



HAL
open science

Géométrie et topologie des processus périodiquement corrélés induit par la dilation : Application à l'étude de la variabilité des épidémies pédiatriques saisonnières

Maël Dugast

► **To cite this version:**

Maël Dugast. Géométrie et topologie des processus périodiquement corrélés induit par la dilation : Application à l'étude de la variabilité des épidémies pédiatriques saisonnières. Topologie géométrique [math.GT]. Université de Lyon, 2018. Français. NNT : 2018LYSEI127 . tel-02124588

HAL Id: tel-02124588

<https://theses.hal.science/tel-02124588>

Submitted on 9 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT : 2018LYSEI127

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée au sein de:

INSA Lyon

Ecole Doctorale N° ED512

InfoMaths

Spécialité/ discipline de doctorat : Mathématiques appliquées

Soutenue publiquement le 21/12/2018, par :

DUGAST Maël

Géométrie et topologie des processus périodiquement corrélés induit par la dilation: application à l'étude de la variabilité des épidémies saisonnières.

Devant le jury composé de :

Pennec, Xavier, Directeur de Recherche, INRIA

Viguié-pla, Sylvie, Maître de Conférences HDR, Université de Perpignan

Barbaresco, Frédéric, Docteur, Thales air and space system

Hadj-Hamou Khaled, Professeur des Universités, INSA-Lyon

Baudot Pierre, Chargé de Recherche, INSERM

Allasonière, Stéphanie, Professeur, Université Paris-Descartes

Marcon, Eric, Professeur, Université Saint-Etienne

Bouleux, Guillaume, Maître de Conférence, Université Saint_Etienne

Mory, Olivier, Praticien Hospitalier, CHU de Saint-Etienne

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Présidente

Directeur de
thèse

Co-encadrant

invité

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr INSA : R. GOURDON	M. Stéphane DANIELE Institut de recherches sur la catalyse et l'environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 Avenue Albert EINSTEIN 69 626 Villeurbanne CEDEX directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI École Centrale de Lyon 36 Avenue Guy DE COLLONGUE 69 134 Écully Tél : 04.72.18.60.97 Fax 04.78.43.37.17 gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : H. CHARLES secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	M. Philippe NORMAND UMR 5557 Lab. d'Ecologie Microbienne Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX philippe.normand@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ http://www.ediss-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : M. LAGARDE secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 Avenue Jean CAPELLE INSA de Lyon 69 621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04.72.68.49.16 emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES http://edinfomaths.universite-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 Fax : 04.72.43.16.87 infomaths@univ-lyon1.fr	M. Luca ZAMBONI Bât. Braconnier 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.26.23.45.52 zamboni@maths.univ-lyon1.fr
Matériaux	MATÉRIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec. : Marion COMBE Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.87.12 Bât. Direction ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIÈRE INSA de Lyon MATEIS - Bât. Saint-Exupéry 7 Avenue Jean CAPELLE 69 621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://edmega.universite-lyon.fr Sec. : Marion COMBE Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.87.12 Bât. Direction mega@insa-lyon.fr	M. Jocelyn BONJOUR INSA de Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69 621 Villeurbanne CEDEX jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://ed483.univ-lyon2.fr Sec. : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.72.76 viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr	M. Christian MONTES Université Lyon 2 86 Rue Pasteur 69 365 Lyon CEDEX 07 christian.montes@univ-lyon2.fr

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier le D^r Guillaume BOULEUX pour m'avoir encadré durant cette thèse. Cette thèse fut un parcours sinueux, pas toujours facile. Nos vifs débats m'ont énormément fait progresser, et j'en retiens l'impression d'avoir pu participer à l'aventure scientifique, faite d'échanges, de découvertes et parfois aussi, de déceptions. Je remercie également l'ARS Rhône-Alpes pour avoir financé cette thèse.

Je remercie ensuite mes parents et ma famille qui ont toujours été là pour moi. Même si le contenu de cette thèse leur paraîtra sans doute très mystérieux j'espère les avoir rendus fiers.

