduction . . . 33
4.3.2 Le modèle "Digital-Element" . . . 33
4.3.3 Le modèle Masse-Ressort . . . 35
4.3.4 Le modèle d'une chaîne de billes "Bead Chain Model" . . . 37
4.3.5 Le modèle d'une chaîne de sphéroïdes "Needle Chain Model" . . . 40
4.3.6 Le modèle d'une chaîne de tiges "Rod-chain Model" . . . 45
4.3.7 Modèle "Chaîne de corps rigides articulés" . . . 48
4.4 Modèles Continus : Modèle de *Cosserat* . . . 48
4.4.1 Introduction . . . 48
4.4.2 Définition générale . . . 49
4.4.3 Tige de *Cosserat* selon *Kirchhoff* . . . 50
4.5 Conclusion . . . 55

5 Modélisation dynamique 3-D d'un système 1-D flexible par un système de corps rigides articulés 57
5.1 Introduction . . . 57
5.2 Modèle géométrique de la fibre . . . 57
5.3 Le modèle cinématique d'un système poly-articulé . . . 60
5.3.1 Introduction . . . 60
5.3.2 Notion de torseur . . . 60
5.3.3 Cinématique . . . 61
5.3.4 Calcul de la matrice Jacobienne cinématique . . . 63
5.4 Modèle dynamique de la fibre . . . 64
5.4.1 Introduction . . . 64
5.4.2 Formalisme de *Lagrange* . . . 64
5.4.3 Formalisme de *Newton-Euler* . . . 71
5.5 Conclusion . . . 76

6 Simulations de la dynamique d'un système 1-D utilisant le modèle de corps rigides articulés 77
6.1 Introduction . . . 77
6.2 Schémas d'intégration pour un système d'EDAs . . . 78
6.2.1 Le solveur Ode15i . . . 78
6.2.2 Le solveur MEBDFI . . . 80
6.3 Cas test . . . 84
6.3.1 Introduction . . . 84
6.3.2 Étude dynamique d'un pendule . . . 84
6.4 Modélisations et simulations numériques d'une corde en chute libre . . . 86
6.4.1 Introduction . . . 86
6.4.2 Modélisation et simulation dynamique d'une chaînette . . . 86
6.4.3 Modélisation et simulation dynamique d'une corde . . . 88
6.5 Modélisation et simulation numérique d'un mouvement en spirale 3-D d'une chaînette (Problème de fouet) . . . 91
6.6 Modélisation et simulation numérique de la flexion d'un fil ondulé . . . 93
6.7 Conclusion . . . 96

IV Modélisation des interactions entre fibres constituant une mèche 101

7 Introduction 103

8 État de l'art 105
8.1 Introduction . . . 105
8.2 Modélisation de la mécanique des milieux fibreux . . . 106
8.2.1 Modélisation à l'échelle de la préforme (Macro) . . . 106
8.2.2 Modélisation à l'échelle de la mèche (Méso) . . . 108
8.2.3 Modélisation à l'échelle des fibres (Micro) . . . 111
8.3 Méthodes de résolution des problèmes de contacts frottants . . . 114
8.3.1 Méthode par impulsion . . . 116
8.3.2 Méthode par pénalités . . . 117
8.3.3 Méthode par contraintes . . . 118
8.4 Conclusion . . . 122

9 Dynamique des fibres continues en interaction 125
9.1 Introduction . . . 125
9.2 Le logiciel LMGC90 . . . 126
9.3 Le modèle dynamique avec contacts . . . 127
9.3.1 Résolution du problème NSCD . . . 129
9.3.2 Critères de convergence . . . 131
9.3.3 Calcul de la matrice de *Delassus* . . . 133
9.4 Cas test et résultats . . . 134
9.4.1 Cas d'une seule fibre . . . 135
9.4.2 Cas d'un ensemble de fibres . . . 137
9.4.3 Limitations . . . 139
9.5 Conclusion . . . 140

V Conclusion générale 143

10 Conclusion et perspectives 145
10.1 Résumé des contributions de la thèse . . . 145
10.2 Perspectives . . . 146

Table des figures

1.1 Aile de l'A400M de 23 mètres de longueur et 3 tonnes [UIM, 2007] 12

2.1 Principales formes de fibres de carbone et procédés composites associés 13
2.2 Principe de l'enroulement filamentaire par voie humide [DAL MASO, 1999] 14
2.3 Principe de l'enroulement filamentaire de fibres pré-imprégnées [3DP] 14
2.4 Schéma du procédé de pultrusion à gauche [Bannister, 2001] et le type des pièces produites à droite 15
2.5 Machine Atlas de Forest-Liné du placement de bandes larges pré-imprégnées 16
2.6 Machine de placement de fils pré-imprégnés développée par Coriolis Composites [Barasinski, 2012] 18

3.1 Étapes du procédé de placement de fibres sèches 20

4.1 Modèle enrichi d'une poutre [Durville, 2005] 32
4.2 Modèle de poutre utilisant une description "Digital-Element" [Wang and Sun, 2001] . 34
4.3 Modèle Masse-Ressort utilisé pour la simulation des cheveux. [Rosenblum et al., 1991] 35
4.4 (a) Modèle d'une chaine de bille schématisant une fibre ; (b) Représentation d'une fibre par une chaîne de N sphères de rayon a 38
4.5 Les déformations du modèle "chaîne de bille" d'une fibre: (a) traction/compression, (b) flexion et (c) torsion 39
4.6 La fibre est représentée par des corps rigides articulés. a et b sont, respectivement, les axes majeur et mineur du sphéroïde. Le paramètre ϵ contrôle la séparation entre les sphéroïdes ($\varepsilon = 0.001b$) [Ross and Klingenberg, 1997] 40
4.7 (a) Illustration du corps et de la numérotation, d'indice d'articulation, utilisée dans la construction des matrices de connectivité ; (b) système graphique pour représenter (a) [Ross and Klingenberg, 1997] 41
4.8 (a) Illustration des vecteurs de connectivités du modèle cinématique [Ross and Klingenberg, 1997] 42
4.9 Diagramme de corps libre d'un sphéroïde i appartenant à une fibre α [Ross and Klingenberg, 1997] 44
4.10 (a) Schéma du modèle tiges-enchaînées, (b) vecteur reliant les deux extrémités de la fibre [Wang et al., 2006] 46
4.11 Les forces et moments externes et internes exercés sur une tige i 47
4.12 Modèle d'une fibre selon Hadap and Magnenat-Thalmann [2001] 48
4.13 Déformations élémentaires sur un morceau de tige de Cosserat [Bertails, 2006] . . . 50
4.14 Modèle d'une fibre selon les hypothèses de *Kirchhoff*, illustrant l'un de ses repères matériels relié à une section ; les paramètres k_1 et k_2 indiquent la courbure locale de la tige autour de $\mathbf{n_1}$ et $\mathbf{n_2}$ respectivement, et le paramètre τ indique la torsion de la tige autour de l'axe tangent $\mathbf{t}$ 51
4.15 Bilan des forces appliquées sur un élément infinitésimal de la tige 52

5.1 Schéma d'une articulation sphérique représentée par une combinaison équivalente de trois articulations pivot . . . 58
5.2 Modèle géométrique 3-D d'une fibre inextensible . . . 59
5.3 Illustration de la méthode paramètrique de Denavit-Hartenberg . . . 59
5.4 Élasticité linaire . . . 69
5.5 Courbure d'une poutre . . . 70
5.6 Élasticité non-linaire . . . 71
5.7 Forces et moments exercés sur un $Corps_0$ . . . 73

6.1 Schéma du sytème pendule . . . 84
6.2 Comparaison des positions X et Y, de chaque corps de la tige durant son balancement, obtenues par [Battocchio et al., 2012], avec leur modèle $(-)$ et Abaqus $(+)$ (a) à celles obtenues dans ce travail (b) . . . 85
6.3 Système de pendules physiques multiples représentant la chaînette . . . 87
6.4 Comparaison entre les configurations d'une corde en chute libre (a) obtenues dans Fritzkowski and Kaminski [2008] et (b) avec le modèle proposé pour $n = 70$ . . . 88
6.5 Positions en Y de l'extrémité libre de la corde pour différents nombres d'éléments obtenues (a) par Fritzkowski and Kaminski [2008] et (b) par notre modèle . . . 89
6.6 Bilan énergétique du système poly-articulé (chaînette) avec $n = 70$ . . . 90
6.7 Orientations relatives des deux derniers éléments du système sans élasticité et sans amortissement . . . 90
6.8 Orientations relatives des deux derniers éléments du système avec élasticité et amortissement . . . 91
6.9 Fonction rampe et ses dérivées . . . 93
6.10 Fonctions de contraintes (a) et la trajectoire du support (b) . . . 94
6.11 Énergie totale des différents éléments illustrant la propagation de l'onde spirale . . . 95
6.12 Évolution de l'énergie totale du système . . . 95
6.13 Poutre ondulée . . . 95
6.14 Les forces longitudinales et transversales correspondant à différents profiles du fil à différent instants de la simulation . . . 97
6.15 Les forces longitudinales et transversales correspondant à différents profiles du fil à différents instants de la simulation (Suite) . . . 98

8.1 La méthode du filet [Boisse, 2004] . . . 107
8.2 Modélisation discrète des différents comportements mécanique d'un renfort : (b) en traction biaxiale, (c) en torsion, (d) en cisaillement et (e) en flexion [Sze and Liu, 2005] 107
8.3 Méthode semi-discrète pour "Interlock" proposée par De Luycker et al. [2009] . . . 108
8.4 Méthode semi-discrète pour "NCF" proposée par Creech and Pickett [2006] . . . 108
8.5 Illustration du concept d'une simulation avec le modèle de Lomov, avec (a) les parties d'une trajectoire [Lomov et al., 2000] et (b) une description matricielle d'un motif de tissage [Verpoest and Lomov, 2005] . . . 109
8.6 Concept de la trajectoire et la section géométrique d'un mèche selon la méthode de Hivet and Boisse [2005] . . . 110
8.7 Illustration du concept d'une simulation avec le modèle de D. Durville, avec (a) traitement des contacts avec une géométrie intermédiaire [Durville, 2012], (b) une configuration initiale par contact entre fibres [Durville, 2007] et (c) un exemple d'un renfort en flexion [Durville, 2007] . . . 113
8.8 Le problème de l'application de la technique maître-esclave dans le cas de deux poutres [Zavarise and Wriggers, 1998] . . . 113
8.9 Illustration du concept d'une simulation avec le modèle de Wang et al. [2010] . . . 114

8.10 Modèle de Bergou et al. [2008] : (a) paramétrisation de la tige , (b) vecteurs et angles utilisés pour la discrétisation de la tige, (c) discrétisation de la tige et (d) exemple d'application 115
8.11 Illustration du modèle par pénalité pour un contact frottant 117
8.12 Repère local pour un contact 3D 118
8.13 Graphe de Signorini 119
8.14 Graphe de contact avec élasticité 119
8.15 Graphe de contact non-linéaire 120

9.1 Illustration des phases principales du code "LMGC90" 127
9.2 Configuration initiale de la fibre 136
9.3 Moments internes de la fibre dans Cas 1 où $g = 9.81[m.s^{-2}]$ et Cas 2 où $g = 2 \times 9.81[m.s^{-2}]$ à différents instants 137
9.4 Configurations de la fibre dans le cas (a) où $g = 9.81[m.s^{-2}]$ et le cas (b) où $g = 2 \times 9.81[m.s^{-2}]$ à différents instants:(c) $t = 0s$, (f) $t = 1.5 \times 10^{-3}s$, (e) $t = 4.5 \times 10^{-3}s$, (f) $t = 6 \times 10^{-3}s$, (g) $t = 7.5 \times 10^{-3}s$, (h) $t = 10.5 \times 10^{-3}s$, (i) $t = 12 \times 10^{-3}s$, (j) $t = 13.5 \times 10^{-3}s$, (k) $t = 15 \times 10^{-3}s$ 138
9.5 Distribution des points de contact dans le cas (a) où $g = 2 \times 9.81[m.s^{-2}]$ et le cas (b) où $g = 5 \times 9.81[m.s^{-2}]$ à différents instants: (c) $t = 0.5 \times 10^{-3}s$, (d) $t = 1.5 \times 10^{-3}s$, (e) $t = 2 \times 10^{-3}s$, (f) $t = 2.5 \times 10^{-3}s$, (g) $t = 3 \times 10^{-3}s$, (h) $t = 3.5 \times 10^{-3}s$, (i) $t = 4 \times 10^{-3}s$, (j) $t = 4.5 \times 10^{-3}s$ et (k) $t = 5 \times 10^{-3}s$. 140
9.6 L'évolution du nombre de points de contact pour le cas 1 où $g = 2 \times 9.81[N.m^{-2}]$ et le cas 2 où $g = 5 \times 9.81[N.m^{-2}]$ 140
9.7 Différentes configurations de fibres dans le cas (a) où $g = 2 \times 9.81[m.s^{-2}]$ et le cas (b) où $g = 5 \times 9.81[m.s^{-2}]$ à différents instants:(c) $t = 0s$, (d) $t = 1 \times 10^{-3}s$, (e) $t = 2 \times 10^{-3}s$, (f) $t = 3 \times 10^{-3}s$, (g) $t = 4 \times 10^{-3}s$, (h) $t = 5 \times 10^{-3}s$ 141

Liste des tableaux

1 Avantages et inconvénients du procédé "Placement de Fibres Sèches Robotisé" . . . 6

5.1 Paramètres géométriques du modèle de la fibre inextensible. "L" représente la longueur des corps . . . 60

6.1 Paramètres géométriques et mécaniques du fil de verre ondulé [Syerko et al., 2013] . 96

9.1 Valeurs de ϕ_3 et ϕ_4 ainsi que leurs dérivées $\partial\phi_3$ et $\partial\phi_4$ en fonction des statuts . . . 131
9.2 Paramètres géométriques et mécaniques de la fibre . . . 136
9.3 Paramètres géométriques et mécaniques des fibres . . . 139

Remerciements

En premier lieu je souhaite remercier mon directeur Pr. Christophe BINETRUY et co-directeur Pr. Sébastien COMAS-CARDONA pour leur accueil au sein de l'Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) de l'Ecole Centrale de Nantes, leur encadrement, sans oublier leur soutien et accompagnement dont j'ai bénéficié tout au long de ma thèse. Leurs expertises dans le domaine des composites ma permis de suivre une voie originale pour étudier le comportement dynamique des milieux fibreux enchevêtrés où j'ai pu m'épanouir pleinement.

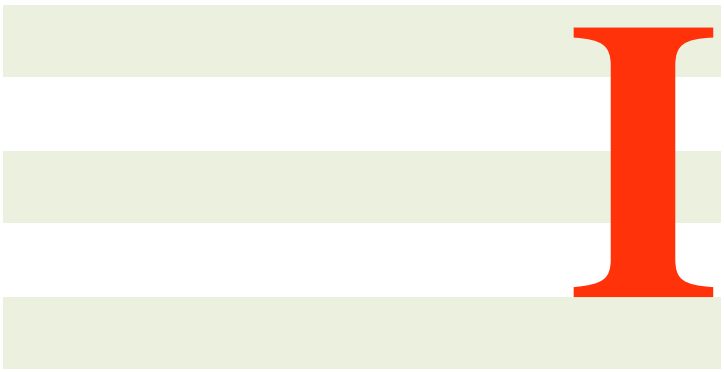
Je tiens également à remercier M. Frédéric DUBOIS et M. Rémy MOZUL du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de Montpellier (LMGC) pour leur aide très précieuse et l'accueil au sein de leur équipe. Leur expertise dans le domaine de la mécanique des contacts et leur outil LMGC90 (Logiciel de mécanique Gérant les Contacts) ont beaucoup apporté à mes travaux de thèse. Je les remercie beaucoup pour le temps accordé et les efforts fournis et surtout de m'avoir supporté tout ce temps.

Je remercie chaleureusement mon employeur,qui est l'institut de Recherche Technologique Jules Verne (IRT JV), de m'avoir permis de travailler dans un éco-système très riche à travers le projet DFP (Dry Fiber Placement) qui est un projet collaboratif entre des industriels et des académiques représentés par, respectivement, AIRBUS Group Innovation (AGI), STELIA, COMPOSE, GeM, ICAM et IRCCyN. Je remercie tout particulièrement Mme Charlotte FOUCHET et Mme Verena SCHNITZLER-DUVAL de l'IRT JV pour leur pilotage interne, ainsi que le chef de projet Mme Catherine DUVAL d'AGI pour son sens aigu de l'organisation et surtout sa réactivité à tous nos sollicitations pour mener à bien nos travaux.

J'exprime mes sincères remerciements à Philippe BOISSE et Gilles HIVET d'avoir accepter d'être rapporteur de cette thèse, leur application dans cette tâche s'est exprimée dans leurs remarques et suggestions de très grandes qualités avec impact très positif sur mes réflexions sur le sujet de la thèse. Je tiens à remercier également Damien SOULAT, Mathieu RENOUF et Damien DURVILLE pour leurs participation au jury de thèse en tant qu'examinateur avec application qui s'est illustrée dans leurs remarques et questions durant la séance des questions à l'occasion de ma soutenance de thèse.

Je termine par ma petite famille que j'aime énormément. Merci infiniment à ma femme qui me supporte depuis huit ans et surtout pour son soutien dans les moments difficiles, ceci m'a été d'une grande aide. Grâce au soutien et la compréhension de mes encadrants et du chef de projet, ma femme et moi avons pu construire une petite famille avec deux adoptions durant les trois ans et demi de thèse (j'avoue nous sommes des fous pour faire une thèse et deux adoptions!!!!). L'amour de ma femme et de nos enfants et leur joie de vivre ont rendu ma vie tellement belle que toutes les difficultés que j'ai

pu rencontrer me paraissaient anodines. Enfin, merci merci merci infiniment à mes parents qui m'ont toujours soutenu et donné l'amour inconditionnel dont je me nourrit constamment.



Introduction générale

Introduction

Contexte

Aujourd'hui la filière de fabrication par injection/infusion présente un intérêt considérable pour la réalisation des pièces composites à géométries complexes tout en assurant une qualité dimensionnelle et géométrique compatible avec les exigences aéro-structurales. Cependant, les solutions de préformage aujourd'hui disponibles, tels que le drapage manuel et le formage sous vide de nappes ou tissus secs limitent bien souvent l'intérêt technico-économique de cette famille de procédés.

Face à ce constat, les acteurs du monde aéronautique souhaitent explorer une solution automatisée de fabrication de préformes fibreuses par placement automatisé de fibres sèches. Ils travaillent depuis plusieurs années à l'amélioration du procédé de placement de fibres sèches robotisé. A ce jour il demeure plusieurs voies d'amélioration et d'optimisation afin d'amener la technologie à une maturité compatible avec les exigences d'un procédé industriel en termes de productivité et de qualité. Ce procédé permet de placer précisément les fibres de renforts dans les directions souhaitées, correspondants aux directions des efforts appliqués à la pièce. La faisabilité de ce procédé a été déjà démontrée, néanmoins il reste des verrous scientifiques et technologiques à lever afin d'augmenter la maturité de cette technologie pour une utilisation dans le milieu industriel [Belhaj et al., 2013].

Ceci passe par l'intégration d'un système de chauffage par laser, qui a pour but d'optimiser la qualité et réduire le temps de chauffage. Il convient également de comprendre et maîtriser le comportement des fils secs au cours du chargement thermo-mécanique induit par le procédé pour assurer une bonne qualité de préforme fibreuse. Ainsi, cette thèse s'attache à lever plusieurs verrous scientifiques pour contribuer à la montée en maturité de la technologie de placement automatisé de fibres sèches.

Matériau multi-échelles

De manière générale, les pièces composites aéronautiques peuvent être réalisées à partir d'un préimprégné, un semi-produit présentant à la fois les fibres de carbone et le polymère dans un pli préconsolidé (à épaisseur maîtrisée). Elles peuvent être aussi fabriquées en deux étapes à partir d'une préforme fibreuse qui sera imprégnée d'une résine liquide. La préforme, obtenue par placement robotisé, est un assemblage de fils secs encollés par un polymère pour lui conférer une rigidité suffisante pour le démoulage et les manipulations ultérieures. Le renfort fibreux, avant la dépose, est de nature sèche avec 6% $[en\ masse]$ de polymère sous forme de poudre ou de film. Ce nouveau produit (fibres sèches) utilisé présente de nombreux avantages, mais également des inconvénients (Tableau 1) dont

le plus limitant est la difficulté de fabriquer des préformes de géométrie complexe sans générer de défauts.

TABLE 1 – Avantages et inconvénients du procédé "Placement de Fibres Sèches Robotisé"

Avantages	Inconvénients
• Les fibres sèches sont facile à déformer • Contrôle de la position et de l'orientation des fibres • Maîtrise du taux de renforcement (jusqu'à 60%) • Temps de stockage illimité • Le coût d'achat des fibres et de la résine séparément est moins élevé que celui du pré-imprégné	• Problème du foisonnement • Problème du recouvrement et d'interstice entre fils • L'encombrement de la tête de dépose • Problème d'adhésion du premier pli

Le caractère multi-échelle s'observe dans le comportement mécanique de la préforme (échelle macroscopique) qui dépend du comportement d'un ensemble de fibres en interaction (échelle mésoscopique) qui est à son tour sensible au comportement individuel de chaque fibre (échelle microscopique).

Comportement mécanique et modélisation

Le comportement mécanique d'un fil de carbone en compression transverse est caractérisé par des déplacements relatifs importants entre fibres, ce qui lui confère un comportement fortement non-linéaire lié aux contacts inter-fibres. Le caractère multi-échelle de la structure fibreuse rend problématique la caractérisation du comportement mécanique du fil de carbone utilisé dans le procédé de placement de fibres sèches automatisé. La complexité de la modélisation mécanique de ce milieu fibreux à l'échelle des fibres est due au fait que la forte non-linéarité mécanique dépend en grande partie de la configuration géométrique des fibres, des interactions de contact-frottement entre elles et le contexte dynamique de la dépose. Le couplage fort entre chargements et modes de déformation dans les différentes directions et l'évolution de la microstructure, qu'il est bien difficile d'appréhender, accentuent fortement la complexité de la modélisation d'une telle structure fibreuse.

Objectif de la thèse

Le travail de la thèse s'inscrit dans le cadre de l'optimisation du moyen de dépose robotisé de fils secs avec une source de chaleur par laser. Afin de comprendre le comportement thermo-mécanique du fil au cours de la dépose, un modèle dynamique a été développé pour simuler un milieux fibreux en interaction. Le but est de pouvoir prédire le réarrangement des fibres dans un fil sous sollicitation, ainsi que l'évolution des points de contact entre fibres. Ce travail est une première étape vers l'objectif

final qui est de définir les paramètres procédés par rapport à la nature des fils secs déposés permettant d'obtenir une préforme de bonne qualité avec une vitesse de dépose élevée.

Organisation du manuscrit

Cette étude débute par une courte synthèse bibliographique portant sur les procédés de fabrication des structures en composite utilisant directement des fils. La problématique du calcul de trajectoires complexes à fortes courbures est développée.

Puis, une troisième partie portant sur la modélisation et la simulations numérique de la dynamique d'un système 1-D, tel qu'une corde, en 3 dimensions est décrite. Le premier chapitre de cette partie présente un état de l'art sur tous les modèles existants pour simuler les grandes déformations d'un fibre individuelle. A l'issu de cet état de l'art, il a été conclu que la méthode des éléments discrets est la plus efficace pour notre étude numérique. Puis dans le chapitre 2 de la même partie, un modèle dynamique 3-D d'un système unidirectionnel, tel qu'un fil ou une fibre, a été développé. Ensuite, le chapitre 3 présente la nature du système d'équations différentielles obtenu et le type de schémas d'intégration nécessaire à son traitement dans le temps. Les résultats d'un ensemble de cas tests permettant de vérifier la validité et les capacités du modèle seront présentés.

La quatrième partie est dédiée à la mécanique d'un milieu fibreu à l'échelle des fibres. Les interactions entre les fibres sont celles qui jouent le plus important dans le comportement mécanique d'un tel milieux. Le premier chapitre est consacré à l'état de l'art sur les modèles existant permettant la simulation de ces interactions. Puis, le chapitre suivant présentera le modèle développé dans cette thèse pour traiter la dynamique d'un milieu fibreu avec contacts. Un ensemble de cas test, utilisant la méthode développée dans cette thèse, sera présenté.

II

Placement de fibres automatisé

1

Introduction

Le pourcentage de matériaux composites dans les pièces de structure des avions de nouvelle génération est en nette augmentation. Par exemple, la structure du BOEING 787 ou AIRBUS A350 est constitué de 50% de matériaux composites. Les pièces concernées sont les ailes, le fuselage et l'empennage. L'intégration des matériaux composites dans l'A350 aurait permis d'économiser $7983\ kg$ par rapport à l'utilisation de matériaux conventionnels [Lorincz, 2006]. L'allègement de l'A350 provient des ailes entièrement en composites, d'une partie du fuselage et un cockpit fabriqué avec 60% de matériaux composites à fibres de carbone ou des alliages aluminium-lithium.

L'objectif principal des industriels aéronautiques étant de produire des avions plus légers et plus économes en carburant, explique pourquoi les matériaux composites trouvent de nombreuses applications dans le domaine du transport aérien.

La présence des matériaux composites dans l'industrie aéronautique n'est cependant pas nouvelle. Les missiles et les avions militaires ont été les premiers à intégrer des pièces en composites à fibres de carbone en raison de leur rapport résistance/poids avantageux, de leur résistance à la corrosion et à la fatigue. Le début des matériaux composites a été marqué part le fait que les pièces en composites ont été fabriquées manuellement ce qui rendait les coûts de fabrication élevés et les réservait aux domaines de la défense et de l'aérospatial. Le fait d'automatiser les procédés de drapage de fibres a permis de réduire considérablement les coûts de production et aussi de produire des pièces de grandes dimensions telle que l'aile de l'A400M (Figure : 1.1) qui était considérée en 2007 comme la plus grande pièce majoritairement en composite à fibres de carbone jamais produite. Le constructeur américain de machines de dépose de fibres "Automated Dynamics" a publié que le fait d'utiliser une machine de dépose automatique a augmenté la productivité de 18 pounds (soit $8.18\ kg$) de matériau déposé par heure [Black, 2003].

L'augmentation de la production des pièces composites n'est pas uniquement le fait de l'automatisation des procédés de dépose, d'autres facteurs participent à la baisse du coût de revient des pièces en composites [Grant and Martin, 2003] :

FIGURE 1.1 – Aile de l'A400M de 23 mètres de longueur et 3 tonnes [UIM, 2007]

Réduction du taux de rebut de matières Le taux de perte de matière des procédés automatisés se situe généralement entre 3% et 8%. Par comparaison, les procédés manuels atteignent des taux de perte allant de 20 à 50%.

Réduction des opérations de contrôles qualité Les procédés de fabrication utilisant des machines à commande numérique sont répétables, de fait le contrôle qualité n'est plus systématique.

L'accessibilité aux machines de dépose La concurrence entre les fabricants conduit à la mise sur le marché des machines moins chères et plus flexibles.

La concurrence entre les composites et les alliages d'aluminium est toujours présente malgré les progrès que les composites ont connu. En effet, la maîtrise incontestable des matériaux métalliques, grâce à l'expérience acquise, offre bien des avantages par rapport aux matériaux composites. Aujourd'hui la plupart des procédés d'usinage sont automatisés contrairement aux procédés de fabrication des pièces composites. De plus, le coût d'achat d'une machine d'usinage destinée aux pièces aéronautiques est nettement inférieur à celui d'une machine de dépose de bandes composites. De même, la différence de prix au kilo transformé est flagrante : de l'ordre de 250 € pour le carbone, contre 6 € pour l'aluminium [UIM, 2007].

Pour toutes les raisons citées précédemment, de nombreux travaux sont nécessaires afin d'augmenter la compétitivité des pièces composites et leur qualité. L'objectif majeur de l'industrie du composite reste celui de réduire les coûts de fabrication. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à l'optimisation du procédé de placement de fibres sèches automatisé à l'aide de la simulation numérique du comportement mécanique des fibres durant la dépose. Ce procédé décrit au chapitre 3, est en concurrence avec d'autres procédés de fabrication tels que le drapage de bandes ou nappage, dépose par enroulement filamentaire ou le moulage RTM avec une préforme obtenue par drapage de plis de renforts fibreux. Une comparaison de ces procédés en termes de productivité, de coût, et de capacité est présentée au chapitre 2.

2

Procédés de mise en forme des composites structuraux à partir de fils et rubans (Procédés directs)

2.1 Introduction

Ce chapitre présente les procédés de mise en forme des pièces composites complexes et de haute qualité destinées à l'industrie de l'aéronautique. Ces pièces composites sont à base de fibres de carbone et de matrice polymère de type thermodurcissable ou thermoplastique. Les fibres de carbone peuvent être utilisées sous plusieurs formes et dans plusieurs procédés associés comme illustré en Figure 2.1. Dans la suite on s'intéresse aux procédés directs et indirects pouvant utiliser des fils secs ou imprégnés pour la réalisation de composites ou de préformes fibreuses.

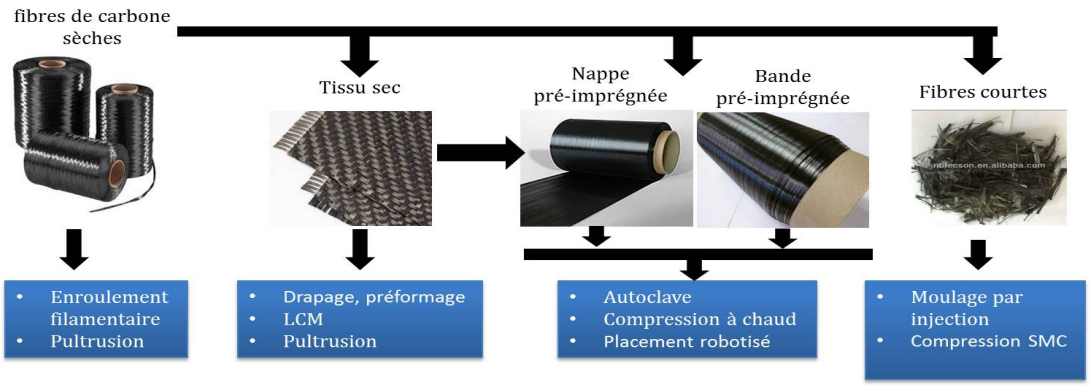


FIGURE 2.1 – Principales formes de fibres de carbone et procédés composites associés

Le but est de comprendre les raisons pour lesquelles les procédés de dépose de rubans ou de fibres sont aujourd'hui les procédés les plus utilisés pour la mise en forme des pièces de structure

aéronautique de grandes dimensions.

2.2 Enroulement filamentaire

Ce procédé est le plus utilisé pour la mise en forme de pièces cylindriques comme par exemple des cuves et tubes sous pression ou les clubs de golf [Grant and Martin, 2003] et [Bannister, 2001]. Le procédé permet l'obtention de pièces creuses par bobinage de fils, qui sont soit pré-imprégnés (voie sèche) soit secs et imprégnés avec une résine dans un bac d'imprégnation en amont, à l'aide d'une tête d'acheminement autour d'un mandrin horizontal (enroulement par voie humide Fig. 2.3). L'opération d'enroulement est une combinaison d'un mouvement d'aller-retour horizontal de la tête et un mouvement de rotation du mandrin autour de son axe horizontal.

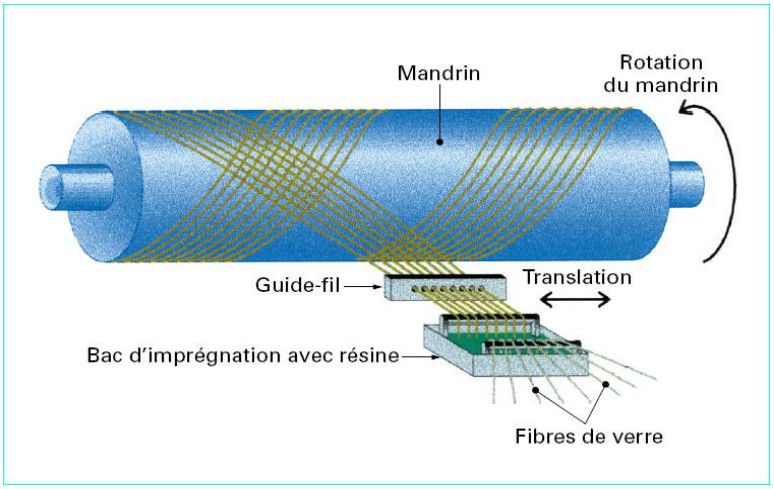


FIGURE 2.2 – Principe de l'enroulement filamentaire par voie humide [DAL MASO, 1999]

FIGURE 2.3 – Principe de l'enroulement filamentaire de fibres pré-imprégnées [3DP]

Ce type de procédé nécessite des installations de coût faible à modéré et offre des taux de production jusqu'à dix fois supérieurs à ceux du drapage manuel de bandes. De plus, ils ne nécessitent pas de consolidation à l'autoclave (longue et coûteuse) grâce à la mise en tension des fils au cours de la fabrication. Ils ont deux principaux inconvénients qui sont la difficulté à fabriquer des pièces à

géométrie complexe ayant des concavités et la complexité de l'étape de retrait du mandrin qui oblige parfois à utiliser de mandrins rétractables augmentant le coût de l'installation.

Ainsi ce procédé est principalement utilisé pour la mise en forme de pièces de formes simples telles que des cylindres et des réservoirs. Cependant, l'enroulement filamentaire a été combiné avec d'autre méthodes de placement lui permettant de produire des formes complexes.

Les procédés de nouvelle génération, intégrant des techniques de dépose robotisés dans des système traditionnels d'enroulement filamentaire, permettent de produire des formes complexes non-symétriques telles que les formes **T** et les formes coudées. Ce procédé hybride permet le contrôle de la vitesse, la possibilité d'obtenir des épaisseurs variables dans la pièce, la qualité, la flexibilité dans l'orientation des fils et la possibilité de réaliser des formes autres que cylindriques. Mais, il est très sensible à la gestion de la tension de fils qui est liée à la vitesse et la trajectoire d'enroulement [Carrino et al., 2004; Polini and Sorrentino, 2005].

2.3 Pultrusion

Le procédé de pultrusion est l'un des procédés utilisés presque dans tous les secteurs industriels tels que le naval, le sport, l'aéronautique et l'aérospatial. Le procédé consiste à faire passer en continu les fibres de renfort dans un bac de résine (voie humide) thermodurcissable ou thermoplastique puis de mettre en forme le matériau dans une filière avant de le couper à la longueur désirée (Figure 2.4). Il existe une version par voie sèche en utilisant par exemple des fils comélés tels que les *Twintex*

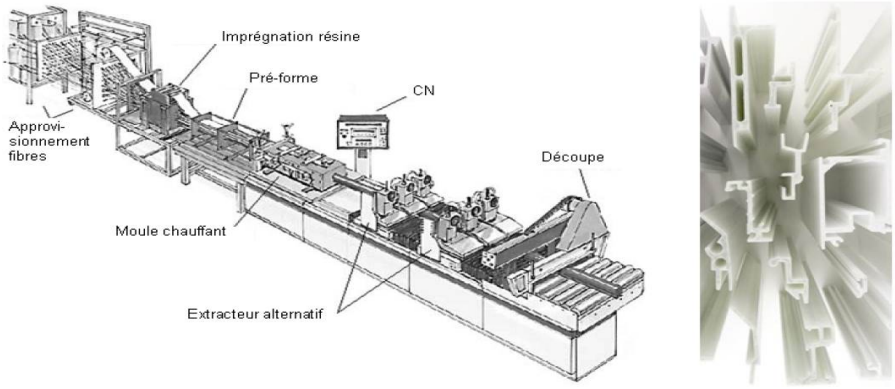


FIGURE 2.4 – Schéma du procédé de pultrusion à gauche [Bannister, 2001] et le type des pièces produites à droite

Il doit son succès au fait qu'il bénéficie d'une productivité très élevée et d'un faible coût de mise en œuvre et qu'il soit capable de produire une grande variété de formes de façon continue minimisant le taux de perte de matière. Mais, son incapacité à produire des pièces de section variable limite son domaine d'application. Ainsi, les pièces produites sont généralement longues et droites avec la direction principale des fibres orientée suivant la direction de pultrusion [Babeau et al., 2015].

Malgré les avantages du procédé de pultrusion, l'utilisation de ce procédé pour la fabrication des pièces de formes complexes est impossible.

2.4 Placement de bandes ou nappes (Tape Laying)

Le procédé de placement de bandes consiste à déposer une succession de rubans de pré-imprégné sur un moule permettant de fabriquer des pièces de structure de grande taille et complexité limitée après consolidation à l'autoclave. Un ruban est composé d'un ensemble de fibres continues unidirectionnelles pré-imprégnés d'une matrice thermodurcissable ou thermoplastique formant une couche.

L'automatisation du procédé permet d'améliorer la précision et de produire des pièces d'épaisseur variable afin d'optimiser le rapport résistance / poids de la pièce. Cet avantage lui a valu d'être utilisé pour fabriquer des pièces de haute performance dans l'industrie aérospatiale tels que des peaux de voilure et de fuselage d'avion, des gouvernes ou encore le fuselage des lanceurs et des corps de missiles.

Les machines actuelles sont de grande dimension, sophistiquées et représentent un investissement important. L'effecteur de ces machines est un rouleau, généralement en élastomère, par l'intermédiaire duquel une pression est transmise au laminé couplé à une source de chaleur pour consolider le matériau et cicatriser les interfaces. Les bandes peuvent être préalablement découpées ou intégrer un système de découpe dans l'effecteur. Les machines peuvent être équipées d'un système de compliance qui permet de corriger en temps réel l'orientation et/ou la position du rouleau de dépose.

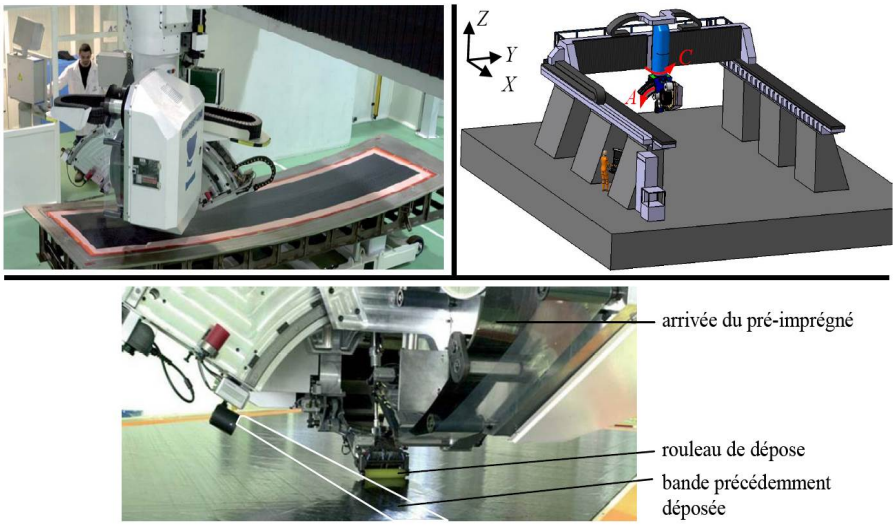


FIGURE 2.5 – Machine Atlas de Forest-Liné du placement de bandes larges pré-imprégnées

Le placement de bandes ou nappes est particulièrement adapté à la fabrication de la peau de l'aile car c'est une pièce tendue présentant de faibles variations de la courbure Gaussienne de sa surface. Il est alors plus difficile de couvrir une pièce telle que la pointe avant, qui est géométriquement complexe ayant des importantes courbures. L'application du procédé dans ce cas de figure, les nappes déposées auront tendance à former des ondulations au cours de ce mode de dépose appelé steering. Le procédé a connu une amélioration importante pour éviter l'apparition de ces défauts par le remplacement des bandes ou des nappes larges (d'ordre $\pm 150\ mm$) par plusieurs fils plus étroits (d'ordre $\pm 6\ mm$).

2.5 Placement de fils pré-imprégnés avec consolidation in-situ

Beaucoup d'industriels et d'académiques nationaux et internationaux se sont intéressés aux techniques de placement de rubans pré-imprégnés thermoplastiques dans les années 90 (pour éviter le problème de polymérisation auxquels les thermodurcissables font face) puis de fils secs au début des années 2000.

La solution de placement de fils pré-imprégnés (Tape Laying) a été développée pour réaliser des grandes pièces à géométrie complexe de façon robotisée et surtout en une seule opération avec une consolidation in-situ. Le procédé peut être vu comme une combinaison du placement de nappes et l'enroulement filamentaire [Bannister, 2001].

Le principe de ce procédé est de déposer un assemblage parallèle de fils de carbone imprégné de résine thermoplastique sur un substrat puis de le souder en apportant de la chaleur en utilisant de l'air chaud, une source infra-rouge ou une source laser. La cinématique du robot utilisé pour ce type de procédé est contrôlée de façon à ce que le rouleau de compactage applique toujours une pression normale à la surface. Les paramètres de réglage du procédé sont les suivants : l'entraînement des fils, la vitesse de dépose, l'énergie thermique apportée, la pression appliquée par le rouleau, la trajectoire désirée, la découpe des fils. L'une des premières têtes de dépose a été développée par ABB Corporation et intégrée à un robot six axes, auquel un septième axe a été ajouté pour réaliser des pièces de révolution, [Stover, 1994]. Puis la NASA a utilisé cette technique dans le cadre des travaux de Johnston et al. [1997]. Des méthodes de contrôle de la température à l'interface entre le pli déposé et le support ont été développées [Sun et al., 1998; Tumkor et al., 2001] permettant d'optimiser la dépose. AIRBUS Group, Dassault Aviation et Eurocopter ont réalisé conjointement une étude de drapage et consolidation en continu durant la dépose des fils pré-imprégnés thermoplastique dans le cadre de la thèse de Nicodeau [2005] autour du procédé Drapcocot. Puis Coriolis Composite a développé une machine innovante (Figure 2.6) dans le cadre du projet Flash TP (Fiber Heating Thermoplastic Tape Placement), labellisé en 2007, porté par EADS IW et rassemblant AIRBUS, ASTRIUM, CORIOLIS, IREPA LASER et l'ECN. Le projet Flash TP avait pour objectif d'étudier les spécifications techniques et fonctionnelles du moyen de dépose, d'étudier et de réaliser le dispositif de chauffage par laser, d'étudier et réaliser l'effecteur, d'évaluer le prototype et réaliser des modélisations du drapage d'un stratifié thermoplastique assisté par chauffage laser [Barasinski, 2012]. Dans ce cadre Barasinski [2012] a réalisé une étude qualitative et quantitative visant la compréhension et le développement du procédé de dépose automatisé du pré-imprégné thermoplastique, en se concentrant sur l'histoire thermo-mécanique du fil pré-imprégné durant la dépose.

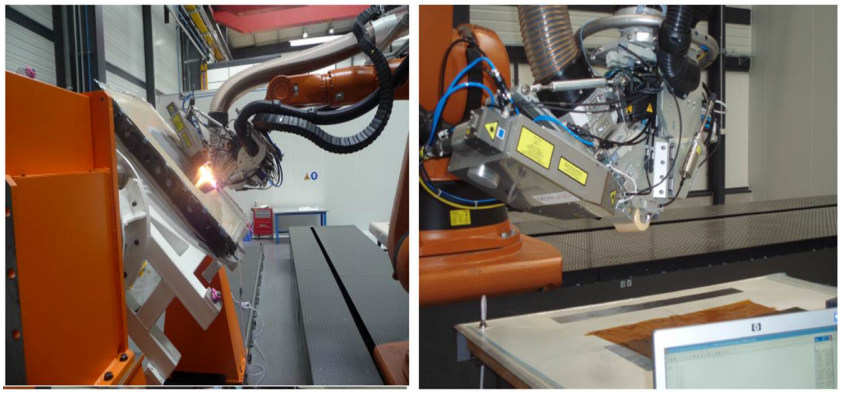


FIGURE 2.6 – Machine de placement de fils pré-imprégnés développée par Coriolis Composites [Barasinski, 2012]

3

Placement de fils secs automatisé (Procédés indirects)

3.1 Introduction

La solution de placement de fils secs a été développée en complément du procédé de placement de fils pré-imprégnés, elle est utilisée pour la fabrication des préformes prêtes à être imprégner de résine pour but de réduire les coûts de fabrications. Deux méthodes de placement ont été explorées, une utilisant un rouleau de dépose pour un placement précis et l'autre utilisant un jet d'air déposant des fils non orientés. Rudd et al. [1999] et McGeehin [1994] ont étudié ces deux méthodes en exploitant un robot 4 axes intégrant un algorithme cinématique de [Long et al., 1996]. Belhaj et al. [2013] a réalisé une étudie approfondie d'une nouvelle technologie de fabrication de préformes de composites structuraux par placement automatisé de fibres sèches dans le cadre d'un projet collaboratif entre AGI (anciennement EADS IW France) et STELIA (anciennement AEROLIA) [Belhaj, 2010], ce qui a donné naissance à un moyen de dépose robotisé de fils secs afin de valider et évaluer les limites de cette technologie.

3.2 Description du procédé

Le procédé du placement automatisé, initialement développé pour les fils pré-imprégnés d'une matrice thermodurcissable, comprenait deux étapes cruciales à la fabrication des pièces composites : une étape de dépose, suivi d'une étape de consolidation en autoclave (étape au cours de laquelle de la pression et la chaleur sont apportées pour solidifier le composite). Cependant ce procédé a été adapté aux rubans thermoplastiques, en rajoutant une source de chaleur à la tête de dépose. Sous réserve de bien ajuster les paramètres procédés (pression, température, temps) ce procédé permet de réaliser des

pièces composites en une seule étape. Pour des raisons économiques ce procédé a vu une nouvelle volonté d'adaptation, qui a pour but de réaliser des préformes prêtes à être injectées, par la dépose des fils secs contenant un liant organique pour figer la microstructure de la préforme.

La Fig 3.1 illustre la morphologie du matériau utilisé, qui est un renfort en carbone unidirectionnel contenant un liant soit sous forme de film soit sous forme de poudre, et présente les trois étapes principales que le matériau subit selon un ordre bien défini.

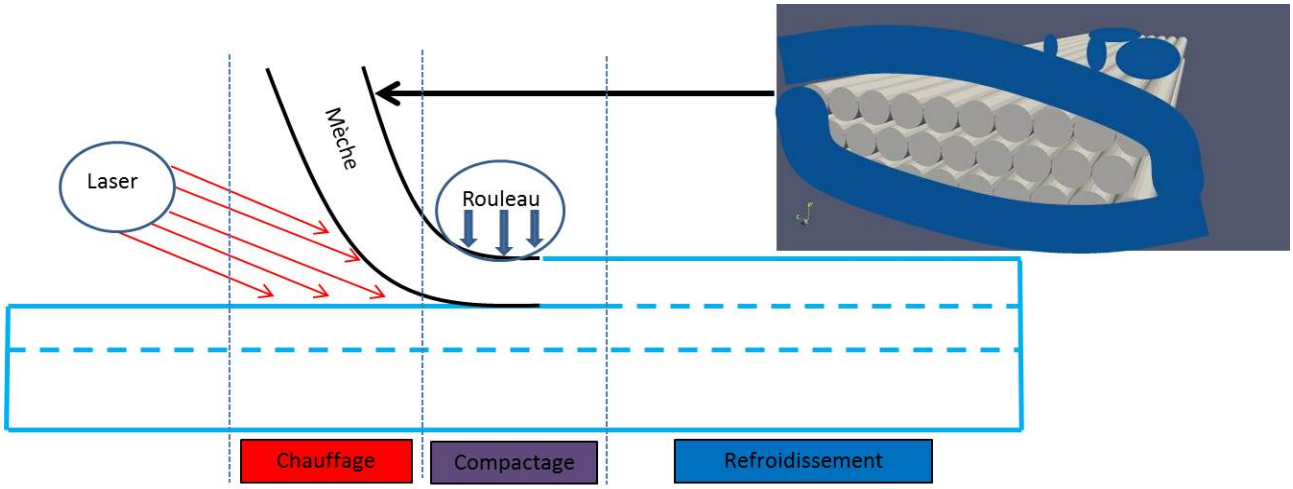


FIGURE 3.1 – Étapes du procédé de placement de fibres sèches

Plusieurs phénomènes physiques interviennent lors des étapes de chauffage, de compactage et de refroidissement.

La première étape de chauffage assure l'activation du liant pour l'adhésion inter-plis et la stabilisation de la géométrie de la préforme. La source de chaleur doit transformer le liant initialement dans un état solide vers un état fondu afin de permettre l'adhésion inter-plis. Dans cette étape la chaleur est apportée, sous forme de flux d'énergie, par le laser puis transformée en chaleur par les fibres de carbone qui transmettent à leur tour cette chaleur au liant par conduction.

Le compactage est une étape durant laquelle un rouleau exerce une pression sur le ruban en cours de dépose pour le souder au substrat composite déjà formé. L'objectif principal de l'opération du compactage, couplé à l'apport de la chaleur, est de garantir de la cohésion à la préforme.

L'étape de solidification permet de figer la microstructure de la préforme. Le maintien de la cohésion entre les fibres est assuré par le durcissement du liant organique dès refroidissement de ce dernier. Le durcissement du liant thermoplastique s'accompagne du phénomène de cristallisation qui se produit entre la température de fusion et la température de transition vitreuse.

3.3 Problématique de la dépose

La préparation de la dépose de composite est composée de deux opérations. La première consiste à générer la trajectoire dans l'espace de la pièce puis extraire les positions et orientations de la tête de dépose permettant de couvrir toute la surface de travail le plus correctement possible. La seconde opération consiste à calculer les paramètres articulaires (vitesses, positions et couples) du robot permettant la réalisation de la trajectoire souhaitée.

Les principaux facteurs de productivité et la qualité de la dépose sont la couverture de la surface de la pièce et la vitesse moyenne de parcours. Ainsi, pour améliorer la productivité et la qualité de la dépose, il est nécessaire d'optimiser les deux opérations présentées précédemment en prenant en compte des deux facteurs cités ci-dessus.

Le calcul des positions successives de l'effecteur consiste à calculer pour chaque passe élémentaire une courbe (ou centerline) qui représente la ligne médiane du fil. L'axe de l'effecteur est calculé à partir de la normale à la surface de dépose mais, l'évolution des ses orientations au cours du trajet est affecté par la géométrie de la surface et par les erreurs de calcul dues aux approximations.

En plus de la nature du fil, la trajectoire suivie est à l'origine de plusieurs problèmes de placement, tels que la création d'un pont (mauvaise accroche du fil au substrat dans une forme concave), recouvrement ou jeu entre fils et l'ondulation des fibres induite par des trajectoires dites de "steering". Ainsi, la génération de trajectoire, par le bureau d'étude, reste une opération très délicate malgré les intervalles de tolérances sur la direction des lignes médianes lors de la fabrication. De plus elle doit faire face aux problèmes de l'espacement entre fils (recouvrement ou jeu) et de plissement lors du placement en steering.

Cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux réalisés précédemment sur le procédé de placement de fils secs. Les travaux ont pour but de comprendre le comportement physique du fil au cours du placement. Pour cela, nous proposons un modèle numérique permettant d'étudier le comportement mécanique du fil, à l'échelle des fibres, soumis aux contraintes dynamiques appliquées par l'effecteur. L'intérêt de cette étude numérique est à terme d'identifier les paramètres procédé et matériaux influençant la productivité et la qualité de la dépose. L'aspect dynamique de la sollicitation est justifié par les vitesses de dépose qui sont aujourd'hui de l'ordre du mètre par seconde.

Le glissement relatif entre fibre, la flexion des fibres, leurs interactions et leurs changement d'ondulation sont les mécanismes principaux responsables des grandes déformations résultantes à l'échelle mesoscopique (l'échelle de la mèche) mais aussi à l'échelle macroscopique (l'échelle de la préforme), ce qui procure à la mèche un comportement effectif anisotrope. A l'échelle microscopique, le mécanisme contrôlant le comportement en compression transverse est le développement des chaines de contact entre fibres et leur répartition spatiale, donnant à ce système fibreux un caractère de forte non-linéarité. Rares sont les modèles décrivant la dynamique de tel milieu en traitant la question des interactions entre fibres et leur impact sur la loi de comportement du milieu continu équivalent.

Les chapitres suivants s'attacheront à décrire et proposer des modèles de comportement dynamique et cinématique d'une fibre dans un premier temps. Ensuite le description sera raffinée par l'introduction d'interactions entre les fibres ; c'est à dire les glissements et frottements qui apparaissent lors de l'apparition des contacts.

3.4 Procédés de fabrication des pièces composites par moulage LCM

3.4.1 Introduction

Les technologies de moulage de composites organiques LCM mettent en jeu l'écoulement d'une résine liquide dans des renforts fibreux préalablement secs. Les variantes entre toutes les techniques regroupées sous l'acronyme LCM se distinguent par le mode d'imprégnation et le type d'outillage. La qualité de la pièce fabriquée dépend de la bonne gestion des différents paramètres de la technologie.

3.4.2 Préformage

3.4.2.1 Définition

On appelle préforme le renfort présenté à la forme et aux dimensions exactes de la pièce à réaliser. Le renfort de base peut être soit sous forme de fils coupés de 30 à 50 mm, soit sous forme de fils continus, de mats à fils continus ou de renforts 2D ou 3D déformables.

Le préformage permet d'obtenir avant moulage le squelette en verre de la pièce à mouler. Il assure ainsi un remplissage parfait de l'empreinte du moule, impossible à obtenir sans préforme lorsque la géométrie est complexe. D'autre part, il améliore considérablement la productivité en réduisant le temps du chargement du moule à quelques secondes.

3.4.2.2 Technologie

Mode opératoire et matériel : Il existe actuellement trois grands procédés industriels pour la réalisation de préformes.

Le premier procédé consiste à projeter sur un moule (le poinçon généralement) des fils coupés et du liant. Le moule, appelé écran de préforme, est constitué d'une tôle perforée d'une multitude de trous derrière laquelle on effectue une forte aspiration permettant ainsi aux fils d'épouser la forme du moule. Lorsque la quantité de renfort voulue est déposée, l'ensemble est mis immédiatement en étuve pour faire durcir le liant qui conférera à la préforme la rigidité nécessaire à sa manipulation et à la conservation de la forme. Après durcissement, la préforme est découpée aux dimensions exactes de la pièce, puis stockée en attente du moulage. Cette technique ne permet d'obtenir que des préformes à base de fils coupés.

