



HAL
open science

Étude mathématique de modèles cinétiques, fluides et paraboliques issus de la biologie

Ayman Moussa

► **To cite this version:**

Ayman Moussa. Étude mathématique de modèles cinétiques, fluides et paraboliques issus de la biologie. Mathématiques [math]. Sorbonne Université - Laboratoire Jacques-Louis Lions, 2018. tel-02119758

HAL Id: tel-02119758

<https://theses.hal.science/tel-02119758>

Submitted on 4 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Mémoire de synthèse en vue d'obtenir une

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

Laboratoire Jacques-Louis Lions — UMR 7598

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE MODÈLES CINÉTIQUES, FLUIDES ET PARABOLIQUES ISSUS DE LA BIOLOGIE

Ayman MOUSSA

soutenance le jeudi 13 décembre 2018 devant le jury composé de

Laurent BOUDIN (Examinateur)	- Sorbonne Université
Franck BOYER (Rapporteur)	- Université Toulouse III
Anne-Laure DALIBARD (Examinatrice)	- Sorbonne Université
Laurent DESVILLETES (Examinateur)	- Université Paris Diderot
Céline GRANDMONT (Examinatrice)	- INRIA
Pierre-Emmanuel JABIN (Rapporteur)	- University of Maryland
Michel PIERRE (Examinateur)	- École Normale Supérieure de Rennes

après rapports de

Franck BOYER	- Université Toulouse III
Klemens FELLNER	- Universität Graz
Pierre-Emmanuel JABIN	- University of Maryland

Table des matières

Remerciements	v
Liste des travaux de l'auteur	ix
Introduction	xi
Plan du manuscrit	xii
Dérivation	xiii
Estimation	xiv
Approximation	xv
Compacité	xvi
Solutions globales	xvii
Notations	xix
1 Transport de particules dans le poumon	1
1.1 Le modèle	1
1.1.1 Le domaine	2
1.1.2 L'équation fluide	2
1.1.3 L'équation cinétique	2
1.1.4 Le système couplé	3
1.1.5 Conditions aux bords	3
1.1.6 Énergie du système	4
1.2 Solutions faibles globales : le cas du tore plat	4
1.3 Retour au modèle complet	7
1.3.1 La pénalisation de Fujita et Sauer	8
1.3.2 L'équation de Vlasov en domaine mobile	8
1.3.2.1 Définition des solutions et existence	9
1.3.2.2 Un théorème de trace	10
1.3.3 Solutions faibles globales	11
1.4 Aspects numérique : approximation et validation	13
1.5 Perspectives	15
2 Systèmes fluide/cinétique	17
2.1 Le système de Vlasov-Navier-Stokes bidimensionnel	18
2.1.1 Unicité des solutions faibles	18
2.1.2 Comportement en temps long	21
2.1.3 Perspectives	26

2.2	Généralisation de la force de Brinkman	26
2.2.1	Le système	27
2.2.2	L'opérateur de Stokes et la mesure empirique	28
2.2.3	Hypothèses et énoncé	28
2.2.4	Perspectives	32
2.3	Un système bidispersé en taille	32
2.3.1	La limite formelle $\varepsilon \rightarrow 0$	33
2.3.2	Existence pour le système limite	34
2.3.3	Preuve rigoureuse?	36
2.4	Un modèle gyroscopique	38
2.4.1	Dérivation dans un cas régularisé	39
2.4.2	Solutions faibles globales	41
3	Systèmes à diffusion croisée	43
3.1	Équations de diffusions	44
3.2	L'équation de Kolmogorov	46
3.2.1	L'équation duale	46
3.2.2	Le lemme de dualité	47
3.2.3	Le cas particulier d'une diffusivité bornée	49
3.2.4	Repères bibliographiques	52
3.3	Théorie d'existence pour le système SKT	54
3.3.1	22 ans	55
3.3.2	Le théorème de Chen et Jüngel	55
3.3.3	Perspectives	58
3.4	Généralisation de la structure entropique	59
3.4.1	Une stratégie générale	59
3.4.2	Le cas concave/concave	61
3.4.3	Le cas convexe/concave	62
3.4.4	Multi-espèces	64
3.4.5	Perspectives	67
3.5	Un schéma d'approximation	67
3.5.1	Énoncé	68
3.5.2	Estimations uniformes	69
3.5.3	Perspectives	70
3.6	Une question de Fontbona et Méléard	70
3.6.1	Dérivation du système SKT	70
3.6.2	Une réponse partielle	72
3.6.3	Perspectives	73
4	Compacité	75
4.1	Convergence faible d'un produit	76
4.2	Compacité et contrainte non linéaire	77
4.3	Opérateurs monotones et compacité pour les schémas numériques	79
4.4	Aubin-Lions en domaines non cylindriques	81
4.5	Un résultat de compacité pour l'équation de Kolmogorov	85

A	Appendice	89
A.1	De l'intérêt des estimations <i>a priori</i>	89
A.2	Difféomorphismes de l'espace euclidien	89
A.3	Fonction maximale et condition de Muckenhaupt sur le tore	89
A.4	Trace normale pour les champs à divergence nulle	91
	Bibliographie	93

Remerciements

Les lignes suivantes sont pour moi les plus exigeantes du manuscrit : il y a de bonnes chances qu’elles soient les plus lues. Et puis, rares sont les occasions où l’on peut ainsi remercier son entourage, aussi varié soit-il. J’ai la conviction que mon parcours universitaire est autant le fait de mon investissement personnel que de l’atmosphère rassurante que me procure mon entourage professionnel, amical, familial. C’est pour cette raison que je ne réfrènerai pas cette envie de remercier tous azimuts, au risque de manquer de concision voire de pudeur aux yeux de certains.

Il semble normal de commencer par les trois personnes qui ont exploré le manuscrit en entier après avoir accepté la mission d’en être les rapporteurs. Merci donc à Franck Boyer, Pierre-Emmanuel Jabin et Klemens Fellner d’avoir ajouté à leur emploi du temps déjà bien rempli un énième rapport à rédiger et pour deux d’entre eux la présence au sein d’un jury de soutenance — so bad you couldn’t make it, Klemens! Plusieurs personnes ont accepté de les rejoindre pour cette dernière mission, je les remercie aussi particulièrement. Laurent Boudin, Laurent Desvilletes et Céline Grandmont ont tous les trois eu une influence décisive et positive sur ma jeune carrière de mathématicien. Plus les années passent et plus je me rends compte de la chance que j’ai eu de pouvoir faire ma thèse avec le second d’entre eux. Merci pour tout. Enfin, Anne-Laure Dalibard et Michel Pierre (l’auteur éponyme d’un lemme que je n’ai eu cesse d’invoquer) me font également l’honneur de leur présence. Merci à tous.

S’il y a bien un intérêt au métier d’universitaire, c’est de pouvoir choisir ses collaborateurs. Ce mémoire n’aurait jamais vu le jour sans mes co-auteurs que j’ai le privilège de compter nombreux. Au moment de les remercier tous, je souris en me remémorant certains souvenirs.

Je pense par exemple à la surenchère instable de perfectionnisme du duo Céline-Laurent, un spectacle très divertissant. Je charrie, mais j’ai énormément appris grâce à eux. Le plaisir et l’entrain ont toujours accompagné nos projets, notamment avec Alexander que je revois dévorer nerveusement des tablettes de chocolat Milka devant les simulations numériques aberrantes que seuls nous les deux sommes capables de produire.

Alors que j’étais encore jeune recruté, Franck m’a tendu une main en me proposant de collaborer sur [A6], qui était déjà bien avancé ; lors de nos échanges il avait cette habitude de reformuler intégralement mon propos par un “*Ce que tu veux dire c’est que ...*” et de poursuivre par une bonne idée à laquelle je n’avais évidemment jamais pensé. Ça a été un plaisir de collaborer à nouveau avec Matthieu, j’espère que nous aurons l’occasion de remettre ça prochainement.

La préparation de [A7] fut un peu rude pour moi, car c’était un changement de thématique. Thomas a beaucoup fait à l’époque pour me mettre en confiance, merci. J’ai hâte que l’on se mette à explorer avec Ariane les multiples pistes que nous avons envisagées : on parlera *diffusion* la prochaine fois que l’on se *croise*.

Merci à Boris et Clément, au second pour avoir initié [A15], au premier pour sa manière

limpide d'exprimer des pensées affutées et à eux deux pour leurs critiques constructives qui m'ont permis de mieux comprendre ce que je faisais dans [A11].

L'article [A16] aura été la source de beaucoup d'émotions fortes ; la véracité de certains résultats d'abord considérée comme triviale fut ensuite doutée et pour finir espérée, avec beaucoup de foi. Mais j'ai surtout le souvenir de fins de journée dans mon bureau, à explorer les pages webs de loufoques mathématiciens avec Olivier et Daniel. Au passage, si une seule fois dans ma vie j'ai eu droit à un modeste moment de célébrité dans le métro, c'est bien grâce à Daniel. C'est aussi avec ce dernier, Evelyne et Iván que j'ai expérimenté une collaboration quasi-électronique et une mauvaise foi outre-atlantique à l'occasion de [P2]. Je vais m'arrêter là et remercier avec tout autant de plaisir tous mes autres collaborateurs et aussi les nombreux collègues avec qui j'ai pris plaisir à discuter lors de conférences ou de séjours à l'étranger.

J'ai été rattaché pendant quelques années à l'équipe-projet REO et je suis actuellement en délégation au sein de MAMBA. Je remercie les responsables respectifs Jean-Frédéric Gerbeau et Marie Doumic de la confiance qu'ils ont ainsi placée en moi, en m'offrant de si bonnes conditions de travail.

Il m'aura fallu quelques années pour comprendre le confort et l'avantage que représentent un début de carrière au LJLL. L'ébullition scientifique qui règne au laboratoire et les moyens liés à la taille de notre université sont des privilèges inestimables. Ils m'ont notamment permis de mener mes activités de recherche avec une grande liberté là où des collègues d'autres universités ou d'autres sections du CNU sont en sur-service dès leur recrutement.

En plus d'être une pépinière centrale de mathématiques appliquées, le LJLL est un lieu de vie atypique de par les personnalités qu'il abrite. Il n'est pas possible de retranscrire l'ambiance é(c)lect(r)ique de la salle café, mais disons qu'on peut y déceler certains patterns. Peu importe le sujet à la base, Fabrice produira une comparaison footballistique pertinente, avec une diction et une gestuelle d'un potentiel comique insoupçonné. Cela évoquera très certainement à Jean-Yves une histoire de bateaux, qu'il racontera avec une aura de grand-père. Si on a de la chance, Céline sera dans le coin et se moquera de l'un des deux avec ce rire que tout le monde ici connaît. S'en suivra une joute oratoire que nous, les figurants, les habitués de la salle café, savourerons autant que notre breuvage.

Pour avoir parfois frappé à la porte de leur bureau et y avoir trouvé de la disponibilité, de l'intérêt, un sourire et souvent les trois à la fois, ou simplement pour des bouts de discussion entre deux couloirs, je tiens à remercier particulièrement : Laurent parce que "*si vraiment il te faut savoir quelque chose, chez Laurent tu iras*", Céline sans qui [A11] aurait été faux plusieurs fois, Freda pour les biscuits, Kaber pour le doliprane, l'adaptateur VGA, les chargeurs de téléphone et la malarone (on trouve tout chez Kaber, à toute heure), Didier pour mes questions elliptiques et ses réponses qui ne le sont pas, Brigitte pour le Cambodge, François pour ses arguments de compacité, Hervé et Corentin pour l'avatar du premier que nous suspectons avec le second depuis 2011, Anne-Laure pour nos débats sur Louis C. K., Valeria pour ses coupes de champagne, Jacques pour mon coup d'Antastrès sur Galaxie, Bertrand et ses conseils informatiques, Benoît qui s'est toujours montré disponible pour parler science malgré son emploi du temps, Philippe pour ses bruitages, Nathalie dont le rire remplace très bien celui de Céline, Luis qui a toujours été de bon conseil et m'a fait découvrir le chou-rave, Jean-Yves et Julien pour la fluidité de leurs réponses, sans oublier Camille-le-sceptique, Nina, Muriel, Jérémie, les Frédéric, Antoinette, Martins et Xaviers, Michael, Chloé, Diane, Cindy, Yvon, Edwige, Marie et mon presque compatriote Albert. S'il y a bien une personne qui m'a souvent

mathématiquement dépanné (et je pense que je ne suis pas le seul au laboratoire), c'est bien Nicolas Depauw. J'apprécie autant son intégrité et sa culture mathématique que cette capacité de concentration hallucinante qu'il partage avec Didier : il est rare que le séminaire du laboratoire se déroule sans une question pertinente de l'un d'eux. Je partage depuis mon arrivée au LJLL mon bureau avec Grégoire, qui a lui aussi de nombreuses fois répondu à mes questions et avec qui j'ai entretenu plusieurs discussions enrichissantes. Étonnamment, il n'a jamais fait ne serait-ce qu'un début de remarque sur le capharnaüm que j'entretiens dans cette pièce. Je souhaite par ailleurs exprimer ici tout le respect que j'ai pour son engagement syndical indéfectible. Je n'oublie pas les anciens jeunes qui m'ont accueilli à mon arrivée et qu'une promotion méritée a écarté du bercail : Clément, Franck, Jean-François, Nicolas et Nicolas, Yannick. J'ai pris un risque considérable en me lançant dans ces remerciements nominatifs. Que les laissés-pour-compte n'y voient pas un message caché mais un oubli somme toute excusable étant donné la taille de notre laboratoire.

Il serait injuste de ne pas remercier notre équipe administrative ; la machine universitaire ne fonctionnerait pas sans l'énergie et la bonne volonté d'une poignée de personnes en sous-effectif. Merci donc à Catherine, Malika, Salima et à Khash, le bien nommé. Merci également à tout le secrétariat pédagogique de la licence et du master qui fait face à un travail colossal chaque année.

Le LJLL n'est pas (encore) le seul repère de mathématiciens à Jussieu. Je suis bien placé pour savoir que l'ambiance est tout aussi chaleureuse au LPSM. J'ai eu le privilège d'apprécier la pétillance d'esprit et la gentillesse de nombre de ses membres, parfois en dehors de l'université et toujours avec beaucoup de plaisir.

Mes liens avec l'IMJ sont plus ténus. J'ai en quelque sorte rattrapé le coup en faisant la connaissance inopinée d'Adrien Deloro : en bonne forme, il est capable de fournir un excellent condensé des clichés qu'un mathématicien appliqué peut attendre d'un fondamentaliste. Blague à part, c'est dans la salle de convivialité de l'IMJ qu'a été imaginé puis souvent organisé le séminaire Aromaths, sous l'impulsion positive et bienveillante de Frédéric Le Roux. Et l'accueil s'est souvent fait autour d'un café ou de délices préparées maison.

L'enseignement et la "diffusion des savoirs" ont beaucoup joué dans mon équilibre professionnel. Je tiens à remercier ici les étudiants que j'ai eu et les collègues impliqués dans ces activités. Mention spéciale à Benoît Sarels, membre breton du laboratoire et pilier de la filière LBM. Mes séjours à Roscoff sont de précieux souvenirs. Enfin, ma sincère amitié et mon admiration à la vivante équipe de Mat' les Vacances qui s'active chaque année pour qu'une trentaine de lycéens découvrent la montagne mais surtout la fiche groupe, le père Fourier et Jacky Spareau.

Les dernières personnes de mon entourage mathématique que je mentionnerai sont mes camarades de bac à sable. Les seules avec qui il peut encore m'arriver de recevoir ou d'envoyer un "exo" par SMS, même si c'est de plus en plus rare. Je souhaite réellement que cette curiosité partagée, amenuisée par nos emplois du temps respectifs, ne s'éteigne jamais ; merci à Rafik pour sa photo d'ANR et à Guillaume de m'avoir appris ce qu'est le bidual d'un steak.

Je m'investis depuis quelques années dans la pratique et la promotion d'un sport insensé. Même si peu d'entre eux liront ces lignes, je tiens ici à saluer et remercier tous mes partenaires de jeu et tous mes adversaires, pour le plaisir et les défis qu'ils m'apportent. De manière générale, j'éprouve une grande fierté quand je pense à la "communauté de la plume", à tous

REMERCIEMENTS

ces projets fous dans lesquels on se lance avec si peu de moyens et uniquement du bénévolat. Quel bel exemple de réalisation associative. Et pour le cercle très sélect des utilisateurs de Framateam : courage, il ne reste plus que 8 mois !

Aux amis de toujours, à la diaspora cairote qui me manque autant que nos douces années au LFC, aux cachanais et assimilés avec qui j'ai tant partagé, aux improvisateurs, aux parisiens et à ceux qui ne le s(er)ont plus (mais à quoi va ressembler le 20^e maintenant ?), aux ritals et à leur culture dont je n'aurais pas assez d'une vie pour la découvrir, à vous tous les amis, une pensée et l'espoir d'organiser à nouveau des retrouvailles comme en juillet 2016.

J'ai une pensée pleine d'affection pour mes parents et mon frère, en me remémorant une vieille voiture qui traverse un océan jaune et sec en direction d'une mer azur. Il est de ces moments passés à quatre sur une plage de la côte nord égyptienne qui ne me quitteront jamais.

Enfin, merci à toi, Daphné. Pour ce bonheur que tu sais faire apparaître sous tant de formes différentes, pour tes rires et tes pleurs, parce que tout en toi est vivant et parce que ton amour saurait panser des plaies que je n'ai pas encore. Vivre avec toi c'est simple et bon, un peu comme le mélange *burro e salvia*. Je ne pouvais pas espérer plus et pourtant, c'est arrivé. Au *haboub* qui un jour lira ces lignes, sache qu'au moment où je les écris ton poids est encore bien inférieur à celui des commandes de pâtes *Rummo* que ta maman opère à domicile.

Liste des travaux de l'auteur

Mes publications et prépublications sont listées ci-bas et ne sont pas présentes dans la bibliographie générale de ce mémoire. Afin que celui-ci reste concis et cohérent, une partie seulement de ces travaux y est présentée. Ainsi les publications étoilées de la liste suivante ne seront pas traitées dans ce manuscrit ; d'avance pardon aux co-auteurs concernés.

Prépublications :

- [P3] *From non-local to classical SKT systems : triangular case with bounded coefficients*, soumis.
- [P2] *Uniqueness of the solution to the 2D Vlasov-Navier-Stokes system*, avec D. Han-Kwan, É. Miot et I. Moyano, à paraître dans **Revista Matemática Iberoamericana**.
- [P1] *On the effect of polydispersity and rotation on the Brinkman force induced by a cloud of particles on a viscous incompressible flow*, avec M. Hillairet et F. Sueur, à paraître dans **Kinetic and Related Models**.

Publications :

- ★ [A17] *Backward parabolicity, cross-diffusion and Turing instability*, avec B. Perthame et D. Sallort, **Journal of Nonlinear Science**, 2018.
- [A16] *The Vlasov-Navier-Stokes system in a 2D pipe : existence and stability of regular equilibria*, avec O. Glass et D. Han-Kwan, **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, 2018.
- [A15] *A nonlinear time compactness result and applications to discretization of degenerate parabolic-elliptic PDEs*, avec B. Andreianov et C. Cancès, **Journal of Functional Analysis**, volume 273, 3633-3670, 2017.
- [A14] *Entropic structure and duality for multiple species cross-diffusion systems*, avec T. Lepoutre, **Nonlinear Analysis**, volume 159, 298-315, 2017.
- ★ [A13] *Analytical examples of diffusive waves generated by a traveling wave*, avec H. Moundoyi, B. Perthame et B. Sarels, **Applicable Analysis**, volume 96 (9), 2017.

- [A12] *Global existence of solutions to the incompressible Navier-Stokes-Vlasov equations in a time-dependent domain*, avec L. Boudin et C. Grandmont, **Journal of Differential Equations**, volume 262 (3), 1317-1340, 2017.
- [A11] *Some variants of the classical Aubin-Lions Lemma*, **Journal of Evolution Equations**, volume 16 (1), 65-93, 2016.
- [A10] *On the entropic structure of reaction-cross diffusion systems*, avec L. Desvillettes, T. Lepoutre et A. Trescases, **Communications in Partial Differential Equations**, volume 40 (9), 1705-1747, 2015.
- [A9] *Modelling and numerics for respiratory aerosols*, avec L. Boudin, C. Grandmont et A. Lorz, **Communications in Computational Physics**, volume 18 (3), 723-756, 2015.
- [A8] *Existence theory for a fluid/kinetic coupling when small droplets are treated as part of the fluid*, avec S. Benjelloun et L. Desvillettes, **Journal of Hyperbolic Differential Equations**, volume 11, 46 (1), 2014.
- [A7] *Entropy, Duality, and Cross Diffusion*, avec L. Desvillettes et T. Lepoutre, **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, volume 46 (1), 2014.
- [A6] *A 2d spray model with gyroscopic effects*, avec F. Sueur, **Asymptotic Analysis**, volume 81 (1), 53-91, 2013.
- ★ [A5] *Global classical solutions close to equilibrium to the Vlasov-Fokker-Planck-Euler system*, avec J.A. Carrillo et R. Duan, **Kinetic and Related Models**, volume 4 (1), 227-258, 2011.
- ★ [A4] *A rainbow inverse problem*, avec A. Blasselle et V. Calvez, **ESAIM : Proceedings**, volume 30.
- ★ [A3] *Numerical study of the stopping of aura during migraine*, avec C. Poggi, F. Hubert et G. Chapuisat, **ESAIM : Proceedings**, volume 30.
- ★ [A2] *The Navier-Stokes/Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium*, avec T. Goudon, L. He et P. Zhang, **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, volume 42, 5, 2010.
- [A1] *Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations*, avec L. Boudin, L. Desvillettes et C. Grandmont, **Differential and Integral Equations**, volume 22, 11-12, 1247-1271, 2009.
- [T] *Étude mathématique et numérique du transport d'aérosol dans le poumon humain*, **Thèse de doctorat**, École Normale Supérieure de Cachan, 2009.

Introduction

Ce mémoire recueille des travaux que j'ai effectués depuis le début de ma thèse [T]. Les modèles auxquels je me suis intéressé sont motivés par des applications, principalement en aérosolthérapie (transport d'aérosol dans les poumons) et en dynamique des populations. Il s'agit de systèmes d'équations aux dérivées partielles couplés, reflétant l'interaction entre deux ou plusieurs constituants (des particules et de l'air en aérosolthérapie, différentes espèces dans le cas de la dynamique des populations) recouvrant trois familles d'équations aux dérivées partielles : équations cinétiques, équations de la mécanique des fluides et équations paraboliques de type réaction/diffusion. Mes activités de recherche relèvent de l'analyse mathématique de ces systèmes ainsi que de leur approximation et de leur simulation numérique. Il est possible de les regrouper en deux catégories : d'une part les *systèmes fluide/cinétique* et d'autre part les *systèmes à diffusion croisée*. Afin de donner un peu de corps à cette introduction, je retiens pour chacune de ces catégories un paradigme qui me servira à présenter mes résultats. De manière un petit peu cavalière, je ne préciserai ici ni le domaine où sont posées les équations en jeu ni les conditions aux bords ou initiales considérées. Le but est de pouvoir, à la lecture de cette introduction, se faire une idée de mes contributions sans avoir à digérer tout le formalisme qu'exige un énoncé mathématiquement irréprochable. Cet écart à la bienséance sera nettoyé dans les chapitres suivants où je m'attacherai à énoncer des résultats sous une forme plus rigoureuse.

Dans le cas des systèmes fluide/cinétique, le paradigme que je retiens est le système de Vlasov-Navier-Stokes qui modélise l'évolution d'une phase dispersée (le spray) au sein d'un fluide (de l'air par exemple). Le fluide est décrit par sa vitesse $u(t, x)$ et sa pression $p(t, x)$, *via* les équations de Navier-Stokes incompressible. Pour l'aérosol on utilise une fonction de densité $f(t, x, v)$ représentant sa répartition dans l'espace des phases (position et vitesse des particules); cette densité obéit à une équation de Vlasov. Le système prend alors la forme suivante :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [(u - v)f] = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \Delta u = \int f(v - u), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (3)$$

Le couplage s'effectue ainsi dans les deux sens : la *force de traînée* alimentant l'équation de Vlasov (terme $(u - v)$ dans (1)) admet une rétroaction, il s'agit de la *force de Brinkman* (terme intégral dans (2)). Ce système synthétise beaucoup des difficultés mathématiques que l'on rencontre lorsque l'on mélange un spray dans un fluide. Il s'agit également du système que j'ai le plus étudié, sous de multiples facettes.

Pour les systèmes à diffusion croisée, le paradigme retenu est une légère généralisation du système SKT introduit par Shigesada, Kawasaki et Teramoto dans [138] (d_i, a_{ij}, γ_i sont des

constantes positives) :

$$\partial_t u_1 - \Delta \left[(d_1 + a_{12} u_2^{\gamma_2}) u_1 \right] = u_1 r_1(u_1, u_2), \quad (4)$$

$$\partial_t u_2 - \Delta \left[(d_2 + a_{21} u_1^{\gamma_1}) u_2 \right] = u_2 r_2(u_1, u_2). \quad (5)$$

Ici, $u_1(t, x)$ et $u_2(t, x)$ représentent les densités de deux populations et les fonctions r_1, r_2 les termes de reproduction et compétition associés. Un tel système sert à modéliser une interaction complexe entre deux espèces, par laquelle chacune peut agir sur le taux de diffusion de l'autre : on parle de diffusion croisée lorsque a_{12} ou a_{21} est non nul. Le modèle introduit par Shigesada, Kawasaki et Teramoto correspondait au cas $(\gamma_1, \gamma_2) = (1, 1)$ ci-dessus. En dépit de leur apparente simplicité, les systèmes à diffusion croisée posent des difficultés insoupçonnées pour la construction de solutions globales.

Plan du manuscrit

Le premier chapitre est une prolongation naturelle du travail initié durant ma thèse [T]. Le but de celle-ci était l'étude mathématique du transport d'aérosol au sein du poumon humain. C'est uniquement dans ce Chapitre 1 que j'évoque des résultats issus de [T], en partie pour décrire le contexte et introduire le système de Vlasov-Navier-Stokes, mais également pour souligner les progressions obtenues depuis ; certaines questions posées au courant du mois de septembre 2006 n'ont eu leur réponse que bien plus tard.

Le chapitre suivant est consacré à différents systèmes fluide/cinétique que j'ai eu l'occasion d'étudier. Cela inclut le système de Vlasov-Navier-Stokes bidimensionnel par exemple, mais aussi des variations de celui-ci où l'aérosol comme son interaction avec le fluide peuvent prendre des formes différentes de celles proposées par le système (1) – (3). Contrairement au précédent chapitre où le résultat mathématique principal est un théorème d'existence, dans ce Chapitre 2 je passe rapidement sur la construction des solutions (pour laquelle il est possible d'adapter la routine présentée au Chapitre 1) et me concentre sur des questions relevant de la dérivation du système, de l'unicité de ses solutions ou bien de leur comportement en temps long.

Le Chapitre 3 contient mes contributions sur les systèmes à diffusion croisée. J'explique l'apparition de ceux-ci en dynamique des populations et je consacre une section à l'équation dite de Kolmogorov, dont (4) et (5) sont des cas particuliers. Les principaux résultats de ce chapitre sont des théorèmes d'existence globale, obtenus sur la base d'outils expressément conçus pour l'étude de systèmes paraboliques.

J'ai consacré un certain temps à la compréhension de différentes questions de compacité pour des équations aux dérivées partielles non linéaires. Celles-ci se sont en général invitées dans mon activité de recherche par le biais d'un passage à la limite problématique (pour une preuve d'existence ou une analyse asymptotique). J'ai préféré les présenter dans un chapitre dédié plutôt que de les reléguer à l'annexe de ce manuscrit, ces résultats étant formulés de manière à pouvoir être utilisés dans plus de contextes qu'un jeu d'équation précis. De fait, tout au long de ce mémoire, les résultats compilés dans ce Chapitre 4 seront régulièrement évoqués.

Le plan précédent est un aveu d'échec. J'ai en effet d'abord cherché un angle de présentation original qui contournerait la scission “fluide/cinétique” — “diffusion croisée”, car il n'échappera pas au lecteur que dans tous les travaux présentés des difficultés similaires se cachent. Mes

tentatives ayant systématiquement abouti à un plan fouillis et quelque peu inharmonieux, je me suis rabattu sur l’organisation triviale précédente, en séparant ces deux thèmes. En guise de compensation, je propose ci-après une présentation transverse de mes résultats. Elle suit l’ordre idéalisé selon lequel j’aurais souhaité étudier ces différents systèmes. La chronologie de mes publications ne correspond bien sûr aucunement à celui-ci car la recherche ne s’ordonne pas, on la suit !

Dérivation

La plupart des équations dont il sera question dans ce mémoire ont pour but la description d’un phénomène physique, biologique ou écologique. Mon travail en tant que mathématicien appliqué s’est principalement concentré sur l’analyse des équations en elles-mêmes ou leur approximation numérique, mais je me suis aussi régulièrement interrogé sur l’origine de ces équations. C’est une question légitime tant du point de vue de la modélisation que de l’analyse mathématique, car la pertinence physique du système est souvent à la source de propriétés cruciales dans l’étude des équations en jeu (fonctionnelle de Lyapunov, dissipation *etc.*). Il est possible de convaincre son intuition du bien-fondé d’un modèle en procédant “à la physicienne”, mais pour un esprit un peu formaliste les bilans d’énergie sur des domaines élémentaires ou les manipulations algébriques olé-olé ne sont pas des moments très agréables à vivre. Un moyen existe de concilier la rigueur mathématique avec cette exigence de justification de modèles, il consiste à réaliser ceux-ci comme limite (en un sens à définir) de modèles plus simples, qui eux-mêmes seraient justifiés *etc.* Cela s’appelle la *dérivation de modèle*. Bien évidemment, il faudra bien, quelque part, admettre qu’une équation modélise un phénomène donné. De ce point de vue, la dérivation de modèle devient une théorie axiomatique comme une autre et tout le jeu est d’essayer de réduire le nombre de postulats de départ. Sans même atteindre l’ambition du sixième problème de Hilbert (“[...] de la vision atomiste aux lois du mouvement du continu.”), réussir à articuler un dialogue entre différents modèles *via* des processus limitatifs est une tâche que j’ai trouvé particulièrement difficile. D’où mon faible nombre de contributions sur le sujet, et ce n’est pas faute d’avoir essayé.

J’ai pour la première fois étudié une limite de ce type avec Franck Sueur, à l’occasion de l’article [A6]. Nous sommes partis des travaux [81, 82] de Glass *et. al.* dans lesquels un système fluide/vortex est lui-même dérivé à partir d’un système fluide/solide. Considérant un grand nombre de points vortex, nous avons démontré que la mesure empirique associée (une moyenne arithmétique des masses de Dirac correspondantes) converge vers une fonction de densité, solution d’une équation de type Vlasov. Il s’agit donc d’une limite de champ moyen dont le produit est un modèle fluide/cinétique original où, à la différence du système (1) – (3), l’interaction entre les deux phases se fait par un terme gyroscopique, la présence des particules alimentant la vorticité du fluide. Je présente ce système dans la Section 2.4 du Chapitre 2.

Pour les systèmes fluide/cinétique avec une interaction de type “force de traînée”, j’ai étudié en collaboration avec Saad Benjelloun et Laurent Desvillettes dans [A8] une limite singulière reliant un système fluide/cinétique bidispersé à un système fluide/cinétique non homogène en la densité du fluide. Dans le modèle de départ, deux types de particules coexistent, de rayons $r_1 < r_2$, les particules de rayon r_2 pouvant se fragmenter en particules de rayon r_1 (qui, elles, ne se fragmentent pas). Cela revient à ajouter au système (1) – (3) une équation portant sur une autre fonction de densité, les deux équations cinétiques dialoguant entre elles

via des termes de réactions : pour l'équation décrivant les grosses particules le terme source est négatif (une partie d'entre elles fragmentent) et inversement le terme source est positif pour l'équation décrivant les petites particules (avec un facteur correspondant à la conservation de la masse). Le paramètre asymptotique est le rayon r_1 des petites particules : quand on fait tendre celui-ci vers 0, tout se passe comme si les petites particules se mêlaient au fluide, alimentant la densité de celui-ci. Nous avons essayé d'établir rigoureusement cette limite, sans succès malheureusement ; j'évoque les difficultés que nous avons rencontrées à ce sujet dans la Section 2.3 du Chapitre 2. Nous ne sommes pas revenus complètement bredouilles de cette tentative, puisque c'est en essayant d'établir cette limite que j'ai découvert un phénomène à la source de certains résultats de compacité présentés dans le Chapitre 4. Nous reviendrons là-dessus plus loin.

Plutôt que de chercher à dériver un couplage fluide/cinétique comme (1) – (3) dans sa globalité, on peut se poser isolément la question de la justification de la force de Brinkman apparaissant dans le second membre de l'équation (2). Dans la lignée des travaux de [2, 38], Desvillettes, Golse et Ricci ont réussi dans [54] à récupérer l'expression de la force de Brinkman à partir d'un système quasi-stationnaire couplant une équation de Stokes dans un domaine privé d'un nuage de gouttelettes sphériques, *via* une asymptotique portant sur le (très grand) nombre et la (minuscule) taille de celles-ci. En collaboration avec Matthieu Hillairet et Franck Sueur nous avons dans [P1] récemment généralisé cette dérivation au cas de particules non nécessairement sphériques, produisant ainsi une force de Brinkman qui correspond à un aérosol "polydispersé en forme". La méthode utilisée, présentée dans la Section 2.2 du Chapitre 2, diffère grandement de celle utilisée dans [54] et est inspirée de [90].

Concernant les systèmes à diffusion croisée, j'expose à la fin du Chapitre 3 une question posée par Fontbona et Méléard dans [70]. Elle peut se formuler ainsi : si dans le système (4) – (5) les termes $u_i^{\gamma_i}$ sont remplacés par $(u_i \star \rho_n)^{\gamma_i}$, où $(\rho_n)_n$ est une approximation de l'unité, récupère-t-on le système (4) – (5) lorsque $(\rho_n)_n$ tend vers la masse de Dirac ? L'interprétation de cette limite est claire : à mesure que le support de ρ_n diminue, la "zone d'influence" dont dispose chaque espèce sur la diffusivité de l'autre se réduit. Il s'agit donc de passer d'un modèle non local de diffusion croisée à un système d'interaction ponctuel. L'établissement de cette limite fournirait bel et bien une dérivation complète du système, car dans [70] Fontbona et Méléard ont réussi à obtenir, par l'analyse asymptotique d'un processus stochastique à population finie, une large gamme de systèmes non locaux. Il s'agit d'un problème d'analyse assez ardu, et ma contribution sur le sujet n'est qu'une réponse partielle : dans [P3] je démontre qu'un tel passage à la limite est possible mais en imposant au système d'être triangulaire (sans contrainte sur sa taille), avec des coefficients de diffusion tronqués.

Estimation

Avant même de savoir si une solution au système étudié existe ou non, la pratique d'une analyse *a priori* des équations aux dérivées partielles en jeu est une étape révélatrice. C'est une posture quasi philosophique¹ : l'objet qui n'est pas encore construit (ou découvert ?) fournit les outils nécessaires à sa confection. Parfois, l'adéquation du système avec le phénomène physique qu'il décrit est suffisamment forte pour conduire facilement à la conservation ou à la dissipation

1. Pour citer l'un de mes co-auteurs on peut prendre Sartre à contre-pied et dire qu'ici *l'essence précède l'existence* !

d'une fonctionnelle. C'est par exemple le cas pour l'énergie cinétique du système (1) – (3) dont on vérifie la décroissance au cours du temps. Cette propriété joue un rôle fondamental dans le Chapitre 1 aussi bien pour l'analyse mathématique de ce système que pour la validation numérique de son implémentation.

Mais la situation n'est pas toujours aussi aisée et il peut arriver que la compréhension du système soit en partie paralysée par l'absence de fonctionnelle de Lyapunov connue. À ce titre le système (4) – (5) dans le cas $(\gamma_1, \gamma_2) = (1, 1)$ est un exemple marquant. Je propose un état de l'art sur la question dans la Section 3.3 du Chapitre 3, en expliquant comment l'existence de solutions globales au système SKT fut débloquée par la découverte d'une structure entropique cachée. La généralisation de cette structure occupe une bonne part de la suite de ce chapitre.

Notons enfin que les estimations *a priori* ne prennent pas toujours la forme d'une loi de conservation ou de dissipation. L'exemple crucial du *lemme de dualité* est donné dans la Section 3.2 du Chapitre 3. Il s'agit d'un outil fondamental dans l'étude des systèmes à diffusion croisée et son utilisation dans ce cadre est l'une des caractéristiques de mes contributions sur le sujet.

Approximation

Si la dérivation du système est formelle mais que celui-ci dispose effectivement d'estimations *a priori*, on peut chercher à construire des solutions. Malheureusement des systèmes tels que (1) – (3) ou (4) – (5) sont trop raides pour être étudiés directement. L'étape d'*approximation* consiste à introduire un système modifié, qui se doit d'être structurellement proche du système de base afin que les propriétés essentielles (fonctionnelles de Lyapunov ou positivité des solutions par exemple) y résonnent encore. Mais il faut aussi que cette relaxation soit suffisamment souple pour que son analyse mathématique soit réellement plus simple que le système de départ et permette par exemple la mise en place sereine d'une procédure de point fixe.

Cette étape d'approximation est souvent négligée dans la littérature, considérée comme un "détail technique" qu'il n'est pas toujours nécessaire d'expliquer. C'est dommage car en plus de fournir une présentation complète de la preuve d'existence, elle est parfois très instructive sur le système et peut même être à l'origine d'un schéma numérique efficace qui permettrait de simuler celui-ci.

J'ai essentiellement participé à la conception de deux approximations de ce type, l'une correspondant aux systèmes fluide/cinétique de type Vlasov-Navier-Stokes, l'autre pour des systèmes à diffusion croisée. Pour les premiers, en collaboration avec Laurent Boudin et Céline Grandmont, il nous aura fallu plusieurs tentatives depuis la première parue dans [A1] (coécrit avec Laurent Desvillettes) pour aboutir à la routine robuste et versatile utilisée dans [A12]. Cette procédure simplifiée, basée sur l'utilisation des solutions renormalisées de DiPerna et Lions [57] et une troncature de la vitesse relative des particules, s'applique avec efficacité à la plupart des systèmes fluide/cinétique présents dans ce manuscrit. Je présente ce schéma d'approximation une fois pour toutes dans le Chapitre 1, dans le cadre simplifié du tore plat, en expliquant ensuite les quelques difficultés qui se présentent lorsqu'on l'utilise sur un domaine à bord dépendant du temps (qui est le cadre étudié dans [A12]). L'aspect explicite de cette approche (la vitesse fluide est donnée pour déplacer l'aérosol) se retrouve dans le schéma numérique introduit dans [T] afin de simuler le système (1) – (3) dans le cadre réaliste du transport de particules dans les voies pulmonaires. Le travail [A9] effectué en collaboration avec

les auteurs de [A12] et Alexander Lorz a permis de valider numériquement ce schéma et son implémentation pour une large gamme de paramètres (finesse de maillage ou du pas de temps, poids numérique des particules *etc.*) à l’exception de certains cas extrêmes où la décroissance de l’énergie du système n’est plus conservée. Ces situations pathologiques semblent liées au caractère explicite du schéma et pourraient peut-être s’expliquer par une sorte de condition CFL cachée pour ce système. Je décris plus en détail cette difficulté à la fin du Chapitre 1.

De la même manière que précédemment, pour les systèmes à diffusion croisée le premier schéma introduit ne fut pas celui retenu par la suite. Avec Laurent Desvillettes et Thomas Lepoutre, nous inspirant du changement de variable entropique utilisé par Chen et Jüngel dans [30] pour le modèle SKT, nous avons dans [A7] “bricolé” une adaptation pour les systèmes (4) – (5) dans les cas $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$. Le terme entre guillemets est un peu fort, mais la procédure développée reposait sur une compilation de constructions techniques assez lourdes. Rejoints par Ariane Trescases, nous avons considéré une toute autre approche en concevant un schéma générique pour les systèmes d’équations paraboliques quasi-linéaires ayant un cadre d’application très large. Cette procédure d’approximation (présentée et utilisée pour la première fois dans [A10]) pourrait également être employée à des fins numériques. Je consacre la Section 3.5 du Chapitre 3 à la présentation de ce schéma en expliquant comment celui-ci permet de transporter efficacement deux des caractéristiques fondamentales des systèmes à diffusion croisée étudiés : la structure entropique et les estimations de dualité.

Compacité

Une fois le schéma posé, la non linéarité des systèmes (1) – (3) et (4) – (5) requiert de la compacité forte pour être en mesure de passer à la limite dans chacun des termes de ces équations. Pour plusieurs articles présentés dans ce mémoire, il sera question de situations où le classique lemme d’Aubin-Lions ne s’applique pas : domaine dépendant du temps, contrainte non linéaire, discrétisation de la variable de temps *etc.* J’ai proposé dans [A11] plusieurs variantes du lemme précédent assorties de preuves — à ma connaissance — nouvelles. Les deux situations “exotiques” considérées sont : le cas où seul le gradient d’une fonction de la suite $(u_n)_n$ est contrôlé (typique des équations paraboliques dégénérées par exemple), et le cas où le domaine considéré n’est pas cylindrique, *i.e.* où l’ensemble des valeurs prises par la variable d’espace dépend du temps. L’un des ingrédients techniques utilisés dans [A11] est une proposition permettant de passer à la limite faible dans un produit qui évoque par ses hypothèses les résultats de compacité par compensation de Murat et Tartar [129, 143], sans relever directement de cette théorie. L’embryon de cette méthode était déjà présent dans [A8], mais c’est le traitement d’une non linéarité sévère issue d’un système à diffusion croisée qui m’a finalement guidé vers la version présente dans [A11]. En collaboration avec Clément Cancès et Boris Andreianov, nous avons généralisé ce résultat dans [A15] et exploré son adaptation au cadre discret à l’aide du formalisme des *gradient schemes*. Ces résultats sont présentés dans les quatre premières sections du Chapitre 4.

Notons que le passage à la limite dans un schéma d’approximation n’est pas la seule raison qui peut motiver l’utilisation d’un théorème de compacité. La réponse partielle à la question de Fontbona et Méléard évoquée plus haut (article [P3]) a nécessité un résultat de compacité prenant une forme totalement différente de celle du lemme d’Aubin-Lions. Le cadre est celui d’une équation de diffusion de Kolmogorov (comme le sont les équations (4) et (5)) et le théorème permet de transformer de la compacité L^1 pour le coefficient de diffusion (présent à

l'intérieur du laplacien) en de la compacité L^2 pour la solution elle-même. Ce résultat, présenté dans le Chapitre 4 dans le cadre des solutions duales introduites au Chapitre 3 est au cœur de l'analyse menée dans [P3].

Solutions globales

Plusieurs articles présentés dans ce manuscrit ont pour but principal la construction de solutions globales (faibles) à un système d'équations dont la structure se rapproche de (1) – (3) ou de (4) – (5). Dans la plupart des cas, cela se fait par le procédé classique d'approximation/compacité, sur la base des outils présentés dans les trois derniers paragraphes de cette introduction. L'existence de solutions faibles globales pour le système (1) – (3) a par exemple été établie dans [A1] dans le cas du tore plat, puis dans un cadre plus réaliste dans l'article [A12]; ces résultats sont présentés dans le Chapitre 1. Les articles [A6, A8, A16, P2] traitent également du système de Vlasov-Navier-Stokes ou de variantes de celui-ci et même si la théorie d'existence n'était pas le but principal de ces collaborations, elle fut en général traitée et est (au moins) mentionnée dans le Chapitre 2. Les articles [A6, A7, A10, A14] établissent l'existence de solutions globales à des versions (de plus en plus) généralisées du système (4) – (5), ils sont tous présentés dans le Chapitre 3. À la fin de ce chapitre je présente le résultat principal obtenu dans [P3] qui fournit également un résultat d'existence globale, cette fois-ci par une analyse asymptotique.

Dans le cas de la dimension 2, il est possible d'en dire plus sur les solutions faibles du système de Vlasov-Navier-Stokes. Leur unicité a fait l'objet de l'article [P2], écrit en collaboration avec Daniel Han-Kwan, Évelyne Miot et Iván Moyano; je présente ce résultat au début du Chapitre 2. Ce même système, pour une configuration géométrique précise, admet des états d'équilibres non triviaux et ceux-ci décrivent le comportement de la solution en temps long, pour des données initiales bien préparées. Avec Olivier Glass et Daniel Han-Kwan nous avons mis en évidence ces solutions stationnaires et étudié leur stabilité dans l'article [A16]; je présente ces résultats dans la Section 2.1.2 du Chapitre 2.

Notations

Dans ce manuscrit le seul opérateur différentiel portant sur la variable de temps est ∂_t ; sans indices les symboles ∇ ou Δ réfèrent à la variable d'espace.

La norme d'un espace fonctionnel E sera toujours notée $\|\cdot\|_E$, exception faite des espaces L^p pour lesquels nous utiliserons souvent la notation $\|\cdot\|_p$, si il n'y a pas d'ambiguïté. La norme euclidienne sur \mathbb{R}^N est simplement notée $|\cdot|$. Ce même symbole appliqué à une partie mesurable de \mathbb{R}^N désignera la mesure de Lebesgue de celle-ci.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ et $m \in \mathbb{Z}$ la notation usuelle pour les espaces de Sobolev $W^{k,p}$ ou H^m est adoptée. Le sigle $L \log L$ fait référence à l'espace de Birnbaum-Orlicz pour la fonction $|x| \log^+ |x|$, BV à celui des fonctions à variations bornées et Lip à celui des fonctions lipschitziennes. La lettre \mathcal{D} désigne l'espace des fonctions tests (régularité infinie et support compact), et \mathcal{D}' celui des distributions.

Tout au long de ce mémoire $A \lesssim B$ sera utilisé pour signifier $A \leq CB$, pour une constante C dont nous préciserons systématiquement la dépendance précise vis-à-vis des variables considérées.