Merci ensuite au doctorants avec lesquels j'ai avancé pendant ces trois années, sans eux l'aventure n'aurait pas été la même. J'ai une pensée tout particulière pour ceux qui ont partagé mon bureau : D^r Houssem BARKAOUI et (le très bientôt D^r) Oscar TELLEZ-SANCHEZ. Je leur souhaite le meilleur. Anderson, tu vas arriver à finir ta thèse (mais regarde un peu moins de séries quand même...) J'ai une pensée spéciale pour Corentin : je me demande si ne n'ai pas eu un plaisir pervers à avoir initié ou encouragé des doodle pour ensuite être le premier à ne pas y répondre...

Merci également à celle qui a partagé ma vie lors de cette troisième année de thèse.

Je m'excuse auprès de mes partenaires de grimpe de n'avoir pas été trop présent pendant ma troisième année de thèse. Gauthier, attention, je vais rattraper mon retard !

Enfin je souhaite remercier l'ensemble des enseignants chercheurs du DISP. Ce sont des personnes très dévouées, passionnées par leur métier et extrêmement compétentes. Ils méritent toute ma gratitude.

Résumé

Chaque année lors de la période hivernale, des phénomènes épidémiques affectent l'organisation des services d'urgences pédiatriques et dégradent la qualité de la réponse fournie. Ces phénomènes présentent une forte variabilité qui rend leur analyse difficile. Nous nous proposons d'étudier cette volatilité pour apporter une vision nouvelle et éclairante sur le comportement de ces épidémies. Pour ce faire, nous avons adopté une vision géométrique et topologique originale directement issue d'une application de la théorie de la dilation : le processus de variabilité étant périodiquement corrélé, cette théorie fournit un ensemble de matrices dites de dilations qui portent toute l'information utile sur ce processus. Cet ensemble de matrices nous permet de représenter les processus stochastiques comme des éléments d'un groupe de Lie particulier, à savoir le groupe de Lie constitué de l'ensemble des courbes sur une variété. Il est alors possible de comparer des processus par ce biais. Pour avoir une perception plus intuitive du processus de variabilité, nous nous sommes ensuite concentrés sur le nuage de points formé par l'ensemble des matrices de dilations. En effet, nous souhaitons mettre en évidence une relation entre la forme temporelle d'un processus et l'organisation de ces matrices de dilations. Nous avons utilisé et développé des outils d'homologie persistante et avons établi un lien entre la désorganisation de ce nuage de points et le type de processus sous-jacents. Enfin nous avons appliqué ces méthodes directement sur le processus de variabilité pour pouvoir détecter le déclenchement de l'épidémie. Ainsi nous avons établi un cadre complet et cohérent, à la fois théorique et appliqué pour répondre à notre problématique.

English version :

Each year emergency department are faced with epidemics that affect their organisation and deteriorate the quality of the cares. The analyse of these outbreak is tough due to their huge

variability. We aim to study these phenomenon and to bring out a new paradigm in the analysis of their behavior. With this aim in mind, we propose to tackle this problem through geometry and topology : the variability process being periodically correlated, the theory of dilation exhibit a set of matrices that carry all the information about this process. This set of matrices allow to map the process into a Lie group, defined as the set of all curves on a manifold. Thus, it is possible to compare stochastic processes using properties of Lie groups. Then, we consider the point cloud formed by the set of dilation matrices, to gain more intuitions about the underlying process. We proved a relation between the temporal aspect of the signal and the structure of the set of its dilation matrices. We used and developped persistent homology tools, and were able to classify non-stationary processes. Eventually, we implement these techniques directly on the process of arrivals to detect the trigger of the epidemics. Overall we established a complete and a coherent framework, both theoretical and practical.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Liste des notations	1
1 Introduction	3
1.1 Contexte	3
1.2 Processus aléatoires périodiquement corrélés	8
1.2.1 Detrended fluctuation analysis : processus de variabilité d'une série temporelle	8
1.2.2 Théorie de Fourier des signaux périodiquement corrélés.	13
1.2.3 Une autre représentation des signaux PC	14
1.3 Coefficients de corrélation partiels.	18
1.3.1 Première approche des parcours	18
1.3.2 Théories impliquant les parcours : autres définitions.	22
1.3.3 Géométrie des parcours	26
1.4 Théories de la dilation	28
1.4.1 Présentation de la dilation	29
1.4.2 Construction de la dilation	32
1.4.3 Théories connexes impliquant la dilation	41
1.5 Résumé et problématique	45
2 Interpretation des processus périodiquement corrélés comme des éléments d'un groupe de Lie.	47
2.1 Rappels et position du problème	47
2.2 Espace des courbes sur une variété induite par la dilation	48
2.2.1 Préliminaires : quelques rappels sur les groupes de Lie	48