Le deuxième procédé exploite les caractéristiques spécifiques de formage des renforts fibreux 2D ou 3D et s'apparente au thermoformage. Cette opération est effectuée au moyen d'un moule et d'un contre-moule souple ou rigide. L'utilisation de serre-flans permettant de retenir sélectivement les couches de renfort pendant la phase de mise en forme et limiter les risques de formation de plis. La mise en forme des renforts fibreux est fonction de l'aptitude à la déformation de ces matériaux. Alors que les mats peuvent habiller des moules de forme complexe, les tissus sont généralement plus délicats à mettre en forme.

Le troisième procédé consiste à déposer des fils sur une forme au moyen d'une machine robotisée. Cette technologie étant au cœur de ce travail de thèse, elle sera détaillée au chapitre suivant.

3.4.3 Imprégnation, consolidation, polymérisation

3.4.3.1 Injection sous basse pression : RTM (Resin Transfer Molding)

Ce procédé consiste à remplir sous basse pression l'empreinte d'un moule rigide et fermé contenant des renforts préalablement disposés à l'intérieur du moule avant sa fermeture et son verrouillage, par injection d'une résine liquide de basse viscosité en un ou plusieurs points selon l'importance de la pièce. Une fois la préforme fibreuse imprégnée, la résine est solidifiée et la pièce peut être démoulée.

3.4.3.2 Injection par pression et vide : RTM Light

Variante très proche du RTM classique, elle s'en différencie par la nature des outillages moins structurés (d'où l'appellation « Light ») et donc par les cadences de fabrication. L'alimentation en résine à la périphérie du moule se fait soit par gravité soit par l'intermédiaire d'une petite pompe. Une première partie de la pièce est donc imprégnée sous légère pression puis le mouvement de la résine au sein des renforts est assuré par la dépression appliquée dans le moule.

3.4.3.3 Injection sous vide (Liquid Resin Infusion, LRI)

Variante très proche du RTM Light, elle s'en différencie par la nature du contre moule qui est constitué d'un film plastique ou silicone. La force motrice de la résine est la dépression qui est appliquée sous le film. Cette dernière assure le mouvement de la résine tout en appliquant une compaction du renfort fibreux. La dépression maximale utilisable est d'amplitude 0,1 MPa, ce qui limite les possibilités d'écoulement dans des préformes fortement compactées. Pour aider à la migration de la résine on utilise des matériaux dits distributeurs dont la fonction est de répartir rapidement la résine à la surface des renforts fibreux. La dépression créée sous la bâche permet d'aspirer la résine en la forçant à s'écouler dans l'épaisseur des renforts. Elle permet la fabrication de grandes pièces techniques avec un investissement machine et moule minimum.

3.4.3.4 RFI (Resin Film Infusion)

Variante très proche de la compression, la technologie RFI s'en différencie par le mode de mise en place de la résine avant compression. Pour ce procédé la résine se présente sous la forme de films calibrés en épaisseur que l'on vient disposer en fond de moule et/ou entre des plis de renfort dans le cas de pièces épaisses. Cette technologie est très proche du moulage à l'autoclave.

3.4.3.5 Injection-compression : CRTM

Cette technologie couple l'injection RTM et la compression. Son principe repose sur :

- l'injection sous basse pression d'une résine liquide dans un moule rigide contenant une préforme fibreuse. Le moule est légèrement ouvert (0,1 à 1 mm) ce qui permet à la résine de

s'écouler rapidement à la surface des renforts comme dans le cas d'un milieu distributeur placé à la surface. L'imprégnation des renforts commence à ce stade.

- Dès que la quantité nécessaire de résine est injectée, la compression débute ce qui permet d'imprégner le renfort dans sa totalité.

III

Modélisation et simulation numérique de la dynamique d'un système 1-D telles qu'une fibre, une corde ou une tige

4

État de l'art

4.1 Introduction

La volonté des industriels de maitriser les pièces composites fabriquées à partir des fibres continues, les a incité à développer des modèles permettant de prédire les déformations des fibres durant la mise en forme afin de prédire les propriétés physiques de la pièce finale. Ce type de démarche a été développé à l'origine dans le cas de l'injection de thermoplastiques chargés de fibres courtes pour prédire l'effet de l'orientation finale des fibres après remplissage d'un moule sur le comportement mécanique et la stabilité dimensionnelle de la pièce injectée. Des travaux ont été menés sur la cinématique d'une fibre flexible en suspension dans un fluide tels que Yamamoto and Matsuoka [1993], Wang et al. [2006] et [Battocchio et al., 2012]. Des travaux similaires ont été conduits pour un ensemble de fibres de longueur finie en suspension dans un fluide visqueux, l'ensemble étant soumis à des écoulements de cisaillement [Abisset-Chavanne et al., 2013].

L'évolution de la géométrie spatiale d'une fibre individuelle, après déformation, pendant un procédé de fabrication d'un composite joue un rôle important pour définir les propriétés physiques de la pièce finale : caractéristiques élastiques et à rupture, conductivité électrique et thermique, coefficient de dilatation thermique, pour n'en citer que quelques unes. Elle affecte aussi les paramètres procédé déterminant son coût et son efficacité. Les fibres étant très proches les unes des autres dans les composites, le comportement individuel d'une fibre est affecté par ses voisines. Elles interagissent par le biais des contacts qui se créent et disparaissent en réponse aux sollicitations mécaniques subies.

Notre but premier est de proposer un modèle dynamique 3-D incluant des lois physiques applicables à une fibre et à un ensemble de fibres interagissant par contact.

Dans ce chapitre, les trois principaux modèles numériques 1-D utilisés pour la simulation du comportement mécanique dynamique d'une fibre longue déformable ou d'une chaînette sont présentés en détail : le Modèle Éléments Finis (FEM), le Modèle Éléments Discrets (DEM) et le modèle continu.

4.2 Modèles Éléments Finis

4.2.1 Introduction

La méthode des éléments finis est un outil mathématique permettant de résoudre un problème complexe en le divisant en plusieurs problèmes plus simples. Par exemple le périmètre d'un cercle peut être approché en calculant le périmètre d'un polygone n côtés, pourvu que n soit suffisamment grand. Donc la méthode des éléments finis sert à discrétiser le domaine de continuité en une partition de sous-domaines discrets et définir un ensemble de fonctions d'interpolation permettant d'évaluer un champ continu à partir des éléments discrets.

Dans le cas d'étude des déformations d'un objet continu, les énergies de déformation de l'objet sont déterminées en utilisant la loi physique de constitution du matériau (loi de comportement). Ceci définit les équations de déformation locale à l'objet. Ensuite, la méthode des éléments finis opère une discrétisation de l'objet en sous-éléments sur lesquels les équations s'expriment. Ainsi, la formulation obtenue est dite faible puisque les équations finales ne sont plus locales mais relatives à l'objet (discrétisé) tout entier.

Quelle que soit l'énergie de déformation choisie (loi de comportement linéaire ou non), la résolution d'un système physique par la méthode des éléments finis peut être appliquée à des cas statiques ou dynamiques.

4.2.2 Simulation statique

Une résolution statique cherche simplement l'état d'équilibre du système par la relation

$$\mathbf{K}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{4.1}$$

où $\mathbb{K}(\mathbf{U})$ est la matrice de raideur relative au matériau simulé, $\mathbf{F}$ le bilan de force et $\mathbf{U}$ le vecteur déplacement de l'ensemble des nœuds de l'objet discrétisé. Si les déformations sont non-linéaires par rapport aux déplacements, la matrice $\mathbb{K}$ dépend du vecteur $\mathbf{U}$ des déplacements. Si les déformations sont linéaires par rapport aux déplacements, $\mathbf{K}$ est indépendante du vecteur des déplacements $\mathbf{U}$. La linéarité dépend de la loi de comportement du matériau.

4.2.2.1 Déformations linéaires

Si la loi de comportement choisie induit des déformations linéaires, la matrice de rigidité $\mathbb{K}$ du système statique ne dépend pas du vecteur des déplacements $\mathbf{U}$. Ainsi, le système d'équations obtenu est linéaire et peut donc être résolu par différentes méthodes :

- méthodes directes par inversion de la matrice $\mathbb{K}$, par décomposition LU ou QR.
- méthodes itératives de relaxation (Jacobi ou Gauss-Seidel) ou projection (gradient (bi-conjugué, méthode de Lanczos).

La simulation statique en déformation linéaire produit une matrice de rigidité $\mathbb{K}$ définie et positive. Un système d'équations linéaire possédant de telles propriétés se résoud très facilement par la méthode du gradient conjugué.

4.2.2.2 Déformations non-linéaires

Si la loi de comportement choisie induit des déformations non-linéaires, la matrice de rigidité $\mathbb{K}$ du système statique dépend du vecteur des déplacements $\mathbf{U}$. Ainsi, le système d'équations obtenu est non-linéaire et la résolution peut alors être réalisée par des méthodes itératives comme celle de Newton-Raphson, la méthode de la sécante, la méthode du point fixe, la méthode d'Aitken et la méthode de Broyden.

4.2.3 Simulation dynamique

En simulation dynamique, les équations du mouvement traitent les phénomènes transitoires, les oscillations et les propagations d'ondes :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbb{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbb{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{4.2}$$

où $\mathbf{K}$ est la matrice de raideur relative au matériau simulé, $\mathbf{F} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}$ est le bilan des forces, $\mathbf{U}$ est le vecteur de déplacement de l'ensemble des nœuds de l'objet discrétise, $\mathbf{M}$ est la matrice des masses et $\mathbf{C}$ est la matrice d'amortissement.

Dans un problème dynamique linéaire ou non-linéaire, les équations de la dynamique se traduisent par des systèmes d'équations différentielles en temps. Elles sont résolues pas à pas à l'aide de schémas d'intégration temporels itératifs que l'on peut classer en 2 grandes catégories : les méthodes explicites et implicites. Le temps est discrétisé en incréments représentant un pas de temps donné.

Ainsi, l'équation de la dynamique 4.2 discrétisée en temps, peut s'écrire à l'incrément i :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} + \mathbb{C}\dot{\mathbf{U}}^{(i)} + \mathbb{K}\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{F}^{(i)} \tag{4.3}$$

4.2.3.1 Schémas explicites

Lorsque le déplacement à l'incrément $(i+1)$ peut être directement obtenu en fonction du déplacement, de la vitesse et de l'accélération à l'incrément i, le schéma est dit explicite.

Le schéma d'intégration temporelle définit la manière dont sont calculés le déplacement, la vitesse et l'accélération à chaque incrément de temps.

Quelques exemples de méthodes explicites :

Euler explicite :

$$\mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta t^{(i)}\dot{\mathbf{U}}^{(i)}(t, \mathbf{U}^{(i)}) \tag{4.4}$$

Adams d'ordre 2 :

$$\mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta t^{(i)}\dot{\mathbf{U}}^{(i)}(t, \mathbf{U}^{(i)}) + \frac{(\Delta t^{(i)})^2}{2}\ddot{\mathbf{U}}^{(i)}(t, \mathbf{U}^{(i)}, \dot{\mathbf{U}}^{(i)}) \tag{4.5}$$

Range-Kutta d'ordre 2 :

$$\mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta t^{(i)}\dot{\mathbf{U}}^{(i+\frac{1}{2})} \tag{4.6}$$

avec $\dot{\mathbf{U}}^{(i+\frac{1}{2})} = f(t + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{U}^{(i+\frac{1}{2})})$ et $\mathbf{U}^{(i+\frac{1}{2})} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta t^{(i)}\dot{\mathbf{U}}^{(i)}(t, \mathbf{U}^{(i)})$

Les méthodes d'intégration explicites sont connues pour leur rapidité mais aussi pour leur instabilité ce qui impose des pas de temps extrêmement petits et un rajout des dissipations artificielles pour augmenter la stabilité. Ces méthodes sont plus adaptées à des modes de petites déformations linéaires.

4.2.3.2 Schémas implicites

Dans le cas d'un schéma implicite, le déplacement ne pouvant pas être directement déterminé, il est alors nécessaire de prédire une solution à partir des données connues à l'incrément i.

Quelques exemples de méthodes implicites :

Euler implicite :

$$\mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta t^{(i)}\dot{\mathbf{U}}^{(i+1)}(t + \Delta t, \mathbf{U}^{(i+1)}) \tag{4.7}$$

θ méthode :

$$\mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \theta\Delta t^{(i)}\dot{\mathbf{U}}^{(i+1)}(t + \Delta t, \mathbf{U}^{(i+1)}) + (1-\theta)\dot{\mathbf{U}}^{(i)}(t, \mathbf{U}^{(i)}) \tag{4.8}$$

Newmark :

Les schémas de Newmark sont les plus utilisés [Newmark, 1959], dans lesquels le déplacement et la vitesse sont d'abord développés en séries de Taylor et tronqués au *jerk* (représentant la dérivée de l'accélération) avec deux coefficients de pondération :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(i+1)} &= \mathbf{U}^{(i)} + \Delta t^{(i)}\dot{\mathbf{U}}^{(i)} + \tfrac{(\Delta t^{(i)})^2}{2}\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} + \beta(\Delta t^{(i)})^2\dddot{\mathbf{U}}^{(i)} \\ \dot{\mathbf{U}}^{(i+1)} &= \dot{\mathbf{U}}^{(i)} + \Delta^{(i)}\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} + \gamma(\Delta t^{(i)})^2\dddot{\mathbf{U}}^{(i)} \end{aligned} \tag{4.9}$$

L'accélération étant supposée linéaire sur l'incrément, le *jerk* peut s'écrire sous la forme :

$$\dddot{\mathbf{U}}^{(i)} = \frac{\ddot{\mathbf{U}}^{(i+1)} - \ddot{\mathbf{U}}^{(i)}}{\Delta t^{(i)}} \tag{4.10}$$

Les expressions classiques du déplacement et de la vitesse associées au schéma de Newmark sont alors obtenues en réintégrant l'expression 4.10 dans les équations 4.9 :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(i+1)} &= \mathbf{U}^{(i)} + \Delta t^{(i)}\dot{\mathbf{U}}^{(i)} + \tfrac{(\Delta t^{(i)})^2}{2}[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} + 2\beta\ddot{\mathbf{U}}^{(i+1)}] \\ \dot{\mathbf{U}}^{(i+1)} &= \dot{\mathbf{U}}^{(i)} + \Delta^{(i)}[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} + \gamma\ddot{\mathbf{U}}^{(i+1)}] \end{aligned} \tag{4.11}$$

Le jeu de paramètres (β, γ) définit le schéma d'intégration que l'on souhaite utiliser, la stabilité et la précision en dépendant fortement.

4.2.4 Modèle de poutre à cinématique enrichie

Durville [2008] a proposé un modèle de poutre, en grande déformation utilisant la méthode des éléments finis, enrichi permettant de décrire la cinématique d'une poutre à section déformable selon des modèles de déformations planes. Ce modèle est basé sur l'expression de la position de tout point matériel de la poutre en utilisant un développement limite autour de sa ligne moyenne dans les deux directions transverses. Ce modèle est un extension du modèle de Timoshenko [1921] proposée par Antman [1995], puis développé par Durville [1998] pour étudier la mécanique d'un assemblage de fibres soumis à de grands déplacements.

4.2.4.1 Modèle géométrique

La poutre dans sa configuration matérielle, selon ce modèle, est décrite par un ouvert $\mathbf{\Omega_\xi}$ défini, dans un repère orthonormé $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2})$, par :

$$\mathbf{\Omega_\xi} = \boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3); 0 \leq {\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 \leq R^2, 0 \leq \xi_3 \leq L \tag{4.12}$$

avec R et L respectivement le rayon et la longueur de la poutre.

Chaque point matériel $\boldsymbol{\xi}$ est défini dans chaque configuration par son abscisse curviligne ξ_3 et ses coordonnées (ξ_1, ξ_2) dans section transverse (Fig 4.1). Sa position est exprimée sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{x_0}(\xi_3, t) + \sum_{\alpha=1}^{2} \xi_\alpha \mathbf{g}_\alpha(\xi_3, t) \tag{4.13}$$

où $\mathbf{x_0}(\xi_3, t)$ est la position de la ligne moyenne de la poutre, et le vecteur $\mathbf{g}_\alpha(\xi_3, t)$ peut être vu comme le directeur de la section transverse.

Ce qui donne l'expression du déplacement en tout point de la poutre

$$\mathbf{u}(\xi, t) = \mathbf{u_0}(\xi_3, t) + \sum_{\alpha=1}^{2} \xi_\alpha \mathbf{h}_\alpha(\xi_3, t) \tag{4.14}$$

4.2.4.2 Modèle cinématique

Ce modèle décrit la cinématique de tout point de la poutre par trois principaux champs vectoriels : la translation $\mathbf{u_0}$ du barycentre et les deux champs $\mathbf{h}_\alpha$ qui sont considérés comme des variations des deux vecteurs directeurs de chaque section de la poutre et sont sans dimension. Ce modèle cinématique peut représenter non seulement le cisaillement, mais aussi la déformation plane de la section transverse. Il permet d'utiliser les lois constitutives classiques en 3-D, telle qu'une loi de comportement élastique isotrope réellement tridimensionnelle, formulée dans le cadre des grandes déformations afin de déterminer le tenseur de déformation de Green-Lagrange.

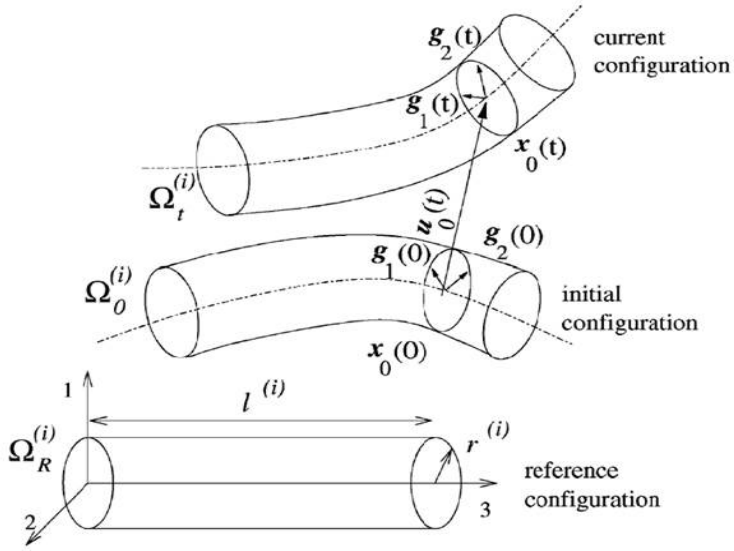


FIGURE 4.1 – Modèle enrichi d'une poutre [Durville, 2005]

4.2.4.3 Déformation

Le caractère tridimensionnel de la déformation d'une poutre au sens de Antman [1995] et Durville [1998] est dû au fait que les sections sont supposées déformables. Le tenseur de déformation de Green-Lagrange est défini à partir du gradient de déformation $\underline{\underline{F}}$ comme suit

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T.\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \tag{4.15}$$

En introduisant l'expression de la position d'un point matériel 4.13 et en adoptant la convention de sommation suivant les indices répétés, l'expression du gradient de déformation s'écrit de la manière suivante:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{g}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha + (\underline{x_0}'_\alpha + \xi_\alpha \underline{g}'_\alpha) \otimes \underline{e}_3 \tag{4.16}$$

Ce qui donne l'expression du tenseur des déformations de Green-Lagrange sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}[(\underline{g}_\alpha.\underline{g}_\beta - \delta_{\alpha\beta})\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + (\underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_3)_{sym}(\underline{g}_\beta.(\underline{x_0}'_\alpha + \xi_\alpha \underline{g}'_\alpha)) + ((\underline{x_0}'_\alpha + \xi_\alpha \underline{g}'_\alpha)^2 - 1)\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3] \tag{4.17}$$

Les différentes quantités cinématiques, associées à ce modèle, ont été rassemblées dans une nouvelle expression du tenseur de déformation sous forme d'un développement polynomial par rapport aux coordonnées transverses ξ_β. Ce tenseur a été décomposé en parties constante, linéaire et quadratique sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_0 + \xi_\alpha \underline{\underline{\epsilon}}_\alpha + \xi_\alpha \xi_\beta \underline{\underline{\epsilon}}_{\alpha\beta} \tag{4.18}$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}_0 &= \tfrac{1}{2}[(\underline{g}_\alpha.\underline{g}_\beta - \delta_{\alpha\beta})\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + \underline{g}_\alpha.\underline{x_0}'(\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_3)_{sym} + (\underline{x_0}'.\underline{x_0}' - 1)\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3] \\ \underline{\underline{\epsilon}}_\alpha &= \tfrac{1}{2}[\underline{g}_\beta.\underline{g}'_\alpha(\underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_3)_{sym} + 2\underline{x_0}'.\underline{g}'_\alpha\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3] \\ \underline{\underline{\epsilon}}_{\alpha\beta} &= \tfrac{1}{2}[\underline{g}'_\alpha.\underline{g}'_\beta\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3] \end{aligned} \tag{4.19}$$

Dans les termes constant et linéaire de l'expression (4.19), on retrouve les modes de déformations du modèle de Timochenko :

- l'allongement de la ligne moyenne : $\frac{1}{2}(\underline{x_0}'.\underline{x_0}' - 1)$
- les modes de cisaillement hors plan de la section : $\frac{1}{2}\underline{g}_\alpha.\underline{x_0}'$
- les modes de torsion : $\underline{x_0}'.\underline{g}'_\alpha$
- les modes de flexion : $\frac{1}{2}\underline{g}_\beta.\underline{g}'_\alpha$ $\beta \neq \alpha$

Et d'autres modes de déformation de section apparaissent dans ce modèle :

- un mode de déformation constant dans la section correspondant à l'effet Poisson : $\frac{1}{2}(\underline{g}_\alpha.\underline{g}_\alpha - 1)$
- les modes de cisaillement constant dans la section : $\frac{1}{2}\underline{g}_1.\underline{g}_1$
- un mode de déformation dépendant des coordonnées de section que l'on peut associé à un effet de pincement (un effet de dilatation et de contraction de la poutre) : $\frac{1}{2}\underline{g}_\alpha.\underline{g}'_1 = \alpha$

4.3 Modèles Éléments Discrets (DEM)

4.3.1 Introduction

Les modèles basées sur la DEM pour une fibre individuelle représentent souvent une fibre flexible par un ensemble de corps rigides connectés entre eux. La flexion et la torsion sont reflétées par la possibilité de mouvement relatif des éléments rigides. Cette partie donne une vue d'ensemble de modèles de fibre flexible, parmi lesquels, le modèle appelé "Digital-Element" [Wang and Sun, 2001], le modèle Masses-Ressorts, le modèle d'une chaîne de billes "Bead Chain Model" [Yamamoto and Matsuoka, 1993, 1994, 1996], le modèle d'une chaîne de sphéroïdes "Needle Chain Model" [Ross and Klingenberg, 1997; Skjetne et al., 1997] et le modèle d'une chaîne de tiges "Rod Chain Model" Wang et al. [2006], qui sont les plus connus. La description détaillée de ces modèles est présenté ci-dessous.

4.3.2 Le modèle "Digital-Element"

Wang and Sun [2001] ont proposé une nouveau concept appelé "Digital-Element", qui est proche de l'élément fini, pour simuler les procédés textiles et déterminer la micro-géométrie du textile fabriqué. Le fil est considéré comme un corps flexible 1-D ayant une section circulaire. Il est numériquement représenté par un ensemble de petites barres cylindriques qui sont connectées par des connecteurs appelés "frictionless pins" (Fig. 4.2)

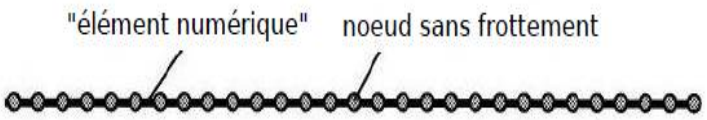


FIGURE 4.2 – Modèle de poutre utilisant une description "Digital-Element" [Wang and Sun, 2001]

Ces courtes barres cylindriques sont définies par "deux noeuds + un élément de poutre numérique". Comme la longueur de cet élément digital est proche de zéro, les connecteurs de la chaine d'éléments numérique deviennent complètement flexibles, tout en imitant les propriétés physiques du fil.

L'élément appelé "Digital-Element" est différent de l'élément fini à cause de sa nature spécifique.

L'analyse conventionnelle, basée sur les éléments finis, utilise des éléments préservant les propriétés physiques du corps discrétisé. La discrétisation permet de décrire le champ de déplacement (ou contrainte, déformation et autre champ mathématique) par quelques fonctions polynomiales localisées. Le processus de discrétisation employé dans le modèle élément fini est mathématique.

Dans la simulation utilisant les "Digital-Element", l'élément ne préserve pas nécessairement les propriétés physiques du corps discrétisé. Par exemple, l'élément utilisé pour représenter le fil ne préserve pas la nature flexible du fil. Les propriétés physiques du fil sont reproduites par le connecteur "Frictionless Pin", reliant deux éléments. Le processus de discrétisation utilisé ici est physique. En général, la taille des "Digital-Element" doit être très petite, ce qui représente la résolution d'une analyse numérique. Sa taille est souvent plus petite que celle d'un élément fini.

Une fois le fil discrétisé, la matrice de raideur de l'élément "Digital-Element" peut être écrite comme:

$$[\mathbb{K}] = \frac{EA}{\Delta L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

où E est le module d'Young du fil, ΔL est la longueur de l'élément et A est l'air de la section transverse.

L'équation d'équilibre dans le référentiel de l'élément est écrite comme suit :

$$[\mathbb{K}]\{\mathbf{U}\} + \frac{1}{2}A\sigma_0\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{F}\} \tag{4.21}$$

où σ_0 est la tension initiale et :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}\} &= \begin{bmatrix} U_{xi} & U_{yi} & U_{zi} & U_{xj} & U_{yj} & U_{zj} \end{bmatrix}^T \\ \{\mathbf{F}\} &= \begin{bmatrix} F_{xi} & F_{yi} & F_{zi} & F_{xj} & F_{yj} & F_{zj} \end{bmatrix}^T \\ \{\mathbf{e}\} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.22}$$

4.3.3 Le modèle Masse-Ressort

Le modèle Masse-Ressort est le modèle le plus simple à utilisé pour la simulation physique des objets déformables.

Dans le domaine du textile, de nombreux travaux sur la mécanique des tissus ont utilisé le modèle Masse-Ressort. Provot [1995] fut le premier à proposer un modèle de tissu basé sur un système masse-ressort. Le tissu est modélisé par des masses ponctuelles et les éléments ressorts sont organisés en treillis permettant de traduire, selon leurs orientations, les phénomènes de tension, de cisaillement et de flexion dans le but de décrire les mécanismes de déformation. Puis, plusieurs études ont repris ce modèle : Teschner et al. [2000]; Bourguignon and Cani [2000]; Legrand [2000].

Dans le domaine d'animation des cheveux individuels, Rosenblum et al. [1991] ont été parmi les premiers à intégrer ce type de modèle dans leurs simulations. Chaque cheveu est représenté comme une chaîne de N particules ayant une masse et connectées par des barres sans masse. Chaque barre est modélisée par un système de Kelvin Voigt : un ressort de raideur k_r travaille en parallèle avec un amortisseur visqueux de coefficient k_v. Chaque particule est représentée par deux ressorts angulaires de raideur k_f, modélisant la rigidité du cheveu en flexion (Fig. 4.3). Chaque particule possède alors trois degrés de liberté, un en translation et deux en rotation. Cette méthode est simple et facile à implémenter, cependant elle ne tient pas compte de certaines caractéristiques importantes du cheveu, telles que sa rigidité en torsion, ou encore le fait qu'il est peu extensible. Pour restreindre les élongations longitudinales du modèle au cours de l'animation, il faut utiliser des ressorts très rigides, ce qui conduit à des équations mal conditionnées, sources d'instabilités numériques. En utilisant des pas de temps très petits pour limiter ces instabilités, les auteurs sont parvenus à simuler environ 1000 cheveux, mais au prix d'un temps de calcul considérable.

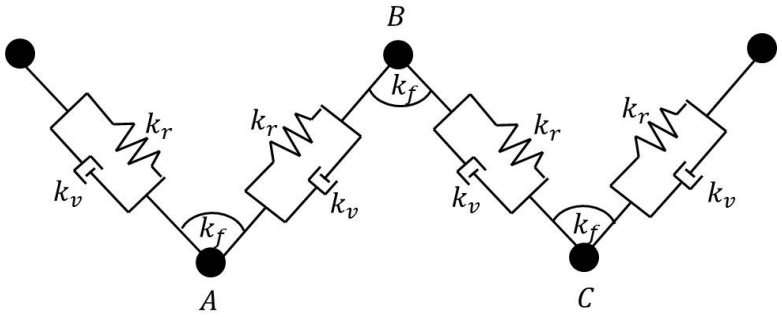


FIGURE 4.3 – Modèle Masse-Ressort utilisé pour la simulation des cheveux. [Rosenblum et al., 1991]

Beaucoup de progrès ont été réalisés depuis dans la formulation des systèmes masse-ressort, en particulier dans le domaine de la simulation de vêtements. Baraff and Witkin [1998] ont montré que les schémas d'intégration implicite sont bien adaptés aux problèmes mettant en jeu de fortes rigidités, car ils garantissent une stabilité inconditionnelle du système, même pour des grands pas de temps.

Ce modèle propose simplement de définir chaque particule par une masse m_i et une position $\mathbf{P_i}(x, y, z)$ $i \in \{1 \dots N\}$.

La dynamique du modèle est alors assurée par le formalisme physique de Newton connu comme

le principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$\sum_j \mathbf{F}_j = m\mathbf{a} \tag{4.23}$$

où $\mathbf{a}$ est l'accélération du point considéré ayant une masse m, $\mathbf{F}_j$ les forces appliquées à ce point à l'instant t. L'application du PFD au système masse-ressort donne :

$$\forall i, \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{F}_j^i = m_i \ddot{\mathbf{P}}_i \tag{4.24}$$

où $\ddot{\mathbf{P}}_i = \frac{d^2\mathbf{P}_i}{dt^2}$ est l'accélération de la particule $\mathbf{P_i}$ et $\mathbf{F}_j^i$ représente les n_i forces appliquées au point $\mathbf{P_i}$. Ainsi, dans le bilan de force de chaque particule, vient s'ajouter, aux forces usuelles (gravité, frottements visqueux...), les forces dues aux ressorts incidents à la particule. Afin de vérifier le principe physique de conservation de l'énergie d'un système, chaque ressort doit vérifier la propriété suivante : la somme des forces qu'il induit est nulle, de même pour les moments (ce qui se traduit par le principe d'action-réaction). Lorsqu'il n'y a que deux acteurs (ressort binaire), cela revient au principe physique d'action/réaction (i.e. les deux forces sont colinéaires, de même intensité mais de sens opposé).

Les ressorts permettent d'apporter au modèle des énergies de déformation qui ont pour objectif de définir le comportement de l'objet. Ainsi, le choix du type de ressort est très important dans l'élaboration d'un modèle masse-ressort. Pour cela, la suite présente une liste non exhaustive de quelques types de ressorts utiles :

4.3.3.1 Ressort d'élongation

Ce type de ressort représentant la barre placée entre deux particules $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ d'une longueur l_0 et d'une raideur k_r exerce deux forces simultanées sur les deux particules voisines $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{F_{A\to B}} = k_r \left(\left| \mathbf{AB} \right| - l_0 \right) . \frac{\mathbf{AB}}{\left| \mathbf{AB} \right|} = -\mathbf{F_{B\to A}} \tag{4.25}$$

4.3.3.2 Ressort d'élongation amorti (système de Kelvin Voigt)

Ce type de ressort donne un comportement visco-élastique à la fibre modélisée, ce qui permet d'amortir la force en fonction de la vitesse des particules avec un coefficient d'amortissement k_v :

$$\mathbf{F_{A\to B}} = k_r \left(\left(\left| \mathbf{AB} \right| - l_0 \right) + k_v \frac{\dot{\mathbf{AB}}.\mathbf{AB}}{\left| \mathbf{AB} \right|} \right) . \frac{\mathbf{AB}}{\left| \mathbf{AB} \right|} = -\mathbf{F_{B\to A}} \tag{4.26}$$

où $\dot{\mathbf{AB}}$ représente la vitesse relative des deux particules $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$: $\dot{\mathbf{AB}} = \dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{A}}$

4.3.3.3 Ressort angulaire

Ce type de ressort est basé sur trois points ponctuels et permet de définir une force relative à l'angle formé par les deux vecteurs adjacents. Ainsi, pour trois points ordonnés $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$, un ressort angulaire de raideur k_f de sommet $\mathbf{B}$ et d'angle au repos α_0 produit les forces suivantes (formule linéarisée [Bourguignon and Cani, 2000]) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F_A} &= -k_f \left[\frac{\mathbf{BA}.\mathbf{BC}}{|\mathbf{BA}||\mathbf{BC}|} - \cos(\alpha_0) \right] \frac{\mathbf{BC}}{|\mathbf{BC}|} \\
\mathbf{F_B} &= k_f \left[\frac{\mathbf{BA}.\mathbf{BC}}{|\mathbf{BA}||\mathbf{BC}|} - \cos(\alpha_0) \right] \left(\frac{\mathbf{BC}}{|\mathbf{BC}|} + \frac{\mathbf{BA}}{|\mathbf{BA}|} \right) \\
\mathbf{F_C} &= -k_f \left[\frac{\mathbf{BA}.\mathbf{BC}}{|\mathbf{BA}||\mathbf{BC}|} - \cos(\alpha_0) \right] \frac{\mathbf{BA}}{|\mathbf{BA}|}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Ce type de ressort permet de contraindre trois points consécutifs à former un angle proche de celui au repos. Ainsi, la force générée est une force de flexion puisque son calcul se base sur l'angle de courbure formé par les trois points.

Le comportement d'un modèle masse-ressort est directement lié à ses déformations, autrement dit aux ressorts employés. Ainsi, la plupart des ressorts décrits ci-dessus ne sont pas suffisants pour obtenir le résultat escompté. Pour cela, de nombreux travaux mettent en jeux des techniques permettant de simuler des comportements donnés en introduisant des termes spécifiques ou des contraintes sur les ressorts.

4.3.4 Le modèle d'une chaîne de billes "Bead Chain Model"

Yamamoto and Matsuoka [1993, 1994] ont créé le modèle d'une chaine de billes pour simuler le mouvement d'une fibre flexible dans écoulement en cisaillement simple sous des hypothèses d'un système infiniment dilué, sans interaction hydrodynamique et un faible nombre de Reynolds. Ils ont supposé qu'une fibre peut être représentée par une série de sphères alignées et reliées les unes aux autres (Fig. 4.4). Ils ont validé leur modèle par la simulation du mouvement d'une fibre flexible par la résolutions des équations de translation et de rotation de chaque sphère. La flexibilité de la fibre est ajustée par la variation du coefficient de flexion de la fibre. Un coefficient de flexion élevé correspond à une fibre rigide. Les résultats de simulation obtenus par ce modèle donnent le mouvement de chaque point de la fibre, mais des efforts de calcul significatifs sont nécessaires dès que la fibre devient très longue.

Le modèle de chaîne de bille représente une fibre par une tige cylindrique conçue à partir de N sphères de rayon a reliées entre elles (Fig. 4.5). La tige/fibre cylindrique est de longueur $2aN$, diamètre $2a$ et de ratio d'aspect N. Chaque paire de sphères voisines peut s'étirer ou se comprimer, fléchir et se tordre par variation de leur distance, et de l'angle de torsion respectivement.

Pour une paire de sphères adjacentes i et j, il y aura une force $\mathbf{F}^s$ exercée sur chaque sphère pour retrouver l'équilibre. Cette force est proportionnelle au changement de la distance d'équilibre r_0 entre deux sphères, où l'actuelle distance est r (Fig. 4.5(a)). La force est exercée comme un simple retour d'effort d'un ressort :

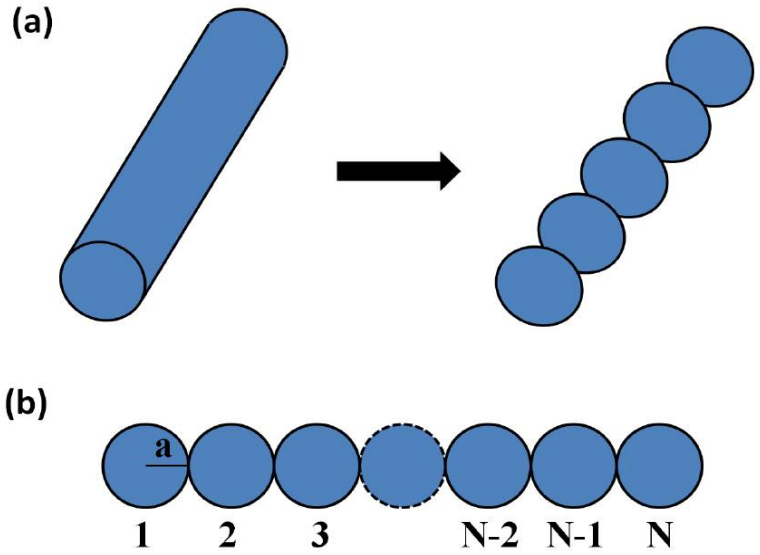


FIGURE 4.4 – (a) Modèle d'une chaine de bille schématisant une fibre ; (b) Représentation d'une fibre par une chaîne de N sphères de rayon a

$$\mathbf{F}^s = -k_s(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \tag{4.28}$$

où k_s est la raideur de traction, exprimée comme $k_s = \frac{\pi a}{2}E$ avec E est le module d'élasticité de la fibre. La direction de la force est orientée du centre de la sphère i au centre de la sphère j, le long du vecteur unitaire $\mathbf{n}_{ij}$ défini comme:

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\left\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right\|} \tag{4.29}$$

où $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{r}_j$ sont les vecteurs positions des centres des sphères i et j.

Le moment de flexion entre sphères est une fonction linéaire de l'angle de liaison θ_b entre deux sphères (Fig. 4.5(b)). Dans le cas où, il y a changement d'angle de liaison par rapport à celui d'équilibre θ_{b0}, un couple de flexion T^b sera appliqué sur chaque sphère pour les ramener à l'état d'équilibre. Le couple est écrit comme suit:

$$T^b = -k_b(\theta_b - \theta_{b0}) \tag{4.30}$$

où k_b est la raideur en flexion, exprimée comme $k_b = \frac{\pi a^3}{8}E$. La direction du couple est autour du vecteur qui est perpendiculaire à $\mathbf{n}_{ij}$.

Le couple de torsion est une fonction linéaire de l'angle de torsion θ_t (Fig. 4.5(c)). Le couple de torsion est appliqué sur chaque sphère, pour qu'elles retrouvent leur état d'équilibre, si l'angle de torsion est différent de celui d'équilibre θ_{t0}. Le couple est défini par l'équation suivante:

$$T^t = -k_t(\theta_t - \theta_{t0}) \tag{4.31}$$

où k_t est la raideur en torsion, exprimée comme $k_t = \frac{\pi a^3}{4}G$ avec G est le module de cisaillement de la fibre.

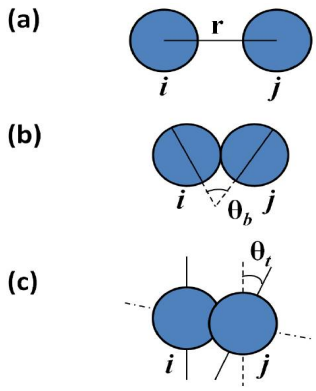


FIGURE 4.5 – Les déformations du modèle "chaîne de bille" d'une fibre: (a) traction/compression, (b) flexion et (c) torsion

Les mouvements de translation $(\mathbf{v}_i)$ et de rotation $(\boldsymbol{\omega}_i)$ sont écrits comme suit :

$$m\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum \mathbf{F}_i^s + \sum \mathbf{f}_{ij} \tag{4.32}$$

$$\frac{2}{5}ma^2\frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \sum \mathbf{T}_i^b + \sum \mathbf{T}_i^t + \sum \mathbf{f}_{ij} \times a\mathbf{n}_{ij} \tag{4.33}$$

où m est la masse de chaque sphère, $\mathbf{f}_{ij}$ la force tangentielle due au frottement entre deux sphères, que la sphère i applique sur la sphère j au pont de contact et perpendiculaire à $\mathbf{n}_{ij}$. L'addition des termes dans les équations (4.32) et (4.33), permet la considération des effets du voisinage sur les sphères des deux cotés. En imposant la condition de non glissement entre deux sphères, la vitesse de translation de chacune au point de contact est la même, ce qui donne l'équation suivante :

$$\mathbf{v}_i + a\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{v}_j + a\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{n}_{ji} \tag{4.34}$$

En différenciant l'équation (4.34) Yamamoto and Matsuoka [1993, 1994] ont obtenu la forme suivante:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + a\frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} + a\boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{n}_{ij}) = \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} + a\frac{d\boldsymbol{\omega}_j}{dt} + a\boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{n}_{ji}) \tag{4.35}$$

Par conséquent, la simulation utilisant le modèle d'une chaîne de billes est effectuée suivant la procédure:

1. Une configuration initiale est donnée à chaque sphère et les propriétés et paramètres environnement sont fixés.

2. En se basant sur les conditions initiales, la force de traction/compression, le couple de flexion et le couple de torsion sont calculés par les équations (4.28), (4.30) et (4.31).

3. La force tangentielle de frottement est résolue par les équations (4.32), (4.33) et (4.35).

4. La vitesse de translation et la vitesse angulaire au pas de temps suivant $t + \Delta t$ sont mises à jour par les équations (4.32) et (4.33) avec la technique des différences finies.

5. La position au pas de temps suivant $t + \Delta t$ est mise à jour en utilisant le schéma suivant:

$$\mathbf{r}_i\left(t+\Delta t\right) = \mathbf{r}_i\left(t\right) + \Delta t \mathbf{v}_i\left(t\right) + \frac{1}{2}\left(\Delta t\right)^2 \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \tag{4.36}$$

$$\boldsymbol{\theta}_i\left(t+\Delta t\right) = \boldsymbol{\theta}_i\left(t\right) + \Delta t \boldsymbol{\omega}_i\left(t\right) + \frac{1}{2}\left(\Delta t\right)^2 \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} \tag{4.37}$$

6. Le mouvement de l'ensemble des sphères , par conséquent celui de la fibre, peut être décrit par la répétition des étapes 2 à 6.

4.3.5 Le modèle d'une chaîne de sphéroïdes "Needle Chain Model"

Skjetne et al. [1997] ont simulé la dynamique d'une fibre dans un écoulement de cisaillement en représentant la fibre par une série de sphéroïdes rigides connectées par des liaisons rotules (Fig. 4.6). Le mouvement de la fibre est déterminé par la résolution des équations de translation et de rotation de chaque corps rigide. Le modèle est similaire à celui proposé par Yamamoto and Matsuoka [1993, 1994], excepté le fait que les articulations sont modélisées par une liaison rotule, où la résistance peut être variée pour adapter le modèle soit à une fibre rigide soit à une fibre flexible. Ce modèle est exempt de contraintes itératives pour maintenir la connectivité des éléments de la fibre, et peut modéliser des fibres flexibles avec de grands rapports d'aspect avec un nombre relativement faible de sphéroïdes, ce qui aidera à réduire significativement le temps de calcul. Malheureusement, la qualité du modèle diminue en augmentant la valeur de ε qui contrôle la séparation entre les sphéroïdes.

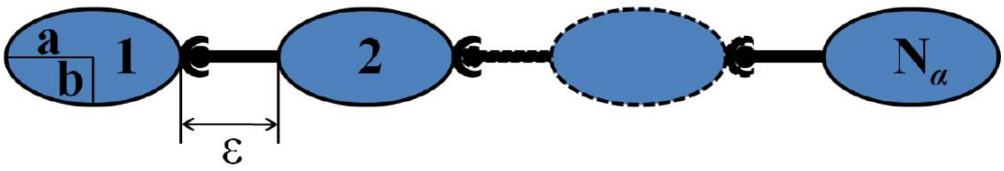


FIGURE 4.6 – La fibre est représentée par des corps rigides articulés. a et b sont, respectivement, les axes majeur et mineur du sphéroïde. Le paramètre ϵ contrôle la séparation entre les sphéroïdes ($\varepsilon = 0.001b$) [Ross and Klingenberg, 1997]

Dans le modèle développé par Ross and Klingenberg [1997] et Skjetne et al. [1997], des matrices de connectivité sont employées pour décrire comment les sphéroïdes sont connectées par des liaisons de type rotule. La fibre est composée de N_α corps rigides. Les matrices sont construites par la numérotation des corps et des articulations. Les numéros des corps commencent à 0, mais il est réservé au corps fixé au repère de référence et la liaison 1 est entre les corps 0 et 1. L'extrémité de la fibre est le corps 1. La numérotation des autres corps est indiquée dans la Figure 4.7. Les auteurs ont converti les informations d'index en un système graphique, qui se compose de points, appelés sommets et des lignes reliant les sommets, appelés arcs. Les sommets $(s_1, ..., s_{N_\alpha})$ représentent les corps et les arcs $(u_1, ..., u_{N_\alpha})$ représentent les articulations. Deux fonctions entières, $i^{(+)\alpha}(a)$ et $i^{(-)\alpha}(a)$ sont définies pour relier les indices des sommets à ceux des arcs. Pour un nombre d'arc $a = 1, ..., N_\alpha$, $i^{(+)\alpha}(a)$ est l'indice du sommet à partir duquel l'arc u_α commence, et $i^{(-)\alpha}(a)$ est l'indice du sommet vers lequel

u_α pointe. Ensuite les matrices de connectivité $\mathbf{S}^\alpha$ et du système graphique $\mathbf{T}^\alpha$ sont définies en terme des fonctions entières comme:

$$S_{ia}^{\alpha} = \begin{cases} +1 & \text{si } i = i^{(+)\alpha}(a) \\ -1 & \text{si } i = i^{(-)\alpha}(a) \text{ où } i, a = 1, ..., N_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.38}$$

et

$$T_{ia}^{\alpha} = \begin{cases} +1 & \text{si } u_a \text{ appartient au chemin entre } s_0 \text{ et } s_i \text{ est orienté vers } s_0 \\ -1 & \text{si } u_a \text{ appartient au chemin entre } s_0 \text{ et } s_i \text{ est orienté depuis } s_0 \\ 0 & \text{si } u_a \text{ n'appartient pas au chemin entre } s_0 \text{ et } s_i \\ & i, a = 1, ..., N_\alpha \end{cases} \tag{4.39}$$

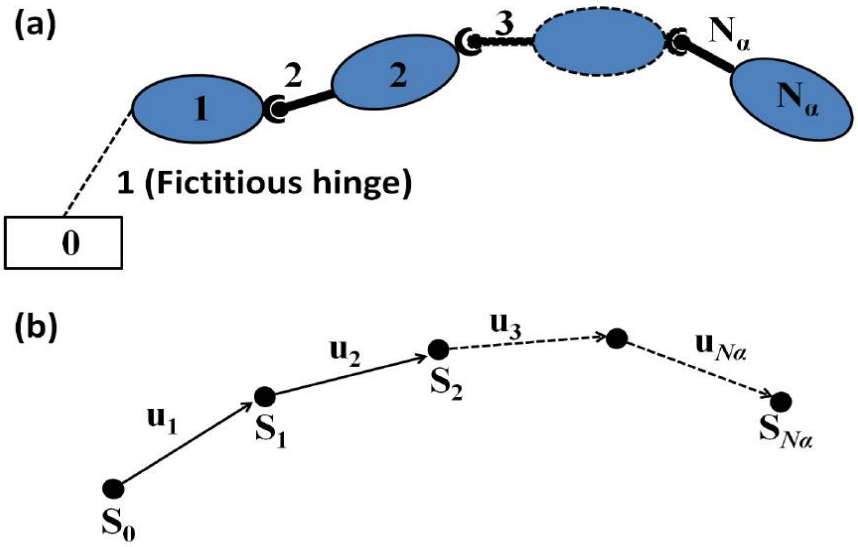


FIGURE 4.7 – (a) Illustration du corps et de la numérotation, d'indice d'articulation, utilisée dans la construction des matrices de connectivité ; (b) système graphique pour représenter (a) [Ross and Klingenberg, 1997]

Pour la méthode de numérotation utilisée dans la Figure 4.7, les matrices de connectivité sont données par Ross and Klingenberg [1997]; Skjetne et al. [1997] comme suit :

$$\mathbb{S}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

$$\mathbb{T}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ & & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

Les matrices ci-dessus ont la propriété suivante [Ross and Klingenberg, 1997; Skjetne et al., 1997] :

$$\mathbb{T}^{\alpha}\mathbb{S}^{\alpha} = \mathbb{S}^{\alpha}\mathbb{T}^{\alpha} = \mathbb{I}^{\alpha} \tag{4.42}$$

où $\mathbb{I}^{\alpha}$ est une matrice identité $(N_{\alpha} \times N_{\alpha})$.

Dans le but d'établir une relation entre les positions des sphéroides, un ensemble de vecteurs de connectivité, $\mathbf{c}^{\alpha}_{ia}(i, a = 1, 2, \dots, N_{\alpha})$, est introduit par les auteurs. Les vecteurs sont orientés depuis le centre de masse du sphéroïde i vers l'articulation a, comme montré dans la Figure 4.8. Pour une liaison a non connecté à un sphéroïde, ce vecteur est un vecteur nul. La position du sphéroïde est reliée à ce vecteur de la manière suivante :

$$\begin{gathered} \left(\mathbf{r}_{i^{(-)\alpha}(a)} + \mathbf{c}_{i^{(-)\alpha}(a)}\right) - \left(\mathbf{r}_{i^{(+)\alpha}(a)} + \mathbf{c}_{i^{(+)\alpha}(a)}\right) = 0 \\ a = 1, 2, \dots, N_{\alpha} \end{gathered} \tag{4.43}$$

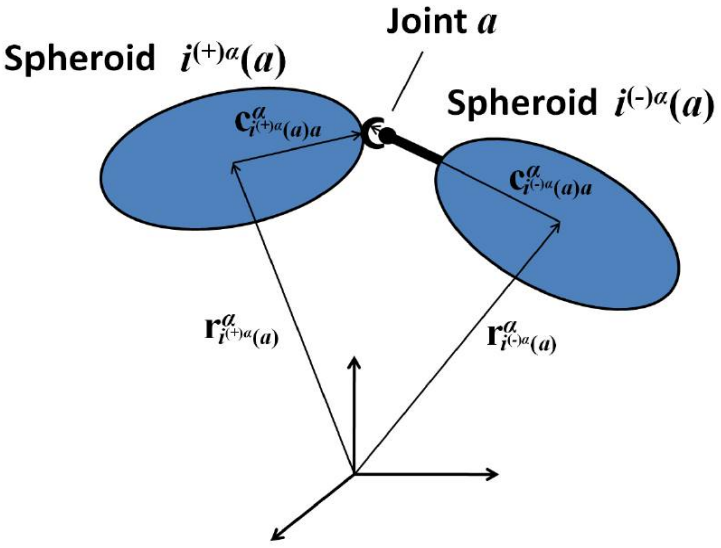


FIGURE 4.8 – (a) Illustration des vecteurs de connectivités du modèle cinématique [Ross and Klingenberg, 1997]

Les N_{α} équations ci-dessus peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante :

$$(\mathbb{S}^{\alpha})^{T}\mathbf{r}^{\alpha} + (\mathbb{C}^{\alpha})^{T}\mathbf{1}_{N_{\alpha}} = \mathbf{0} \tag{4.44}$$

où $\mathbb{S}^{\alpha}$ est la matrice de connectivité définie par l'équation (4.40) où l'exposant ^{T} dénote la transposée, $\mathbf{r}^{\alpha} = \left[\mathbf{r}^{\alpha}_{1}, \ \mathbf{r}^{\alpha}_{2}, \ \dots, \ \mathbf{r}^{\alpha}_{N_{\alpha}}\right]^{T}$, $\mathbf{1}_{N_{\alpha}}$ est un vecteur unitaire $N_{\alpha} \times 1$, et $\mathbb{C}^{\alpha}$ est une matrice $N_{\alpha} \times N_{\alpha}$ avec les composants $(\mathbb{C}^{\alpha})_{ia} = (\mathbb{S}^{\alpha})_{ia}\mathbf{c}^{\alpha}_{ia}$. Multipliant l'équation (4.44) par $\mathbb{T}^{\alpha}$ et utilisant les

propriétés données par l'équation (4.42), les positions des sphéroïdes peuvent être exprimées en terme des vecteurs de connectivité comme suit :

$$\mathbf{r}^{\alpha} = -(\mathbb{C}^{\alpha}\mathbb{T}^{\alpha})^{T}\mathbf{1}_{N_{\alpha}} \tag{4.45}$$

ou dans une forme indicielle :

$$\mathbf{r}_{i}^{\alpha} = \sum_{j=1}^{N_{\alpha}} \mathbf{d}_{ji}^{\alpha} \tag{4.46}$$

où $\mathbf{d}_{ji}^{\alpha} = -(\mathbb{C}^{\alpha}\mathbb{T}^{\alpha})_{ji}$ et le centre de masse $\mathbf{R}_{i}^{\alpha}$ d'une sphéroïde i relative au centre de masse $\mathbf{r}_{C}^{\alpha}$ de la fibre peut être exprimé comme :

$$\mathbf{R}_{i}^{\alpha} = \mathbf{r}_{i}^{\alpha} - \mathbf{r}_{C}^{\alpha} \tag{4.47}$$

L'intégration de l'équation (4.46) dans l'équation (4.47) donne l'équation suivante :

$$\mathbf{R}^{\alpha} = -(\mathbb{C}^{\alpha}\mathbb{T}^{\alpha}\nu^{\alpha})^{T}\mathbf{1}_{N_{\alpha}} \tag{4.48}$$

où $\nu_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{N_{\alpha}}$, ou dans la forme indicielle :

$$\mathbf{R}_{i}^{\alpha} = \sum_{j=1}^{N_{\alpha}} \mathbf{b}_{ji}^{\alpha} \tag{4.49}$$

où $\mathbf{b}_{ji}^{\alpha} = -(\mathbb{C}^{\alpha}\mathbb{T}^{\alpha}\nu^{\alpha})_{ji}$. Substituant l'équation (4.49) dans l'équation (4.47),

$$\mathbf{r}_{i}^{\alpha} = \sum_{j=1}^{N_{\alpha}} \mathbf{b}_{ji}^{\alpha} + \mathbf{r}_{C}^{\alpha} \tag{4.50}$$

La différentiation de l'équation (4.50) donne la vitesse de translation du sphéroïde i comme suit :

$$\dot{\mathbf{r}}_{i}^{\alpha} = \sum_{j=1}^{N_{\alpha}} \boldsymbol{\omega}_{j}^{\alpha} \times \mathbf{b}_{ji}^{\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_{C}^{\alpha} \tag{4.51}$$

où $\boldsymbol{\omega}_{j}^{\alpha}$ est la vitesse angulaire du sphéroïde j, qui est reliée aux vitesses angulaires relatives des sphéroïdes $j-1$ à travers la matrice de connectivité $\mathbb{T}^{\alpha}$,

$$\boldsymbol{\omega}_{j}^{\alpha} = -\sum_{a=1}^{N_{\alpha}} \mathbb{T}_{aj}^{\alpha}\boldsymbol{\Omega}_{a}^{\alpha} \tag{4.52}$$

où $\boldsymbol{\Omega}_{a}^{\alpha}$ est la vitesse angulaire du sphéroïde $i^{(-)\alpha}(a)$ relative à celle du sphéroïde $i^{(+)\alpha}(a)$.