Quelques notations de ce manuscrit ne sont pas tout à fait standards :

- L'ajout de "div" en indice d'un espace fonctionnel signifie que l'on travaille avec les champs de vecteurs à divergence (en la variable spatiale) nulle. Ainsi, $\mathcal{D}_{\text{div}}(\mathbb{R}^3)$ est l'ensemble des fonctions vectorielles $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ telles que $\nabla \cdot \varphi = 0$.
- Les symboles $\dot{\in}$ et $\ddot{\in}$ s'appliquent aux suites et signifient respectivement "est bornée dans" et "admet une sous-suite convergente dans".

Enfin, le compteur des équations est remis à 0 à chaque début de chapitre ; pour cette raison un numéro d'équation fait toujours référence au chapitre courant au contraire des théorèmes, lemmes, propositions, corollaires, définitions ou remarques qui, eux, peuvent être invoqués dans tout le manuscrit.

Transport de particules dans le poumon

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité des travaux initiés dans le mémoire de thèse [T]. Le but de celle-ci était l'étude (modélisation, analyse mathématique et simulation numérique) du transport de particules au sein du poumon humain, en vue d'applications en aérosolthérapie. Nous commencerons par présenter brièvement le modèle introduit dans [T], basé sur un couplage fluide/cinétique où l'interaction entre les deux phases est incarnée par l'opposition entre la *force de traînée* et la *force de Brinkman*. Nous aborderons ensuite la construction d'une solution faible globale au modèle complet. Il s'agit d'une analyse prenant sa source dans [A1] et ayant abouti récemment à [A12]. Ce dernier article prolonge en effet l'analyse mathématique initiée dans [A1] à un cadre plus réaliste, en prenant en compte la dépendance en temps du domaine. Enfin, nous présenterons un travail de validation numérique publié dans [A9] portant sur le schéma numérique proposé dans [T] et son implémentation au sein d'une bibliothèque d'éléments finis.

1.1 Le modèle

Le modèle que nous allons présenter a été introduit en détail dans [T]. Il consiste en un problème couplé fluide/cinétique, hérité des travaux pionniers de Williams [151] et O'Rourke [131], considéré dans un domaine dépendant du temps. Ce dernier aspect constitue l'innovation la plus marquante de notre modèle. Il s'agit d'un cadre pertinent pour la description du transport de particules dans les voies aériennes pulmonaires, car certaines d'entre elles sont effectivement mobiles durant la respiration.

Nous ne traiterons pas ici des justifications physiologiques du modèle, pour lesquelles nous renvoyons à [T]. Mentionnons simplement qu'il s'applique aux voies aériennes supérieures de l'arbre bronchique (les dix à quinze premières générations), pour un transport de particules massives (de diamètre $\geq 50\mu\text{m}$ si on les considère sphériques). Dans un souci de simplification, nous nous autoriserons donc à normaliser certaines constantes du système vis-à-vis desquelles l'analyse numérique ou mathématique du problème est totalement insensible.

1.1.1 Le domaine

Pour prendre en compte la dépendance en temps du domaine, nous considérons une application de classe \mathcal{C}^1

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) &\longmapsto \mathcal{A}(t, x) = \mathcal{A}_t(x), \end{aligned}$$

telle que, pour tout $t \geq 0$, \mathcal{A}_t est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme et telle que $\mathcal{A}_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On se donne ensuite un ouvert de référence Ω borné, connexe et à frontière lipschitzienne. Notre domaine temps/espace est alors fourni par le déplacement de Ω au cours du temps. Plus précisément, on fixe un intervalle d'étude $[0, T] \subset \mathbb{R}_+$ et on pose pour tout t dans celui-ci, $\Omega^t := \mathcal{A}_t(\Omega)$. Le domaine considéré est alors l'ensemble

$$\widehat{\Omega} := \bigcup_{0 < t < T} \{t\} \times \Omega^t. \quad (1)$$

Il nous sera également utile d'introduire le bord "spatial" de ce domaine, soit l'ensemble

$$\widehat{\Gamma} := \bigcup_{0 < t < T} \{t\} \times \partial\Omega^t, \quad (2)$$

ainsi que le bord équivalent pour l'espace des phases $\widehat{\Sigma} = \widehat{\Gamma} \times \mathbb{R}^3$.

1.1.2 L'équation fluide

Le fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes incompressible à densité constante, par l'intermédiaire de sa vitesse $u : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et sa pression $p : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. En normalisant la densité du fluide pour simplifier et en notant η sa viscosité, ces équations s'écrivent, pour $(t, x) \in \widehat{\Omega}$ et un champ de force volumique $F : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ s'appliquant au fluide,

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \eta \Delta u + \nabla p = F, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (4)$$

1.1.3 L'équation cinétique

Nous nous plaçons, selon la classification introduite par O'Rourke dans [131], sous l'hypothèse d'un *spray fin* : la fraction volumique de l'aérosol au sein du fluide ainsi que les collisions entre les particules sont toutes les deux négligées, mais on considère que l'aérosol dans son ensemble ne se contente pas de subir l'action du fluide et agit sur lui en retour. L'aérosol est représenté par une fonction de densité f dépendant du temps t , de la position x et de la vitesse v des particules. La fonction de densité est alors solution de l'équation de Vlasov, pour $(t, x) \in \widehat{\Omega}$ et $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [A f] = 0, \quad (5)$$

où $A : \widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs représentant l'accélération subie par les particules de l'aérosol. Ce champ est décrit dans le paragraphe suivant.

1.1.4 Le système couplé

Le couplage s'effectue par le biais des champs de vecteurs A et F introduits précédemment. La loi de Stokes exprime l'action d'un fluide incompressible de viscosité $\nu > 0$, de vitesse u , sur une particule immergée dans le fluide en x à l'instant t , par l'intermédiaire de la *force de traînée*, laquelle prend la forme suivante pour une particule de rayon r et de vitesse v

$$6\pi\eta r(u(t, x) - v).$$

Si les particules considérées ont pour masse m , l'accélération perçue par celles-ci est donc donnée par le champ de vecteurs

$$A(t, x, v) := \frac{6\pi\eta r}{m}(u(t, x) - v).$$

En retour de cette accélération fournie par le fluide, les particules appliquent sur lui une *force de rétroaction* appelée parfois *force de Brinkman* dans la littérature, laquelle s'exprime ainsi :

$$F(t, x) := - \int_{\mathbb{R}^3} A(t, x, v) f(t, x, v) dv.$$

Le système de Vlasov-Navier-Stokes est le couplage obtenu entre les équations introduites précédemment lorsque l'échange entre les deux phases s'opère par l'accélération de traînée et la force de Brinkman. Il s'écrit, après normalisation des constantes,

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [(u - v)f] = 0, \quad (6)$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = \int_{\mathbb{R}^3} (v - u)f, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (8)$$

et nous l'étudierons par la suite pour $(t, x) \in \widehat{\Omega}$ et $v \in \mathbb{R}^3$.

1.1.5 Conditions aux bords

En un point $x \in \Omega^t$, le domaine se déplace avec la vitesse

$$w(t, x) := \dot{\mathcal{A}}_t(\mathcal{A}_t^{-1}(x)).$$

Nous considérons la condition de Dirichlet suivante pour le fluide

$$u = w, \text{ sur } \widehat{\Gamma}. \quad (9)$$

Si \mathbf{n}_t désigne le champ de vecteur normal sortant sur $\partial\Omega^t$, les ensembles suivants décrivent les différents scénarios possibles pour une particule appartenant à $\widehat{\Sigma}$.

$$\widehat{\Sigma}^\pm = \{(t, x, v) \in \widehat{\Sigma} \mid \pm (v - w(t, x)) \cdot \mathbf{n}_t(x) > 0\},$$

$$\widehat{\Sigma}^0 = \{(t, x, v) \in \widehat{\Sigma} \mid (v - w(t, x)) \cdot \mathbf{n}_t(x) = 0\}.$$

Nous considérons une condition d'absorption pour l'aérosol qui s'exprime ainsi :

$$f = 0 \text{ sur } \widehat{\Sigma}^-. \quad (10)$$

Remarque 1.1. *Les conditions aux bords précédentes sont cohérentes avec l'étude du transport de particules dans les voies respiratoires : les parois de celles-ci sont recouvertes de mucus. Notons toutefois que pour les simulations numériques évoquées à la fin de ce chapitre, nous avons en général partitionné le bord $\partial\Omega^t$ en trois parties correspondant à l'entrée, la sortie et la paroi du domaine. Seule la dernière est une frontière physique (où les conditions aux bords précédentes sont considérées).*

1.1.6 Énergie du système

La fonctionnelle suivante, représentant l'énergie cinétique totale du système à l'instant t , est au cœur de l'analyse que nous nous proposons de mener dans les paragraphes suivants :

$$\widehat{E}(t, f, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} \int_{\mathbb{R}^3} f(t) |v|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} |u(t)|^2. \quad (11)$$

En utilisant la formule de Reynolds pour une fonction scalaire $\Phi : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \Phi(t) = \int_{\Omega^t} \partial_t \Phi(t) + \int_{\partial\Omega^t} \Phi(t) w(t) \cdot \mathbf{n}_t,$$

on peut alors montrer formellement (voir [A12]) l'existence d'une fonction croissante continue $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de $(f(0), u(0))$ et w pour laquelle

$$\widehat{E}(t, f, u) + \int_0^t \int_{\Omega^s} |\nabla u|^2 + \int_0^t \int_{\Omega^s} \int_{\mathbb{R}^3} f |u - v|^2 \leq \gamma(t). \quad (12)$$

Remarque 1.2. *Dans le cas particulier d'un domaine fixe, on peut dans (12) prendre $\gamma(t) = \widehat{E}(0, f(0), u(0))$: l'énergie du système est décroissante (voir [A9]).*

1.2 Solutions faibles globales : le cas du tore plat

La construction de solutions faibles pour des problèmes couplés fluide/cinétique est à l'origine d'une littérature riche datant d'une vingtaine d'années. En se limitant au cas d'un fluide visqueux et incompressible et en omettant les articles évoqués dans ce manuscrit, citons au moins les premiers articles [7, 87] et les plus récents [157] (condition de réflexion au bord), [146] (fluide inhomogène) ou [36] (solutions plus régulières pour des données petites). En ajoutant un terme de dissipation à l'équation cinétique (de type Fokker-Planck) la structure du système s'enrichit et permet la construction de solutions plus régulières proche d'un équilibre maxwellien, lequel bénéficie en général d'une certaine stabilité, voir par exemple [A2, A5] et [26]. Pour ces systèmes, certaines limites hydrodynamiques sont même possibles, voir par exemple [84, 85].

Durant la thèse [T], en collaboration avec Laurent Boudin, Laurent Desvillettes et Céline Grandmont nous avons établi l'existence de solutions faibles globales pour le système de Vlasov-Navier-Stokes considéré sur le tore plat tridimensionnel. Ce travail, publié dans [A1], a constitué un premier pas vers l'analyse complète de ce système. Il s'agissait bien sûr d'une simplification considérable du modèle présenté dans la Section 1.1 (et introduit dans [T]) mais cela nous a permis de mettre en évidence les principales difficultés liées à la structure du système.

La fonctionnelle suivante est l'analogue pour le tore de celle introduite en (11) :

$$E(f, u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |u|^2 \quad (13)$$

Les solutions construites reposent sur l'identité (formelle) suivante, obtenue après multiplication de l'équation fluide par u , de l'équation cinétique par $|v|^2/2$ et d'intégrations par parties adéquates :

$$\frac{d}{dt} E(f, u)(t) + \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u(t)|^2 + \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - u(t)|^2 f(t) = 0. \quad (14)$$

Remarque 1.3. *Contrairement au cas du modèle complet, on a ici une égalité. La décroissance de l'énergie est exactement compensée par la dissipation du fluide et du travail entre les deux phases (deuxième et troisième termes du membre de gauche), car aucune particule ne sort du domaine.*

Cette identité formelle dessine le cadre fonctionnel dans lequel nous nous plaçons pour construire nos solutions. Elle invite à un jeu d'hypothèses minimal sur les données initiales, que nous retiendrons autant pour le cas du tore plat que pour le cas d'un domaine à bord dépendant du temps :

Définition 1.1. *Soit $\Omega = \mathbb{T}^d$ ou un ouvert de \mathbb{R}^d . On dit que $(f_{\text{in}}, u_{\text{in}})$ est une condition initiale admissible pour le système (6) – (8) si*

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_{\text{in}} \in L^1 \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d), \\ (x, v) &\mapsto f_{\text{in}}(x, v) |v|^2 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^d), \\ u_{\text{in}} &\in L^2_{\text{div}}(\Omega). \end{aligned}$$

Dans le cas du tore plat, les solutions faibles (f, u) que nous construisons ont la régularité suivante : il s'agit d'une solution renormalisée pour la composante cinétique et d'une solution de Leray pour la composante fluide, *i.e.*

$$f \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) \text{ et } u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^2_{\text{div}}(\mathbb{T}^3)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1_{\text{div}}(\mathbb{T}^3)).$$

À l'aide de l'identité d'énergie (pour contrôler les moments de f), nous sommes alors en mesure d'écrire une formulation faible du système (6) – (8) où tous les éléments présents sont bien définis au sens des distributions, la pression disparaissant par l'utilisation de fonctions tests à divergence nulle. Le théorème principal établi dans [A1] est le suivant.

Théorème 1.1. *Pour toute condition initiale admissible $(f_{\text{in}}, u_{\text{in}})$ il existe une solution faible globale (f, u) au système (6) – (8) considéré sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ vérifiant pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$*

$$E(f, u)(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - u|^2 f dv dx ds \leq E(f_{\text{in}}, u_{\text{in}}). \quad (15)$$

La preuve que nous avons mis en place dans [A1] repose sur une méthode standard : on prouve l'existence d'une solution pour un système approché par un théorème de point fixe, et on relaxe les paramètres de régularisation par un argument de compacité. Dans pareille situation (méthode de compacité avec une estimation d'énergie connue), la saveur de la preuve

est presque entièrement contenue dans le processus d'approximation choisi, et la littérature en a fourni un grand nombre pour les couplages fluide/cinétique (voir [7, 87, 146, 157]). Nous ne présenterons volontairement pas le processus d'approximation utilisé dans [A1] : il se trouve que l'on a fait mieux depuis ! Les prémices de la méthode que nous allons présenter se trouvent dans [A8], et sa forme actuelle a pour la première fois été écrite à l'occasion de [A12]. Il s'agit d'un schéma d'approximation suffisamment robuste pour s'appliquer sans trop de difficulté à tous les systèmes couplés fluide/cinétique présents dans ce manuscrit (cas de l'espace entier, cas d'un domaine à bord, cas à densité variable, que nous aborderons dans le Chapitre 2), aussi le présentons-nous une fois pour toute. Nous choisissons de détailler la procédure dans le cas du tore plat plutôt que celui du modèle complet pour simplifier la présentation. Nous reviendrons toutefois en Section 1.3 sur les difficultés spécifiques au domaine à bord dépendant du temps, rencontrées à l'occasion de [A12].

Sans perte de généralité, nous travaillons sur un intervalle $[0, T]$ fixé. Nous supposons de plus que $u_{\text{in}} \in H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ et que f_{in} est à support compact. Ces deux hypothèses supplémentaires sur les données pourront être relaxées à la fin de notre preuve, par un argument de compacité. On fixe ensuite $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ (destinée à être remplacée par une approximation de l'unité) et $\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction impaire, bornée, satisfaisant $0 \leq z \cdot \chi(z)$ et $|\chi(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{R}^3$. On considère ensuite le système suivant (la convolution porte en la variable spatiale uniquement)

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [\chi(u - v)f] = 0, \quad (16)$$

$$\partial_t u + (u \star \varphi \cdot \nabla)u + \nabla p - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^3} \chi(v - u)f, \quad (17)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (18)$$

Introduisons l'espace $V := L^2(0, T; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$ sur lequel nous allons invoquer le théorème de point fixe de Schaefer (on renvoie à l'Annexe A pour un énoncé). Partant de $u \in V$, on note tout d'abord f_u l'unique solution renormalisée (au sens de DiPerna-Lions [57]) de l'équation (16) avec donnée initiale f_{in} . Ensuite, pour tout $\sigma \in [0, 1]$, on pose $\Theta(\sigma, u) = \tilde{u}$ où \tilde{u} est la solution de l'équation de Navier-Stokes régularisée suivante (avec condition initiale σu_{in})

$$\partial_t \tilde{u} + (\tilde{u} \star \varphi) \cdot \nabla \tilde{u} - \Delta \tilde{u} + \nabla p = \sigma \int_{\mathbb{R}^3} \chi(v - u)f_u, \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \tilde{u} = 0. \quad (20)$$

Bien évidemment, lorsque $\sigma = 0$, on récupère $\Theta(\sigma, u) = 0$, par unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes régularisée.

Compacité de l'application Θ . Puisque χ est une fonction bornée et que f_{in} est à support compact, f_u l'est également (et ce, indépendamment de u); en particulier la norme $L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^3))$ du terme source

$$\sigma \gamma \int_{\mathbb{R}^3} \chi(v - u)f_u$$

est bornée pour tout u par une constante ne dépendant que de f_{in} (puisque $\sigma \leq 1$). La compacité nécessaire est ensuite fournie par la régularisation de l'équation de Navier-Stokes (car la donnée initiale est $H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$).

Continuité de l'application Θ . Si $(\sigma_n)_n \rightarrow \sigma$ et $(u_n)_n \rightarrow u$ dans V , la stabilité des solutions renormalisées [57, Thm. II.4] implique que $(f_{u_n})_n$ converge vers f_u en un sens suffi-

samment fort pour passer à la limite dans le terme source de l'équation fluide. La compacité établie de Θ assure ensuite que $(\tilde{u}_n)_n \in V$ et la seule valeur d'adhérence possible est l'unique solution de l'équation de Navier-Stokes régularisée avec pour terme source :

$$\sigma \int_{\mathbb{R}^3} \chi(v - u) f_u \, dv,$$

c'est-à-dire \tilde{u} .

Estimation a priori des points fixes. Si $u = \Theta(\sigma, u) = \tilde{u}$, en multipliant (19) par u et (16) par $\sigma|v|^2/2$ on obtient après intégrations par parties (justifiées au vu de la régularité des solutions considérées)

$$E(\sigma f_u, u)(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u|^2 + \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (v - u) \cdot \chi(v - u) f_u = E(\sigma f_{\text{in}}, \sigma u_{\text{in}}),$$

où E est la fonctionnelle introduite en (13). Puisque $z \cdot \chi(z) \geq 0$, l'identité précédente assure que les points fixes éventuels de $\Theta(\sigma, \cdot)$ ont tous une norme dans V plus petite qu'une constante ne dépendant que de f_{in} et u_{in} (car $\sigma \leq 1$). Le théorème de Schaefer s'applique donc et on dispose d'une solution (f, u) au problème approché (16) – (18), laquelle vérifie de plus l'identité

$$E(f, u)(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (v - u) \cdot \chi(v - u) f = E(f_{\text{in}}, u_{\text{in}}), \quad (21)$$

et la suivante, immédiate lorsque les courbes caractéristiques sont définies (conservation) et encore vraie dans notre cas par stabilité des solutions renormalisées :

$$\forall t \in [0, T], \quad \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(t) = \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_{\text{in}}. \quad (22)$$

Retour au système de Vlasov-Navier-Stokes. On se donne des suites $(\varphi_n)_n, (\chi_n)_n$ approchant respectivement la masse de Dirac et l'identité (sur \mathbb{R}^3) et pour tout n on note (f_n, u_n) la solution précédemment construite au problème approché correspondant. Les estimations (21) et (22) fournissent des bornes sur la suite $(u_n)_n$ suffisantes pour invoquer le lemme d'Aubin-Lions; on récupère ainsi de la compacité forte sur $(u_n)_n$, qui est transmise à $(f_n)_n$ par stabilité des solutions renormalisées : on peut bien passer à la limite dans chacune des non linéarités du système.

1.3 Retour au modèle complet

À notre connaissance, la construction de solutions faibles pour un modèle fluide/cinétique sur un domaine dépendant du temps n'avait pas été abordée avant l'article [A12]. Cet article, écrit en collaboration avec Laurent Boudin et Céline Grandmont, établit un théorème général d'existence qui s'applique au modèle réaliste que nous avons introduit dans la Section 1.1.

De nombreuses modifications sont nécessaires par rapport au cas du tore, à commencer par les espaces fonctionnels considérés. Pour les définir, nous aurons besoin de la notation suivante : pour toute fonction g définie sur $\widehat{\Omega}$ (respectivement $\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^3$), \bar{g} désigne son prolongement par 0 à l'ensemble $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ (respectivement $[0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$).

Les solutions faibles (f, u) que nous construisons satisfont les conditions suivantes

$$\bar{f} \in L^\infty(0, T; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)), \quad (23)$$

$$\bar{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)), \quad (24)$$

$$\overline{u - w} \in L^2(0, T; H_{\text{div}}^1(\mathbb{R}^3)). \quad (25)$$

Notons que, par continuité de l'opérateur de trace sur H^1 , l'appartenance (25) encode la condition au bord (9). Ce n'est pas du tout le cas de l'appartenance (23) et de la condition au bord (10). Cette différence n'est pas anodine : l'appartenance (25) ouvre la voie à une méthode de pénalisation, que nous présentons ci-dessous, qu'il semble difficile d'adapter pour l'équation cinétique. La raison de fond est que la condition (9) est satisfaite en un sens beaucoup plus fort que la condition (10).

1.3.1 La pénalisation de Fujita et Sauer

Pour démontrer l'existence de solutions faibles aux équations de Navier-Stokes incompressible dans un domaine dépendant du temps comme $\widehat{\Omega}$, avec la condition au bord (9), Fujita et Sauer proposent dans [72] une méthode de pénalisation relativement simple. On prolonge la condition au bord w à $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ en une fonction $\tilde{w} \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{D}_{\text{div}}(\mathbb{R}^3))$ et pour $\lambda > 0$ fixé, on résout l'équation en u suivante dans $[0, T] \times \mathbb{R}^3$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = -\lambda(u - \tilde{w})\mathbf{1}_{\mathcal{P}}, \quad (26)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (27)$$

où le domaine de pénalisation \mathcal{P} est le complémentaire de $\widehat{\Omega}$ dans $[0, T] \times \mathbb{R}^3$. On a alors pour $\lambda > 0$ une estimation du type suivant, obtenue en multipliant (26) par $u - \tilde{w}$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(t)|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + n \int_0^t \int_{\mathcal{P}} |u - \tilde{w}|^2 \lesssim 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2,$$

où la constante se cachant derrière \lesssim ne dépend que des conditions initiales choisies et de la norme de \tilde{w} dans $W^{1,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^3)$. Si $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille de solutions au système (26) – (27), l'estimation précédente associée au lemme de Grönwall conduisent à ce que $(u_\lambda - \tilde{w})_\lambda$ converge vers 0 dans $L^2(\mathcal{P})$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Ainsi, toute valeur d'adhérence forte de $(u_\lambda)_\lambda$ dans $L^2(\widehat{\Omega})$ résout l'équation de Navier-Stokes dans $\widehat{\Omega}$ avec les appartenances (24) – (25). Pour conclure, il ne reste plus qu'à démontrer que l'on a effectivement $(u_\lambda)_\lambda \rightharpoonup L^2(\widehat{\Omega})$. Cette question de compacité est l'une des difficultés soulevées et résolues dans [72], nous reviendrons dessus dans le paragraphe 1.3.3.

C'est essentiellement cette méthode que nous allons appliquer pour construire la composante fluide de notre système. Mais comme nous l'expliquons plus haut, cette procédure ne peut pas être transposée à l'équation cinétique. Par contre, il est possible pour une équation de transport d'utiliser un changement de variable pour se ramener au cas du domaine fixe, c'est l'objet du prochain paragraphe.

1.3.2 L'équation de Vlasov en domaine mobile

On considère un champ de vecteurs $G \in L^1(0, T; W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ tel que

$$\nabla_v \cdot G \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)), \quad (28)$$

et on cherche à résoudre le problème aux limites

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [Gf] = 0, \text{ sur } \widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^3, \quad (29)$$

$$f = 0 \text{ sur } \widehat{\Sigma}^-, \quad (30)$$

$$f(0, \cdot, \cdot) = f_0, \text{ sur } \Omega \times \mathbb{R}^3, \quad (31)$$

où la donnée initiale f_0 est une fonction positive appartenant à $L^1 \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3)$.

1.3.2.1 Définition des solutions et existence

Définition 1.2. Une fonction $f \in L^\infty(\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^3)$ est une *solution faible* de (29) – (31) si, pour tout élément $\phi \in \mathcal{D}([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ nul sur $\widehat{\Sigma}^+ \cup \widehat{\Sigma}^0$, on a l'identité

$$-\int_0^T \int_{\Omega^t} \int_{\mathbb{R}^3} f (\partial_t \phi + v \cdot \nabla_x \phi + G \cdot \nabla_v \phi) = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} f_0 \phi(0). \quad (32)$$

Dans le cas où G est un champ de vecteurs suffisamment régulier, par exemple si G appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$, on peut considérer les courbes caractéristiques

$$Z_{s,t}(x, v) := (X_{s,t}(x, v), V_{s,t}(x, v)),$$

définies comme la valeur à l'instant t de la solution du système

$$\begin{cases} \dot{X} = V, \\ \dot{V} = G(t, X, V), \\ (X, V)|_{t=s} = (x, v), \end{cases}$$

et introduire le temps de sortie rétrograde

$$\tau^-(t, x, v) = \inf\{s \leq t \mid \forall \sigma \in [s, t], X_{t,\sigma}(x, v) \in \Omega^\sigma\}.$$

On peut donc définir pour $(t, x, v) \in \widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^3$,

$$f(t, x, v) = e^{h(t,x,v)} f_0(Z_{t,0}(x, v)) \mathbf{1}_{\tau^- < 0}(t, x, v), \quad (33)$$

où h est la solution dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ de l'équation de transport avec terme source

$$\partial_t h + v \cdot \nabla_x h + G \cdot \nabla_v h = \nabla_x \cdot G,$$

initialisée par 0. En utilisant des changements de variables basés sur les difféomorphismes $(x, v) \mapsto Z_{0,t}(x, v)$, on vérifie alors que la fonction f donnée en (33) est bel et bien solution faible de (29) – (31) au sens de la Définition 1.2. Un argument d'approximation conduit alors à la proposition suivante.

Proposition 1.1. Soit $G \in L^1(0, T; W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ vérifiant (28). Pour toute fonction f_0 dans $L^1 \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, il existe au moins une solution faible au problème aux limites (29) – (31) au sens de la Définition 1.2.

Remarque 1.4. La proposition précédente est toujours vraie si le champ de vecteurs G est uniquement supposé $L^1(0, T; L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$, toujours sous l'hypothèse (28). Ce cadre restreint que nous considérons est toutefois crucial pour le paragraphe suivant où nous donnons un sens à la trace de la solution f sur $\widehat{\Gamma}$.

Remarque 1.5. *Même si le champ G et la donnée initiale f_0 sont supposés \mathcal{C}^∞ , le problème (29) – (31) ne produit pas de solutions régulières sans contraintes géométriques très fortes sur $\widehat{\Omega}$, car le temps de sortie rétrograde n'est en général pas une fonction continue. C'est l'une des raisons qui nous a conduit à abandonner la procédure suivie dans [A1].*

L'existence de solutions faibles pour l'équation de transport avec absorption a été abordée dans le cas régulier par Bardos dans [9] où l'on trouve la formule (33), dans le cas d'un ouvert borné et d'un champ régulier G . Le cas de l'équation de Vlasov est traité par Mischler dans [125] pour un champ non régulier G mais ne dépendant que de t et x . Mentionnons également l'ouvrage de Boyer et Fabrie [20] où une méthode de régularisation parabolique est proposée pour la construction d'une solution faible.

1.3.2.2 Un théorème de trace

DiPerna et Lions ont établi dans [57] que, pour un champ de régularité Sobolev, toute solution au sens des distributions d'une équation de transport dans tout l'espace est en fait mieux que cela : c'est une solution renormalisée, au sens où toute fonction non linéaire de celle-ci devient solution de l'équation de transport formellement obtenue par la formule de dérivation des fonctions composées. Mischler a été le premier, dans [125], à s'intéresser au même phénomène, mais sur un domaine à bord. Il y démontre que l'annulation de l'opérateur de Vlasov fournit suffisamment de régularité à la solution pour, en plus de sa renormalisation, définir sa trace sur le bord du domaine (et celle-ci est également renormalisée). Boyer étend par la suite dans [19] cette approche dans le cas plus général de l'équation de transport avec des hypothèses affaiblies sur le champ de vitesses (mais en supposant celui-ci à divergence nulle), ces résultats ayant par la suite été raffinés dans [20]. À l'aide de la littérature précédente on est alors en mesure d'énoncer le résultat suivant.

Théorème 1.2. *Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert Lipschitz et borné. On note \mathbf{n} la normale extérieure et σ la mesure de surface définies sur ∂O . On considère un champ de vecteurs $a \in L^1(0, T; W^{1,1}(O))$ tel que $\nabla \cdot a \in L^1(0, T; L^\infty(O))$. Soit $\rho \in L^\infty((0, T) \times O)$ une solution de*

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (a\rho) = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T[\times O).$$

Alors pour tout $1 \leq p < +\infty$, $\rho \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^p(O))$ et admet une trace que l'on note $\gamma\rho$ définie sur l'ensemble $(0, T) \times \partial O$: en notant $d\mu_a = a \cdot \mathbf{n} d\sigma dt$, il s'agit de l'unique élément de $L^\infty((0, T) \times \partial O, |d\mu_a|)$ satisfaisant, pour tout couple $(\varphi, \beta) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, et tous réels $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_O \beta(\rho)(\partial_t \varphi + a \cdot \nabla \varphi) - \int_{t_0}^{t_1} \int_O (\rho \beta'(\rho) - \beta(\rho))(\nabla \cdot a) \varphi \\ & = \int_O \beta(\rho(t_1)) \varphi(t_1) - \int_O \beta(\rho(t_0)) \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial O} \beta(\gamma\rho) \varphi a \cdot \mathbf{n} \quad . \end{aligned} \quad (34)$$

Nous avons dans [A12] généralisé le théorème précédent au cas du domaine mobile $\widehat{\Omega}$ en démontrant le résultat suivant.

Théorème 1.3. *Soit $G \in L^1(0, T; W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ vérifiant (28) et $f \in L^\infty(\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^3)$ une solution de*

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (Gf) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^3). \quad (35)$$

Alors, pour tout $1 \leq p < +\infty$, $\bar{f} \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$. De plus, la trace de f sur $\hat{\Gamma}$ est bien définie : c'est l'unique élément $\hat{\gamma}f \in L^\infty(\hat{\Gamma})$ satisfaisant pour tout couple $(\psi, \beta) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, et tous réels $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega^t} \int_{\mathbb{R}^3} \beta(f) (\partial_t \psi + v \cdot \nabla_x \psi + \mathbf{G} \cdot \nabla_v \psi) - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega^t} \int_{\mathbb{R}^3} (f \beta'(f) - \beta(f)) (\nabla_v \cdot \mathbf{G}) \psi \\ &= \int_{\Omega^{t_1} \times \mathbb{R}^3} \beta(f(t_1)) \psi(t_1) - \int_{\Omega^{t_0} \times \mathbb{R}^3} \beta(f(t_0)) \psi(t_0) \\ & \quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial \Omega^t} \int_{\mathbb{R}^3} \beta(\hat{\gamma}f) \psi (v - w) \cdot \mathbf{n}_t \quad . \quad (36) \end{aligned}$$

Dans l'équation (36), la vitesse w apparaît à cause de la dépendance en temps du domaine que nous considérons. Dans le cas $w = 0$, on retrouve le cadre standard d'un domaine fixe mais cela reste une généralisation des résultats établis dans [19, 20] car le domaine $\Omega \times \mathbb{R}^3$ est non borné.

Nous prouvons ce résultat en deux étapes. On prolonge d'abord les résultats connus aux domaines non bornés (sous des hypothèses d'intégrabilité adéquates). On transporte ensuite cette généralisation au cas d'un domaine qui dépend du temps, par un changement de variable ramenant celui-ci au domaine de référence. Notons que cette stratégie n'était pas applicable pour l'équation fluide, à cause de la contrainte d'incompressibilité.

Le Théorème 1.3 est crucial dans l'analyse poursuivie dans [A12], pour deux raisons. Pour commencer, il permet de justifier dans un cadre assez large l'estimation d'énergie formelle annoncée en (12), qui est la source principale d'estimations *a priori* nécessaires à la procédure de point fixe présentée en Section 1.2. Ensuite, de manière similaire à [19, 57, 125], on utilise le Théorème 1.3 pour démontrer une propriété d'unicité pour le problème aux limites (29) – (31), sous une condition de petitesse à l'infini pour le champ et d'intégrabilité pour f :

Proposition 1.2. *Soit $\mathbf{G} \in L^1(0, T; W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ vérifiant (28) ainsi que*

$$\frac{\mathbf{G}}{1 + |v|} \in L^1(0, T; L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)) + L^1(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)). \quad (37)$$

Soit f une solution à (29) – (31) avec $f_0 \equiv 0$, au sens de la Définition 1.2. Si $\bar{f} \in L^1(0, T; L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$, alors $f \equiv 0$.

Comme mis en évidence dans [57, Thm. II.4], ce résultat d'unicité et la renormalisation proposée dans le Théorème 1.3 assurent une propriété de stabilité très forte des solutions du problème aux limites (29) – (31). En un sens volontairement vague, on a la continuité de $\mathbf{G} \mapsto f$ pour ce problème, ce que nous utilisons explicitement dans notre procédure de point fixe.

1.3.3 Solutions faibles globales

Nous sommes maintenant en mesure de construire des solutions pour le système (6) – (8) considéré pour $(t, x) \in \hat{\Omega}$ et $v \in \mathbb{R}^3$.

Nous suivons un schéma d'approximation très proche de celui présenté dans la Section 1.2. La différence principale est que l'équation fluide et l'équation cinétique ne sont pas résolues sur le même domaine : pour la première, on ajoute un terme de pénalisation et on la résout dans tout

l'espace, alors que la seconde est résolue sur $\widehat{\Omega}$ grâce au Théorème 1.3. La procédure de point fixe est alors quasiment identique à celle que nous avons présentée pour le tore, notamment grâce à la stabilité des solutions renormalisées de l'équation de Vlasov en domaine dépendant du temps. On parvient ainsi à obtenir pour tout $n \in \mathbb{N}$ une solution (f_n, u_n) initialisée par (une régularisation de) $(f_{\text{in}}, u_{\text{in}})$ au problème

$$\partial_t f_n + v \cdot \nabla_x f_n + \nabla_v \cdot [\chi_n(u_n - v)f_n] = 0, \quad (38)$$

$$\partial_t u_n + (u_n \star \varphi_n) \cdot \nabla u_n - \Delta u_n + \nabla p_n = -n \mathbf{1}_{\mathcal{P}}(u_n - \tilde{w}) + \int_{\mathbb{R}^3} \chi_n(v - u_n) \bar{f}_n, \quad (39)$$

$$\nabla \cdot u_n = 0, \quad (40)$$

la première équation étant satisfaite dans $\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^3$, avec la condition au bord (10), et les deux dernières dans $[0, T] \times \mathbb{R}^3$. On rappelle que le domaine de pénalisation \mathcal{P} et le prolongement \tilde{w} ont été introduits dans le paragraphe 1.3.1, et les troncatures χ_n dans la Section 1.2. Par ailleurs, ici $(\varphi_n)_n$ est une approximation de l'unité sur \mathbb{R}^3 et la convolution ne porte que sur la variable d'espace. Tout comme dans le cas du tore on dispose en plus d'une (in)égalité d'énergie approchant (12) et de laquelle on tire, entre autre,

$$(\nabla u_n)_n \in L^2(\widehat{\Omega}), \quad (\bar{u}_n)_n \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)). \quad (41)$$

Nous avons expliqué dans le paragraphe 1.3.1 que l'une des difficultés de la méthode de pénalisation est l'obtention de compacité pour la suite $(u_n)_n$. Une fois celle-ci obtenue, en utilisant la stabilité des solutions renormalisées nous serons en mesure de passer à la limite dans le système approché précédent et la condition au bord (9) sera récupérée comme dans le paragraphe 1.3.1.

La compacité est problématique pour la raison suivante : nous ne pouvons pas directement utiliser l'équation (39) pour contrôler $(\partial_t u_n)_n$ dans un espace de type $L^p(0, T; H^{-m}(\mathbb{R}^3))$ et invoquer le lemme d'Aubin-Lions standard, à cause du terme de pénalisation. La zone où nous contrôlons — faiblement — les oscillations en temps de $(u_n)_n$ est précisément $\widehat{\Omega}$, qui n'est pas un ouvert de type cylindrique, ce qui proscrit l'utilisation de ce résultat de compacité. Cette situation n'est pas inédite : elle se rencontre fréquemment dans l'étude d'un fluide en interaction avec une structure, voir par exemple [27, 52, 86, 107]. On trouvera dans ces références différentes méthodes pour récupérer de la compacité, plus ou moins générales et plus ou moins exigeantes sur la régularité du mouvement du domaine et sa vitesse w . Dans [A12] nous avons choisi d'utiliser le Théorème 4.4 (issu de la publication [A11]), que l'on présente en détail dans la Section 4.4 du Chapitre 4. Il s'agit d'un énoncé générique permettant de récupérer de la compacité pour une approximation de l'équation de Navier-Stokes incompressible dans un domaine non cylindrique. Pour l'appliquer, en plus des bornes (41) mentionnées précédemment, nous remarquons l'estimation suivante sur $(\partial_t u_n)_n$, pour un entier naturel m suffisamment grand,

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{\text{div}}(\widehat{\Omega}), \quad \left| \int_{\widehat{\Omega}} \partial_t u_n \cdot \psi \, dx \, dt \right| \lesssim \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha \psi\|_{L^2(\widehat{\Omega})}, \quad (42)$$

où la constante derrière \lesssim ne dépend ni de ψ ni de n . Il ne manque pour invoquer le Théorème 4.4 qu'un contrôle de $(u_n)_n$ sur $\widehat{\Gamma}$, que nous obtenons grâce à la convergence forte de $(u_n)_n$ vers \tilde{w} en dehors de $\widehat{\Omega}$, par continuité de l'opérateur de trace normale. Nous renvoyons à la Section A.4

de l'annexe pour une rapide introduction à cet opérateur, et à la Section 4.4 du dernier chapitre pour l'explication de son rôle dans le contrôle de $(u_n)_n$. Cette ultime étape de passage à la limite achève la preuve du théorème suivant, qui est le principal résultat de [A12].

Théorème 1.4. *Soit $(f_{\text{in}}, u_{\text{in}})$ une condition initiale admissible au sens de la Définition 1.1. Il existe au moins une solution faible (f, u) initialisée par $(f_{\text{in}}, u_{\text{in}})$ au système (6) – (8) considéré pour $(t, x) \in \widehat{\Omega}$ et $v \in \mathbb{R}^3$, satisfaisant les appartenances (23) – (25) et les conditions aux bords (9) – (10).*

Dans cet énoncé, la signification des conditions aux bords et initiales est contenue dans la formulation faible des équations ainsi que dans l'appartenance (25) pour le fluide. L'équation cinétique est satisfaite au sens de la Définition 1.2 pour le champ $G(t, x, v) := u(t, x) - v$ et l'équation fluide est satisfaite au sens de Leray *i.e.* avec des fonctions tests régulières, à divergence nulle (éliminant la pression), nulles sur $\widehat{\Gamma}$.

1.4 Aspects numérique : approximation et validation

Dans [T] est proposé un schéma numérique, basé sur une méthode d'éléments finis ALE pour le fluide (voir [130] pour une bonne introduction à celle-ci) et une méthode particulière pour l'aérosol, un cas spécifique de la méthode PIC adapté à l'équation de Vlasov (voir [47, 48]). Ce schéma a été implémenté dans un code C++ au sein de la bibliothèque LifeV¹, laquelle proposait des solveurs ALE mais aucun module pour la gestion d'un aérosol en interaction avec un fluide. Pour une présentation détaillée du schéma, nous renvoyons à [T] ou à [A9]. Nous rappellerons toutefois plus bas le fonctionnement de la méthode particulière, afin de décrire l'une des difficultés que nous avons rencontrée.

Dans [A9] nous avons cherché, en collaboration avec Laurent Boudin, Céline Grandmont et Alexander Lorz à valider numériquement ce schéma et son implémentation en nous basant sur les critères suivants :

- la comparaison des positions et vitesses des particules en fin de simulation avec une solution explicite du système.
- la stabilité de la vitesse des particules en sortie et du pourcentage de dépôt vis-à-vis du pas de temps ou de la finesse du maillage.

Le premier critère est considérablement limitatif car nous n'avons pas réussi à mettre en évidence de solution explicite au couplage (6) – (8) dans sa totalité, mais uniquement en négligeant la force de rétroaction des particules, en utilisant des solutions standard du système de Navier-Stokes considéré dans un cylindre (typiquement un flot de Poiseuille). Toutefois, nous sommes parvenus dans la Proposition 9 de [A9] à construire une solution explicite aux équations de Navier-Stokes dans un domaine dépendant du temps, initialement cylindrique (et dont le mouvement n'est pas une simple homothétie). L'idée consiste, par des arguments de symétrie, à construire un déplacement du domaine de tel sorte que l'opérateur de Navier-Stokes appliqué au fluide s'y annule pour tout temps. Ce déplacement est la solution d'une certaine équation différentielle et nous n'avons donc pas de liberté totale dans le choix du domaine $\widehat{\Omega}$,

1. Développée sous licence GPL collaborativement par quatre institutions : l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suisse), le Politecnico di Milano (Italie), Inria (France) et Emory University (États-Unis), voir <http://www.lifev.org/>.

mais ce résultat nous a été d'une grande utilité pour tester le code dans un domaine dépendant du temps. Il constitue, à notre connaissance, un premier exemple de solution explicite générique dans ce cadre.

Concernant le second critère, notre schéma et son implémentation ont montré un comportement très robuste en dehors d'une série de cas extrêmes pour lesquels nous suspectons l'existence d'une condition de type CFL. Pour préciser cela, rappelons qu'à la différence de la méthode des éléments finis, la méthode particulaire ne fournit pas une approximation de la densité f au point du maillage : elle consiste à l'approcher par une somme pondérée de masses de Dirac en position et vitesse, *i.e.* d'écrire

$$f(t, x, v) \simeq \sum_{p=1}^{N_{\text{num}}} \omega_p \delta_{x_p(t)} \otimes \delta_{v_p(t)}(x, v),$$

où $t \mapsto (x_p(t), v_p(t))$ sont les trajectoires dans l'espace des phases et N_{num} le nombre de particules numériques considérées, qui est *a priori* bien inférieur au nombre de particules que l'on souhaite effectivement simuler. L'équilibre se fait par les nombres positifs ω_p , qu'on appelle les *poids numériques* des particules.

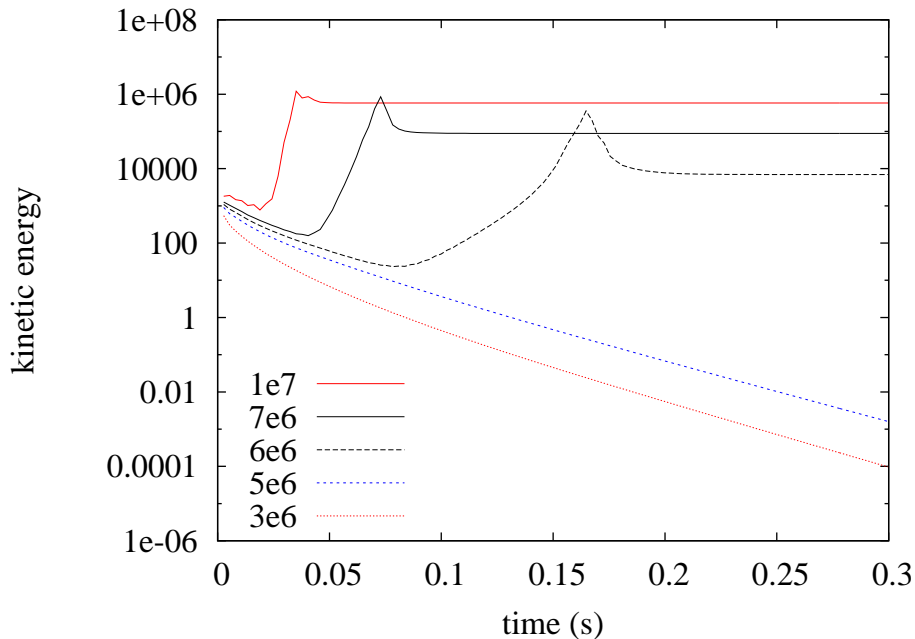


FIGURE 1.1 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique du système pour différents poids numériques avec $\Delta t = 0.0027$.

Choisir adéquatement un poids numérique pour un nombre de particules physiques donné est une difficulté classique dans l'élaboration d'une méthode particulaire efficace et c'est en faisant varier celui-ci que nous avons été confrontés à un phénomène d'instabilité qui semble, d'une manière ou d'une autre, également corrélé à la finesse du pas de temps. En effet, si ce dernier est trop grossier ou bien que les poids numériques sont trop élevés, la décroissance de l'énergie cinétique du système n'est plus vérifiée (voir Figure 1.1), contredisant l'analyse

formelle du système que nous avons effectuée dans le paragraphe 1.1.6, (voir notamment la Remarque 1.2). Cette singularité numérique peut être expliquée par le traitement explicite de la force de rétroaction du schéma proposé dans [T] : à chaque pas de temps, une fois les particules localisées, on calcule la force correspondante pour l’itération suivante du solveur Navier-Stokes. Il est important de souligner que cette difficulté est liée au couplage non linéaire entre les deux phases et se retrouve également au cœur de l’analyse mathématique du système. Puisqu’à chaque pas de temps il faut à nouveau localiser les particules, il ne semble pas possible d’impliciter d’avantage le calcul de la force de Brinkman. Les différents tests poursuivis dans [A9] suggèrent l’existence d’une condition de type CFL portant (entre autre) sur le produit $\omega_p \Delta t$, mais nous n’avons pas réussi à l’identifier précisément.