2.2.2	Cadre de travail général	50
2.2.3	Métrie sur l'espace des courbes et l'espace des formes	53
2.2.4	L'équation des géodésiques sur un groupe de Lie	57
2.2.5	Résultats	61
2.3	Conclusion	69
3	Aspects topologiques induits par la dilation des processus PC	71
3.1	Introduction	71
3.2	Homologie persistante pour des nuages de points	72
3.2.1	Bases de l'homologie persistante	72
3.2.2	Homologie persistante dans le groupe des rotations	79
3.3	Résultat : classification topologique de processus PC	81
3.3.1	Classification de processus PC selon leurs caractéristiques topologiques	81
3.3.2	Distributions statistiques des caractéristiques topologiques.	88
3.3.3	Nouvelle mesure de dissimilarité entre diagrammes	92
3.3.4	Discussion	95
3.4	Conclusion	95
4	Aide à la décision pour les systèmes de soins grâce à l'homologie persistante du processus de variabilité dans les services d'urgences	97
4.1	Introduction et rappels	97
4.2	Construction du nuage de points par fenêtre glissante	98
4.3	Résultats : homologie persistante sur un nuage de points évolutif	99
4.3.1	Indicateurs de suivi de l'évolution de l'épidémie	100
4.3.2	Analyse des résultats	101
4.4	Influence des paramètres sur le détecteur	102
4.4.1	Choix du détecteur	102
4.4.2	Calibration du détecteur	104
4.4.3	Comparaison avec d'autres méthodes	106
4.5	Conclusion	108
5	Conclusion	111
5.1	Résumé des contributions	111
5.2	Perspectives	113

A	Annexe A : Quelques intuitions sur l'homologie	115
B	Annexe B : Éléments de théorie spectrale des opérateurs	129
C	Annexe C : Contractions, opérateurs de défaut	133
	Bibliographie	137

Liste des notations

- $\{X_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ désigne un processus stochastique, avec \mathbb{I} un ensemble d'indices. Nous considérons des processus à valeurs réelles, sauf indications contraires.
- X_t désigne la valeur d'un processus stochastique au temps t .
- \mathcal{F} désigne une tribu.
- \mathcal{H} désigne un espace de Hilbert.
- $\mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ désigne l'ensemble des applications linéaires à de \mathcal{H} dans \mathcal{H} pour le premier cas, et de \mathcal{H} dans \mathcal{E} .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ désigne un produit scalaire dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} . \mathcal{H} n'est pas précisé si l'espace sur lequel agit le produit scalaire est évident.
- $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ désigne une norme sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} . \mathcal{H} n'est pas précisé si l'espace sur lequel agit le produit scalaire est évident.
- Pour une matrice A , A^T désigne sa transposée et A^* sa transposée conjuguée.
- $R_{s,t}$ désigne un coefficient de corrélation.
- $\Gamma_{\cdot, \cdot}$ désigne les coefficients de corrélation partiels.
- $D_{\Gamma} = (I - \Gamma^* \Gamma)^{1/2}$ désigne l'opérateur de défaut.
- $G_{i,j}(\theta)$ désigne la rotation de Givens d'angle θ .
- \oplus désigne une somme directe d'espaces vectoriels.
- \vee désigne une somme non orthogonale d'espaces vectoriels.
- $T_x \mathcal{M}$ désigne l'espace tangent de la variété \mathcal{M} au point x .
- ∇ désigne la connection de Levi Civita.
- (v_1, v_2, \dots, v_n) désigne le $(n-1)$ -simplexe dont les sommets sont v_1, v_2, \dots, v_n .

- $\text{sp}\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs X_1, \dots, X_n
- $\overline{X_t}$: conjugué.