Le mouvement d'un sphéroïde est décrit par la seconde loi de Newton et la loi de la conservation du moment cinétique. Le diagramme de corps libre d'un sphéroïde i est donné dans la Figure 4.9, où $\mathbf{F}_{i}^{\alpha}$ est la résultante des forces externes appliquées au travers du centre de masse, $\mathbf{M}_{i}^{\alpha}$ est le moment résultant externe, $\mathbf{X}_{b}^{(c)\alpha}$ et $\mathbf{X}_{c}^{(c)\alpha}$ sont les forces de contraintes internes appliquées à travers les liaisons b et c respectivement et $\mathbf{Y}_{b}^{(c)\alpha}$ et $\mathbf{Y}_{c}^{(c)\alpha}$ sont les moments résultants internes appliqués au niveau

des liaisons b et c respectivement. La seconde loi de Newton prend la forme suivante [Ross and Klingenberg, 1997]:

$$m_i^\alpha \ddot{\mathbf{r}}_i^\alpha = \mathbf{F}_i^\alpha + \sum_{a=1}^{N_\alpha} \mathbf{S}_{ia}^\alpha \mathbf{X}_a^{(c)\alpha} \tag{4.53}$$

et la loi de conservation du moment s'écrit :

$$\dot{\mathbf{H}}_i^\alpha = \mathbf{M}_i^\alpha + \sum_{a=1}^{N_\alpha} \mathbf{S}_{ia}^\alpha (\mathbf{c}_{ia}^\alpha \times \mathbf{X}_a^{(c)\alpha} + \mathbf{Y}_a^\alpha) \tag{4.54}$$

où m_i^α est la masse, $\ddot{\mathbf{r}}_i^\alpha$ est l'accélération linéaire, et $\dot{\mathbf{H}}_i^\alpha$ est le taux de changement, dans le temps, du moment angulaire du sphéroïde i.

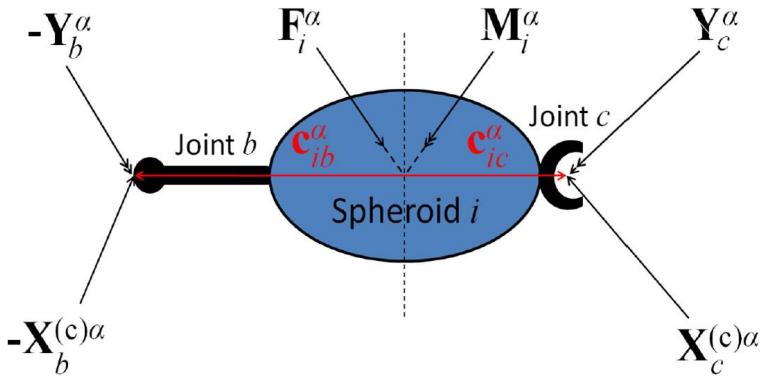


FIGURE 4.9 – Diagramme de corps libre d'un sphéroïde i appartenant à une fibre α [Ross and Klingenberg, 1997]

La résultante de l'ensemble des forces externes $\mathbf{F}_i^\alpha$ peut être une combinaison des forces hydrodynamiques $\mathbf{F}_i^{(h)\alpha}$, forces de contact entre sphéroïdes $\mathbf{F}_i^{(c)\alpha}$ et des forces externes appliquées au corps $\mathbf{F}_i^{(e)\alpha}$ de type gravité. Le moment résultant externe peut être la combinaison des moments engendrés par les forces citées ci-dessus sauf les forces type gravité, qui sont appliquées au centre de gravité des corps.

Les moments résultants internes $\mathbf{Y}_a^\alpha$ dans les articulations contiennent les moments de flexion $\mathbf{Y}_a^{(B)\alpha}$ et les moments de torsion $\mathbf{Y}_a^{(T)\alpha}$. Le moment de flexion est supposé proportionnel à la différence entre l'angle de flexion θ_a^α et sa valeur d'équilibre $\theta_a^{(0)\alpha}$,

$$\mathbf{Y}_a^{(B)\alpha} = -k_B^\alpha (\theta_a^\alpha - \theta_a^{(0)\alpha}) \mathbf{n}_{pb} \tag{4.55}$$

où $\mathbf{n}_{pb}$ est le vecteur unitaire normal au plan de flexion et défini comme:

$$\mathbf{n}_{pb} = \frac{\mathbf{c}_{i^{(-)\alpha}(a)a}^\alpha \times \mathbf{c}_{i^{(+)\alpha}(a)a}^\alpha}{\left\| \mathbf{c}_{i^{(-)\alpha}(a)a}^\alpha \times \mathbf{c}_{i^{(+)\alpha}(a)a}^\alpha \right\|} \tag{4.56}$$

et θ_a^α est donnée par

$$\cos\theta_a^\alpha = \frac{\mathbf{c}^\alpha_{i^{(-)\alpha}(a)a}.\mathbf{c}^\alpha_{i^{(+)\alpha}(a)a}}{\left\|\mathbf{c}^\alpha_{i^{(-)\alpha}(a)a}\right\|\left\|\mathbf{c}^\alpha_{i^{(+)\alpha}(a)a}\right\|} \tag{4.57}$$

La raideur en flexion est exprimée en fonction du module d'Young E et le moment d'inertie I comme suit :

$$k_B^\alpha = \frac{EI}{a} \tag{4.58}$$

D'une manière similaire, le moment de torsion $\mathbf{Y}_a^{(T)\alpha}$ est supposé proportionnel à la différence entre l'angle de torsion Φ_a^α et sa valeur d'équilibre $\Phi_a^{(0)\alpha}$,

$$\mathbf{Y}_a^{(T)\alpha} = -k_T^\alpha(\Phi^\alpha - \Phi^{(0)\alpha})\frac{\mathbf{c}^\alpha_{i^{(-)\alpha}(a)a}}{\left\|\mathbf{c}^\alpha_{i^{(-)\alpha}(a)a}\right\|} \tag{4.59}$$

L'angle de torsion est écrit en fonction du vecteur $\mathbf{u}_i^\alpha$, qui a pour origine le centre de masse puis orienté perpendiculairement au vecteur $\mathbf{c}_{ia}^\alpha$. Son expression est la suivante :

$$\cos\Phi_a^\alpha = \frac{\mathbf{u}^\alpha_{i^{(-)\alpha}(a)a}.\mathbf{u}'_a}{\left\|\mathbf{u}'_a\right\|} \tag{4.60}$$

où $\mathbf{u}'_a = \mathbf{u}^\alpha_{i^{(+)\alpha}(a)a} - \mathbf{u}^\alpha_{i^{(-)\alpha}(a)a}.\mathbf{c}_{i^{(-)\alpha}(a)a}$. La raideur du comportement en torsion est exprimée en fonction du module de cisaillement G et le moment d'inertie I comme suit

$$k_T^\alpha = \frac{GI}{a} \tag{4.61}$$

Avec toutes les forces et moments définis précédemment et en ne tenant pas compte de l'inertie d'une particule, les équations (4.53) et (4.54) se réduisent à

$$\mathbf{F}_i^\alpha + \sum_{a=1}^{N_\alpha}\mathbb{S}_{ia}^\alpha\mathbf{X}_a^{(c)\alpha} = 0 \tag{4.62}$$

et

$$\mathbf{M}_i^\alpha + \sum_{a=1}^{N_\alpha}\mathbb{S}_{ia}^\alpha(\mathbf{c}_{ia}^\alpha \times \mathbf{X}_a^{(c)\alpha} + \mathbf{Y}_a^\alpha) = 0 \tag{4.63}$$

La combinaison des équations (4.51), (4.62) et (4.63) et les expressions des forces et moments externes permettent l'obtention du comportement dynamique de la fibre flexible.

4.3.6 Le modèle d'une chaîne de tiges "Rod-chain Model"

Wang et al. [2006] ont optimisé les simulations numériques du mouvement d'une fibre individuelle et flexible dans un fluide Newtonien en utilisant le modèle de tiges enchaînées. La fibre est représentée par une série de tiges rigides, dont chacune est une chaîne linéaire de sphères rigides (Fig. 4.10). La longueur de chaque tige peut être ajustée par la variation du nombre de sphères contenues dans le but de refléter la flexibilité de la fibre. Donc, un ensemble de tiges courtes apporte une très grande

flexibilité à la fibre. La connectivité des éléments de la fibre est maintenue par des forces de contraintes internes au niveau des liaisons des tiges. Ce modèle est similaire au modèle des sphéroïdes enchaînées, mais il adopte une manière différente à déterminer les forces de contraintes internes. Deux hypothèses sont associées à ce modèle :

1. les interactions entre tiges ne sont pas prises en compte ;
2. la fibre est inextensible.

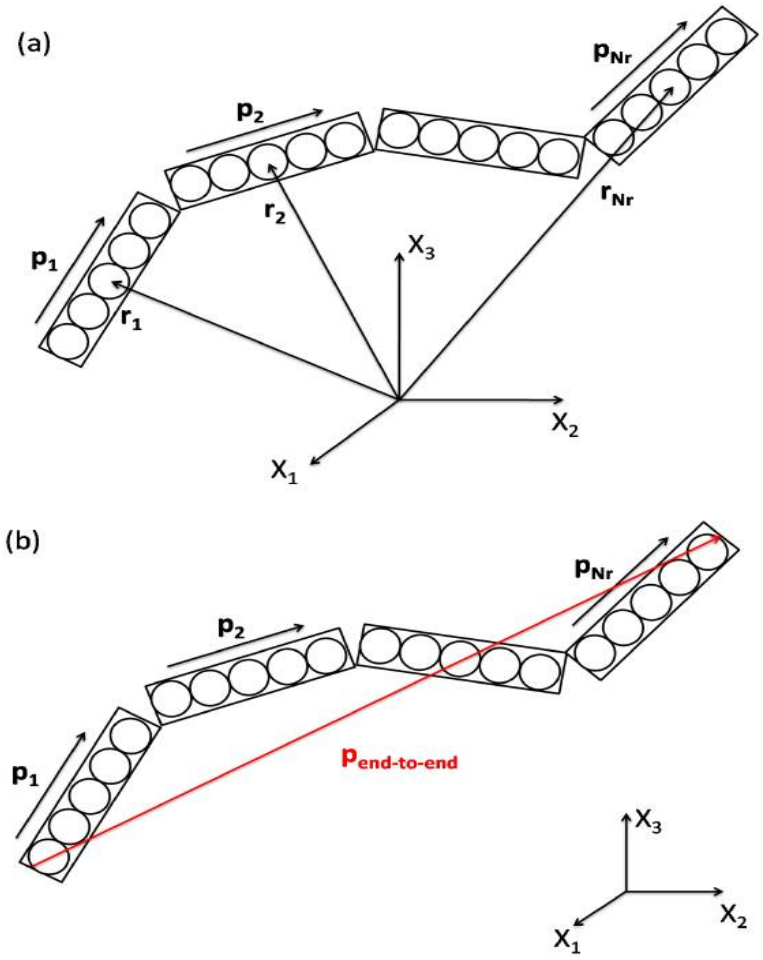


FIGURE 4.10 – (a) Schéma du modèle tiges-enchaînées, (b) vecteur reliant les deux extrémités de la fibre [Wang et al., 2006]

Une fibre est représentée comme une chaîne de N_r tiges rigides, où la tige est composée de N sphères. Chaque tige a un vecteur unitaire directeur indiquant son orientation, où comme l'orientation de la fibre est déterminée par le vecteur unitaire extrémité-à-extrémité $\mathbf{p}_{end-to-tend}$ comme montré sur la Figure 4.10.

Application d'efforts $\mathbf{F}^h$ et moments $\mathbf{T}^h$ externes sur une fibre flexible, de type hydrodynamique ou contact, engendre des forces et des moments résistants internes de la fibre (Fig. 4.11).

Le moment de flexion entre deux tiges voisines est proportionnel à la différence entre l'angle de flexion à un instant t et l'angle d'équilibre Wang et al. [2006], est donné par

$$\mathbf{T}_i^b = -k^b(\theta_i^b - \theta_{eq}^b)\mathbf{n}_i^b, \quad i = 2 \sim N_r \tag{4.64}$$

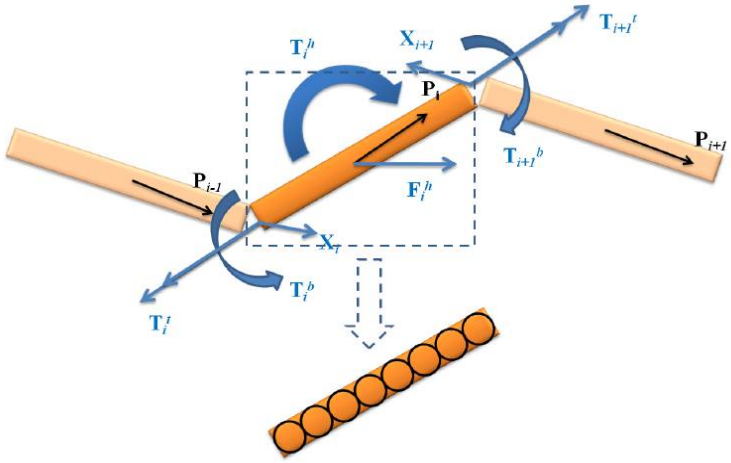


FIGURE 4.11 – Les forces et moments externes et internes exercés sur une tige i

et le moment de flexion aux extrémités de la fibre est

$$\mathbf{T}_1^b = \mathbf{T}_{N_r+1}^b = 0 \tag{4.65}$$

où $\mathbf{n}_i^b = \frac{\mathbf{p}_{i-1}\times\mathbf{p}_i}{\left\|\mathbf{p}_{i-1}\times\mathbf{p}_i\right\|}$ est le vecteur unitaire normal au plan de flexion de la tige i, l'angle de flexion est $\theta^b = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{p}_{i-1}\times\mathbf{p}_i}{\left\|\mathbf{p}_{i-1}\times\mathbf{p}_i\right\|}\right)$. La raideur en flexion est $k^b = \frac{EI^b}{2Na}$ où $I^b = \frac{\pi a^4}{4}$.

Le moment de torsion entre deux tiges voisines est défini comme suit :

$$\mathbf{T}_i^t = -k^b(\theta_i^t - \theta_{eq}^t)\mathbf{p}_{i+1}, \quad i = 2 \sim N_r \tag{4.66}$$

Pour déterminer l'angle de torsion, le vecteur unitaire $\mathbf{u}_i$ du corps-fixe perpendiculaire à la tige i est utilisé,$\theta^t = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}_{i-1}\times\mathbf{u}_i^{'}}{\left\|\mathbf{u}_{i-1}\times\mathbf{u}_i^{'}\right\|}\right)$, où $\mathbf{u}_i^{'} = \mathbf{u}_{i-1} - (\mathbf{u}_{i-1}.\mathbf{p}_i)\mathbf{p}_i$. La raideur en torsion $k^t = \frac{GI^t}{2a}$ où $I^t = \frac{\pi a^4}{2}$.

Les forces de contraintes internes $\mathbf{X}$ (c'est à dire les forces appliquées sur une portion de longueur de la fibre par le reste de la fibre) peuvent être obtenues directement. Pour une fibre avec N_r tiges, il y a $N_r + 1$ extrémités. Soit $\mathbf{X}_0$ et $\mathbf{X}_{N_r}$ les forces associées aux contraintes aux extrémités de la fibre, et $\mathbf{X}_i$ $(i = 1 \sim N_r - 1)$ sont les forces associées aux contraintes internes. Elles peuvent être déterminées selon la méthode suivante Wang et al. [2006].

Le mouvement d'une tige i satisfait l'équation :

$$\pi a^2 l\rho\frac{d\boldsymbol{\nu}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^h + \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1}, \quad i = 1 \sim N_r. \tag{4.67}$$

où ρ est la densité de la fibre.

Le bilan du moment angulaire est de la forme suivante :

$$\pi a^2 l\rho\frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \mathbf{T}_i^h + \mathbf{T}_i^b - \mathbf{T}_{i+1}^b + \mathbf{T}_i^t - \mathbf{T}_{i+1}^t - N\mathbf{p}_i \times (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1}), \quad i = 1 \sim N_r. \tag{4.68}$$

4.3.7 Modèle "Chaîne de corps rigides articulés"

Plusieurs études portant sur la simulation des cheveux individuels utilisant la dynamique de chaînes de corps articulés ont été menées [Chang et al., 2002; Hadap and Magnenat-Thalmann, 2001]. Plus complexe que l'approche précédente, cette approche modélise aussi plus fidèlement la physique des cheveux, en ce sens que les contraintes internes au cheveu sont traitées de manière bilatérale (la partie supérieure du cheveu a une influence sur la partie inférieure, et réciproquement). De plus, les systèmes de chaînes articulées sont bien connus dans le domaine de la robotique, et des algorithmes efficaces ont déjà été mis au point depuis un certain temps pour simuler la dynamique de tels systèmes [Featherstone, 1987].

Chaque cheveu est représenté à l'aide d'une chaîne articulée ouverte, paramétrée par ses coordonnées réduites (ou généralisées), afin de ne conserver que les degrés de liberté correspondant à la courbure et à la torsion (l'étirement et la compression sont interdits). Par conséquent, cela revient à modéliser chaque cheveu par un ensemble de segments rigides connectés entre eux par des liaisons sphériques, comportant chacune trois degrés de liberté (voir Figure 4.12).

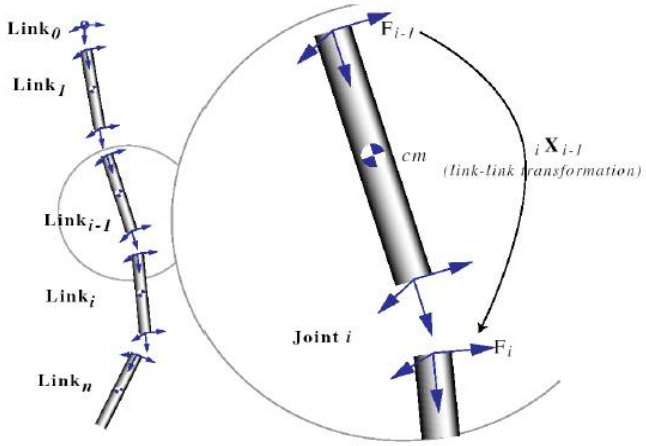


FIGURE 4.12 – Modèle d'une fibre selon Hadap and Magnenat-Thalmann [2001]

La dynamique du système est simulée par l'algorithme de Featherstone [1987], avec une complexité linéaire en nombre de segments.

4.4 Modèles Continus : Modèle de *Cosserat*

4.4.1 Introduction

Ce type de modèle a besoin de choisir à la fois le formalisme physique, qui sera utilisé pour décrire les courbures, et l'énergie de déformation, qui dicte le comportement en 3-D. Dans la littérature, nous trouvons des travaux basés sur la mécanique Newtonienne, d'autres basés sur le formalisme de Lagrange ainsi que de nouveaux modèles basés sur la théorie des corps déformables de *Cosserat* avec ou sans les hypothèse de *Kirchhoff*. Dans cette partie nous détaillons le modèle de fibre basé sur la théorie des corps déformables de *Cosserat* avec les hypothèses de *Kirchhoff*.

Au début du XX^e siècle, les frères *Cosserat* ont proposé une description mathématique des tiges à partir de courbes géométriques en 3D et de repères adaptés à ces courbes. Pai [2002] a été le premier à utiliser le modèle des tiges de *Cosserat* pour la simulation quasi-statique d'un fil chirurgical. Dans les travaux de Pai [2002], le modèle est une tige de *Cosserat* avec les hypothèses de *Kirchhoff* ; autrement dit, la tige est inextensible, n'admet pas de cisaillement et sa loi de comportement est linéaire. En résolvant les équations de *Kirchhoff* statiques de façon itérative, il remarque une analogie entre la cinématique spatiale des tiges de *Kirchhoff* et la dynamique des chaînes articulées.

Le modèle général de tige de *Cosserat*, avant de le restreindre aux hypothèses de *Kirchhoff*, est présenté ci-après.

4.4.2 Définition générale

Le modèle de tige de *Cosserat* permet de représenter mathématiquement une tige matérielle, c'est-à-dire un objet longiligne, dont les dimensions selon les deux directions définissant le plan de la section transverse sont négligeables par rapport à la troisième dimension, longitudinale.

4.4.2.1 Repère Matériel

La configuration d'une tige, selon le modèle de *Cosserat*, est donnée par deux éléments:

- Une courbe moyenne de l'espace $\left\{\mathbf{r}(s), s \in [0, L]\right\}$ décrivant la géométrie de la tige.
- Une base orthonormale $(\mathbf{u_1}(s), \mathbf{u_2}(s), \mathbf{u_3}(s))$ relié à chaque point de la courbe moyenne. Les vecteurs $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_2}$ servent à orienter la section de la tige en s, et sont en général choisis comme les axes principaux de la section. Le troisième vecteur $\mathbf{u_3}$ s'obtient par la relation : $\mathbf{u_3} = \mathbf{u_1} \wedge \mathbf{u_2}$.

Le repère matériel de la tige à chaque point s de sa courbe moyenne est noté $F(s) = \left\{\mathbf{r}(s); (\mathbf{u_1}(s), \mathbf{u_2}(s), \mathbf{u_3}(s))\right\}$ et attaché à la section physique de la tige en s.

4.4.2.2 Cinématique

L'évolution spatiale d'une tige, selon le modèle de *Cosserat*, est définie par deux vecteurs de déformations, notés $\mathbf{w}(s)$ et $\mathbf{\Omega}(s)$, sous la forme suivante :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} & = & \mathbf{w}(s) \\ \forall i \quad \frac{\partial \mathbf{u_i}}{\partial s} & = & \mathbf{\Omega}(s) \wedge \mathbf{u_i}(s) \end{array} \tag{4.69}$$

où $\mathbf{\Omega}(s)$ est appelé *vecteur de Darboux*

La déformation de la tige par rapport à sa courbe moyenne $\mathbf{r}(s)$ est caractérisée par les composantes w_i du vecteur $\mathbf{w}$ de la manière suivante :

- les deux composantes $w_1 = \mathbf{w}.\mathbf{u_1}$ et $w_2 = \mathbf{w}.\mathbf{u_2}$ quantifient le cisaillement transverse de la tige,
- la composante $w_3 = \mathbf{w}.\mathbf{u_3}$ quantifie l'étirement ou la compression axiale de la tige.

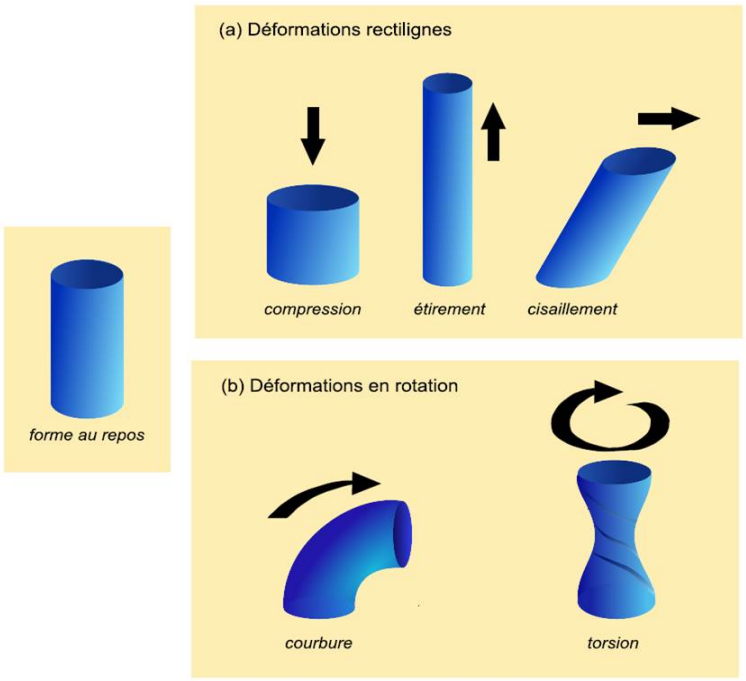


FIGURE 4.13 – Déformations élémentaires sur un morceau de tige de Cosserat [Bertails, 2006]

En ce qui concerne les composantes Ω_i du vecteur $\mathbf{\Omega}(s)$, elles quantifient la déformation transverses de la tige ; c'est-à-dire, les déformations par rapport à chacun des axes du repère matériel *F*. Ce qui permet la définition de la déformation en courbure (rotation locale autour de $\mathbf{u_1}$ et de $\mathbf{u_2}$) avec les deux composantes $\Omega_1 = \mathbf{\Omega}.\mathbf{u_1}$ et $\Omega_2 = \mathbf{\Omega}.\mathbf{u_2}$ et la déformation en torsion (rotation locale autour de $\mathbf{u_3}$) avec la composante $\Omega_3 = \mathbf{\Omega}.\mathbf{u_3}$.

La Figure 4.13 représente toutes les déformations qu'une tige de *Cosserat* peut admettre.

4.4.3 Tige de *Cosserat* selon *Kirchhoff*

Une tige de *Kirchhoff* est une tige de *Cosserat* sous les hypothèses d'extensibilité et du non cisaillement avec une dépendance au temps. A chaque instant t, la configuration spatiale de la tige est donnée par le repère matériel mobile suivant (Fig. 4.14) :

$$F(s) = \left\{\mathbf{r}(s,t); (\mathbf{n_1}(s), \mathbf{n_2}(s,t), \mathbf{t}(s,t))\right\} \tag{4.70}$$

Tous les paramètres du modèle $\mathbf{r}$, $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{t}$, k_1, k_2, τ, $\mathbf{\Omega}$, etc., sont des fonctions spatio-temporelle (qui dépendent de s et de t). Par souci de clarté dans les équations, ces dépendances ne seront plus écrites.

4.4.3.1 Équations cinématiques

Évolution spatiale de la tige

Une tige de *Cosserat* sous les hypothèses de *Kirchhoff* n'admet que les déformations suivante : la tige peut localement se courber autour des deux axes $\mathbf{n_1}$ et $\mathbf{n_2}$, ou bien s'enrouler autour d'elle-même, c'est-à-dire autour de l'axe tangent $\mathbf{t}$ (cela correspond aux déformations données dans le cas (b) de la

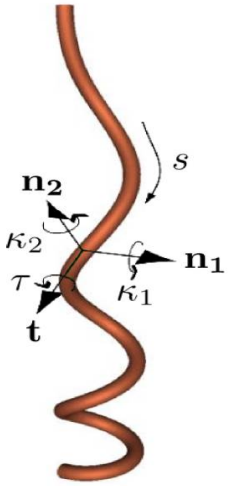


FIGURE 4.14 – Modèle d'une fibre selon les hypothèses de *Kirchhoff*, illustrant l'un de ses repères matériels relié à une section ; les paramètres k_1 et k_2 indiquent la courbure locale de la tige autour de $\mathbf{n_1}$ et $\mathbf{n_2}$ respectivement, et le paramètre τ indique la torsion de la tige autour de l'axe tangent $\mathbf{t}$

Figure 4.13).

La nouvelle forme des équations cinématiques de *Cosserat* (eq.4.69), décrivant l'évolution spatiale de la tige sous les hypothèses de *Kirchhoff*, est la suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{t} \tag{4.71a}$$

$$\forall i \quad \frac{\partial \mathbf{u_i}}{\partial s} = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{u_i} \tag{4.71b}$$

avec $\mathbf{u_1} = \mathbf{n_1}$, $\mathbf{u_2} = \mathbf{n_2}$ et $\mathbf{u_3} = \mathbf{t}$

et le vecteur de Darboux $\mathbf{\Omega}$ caractérise les rotations locales de la tige autour de chacun des trois axes du repère matériel, il est exprimé de la manière suivante :

$$\mathbf{\Omega} = k_1\mathbf{n_1} + k_2\mathbf{n_2} + \tau\mathbf{t} \tag{4.72}$$

En intégrant cette expression dans l'équation (4.71b), la cinématique de la tige s'exprime sous forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{n_1}}{\partial s} = \tau\mathbf{n_2} - k_2\mathbf{t} \tag{4.73a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n_2}}{\partial s} = -\tau\mathbf{n_1} + k_1\mathbf{t} \tag{4.73b}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = k_2\mathbf{n_1} - k_1\mathbf{n_2} \tag{4.73c}$$

Évolution temporelle de la tige

La dérivée temporelle du repère matériel fournit les équations suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v} \tag{4.74a}$$

$$\forall i \quad \frac{\partial \mathbf{u_i}}{\partial t} = \mathbf{\Lambda} \wedge \mathbf{u_i} \tag{4.74b}$$

où $\mathbf{v}(s,t)$ vecteur vitesse et $\mathbf{\Lambda}(s,t)$ le vecteur rotation instantanée de la tige à l'instant t et au point s.

4.4.3.2 Équations dynamiques

L'étude dynamique est faite sur un élément infinitésimal de la tige, comprise entre la section droite en s et la section droite en $s+\delta s$, par l'application du principe fondamental de la dynamique (conservation de la quantité de mouvement et la conservation du moment cinétique).

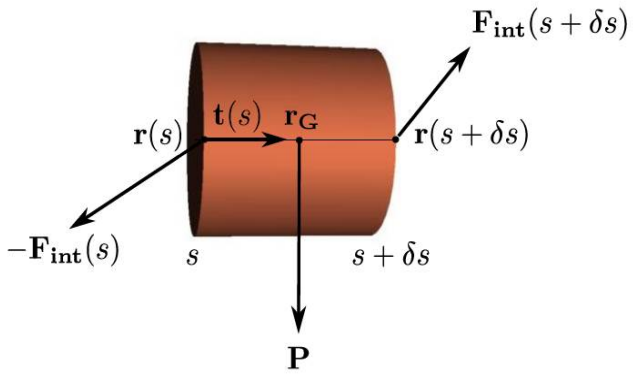


FIGURE 4.15 – Bilan des forces appliquées sur un élément infinitésimal de la tige

Forces appliquées

Les quantités ρ et S définissent, respectivement, la masse volumique et l'aire d'une section quelconque d'une tige. La masse donc de l'élément infinitésimal considéré est $\rho.S.\delta s$, et il est soumis à deux types de forces :

- Une force extérieure à la tige (le poids ou le frottement de l'air par exemple), notée $\mathbf{P}\delta s$, où $\mathbf{P}$ désigne la densité linéique de la force appliquée sur la tige (force par unité de longueur, exprimée en N/m). Si on veut prendre en compte la gravité dans le modèle, on remplacera donc $\mathbf{P}$ par l'expression $\rho S\mathbf{g}$ où $\mathbf{g}$ est le champ gravitationnel.

- Une force interne à la tige, qui est la force appliquée sur la portion de longueur δs par le reste de la tige. La propriété suivante donne une expression pour cette force.

Soit $\mathbf{F_{int}}(s)$ la force (en N) transmise à travers la section en s par la portion de la tige située en $s^{'} > s$ (à droite) sur la portion de la tige située en $s^{'} < s$. Alors $\mathbf{F_{int}}(s+\delta s) - \mathbf{F_{int}}(s)$ est la force (en N) exercée sur la portion de la tige située entre les sections droites en s et en $s+\delta s$ par le reste de la tige.

Bilan de la quantité de mouvement

Le bilan de la quantité de mouvement de l'élément δs de la tige est de la forme suivante :

$$\rho S\delta s\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}(s,t) = \mathbf{F_{int}}(s+\delta s,t) - \mathbf{F_{int}}(s,t) + \mathbf{P}(t)\delta s \tag{4.75}$$

En divisant cette équation par δs et en faisant tendre δs vers 0, l'équation différentielle suivante est alors obtenue :

$$\rho S \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(s,t) = \frac{\partial \mathbf{F_{int}}}{\partial s}(s,t) + \mathbf{P}(t) \tag{4.76}$$

Moments exercés

Il y a trois types de moments s'exerçant sur un élément infinitésimale d'une tige :

- Un moment appliqué de l'extérieur sur la tige (par exemple, un couple appliqué sur le bout libre par un objet extérieur), noté $\delta s\mathbf{Q}$, où $\mathbf{Q}$ désigne la densité linéique du moment appliqué sur la tige (moment par unité de longueur, exprimé en N). Il ne sera pas pris en compte par la suite

- Le moment résultant des forces extérieures appliquées sur l'élément δs de la tige. Le fait que la force $\mathbf{P}\delta s$ soit uniformément répartie à l'intérieur de l'élément considéré, signifie qu'elle n'applique pas de moment. Mais, la force interne $\mathbf{F_{int}}(s+\delta s) - \mathbf{F_{int}}(s)$ applique un couple au centre de l'élément $\mathbf{r_G}$ exprimé comme suit :

$$\mathbf{M_{F_{int}}} = (\mathbf{r}(s+\delta s) - \mathbf{r_G}) \wedge \mathbf{F_{int}}(s+\delta s) + (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r_G}) \wedge (\mathbf{F_{int}}(s+\delta s) - \mathbf{F_{int}}(s)) \tag{4.77}$$

  Les développements limités de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{F_{int}}$ autour de s, au second ordre, donnent :

$$\mathbf{r}(s+\delta s) = \mathbf{r}(s) + \delta s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + o(\delta s^2) \tag{4.78a}$$

$$\mathbf{F_{int}}(s+\delta s) = \mathbf{F_{int}}(s) + \delta s \frac{\partial \mathbf{F_{int}}}{\partial s} + o(\delta s^2) \tag{4.78b}$$

  En intégrant ces développements limités dans l'expression du moment $\mathbf{M_{F_{int}}}$, ce dernier devient :

$$\mathbf{M_{F_{int}}} = (\delta s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + o(\delta s^2)) \wedge \mathbf{F_{int}}(s+\delta s) + (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r_G}) \wedge (\delta s \frac{\partial \mathbf{F_{int}}}{\partial s} + o(\delta s^2)) \tag{4.79}$$

  Avec l'hypothèse $\mathbf{r}(s) \simeq \mathbf{r_G}$, seuls les termes du premier ordre des développements limités sont gardés. Donc, l'expression de $\mathbf{M_{F_{int}}}$ devient :

$$\mathbf{M_{F_{int}}} \simeq \delta s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \wedge \mathbf{F_{int}}(s) = \delta s \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{F_{int}}(s) \tag{4.80}$$

- Le moment résultant des efforts de contact sur les sections droites s et $s+\delta s$, appelé moment interne.

Soit $\mathbf{M_{int}}(s)$ le moment (en $N.m$) transmis à travers la section en s par la portion de la tige située en $s' > s$ sur la portion de la tige située en $s' < s$. Alors $\mathbf{M_{int}}(s+\delta s) - \mathbf{M_{int}}(s)$ est le moment (en $N.m$) exercé sur la portion de la tige située entre les sections droites en s et en $s+\delta s$ par le reste de la tige.

Équilibre des moments

Le théorème de la conservation du moment cinétique se traduit par une égalité entre la dérivée temporelle du moment cinétique du système par rapport à son centre de gravité, et la somme des moments extérieurs. L'équation d'équilibre des moments, d'un élément δs de la tige, est donc de la forme suivante :

$$\mathbf{M_{int}}(s+\delta s) - \mathbf{M_{int}}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{F_{int}}(s)\delta s = \rho \delta s \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial t}(s,t) \tag{4.81}$$

où $\mathbb{J}\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial t}$ représente la dérivée du moment cinétique de l'élément de la tige δs, considérée comme un petit solide cylindrique indéformable. $\mathbb{J}$ est la matrice d'inertie de l'élément cylindrique δs. Le terme de droite de l'équation ci-dessus est négligeable si on applique les approximations de *Kirchhoff*, en divisant l'équation par δs puis le faisant tendre vers 0, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{M_{int}}}{\partial s}(s,t) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{F_{int}}(s) = 0 \tag{4.82}$$

4.4.3.3 Loi de comportement de la tige

Le matériau constituant la tige est considéré parfaitement homogène et isotrope. *Kirchhoff* a fait l'hypothèse des petites déformations en courbure et en torsion, ce qu'il permet d'utiliser une loi matériau élastique et linéaire type "loi de Hooke" de la manière suivante:

$$\mathbf{M_{int}}(s,t).\mathbf{n_1}(s,t) = EI_1(k_1(s,t) - k_1^0(s,t)) \tag{4.83a}$$
$$\mathbf{M_{int}}(s,t).\mathbf{n_2}(s,t) = EI_2(k_2(s,t) - k_2^0(s,t)) \tag{4.83b}$$
$$\mathbf{M_{int}}(s,t).\mathbf{t}(s,t) = \mu J(\tau(s,t) - \tau^0(s,t)) \tag{4.83c}$$

La forme matricielle de cette loi dans la base matérielle $(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \mathbf{t})$ est comme suit :

$$\mathbf{M_{int}}(s,t) = \mathbb{K}(\boldsymbol{k}(s,t) - \boldsymbol{k}^0(s,t)) \tag{4.84}$$

où $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} EI_1 & 0 & 0 \\ 0 & EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu J \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \tau \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{k}^0 = \begin{pmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \\ \tau^0 \end{pmatrix}$.

$\mathbb{K}$ désigne la matrice de raideur du matériau, E le module d'Young, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ le module de cisaillement (ν est le coefficient de Poisson), I_i le moment d'inertie de la section par rapport à chacun des deux axes $\mathbf{n_i}$ et μJ la rigidité de torsion (J est le moment d'inertie axial).

Même si la loi constitutive du matériau choisie est linéaire, les déplacements subis par la tige peuvent être non-linéaires, à cause des équations cinématiques non-linéaires, qui décrivent des rotations infinitésimales du repère matériel le long de la tige. Ainsi, les équations de *Kirchhoff* permettent de gérer de grands déplacements en position pour la tige même si le modèle élémentaire est sous l'hypothèse des petites déformations.

4.5 Conclusion

Des modèles physiques et mathématiques proposés dans la littérature pour simuler le comportement mécanique d'une fibre a été présenté dans ce chapitre. La plupart des modèles utilisés sont majoritairement de type discrets. Le développement des modèles déformables unidirectionnels continus, pour modéliser le comportement mécanique d'une fibre est toujours d'actualité.

L'analyse de ces modèles nous a permis de mieux appréhender les avantages et les limites de chacun. Il peut être conclu que les modèles basés sur la méthode des éléments finis sont limités et ne traitent que la mécanique statique ou quasi-statique de la fibre. Les modèles basés sur la méthode des éléments discrets sont les plus développés dans le domaine de la simulation dynamique d'une fibre. Il peut être aussi conclu que les modèles continus, telles les tiges de Cosserat, suscitent de plus en plus d'intérêt dans le domaine de l'informatique graphique.

Plusieurs modèles numériques ont été développés pour étudier le comportement mécanique d'une fibre. Par exemple, les modèles représentant une fibre comme une tige de Cosserat [Marheineke and Wegener, 2011; Pai, 2002; Bertails et al., 2006], un système masses-ressorts [Rosenblum et al., 1991; Ghith et al., 1997; Legrand, 2000], une série de bielles [Yamamoto and Matsuoka, 1993, 1994, 1995, 1996], de tiges [Wang and Sun, 2001; Zhou et al., 2004; Wang et al., 2006] et de sphéroïdes [Ross and Klingenberg, 1997; Skjetne et al., 1997; Schmid et al., 2000; Joung et al., 2001; Switzer III and Klingenberg, 2003]. Durville [1998] a développé un modèle de poutre enrichi, en élément finis, à partir du modèle de poutre de Timoshenko [1921].

En ce qui concerne le temps de calcul (CPU) des simulations, les modèles numériques basés sur la méthode des éléments finis sont les plus consommateurs en ressource calcul. Pour les autres modèles, celui correspondant à l'assemblage de tiges est le moins coûteux comparé au modèle du train de billes, le temps CPU est d'ordre 2 $O({N_f}^2)$ [Wang et al., 2006], où N_f est le nombre des tiges. Le modèle de train de billes développé par Yamamoto and Matsuoka [1993] a une complexité très élevée, d'ordre 3 $O({N_f}^3)$ [Nyland et al., 1996], ce qui limite ses applications à des fibres à facteur de forme très petit, ce dernier étant défini comme le rapport de sa longueur sur son diamètre.

L'objectif final est l'étude numérique du comportement mécanique en 3D, à l'échelle des fibres, d'un assemblage unidirectionnel de fibres sous sollicitation dynamique du rouleau de compactage. Pour atteindre cet objectif, nous avons réalisé un état de l'art complet sur les modèles numérique existants. Au court du placement des fibres étant principalement soumises à des efforts de flexion, torsion et compression, nous avons opté pour la méthode des éléments discrets. Le choix de cette méthode nous a orienté vers un modèle de corps rigides articulés utilisant un algorithme récursif basé sur les équations de *Newton-Euler* qui présente des avantages numériques détaillés au prochain chapitre. Le chapitre suivant présente en détail le modèle dynamique 3D développé pour cette thèse.

5

Modélisation dynamique 3-D d'un système 1-D flexible par un système de corps rigides articulés

5.1 Introduction

Featherstone [2014] a développé une méthode de corps articulé utilisant une formulation des coordonnées réduites et les équations de Newton-Euler pour décrire les contraintes et les accélérations articulaires. Hadap and Magnenat-Thalmann [2001] ont appliqué cette méthode à la simulation de la dynamique des cheveux dans le domaine des films d'animation 3-D, dans lequel l'algorithme du modèle dynamique direct a été utilisé. L'avantage de cette approche est que la complexité du calcul est à sa plus faible limite de $O(N_f)$ et son algorithme est rapide et numériquement stable. Cette méthode est aussi utilisée par Battocchio et al. [2012] pour simuler la dynamique 2-D d'une fibre de polymère longue sous l'effet d'un flux d'air rapide et turbulent. Dans ce travail une approche similaire a été suivie. Mais une méthode plus efficace (de point de vue implémentation), développée par Khalil and Kleinfinger [1986]; Khalil et al. [2007], a été utilisée pour développer un modèle dynamique 3-D de fibre flexible. Le comportement mécanique de la fibre est simulé par la résolution du système d'équations obtenu par l'algorithme récursif du modèle dynamique direct d'un système de corps articulés.

5.2 Modèle géométrique de la fibre

La fibre est considérée comme un système de corps articulés dans l'approche proposée. Elle est composée d'une série de $(n+1)$ corps de même longueur L et n liaisons sphériques. Les notations de

Khalil and Kleinfinger [1986] sont utilisées pour décrire la structure de la fibre. L'approche développée par Khalil et al. [2007] est utilisée pour représenter une liaison sphérique par une combinaison équivalente de deux ou trois liaisons pivot et décrire le modèle d'une fibre inextensible présenté dans la Figure 5.2. Une représentation basée sur trois liaisons pivot donne un système équivalent de $3n$ articulations pivot et $3n+1$ corps. Les corps sont numérotés de telle manière que le corps 0 représente une extrémité de la fibre et le corps n représente l'autre extrémité. La numérotation du système équivalent, après la discrétisation des articulations sphériques (voir la Figure 5.1), s'établit de la manière suivante :

1. les corps $(3j-1)$ et $(3j-2)$, pour $j \in \left\{1,\ldots,n\right\}$, sont des corps virtuels de longueurs et de masses nulles ; par conséquent aucune force ne s'applique sur eux
2. les corps $3j$ représentent les éléments rigides constituant la fibre

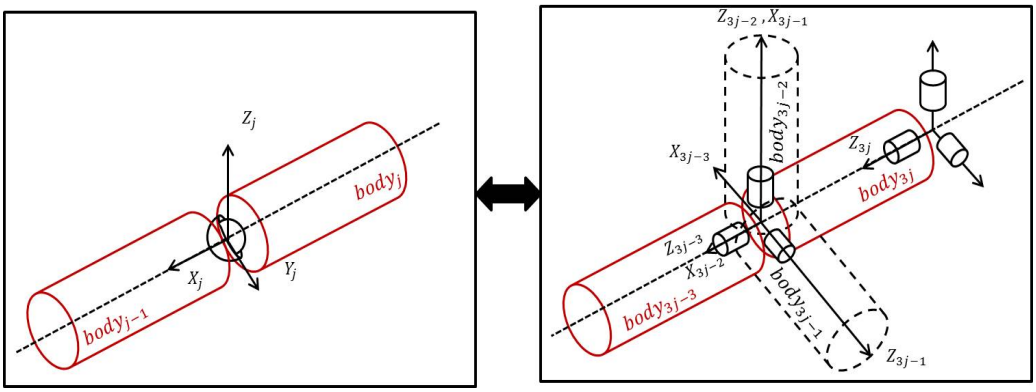


FIGURE 5.1 – Schéma d'une articulation sphérique représentée par une combinaison équivalente de trois articulations pivot

D'un côté, les articulations reliées aux corps $3j$ sont associées à un comportement en torsion, alors que les articulations reliées aux corps $(3j-1)$ et $(3j-2)$ sont associés à un comportement en flexion.

Un repère R_j est attaché à chaque $Corps_j$, de façon à ce que l'axe z_j représente l'axe de rotation de l'articulation j, et l'axe x_j représente la normale commune entre les axes z_j et z_{j+1}. La méthode utilisée pour paramétrer le modèle est celle de Khalil and Kleinfinger [1986], issue de la méthode de Denavit [1955] (Fig. 5.3), permettant d'exprimer la matrice de transformation ${}^{j-1}\mathbb{T}_j$ du repère R_j au repère R_{j-1} :

1. α_j : l'angle entre z_{j-1} et z_j autour de x_{j-1}.
2. d_j: la distance entre z_{j-1} et z_j selon x_{j-1}.
3. θ_j: l'angle entre x_{j-1} et x_j autour de z_j.
4. r_j: la distance entre x_{j-1} et x_j selon z_j.

Les paramètres géométriques du modèle sont donnés dans le tableau (5.1). L'orientation relative entre les corps $(j-1)$ et j est définie par la variable $\theta_j = q_j + q_{0_j}$, où q_{0_j} est la constante offset de la articulation j et q_j sa variable. Les valeurs d'offsets q_{0_j} sont définies de telle manière que $q_j(0) = 0$.

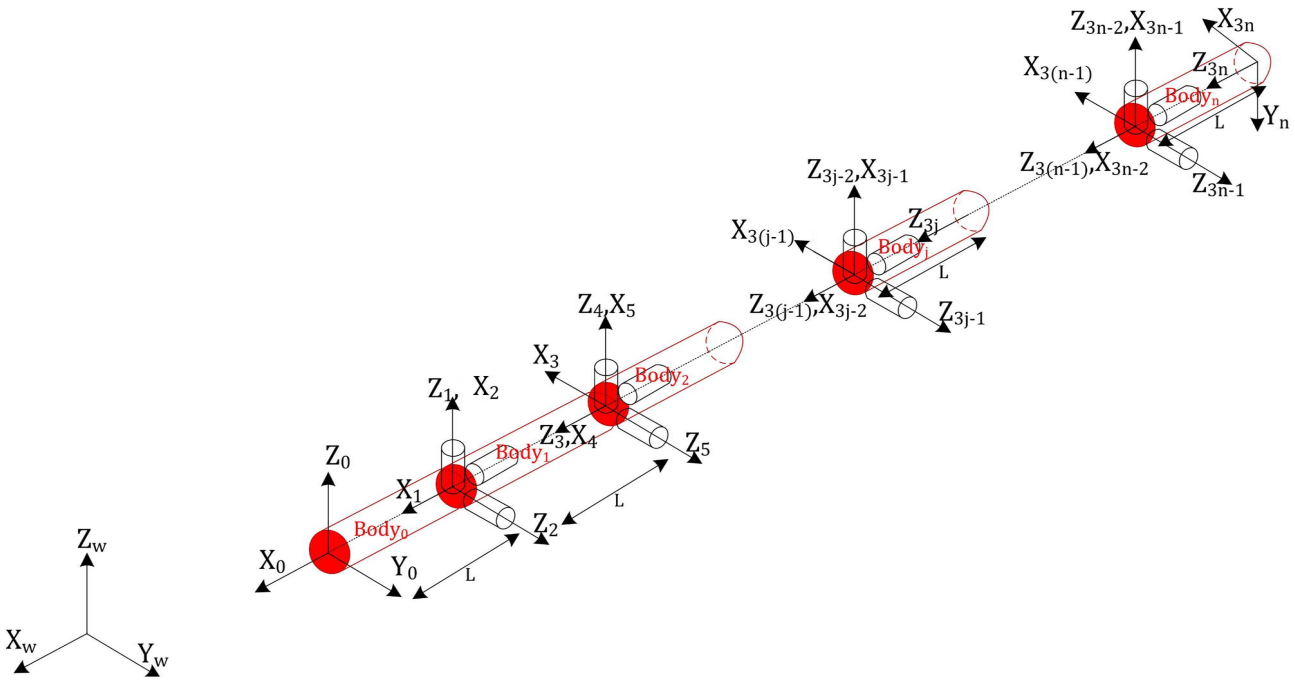


FIGURE 5.2 – Modèle géométrique 3-D d'une fibre inextensible

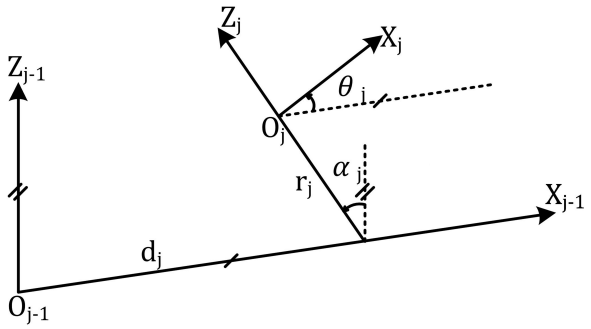


FIGURE 5.3 – Illustration de la méthode paramètrique de Denavit-Hartenberg

Les variables associées à l'articulation j sont notées : $q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j$, où $\sigma_j = 0$ si l'articulation j est de rotation, $\sigma_j = 1$ si l'articulation j est linéaire, et $\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$.

La matrice de transformation homogène, définissant le repère R_j par rapport au repère R_{j-1}, est donnée par la matrice (4×4) :

$$
\begin{aligned}
{}^{j-1}\mathbb{T}_j &= \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} {}^{j-1}\mathbb{R}_j & {}^{j-1}\mathbf{P}_j \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} {}^{j-1}\mathbf{s}_j & {}^{j-1}\mathbf{n}_j & {}^{j-1}\mathbf{u}_j & {}^{j-1}\mathbf{P}_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

TABLE 5.1 – Paramètres géométriques du modèle de la fibre inextensible. "L" représente la longueur des corps

j	α_j	d_j	q_j	r_j	q_{0_j}
1	0	L	q_1	0	0
2	$-\frac{\pi}{2}$	0	q_2	0	-$\frac{\pi}{2}$
3	$-\frac{\pi}{2}$	0	q_3	L	$\frac{\pi}{2}$
4	$\frac{\pi}{2}$	0	q_4	0	$\frac{\pi}{2}$
...	...	...	...	...	...
$3*n-1$	$-\frac{\pi}{2}$	0	q_{3*n-1}	0	$-\frac{\pi}{2}$
$3*n$	$-\frac{\pi}{2}$	0	q_{3*n}	L	$\frac{\pi}{2}$

où C et S dénotent les fonctions $\cos$ et $\sin$, respectivement.

L'exposant en haut à gauche indique le repère de projection. La matrice d'orientation du repère R_j par rapport au repère R_{j-1} est la sous-matrice (3×3) en haut à gauche de ${}^{j-1}\mathbb{T}_j$ et notée ${}^{j-1}\mathbb{R}_j$ où ${}^{j-1}\mathbf{s}_j$, ${}^{j-1}\mathbf{n}_j$ et ${}^{j-1}\mathbf{u}_j$ sont des vecteurs contenant les composantes des vecteurs unitaires selon les axes x_j, y_j and z_j respectivement. Le vecteur position qui définit l'origine du repère R_j par rapport à R_{j-1} est la sous-matrice (3×1) située en haut à droite et notée ${}^{j-1}\mathbf{P}_j$.

La matrice de transformation entre le repère fixe du domaine d'étude R_w et le repère R_0 attaché à l'extrémité de la fibre, représentée par le $Corps_0$, est notée ${}^{w}\mathbb{T}_0$ et supposée connue.

5.3 Le modèle cinématique d'un système poly-articulé

5.3.1 Introduction

Par soucis de simplifier l'implémentation des grandeurs telles que les vecteurs ou champs de vecteurs, ainsi que les principes de la dynamique, nous avons choisi d'appliqué des formalismes liés à la notion de torseurs permettant par sa représentation d'optimiser les opérations mathématique des algorithmes qui serons développés par la suite.

5.3.2 Notion de torseur

Un torseur est constitué d'un d'un champs antisymétrique $\overrightarrow{M}$ (champs de moments) et un vecteur associé appelé résultante $\overrightarrow{R}$, ayant une notation classique suivante :

$$\mathfrak{T}_{R_w}(M) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M}_{(M)} \end{array} \right\}_{R_w} \tag{5.2}$$

où $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}_{(M)}$ étant les éléments de réduction du torseur au point M (du $Corps_j$) exprimés dans le repère R_w.

Dans la suite de ce manuscrit, nous notons les torseurs de la même manière que la matrice de

transformation homogène (5.1) présentée précédemment, donnant la forme suivante :

$$\mathfrak{T}_{R_w}(M) = {}^{R_w}\mathfrak{T}_{M_j} = \begin{bmatrix} {}^{R_w}\mathbf{R}_{M_j} \\ {}^{R_w}\mathbf{M}_{M_j} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

avec l'exposant en haut à gauche indique le repère de projection et l'indice à droite en bas indique le point du corps traité.