1.5 Perspectives

Le modèle présente une hypothèse de monodispersion en rayon qui reste questionnable pour le transport de particules au sein d’un milieu aussi humide que les voies respiratoires. Des variations significatives de la taille des particules lors de leur advection au sein du poumon ont en effet été constatées dans [152]. Avec Laurent Boudin, nous encadrons actuellement le stage de M2 de David Michel, dont l’objectif vise justement à écrire et étudier un modèle tenant compte de ce phénomène.

Concernant l’analyse mathématique du système de Vlasov-Navier-Stokes, de toutes les questions laissées en suspens, celle du comportement en temps long est probablement la plus pertinente. La mise en évidence d’un comportement monocinétique pour la phase dispersée serait par exemple une avancée considérable. Nous travaillons actuellement sur ce sujet avec Daniel Han-Kwan et Iván Moyano, dans un cadre périodique.

Enfin, la sensibilité du schéma vis-à-vis du poids numérique des particules et de la finesse du pas de temps que nous avons identifiée dans la Section 1.4 n’est pour l’instant pas du tout comprise. En complément de cette étude numérique, il serait très satisfaisant de pouvoir effectuer une analyse numérique de convergence rigoureuse laquelle exhiberait explicitement une condition CFL sur le terme conflictuel $\omega_p \Delta t$. Malheureusement, un tel scénario est pour l’instant totalement hors de portée, car même la convergence d’un schéma semi-discret (ou seule la phase dispersée serait approchée) semble encore trop difficile pour être abordée. Elle reviendrait en effet à étudier une limite de champ moyen pour une interaction très complexe entre les particules, alors même que le cas “standard” d’un système d’ordre 2 avec potentiel coulombien n’est pas encore traité, malgré de nombreuses tentatives [88, 89, 97, 137]. Il serait toutefois intéressant d’identifier une régularisation du système qui permette de justifier une telle limite, dans l’esprit de l’article pionnier [58] de Dobrushin. Mentionnons à ce titre [69], où le cas du couplage Vlasov-Fokker-Planck-Navier-Stokes est étudié, lequel constitue effectivement une forme de régularisation.

Systèmes fluide/cinétique

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'analyse mathématique de divers problèmes couplés fluide/cinétique. Cela inclut des variantes du système de Vlasov-Navier-Stokes que nous avons introduit dans le Chapitre 1, mais également des systèmes où l'interaction entre les deux phases n'est pas donnée par la force de traînée, ou bien pour lesquels le fluide n'est pas décrit par les équations de Navier-Stokes. Les systèmes présentés correspondent en général à un phénomène bien précis que nous expliciterons, mais plusieurs hypothèses simplificatrices nous éloigneront parfois de la pertinence physique du modèle. Nous commencerons par exemple, par une exploration du système de Vlasov-Navier-Stokes bidimensionnel alors que les seules dérivations connues de la force de Brinkman sont valides pour des particules sphériques en dimension 3. Cela n'enlève rien de l'intérêt mathématique des questions d'unicité et de comportement en temps long établies dans [P2] et [A16], en collaboration avec Olivier Glass, Daniel Han-Kwan, Évelyne Miot et Iván Moyano, d'autant que celles-ci ouvrent peut-être la voie à des généralisations en dimension 3. Nous présenterons ces résultats dans la Section 2.1. Nous aborderons ensuite dans la Section 2.2 une généralisation de la force de Brinkman que nous avons rigoureusement dérivée avec Matthieu Hillairet et Franck Sueur dans [P1]. Dans la Section 2.3, nous présenterons un modèle de spray intermédiaire où une partie de la phase dispersée se confond avec le fluide, introduit et étudié dans l'article [A8], en collaboration avec Saad Benjelloun et Laurent Desvillettes. Enfin, un modèle fluide/cinétique original avec interaction gyroscopique élaboré avec Franck Sueur dans [A6] sera présenté dans la Section 2.4.

Nous utiliserons dans ce chapitre les notations suivantes pour les moments d'une fonction de densité $f(t, x, v)$, en dimension $d = 2$ ou $d = 3$:

$$\rho_f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) \, dv, \quad (1)$$

$$j_f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) \, dv. \quad (2)$$

2.1 Le système de Vlasov-Navier-Stokes bidimensionnel

Nous reprenons donc le système de Vlasov-Navier-Stokes que nous avons introduit dans la Section 1.1 :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [(u - v)f] = 0, \quad (3)$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = j_f - \rho_f u, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (5)$$

Dans les deux paragraphes à venir nous étudierons ce système pour $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^2$, où Ω pourra tantôt être le tore plat \mathbb{T}^2 , le plan \mathbb{R}^2 ou encore un ouvert borné lipschitzien de celui-ci (en fait : un rectangle). Dans toutes ces situations, nous ne nous préoccupons pas de l'existence de solutions faibles, que nous considérerons comme acquise. En effet, dans tous ces cas la procédure explicitée dans la Section 1.2 du Chapitre 1 se transpose à quelques modifications près ; il s'agit tout au plus de traiter les conditions aux bords, ce que nous avons déjà largement abordé dans la Section 1.3 (avec un domaine dépendant du temps, qui plus est). Il s'agit donc de solutions analogues à celles fournies par le Théorème 1.1 (solution de Leray pour l'équation fluide, renormalisée pour l'équation cinétique). C'est pour cette raison que dans la suite, lorsque nous parlerons de *conditions initiales admissibles*, cela sera toujours au sens de la Définition 1.1 du Chapitre 1.

2.1.1 Unicité des solutions faibles

Les solutions faibles fournies par le Théorème 1.1 présenté au Chapitre 1 sont-elles uniques ? En conservant cette gamme de régularité, il est déraisonnable de s'intéresser à ce problème en trois dimensions : en prenant une condition initiale nulle pour f on voit que l'unicité est au moins aussi difficile à obtenir que celle des équations de Navier-Stokes. Un objectif plus raisonnable est de considérer le même couplage et la même régularité de solutions en dimension 2, puisque l'unicité des solutions à la Leray est alors un fait établi. L'unicité des solutions renormalisées ne pose pas de problème, et la difficulté vient donc du *couplage non linéaire* entre ces deux équations.

En collaboration avec Daniel Han-Kwan, Évelyne Miot et Iván Moyano, nous avons démontré dans [P2] l'unicité des solutions faibles au système (3) – (5) en dimension 2. En plus de l'admissibilité des conditions initiales, nous devons supposer une décroissance en vitesse pour la donnée initiale de la composante cinétique.

Théorème 2.1. *Soit $\Omega = \mathbb{T}^2$ ou $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $q > 4$. Pour toute donnée initiale admissible $(f_{\text{in}}, u_{\text{in}})$ au sens de la Définition 1.1 satisfaisant $(x, v) \mapsto (1 + |v|^q) f_{\text{in}}(x, v) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2)$, il existe une unique solution faible globale au système (3) – (5) considéré sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^2$.*

Remarque 2.1. *L'hypothèse de décroissance (le moment supposé en v) n'est pas optimale, nous renvoyons à [P2] pour une hypothèse moins restrictive.*

La première étape dans cette preuve d'unicité est de démontrer que les solutions sont plus régulières (ou intégrables) qu'il n'y paraît. Ce phénomène de régularisation provient bien sûr de l'équation de Navier-Stokes et est transféré à l'équation cinétique grâce à l'hypothèse

supplémentaire sur la donnée initiale. Pour décrire précisément ce phénomène, nous introduisons la notation suivante pour les moments (en vitesse) de f ($k \in \mathbb{N}$)

$$m_k f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} |v|^k f(t, x, v) dv,$$

ainsi que le module de continuité concave $\Psi(\tau) := \min(\tau |\ln \tau|, e^{-1})$ pour exprimer la log-lipschitzianité de u .

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, toute solution faible (f, u) du système (3) – (5) satisfait les estimations suivantes :*

(i) $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Omega))$;

(ii) $\forall k \in \{0, 1, 2\}$, $m_k f \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Omega))$;

(iii) Il existe $\gamma \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ telle que, pour presque tout $t \geq 0$ et $x, y \in \Omega$ on ait

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq \gamma(t) \Psi(|x - y|).$$

Le premier point nous a été inspiré d'un résultat de Chemin et Gallagher sur l'équation de Navier-Stokes incompressible bidimensionnelle [28] et repose sur des estimées paraboliques pour l'équation de Stokes. Il faut pour l'écrire un contrôle sur la force de Brinkman présente dans le membre droite de l'équation (4), que l'on obtient grâce à l'estimation d'énergie. Une fois cette estimation obtenue sur u , le point (ii) provient directement de l'hypothèse de décroissance sur la donnée initiale : dans le cas extrême d'une donnée initiale à support compact, (i) permet de montrer que la solution f conserve cette propriété au cours du temps (on n'utilise ici uniquement $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Omega))$).

Nous nous ramenons ainsi à démontrer l'unicité dans une classe plus restreinte de solutions possibles. Considérons donc deux solutions hypothétiques (f_1, u_1) et (f_2, u_2) vérifiant (i), (ii) et (iii) ci-haut. Si on introduit la différence $w := u_2 - u_1$, celle-ci vérifie

$$\partial_t w + (u_1 \cdot \nabla) w - \Delta w + \nabla p = -(w \cdot \nabla) u_2 - \rho_{f_1} w + \int_{\mathbb{R}^2} (f_1 - f_2)(v - u_2) dv.$$

Si on multiplie par w cette équation dans l'espoir de clore une estimation de type Grönwall, on observe que termes du membre de gauche sont inoffensifs. Le second terme du membre de droite possède le bon signe (puisque $f_1 \geq 0$) et le premier — indépendant du couplage — est traité comme pour l'unicité de l'équation Navier-Stokes bidimensionnelle considérée seule (par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). Le cœur du problème est donc la gestion du terme suivant (avec on le rappelle $\Omega = \mathbb{T}^2$ ou $\Omega = \mathbb{R}^2$)

$$A(t) := \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^2} (f_1 - f_2)(v - u_2) \cdot w dv dx. \quad (6)$$

L'estimation à la Grönwall visée est quadratique en w . Il nous faut donc quelque part exprimer que $A(t)$ est bel et bien une quantité “quadratiquement” petite en exploitant la proximité de f_1 et f_2 . Nous allons pour cela introduire une fonctionnelle inspirée du travail de Loeper [115] dans sa preuve d'unicité pour le système de Vlasov-Poisson. Le point (iii) du Lemme 2.1 s'applique ici à u_1 et u_2 et suffit à vérifier une condition de type Osgood pour ces champs de

vecteurs : on peut ainsi définir les courbes caractéristiques $Z_k^t(x, v) = (X_k^t(x, v), V_k^t(x, v))$ pour $k = 1, 2$ associées aux systèmes différentiels suivants

$$\begin{cases} \dot{X}_k^t = V_k^t, \\ \dot{V}_k^t = u_k(t, X_k^t) - V_k^t, \\ Z_k^0(x, v) = (x, v). \end{cases}$$

Remarque 2.2. *Le cadre Osgood ne permet que de produire des solutions (absolument) continues, les équations différentielles précédentes sont donc à comprendre au sens faible ou sous forme intégrée. Cette remarque est valable pour la suite de ce paragraphe.*

On définit alors, suivant Loeper [115],

$$Q(t) := \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) |Z_1^t(x, v) - Z_2^t(x, v)|^2 dx dv.$$

Cette quantité mesure l'écart entre f_1 et f_2 ramené à la distance séparant les flots correspondants. L'espoir est que l'ajout de $Q(t)$ à l'estimation d'énergie permette de contrôler le terme $A(t)$ défini en (6), *i.e.* que la fonctionnelle $H(t) := Q(t) + \|w(t)\|_2^2$ (initialement nulle) vérifie une estimation de Grönwall (possiblement sur-linéaire). La première étape est de s'assurer que $Q(t)$ ne pollue pas notre estimation avec d'autres termes que nous ne savons pas gérer. Ce point est réglé par le résultat suivant, dont la preuve suit l'analyse de Loeper. Nous pouvons la reproduire grâce au point (iii) du Lemme 2.1.

Lemme 2.2. *Il existe $T_0 > 0$ et une fonction positive $\gamma \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ tels qu'on ait, sur $[0, T_0]$,*

$$Q'(t) \lesssim \gamma(t) [Q(t) + \Psi(Q(t))] + \|w(t)\|_2^2.$$

Remarque 2.3. *On montre que T_0 , γ et la constante derrière \lesssim ne dépendent que de quantités contrôlées au cours du temps (celles données par le Lemme 2.1). L'égalité $(f_1, u_1) \equiv (f_2, u_2)$ que l'on obtient au départ sur $[0, T_0]$ se propage donc sans problème.*

Dans [115] Loeper montre que sous une hypothèse de borne uniforme sur les premiers moments de $f_1(t)$ et $f_2(t)$, il est possible de contrôler leur écart, dans une norme de Sobolev négative, par la distance de Wassertein quadratique entre $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Il montre ensuite que cette dernière est en fait majorée par la fonctionnelle Q précédente. Dans notre cas cette approche ne permet de conclure qu'à un résultat de régularité de type fort/faible, à cause de la non linéarité de la force de réaction (par opposition à la linéarité du second membre de l'équation elliptique dans Vlasov-Poisson). Nous avons donc été amenés à utiliser une autre méthode : nous troquons l'utilisation de la distance de Wasserstein pour celle de la fonction maximale de Hardy-Littlewood.

Revenons donc au terme problématique (6). En utilisant les courbes caractéristiques pour se ramener à la donnée initiale commune (et en omettant quelques variables par souci de clarté), il s'écrit

$$\begin{aligned} A(t) = & \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) w(X_1^t) \cdot (V_1^t - V_2^t + u_2(X_2^t) - u_2(X_1^t)) dv dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) [w(X_1^t) - w(X_2^t)] \cdot (V_2^t - u_2(X_2^t)) dv dx. \quad (7) \end{aligned}$$

En utilisant la régularité log-lipschitz de u_2 et le contrôle des moments fourni par le point (ii) du Lemme 2.1, la première intégrale double peut être gérée de manière similaire à la dynamique de Q dans le Lemme 2.2. Pour la seconde, il ne faut surtout pas utiliser l'estimation log-lipschitz pour la majorer : les termes produits doivent conserver une taille "quadratique" et nous ne disposons d'aucune estimation de petitesse de w en norme log-lipschitz. C'est précisément à cet endroit que la fonction maximale de Hardy-Littlewood nous tire d'affaire. Notre utilisation de cet outil versatile est directement inspirée des travaux [41] de Crippa et De Lellis sur l'unicité du flot associé à un champ de vecteur de régularité Sobolev, *via* une forme "ponctualisée" de l'inégalité des accroissements finis. Nous donnons une définition de la fonction maximale dans la Section A.3 de l'Annexe A et énonçons les propriétés utilisées dans la Proposition A.1. À l'aide de cette dernière, et par l'inégalité de Young, la deuxième intégrale présente dans (7) produit d'une part un terme de la forme $|X_1^t - X_2^t|^2$ qui sera "grönwallisé" par la fonctionnelle $Q(t)$, et un autre que l'on peut choisir de la forme $\varepsilon \|\nabla w(t)\|_2^2$, afin de l'absorber par la dissipation qu'offre l'estimation d'énergie.

2.1.2 Comportement en temps long

Comment se comportent en temps long les solutions du système (3) – (5) ? Existents-ils des états stationnaires qui les attirent ? Les théorèmes présentés dans ce paragraphe répondent à ces questions dans un cadre géométrique bien choisi dont nous allons justifier le choix en commençant par explorer le cas instructif de $\Omega = \mathbb{R}^2$. Si on regarde uniquement l'équation de Vlasov amortie suivante

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_v \cdot (vf) &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ f(0, x, v) &= f_{\text{in}}(x, v) \text{ sur } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{8}$$

celle-ci peut se résoudre explicitement et la solution est donnée par

$$f(t, x, v) = e^{2t} f_{\text{in}}(x - (e^t - 1)v, e^t v).$$

On observe donc le comportement monocinétique suivant (convergence vague)

$$f(t, x, v) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \theta_{\text{in}} \otimes \delta_{v=0},$$

avec

$$\theta_{\text{in}}(x, v) = \int_{\mathbb{R}^2} f_{\text{in}}(x - v, v) dv.$$

Deux faits peuvent être déduits de ce calcul.

- la fonction nulle est la seule solution stationnaire localement intégrable de l'équation de Vlasov amortie (8) ;
- il s'agit d'une solution instable au sens où une condition initiale non nulle produit une solution qui se singularise en temps grand.

Revenons au système couplé Vlasov-Navier-Stokes, considéré sur \mathbb{R}^2 . La linéarisation de ce système au voisinage de l'équilibre trivial $(f, u) = (0, 0)$ est l'équation (8) couplée à une équation de Stokes forcée. Cela suggère que l'analyse précédente persiste d'une manière ou d'une autre et que, pour des données initiales petites, la composante cinétique du système se singularise en une masse de Dirac. Il existe très peu de résultats rigoureux en ce sens, et

ils sont partiels. Sous des hypothèses *a priori* très fortes, Choi et Kwon ont montré dans [36] un comportement monocinétique pour la phase dispersée d’un système de Vlasov-Navier-Stokes : les vitesses des particules tendent à s’aligner sur celle du fluide. Bien avant, Jabin avait étudié dans [95] un couplage plus inoffensif mais en démontrant rigoureusement l’apparition d’un comportement monocinétique. Notons que dans le cas d’une équation de Vlasov-Fokker-Planck, l’ajout d’un terme dissipatif change complètement la situation : on a (pour des données initiales bien préparées) convergence vers un équilibre maxwellien (voir par exemple [A2]), la phase dispersée s’équilibre d’elle-même et on peut même s’attendre à ce qu’elle transfère cet amortissement au fluide, fût-il parfait (voir [A5]).

Dans [A16] nous avons cherché avec Olivier Glass et Daniel Han-Kwan à identifier un cadre géométrique permettant de construire des solutions stationnaires non singulières (*i.e.* dans L^1_{loc}) pour le système (3) – (5). L’idée est la suivante : le caractère monocinétique de l’équilibre apparaît dans l’analyse précédente car une particule dispose de *toute une vie* pour subir l’influence du fluide. Si, au lieu de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{T}^2 (qui sont les domaines considérés précédemment) on envisage un domaine à bord, un espoir est de mettre en évidence une configuration dans laquelle les particules sortent du domaine *avant* d’avoir été trop guidées par le fluide.

Nous avons considéré une géométrie simple, un rectangle

$$\Omega = [-L, L] \times [-1, 1], \quad (9)$$

avec des conditions d’absorption sur les bords horizontaux pour l’équation cinétique et une zone d’injection (correspondant à une donnée au bord entrante). Le fluide, lui, est soumis à des conditions de Dirichlet correspondant à un écoulement de Poiseuille (celui-ci est défini plus bas). Cette configuration est représentée sur la Figure 2.1.

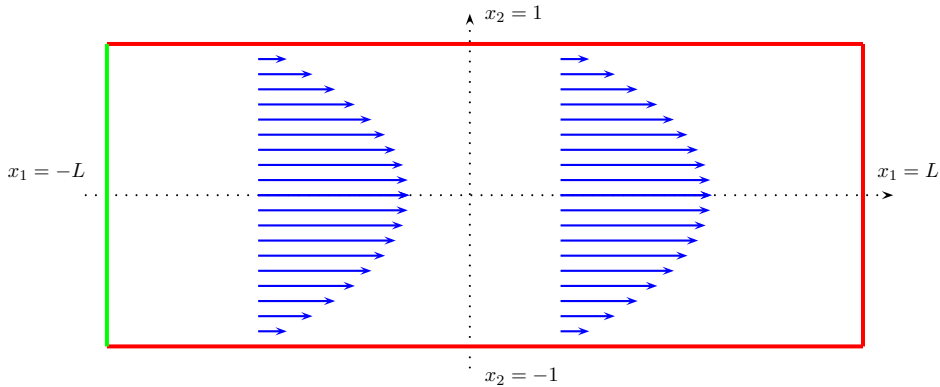


FIGURE 2.1 – *En vert : injection des particules (condition au bord entrante) ; en rouge : absorption ou sortie des particule ; en bleu : profil de Poiseuille.*

Afin de formaliser cela, introduisons le vecteur normal sortant $\mathbf{n}(x)$ (prolongé par 0 sur les coins de $\partial\Omega$ où il n’est pas défini) et les sous-ensembles “entrants”, “sortants” et “tangents” de l’espace des phase :

$$\Sigma^- := \{(x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{n}(x) \cdot v < 0\}, \quad (10)$$

$$\Sigma^+ := \{(x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{n}(x) \cdot v > 0\}, \quad (11)$$

$$\Sigma^0 := \{(x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{n}(x) \cdot v = 0\}. \quad (12)$$

Le flot de Poiseuille u_p d'intensité $u_{\max} > 0$ est le champ de vecteurs

$$u_p(x_1, x_2) = u_{\max}(1 - x_2^2, 0). \quad (13)$$

On note que ce champ est une solution stationnaire de l'équation de Navier-Stokes incompressible.

Les conditions aux bords considérées sont les suivantes pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$u(t, x) = u_p(x) \text{ pour } x \in \partial\Omega, \quad (14)$$

$$f(t, x, v) = \psi(x, v) \text{ pour } (x, v) \in \Sigma^-, \quad (15)$$

où ψ a son support en x concentré sur la zone d'injection (en vert sur la Figure 2.1) et un support compact en vitesse. Énonçons un premier résultat établi dans [A16], sur lequel nous ne nous attarderons pas.

Théorème 2.2. *Pour toute condition initiale admissible pour le système (3) – (5) considéré sur le domaine Ω défini en (9) et les conditions aux bords (14) – (15), il existe des solutions faibles globales.*

Afin de présenter le reste des résultats obtenus dans [A16], qui constituent le cœur de notre travail, nous allons d'abord introduire une *condition de sortie géométrique* (notée par la suite EGC pour *Exit Geometric Condition*) sur les champs de vitesse fluide, laquelle imposera aux trajectoires des particules une sortie oblique du domaine en un temps fini (prescrit). Commençons par rappeler le système différentiel vérifié par les courbes caractéristiques associées à l'équation cinétique et introduire une notation pour celles-ci. Pour $(s, t, x, v) \in \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \times \mathbb{R}^2$ on note $Z_{s,t}(x, v) := (X_{s,t}(x, v), V_{s,t}(x, v))$ la valeur à l'instant t de la solution du système

$$\begin{cases} \dot{X} = V, \\ \dot{V} = u(t, X) - V, \\ (X, V)|_{t=s} = (x, v), \end{cases}$$

et on introduit le temps de sortie du domaine Ω :

$$\tau^+(s, x, v) := \inf\{t > s : X_{s,t}(x, v) \notin \overline{\Omega}\}.$$

Notre condition de sortie EGC, inspirée de la condition de contrôle géométrique de Bardos, Lebeau et Rauch (voir [10]) prend alors la forme suivante

Définition 2.1. *Soit K un compact de Σ^- (premier cas) ou bien de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$ (second cas). On dit que $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \text{Lip}(\mathbb{R}^2))$ satisfait EGC en temps T*

- dans le premier cas si

$$\sup_{(s,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times K} (\tau_+(s, x, v) - s) < T \text{ et } Z_{s,\tau_+(s,x,v)}(x, v) \in \Sigma^+.$$

- dans le second si

$$\sup_{(x,v) \in K} \tau_+(0, x, v) < T \text{ et } Z_{0,\tau_+(0,x,v)}(x, v) \in \Sigma^+.$$

L'EGC précédemment définie assure donc que les courbes caractéristiques issues d'un compact donné par conditions aux bords ou initiales ne restent pas plus qu'un temps T dans le domaine Ω et sortent de celui-ci transversalement ; on renvoie à la Figure 2.2 pour une illustration. Dans le cas particulier d'un flot de Poiseuille comme (13) (et au voisinage duquel nous construirons notre solution stationnaire), les calculs peuvent se faire explicitement et on peut vérifier que si $|x_2 + v_2|$ ne vaut jamais 1 lorsque (x, v) parcourt le compact choisi, la condition est satisfaite en un certain temps T .

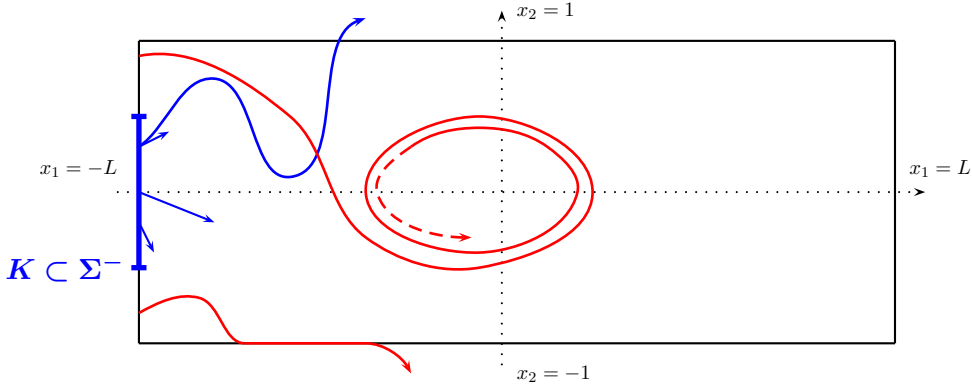


FIGURE 2.2 – Les courbes représentent des trajectoires associées à un champ u satisfaisant l'EGC par rapport au compact $K \subset \Sigma^-$, lequel correspond à une zone d'injection et une gamme de vitesses précises. La courbe bleue est une trajectoire admissible : elle sort transversalement du domaine en un temps T ; les courbes rouges sont précisément les cas pathologiques que l'on cherche à éviter par l'EGC : sortie tangentielle ou temps de vie infini.

Pour un champ quelconque, il n'est pas du tout évident d'expliciter des compacts vis-à-vis desquels une EGC serait vérifiée. À défaut, on dispose du résultat de stabilité suivant.

Lemme 2.3. *Soit $T > 0$ et u^\sharp un champ stationnaire vérifiant EGC en temps T par rapport à un compact K . Soit $T^* > T$. Il existe $\delta > 0$ tel que tout $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \text{Lip}(\Omega))$ vérifiant*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_t^{t+T^*} \|u(s) - u^\sharp\|_\infty ds \leq \delta,$$

satisfait automatiquement EGC en temps T^ par rapport à K .*

Ce résultat est fondamental dans notre approche puisqu'il nous permet, en nous plaçant par exemple dans un voisinage approprié d'un flot de Poiseuille, de ne manipuler que des caractéristiques ayant un temps de vie fini à l'intérieur de Ω . En remontant les trajectoires jusqu'à leur origine au bord nous pouvons donner une formule explicite de solution stationnaire à l'équation de Vlasov associée à un champ de ce type, ce qui constitue la première étape de notre procédure de point fixe, la seconde étant de résoudre une équation de Stokes appropriée. Afin d'utiliser le théorème de Schauder il nous a fallu entre autre utiliser une estimation *a priori* (conséquence de la borne uniforme sur les temps de vie) et dégager un peu de compacité (propriétés elliptiques de l'opérateur de Stokes). Toute cette cuisine se déroule dans un voisinage (au sens du Lemme 2.3) d'un flot de Poiseuille, afin de garantir l'EGC. Sous une forme (un peu) plus précise, nous établissons ainsi le résultat suivant.

Théorème 2.3. *On suppose que u_p satisfait une EGC par rapport au support (compact) de ψ et que cette dernière fonction est lipschitzienne. Sous une condition de petitesse sur ψ et l'intensité u_{\max} du flot de Poiseuille, il existe une solution stationnaire (\bar{f}, \bar{u}) lipschitzienne et non triviale ($\bar{f} \neq 0$) pour le système (3) – (5) considéré sur le domaine Ω défini en (9) et les conditions aux bords (14) – (15).*

Avant ce résultat, et à notre connaissance, il n'existait pas dans la littérature d'exemple non trivial d'équilibre pour un problème couplé fluide/cinétique, sans terme dissipatif pour la phase dispersée. En ce qui concerne la stabilité de ces équilibres, elle est avérée localement et asymptotiquement, sous une condition de petitesse de ceux-ci (comme précédemment, nous n'explicitons pas cette hypothèse), il s'agit du deuxième résultat principal de [A16] :

Théorème 2.4. *On suppose que u_p satisfait EGC vis-à-vis du support (compact) de ψ et on considère un équilibre (\bar{f}, \bar{u}) que l'on suppose suffisamment petit. Soit (f_0, u_0) une condition initiale admissible suffisamment proche de (\bar{f}, \bar{u}) pour laquelle u_p satisfait EGC par rapport au support (compact) de f_0 . Alors toute solution faible au système (3) – (5) initialisée par (f_0, u_0) converge en norme L^2 vers (\bar{f}, \bar{u}) lorsque $t \rightarrow +\infty$, avec un taux exponentiel.*

L'un des points clé de la preuve est de réussir à vérifier qu'au cours du temps, si on note (f, u) la solution non stationnaire considérée, la vitesse fluide u reste suffisamment proche (au sens du Lemme 2.3) de \bar{u} pour que l'EGC soit également vérifiée par u , aussi bien concernant la condition initiale que la condition au bord. Pour comprendre en quoi l'EGC est cruciale dans notre approche, introduisons les écarts

$$\hat{f} := f - \bar{f}, \quad \hat{u} := u - \bar{u},$$

si bien que \hat{f} vérifie l'équation

$$\partial_t \hat{f} + v \cdot \nabla_x \hat{f} + \nabla_v \cdot [(u - v)\hat{f}] = -\hat{u} \cdot \nabla_v \bar{f}. \quad (16)$$

Si l'on s'est assuré que les courbes caractéristiques ne restent pas dans le domaine plus longtemps qu'un temps T fixé, au-delà de celui-ci la formule de représentation explicite de la solution à l'équation de transport (16) efface une partie de sa mémoire. Plus précisément on peut écrire, pour $t > T$

$$\hat{f}(t, x, v) = \int_{t-T}^t G(t, x, v, s) ds,$$

où G est une fonction directement reliée au terme source apparaissant dans (16), de sorte que l'on obtient l'estimation suivante

$$\|\hat{f}(t)\|_2 \lesssim \|\nabla_v \bar{f}\|_\infty \int_{t-T}^t \|\hat{u}(s)\|_2 ds.$$

où la constante associée à \lesssim ne dépend que de T , u_p , ψ et f_0 . En exploitant cette dernière inégalité dans une estimation d'énergie sur \hat{u} on est en mesure d'écrire une estimation de la forme

$$\frac{d}{dt} \|\hat{u}(t)\|_2 + \|\hat{u}(t)\|_2 \lesssim \|\nabla_v \bar{f}\|_\infty \int_{t-T}^t \|\hat{u}(s)\|_2 ds.$$

Cette inégalité différentielle “à retard” nous permet alors de conclure grâce à un lemme de Grönwall du même type :

Lemme 2.4. *Si $\alpha < T$ et que $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ vérifie pour $t > T$*

$$y'(t) + y(t) \leq \alpha \int_{t-T}^t y(s) \, ds,$$

alors $y(t) = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-\lambda t})$ pour un certain $\lambda > 0$.

2.1.3 Perspectives

Pour l’unicité établie dans le paragraphe 2.1.1, comme on l’a expliqué précédemment il est illusoire de souhaiter prolonger le résultat à la dimension 3 en l’état ; aussi essayons-nous avec Daniel Han-Kwan et Iván Moyano de retrouver le cadre offert par la théorie de Fujita-Kato (existence et unicité globales pour données petites). En parallèle, nous cherchons à rendre rigoureuse l’analyse — formelle — que nous avons esquissée au début du paragraphe 2.1.2, afin de montrer qu’il existe bel et bien un comportement monocinétique pour la phase dispersée, dans le cas d’un domaine sans bord. À notre connaissance il n’existe encore aucune preuve de ce résultat, en dehors de l’article [36], lequel repose sur une hypothèse de régularité très forte dont on ne sait pas encore si elle est vérifiée pour les solutions faibles du système.

2.2 Généralisation de la force de Brinkman

Peu de travaux abordent la dérivation rigoureuse du système de Vlasov-Navier-Stokes et les résultats y afférents sont en général partiels. L’une des premières étude dans cette direction est l’article [54] de Desvillettes, Golse et Ricci dans lequel la force de Brinkman résultante d’un nuage de particules sphériques est dérivée rigoureusement dans un régime non inertiel, dans la limite d’un nombre infini de particules infinitésimales. Le point de départ est donc l’équation de Stokes posée dans $\Omega \setminus \mathcal{N}$ où Ω est un ouvert régulier et \mathcal{N} est l’ensemble des particules. L’analyse développée dans [54] reprend les arguments d’homogénéisation utilisés dans [2] (l’origine de l’approche provenant de [118] et [38] dans le cas du laplacien), où Allaire identifie un *ratio* critique entre la taille des cavités et leurs distance minimales relatives pour assurer l’apparition du fameux “terme étrange”, selon l’appellation de Ciioranescu et Murat. Si la densité des perforations dépasse ce *ratio*, l’équation limite se transforme en un problème de Darcy et dans le cas inverse on récupère le problème de Stokes, sans terme source. Les conditions aux bords des obstacles considérées dans [2] sont homogènes : plutôt que des particules en mouvement il s’agit de trous (d’où le système de Darcy dans le cas d’une densité élevée). Ceci constitue la première différence entre [2] et [54] car dans ce dernier travail, la vitesse au bord de chaque cavité est non nulle, et correspond à la vitesse de la particule en question. La seconde différence avec [2] est la distribution des particules en espace, qui n’est plus considérée périodique. C’est dans ce cadre, en faisant tendre le nombre de particules vers l’infini et leurs tailles vers 0, que Desvillettes, Golse et Ricci dérivent rigoureusement le système de Stokes-Brinkman. Avec Matthieu Hillairet et Franck Sueur nous nous sommes intéressés dans [P1] à une asymptotique de ce type mais en considérant des particules de formes arbitraires, non nécessairement sphériques, et en incluant dans leur mouvement une composante de rotation. Le terme source que l’on obtient à la limite généralise la force de Brinkman dans le cas d’un aérosol “polydispersé en forme”. L’approche développée dans [54] était inopérante pour traiter cette généralisation, et nous avons donc suivi l’alternative proposée par Hillairet dans [90] (qui ne considérerait aussi que des particules sphériques). Mentionnons au passage deux contributions

récentes sur le sujet : [123] qui fournit une estimée quantitative en norme L^p de la convergence obtenue dans [90], et l'article [25] où le cas de particules disposées aléatoirement est considéré. Citons enfin [69], même si le résultat principal démontré ne peut pas être considéré comme une dérivation d'un système fluide/cinétique puisque le point de départ (source singulière pour l'équation fluide) n'est pas vraiment plus justifié que le modèle limite. Toutefois, ce type de résultat peut avoir un intérêt dans le cadre de la justification de méthodes numériques (de type PIC), comme nous l'avons évoqué dans la Section 1.4 du Chapitre 1.

2.2.1 Le système

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné régulier. Soient $(B_i^N)_{i=1}^N$ des compacts réguliers (disjoints) et simplement connexes tous contenus dans Ω ; ces ensembles représentent le nuage de particules rigides. On suppose l'existence d'une constante R_0 (indépendante de N, i) et des matrices $Q_i^N \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$B_i^N = h_i^N + \frac{1}{N} Q_i^N \mathcal{B}_i^{0,N}, \quad (17)$$

où $\mathcal{B}_i^{0,N} \subset B(0, R_0)$ pour tout i . L'ensemble $\mathcal{B}_i^{0,N}$ représente la forme de la i -ième particule alors que la matrice Q_i^N encode la rotation subie par celle-ci vis-à-vis de cette configuration d'origine. Par la suite on note $\mathcal{B}_i^N = Q_i^N \mathcal{B}_i^{0,N}$ pour simplifier. Introduisant le domaine

$$\Omega^N := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N B_i^N,$$

nous nous intéressons au système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u^N + \nabla p^N = 0, \\ \operatorname{div} u^N = 0, \end{cases} \quad \text{sur } \Omega^N, \quad (18)$$

associé aux conditions aux bords

$$\begin{cases} u^N(x) = v_i^N + \omega_i^N \times (x - h_i^N), & \text{sur } \partial B_i^N, \\ u^N(x) = 0, & \text{sur } \partial \Omega, \end{cases} \quad (19)$$

pour des N -uplets fixés $(v_i^N)_{i=1}^N$ et $(\omega_i^N)_{i=1}^N$ dans $(\mathbb{R}^3)^N$. Un champ u^N satisfaisant les conditions (19) sera par la suite systématiquement prolongé à l'intérieur de chaque cavité B_i^N par l'expression de sa valeur au bord de celle-ci. On vérifie que l'on définit ainsi un élément de $H_0^1(\Omega)$, que l'on ne différenciera pas de u^N .

L'existence et l'unicité d'une solution u^N au problème précédent dans un cadre fonctionnel bien choisi est standard et rappelée dans une section dédiée de [P1]. Afin d'explorer le problème plus délicat de l'asymptotique $N \rightarrow +\infty$, il nous faut introduire un opérateur particulier, extrait de la *matrice de résistance de Stokes* qui est l'objet qu'on lui préfère en général dans la littérature (voir [P1] ou [148] pour une référence plus ancienne par exemple).

2.2.2 L'opérateur de Stokes et la mesure empirique

On se donne un compact simplement connexe \mathcal{B} centré en 0 (typiquement l'un des ensembles précédents \mathcal{B}_i^N) et pour $\ell, \omega \in \mathbb{R}^3$, on considère la solution (u, p) au problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}$ avec la condition au bord rigide $u = \ell + \omega \times x$ sur $\partial\mathcal{B}$. Si \mathcal{B} représente un solide immergé, celui-ci exerce au niveau de sa frontière une force $\mathbb{F}(\ell, \omega) \in \mathbb{R}^3$ surfacique sur le fluide, laquelle s'exprime ainsi

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \Sigma(u, p)(x) \mathbf{n}(x) d\sigma(x),$$

où \mathbf{n} est la normale (intérieure au solide) définie sur la frontière $\partial\Omega$, σ la mesure surfacique sur celle-ci et $\Sigma(u, p)$ le tenseur des contraintes (on note $D(u)$ pour la partie symétrique de ∇u) :

$$\Sigma(u, p) = 2D(u) - p\mathbb{I}_3. \quad (20)$$

De la linéarité du problème de Stokes découle celle de ce qu'on nous appellerons dorénavant *l'opérateur de Stokes* $\mathbb{F} : (\ell, \omega) \mapsto \mathbb{F}(\ell, \omega)$, que l'on peut identifier à un élément de $M_{3,6}(\mathbb{R})$. Nous utiliserons également par la suite la sous-matrice $\mathbb{M}_{\mathbb{F}}$ correspondant à $\ell \mapsto \mathbb{F}(\ell, 0)$.

La mesure empirique que nous cherchons à définir est l'objet qui doit synthétiser le comportement des particules, en prenant en compte l'ensemble des paramètres de celles-ci qui ont d'une manière ou d'une autre une influence durable sur le fluide lors de l'asymptotique considérée. Il semble ainsi naturel que cette mesure prenne compte de la position du centre de masse h_i de chaque particule, de sa vitesse de translation v_i et de sa vitesse angulaire ω_i . Mais comment garder une trace de la *forme* de chaque particule puisque nous avons laissé une liberté sur celle-ci ? Cela se fera précisément par les opérateur de Stokes $\mathbb{F}_{\mathcal{B}_i^N}$ associés à chaque particule.

La mesure empirique que nous considérons est ainsi définie par la formule

$$S^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{h_i^N, v_i^N, \omega_i^N, \mathbb{F}_{\mathcal{B}_i^N}}. \quad (21)$$

Il s'agit d'une mesure de probabilité sur l'espace $\Omega \times E$ où

$$E := \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times M_{3,6}(\mathbb{R}).$$

Le comportement asymptotique du nuage de particule peut alors être décrit par une convergence adéquate de la suite $(S^N)_N$.

2.2.3 Hypothèses et énoncé

On considère le jeu d'hypothèses suivant

Hypothèse 2.1. *Borne uniforme :*

$$\sup_N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ |v_i^N|^2 + \left| \frac{1}{N} \omega_i^N \right|^2 \right\} < \infty, \quad (22)$$

Hypothèse 2.2. *Dilution :*

$$\delta^N := \inf_{i \neq j} |h_i^N - h_j^N| \geq \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}, \quad \inf_i \text{dist}(h_i^N, \partial\Omega) \geq \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}. \quad (23)$$

L'Hypothèse 2.2 traduit une borne sur l'énergie du nuage de particules considéré et semble naturelle dans une perspective de passage à la limite. La seconde hypothèse (où l'on pourrait remplacer le numérateur 1 par une constante positive arbitraire) l'est beaucoup moins, mais reste toutefois compatible avec les régimes de dilution pour la sédimentation étudiés dans [92, 96]. Présente également dans [54, 90], cette hypothèse reste la principale obstruction à l'inclusion d'une dynamique pour les particules dans cette analyse : si on part d'une telle configuration, il n'y a *a priori* pas de raison que cette dilution se propage aux temps ultérieurs (même petits). Notons que Hillairet propose dans [90] une relaxation considérable de cette contrainte, en autorisant plusieurs particules à coexister dans une cellule de taille $1/N^{1/3}$ mais en imposant un contrôle uniforme sur leur nombre. Bien que justifiée d'un point de vue probabiliste dans [25] — au sens où ces configurations sont “pleines” dans l'espace des possibles — cette réduction ne résout pas le problème de la propagation en temps plus long.

L'Hypothèse (2.1) et la borne uniforme supposée sur les ensembles \mathcal{B}_i^N permettent de borner certains moments de $(S^N)_N$. À extraction près, on peut ainsi se ramener aux convergences suivantes pour la mesure empirique, pour toutes fonctions tests vectorielles $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \int_E \mathbb{F}(\ell, \omega) \varphi(x) dS^N(x, v, \omega, \mathbb{F}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \bar{\mathbb{F}} \cdot \varphi dx, \quad (24)$$

$$\int_{\Omega} \int_E (\mathbb{M}_{\mathbb{F}} \psi(x)) \cdot \varphi(x) dS^N(x, v, \omega, \mathbb{F}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{M}} \psi) \cdot \varphi dx, \quad (25)$$

pour un certain champ de vecteurs $\bar{\mathbb{F}} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et un certain champ de matrices $\bar{\mathbb{M}} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{M}_3(\mathbb{R}))$.

Le principal résultat obtenu dans [P1] est le théorème suivant.

Théorème 2.5. *Sous les Hypothèses 2.1 – 2.2 et avec les convergences (24) – (25), la suite $(u^N)_N$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers un élément \bar{u} solution dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ du système*

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} + \nabla \bar{p} &= \bar{\mathbb{F}} - \bar{\mathbb{M}} \bar{u}, \\ \operatorname{div} \bar{u} &= 0, \end{cases} \quad (26)$$

pour une certaine fonction $\bar{p} \in H^{-1}(\Omega)$.

La première étape — commune à [54] — est d'obtenir une borne uniforme sur la suite $(u^N)_N$ dans $H_0^1(\Omega)$. Puisque le problème limite (26) admet une unique solution dans cet espace il suffit de montrer qu'une valeur d'adhérence faible de cette suite résout (26). Tout comme dans [54] on se concentre pour cela sur la formulation variationnelle de (26) qui peut s'écrire ainsi (comme précédemment D désigne ici la partie symétrique de ∇)

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad 2 \int_{\Omega} D(\bar{u}) : D(w) = \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{F}} - \bar{\mathbb{M}} \bar{u}) \cdot w. \quad (27)$$

De telles fonctions test w ne sont pas admissibles pour la formulation faible du problème (18) – (19), laquelle nécessite des éléments de $H_0^1(\Omega^N)$. Le nombre suivant n'a en particulier aucune raison d'être nul

$$2 \int_{\Omega^N} D(u^N) : D(w),$$

et c'est en essayant de rattraper les valeurs aux bords de w à l'aide de correcteurs que l'on fait apparaître le second membre de (26). C'est à cette étape que notre méthode diffère de [54].

Dans cet article Desvillettes, Golse et Ricci font appel à des formules explicites pour la solution du problème de Stokes dans le complémentaire d'une boule, ce qui leur permet de traiter les termes supplémentaires mais nécessite la sphéricité de toutes les particules considérées. L'approche introduite par Hillairet dans [90] (toujours dans le cadre de particules sphériques) n'utilise pas de formules explicite et se base sur les propriétés variationnelles de la solution du problème de Stokes, notamment sa caractérisation comme minimiseur de l'énergie. Nous adaptons cette méthode au cas de particules non sphériques, l'approche variationnelle s'avérant particulièrement fructueuse *via* le Lemme 2.5 ci-bas. Dans un premier temps on localise le problème en introduisant des "périmètres de sécurité" Ω_i^N autour de chaque particules B_i^N . Le diamètre de chaque cellule Ω_i^N vaut $\delta^N/2$, où δ^N a été introduit en (23), de telle sorte que ces périmètres ne s'intersectent pas ; cela nous permet en quelque sorte de traiter chaque particule individuellement. On considère alors une fonction w^N , nulle en dehors des ensembles Ω_i^N et relevant les valeurs de w aux bords de chaque particule B_i^N . La formulation faible de (18) – (19) conduit à

$$2 \int_{\Omega^N} D(u^N) : D(w) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^N} D(u^N) : D(w^N). \quad (28)$$

La suite du calcul est alors guidée par le lemme suivant, issu de l'étude d'un écoulement de Stokes autour d'un solide immergé \mathcal{B} (compact, simplement connexe, à bord régulier) inclus dans une boule B_R de rayon R , lorsque les conditions aux bords sont suffisamment simples

Lemme 2.5. *Soient $U, V, \ell, \omega \in \mathbb{R}^3$ et u la solution du problème de Stokes dans le domaine $B_R \setminus \mathcal{B}$, constante égale à U sur ∂B_R et avec la condition aux bords rigide $u(x) = \ell + \omega \times x$ sur $\partial \mathcal{B}$. Si v est un élément de $\mathbb{H}_0^1(B_R)$ constant égal à V sur $\partial \mathcal{B}$, on a l'identité suivante*

$$2 \int_{B_R \setminus \mathcal{B}} D(u) : D(v) = (\mathbb{F}[\ell, \omega] - \mathbb{M}_{\mathbb{F}} U) \cdot V + \mathcal{O}_{R \rightarrow +\infty} \left(R^{-1/2} \right) |(U, \ell, \omega)| |V|, \quad (29)$$

où \mathbb{F} est l'opérateur de Stokes associé à \mathcal{B} .