Dans la suite, nous utiliserons la notation (5.3) pour définir les différents torseurs suivants : torseur des efforts extérieurs, torseur cinématique et torseur dynamique. Pour un $Corps_j$ par rapport à un repère R_k, nous obtenons les notations suivantes :

Torseur des efforts extérieurs :

$${}^k\mathfrak{F}_j = \begin{bmatrix} {}^k\mathbf{f}_j \\ {}^k\mathbf{M}_j \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Torseur cinématique :

$${}^k\mathfrak{V}_j = \begin{bmatrix} {}^k\mathbf{V}_j \\ {}^k\boldsymbol{\omega}_j \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Torseur d'accélération :

$${}^k\dot{\mathfrak{V}}_j = \begin{bmatrix} {}^k\dot{\mathbf{V}}_j \\ {}^k\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

5.3.3 Cinématique

5.3.3.1 Composition des vitesses

Soit un solid (S) en mouvement par rapport à R et à R' et soit $M \in (S)$, avec :

$$\overrightarrow{O'M}|_{R'} = q\overrightarrow{z} \quad et \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{5.7}$$

Ainsi, après la dérivation de l'équation (5.7) la loi de composition des vitesses donne :

$$\overrightarrow{V}(M \in (S)/R) = \overrightarrow{V}_e(M \in (S)/R) + \overrightarrow{V}_r(M \in (S)/R') \tag{5.8}$$

avec

- $\overrightarrow{V}_e(M \in (S)/R) = \overrightarrow{V}(O' \in (S)/R) + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \times q\overrightarrow{z}$, représente la vitesse d'entraînement
- $\overrightarrow{V}_r(M \in (S)/R')$, représente la vitesse relative de M par rapport à R'.

En réécrivant, avec nos notations, la loi de composition des vitesses entre deux corps successif ($Corps_{j-1}$ et $Corps_j$) d'un corps poly-articulé, on obtient :

$$\begin{cases} {}^j\boldsymbol{\omega}_{j-1} &= {}^j\mathbb{R}_{j-1}\,{}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \\ {}^j\boldsymbol{\omega}_j &= {}^j\boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j\dot{q}_j\,{}^j\mathbf{u}_j \\ {}^j\mathbf{V}_j &= {}^j\mathbb{R}_{j-1}\left({}^{j-1}\mathbf{V}_{j-1} + {}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times {}^{j-1}\mathbf{P}_j\right) + \sigma_j\dot{q}_j\,{}^j\mathbf{u}_j \end{cases} \tag{5.9}$$

Donnant l'équation torseurielle récursive suivante :

$$ {}^{j}\mathfrak{V}_{j} = {}^{j}\mathbb{TT}_{j-1}{}^{j-1}\mathfrak{V}_{j-1} + \dot{q}_{j}{}^{j}\mathfrak{u}_{j} \tag{5.10} $$

avec

$$ {}^{j}\mathbb{TT}_{j-1} = \begin{bmatrix} {}^{j}\mathbb{R}_{j-1} & -{}^{j}\mathbb{R}_{j-1}{}^{j-1}\hat{\mathbf{P}}_{j} \\ \mathbb{O}_{(3\times3)} & {}^{j}\mathbb{R}_{j-1} \end{bmatrix} \tag{5.11} $$

où

- ${}^{j}\mathfrak{V}_{j}$ le torseur cinématique (6×1) du $Corps_{j}$, défini par ${}^{j}\mathfrak{V}_{j} = \begin{bmatrix} {}^{j}\mathbf{V}_{j}^{T} & {}^{j}\boldsymbol{\omega}_{j}^{T} \end{bmatrix}^{T}$,
- ${}^{j}\mathbf{V}_{j}$ la vitesse de translation de l'origine (O_{j}) du repère R_{j} exprimée dans son repère,
- ${}^{j}\boldsymbol{\omega}_{j}$ la vitesse angulaire du $Corps_{j}$ exprimée dans dans R_{j} ;
- ${}^{j}\mathbb{TT}_{j-1}$ la matrice (6×6) de transformation entre torseurs,
- $\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & -P_{z} & P_{y} \\ P_{z} & 0 & -P_{x} \\ -P_{y} & P_{x} & 0 \end{bmatrix}$ la matrice (3×3) du pré-produit vectoriel associé au vecteur $\mathbf{P}$, tel que $\mathbf{P} \times \mathbf{e} = \hat{\mathbf{P}}.\mathbf{e}$,
- ${}^{j}\mathfrak{u}_{j}$ le vecteur (6×1) de projection définie par ${}^{j}\mathfrak{u}_{j} = \begin{bmatrix} {}^{j}\mathbf{u}_{j} \\ {}^{j}\bar{\mathbf{u}}_{j} \end{bmatrix}$,
- ${}^{j}\bar{\mathbf{u}}_{j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\sigma}_{j} \end{bmatrix}^{T}$ le vecteur unitaire selon l'axe z_{j}, représentant l'axe de l'articulation j.

Le modèle cinématique du système de corps articulés, développé ci-dessus, donne le torseur cinématique cartésien $\mathfrak{V}_{j}$ de chaque $Corps_{j}$ en fonction de la vitesse articulaire $\dot{q}_{j}$ utilisant *la matrice Jacobienne cinématique* $\mathbb{J}_{j}$:

$$ \mathfrak{V}_{j} = \mathbb{J}_{j}\dot{\mathbf{q}}_{j} \tag{5.12} $$

5.3.3.2 Composition des accélérations

Par la loi de composition des vitesses, nous avons obtenu l'équation (5.8). Après dérivation de celle ci, nous avons obtenu l'équation suivante :

$$ \overrightarrow{\dot{V}}(M \in (S)/R) = \overrightarrow{\dot{V}}_{e}(M \in (S)/R) + \overrightarrow{\dot{V}}_{c}(M \in (S)/R) + \overrightarrow{\dot{V}}_{r}(M \in (S)/R') \tag{5.13} $$

avec

- $\overrightarrow{\dot{V}}_{e}(M \in (S)/R) = \overrightarrow{\dot{V}}(O' \in (S)/R) + \overrightarrow{\dot{\omega}}(R'/R) \times q\overrightarrow{z} + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \times \overrightarrow{\omega}(R'/R) \times q\overrightarrow{z}$, représente l'accélération d'entraînement
- $\overrightarrow{\dot{V}}_{c}(M \in (S)/R) = 2\overrightarrow{\omega}(R'/R) \times \overrightarrow{V}_{r}(M \in (S)/R')$, représente l'accélération de *Coriolis*
- $\overrightarrow{\dot{V}}_{r}(M \in (S)/R')$, représente l'accélération relative de M par rapport à R'.

En appliquant cette loi de composition d'accélération, avec nos notations torseurielles, sur deux corps successif d'un poly-articulé, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} {}^{j}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} & = & {}^{j}\mathbb{R}_{j-1}\,{}^{j-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} \\ {}^{j}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j} & = & {}^{j}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} + \bar{\sigma}_{j}\left(\ddot{q}_{j}\,{}^{j}\mathbf{u}_{j} + {}^{j}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} \times \dot{q}_{j}\,{}^{j}\mathbf{u}_{j}\right) \\ {}^{j}\dot{\mathbf{V}}_{j} & = & {}^{j}\mathbb{R}_{j-1}\left({}^{j-1}\dot{\mathbf{V}}_{j-1} + {}^{j-1}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} \times {}^{j-1}\,\mathbf{P}_{j} + {}^{j-1}\,\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times {}^{j-1}\,\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times {}^{j-1}\,\mathbf{P}_{j}\right) \\ & & +\sigma_{j}\left(\ddot{q}_{j}\,{}^{j}\mathbf{u}_{j} + 2\,{}^{j}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} \times \dot{q}_{j}\,{}^{j}\mathbf{u}_{j}\right) \end{array}\right. \tag{5.14}$$

Avec les notations torseurielle, nous obtenons l'équation récursive suivante :

$${}^{j}\dot{\mathfrak{V}}_{j} = {}^{j}\mathbb{TT}_{j-1}\,{}^{j-1}\dot{\mathfrak{V}}_{j-1} + {}^{j}\boldsymbol{\gamma}_{j} \tag{5.15}$$

$${}^{j}\boldsymbol{\gamma}_{j} = \left[\begin{array}{c} {}^{j}\mathbb{R}_{j-1}\left[{}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \left({}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times {}^{j-1}\mathbf{P}_{j}\right)\right] + 2\sigma_{j}\left({}^{j}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} \times \dot{q}_{j}\,{}^{j}\mathbf{u}_{j}\right) \\ \bar{\sigma}_{j}\left({}^{j}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \dot{q}_{j}\,{}^{j}\mathbf{u}_{j}\right) \end{array}\right] + \ddot{q}_{j}\,{}^{j}\mathbf{u}_{j} \tag{5.16}$$

où

- ${}^{j}\dot{\mathfrak{V}}_{j}$ le torseur d'accélération (6×1) du $Corps_{j}$, défini par ${}^{j}\dot{\mathfrak{V}}_{j} = \left[\begin{array}{cc} {}^{j}\dot{\mathbf{V}}_{j}^{T} & {}^{j}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j}^{T} \end{array}\right]^{T}$
- ${}^{j}\dot{\mathbf{V}}_{j}$ l'accélération en translation de l'origine (O_{j}) du repère R_{j} exprimée dans son repère ;
- ${}^{j}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j}$ l'accélération angulaire du $Corps_{j}$ exprimée dans dans R_{j} ;
- ${}^{j}\boldsymbol{\gamma}_{j}$ le torseur d'accélération (6×1) du $Corps_{j}$ sans les termes d'accélération relative.

5.3.4 Calcul de la matrice Jacobienne cinématique

La matrice Jacobienne cinématique peut être calculée depuis le modèle géométrique directe de la fibre $X = f(q)$,

$$J_{c_{ij}} = \frac{\partial f_{i}(q)}{\partial q_{j}} \text{ pour } i = 1, ..., 6 \text{ et } j = 1, ..., n$$

Cette méthode analytique est facile à utiliser pour des systèmes de corps articulés avec un très petit nombre de degrés de liberté, mais pas adaptée aux systèmes complexes avec un grand nombre de degrés de liberté [Khalil and Dombre, 2004].

Pour chaque articulation j du système poly-articulé, la vitesse linéaire ${}^{0}\mathbf{V}_{j}$ et la vitesse angulaire ${}^{0}\boldsymbol{\omega}_{j}$ dépendent des vitesses q_{j-1}, q_{j}, ${}^{0}\mathbf{V}_{0}$ et ${}^{0}\boldsymbol{\omega}_{0}$.

Soit ${}^{0}\mathbf{u}_{j}$ le vecteur unitaire selon l'axe ${}^{0}\mathrm{z}_{j}$ de l'articulation j et $\mathbf{L}_{0,j}$ est le vecteur $\overrightarrow{O_{0}O_{k}}$. En utilisant la loi de composition des vitesses, les vitesses linéaires et angulaires de chaque corps sont données comme suit :

$$\left\{\begin{array}{c} {}^{0}\mathbf{V}_{k} = \sum_{i=1}^{k}{}^{0}\mathbf{V}_{i} = \sum_{i=1}^{k}\left[\sigma_{i}\,{}^{0}\mathbf{u}_{i} + \bar{\sigma}_{i}\left({}^{0}\mathbf{u}_{i} \times \mathbf{L}_{0,i}\right)\right]\dot{q}_{i} \\ {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{k} = \sum_{i=1}^{k}{}^{0}\boldsymbol{\omega}_{i} = \sum_{i=1}^{k}\bar{\sigma}_{i}\,{}^{0}\mathbf{u}_{i}\dot{q}_{i} \end{array}\right. \tag{5.17}$$

La matrice Jacobienne cinématique est obtenue en substituant l'équation (5.12) dans l'équation (5.17) :

$$
{}^{0}\mathbb{J}_{k} = \begin{bmatrix} \sigma_1 {}^{0}\mathbf{u}_1 + \bar{\sigma}_1 \left({}^{0}\mathbf{u}_1 \times \mathbf{L}_{0,1} \right) & \dots & \sigma_k {}^{0}\mathbf{u}_k + \bar{\sigma}_k \left({}^{0}\mathbf{u}_k \times \mathbf{L}_{0,k} \right) \\ \bar{\sigma}_1 {}^{0}\mathbf{u}_1 & \dots & \bar{\sigma}_k {}^{0}\mathbf{u}_k \end{bmatrix} \tag{5.18}
$$

5.4 Modèle dynamique de la fibre

5.4.1 Introduction

Le modèle dynamique inverse donne les couples articulaires en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires. Il est défini dans Khalil and Dombre [2004] par :

$$
\mathbf{\Gamma} = \mathbf{f}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e\right) \tag{5.19}
$$

Le modèle dynamique direct donne les accélérations articulaires en fonction des positions, vitesses, accélérations et couples articulaires. Il est défini dans Khalil and Dombre [2004] par :

$$
\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{f}_e\right) \tag{5.20}
$$

avec

- $\mathbf{\Gamma}$: vecteur des couples articulaires, dépendant des lois de comportements considérées à chaque articulation ;
- $\mathbf{q}$: vecteur des positions articulaires ;
- $\dot{\mathbf{q}}$: vecteur des vitesses articulaires ;
- $\ddot{\mathbf{q}}$: vecteur des accélérations articulaires ;
- $\mathbf{f}_e$: vecteur des forces et moments dus au contact entre l'environnement et les corps du système articulé.

5.4.2 Formalisme de *Lagrange*

5.4.2.1 Introduction

Dans cette partie, la forme générale des équations de Lagrange, décrivant la dynamique du système des corps articulés, est présentée. En premier temps, un système idéal, n'ayant aucun couple articulaire issu des lois de comportement matériau ni de forces ou moments extérieurs, est considéré. Ces phénomènes seront pris en compte dans la suite.

Le formalisme de Lagrange décrit le comportement dynamique du système en fonction du travail et l'énergie stockée dans le système. La forme générale des équations de Lagrange est donnée par :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{5.21}$$

où L est le Lagrangien du système articulé défini comme une différence entre l'énergie cinétique E et l'énergie potentielle U du système :

$$L = E - U \tag{5.22}$$

5.4.2.2 Forme générale des équations de *Lagrange*

L'énergie cinétique du système est définie par une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E_T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbb{M} \dot{\mathbf{q}} \tag{5.23}$$

où $\mathbb{M}$ est la matrice d'inertie $(n \times n)$ symétrique et définie du système articulé. Ses composantes, notées par M_{ij}, sont des fonctions des positions articulaires.

Le fait que l'énergie potentielle ne soit pas juste une fonction des vitesses articulaires, fait que le système des équations de Lagrange est de la forme suivante :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbb{M}\left(\mathbf{q}\right)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}\left(\mathbf{q}\right) \tag{5.24}$$

avec :

- $\mathbf{C}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}}$: vecteur $(n \times 1)$ représentant les efforts de Coriolis et centrifuge, tel que: $\mathbf{C}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}} = \mathbb{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}}$
- $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_i & \ldots & \mathrm{Q}_n \end{bmatrix}^T$: vecteur des efforts de gravité.

Le modèle dynamique de la fibre peut être représenté selon les cas suivants :

Cas où une extrémité est fixe et l'autre libre

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbb{M}_{\mathbf{22}}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C_2} + \mathbf{Q_2} \tag{5.25}$$

Cas où les deux extrémités de la fibre sont libres

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6\times 1} \\ \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} = \mathbb{M}\begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathfrak{V}}_0 \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{C} + \mathbf{Q} \tag{5.26}$$

où :

- $\mathbb{M}$ $(6+n) \times (6+n)$: matrice d'inertie du système représentant la fibre, ses éléments sont des fonctions des angles articulaires ; elle peut être partitionnée de la manière suivante :

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{11} & \mathbb{M}_{12} \\ \mathbb{M}_{12}^T & \mathbb{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

où

  - $\mathbb{M}_{11}$: matrice d'inertie (6×6) équivalente du $Corps_0$, qui est composée de l'inertie de tous les corps constituant le système, référencés dans le repère R_0.
  - $\mathbb{M}_{22}$: matrice d'inertie $(n \times n)$ du système des corps articulés quand le $Corps_0$ est fixe.
  - $\mathbb{M}_{12}$: matrice $(6 \times n)$ d'inertie couplée des articulations et le $Corps_0$. Elle reflète l'effet des accélérations articulaires sur le mouvement du $Corps_0$, et l'effet dual des accélérations articulaires du $Corps_0$ et les mouvements articulaires.

- $\mathbf{C}$: vecteur $(n+6) \times 1$ représentant les efforts de Coriolis et centrifuge. Ses éléments sont exprimés en fonction de la vitesse du $Corps_0$, des vitesses articulaires et ainsi que des efforts externes. Ce vecteur peut être représenté comme ceci :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

où

  - $\mathbf{C}_1$: efforts de Coriolis, centrifuge, gravité les forces externes exercées sur le $Corps_0$;
  - $\mathbf{C}_2$: efforts de Coriolis, centrifuge, gravité et les forces externes exercées sur les corps $1, ..., n$.

- $\mathbf{Q}$: vecteur $(n+6) \times 1$ représentant les forces de gravité et externes exercées sur le système. Ses éléments sont exprimés en fonction des vitesses du $Corps_0$, des vitesses articulaires et les forces externes. Ce vecteur peut être exprimé comme suit :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

où

  - $\mathbf{Q}_1$: forces de gravité et externes exercées sur le $Corps_0$;
  - $\mathbf{Q}_2$: forces de gravité et externes exercées sur les corps $1, ..., n$.

La résolution du système d'équations issu du modèle dynamique inverse, à savoir les équations (5.25) et (5.26) utilisant le formalisme de Lagrange, demande un très grand effort en temps de calcul dû au grand nombre de degrés de liberté du système ; typiquement n articulations sphériques demande $3n$ articulations pivots. La principale raison tient aux expressions complexes de la matrice $\mathbb{M}$ et le

vecteur $\mathbf{C}$. Pour le modèle dynamique direct la matrice d'inertie du système $\mathbb{M}$ doit être inversée, ce qui engendre des problèmes numériques. C'est pourquoi une telle méthode n'est utilisée que pour les systèmes 2-D [Yamamoto and Matsuoka, 1993, 1995; Nyland et al., 1996; Marheineke and Wegener, 2011; Battocchio et al., 2012] avec un petit nombre de degrés de liberté.

Par conséquent, le modèle dynamique du système des corps articulés est défini par $3n$ équations différentielles, couplées et non-linéaires, du seconde ordre.

Pour calculer les composantes de $\mathbb{M}$, les énergies cinématiques et potentielles de tous les corps du système articulé sont calculées comme des fonctions des vitesses articulaires. Ainsi, les éléments M_{ii} sont les coefficients des termes $(\frac{1}{2}\dot{q}_i^{\,2})$ dans l'expression de l'énergie cinématique, tandis que pour $i \neq j$, M_{ii} est égale au coefficient du terme $\dot{q}_i\dot{q}_j$.

Pour calculer le vecteur $\mathbf{C_2}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}}$ les symboles de *Christoffel* : $c_{i,jk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_i}\right]$ sont utilisés. La composante C_{ij} de la matrice $\mathbf{C_2}$ peut être écrite comme :

$$\begin{cases} C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,jk}\dot{q}_k \\ c_{i,jk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_i}\right] \end{cases} \tag{5.30}$$

Les éléments $\mathbf{Q}_i$ du vecteur d'efforts gravitationnels $\mathbf{Q}$ sont calculés à partir de l'expression suivante :

$$\mathbf{Q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{5.31}$$

5.4.2.3 Calcul de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique du système de corps articulés est défini par la relation suivante :

$$E_T = \sum_{j=0}^{n} E_j \tag{5.32}$$

où E_j est l'énergie cinétique du $Corps_j$, exprimée comme :

$$E_j = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\omega}_j^T \mathbb{I}_{G_j}\boldsymbol{\omega}_j + M_j \mathbf{V}_{G_j}^T \mathbf{V}_{G_j}\right) \tag{5.33}$$

où la vitesse du centre de masse est exprimée comme suit:

$$\mathbf{V}_{G_j} = \mathbf{V}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{S}_j \tag{5.34}$$

et la matrice d'inertie est exprimée comme :

$$\mathbb{I}_{O_j} = \mathbb{I}_{G_j} - M_j \hat{\mathbf{S}}_j \hat{\mathbf{S}}_j \tag{5.35}$$

L'équation (5.33) peut être réécrite comme suit :

$$E_j = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\omega}_j^T \mathbb{I}_{O_j}\omega_j + M_j \mathbf{V}_j^T \mathbf{V}_j + 2\mathbf{M}\mathbf{S}_j^T\left(\mathbf{V}_j \times \boldsymbol{\omega}_j\right)\right] \tag{5.36}$$

Tous les termes dans l'équation (5.36) doivent être exprimés dans le même repère. La manière la plus efficace est de tout exprimer dans le repère R_j, qui est attaché au $Corps_j$:

$$E_j = \frac{1}{2}\left[{}^j\boldsymbol{\omega}_j^{Tj}\mathbb{I}_{O_j}\boldsymbol{\omega}_j + M_j^j\mathbf{V}_j^{Tj}\mathbf{V}_j + 2^j\mathbf{MS}_j^T\left({}^j\mathbf{V}_j \times^j \boldsymbol{\omega}_j\right)\right] \tag{5.37}$$

avec :

$${}^j\boldsymbol{\omega}_j = {}^j\mathbb{R}_{j-1}{}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j\dot{q}_j{}^j\bar{\mathbf{u}}_j = {}^j\boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j\dot{q}_j{}^j\bar{\mathbf{u}}_j \tag{5.38}$$

$${}^j\mathbf{V}_j = {}^j\mathbb{R}_{j-1}\left({}^{j-1}\mathbf{V}_{j-1} + {}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times {}^{j-1}\mathbf{P}_j\right) + \sigma_j\dot{q}_j{}^j\mathbf{u}_j \tag{5.39}$$

L'énergie cinétique peut être exprimée suivant la forme compacte torsorielle suivante :

$$E_j = \frac{1}{2}{}^j\mathfrak{V}_j^{Tj}\mathbb{III}_{O_j}{}^j\mathfrak{V}_j \tag{5.40}$$

où

- ${}^j\mathbb{III}_{O_j}$: matrice d'inertie (6×6) du $Corps_j$, ${}^j\mathbb{III}_{O_j} = \begin{bmatrix} M_j\mathbb{I}_{3\times 3} & -{}^j\widehat{\mathbf{MS}}_j \\ {}^j\widehat{\mathbf{MS}}_j & {}^j\mathbb{I}_{O_j} \end{bmatrix}$;
- ${}^j\mathbb{I}_{O_j}$: matrice d'inertie (3×3) du $Corps_j$ relative au repère R_j ;
- M_j : masse du $Corps_j$;
- $\mathbb{I}_{3\times 3}$: matrice identité (3×3) ;
- ${}^j\mathbf{MS}_j$: premier moment du $Corps_j$ par rapport au repère R_j ;

5.4.2.4 Calcul de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle de à la gravité du système

L'énergie potentielle du système due à la gravité est exprimée comme suit :

$$\mathrm{U} = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{U}_j = -\sum_{j=0}^{n}\mathrm{M}_j\mathbf{g}^T\left(\mathbf{L}_{w,j} + \mathbf{S}_j\right) \tag{5.41}$$

où $\mathbf{L}_{w,j}$ est le vecteur position de l'origine O_j du repère R_j par rapport au repère R_w. Les vecteurs dans l'équation (5.41) peuvent être écrits en fonction linéaire des termes M_j et les composants de ${}^j\mathbf{MS}_j$ par projection sur le repère R_0 comme suit :

$$\mathrm{U}_j = -\begin{bmatrix} {}^w\mathbf{g}^T & 0 \end{bmatrix}{}^{\mathrm{w}}\mathbb{T}_{\mathrm{j}}\begin{bmatrix} {}^j\mathbf{MS}_j \\ \mathrm{M}_j \end{bmatrix} \tag{5.42}$$

L'énergie potentielle élastique

L'élasticité de chaque articulation est modélisé comme un ressort angulaire pour les articulations pivots (comportement en flexion ou torsion) ou comme un ressort de translation pour les articulations glissières (comportement compression/traction). Elle peut être exprimée comme une fonction $f(q_j)$ linéaire ou non-linéaire de la raideur et de la déformation. Soit $\mathbf{q}$ le vecteur de déformation et $K_j = \frac{I_{sec}E}{l}$ la raideur associée à chaque articulation j avec E est le module d'Young de la fibre et I_{sec} est le moment quadratique de la section de la fibre..

L'énergie potentielle du système due à l'élasticité est exprimée comme suit :

$$\mathrm{U} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{U}_j = \sum_{j=1}^{N} \int f(q_j) \tag{5.43}$$

où N représente le nombre d'articulations.

• Cas de l'élasticité linéaire

Soit $\mathbb{diag}(\mathbf{K})$ la matrice $(3n \times 3n)$ diagonale où ses composantes sont les coefficients de raideur K_j à chaque articulation, où les articulations $3j-2$ et $3j-1$ permettent la flexion et $3j$ permettent la torsion pour $j \in \left\{1, \ldots, 3n\right\}$. Donnant ainsi, l'expression de la fonction de déformation $f(q_j) = -K_j * q_j$ et l'énergie potentielle élasticité est exprimée :

$$\mathrm{U} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{U}_j = -\frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbb{diag}(\mathbf{K})\mathbf{q} \tag{5.44}$$

Le caractère linéaire de cette formulation de loi de comportement peut être observé au travers de la figure 5.4.

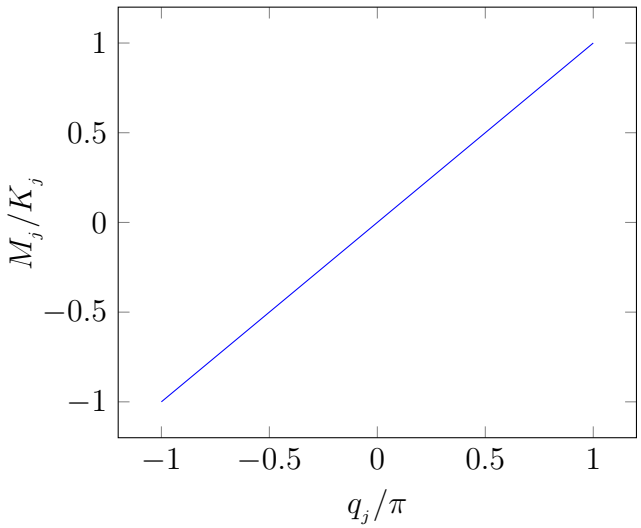


FIGURE 5.4 – Élasticité linaire

• Cas de l'élasticité non-linéaire

Soit une portion d'une poutre discrétisée en deux éléments, de longueur l, dans un système de

cordonnées locales (P_{j-1}, x, y) (voir la figure 5.5), où les cordonnées curvilignes sont notées par "s". Supposons que la poutre a un rayon de courbure "r" au point P_j. Nous exprimons les cordonnées des points P_{j-1}, P_j et P_{j+1} en fonction des cordonnées généralisées q_j.

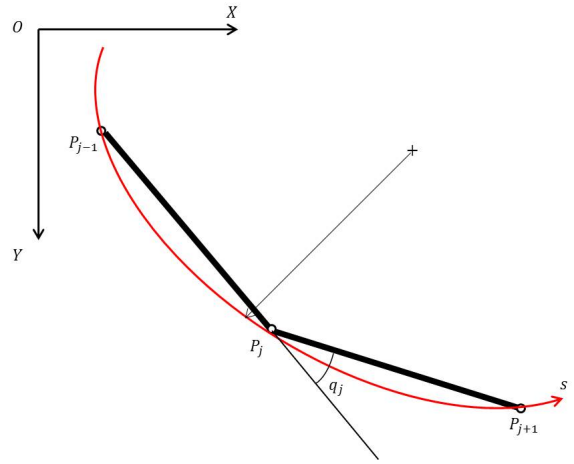


FIGURE 5.5 – Courbure d'une poutre

En traitant les les cordonnées comme des fonctions d variable "s", nous pouvons approximer les dérivées de $x(s)$ et $y(s)$, par rapport à s au point P_j, en utilisant le schéma de différences centrées suivant :

$$\begin{aligned} x' &\approx \frac{x_{P_{j+1}} - x_{P_{j-1}}}{2l} \quad x'' \approx \frac{x_{P_{j+1}} - 2x_{P_j} + x_{P_{j-1}}}{l^2} \\ y' &\approx \frac{y_{P_{j+1}} - y_{P_{j-1}}}{2l} \quad y'' \approx \frac{y_{P_{j+1}} - 2y_{P_j} + y_{P_{j-1}}}{l^2} \end{aligned} \tag{5.45}$$

Puis, en appliquant la formule paramétrique du rayon de courbure d'une plane :

$$r = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} \tag{5.46}$$

Substituant l'équation (5.46) dans l'équation (5.45) donne :

$$r = -\frac{l}{2}\cos(\frac{q}{2})\cot(\frac{q}{2}) \tag{5.47}$$

Considérons la relation classique entre le rayon de courbure "r" d'une poutre et son moment de flexion (autour de l'axe d'articulation) "M" suivante :

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{K} \tag{5.48}$$

où K la raideur en flexion de la poutre.

Avec les équations (5.47) et (5.48) nous obtenons :

$$M_j = -\frac{2K_j}{l}\frac{\tan(\frac{q_j}{2})}{\cos(\frac{q_j}{2})} \tag{5.49}$$

Le caractère non linéaire de cette formulation de loi de comportement peut être observé au travers de la figure 5.6. L'énergie potentielle élasticité du système est la suivante :

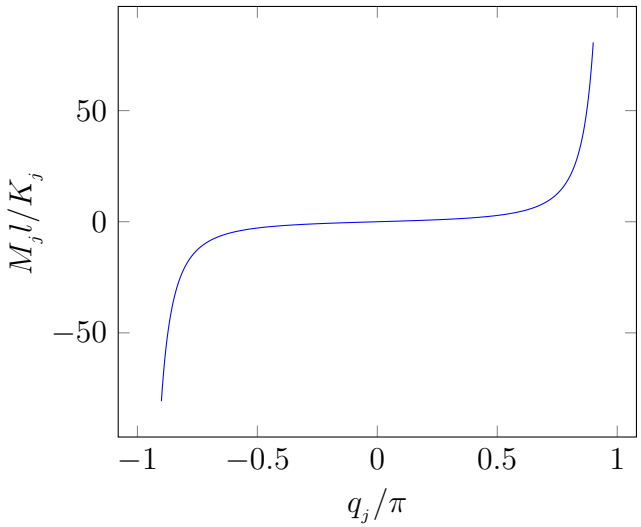


FIGURE 5.6 – Élasticité non-linaire

$$\mathrm{U} = \sum_{j=1}^{N} - \frac{2}{\cos(q_j)} \tag{5.50}$$

Calcul de l'énergie de dissipation

L'énergie de dissipation du système articulé est exprimée de la manière suivante :

$$\mathrm{D} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{D}_j = -\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbb{diag}(\mathbf{K}_\mathrm{v})\dot{\mathbf{q}} \tag{5.51}$$

Cette énergie provient de l'introduction des coefficients d'amortissement dans chaque articulation. Avec $\dot{\mathbf{q}}$ représente le vecteur du taux de déformation à chaque articulation et $\mathbb{diag}(\mathbf{K}_\mathrm{v})$ la matrice $(3n \times 3n)$ diagonale dont ses composantes sont les coefficients d'amortissement à chaque articulation.

5.4.3 Formalisme de *Newton-Euler*

5.4.3.1 Introduction

Les équations de *Newton-Euler* décrivant les forces et les moments exercés au centre de masse de chaque $Corps_j$ sont données comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j &= M_j \dot{\mathbf{V}}_{G_j} \\ \mathbf{M}_{G_j} &= \mathbb{I}_{G_j}\dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times \left(\mathbb{I}_{G_j}\boldsymbol{\omega}_j\right) \end{aligned} \tag{5.52}$$

La préparation des équations dynamique (5.52) à une utilisation par l'algorithme récursif, qui

sera présenté par la suite, nécessite le calcul des paramètres : $\mathbf{F}_j$, $\mathbf{M}_j$ et $\mathbb{I}_{G_j}$ par rapport au repère R_j (où sont définies les degrés de liberté) et non au centre de la gravité. Donnant les équations de *Newton-Euler* à l'origine du repère R_j comme suit :

$$\begin{aligned} {}^j\mathbf{F}_j &= M_j {}^j\dot{\mathbf{V}}_j + {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times {}^j\mathbf{MS}_j + {}^j\boldsymbol{\omega}_j \times \left({}^j\boldsymbol{\omega}_j \times {}^j\mathbf{MS}_j\right) \\ {}^j\mathbf{M}_j &= \mathbb{I}_{O_j} {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j + {}^j\boldsymbol{\omega}_j \times \left(\mathbb{I}_{O_j} {}^j\boldsymbol{\omega}_j + {}^j\mathbf{MS}_j \times {}^j\dot{\mathbf{V}}_j\right) \end{aligned} \tag{5.53}$$

5.4.3.2 Formulation torseurielle des équations de *Newton-Euler*

Le modèle dynamique direct donne les accélérations articulaires et celle du $Corps_0$ en fonction des couples, positions, vitesses et accélérations articulaires. Le modèle dynamique du système articulé est basé sur les équations de Newton-Euler pour exprimer les forces et les moments exercés sur chaque corps du système. Ainsi, à partir du système d'équation (5.53), le torseur des efforts appliqués sur chaque corps est exprimé comme suit :

$${}^j\mathfrak{F}_j = {}^j\mathbb{II}_{O_j} {}^j\dot{\mathfrak{V}}_j + \begin{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\omega}_j \times \left({}^j\boldsymbol{\omega}_j \times {}^j\mathbf{MS}_j\right) \\ {}^j\boldsymbol{\omega}_j \times \left({}^j\mathbb{I}_{O_j} {}^j\boldsymbol{\omega}_j\right) \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

L'équation d'équilibre de chaque corps est la suivante (Fig. 5.7) :

$${}^j\mathfrak{f}_j = {}^j\mathfrak{F}_j + {}^{j+1}\mathbb{T}\mathbb{T}_j^{T\,j+1}\mathfrak{f}_{j+1} + {}^j\mathfrak{f}_{e_j} \tag{5.55}$$

où

- ${}^j\mathfrak{F}_j$: torseur résultant des forces externes exercées sur le $Corps_j$, ${}^j\mathfrak{F}_j = \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{F}_j \\ {}^j\mathbf{M}_j \end{bmatrix}$;
- ${}^j\mathbf{F}_j$: résultante des forces externes exercées sur le $Corps_j$;
- ${}^j\mathbf{M}_j$: résultante des moments externes exercés sur le $Corps_j$ par rapport à l'origine O_j ;
- ${}^j\mathfrak{f}_j$: torseur résultant de la force externe exercée par $Corps_{j-1}$ sur $Corps_j$, ${}^j\mathfrak{f}_j = \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{f}_j \\ {}^j\mathbf{m}_j \end{bmatrix}$;
- ${}^j\mathfrak{f}_{e_j}$: torseur résultant de la force exercée par le $Corps_j$ sur l'environnement, ${}^j\mathfrak{f}_{e_j} = \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{f}_{e_j} \\ {}^j\mathbf{m}_{e_j} \end{bmatrix}$.

5.4.3.3 Calcul récursif du modèle dynamique de la fibre

L'algorithme développé dans cette partie est basé sur la méthode des équations récursives de Newton-Euler proposées par Khalil and Kleinfinger [1986], qui est une généralisation de la méthode proposée par Featherstone [1987]. L'algorithme récursif basé sur les équations de Newton-Euler a été proposé, à l'origine, par Luh et al. [1980] pour les robots manipulateurs puis généralisé par Khalil and Kleinfinger [1986] pour traiter les systèmes articulés libres aux deux extrémités.

Cet algorithme est constitué de trois étapes de calcul récursif.

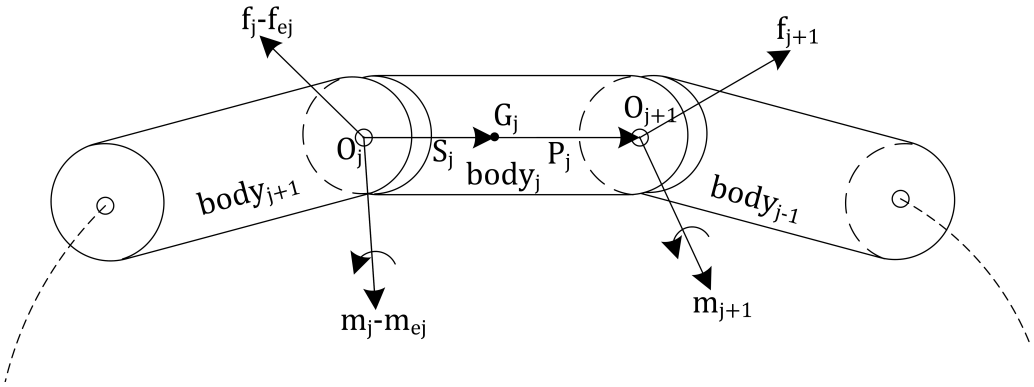


FIGURE 5.7 – Forces et moments exercés sur un $Corps_0$

Première récurrence avant

Dans cette étape, les matrices de transformations entre torseurs ${}^{j}\mathbb{TT}_{j-1}$, les vitesses angulaires ${}^{j}\boldsymbol{\omega}_j$ et tous les composantes d'accélérations ${}^{j}\boldsymbol{\zeta}_j$ sont calculées en utilisant les équations (5.1), (5.10), (5.11) and (5.16), et les couples externes ${}^{j}\boldsymbol{\beta}_j$ exercés sur chaque corps quand $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}_{n\times 1}$, de la manière suivante en partant du $Corps_0$ jusqu'au $Corps_{3n}$:

$$ {}^{j}\boldsymbol{\omega}_{j-1} = {}^{j}\mathbb{R}_{j-1}\,{}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \tag{5.56} $$

$$ {}^{j}\boldsymbol{\omega}_j = {}^{j}\boldsymbol{\omega}_{j-1} + \dot{q}_j\,{}^{j}\mathbf{u}_j \tag{5.57} $$

$$ {}^{j}\boldsymbol{\zeta}_j = \begin{bmatrix} {}^{j}\mathbb{R}_{j-1}\left[{}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \left({}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times {}^{j-1}\mathbf{P}_j\right)\right] \\ {}^{j}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \dot{q}_j\,{}^{j}\mathbf{u}_j \end{bmatrix} \tag{5.58} $$

$$ {}^{j}\boldsymbol{\beta}_j = {}^{j}\mathfrak{f}_{ej} + \begin{bmatrix} {}^{j}\boldsymbol{\omega}_j \times \left({}^{j}\boldsymbol{\omega}_j \times {}^{j}\mathbf{MS}_j\right) \\ {}^{j}\boldsymbol{\omega}_j \times \left({}^{j}\mathbb{I}_{O_j}\,{}^{j}\omega_j\right) \end{bmatrix} \tag{5.59} $$

Récurrence arrière

Dans cette étape, les paramètres inertiels H_j, ${}^{j}\mathbb{II}^{*}_{O_j}$, ${}^{j}\boldsymbol{\beta}^{*}_j$, ${}^{j}\mathbb{KK}_j$ et ${}^{j}\boldsymbol{\alpha}_j$ de chaque corps son calculés, permettant d'exprimer ${}^{j}\mathfrak{f}_j$ et $\ddot{q}_j$ en fonction de ${}^{j-1}\dot{\mathfrak{V}}_{j-1}$. On peut récrire l'équation d'équilibre de chaque $Corps_j$ en utilisant les équations (5.54), (5.55) et (5.59) de la manière suivante :

$$ {}^{j}\mathfrak{f}_j = {}^{j}\mathbb{II}_{O_j}\,{}^{j}\dot{\mathfrak{V}}_j + {}^{j}\boldsymbol{\beta}_j + {}^{j+1}\mathbb{TT}_j^{\mathrm{T}\,j+1}\mathfrak{f}_{j+1} \tag{5.60} $$

avec :

$$ {}^{j}\dot{\mathfrak{V}}_j = {}^{j}\mathbb{TT}_{j-1}\,{}^{j-1}\dot{\mathfrak{V}}_{j-1} + {}^{j}\boldsymbol{\zeta}_j + \ddot{q}_j\,{}^{j}\mathfrak{u}_j \tag{5.61} $$

alors :

$$ {}^{j}\mathfrak{f}_j = {}^{j}\mathbb{II}_{O_j}({}^{j-1}\dot{\mathfrak{V}}_{j-1} + \ddot{q}_j\,{}^{j}\mathfrak{u}_j) + {}^{j}\boldsymbol{\beta}_j + {}^{j+1}\mathbb{TT}_j^{T\,j+1}\mathfrak{f}_{j+1} \tag{5.62} $$

Cependant, dans le cas du modèle direct, les accélérations articulaires ne sont pas connues. Pour éliminer ce terme dans les équations, la méthode consiste à exprimer $\ddot{q}_j$ et ${}^{j}\mathfrak{f}_j$ en fonction de ${}^{j-1}\dot{\mathfrak{V}}_{j-1}$.

Le modèle géométrique du système fait que pour le $Corps_{3n}$ ${}^{3n+1}\mathfrak{f}_{3n+1} = \mathbf{0}$ (le $Corps_{3n}$ est le corps terminal du modèle de la fibre), l'équation (5.62) donne pour $j = 3n$:

$${}^{3n}\mathfrak{f}_{3n} = {}^{3n}\mathbb{I}_{O_{3n}}({}^{3n-1}\dot{\mathfrak{V}}_{3n-1} + \ddot{q}_{3n}\,{}^{3n}\mathfrak{u}_{3n}) + {}^{3n}\boldsymbol{\beta}_{3n} \tag{5.63}$$

En généralisant la méthode pour les autres corps ($j \in \{3n-1, \ldots, 1\}$, on peut alors déterminer les termes inertiels pour les corps $j = 1, \ldots, 3n$:

$$H_j = {}^{j}\mathfrak{u}_j^{Tj}\,{}^{*}\mathbb{I}_{O_j}\,{}^{j}\mathfrak{u}_j \tag{5.64}$$

$${}^{j}\mathbb{KK}_j = {}^{j}\mathbb{I}^{*}_{O_j} - {}^{j}\mathbb{I}^{*}_{O_j}\,{}^{j}\mathfrak{u}_j H_j^{-1}\,{}^{j}\mathfrak{u}_j^{Tj}\,{}^{*}\mathbb{I}_{O_j} \tag{5.65}$$

$${}^{j-1}\mathbb{I}^{*}_{O_{j-1}} = {}^{j-1}\mathbb{I}_{O_{j-1}} + {}^{j}\mathbb{TT}_{j-1}^{T}\,{}^{j+1}\mathbb{KK}_{j+1}\,{}^{j}\mathbb{TT}_{j-1} \tag{5.66}$$

$$\Gamma_j = -K_j q_j - K_{vj}\dot{q}_j \quad ou \quad \Gamma_j = -\frac{2K_j}{l}\frac{\tan(\frac{q_j}{2})}{\cos(\frac{q_j}{2})} - K_{vj}\dot{q}_j \tag{5.67}$$

$${}^{j}\boldsymbol{\alpha}_j = {}^{j}\mathbb{KK}_j\,{}^{j}\boldsymbol{\zeta}_j + {}^{j}\mathbb{I}^{*}_{O_j}\,{}^{j}\mathfrak{u}_j H_j^{-1}\left(\Gamma_j - {}^{j}\mathfrak{u}_j^{Tj}\boldsymbol{\beta}^{*}_j\right) \tag{5.68}$$

$${}^{j-1}\boldsymbol{\beta}^{*}_{j-1} = {}^{j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1} + {}^{j}\mathbb{TT}_{j-1}^{T}\,{}^{j}\boldsymbol{\alpha}_j \tag{5.69}$$

En résumé, cette récursion est initialisée par ${}^{n}\mathbb{I}^{*}_{O_n} = {}^{n}\mathbb{I}_{O_n}$ et ${}^{n}\boldsymbol{\beta}^{*}_{n} = {}^{n}\boldsymbol{\beta}_{n}$ puis les paramètres inertiels de tous les corps sont calculés avec les équations (5.64) à (5.69) en partant du $Corps_{3n}$ jusqu'au $Corps_0$.

Seconde récurrence avant :

Cette étape nécessite la valeur de l'accélération du $Corps_0$ qui peut être différente selon le cas d'étude.

Cas où une seule extrémité est libre : ${}^{0}\dot{\mathfrak{V}}_0 = \begin{bmatrix} {}^{0}\dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{g} \\ {}^{0}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Cas où deux extrémités sont libres : ${}^{0}\dot{\mathfrak{V}}_0 = -\left({}^{0}\mathbb{I}^{*}_{O_0}\right)^{-1}\,{}^{0}\boldsymbol{\beta}^{*}_0$

Ainsi, en utilisant les équations (5.64) à (5.69) les torseurs et les accélérations articulaires sont calculés, en partant du $Corps_0$ jusqu'au $Corps_{3n}$, comme suit :

$$\ddot{q}_j = H_j^{-1}\left[-{}^{j}\mathfrak{u}_j^{Tj}\,{}^{*}\mathbb{I}_{O_j}\left({}^{j}\dot{\mathfrak{V}}_{j-1} + {}^{j}\boldsymbol{\zeta}_j\right) + \Gamma_j - {}^{j}\mathfrak{u}_j^{Tj}\boldsymbol{\beta}^{*}_j\right] \tag{5.70}$$

$${}^{j}\mathfrak{f}_j = {}^{j}\,\mathbb{KK}_j\,{}^{j}\mathbb{TT}_{j-1}\,{}^{j-1}\dot{\mathfrak{V}}_{j-1} + {}^{j}\,\boldsymbol{\alpha}_j \tag{5.71}$$

où

$$ {}^{j}\dot{\mathfrak{V}}_{j} = {}^{j}\mathbb{TT}_{j-1}\,{}^{j-1}\dot{\mathfrak{V}}_{j-1} + {}^{j}\boldsymbol{\zeta}_{j} + \ddot{q}_{j}\,{}^{j}\mathfrak{u}_{j} \tag{5.72} $$

L'algorithme (1) résume le calcul récursif de la dynamique d'un poly-articulé (représentant un système 1D flexible).

Données : $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ **et** $\mathfrak{f}_e$
Début
"*Première récurrence avant* **:**"
Pour *chaque corps* $j = 1$ à n **faire**
Calcul de :
${}^{j}\mathbb{TT}_{j-1}$ (5.1 et 5.11)
${}^{j}\boldsymbol{\omega}_{j}$ (5.56 et 5.57)
${}^{j}\boldsymbol{\zeta}_{j}$ (5.58)
${}^{j}\boldsymbol{\beta}_{j}$ (5.59)
Fin Pour
"*Récurrence arrière* **:**"
Pour *chaque corps* $j = n$ à 1 **faire**
Si ($i = n$) **Alors**
${}^{n}\boldsymbol{\beta}^{*}_{n} = {}^{n}\boldsymbol{\beta}_{n}$
${}^{n}\mathbb{II}^{*}_{O_n} = {}^{n}\mathbb{II}_{O_n}$
Sinon
H_{j} (5.64)
${}^{j}\mathbb{KK}_{j}$ (5.65)
${}^{j}\mathbb{II}^{*}_{O_j}$ (5.66)
${}^{j}\boldsymbol{\alpha}_{j}$ (5.68)
${}^{j-1}\boldsymbol{\beta}^{*}_{j-1}$ (5.69)
Fin Si
Fin Pour
"*Deuxième récurrence avant* **:**"
Pour *chaque corps* $j = 1$ à n **faire**
Calcul des accélérations à chaque articulation :
$\ddot{q}_j$ (5.70)
Calcul des torseurs de forces internes à chaque articulation :
${}^{j}\mathfrak{f}_{j}$ (5.71)
Fin Pour

Retourner Résultat : $\ddot{\mathbf{q}}$ et $\mathfrak{f}$;
Fin

Algorithme 1 – Algorithme de calcul récursif de la dynamique d'un poly-articulé *(Accelerations_PA)*

5.5 Conclusion

Le modèle présenté dans ce chapitre repose sur le modèle dynamique d'un système de corps articulés en série développé par Khalil and Kleinfinger [1986]. Il a été développé pour permettre la simulation numérique de la dynamique d'un fil, d'une corde ou d'une fibre. Les principes du modèle géométrique sont détaillés. De même, le modèle cinématique est décrit et une discussion est menée sur son utilisation pour le passage des vitesses articulaires aux vitesses cartésiennes. Enfin, le modèle dynamique est à son tour détaillé et adapté pour intégrer des lois de comportement physiques permettant au système articulé d'avoir un comportement mécanique le plus réel possible.

L'une des perspectives de ces travaux est de continuer à développer les algorithmes proposés précédemment de façon à optimiser les calculs dans le cas des corps virtuels. De même, le modèle géométrique a besoin de plus de développement pour représenter au mieux la fibre.

6

Simulations de la dynamique d'un système 1-D utilisant le modèle de corps rigides articulés

6.1 Introduction

Le modèle mathématique d'un système 1-D présenté précédemment a été obtenu par l'utilisation d'un algorithme récursif basé sur les équations de Newton-Euler, qui peut être écrit dans la forme concise suivante :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \tag{6.1}$$

C'est un système, d'équations non linéaires, très "raide". La nature complexe du modèle géométrique, les grandes transformations et la loi de comportement du matériau, conduisent à des difficultés numériques pour résoudre le système d'équations différentielles non-linéaires obtenu. La non-linéarité est due aux termes des vitesses correspondant aux forces de Coriolis et à la loi de comportement visco-élastique choisie. Ces difficultés suscitent l'utilisation de schémas d'intégration implicite. Bien que le formalisme en coordonnées généralisées soit efficace pour un système poly-articulé avec un grand nombre d'éléments, il est difficile de réaliser une intégration temporelle avec un schéma implicite. Néanmoins, les formulations en cordonnées réduites ont certains avantages telle que la facilité de paramétrisation de la dynamique avec des raideurs en flexion et en torsion.

Le système d'équations obtenu est classé comme un système d'Équations Différentielles Ordinaires (EDO) de second ordre. Ces difficultés numériques peuvent être réduites par l'utilisation d'un schéma d'intégration implicite.

Le système équivalent, des équations différentielles de premier ordre, dans sa forme implicite est

classé comme un système d'Équations Différentielles Algébriques (EDA) s'écrivant :

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0} \quad avec \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0 \quad et \quad \dot{\mathbf{Y}}(0) = \dot{\mathbf{Y}}_0 \tag{6.2}$$

avec $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$ et $\dot{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}$.

Cette forme implicite est choisie pour utiliser les solveurs numériques EDA qui sont plus efficaces, pour évaluer les dérivées au même pas de temps d'intégration, que les solveurs EDO. La résolution d'un tel système d'équations différentielles nous a orienté vers des schémas d'intégration numérique très sophistiqués. Les solveurs choisis sont "ode15i" et "MEBDFI".

"ode15i" est un solveur disponible dans MATLAB [Shampine, 2002]. Il est de type pas multiples linéaires et basé sur une méthode utilisant des formules de différentiation rétrograde "Backward Differentiation Formulas (BDF)" d'ordre 5 avec un estimateur d'erreur utilisant les itérations de Newton-Modifié. Par contre, "MEBDFI" est un solveur développé par Abdulla et al. [2001] qui utilise aussi le principe des pas multiples rétrogrades et linéaires. Il est plus complexe et d'ordre plus élevé (jusqu'à ordre 8) que "ode15i". Après plusieurs tests, il a été conclu que "ode15i" est suffisant pour étudier la dynamique libre d'un poly-articulé en très grandes transformations. Dans le cas de grandes transformations et contacts "MEBDFI" est le solveur le plus adapté. Dans la suite de ce chapitre, seule l'étude de la dynamique libre est réalisée. Puis, des résultats de simulations présentés dans la littérature, seront reproduits en utilisant le modèle développé dans ce travail dans un but de comparaison.

Dans un premier temps, nous présentons les algorithmes des deux solveurs "ode15i" et "MEBDFI". Ensuite, la validation du modèle dynamique est réalisée en traitant le cas d'une tige se balançant sous l'effet de son propre poids, en se référant aux résultats obtenus par Battocchio et al. [2012]. Puis, ce modèle est confronté à celui développé par Fritzkowski and Kaminski [2008, 2010, 2011] en reproduisant les mêmes simulations. Après cela, une simulation de la dynamique 3-D est proposée pour un système articulé libre, c'est à dire sans élasticité et sans amortissement articulaire, en extension sous l'effet de la gravité et attaché à un support mobile. Enfin, la dynamique d'un fil ondulé, d'une section elliptique, en flexion est simulée pour étudier sa déformation, et les résultats seront comparés aux résultats de Syerko et al. [2012] qui ont étudié la déformation des fils de verre ondulés extraits d'un tissu de fibres verre.

6.2 Schémas d'intégration pour un système d'EDAs

6.2.1 Le solveur Ode15i

Le solveur "Ode15i" proposé par MATLAB intègre les EDAs d'index 1 et de la forme pleinement implicite (6.2). La méthode de formulation différentielle rétrograde utilisée dans "Ode15i" est basée sur une formulation rétrograde d'Euler. Il est supposé que $\mathbf{Y}_n \approx \mathbf{Y}(t_n)$, ce qui définit $\mathbf{Y}_{n+1} \approx \mathbf{Y}(t_{n+1})$ comme une solution de :

$$\mathbf{F}(t_{n+1}, \mathbf{Y}_{n+1}, \frac{\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Y}_n}{h}) = \mathbf{0} \tag{6.3}$$

Cette équation algébrique est résolue de manière itérative. L'itéré $\mathbf{Y}_{n+1}^{[m]}$ est enrichi par l'écriture de l'itéré suivant $\mathbf{Y}_{n+1}^{[m+1]} = \mathbf{Y}_{n+1}^{[m]} + \delta$, approximant l'équation (6.3) par le système d'équations linéaires

$$\mathbf{F}(t_{n+1}, \mathbf{Y}_{n+1}^{[m]}, \frac{\mathbf{Y}_{n+1}^{[m]} - \mathbf{Y}_n}{h}) + (\frac{1}{h}\mathbb{F}_{\dot{\mathbf{Y}}} + \mathbb{F}_{\mathbf{Y}})\delta = \mathbf{0} \tag{6.4}$$

qui est résolu à chaque itération pour pour obtenir la correction δ. En générale la matrice d'itération a la forme :

$$\frac{\alpha}{h}\mathbb{F}_{\dot{\mathbf{Y}}} + \mathbb{F}_{\mathbf{Y}} \tag{6.5}$$

où α est une constante caractéristique du schéma. La construction, la factorisation et le stockage de cette matrice sont les opérations les plus coûteuses du solveur. Les manipulations de cette matrice ont été optimisées dans le solveur, car en général les dérivées partielles varient lentement. Ces dérivées sont évaluées au plus une fois dans le calcul du $\mathbf{Y}_{n+1}$, utilisant la méthode de Newton simplifiée au lieu de la méthode de Newton. Ce qui réduit le taux de convergence, mais il réduit considérablement le nombre d'évaluations des dérivées partielles et de factorisations pour le calcul qui devient largement moins coûteux. Le solveur utilise, dans la mesure du possible, la même matrice d'itération pour plusieurs pas de temps.