Remarque 2.4. *Puisque l'opérateur de Stokes associé à \mathcal{B} est défini pour le problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}$, le terme d'erreur correspond à "l'approximation" de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}$ par $B_R \setminus \mathcal{B}$.*

Chaque cellule Ω_i^N est de taille $\delta^N/2$ et centrée autour d'un solide de taille $1/N$. Par un changement de variable, elle peut donc se ramener à une boule de taille $R_N := N\delta^N/2$ privée d'un obstacle de taille 1 et l'Hypothèse 2.2 assure que $(R_N)_N \rightarrow_N +\infty$. On renvoie à la Figure 2.3 pour une illustration. Pour invoquer le lemme précédent dans (28), on va donc chercher à remplacer w^N et u^N par des approximations (en un sens à définir) \bar{w}^N et \bar{u}^N respectivement constantes sur ∂B_i^N et $\partial \Omega_i^N \setminus \partial B_i^N$, avec \bar{u}^N solution du problème de Stokes dans Ω_i^N . Cela mènerait à la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D(u^N) : D(w) &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^N} D(\bar{u}^N) : D(\bar{w}^N) \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^N} D(u^N - \bar{u}^N) : D(\bar{w}^N) + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^N} D(u^N) : D(w^N - \bar{w}^N). \end{aligned} \quad (30)$$

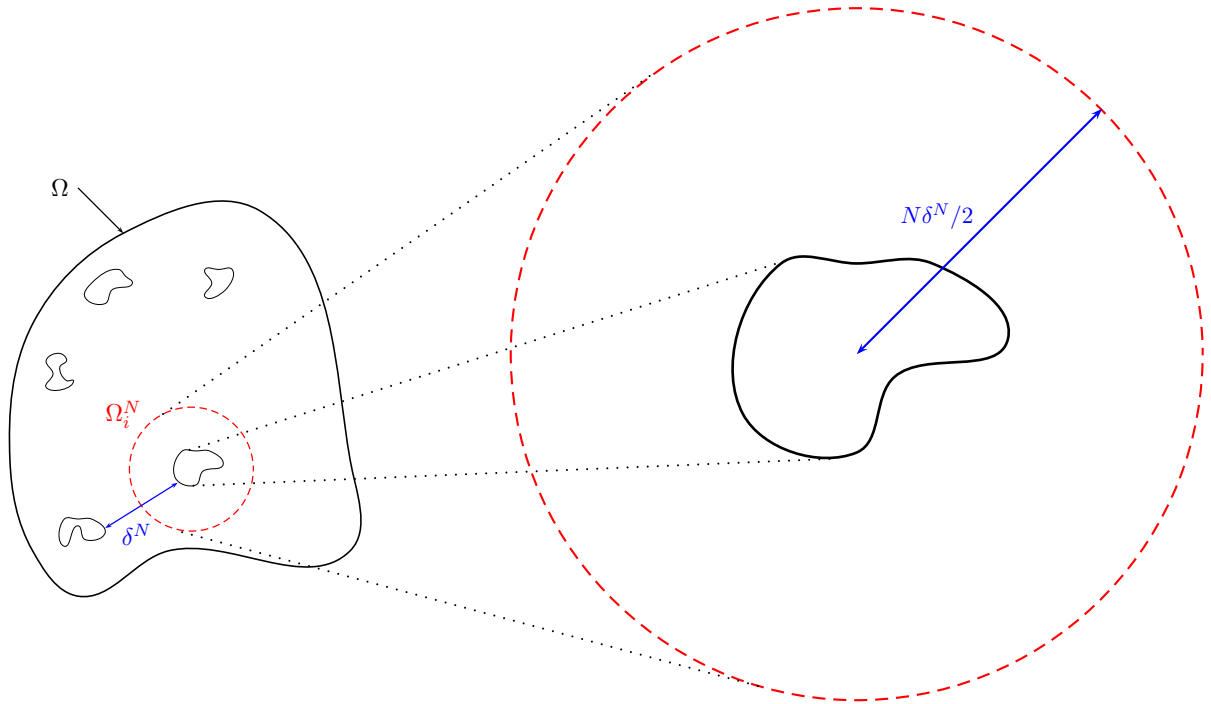


FIGURE 2.3 – À gauche, plusieurs solides et l'exemple d'une cellule Ω_i^N ; à droite le "zoom" de celle-ci.

Le tout premier terme du membre de droite de (30) est le terme dominant de notre développement et il est précisément préparé pour pouvoir y utiliser le Lemme 2.5 (après un changement de variable adapté). C'est de cette expression que proviendra le terme source de notre équation limite. Le terme "approximation" que nous avons utilisé précédemment signifie que les sommes de la seconde ligne de l'équation (30) tendent vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$. Puisque la solution du problème de Stokes minimise la norme L^2 du gradient (et du gradient symétrique), il est naturel de considérer pour les correcteurs w^N et \bar{w}^N des solutions du problème de Stokes afin que les termes d'erreurs présents dans (30) soient le plus petit possible (par inégalité de Cauchy-Schwarz).

Il reste enfin à choisir les valeurs constantes aux bords que l'on veut prescrire pour \bar{w}^N et \bar{u}^N respectivement sur B_i^N et $\partial\Omega_i^N \setminus \partial B_i^N$. Pour la première, la taille des particules tendant vers 0 et la fonction test w étant régulière, on prend pour approximation la valeur de cette fonction en un point arbitraire de B_i^N . Pour \bar{u}^N , aucune valeur ponctuelle ne semble envisageable pour l'approcher sur le bord extérieur de la cellule Ω_i^N , d'autant que la convergence faible dans $H_0^1(\Omega)$ ne donnerait aucune stabilité à ce type d'approximation. Par contre, en utilisant une inégalité de Poincaré-Wirtinger, on voit que la convergence précédente est bien compatible avec l'approximation de u^N par sa moyenne sur la cellule entière Ω_i^N , dont la taille tend vers 0. Détail important : la stabilité de cette approximation est nécessaire pour exploiter la convergence de la mesure empirique exprimée en (25), et cette stabilité n'est satisfaite que si le volume des cellules Ω_i^N est asymptotiquement minoré par la pondération $1/N$ présente dans la mesure empirique. Il s'agit ici d'une utilisation cruciale de l'Hypothèse 2.2, puisqu'avec celle-ci on a effectivement $|\Omega_i^N| \gtrsim 1/N$.

2.2.4 Perspectives

Puisque l’Hypothèse 2.2 proscrit toute dynamique aux particules, il serait intéressant de se demander ce qu’il advient de ce système lorsque l’on autorise une proximité asymptotique pour les particules. À l’instar du phénomène observé dans [2], il est possible que certaines configurations mènent à une modification de l’équation de Stokes elle-même mais qui semble pour le moment encore difficile à imaginer.

Si l’on revient à la question de la dérivation complète du système de Vlasov-Navier-Stokes, la situation est plutôt de mauvais augure *via* cette approche. D’une part l’Hypothèse 2.2 est trop restrictive pour considérer le système complet et d’une autre la borne uniforme que l’on obtient sur le premier moment de la distribution (pondéré ici par une partie de l’opérateur de Stokes) est en désaccord avec les solutions faibles construites par le Théorème 1.1 du Chapitre 1, pour lesquelles ρ_f n’est *a priori* pas borné.

Un programme alternatif a été proposé dans [14, 15] et consiste à prendre comme point de départ un couplage d’équations cinétiques avec collisions (modélisées par un noyau non linéaire de type Boltzman), où le fluide est tout comme le spray considéré comme une phase dispersée. L’identification d’un scaling physiquement réaliste pour lequel on arriverait ainsi à dériver rigoureusement le système de Vlasov-Navier-Stokes complet est un défi totalement ouvert, l’analyse présentée dans [14, 15] étant encore en partie formelle.

2.3 Un système bidispersé en taille

Avec Saad Benjelloun (alors en thèse) et Laurent Desvillettes nous avons étudié dans [A8] un système fluide/cinétique tenant compte de fragmentations dans la phase dispersée. Il existe de nombreuses manières de modéliser ce phénomène (ainsi que celui de la coalescence), *via* des opérateurs intégraux (voir [131, 151]). Nous avons considéré l’un de ces opérateurs sous une forme simplifiée et dégénérée en supposant l’aérosol bidispersé en la variable de rayon. Dans le modèle considéré il existe donc deux tailles “typiques” de particules : les grosses, qui peuvent fragmenter (avec un certain taux), et les petites, qui ne fragmentent pas (ni ne coalescent). La force de traînée appliquée aux particules (voir paragraphe 1.1.4 du Chapitre 1) indique que celles-ci alignent leur vitesse sur celle du fluide avec un temps de relaxation d’autant plus bref que leur rayon est petit. En terme de simulation numérique, si on utilise une méthode particulière comme celle abordée au paragraphe 1.4 du Chapitre 1, la production d’un grand nombre de petites particules peut considérablement allonger le temps de calcul. Dans une situation extrême de ce type, il peut être préférable de considérer que les particules fines “se fondent” dans le fluide environnant, en augmentant la densité de celui-ci et en tenant compte de cette augmentation dans sa simulation (par éléments ou volumes finis). C’est ce point de vue que nous avons essayé d’explorer dans [A8] en dérivant (formellement) un modèle de fluide à densité variable couplé à une équation cinétique. Plus précisément, en normalisant le rayon des grosses particules ainsi que le taux de fragmentation de celles-ci, si $\varepsilon > 0$ désigne le rayon des petites particules, nous sommes partis du système suivant

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [f(u - v)] = -f, \quad (31)$$

$$\partial_t g + v \cdot \nabla_x g + \nabla_v \cdot [g(u - v)/\varepsilon^2] = f/\varepsilon^3, \quad (32)$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = j_f - \rho_f u + \varepsilon(j_g - \rho_g u), \quad (33)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (34)$$

que nous considérons pour un jeu de variables $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$, où \mathbb{T}^3 est le tore plat tridimensionnel. Les notations j_f, j_g, ρ_f, ρ_g désignent les moments des fonctions de densité, comme en (1) – (2). Les facteurs $\varepsilon, \varepsilon^{-2}$ et ε^{-3} sont justifiés par l’expression des forces de traînée et Brinkman (voir paragraphe 1.1.4 du Chapitre 1) ainsi que la conservation de la masse pour l’ensemble du spray : chaque particule “disparue” de l’équation (31) donne ainsi naissance à $1/\varepsilon^3$ particules fines dans l’équation (32). À noter également que le fluide est pris à densité constante.

Dans [A8] nous avons d’abord effectué une analyse asymptotique formelle qui produit, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, un système de type Vlasov-Navier-Stokes à densité variable pour le fluide, c’est l’objet du paragraphe suivant. Nous construirons ensuite une solution faible pour ce système limite et reviendrons en fin de section vers les difficultés que l’on rencontre lorsqu’on cherche à rendre rigoureuse l’analyse asymptotique présentée.

2.3.1 La limite formelle $\varepsilon \rightarrow 0$

Introduisons la fonctionnelle correspondant à l’énergie cinétique du système

$$\mathcal{E}_\varepsilon(f_\varepsilon, g_\varepsilon, u_\varepsilon) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f_\varepsilon \, dv \, dx + \frac{\varepsilon^3}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 g_\varepsilon \, dv \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |u_\varepsilon|^2 \, dx,$$

où toutes les fonctions ont été indexées par la variable ε que l’on s’apprête à faire tendre vers 0. Afin de conserver asymptotiquement une trace des particules fines dans l’énergie ci-haut, il est naturel de considérer le scaling suivant

$$h_\varepsilon := \varepsilon^3 g_\varepsilon. \quad (35)$$

Remarquons que $\mathcal{E}_\varepsilon(f_\varepsilon, g_\varepsilon, u_\varepsilon) = \mathbb{E}(f_\varepsilon + h_\varepsilon, u_\varepsilon)(t)$ où \mathbb{E} est la fonctionnelle

$$\mathbb{E}(f, u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f \, dv \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |u|^2 \, dx, \quad (36)$$

introduite dans le paragraphe 1.3.3 du Chapitre 1 pour la preuve d’existence de solutions faibles au système de Vlasov-Navier-Stokes sur le tore. En étudiant la variation de \mathcal{E}_ε au cours du temps pour une solution $(f_\varepsilon, g_\varepsilon, u_\varepsilon)$ du système (31) – (34) on obtient une estimation d’énergie similaire à celle obtenue pour le système de Vlasov-Navier-Stokes (voir l’énoncé du Théorème 1.1), mais tenant compte du rayon des petites particules :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_\varepsilon(f_\varepsilon, g_\varepsilon, u_\varepsilon)(t) + \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon |v - u_\varepsilon(t)|^2 \, dv \, dx \\ + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} h_\varepsilon(t) |v - u_\varepsilon(t)|^2 \, dv \, dx + \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u_\varepsilon(t)|^2 \, dx = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

En particulier, par positivité, il vient

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} h_\varepsilon(t) |v - u_\varepsilon(t)|^2 \, dv \, dx \leq \mathcal{E}_\varepsilon(f_\varepsilon, g_\varepsilon, u_\varepsilon)(0).$$

Si les données initiales sont préparées de sorte que le membre de droite reste borné, on s’attend donc à un comportement asymptotique monocinétique pour la suite $(h_\varepsilon)_\varepsilon$. Plus précisément, en rappelant la notation des moments (1) – (2), si $(\rho_{h_\varepsilon}, u_\varepsilon)_\varepsilon \rightharpoonup_\varepsilon (\rho, u)$, on s’attend à ce que $(h_\varepsilon)_\varepsilon$

ait pour limite $\rho \otimes \delta_{v=u}$. Poursuivons cette analyse formelle en intégrant en vitesse l'équation (32) face à $\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$ pour aboutir aux deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{h_\varepsilon} + \nabla \cdot j_{h_\varepsilon} &= \rho_{f_\varepsilon}, \\ \partial_t j_{h_\varepsilon} + \nabla \cdot J_{h_\varepsilon} &= j_{f_\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\rho_{h_\varepsilon} u_\varepsilon - j_{h_\varepsilon}), \end{aligned} \quad (38)$$

où J_{h_ε} est une fonction à valeurs matricielles définie par

$$J_{h_\varepsilon}(t, x, v) := \int_{\mathbb{R}^3} v \otimes v h_\varepsilon(t, x, v) dv.$$

Dans le cadre de la limite monocinétique évoquée plus haut, nous avons également les convergences formelles $(j_{h_\varepsilon})_\varepsilon \rightharpoonup_\varepsilon \rho u$ et $(J_{h_\varepsilon})_\varepsilon \rightharpoonup_\varepsilon \rho u \otimes u$. Remarquons qu'avec les notations introduites on peut écrire l'équation (33) ainsi (en utilisant l'incompressibilité)

$$\partial_t u_\varepsilon + \nabla \cdot (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = j_{f_\varepsilon} - \rho_{f_\varepsilon} u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (j_{h_\varepsilon} - \rho_{h_\varepsilon} u_\varepsilon).$$

En sommant l'équation précédente à celle obtenue sur j_{h_ε} ci-dessus, il vient

$$\partial_t (u_\varepsilon + j_{h_\varepsilon}) + \nabla \cdot (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon + J_\varepsilon) - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = 2j_{f_\varepsilon} - \rho_{f_\varepsilon} u_\varepsilon.$$

Les convergences mentionnées pour $(j_{h_\varepsilon})_\varepsilon$ et $(J_{h_\varepsilon})_\varepsilon$ conduisent alors formellement à l'équation suivante (avec des notations évidentes pour f et p).

$$\partial_t (u + \rho u) + \nabla \cdot (u \otimes u + \rho u \otimes u) - \Delta u + \nabla p = 2j_f - \rho_f u. \quad (39)$$

En passant à la limite l'équation (38) il vient également

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = \rho_f,$$

si bien que le système limite peut s'écrire (en passant également à la limite l'équation sur f_ε)

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [f(u - v)] = -f, \quad (40)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = \rho_f, \quad (41)$$

$$(1 + \rho)[\partial_t u + (u \cdot \nabla)u] - \Delta u + \nabla p = 2(j_f - \rho_f u), \quad (42)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (43)$$

Il s'agit donc d'un système de Vlasov-Navier-Stokes dans lequel le fluide possède une densité variable, laquelle est alimentée par l'aérosol (terme source de la deuxième équation).

2.3.2 Existence pour le système limite

Le principal résultat démontré dans [A8] est le théorème suivant d'existence pour le système (40) – (43).

Théorème 2.6. *Soit $(f_{\text{in}}, \rho_{\text{in}}, u_{\text{in}}) \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \times L^{5/3}(\mathbb{T}^3) \times L^2_{\text{div}}(\mathbb{T}^3)$. On suppose que $f_{\text{in}}, \rho_{\text{in}} \geq 0$ et que $(x, v) \mapsto (1 + |v|^2)f_{\text{in}}(x, v) \in L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Il existe une solution faible globale (f, ρ, u) au système (40) – (43) considéré sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ telle que*

$$\rho \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^{5/3}(\mathbb{T}^3)), \quad f \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)), \quad (44)$$

$$u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^2_{\text{div}}(\mathbb{T}^3)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1_{\text{div}}(\mathbb{T}^3)) \quad (45)$$

et satisfaisant l'inégalité

$$\mathcal{E}(f, \rho, u)(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u|^2 dx ds + \frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |u - v|^2 f dv dx ds \leq \mathcal{E}(f_{\text{in}}, \rho_{\text{in}}, u_{\text{in}}), \quad (46)$$

où

$$\mathcal{E}(f, \rho, u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f dv dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho)|u|^2 dx.$$

Remarque 2.5. *Avec les espaces fonctionnels considérés, il n'est pas évident de comprendre le sens du terme $\rho \partial_t u$ dans l'équation (42), mais cette dernière est en fait totalement équivalente à (39). La pression est éliminée par le projecteur de Leray qui est ici donné explicitement puisque l'on travail sur le tore plat.*

En prenant $f_{\text{in}} = f = 0$, notre système se réduit à (41) – (43), *i.e.* aux équations de Navier-Stokes incompressible à densité variable. Les principales difficultés que nous avons rencontrées peuvent s'exprimer directement vis-à-vis de ce système. Les premières références bibliographiques traitant de solutions faibles globales pour celui-ci proviennent de l'école russe, dans les années '70, voir par exemple l'ouvrage [8] d'Antontsev *et. al.* Dans ces travaux pionniers la densité est toujours bornée et uniformément minorée par une constante positive. Un peu plus tard Simon généralisera dans [140] ces théorèmes d'existence en abandonnant l'hypothèse de minoration, ce qui revient à autoriser des zones de vide dans le fluide. Ces approches ne permettaient pas de traiter les cas de modèles fluide plus complexes où la viscosité n'est pas constante mais dépend de la densité du fluide, l'une des obstructions étant l'absence de résultats de stabilité (forts) pour l'équation de transport avec un champ peu régulier. À l'aide de la théorie des solutions renormalisées mise au point avec DiPerna (voir [57]), Lions dans son monographie [113], puis Desjardins dans [49], construiront les premières solutions faibles pour des systèmes à viscosité variable, fonction d'une densité qui elle-même peut s'annuler. En ce qui concerne les solutions plus régulières de ce système (et leur existence locale), nous renvoyons à l'exposé complet [42] de Danchin. Mentionnons enfin deux travaux récents traitant d'un couplage Vlasov-Navier-Stokes inhomogène que sont [146] et [36]. Dans tous les travaux cités précédemment pour les solutions faibles, la densité du fluide est bornée supérieurement (mais peut éventuellement s'annuler), alors que notre Théorème 2.6 produit des solutions ayant une densité non bornée (mais qui ne s'annule jamais) et ce, indépendamment de la donnée initiale car le terme source de (42) n'est pas borné. Il était suggéré dans [57, 113] que certaines méthodes de [57] pourraient être généralisées pour traiter en particulier le cas de fluides visqueux à densité non bornées. C'est précisément ce que nous avons fait pour traiter les non linéarités les plus sérieuses du système (40) – (42).

Nous ne nous attarderons pas ici sur le schéma d'approximation suivi (bien que celui-ci sorte légèrement de la routine proposée dans le Chapitre 1) et résumons les difficultés reliées à l'ultime passage à la limite en une question de stabilité faible. On part donc d'une suite $(f_n, \rho_n, u_n)_n$

solution du système (31) – (34) initialisée par $(f_{\text{in}}, \rho_{\text{in}}, u_{\text{in}})$ et satisfaisant de plus l’inégalité (46). De nombreuses bornes sont fournies par cette estimation, permettant d’extraire de $(f_n, \rho_n, u_n)_n$ une sous-suite convergeant faiblement pour des topologies appropriées. La difficulté provient de ce que la seule composante du système bénéficiant d’un contrôle fort (d’une partie) de ses dérivées est $(u_n)_n$. La méthode standard consiste alors à invoquer un Lemme d’Aubin-Lions en utilisant l’équation elle-même pour contrôler $(\partial_t u_n)_n$ dans un espace suffisamment faible. Seulement ici les équations (39) ou (42) ne permettent pas de contrôler $(\partial_t u_n)_n$ directement. Dans [8] cette difficulté est contournée en étudiant directement les translations en temps de u_n , mais en utilisant fortement que $(\rho_n)_n$ est uniformément bornée. L’approche proposée dans [113], tirée de [57, Thm. II.7] consiste à montrer la stabilité forte des solutions d’une équation de transport pour une suite de champs de vecteurs dont seules les oscillations en la variable d’espace sont contrôlées (par une estimation uniforme sur les translations). La preuve proposée est donnée dans le cas où la solution de l’équation de transport est bornée (en suggérant son adaptation possible dans d’autres cas). Partant de cette lecture nous avons extrait un énoncé général — indépendant de l’équation de transport — quelque peu évocateur du phénomène de compacité par compensation de Murat et Tartar (voir [129, 143]), il s’agit d’un cas particulier de la Proposition 4.1 que l’on présente en détail dans le chapitre 4. Cette proposition nous permet dans un premier temps de passer à la limite dans $(\rho_n u_n)_n$ puisque, schématiquement, “ $(\nabla u_n)_n$ est contrôlée fortement en t, x ” et “ $(\partial_t \rho_n)_n$ est contrôlée fortement en t , faiblement en x ”. Une fois que l’on a établi $(\rho_n u_n)_n \rightharpoonup_n \rho u$, on invoque à nouveau la Proposition 4.1 pour passer à la limite dans $((1 + \rho_n)u_n \otimes u_n)_n$ en notant cette fois-ci que la dérivée en temps de $(1 + \rho_n)u_n$ est contrôlée grâce à l’équation (39). Une fois que l’on a obtenu la convergence $((1 + \rho_n)u_n \otimes u_n)_n \rightharpoonup (1 + \rho)u \otimes u$, on récupère la convergence en norme de $(u_n)_n$ vers u et donc la convergence forte de cette suite, ce qui permet de conclure.

2.3.3 Preuve rigoureuse ?

Essayons de reprendre de manière plus rigoureuse l’analyse formelle effectuée dans le paragraphe 2.3.1. La première étape serait bien sûr de construire (à $\varepsilon > 0$ fixé) des solutions faibles globales et de préciser un cadre fonctionnel dans lequel les manipuler pour espérer passer à la limite. L’analyse se rapproche alors très fortement de celle réalisée pour le système de Vlasov-Navier-Stokes sur le tore et est présentée en détail dans [13]. Ce faisant, en rappelant le scaling introduit en (35), nous partons donc d’une solution faible du système suivant

$$\begin{aligned} \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon + \nabla_v \cdot [f_\varepsilon(u_\varepsilon - v)] &= -f_\varepsilon, \\ \partial_t h_\varepsilon + v \cdot \nabla_x h_\varepsilon + \nabla_v \cdot [h_\varepsilon(u_\varepsilon - v)/\varepsilon^2] &= f_\varepsilon, \\ \partial_t u_\varepsilon + \nabla \cdot (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= j_{f_\varepsilon} - \rho_{f_\varepsilon} u_\varepsilon + (j_{h_\varepsilon} - \rho_{h_\varepsilon} u_\varepsilon)/\varepsilon^2, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon &= 0. \end{aligned}$$

On voit que la difficulté de l’asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$ n’est en rien perturbée par la présence de f_ε (dont le rôle a en quelque sorte été effacé par le scaling) et on peut donc sans perte de généralité se ramener au système suivant

$$\begin{aligned} \partial_t h_\varepsilon + v \cdot \nabla_x h_\varepsilon + \nabla_v \cdot [h_\varepsilon(u_\varepsilon - v)/\varepsilon^2] &= 0, \\ \partial_t u_\varepsilon + \nabla \cdot (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= (j_{h_\varepsilon} - \rho_{h_\varepsilon} u_\varepsilon)/\varepsilon^2, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon &= 0. \end{aligned}$$

La limite $\varepsilon \rightarrow 0$ que nous cherchons alors à écrire correspond simplement à la dérivation des équations de Navier-Stokes à densité variable, sans terme source. Pour simplifier on note

par la suite $(\rho_\varepsilon, j_\varepsilon, J_\varepsilon) := (\rho_{h_\varepsilon}, j_{h_\varepsilon}, J_{h_\varepsilon})$, où les composantes du second triplet ont toutes été introduites dans le paragraphe précédent.

On considère donc sur un segment $[0, T]$ une famille de solutions faibles $(h_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifiant pour presque tout $t \in [0, T]$ l'estimation (analogue à celle obtenue dans le Théorème 1.1)

$$E(h_\varepsilon, u_\varepsilon)(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx ds + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - u_\varepsilon|^2 f dv dx ds \leq E(h_{\text{in}}^\varepsilon, u_{\text{in}}^\varepsilon), \quad (47)$$

où la fonctionnelle E a été introduite en (36) et $(h_{\text{in}}^\varepsilon, u_{\text{in}}^\varepsilon)$ est une condition initiale admissible au sens de la Définition 1.1. Le Théorème 1.1 produit des solutions de l'équation cinétique appartenant à $L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$, mais cette estimation dégénère lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ car la divergence du champ est augmentée d'un facteur $1/\varepsilon^2$, on a en effet sur $[0, T]$

$$\|h_\varepsilon(t)\|_\infty \leq e^{3T/\varepsilon^2} \|h_{\text{in}}^\varepsilon\|_\infty.$$

Cette mauvaise nouvelle est cohérente avec le comportement monocinétique attendu! De l'estimation d'énergie (47) on récupère par contre les bornes suivantes :

$$((t, x, v) \mapsto (1 + |v|^2)h_\varepsilon)_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)), \quad (48)$$

$$(u_\varepsilon)_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{T}^3)) \quad (49)$$

$$(\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon)_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^3)), \quad (50)$$

lesquelles permettent d'établir les comportement asymptotiques suspectés

$$j_\varepsilon = \rho_\varepsilon u_\varepsilon + O(\varepsilon), \quad (51)$$

$$J_\varepsilon = \rho_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon + O(\varepsilon), \quad (52)$$

où dans les deux cas $O(\varepsilon)$ est à comprendre au sens de la norme $L^1(0, T; L^1(\mathbb{T}^3))$. Il s'agit alors de passer à la limite dans le couple d'équations suivantes que nous avons obtenues dans le paragraphe 2.3.1 (on rappelle que dorénavant $f_\varepsilon = 0$)

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \nabla \cdot j_\varepsilon = 0,$$

$$\partial_t (u_\varepsilon + j_\varepsilon) + \nabla \cdot (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon + J_\varepsilon) - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = 0.$$

Grâce à (51) – (52) on peut alors écrire

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \nabla \cdot (\rho_\varepsilon u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon]{} 0,$$

$$\partial_t (u_\varepsilon + \rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \nabla \cdot (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon + \rho_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon]{} 0,$$

les convergences étant à comprendre (au moins) au sens des distributions. Nous avons essayé sans succès de traiter les non linéarités de ce système mais il semble qu'en l'état nous ne bénéficions pas assez d'estimations pour conclure. Expliquons les difficultés rencontrées en remarquant d'abord que, en écho au le paragraphe précédent, seules les oscillations spatiales de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ sont contrôlées *a priori*.

Commençons par la non linéarité la moins sévère : $\rho_\varepsilon u_\varepsilon$. Il est tentant d'invoquer à nouveau la Proposition 4.1 mais $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ n'est contrôlée pour l'instant que dans $L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{T}^3))$ ce qui ne laisse pas suffisamment de marge pour utiliser ce résultat, car l'injection $H^1(\mathbb{T}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^3)$ n'est

compacte que pour $p < 6$: il faudrait une borne spatiale de $(\rho_n)_n$ dans $L^q(\mathbb{T}^3)$ avec $q > 6/5$. En réalité, même en reprenant le même système en dimension 2, la situation reste critique. On trouvera dans [A11] une variation de la Proposition 4.1 qui, à l'aide de l'inégalité de Moser-Trudinger, permet de conclure si $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est contrôlée dans $L^\infty(0, T; L \log L(\mathbb{T}^2))$. Il s'agit d'une borne qui correspond à la limite hydrodynamique étudiée dans [85] pour un système voisin. Dans cet article c'est la présence d'un terme diffusif dans l'équation cinétique qui sauve la mise : il permet l'introduction d'une entropie relative pour traiter toutes les non linéarités, mais cela nécessite une hypothèse de préparation des données.

L'étude des autres termes $u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ et $\rho_\varepsilon(u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon)$ n'est (naturellement) en rien plus encourageante. Gardons à l'esprit le cas partiel que l'on a pu traiter dans les lignes du dessus. Lions, dans l'étude des équations de Navier-Stokes stationnaires isothermes en dimension 2 (voir [114, p.103]) propose le contre-exemple suivant. Si on définit

$$\rho_n := \frac{n^2}{\ln(n)} \mathbf{1}_{|x| \leq 1/n}, \quad u_n := \frac{1}{\sqrt{\ln(n)}} \ln(|x| \vee 1/n),$$

on vérifie que $(\rho_n)_n$ est bel et bien bornée dans $L \log L(\mathbb{T}^2)$, $(u_n)_n$ dans $H^1(\mathbb{T}^2)$, convergent toutes les deux vers 0 au sens des distributions alors que $(\rho_n u_n^2)_n$ se concentre en une masse de Dirac. Lions montre ensuite que ces concentrations sont, à translation près, les seules pathologies possibles et utilise l'équation limite pour effacer la mesure de défaut produite.

L'analyse précédente laisse à penser que la preuve rigoureuse de l'asymptotique formelle présentée dans le paragraphe 2.3.1 est hors d'accès en dimension 3. Pour ce qui est de la dimension 2, l'adaptation de la méthode de Lions est une piste envisageable mais la prise en compte de la variable de temps semble particulièrement délicate (d'autant que les oscillations en celle-ci ne sont pas du tout contrôlées). L'introduction d'une entropie ou énergie modulée à la manière de [85] reste la stratégie la plus raisonnable mais nous n'avons pour l'instant pas réussi à découvrir de telle fonctionnelle.

2.4 Un modèle gyroscopique

Avec Franck Sueur nous avons introduit dans [A6] un nouveau système fluide/cinétique, considéré pour $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, et prenant la forme suivante,

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [(v - u)^\perp f] = 0, \quad (53)$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = (\rho_f u - j_f)^\perp, \quad (54)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (55)$$

où pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, x^\perp signifie $x^\perp = (-x_2, x_1)$ et j_f, ρ_f sont les moments introduits en (1) – (2). En comparaison au système (3) – (5), le fluide est donc supposé parfait (pas de viscosité) et l'interaction entre les deux phases ne se fait plus *via* les forces de traînée et Brinkman, mais par un effet gyroscopique. Afin de comprendre d'où vient ce système et aussi parce que l'analyse à deux dimensions de l'équation d'Euler y est plus commode, nous utiliserons dorénavant la formulation en vorticité du système précédent, laquelle s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [f(v - u)^\perp] = 0 \quad (56)$$

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad (57)$$

où u est donné par

$$u = K[\omega + \rho_f], \quad (58)$$

et K est l'opérateur de Biot-Savart *i.e.* la convolution avec la fonction

$$H(x) := \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

L'opérateur de Biot-Savart produit des champs à divergence nulle dont le rotationnel vaut son argument d'entrée (voir [120] par exemple pour une introduction à celui-ci). Cette deuxième formulation permet donc de voir à quel point les deux phases se font “tourner l'une l'autre” : l'accélération des particules est orthogonale à leur vitesse relative vis-à-vis du fluide tandis que la vorticité de celui-ci est ponctuellement augmentée par la présence de particules.

Nous présentons ci-après quelques uns des résultats que nous avons obtenu avec Franck Sueur dans [A6].

2.4.1 Dérivation dans un cas régularisé

Dans [82], Glass, Lacave et Sueur ont établi une analyse asymptotique sur un système couplant l'équation d'Euler pour les fluides parfaits à celle du mouvement d'un solide immergé (tout cela en dimension 2), à mesure que la taille de celui-ci tend vers 0. En fixant une circulation constante non nulle autour du solide et une masse non évanescente, ils parviennent à une variante du système “Euler/point vortex” de Marchiori et Pulvirenti (voir [121]) incluant de l'inertie pour le solide (l'analyse a depuis été prolongée dans [82] pour récupérer le système exact). Avec Franck Sueur dans [A6] nous sommes partis d'une configuration incluant plusieurs points vortex inertiels de ce type (la dérivation d'un tel système multi-vortex est un travail en cours d'élaboration [81]), soit

$$\begin{aligned} \partial_t \omega + u \cdot \nabla_x \omega &= 0, \\ u(t, x) &= H \star \left(\omega(t) + \sum_{j=1}^N \gamma_j \delta_{h_j(t)} \right), \\ m_i \ddot{h}_i(t) &= \left(\dot{h}_i(t) - v_i(t, h_i(t)) \right)^\perp, \\ v_i(t, x) &= H \star \left(\omega(t) + \sum_{j \neq i}^N \gamma_j \delta_{h_j(t)} \right), \end{aligned}$$

où $h_i(t) \in \mathbb{R}^2$, $m_i > 0$ et $\gamma_i > 0$ sont les positions, masses et circulations associées à chaque particule, le système étant complété par des données initiales pour ω et les fonctions h_i et \dot{h}_i . Nous avons cherché à établir une limite de champ moyen en prenant des circulations de l'ordre de $1/N$ pour chaque particule et une masse d'ordre 1 (afin de ne pas laisser la dynamique dégénérer). La singularité du noyau de l'opérateur de Biot-Savart étant trop sévère pour être traitée directement, nous avons suivi l'approche de Dobrushin [58] en considérant un noyau régularisé (nous évoquons dans le dernier paragraphe les difficultés du cas général). Plus précisément, nous avons introduit un champ de vecteur \tilde{H} lipschitzien et nul en 0 (une régularisation de H)

et nous nous sommes intéressés à l'asymptotique $N \rightarrow +\infty$ dans le système suivant

$$\partial_t \omega_N + u_N \cdot \nabla_x \omega_N = 0, \quad (59)$$

$$u_N(t, x) = \tilde{H} \star \left(\omega_N(t) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{h_{j,N}(t)} \right), \quad (60)$$

$$\ddot{h}_{i,N}(t) = \left(\dot{h}_{i,N}(t) - u_N(t, h_{i,N}(t)) \right)^\perp. \quad (61)$$

On peut alors vérifier que la mesure empirique

$$f_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(h_{i,N}(t), \dot{h}_{i,N}(t))}, \quad (62)$$

résout l'équation

$$\partial_t f_N + v \cdot \nabla_x f_N + \nabla_v \cdot [f_N(v - u_N)^\perp] = 0. \quad (63)$$

Dans ce cadre régulier, la méthode de Dobrushin fournit tout : existence et unicité pour le système, la seconde découlant en fait d'une estimation de stabilité qui justifie par la même occasion la limite de champ moyen. Précisons un peu cela. Le cadre fonctionnel retenu est l'espace \mathcal{M} des mesures sur $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ possédant un moment d'ordre 1 et dont la première marginale (sur \mathbb{R}^2) est une mesure signée (la vorticité) et la seconde (sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) une mesure de probabilité (la mesure empirique); on équipe \mathcal{M} de la topologie étroite. Lorsque deux éléments de \mathcal{M} satisfont une certaine condition de compatibilité sur les variations totales de leurs composantes, on peut évaluer l'écart entre ceux-ci par l'utilisation de la distance de Wasserstein W_1 , laquelle m trise la converge étroite. C'est en terme de cette distance, et par l'utilisation de la dualité de Kantorovitch que l'estimation de stabilité mentionnée plus haut prend forme.

Théorème 2.7. *Soit $\mu_0 := (\omega_0, f_0) \in \mathcal{M}$. Il existe un unique élément $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{M})$ solution de (59) et (63) avec (ω_0, f_0) comme donnée initiale. De plus si, $\mu_{0,1}$ et $\mu_{0,2}$ sont deux éléments de \mathcal{M} compatibles et μ_1, μ_2 les deux solutions correspondantes, on a pour $t \in \mathbb{R}_+$:*

$$W_1(\mu_1(t), \mu_2(t)) \leq e^{Ct} W_1(\mu_{0,1}, \mu_{0,2}),$$

pour une certaine constante C ne d ependant que de $\|\nabla \tilde{H}\|_\infty$ et de la variation totale de $\mu_{0,1}$ et $\mu_{0,2}$.

Remarque 2.6. *La non linéarité présente dans (63) ne pose pas de problème car dans notre cadre adouci, u_N est suffisamment régulière pour définir son produit par une mesure.*

On tire en particulier de ce résultat le corollaire suivant pour la mesure empirique introduite en (62).

Corollaire 2.1. *On se fixe une vorticité initiale ω_0 ( ventuellement une mesure signée) et on considère la mesure empirique introduite en (62), associée au système (59) – (61), initialisée par $f_N(0)$. On suppose que la suite $(f_N(0))_N$ converge étroitement vers une mesure de probabilité f_0 sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ possédant un moment d'ordre 1. Si μ_N et μ sont les éléments de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{M})$ respectivement associés aux conditions initiales $(\omega_0, f_N(0))$ et (ω_0, f_0) , alors $(\mu_N)_N$ converge vers μ dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{M})$.*

Il est naturel de se demander si cette limite de champ moyen peut être établie dans le cas non régularisé, ce qui justifierait rigoureusement le système (56) – (58), mais à notre connaissance il s’agit d’un problème encore largement ouvert. Il est possible de prouver une limite de champ moyen pour une équation de Vlasov, dans le cas d’un noyau d’interaction singulier, mais la littérature actuelle (voir par exemple [88, 89, 97]) ne recouvre pas le cas du noyau apparaissant dans l’opérateur de Biot-Savart (la singularité est critique). Mentionnons les travaux récents de Duerinckx et Serfaty [65, 137] qui traitent le cas de noyaux coulombiens (voire plus singuliers encore), mais uniquement pour les systèmes d’ordre 1.

2.4.2 Solutions faibles globales

Si on ôte la régularisation et que l’on s’intéresse directement au système limite (56) – (58), il jouit d’une théorie d’existence et d’unicité légèrement différente du système de Vlasov-Navier-Stokes (3) – (5), principalement due à l’absence de régularisation dans l’équation fluide.

Théorème 2.8. *Soit $(\omega_0, f_0) \in L^{4/3} \cap L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$. On suppose également que $f_0 \geq 0$ et que $(x, v) \mapsto f_0(x, v)|v|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.*

(i) *Il existe une solution faible globale*

$$(\omega, f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; L^{4/3}(\mathbb{R}^2)) \times L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2))$$

au système (56) – (58).

(ii) *Si de plus $\omega_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, il existe alors au plus une solution*

$$(\omega, f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; L^{4/3} \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \times L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)),$$

au système (56) – (58), telle que $\rho_f \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{R}^2))$.

Le premier point est obtenu par une méthode standard d’approximation/compacité, combinée à des estimées *a priori* adéquates. Pour le second, nous nous sommes basés sur les travaux de Yudovich [158] (unicité pour Euler 2D) et Loeper [115] (unicité pour le système de Vlasov-Poisson). Il est à noter qu’en l’état rien n’empêche l’unicité annoncée dans le point (ii) de n’être qu’un “if-theorem”. Dans [A6] nous nous sommes donc assurés de l’existence de solutions ayant cette régularité, moyennant des hypothèses supplémentaires sur les données initiales, tant en terme de régularité que de décroissance à l’infini, suivant le travail de Degond [45] pour le système de Vlasov-Fokker-Planck-Poisson.

D’autres propriétés du système (56) – (58) ont été explorées dans [A6]. Mentionnons par exemple, et sans énoncé précis, une analyse asymptotique de ce système pour des masses de particules évanescences : on récupère alors une solution de l’équation d’Euler (en un sens très faible).

Systèmes à diffusion croisée

Les travaux dont il est question dans ce chapitre sont les articles [A7, A10, A14], écrits en collaboration avec Laurent Desvillettes, Thomas Lepoutre et Ariane Trescases, la prépublication [P3] et, de manière un peu annexe, l'article [A11].

En 1979 Shigesada, Kawasaki et Teramoto proposent dans [138] un modèle décrivant l'interaction entre deux populations animales, toutes deux représentées par leur densités u_1, u_2 , solutions du système appelé dorénavant SKT :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta \left[(d_1 + a_{11}u_1 + a_{12}u_2)u_1 \right] = u_1(\rho_1 - s_{11}u_1 - s_{12}u_2), \\ \partial_t u_2 - \Delta \left[(d_2 + a_{22}u_2 + a_{21}u_1)u_2 \right] = u_2(\rho_2 - s_{21}u_1 - s_{12}u_2). \end{cases} \quad (1)$$

Les coefficients $d_i, a_{ij}, s_{ij}, \rho_i$ considérés sont ici tous positifs et modélisent des taux de diffusion en espace (coefficients d_i, a_{ij}), de reproduction (coefficients ρ_i) ou de décès par compétitivité (coefficients s_{ij}). Ce système constitue une généralisation substantielle du modèle classique de *Lotka-Volterra* avec diffusion, où les termes a_{ij} sont absents. C'est précisément la présence de a_{12} et a_{21} qui fait de (1) un *système à diffusion croisée* (pour a_{11} et a_{22} on parle d'*auto-diffusion*) : chaque population influe sur la propension de l'autre espèce à diffuser en espace. Cette caractéristique a été proposée dans [138] afin de permettre au modèle de décrire les phénomènes de *ségrégation* où les deux espèces parviennent à une situation d'équilibre sans essentiellement occuper le même habitat. Mathématiquement, cette dernière propriété se traduit par l'existence de solutions stationnaires u_1, u_2 telles que, pour un certain $\varepsilon > 0$, les ensembles de sur-niveau $\{u_1 \geq \varepsilon\}$ et $\{u_2 \geq \varepsilon\}$ soient disjoints. C'est une particularité que n'offrirait pas le système de Lotka-Volterra diffusif : on peut montrer que les états d'équilibres sont alors forcément constants.

Introduit par une question de modélisation, le système de Shigesada, Kawasaki et Teramoto s'est avéré être un objet mathématique extrêmement riche. Nous reviendrons là-dessus plus tard mais annonçons déjà que la littérature existante sur le sujet n'est pas en mesure de nous dire si il existe ou non des solutions régulières globales à un problème couplé (en apparence)

aussi simple que

$$\begin{aligned}\partial_t u_1 - \Delta \left[(2 + u_2) u_1 \right] &= 0, \\ \partial_t u_2 - \Delta \left[(1 + u_1) u_2 \right] &= 0,\end{aligned}$$

pour des données initiales non triviales et les conditions aux bords de notre choix. Nous allons dans ce chapitre nous intéresser au système SKT mais également à plusieurs variantes possibles, permettant d'inclure notamment des taux de diffusion non linéaires ou à portée plus longue en espace.

Afin de simplifier et d'homogénéiser au maximum la présentation, toutes les équations seront considérées sur le cylindrique périodique $Q_T := [0, T] \times \mathbb{T}^N$, où \mathbb{T}^N est le tore plat N -dimensionnel. La plupart des résultats que nous aborderons peuvent être généralisés au cas de l'espace entier ou d'un domaine Ω borné de \mathbb{R}^N , suffisamment régulier, avec une condition de Neumann homogène sur son bord. En fait c'est souvent dans ce dernier cadre qu'ils ont été écrits dans les références citées précédemment, car c'est ce problème aux limites qui est pertinent en dynamique des populations (espèces confinées dans un domaine). Le cas simplifié du tore plat permet de donner un aperçu des difficultés mathématiques liées à la diffusion croisée, en s'affranchissant de certaines considérations techniques.

La première section donne quelques exemples d'équations de diffusion et motive l'utilisation de l'équation de Kolmogorov dans le cadre de la dynamique des populations. Une analyse de cette dernière est proposée dans la section suivante, qui nous servira notamment à donner un sens précis aux composantes des systèmes à diffusion croisées que nous allons considérer. Cela sera aussi l'occasion d'aborder un outil fondamental dans notre approche : le lemme de dualité. Nous présentons dans la Section 3.3 un état de l'art pour la théorie d'existence du système SKT, révélant notamment une structure entropique de prime abord insoupçonnée. Nous généralisons celle-ci dans la Section 3.4 à des variantes du système SKT, produisant ainsi plusieurs théorèmes d'existence pour celles-ci. Nous donnons dans la Section 3.5 un schéma d'approximation robuste dont le cadre d'application englobe tous les systèmes de la section précédente. Enfin, la dernière section s'intéresse à une analyse asymptotique reliant deux types de systèmes à diffusion croisée et motivée par une question posée par Fontbona et Méléard dans [70].

3.1 Équations de diffusions

Pour les lecteurs non familiers à la dynamique des population, l'appellation "diffusion" pour le phénomène représenté par les termes a_{ij} dans le système SKT peut paraître surprenante. Il convient en effet de distinguer l'équation de diffusion de Fick pour une diffusivité μ laquelle s'écrit

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mu \nabla u) = 0, \tag{2}$$

et l'équation de diffusion de Kolmogorov (plutôt attribuée à Fokker et Planck dans la littérature physique) prenant la forme

$$\partial_t u - \Delta(\mu u) = 0. \tag{3}$$

Dans le système (1) l'opérateur de diffusion utilisé relève de la deuxième famille d'équations de diffusion. Il existe plusieurs manières de justifier ce choix.

- (i) Commençons par un raisonnement quelque peu heuristique. L'opérateur de diffusion $-\Delta(\mu u)$ présent dans l'équation de Kolmogorov peut être décomposé en deux morceaux

$$-\Delta(\mu u) = -\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \nabla \cdot (u b), \quad (4)$$

où on a introduit le champ de vecteurs $b := -\nabla \mu$. La décomposition (4) exprime alors la combinaison de deux phénomènes : une *diffusion de Fick* et un *transport conservatif* dans la direction b . Un tel opérateur semble pertinent si on souhaite décrire le comportement de populations qui d'une part diffusent d'autant plus que leurs concurrents sont présents (par exemple par un effet de stress) et d'autre part cherchent à éviter ceux-ci en s'éloignant des zones de forte concentration (transport opposé au gradient). Un argument comparable consiste à remarquer que même si μ n'est pas constant, l'équation (2) autorise les états d'équilibre homogènes : les individus peuvent occuper tout l'espace et ne plus bouger, indépendamment de leurs concurrents. Ce scénario est impossible pour l'équation (3). Le principal défaut de ces considérations heuristiques est qu'elles ne justifient en rien le choix particulier d'une équation de Kolmogorov au sein de toutes les combinaisons possibles

$$\alpha \nabla \cdot (\mu \nabla u) + \beta \nabla \cdot (u \nabla \mu),$$

pour des coefficients positifs α, β non nécessairement égaux.

- (ii) Des justifications formelles du choix de l'équation de Kolmogorov sont proposées dans l'article fondateur [138], basées sur des bilans de flux de part et d'autre d'un réseau de cellules discrétisées. Une autre approche (également formelle) est proposée dans [132], basée sur la compréhension de la densité u comme celle d'un processus stochastique à temps continu, limite d'une marche aléatoire dont l'évolution est guidée par μ . Ce processus est solution d'une équation différentielle stochastique et selon le formalisme adopté (Itô ou Stratonovitch par exemple), on peut alors retrouver une équation ou l'autre.
- (iii) Une ultime voie est de dériver le système SKT à partir d'un autre système d'équations. C'est par exemple la stratégie proposée par Iida, Mimura et Ninomiya dans [94], où le système SKT est formellement obtenu comme une limite d'équations de réaction/diffusion standards. Une autre approche, partant d'un modèle stochastique de population finie, est proposé par Fontbona et Méléard dans [70]. Nous reviendrons vers ce type de résultats dans la Section 3.6.

Mentionnons enfin une troisième famille d'opérateurs de diffusion, qui semble avoir été introduite pour la première fois par Wereide [150] et prenant la forme

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\sqrt{\mu} \nabla (\sqrt{\mu} u)) = 0. \quad (5)$$

Ce troisième exemple (qui empêche également les états d'équilibres constants si μ ne l'est pas) n'a pas été utilisé à notre connaissance en dynamique des population. Pour des exemples issus de la physique et une discussion plus générale sur la rivalité Fick/Kolmogorov, nous renvoyons à [35].

Remarque 3.1. *Dans le cas d'une diffusivité μ indépendante de x , les trois d'équations (2), (3) et (5) se confondent, et on retrouve classiquement l'équation de la chaleur si μ est constante. Dans les systèmes que nous considérerons cela ne sera jamais le cas.*

3.2 L'équation de Kolmogorov

Les résultats que nous présentons dans cette section sont tous issus de [P3]. Certains d'entre eux sont relativement standards, mais l'approche unifiée que nous proposons nous paraît pertinente. Les faits les plus novateurs et les plus marquants arrivent dans le paragraphe 3.2.3. Nous donnons en fin de section quelques repères bibliographiques, permettant de situer précisément notre apport.

Nous nous concentrons sur l'équation introduite en (3), avec un second membre, *i.e.* le problème

$$\partial_t z - \Delta(\mu z) = G, \quad (6)$$

$$z(0, \cdot) = z^0, \quad (7)$$

où les données sont μ , G et z^0 et l'inconnue la fonction z .

Définition 3.1. Soit $G \in L^1(Q_T)$, $z^0 \in L^1(\mathbb{T}^N)$ et μ une fonction mesurable arbitraire. Une fonction z de $L^1(Q_T)$ est une *solution* de (6) – (7) au sens des distributions, ou simplement solution dans $\mathcal{D}'(Q_T)$, si $z\mu \in L^1(Q_T)$ et que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q_T), \quad - \int_{Q_T} z(\partial_t \varphi + \mu \Delta \varphi) = \int_{\mathbb{T}^N} z^0 \varphi(0, \cdot) + \int_{Q_T} G \varphi. \quad (8)$$

Les solutions que nous construirons plus loin pour le système SKT et ses variantes relèveront également de cette définition (pour chacune des composantes du système). L'équation (6) étant linéaire, il paraît relativement simple de construire des solutions dans $\mathcal{D}'(Q_T)$ par un argument d'approximation, mais encore faut-il avoir à disposition une estimation *a priori* sur les solutions de (6). Noter que le principe du maximum ne s'applique pas : la régularité de μ n'est pas suffisante pour écrire (6) sous la forme d'une équation parabolique. En réalité, il n'existe qu'une seule estimation à disposition : il s'agit du *lemme de dualité*, que nous présenterons plus bas.

3.2.1 L'équation duale

Pierre, Martin et Schmitt semblent avoir été les premiers à s'intéresser dans [122, 133], dans le cas d'une diffusivité constante, au problème dual de (6) – (7) pour tirer une estimation *a priori* sur ce dernier. Suivant cette voie, on s'intéresse ici à

$$\partial_t \Phi + \mu \Delta \Phi = S, \quad (9)$$

$$\Phi(T, \cdot) = 0. \quad (10)$$

Remarque 3.2. Contrairement aux équations décrites dans la Section 3.1, (9) n'est pas une équation de diffusion, au sens où il n'existe pas — à notre connaissance — de dérivation formelle pertinente de celle-ci (en dehors du cas où μ ne dépend pas de x).

L'équation duale (9) est beaucoup plus commode à manipuler que (6), grâce à l'estimation *a priori* suivante. En multipliant (9) par $\Delta \Phi$ et en intégrant sur $[t, T] \times \mathbb{T}^N$, il vient, par l'inégalité de Young,

$$\langle \partial_t \Phi, \Delta \Phi \rangle_{L^2([t, T] \times \mathbb{T}^N)} + \frac{1}{2} \|\mu^{1/2} \Delta \Phi\|_{L^2([t, T] \times \mathbb{T}^N)}^2 \leq \frac{1}{2} \|\mu^{-1/2} S\|_{L^2([t, T] \times \mathbb{T}^N)}^2,$$

d'où après une intégration par partie, en utilisant la condition (10),

$$\|\nabla\Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}^N))}^2 + \|\mu^{1/2}\Delta\Phi\|_{L^2([t,T]\times\mathbb{T}^N)}^2 \leq \|\mu^{-1/2}S\|_{L^2([t,T]\times\mathbb{T}^N)}^2. \quad (11)$$

Cette estimation ne contrôle pas les basses fréquences de Φ , ce que nous pouvons corriger en remarquant, toujours par la condition (10), qu'une intégration de (9) sur $[t, T] \times \mathbb{T}^N$ conduit à

$$\int_{\mathbb{T}^N} \Phi(t) = \int_t^T \int_{\mathbb{T}^N} (\mu\Delta\Phi - S),$$

d'où l'on tire par l'inégalité de Cauchy-Schwarz le contrôle suivant sur la moyenne de Φ au cours du temps

$$\left| \int_{\mathbb{T}^N} \Phi(t) \right| \leq \|\mu\|_{L^1(Q_T)}^{1/2} \left(\|\mu^{1/2}\Delta\Phi\|_{L^2(Q_T)} + \|\mu^{-1/2}S\|_{L^2(Q_T)} \right),$$

si bien que par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et en exploitant (11) on obtient

$$\|\Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}^N))}^2 \lesssim \left(\|\mu\|_{L^1(Q_T)} + 1 \right) \|\mu^{-1/2}S\|_{L^2(Q_T)}^2, \quad (12)$$

où la constante cachée derrière \lesssim ne dépend que de la dimension.

Les estimations (11) – (12) dessinent un cadre fonctionnel où la construction de solutions au problème (9) – (10) découle directement d'une régularisation adéquate de l'opérateur $\partial_t + \mu\Delta$ (on renvoie à [P3] pour une formalisation de ce raisonnement) :

Proposition 3.1. *Soit $\mu \in L^1(Q_T)$ minorée par $\alpha > 0$. Pour toute fonction mesurable S telle que $\mu^{-1/2}S \in L^2(Q_T)$ il existe*

$$\Phi \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{T}^N)) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{T}^N)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{T}^N)),$$

telle que $\mu^{1/2}\Delta\Phi \in L^2(Q_T)$, $\mu^{-1/2}\partial_t\Phi \in L^2(Q_T)$, solution du problème (9) – (10) et satisfaisant les estimations (11) – (12).

Remarque 3.3. *Les équations (9) – (10) sont satisfaites dans $L^2(Q_T)$ et $L^2(\mathbb{T}^N)$.*

L'estimation de dualité que nous présentons ci-après découle de ce seul résultat d'existence. L'unicité de la solution Φ au problème (9) – (10) dans la classe de fonctions introduite est une question extrêmement délicate que nous aborderons dans le paragraphe 3.2.3. L'une des principales innovations de [P3] est d'avoir exploité — lorsqu'elle est avérée — cette propriété d'unicité pour démontrer des résultats de stabilité et de compacité sur l'équation de Kolmogorov.

3.2.2 Le lemme de dualité

À partir de la Proposition 3.1 on peut obtenir une estimation *a priori* sur les solutions de (6) – (7) si z^0 et G sont supposées appartenir à $H^{-1}(\mathbb{T}^N)$ et $L^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{T}^N))$: on prend tout simplement une fonction Φ solution de (9) – (10) avec $S = \mu z$ dans la formulation faible (8) :

$$\int_{Q_T} \mu z^2 = - \int_{\mathbb{T}^N} z^0 \Phi(0, \cdot) - \int_{Q_T} G\Phi, \quad (13)$$

d'où l'on tire,

$$\int_{Q_T} \mu z^2 = \|\mu^{1/2} z\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq \|z^0\|_{H^{-1}(\mathbb{T}^N)} \|\Phi(0)\|_{H^1(\mathbb{T}^N)} + \|G\|_{L^1(0,T;H^{-1}(\mathbb{T}^N))} \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{T}^N))}.$$

Mais (11) et (12) donnent en particulier que (ici $\mu^{-1/2} S = \mu^{1/2} z$)

$$\|\Phi\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{T}^N))}^2 \lesssim \left(\|\mu\|_{L^1(Q_T)} + 1 \right) \|\mu^{1/2} z\|_{L^2(Q_T)}^2,$$

si bien qu'on a finalement obtenu l'estimation suivante, à une constante près ne dépendant que de la dimension,

$$\|\mu^{1/2} z\|_{L^2(Q_T)} \lesssim \left(\|\mu\|_{L^1(Q_T)} + 1 \right)^{1/2} \left(\|z^0\|_{H^{-1}(\mathbb{T}^N)} + \|G\|_{L^1(0,T;H^{-1}(\mathbb{T}^N))} \right). \quad (14)$$

L'estimation (14) sur une solution hypothétique de (6) – (7) est connue dans la littérature sous le nom de *lemme de dualité* ou parfois directement attribuée à Michel Pierre, l'auteur commun des deux contributions initiales où cette propriété surprenante est apparue : [122] et [133].

Remarque 3.4.

- On peut renforcer cette estimation en affaiblissant la régularité de G , car les solutions du problème dual sont mieux que juste $L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{T}^N))$.
- Une estimation similaire existe pour l'inéquation $\partial_t z - \Delta(\mu z) \leq rz$, si on ajoute l'hypothèse a priori que $z \geq 0$.

Mais que vient faire le mot “dualité” dans cette affaire ? En l'état aucun énoncé rigoureux n'a été donné : Φ n'a *a priori* pas assez de régularité pour être utilisée dans la formulation faible (13). La méthode proposée dans [122, 133] consiste à ne pas prendre $S = \mu z$ pour définir Φ , mais une fonction test φ arbitraire ce qui revient à régulariser Φ et permet d'obtenir une estimation du type

$$\int_{Q_T} z \varphi \lesssim \left(\|\mu\|_{L^1(Q_T)} + 1 \right)^{1/2} \left(\|z^0\|_{H^{-1}(\mathbb{T}^N)} + \|G\|_{L^1(0,T;H^{-1}(\mathbb{T}^N))} \right) \|\mu^{-1/2} \varphi\|_{L^2(Q_T)},$$

de laquelle on déduit *par dualité* l'inégalité (14).

À l'aide de cette estimation et d'une d'approximation standard, on est en mesure de construire une solution au problème (6) – (7) :

Proposition 3.2. *Soit $\mu \in L^1(\mathbb{T}^N)$ uniformément minorée par une constante positive, $z^0 \in H^{-1}(\mathbb{T}^N)$ et $G \in L^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{T}^N))$. Il existe au moins une solution z au problème (6) – (7), au sens de la Définition 3.1, laquelle vérifie de plus $\mu^{1/2} z \in L^2(Q_T)$ (soit donc bien $\mu z \in L^1(Q_T)$) et (14).*

De nombreuses variantes de cette méthode sont possibles. Par exemple, dans le cas d'une donnée initiale bornée, on peut obtenir une estimation sur la primitive en temps de μz , comme cela est fait pour la première fois dans [110]; nous renvoyons à [109] pour une présentation générale de ce type de résultats. Dans le cas d'un système (avec diffusion croisée), il a été remarqué dans [12] que l'on peut avantageusement se ramener au cas scalaire en sommant toutes

les équations, l'estimation de dualité permettant alors (au moins) un contrôle quadratique sur le vecteur solution. Nous exploiterons cela dans la Section 3.4.

Un autre aspect intéressant de la méthode de dualité est son adaptativité à une discrétisation en temps. Cela a par exemple été effectué dans [108], puis généralisé dans [A7] et [A10] dans le cadre d'un schéma générique sur lequel nous reviendrons dans la Section 3.5.

La généralisation la plus marquante du lemme de dualité reste la percée de Desvillettes, Cañizo et Fellner. Ceux-ci ont adapté dans [53] un argument de perturbation dû à Meyers (utilisé pour un gain de régularité dans un contexte elliptique, voir [124]) et sont ainsi parvenus à une version considérablement améliorée du lemme de dualité permettant de propager des normes L^p pour certains $p > 2$, si le coefficient de diffusion μ est supposé borné. L'utilisation d'un argument "à la Meyers" pour une équation parabolique du type (9) avait déjà été explorée par Campanato dans [23], mais uniquement dans le cas hilbertien et sans en tirer de conclusions sur l'équation de Kolmogorov (normal : les lemmes de dualité n'étaient pas connus à l'époque!).

L'hypothèse d'une borne supérieure uniforme sur μ n'a pas pour seule conséquence un raffinement du lemme de dualité, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

3.2.3 Le cas particulier d'une diffusivité bornée

Comme remarqué précédemment, la Proposition 3.1 ne renseigne en rien sur l'unicité des solutions construites. À notre connaissance, il s'agit d'un problème totalement ouvert et qui nous paraît — contrairement aux apparences — particulièrement épineux. Comme dans [P3] nous le résumons ainsi :

Question 3.1. *Soit $\mu \in L^1(Q_T)$ uniformément minorée par une constante $\alpha > 0$. On considère*

$$\Phi \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{T}^N)) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{T}^N)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{T}^N)),$$

telle que $\mu^{-1/2} \partial_t \Phi \in L^2(Q_T)$, $\mu^{1/2} \Delta \Phi \in L^2(Q_T)$ solution de

$$\begin{aligned} \Phi(T, \cdot) &= 0, \\ \partial_t \Phi + \mu \Delta \Phi &= 0. \end{aligned}$$

A-t-on $\Phi = 0$?

On trouvera dans [P3] une discussion sur les difficultés soulevées par la Question 3.1 ainsi qu'une réponse positive à cette dernière, dans les cas suivants :

- (i) μ borné;
- (ii) μ ne dépend que de x ;
- (iii) μ ne dépend que de t ;
- (iv) μ satisfait la condition A_2 de Muckenhoupt.

La réponse positive à la Question 3.1 dans le cas (i) avait déjà été établie dans [23]. Les deux cas suivants sont également assez élémentaires. Le plus sophistiqué reste (iv) qui repose sur une condition de régularité assez faible introduite par Muckenhoupt [126], que nous présentons brièvement dans l'Annexe A.

Dans les énoncés de cette section nous nous placerons toujours dans le cas $\mu \in L^\infty(Q_T)$, bien que les résultats en question soient tous généralisables aux cas (ii), (iii) et (iv) ci-haut : seule l'unicité pour l'équation duale est cruciale.

La première conséquence de l'unicité au problème (9) – (10) est que l'on peut définir sur $L^2(Q_T)$ une application $S \mapsto \Phi_\mu^S$ sans ambiguïté, où Φ_μ^S est justement l'unique solution de (9) – (10), dans la classe de régularité décrite par la Question 3.1. En utilisant les estimations (11) – (12) fournies par la Proposition 3.1 et le principe du maximum (pour une régularisation de μ), on obtient le résultat suivant établi dans [P3].

Proposition 3.3. *Pour $\mu \in L^\infty(Q_T)$ uniformément minorée par une constante positive, l'application $S \mapsto \Phi_\mu^S$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(Q_T)$ dans $L^2(0, T; H^2(\mathbb{T}^N)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{T}^N))$, compact de $L^2(Q_T)$ dans $\mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{T}^N))$ et négatif au sens de l'implication $S \geq 0 \Rightarrow \Phi_\mu^S \leq 0$.*

Le point de vue suivi dans [P3] est de transférer un maximum d'information de l'équation duale vers l'équation de Kolmogorov. L'estimation de dualité (14) est un exemple de tel transfert. Il se trouve qu'avec l'unicité pour le problème dual, on peut dire plus de choses encore sur l'équation de Kolmogorov, à commencer par le résultat suivant, également issu de [P3].

Théorème 3.1. *Soit $\mu \in L^\infty(Q_T)$ uniformément minorée par une constante positive, $G \in L^2(Q_T)$ et $z^0 \in L^2(\mathbb{T}^N)$. Il existe une unique solution z au problème (6) – (7), au sens de la Définition 3.1. Celle-ci vérifie l'estimation (14) et bénéficie de la formulation suivante, totalement équivalente à (8) :*

$$\forall S \in L^2(Q_T), \quad - \int_{Q_T} zS = \int_{\mathbb{T}^N} z^0 \Phi_\mu^S(0) + \int_{Q_T} G \Phi_\mu^S, \quad (15)$$

où Φ_μ^S est l'unique solution du problème (9) – (10).

Remarque 3.5. *De la même manière que dans la Remarque 3.4, nous pourrions relaxer les hypothèses de régularité sur z^0 et G .*

Définition 3.2. *Lorsqu'on est dans le cadre d'application du Théorème 3.1 on dit que z est une solution duale du problème (6) – (7).*

Omettons pour un moment l'hypothèse $\mu \in L^\infty(Q_T)$ et intéressons-nous aux formulations (8) et (15). La seconde est *a priori* plus forte que la première, car l'espace des fonctions tests est enrichi ; elles sont parfaitement équivalentes dès lors que $\mathcal{D}(Q_T)$ est dense dans l'espace suivant (muni de la norme idoïne)

$$\left\{ \Phi \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{T}^N)) : \mu^{-1/2} \partial_t \Phi + \mu^{1/2} \Delta \Phi \in L^2(Q_T) \right\}.$$

Ce point est relié d'une manière ou d'une autre à la densité des fonctions régulières dans certains espaces de Sobolev à poids, par exemple l'ensemble des fonctions Φ de $L^2(Q_T; \mu dx dt)$ dont le gradient appartient aussi à cet espace. C'est précisément le point d'achoppement rencontré lorsque l'on souhaite répondre à la Question 3.1 sans l'hypothèse $\mu \in L^\infty(Q_T)$ ¹, mais

1. Cela explique l'apparition de la condition A_2 de Muckenhoupt ci-haut, puisque comme expliqué dans l'Annexe A, celle-ci est suffisante à assurer la densité des fonctions régulières.

quand cette dernière condition est vérifiée les espaces $L^2(Q_T; \mu dx dt)$ et $L^2(Q_T; \mu^{-1} dx dt)$ se confondent avec $L^2(Q_T)$ et la difficulté est en quelque sorte évacuée.

En plus d'une formulation variationnelle plus forte, les solutions duales disposent d'une autre propriété exprimant leur régularité en comparaison des simples solutions au sens des distributions : elles vérifient une variante du principe du maximum, lequel est avéré pour l'équation de Kolmogorov (6) dans le cas d'une diffusivité régulière.

Proposition 3.4. *Soit z la solution duale du problème (6) – (7). On a (disjointement)*

- (i) si z^0 et G sont des fonctions positives, alors z aussi ;
- (ii) si $G \leq rz$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$, alors $z(t, x) \leq \tilde{z}(t, x)e^{rt}$ où \tilde{z} est la solution duale du problème

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{z} - \Delta(\mu \tilde{z}) &= 0, \\ \tilde{z}(0, \cdot) &= z_0. \end{aligned}$$

La preuve du point (i) présentée dans [P3] suit l'argument de Stampacchia qui s'applique très facilement au cadre de solutions considérées : la partie négative de z est un élément de $L^2(Q_T)$ admissible pour la formulation (15). Le point (ii) en découle alors facilement en considérant l'équation vérifiée par la fonction $(t, x) \mapsto e^{-rt}z(t, x)$.

Nous sommes maintenant en mesure de récolter un premier fruit du formalisme que nous avons introduit jusqu'à présent. Il s'agit d'un résultat de stabilité non trivial pour l'équation de Kolmogorov qui, à notre connaissance, n'existe pas dans la littérature. Il constitue un exemple tout à fait marquant du lien qui peut s'opérer entre les notions d'*unicité* et de *stabilité* (séquentielle, s'entend) ; ce lien nous était apparu plus tôt dans ce manuscrit, dans un tout autre contexte, dans les Sections 1.2 et 1.3 du Chapitre 1.3, à travers le résultat pionnier [57, Thm II.4] de DiPerna et Lions.

Proposition 3.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère $z_n^0 \in L^2(Q_T)$, $\mu_n \in L^\infty(Q_T)$ telle que $\inf_n \inf_{Q_T} \mu_n > 0$, $G_n \in L^2(Q_T)$ et $z_n \in L^2(Q_T)$ la solution duale du problème*

$$\partial_t z_n - \Delta(\mu_n z_n) = G_n, \tag{16}$$

$$z_n(0, \cdot) = z_n^0. \tag{17}$$

On suppose l'existence de $z^0 \in L^2(\mathbb{T}^N)$, $G \in L^2(Q_T)$ et $\mu \in L^\infty(Q_T)$ pour lesquelles on a les convergences suivantes

$$(z_n^0)_n \rightharpoonup z^0 \text{ dans } L^2(\mathbb{T}^N), \quad (G_n)_n \rightharpoonup G \text{ dans } L^2(Q_T), \quad (\mu_n)_n \rightarrow \mu \text{ dans } L^1(Q_T).$$

Alors $(\mu_n^{1/2} z_n)_n$ et $(z_n)_n$ convergent dans $L^2(Q_T)$ respectivement vers $\mu^{1/2} z$ et z , où z est la solution duale du problème

$$\partial_t z - \Delta(\mu z) = G, \tag{18}$$

$$z(0, \cdot) = z^0. \tag{19}$$

Remarque 3.6. *Aucune hypothèse de borne uniforme dans $L^\infty(Q_T)$ n'est exigée sur la suite $(\mu_n)_n$, uniquement une appartenance.*

Démonstration. Voici une brève présentation de la preuve donnée dans [P3] — l’unicité des solutions mises en jeu y est fondamentale. Des considérations élémentaires conduisent à l’implication $(\mu_n^{1/2} z_n)_n \ddot{\in} L^2(Q_T) \Rightarrow (z_n)_n \ddot{\in} L^2(Q_T)$ (en utilisant la minoration uniforme de μ_n). On vérifie ensuite que toute valeur d’adhérence faible de $(z_n)_n$ dans $L^2(Q_T)$ est nécessairement solution de (18) – (19) donc entièrement déterminée, puisque l’on s’est placé dans un cadre d’unicité ($\mu \in L^\infty(Q_T)$). On s’est ainsi ramené à démontrer uniquement $(\mu_n^{1/2} z_n)_n \ddot{\in} L^2(Q_T)$. L’estimation de dualité nous fournit une borne $L^2(Q_T)$ sur $(z_n)_n$, donc, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $(z_n)_n \rightharpoonup z$ dans $L^2(Q_T)$. Par produit fort/faible, on en déduit que $(\mu_n z_n)_n \rightharpoonup \mu z$ dans $\mathcal{D}'(Q_T)$. On introduit alors pour tout n la solution Φ_n de l’équation duale

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_n + \mu_n \Delta \Phi_n &= \mu_n z_n, \\ \Phi_n(T, \cdot) &= 0. \end{aligned}$$

Comme précédemment, il y a bien unicité de la solution. On établit d’abord une propriété de compacité sur la suite $(\Phi_n)_n$ (en exploitant les estimations (11) – (12)). Cela permet de passer à la limite dans les équations précédentes et ainsi d’établir (par unicité de la limite possible) que $(\Phi_n)_n$ converge vers Φ , la solution de

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi + \mu \Delta \Phi &= \mu z, \\ \Phi(T, \cdot) &= 0. \end{aligned}$$

La fin de la preuve exploite la formulation faible (15) des équations (16) – (17) et (18) – (19) proposée dans le Théorème 3.1 :

$$\begin{aligned} - \int_{Q_T} \mu_n z_n^2 &= \int_{\mathbb{T}^N} z_n^0 \Phi_n(0) + \int_{Q_T} G_n \Phi_n, \\ - \int_{Q_T} \mu z^2 &= \int_{\mathbb{T}^N} z^0 \Phi(0) + \int_{Q_T} G \Phi. \end{aligned}$$

La convergence forte établie sur $(\Phi_n)_n$ permet de passer à la limite dans le second membre de la première ligne pour récupérer l’expression analogue dans la seconde : nous venons d’obtenir la convergence des normes $\|\mu_n^{1/2} z_n\|_{L^2(Q_T)}^2 \rightarrow \|\mu^{1/2} z\|_{L^2(Q_T)}^2$. \square

Nous reviendrons sur ce résultat dans le dernier chapitre, en l’utilisant pour obtenir une propriété de compacité générique pour l’équation de Kolmogorov, au cœur de l’analyse asymptotique que nous avons mené dans [P3]. Cette dernière sera abordée dans la Section 3.6 de ce chapitre.

3.2.4 Repères bibliographiques

Comme nous l’expliquions en début de section, plusieurs des résultats établis précédemment recouvrent une partie de la littérature existante sur les équations paraboliques. C’est le cas de l’estimation de dualité, initialement apparue dans [122, 133] et — de manière encore plus classique — également celui de l’unicité (ou de la régularité) des solutions faibles, que ce soit pour l’équation de Kolmogorov (6) ou bien pour l’équation duale (9). Prenons le temps de situer notre apport par rapport aux travaux existants.

Compte tenu de l’étendue de la théorie des équations paraboliques et afin de produire un aperçu digeste de l’état de l’art en lien avec cette section, nous nous concentrons principalement

sur les résultats liés à des coefficients singuliers (mesurables, tout au plus bornés) non dégénérés (puisque la diffusivité μ considérée est toujours strictement positivement minorée).

Historiquement, les premiers résultats génériques (problème de Cauchy, théories de Schauder et De Giorgi-Nash-Moser) sur les équations paraboliques portaient sur des opérateurs à forme divergence *i.e.* dont l'action prend la forme $\partial_t z - \operatorname{div}(M\nabla z)$ où M est un champ matriciel auto-adjoint uniformément elliptique. La symétrie de ces opérateurs paraboliques simplifie grandement leur analyse. L'équation de Fick (2) relève de cette famille, mais ce n'est pas le cas des équations de Kolmogorov ou de l'équation duale. Bien sûr, au prix d'une ou deux dérivées spatiales de μ , il est possible de mettre ces équations sous forme divergence, mais nous nous sommes justement placés dans un cadre de très faible régularité sur μ , donc une telle transformation n'est pas possible.

Il existe ensuite deux cas "non divergentiel", les premiers de la forme $Lz := \partial_t z - M : (D^2 z)$ et les seconds $\partial_t z - (D^2 : M)z$, où M est à nouveau un champ matriciel et $D^2 z$ la hessienne de z , la notation $(D^2 : M)z$ signifiant $\partial_{ij}(m_{ij}z)$ avec la convention d'indices répétés. Noter qu'à un changement de signe près, ces opérateurs sont formellement adjoints l'un de l'autre (en remplaçant M par sa transposée), on notera donc de manière abusive L^* le deuxième type d'opérateurs.

Pour la première famille, de laquelle relève l'équation duale (9), on doit à Krylov et Safonov [104] des estimées hölderiennes et des inégalités de Harnack sous des conditions assez faibles sur les coefficients (mesurables bornés). Cette généralisation de la théorie de De Giorgi-Nash-Moser citée ci-haut, ne s'applique qu'aux solutions localement bornées dans un esprit d'estimations *a priori*. La question un peu différente du problème de Cauchy a été traitée plus tard par Krylov (voir l'ouvrage [103]), mais dans un cadre de régularité Sobolev pour la solution et une hypothèse plus restrictive sur les coefficients. Plus précisément, si ceux-ci sont supposés mesurables, bornés et VMO (pour Vanishing Mean Oscillation) alors pour un exposant $1 < p < \infty$, on a une estimation du type $\|z\|_p + \|D^2 z\|_p + \|\partial_t z\|_p \lesssim \|z\|_p + \|Lz\|_p$. Un tel contrôle permet bien sûr de répondre positivement à la Question 3.1, à condition que μ soit bornée et VMO. La seconde hypothèse est en fait superflue : l'unicité pour la simple équation duale, dans le cas d'une diffusivité mesurable bornée, est au moins connue depuis [23]. À ce titre, la théorie de Krylov développée dans [103], qui semble être la technologie la plus poussée à disposition pour les opérateurs de type L , n'est pas pertinente vis-à-vis de la Question 3.1 que nous avons posée ci-haut.

Pour les opérateurs de type L^* , desquels relève l'équation de Kolmogorov (6), l'analyse est plus délicate. Pour commencer, avec des coefficients singuliers comme ceux que nous considérons (donc, tout au plus bornés), il n'existe pas à notre connaissance d'estimations de régularité *a priori*. Reste la question du problème de Cauchy et plus précisément de l'unicité des solutions. Plusieurs stratégies ont été employées pour établir celle-ci sous des hypothèses qui ne sont pas toujours comparables les unes aux autres ; il n'est donc pas évident de faire ressortir un résultat en particulier. Une première approche, basée sur le principe d'Holmgren, a d'abord été développée par Friedman dans [71] puis Stroock et Varadhan dans [142], mais sous une hypothèse de régularité (au moins) hölderienne sur les coefficients. L'idée, qui n'est pas sans rappeler l'estimation de dualité, consiste à s'assurer que l'image de l'opérateur adjoint (qui est de type L) est dense afin de montrer que le noyau de l'opérateur de type L^* de départ est nécessairement trivial. Notons que ce même principe est revisité dans [17] à la lumière des travaux de Krylov mentionnés ci-haut sur les opérateurs de type L , aboutissant à l'unicité dans

le cas d'un champ matriciel M mesurable, borné et VMO. Encore une fois, dans le cadre de l'équation de Kolmogorov, la troisième hypothèse est superflue (Théorème 3.1).

Il existe un lien très fort entre les probabilités et les opérateurs de type L^* . Si on ajoute à ceux-ci un terme de convection $(u \cdot \nabla)z$, on obtient un objet jouant le même rôle vis-à-vis des EDS que l'opérateur de transport pur $\partial_t z + (u \cdot \nabla)z$ pour les EDO : les courbes caractéristiques sont perturbées aléatoirement par un bruit blanc dont l'amplitude est gouvernée par la taille des coefficients du champ matriciel M . Le Bris et Lions ont adapté dans [22] la théorie DiPerna-Lions développée dans [57] aux trois familles d'équations paraboliques citées précédemment (voir aussi [67] pour une approche similaire), mais cela nécessite la régularité Sobolev des coefficients. Ainsi, vis-à-vis de [57], le décor change mais les fondations sont les mêmes : la régularité Sobolev sur les coefficients permet le traitement adéquat d'un commutateur, lequel ouvre la voie à l'unicité pour l'équation parabolique étudiée et permet de définir un cadre bien posé pour les EDS associées. Ce type d'approche n'est malheureusement pas exploitable dans notre cas puisqu'aucune régularité sur μ n'est supposée.

Dans le cadre spécifique de l'équation de Kolmogorov (6), reprenant l'analyse unidimensionnelle imaginée dans [16] (elle-même inspirée des travaux de Brézis-Crandall [21]), Belaribi et Russo ont établi dans [11] l'unicité de la solution sous une condition extrêmement faible sur la diffusivité μ : mesurable, uniformément positivement minorée et telle que $\mu z \in L^2(Q_T)$. Cette dernière condition est un peu surprenante et ne semble pas naturelle au vu des estimations de dualité qui produisent plutôt l'appartenance $\mu^{1/2}z \in L^2(Q_T)$. Ces travaux ont par la suite été généralisés par Bogachev, Röckner et Shaposhnikov dans [18] à d'autres opérateurs de type L^* , toujours sous une hypothèse très faible sur les coefficients. Notons que les articles [11, 16, 18], tous issus de la communauté probabiliste, s'intéressent également aux cas dégénérés où μ peut s'annuler : le cadre fonctionnel s'élargit alors et l'équation peut produire des solutions z à valeurs mesures, non nécessairement absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

En définitive, les résultats d'unicité pour l'équation de Kolmogorov et l'équation duale ont donc déjà été produits dans la littérature par des approches différentes de la nôtre (nécessitant parfois des hypothèses ou un formalisme plus lourd). L'originalité de notre analyse réside dans l'utilisation simultanée de ces propriétés d'unicité associée à la formulation élargie (15) pour la preuve de la Proposition 3.5 ; à notre connaissance, cette stabilité séquentielle des solutions est un résultat totalement nouveau. Enfin, la Question 3.1 ne peut malheureusement pas être traitée grâce à la littérature existante et les cas d'unicité (ii), (iii) et (iv) ne semblent pas avoir été établis précédemment. Une perspective naturelle serait de chercher à établir la Proposition 3.5 dans le cadre d'unicité proposé par [11, 18] pour l'équation de Kolmogorov ($\mu z \in L^2(Q_T)$), la difficulté principale étant que la formulation élargie (15) n'est *a priori* plus satisfaite.

3.3 Théorie d'existence pour le système SKT

Cette section est purement bibliographique. Nous retraçons les contributions liées à l'existence de solution pour le système (1) et donnons en fin de section quelques perspectives qui nous semblent intéressantes sur le sujet.

3.3.1 22 ans

La théorie d'existence pour le système SKT (généralement associé à des conditions de Neumann homogènes) est une épopée qui n'a démarré que quelques années après l'article fondateur [138]. Il semble que pendant cette première période, la communauté mathématique s'est surtout intéressée aux états stationnaires du système et à leur (in)stabilité, ce qui est naturel au vu de la motivation originelle du modèle. Nous n'entamons pas d'état de l'art sur le sujet des équilibres de (1) pour lequel nous renvoyons simplement à l'article important [116] et au rapport assez complet de Jüngel [98]. Nous faisons donc un bond de 5 ans après la parution de [138], lorsque paraît le premier théorème d'existence concernant le système SKT. Il s'agit de l'article [101] de Kim, offrant un cadre d'application très limité : le système n'est considéré qu'en une dimension d'espace, l'auto-diffusion est absente, les solutions sont régulières mais locales sauf si tous les coefficients du systèmes sont égaux à 1 (auquel cas on peut ramener celui-ci à une équation de la chaleur). L'étroitesse de ce premier résultat et le temps qu'il faudra (le titre de ce paragraphe) pour aboutir à des solutions globales au système complet (1) sont autant de signes évocateurs des difficultés que renferment celui-ci. De nombreux résultats partiels ont suivi [101], les restrictions portant en général sur les coefficients du systèmes, en essayant de limiter autant que possible l'effet de la diffusion croisée comme le propose Deuring [56] avec une hypothèse de petitesse sur les taux correspondants.

Un pas important concernant la compréhension du système SKT fut franchit par Amann dans [4, 5], par l'intermédiaire d'un résultat à portée beaucoup plus large. Il s'agit d'un théorème général portant sur les systèmes paraboliques quasi-linéaires qui fournit l'existence de solutions locales en même temps qu'un critère nécessaire pour leur explosion : le blow-up ne peut se produire qu'avec celui de certaines normes de Sobolev. Ce résultat a permis de revisiter de nombreux théorèmes portant sur le système SKT, qui ne produisaient jusqu'à présent que des solutions locales, notamment dans les cas triangulaires, *i.e.* sous l'hypothèse $a_{12}a_{21} = 0$. Cette dernière réduit d'une part la non linéarité du système mais offre surtout la possibilité d'invoquer un principe du maximum pour l'une des deux équations. À l'aide du théorème d'Amann, l'existence et l'unicité d'une solution régulière globale dans le cas triangulaire, après avoir longtemps été limitée soit par la taille des autres coefficients [105, 106, 134, 135, 147, 154–156], soit par la dimension de l'espace [37, 116, 145], a finalement été établie en toute généralité par Hoang, Nguyen et Phan dans [91].

L'obtention d'un résultat similaire à [91] dans le cas "plein", *i.e.* $a_{12}a_{21} \neq 0$ dans (1), est un défi majeur. Plusieurs auteurs ont essayé [112, 149, 153], exigeant en général une très forte contrainte sur les coefficients afin d'invoquer le théorème d'Amann. La plus récente contribution dans ce domaine semble être l'article [117] de Lou et Winkler. La contrainte $d_1 = d_2$ introduite par Kim avait permis la construction de solutions régulières en dimension 1 (voir [101, 139]), [117] permet d'étendre ce résultat jusqu'à la dimension 3.

3.3.2 Le théorème de Chen et Jüngel

Notons que pour l'instant, il n'a été question que de solutions régulières. Puisque l'on ne sait pas se prononcer sur la globalité de celles-ci (sans contrainte sur les coefficients), *quid* des solutions faibles ? La principale obstruction à l'élaboration d'une méthode d'approximation/compacité est que le système SKT ne dispose pas d'estimation *a priori* classique. Dans le cadre de solutions faibles il n'est même pas clair que celles-ci soient automatiquement positives (même si on part d'une donnée initiale positive), car il n'existe pas de principe du maximum

pour les systèmes d'équations paraboliques. Pour souligner la difficulté qui se cache derrière le système SKT, on peut introduire sa *matrice de diffusion*. En notant

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

la matrice de diffusion du système (1) est une application $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ pour laquelle le système (1) sans second membre se synthétise en une équation vectorielle quasi-linéaire

$$\partial_t U - \nabla \cdot (M(U)\nabla U) = 0, \quad (21)$$

où les notations quelque peu abusives $\nabla \cdot$ et ∇ sont à comprendre composantes à composantes. L'annulation des termes de réaction que nous avons opéré ici n'a pas d'influence sur la structure entropique que nous nous proposons d'introduire, aussi effectuerons-nous souvent cette simplification dans cette section et les suivantes. Une situation confortable pour l'analyse du système parabolique (21) est celle où la matrice de diffusion est à valeurs dans $S_2^+(\mathbb{R})$: en intégrant en espace le produit scalaire de (21) avec U , on dispose alors de l'égalité d'énergie suivante

$$\frac{d}{dt} \|U(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \int_{\mathbb{T}^N} Q_{M(U)}(\nabla U)(t) = 0, \quad (22)$$

où pour une matrice symétrique S , on a noté Q_S la forme quadratique associée. Cette identité fournit la décroissance de $t \mapsto \|U(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}$ et même un contrôle de gradient pour peu que M prenne (uniformément) ses valeurs dans $S_2^{++}(\mathbb{R})$. Cette situation idéale est bien loin de celle que nous considérons. En effet, un calcul élémentaire mène à l'expression suivante pour la matrice de diffusion du système (1) :

$$M(U) := \begin{pmatrix} d_1 + 2a_{11}u_1 + a_{12}u_2 & a_{12}u_1 \\ a_{21}u_2 & d_2 + 2a_{22}u_2 + a_{21}u_1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Pour des densités positives, cette matrice a une trace et un déterminant positifs mais n'est pas symétrique. De plus, on vérifie par le calcul que la partie symétrique de $M(U)$ n'a pas un déterminant positif en général.

Cette hostilité du système a pour ainsi dire figé la théorie des solutions faibles jusqu'en 2003, date de parution de [73]. Dans cet article, Galiano, Garzón et Jüngel établissent le premier résultat d'existence globale sur le système SKT, sans restriction sur les coefficients (en dehors de leur positivité), mais uniquement dans le cas unidimensionnel. Ce travail repose tout d'abord sur une *symétrisation* du système, qui revient à effectuer le changement de variable suivant

$$W := \begin{pmatrix} \ln(a_{21}u_1) \\ \ln(a_{12}u_2) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

cette nouvelle inconnue étant solution d'une équation quasi-linéaire de la forme (21) mais avec une matrice de diffusion symétrique et positive. En plus de cette réécriture symétrisée, une fonctionnelle de Lyapunov pour le système SKT est mise en évidence dans [73]. Elle prend la forme suivante (en notant $\psi(z) := z \ln(z) - z$)

$$E(u_1, u_2) := \int_{\mathbb{T}^N} \frac{1}{a_{12}} \psi(u_1) + \frac{1}{a_{21}} \psi(u_2), \quad (25)$$

et vérifie le long d'une solution (u_1, u_2) au système (1) (sans termes de réaction) l'inégalité formelle suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u_1, u_2)(t) + \int_{\mathbb{T}^N} \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} |\nabla u_1|^2 + \frac{a_{22}}{a_{21}} |\nabla u_2|^2 \right) \\ + \int_{\mathbb{T}^N} \left(\frac{d_1}{a_{12}} |\nabla \sqrt{u_1}|^2 + \frac{d_2}{a_{21}} |\nabla \sqrt{u_2}|^2 + |\nabla \sqrt{u_1 u_2}|^2 \right) \leq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Remarque 3.7. *La simultan     de ces deux bonnes nouvelles (symétrisation du système et existence d'une fonctionnelle de Lyapunov) n'est pas une coïncidence, nous renvoyons à [46] et [98] pour une explication plus poussée de ce phénomène.*

Remarque 3.8. *L'ajout des termes de réaction du système (1) conduit simplement à l'utilisation d'un lemme de Grönwall. Il est par ailleurs intéressant de noter que les termes d'auto-diffusion associés aux coefficients a_{11} et a_{22} ont tendance à régulariser le système.*

Même si cette estimation est de bon augure pour la construction de solutions faibles au système SKT, il reste encore à définir un processus d'approximation adéquat adapté à celle-ci. Il est à noter que, par sa formulation elle-même, (26) suppose la positivité des densités u_1 et u_2 . Si on souhaite mettre en place une procédure d'approximation du système basée sur (26), il faudra donc s'assurer de la positivité de l'approximation elle-même. C'est une grosse contrainte pour le schéma : on ne peut pas chercher U dans un espace vectoriel de fonctions régulières (comme dans la méthode de Galerkin par exemple). Galiano *et al.* ont réussi à contourner cette difficulté en exploitant la symétrisation liée au changement de variable (24) : l'approximation de Galerkin est effectuée sur W , au lieu de U . La positivité est ainsi acquise par construction et on a même un contrôle uniforme si W est bornée.

Ce schéma de preuve a par la suite été adapté dans [29] pour traiter le cas multi-dimensionnel, puis une nouvelle fois en 2006 dans [30] où — pour la première fois — l'existence globale de solutions faibles au système SKT total est établie, sans utilisation cruciale des termes d'auto-diffusion (voir Remarque 3.8), ce qui était le cas dans [29]. Le résultat suivant est extrait du théorème principal de [30] (nous ne précisons pas la régularité exacte des solutions construites).

Théorème 3.2 (Chen-Jüngel, [30]). *Soient, pour $i, j \in \{1, 2\}$, des coefficients positifs d_i , ρ_i , a_{ij} , s_{ij} et des fonctions positives u_i^0 que l'on suppose appartenir à $L \log L(\mathbb{T}^N)$. Si $d_1 d_2 a_{12} a_{21} \neq 0$ il existe au moins un couple (u_1, u_2) de fonctions positives intégrables sur Q_T , de produit $u_1 u_2$ également intégrable, solution du système (1) avec la condition initiale (u_1^0, u_2^0) au sens de la Définition 3.1 (pour chaque équation) vérifiant de plus pour presque tout $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} E(u_1, u_2)(t) + a_{11} \int_{Q_T} |\nabla u_1|^2 + a_{22} \int_{Q_T} |\nabla u_2|^2 \\ + \int_{Q_T} |\nabla \sqrt{u_1}|^2 + \int_{Q_T} |\nabla \sqrt{u_2}|^2 + \int_{Q_T} |\nabla \sqrt{u_1 u_2}|^2 \lesssim 1 + E(u_1^0, u_2^0), \end{aligned} \quad (27)$$

où la constante derrière \lesssim ne dépend que de T et des coefficients du système.