Les opérations algébriques dans l'environnement de "Ode15i" sont relativement rapides. Ce solveur est limité par la taille du problème, il n'est pas conçu pour la résolution des systèmes de très grande taille. Le solveur propose l'option du calcul des dérivées partielles numériquement, ce qui coûte cher en temps de calcul CPU. L'efficacité du "Ode15i" face à ce problème réside dans le fait qu'il stocke les dérivées partielles. Quand le coefficient $\frac{\alpha}{h}$ change, une matrice d'itération est formée avec les dérivées partielles stockées et le nouveau coefficient, qui vont être par la suite factorisées. Des nouvelles dérivées partielles sont calculées uniquement quand l'erreur de convergence est inadéquate.

Implémentation

La formule d'ordre k pilotant le schéma "BDF", pour résoudre l'équation (6.3), est basée sur une interpolation polynomiale. Cette interpolation est utilisée pour approximer la solution $\mathbf{Y}(t_{n+1} - jh)$ avec une valeur $\mathbf{Y}_{n+1-j}^*$ pour $j = 0, 1, ..., k$ avec un polynôme $\mathbf{P}(t)$. Ce qui demande la formulation suivante :

$$\dot{\mathbf{P}}(t_{n+1}) = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{P}(t_{n+1})) \tag{6.6}$$

Le polynôme d'interpolation des valeurs de $\mathbf{Y}_{n+1-j}^*$ à un pas de temps t_{n+1-j} pour $j = 0, 1, ..., k$ est le suivant :

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{Y}_{n+1-j} \prod_{i=0, i\neq j}^{k} \left(\frac{t - t_{n+1-i}}{t_{n+1-j} - t_{n+1-i}} \right) \tag{6.7}$$

En multipliant l'équation (6.6)par h et utilisant l'équation (6.7), nous obtenons la formulation "BDF" d'ordre k dans la forme multipas implicite linéaire suivante :

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathbf{Y}^*_{n+1-j} - h\mathbf{f}\left(t_{n+1}, \mathbf{Y}^*_{n+j-1}\right) = \mathbf{0} \tag{6.8}$$

Le système équivalent de celui décrit dans (6.2) à l'instant t_{n+1} est le suivant :

$$\mathbf{F}(t_{n+1}, \mathbf{Y}_{n+1}, \dot{\mathbf{Y}}_{n+1}) = \mathbf{0} \tag{6.9}$$

Le système (6.9) est algébrique non-linéaire pour $\mathbf{Y}_{n+1}$, ce qui donne avec l'équation (6.8) la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \frac{\alpha_0}{h}\mathbf{Y}_{n+1} + \frac{\alpha_1}{h}\mathbf{Y}_n + \sum_{j=2}^{k} \frac{\alpha_j}{h}\mathbf{Y}^*_{n+1-j} \tag{6.10}$$

Le système algébrique (6.9) est résolu de façon itérative comme décrit précédemment. Chaque itération $\mathbf{Y}^{[m+1]}_{n+1}$ est calculée comme une correction δ de l'itération précédente :

$$\mathbf{Y}^{[m+1]}_{n+1} = \mathbf{Y}^{[m]}_{n+1} + \boldsymbol{\delta} \tag{6.11}$$

La formule (6.10) implique une correction de la dérivée de la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{Y}}^{[m+1]}_{n+1} = \dot{\mathbf{Y}}^{[m]}_{n+1} + \frac{\alpha_0}{h}\boldsymbol{\delta} \tag{6.12}$$

La correction $\boldsymbol{\delta}$ est calculée comme solution du système linéaire d'équations algébriques suivant :

$$\left(\frac{\alpha_0}{h}\mathbb{F}_{\dot{\mathbf{Y}}} + \mathbb{F}_{\mathbf{Y}}\right)\boldsymbol{\delta} = -\mathbf{F}(t_{n+1}, \mathbf{Y}^{[m+1]}_{n+1}, \dot{\mathbf{Y}}^{[m+1]}_{n+1}) \tag{6.13}$$

6.2.2 Le solveur MEBDFI

Dans le but d'intégrer le vecteur d'état $[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T_{n+k}$, avec les méthodes traditionnelles, on peut essayer de résoudre avec un calcul direct des dérivées du vecteur d'état $[\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}]^T_{n+k+1}$, qui souvent s'avère complexe surtout dans le cas d'un système contraint (contacts par exemple). Comme les méthodes du calcul direct des dérivées ne sont pas les seules possibles, les solveurs d'équations différentielles algébriques type "MEBDFI" [Mazzia et al., 2012; Abdulla and Cash] sont très efficaces pour intégrer sur un pas de temps le vecteur d'état $[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T_{n+k} \longrightarrow [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T_{n+k+1}$ avec une estimation de ses dérivées $[\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}]^T_{n+k+1}$.

Le solveur "MEBDFI" travaille avec des systèmes d'équations différentielles de degré 1 dans leurs formes implicites (6.2). Soit l'ensemble $\left[\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}\right]^T_{n+k}$ la solution du EDA satisfaisant l'équation (6.2). "MEBDFI" utilise une méthode d'approximation, basée sur le schéma "BDF" d'ordre donné k, pour extrapoler la solution $\mathbf{Y}^1_{n+k+1}$ tout en estimant numériquement la dérivée $\dot{\mathbf{Y}}^1_{n+k+1}$. Typiquement les vecteurs solutions estimés ne satisfont pas l'équation (6.2). Le solveur corrige la solution et sa dérivée par une méthode itérative type Newton-Raphson.

La nouveauté de cette méthode réside dans le calcul du vecteur $\overline{\mathbf{Y}}_{n+k+1}$ appelé "la superfuture

solution" pour une meilleure approximation de la solution $\mathbf{Y}_{n+k+1}$. Elle est basée sur une phase prédicatrice et une phase correctrice comme expliqué dans Cash [1983]. Les propriétés de la méthode sont assurées par les quatre étapes suivantes :

1. Calcul du vecteur $\overline{\mathbf{Y}}_{n+k}$ comme une première approximation de la solution finale. Il est la solution du k-step du schéma conventionnel "BDF" suivant :

$$\mathbf{Y}_{n+k} - h\hat{\beta}_k \mathbf{f}_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j \mathbf{Y}_{n+j} \tag{6.14}$$

   Puis,sa dérivée est approximée avec le même schéma comme suit :

$$\overline{\dot{\mathbf{Y}}}_{n+k} = \frac{1}{h\hat{\beta}_k} \left(\overline{\mathbf{Y}}_{n+k} - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j \mathbf{Y}_{n+j} \right) \tag{6.15}$$

   Maintenant, le système

$$\mathbf{F}(t_{n+1}, \overline{\mathbf{Y}}_{n+k}, \overline{\dot{\mathbf{Y}}}_{n+k}) = \mathbf{0} \tag{6.16}$$

   peut être traité comme un système d'équations algébrique nonlinéaire, où le vecteur $\overline{\mathbf{Y}}_{n+k}$ est le seul inconnu. La solution $\overline{\mathbf{Y}}^*_{n+k}$ de ce système est approximée avec la méthode Newton-Raphson. Puis, une fois encore la dérivée $\overline{\dot{\mathbf{Y}}}^*_{n+k}$ est approximée par la formule (6.15).

2. Cette étape est dédiée au calcul du vecteur "superfuture" $\overline{\mathbf{Y}}^*_{n+k+1}$. D'abord, la future solution est prédite par le vecteur $\overline{\mathbf{Y}}_{n+k+1}$, qui est la solution de

$$\mathbf{Y}_{n+k+1} - h\hat{\beta}_k \mathbf{f}_{n+k+1} = -\hat{\alpha}_{k-1} \overline{\mathbf{Y}}^*_{n+k} - \sum_{j=0}^{k-2} \hat{\alpha}_j \mathbf{Y}_{n+j+1} \tag{6.17}$$

   Puis, la dérivée est calculée comme suit :

$$\overline{\dot{\mathbf{Y}}}_{n+k+1} = \frac{1}{h\hat{\beta}_k} \left(\overline{\mathbf{Y}}_{n+k+1} - \hat{\alpha}_{k-1} \overline{\dot{\mathbf{Y}}}^*_{n+k} - \sum_{j=0}^{k-2} \hat{\alpha}_j \mathbf{Y}_{n+j+1} \right) \tag{6.18}$$

   Le système nonlinéaire

$$\mathbf{F}(t_{n+1}, \overline{\mathbf{Y}}_{n+k+1}, \overline{\dot{\mathbf{Y}}}_{n+k+1}) = \mathbf{0} \tag{6.19}$$

   est résolu de la même façon que le système (6.16). Ensuite, la dérivée $\overline{\dot{\mathbf{Y}}}^*_{n+k}$ est approximée par la formule (6.18).

3. Cette étape joue le rôle du correcteur. Avec la formulation du MEBDF, on peut calculer le vecteur de la dérivée :

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+k} = \frac{1}{h\hat{\beta}_k}\left(\overline{\mathbf{Y}}_{n+k} - h\left(\beta_k - \hat{\beta}_k\right)\overline{\dot{\mathbf{Y}}}^{*}_{n+k} - h\beta_{k+1}\overline{\dot{\mathbf{Y}}}^{*}_{n+k+1} - \sum_{j=0}^{k-2}\hat{\alpha}_j\mathbf{Y}_{n+j+1}\right) \tag{6.20}$$

Le système nonlinéaire

$$\mathbf{F}(t_{n+1}, \mathbf{Y}_{n+k}, \dot{\mathbf{Y}}_{n+k}) = \mathbf{0} \tag{6.21}$$

est résolu avec la méthode itérative de Newton-Raphson, où $\overline{\mathbf{Y}}^{*}_{n+k+1}$ est considérée comme la valeur initiale de l'algorithme. Le vecteur $\mathbf{Y}_{n+k}$ obtenu est la solution finale corrigée du système "EDA" à l'instant t_{n+k}.

Dans les formules présentées précédemment, tous les coefficients $\hat{\beta}_k, \beta_k, \beta_{k+1}$ et α_k pour $j = 1, 2, ..., k-1$ $(k \in [1, 8])$ sont définis par Cash [1980]. L'implémentation des étapes (1), (2) et (3) est rendue très efficace avec la méthode "MEBDF", car cette dernière offre la possibilité d'utiliser la même matrice d'itération $\left(\mathbb{I} - h\hat{\beta}_k\mathbb{J}\right)$ (où $\mathbb{J}$ est l'approximation numérique du Jacobien de $\mathbf{F}$) pour le schéma de Newton-Raphson. $\mathbb{J}$ est formée à chaque fois que la convergence n'est pas atteinte avec l'ancienne matrice $\mathbb{J}$. La solution de l'étape (1) est la meilleure initialisation des itérations de Newton-Raphson de l'étape (3). Le vecteur "superfuture" calculé dans l'étape (2) du pas de temps courant sert comme une excellente initialisation des itérations de Newton-Raphson de l'étape (1) du pas de temps suivant.

Implémentation

Dans l'implémentation du schéma "MEBDFI" un tableau de l'historique des solutions, basé sur la méthode des différences rétrogrades $\nabla\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1}$, est utilisé. Pour $k \in [2, 9]$ le tableau historique des solutions est stocké sous la forme suivante :

$$\mathbf{a}^k(h) = \left(\mathbf{Y}_n, \nabla\mathbf{Y}_n, \nabla^2\mathbf{Y}_n, ..., \nabla^{k-1}\mathbf{Y}_n, \nabla^k\mathbf{Y}_n\right) \tag{6.22}$$

Ce qui donne la formulation suivante du schéma conventionnel "BDF"

$$\mathbf{Y}_{n+k} - \sum_{j=0}^{k-1}\hat{\gamma}_i^{(k)}\nabla^i\mathbf{Y}_{n+k-1} = h\hat{\beta}_k\mathbf{f}_{n+k} \tag{6.23}$$

et celle du "MEBDF" est sous la forme

$$\mathbf{Y}_{n+k} - \sum_{j=0}^{k-1}\gamma_i^{(k)}\nabla^i\mathbf{Y}_{n+k-1} = h\left(\left(\beta_k - \upsilon_k\right)\mathbf{f}_{n+k} + \upsilon_k\overline{\mathbf{f}}_{n+k} + \beta_{k+1}\overline{\mathbf{f}}_{n+k+1}\right) \tag{6.24}$$

où $\upsilon_k = \beta_k - \hat{\beta}^{(k)}$

Les coefficients $\gamma_i^{(k)}$ et $\hat{\gamma}_i^{(k)}$ utilisés dans les nouvelles formulations précédentes sont définis dans [Cash, 1983]

Prédiction :

Dans cette étape seul le vecteur $\mathbf{Y}_n$ est prédit au lieu du tableau de l'historique $\mathbf{a}_n^{(k)}(h)$ entier, car ce dernier peut être obtenu par des procédures très simples introduites dans la suite. La prédiction est réalisée avec l'équation suivante :

$$\mathbf{Y}_{n+k} = \sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{a}_{n,i}^{(k)}(h) \tag{6.25}$$

Ce processus de prédiction est utilisé seulement pour l'étape (2) de l'algorithme (et aussi pour l'étape (1) si le pas de temps h a été modifié). Dans le cas où le pas de temps h n'a pas changé par rapport à celui du pas de temps précédent, la procédure de prédiction pour le pas de temps t_{n+k} est la suivante :

1. l'approximation initiale des itérations de Newton-Raphson pour l'étape (1) est $\left(\overline{\mathbf{Y}}_{n+k}^{(n-1)}, \mathbf{f}_{n+k}^{(n-1)}\right)$
2. l'approximation initiale des itérations de Newton-Raphson pour l'étape (2) est calculée avec la formule (6.25).
3. l'approximation initiale des itérations de Newton-Raphson pour l'étape (3) est $\left(\overline{\mathbf{Y}}_{n+k}^{(n)}, \mathbf{f}_{n+k}^{(n)}\right)$

Correction :

La nouvelle formulation d'un k-step du schéma "BDF" est la suivante :

$$\mathbf{Y}_{n+k} - h\hat{\beta}_k \mathbf{f}_{n+k} = RHS \tag{6.26}$$

où RHS demande d'être déjà calculé avec les valeurs de $\mathbf{Y}_{n+k}^{(p-1)}$ à l'itération précédente. Le schéma classique de Newton modifié est utilisé pour approximer la solution $\mathbf{Y}_{n+k}$

$$\mathbb{J}\left(\mathbf{Y}_{n+k}^{(p)} - \mathbf{Y}_{n+k}^{(p-1)}\right) = -\mathbf{Y}_{n+k}^{(p-1)} + h\hat{\beta}_k \mathbf{f}\left(t_{n+k}, \mathbf{Y}_{n+k}^{(p-1)}\right) + RHS \tag{6.27}$$

Ici $\mathbf{J}$ est une approximation numérique de la matrice d'itération $\left[\mathbb{I} - h\hat{\beta}_k \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{Y}}\left(t_{n+k}, \mathbf{Y}_{n+k}^{(p-1)}\right)\right]$. Une fois que $\mathbf{Y}_{n+k}$ est calculé, la dérivée est calculée comme suit :

$$\mathbf{f}_{n+k}^{(p)} = \frac{1}{h\hat{\beta}_k}\left(\mathbf{Y}_{n+k}^{(p)} - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j \mathbf{Y}_{n+j}\right) \tag{6.28}$$

comme une approximation de la dérivée. Si la convergence de (6.27) n'est pas achevée au bout de quatre itérations, la matrice Jacobienne $\mathbf{J}$ est réévaluée au point $\left(t_{n+k}, \mathbf{Y}_{n+k}^{(0)}\right)$ et si la convergence n'est toujours pas achevée, le pas de temps est réduit de moitié et ensuite la Jacobienne est réévaluée encore une fois. Un processus similaire est utilisé pour le correcteur "MEBDF" où le schéma itératif est le suivant

$$\mathbb{J}\left(\mathbf{Y}_{n+k}^{(p)} - \mathbf{Y}_{n+k}^{(p-1)}\right) = -\mathbf{Y}_{n+k}^{(p-1)} + h\left(\beta_k - \upsilon_k\right)\mathbf{f}\left(t_{n+k}, \mathbf{Y}_{n+k}^{(p-1)}\right) + \overline{RHS} \tag{6.29}$$

Mise à jour du tableau de l'historique :

Le tableau de l'historique $\mathbf{a}^{(k)}_{n+k}(h)$ est mis à jour une fois la solution $\mathbf{Y}_{n+k}$ obtenue. Le calcul est réalisé avec la formule suivante :

$$\begin{gathered}\mathbf{a}^{(k)}_{n+k,1}(h) = \mathbf{Y}_{n+k} \\ \mathbf{a}^{(k)}_{n+k,i}(h) = \mathbf{a}^{(k)}_{n+k,i-1}(h) - \mathbf{a}^{(k)}_{n+k-1,i-1}(h) \\ 2 \leq i \leq k+1\end{gathered} \tag{6.30}$$

6.3 Cas test

6.3.1 Introduction

Battocchio et al. [2012] ont développé un modèle de fibre 2-D en adaptant celui de corps articulés développé par Featherstone [1987], et l'ont testé en simulant la dynamique d'une tige en polymère se balançant comme un pendule sous l'effet de la gravité. Le but de ce cas test est de comparer la dynamique de la tige obtenue par leur modèle avec celle obtenue par le modèle éléments finis type "$B21$" disponible dans le logiciel Abaqus [ABAQUS, 2011].

Le but est de confronter le modèle 3-D généralisé développé précédemment à celui développé par Battocchio et al. [2012] qui est spécifique à un cas 2-D en réalisant le même cas test.

6.3.2 Étude dynamique d'un pendule

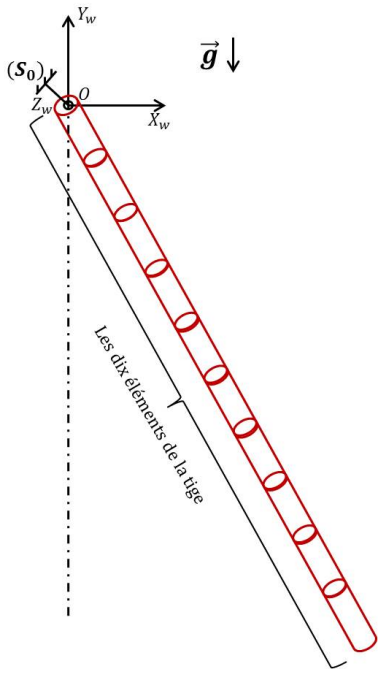
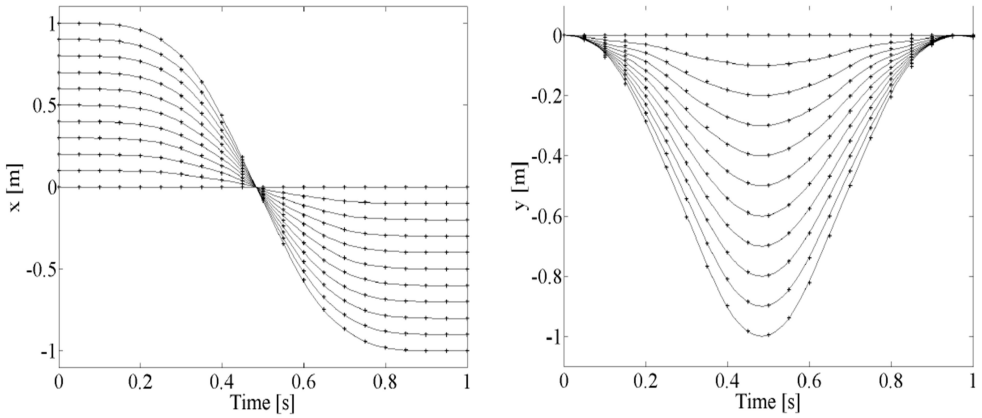


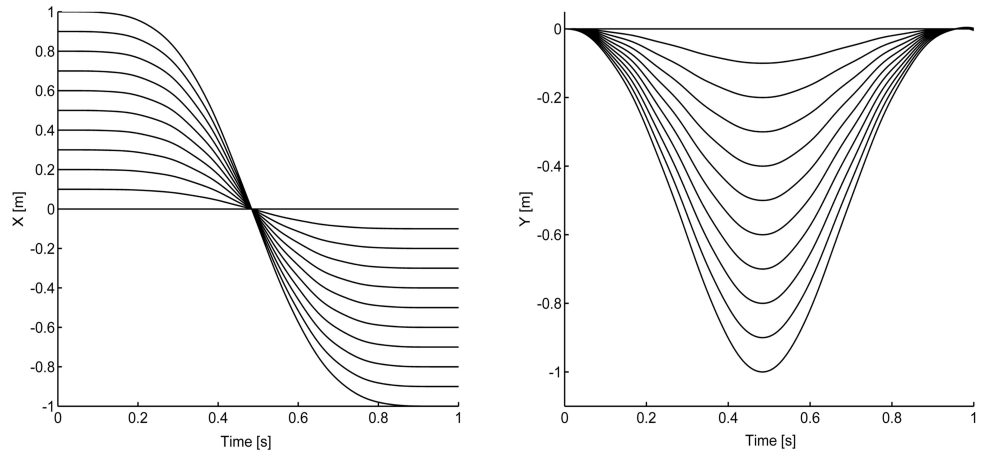
FIGURE 6.1 – Schéma du sytème pendule

Le système étudié est un pendule pesant, de masse M. Il est composé d'une tige cylindrique de longueur $L = 1[m]$, diamètre $d = 1[mm]$, densité volumique $\rho = 950[kg.m^{-3}]$ et moment quadratique $I_{sec} = \frac{\pi d^4}{64}$. La tige est en liaison pivot avec support immobile S_0. Au début de la simulation,

la tige est immobile et horizontale selon l'axe X_w. La seule force exercée sur la tige est celle de la gravité $\overrightarrow{g}$ orientée selon l'axe Y_w avec $g = -9.81[m.s^{-2}]$ (voir la Figure 6.1).



(a)



(b)

FIGURE 6.2 – Comparaison des positions X et Y, de chaque corps de la tige durant son balancement, obtenues par [Battocchio et al., 2012], avec leur modèle $(-)$ et Abaqus $(+)$ (a) à celles obtenues dans ce travail (b)

La simulation du balancement, autour de l'axeZ_w, de la tige en polymère depuis sa position horizontale est réalisée dans MATLAB en utilisant le modèle dynamique récursif développé dans ce travail. La position de chaque corps est obtenue par l'intégration du système d'équations (6.2) en utilisant le solveur "ode45" basé sur la méthode d'intégration Range-Kutta d'ordre 4 et 5 avec pas de temps adaptatif.

La Figure (6.2) montre une très bonne bonne concordance entre les positions des nœuds du système obtenues avec notre modèle et celles de [Battocchio et al., 2012]. Cette concordance conforte la validité du modèle développé dans ce travail. Ce cas test est simple à résoudre numériquement, car le système d'équations différentielles issu du modèle étudié est linéaire et raide. La nature linéaire et raide du système est due au fait que la tige est rigide et ne se déforme pas pendant le balancement. Ce cas test a été choisi pour valider les algorithmes du modèle dynamique développé dans ce travail.

6.4 Modélisations et simulations numériques d'une corde en chute libre

6.4.1 Introduction

La dynamique d'une corde peut être un cas d'application idéal de notre modèle présenté précédemment. Ce cas d'étude a souvent été considéré comme un problème classique mais complexe et attire la curiosité de beaucoup de scientifiques. On s'intéresse ici à reproduire les simulations de la chute libre d'une corde ou chaînette proposées par [Fritzkowski and Kaminski, 2008, 2010]. Il s'agit de comprendre le mouvement d'ensemble d'une chaînette, dont une extrémité est attachée à un support rigide, tandis que l'autre peut se mouvoir librement.

6.4.2 Modélisation et simulation dynamique d'une chaînette

La corde étudiée par [Fritzkowski and Kaminski, 2008] est considérée comme une chaînette et composée de tiges rigides de longueur l et masse m identiques. Ces éléments sont connectés par des liaisons idéales (sans frottement et sans raideur). Il a été supposé que chaque élément est une tige cylindrique rigide ainsi, le modèle le plus simple discret d'une corde, qui est en fait un système de pendules physiques multiples, est obtenu (Figure 6.3). Les conditions limites, de la chaînette ayant une extrémité fixe, sont exprimées par le système d'équations suivant :

$$ {}^{w}\mathbf{P}_{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.31a} $$

$$ {}^{w}\mathbf{V}_{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.31b} $$

$$ \tag{6.31c} $$

$$ {}^{w}\dot{\mathbf{V}}_{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.31d} $$

Tandis que, les conditions initiales du système sont les suivantes :

- les vitesses articulaires du système sont nulles $\left\{ \dot{q}_i(t=0) = 0 \quad pour \quad i = 1, 2, ..., n \right\}$
- la configuration initiale est une configuration de chaînette avec la position de son extrémité libre : $x = 0.2m$, $y = -0.5m$, $z = 0m$

Dans cette partie la chaînette a été représentée par le système des corps articulés développé précédemment. Les corps rigides du système sont des cylindres de même longueur $nl = 1m$, diamètre

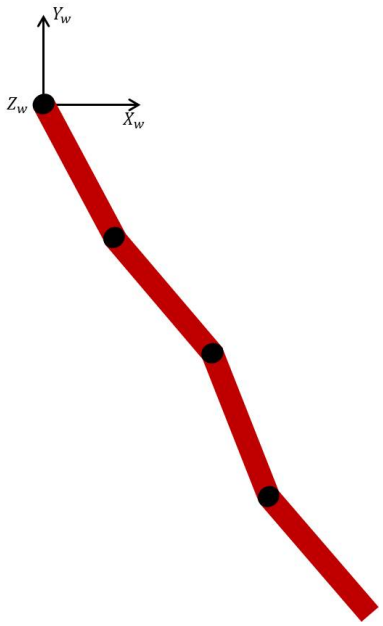
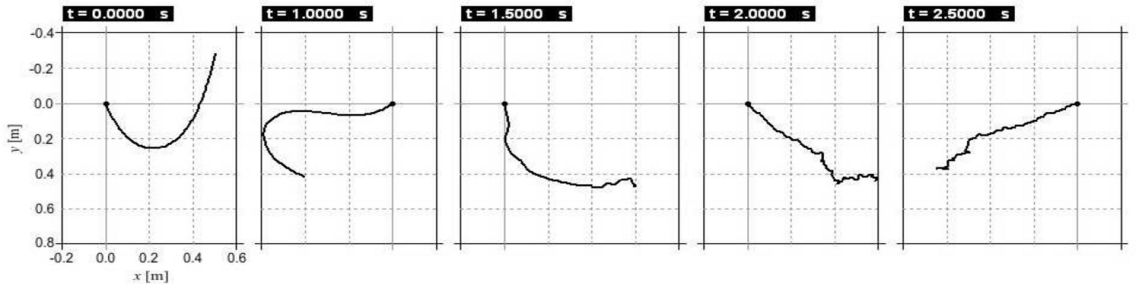


FIGURE 6.3 – Système de pendules physiques multiples représentant la chaînette

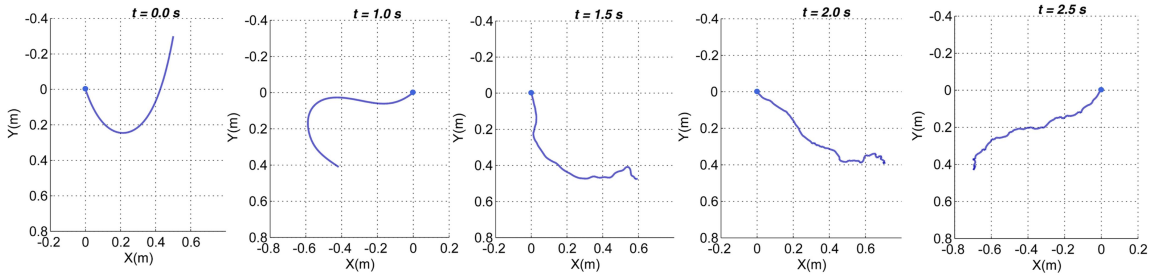
$d = \frac{nl}{10}$ et masse $nm = 0.5kg$, mais différents nombres de corps : $n = 30$, $n = 45$ et $n = 70$. Ces données sont issues du travail de Fritzkowski and Kaminski [2008], auquel nous confrontons nos résultats.

Dans un premier temps, trois simulations de la chute libre d'une chaînette ont été réalisées avec le modèle dynamique proposé dans ce travail pour trois nombres différents d'éléments : $n = 30$, $n = 45$ et $n = 70$. La comparaison des configurations de ces trois systèmes a montré quelques différences en $t = 1.5s$, $t = 2.0s$ et $t = 2.5s$. La raison de ces différences est la discrétisation de la corde qui mène à une légère différence des configurations initiales. Une simulation a été exécutée avec un système articulé avec $n = 80$ corps puis comparée au configurations obtenues pour $n = 70$ corps, ainsi aucune différence significative n'a été notée. Par conséquent, les configurations obtenues pour n très grands sont compatibles.

Dans un second temps, une comparaison des configurations obtenues dans [Fritzkowski and Kaminski, 2008] (Fig. 6.4a) à celles obtenues avec notre modèle (Fig. 6.4b) pour un système de $n = 70$ corps est réalisée et quelques différences sont notées en $t = 1.5s$, $t = 2.0s$ et $t = 2.5s$. Cependant, ces différences proviennent du fait que les schémas d'intégrations utilisés dans les deux simulations sont différents. Fritzkowski and Kaminski [2008] ont utilisé le code "MEBDFV" développé par Abdulla et al. [2001] pour le système d'Equations Différentielles Algébriques obtenu par application du formalisme de Lagrange, alors que dans ce travail c'est le solveur "ode15i" [Shampine, 2002] disponible dans MATLAB qui a été utilisé. Les deux solveurs sont basés sur la méthode "Backward Differentiation Formula (BDF)" qui est une méthode implicite pour l'intégration numérique des systèmes d'équations différentielles ordinaires, elle est constituée de plusieurs étapes linéarisées donnant une approximation de la dérivée de la fonction traitée pour un temps donné à l'aide des informations issues du pas de temps d'avant, ce qui augmente la précision de l'approximation. La principale différence entre "ode15i" et "MEBDFV" est que ce dernier incorpore une étape importante incluant la valeur $\mathbf{Y}_{i+1}$ appelée "Superfuture" pour optimiser la qualité de la solution et la stabilité numérique.



(a)



(b)

FIGURE 6.4 – Comparaison entre les configurations d'une corde en chute libre (a) obtenues dans Fritzkowski and Kaminski [2008] et (b) avec le modèle proposé pour $n = 70$

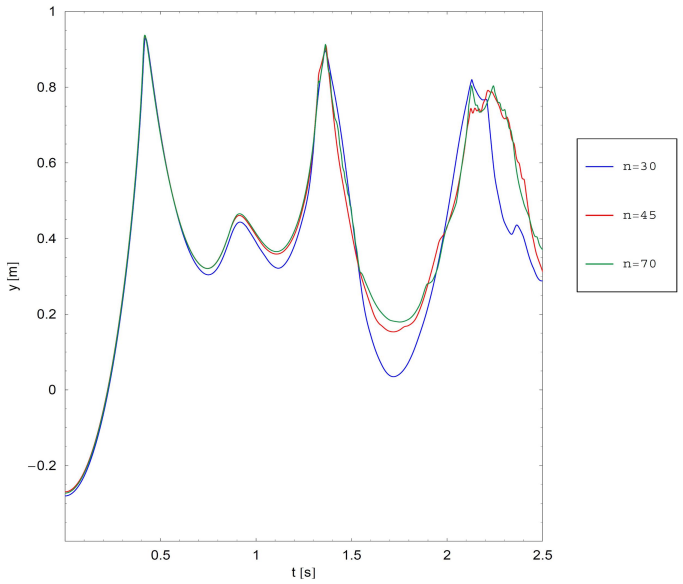
Pour illustrer ce point, les positions en Y de l'extrémité libre de la corde, obtenues avec notre modèle et celles obtenues dans [Fritzkowski and Kaminski, 2008], sont représentées en fonction du temps dans la Figure (6.5).

L'analyse est complétée en calculant l'évolution temporelle de l'énergie totale du système avec $n = 70$. Au début, le système a une énergie cinétique nulle et une énergie potentielle non nulle due aux conditions initiales. Comme attendu, la Figure (6.6) montre que durant la chute de la corde, l'énergie cinétique du système augmente pendant que l'énergie potentielle diminue. L'énergie totale calculée du système reste constante durant la simulation. Le caractère conservatif de l'énergie totale du système est respecté grâce aux solveurs temporels "Ode15i" et "MEBDFI". Les solveurs cités précédemment ont pu capturé les instabilités numériques intervenant quand la corde devient approximativement tendue et quand le système devient chaotique à cause des rotations complètes des éléments autour de leurs axes de rotation qui sont rapides et non physiques.

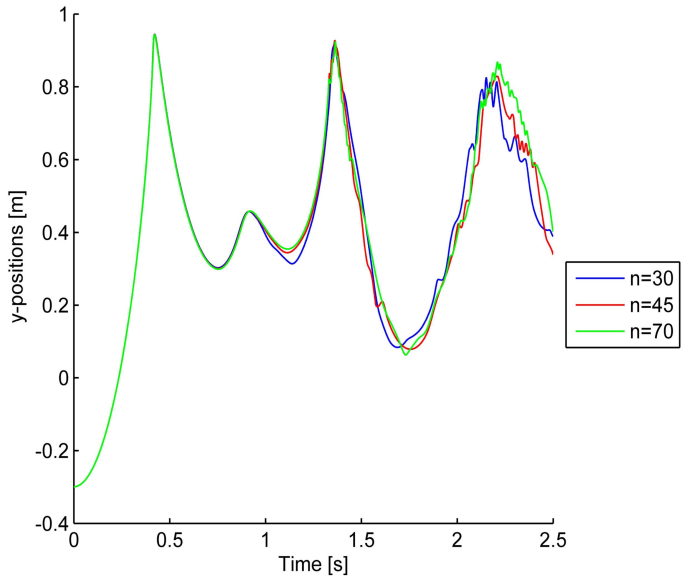
Pour supprimer des rotations soudaines et complètes des éléments (les coordonnées généralisées relatives q_j ne dépassent pas $\pm\pi$), spécialement pour le dernier élément, les articulations élastiques sont nécessaires. Incontestablement, le fait d'intégrer de l'amortissement et de l'élasticité dans chaque articulation permet de mieux modéliser la dynamique d'une corde souple.

6.4.3 Modélisation et simulation dynamique d'une corde

En se référant à [Fritzkowski and Kaminski, 2010], un modèle d'une corde homogène est mis en place avec $n = 20$ segments et masse totale $nm = 0.1\ kg$. Le modèle dynamique utilisé est celui qui a été développé précédemment avec une raideur articulaire identique $k = 1e^{-3}\ N.m^2$ à chaque



(a)



(b)

FIGURE 6.5 – Positions en Y de l'extrémité libre de la corde pour différents nombres d'éléments obtenues (a) par Fritzkowski and Kaminski [2008] et (b) par notre modèle

articulation. La configuration initiale de la corde est celle d'une chaînette équivalente attachée aux deux extrémités aux points suivants : $(X = 0\ m, Y = 0\ m)$ et $(X = 0.4\ m, Y = 0\ m)$. Au début de la simulation, les vitesses articulaires sont supposées nulles.

Le modèle suppose que l'élasticité est issue d'une relation de la résistance des matériaux et non-linéaire. Elle est exprimée en fonction du moment de flexion et du rayon de courbure d'une poutre. Ce qui exprime le moment de flexion, exercé sur chaque articulation, en une fonction des coordonnées généralisées et de la raideur k_j comme suit :

$$M_j = -\frac{2k_j}{l}.\frac{tan(\frac{\theta_j}{2})}{cos(\frac{\theta_j}{2})} \tag{6.32}$$

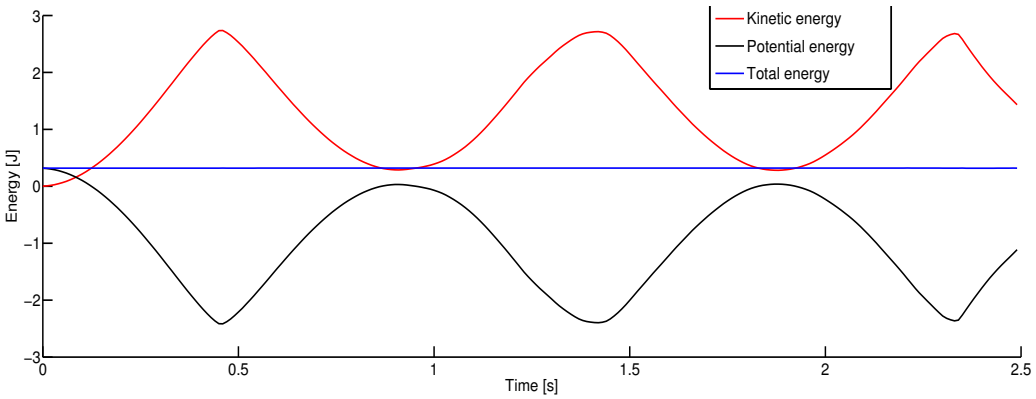


FIGURE 6.6 – Bilan énergétique du système poly-articulé (chaînette) avec $n = 70$

Le couple exercé sur chaque élément du système peut être exprimé de la manière suivante :

$$Q_j^T = \begin{cases} M_i - M_{i+1}, & for \quad i = 1, 2, ..., n-1, \\ M_i, & for \quad i = n. \end{cases} \tag{6.33}$$

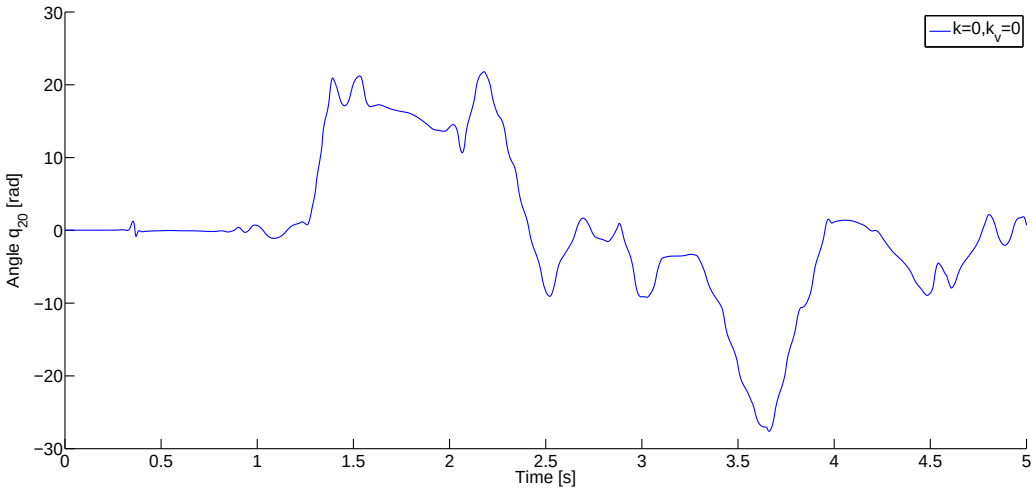


FIGURE 6.7 – Orientations relatives des deux derniers éléments du système sans élasticité et sans amortissement

La Figure (6.7) montre que dans le cas d'un système articulé, sans élasticité et sans amortissement, de très grandes variations de la valeur de la position articulaire de la dernière articulation sont observées. Ces variations proviennent du fait que le dernier élément réalise plusieurs rotations complètes et rapides autour de son axe. Ce comportement engendre des complications et des instabilités numériques importantes.

Pour remédier à ce phénomène, nous avons introduit une loi de comportement élastique non-linéaire et de l'amortissement à chaque articulation du système. Ainsi, grâce à la raideur l'orientation relative entre les deux derniers éléments ne dépasse pas $\pm\pi$, c'est à dire que le dernier élément ne peut plus faire des rotations complètes autour de son axe (Figure 6.8). Puis, l'introduction de l'amortissement en plus de la raideur donne un comportement plus réel au système.

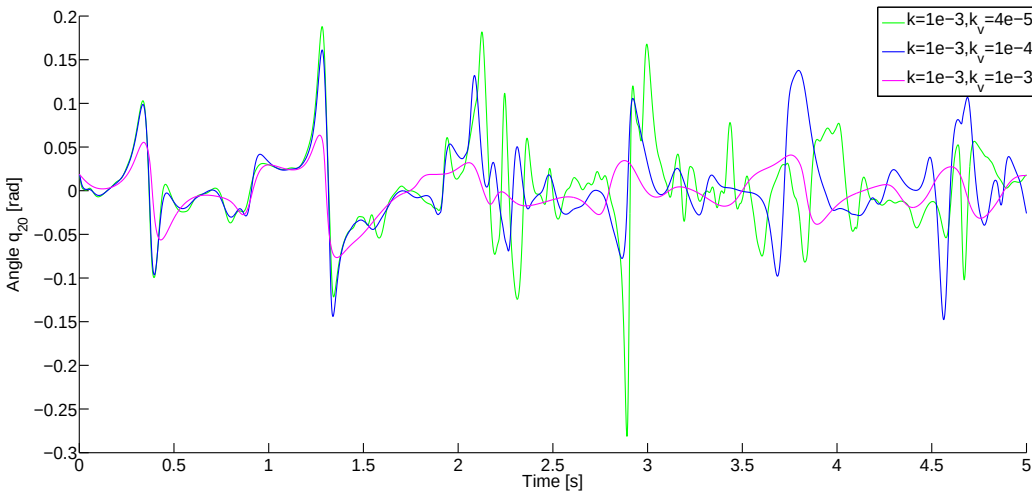


FIGURE 6.8 – Orientations relatives des deux derniers éléments du système avec élasticité et amortissement

6.5 Modélisation et simulation numérique d'un mouvement en spirale 3-D d'une chaînette (Problème de fouet)

Cet exemple traite le cas d'un mouvement 3-D d'une chaînette à l'aide du modèle développé dans ce travail et des mouvements complexes du support mobile auquel la chaînette est attachée. A l'instant $t_0 = 0s$, la chaînette est en extension totale selon l'axe Z_0, le support mobile est positionné au point $(X = 0\ m, Y = 0\ m)$ et les positions et vitesses articulaires du système articulé sont nulles.

$$ {}^{w}\mathbf{P}_{0} = \begin{bmatrix} R(t).A.sin(\pi.B.t) \\ R(t).A.sin(\pi.B.t + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.34a} $$

$$ {}^{w}\mathbf{V}_{0} = \begin{bmatrix} R(t).A.\pi.B.cos(\pi.B.t) + \dot{R}(t).A.sin(\pi.B.t) \\ R(t).A.\pi.B.cos(\pi.B.t + \frac{\pi}{2}) + \dot{R}(t).A.sin(\pi.B.t + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.34b} $$

$$ {}^{w}\dot{\mathbf{V}}_{0} = \begin{bmatrix} -R(t).A.(\pi.B)^2.sin(\pi Bt) + 2.\dot{R}(t).A.\pi.B.cos(\pi.B.t) + \\ \ddot{R}(t).A.sin(\pi.B.t) \\ -R(t).A.(\pi.B)^2.sin(\pi Bt + \frac{\pi}{2}) + 2.\dot{R}(t).A.\pi.B.cos(\pi.B.t + \frac{\pi}{2}) + \\ \ddot{R}(t).A.sin(\pi.B.t + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.34c} $$

Les conditions limites du système sont les positions, vitesses et accélérations du support mobile et exprimées par le système d'équations (6.34) et (6.35). A et B sont respectivement des constantes géométrique (amplitude du mouvement du support) et temporelle (fréquence du changement de mouvement du support) ayant les valeurs suivantes : $A = 0.025\,[m]$ et $B = 5\left[s^{-1}\right]$. Ces paramètres sont ceux des fonctions (6.34) et (6.35) pilotant le mouvement du support mobile (voir les Figures 6.10 et

6.9) de façon à générer un mouvement complexe suivant deux trajectoires spirales et une circulaire dans le plan (O, X, Y). Le mouvement du support est composé de cinq étapes différentes en partant de sa position initiale $(X = 0, Y = 0)$ (Figure 6.10b):

1. Le support est immobile, condition exprimé par le système (6.34) avec les conditions (6.35a) ;
2. Le support suit une trajectoire spirale sortante depuis sa position initiale jusqu'à atteindre la position $(X = 0, Y = A)$, condition exprimée par le système (6.34) avec les conditions (6.35b) ;
3. Le support réalise un mouvement circulaire depuis la position $(X = 0, Y = A)$ jusqu'à la position $(X = 0, Y = -A)$, condition exprimée par le système (6.34) avec les conditions (6.35c) ;
4. Le support suit une nouvelle trajectoire spirale, qui est cette fois ci entrante depuis la position $(X = 0, Y = -A)$ pour atteindre la position initiale $(X = 0, Y = 0)$, condition exprimée par le système (6.34) avec les conditions (6.35d) ;
5. Enfin Le support reste immobile jusqu'à la fin de la simulation, condition exprimée par le système (6.34) avec les conditions (6.35e).

$$\begin{cases} R(t) &= 0 \\ \dot{R}(t) &= 0 \\ \ddot{R}(t) &= 0 \end{cases} \quad pour \quad (t = 0) \tag{6.35a}$$

$$\begin{cases} R(t) &= B.t - \frac{sin(2.\pi.B.t)}{2.\pi} \\ \dot{R}(t) &= B.(1 - cos(2.\pi.B.t)) \\ \ddot{R}(t) &= 2.\pi.B^2.sin(2.\pi.B.t) \end{cases} \quad pour \quad (\tfrac{1}{B} \geq t > 0) \tag{6.35b}$$

$$\begin{cases} R(t) &= 1 \\ \dot{R}(t) &= 0 \\ \ddot{R}(t) &= 0 \end{cases} \quad pour \quad (\tfrac{1.5}{B} \geq t > \tfrac{1}{B}) \tag{6.35c}$$

$$\begin{cases} R(t) &= 1 - B.(t - \frac{1.5}{B}) - \frac{sin(-2.\pi.B.(t - \frac{1.5}{B}))}{2.\pi} \\ \dot{R}(t) &= B.(-1 + cos(-2.\pi.B.(t - \frac{1.5}{B}))) \\ \ddot{R}(t) &= -2.\pi.B^2.sin(2.\pi.B.(t - \frac{1.5}{B})) \end{cases} \quad pour \quad (\tfrac{2.5}{B} \geq t > \tfrac{1.5}{B}) \tag{6.35d}$$

$$\begin{cases} R(t) &= 0 \\ \dot{R}(t) &= 0 \\ \ddot{R}(t) &= 0 \end{cases} \quad pour \quad (t > \tfrac{2.5}{B}) \tag{6.35e}$$

Au début de la simulation, le système est en extension totale selon l'axe Z_0. La gravité est appliquée selon l'axe Z_0 durant toute la simulation. La combinaison du mouvement en spirale du support et la gravité génère une onde mécanique spirale tridimensionnelle traversant la corde depuis son extrémité attachée au support jusqu'au son autre extrémité. Une fois que l'onde mécanique a atteint le bout de la corde, elle se régénère pour faire le chemin inverse. Ensuite cette onde s'évanouit une fois atteinte le support immobile laissant le système en été chaotique.

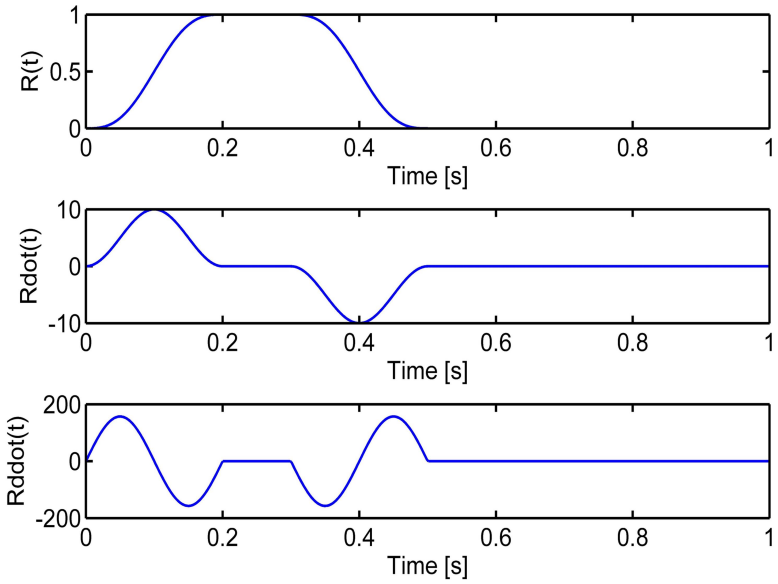


FIGURE 6.9 – Fonction rampe et ses dérivées

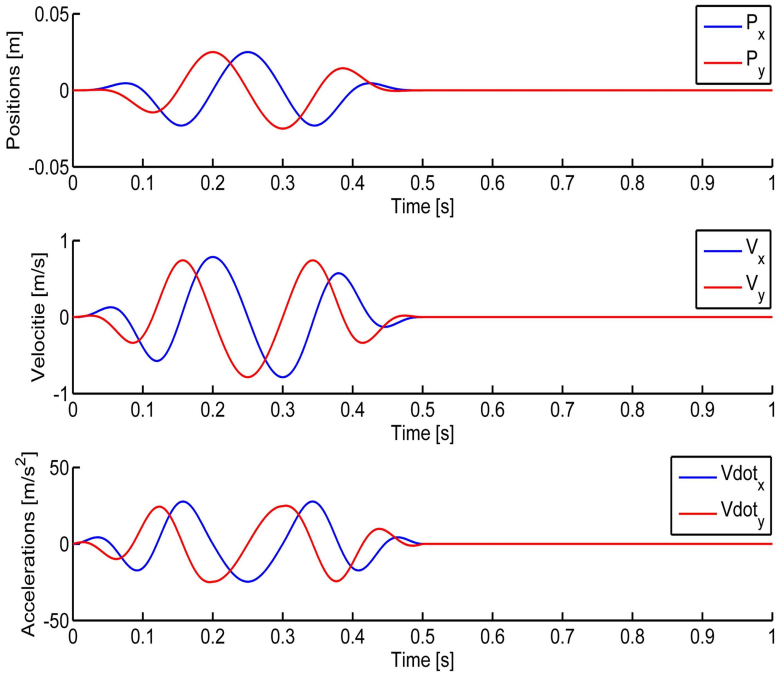
Dans le but de comprendre la propagation de l'onde spirale tridimensionnelle le long de la corde, le bilan énergétique du système est réalisé. La Figure 6.11 montre l'évolution temporelle de l'énergie totale des différents éléments du système ce qui représente la propagation de l'onde mécanique spirale le long de la corde. Des oscillations aigues et d'amplitudes variables de l'énergie totale apparaissent pour les cinq derniers éléments (Figure 6.11), ce qui traduit l'inversion de la propagation de l'onde. Puis, il est observé l'apparition d'autres oscillations moins importantes dues aux bruits numériques issus du schéma d'intégration utilisé, et qui persistent jusqu'à la fin de la simulation.

L'énergie totale du système augmente grâce au mouvement du support jusqu'à qu'il retourne à sa position initiale avec vitesse et accélération nulles. Ensuite, le système devient conservatif avec une énergie totale constante (voir la Figure 6.12). Sont aussi observées certaines fluctuations qui semblent être les conséquences de la destruction de l'onde mécanique après avoir atteint l'autre extimité de la chaînette.

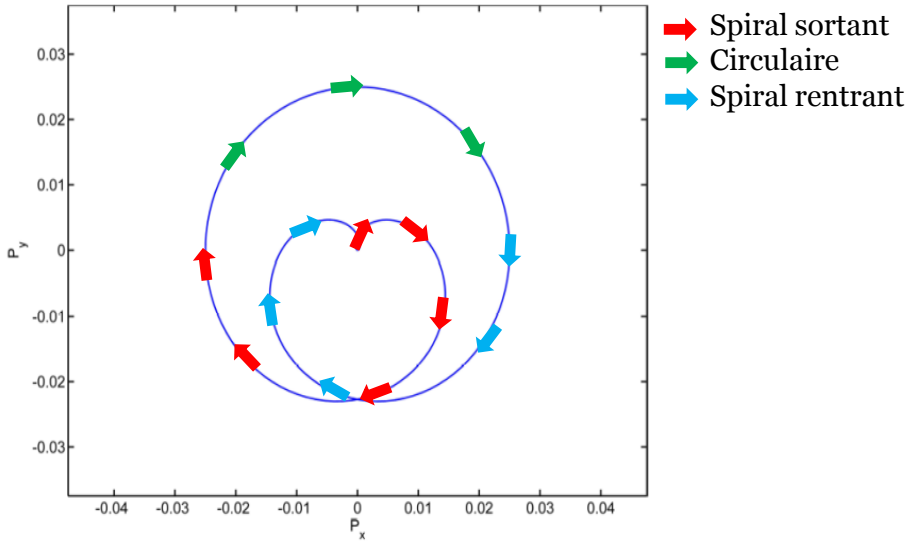
6.6 Modélisation et simulation numérique de la flexion d'un fil ondulé

Dans cette partie, le modèle développé et décrit dans ce chapitre a été utilisé pour prédire le comportement en flexion d'un fil ondulé en flexion. Le fil étudié est celui analysé par Syerko et al. [2013] qui ont proposé un modèle analytique d'un fil de verre ondulé pour étudier sa déformation statique en flexion simple. Ce fil étudié est extrait d'un tissu en fibres de verre et il a gardé sa forme ondulée due à l'entrelacement des fils.

La dynamique du fil en flexion est simulée à l'aide de notre modèle de corps articulés en intégrant de l'élasticité et de l'amortissement à chaque articulation du système. L'exemple numérique réalisé concerne l'analyse des valeurs des moments et forces tangentielles à chaque articulation et les profils



(a)



(b)

FIGURE 6.10 – Fonctions de contraintes (a) et la trajectoire du support (b)

du fil durant sa flexion sous l'effet de son propre poids. Le fil est considéré comme une poutre ondulée encastrée à une extrémité (voir la Figure 6.13) avec une longueur $L = 0.24\,[m]$; sa masse linéique, sa description géométrique et son module d'Young sont résumés dans le tableau 6.1. Le fil est supposé homogène, incompressible et transversalement isotrope avec une section elliptique (données extraites depuis les observations expérimentales de Syerko et al. [2013]).

La poutre ondulée est représentée par une courbe sinusoïdale orientée selon de l'axe X (Figure

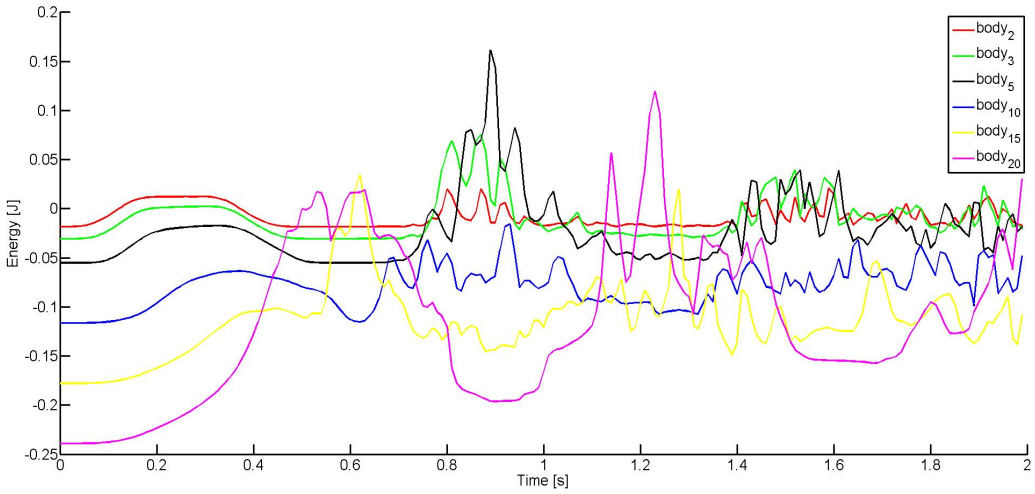


FIGURE 6.11 – Énergie totale des différents éléments illustrant la propagation de l'onde spirale

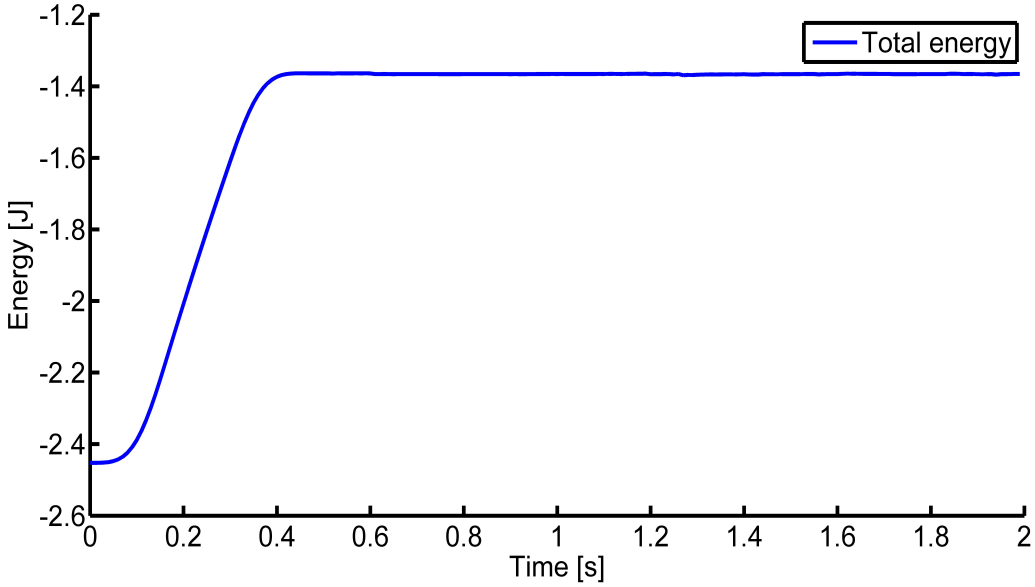


FIGURE 6.12 – Évolution de l'énergie totale du système

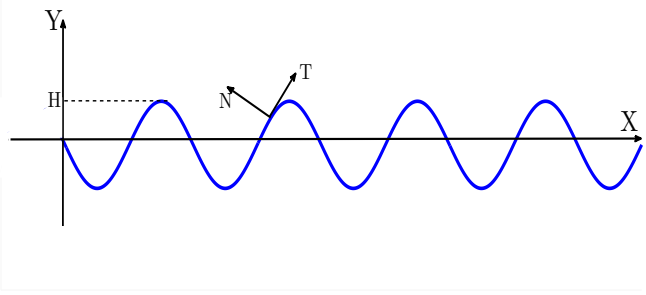


FIGURE 6.13 – Poutre ondulée

6.13). Il est supposé que la ligne moyenne de la poutre reste dans le plan (X, Y), ce qui signifie que la poutre subit une déformation plane durant la flexion. Un tel problème est étudié avec un système de corps articulés utilisant le modèle développé dans ce travail.

Les ondulations du fils sont représentées par la fonction sinusoïdale suivante :

TABLE 6.1 – Paramètres géométriques et mécaniques du fil de verre ondulé [Syerko et al., 2013]

	Masse linéique, kg/m	Amplitude de l'ondulation H,m	Longueur d'ondulation m	Module élastique E, GPa
Fil de verre ondulé	0.00058	0.00023	0.0063	43

$$Y(X) = H.sin(\frac{2.\pi.n.X}{L}) \tag{6.36}$$

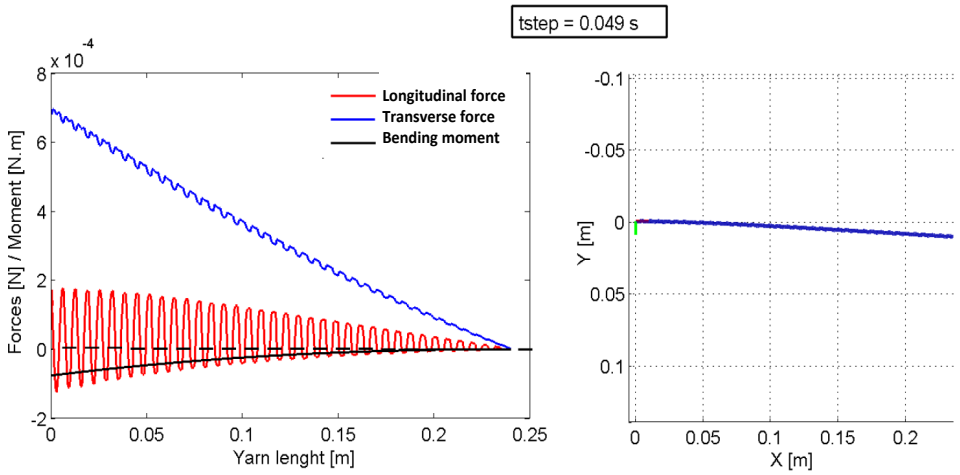
où H et n sont respectivement l'amplitude de l'ondulation et le nombre d'ondes.

Les observations menées par Syerko et al. [2013]) montrent que la section transverse du fil est supposée de forme elliptique avec le demi grand axe a et le demi petit axe $b = \frac{H}{2}$. Les données géométriques du fil sont issues des mesures réalisées sur le tissu d'origine avec l'hypothèse qu'il n'y ait aucun écart entre les fils de chaîne et les fils de trame. Ainsi, le moment d'inertie I de la section transverse et la raideur, sous l'hypothèse des petites déformations, du fil sont respectivement exprimés comme suit : $I_{sec} = \pi.a.\frac{b^3}{4}$ et $k = \frac{I_{sec}.E}{l}$.

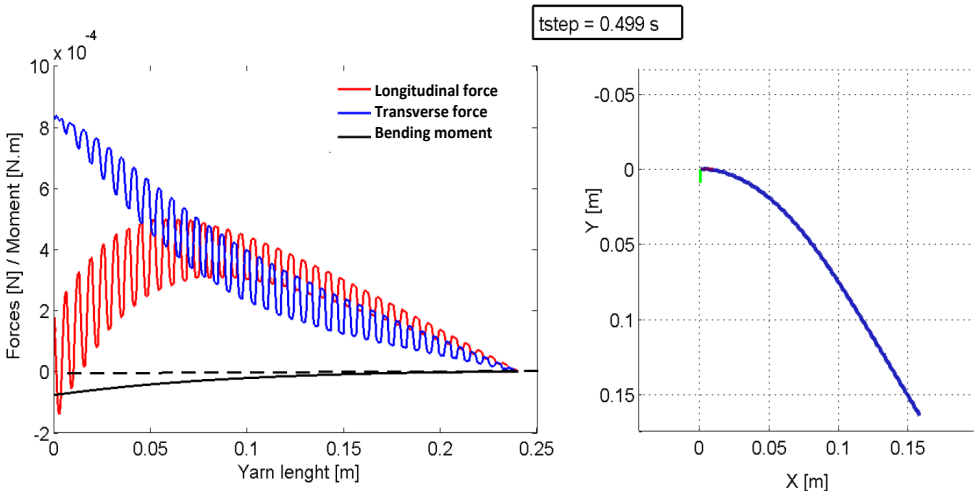
L'évolution des valeurs des forces transversales et longitudinales et moments est analysée en utilisant l'équation (5.52). Ces valeurs sont enregistrées en fonction du temps pour comprendre la nature des contraintes internes du fil en flexion durant ses oscillations jusqu'à atteindre sa position d'équilibre. Il est observé à travers les Figures 6.14 et 6.15 que la force transversale de cisaillement est toujours plus élevée en ordre de grandeur que les forces longitudinales, et cette tendance n'est valable que dans le domaine des petites déformations. Dans le domaine des grandes déformations, cette tendance est inversée pour les trois derniers quarts du fil. Au début de la simulation (petites déformations), la force longitudinale seule présente des oscillations importantes illustrant la présence de deux types de contraintes internes, celles de compression (valeurs négatives) et celles de traction (valeurs positives). Ce constat est en accord avec les résultats obtenus par Syerko et al. [2013]. Durant les dernières étapes de la simulation (grandes déformations), les contraintes de compression diminuent jusqu'à leur disparition, cependant les contraintes de traction augmentent tout en conservant leur nature sinusoïdale. Pendant ce temps là, des oscillations importantes de la courbe des valeurs de la force transversale apparaissent progressivement.

6.7 Conclusion

Ce chapitre étudie le modèle du système de corps articulés présenté précédemment et propose des cas d'application issus de la littérature. Ce qui a permet d'étudier le système d'équations différentielles engendré par le modèle dynamique 3-D utilisé. Il est démontré que ce système d'équations appartient



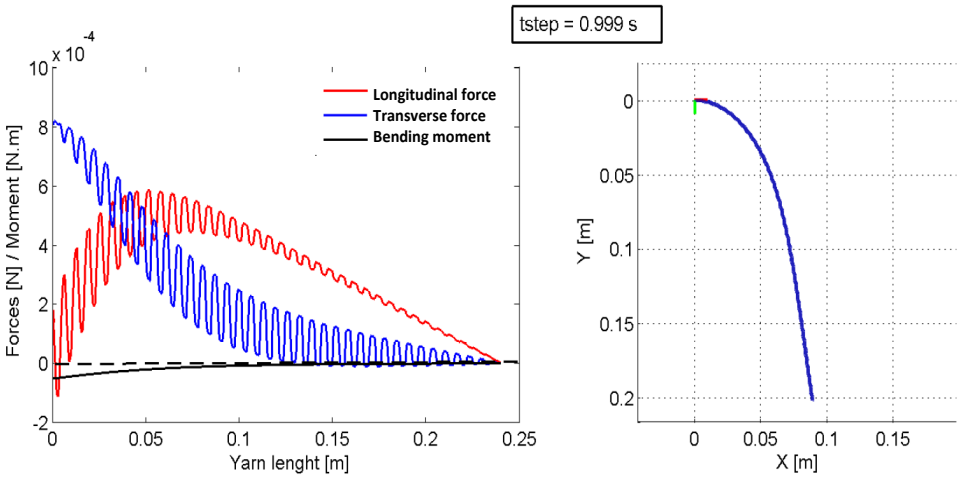
(a)



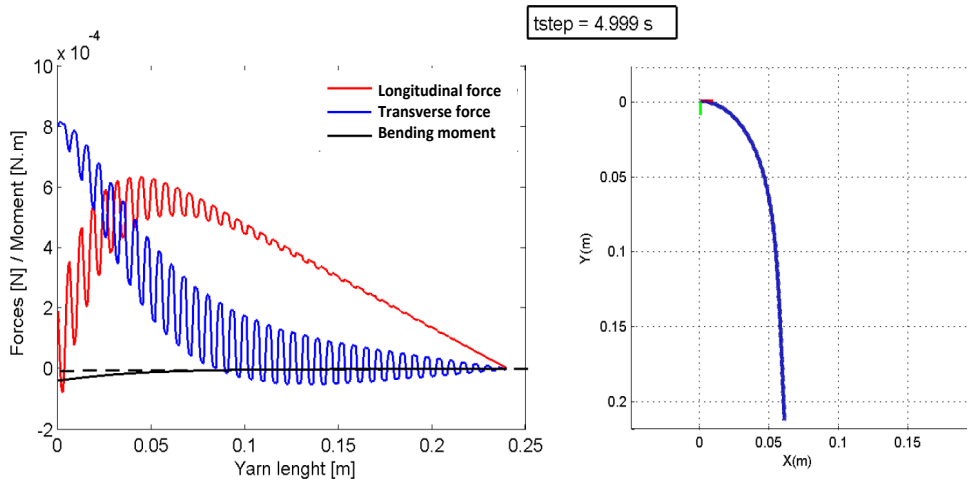
(b)

FIGURE 6.14 – Les forces longitudinales et transversales correspondant à différents profiles du fil à différent instants de la simulation

à la classe des systèmes d'équations différentielles algébriques nécessitant un schéma d'intégration implicite et sophistiqué.



(a)



(b)

FIGURE 6.15 – Les forces longitudinales et transversales correspondant à différents profiles du fil à différents instants de la simulation (Suite)

D'abord, les algorithmes du modèle développé dans ce travail ont été validés par le cas test du pendule proposé par Battocchio et al. [2012]. Puis le modèle a été confronté à des cas tests, issus

des travaux de Fritzkowski and Kaminski [2008, 2010], permettant de tester la robustesse numérique du modèle. Enfin, le modèle a été utilisé pour étudier le comportement mécanique d'un fil de verre ondulé en reprenant l'analyse faite par Syerko et al. [2013].

Les résultats des cas tests démontrent que les solveurs basés sur la méthode BDF sophistiquée, tel que MEBDF développé par Abdulla et al. [2001], sont les plus adaptés aux problèmes physiques gouvernés par des systèmes d'équations différentielles algébriques. De plus, le modèle est facilement adaptable pour passer d'un cas 2-D à un cas 3-D tout en conservant sa complexité linéaire en temps de calcul et aussi capable de traiter des géométries complexes.

Incontestablement, le modèle dynamique 3-D d'un système articulé basé sur des algorithmes récursifs présente de grandes capacités pour étudier la dynamique des différentes échelles de fibres $(\mu \leq diametre \leq m)$. La structure du modèle lui permet de traiter un milieux fibreux en interaction avec la capacité de traiter chaque fibre individuellement subissant l'ensemble des contacts du milieu. Cet aspect fait l'objet de la troisième partie de cette thèse.

IV

Modélisation des interactions entre fibres constituant une mèche

7

Introduction

Les mèches sèches que nous cherchons à modéliser sont constituées d'un ensemble de fibres continues et unidirectionnelles présentant plus au moins d'enchevêtrement. Les interactions par contact entre ces fibres et leur comportement en flexion jouent un rôle fondamental dans la mécanique de la mèche. Nous cherchons à modéliser l'influence de la dynamique de la dépose, durant le procédé, sur le comportement de la mèche. Cette simulation à l'échelle des fibres permettra de comprendre les phénomènes physiques à un échelle microscopique qu'il est difficile d'analyser expérimentalement.

Cette partie est consacrée aux aspects généraux sur la gestion des contacts frottants entre fibres, en particulier la construction du système d'équations traitant les problèmes de complémentarité linéaire liés aux contacts. Pour cette étude un modèle dynamique d'une chaîne de corps poly-articulés a été choisi pour la simulation de la dynamique d'une fibre en grande transformation subissant des forces extérieures. Une méthode par contrainte avec un algorithme itératif, issue des travaux de Jean [1992, 1999] et Moreau [1988, 1994], a été employée, car elle est suffisamment fine pour reproduire les phénomènes physiques que l'on désire étudier dans le cas des contacts multiples entre fibres. Le modèle dynamique du poly-articulé développé dans cette thèse a été couplé avec le code de calcul "LMGC90" [Dubois and Jean, 2006] pour étudier les contacts entre les fibres.

Plusieurs codes scientifiques, utilisant des méthodes variées (méthode des différences finies, éléments finis, volumes finis, méthodes spectrales... pour ne citer que les plus répandues), existent aujourd'hui et permettent la simulation de la statique et la dynamique de nombreux systèmes mécaniques comportant des fluides et des solides rigides ou déformables, pour une large gamme de lois de comportement. Cependant, il subsiste bien des phénomènes physiques difficiles à modéliser ou, même à simuler. La mécanique des contacts multiples en fait partie et constitue la dernière partie de cette thèse. Il s'agit de simuler la dynamique d'un ensemble de corps rigides constituant plusieurs chaînes poly-articulées, représentant chacune une fibre, susceptibles de rentrer en contact, rebondir les uns sur les autres, glisser les uns à la surface des autres, etc. Il est nécessaire pour ce type de modélisation de faire un certain nombre d'hypothèses physiques et mathématiques que l'on peut étudier

numériquement. Les modèles traitant le contact frottant, sont les plus exigeants sur le plan calcul, ce qui limite la taille des systèmes physiques que l'on peut simuler. Donc un compromis est nécessaire, pour l'application voulue, entre la qualité de la simulation (que l'on peut obtenir en choisissant un modèle plus fin, des schémas d'intégration en temps très sophistiqués, des pas de temps plus petits, des algorithmes plus précis, etc) et le coût de la simulation.

Dans le premier chapitre de cette partie, les modèles les plus répandues dans la littérature sont présentés, puis, le modèle développé dans cette thèse sera exposé.

8

État de l'art

8.1 Introduction

Ce chapitre ne constitue pas une revue exhaustive de tous les modèles existants traitant les contacts dans un milieux fibreux. Le but est plutôt de présenter les modèles les plus connus puis situer le modèle développé dans cette thèse parmi eux.

Les modèles permettant la simulation de la mise en forme de renforts fibreux continus ont été développés pour but d'obtenir des informations telles la rupture de mèches en cas de tension trop importante, le flambement local de la mèche en cas de forte compression, l'apparition de plissements, le taux volumique de fibres local, l'orientation des mèches et des fibres dans la pièce finie, les caractéristiques mécaniques du composite obtenu, etc...

L'accès à ces informations suivant une voie expérimentale demande des moyens très lourds et très coûteux pour chaque cas test. C'est pourquoi différents modèles numériques ont été développés. Les modèles à l'échelle microscopique permettent d'étudier les fibres et leurs interactions. Les modèles à l'échelle mésoscopique sont utilisés pour étudier le comportement de la mèche et déterminer les caractéristiques locales de la préforme. Les modèles à l'échelle macroscopique, quant à eux, permettent d'étudier le comportement de la préforme dans sa globalité.

Ce travail de thèse est axé essentiellement autour de la simulation du comportement dynamique de fibres continues en interaction entre elles, cependant l'objectif est d'étudier le comportement des mèches sèches durant des placements robotisés à des vitesses et trajectoires variables.

Dans ce chapitre nous présentons les différents modèles existants pour la simulation du comportement mécanique des fibres continues, au point de vue microscopique (l'échelle de la fibre), mésoscopique (l'échelle de la mèche) et macroscopique (L'échelle de la préforme). Puis les différentes méthodes de résolution des problèmes de contact frottant.

8.2 Modélisation de la mécanique des milieux fibreux

8.2.1 Modélisation à l'échelle de la préforme (Macro)

La description des méthodes de simulations de différentes échelles a montré que pour chaque cas d'étude nécessite un modèle spécifique. L'échelle macroscopique est utilisée dans le cas d'une simulation de la mise en forme d'un renfort. Nous présentons dans cette section différents modèles macroscopiques basés sur une approche soit géométrique, soit mécanique.

8.2.1.1 Approche géométrique/cinématique : méthode du filet

Les modèles cinématiques proposés dans [Mack and Taylor, 1956; Van Der Weeën, 1991; Long and Rudd, 1994; Cherouat et al., 2005] sont basés sur "l'algorithme du filet". Ils sont très simples du fait des hypothèses simplificatrices concernant le comportement des mèches du tissé.

Cette approche consiste à placer un filet sur la surface du composite le long de lignes géodésiques. Cette méthode repose sur les hypothèses suivantes pus au moins fortes :

1. les mèches sont inextensibles
2. les intersections entre les réseaux de chaîne et trame ne peuvent pas glisser
3. les rotations entre les deux réseaux sont libres
4. le contact du tissé avec la surface de l'outil se fait sans glissement

Le principe de l'approche du filet est celle où un renfort est mis progressivement en place à partir d'une ligne initiale. La position d'un point C est déterminée seulement si deux points A et B et la longueur des arcs AB et AC sont connues. L'hypothèse de l'inextensibilité des mèches permet de définir le point C comme l'intersection des deux géodésiques issues de A et B (voir Fig. 8.1). Il s'agit don d'un problème non linéaire de minimisation de distance entre deux points. Wang et al. [1999] a démontré la forte influence des choix de la position du point et les directions des mèches (trame et chaîne) initiales sur la qualité des résultats des simulations. Les applications de cette méthodes sont fortement restreintes à cause de ses hypothèses (fortes) très simplificatrices, mais elle a conduit à des codes de calcul très rapides. Son point faible le plus important reste le fait qu'elle ne prend pas en compte le comportement mécanique, ayant comme conséquence l'unicité du résultat pour n'importe quel tissu.

8.2.1.2 Approche mécanique : approche discrète

L'approche mécanique discrète consiste à modéliser le renfort par des nœuds connectés entre eux par des ressorts linéaires selon les directions chaîne et trame pour obtenir un comportement en traction biaxiale. D'autres ressorts linéaires ont été ajoutés pour modéliser le comportement en torsion, cisaillement et flexion [Sze and Liu, 2005]. Une illustration de l'approche discrète est proposée dans la figure 8.2.

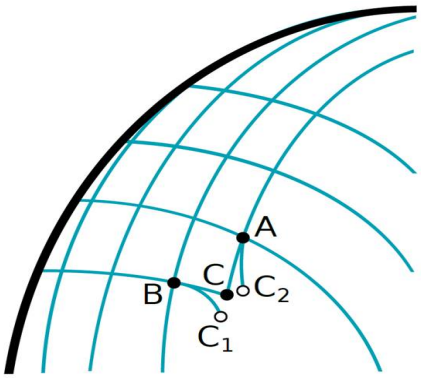


FIGURE 8.1 – La méthode du filet [Boisse, 2004]

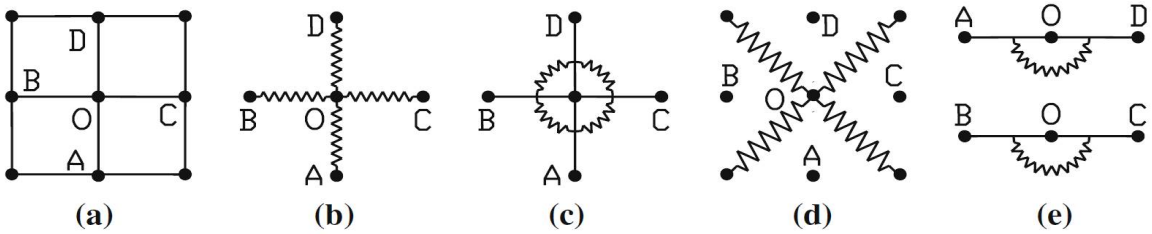


FIGURE 8.2 – Modélisation discrète des différents comportements mécanique d'un renfort : (b) en traction biaxiale, (c) en torsion, (d) en cisaillement et (e) en flexion [Sze and Liu, 2005]

8.2.1.3 Approche mécanique : approche continue

L'application d'une approche continue nécessite l'homogénéisation du matériau modélisé. Ainsi, dans les modélisations utilisant des approches continues, le renfort est considéré comme un matériau solide continu . La difficulté de cette hypothèse réside dans le choix de la loi de comportement et la mise au point d'une formulation simplifiant la structure 3D hétérogène du renfort. Par conséquent, il est quasiment impossible, pour un matériaux structural type renfort fibreux, de représenter toutes ses propriétés mésoscopique et microscopique à l'échelle macroscopique.

Des modèles de comportement hyper-élastiques anisotropes [Aimene, 2007; Dridi, 2010], ainsi que des modèles hypo-élastiques [Peng and Cao, 2005; Khan et al., 2010; Hagège et al., 2005] ont été développés pour simuler la mise en forme des renforts à l'aide des codes Éléments Finis standard.

8.2.1.4 Approche mécanique : approche semi-discrète

La combinaison des deux approches présentées précédemment a donné naissance à des approches appelées semi-discrètes. La figure (8.3) illustre l'élément représentatif développé par De Luycker et al. [2009] pour modéliser le comportement de la mèche en cisaillement et en compaction transverse. En ce qui concerne le comportement en tension, l'élément a été associé à des barres.

Pour modéliser les renfort NCF (Non-Crimp Fabric), Creech and Pickett [2006] a développé un modèle où les couches de mèches unidirectionnelles sont considérées comme des solides continus et les coutures sont représentées par des barres, comme illustré dans la figure (8.4).

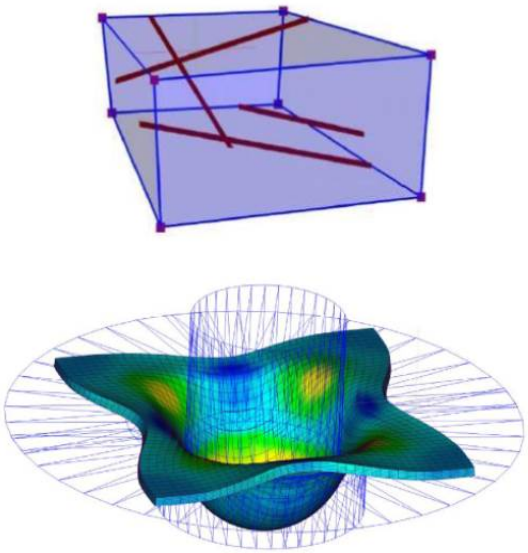


FIGURE 8.3 – Méthode semi-discrète pour "Interlock" proposée par De Luycker et al. [2009]

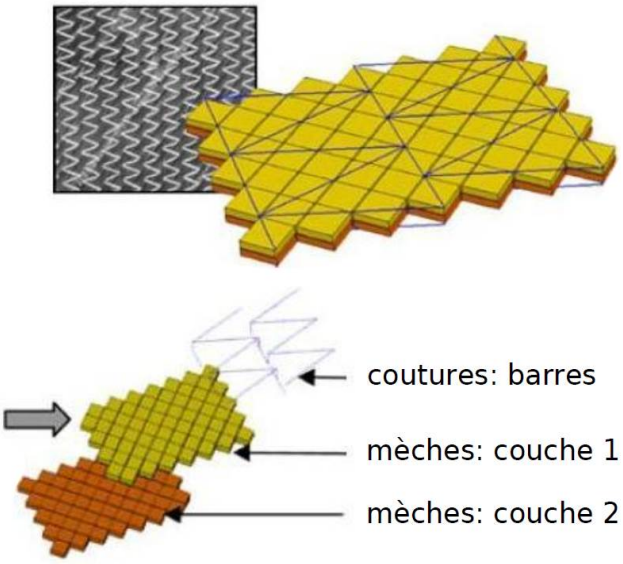


FIGURE 8.4 – Méthode semi-discrète pour "NCF" proposée par Creech and Pickett [2006]

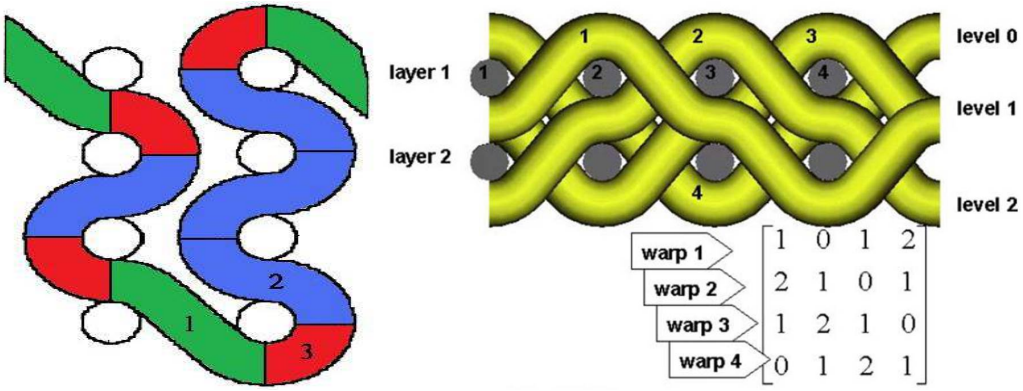
8.2.2 Modélisation à l'échelle de la mèche (Méso)

A cette échelle, la mèche est considérée comme un matériaux continu. Ayant homogénéisé la mèche, la loi de comportement est à l'échelle mésoscopique où les fibres ne sont plus prises en compte individuellement. La description du renfort à l'échelle mésoscopique nécessite 3 données principales : la description de la géométrie, les conditions aux limites à appliquer au modèle et la loi de comportement de la mèche.

8.2.2.1 Description de la géométrie

Les observations utilisant la tomographie aux rayons X sont courantes pour extraire la géométrie 3D d'un renfort. Ce sont des méthodes non intrusives permettant donc d'observer à cœur un échantillon tout en assurant qu'aucun traitement n'est appliqué à l'échantillon pouvant modifier ses caractéristiques géométriques. Elles donnent accès au informations suivantes : trajectoires des fibres et des mèches, formes des sections et épaisseurs des mèches, longueurs et densité des mèches.

Lomov et al. [2000] a proposé un modèle pour des renforts tissés prenant en compte des paramètres géométriques et mécaniques (densité linéaire, dimension des sections des mèches, coefficient de frottement, loi de compression, rigidité de flexion). Ce modèle décompose une trajectoire d'une mèche, au cours du tissage, en trois parties élémentaires (voir Fig. 8.5) : une horizontale (1) reliant deux rangées de mèches adjacentes, une verticale (2) reliant une mèche d'une couche à celle de la couche supérieure (pour les renforts 3D) et une "qui croise les deux systèmes de fil" (3). L'un des points faibles de ce modèle est le fait que les sections des mèches sont considérées circulaires et constantes, ce qui est bien loin de la réalité. Ce modèle a donné naissance à un logiciel, WiseTex, développé par Verpoest and Lomov [2005] prenant en compte un minimum de paramètres géométriques et mécaniques. Le point faible de ce logiciel est celui des interpénétrations entre les mèches. Ce qui a poussé les auteurs a développé une méthode permettant de corriger les défauts d'interpénétrations.



(a) (b)

FIGURE 8.5 – Illustration du concept d'une simulation avec le modèle de Lomov, avec (a) les parties d'une trajectoire [Lomov et al., 2000] et (b) une description matricielle d'un motif de tissage [Verpoest and Lomov, 2005]

Hivet and Boisse [2005] ont à leur tour développé un modèle géométrique permettant de reproduire uniquement la structure des renforts tissés 2D mais assure une absence totale d'interpénétration entre mèches. Ce modèle offre la possibilité de faire varier la section d'une mèche tout au long de sa ligne moyenne. Une section peut être définie en certain nombre de points de contrôle, leur nombre est variable selon le type d'armure considéré (voir Fig. 8.6). La nature géométrique du contact entre deux mèches est définie par ces points délimitant trois zones caractéristiques :

1. zone de contact plan entre M_1 et M_2
2. zone de contact courbe entre M_2 et M_3

3. zone libre entre M_3 et M_4

Dans cette méthode, les sections sont définies pour chacun de ces points et leur contour est divisé en quatre parties.

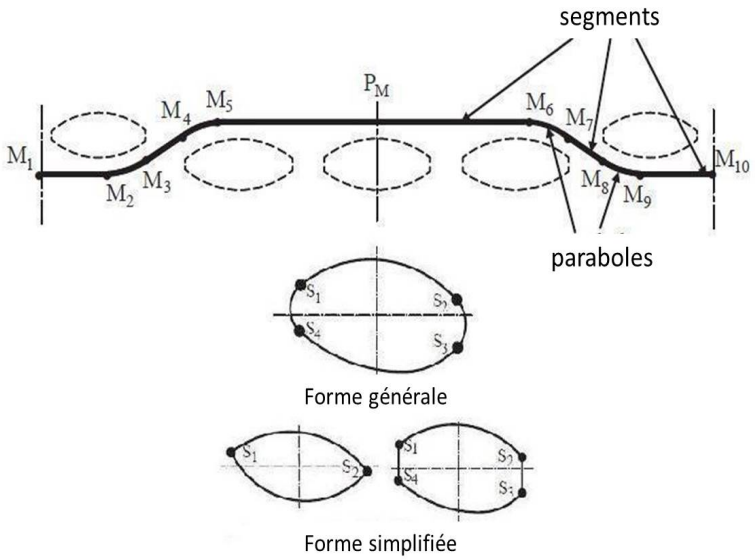


FIGURE 8.6 – Concept de la trajectoire et la section géométrique d'un mèche selon la méthode de Hivet and Boisse [2005]

8.2.2.2 Problématique des conditions limites

La modélisation de la géométrie d'un renfort nécessite la détermination d'une Cellule Élémentaire Représentative (CER), ayant la spécificité d'être la géométrie la plus petite possible permettant de représenter le comportement mécanique du renfort. Cette cellule doit satisfaire les conditions aux limites, que ce soit en chargement, en périodicité ou encore en symétrie. Il existe des cas où un renfort peut être représenté par plusieurs CER différentes avec des conditions limites différentes.

Badel et al. [2007] ont étudié le cas d'un renfort ayant deux types de CEL avec des conditions limites différentes. Cette étude révèle qu'une de ces deux CER a une partie de ses conditions limites qui ne correspond pas à des points matériels. Dans le cas d'un chargement en cisaillement, les conditions limites évoluent durant la simulation rendant leur modélisation complexe.

Les travaux de Tarfaoui and Akesbi [2001] en complément de ceux du Badel et al. [2007] ont démontré que le choix de la CER en fonction des cas d'études est très important et que ses caractéristiques géométriques influencent fortement les résultats de simulation.

8.2.2.3 Choix de la loi de comportement

L'expérience a démontré que la loi de comportement des mèches, en général, est très anisotrope dans le sens des fibres. Les modèles les plus souvent utilisés pour décrire le comportement des mèches sont des modèles hypo-élastiques. Le modèle développé par Gasser et al. [2000] ont proposé un modèle basé sur une loi hypo-élastique considérant la mèche comme orthotrope où seules les contributions

en tension dans la direction des fibres et la compaction transversale sont pris en compte. Hagege [2004] a démontré que l'objectivité des lois de comportement n'est pas assurée avec des dérivées objectives classiques telles que celle de Jauman ou Green-Nagdhi. Ces travaux ont permis de réaliser des avancées très satisfaisantes dans la simulation de la mise en forme des renforts. Cependant, ces lois de comportement proposées ne prennent pas en compte les phénomènes dissipatifs dus aux contacts frottants entre les fibres.

Les travaux de thèse de Charmetant [2011] ont permis le développement des modèles hypo-élastiques plus performants. La loi hypo-élastique, développée par les auteurs, rend compte du fait qu'une mèche est constituée d'un assemblage de fibres orientées dans la même direction. Les fibres sont supposées suffisamment compactées, pour éviter tout déplacement entre elles. Cette hypothèse permet de considérer la mèche comme un matériau continu. Tran et al. [2010] ont montré que cette hypothèse rigidifie la mèche en compression transverse. La loi de comportement est définie avec une approche phénoménologique en se basant sur des tests expérimentaux en traction uniaxiale et biaxiale pour identifier ses paramètres. La nouveauté de cette approche réside dans la définition de loi de comportement mécanique de la mèche en fonction des modes de déformations de l'ensemble des fibres (leurs comportements individuels et leurs interactions entre elles) la constituant.

8.2.3 Modélisation à l'échelle des fibres (Micro)

Les approches macroscopiques ou mésoscopiques développées, pour modéliser le comportement d'un renfort fibreux, ne prennent pas en compte certains phénomènes se produisant à l'échelle des fibres, en raison des hypothèses simplificatrices très fortes sur lesquelles ils se basent (des fibres parfaitement alignées, absence de contact frottant entre les fibres, ...). Dans le cas du placement de fibres robotisé, le comportement mécanique globale de la mèche est fortement impacté par les mécanismes locaux. L'approche microscopique a pour but d'étudier le comportement d'une mèche (ensemble de fibres unidirectionnelles entremêlées) à partir de celui des fibres individuellement et toutes les interactions entre elles. Le très grand nombre des fibres constituant une mèche (d'ordre 12000 à 24000 fibres) limite les capacités numériques des modèles existants, ce qui réduit considérablement la taille de l'échantillon étudié.

L'application d'une approche microscopique pour modéliser le comportement mécanique d'un milieux fibreux offre plusieurs avantages :

- *Obtention d'un comportement non-linéaire global :*
  Le comportement mécanique global d'une mèche dépend de phénomènes complexes liés aux interactions entre les fibres et à leur loi de comportement. Au vu de la complexité et la difficulté d'obtenir une loi de comportement équivalente, une modélisation individuelle de toutes les fibres élémentaires et les interactions entre elles semble être la meilleure voie pour déterminer le comportement mécanique global d'un tel milieux.

- *Accès aux informations locales :*
  En raison de l'incapacité d'atteindre des données locales (telles les chaînes de contacts et les répartitions spatiales des fibres) expérimentalement, les modèles numériques utilisant ce type

d'approche représentent la solution permettant d'avoir accès à ces informations. La compréhension des mécanismes complexes à cette échelle, permet l'optimisation des procédés de fabrication utilisant ce type de matériaux.

Les travaux de Finckh [2004] et Pickett et al. [2009] sont des exemples utilisant des codes commerciaux pour la simulation de structures fibreuses à l'échelle des fibres. D'autres auteurs ont développé des codes originaux pour configurer la géométrie de structures fibreuses puis simuler leur comportement sous sollicitations mécaniques.

8.2.3.1 Modèle en Éléments Finis

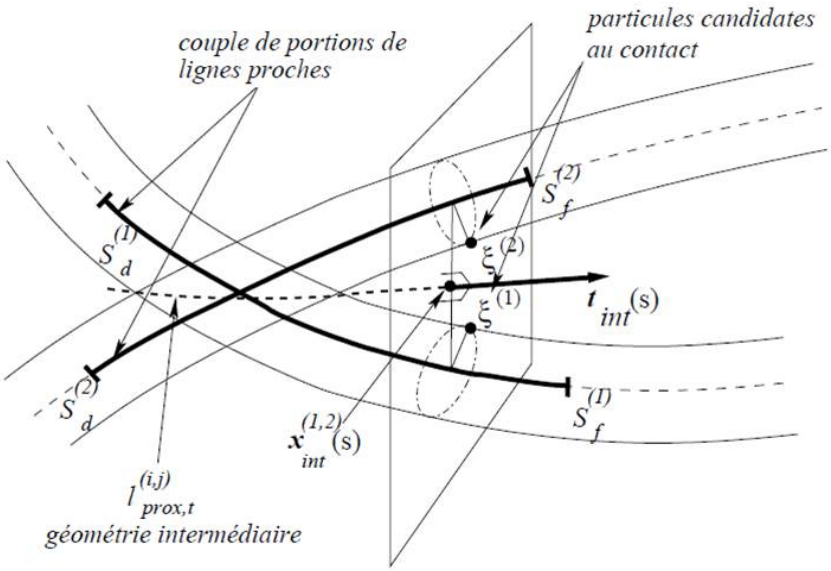
Le modèle en éléments finis développé par [Durville, 1998] (voir fig. 8.7) permet d'obtenir des résultats prometteurs sur le comportement des renfort à l'échelle des fibres. Les méthodes développées pour l'obtention de la géométrie initiale du renfort à partir de l'orientation des fibres et les contacts entre elles sont présentées dans [Durville, 2003, 2005, 2010]. Par exemple, pour approcher une configuration initiale, une première configuration fictive est estimée a priori présentant des interpénétrations entre les fibres, qui sont déplacées progressivement jusqu'à la suppression totale de ces interpénétrations. Chaque fibre est modélisée par un modèle de poutre enrichi (voir 4.2.4) et le contact entre deux éléments est étudié à chaque fois que deux points sont suffisamment proches pour entrer en contact.

L'approche basée sur une surface intermédiaire entre deux fibres susceptibles d'entrer en contact entre elles a été développée pour palier les difficultés de la méthode maître-esclave. Ces difficultés sont les suivantes :

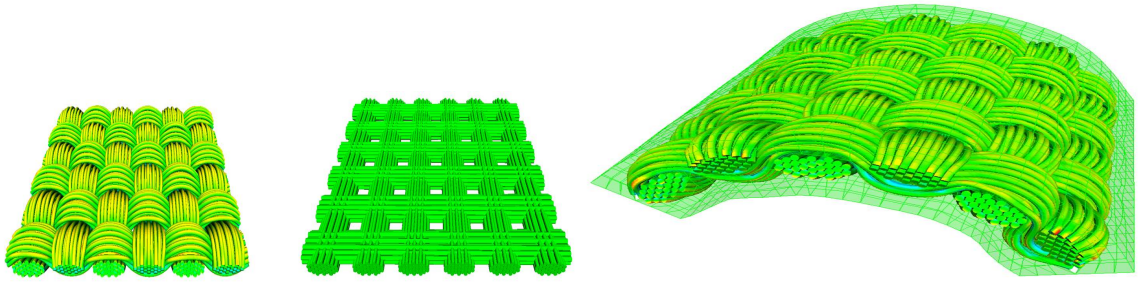
1. L'existence et l'unicité d'un projeté orthogonal sur la surface maître, dans le cas des poutres en grand déplacement, n'est pas toujours assurées (pour plus de détails voir la thèse de Beal [1998] et les travaux de Chamekh et al. [2009])

2. G. Zavarise a relevé à partir de ses travaux [Zavarise and Wriggers, 1998] le problème de la non symétrie du traitement de contact dans le cas de deux poutres. Cette non symétrie est due au fait que les deux poutres ne sont pas considérées simultanément. La figure (8.8) montre l'ambiguïté de cette approche pour le calcul du gap : la distance entre le point A est sa projection le point B est différente de celle entre le point B et sa projection le point C. Le calcul de la distance entre les deux surfaces Γ^1 et Γ^2 n'est jamais identique sauf lorsque les deux surfaces sont parallèles (condition jamais vérifiée dans le cas d'un assemblage de fibres en grand déplacement)

La résolution globale du problème de contact, développée dans ce modèle, est basée sur l'actualisation régulière des zones de proximité pour chaque deux fibres susceptible d'interagir, la discrétisation de la géométrie intermédiaire dans ces zones de proximité pour obtenir les éléments de contacts, le calcul du gap utilisant la normale obtenue avec la méthode de point fixe et l'utilisation de la méthode de pénalisation, avec une méthode itérative d'ajustement des coefficients de pénalisation et une autre de Newton-Raphson, pour la résolution du problème de contact.



(a)



(b) (c)

FIGURE 8.7 – Illustration du concept d'une simulation avec le modèle de D. Durville, avec (a) traitement des contacts avec une géométrie intermédiaire [Durville, 2012], (b) une configuration initiale par contact entre fibres [Durville, 2007] et (c) un exemple d'un renfort en flexion [Durville, 2007]

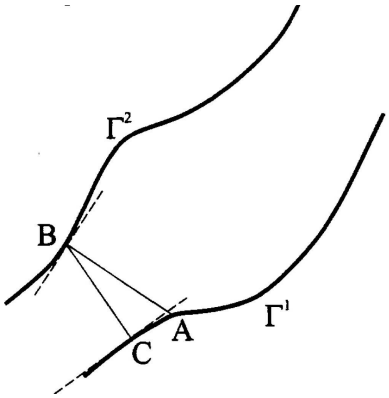


FIGURE 8.8 – Le problème de l'application de la technique maître-esclave dans le cas de deux poutres [Zavarise and Wriggers, 1998]

8.2.3.2 Modèle en Éléments Discrets

Un modèle basé sur des éléments appelés "Digital Element" a vu le jour comme une alternative aux Éléments Finis. Ce modèle est introduit par Wang and Sun [2001] pour représenter une mèche par

un ensemble de barres cylindriques reliées par des nœuds sans frottement (Fig. 8.9). Ce modèle a été amélioré par Zhou et al. [2004] puis optimisé par Wang et al. [2010] pour étudier les procédés de tressage à l'échelle des fibres avec une méthode de contact non frottant. Cette méthode permet également de prendre en compte les interactions de contact frottant entre les filaments au niveau des nœuds reliant les chaînes, et de considérer des grands déplacements.

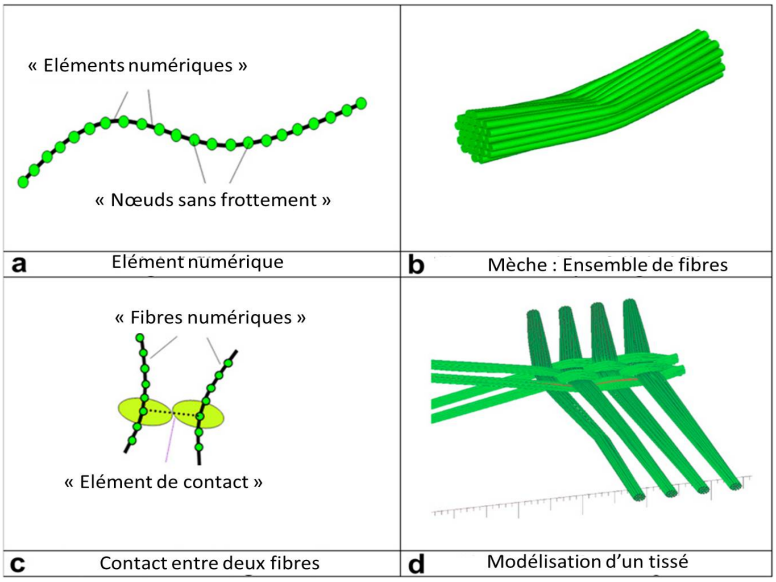


FIGURE 8.9 – Illustration du concept d'une simulation avec le modèle de Wang et al. [2010]

8.2.3.3 Modèle en Éléments Discrets/Continus

La particularité de ce modèle réside dans le fait qu'une fibre est considérée comme une poutre (à cinématique simplifiée) assemblée à partir de plusieurs poutres élastiques de "*Kirchhoff*". Un modèle de fibre inextensible, à section droite rigide et orthogonale à la ligne moyenne et discrétisée en plusieurs poutres de "*Kirchhoff*" permettant de réduire le nombre de degrés de liberté du système, a été proposé par Bergou et al. [2008]. Ce modèle repose sur la ligne moyenne de la fibre ainsi que sur l'abscisse curviligne s et sur un système de repères (voir 4.4) : un repère matériel lié aux fibres et à leur section droite, un repère de Frenet-Serret décrivant la géométrie curviligne de la poutre et un repère dans lequel la torsion de chacun des éléments est nulle (repère de Bishop). Le principe de ce modèle est présenté sur la figure (8.10). Rodney et al. [2005] ont utilisé une méthode très similaire en terme de modèle et d'hypothèses (sauf pour la torsion qui est supprimée ici) pour simuler un ensemble de fibres courtes sous compression isostatique.

8.3 Méthodes de résolution des problèmes de contacts frottants

La dynamique d'un système poly-articulé comme celui développé dans cette thèse fait intervenir dans le calcul des forces extérieures et des accélérations. La forme générale de l'équation dynamique, dans l'espace des cordonnées généralisées, avec les forces de contacts est la suivante :

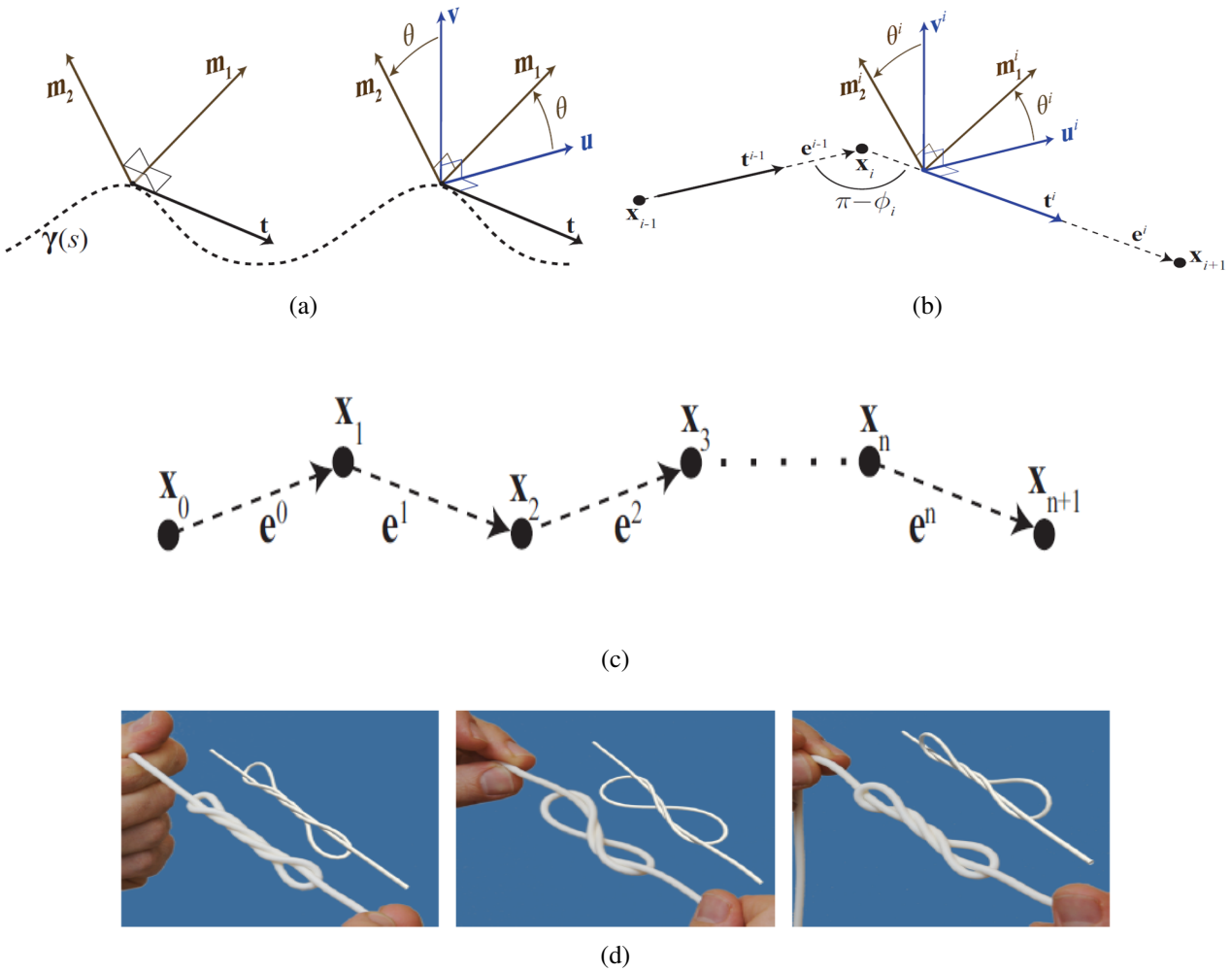


FIGURE 8.10 – Modèle de Bergou et al. [2008] : (a) paramétrisation de la tige , (b) vecteurs et angles utilisés pour la discrétisation de la tige, (c) discrétisation de la tige et (d) exemple d'application

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{M}^{-1}\left(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q})\right) + \mathbb{M}^{-1}\mathbb{J}^{T}(\mathbf{q})\mathbf{f} \tag{8.1}$$

où $\mathbf{f}$ représente l'assemblage des forces extérieures, $\mathbb{J}$ l'assemblage des jacobiennes cinématiques aux points de contacts, $\mathbf{C}$ l'assemblage des efforts de *Coriolis* et centrifuge et $\mathbf{Q}$ l'assemblage des efforts de la gravité.

La simulation de la dynamique des fibres en interaction rend la résolution de l'équation (8.1) très délicate car en plus de l'inconnue $\ddot{\mathbf{q}}$ (accélération) il y l'inconnue $\mathbf{f}$ représentant les forces de contacts. On se retrouve alors avec une équation à deux inconnues.

La résolution des problèmes de mécanique des solides en présence de contacts frottants est généralement réalisée à l'aide de méthodes numériques. Le caractère complexe d'un problème de milieux fibreux rend l'utilisation des méthodes numériques indispensable. La résolution numérique du problème de contacts frottants multiples nécessite une formulation d'un système d'équation algébrique linéaire avec un nombre fini d'inconnues. Or, la non-linéarité des systèmes poly-articulés et celle des contacts frottants qui sont en plus non-différentiables posent des sérieux problèmes pour la résolution numérique. Nous présentons les méthodes les connues : méthode par pénalités (contact frottant),

méthode par contraintes (contact frottant) et méthode à base d'impulsion (contact sans frottement). Il existe différents types de frottement dont le frottement statique/dynamique et le frottement visqueux. Les frottements visqueux sont moins réalistes, mais plus stables numériquement, du fait qu'ils sont proportionnels à la vitesse relative tangentielle au point de contact. Cette étude traite les contacts frottants secs/dynamiques, qui sont plus réalistes dans le domaine des fibres sèches.

Le modèle de frottement au sens de Coulomb est le plus connu de tous les modèles mathématiques de frottement. Le modèle de Coulomb suppose que la force de frottement en un point de contact doit être comprise à l'intérieur d'un cône (appelé cône de Coulomb) ayant un coefficient intrinsèque (appelé coefficient de frottement) auquel son rayon en dépend. La hauteur de ce cône est égale à l'effort normal appliqué au point de contact en question. Ce modèle se traduit mathématiquement par :

$$\|\mathbf{f}_t\| \leq \mu |f_n| \tag{8.2}$$

où $\mathbf{f}_t$ est le vecteur représentant la force de frottement dans le plan tangent au point de contact, f_n est la composante normale du contact et μ est le coefficient de frottement. La loi de Coulomb met en évidence deux cas de figure :

1. le cas d'adhérence (frottement statique) où la vitesse tangentielle $\mathbf{v}_T$ est nulle avec :

$$\|\mathbf{f}_t\| < \mu |f_n| \tag{8.3}$$

2. le cas de glissement (frottement dynamique) où la vitesse tangentielle $\mathbf{v}_T$ est non nulle avec une force de frottement, proportionnelle à la force normale, s'opposant au mouvement relatif au point de contact :

$$\mathbf{f}_t = -\mu |f_n| \frac{\mathbf{v}_T}{\|\mathbf{v}_T\|} \tag{8.4}$$

La prise en compte des phénomènes de frottement introduit une non-linéarité supplémentaire au système dynamique étudié.