Les autres sections de ce chapitre seront principalement consacrées à des généralisations du théorème précédent : soit en remplaçant les coefficients de diffusion par des fonctions non linéaires des densités, soit en considérant plus de deux populations en interaction. Les références que nous citons ci-après sont des extensions plutôt orthogonales aux développements que nous allons proposer dans la suite.

La structure entropique et la symétrisation que nous avons présentées ci-haut ont été exploitées par Jüngel [99] dans le cadre plus général de systèmes prenant la forme (21); ceux-ci correspondent à une famille d'équations de Kolmogorov de type (3), uniquement si les lignes de la matrice $M(U)$ sont des gradients : c'est précisément le cas du système SKT. La méthode proposée dans [99] permet de construire des solutions faibles bornées et a été exploitée avantageusement dans de nombreux contextes par l'école viennoise : voir par exemple [76, 100, 159, 160]. L'intersection avec les cas que nous considérerons dans la section suivante est non vide mais notre approche est alors plus performante. Jüngel et Chen ont récemment exploité cette méthode pour construire des *solutions renormalisées* au système SKT, au sens de Fischer [68]. Nous ne mentionnons pas les travaux liés aux cas multi-espèces (*i.e.* avec plus de 2 populations), que nous aborderons au paragraphe 3.4.4.

Dans les cas triangulaires, avec des coefficients de diffusion possiblement non linéaires, des solutions globales existent ne relevant ni du théorème d'Amann (qui nécessite de la régularité sur les conditions initiales), ni de la structure entropique dégagée plus haut : aussi bien la fonctionnelle donnée en (25) que l'identité qu'elle vérifie (26) dégénèrent lorsque $a_{12}a_{21} = 0$. Il faut introduire une entropie spécifique, comme cela a par exemple été fait en dimension 1 dans [40] puis dans un cadre plus général dans [55, 144]. Dans ces exemples, seules deux populations sont considérées et les solutions sont obtenues comme limite asymptotique de systèmes de réaction/diffusion ; Murakawa procède de même dans [128] en incluant des cas non triangulaires. Nous reviendrons sur les cas triangulaires dans la Section 3.6 où nous présenterons un théorème d'existence pour les systèmes triangulaires de taille arbitraire à diffusions bornées, par une autre analyse asymptotique.

3.3.3 Perspectives

Beaucoup d'interrogations persistent encore sur le système SKT standard, notamment la question du blow-up éventuel des solutions régulières. Soulignons un fait marquant qui ressort de l'état de l'art effectué dans cette section. La communauté s'intéressant à la construction de solutions régulières semble totalement étrangère à celle produisant des solutions faibles globales. De manière un peu surprenante les technologies développées de part et d'autre progressent parallèlement, avec une certaine étanchéité dans leur utilisation. Il y a par exemple fort à parier qu'un outil comme le lemme de dualité (l'une des pierres angulaires de nos résultats) puisse fournir des estimations cruciales pour la vérification d'un critère à la Amann. La réalisation d'un pont entre ces deux communautés est donc une piste sérieuse à envisager, en gardant à l'esprit qu'il est plus probable que les outils de la théorie faible (entropie, lemme de dualité) servent à la compréhension des solutions fortes, plutôt que l'inverse.

Une autre question naturelle est celle de l'unicité des solutions faibles fournies par le Théorème 3.2. Le résultat le plus récent sur le sujet se trouve dans [32] où l'unicité est établie dans le cas du système SKT uniquement pour des coefficients de diffusions égaux et dans le cadre de solutions bornées. L'obtention d'un résultat d'unicité fort/faible à l'aide des estimées de dualité est l'objet d'un travail en cours en collaboration avec Thomas Lepoutre et Ariane Trescases.

3.4 Généralisation de la structure entropique

Il est connu, depuis les années '70, que pour certains modèles de dynamique de population, il est plus pertinent de considérer des taux de croissance non linéaires (voir par exemple [78, 79]). Extrapolant cela aux taux de diffusion, on peut se demander ce qu'il advient de la structure entropique dégagée à la Section 3.3 sur des systèmes généralisant SKT. En considérant le cas typique de fonctions puissances, on s'intéresse donc à des systèmes de la forme suivante, pour $\gamma_1, \gamma_2 > 0$

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta \left[(d_1 + a_{12} u_2^{\gamma_2}) u_1 \right] = 0, \\ \partial_t u_2 - \Delta \left[(d_2 + a_{21} u_1^{\gamma_1}) u_2 \right] = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Remarque 3.9. *Ce type de système peut être abordé par la technologie développée par Jüngel dans [99]. Toutefois, notre Théorème 3.4 ci-bas possède une portée plus étendue, en ce qui concerne les système du type (28), principalement du fait que nous ne nous appuyons jamais sur l'auto-diffusion pour construire nos solutions.*

Nous omettons volontairement ici les termes de réactions et les termes d'auto-diffusion qui, comme nous l'avons déjà noté dans la Remarque 3.8, sont totalement inoffensifs dans la structure entropique que nous nous apprêtons à explorer. Nous reviendrons toutefois sur l'ajout de termes de réaction lorsque nous évoquerons les perspectives liées à l'étude de tels systèmes.

3.4.1 Une stratégie générale

Afin de comprendre d'où vient l'estimation (26) et surtout comment la généraliser à d'autres systèmes à diffusion croisée, nous prenons un peu de recul sur la situation et considérons un système générique d'équations quasi-linéaires paraboliques (sans réaction) que nous écrivons sous forme vectorielle

$$\partial_t U - \Delta[A(U)] = 0, \quad (29)$$

avec $U : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^I$ et $A : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$, pour un entier naturel $I \geq 1$. Ce cadre général nous sera utile à de nombreuses reprises. Tout comme dans (21) les opérateurs différentiels sont ici à comprendre composantes à composantes. On cherche à quelle condition sur une fonction scalaire $\Phi : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}_+$, l'expression

$$\int_{\mathbb{T}^N} \Phi(U) \quad (30)$$

définit une fonctionnelle de Lyapunov pour le système (29). On effectue le produit scalaire de celui-ci avec $\nabla\Phi(U)$ et on obtient formellement

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^N} \Phi(U) - \int_{\mathbb{T}^N} \langle \nabla\Phi(U), \Delta[A(U)] \rangle = 0,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire sur \mathbb{R}^I . Par intégration par parties, avec la convention d'indices répétés et en notant $U = (u_i)_{1 \leq i \leq I}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N} \langle \nabla \Phi(U), \Delta[A(U)] \rangle &= \int_{\mathbb{T}^N} (\partial_i \Phi)(U) \partial_{jj} [A_i(U)] \\ &= - \int_{\mathbb{T}^N} \partial_j [(\partial_i \Phi)(U)] \partial_j [A_i(U)] \\ &= - \int_{\mathbb{T}^N} \partial_k \partial_i \Phi(U) \partial_j u_k \partial_\ell A_i(U) \partial_j u_\ell. \end{aligned}$$

En sommant d'abord en i , on fait apparaître un produit matriciel et on peut alors réécrire l'expression précédente en

$$\int_{\mathbb{T}^N} \langle \nabla \Phi(U), \Delta[A(U)] \rangle = - \sum_{j=1}^I \int_{\mathbb{T}^N} \langle \partial_j U, D^2 \Phi(U) D(A)(U) \partial_j U \rangle,$$

où $D(A)$ est la jacobienne de A et $D^2(\Phi)$ la hessienne de Φ . On a finalement obtenu que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi(U) + \sum_{j=1}^I \int_{\mathbb{T}^N} \langle \partial_j U, D^2 \Phi(U) D(A)(U) \partial_j U \rangle = 0. \quad (31)$$

Cette identité nous indique que l'expression donnée en (30) devient une fonctionnelle de Lyapunov du système dès lors que l'application $D^2(\Phi)D(A)$ n'a pour valeurs que des matrices dont la partie symétrique est positive. Afin de traiter le cas de coefficients de diffusion éventuellement singuliers à l'origine, il nous sera commode par la suite d'introduire l'ensemble $\mathcal{U} := (\mathbb{R}_+^*)^I$. L'analyse précédente conduit alors à la définition suivante.

Définition 3.3. *On suppose que $A \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$. Une entropie pour le système (37) est une fonction $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{C}^2 et convexe, pour laquelle $D^2(\Phi)D(A) \geq 0$ sur \mathcal{U} , au sens des matrices symétriques.*

Revenons maintenant au système (28). Celui-ci peut effectivement s'écrire sous la forme (29), avec une application A_{γ_1, γ_2} définie par

$$A_{\gamma_1, \gamma_2}(U) = A_{\gamma_1, \gamma_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d_1 + a_{12}u_2^{\gamma_2})u_1 \\ (d_2 + a_{21}u_1^{\gamma_1})u_2 \end{pmatrix},$$

la jacobienne de cette application n'étant rien d'autre que la matrice de diffusion du système (28) (notion introduite au paragraphe 3.3.2), soit

$$D(A_{\gamma_1, \gamma_2})(U) := \begin{pmatrix} d_1 + a_{12}u_2^{\gamma_2} & a_{12}\gamma_2 u_2^{\gamma_2-1} u_1 \\ \gamma_1 a_{21} u_1^{\gamma_1-1} u_2 & d_2 + a_{21} u_1^{\gamma_1} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Comme dans le cas SKT classique, on remarque (si on suppose $u_1, u_2 \geq 0$) que la trace de $D(A_{\gamma_1, \gamma_2})(U)$ est positive. Pour son déterminant, on a

$$\det D(A_{\gamma_1, \gamma_2})(U) = (d_1 + a_{12}u_2^{\gamma_2})(d_2 + a_{21}u_1^{\gamma_1}) - a_{12}a_{21}\gamma_2\gamma_1 u_2^{\gamma_2} u_1^{\gamma_1}, \quad (33)$$

on est donc en mesure d'assurer sa positivité dans le cas $\gamma_2\gamma_1 \leq 1$, hypothèse que nous conservons pour l'instant. On constate que le défaut de symétrie de $D(A_{\gamma_1, \gamma_2})(U)$ peut facilement être corrigé par l'action à gauche d'une matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} a_{21}\gamma_1 u_1^{\gamma_1-2} & 0 \\ 0 & a_{12}\gamma_2 u_2^{\gamma_2-2} \end{pmatrix} D(A_{\gamma_1, \gamma_2})(U) = a_{12}a_{21}\gamma_2\gamma_1 u_2^{\gamma_2-1} u_1^{\gamma_1-1} \begin{pmatrix} \star & 1 \\ 1 & \star \end{pmatrix}.$$

L'intérêt de cette opération est le suivant : puisque la matrice diagonale utilisée est à coefficients positifs, la positivité de la trace et du déterminant de $D(A_{\gamma_1, \gamma_2})(U)$ est conservée après multiplication ; le produit résultant est donc bien une matrice symétrique positive. La formule (31) nous indique donc que si $\Phi_{\gamma_1, \gamma_2}$ est de hessienne précisément donnée par la matrice diagonale utilisée ci-haut, l'expression correspondante donnée en (30) est effectivement une fonctionnelle de Lyapunov et $\Phi_{\gamma_1, \gamma_2}$ une entropie pour le système au sens de la Définition 3.3.

Dans le cas particulier $\gamma_2 = \gamma_1 = 1$ (SKT classique), l'expression de la hessienne conduit directement à l'entropie (25) utilisée par Chen et Jüngel, mais par cette méthode nous recouvrons également une large gamme des généralisations (28) : celles correspondant à $\gamma_2\gamma_1 \leq 1$.

Remarque 3.10. *De la positivité de Φ on récupère $\Phi(U) \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{T}^N))$ (pour des conditions initiales adéquates), mais l'identité (30) fournit en général bien plus pour les solutions du système : on a assez d'uniformité dans le terme dissipatif pour récupérer une estimation sur le gradient de la solution, ou du moins sur une fonction de celui-ci. Cette remarque est fondamentale pour la construction des solutions faibles que nous allons présenter dans les paragraphes suivants.*

3.4.2 Le cas concave/concave

Dans [A7] nous avons obtenus avec Laurent Desvillettes et Thomas Lepoutre une première généralisation du Théorème 3.2 en traitant le cas de système (28) pour des exposants $\gamma_1, \gamma_2 < 1$. Le théorème principal de [A7] traite en fait de fonctions croissantes concaves (pas nécessairement des fonctions puissances) et inclus des termes d'auto-diffusion et de réactions. Nous nous limitons ici à l'énoncé simplifié suivant.

Théorème 3.3. *Soit u_1^0, u_2^0 deux fonctions positives appartenant à $L^2(\mathbb{T}^N)$, des coefficients strictement positifs a_{12}, a_{21}, d_1, d_2 et γ_1, γ_2 deux éléments de $]0, 1[$. Il existe au moins un couple $u := (u_1, u_2)$ de fonctions positives pour lesquelles $(1 + u_2^{\gamma_2})^{1/2} u_1$ et $(1 + u_1^{\gamma_1})^{1/2} u_2$ sont dans $L^2(Q_T)$, solution faible du système (28) avec la condition initiale $u^0 := (u_1^0, u_2^0)$ au sens de la Définition 3.1 (pour chaque équation) vérifiant de plus pour presque tout $t \in [0, T]$*

$$\int_{\mathbb{T}^N} |u(t)| + \int_{Q_T} |\nabla u_1^{\gamma_1/2}|^2 + \int_{Q_T} |\nabla u_2^{\gamma_2/2}|^2 + \int_{Q_T} |\nabla (u_1^{\gamma_1/2} u_2^{\gamma_2/2})|^2 \lesssim 1 + \int_{\mathbb{T}^N} |u^0|^2, \quad (34)$$

où la constante derrière \lesssim ne dépend que de T et des coefficients du système.

La preuve que nous avons établie dans [A7] se base sur la structure d'entropie esquissée dans le paragraphe 3.4.1. Le schéma d'approximation que nous avons suivi est une adaptation de celui proposé dans [30], la différence principale étant que la symétrisation du système avec des taux de diffusion non linéaires ne conduit pas à un changement de variable logarithmique, mais uniquement algébrique : le problème de la positivité n'est pas résolu. Nous avons contourné l'obstacle en introduisant une perturbation linéaire sur chacun des coefficients, ajoutant ainsi

un terme logarithmique dans le changement de variable (voué à disparaître à la limite). Le résultat est une artillerie technique assez lourde en notations qui reste — avec le recul — le principal défaut de [A7].

L'estimation (34) est similaire à (27). L'absence de contrôle direct sur les gradients de la solution provient de l'absence supposée d'auto-diffusion. Par ailleurs, dans le Théorème 3.2 la fonctionnelle de Lyapunov fournie par l'entropie est une information supplémentaire (en terme d'intégrabilité) de la solution. Dans notre cas de puissances concaves, on vérifie que l'intégrande de la fonctionnelle d'entropie est une combinaison linéaire de u_1, u_2 et $u_1^{\gamma_1}, u_2^{\gamma_2}$: elle ne fournit rien de mieux que l'estimation $L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{T}^N))$ présente dans (34) et que l'on obtient d'ailleurs directement, par intégration du système en la variable d'espace. Autre différence importante sur l'estimation d'entropie : dans le cas SKT standard les problèmes de concentration pour le terme croisé $u_1 u_2$ sont gérés grâce au contrôle de $\nabla \sqrt{u_1 u_2}$ dans $L^2(Q_T)$, via une inégalité de Sobolev. Indépendamment du fait que celle-ci dépend de la dimension (ce que l'on pourrait chercher à éviter), dans notre cas il n'est pas évident que l'on puisse s'assurer de l'équi-intégrabilité pour les termes croisés $u_1 u_2^{\gamma_2}$ et $u_2 u_1^{\gamma_1}$ en utilisant uniquement $\nabla(u_1^{\gamma_1/2} u_2^{\gamma_2/2})$, puisque $\gamma_1, \gamma_2 < 1$. C'est ici que se situe le principal apport de [A7] par rapport au théorème de Chen et Jüngel : nous employons le lemme de dualité (voir paragraphe 3.2.2) pour assurer les appartenances $(1 + u_1^{\gamma_1})^{1/2} u_2 \in L^2(Q_T)$ et $(1 + u_2^{\gamma_2})^{1/2} u_1 \in L^2(Q_T)$, qui permettent d'écartier tous les soucis de concentrations potentiels dans le système (28). Il n'a pas été aisé de traduire ces estimations duales au niveau discret pour le schéma retenu car le changement de variable employé s'y prête mal. Nous verrons bientôt comment cette étape a été considérablement simplifiée par la suite.

3.4.3 Le cas convexe/concave

L'estimation d'entropie que nous avons décrite dans le paragraphe 3.4.1 invite à considérer le cas du système (28) dans le cas $\gamma_2 > 1$, sous la contrainte $\gamma_1 \leq 1/\gamma_2$. La non linéarité du système est ainsi plus sévère. Avec Ariane Trescases qui a rejoint l'équipe de [A7], nous sommes parvenus au résultat suivant, extrait de [A10].

Théorème 3.4. *Soit $\gamma_2 > 1$ et $\gamma_1 > 0$ tel que $\gamma_2 \gamma_1 \leq 1$. Soient u_1^0, u_2^0 deux fonctions positives appartenant respectivement à $L^2(\mathbb{T}^N)$ et $L^{\gamma_2}(\mathbb{T}^N)$. Il existe au moins un couple (u_1, u_2) de fonctions positives telles que $(u_1 + u_2)(u_1^{\gamma_1} u_2 + u_2^{\gamma_2} u_1 + u_1 + u_2)$ soit intégrable sur Q_T , solution faible au système (28) avec la condition initiale (u_1^0, u_2^0) au sens de la Définition 3.1 (pour chaque équation) vérifiant de plus pour tout $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N} u_1(t) + \int_{\mathbb{T}^N} u_2(t)^{\gamma_2} + \int_{Q_T} |\nabla u_1^{\gamma_1/2}|^2 + \int_{Q_T} |\nabla u_2^{\gamma_2/2}|^2 \\ + \int_{Q_T} |\nabla(u_1^{\gamma_1/2} u_2^{\gamma_2/2})|^2 \lesssim 1 + \int_{\mathbb{T}^N} (u_1^0)^2 + \int_{\mathbb{T}^N} (u_2^0)^{\gamma_2}, \end{aligned} \quad (35)$$

où la constante derrière \lesssim ne dépend que de T et des coefficients du système.

Contrairement au Théorème 3.3, ici l'entropie fournit effectivement (moyennant une donnée initiale adaptée) une information supplémentaire d'intégrabilité sur le système, pour l'une des deux composantes (celle qui agit sur-linéairement sur la diffusion de l'autre). Tout comme dans le cas de [A7], l'estimation (35) à elle seule ne suffit pas à gérer tous les problèmes de concentration pouvant intervenir dans le système et nous faisons donc également appel au

lemme de dualité. Nous invoquons en fait une remarque proposée dans [12] pour les systèmes d'équations paraboliques : en sommant les deux équations du système (28) et en considérant $z = u_1 + u_2$, on constate que cette fonction résout l'équation de Kolmogorov

$$\partial_t z - \Delta(\mu z) = 0,$$

avec pour coefficient de diffusion

$$\mu := \frac{d_1 + d_2 + a_{12}u_2^{\gamma_2} + a_{21}u_1^{\gamma_1}}{u_1 + u_2}.$$

C'est cette simple remarque, associée au lemme de dualité présenté au paragraphe 3.2.2 qui permet d'établir l'estimation *a priori* $(u_1 + u_2)(u_2^{\gamma_1}u_2 + u_2^{\gamma_2}u_1 + u_1 + u_2) \in L^1(Q_T)$. Cette information cruciale se transmet sans encombre au schéma d'approximation que nous avons introduit dans [A10], ce dernier constituant l'un des apports les plus novateurs de l'article. En effet, comme nous l'expliquons plus haut, la procédure d'approximation suivie dans [A7] était assez douloureuse, la traduction discrète du lemme de dualité et la nécessité que le schéma préserve bel et bien la structure d'entropie jouant pour beaucoup dans la pénibilité de son agencement. L'un des objectifs de [A10] était de nettoyer cette procédure. Nous y sommes parvenus en concevant un schéma d'approximation générique auquel nous consacrons la Section 3.5.

Une ultime difficulté se cache dans la preuve du Théorème 3.4. Nous n'avons pas abordé le sujet dans le paragraphe 3.4.2 : comment obtenir de la compacité sur le système alors que l'estimation (34) ne fournit pas de contrôle direct sur les gradients ? Dans le cas concave/concave, on exprime simplement que (par exemple pour u_2)

$$\nabla u_2 = \frac{2}{\gamma_2} u_2^{\frac{2-\gamma_2}{2}} \nabla u_2^{\gamma_2/2}. \quad (36)$$

Ainsi, par l'estimation d'entropie on récupère $\nabla u_2^{\gamma_2/2} \in L^2(Q_T)$ et puisque $\gamma_2 < 1$, on arrive à placer $u_2^{\frac{2-\gamma_2}{2}}$ dans un espace $L^p(Q_T)$ convenable (en utilisant l'estimation duale) et finalement ∇u_2 dans (au moins) $L^1(Q_T)$. On obtient ainsi ce qu'il faut de contrôle des oscillations en la variable spatiale pour invoquer le lemme d'Aubin-Lions.

Par contre, dans le cas convexe/concave il se pourrait que $\gamma_2 > 2$: dans ce cas la formule (36) montre que pour les petites valeurs de u_2 (que nous ne sommes pas en mesure de proscrire), aucune information sur son gradient ne peut être récupérée à partir du gradient de $u_2^{\gamma_2/2}$. Cette situation est fréquemment rencontrée dans l'étude des équations paraboliques dégénérées (comme celle des milieux poreux par exemple), et le lemme d'Aubin-Lions usuel y est inapplicable. Dans [A10] nous avons fait appel au Théorème 4.1 (voir Chapitre 4), établi dans [A11]. Il s'agit d'une version non linéaire du résultat de compacité mentionné précédemment ; on voit notamment que son énoncé autorise l'utilisation de fonctions discontinues (en escalier) de la variable de temps : la compacité peut donc directement être récupérée de notre procédé semi-discret.

Une fois cette difficulté contournée, notre schéma de preuve s'applique dès lors que le système bénéficie d'une fonctionnelle de Lyapunov, suffisamment coercive (au sens de sa dissipation) pour fournir une estimation sur les gradients. Pour les systèmes de type (28), cela correspond à la contrainte $\gamma_2\gamma_1 \leq 1$, mais autant la procédure d'approximation que le lemme de dualité peuvent être utilisés sur d'autres systèmes. Nous donnons dans [A10] un exemple

spécifique à trois populations, bénéficiant d’une entropie et pour lequel notre méthode de preuve s’applique *mutadis mutandis*. Nous n’avions cependant pas été en mesure de mettre en évidence un critère simple sur l’entropie du système pouvant assurer le traitement des cas multi-espèces. C’est l’objet du paragraphe suivant.

3.4.4 Multi-espèces

Très peu de résultats ont été obtenus quant à l’existence de solutions globales dans le cas de trois populations ou plus. En fait, en dehors de l’exemple particulier que nous avons proposé dans [A10] (voir paragraphe précédent) et avant cet article, seuls Fu et Wen dans [149] sont parvenus à produire des solutions globales pour plus de deux populations. Leur construction fournit même des solutions régulières, *via* le théorème d’Amann, mais nécessite l’hypothèse très restrictive d’une matrice de diffusion positive et ne fonctionne qu’en dimension 1.

La principale difficulté est que la structure d’entropie n’est pas facile à reproduire lorsque la matrice de diffusion est de grande taille : l’action à gauche par une matrice diagonale ne fonctionne alors plus du tout (voir paragraphe 3.4.1). Dans [31] Chen, Daus et Jüngel ont effectué une avancée considérable en introduisant une condition spécifique intitulée “*detailed balance*”. Il s’agit d’un critère² suffisant sur les coefficients d’un système multi-espèces de type SKT pour qu’une entropie existe pour celui-ci, au sens de la Définition 3.3. Par contre, les auteurs de [31] sont contraints, soit d’utiliser l’auto-diffusion du système, soit de supposer que les taux de diffusion croisés sont sous-linéaires et en tout état de cause minorés par $1 - 2/N$, où nous rappelons que N est la dimension d’espace. Ces contraintes techniques sur la croissance des coefficients sont liées au fait que l’intégrabilité des composantes de la solution n’est récupérée que de l’entropie elle-même. Avec Thomas Lepoutre nous avons considérablement étendu ce résultat par les estimées de dualité et en simplifiant la preuve par l’utilisation du schéma d’approximation générique introduit dans [A10] (et que nous présentons dans la prochaine section). Nous parvenons ainsi à transférer la structure de preuve conçue dans [A10] à une large gamme de systèmes multi-espèces. Afin d’énoncer précisément notre résultat, reprenons l’écriture vectorielle introduite au paragraphe 3.4.1 et intéressons-nous donc à résoudre

$$\partial_t U - \Delta[A(U)] = 0, \tag{37}$$

où l’inconnue est la fonction vectorielle $U = (u_i)_{1 \leq i \leq I} : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^I$ et $A : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$ une fonction qui prendra toujours la forme suivante dans les systèmes que nous considérerons :

$$A(U) = \begin{pmatrix} \mu_1(U)u_1 \\ \vdots \\ \mu_I(U)u_I \end{pmatrix}, \tag{38}$$

où les μ_i sont des fonctions continues minorées par une constante $\alpha > 0$. Ainsi, chaque ligne du système (37) est une équation de Kolmogorov (voir Section 3.2), pour laquelle nous pourrions invoquer le lemme de dualité.

2. Dans [31] un parallèle intéressant est effectué avec le principe d’Onsager en thermodynamique.

Nous rappelons la notation $\mathcal{U} := (\mathbb{R}_+^*)^I$, utile pour introduire deux hypothèses sur A .

Hypothèse 3.1. $A \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$.

Hypothèse 3.2. A est un homéomorphisme de \mathbb{R}_+^I sur lui-même et un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathcal{U} sur lui-même.

La première hypothèse nous sera nécessaire pour définir une notion d'entropie raffinant celle introduite dans la Définition 3.3. La seconde est d'une importance cruciale pour l'utilisation du schéma que nous présentons dans la Section 3.5 ; nous verrons plus bas dans la Proposition 3.7 qu'elle est parfois conséquence de la structure entropique elle-même.

La notion suivante d'entropie est introduite dans [A14].

Définition 3.4. On suppose que A satisfait l'Hypothèse 3.1. Une entropie uniforme pour le système (37) est une fonction $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{C}^2 et convexe, pour laquelle il existe une application continue $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ à jacobienne diagonale telle que $D^2(\Phi)D(A) \geq \text{Diag}(F)$ sur \mathcal{U} , au sens des matrices symétriques.

Cette notion d'entropie est donc un renforcement de celle introduite dans la Définition 3.3 et on note que, tout comme cette dernière, elle autorise aux coefficients une singularité en 0 (comme les puissances concaves par exemple). Le résultat central démontré dans [A14] est le suivant.

Théorème 3.5. Soit $(\mu_i)_{1 \leq i \leq I}$ une famille de fonctions réelles continues définies sur \mathbb{R}^I et minorées par une constante $\alpha > 0$. On suppose que l'application A définie en (38) satisfait les Hypothèses 3.1 – 3.2 et que le système (37) admet une entropie uniforme Φ , au sens de la Définition 3.4. Alors, pour toute fonction positive $U^0 \in L^2(\mathbb{T}^N)$ pour laquelle $\Phi(U^0) \in L^1(\mathbb{T}^N)$ il existe une fonction $U = (u_i)_{1 \leq i \leq I} : Q_T \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $A(U) \in L^1(Q_T)$, solution faible au système (37) avec la condition initiale U^0 , au sens de la Définition 3.1 (pour chaque équation du système), vérifiant de plus $U \otimes A(U) \in L^1(Q_T)$ et, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\int_{\mathbb{T}^N} \Phi(U(t)) + \sum_{i=1}^I \int_{Q_T} |\nabla g_i(u_i)|^2 \leq \int_{\mathbb{T}^N} \Phi(U^0), \quad (39)$$

où pour tout $i \in \llbracket 1, I \rrbracket$, g_i désigne une fonction strictement croissante 1-lipschitzienne.

En guise d'esquisse de preuve, et puisque nous consacrons entièrement la Section 3.5 au processus d'approximation, nous nous contentons de démontrer un résultat de stabilité faible pour le système (37).

Proposition 3.6. Soit $(U_n^0)_n$ convergeant vers U^0 dans $L^2(\mathbb{T}^N)$ et telle que $(\Phi(U_n^0))_n \in L^1(Q_T)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $U_n : Q_T \rightarrow \mathbb{R}_+^I$ une solution régulière au système (37) avec la condition initiale U_n^0 . Alors pour tout $p < 2$ on a $(U_n)_n \in L^p(Q_T)$ et toute valeur d'adhérence est une solution du système (37) avec la condition initiale U_n^0 , au sens de la Définition 3.1, vérifiant les propriétés énoncées par le Théorème 3.5.

Démonstration. Les calculs effectués dans le paragraphe 3.4.1 justifient l'égalité suivante

$$\int_{\mathbb{T}^N} \Phi(U_n(t)) + \sum_{j=1}^I \int_{Q_T} \langle \partial_j U_n, D^2(\Phi)(U_n)D(A)(U_n)\partial_j U_n \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} \Phi(U_n^0), \quad (40)$$

où l'opérateur ∂_j est à comprendre composantes par composantes. Notant f_i les composantes de l'application F donnée par la Définition 3.4, l'inégalité fournie par cette dernière associée à l'identité (40) conduisent à

$$\sum_{j=1}^I \int_{Q_T} \langle \partial_j U_n, \text{Diag}(F)(U_n) \partial_j U_n \rangle = \sum_{i=1}^I \int_{Q_T} |\nabla u_{i,n}|^2 f_i(u_{i,n}) \leq \int_{\mathbb{T}^N} \Phi(U_n^0),$$

où l'on a noté $u_{i,n}$ les composantes du vecteur U_n . On montre sans peine que de l'inégalité précédente découlent les bornes $(\nabla g_i(u_{i,n}))_n \in L^2(Q_T)$ pour $i \in \{1, \dots, I\}$, avec g_i primitive de $s \mapsto 1 \wedge f_i(s)$: il s'agit bien de fonctions 1-lipschitziennes strictement croissantes. Nous ne sommes pas en mesure de contrôler l'aplatissement des fonctions g_i à l'infini et ne pouvons donc pas utiliser directement le Théorème 4.1 du Chapitre 4 comme nous l'avons fait dans le paragraphe 3.4.3. À la place, on remarque grâce à la Proposition 4.1 que l'on peut passer à la limite dans les produits $g_i(u_{i,n})u_{i,n}$ (en utilisant le contrôle de $(\partial_t U_n)_n$ par l'équation elle-même). Nous pouvons ainsi invoquer le Théorème 4.2, puisque g_i est une fonction continue strictement croissante : on récupère ainsi, à une sous-suite près, de la convergence presque partout. Comme nous l'avons fait dans le paragraphe 3.4.3, nous invoquons le lemme de dualité sur l'équation obtenue par sommation de toutes les composantes du système (37), et on obtient ainsi $(U_n \otimes A(U_n))_n \in L^1(Q_T)$, qui implique en particulier $(U_n)_n \in L^2(Q_T)$ d'où l'on tire effectivement $(U_n)_n \in L^p(Q_T)$ pour $p < 2$.

Puisque A est continue, le seul obstacle possible pour passer à la limite faible (au sens des distributions) dans l'équation (37) est la concentration $L^1(Q_T)$ de $(A(U_n))_n$. Nous écartons cette possibilité grâce à l'estimation duale précédente. Puisque U_n est à valeurs dans \mathbb{R}_+^I et que chaque fonction μ_i définissant A dans (38) est minorée par $\alpha > 0$, on a l'implication $|A(U_n)|_\infty \geq R \Rightarrow |U_n|_\infty \geq R/\alpha$, où $|\cdot|_\infty$ est la norme éponyme sur \mathbb{R}^I . Ainsi, avec la borne $(U_n \otimes A(U_n))_n \in L^1(Q_T)$, on parvient effectivement à établir

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_T} |A(U_n)|_\infty \mathbf{1}_{|A(U_n)|_\infty \geq R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

L'estimation $U \otimes A(U) \in L^1(Q_T)$ sur la limite ainsi construite est obtenue par une nouvelle utilisation du lemme de dualité et l'inégalité (39) par semi-continuité faible puisqu'elle est vérifiée pour la suite $(U_n)_n$. \square

En plus de l'outil "théorique" qu'est le Théorème 3.5 (il est conditionné à l'existence d'une entropie uniforme), nous donnons dans [A14] plusieurs exemples de systèmes où les Hypothèses 3.1 – 3.2 sont vérifiées pour la fonction A , et l'existence d'une entropie uniforme satisfaite. En fait, de manière assez surprenante c'est cette dernière condition qui permet parfois d'assurer directement l'Hypothèse 3.2 comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.7. *Soit $(\mu_i)_{1 \leq i \leq I}$ une famille de fonctions réelles continues définies sur \mathbb{R}^I . On suppose que l'application A définie en (38) satisfait l'Hypothèse 3.1 et que le système (37) admet une entropie uniforme Φ au sens de la Définition 3.4. Si $\exp(\Phi)$ et $\exp(\mu_i)$ sont des fonctions tensorielles (pour tout i), alors A satisfait l'Hypothèse 3.2.*

Ce résultat est démontré dans [A14] à l'aide du théorème d'Hadamard-Lévy (on renvoie à l'Annexe A pour un énoncé). Les exemples de systèmes que nous fournissons dans [A14] contiennent bien sûr les cas "detailed balance" introduits dans [31] mais également des généralisations de ceux-ci pour des taux de diffusions non algébriques.

3.4.5 Perspectives

Le cas convexe/convexe est déroutant. D'un côté l'analyse menée au paragraphe 3.4.1 est plutôt pessimiste dans les cas $\gamma_1\gamma_2 > 1$. D'un autre on a l'exemple suivant tiré de [12]

$$\begin{aligned}\partial_t u_1 - \Delta[(d_1 + u_2^2)u_1] &= 0, \\ \partial_t u_2 - \Delta[(d_1 + u_1^2)u_1] &= 0,\end{aligned}$$

pour lequel il existe bel et bien une fonctionnelle de Lyapunov. La particularité de ce système est que $D(A)$ prend ses valeurs dans $S_2(\mathbb{R})$ (sans positivité), et même mieux : $D(A)(U)$ est en fait une matrice hessienne. On vérifie en effet que si $\Phi(u_1, u_2) := (d_2 + u_1^2)(d_1 + u_2^2)/2$, alors $D^2(\Phi) = D(A)$ et

$$\int_{\mathbb{T}^N} \Phi(U)$$

est alors bien une fonctionnelle de Lyapunov. Comprendre si cet exemple est une anomalie ou la manifestation d'une structure encore inconnue dans les cas $\gamma_1\gamma_2 > 2$ (avec des coefficients de diffusion croisée égaux) est une source très inspirante de réflexions sur la méthode suivie dans le paragraphe 3.4.1.

Une autre direction envisageable est la gestion des termes de réaction, que l'on a jusqu'à présent complètement occultée afin de simplifier la présentation. Concrètement il est en général supposé que le second membre $R(U)$ du système (37) est une fonction continue dont les composantes sont de la forme $r_i(U)u_i$, où les fonctions r_i sont uniformément majorées. La structure d'entropie et l'estimation de dualité sont compatibles avec de tels termes sources, au sens où l'on est en mesure de reproduire toutes les estimations effectuées dans cette section avec la présence de $R(U)$, moyennant une inégalité de type Grönwall. Le seul problème pouvant provenir de $R(U)$ est donc la concentration. Dans tous les résultats que nous avons cités dans cette section, la croissance des fonctions $r_i(U)$ est en général guidée par les contrôles qu'offrent les termes d'auto-diffusion (si ils existent), le lemme de dualité et l'estimation d'entropie. Dans le cas particulier concave/concave étudié au paragraphe 3.4.2 ces contrôles nous ont conduit dans [A7] à imposer une croissance sous-quadratique pour les termes de réactions. La raison étant que, comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 3.4.2, sans terme d'auto-diffusion, la meilleure estimation dont on dispose en ce qui concerne l'intégrabilité des solutions est l'estimation duale, laquelle fournit une borne $L^2(Q_T)$ mais n'empêche pas *a priori* la concentration dans cet espace. Dans le cas du système SKT standard présenté dans la Section 3.3, les termes de réactions quadratiques sont gérables précisément grâce à l'entropie utilisée qui fournit plus d'information que le seul lemme de dualité. L'établissement d'une version précisée du lemme de dualité qui permettrait de se prémunir de la concentration $L^2(Q_T)$ est une piste que nous avons déjà commencé à explorer, mais pour l'instant le seul résultat que nous avons réussi à établir en ce sens concerne le cas de coefficients de diffusion bornés (voir Proposition 3.5 dans la Section 3.2 et plus généralement le Lemme 4.2 dans le Chapitre 4).

3.5 Un schéma d'approximation

Dans cette section nous présentons le schéma d'approximation conçu dans [A10], lequel s'applique aux systèmes d'équations de la forme (37). Nous gardons donc le cadre conservatif, mais le schéma développé dans [A10] permet l'ajout de termes sources.

3.5.1 Énoncé

Rappelons la notation $\mathcal{U} := (\mathbb{R}_+^*)^I$. Afin d'alléger les lignes qui suivent, nous désignerons par la suite $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+$ les fonctions continues vectorielles à valeurs dans \mathcal{U} .

Théorème 3.6. *On suppose que A est de la forme (38), avec des fonctions continues $(\mu_i)_{1 \leq i \leq I}$ uniformément minorées par une constante $\alpha > 0$. On suppose que A satisfait les Hypothèses 3.1 – 3.2 et on fixe un entier $P \geq 1$ tel que $\rho\tau < 1/2$, avec $\tau = T/P$. Alors, pour toute fonction $U^0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+$, il existe une famille $(U^k)_{1 \leq k \leq P-1}$ d'éléments de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+$ vérifiant $A(U^k) \in W^{2,q}(\mathbb{T}^N)$ pour tout $q \in [1, \infty[$ et, pour $1 \leq k \leq P-1$,*

$$\frac{U^k - U^{k-1}}{\tau} - \Delta[A(U^k)] = 0. \quad (41)$$

L'équation (41) est la semi-discrétisation (en temps) implicite de l'équation (37). La preuve de ce théorème se ramène à résoudre itérativement le problème non linéaire suivant

$$U - \tau\Delta[A(U)] = S, \quad (42)$$

où l'inconnue est la fonction $U : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathcal{U}$ et $S \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+$ une donnée. L'idée est alors de reformuler le problème ainsi : trouver $\tilde{U} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+$ solution de

$$\tilde{U} - \tau\Delta\tilde{U} = A(U) - U + S, \quad (43)$$

$$\tilde{U} = A(U). \quad (44)$$

À la différence de (42), l'équation (43) est elliptique en \tilde{U} , ce qui permet d'obtenir des estimations sur les solutions éventuelles de cette équation : si $U \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)$, une solution \tilde{U} de (43) est automatiquement $W^{2,q}(\mathbb{T}^N)$, pour tout $q < \infty$ et en particulier continue. Malheureusement en l'état, rien n'assure que \tilde{U} prend des valeurs positives, ce que l'on peut corriger en notant que les hypothèses effectuées sur A et R conduisent à l'existence, pour tout $U \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)$, d'une constante $M_U > 0$ pour laquelle

$$M_U A(U) - U + S \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+,$$

ce qui invite à remplacer (43) par

$$M_U \tilde{U} - \tau\Delta\tilde{U} = M_U A(U) - U + S.$$

On considère alors les trois applications

$$\begin{aligned} \Theta_1 : \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+ \times \mathbb{R}_+^* \\ U &\longmapsto (M_U A(U) - U + S, M_U), \\ \Theta_2 : \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+ \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+ \\ (U, M) &\longmapsto (M \text{Id} - \tau\Delta)^{-1} U, \\ \Theta_3 : \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+ &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^N)^+ \\ U &\longmapsto A^{-1}(U). \end{aligned}$$

On vérifie que tout point fixe de l'application $\Theta := \Theta_3 \circ \Theta_2 \circ \Theta_1$ est une solution de l'équation (42). Dans [A10] nous obtenons l'existence d'un tel point fixe par le théorème de Schaefer (on renvoie à l'Annexe A pour un énoncé). L'estimation nécessaire sur les points fixes *a priori* est une information très forte (borne $L^\infty(\mathbb{T}^N)$) qui dégénère bien sûr dans la limite $\tau \rightarrow 0$. Pour démontrer la continuité de Θ (et en fait même pour la définir), on utilise de manière cruciale l'Hypothèse 3.2 (à cause de Θ_3). La compacité de Θ est obtenue par l'intermédiaire de Θ_2 .

3.5.2 Estimations uniformes

Les approximations produites par le Théorème 3.6 sont suffisamment régulières pour justifier deux estimations uniformes en τ , cruciales dans l'étude du système (37). La première est le lemme de dualité dont on avait déjà vu, au paragraphe 3.2.2 qu'il se prêtait effectivement bien à une discrétisation. On obtient ainsi (voir [A10] pour les détails) une estimation de la forme

$$\sum_{k=0}^{P-1} \tau \int_{\mathbb{T}^N} |U^k|_1 |A(U^k)|_1 \lesssim \int_{\mathbb{T}^N} |U^0|_2^2, \quad (45)$$

où \lesssim ne dépend que de la dimension N et de la fonction A , les symboles $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ désignant les normes éponymes sur \mathbb{R}^I . Il s'agit donc du parfait analogue discret de l'appartenance $U \otimes A(U) \in L^1(Q_T)$ mentionnée dans l'énoncé du Théorème 3.6.

Le contrôle (45) nous permettra de gérer tous les problèmes liés à la concentration mais en l'état nous n'avons pas d'information sur les gradients. Rappelons que l'hypothèse d'une entropie uniforme n'a de sens que pour des fonctions définies sur \mathcal{U} (voir Définition 3.4), car les fonctionnelles que l'on considère peuvent contenir des logarithmes ou des puissances concaves. Par ailleurs, si l'on cherche à discrétiser l'analyse effectuée au paragraphe 3.4.1, il nous faudrait utiliser comme fonction test $\nabla\Phi(U^k)$ et donc exiger un peu de régularité sur U^k si on souhaite justifier les intégrations par parties. Ces deux problèmes sont réglés par le Théorème 3.6. D'une part les approximations U^k sont effectivement toutes à valeurs dans \mathcal{U} (ce que l'on ne conservera *a priori* pas lors de la limite $\tau \rightarrow 0$, certaines composantes du système pouvant éventuellement s'annuler), et d'autre l'Hypothèse 3.2 assure que A est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur \mathcal{U} . La régularité de type Sobolev arbitraire qu'offre le Théorème 3.6 sur $A(U^k)$ nous assure que cette fonction appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^N)$ et par composition, U^k appartient donc au même espace. Nous perdrons bien sûr cette régularité sur la solution U avec le passage à la limite $\tau \rightarrow 0$. Ainsi, si $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est de classe \mathcal{C}^2 , nous sommes en mesure d'écrire rigoureusement

$$\max_{1 \leq k \leq P-1} \int_{\mathbb{T}^N} \Phi(U^k) + \sum_{j=1}^I \sum_{k=0}^{P-1} \tau \int_{\mathbb{T}^N} \langle \partial_j U^k, D^2(\Phi)(U^k) D(A)(U^k) \partial_j U^k \rangle \leq \int_{\mathbb{T}^N} \Phi(U^0), \quad (46)$$

qui est cette fois-ci l'analogie discret de (40). Si Φ est une entropie uniforme pour le système au sens de la Définition 3.4, nous procédons alors comme nous l'avons fait dans la preuve de la Proposition 3.6, pour récupérer un contrôle des gradients.

En marquant la dépendance en P par un indice, on se ramène à une variable temporelle continue en introduisant la fonction suivante définie sur Q_T

$$U_P(t, x) := \sum_{k=0}^{P-1} U_P^k \mathbf{1}_{[k\tau, (k+1)\tau]}(t).$$

Si on prolonge U_P par 0 sur \mathbb{R}_- , on vérifie qu'elle satisfait exactement l'équation

$$\partial_t U_P = \sum_{k=1}^{P-1} \tau \Delta[A(U_P^k)] \otimes \delta_{k\tau} + U_P^0 \otimes \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'([-\infty, T] \times \mathbb{T}^N),$$

et la compacité forte de la suite $(U_P)_P$ découle du Théorème 4.1 du Chapitre 4 car celui-ci autorise la dérivée en temps à être une mesure.

3.5.3 Perspectives

Le schéma fourni par le Théorème 3.6 permet de produire des solutions positives à des systèmes paraboliques quasi-linéaires où le principe du maximum ne s'applique pas. Il serait intéressant de comprendre si une méthode numérique performante peut-être développée en suivant cette procédure, en la comparant avec les techniques utilisées pour les équations paraboliques dégénérées, comme entre autres les méthodes de type volumes finis (voir par exemple le récent [24]).

3.6 Une question de Fontbona et Méléard

Dans cette dernière section nous présentons le résultat principal établi dans [P3]. Il s'agit d'une limite asymptotique reliant un système à diffusion croisée relaxé (avec des noyaux de convolution) au système standard.

3.6.1 Dérivation du système SKT

Dans les Sections 3.3 – 3.4 nous avons montré comment construire des solutions faibles au système SKT (à et à certaines de ses généralisations) par l'utilisation de la structure entropique sous-jacente. Une autre approche est possible pour la construction de solutions faibles, qui présente de plus l'intérêt de fournir une dérivation rigoureuse de ces systèmes. L'idée est de réaliser ces solutions comme limite asymptotique de systèmes plus simples. C'est ce qu'ont par exemple proposé Iida, Mimura et Ninomiya dans [94] en singularisant une famille d'équations de réaction/diffusion. Le modèle représente un système de deux populations dans lequel l'une des espèces existe en deux états (stressée ou non) passant de l'un à l'autre avec un taux de réaction qui diverge. L'analyse formelle établie dans [94] a été rendue rigoureuse dans différents articles, avec parfois des généralisations substantielles sur les taux de diffusion possibles : citons par exemple [40, 55, 144] (où sont dérivés des systèmes limites triangulaires), [128] et le récent [44] qui parvient à produire un système à diffusion croisée "plein".

Une approche asymptotique d'une autre saveur a été proposée par Fontbona et Méléard dans l'article [70]. Dans ce travail les auteurs prouvent l'existence de solutions à une version non locale du système SKT, partant d'un processus de population (finie) et étudiant la limite de celui-ci à mesure que le nombre d'individus diverge. En comparaison aux travaux cités jusqu'ici, l'approche de Fontbona et Méléard se démarque totalement car elle utilise exclusivement des outils probabilistes. Le système limite ainsi obtenu est une version modifiée du système SKT et s'écrit, pour $i \in \{1, \dots, I\}$

$$\partial_t u_i = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N \partial_{x_k x_l}^2 (a_{k,l}^i(\cdot, G^{i1} \star u^1, \dots, G^{iI} \star u^I) u^i) - \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} (b_k^i(\cdot, H^{i1} \star u^1, \dots, H^{iI} \star u^I) u^i) + \left(r_i - \sum_{j=1}^I C^{ij} \star u^j \right) u^i, \quad (47)$$

où l'opérateur de convolution \star n'agit que sur la variable d'espace et les fonctions $a_{k,l}^i$, b_k^i , G^{ij} , H^{ij} , C^{ij} sont des données régulières, l'inconnue du système étant la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq I}$. Remarquons que le système SKT correspond au cas particulier du système (47), en prenant

$b_k^i = 0$ et $a_{k,l}^i = \delta_{k,l} a^i$ une fonction affine (indépendante de x), en enlevant de plus tous les opérateurs de convolutions.

Fontbona et Méléard définissent un cadre de régularité où le système (47) est bien posé et s'intéressent ensuite à la limite $C^{ij} \rightarrow c_{ij}\delta$, où $c_{ij} \in \mathbb{R}$ et δ est la masse de Dirac. Ils prouvent (sous des hypothèses *ad hoc* sur les coefficients du système) que les solutions correspondantes du système (47) convergent effectivement vers une solution du système suivant, pour $i \in \{1, \dots, I\}$

$$\partial_t u_i = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N \partial_{x_k x_l}^2 (a_{k,l}^i(\cdot, G^{i1} \star u^1, \dots, G^{iI} \star u^I) u^i) - \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} (b_k^i(\cdot, H^{i1} \star u^1, \dots, H^{iI} \star u^I) u^i) + \left(r_i - \sum_{j=1}^I c_{ij} u^j \right) u^i. \quad (48)$$

Les systèmes tels que (47) ou (48) sont des versions *non locales* où *relaxées* de systèmes à diffusion croisée. La première appellation (non localité) est claire : les interactions ponctuelles du système SKT sont remplacées par des interactions de plus longue portée. La seconde appellation (relaxation) reflète la difficulté mathématique du système : les non linéarités présentes dans les systèmes (47) – (48) sont plus facilement gérables que celles du système SKT standard, car elles sont adoucies par les noyaux de convolution. Malheureusement, la présence de ces opérateurs détruit complètement la structure entropique que l'on a beaucoup exploitée dans les paragraphes précédents. À notre connaissance il n'existe aucune fonctionnelle de Lyapunov dégagée pour les systèmes relaxés à diffusion croisée. Mentionnons un autre type de système non local à diffusion croisée, introduit dans [12] et étudié en détail dans [110], où l'opérateur de convolution est échangé par $(\text{Id} - \varepsilon \Delta)^{-1}$ où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. L'avantage principal est que ce type de régularisation est adapté à l'étude du problème aux limites, alors que les opérateurs de convolution sont un peu pénibles à définir dans un domaine à bord. De la même manière que précédemment, la voie entropique n'est pas praticable pour cette relaxation elliptique et l'analyse mathématique développée dans [110] est à ce titre très différente de celle qu'offre la littérature sur les solutions globales au systèmes (de type) SKT ; elle repose sur une utilisation répétée d'estimées paraboliques, ce que l'on ne peut en général pas faire dans le cadre de solutions faibles pour le système SKT et ses variantes, car on ne peut pas écrire les composantes de ceux-ci comme des équations paraboliques à coefficients réguliers (ou même) bornés.

Les résultats établis dans [70] (soient : existence de solutions à (47) *via* des méthodes probabilistes et passage à la limite rigoureux vers une solution de (48)) peuvent être perçus comme la première étape d'un programme de dérivation rigoureuse de systèmes de type SKT, à partir d'un processus de population finie. Malheureusement Fontbona et Méléard n'ont pas réussi à passer à la limite dans les opérateurs de convolutions "intra-différentiels", *i.e.* correspondant aux convergences $(G^{ij}, H^{ij}) \rightarrow (\delta, \delta)$. La question est explicitement posée dans [70] de savoir si on peut oui ou non justifier cette asymptotique rigoureusement. L'article [P3] donne une réponse positive partielle. Avant de présenter celle-ci, mentionnons le récent travail [43] de Daus, Desvilletes et Dietert ; il s'agit d'une analyse (en partie) formelle qui permet de dériver des systèmes à diffusion croisée de taille arbitraire *via* des processus de Markov, offrant une nouvelle stratégie tant pour la dérivation que pour la construction de solutions faibles.

3.6.2 Une réponse partielle

L'article [P3] ne traite que de certains types de systèmes comme (48) : ceux-ci sont *triangulaires*, sans *auto-diffusion* et les coefficients de diffusions sont tous supposés *bornés*. Le principal résultat démontré est le suivant.

Théorème 3.7. *Soient deux familles de fonctions réelles $(a_i)_{1 \leq i \leq I}$ et $(r_i)_{1 \leq i \leq I}$, où pour tout i la fonction a_i est définie sur $Q_T \times \mathbb{R}^{I-i}$ et r_i est définie sur \mathbb{R}^I . On suppose de plus que les fonctions a_i, r_i sont continues, les a_i étant uniformément minorées et majorées par une constante positive et les r_i uniquement uniformément majorées. On suppose également que $|r_i|$ est sous-affine i.e. que $|r_i(x_1, \dots, x_I)| \lesssim 1 + |x_1| + \dots + |x_I|$.*

Pour tout $n \geq 1$ on se donne une famille $(\rho_i^n)_{1 \leq i \leq I}$ de noyaux réguliers, positifs et normalisés dans $L^1(\mathbb{T}^N)$, et on considère une famille de fonctions positives $(u_i^n)_{1 \leq i \leq I} \in L^1(Q_T)$ solution (dans le sens de la Définition 3.1 pour chaque équation) du système

$$\begin{cases} \partial_t u_1^n - \Delta[a_1(\cdot, u_2^n \star \rho_2^n, u_3^n \star \rho_3^n, \dots, u_I^n \star \rho_I^n)u_1^n] = r_1(u_1^n \star \rho_1^n, \dots, u_I^n \star \rho_I^n)u_1^n, \\ \partial_t u_2^n - \Delta[a_2(\cdot, u_3^n \star \rho_3^n, \dots, u_I^n \star \rho_I^n)u_2^n] = r_2(u_1^n \star \rho_1^n, \dots, u_I^n \star \rho_I^n)u_2^n, \\ \vdots \\ \partial_t u_I^n - \Delta[a_I u_I^n] = r_I(u_1^n \star \rho_1^n, \dots, u_I^n \star \rho_I^n)u_I^n, \end{cases}$$

avec une condition initiale $u_i^n(0, \cdot) = u_i^{in} \in L^2(\mathbb{T}^N)$ pour tout $i \in \llbracket 1, I \rrbracket$.

Si $(\rho_i^n)_n \rightharpoonup_n \delta$ (la masse de Dirac) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ pour tout i , alors à une sous-suite près, $(u_i^n)_{1 \leq i \leq I}$ converge dans $L^2(Q_T)$ vers une solution $(u_i)_{1 \leq i \leq I}$ du système à diffusion croisée suivant

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta[a_1(\cdot, u_2, u_3, \dots, u_I)u_1] = r_1(u_1, \dots, u_I)u_1, \\ \partial_t u_2 - \Delta[a_2(\cdot, u_3, \dots, u_I)u_2] = r_2(u_1, \dots, u_I)u_2, \\ \vdots \\ \partial_t u_I - \Delta[a_I u_I] = r_I(u_1, \dots, u_I)u_I, \end{cases}$$

avec la condition initiale $u_i(0, \cdot) = u_i^{in}$.

Remarque 3.11. *Pour $I = 2$, si u_2^{in} est supposée bornée, il n'est pas nécessaire de supposer a_1 bornée par au-dessus : u_2 est automatiquement bornée par le principe du maximum et la continuité de a_1 est suffisante.*

La force de ce résultat réside dans le peu de régularité exigée sur les fonctions a_i et r_i : seule la continuité est nécessaire. Dans un cas plus lisse (par exemple \mathcal{C}^2), on peut s'en sortir de manière plus triviale : les équations peuvent s'écrire sous la forme d'équations paraboliques et les estimées associées permettent alors de prouver plus directement la convergence. Notons toutefois qu'une telle approche nécessiterait une donnée initiale régulière (en tous les cas bornée), ce dont nous n'avons pas besoin ici.

Les solutions $(u_i^n)_{1 \leq i \leq I}$ dont il est question dans ce théorème peuvent être celles produites par la méthode probabiliste de [70] ou bien une adaptation de la méthode analyste de [110]. Mais ces deux méthodologies produisent des solutions relativement régulières, pour des données initiales (au moins) bornées et ne recouvrent donc pas exactement le champ d'application du Théorème 3.7. Nous proposons pour cette raison dans [P3] un résultat d'existence d'existence

plus général pour le système relaxé, pour des données initiales uniquement $L^2(Q_T)$. Ce résultat d'existence et la convergence annoncée dans le Théorème 3.7 découlent tous les deux d'un même résultat de compacité (le Lemme 4.2) que nous présentons en détail dans la Section 4.5 du Chapitre 4. L'idée est de propager la convergence équation par équation, ce qui explique pourquoi le Lemme 4.2 ne porte que sur une seule équation de Kolmogorov. Ce lemme est une conséquence de l'étude détaillée de l'équation de Kolmogorov que nous avons proposée dans la Section 3.2.

3.6.3 Perspectives

Le Lemme 4.2 de compacité qui est au cœur de l'analyse menée dans [P3] repose de manière tout à fait cruciale sur le fait que l'équation de Kolmogorov est bien posée lorsque le coefficient de diffusion est borné (voir Section 3.2). Il est possible d'élargir son champ d'application quand on garde à l'esprit les quelques cas non bornés où l'on peut répondre positivement à la Question 3.1. Nous renvoyons à la Section 4.5 du Chapitre 4 pour une discussion sur le sujet.

Ainsi, et contrairement à l'hypothèse triangulaire sur le système qui semble complètement rattachée à notre méthode de compacité "en cascade", il est réaliste d'espérer assouplir le contrôle supposé sur les fonctions a_i . On doit par exemple pouvoir traiter le cas d'opérateurs intégraux en x ou en t en se ramenant ainsi au cas d'une diffusion ne dépendant pas de l'une de ces deux variables (cas (ii) et (iii) évoqués au paragraphe 3.2.3). Une autre piste, un peu spéculative pour le moment, serait de réussir à montrer des estimées à la Muckenhoupt (voir paragraphe 3.2.3 et la Section A.3 de l'annexe) sur les solutions du système SKT triangulaire : dans ce cas on pourrait traiter le cas de coefficients a_i sous-linéaires. Le Graal serait de réussir à répondre positivement à la Question 3.1, avec une diffusion uniquement supposée intégrable, puisque l'on pourrait alors étendre l'analyse à de nombreux systèmes strictement triangulaires et enrichir considérablement le Lemme 4.2.

Compacité

Nous présentons dans ce chapitre plusieurs résultats de compacité ayant donné lieu aux articles [A11, A15] et à la prépublication [P3].

Les Sections 4.2 et 4.4 traitent de la généralisation d’un outil fondamental dans les équations d’évolution non linéaires : le lemme d’Aubin-Lions. Nous ne nous attarderons pas sur les origines bibliographiques de celui-ci (voir [A11] par exemple pour un petit historique) mais mentionnerons pour chacune des variations abordées les contributions existantes sur le sujet. Ces deux sections proposent des preuves nouvelles de faits en partie connus, permettant d’alléger parfois les hypothèses standards. En revanche, les résultats présentés dans les Sections 4.1, 4.3 et 4.5 n’avaient à notre connaissance pas été proposés dans la littérature avant les articles [A11], [A15] et [P3].

Dans cet ultime chapitre, en plus des notations introduites au tout début du manuscrit (notamment les symboles $\dot{\in}$ et $\ddot{\in}$), nous désignons par Ω un ouvert borné à bord Lipschitz de \mathbb{R}^N et I un segment non trivial de \mathbb{R} . Pour $p < N$, nous notons p^* l’exposant correspondant à l’injection de Sobolev $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, *i.e.* $p^* := Np/(N-p)$ et nous adoptons la convention $p^* = \infty$ dans le cas $p = N$ (où l’injection précédente n’est plus vérifiée). L’exposant conjugué de p est noté p' . Enfin si K est un compact euclidien, $\mathcal{M}(K)$ désigne l’ensemble des mesures finies sur K .

Dans la suite, et à plusieurs reprises, nous aurons besoin d’exprimer pour une suite $(b_n)_n$ de $L^1(I \times \Omega)$ une borne du type $(\partial_t b_n)_n \dot{\in} \mathcal{M}(I; H^{-m}(\Omega))$, où m est un entier naturel fixé. Ce type d’estimation “forte en t ” et “faible en x ” est typique de l’utilisation du lemme d’Aubin-Lions. Sans donner une définition plus précise de l’espace $\mathcal{M}(I; H^{-m}(\Omega))$, nous entendons cette borne au sens de l’inégalité suivante pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\overset{\circ}{I} \times \Omega)$:

$$\langle \partial_t b_n, \varphi \rangle \lesssim \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha \varphi\|_2, \quad (1)$$

où la constante derrière \lesssim ne dépend ni de n ni de φ . Cette formulation duale est immédiatement vérifiable lorsque $(b_n)_n$ est solution d’une équation d’évolution ; nous verrons aussi dans la Sec-

tion 4.4 qu'elle définit le bon cadre de généralisation du lemme d'Aubin-Lions aux domaines dits non cylindriques.

4.1 Convergence faible d'un produit

Le premier résultat que nous abordons ne traite pas à proprement parler de compacité mais donne un critère général permettant de passer à la limite dans un produit $(a_n b_n)_n$, sous une hypothèse de convergence faible pour a_n et b_n . Un tel critère évoque quelque part le phénomène de compacité par compensation, découvert par Murat et Tartar dans [129, 143]. Toutefois ce qui suit ne relève pas vraiment de cette théorie, mais en partage la capacité à traiter une non linéarité sans assurer de compacité forte pour l'une ou l'autre des suites mises en jeu : les oscillations sont possibles pour ces deux-ci mais en quelque sorte compatibles.

Proposition 4.1. *Soit $q \in [1, \infty]$ et $p \in [1, N]$. On considère deux suites $(a_n)_n \in L^q(I; W^{1,p}(\Omega))$ et $(b_n)_n \in L^{q'}(I; L^{\alpha'}(\Omega))$ qui convergent faiblement (ou faiblement- \star) vers a et b respectivement. On suppose que $\alpha < p^*$ et que $(\partial_t b_n)_n \in \mathcal{M}(I; H^{-m}(\Omega))$ pour un entier $m \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors, à une extraction près, on a la convergence*

$$(a_n b_n)_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a b, \text{ dans } \mathcal{M}(I \times \overline{\Omega}) - \star, \quad (2)$$

i.e. avec des fonctions tests dans $\mathcal{C}^0(I \times \overline{\Omega})$.

La preuve de cette proposition est inspirée d'un résultat de stabilité pour l'équation de transport, dont nous avons déjà rencontré des avatars dans ce manuscrit : il s'agit de [57, Thm. II.7]. Cette référence se limite au cadre L^1/L^∞ et ne traite que du produit de la solution d'une équation de transport par le champ la définissant. La preuve est basée sur l'étude d'un commutateur qui rappelle un peu le lemme de Friedrichs (on renvoie également à [57, Lem. II.1] pour ce dernier). Donnons en un aperçu.

Démonstration. En exploitant les convergences faibles, on se ramène d'abord au cas $a = b = 0$. Ensuite, on écrit

$$a_n b_n = \overbrace{a_n b_n - (a_n b_n) \star \varphi_k}^{:= A_{n,k}} + \overbrace{(a_n b_n) \star \varphi_k - a_n (b_n \star \varphi_k)}^{:= B_{n,k}} + \overbrace{a_n (b_n \star \varphi_k)}^{:= C_{n,k}},$$

où φ_k est une approximation de l'unité, la convolution portant sur la variable de Ω uniquement (nous passons ici outre les difficultés liées à la convolution au voisinage de $\partial\Omega$). Puisque $(a_n b_n)_n \in L^1(I \times \Omega)$, il suffit de vérifier la convergence sur un sous-espace dense de fonctions tests et par linéarité il suffit donc de considérer une famille totale $(\theta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}^0(I \times \overline{\Omega})$. Pour θ_p fixée, on déduit de la borne $(a_n b_n)_n \in L^1(I \times \Omega)$ la petitesse asymptotique en k de $\sup_n \langle A_{n,k}, \theta_p \rangle_{L^2(I \times \Omega)}$. Le commutateur mentionné précédemment est le terme $B_{n,k}$; on montre que le contrôle supposé du gradient de a_n fournit la petitesse asymptotique en k de $\sup_n \|B_{n,k}\|_1$. Ayant fixé k suffisamment grand il ne nous reste donc qu'à montrer la convergence de $(C_{n,k})_n$ vers 0. La convolution permet de "rattraper" l'indice de Sobolev négatif dans la borne que l'on a sur $(\partial_t b_n)_n$ et on obtient ainsi (k fixé) que $(b_n \star \varphi_k)_n \in \text{BV}(I \times \Omega)$. Ceci est suffisant pour récupérer de la convergence forte (à extraction près) sur $(b_n \star \varphi_k)_n$, si bien que $(C_{n,k})_n$ tend effectivement vers 0 dans $\mathcal{M}(I \times \overline{\Omega})$ faible- \star . L'extraction considérée ne dépend que de θ_p et k , donc l'argument diagonal permet de conclure. \square

Remarque 4.1. À la lecture de la preuve précédente, on constate qu'elle s'adapte mutadis mutandis en remplaçant l'intervalle I par un ouvert borné $\tilde{\Omega}$ de \mathbb{R}^d , avec une borne adéquate sur $(\tilde{\nabla}b_n)_n$, où $\tilde{\nabla}$ représente le gradient liées aux variables de $\tilde{\Omega}$.

Remarque 4.2. Une généralisation concernant l'hypothèse $(a_n)_n \in L^q(I; W^{1,p}(\Omega))$ est également possible. Sa seule fonction dans la preuve est la gestion du commutateur. Elle peut de fait être remplacée par une hypothèse d'uniformité sur les translations (en la variable associée à Ω) de a_n dans un espace qui n'est pas nécessairement un espace de Lebesgue (e.g. un espace de Birnbaum-Orlicz). Je donne dans [A11] (Proposition 2) un exemple particulier de telle généralisation avec une application pour le traitement d'une non linéarité présente dans l'article [85]; plus de détails sont fournis dans le paragraphe 2.3.3 du Chapitre 2.

Si $a_n = b_n$ dans la Proposition 4.1, on a convergence forte pour $(a_n)_n$, car la suite des normes quadratiques converge alors vers celle de a . Bien sûr, cela n'est rien d'autre qu'un cas (très) particulier du lemme d'Aubin-Lions. Inversement, on peut partir de ce dernier pour prouver une version moins générale de la Proposition 4.1. Ce point de vue différent a récemment été proposé dans [63, 74]. En dehors des généralisations données par les Remarques 4.1 et 4.2 qui semblent hors de portée avec cette dernière approche, dans la Proposition 4.1 la régularité en la première variable exigée pour le contrôle de $(\partial_t b_n)_n$ est très faible et sort du cadre qu'offre le lemme d'Aubin-Lions usuel. Cela permet notamment de considérer le cas de fonctions b_n en escalier en temps, typique d'un schéma d'Euler en temps pour une équation d'évolution.

C'est lors de ma collaboration avec Laurent Desvillettes et Saad Benjelloun pour l'article [A8] (paragraphe 2.3.3 du Chapitre 2) que j'ai pour la première fois eu recours à un résultat similaire à la Proposition 4.1. Sa forme actuelle ne m'est apparue que quelques années après pour traiter une question de compacité issue d'un tout autre contexte : les équations paraboliques dégénérées. C'est l'objet du paragraphe suivant.

4.2 Compacité et contrainte non linéaire

L'un des principaux résultats de l'article [A11] est le suivant.

Théorème 4.1. Soit $m \in \mathbb{N}$ un entier arbitraire et $\Phi \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ telle que $(\mathbf{1}_{|\Phi|' < \delta})_\delta$ converge dans $L^1(\mathbb{R})$ vers 0 avec δ . Si une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $L^1(I; W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega))$ satisfait $(a_n)_n \in L^2(I \times \Omega)$, $(\partial_t a_n)_n \in \mathcal{M}(I; H^{-m}(\Omega))$ et $(\nabla \Phi(a_n))_n \in L^2(I \times \Omega)$ alors $(a_n)_n \in L^2(I \times \Omega)$.

Commençons par expliquer en quoi ce résultat ne peut pas découler du lemme d'Aubin-Lions standard. Le contrôle du gradient d'une fonction *a priori* non linéaire de a_n "perd" de l'information au niveau des oscillations potentielles de la suite $(a_n)_n$ elle-même. Aussitôt que a_n s'approche en valeur d'un point critique de Φ la formule suivante dégénère

$$\nabla a_n = \frac{1}{\Phi'(a_n)} \nabla \Phi(a_n), \quad (3)$$

et on ne peut plus rien dire du gradient de ∇a_n . Un cas extrême est donné par l'exemple d'une fonction Φ constante sur $[-1, 1]$ et de la suite $a_n(x) := \cos(nx)$. L'hypothèse sur Φ indique justement que celle-ci n'est nulle part constante (et même quelque chose d'un peu plus fort que cela), y compris à l'infini.

Remarque 4.3. *On peut considérer l’hypothèse alternative “l’ensemble des points critiques de Φ est de mesure nulle”, mais dans ce cas on ne récupère que de la convergence presque partout pour la suite $(a_n)_n$: rien n’empêche celle-ci de se concentrer.*

Remarque 4.4. *La régularité Sobolev de la suite $(a_n)_n$ est nécessaire : si $a : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$ n’est pas presque partout constante, la suite $a_n(x) := a(nx)$ converge faiblement et non fortement vers la moyenne de a , alors que $\partial_t a_n = \nabla \Phi(a_n) = 0$ pour $\Phi(x) = x^2$. Merci à Clément Cancès et Boris Andreianov pour ce contre-exemple !*

Les hypothèses du Théorème 4.1 sont typiques des équations paraboliques dégénérées, comme par exemple celles utilisées pour la modélisation des milieux poreux mais on retrouve également de telles situations dans l’étude de systèmes à diffusion croisée. De fait, la question s’est présentée dans l’article [A10] que nous avons présenté au paragraphe 3.4.3 du Chapitre 3. On note au passage qu’on y utilise bien la très faible régularité $\partial_t a_n$ puisqu’on applique ce résultat à des fonctions en escalier en temps (semi-discrétisation de type Euler). Dans [A10] la non linéarité était considérablement plus simple que celles considérées ici (il s’agit d’une fonction puissance), mais l’approche semblait suffisamment robuste pour pouvoir s’adapter à d’autres cas. C’était une heureuse pioche : elle a ouvert la voie à une collaboration avec Boris Andreianov et Clément Cancès, que l’on abordera dans le paragraphe suivant.

Mais revenons au Théorème 4.1 et à sa preuve. On commence par introduire pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction $\gamma_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui “s’aplatit” au voisinage de chaque point critique de Φ et rejoint l’identité lorsqu’elle s’éloigne de ceux-ci. De manière un petit peu plus précise, avec l’hypothèse retenue sur les points critiques de Φ on peut construire une famille $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ satisfaisant

$$\|\text{Id} - \gamma_\varepsilon\|_\infty \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \text{ et } |\gamma'_\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon} |\Phi'|.$$

La proximité avec l’identité vient de ce que γ_ε ne s’aplatit que dans une zone epsilonesque autour de chaque point critique ; le prix à payer est le retour à une pente unité loin de ce voisinage, incarné par le coefficient $1/\varepsilon$. Qu’avons-nous gagné ? Lorsque $\varepsilon > 0$ est fixé, la suite $(\gamma_\varepsilon(a_n))_n$ a bien un gradient contrôlé puisque

$$\|\nabla \gamma_\varepsilon(a_n)\|_2 = \left\| \frac{\gamma'_\varepsilon(a_n)}{\Phi'(a_n)} \nabla \Phi(a_n) \right\|_2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_n \|\nabla \Phi(a_n)\|_2.$$

C’est là qu’intervient la Proposition 4.1 présentée dans la section précédente. Grâce à celle-ci, la borne ci-haut sur $(\nabla \gamma_\varepsilon(a_n))_n$ et la borne supposée sur $(\partial_t a_n)_n$ permettent de passer à la limite faible dans le produit $(\gamma_\varepsilon(a_n) a_n)_n$ (ε étant toujours fixé). Or, la convergence vers 0 de $(\|\text{Id} - \gamma_\varepsilon\|_\infty)_\varepsilon$ permet de voir que le produit $\gamma_\varepsilon(a_n) a_n$ est en fait une expression quasi quadratique de a_n : en écrivant les choses précisément on récupère la convergence de la suite des normes quadratiques de a_n et le tour est joué.

De nombreux auteurs s’étaient déjà intéressés à de tels problèmes de compacité non linéaires, citons par exemple [3, 34, 64, 119]. À cet égard, les principales innovations de [A11] sont la faible régularité supposée pour la dérivée en temps et la méthode de preuve suivie, laquelle se transfère très bien dans un cadre discrétisé (en temps et en espace), comme nous allons le voir dans la section suivante.

4.3 Opérateurs monotones et compacité pour les schémas numériques

Les difficultés rencontrées dans la preuve du Théorème 4.1 ayant comme un “parfum de porosité”, il était naturel de se tourner vers un expert des milieux poreux pour savoir comment ce type de situation est d’habitude traité : ce fut Clément Cancès (encore voisin de bureau de l’auteur à cette époque!).

Pour les équations paraboliques dégénérées la méthode standard suit la voie tracée par Alt et Luckhaus dans [3] afin d’obtenir de la compacité aussi bien pour la formulation continue que dans le cas discret (convergence d’un schéma numérique). Cette méthode robuste présente un inconvénient majeur : elle utilise explicitement l’équation pour produire des estimations sur les translations en temps du problème. De notre première discussion avec Clément suivent rapidement deux suggestions de celui-ci : la première est la conception d’une version discrète du Théorème 4.1 qui puisse être utilisée comme boîte noire, sans besoin de ressortir une artillerie de calculs similaires pour chaque équation étudiée ; la seconde est d’inclure dans la boucle l’un de ses collaborateurs, Boris Andreianov, qui s’était déjà intéressé à des questions de compacité discrète pour les équations paraboliques dégénérées. Force est de constater que l’une comme l’autre de ces propositions étaient judicieuses : il s’agissait des prémices de l’article [A15] dans lequel nous obtenons une généralisation conséquente du Théorème 4.1, que nous traduisons ensuite dans un cadre discret grâce au formalisme des *gradient schemes*. Avant de présenter plus en détail les résultats que nous avons obtenus, précisons que notre “discrétisation” d’un théorème de compacité n’avait rien d’un acte pionnier comme l’attestent les références [6, 33, 59, 75]. Toutefois, aucun de ces résultats ne traitaient avec la généralité que nous proposons les équations paraboliques dégénérées (en temps ou en espace). Parallèlement à [A15], Droniou et Eymard ont obtenu des résultats similaires dans [60] en renforçant même la convergence en temps.

Commençons par rappeler la définition des opérateurs (maximaux) monotones (scalaires).

Définition 4.1. *Un opérateur monotone est une application β de \mathbb{R} dans l’ensemble de ses parties satisfaisant la condition de croissance suivante :*

$$\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\ell_1, \ell_2) \in \beta(k_1) \times \beta(k_2), \quad (\ell_1 - \ell_2)(k_1 - k_2) \geq 0. \quad (4)$$

On note alors β^{-1} l’opérateur monotone défini par l’équivalence $\ell \in \beta^{-1}(k) \Leftrightarrow k \in \beta(\ell)$. Enfin, un opérateur monotone est dit maximal si son graphe l’est parmi tous les graphes d’opérateurs monotones scalaires.

Le résultat qui suit est issu de [A15].

Théorème 4.2. *Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de $L^2(I \times \Omega)$ convergeant faiblement dans cet espace respectivement vers a et b . On suppose l’existence d’un opérateur maximal monotone β pour lequel $b_n \in \beta(a_n)$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la convergence (2) est satisfaite on a alors les propriétés suivantes*

- (i) $b \in \beta(a)$ presque partout sur $I \times \Omega$;
- (ii) il existe une partition mesurable $A \sqcup B$ de $I \times \Omega$ pour laquelle (des sous-suites de) $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent presque partout respectivement sur A et B ;

(iii) si $\beta(\mathbb{R})$ ne contient que des singletons alors on peut prendre $B = I \times \Omega$ dans (ii) ;

(iv) si β est injective alors on peut prendre $A = I \times \Omega$ dans (ii).

Remarque 4.5. Les hypothèses ci-dessus diffèrent légèrement de celles présentes dans la Proposition 1.4 de [A15] ; s’y trouve notamment une fonction de poids que nous avons ici choisi d’omettre pour simplifier.

Associé à la Proposition 4.1 le théorème précédent constitue une généralisation conséquente — phénomène de concentration mis à part — du Théorème 4.1. En effet, dans l’énoncé de ce dernier on peut à moindre frais se ramener au cas d’une fonction Φ strictement croissante (c’est d’ailleurs la première réduction opérée dans la preuve donnée dans [A11]) et ainsi l’identifier à un graphe maximal monotone. La Proposition 4.1 permet de passer à la limite dans le produit $(a_n \Phi(a_n))_n$, et par stricte croissance on peut donc invoquer (iv).

La puissance du Théorème 4.2 vient de ce qu’il donne de l’information sur la suite $(a_n)_n$ du Théorème 4.1 y compris dans les cas où la fonction Φ admet des zones de “plat” ou bien des zones de multivaluation. Pour schématiser, les premières fournissent la convergence forte de $(\Phi(a_n))_n$, les secondes celle de $(a_n)_n$.

Considérer un lien aussi singulier qu’un graphe monotone entre a_n et b_n n’a rien de fantaisiste et correspond par exemple à certains modèles d’écoulements en milieu poreux où la saturation et la pression sont effectivement reliées par une loi de ce type. L’exemple concret de l’équation de Richards est présenté dans [A15], avec un résultat de stabilité faible exploitant le Théorème 4.2.

Expliquons un peu la preuve du Théorème 4.2. Constatons d’abord que, par monotonie de β , pour $u, v \in \mathbb{R}$ on a

$$\left[v \in \beta(u) \right] \iff \left[\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall \ell \in \beta(k), \quad (u - k)(v - \ell) \geq 0 \right]. \quad (5)$$

Puisque $b_n \in \beta(a_n)$ presque partout, on a ainsi

$$\left[b_n(t, x) \in \beta(a_n)(t, x) \right] \iff \left[\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall \ell \in \beta(k), \quad (a_n(t, x) - k)(b_n(t, x) - \ell) \geq 0 \right].$$

où, de part et d’autre de l’équivalence, (t, x) se balade en dehors d’un ensemble négligeable de $I \times \Omega$. Il vient donc toute fonction test positive φ que

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall \ell \in \beta(k), \quad \int_{I \times \Omega} (a_n - k)(b_n - \ell) \varphi \geq 0.$$

En développant et en exploitant les convergences faibles de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ ainsi que (2) on récupère que

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall \ell \in \beta(k), \quad \int_{I \times \Omega} (a - k)(b - \ell) \varphi \geq 0,$$

et comme cela est vrai pour une fonction test $\varphi \geq 0$ arbitraire, on a bien établi (i) grâce à la caractérisation (5). Pour (ii) on procède de manière similaire en développant

$$\int_{I \times \Omega} (a_n - a)(b_n - b) = \int_{I \times \Omega} a_n b_n - \int_{I \times \Omega} a b - \int_{I \times \Omega} a_n b - \int_{I \times \Omega} a b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad (6)$$

où la convergence est encore conséquence des convergences faibles supposées et de (2). Mais ayant démontré par (i) que $b \in \beta(a)$ presque partout, la caractérisation (5) nous montre que $c_n := (a_n - a)(b_n - b)$ est positive presque partout si bien que (6) exprime en fait la convergence forte $(c_n)_n \rightarrow 0$ dans $L^1(I \times \Omega)$! C'est ainsi que de la convergence presque partout apparaît (à extraction près) dans (ii). L'argument précédent est une instance particulière de l'*astuce de Minty* (voir [111] par exemple). Les points (iii) et (iv) se traitent alors en constatant que β (ou β^{-1}) peut être identifiée à une fonction croissante continue (car le graphe est maximal). L'approche proposée dans [A15] diffère de celle que nous avons présentée ici et fournit une description plus précise des ensembles A et B en terme de mesures de Young, laquelle tire son inspiration de [93].

Un avantage du Théorème 4.2 est que l'on peut, par le formalisme des *gradient schemes* (voir [61, 62]), l'étendre au cas discret pour obtenir un critère de convergence générique de schémas numériques. Ce formalisme repose sur l'introduction d'*opérateurs de reconstruction*, lesquels envoient un espace vectoriel de dimension finie (représentant les données discrètes produites par le schéma) dans un espace de fonctions bornées. Les cas étudiés dans [A15] correspondent à des équations d'évolution pour lesquelles les estimations *a priori* ne portent que sur des opérateurs différentiels d'ordre 1, on ne nécessite ainsi que de reconstruire la fonction approchée elle-même, son gradient spatial et sa dérivée en temps. Trois axiomes de compatibilité pour ces opérateurs sont alors nécessaires pour traduire le Théorème 4.2 en un outil clé en main (voir Theorem 3.9 de [A15]) permettant d'obtenir la convergence forte de différents schémas numériques de manière relativement "anonyme" vis-à-vis de l'équation considérée (à la différence de la méthodologie de [3]). Nous ne présenterons pas plus en détail les exemples d'utilisation de ce résultat (qui nécessitent l'introduction de nombreuses notations afin de définir les schémas eux-mêmes) et renvoyons à la Section 4 de [A15] pour une application détaillée de ce résultat à l'étude d'un schéma volumes finis pour l'équation des milieux poreux.

4.4 Aubin-Lions en domaines non cylindriques

Dans cette section nous allons présenter une version du lemme d'Aubin-Lions sur des domaines non cylindriques. Le résultat principal est le Théorème 4.4, issu de [A11].

Un domaine temps/espace est *cylindrique* s'il peut s'écrire sous la forme $I \times \Omega$ (voir la Figure 4.1 pour une illustration). L'étude d'une équation d'évolution sur un domaine de ce type impose donc que la variable d'espace appartienne à un ouvert fixé indépendamment de la variable de temps. Si au contraire on souhaite considérer le cas d'un domaine spatial dépendant du temps (comme on le fait dans le Chapitre 1), il faut alors considérer une famille d'ouverts $(\Omega^t)_{t \in I}$ encodant le déplacement de celui-ci et introduire l'ensemble ouvert suivant

$$\widehat{\Omega} := \bigcup_{t \in I} \{t\} \times \Omega^t.$$

Une fonction $u(t, x)$ définie sur un tel domaine $\widehat{\Omega}$ ne peut pas être vue comme une fonction de la variable temporelle à valeurs dans un espace fonctionnel de la variable spatiale. Dans le cadre d'une équation aux dérivées partielles non linéaire, cela conduit à la difficulté suivante : le lemme d'Aubin-Lions n'est pas directement applicable, en fait même son énoncé est problématique. À notre connaissance la première occurrence d'un lemme de compacité pour traiter une situation de ce type remonte à l'article [72] de Fujita et Sauer, pour l'étude des

équations de Navier-Stokes incompressible dans un domaine variable en temps. La méthode employée nécessite une grande régularité du domaine $\widehat{\Omega}$ (et donc du mouvement considéré pour le domaine spatial) car elle repose sur l'approximation de celui-ci par une union finie de domaines cylindriques sur lesquels le lemme d'Aubin-Lions standard est invocable. Cette technique a été utilisée dans [39] pour l'étude de l'interaction d'un fluide visqueux et incompressible avec des solides immergés, sous une hypothèse de non collision ; cette dernière fut relaxée dans les travaux de [136] et [66] (fluide non newtonien), où le lemme d'Aubin-Lions standard est utilisé sur des projections judicieuses de la vitesse fluide. Une méthode alternative basée sur un opérateur de prolongement adéquat est proposée dans [50, 51]. Noter que dans ces travaux la régularité du domaine non cylindrique est en partie héritée de celle supposée sur les solides. Dans le cas où la structure est élastique (sa forme elle-même admet donc une dynamique qui n'est pas donnée *a priori*), la régularité du domaine n'est plus contrôlée et des méthodes alternatives (utilisant comme [50, 51] des opérateurs de prolongements) ont été proposées dans [27, 52] puis [86] dans le cas des plaques. Récemment, le cas de coques a été traité dans [107], où la compacité est obtenue en reproduisant plus ou moins la preuve du lemme d'Aubin-Lions dans le contexte étudié. Dans chacun de ces articles la compacité est démontrée *pour l'approximation construite* en utilisant parfois très fortement le système lui-même. Cela rejoint quelque peu le problème que nous avons rencontré dans la Section 4.3, où une méthodologie "équation-dépendante" conduisait à une bibliographie quelque peu redondante. Mentionnons toutefois la récente prépublication [127] où les auteurs se proposent effectivement d'établir un lemme d'Aubin-Lions générique en domaine non cylindrique, dans le cas où la variable temporelle est discrétisée. L'intérêt est bien sûr de pouvoir invoquer ce type de résultat pour justifier la convergence d'un schéma semi-discret, mais le prix à payer est une liste de sept hypothèses (qui reviennent d'une manière ou d'une autre à contrôler la régularité en temps du domaine).

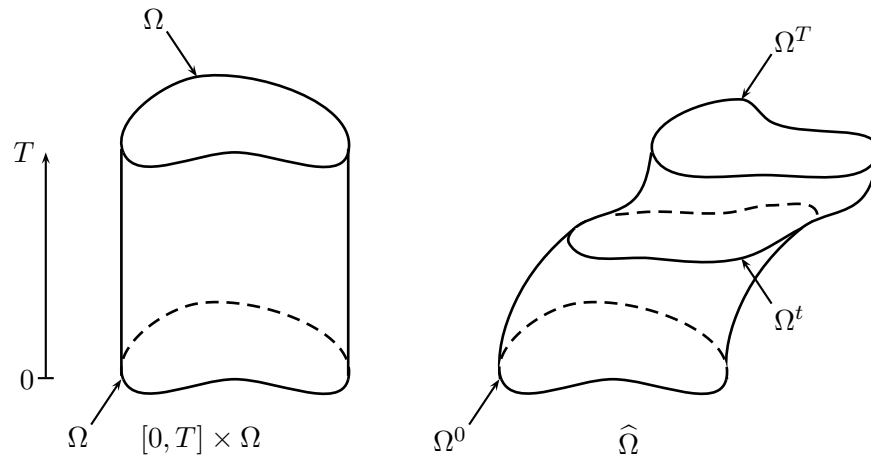


FIGURE 4.1 – Pour l'intervalle $I = [0, T]$, un domaine cylindrique (à gauche) et un domaine non cylindrique (à droite).

Dans [A11] est proposé un outil de compacité adapté à l'étude d'un fluide visqueux incompressible sur un domaine dépendant du temps, sous une faible hypothèse de régularité de mouvement. La preuve proposée est à notre connaissance nouvelle et ne consiste pas à invoquer localement ou partiellement le lemme d'Aubin-Lions : il s'agit en fait d'une nouvelle preuve de ce résultat, valide tant en domaine fixe qu'en domaine dépendant du temps. L'intérêt de cette

méthode est qu'elle ne privilégie aucune variable (et pourrait ainsi s'étendre à des cas plus généraux, voir Remarque 4.6 par exemple). Elle consiste à décomposer une suite $(f_n)_n$ définie sur le domaine (cylindrique ou non) $\widehat{\Omega}$ ainsi

$$f_n = g_{n,k} + f_n \star \varphi_k, \quad (7)$$

où la convolution ne porte que sur la variable d'espace et $(\varphi_k)_k$ est une approximation de l'unité; nous restons silencieux ici quant aux problèmes que l'on rencontre lorsque l'on se rapproche de $\partial\widehat{\Omega}$. Il est standard que si $(f_n)_n$ bénéficie d'un contrôle $L^p(\widehat{\Omega})$ de ses dérivées en la variable spatiale alors $\sup_n \|g_{n,k}\|_p$ tend vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$. Il ne reste donc qu'à obtenir de la compacité sur $(f_n \star \varphi_k)_n$ pour k fixé, ce que l'on peut obtenir si l'on contrôle les oscillations en temps de $(f_n)_n$ dans un espace "faible" en la variable d'espace, au sens de l'inégalité (1). Cette décomposition est la même que celle que nous avons utilisé dans la preuve de la Proposition 3.5, la propriété d'approximation uniforme étant l'analogue du contrôle uniforme sur le commutateur. Cependant la Proposition 3.5 ne peut fournir que de la compacité quadratique (en prenant $a_n = b_n$), ce que dépasse le résultat suivant tiré de [A11], fruit de l'argumentaire précédent.

Théorème 4.3. *Soit $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et connexe, m un entier naturel et p un réel de $[1, \infty[$. On considère une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur $\widehat{\Omega}$ telle que $(f_n)_n \in L^p(\widehat{\Omega})$ et $(\nabla_x f_n)_n \in L^p(\widehat{\Omega})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\widehat{\Omega}), \quad \langle \partial_t f_n, \varphi \rangle \lesssim \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha \varphi\|_2, \quad (8)$$

où \lesssim ne dépend ni de n ni de φ . Alors, $(f_n)_n \in L^p_{\text{loc}}(\widehat{\Omega})$.

Remarque 4.6. *On peut remplacer $\widehat{\Omega}$ par une partie bornée de $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^N$ en adoptant (8), dans le même esprit que la Remarque 4.1.*

Comme nous l'avons remarqué plus haut, dans le cas cylindrique où $\widehat{\Omega} = I \times \Omega$, l'estimation (8) est strictement équivalente à " $(\partial_t f_n)_n \in L^2(I; H^{-m}(\Omega))$ " et on retrouve le cadre Aubin-Lions classique. La preuve esquissée ci-dessus est en fait une méthode "à la Kruzhkov" (voir [102] ou [6] pour une présentation plus récente), sauf que l'on n'étudie pas directement les translations en temps. On remarque qu'aucune hypothèse de régularité n'est exigée sur $\widehat{\Omega}$ (en dehors de sa connexité), ce qui explique l'aspect local du résultat. Pour récupérer la compacité jusqu'au bord, un peu de régularité (en fait : l'Hypothèse 4.1 ci-bas) sur $\widehat{\Omega}$ permet d'obtenir un surplus d'intégrabilité suffisant pour conclure; ce résultat est proposé dans [A11].

Dans la suite nous allons utiliser la notion de *trace normale* pour un champ à divergence nulle. Nous renvoyons à la Section A.4 de l'Annexe A pour une brève introduction.

Dans $L^2(\Omega)$, par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$, on dispose de l'expression duale suivante pour la norme d'un élément g de $L^2(\Omega)$:

$$\|g\|_2 = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \|\varphi\|_2 \leq 1} \langle u, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (9)$$

La non densité de $\mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega)$ dans $L^2_{\text{div}}(\Omega)$ interdit une formule analogue dans cet espace. Plus précisément, les éléments de $L^2_{\text{div}}(\Omega)$ ayant une perception du bord *via* leur trace normale, il est impossible d'exprimer totalement leur norme sans exprimer la valeur de cette trace. On a en fait le résultat suivant, démontré dans [A11].

Lemme 4.1. *Pour un symbole \lesssim ne dépendant que de Ω , on a pour tout $u \in L^2_{\text{div}}(\Omega)$*

$$\|u\|_2 \lesssim \sup_{\varphi \in \mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega), \|\varphi\|_2 \leq 1} \langle u, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_{\mathbf{n}} u\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}. \quad (10)$$

Remarque 4.7. *Grâce à la continuité de l'opérateur de trace normale, ce lemme permet de voir que le membre de droite de l'inégalité (10) est une norme sur $L^2_{\text{div}}(\Omega)$, équivalente à $\|\cdot\|_2$. Il s'agit donc bien d'une généralisation de (9).*

Dans la preuve du Théorème 4.3 ci-haut, l'utilisation de l'estimation (8) repose précisément sur une représentation de la norme comme dans (9). Dans le contexte des équations de Navier-Stokes incompressible, le contrôle que l'on est en droit d'espérer pour les dérivées en temps n'est pas exactement du type (8), si on considère un problème aux limites : on dispose en général de peu d'informations sur la pression. La formulation standard efface celle-ci en restreignant l'ensemble des fonctions tests, puisque l'on ne considère que des champs de vecteurs à divergence nulle. Ce faisant, on a bien un contrôle du type (8), mais uniquement pour φ parcourant $\mathcal{D}_{\text{div}}(\widehat{\Omega})$. Si on cherche à reproduire la preuve du Théorème 4.3 dans le cas d'une estimation de type "fluide incompressible" (*i.e.* avec un ensemble restreint de fonctions tests), toute la difficulté est concentrée sur le fait que la formule de représentation (9) n'est plus vraie¹. C'est une difficulté que l'on rencontre pour les équations de Navier-Stokes, même dans un domaine indépendant du temps. Le point de vue adopté dans [A11] est de résoudre ce problème de la même manière, que le domaine soit cylindrique ou non, par une approche basée sur la décomposition (7).