8.3.1 Méthode par impulsion

Dans cette méthode, dès qu'il y a un contact, une impulsion est appliquée instantanément sans ajout de contraintes d'interpénétrations. Tout contact, qu'il soit de type impact ou contact adhérent ou encore glissant, est considéré comme une collision. Dans ce cas de figure, la méthode calcule des impulsions plutôt que des forces, avec la possibilité de considérer les impulsions comme des forces agissant pendant un temps infinitésimal. La méthode comprend les trois étapes suivantes :

1. calcul du temps pendant lequel aucun contact n'est détecté. Dès qu'une paire de points de contact est détectée, ceux-ci sont considérés comme des points critiques

2. calcul de la dynamique de l'ensemble des corps simulés

3. La loi d'impact linéaire de Newton est appliquée. Ainsi, un coefficient de restitution $e \in [0, 1]$, traduisant l'élasticité de l'impact, est utilisé pour relier les vitesses pré-impact $\mathbf{v}^-$ et post-impact $\mathbf{v}^+$ comme suit :

$$\mathbf{v}^+ = -e\mathbf{v}^- \tag{8.5}$$

Cette méthode offre l'avantage de la simplicité d'implémentation. Mais, l'inconvénient majeur est l'instabilité numérique, en particulier, dans le cas d'un milieux confiné (contacts statiques) où la méthode diverge lorsque les corps se mettent à bouger. Cette méthode est particulièrement inappropriée pour étudier la mécanique d'un ensemble de fibres confinées (les contacts sont maintenus et évoluent en mode contraint) et elle n'offre pas la possibilité de prendre en compte les contacts frottants.

8.3.2 Méthode par pénalités

Cette méthode est très répandue et utilisée dans la plupart des modèles de simulation [Durville, 2010; Wang et al., 2010] avec des adaptations plus au moins sophistiquées. Sa forme standard se base sur l'autorisation de la pénétration pour le calcul des forces de contact. Ces forces sont généralement modélisées par des ressorts-amortisseurs virtuels (voir la figure 8.11). Leurs formulations sont sous les formes simplifiées suivantes :

$$f_m = K_m \Delta m + C_m \Delta \dot{m} \tag{8.6}$$

où $m = x, y, z$, K_m la raideur et C_m le coefficient d'amortissement.

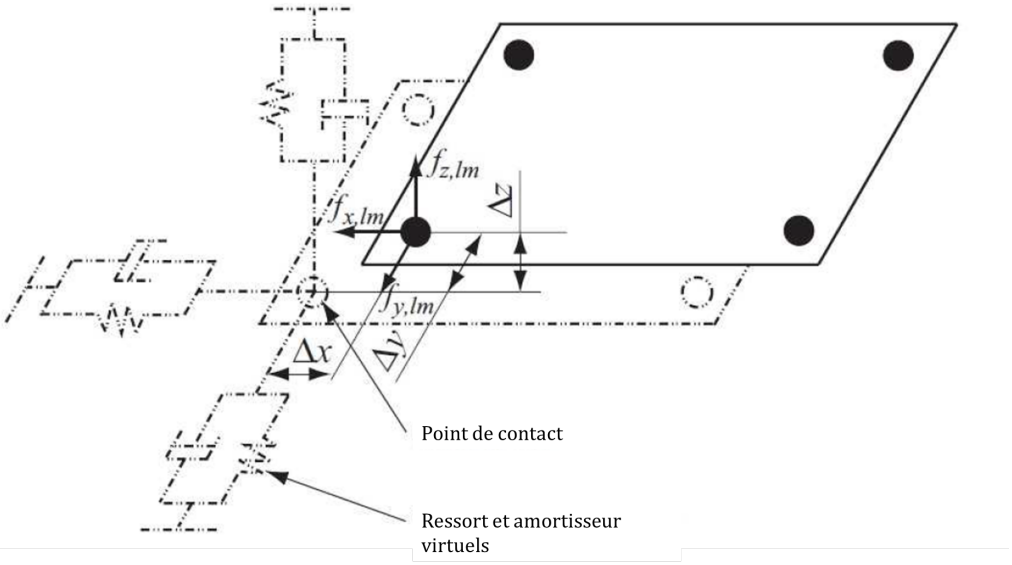


FIGURE 8.11 – Illustration du modèle par pénalité pour un contact frottant

Cette méthode est très rapide et simple d'implémentation. Elle donne aussi une bonne estimation de la répartition des forces de contact en quasi-statique, du fait qu'elles sont locales et fonction de l'interpénétration. Cette méthode simplifie le problème par le fait que la force de contact est connue.

Cependant cette méthode présente plusieurs lacunes. Les paramètres utilisés K_m et C_m sont souvent des facteurs d'instabilités numériques, donc donc à régler avec soin. La détermination de ces paramètres ne suit aucune logique précise, elle dépend fortement du problème étudié. Durville [2011] a proposé une méthode d'ajustement automatique de ces paramètres pour optimiser les pénétrations. Cette méthode est non justifiable physiquement au vu des pénétrations autorisées et elle nécessite des pas de temps très petits.

8.3.3 Méthode par contraintes

Cette méthode intègre explicitement les contraintes de non-pénétration aux equations dynamique, ce qui accroît la précision des calculs. L'équation de la dynamique des deux corps en contact est passée dans l'espace cartésien où chaque contact est définit par une paire de points les plus proches sur chaque corps. Un plan tangent est définit au point de contact avec son repère (repère local du contact) où la force du contact est décomposée en une partie normale et une partie tangentielle (Fig. 8.12).

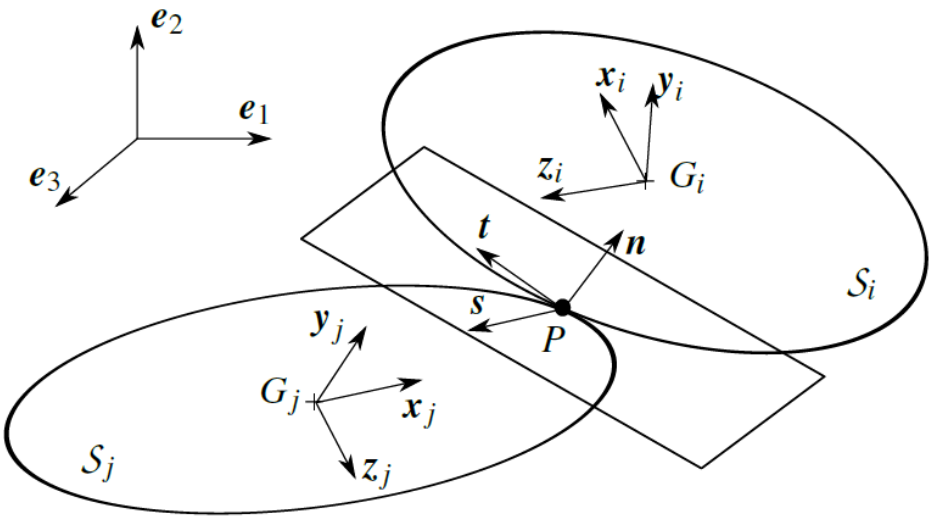


FIGURE 8.12 – Repère local pour un contact 3D

8.3.3.1 Lois de contact

Condition de non interpénétration

La non-interpénétration des corps en un contact α implique que la distance g^α les séparant soit toujours positive. Ainsi, la relation de complémentarité suivante

$$g^\alpha \geq 0, \quad f_n^\alpha \geq 0, \quad g^\alpha f_n^\alpha = 0, \tag{8.7}$$

représentée par le graphe de Signorini (Fig. 8.13) qui montre la non possibilité de relier g^α et f_n^α avec une fonction. Le Lemme de viabilité de Moreau [1988] montre que l'application des lois de

contact nécessite le respect des relations suivantes

$$\begin{cases} Si \quad g^\alpha > 0, \quad r_n^\alpha = 0, \\ Si \quad g^\alpha = 0, \quad v_n^\alpha \geq 0, \quad v_n^\alpha \geq 0 \quad v_n^\alpha r_n^\alpha = 0. \end{cases} \tag{8.8}$$

ainsi la relation de complémentarité est exprimée avec la normale de la vitesse relative v_n^α et l'impulsion de contact r_n^α et que l'on peut écrire aussi avec un formalisme de l'analyse convexe comme suit

$$r_n = proj_{\mathbb{R}^+}(r_n - \rho_n v_n), \quad \rho_n > 0. \tag{8.9}$$

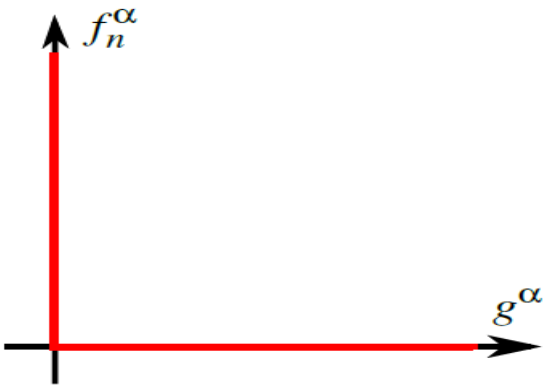


FIGURE 8.13 – Graphe de Signorini

Une autre façon de modéliser le contact est de considérer que f_n^α est une fonction de l'interstice, appelée loi de contact régularisée. On peut par exemple constater qu'à une échelle fine la surface des matériaux n'est pas parfaite et qu'une déformation localisée au contact peut être prise en compte par des valeurs négatives de g^α. Par exemple, il peut être supposé que la force de réaction est proportionnelle à l'interpénétration (FIG. 8.14). Des formulations plus complexes peuvent être introduites (FIG.8.15), assurant la continuité de la dérivée de la loi de contact (loi de Hertz).

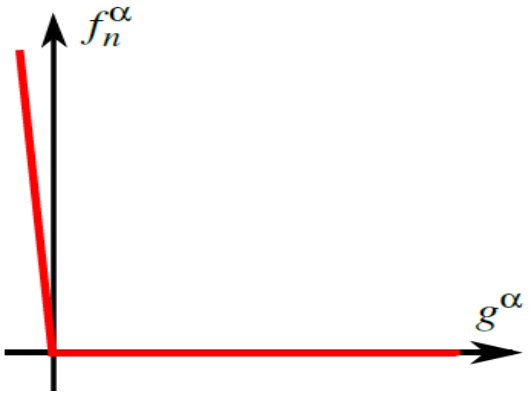


FIGURE 8.14 – Graphe de contact avec élasticité

Loi de frottement

La prise en compte des force tangentielles nécessite l'intégration des loi de frottement reliant les

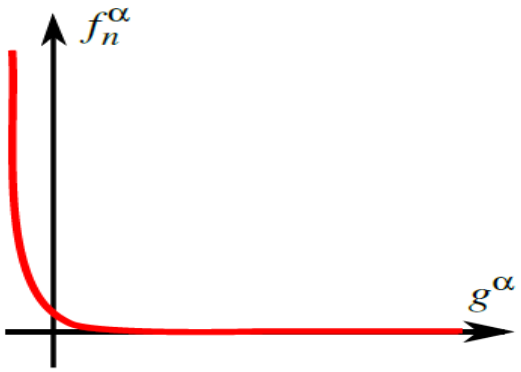


FIGURE 8.15 – Graphe de contact non-linéaire

forces tangentielles $\mathbf{f_t^\alpha} = [f_t^\alpha, f_s^\alpha]^T$ aux vitesses tangentielles relatives $\mathbf{v_t^\alpha} = [v_t^\alpha, v_s^\alpha]^T$ des deux corps en contact. La loi de Coulomb est la loi la plus souvent utilisée pour modéliser un frottement sec. Comme pour la condition de la non interpénétration, la loi de Coulomb ne se prête pas à une résolution explicite des forces tangentielles en fonction des vitesses relatives du fait qu'elle n'est pas une fonction.

L'une des façons de régulariser la loi de Coulomb est l'hypothèse du frottement visqueux. Cette loi permet du glissement, entre les deux corps en contact, quelle que soit la force tangentielle et relie linéairement $\mathbf{f_t^\alpha}$ et $\mathbf{v_t^\alpha}$ avec un coefficient d'amortissement $\gamma_\mathbf{t}^\alpha$

$$\mathbf{f_t^\alpha} = \begin{cases} -\gamma_\mathbf{t}^\alpha \mathbf{v_t^\alpha}, & \|\mathbf{f_t^\alpha}\| \leq \mu f_n^\alpha, \\ -\mu f_n^\alpha \frac{\mathbf{v_t^\alpha}}{\|\mathbf{v_t^\alpha}\|} & \|\mathbf{f_t^\alpha}\| > \mu f_n^\alpha \end{cases} \tag{8.10}$$

De la même façon que la loi unilatérale de *Signorini*, la loi de *Coulomb* peut être reformulée en utilisant le formalisme de l'analyse convexe comme suit

$$\mathbf{r_t} = proj_{C(\mu r_n)}(\mathbf{r_t} - \rho_\mathbf{t}\mathbf{v_t}), \quad \rho_T > 0. \tag{8.11}$$

où $\mathbf{r_t} = [r_s, r_t]^T$ représente le vecteur tangent de l'impulsion locale porté par les deux vecteurs du plan tangent au point de contact et qui est perpendiculaire à la normale au contact.

8.3.3.2 Dynamique non régulière des contacts

Cette méthode a été introduite par Moreau [1988] pour des modèles d'interactions non régulières couplés à une méthode d'intégration temporelle implicite (Theta-Schéma). Puis, élargie par Jean [1999] pour simuler les contact des corps déformables et ainsi la méthode dénommée classiquement "*Non Smooth Contact Dynamics* (NSCD)" a vu le jour. Les idées principales de cette méthode sont :

- en cas de collisions, des sauts de vitesse sont attendus
- les accélérations prennent la forme des mesures
- un calcul différentiel non régulier, plus faible que celui des fonctions différentiables, est appliqué aux contacts

- les équations différentielles régissant la dynamique se prêtent à un traitement numérique par discrétisation du temps sous condition de fournir les lois de contacts
- des méthodes numériques prenant en compte tous les contacts présents dans le système collectivement ont été appliquées pour fournir des résultats plausibles dans des cas d'études.

Le formalisme de (NSCD) est basé sur l'association des impulsions de *Dirac* aux forces de contact et sur l'utilisation des dérivées des vitesses pour un système de corps en interaction. Ainsi, les équations de *Newton-Euler* pour un solid S_i sont de la forme différentielle suivante :

$$\mathbb{M}_i d\mathbf{V}_i = \mathbf{F}_i^d(x_i, t)dt + \mathbf{P}_i d\nu \tag{8.12}$$

avec $\mathbf{F}_i^d(x_i, t)$ représente le torseur des efforts extérieurs imposés, dt la mesure de *Lebesgue*, $d\mathbf{V}_i$ une mesure différentielle représentant la mesure d'accélération, $d\nu$ une mesure positive et $\mathbf{P}_i$ est la représentation torseurielle au centre de gravité du corps des densités locales d'impulsion de contact. Puis, sur un intervalle de temps $]t_i, t_{i+1}]$ l'équation (8.12) est intégrée pour une collection de corps

$$\mathbb{M}\left(\mathbf{V} - \mathbf{V}^{t_i}\right) = \int_{]t_i,t_{i+1}]} \mathbf{F}^d(x, t)dt + \int_{]t_i,t_{i+1}]} \mathbf{P}d\nu \tag{8.13}$$

où $\mathbb{M}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}^d$ et $\mathbf{P}$ sont les matrices d'assemblage (concaténation) des matrices $\mathbb{M}_i$ et les vecteurs d'assemblage des torseurs $\mathbf{V}_i$, $\mathbf{F}_i^d$ et $\mathbf{P}_i$. En posant $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^{ext}$, respectivement, comme des approximations des d'impulsions et les forces extérieurs sur l'intervalle de temps $]t_i, t_{i+1}]$ et $\mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{ext} + \mathbb{M}\mathbf{V}^{t_i}$, on obtient l'équation de la dynamique condensée suivante :

$$\mathbb{M}\mathbf{V} = \mathbf{R} + \mathbf{R}^d \tag{8.14}$$

Comme la dynamique du système est pilotée par le réseau des contacts, l'équation de la dynamique condensée est exprimée dans l'espace des contacts. Pour cela l'équation (8.14) est multipliée à gauche par $\mathbb{H}^T\mathbb{M}^{-1}$ ($\mathbb{H}$ est l'assemblage des matrice de passage des inconnues des corps aux inconnues des contacts où $\mathbf{R} = \mathbb{H}\mathbf{r}$ et $\mathbf{v} = \mathbb{H}^T\mathbf{V}$), on obtient,

$$\mathbb{W}\mathbf{r} - \mathbf{v} = -\mathbf{v}^{libre} \tag{8.15}$$

où $\mathbf{v}^{libre} = \mathbb{H}^T\mathbb{M}^{-1}\mathbf{R}^d$ et la matrice $\mathbb{W} = \mathbb{H}^T\mathbb{M}^{-1}\mathbb{H}$ classiquement nommée "*matrice de Delassus*".

Cette formulation de la dynamique avec le caractère non diagonal de la matrice $\mathbb{W}$ permet de prendre en compte collectivement l'ensemble des contacts du système. L'expression des inconnues dans les différents repères de contact facilite le traitement des lois de contact frottant décrites dans la section 8.3.3.1. Dans ce cas de figure nous sommes confrontés aux difficultés suivantes :

- la matrice d'interaction $\mathbb{W}$ est a priori non inversible
- les lois de contact sont fortement non régulières

ce qui rend la résolution de la dynamique dans l'espace des contacts très délicate.

Jean [1999] a proposé un algorithme itératif, appelé algorithme de *Gauss Seidel Non-Linéaire* (NLGS), basée sur la méthode de *Gauss Seidel* pour résoudre un problème type NSCD. Cet algorithme offre l'avantage d'un convergence régulière, mais qui peut être relativement lent et présente un handicap pour la parallélisation du fait du caractère séquentiel de sa formulation. Renouf [2004] a présenté les résultats d'une comparaison des différentes méthodes, puis il a proposé une méthode alternative dérivée de la méthode du gradient conjugué.

L'algorithme NLGS considère les blocs $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$, associés aux contacts α et β, de la matrice d'interaction du système $\mathbb{W}$ séparément offrant la possibilité de ne stocker que les matrices non nulles. La résolution du problème de contacts multiples locaux (eq. 8.15), avec cette méthode, est réalisée contact par contact. Pour un contact α, les autres réactions des contacts $\beta \neq \alpha$ sont fixées. Le schéma itératif de cet algorithme est défini de la manière suivante (pour une itération $k+1$)

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\alpha^{k+1} - \mathbb{W}_{\alpha\alpha}\mathbf{r}_\alpha^{k+1} = -\mathbf{b}_\alpha \\ Loi(\mathbf{v}_\alpha^{k+1}, \mathbf{r}_\alpha^{k+1}) = vraie \end{cases} \tag{8.16}$$

où le membre de droite vaut $\left(-\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{v}_{\alpha,free} + \sum_{\beta<\alpha} \mathbb{W}_{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta^{k+1} + \sum_{\beta>\alpha} \mathbb{W}_{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta^{k}\right)$
et $Loi(\mathbf{v}_\alpha^{k+1}, \mathbf{r}_\alpha^{k+1}) = vraie$ exprime la satisfaction de la loi de contact-frottant (loi de *Signorini-Coulomb*) pour l'obtention de la solution $\left(\mathbf{v}_\alpha^{k+1}, \mathbf{r}_\alpha^{k+1}\right)$ satisfaisant le système (8.16). Le détail de l'algorithme, basée sur cette méthode, sera présenté dans le chapitre suivant.

8.4 Conclusion

Les modèles macroscopiques ou mésoscopiques, présentés dans ce chapitre, ne prennent pas en compte les phénomènes mécaniques locaux (type interaction entre fibres et leurs comportement individuel...), en raison de leurs hypothèses simplificatrices comme l'idéalisation des trajectoires de fibres, l'absence des contacts frottant etc... Des méthodes microscopiques ont été présentées comme une alternative pour modéliser un ensemble de fibres en interaction permettant l'accès aux informations à l'échelle des fibres, mais leur coût de calcul important limite le nombre de fibres prises en compte dans une simulation. Les modèles développés à l'échelle microscopique traitent spécifiquement les cas de la mécanique quasi-statique pour s'affranchir des problèmes numériques liés à la dynamique. Ce constat nous a poussé à développer un modèle dynamique moins coûteux pour étudier un ensemble de fibres en interaction sous des sollicitations dynamiques.

La simulation dynamique d'un système de fibres continues fait intervenir dans le calcul des forces extérieures des accélérations. Dans le cas où les forces de contact sont présentes, la dynamique devient non régulière en raison des lois de contact-frottant de *Signorini-Coulomb*. Un algorithme itératif dérivé d'un mélange des méthodes de *Gauss Seidel* et de *Newton*, appelé méthode de *Gauss Seidel Non Linéaire* (NLGS)[Alart and Curnier, 1991], est utilisée pour résoudre le système d'équations (8.16). Trois méthodes de résolution des problèmes de contact frottant ont été présentées. Ces méthodes présentent des différences que nous avons essayé de résumer au travers des points suivants :

- les méthodes par pénalités offrent une grande rapidité de calcul en raison de formulation très simple des forces de contact utilisant des ressorts-amortisseurs virtuels. Quant aux méthodes par contraintes, le calcul des forces nécessite le calcul de la matrice de *Delassus*, puis la résolution d'un problème de complémentarité linéaire (LCP) ce qui rend la méthode plus coûteuse,

- les méthodes par contraintes intègrent explicitement les contraintes dans les équations dynamiques, tandis que les méthodes par pénalités, la dynamique du système simulé est interféré par une dynamique virtuelle des ressorts-amortisseurs virtuels. Par contre, les méthodes par impulsions altèrent directement les vitesses par une loi d'impact de *Newton*,

- la stabilité et la précision des méthodes par pénalités dépendent fortement de l'ajustement de leurs paramètres et des méthodes d'intégration numérique.Quant aux méthodes par contraintes, les simulations sont plus précises et plus stables mais plus lentes, elles peuvent présenter des défaillances numériques et parfois des problèmes d'unicité de la solution. Les méthodes par impulsions sont stables en cas de choc de deux corps et très instables dans le cas des contacts maintenus ou évoluant avec des contraintes.

Le but étant de réaliser des simulations d'un ensemble de fibres en interaction, nous avons couplé notre modèle dynamique au code LMGC90 [Dubois and Jean, 2006] permettant d'appliquer la méthode par contraintes à la résolution du problème d'interaction entre les fibres.

Dans ce chapitre, nous avons détaillé le problème à traiter et les différentes méthodes pour y parvenir. Le chapitre suivant est consacré à la présentation des algorithmes et des méthodes du modèle numérique développé dans le cadre de cette thèse.

9

Dynamique des fibres continues en interaction

9.1 Introduction

Nous avons consacré le chapitre précédent à la présentation des approches numériques permettant la simulation dynamique d'un milieux fibreux. Dans les parties précédentes, nous avons présenté notre modèle dynamique d'une fibre basé sur une approche récursive des équations de *Newton-Euler*. Puis au chapitre (8) nous avons expliqué le choix de la méthode de résolution des problèmes de contact frottant basé sur la méthode par contraintes et inspirée des travaux de Alart and Curnier [1991] et Renouf [2004].

Ce chapitre présente la deuxième contribution de la thèse portant sur le couplage du modèle dynamique développé précédemment avec le code de calcul LMGC90 [Dubois and Jean, 2006] pour simuler la dynamique d'un milieux fibreux avec prise en compte des interactions entre les fibres continues. Ce travail explore la méthode de contact frottant par contraintes pour la simulation de la dynamique non régulière d'un système fibreux.

Le logiciel LMGC90 (Logiciel de Mécanique Gérant le Contact écrit en Fortran 90) provient du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) de l'université de Montpellier I, à l'origine, a été créé par F. Dubois et M. Jean pour le calcul dynamique 2D des milieux granulaires. C'est un code de calcul utilisant les méthodes de résolution NSCD présentées dans le chapitre précédent et qui offre aujourd'hui la possibilité traiter des cas 3D assez complexes tout en offrant la possibilité d'ajouter de nouvelles fonctionnalités issues d'autres codes de calcul.

9.2 Le logiciel LMGC90

Le code de calcul LMGC90 est outil numérique dédié à la mécanique des contacts et destiné à la recherche. M. Jean est l'initiateur du logiciel intégrant ses travaux théoriques [Jean, 1992, 1999] et ceux de Moreau [1988, 1994]. Puis il a été réécrit par F. Dubois et M. Jean.

L'architecture de ce logiciel a été pensée pour pouvoir évoluer sans trop modifier le code. La volonté des concepteurs de créer un code souple et capable de communiquer avec d'autre codes, les a incité à exploiter différents langages de programmation. Cette stratégie peut être résumée dans les points suivants [Renouf, 2004]

- le cœur du code, nommé *Core*, est codé en Fortran 90,
- une interface Python permettant la création des fichiers de calcul exécutables et modulables selon le besoin des utilisateurs,
- un ensemble de fichier en python permettant la communication entre des fonctions C++ et Fortran 90 nommé *Chipy* (utilisant les librairies ISO C binding et Cthon).

LMGC90 est un code orienté objet, avec des formes géométriques de type disque, jonc, polygone, sphère, cylindre, plan ou encore polyèdre considérées comme des objets, ce qui offre un polymorphisme dynamique au code. Ce code a été conçu avec une volonté de privilégier l'efficacité et la modularité des algorithmes développés, ce qui en fait un outil de référence pour le calcul par éléments discrets complexes.

Les principales étapes d'un calcul dynamique avec LMGC90

La méthode NSCD est implémentée suivant un algorithme type prédicteur-correcteur sur un pas de temps. Cet algorithme est composé des trois étapes suivantes (figure 9.1):

- calcul d'une possible configuration de contact entre deux corps dans le pas de temps en question, puis évaluation des matrices de passage $\mathbb{H}$ des inconnues des corps aux inconnues des contacts,
- évaluation des vitesses libres $\mathbf{v}^{libre} = \mathbb{H}^T\mathbb{M}^{-1}\mathbf{R}^d$ nécessaire au calcul des impulsions de contact $\mathbf{r}$ avec l'équation (8.15) par la méthode itérative NLGS,
- calcul des impulsions de contact
- calcul des vitesses en rajoutant la perturbation des contacts à la vitesse libre $\mathbf{V} = \mathbb{M}^{-1}(\mathbf{R}^d + \mathbb{H}\mathbf{r})$ et les positions en fin de pas de temps.

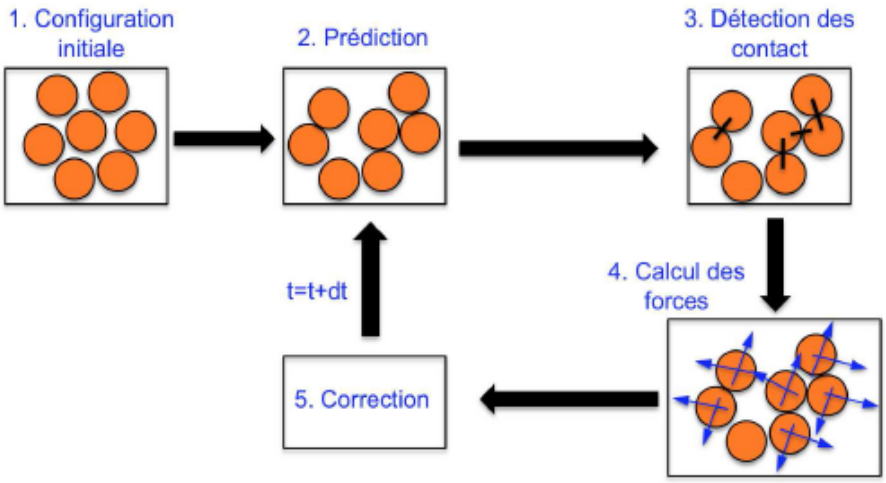


FIGURE 9.1 – Illustration des phases principales du code "LMGC90"

9.3 Le modèle dynamique avec contacts

Dans ce chapitre le modèle dynamique de la fibre intègre explicitement l'influence des forces de contact avec des conditions à respecter pour éviter les interpénétrations. Ces conditions concernent les vitesses relatives et les forces normales (eq. 8.8).

L'intégration explicite des forces de contact dans l'équation dynamique dans l'espace articulaire a été reformulée par l'équation (8.1) du chapitre précédent. Le traitement du contact nécessite le passage de cette équation dans l'espace cartésien où sont définis les deux points de contact. En dérivant l'équation (5.6) exprimant les vitesses relatives, on obtient :

$$\mathbf{a} = \mathbb{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbb{J}}\dot{\mathbf{q}} \tag{9.1}$$

Puis, en introduisant l'équation (8.1) dans (9.1) on obtient:

$$\mathbf{a} = \mathbb{J}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{J}^T\mathbf{f} + \mathbb{J}\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{C} - \mathbf{Q}\right) + \dot{\mathbb{J}}\dot{\mathbf{q}} \tag{9.2}$$

que l'on peut réécrire sous la forme compacte suivante :

$$\mathbf{a} = \mathbb{W}\mathbf{f} + \mathbf{a}_{\mathbf{libre}} \tag{9.3}$$

où $\mathbf{a}_{\mathbf{libre}} = \mathbb{J}\mathbb{M}^{-1}\left(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{C} - \mathbf{Q}\right) + \dot{\mathbb{J}}\dot{\mathbf{q}}$ représente la dynamique sans contact projetée dans les repères des contacts. La matrice $\mathbb{W}$, de taille $3N_c \times 3N_c$ (N_c étant le nombre de points de contact), est l'assemblage des matrices d'inertie projetées dans l'espace de chaque contact du système multipliées par le pas de temps.

Jusqu'ici notre problème est écrit en accélération et les lois de contact présentées au paragraphe (8.3.3.1) sont exprimées en vitesses. Il est donc possible, sur l'intervalle de temps $]t_i, t_{i+1}]$, d'intégrer l'équation (9.3) pour obtenir une équation en vitesse. En utilisant le formalisme de (NSCD) développé par Moreau [1988] et Jean [1999] nous obtenons :

$$\mathbb{W}\mathbf{r} - \mathbf{v} = -\mathbf{v}_{libre} \tag{9.4}$$

où $\mathbf{v}_{libre} = \mathbb{J}\dot{\mathbf{q}}_{libre}$ est la vitesse libre, à la fin du pas de temps $h =]t_i, t_{i+1}]$, obtenue avec le schéma d'intégration "MEBDFI" (voir la section 6.2.2) et $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ les inconnues.

Les hypothèses de cette formulation sont les suivantes :

- la matrice d'interaction $\mathbb{W}$ (ou de *Delassus*) est considérée linéaire sur un pas de temps
- la force de contact $\mathbf{f}$ est aussi constante sur un pas de temps, ce qui donne $\mathbf{r} = h\mathbf{f}$
- le pas de temps est suffisamment petit pour que les hypothèses précédentes soient valides
- la force de contact est obtenue à partir de l'impulsion avec la formule $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{r}}{h}$; elle est ensuite injectée dans l'équation dynamique (8.1) qui sera intégrée avec le schéma "MEBDFI"

Nous cherchons donc à résoudre le problème de complémentarité linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{W}\mathbf{r} - \mathbf{v} = -\mathbf{v}_{libre} \\ Loi(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = vraie \end{cases} \tag{9.5}$$

La résolution du système d'équations (9.5) nécessite la détermination de la matrice $\mathbb{W}$ et les vitesses relatives des points de contacts :

- Les vitesses relatives sont obtenues par différence algébrique des projections, dans l'espace local de contact, des vitesses des corps en contact.
- La matrice de *Delassus* $\mathbb{W}$, quant à elle, peut être calculée explicitement avec la relation $\mathbb{J}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{J}^T$, mais cette formulation est très coûteuse. En réutilisant l'algorithme récursif présenté dans la section (5.4.3.3) l'opération est simplifiée et moins coûteuse que la première. A partir de l'équation (8.1) et en considérant au début du pas de temps les conditions suivantes :
  - il n'y a ni couple articulaire ($\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$),
  - ni vitesse articulaire ($\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$),
  - ni gravité ($\mathbf{g} = \mathbf{0}$),

  ainsi, l'accélération articulaire libre devient nulle ($\ddot{\mathbf{q}}_{libre} = \mathbf{0}$). Par conséquent, l'équation (8.1) devient :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{J}^T\mathbf{f} \tag{9.6}$$

  En appliquant des perturbations unitaires en chaque point de contact avec l'algorithme récursif (1) avec les conditions précédentes, nous obtenons de nouvelles accélérations, appelées "accélérations articulaires auxiliaires" :

$$\ddot{\mathbf{q}}_{aux} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{J}^T\mathbf{f}_{unit} \tag{9.7}$$

Puis avec la relation (9.1) l'accélération auxiliaire dans l'espace de contact suivante est calculée:

$$\mathbf{a}_{aux} = \mathbb{J}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{J}^T\mathbf{f}_{unit} \tag{9.8}$$

Puis, nous utilisons ces vecteurs d'accélération auxiliaire $\mathbf{a}_{aux}$ pour assembler la matrice de *Delassus* :

$$\mathbb{W} = \mathbb{H}^T \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{aux}^n & \mathbf{a}_{aux}^s & \mathbf{a}_{aux}^t \end{pmatrix} \mathbb{H} \tag{9.9}$$

9.3.1 Résolution du problème NSCD

La résolution des forces de contact-frottant est réalisée dans le code LMGC90 avec l'algorithme *Gauss-Seidel Non-Linéaire* ayant l'avantage d'une résolution précise grâce à une méthode de *Newton-Raphson*.

Notre problème est en 3D, avec des composantes normales et tangentielles et $C(\mu r_n)$ représente le disque de rayon μr_n, ce qui nous amène à considérer dans chaque point de contact un repère orthonormé direct $(P; n, t, s)$ (fig. 8.12). L'équation du contact dans l'espace opérationnel peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} v_n \\ v_t \\ v_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{nn} & W_{nt} & W_{ns} \\ W_{tn} & W_{tt} & W_{ts} \\ W_{sn} & W_{st} & W_{ss} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_n^{libre} \\ v_t^{libre} \\ v_s^{libre} \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

La résolution du système (9.5) est ramenée à la recherche des zéros du système suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_1(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = v_n - v_n^{libre} - W_{nn} r_n - \mathbb{W}_{n\mathbf{t}} \mathbf{r_t} \\ \boldsymbol{\phi}_2(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \mathbf{v_t} - \mathbf{v_t}^{libre} - \mathbb{W}_{\mathbf{t}n} r_n - \mathbb{W}_{\mathbf{tt}} \mathbf{r_t} \\ \boldsymbol{\phi}_3(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = r_n - proj_{\mathbb{R}^+}(r_n - \rho_n v_n) \\ \boldsymbol{\phi}_3(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \mathbf{r_t} - proj_{C(\mu r_n)}(\mathbf{r_t} - \rho_{\mathbf{t}} \mathbf{v_t}) \end{cases} \tag{9.11}$$

où $\mathbb{W}_{n\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} W_{nt} & W_{ns} \end{pmatrix}$, $\mathbb{W}_{\mathbf{t}n} = \begin{pmatrix} W_{tn} \\ W_{sn} \end{pmatrix}$ et $\mathbb{W}_{\mathbf{tt}} = \begin{pmatrix} W_{tt} & W_{ts} \\ W_{st} & W_{ss} \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{\phi}$ est une application définie comme suit :

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\phi} & : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ & & (\mathbf{v}, \mathbf{r}) & \longrightarrow & \boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \end{array} \tag{9.12}$$

et les constantes ρ_n et $\rho_{\mathbf{t}}$ sont choisies de façon à rendre respectivement contractantes les applications [Alart, 1993] :

$$\begin{array}{rcl} r_n & \longrightarrow & r_n - \rho_n v_n \\ \mathbf{r_t} & \longrightarrow & \mathbf{r_t} - \rho_{\mathbf{t}} \mathbf{v_t} \end{array} \tag{9.13}$$

leurs valeurs sont :

$$\rho_n = \frac{1}{W_{nn}}, \quad \rho_{\mathbf{t}} = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}^2} \tag{9.14}$$

avec λ_{max} et λ_{min} sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{W}_{\mathbf{tt}}$

La recherche d'un couple $(\mathbf{v}, \mathbf{r})$, satisfaisant le système d'équations (9.11), nécessite l'application de la méthode itérative de Newton avec une suite d'itérés $(\mathbf{v}^p, \mathbf{r}^p)$ de la manière suivante :

$$\nabla\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^p, \mathbf{r}^p)\boldsymbol{\delta} = -\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^p, \mathbf{r}^p) \tag{9.15}$$

où $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{v}^{p+1} - \mathbf{v}^p, \mathbf{r}^{p+1} - \mathbf{r}^p)^T$ et $\nabla\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^p, \mathbf{r}^p)$ est la matrice jacobienne de $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^p, \mathbf{r}^p)$ qui sera remplacée par des éléments de base du jacobien généralisé à condition que $\boldsymbol{\phi}$ soit différentiable en $(\mathbf{v}^p, \mathbf{r}^p)$ [Alart, 1997]. On obtient donc :

$$\partial\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} I_{1\times1} & \mathbf{0}_{1\times2} & -W_{nn} & -\mathbb{W}_{n\mathbf{t}} \\ \mathbf{0}_{2\times1} & \mathbb{I}_{3\times3} & -\mathbb{W}_{\mathbf{t}n} & -\mathbb{W}_{\mathbf{tt}} \\ \frac{\partial\boldsymbol{\phi}_3}{\partial v_n} & \mathbf{0}_{1\times2} & \frac{\partial\boldsymbol{\phi}_3}{\partial r_n} & \mathbf{0}_{1\times2} \\ \mathbf{0}_{2\times1} & \frac{\boldsymbol{\phi}_4}{\partial\mathbf{v_t}} & \frac{\boldsymbol{\phi}_4}{\partial r_n} & \frac{\boldsymbol{\phi}_3}{\partial\mathbf{r_t}} \end{bmatrix} \tag{9.16}$$

En introduisant les indices d'itération nous obtenons la matrice la matrice jacobienne $\nabla\boldsymbol{\phi}^p$:

$$\nabla\boldsymbol{\phi}^p = \begin{bmatrix} I_{1\times1} & \mathbf{0}_{1\times2} & -W_{nn} & -\mathbb{W}_{n\mathbf{t}} \\ \mathbf{0}_{2\times1} & \mathbb{I}_{3\times3} & -\mathbb{W}_{\mathbf{t}n} & -\mathbb{W}_{\mathbf{tt}} \\ \frac{\partial\boldsymbol{\phi}_3(\mathbf{v}^p,\mathbf{r}^p)}{\partial v_n^p} & \mathbf{0}_{1\times2} & \frac{\partial\boldsymbol{\phi}_3(\mathbf{v}^p,\mathbf{r}^p)}{\partial r_n^p} & \mathbf{0}_{1\times2} \\ \mathbf{0}_{2\times1} & \frac{\boldsymbol{\phi}_4(\mathbf{v}^p,\mathbf{r}^p)}{\partial\mathbf{v}_\mathbf{t}^p} & \frac{\boldsymbol{\phi}_4(\mathbf{v}^p,\mathbf{r}^p)}{\partial r_n^p} & \frac{\boldsymbol{\phi}_4(\mathbf{v}^p,\mathbf{r}^p)}{\partial\mathbf{r}_\mathbf{t}^p} \end{bmatrix} \tag{9.17}$$

Il existe trois cas de figure associés à la résolution des problèmes de contact :

1. le cas de non contact : $v_n^{libre} \geq 0 \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{0}$
2. le cas d'adhérence : $\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{r} = -\mathbb{W}^{-1}\mathbf{v}^{libre}$
3. le cas du glissement : la solution est plus complexe et nécessite l'application de la méthode de Newton

Le système que l'on cherche à résoudre avec l'algorithme NLGS (Algo. 2) est le suivant :

$$\begin{bmatrix} I_{1\times1} & \mathbf{0}_{1\times2} & -W_{nn} & -\mathbb{W}_{n\mathbf{t}} \\ \mathbf{0}_{2\times1} & \mathbb{I}_{2\times2} & -\mathbb{W}_{\mathbf{t}n} & -\mathbb{W}_{\mathbf{tt}} \\ \frac{\partial\boldsymbol{\phi}_3(\mathbf{v}^p,\mathbf{r}^p)}{\partial v_n^p} & \mathbf{0}_{1\times2} & \frac{\partial\boldsymbol{\phi}_3(\mathbf{v}^p,\mathbf{r}^p)}{\partial r_n^p} & \mathbf{0}_{1\times2} \\ \mathbf{0}_{2\times1} & \frac{\boldsymbol{\phi}_4(\mathbf{v}^p,\mathbf{r}^p)}{\partial\mathbf{v}_\mathbf{t}^p} & \frac{\boldsymbol{\phi}_4(\mathbf{v}^p,\mathbf{r}^p)}{\partial r_n^p} & \frac{\boldsymbol{\phi}_4(\mathbf{v}^p,\mathbf{r}^p)}{\partial\mathbf{r}_\mathbf{t}^p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{p+1} - \mathbf{v}^p \\ \mathbf{r}^{p+1} - \mathbf{r}^p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1(\mathbf{v}^p, \mathbf{r}^p) \\ \boldsymbol{\phi}_2(\mathbf{v}^p, \mathbf{r}^p) \\ \boldsymbol{\phi}_3(\mathbf{v}^p, \mathbf{r}^p) \\ \boldsymbol{\phi}_4(\mathbf{v}^p, \mathbf{r}^p) \end{bmatrix} \tag{9.18}$$

Comme $\boldsymbol{\phi}_1$ et $\boldsymbol{\phi}_2$ sont déjà déterminées, il nous reste donc à déterminer $\boldsymbol{\phi}_3$ et $\boldsymbol{\phi}_4$ ainsi que leurs dérivées, selon les cas de figure, en évaluant les quantités projetées du système (9.11) (tableau : 9.1).

Au début du pas de temps, l'opération de détection des contacts est lancée. Une fois terminée, nous construisons les matrices $\mathbb{W}_{\alpha\alpha}$ pour chaque contact α, puis $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$ reliant les contacts α et β. Nous calculons ensuite les vitesses libres de chaque corps à la fin du pas de temps avec le solveur

TABLE 9.1 – Valeurs de ϕ_3 et ϕ_4 ainsi que leurs dérivées $\partial\phi_3$ et $\partial\phi_4$ en fonction des statuts

ϕ_3 et $\partial\phi_3$			
Si	$r_n - \rho_n v_n > 0$	alors	
	$\phi_3 = \rho_n v_n$	et	$\frac{\partial\phi_3}{\partial v_n} = \rho_n$ $\frac{\partial\phi_3}{\partial r_n} = 0$
sinon			
	$\phi_3 = r_n$	et	$\frac{\partial\phi_3}{\partial v_n} = 0$, $\frac{\partial\phi_3}{\partial r_n} = 1$

ϕ_4 et $\partial\phi_4$			
Si	$\mathbf{r_t} - \rho_\mathbf{t}\mathbf{v_t} \in C(\mu r_n)$	alors	
	$\phi_4 = \rho_\mathbf{t}\mathbf{v_t}$	et	$\frac{\partial\phi_4}{\partial r_n} = 0$ $\frac{\partial\phi_4}{\partial \mathbf{r_t}} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial\phi_4}{\partial \mathbf{v_t}} = \rho_\mathbf{t}\mathbb{I}$
sinon			
	$\phi_4 = \mathbf{r_t} - \mu\frac{\mathbf{r_t}-\rho_\mathbf{t}\mathbf{v_t}}{\|\mathbf{r_t}-\rho_\mathbf{t}\mathbf{v_t}\|}$	et	$\frac{\partial\phi_4}{\partial r_n} = -\mu\frac{\mathbf{r_t}-\rho_\mathbf{t}\mathbf{v_t}}{\|\mathbf{r_t}-\rho_\mathbf{t}\mathbf{v_t}\|}$ $\frac{\partial\phi_4}{\partial \mathbf{r_t}} = \mathbb{I} - \rho_\mathbf{t}\mu r_n M(\mathbf{r_t} - \rho_\mathbf{t}\mathbf{v_t})$ $\frac{\partial\phi_4}{\partial \mathbf{v_t}} = \rho_\mathbf{t}\mu r_n M(\mathbf{r_t} - \rho_\mathbf{t}\mathbf{v_t})$

où $M(\mathbf{V})$ est la dérivée de $\frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$ (avec $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$) et elle est égale à :

$$M(\mathbf{V}) = \frac{1}{\|\mathbf{V}\|^3}\begin{bmatrix} V_2^2 & -V_1V_2 \\ -V_2V_1 & V_1^2 \end{bmatrix}$$

"MEBDFI". Avec ces données, nous évaluons le membre de droite $(-\mathbf{b}_\alpha)$. Enfin, avec ces données nous alimentons l'algorithme NLGS (Algo. 2) pour obtenir les impulsions de contact, qui sont divisées par le pas de temps, puis introduites dans le modèle dynamique comme des forces extérieures. L'équation dynamique est intégrée, avec le solveur "MEBDFI", pour obtenir les vitesses et positions de chaque corps à la fin du même pas de temps.

9.3.2 Critères de convergence

Dans le cas de plusieurs contacts frottants simultanés, la solution exacte est inconnue et la démonstration de son existence et son unicité reste très complexe à cause des lois non-régulières de *Coulomb* et *Signorini*. L'utilisation de l'algorithme NLGS, pour approximer la solution, nécessite un test d'arrêt (convergence) influençant bien sûr sa qualité.

LMGC90 propose un algorithme NLGS avec des critères de convergence liés à l'énergie du système [Jean, 1992]. Ce type de test de convergence est basé sur la vérification de la variation d'énergie (moyenne, maximale ou encore une somme pondérée de ces deux quantités) entre deux itérations de l'algorithme NLGS (Algo. 2). LMGC90 offre la possibilité de choir la fréquence de ces tests et le choix entre une norme dite quadratique "*Quad*", une norme dit max "*Maxm*" et une autre, qui est la combinaison de ces deux précédente, "*QM/16*".

Pour une tolérance "*Tol*", fixée par l'utilisateur, les normes citées précédemment sont définies dans LMGC90 comme suit :

Données : $\mathbb{W}$ **et** $\mathbf{v}_{libre}$
Début du pas de temps
  Tant que (*non convergence*) **faire**
    $k = k + 1$
    Pour *chaque contact* i=1 à N_c **faire**
      Si ($v^i_{n,libre} > 0$) **Alors**
        Cas de non-contact
        $\mathbf{r}^i_{contact} = \mathbf{0}$
      Sinon
        $\mathbf{r}^i_{contact} = -\mathbb{W}_i^{-1}\mathbf{v}^i_{libre}$ (le cas d'adhérence est supposé)
        Si ($\left\|\mathbf{r}^i_{\mathbf{t},contact}\right\| \leq \mu r^i_{n,contact}$) **Alors**
          Continue
        Sinon
          Cas de glissement avec $\left\|\mathbf{r}^i_{\mathbf{t},contact}\right\| > \mu r^i_{n,contact}$
          $\begin{pmatrix} \mathbf{v}^i \\ \mathbf{r}^i_{contact} \end{pmatrix}$ = SoleurNewton($\mathbf{v}^i_{libre}$, $\mathbf{r}^i_{contact}$) (voir Algo. 3)
        Fin Si
      Fin Si
    Fin Pour
    Test de convergence pour $k = 0, ..., k_{max}$
  Fait
  Retourner Résultat : $\mathbf{r}_{contact}$;
Fin du pas de temps

Algorithme 2 – L'algorithme NLGS pour calculer les impulsions de contact

- les critères de la norme "*Quad*" :

$$Quad \equiv \begin{cases} \frac{\sum_\alpha <\Delta\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha>}{\sum_\alpha <\mathbb{W}_{\alpha\alpha}\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha>} < Tol, & et \\ \frac{\sqrt{\sum_\alpha ||\Delta\mathbf{v}_\alpha||^2/N_c}}{\sqrt{\sum_\alpha ||\mathbb{W}_{\alpha\alpha}\mathbf{r}_\alpha||^2/N_c}} < Tol, & et \\ \frac{\sqrt{\sum_\alpha ||\Delta\mathbf{v}_\alpha||^2||\Delta\mathbf{r}_\alpha||^2/N_c}}{\sum_\alpha (\mathbb{W}_{\alpha\alpha}\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)/N_c} < Tol, \end{cases} \tag{9.19}$$

- les critères de la norme "*Maxm*" :

$$Maxm \equiv \begin{cases} \frac{\sum_\alpha <\Delta\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha>}{\sum_\alpha <\mathbb{W}_{\alpha\alpha}\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha>} < Tol, & et \\ \frac{max_\alpha ||\Delta\mathbf{v}_\alpha||^2}{\sqrt{\sum_\alpha ||\mathbb{W}_{\alpha\alpha}\mathbf{r}_\alpha||^2/N_c}} < Tol, & et \\ \frac{max_\alpha <\Delta\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha>}{\sum_\alpha (\mathbb{W}_{\alpha\alpha}\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)/N_c} < Tol, \end{cases} \tag{9.20}$$

Données : $\mathbb{W}_i$, $\mathbf{v}^i_{libre}$ **et** $\mathbf{r}^i_{contact}$
Début
  Calcul de $(\lambda_{min}, \lambda_{max})$ valeurs propres de $\mathbb{W}_{\mathbf{tt}}$
  $\rho_n = \frac{1}{W_{nn}}$
  $\rho_{\mathbf{tt}} = \frac{\lambda_{min}}{\lambda^2_{max}}$
  Tant que $(\left\|\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}^i_{contact})\right\| \neq 0)$ **faire**
    Déterminer $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^{i,p}, \mathbf{r}^{i,p}_{contact})$ et $\partial\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^{i,p}, \mathbf{r}^{i,p}_{contact})$ (voir le tableau 9.1)
    Construire $\nabla\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^{i,p}, \mathbf{r}^{i,p}_{contact})$
    $\begin{pmatrix} \mathbf{v}^{i,p+1} \\ \mathbf{r}^{i,p+1}_{contact} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{i,p} \\ \mathbf{r}^{i,p}_{contact} \end{pmatrix}$ - $\nabla\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^{i,p}, \mathbf{r}^{i,p}_{contact})^{-1}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^{i,p}, \mathbf{r}^{i,p}_{contact})$
    Test de convergence pour $p = 0, ..., p_{max}$
  Fait

Fin

Algorithme 3 – L'algorithme de Newton pour calculer les impulsions de contact-frottant (SoleurNewton)

où $\Delta\mathbf{v}_\alpha$ est la différence entre deux vitesses relatives issues de deux dernières itérations de l'algorithme NLGS (Algo.2), $\mathbf{r}_\alpha$ la dernière valeur des impulsions au contact α calculée, $<,>$ le produit scalaire et N_c le nombre de contacts.

9.3.3 Calcul de la matrice de *Delassus*

Cette partie concerne le calcul de la matrice d'Interaction $\mathbb{W}$ (*Delassus*). Le calcul direct de cette matrice est très coûteux, en particulier durant les simulations ayant un très grand nombre de contacts.

Nous partons de l'équation dynamique, dans l'espace articulaire, intégrant les forces de contact :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{M}^{-1}(\mathbf{q})\left(\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q})\right) + \mathbb{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbb{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f} \tag{9.21}$$

Puis, nous l'exprimons dans l'espace opérationnel (espace des contacts) :

$$\mathbf{a} = \mathbb{a}_{aux}\mathbf{f} + \mathbf{a}_{\mathbf{libre}} \tag{9.22}$$

avec $\mathbb{a}_{aux} = \mathbb{J}(\mathbf{q})\mathbb{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbb{J}^T(\mathbf{q})$ et $\mathbf{a}_{\mathbf{libre}} = \mathbb{J}(\mathbf{q})\mathbb{M}^{-1}(\mathbf{q})\left(\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q})\right)$.

Par souci d'homogénéisation des indices et paramètres dans la suite du manuscrit, nous garderons les notions suivantes :

- n ; le nombre de corps par poly-articulé,
- N_c ; le nombre de point de contact par poly-articulé,
- l'indice $_c$; désigne un point de contact,
- l'indice $_C$; désigne un corps de contact.

On peut alors décomposer la matrice de *Delassus* ${}^{c}\mathbb{W}_C$ du corps C au point de contact c de la manière suivante :

$$ {}^{c}\mathbb{W}_C = {}^{c}\mathbb{a}_{Caux} = \mathbb{H}_{C,c}\,{}^{C}\mathbb{J}_C\mathbb{M}^{-1C}\mathbb{J}_C^T\mathbb{H}_{C,c}^T \tag{9.23} $$

où $\mathbb{H}_c$ est la matrice de passage du repère d'un corps en contact au repère local relié à son point de contact, ${}^{C}\mathbb{J}_C$ est la Jacobienne cinématique du corps C en contact exprimée dans son repère principal. De ce fait, nous obtenons la Jacobienne cinématique exprimée dans le repère du contact ${}^{c}\mathbb{J}_C = \mathbb{H}_{C,c}\,{}^{C}\mathbb{J}_C$.