Contrairement au Théorème 4.3, nous sommes obligés d'imposer un peu de régularité sur le bord, ne serait-ce que pour exprimer une condition sur la trace normale. L'hypothèse suivante est toutefois bien moins forte que la plupart de celles qu'on retrouve dans la littérature pour les lemmes de compacité non cylindrique.

Hypothèse 4.1. *$I = [0, T]$ et il existe application de classe \mathcal{C}^1*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (t, x) &\longmapsto \mathcal{A}(t, x) = \mathcal{A}_t(x), \end{aligned}$$

telle que, pour tout $t \in I$, \mathcal{A}_t est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^N , $\mathcal{A}_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^N}$ et $\Omega^t := \mathcal{A}_t(\Omega)$.

Remarque 4.8. *Il s'agit du même cadre de régularité que celui introduit dans le Chapitre 1.*

Étant donné un élément $u \in L^2_{\text{div}}(\widehat{\Omega})$, l'hypothèse précédente permet de définir sa trace normale $\gamma_{\widehat{\mathbf{n}}} u$ sur le bord non cylindrique

$$\widehat{\Gamma} := \bigcup_{0 < t < T} \{t\} \times \partial\Omega^t.$$

Cette trace normale appartient à $H_x^{-1/2}(\widehat{\Gamma})$, le complété de $\mathcal{C}^0(\widehat{\Gamma})$ pour la norme

$$\|\gamma_{\widehat{\mathbf{n}}} v\|_{H_x^{-1/2}(\widehat{\Gamma})} := \int_0^T \|\gamma_{\widehat{\mathbf{n}}}^t \varphi(t)\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega^t)}^2 dt,$$

1. Bien sûr si on travaille sur un domaine sans bord comme \mathbb{T}^N ou \mathbb{R}^N , cette formule est bien vérifiée ; par ailleurs, dans de tels cas on dispose d'une expression explicite du projecteur de Leray, qui permet alors directement de contourner le problème.

où l'on a noté γ_n^t l'opérateur de trace normale sur Ω^t (on renvoie à la Section A.4 de l'annexe). L'article [A11] propose alors le résultat de compacité suivant, notamment utilisé pour l'article [A12] que l'on a présenté dans le premier chapitre.

Théorème 4.4. *Soit $m \in \mathbb{N}$. Sous l'Hypothèse 4.1, soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\widehat{\Omega}$. On note $\overline{u_n}$ le prolongement de ces fonctions par 0 en dehors de $\widehat{\Omega}$ et on suppose que*

$$(\overline{u_n})_n \in L^\infty(\mathbb{R}; L^2_{\text{div}}(\mathbb{R}^N)), \quad (u_n)_n \in L^2(\widehat{\Omega}), \quad (\nabla_x u_n)_n \in L^2(\widehat{\Omega}), \quad (\gamma_{\widehat{n}} u_n)_n \in H_x^{-1/2}(\widehat{\Gamma}), \quad (11)$$

et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\varphi \in \mathcal{D}_{\text{div}}(\widehat{\Omega}), \quad \langle \partial_t u_n, \varphi \rangle \lesssim \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha \varphi\|_{L^2(\widehat{\Omega})}, \quad (12)$$

où \lesssim ne dépend ni de n ni de φ . Alors $(u_n)_n \in L^2(\widehat{\Omega})$.

Les trois premières bornes (11) sont typiques de l'étude des équations de Navier-Stokes incompressible et des solutions de Leray. La dernière traduit un contrôle de la trace au bord, qui en général est fournit par les conditions aux limites du système. Enfin, l'estimation (12) est l'équivalent annoncé de (8).

Pour la preuve du Théorème 4.4, en soustrayant un relèvement adéquat, on peut se ramener au cas d'une trace normale nulle. La difficulté est que l'approximation par convolution perturbe les valeurs aux bords du champ fluide. On introduit pour cela une famille de projecteurs annulant la trace normale au bord, et l'une des étapes délicates de l'analyse est de mesurer l'écart entre ceux-ci et l'identité à mesure que les noyaux de convolutions se rapprochent de la masse de Dirac. Cela se quantifie grâce à une formule analogue à (10), tenant compte de la variation en temps.

4.5 Un résultat de compacité pour l'équation de Kolmogorov

Le lemme suivant a été établi dans l'article [P3]. Il s'agit d'un résultat de compacité pour une équation de diffusion de type Kolmogorov. Pour une introduction à cette équation, nous renvoyons à la Section 3.2 du Chapitre 3, dans laquelle se trouve d'ailleurs un certain nombre de résultats et de notions que nous utiliserons ci-bas. Rappelons que Q_T désigne l'ensemble $[0, T] \times \mathbb{T}^N$.

Lemme 4.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère une fonction positive $z_n^0 \in L^2(\mathbb{T}^N)$, deux fonctions bornées $\mu_n \in L^\infty(Q_T)$ et $R_n \in L^\infty(Q_T)$ et une fonction positive $z_n \in L^2(Q_T)$ solution duale du problème suivant*

$$\begin{aligned} \partial_t z_n - \Delta(\mu_n z_n) &= R_n z_n, \\ z_n(0, \cdot) &= z_n^0. \end{aligned}$$

On suppose que $\inf_n \inf_{Q_T} \mu_n > 0$ et $\sup_n \sup_{Q_T} R_n < \infty$, $(z_n^0)_n \in L^2(\mathbb{T}^N)$, $(R_n)_n \in L^2(Q_T)$ et enfin que $(\mu_n)_n \in L^1(Q_T)$, avec une valeur d'adhérence bornée. Alors on a $(z_n)_n \in L^2(Q_T)$.

Remarque 4.9. *L'appartenance $R_n \in L^\infty(Q_T)$ permet de rattraper le cadre des solutions duales que nous avons introduit dans la Section 3.2. On pourrait tout à fait relaxer cette condition, mais avec un espace qui dépend de la dimension (voir Remarques 3.4 – 3.5).*

Dans le cas où μ_n est une constante $\alpha > 0$ pour tout n et $R_n = 0$, le Lemme 4.2 n'exprime rien d'autre que la compacité de l'opérateur de la chaleur, ce que l'on peut voir directement par une estimation d'énergie (portant sur le gradient) ou en utilisant le noyau de la chaleur par exemple. Par contre, même dans le cas où μ_n est une fonction bornée fixée $\mu \in L^\infty(Q_T)$ et $R_n = 0$ (qui est un cas d'application immédiat de notre lemme), il n'est pas évident de récupérer une quelconque compacité forte sur la suite de solutions z_n .

Commentons un peu les hypothèses retenues. Les minoration et majorations uniformes pour les coefficients de diffusivité μ_n et de réaction R_n sont typiques des modèles retenus en dynamiques des populations (on renvoie au Chapitre 3 pour des exemples). Comme cela est expliqué dans la Section 3.2, les estimées de dualité pour les équations de diffusion de type Kolmogorov conduisent naturellement à des bornes $L^2(Q_T)$ sur les solutions de celles-ci. Ainsi, si z_n représente une densité de population et R_n un taux de réaction dépendant des densités d'autres espèces, l'hypothèse $(R_n)_n \in L^2(Q_T)$ revient à exiger une croissance sous-linéaire en celles-ci. C'est typiquement le cas dans le système de Shigesada, Kawasaki et Teramoto que l'on introduit au début du Chapitre 3.

La compacité supposée sur la suite $(\mu_n)_n$ a lieu dans $L^1(Q_T)$ mais il est nécessaire qu'un point d'accumulation soit borné pour pouvoir invoquer les résultats que nous avons développés dans la Section 3.2. Par contre, aucune borne uniforme dans $L^\infty(Q_T)$ n'est exigée pour $(\mu_n)_n$ ou $(R_n)_n$, seule une appartenance est exigée.

Dans sa forme actuelle le Lemme 4.2 est particulièrement adapté à l'étude d'un système triangulaire (de taille arbitraire), par exemple pour passer à la limite dans un processus d'approximation en "propageant" la compacité d'une équation à l'autre. Nous donnons un exemple de telle utilisation dans la Section 3.6 du Chapitre 3.

Comme nous le verrons plus bas, la preuve de ce résultat repose sur le cadre des *solutions duales* que nous avons introduit dans la Section 3.2. C'est pour cette seule raison que nous sommes contraints d'imposer les conditions d'appartenance à $L^\infty(Q_T)$, lesquelles ont tout l'air d'être des contraintes techniques totalement artificielles. En s'appuyant sur les cas non bornés où l'on peut répondre positivement à la Question 3.1 (voir paragraphe 3.2.3), on peut ainsi étendre les cas d'applications du Lemme 4.2.

Terminons ce chapitre en expliquant comment les résultats obtenus dans la Section 3.2 permettent de prouver le Lemme 4.2. Notons que la Proposition 3.5 ne s'applique pas directement à $(z_n)_n$ car le terme source n'est pas borné dans $L^2(Q_T)$ (tout en appartenant effectivement à cet espace). On commence par établir une borne sur $(z_n)_n$ en posant $\rho := \sup_n \sup_{Q_T} R_n$ et en invoquant la Proposition 3.4 pour obtenir $z_n \leq \tilde{z}_n e^{\rho T}$ où \tilde{z}_n est la solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{z}_n - \Delta(\mu_n \tilde{z}_n) &= 0, \\ \tilde{z}_n(0, \cdot) &= z_n^0. \end{aligned}$$

Cette fois-ci la Proposition 3.4 nous donne bien $(\mu_n \tilde{z}_n)_n \in L^2(Q_T)$. Ainsi la suite de fonctions positives $(z_n)_n$ est majorée par une suite compacte dans $L^2(Q_T)$: elle est équi-intégrable dans cet espace, il n'y aura donc pas de problèmes de concentration, et on se ramène ainsi à montrer que $(z_n)_n$ converge presque partout, à extraction près.

Par unicité nous pouvons écrire $z_n = z_n^+ + z_n^-$, où z_n^+ et z_n^- sont respectivement solutions des équations de Kolmogorov suivantes

$$\begin{aligned}\partial_t z_n^+ - \Delta(\mu_n z_n^+) &= \rho z_n, \\ z_n^+(0, \cdot) &= z_n^0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_t z_n^- - \Delta(\mu_n z_n^-) &= (R_n - \rho)z_n, \\ z_n^-(0, \cdot) &= 0.\end{aligned}$$

Avec la borne déjà établie $(z_n)_n \in L^2(Q_T)$ et la Proposition 3.5 on obtient $(\mu_n z_n^+)_n \in L^2(Q_T)$ qui implique (minoration uniforme de μ_n) que $(z_n^+)_n \in L^2(Q_T)$. Il nous suffit donc pour conclure d'établir $(z_n^-)_n \in L^1(Q_T)$. Ensuite, notant $P_n := (R_n - \rho)z_n$, on peut à nouveau invoquer l'unicité pour décomposer $z_n^- = u_n^p + v_n^p$, où u_n^p correspond au terme source $P_n \mathbf{1}_{|P_n| \leq p}$ et v_n^p correspond au terme complémentaire. À p fixé, $(u_n^p)_n$ est bien compacte dans $L^2(Q_T)$ par la Proposition 3.5 (la source est bornée dans $L^\infty(Q_T)$). La conclusion découlera donc de la petitesse asymptotique (en p) de $\sup_n \|v_n^p\|_1$. Elle est obtenue en notant que $(P_n)_n$ est équi-intégrable dans $L^1(Q_T)$, puisque $(z_n)_n$ l'est dans $L^2(Q_T)$ et que $(R_n - \rho)_n \in L^2(Q_T)$ par hypothèse. Cela impose la petitesse asymptotique (dans $L^1(Q_T)$) pour le terme source de l'équation définissant v_n^p . Cette dernière fonction est négative par la Proposition 3.4 (condition initiale nulle, terme source négatif), on lui transfère donc la petitesse asymptotique par intégration directe sur Q_T de l'équation. Cette dernière opération est licite dans le cadre des solutions duales : elle revient à prendre la constante 1 comme fonction test admissible.



Appendice

A.1 De l'intérêt des estimations *a priori*

Le théorème suivant fournit l'existence d'un point fixe par le biais d'une information *a priori* sur celui-ci. Pour sa preuve, on renvoie à [77, Thm. 11.6, p.286]. À la lecture de celle-ci on constatera en particulier que la complétude de l'espace n'est pas nécessaire.

Théorème A.1 (Schaefer). *Soit E un espace normé et $\Theta : E \times [0, 1] \rightarrow E$ une application continue envoyant les parties bornées sur des parties relativement compactes. Pour $\sigma \in [0, 1]$ on note $\Theta_\sigma = \Theta(\cdot, \sigma)$. On suppose que $\Theta_0 = 0$ et que l'ensemble des points fixes de la famille $(\Theta_\sigma)_{\sigma \in [0, 1]}$ est borné. Alors Θ_1 possède au moins un point fixe dans E .*

A.2 Difféomorphismes de l'espace euclidien

Voici un critère très simple et utile pour vérifier qu'une application est un difféomorphisme.

Théorème A.2 (Hadamard-Lévy). *Un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ est \mathcal{C}^1 -difféomorphisme si et seulement si c'est une application propre sans point critique.*

On trouvera une preuve de ce théorème (et de plusieurs généralisations) dans [83].

A.3 Fonction maximale et condition de Muckenhaupt sur le tore

Les définitions et énoncés suivants admettent des analogues sur \mathbb{R}^N ou Q_T mais nous nous concentrons ici sur le cas du tore plat \mathbb{T}^N . Si g est une fonction intégrable sur une boule B , on introduit la notation suivante pour désigner sa moyenne sur celle-ci

$$\mathop{\int}_B g = \frac{1}{|B|} \int_B g.$$

Définition A.1. *Étant donnée $g \in L^1(\mathbb{T}^N)$, la fonction maximale de Hardy-Littlewood associée, notée Mf , est définie pour $x \in \mathbb{T}^N$ par*

$$Mg(x) := \sup_{r>0} \int_{B_r(x)} |g|,$$

où l'on a noté $B_r(x)$ la boule de centre x et de rayon r . L'opérateur maximal de Hardy-Littlewood est l'application linéaire $g \mapsto Mg$.

Au vu de sa définition, il n'est pas surprenant que la fonction maximale entretienne un lien particulier avec l'approximation par convolution puisqu'elle fournit un majorant de toutes les moyennes de $|g|$. C'est ce qu'exprime la proposition suivante, dont on trouvera une preuve dans [141, Thm. 1, p.63] (et aussi d'autres propriétés de la fonction maximale).

Proposition A.1. *Soit $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ une approximation de l'unité sur \mathbb{T}^N . Pour toute fonction g intégrable sur \mathbb{T}^N on a presque partout l'inégalité $|g \star \varphi_\varepsilon| \lesssim Mg$, où \lesssim ne dépend que de la dimension et de l'approximation choisie.*

La proposition suivante se généralise à d'autres exposants que $p = 2$, on en trouvera une preuve dans [1] par exemple.

Proposition A.2. *Si M désigne l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood, on a (le symbole \lesssim ne dépend que de la dimension) :*

- (i) *Si $g \in L^2(\mathbb{T}^N)$, alors $Mg \in L^2(\mathbb{T}^N)$ et $\|Mg\|_2 \lesssim \|g\|_2$.*
- (ii) *Si $g \in H^1(\mathbb{T}^N)$, alors, presque partout en $x, y \in \mathbb{T}^N$ on a*

$$|g(x) - g(y)| \lesssim |x - y|(M|\nabla g|(x) + M|\nabla g|(y)).$$

Le premier point exprime la stabilité $L^2(\mathbb{T}^N)$ de l'opérateur maximal. Le second permet un contrôle ponctuel du taux d'accroissement de la fonction g . Il ne s'agit pas d'une généralisation à régularité Sobolev d'une propriété standard des fonctions lisses : même dans le cas où g est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^N)$ cette estimation est une information non triviale !

En toute généralité le caractère stable de la fonction maximale (point (i) de la Proposition A.2) n'est plus vrai si on se place dans un espace L^2 à poids. La définition ci-bas et le théorème qui la suit donnent le cadre exact pour éviter ces pathologies.

Définition A.2. *Une fonction positive $\nu \in L^1(\mathbb{T}^N)$ satisfait la condition A_2 de Muckenhoupt si*

$$\sup_B \left(\int_B \nu \right) \left(\int_B \frac{1}{\nu} \right) < \infty,$$

où le supremum est pris sur toutes les boules non triviales $B \subset \mathbb{T}^N$.

Théorème A.3 (Muckenhoupt). *Soit $\nu \in L^1(\mathbb{T}^N)$ une fonction positive et l'espace à poids $L^2_\nu(Q_T) := L^2(\mathbb{T}^N; \nu dx)$. L'opérateur maximal est stable de $L^2_\nu(\mathbb{T}^N)$ dans lui-même si et seulement si ν satisfait la condition A_2 de Muckenhoupt.*

Ce résultat est démontré dans [126]. À l'aide de la Proposition A.1 il permet de comprendre que si un noyau régularisant $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ approche l'identité dans $L^2(\mathbb{T}^N)$, il l'approche également dans $L^2_\nu(\mathbb{T}^N)$, si la condition de Muckenhoupt est satisfaite. En particulier, si ν est tel poids, $\mathcal{D}(\mathbb{T}^N)$ est dense dans l'espace de Sobolev à poids $\{\Phi \in L^2_\nu(\mathbb{T}^N) : \nabla \Phi \in L^2_\nu(\mathbb{T}^2)\}$.

A.4 Trace normale pour les champs à divergence nulle

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert à bord lipschitzien et \mathbf{n} le champ de vecteur normal extérieur sur celui-ci. Un argument de complétude associé à la formule de Green permet de définir une trace normale pour un champ de vecteurs $u \in L^2_{\text{div}}(\Omega)$. Plus précisément, si v est un champ de vecteurs continu sur $\overline{\Omega}$, on peut considérer l'application numérique continue $v \cdot \mathbf{n}$ définie sur $\partial\Omega$. Il existe alors une application linéaire notée $\gamma_{\mathbf{n}} : L^2_{\text{div}}(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ prolongeant $v \mapsto v \cdot \mathbf{n}$. Cette application $\gamma_{\mathbf{n}}$ est continue et vérifie l'estimation

$$\|\gamma_{\mathbf{n}}u\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'opérateur $\gamma_{\mathbf{n}}$ ainsi défini est l'*opérateur de trace normale*. Le fait que l'on puisse ainsi donner un sens à la trace des éléments de $L^2_{\text{div}}(\Omega)$ n'est pas anodin : l'espace $\mathcal{D}_{\text{div}}(\Omega)$ n'est pas dense dans $L^2_{\text{div}}(\Omega)$, son adhérence est un sous-espace strict : le noyau de $\gamma_{\mathbf{n}}$.

Pour une présentation plus détaillée de la trace normale et une définition précise des espaces et normes considérés, on renvoie à [80].

Bibliographie

- [1] E. ACERBI AND N. FUSCO, *An approximation lemma for $W^{1,p}$ functions*, in *Material instabilities in continuum mechanics* (Edinburgh, 1985–1986), Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1988, pp. 1–5.
- [2] G. ALLAIRE, *Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. I. Abstract framework, a volume distribution of holes*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 113 (1990), pp. 209–259.
- [3] H. W. ALT AND S. LUCKHAUS, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, *Math. Z.*, 183 (1983), pp. 311–341.
- [4] H. AMANN, *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations. I. Abstract evolution equations*, *Nonlinear Anal.*, 12 (1988), pp. 895–919.
- [5] ———, *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations. II. Reaction-diffusion systems*, *Differential Integral Equations*, 3 (1990), pp. 13–75.
- [6] B. ANDREIANOV, *Time compactness tools for discretized evolution equations and applications to degenerate parabolic PDEs*, in *Finite volumes for complex applications. VI. Problems & perspectives. Volume 1, 2*, vol. 4 of *Springer Proc. Math.*, Springer, Heidelberg, 2011, pp. 21–29.
- [7] O. ANOSHCHENKO AND A. BOUTET DE MONVEL-BERTHIER, *The existence of the global generalized solution of the system of equations describing suspension motion*, *Math. Methods Appl. Sci.*, 20 (1997), pp. 495–519.
- [8] S. N. ANTONTSEV, A. V. KAZHIKTOV, AND V. N. MONAKHOV, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, vol. 22, *Studies in Mathematics and Its Applications*, 1989.
- [9] C. BARDOS, *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels; théorèmes d’approximation; application à l’équation de transport*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 3 (1970), pp. 185–233.
- [10] C. BARDOS, G. LEBEAU, AND J. RAUCH, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*, *SIAM J. Control Optim.*, 30 (1992), pp. 1024–1065.
- [11] N. BELARIBI AND F. RUSSO, *Uniqueness for Fokker-Planck equations with measurable coefficients and applications to the fast diffusion equation*, *Electron. J. Probab.*, 17 (2012), pp. no. 84, 28.

- [12] M. BENDAHDANE, T. LEPOUTRE, A. MARROCCO, AND B. PERTHAME, *Conservative cross diffusions and pattern formation through relaxation*, J. Math. Pures Appl. (9), 92 (2009), pp. 651–667.
- [13] S. BENJELLOUN, *Quelques problèmes d'écoulement multi-fluide : analyse mathématique, modélisation numérique et simulation.*, PhD thesis, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2012.
- [14] E. BERNARD, L. DESVILLETES, F. GOLSE, AND V. RICCI, *A derivation of the Vlasov-Navier-Stokes model for aerosol flows from kinetic theory*, Commun. Math. Sci., 15 (2017), pp. 1703–1741.
- [15] ———, *A derivation of the Vlasov-Stokes system for aerosol flows from the kinetic theory of binary gas mixtures*, Kinet. Relat. Models, 11 (2018), pp. 43–69.
- [16] P. BLANCHARD, M. RÖCKNER, AND F. RUSSO, *Probabilistic representation for solutions of an irregular porous media type equation*, Ann. Probab., 38 (2010), pp. 1870–1900.
- [17] V. I. BOGACHEV, N. V. KRYLOV, M. RÖCKNER, AND S. V. SHAPOSHNIKOV, *Fokker-Planck-Kolmogorov equations*, vol. 207 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [18] V. I. BOGACHEV, M. RÖCKNER, AND S. V. SHAPOSHNIKOV, *On uniqueness of solutions to the Cauchy problem for degenerate Fokker-Planck-Kolmogorov equations*, J. Evol. Equ., 13 (2013), pp. 577–593.
- [19] F. BOYER, *Trace theorems and spatial continuity properties for the solutions of the transport equation*, Differential Integral Equations, 18 (2005), pp. 891–934.
- [20] F. BOYER AND P. FABRIE, *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, vol. 183 of Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 2013.
- [21] H. BRÉZIS AND M. G. CRANDALL, *Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$* , J. Math. Pures Appl. (9), 58 (1979), pp. 153–163.
- [22] C. L. BRIS AND P.-L. LIONS, *Existence and uniqueness of solutions to Fokker-Planck type equations with irregular coefficients*, Communications in Partial Differential Equations, 33 (2008), pp. 1272–1317.
- [23] S. CAMPANATO, *Sul problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine, non variazionali, a coefficienti discontinui*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 41 (1968), pp. 153–163.
- [24] C. CANCÈS, C. CHAINAIS-HILLAIRET, A. GERSTENMAYER, AND A. JÜNGEL, *Convergence of a Finite-Volume Scheme for a Degenerate Cross-Diffusion Model for Ion Transport*, ArXiv e-prints, (2018).
- [25] K. CARRAPATOSO AND M. HILLAIRET, *On the derivation of a Stokes-Brinkman problem from Stokes equations around a random array of moving spheres*, ArXiv e-prints, (2018).

-
- [26] M. CHAE, K. KANG, AND J. LEE, *Global existence of weak and classical solutions for the Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations*, J. Differential Equations, 251 (2011), pp. 2431–2465.
- [27] A. CHAMBOLLE, B. T. DESJARDINS, M. J. ESTEBAN, AND C. GRANDMONT, *Existence of weak solutions for the unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic plate*, J. Math. Fluid Mech., 7 (2005), pp. 368–404.
- [28] J.-Y. CHEMIN AND I. GALLAGHER, *On the global wellposedness of the 3-D Navier-Stokes equations with large initial data*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 39 (2006), pp. 679–698.
- [29] L. CHEN AND A. JÜNGEL, *Analysis of a multidimensional parabolic population model with strong cross-diffusion*, SIAM J. Math. Anal., 36 (2004), pp. 301–322.
- [30] L. CHEN AND A. JÜNGEL, *Analysis of a parabolic cross-diffusion population model without self-diffusion*, J. Differential Equations, 224 (2006), pp. 39–59.
- [31] X. CHEN, E. S. DAUS, AND A. JÜNGEL, *Global existence analysis of cross-diffusion population systems for multiple species*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 227 (2018), pp. 715–747.
- [32] X. CHEN AND A. JÜNGEL, *A note on the uniqueness of weak solutions to a class of cross-diffusion systems*, to appear in J. Evol. Eqs., (2018).
- [33] X. CHEN, A. JÜNGEL, AND J.-G. LIU, *A note on Aubin-Lions-Dubinskii lemmas*, Acta Appl. Math., 133 (2014), pp. 33–43.
- [34] X. CHEN AND J.-G. LIU, *Two nonlinear compactness theorems in $L^p(0, T; B)$* , Appl. Math. Lett., 25 (2012), pp. 2252–2257.
- [35] B. CHOI AND Y.-J. KIM, *Diffusion of biological organisms; fickian and fokker-planck type diffusions*, (2018).
- [36] Y.-P. CHOI AND B. KWON, *Global well-posedness and large-time behavior for the inhomogeneous Vlasov-Navier-Stokes equations*, Nonlinearity, 28 (2015), p. 3309.
- [37] Y. S. CHOI, R. LUI, AND Y. YAMADA, *Existence of global solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with strongly coupled cross-diffusion*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 10 (2004), pp. 719–730.
- [38] D. CIORANESCU AND F. MURAT, *Un terme étrange venu d'ailleurs*, in Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. II (Paris, 1979/1980), vol. 60 of Res. Notes in Math., Pitman, Boston, Mass.-London, 1982, pp. 98–138, 389–390.
- [39] C. CONCA, J. SAN MARTÍN H., AND M. TUCSNAK, *Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid*, Comm. Partial Differential Equations, 25 (2000), pp. 1019–1042.

- [40] F. CONFORTO AND L. DESVILLETES, *Rigorous passage to the limit in a system of reaction-diffusion equations towards a system including cross diffusions*, Communications in Mathematical Sciences, 12 (2014), pp. 457–472.
- [41] G. CRIPPA AND C. DE LELLIS, *Estimates and regularity results for the DiPerna-Lions flow*, J. Reine Angew. Math., 616 (2008), pp. 15–46.
- [42] R. DANCHIN, *Fluides incompressibles à densité variable*, Séminaire Équations aux dérivées partielles, 2002-2003 (2002-2003), pp. 1–16.
- [43] E. S. DAUS, L. DESVILLETES, AND H. DIETERT, *About the entropic structure of detailed balanced multi-species cross-diffusion equations*, ArXiv e-prints, (2018).
- [44] E. S. DAUS, L. DESVILLETES, AND A. JÜNGEL, *Cross-diffusion systems and fast-reaction limits*, ArXiv e-prints, (2017).
- [45] P. DEGOND, *Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in 1 and 2 space dimensions*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 19 (1986), pp. 519–542.
- [46] P. DEGOND, S. GÉNIEYS, AND A. JÜNGEL, *Symmetrization and entropy inequality for general diffusion equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 325 (1997), pp. 963–968.
- [47] P. DEGOND AND S. MAS-GALLIC, *The weighted particle method for convection-diffusion equations. I. The case of an isotropic viscosity*, Math. Comp., 53 (1989), pp. 485–507.
- [48] ———, *The weighted particle method for convection-diffusion equations. II. The anisotropic case*, Math. Comp., 53 (1989), pp. 509–525.
- [49] B. DESJARDINS, *Global existence results for the incompressible density-dependent navier-stokes equations in the whole space*, Differential Integral Equations, 10 (1997), pp. 587–598.
- [50] B. DESJARDINS AND M. J. ESTEBAN, *Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid*, Arch. Ration. Mech. Anal., 146 (1999), pp. 59–71.
- [51] ———, *On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models*, Comm. Partial Differential Equations, 25 (2000), pp. 1399–1413.
- [52] B. DESJARDINS, M. J. ESTEBAN, C. GRANDMONT, AND P. LE TALLEC, *Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model*, Rev. Mat. Complut., 14 (2001), pp. 523–538.
- [53] L. DESVILLETES, K. FELLNER, M. PIERRE, AND J. VOVELLE, *Global existence for quadratic systems of reaction-diffusion*, Adv. Nonlinear Stud., 7 (2007), pp. 491–511.
- [54] L. DESVILLETES, F. GOLSE, AND V. RICCI, *The mean-field limit for solid particles in a Navier-Stokes flow*, J. Stat. Phys., 131 (2008), pp. 941–967.
- [55] L. DESVILLETES AND A. TRESCASES, *New results for triangular reaction cross diffusion system*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 430 (2015), pp. 32–59.

-
- [56] P. DEURING, *An initial-boundary value problem for a certain density-dependent diffusion system*, Math. Z., 194 (1987), pp. 375–396.
- [57] R. J. DiPERNA AND P.-L. LIONS, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., 98 (1989), pp. 511–547.
- [58] R. L. DOBRUSHIN, *Vlasov equations*, Functional Analysis and Its Applications, 13 (1979), pp. 115–123.
- [59] M. DREHER AND A. JÜNGEL, *Compact families of piecewise constant functions in $L^p(0, T; B)$* , Nonlinear Anal., 75 (2012), pp. 3072–3077.
- [60] J. DRONIOU AND R. EYMARD, *Uniform-in-time convergence of numerical methods for non-linear degenerate parabolic equations*, Numerische Mathematik, 132 (2016), pp. 721–766.
- [61] J. DRONIOU, R. EYMARD, T. GALLOUET, AND R. HERBIN, *Gradient schemes : a generic framework for the discretisation of linear, nonlinear and nonlocal elliptic and parabolic equations*, Math. Models Methods Appl. Sci., 23 (2013), pp. 2395–2432.
- [62] J. DRONIOU, R. EYMARD, AND R. HERBIN, *Gradient schemes : generic tools for the numerical analysis of diffusion equations*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 50 (2016), pp. 749–781.
- [63] J. DRONIOU, R. EYMARD, AND K. S. TALBOT, *Convergence in $\mathcal{C}_t^0(L_x^2)$ of weak solutions to perturbed doubly degenerate parabolic equations*, Journal of Differential Equations, 260 (2016), pp. 7821 – 7860.
- [64] Y. A. DUBINSKIĬ, *Weak convergence for nonlinear elliptic and parabolic equations. (in russian)*, Matematicheskii Sbornik, 109 (1965), pp. 609–642.
- [65] M. DUERINCKX, *Mean-field limits for some Riesz interaction gradient flows*, SIAM J. Math. Anal., 48 (2016), pp. 2269–2300.
- [66] E. FEIREISL, M. HILLAIRET, AND V. S. NEČASOVÁ, *On the motion of several rigid bodies in an incompressible non-Newtonian fluid*, Nonlinearity, 21 (2008), pp. 1349–1366.
- [67] A. FIGALLI, *Existence and uniqueness of martingale solutions for SDEs with rough or degenerate coefficients*, J. Funct. Anal., 254 (2008), pp. 109–153.
- [68] J. FISCHER, *Global existence of renormalized solutions to entropy-dissipating reaction-diffusion systems*, Arch. Ration. Mech. Anal., 218 (2015), pp. 553–587.
- [69] F. FLANDOLI, M. LEOCATA, AND C. RICCI, *The Vlasov-Navier-Stokes equations as a mean field limit*, ArXiv e-prints, (2018).
- [70] J. FONTBONA AND S. MÉLÉARD, *Non local lotka-volterra system with cross-diffusion in an heterogeneous medium*, Journal of mathematical biology, 70 (2015), pp. 829–854.
- [71] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

- [72] H. FUJITA AND N. SAUER, *On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundaries*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, 17 (1970), pp. 403–420.
- [73] G. GALIANO, M. L. GARZÓN, AND A. JÜNGEL, *Semi-discretization in time and numerical convergence of solutions of a nonlinear cross-diffusion population model*, Numer. Math., 93 (2003), pp. 655–673.
- [74] T. GALLOUËT, *Discrete Functional Analysis Tools for Some Evolution Equations*, Comput. Methods Appl. Math., 18 (2018), pp. 477–493.
- [75] T. GALLOUËT AND J.-C. LATCHÉ, *Compactness of discrete approximate solutions to parabolic PDEs—application to a turbulence model*, Commun. Pure Appl. Anal., 11 (2012), pp. 2371–2391.
- [76] A. GERSTENMAYER AND A. JÜNGEL, *Analysis of a degenerate parabolic cross-diffusion system for ion transport*, J. Math. Anal. Appl., 461 (2018), pp. 523–543.
- [77] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, vol. 224 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1983.
- [78] M. E. GILPIN AND F. J. AYALA, *Global models of growth and competition*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 70 (1973), pp. 3590–3593.
- [79] M. E. GILPIN AND K. E. JUSTICE, *Reinterpretation of the invalidation of the principle of competitive exclusion*, Nature, 236 (1972), p. 273.
- [80] V. GIRAULT AND P.-A. RAVIART, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, vol. 5 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [81] O. GLASS, C. LACAVE, A. MUNNIER, AND F. SUEUR, *Dynamics of rigid bodies of various sizes and masses in a two dimensional incompressible perfect fluid*, En préparation.
- [82] O. GLASS, C. LACAVE, AND F. SUEUR, *On the motion of a small body immersed in a two-dimensional incompressible perfect fluid*, Bull. Soc. Math. France, 142 (2014), pp. 489–536.
- [83] W. B. GORDON, *On the diffeomorphisms of Euclidean space*, Amer. Math. Monthly, 79 (1972), pp. 755–759.
- [84] T. GOUDON, P.-E. JABIN, AND A. VASSEUR, *Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. I. Light particles regime*, Indiana Univ. Math. J., 53 (2004), pp. 1495–1515.
- [85] T. GOUDON, P.-E. JABIN, AND A. VASSEUR, *Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. II. Fine particles regime*, Indiana Univ. Math. J., 53 (2004), pp. 1517–1536.

-
- [86] C. GRANDMONT, *Existence of weak solutions for the unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic plate*, SIAM J. Math. Anal., 40 (2008), pp. 716–737.
- [87] K. HAMDACHE, *Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations*, Japan J. Indust. Appl. Math., 15 (1998), pp. 51–74.
- [88] M. HAURAY AND P.-E. JABIN, *N-particles approximation of the Vlasov equations with singular potential*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 183 (2007), pp. 489–524.
- [89] M. HAURAY AND P.-E. JABIN, *Particle approximation of Vlasov equations with singular forces : propagation of chaos*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 48 (2015), pp. 891–940.
- [90] M. HILLAIRET, *On the homogenization of the Stokes problem in a perforated domain*, to appear in Arch. Rational Mech. Anal., (2018).
- [91] L. T. HOANG, T. V. NGUYEN, AND T. V. PHAN, *Gradient estimates and global existence of smooth solutions to a cross-diffusion system*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 47 (2015), pp. 2122–2177.
- [92] R. M. HÖFER, *The inertialess limit of particle sedimentation modeled by the Vlasov-Stokes equations*, ArXiv e-prints, (2018).
- [93] N. HUNGERBÜHLER, *Quasi-linear parabolic systems in divergence form with weak monotonicity*, Duke Math. J., 107 (2001), pp. 497–520.
- [94] M. IIDA, M. MIMURA, AND H. NINOMIYA, *Diffusion, cross-diffusion and competitive interaction*, Journal of mathematical biology, 53 (2006), pp. 617–641.
- [95] P.-E. JABIN, *Large time concentrations for solutions to kinetic equations with energy dissipation*, Comm. Partial Differential Equations, 25 (2000), pp. 541–557.
- [96] P.-E. JABIN AND F. OTTO, *Identification of the dilute regime in particle sedimentation*, Comm. Math. Phys., 250 (2004), pp. 415–432.
- [97] P.-E. JABIN AND Z. WANG, *Mean field limit and propagation of chaos for Vlasov systems with bounded forces*, J. Funct. Anal., 271 (2016), pp. 3588–3627.
- [98] A. JÜNGEL, *Diffusive and nondiffusive population models*, in Mathematical modeling of collective behavior in socio-economic and life sciences, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010, pp. 397–425.
- [99] ———, *The boundedness-by-entropy method for cross-diffusion systems*, Nonlinearity, 28 (2015), pp. 1963–2001.
- [100] A. JÜNGEL AND N. ZAMPONI, *Qualitative behavior of solutions to cross-diffusion systems from population dynamics*, J. Math. Anal. Appl., 440 (2016), pp. 794–809.
- [101] J. U. KIM, *Smooth solutions to a quasi-linear system of diffusion equations for a certain population model*, Nonlinear analysis, 8 (1984), pp. 1121–1144.

- [102] S. N. KRUSHKOV, *Results concerning the nature of the continuity of solutions of parabolic equations and some of their applications*, Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR, 6 (1969), pp. 517–523.
- [103] N. V. KRYLOV, *Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces*, vol. 96 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [104] N. V. KRYLOV AND M. V. SAFONOV, *A property of the solutions of parabolic equations with measurable coefficients*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 44 (1980), pp. 161–175, 239.
- [105] D. LE AND T. T. NGUYEN, *Global existence for a class of triangular parabolic systems on domains of arbitrary dimension*, Proc. Amer. Math. Soc., 133 (2005), pp. 1985–1992.
- [106] ———, *Everywhere regularity of solutions to a class of strongly coupled degenerate parabolic systems*, Comm. Partial Differential Equations, 31 (2006), pp. 307–324.
- [107] D. LENGELER AND M. RŮŽIČKA, *Weak solutions for an incompressible Newtonian fluid interacting with a Koiter type shell*, Arch. Ration. Mech. Anal., 211 (2014), pp. 205–255.
- [108] T. LEPOUTRE, *Analyse et modélisation de phénomènes de croissance et mouvement issus de la biologie*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2009.
- [109] ———, *Contributions en dynamique de populations*, Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard (Lyon 1), 2017.
- [110] T. LEPOUTRE, M. PIERRE, AND G. ROLLAND, *Global well-posedness of a conservative relaxed cross diffusion system*, SIAM J. Math. Anal., 44 (2012), pp. 1674–1693.
- [111] J. LERAY AND J.-L. LIONS, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), pp. 97–107.
- [112] Y. LI AND C. ZHAO, *Global existence of solutions to a cross-diffusion system in higher dimensional domains*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 12 (2005), pp. 185–192.
- [113] P. LIONS, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics : Volume 1 : Incompressible Models*, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Oxford University Press, Incorporated, 1996.
- [114] P.-L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2*, vol. 10 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
Compressible models, Oxford Science Publications.
- [115] G. LOEPER, *Uniqueness of the solution to the Vlasov-Poisson system with bounded density*, J. Math. Pures Appl. (9), 86 (2006), pp. 68–79.
- [116] Y. LOU, W.-M. NI, AND Y. WU, *On the global existence of a cross-diffusion system*, Discrete Contin. Dynam. Systems, 4 (1998), pp. 193–203.

-
- [117] Y. LOU AND M. WINKLER, *Global existence and uniform boundedness of smooth solutions to a cross-diffusion system with equal diffusion rates*, Communications in Partial Differential Equations, 40 (2015), pp. 1905–1941.
- [118] V. A. L’VOV AND E. Y. KHRUSLOV, *Perturbation of a viscous incompressible fluid by small particles*, in Theoretical and applied questions of differential equations and algebra (Russian), “Naukova Dumka”, Kiev, 1978, pp. 173–177, 267.
- [119] E. MAITRE, *On a nonlinear compactness lemma in $L^p(0, T; B)$* , Int. J. Math. Math. Sci., (2003), pp. 1725–1730.
- [120] A. J. MAJDA AND A. L. BERTOZZI, *Vorticity and incompressible flow*, vol. 27 of Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [121] C. MARCHIORO AND M. PULVIRENTI, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, vol. 96 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [122] R. H. MARTIN AND M. PIERRE, *Nonlinear reaction-diffusion systems*, in Nonlinear equations in the applied sciences, vol. 185 of Math. Sci. Engrg., Academic Press, Boston, MA, 1992, pp. 363–398.
- [123] A. MECHERBET AND M. HILLAIRET, *L^p estimates for the homogenization of stokes problem in a perforated domain*, to appear in J. Inst. Math. Jussieu, (2018).
- [124] N. G. MEYERS, *An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), 17 (1963), pp. 189–206.
- [125] S. MISCHLER, *On the trace problem for solutions of the Vlasov equation*, Comm. Partial Differential Equations, 25 (2000), pp. 1415–1443.
- [126] B. MUCKENHOUPT, *Weighted norm inequalities for the hardy maximal function*, Transactions of the American Mathematical Society, (1972), pp. 207–226.
- [127] B. MUHA AND S. CANIC, *A generalization of the aubin-lions-simon compactness lemma for problems on moving domains*, (2018).
- [128] H. MURAKAWA, *A relation between cross-diffusion and reaction-diffusion*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Series S., 5 (2012), pp. 147–158.
- [129] F. MURAT, *Compacité par compensation : condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 8 (1981), pp. 69–102.
- [130] F. NOBILE, *Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with applications to haemodynamics*, PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2001.
- [131] P. J. O’ROURKE, *Collective drop effects on vaporizing liquid sprays*, PhD thesis, Los Alamos National Laboratory, 1981.
- [132] B. T. PERTHAME, *Parabolic equations in biology*, Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences, Springer, Cham, 2015.
Growth, reaction, movement and diffusion.

- [133] M. PIERRE AND D. SCHMITT, *Blowup in reaction-diffusion systems with dissipation of mass*, SIAM J. Math. Anal., 28 (1997), pp. 259–289.
- [134] M. A. POZIO AND A. TESEI, *Global existence of solutions for a strongly coupled quasi-linear parabolic system*, Nonlinear Anal., 14 (1990), pp. 657–689.
- [135] R. REDLINGER, *Existence of the global attractor for a strongly coupled parabolic system arising in population dynamics*, J. Differential Equations, 118 (1995), pp. 219–252.
- [136] J. A. SAN MARTÍN, V. STAROVOITOV, AND M. TUCSNAK, *Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid*, Arch. Ration. Mech. Anal., 161 (2002), pp. 113–147.
- [137] S. SERFATY, *Mean Field Limit for Coulomb Flows*, ArXiv e-prints, (2018).
- [138] N. SHIGESADA, K. KAWASAKI, AND E. TERAMOTO, *Spatial segregation of interacting species*, J. Theoret. Biol., 79 (1979), pp. 83–99.
- [139] S.-A. SHIM, *Uniform boundedness and convergence of solutions to cross-diffusion systems*, J. Differential Equations, 185 (2002), pp. 281–305.
- [140] J. SIMON, *Sur les fluides visqueux incompressibles et non homogènes*, CR Acad. Sci. Paris, 309 (1989), pp. 447–452.
- [141] E. M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [142] D. W. STROOCK AND S. R. S. VARADHAN, *Multidimensional diffusion processes*, vol. 233 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- [143] L. TARTAR, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, vol. 39 of Res. Notes in Math., Pitman, Boston, Mass.-London, 1979, pp. 136–212.
- [144] A. TRESCASES, *On triangular reaction cross-diffusion systems with possible self-diffusion*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 140 (2016), pp. 796–829.
- [145] P. V. TUOC, *On global existence of solutions to a cross-diffusion system*, J. Math. Anal. Appl., 343 (2008), pp. 826–834.
- [146] D. WANG AND C. YU, *Global weak solution to the inhomogeneous navier–stokes–vaslov equations*, Journal of Differential Equations, 259 (2015), pp. 3976 – 4008.
- [147] Y. WANG, *The global existence of solutions for a cross-diffusion system*, Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser., 21 (2005), pp. 519–528.
- [148] H. F. WEINBERGER, *Variational properties of steady fall in stokes flow*, J. Fluid Mech., 52 (1972), p. 321–344.
- [149] Z. WEN AND S. FU, *Global solutions to a class of multi-species reaction-diffusion systems with cross-diffusions arising in population dynamics*, J. Comput. Appl. Math., 230 (2009), pp. 34–43.

-
- [150] M. T. WEREIDE, *La diffusion d'une solution dont la concentration et la température sont variables*, in *Annales de Physique*, vol. 9, EDP Sciences, 1914, pp. 67–83.
- [151] F. A. WILLIAMS, *Combustion theory*, Benjamin Cummings, second edition ed., 1985.
- [152] P. WORTH LONGEST AND M. HINDLE, *Numerical model to characterize the size increase of combination drug and hygroscopic excipient nanoparticle aerosols*, *Aerosol Science and Technology*, 45 (2011), pp. 884–899.
- [153] A. YAGI, *Global solution to some quasilinear parabolic system in population dynamics*, *Nonlinear Anal.*, 21 (1993), pp. 603–630.
- [154] Y. YAMADA, *Global solutions for quasilinear parabolic systems with cross-diffusion effects*, *Nonlinear Anal.*, 24 (1995), pp. 1395–1412.
- [155] W. YANG, *A class of quasilinear parabolic systems with cross-diffusion effects*, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 4 (1999), pp. 271–275.
- [156] ———, *A class of the quasilinear parabolic systems arising in population dynamics*, *Methods Appl. Anal.*, 9 (2002), pp. 261–272.
- [157] C. YU, *Global weak solutions to the incompressible Navier-Stokes-Vlasov equations*, *J. Math. Pures Appl.* (9), 100 (2013), pp. 275–293.
- [158] V. I. YUDOVICH, *Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid*, *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 3 (1963), pp. 1032–1066.
- [159] N. ZAMPONI AND A. JÜNGEL, *Analysis of degenerate cross-diffusion population models with volume filling*, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 34 (2017), pp. 1–29.
- [160] ———, *Corrigendum to “Analysis of degenerate cross-diffusion population models with volume filling”*, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 34 (2017), pp. 789–792.