Méthode de calcul

Le calcul de la matrice ${}^{c}\mathbb{W}_C$ s'effectue en deux étapes. La première consiste à calculer l'accélération, représentant une colonne de la matrice accélération auxiliaire ${}^{c}\mathbb{a}_{Cauxi}$, des corps en contact sous l'effet d'une force unitaire ${}^{c}\mathbf{f}^{[k]}_{(unit)C,c}$ exercée selon l'axe k sur chacun de leurs points de contact. Le torseur de cette force est exprimé dans le repère principal de chacun des corps en contact :

$$ {}^{C}\mathbf{f}^{[k]}_{(unit)C,c} = \begin{bmatrix} {}^{C}\mathbf{f}^{[k]}_{(unit)C,c} \\ {}^{C}\mathbf{M}^{[k]}_{C,c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}^T_{C,c}\,{}^{c}\mathbf{f}^{[k]}_{(unit)C,c}\mathbb{H}_{C,c} \\ {}^{C}\mathbf{P}_{C,c} \wedge {}^{C}\,\mathbf{f}^{[k]}_{(unit)C,c} \end{bmatrix} \tag{9.24} $$

où ${}^{C}\mathbf{P}_{C,c}$ la position du contact c du corps C, k allant de 1 à 3 pour désigner les trois trois principaux $(\mathbf{n}_{C,c}, \mathbf{t}_{C,c}, \mathbf{s}_{C,c})$ de la force au point de contact c du corps C, ${}^{C}\mathbf{f}^{[k]}_{C,c}$ la force unitaire appliquée selon l'axe k exprimée dans le repère du corps C et ${}^{C}\mathbf{M}^{[k]}_{C,c}$ le moment généré par la force ${}^{C}\mathbf{f}^{[k]}_{C,c}$. La deuxième étape consiste à exécuter $3N_c$ fois l'algorithme récursif (voir la section 5.4.3.3) pour chaque fibre. Cette accélération vaut :

$$ {}^{C}\mathbf{a}_{C,c^{[k]}_{aux}} = \mathbf{a}_{C^{[k]}_{({}^{C}\mathbf{f}_{(unit)C,c})}} = {}^{C}\,\mathbb{J}_C\mathbb{M}^{-1C}\mathbb{J}_C^T \tag{9.25} $$

et est de taille (6×1), puis elle est projetée dans l'espace des contacts :

$$ {}^{c}\mathbf{a}_{C^{[k]}_{aux}} = \mathbb{H}_{C,c}\,{}^{C}\mathbf{a}_{C^{[k]}_{aux}}\mathbb{H}^T_{C,c} \tag{9.26} $$

et est de taille (3×1). Ensuite, en assemblant les accélérations ${}^{c}\mathbf{a}_{C^{[k]}_{aux}}$ nous obtenons la matrice ${}^{c}\mathbb{a}_{Caux}$ qui est de taille (3×3). Enfin nous obtenons la matrice ${}^{c}\mathbb{W}_C$ du corps C au point de contact c en utilisant l'équation (9.23).

L'algorithme (4) résume la méthode développée dans cette partie et il est de complexité $O(N_C^2 + nN_C)$.

9.4 Cas test et résultats

Cette section est consacrée à l'illustration de la performance de la méthode développée au travers de quelques cas test numériques. Nous analysons par la suite l'influence des contacts dynamiques sur le comportement mécanique des fibres.

Données : $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\mathbb{H}_{C,c}$ **et** $\mathbf{v}_{libre}$
Début
  Pour *Pour chaque corps* C_j *en contact* **faire**
    Pour *Pour chaque point de contact* c_i **faire**
      Pour $k = 1$ à 3 **faire**
        ${}^{C_j}\mathbf{f}^{[k]}_{(unit)C_j,c_i}$ (9.24)
        $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{g} = \mathbf{0}$
        $\ddot{\mathbf{q}}^{[k]}_{(aux)C_j,c_i}$ = *Accelerations_PA*($\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{f}^{[k]}_e$)
        ${}^{c_i}\mathbf{a}^{[k]}_{(aux)C_j} = {}^{c_i}\mathbb{J}_{C_j}\ddot{\mathbf{q}}^{[k]}_{(aux)C_j,c_i}$
      Fin Pour
      Assemblage de ${}^{c_i}\mathbb{a}_{C_j}$ avec les vecteurs ${}^{c_i}\mathbf{a}^{[k]}_{(aux)C_j}$
    Fin Pour
  Fin Pour
  Retourner Résultat : les matrices ${}^{c_i}\mathbb{W}_{C_j} = {}^{c_i}\mathbb{a}_{C_j}$;
Fin

Algorithme 4 – Algorithme de calcul de la matice de *Delassus* ${}^{c}\mathbb{W}_{C}$

Un premiers cas test étudiant le comportement mécanique d'une fibre en chute libre entrant en contact avec d'autres fibres immobiles et un deuxième cas test étudiant le comportement mécanique d'un ensemble de fibres sous l'effet de la gravité dans un milieu confiné, seront présentés et leurs résultats seront analysés. L'intérêt de ces simulations numériques est purement qualitatif (preuve de la capacité de la méthode à reproduire les phénomènes physiques).

9.4.1 Cas d'une seule fibre

9.4.1.1 Configuration géométrique et paramètres numériques

Dans cet exemple, la méthode et le modèle développés dans cette thèse sont utilisés pour étudier le comportement mécanique d'une fibre en chute libre entrant contact avec un obstacle (ensemble de fibres immobiles). La dynamique libre et contrainte (contacts) de la fibre est simulée à l'aide de notre modèle de corps articulés(5.4) et la méthode de traitement de contact non régulier (9.3) présentés précédemment.

La fibre est modélisée par un système de corps articulés ayant un module d'élasticité à chaque articulation du système. L'algorithme NLGS (Algo. 2) est appliqué pour le traitement des contacts. Une analyse des moments internes est réalisée durant la déformation de la fibre due au contact avec l'obstacle.

Le tableau 9.2 résume les données mécaniques et géométriques de la fibre qui est considérée

comme une poutre admettant que des déformations de flexion et torsion. La fibre est supposée homogène, incompressible et transversalement isotrope avec une section circulaire.

Les conditions limites de la fibre sont les suivantes:

- une extrémité libre
- l'autre extrémité ayant les degrés de liberté en translation et en rotation dans le plan perpendiculaire à la fibre

TABLE 9.2 – Paramètres géométriques et mécaniques de la fibre

Nombre d'éléments	Masse volumique $[kg/m^3]$	Rayon $[\mu m]$	Longueur $[m]$	Module élastique $[MPa]$
20	2600	80	16×10^{-4}	10

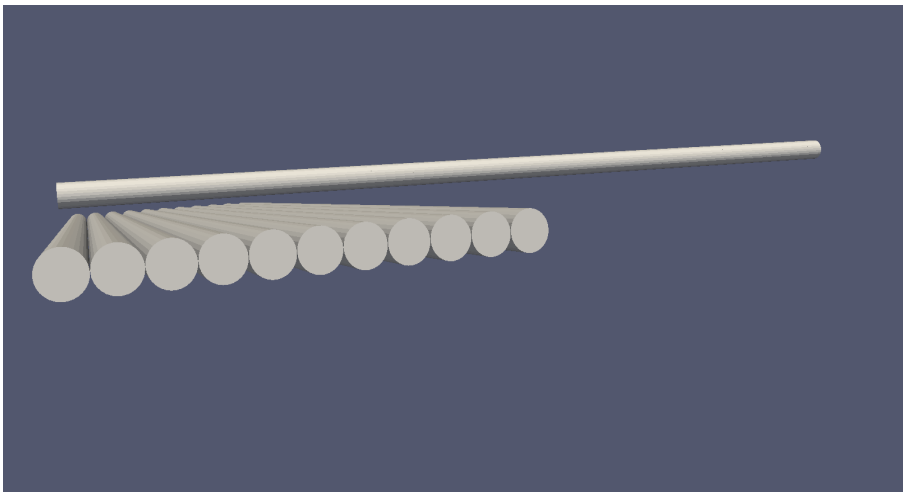


FIGURE 9.2 – Configuration initiale de la fibre

9.4.1.2 Résultats

Nous avons réalisé deux simulations d'une fibre en chute libre entrant en contact avec un obstacle (fibres immobiles) avec deux valeurs de la gravité: $g_1 = 9.81[m.s^{-2}]$ et $g_2 = 2 \times 9.81[m.s^{-2}]$. L'accélération de la fibre est augmentée, ce qui augmente la force du choc avec l'obstacle. Le but est d'analyser l'influence de l'accélération et les contacts sur les forces internes de la fibre.

Les figures 9.4 et 9.3 démontrent clairement l'influence des deux valeurs de la gravité sur la dynamique avec contact de la fibre. La fibre entre en contact avec l'obstacle à des instants différents d'un cas à l'autre. En augmentant la valeur de la gravité, le taux de déformation est augmenté à cause des forces de contacts au moment du contact avec l'obstacle. Comme les forces de contacts sont reliées directement à la vitesse relative entre la fibre et l'obstacle (voir la section 9.3.1), leur augmentation est le résultat d'une augmentation de la vitesse de la fibre.

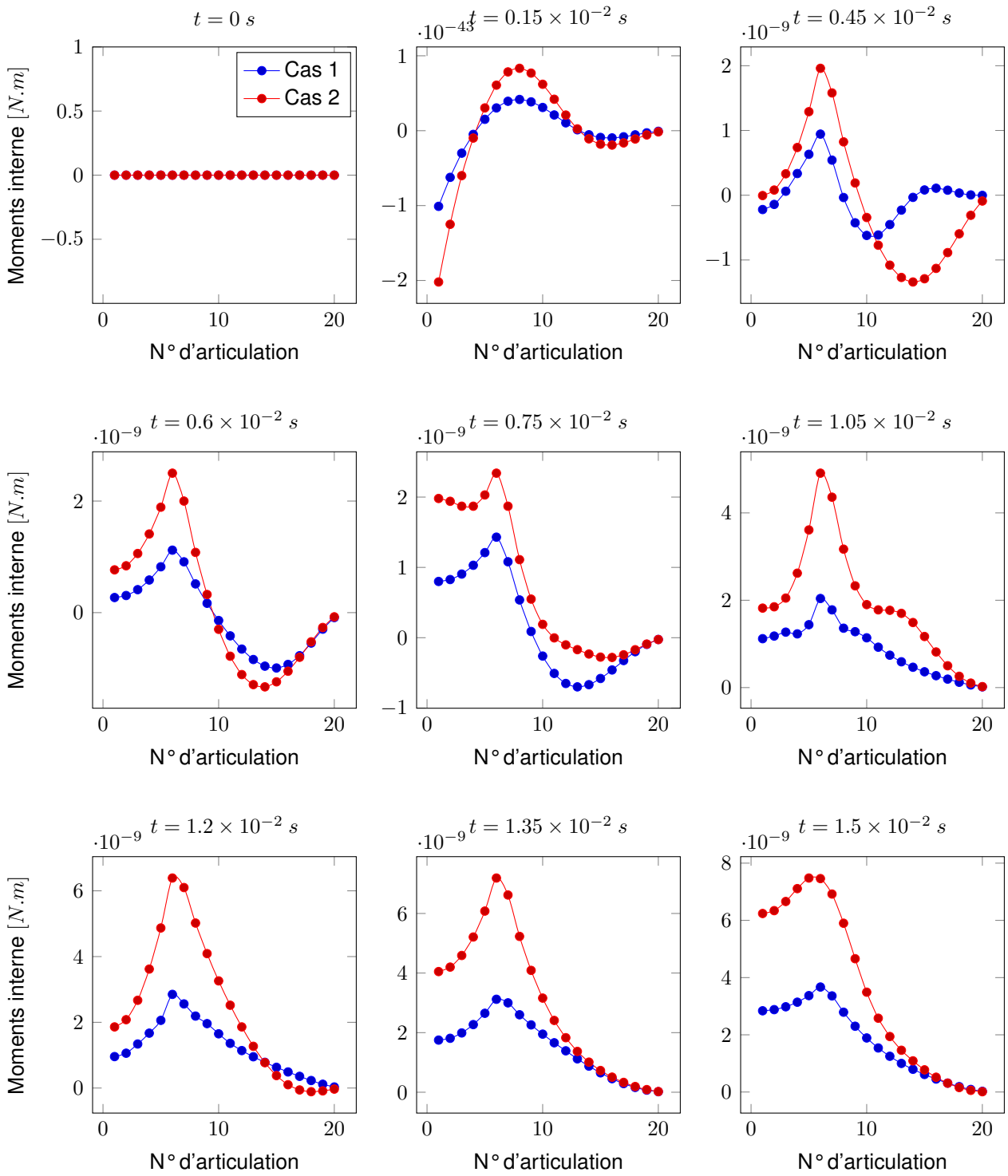


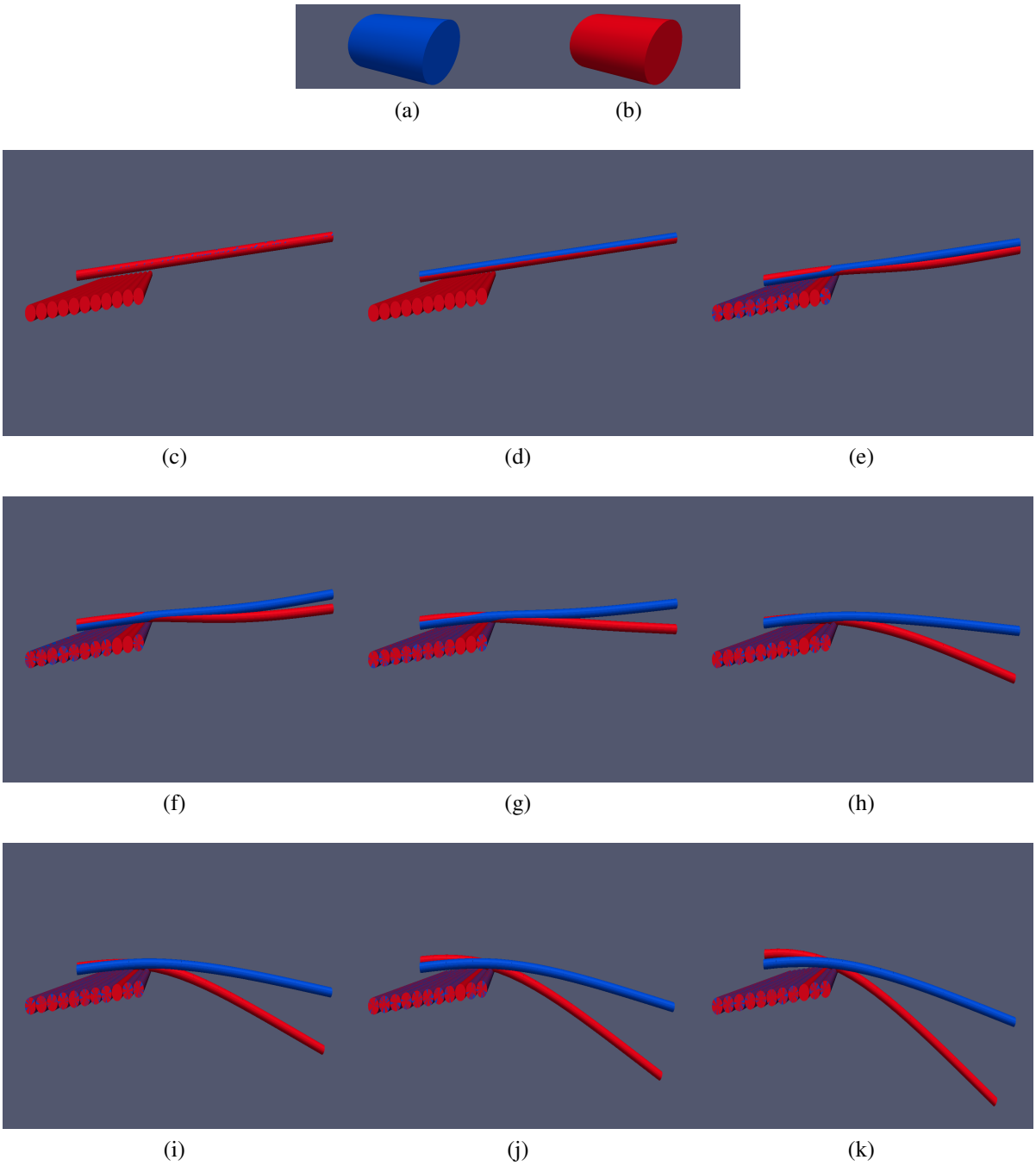
FIGURE 9.3 – Moments internes de la fibre dans Cas 1 où $g = 9.81[m.s^{-2}]$ et Cas 2 où $g = 2 \times 9.81[m.s^{-2}]$ à différents instants

9.4.2 Cas d'un ensemble de fibres

9.4.2.1 Configuration géométrique et paramètres numériques

Le modèle et la méthode utilisés dans ce cas de figure sont identiques à ceux utilisés dans le cas précédent.

Les conditions limites de chaque fibre sont les suivantes:



(a) (b)

(c) (d) (e)

(f) (g) (h)

(i) (j) (k)

FIGURE 9.4 – Configurations de la fibre dans le cas (a) où $g = 9.81[m.s^{-2}]$ et le cas (b) où $g = 2 \times 9.81[m.s^{-2}]$ à différents instants:(c) $t = 0s$, (f) $t = 1.5 \times 10^{-3}s$, (e) $t = 4.5 \times 10^{-3}s$, (f) $t = 6 \times 10^{-3}s$, (g) $t = 7.5 \times 10^{-3}s$, (h) $t = 10.5 \times 10^{-3}s$, (i) $t = 12 \times 10^{-3}s$, (j) $t = 13.5 \times 10^{-3}s$, (k) $t = 15 \times 10^{-3}s$

- une extrémité libre
- l'autre extrémité ayant des degrés de liberté en translation dans le plan perpendiculaire à la fibre et en rotation autour des axes du même plan.

Dans ce cas nous testons notre modèle pour simuler un ensemble de fibres sous l'effet de gravité confiné dans une boite. Nous souhaitons, au travers de cet exemple, comprendre les mouvements de

chaque fibre et les chaînes de contact en fonction de la dynamique appliquée. Les parois de la boîte peuvent représenter les frontières de mèches déjà déposées.

La figure 9.6 montre l'évolution du nombre de points de contact en fonction de la valeur de g. Nous constatons que le nombre de contact augmente de manière importante dans le cas où $g = 5 \times 9.81[m.s^{-2}]$ comparé à la situation où $g = 2 \times 9.81[m.s^{-2}]$. Cette différence ne concerne pas que le nombre de points de contact, mais aussi leur distribution. La figure 9.5 illustre l'évolution des points de contact montrant clairement que la prédiction de cette évolution est un problème dynamique. Les configurations présentées dans la figure 9.7 illustrent clairement l'influence de la dynamique des contact sur la répartition spatiale des fibres.

TABLE 9.3 – Paramètres géométriques et mécaniques des fibres

Nombre de fibres	Nombre d'éléments	Masse volumique $[kg/m^3]$	Rayon $[m]$	Longueur $[\mu m]$	Module élastique $[MPa]$
10	20	2600	40	8×10^{-4}	70

9.4.3 Limitations

Ce modèle dynamique d'ensemble de fibres en interaction présente toutefois des limitations. Ce modèle de corps articulés modélise fidèlement la dynamique de chaque fibre, cependant l'optimisation du calcul relatif aux corps virtuels reste à améliorer. Par exemple le calcul symbolique éliminant tous les termes ayant des valeurs nulles et aussi le calcul récursif de la Jacobienne de la fonction d'accélération articulaire permettraient de réduire davantage le temps de calcul. La méthodologie adoptée pour calculer les forces de contact puis l'intégration des accélérations articulaires avec et sans forces de contact restent très coûteuses. Malgré ces limitations, la complexité du modèle adopté reste linéaire par rapport au nombre de fibres et au nombre d'éléments.

La stratégie actuelle, est basée sur une double intégration. C'est à dire, on intègre une fois la dynamique libre pour obtenir les vitesses libres qui sont utilisées pour calculer les forces de contact, puis ces dernières sont introduites dans le modèle dynamique pour obtenir les accélérations des éléments de chaque système articulé. Les accélérations obtenues sont intégrées numériquement sur le même pas de temps (deuxième intégration) ce qui alourdit le calcul. A cela il faut ajouter l'hypothèse de la constance de la matrice de *Delassus* dans le pas de temps qui oblige à réduire le pas de temps. Plus la dynamique est importante et l'échelle petite, plus le pas de temps considéré est petit.

Nous avons démontré numériquement que le problème de la répartition spatiale d'un ensemble de fibres en interaction est un problème dynamique, nous ne disposons pas encore de données expérimentales à l'échelle de fibres permettant cette validation. Une confrontation calcul/expérience nécessiterait de conduire des calculs sur un très grand nombre de fibres de façon à reproduire les conditions réelles maîtrisables sur le plan expérimental.

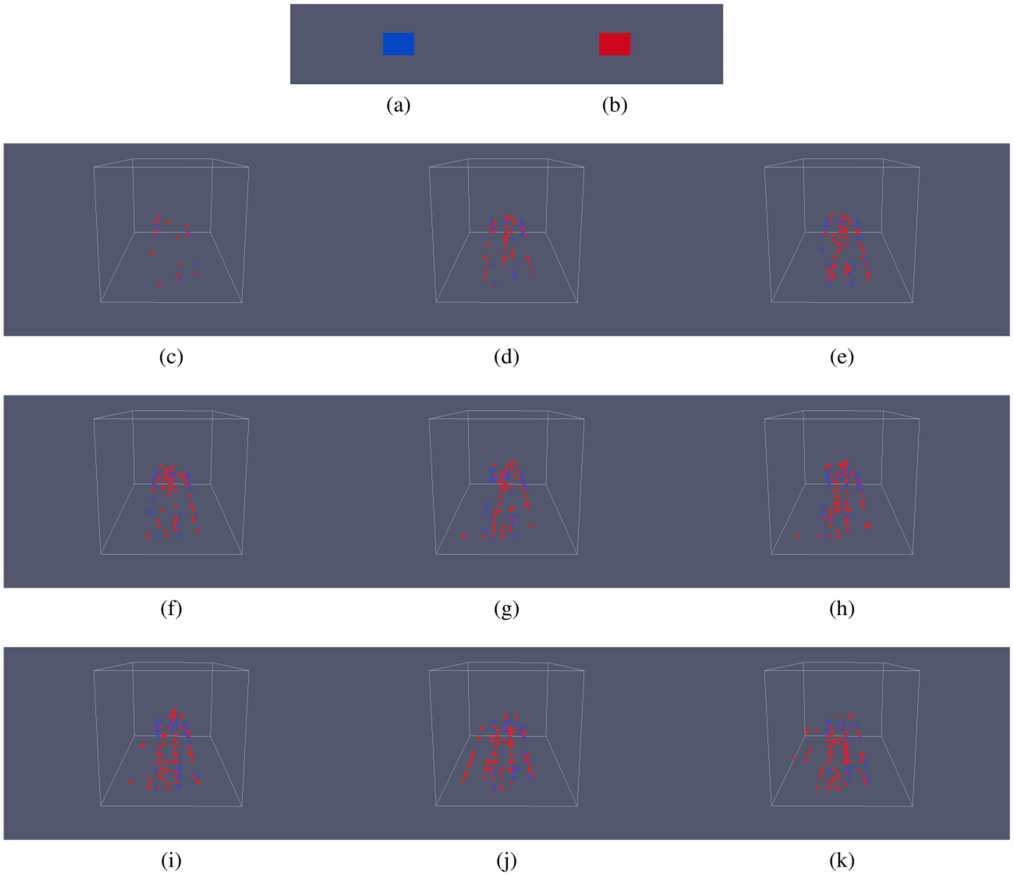


FIGURE 9.5 – Distribution des points de contact dans le cas (a) où $g = 2 \times 9.81[m.s^{-2}]$ et le cas (b) où $g = 5 \times 9.81[m.s^{-2}]$ à différents instants: (c) $t = 0.5 \times 10^{-3}s$, (d) $t = 1.5 \times 10^{-3}s$, (e) $t = 2 \times 10^{-3}s$, (f) $t = 2.5 \times 10^{-3}s$, (g) $t = 3 \times 10^{-3}s$, (h) $t = 3.5 \times 10^{-3}s$, (i) $t = 4 \times 10^{-3}s$, (j) $t = 4.5 \times 10^{-3}s$ et (k) $t = 5 \times 10^{-3}s$.

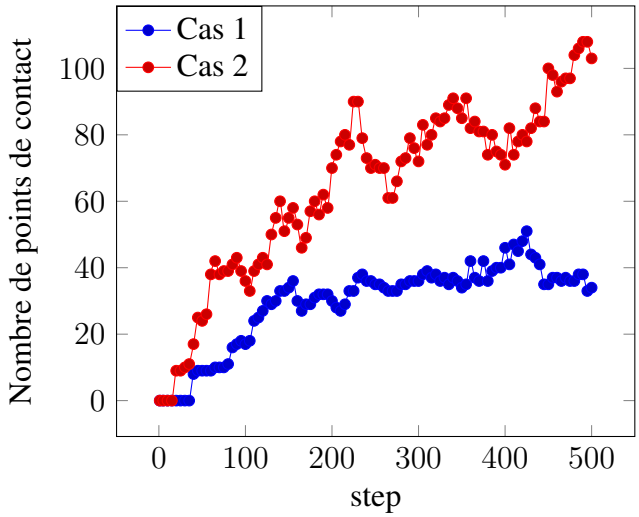


FIGURE 9.6 – L'évolution du nombre de points de contact pour le cas 1 où $g = 2 \times 9.81[N.m^{-2}]$ et le cas 2 où $g = 5 \times 9.81[N.m^{-2}]$

9.5 Conclusion

Une méthodologie originale permettant la simulation de la dépose la dynamique d'un ensemble de fibre en interaction a été développée et présentée dans ce chapitre. Le modèle dynamique de chaque

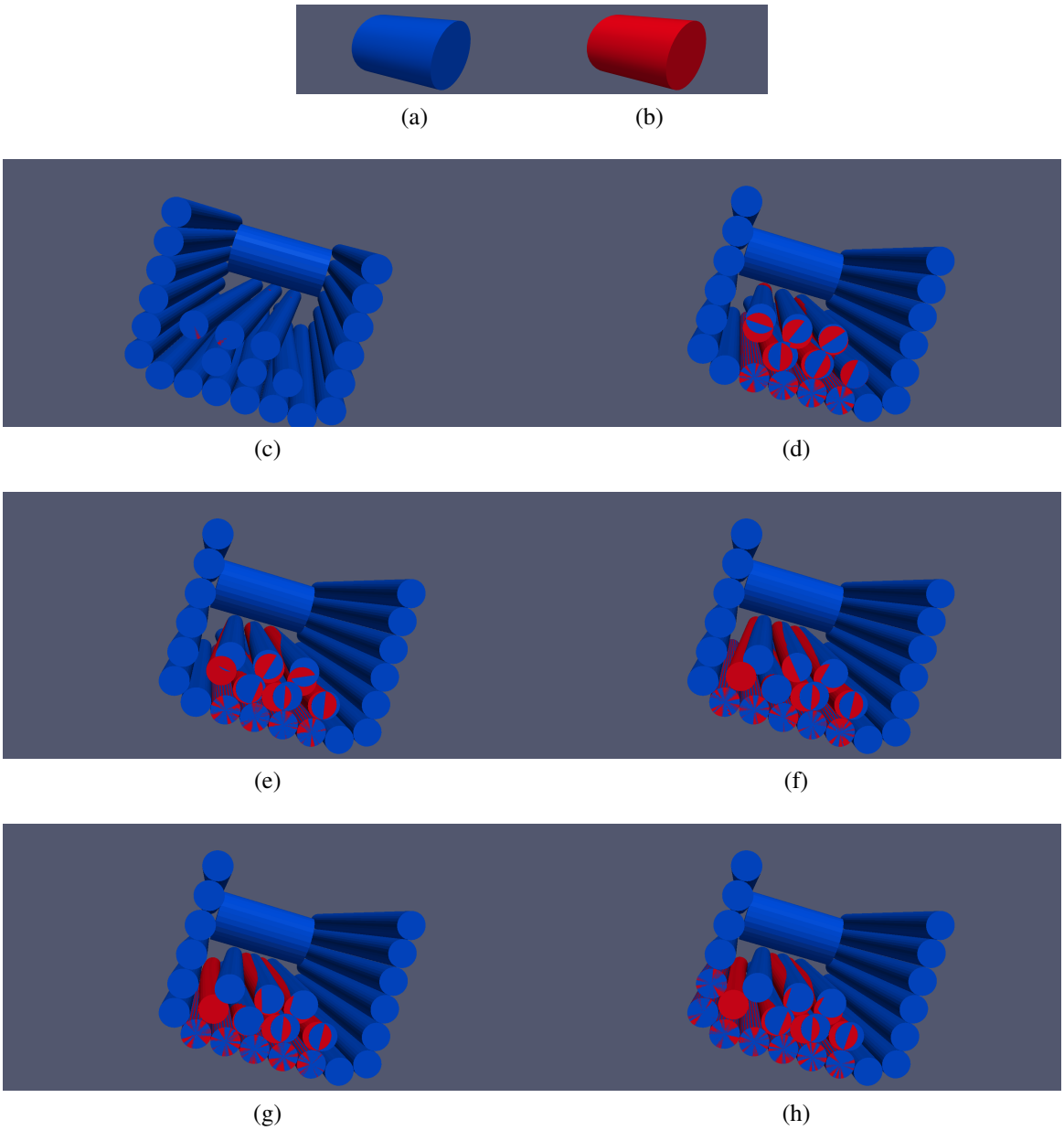


FIGURE 9.7 – Différentes configurations de fibres dans le cas (a) où $g = 2 \times 9.81[m.s^{-2}]$ et le cas (b) où $g = 5 \times 9.81[m.s^{-2}]$ à différents instants:(c) $t = 0s$, (d) $t = 1 \times 10^{-3}s$, (e) $t = 2 \times 10^{-3}s$, (f) $t = 3 \times 10^{-3}s$, (g) $t = 4 \times 10^{-3}s$, (h) $t = 5 \times 10^{-3}s$

fibre est issu du modèle de corps rigides articulés présenté dans le chapitre 5 auquel des forces de contacts comme des forces extérieurs sont considérées. Les caractéristiques géométriques et physiques sont respectées grâce à ce modèle. Nous avons pu démontrer la potentiel de ce modèle pour calculer la dynamique d'un ensemble de fibres en interaction au travers de quelques cas test numériques.En dépit de l'attention apportée à la réduction des temps de calcul, pour l'instant le coût du calcul reste assez élevé à cause de la stratégie algorithmique adoptée.

Les travaux de recherche complémentaires sont nécessaires à l'amélioration du modèle dans le but d'augmenter le nombre de fibres traitées et le pas de temps considéré. Les voies d'amélioration concernent le calcul récursif de la jacobienne de la fonction accélération articulaire pour l'intégrateur

numérique, la stratégie du calcul de la matrice de *Delassus* et enfin remplacer la double intégration numérique par une seule en intégrant le calcul des forces de contact dans les étapes de calcul de l'intégrateur numérique.

V

Conclusion générale

10

Conclusion et perspectives

Ce mémoire présente les travaux menés pour créer un premier modèle permettant à terme d'étudier le comportement dynamique d'une mèche de carbone, à l'échelle des fibres, durant le procédé du placement de fibres robotisé. Au cours du placement robotisé, les fibres regroupées sous forme de faisceaux parallèles sont déposées par l'intermédiaire d'un galet presseur à des vitesses de l'ordre du mètre par seconde. Ce procédé donnant lieu à des effets dynamiques et mettant en jeu de nombreux contacts entre les fibres, il a été de travailler en collaboration avec le laboratoire LMGC de Montpellier qui bénéficie d'une expertise reconnue dans le domaine de la modélisation des systèmes mécaniques complexes en interaction (contact, frottement, adhésion, etc) en présence de couplages multi-physique. Nous récapitulons dans ce chapitre les contributions des travaux de cette thèse et nous présentons un certain nombre de travaux de recherche futures à mener pour l'amélioration de ce modèle.

10.1 Résumé des contributions de la thèse

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au développement d'un modèle dynamique 3-D d'un système 1-D permettant la simulation dynamique d'une fibre (ou fil) continu ayant une complexité la plus simple possible (linéaire). Nous avons tout d'abord proposé un algorithme inspiré de celui développé par Khalil and Kleinfinger [1986] récursif basé sur les équations de *Newton-Euler*. Puis, nous avons développé un intégrateur numérique très robuste basé sur la méthode des formulations rétrograde [Abdulla et al., 2001; Cash, 1983] permettant le traitement des systèmes d'équations différentielles très raides et fortement non-linéaires. La combinaison de ces deux modèles réduit considérablement le coût de simulation dynamique d'une seule fibre continue donnant des résultats de très bonne qualité. Les algorithmes développés pour cette partie sont conçus de façon la plus générale et intuitive possible offrant un spectre large des dynamiques étudiées. Les résultats de plusieurs simulations numériques ont été présentés validant le modèle, puis montrant son potentiel

pour traiter des dynamiques beaucoup plus complexes (problème de la dynamique 3-D du fouet et d'un milieux fibreux).

Dans un second temps, nous avons initié des travaux de recherche sur la modélisation dynamique 3-D d'un milieu fibreux. Ces travaux ont mené à la création d'un outil numérique en collaboration avec M. Frédéric DUBOIS, M. Rémy MOZUL du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) de Montpellier permettant la validation du concept. Cet outil à ce jour nécessite encore des améliorations pour pouvoir simuler un milieu fibreux contenant une grande quantité de fibres.

10.2 Perspectives

Calcul récursif de la Jacobienne de la fonction accélération articulaire

La partie concernant l'intégrateur numérique est un point important dans la simulation numérique souhaitée. La jacobienne est calculée numériquement, ce qui est coûteux et diminue la qualité des solutions. La façon la plus efficace pour remédier à ces difficultés est le développement d'un algorithme récursif permettant le calcul intuitif de la jacobienne analytique.

À l'heure actuelle, il existe quelques travaux dans le domaine de la robotique basés sur l'élimination de plusieurs termes qui sont négligeables dans le cas des robots, mais ils ne le sont pas dans le cas des fibres continues. Il faut donc partir sur d'autres bases plus complètes, qui augmenteront aussi leur complexité.

Modifications et améliorations de la méthodologie suivie

Nous avons présenté dans le chapitre 9 les algorithmes conçus pour simuler un ensemble de fibres en interaction sous l'effet de sollicitations dynamiques. Nous avons utilisé l'algorithme NLGS (Algo. 2) implémenté dans le logiciel LMGC90 [Dubois and Jean, 2006]. Cet algorithme nécessite le calcul des vitesses libres pour obtenir des impulsions des contacts que nous considérons constantes dans le pas de temps au même titre que la matrice de *Delassus*. Les impulsions sont divisées par le pas de temps pour obtenir les forces de contact. Ensuite, les forces de contact sont utilisées dans le modèle de la fibre engendrant un nouveau système d'équations différentielles raides et non-linéaires intégré numériquement pour obtenir les vitesses et positions finales à la fin du pas de temps.

Par la suite, il faudrait prendre en compte la non linéarité de la matrice de *Delassus* en développant un algorithme basé sur la méthode de *Newton-Raphson* à introduire dans l'intégrateur numérique développé dans cette thèse. Cela conduira à une réduction drastique du coût de calcul et surtout offrira la possibilité d'un calcul direct des forces de contact avec la prise en compte des pas de temps intermédiaires et futurs. L'objectif est l'amélioration de la qualité des valeurs des forces de contact avec la prise en compte de la non-linéarité de la matrice d'interaction (matrice de *Delassus*).

Bibliographie

X-winder aerospace technology. http://www.3dprinterworld.com/article/x-winder-aerospace-technology-your-desktop. v, 14

Union des industries et des métiers de la métalurgie. *Du métal au composite, Information des professionnels de l'industrie*, (1), 2007. v, 12

C. ABAQUS. Version 6.11. *Dassault Systèmes*, 2011. 84

T. Abdulla and J. Cash. 5 solver mebdfi. 80

T. Abdulla, J. Cash, and M. Diamantakis. An mebdf package for the numerical solution of large sparse systems of stiff initial value problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 42(1): 121–129, 2001. 78, 87, 99, 145

E. Abisset-Chavanne, R. Mezher, S. Le Corre, A. Ammar, and F. Chinesta. Kinetic theory microstructure modeling in concentrated suspensions. *Entropy*, 15(7):2805–2832, 2013. 27

Y. Aimene. *Approche hyperelastique pour la simulation des renforts fibreux en grandes transformations*. PhD thesis, INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON, 2007. 107

P. Alart. Critères d'injectivité et de surjectivité pour certaines applications de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même ; application à la mécanique du contact. *RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique*, 27(2):203–222, 1993. 129

P. Alart. Méthode de newton généralisée en mécanique du contact. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 76(1):83–108, 1997. 130

P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 92(3):353–375, 1991. 122, 125

S. S. Antman. Nonlinear problems of elasticity, 1995, 1995. 31, 32

A. Babeau, S. Comas-Cardona, C. Binetruy, and G. Orange. Modeling of heat transfer and unsaturated flow in woven fiber reinforcements during direct injection-pultrusion process of thermoplastic composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 77:310–318, 2015. 15

P. Badel, E. Vidal-Sallé, and P. Boisse. Computational determination of in-plane shear mechanical behaviour of textile composite reinforcements. *Computational materials science*, 40(4):439–448, 2007. 110

M. Bannister. Challenges for composites into the next millennium—a reinforcement perspective. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 32(7):901–910, 2001. v, 14, 15, 17

D. Baraff and A. Witkin. Large steps in cloth simulation. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 43–54. ACM, 1998. 35

A. Barasinski. *Modélisation du procédé de placement de fibres thermoplastique*. PhD thesis, École Centrale Nantes, 2012. v, 17, 18

F. Battocchio, M. Sutcliffe, and F. Teschner. Dynamic simulation of long polymeric fibres immersed in a turbulent air flow. In *The second Joint International Conference on Multibody Suystem Dynamics-IMSD - May 29 to June 2012 at the University of Stuttgart, Germany*, 2012. vi, 27, 57, 67, 78, 84, 85, 98

P. Beal. *Modélisation du contact entre tiges élastiques en grands déplacements*. PhD thesis, 1998. 112

M. Belhaj. *Analyse expérimentale et modélisation des propriétés mécaniques et de transport de préformes réalisées par placement robotisé de fibres séches*. PhD thesis, École des Mines de Douai, 2010. 19

M. Belhaj, M. Deleglise, S. Comas-Cardona, H. Demouveau, C. Binetruy, C. Duval, and P. Figueiredo. Dry fiber automated placement of carbon fibrous preforms. *Composites Part B: Engineering*, 50:107–111, 2013. 5, 19

M. Bergou, M. Wardetzky, S. Robinson, B. Audoly, and E. Grinspun. Discrete elastic rods. In *ACM transactions on graphics (TOG)*, volume 27, page 63. ACM, 2008. vii, 114, 115

F. Bertails. *Simulation de chevelures virtuelles*. PhD thesis, Grenoble, INPG, 2006. v, 50

F. Bertails, B. Audoly, M.-P. Cani, B. Querleux, F. Leroy, and J.-L. Lévêque. Super-helices for predicting the dynamics of natural hair. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, volume 25, pages 1180–1187. ACM, 2006. 55

S. Black. New equipment brings tape placement within reach of smaller shops. *High-Performance Composites*, 11(6):27–31, 2003. 11

P. Boisse. *Mise en forme des renforts fibreux de composites*. Ed. Techniques Ingénieur, 2004. vi, 107

D. Bourguignon and M.-P. Cani. *Controlling anisotropy in mass-spring systems*. Springer, 2000. 35, 37

L. Carrino, W. Polini, and L. Sorrentino. Method to evaluate winding trajectories in robotized filament winding. *Journal of composite materials*, 38(1):41–56, 2004. 15

J. Cash. On the integration of stiff systems of odes using extended backward differentiation formulae. *Numerische Mathematik*, 34(3):235–246, 1980. 82

J. Cash. The integration of stiff initial value problems in odes using modified extended backward differentiation formulae. *Computers & mathematics with applications*, 9(5):645–657, 1983. 81, 82, 145

M. Chamekh, S. Mani-Aouadi, and M. Moakher. Modeling and numerical treatment of elastic rods with frictionless self-contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(47): 3751–3764, 2009. 112

J. T. Chang, J. Jin, and Y. Yu. A practical model for hair mutual interactions. In *Proceedings of the 2002 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 73–80. ACM, 2002. 48

A. Charmetant. *Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2011. 111

A. Cherouat, H. Borouchaki, and J.-L. Billoët. Geometrical and mechanical draping of composite fabric. *Revue Européenne des Eléments*, 14(6-7):693–707, 2005. 106

G. Creech and A. Pickett. Meso-modelling of non-crimp fabric composites for coupled drape and failure analysis. *Journal of materials science*, 41(20):6725–6736, 2006. vi, 107, 108

F. DAL MASO. Canalisations en composites: Étude du perlage. *Techniques de l'ingénieur. Plastiques et composites*, (AM5551):AM5551–1, 1999. v, 14

E. De Luycker, F. Morestin, P. Boisse, and D. Marsal. Simulation of 3d interlock composite preforming. *Composite Structures*, 88(4):615–623, 2009. vi, 107, 108

J. Denavit. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 22:215–221, 1955. 58

S. Dridi. *Essais de caractérisation des structures tissées*. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, 2010. 107

F. Dubois and M. Jean. The non smooth contact dynamic method: recent lmgc90 software developments and application. In *Analysis and simulation of contact problems*, pages 375–378. Springer, 2006. 103, 123, 125, 146

D. Durville. Modélisation du comportement mécanique de cable métallique. *Revue européenne des éléments finis. Volume*, 7(1-2), 1998. 31, 32, 55, 112

D. Durville. Numerical simulation of the mechanical behaviour of textile structures at a mesoscopic scale. *Structural Membranes*, pages 310–315, 2003. 112

D. Durville. Numerical simulation of entangled materials mechanical properties. *Journal of materials science*, 40(22):5941–5948, 2005. v, 32, 112

D. Durville. Finite element simulation of textile materials at mesoscopic scale. In *Finite element modelling of textiles ans textile composites*, page CDROM, 2007. vi, 113

D. Durville. Finite element simulation of the mechanical behaviour of textile composites at the mesoscopic scale of individual fibers. In *Textile Composites and Inflatable Structures II*, pages 15–34. Springer, 2008. 31

D. Durville. Simulation of the mechanical behaviour of woven fabrics at the scale of fibers. *International journal of material forming*, 3(2):1241–1251, 2010. 112, 117

D. Durville. Contact modelling in entangled fibrous materials. In *Trends in Computational Contact Mechanics*, pages 1–22. Springer, 2011. 118

D. Durville. Modélisation par éléments finis du comportement mécanique de structures textiles: de la fibre au tissu. *Revue Européenne des Eléments*, 11(2-4):463–477, 2012. vi, 113

R. Featherstone. Kluwer academic publishers, robot dynamics algorithm, 1987. 48, 72, 84

R. Featherstone. *Rigid body dynamics algorithms*. Springer, 2014. 57

H. Finckh. Numerical simulation of mechanical properties of fabrics-weaving/numerische simulation der mechanischen eigenschaften textiler flächengebilde-gewebeherstellung. In *Proceedings of the German 3rd LS-DYNA Forum*, 2004. 112

P. Fritzkowski and H. Kaminski. Dynamics of a rope as a rigid multibody system. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(6):1059–1075, 2008. vi, 78, 86, 87, 88, 89, 99

P. Fritzkowski and H. Kaminski. Dynamics of a rope modeled as a multi-body system with elastic joints. *Computational Mechanics*, 46(6):901–909, 2010. 78, 86, 88, 99

P. Fritzkowski and H. Kaminski. A discrete model of a rope with bending stiffness or viscous damping. *Acta Mechanica Sinica*, 27(1):108–113, 2011. 78

A. Gasser, P. Boisse, and S. Hanklar. Mechanical behaviour of dry fabric reinforcements. 3d simulations versus biaxial tests. *Computational materials science*, 17(1):7–20, 2000. 110

A. Ghith, P. Bruniaux, V. Koncar, and C. Vasseur. Modeling and simulation of a falling yarn with one end fixed. *Textile research journal*, 67(5):321–324, 1997. 55

C. Grant and J. Martin. Automated processing technology for composites: current status and vision for the future. In *INTERNATIONAL SAMPE SYMPOSIUM AND EXHIBITION*, pages 888–895. SAMPE ; 1999, 2003. 11, 14

S. Hadap and N. Magnenat-Thalmann. Modeling dynamic hair as a continuum. In *Computer Graphics Forum*, volume 20, pages 329–338. Wiley Online Library, 2001. v, 48, 57

B. Hagege. *Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations: application aux renforts tricotés*. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech, 2004. 111

B. Hagège, P. Boisse, and J.-L. Billoët. Finite element analyses of knitted composite reinforcement at large strain. *Revue Européenne des Eléments*, 14(6-7):767–776, 2005. 107

G. Hivet and P. Boisse. Consistent 3d geometrical model of fabric elementary cell. application to a meshing preprocessor for 3d finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 (1):25–49, 2005. vi, 109, 110

M. Jean. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. 1992. 103, 126, 131

M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 177(3):235–257, 1999. 103, 120, 121, 126, 127

N. Johnston, T. Towell, J. Marchello, and R. Grenoble. Automated fabrication of high performance composites: an overview of research at the langley research center. In *Proceedings of the eleventh international conference on composite materials*, volume 4, pages 85–91, 1997. 17

C. Joung, N. Phan-Thien, and X. Fan. Direct simulation of flexible fibers. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 99(1):1–36, 2001. 55

W. Khalil and E. Dombre. *Modeling, identification and control of robots*. Butterworth-Heinemann, 2004. 63, 64

W. Khalil and J. Kleinfinger. A new geometric notation for open and closed-loop robots. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1986 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 1174–1179. IEEE, 1986. 57, 58, 72, 76, 145

W. Khalil, G. Gallot, and F. Boyer. Dynamic modeling and simulation of a 3-d serial eel-like robot. *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on*, 37(6): 1259–1268, 2007. 57, 58

M. Khan, T. Mabrouki, E. Vidal-Sallé, and P. Boisse. Numerical and experimental analyses of woven composite reinforcement forming using a hypoelastic behaviour. application to the double dome benchmark. *Journal of Materials Processing Technology*, 210(2):378–388, 2010. 107

X. Legrand. *Contribution à la modélisation dynamique et à l'identification de tissus techniques*. PhD thesis, 2000. 35, 55

S. V. Lomov, A. Gusakov, G. Huysmans, A. Prodromou, and I. Verpoest. Textile geometry preprocessor for meso-mechanical models of woven composites. *Composites Science and Technology*, 60 (11):2083–2095, 2000. vi, 109

A. Long and C. Rudd. A simulation of reinforcement deformation during the production of preforms for liquid moulding processes. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 208(4):269–278, 1994. 106

A. Long, C. Rudd, M. Blagdon, and P. Smith. Characterizing the processing and performance of aligned reinforcements during preform manufacture. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 27(4):247–253, 1996. 19

J. Lorincz. Composites fly lighter, stronger–tape laying and fiber placement systems automate composite structure production and reduce costs. *Manufacturing Engineering*, 136(3), 2006. 11

J. Y. Luh, M. W. Walker, and R. P. Paul. On-line computational scheme for mechanical manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 102(2):69–76, 1980. 72

C. Mack and H. Taylor. 39—the fitting of woven cloth to surfaces. *Journal of the Textile Institute Transactions*, 47(9):T477–T488, 1956. 106

N. Marheineke and R. Wegener. Modeling and application of a stochastic drag for fibers in turbulent flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 37(2):136–148, 2011. 55, 67

F. Mazzia, J. R. Cash, and K. Soetaert. A test set for stiff initial value problem solvers in the open source software r: Package detestset. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236 (16):4119–4131, 2012. 80

P. McGeehin. *Preform manufacture for liquid moulding processes*. PhD thesis, PhD Thesis, University of Nottingham, 1994. 19

J. J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In *Nonsmooth mechanics and Applications*, pages 1–82. Springer, 1988. 103, 118, 120, 126, 127

J. J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics: application to granular materials. *European journal of mechanics. A. Solids*, 13:93–114, 1994. 103, 126

N. M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(3):67–94, 1959. 30

C. Nicodeau. *Modélisation du soudage en continu de composites à matrice thermoplastique*. PhD thesis, Paris, ENSAM, 2005. 17

G. H. Nyland, P. Skjetne, A. Mikkelsen, and A. Elgsaeter. Brownian dynamics simulation of needle chains. *The Journal of chemical physics*, 105(3):1198–1207, 1996. 55, 67

D. K. Pai. Strands: Interactive simulation of thin solids using cosserat models. In *Computer Graphics Forum*, volume 21, pages 347–352. Wiley Online Library, 2002. 49, 55

X. Peng and J. Cao. A continuum mechanics-based non-orthogonal constitutive model for woven composite fabrics. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 36(6):859–874, 2005. 107

A. K. Pickett, J. Sirtautas, and A. Erber. Braiding simulation and prediction of mechanical properties. *Applied Composite Materials*, 16(6):345–364, 2009. 112

W. Polini and L. Sorrentino. Influence of winding speed and winding trajectory on tension in robotized filament winding of full section parts. *Composites science and technology*, 65(10):1574–1581, 2005. 15

X. Provot. Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behaviour. In *Graphics interface*, pages 147–147. Canadian Information Processing Society, 1995. 35

M. Renouf. *Optimisation numérique et calcul parallèle pour l'étude de milieux divisés bi-et tridimensionnels*. PhD thesis, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2004. 122, 125, 126

D. Rodney, M. Fivel, and R. Dendievel. Discrete modeling of the mechanics of entangled materials. *Physical review letters*, 95(10):108004, 2005. 114

R. E. Rosenblum, W. E. Carlson, and E. Tripp. Simulating the structure and dynamics of human hair: modelling, rendering and animation. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, 2(4): 141–148, 1991. v, 35, 55

R. F. Ross and D. J. Klingenberg. Dynamic simulation of flexible fibers composed of linked rigid bodies. *The Journal of chemical physics*, 106(7):2949–2960, 1997. v, 33, 40, 41, 42, 44, 55

C. Rudd, M. Turner, A. Long, and V. Middleton. Tow placement studies for liquid composite moulding. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 30(9):1105–1121, 1999. 19

C. F. Schmid, L. H. Switzer, and D. J. Klingenberg. Simulations of fiber flocculation: Effects of fiber properties and interfiber friction. *Journal of Rheology*, 44(4):781–809, 2000. 55

L. F. Shampine. Solving 0= f (t, y (t), ydot(t)) in matlab. *Journal of Numerical Mathematics*, 10(4): 291–310, 2002. 78, 87

P. Skjetne, R. F. Ross, and D. J. Klingenberg. Simulation of single fiber dynamics. *The Journal of chemical physics*, 107(6):2108–2121, 1997. 33, 40, 41, 42, 55

D. Stover. Tape-laying precision industrial shafts. *High Performance Composites*, pages 29–32, 1994. 17

W.-C. Sun, S. C. Mantell, and K. A. Stelson. Modeling and control of the in-situ thermoplastic composite tape-laying process. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 120(4): 507–515, 1998. 17

L. H. Switzer III and D. J. Klingenberg. Rheology of sheared flexible fiber suspensions via fiber-level simulations. *Journal of Rheology*, 47(3):759–778, 2003. 55

E. Syerko, S. Comas-Cardona, and C. Binetruy. Experimental characterization and modeling of bending properties of woven fibrous preforms. In *Key Engineering Materials*, volume 504, pages 277–282. Trans Tech Publ, 2012. 78

E. Syerko, A. A. Diskovsky, I. V. Andrianov, S. Comas-Cardona, and C. Binetruy. Corrugated beams mechanical behavior modeling by the homogenization method. *International Journal of Solids and Structures*, 50(6):928–936, 2013. ix, 93, 94, 96, 99

K. Sze and X. Liu. A new skeletal model for fabric drapes. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2(3-4):225–243, 2005. vi, 106, 107

M. Tarfaoui and S. Akesbi. A finite element model of mechanical properties of plain weave. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 187:439–448, 2001. 110

M. Teschner, S. Girod, and B. Girod. Direct computation of nonlinear soft-tissue deformation. In *VMV*, pages 383–390, 2000. 35

S. P. Timoshenko. Lxvi. on the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245):744–746, 1921. 31, 55

T. Tran, S. Comas-Cardona, N.-E. Abriak, and C. Binetruy. Unified microporomechanical approach for mechanical behavior and permeability of misaligned unidirectional fiber reinforcement. *Composites Science and Technology*, 70(9):1410–1418, 2010. 111

S. Tumkor, N. Turkmen, C. Chassapis, and S. Manoochehri. Modeling of heat transfer in thermoplastic composite tape lay-up manufacturing. *International communications in heat and mass transfer*, 28(1):49–58, 2001. 17

F. Van Der Weeën. Algorithms for draping fabrics on doubly-curved surfaces. *International journal for numerical methods in engineering*, 31(7):1415–1426, 1991. 106

I. Verpoest and S. V. Lomov. Virtual textile composites software wisetex: Integration with micromechanical, permeability and structural analysis. *Composites Science and Technology*, 65(15): 2563–2574, 2005. vi, 109

G. Wang, W. Yu, and C. Zhou. Optimization of the rod chain model to simulate the motions of a long flexible fiber in simple shear flows. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 25(3):337–347, 2006. v, 27, 33, 45, 46, 47, 55

J. Wang, R. Paton, and J. Page. The draping of woven fabric preforms and prepregs for production of polymer composite components. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 30(6): 757–765, 1999. 106

Y. Wang and X. Sun. Digital-element simulation of textile processes. *Composites science and technology*, 61(2):311–319, 2001. v, 33, 34, 55, 113

Y. Wang, Y. Miao, D. Swenson, B. A. Cheeseman, C.-F. Yen, and B. LaMattina. Digital element approach for simulating impact and penetration of textiles. *International Journal of Impact Engineering*, 37(5):552–560, 2010. vi, 114, 117

S. Yamamoto and T. Matsuoka. A method for dynamic simulation of rigid and flexible fibers in a flow field. *The Journal of chemical physics*, 98(1):644–650, 1993. 27, 33, 37, 39, 40, 55, 67

S. Yamamoto and T. Matsuoka. Viscosity of dilute suspensions of rodlike particles: A numerical simulation method. *The Journal of chemical physics*, 100(4):3317–3324, 1994. 33, 37, 39, 40, 55

S. Yamamoto and T. Matsuoka. Dynamic simulation of fiber suspensions in shear flow. *The Journal of chemical physics*, 102(5):2254–2260, 1995. 55, 67

S. Yamamoto and T. Matsuoka. Dynamic simulation of microstructure and rheology of fiber suspensions. *Polymer Engineering & Science*, 36(19):2396–2403, 1996. 33, 55

G. Zavarise and P. Wriggers. A segment-to-segment contact strategy. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4):497–515, 1998. vi, 112, 113

G. Zhou, X. Sun, and Y. Wang. Multi-chain digital element analysis in textile mechanics. *Composites science and Technology*, 64(2):239–244, 2004. 55, 114

l'université nantes angers le mans
COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

Centrale Nantes

Thèse de Doctorat

Khalid EL AZZOUZI

Modélisation et simulation numérique à l'échelle des fibres du comportement dynamique d'un multifilament unidirectionnel en placement de fibres robotisé

[THESE] Modélisation et simulation numérique à l'échelle des fibres du comportement dynamique d'un multifilament unidirectionnel en placement de fibres robotisé