Introduction

1.1 Contexte

UN service d'urgences est un environnement technique, matériel et social complexe qui peut facilement être mis en difficulté par diverses perturbations susceptibles de l'affecter. Ces difficultés peuvent se transmettre à l'hôpital tout entier tant les services d'urgences, qui en sont souvent la porte d'entrée, y occupent une place centrale [46]. La réponse à ces perturbations n'est pas toujours immédiate, ce à quoi s'ajoute un temps de latence avant le retour à la normale (Fig. 1.1). Une des principales perturbations qui affecte les services d'urgences provient des pics d'activités inhérents à la nature irrégulière et imprévisible de l'activité médicale d'urgence : il est extrêmement difficile de planifier des activités de cette nature. D'après [86] §4.3, ces pics d'activités sont l'un des problèmes majeurs auxquels doivent faire face les services d'urgences. Ils peuvent être classés en deux catégories :

- *Les pics d'activités intrinsèques*, qui dépendent de l'évolution de l'état de santé des patients déjà admis.
- *Les pics d'activités extrinsèques*, qui correspondent à l'admission de nouveaux patients.

Il en résulte des situations de tensions et d'engorgements [85], pouvant dégrader la qualité du service rendu. Dans [51] sont répertoriés plusieurs effets de ces engorgements sur les services d'urgences, parmi lesquels la mise en danger de la santé publique due à nombre accru d'erreurs médicales, une augmentation des délais d'attente et de l'insatisfaction des patients, une diminution de la productivité des praticiens, des situations de violence, et une dégradation de l'enseignement et de la transmission du savoir. Pour maîtriser ces pics d'activités, les services doivent, dans l'idéal, disposer d'une organisation résiliente et prompte à réagir face à des phénomènes exceptionnels. Définir une telle organisation est un enjeu majeur, mais cela reste un problème difficile [86, 111]. Pour faire face à ces situations, les hôpitaux libèrent des moyens humains et matériels supplémentaires : le nombre de gardes effectuées est augmenté, ainsi que

le nombre de lits mis à disposition. Il est également indispensable d'avoir une bonne coordination entre ces moyens. Mais pour que cela prenne pleinement son sens, les hôpitaux doivent être dotés à une échelle locale d'outils d'aide à la décision performants leur permettant d'anticiper le plus possible la venue de phénomènes susceptibles de perturber leur bonne conduite. Plusieurs travaux s'inscrivant dans ce cadre ont été conduits pour accompagner les hôpitaux face à ces difficultés. Nous pouvons distinguer deux types d'approches. La première consiste à modéliser le flux de patients et le fonctionnement des services d'urgences. A l'instar de la nomenclature établie plus haut, nous pouvons qualifier ce type d'approche "d'intrinsèque", dans le sens où les pics d'activités sont perçus comme la conséquence de l'organisation des services d'urgences. Dans cette optique nous pouvons citer [82] qui propose une modélisation des services d'urgences grâce à une simulation à événements discrets, dans le but de prédire les situations d'engorgements, et [96] qui propose une modélisation de type files d'attentes couplées avec un modèle à agents, cette fois-ci dans le but de réduire les temps d'attente. La seconde consiste à analyser directement la série temporelle de l'admission des patients pour en tirer des informations. Ainsi [29] propose une méthode de détection de changement de régime basé sur les statistiques à l'ordre 4 des excès d'admissions. [90] emploie un réseau de neurones nourri par la série d'admissions quotidiennes d'une part, et par des données climatiques et environnementales (pollution) d'autre part. Ainsi, les auteurs souhaitent prédire les pics d'admissions en fonction de certaines combinaisons d'événements extérieurs. Ce type d'approche peut être qualifié d'extrinsèque car ce sont surtout des phénomènes externes qui sont étudiés.

Nous allons tout particulièrement nous intéresser à cette deuxième catégorie génératrice de pics d'activités : les pics d'activités extrinsèques. Ce genre de situation n'est pas exceptionnel : il se produit en fait chaque année, lorsque ces services sont confrontés à des épidémies hivernales [147, 31]. Dans ces cas de figure les services doivent affronter une demande extrêmement forte, qui se présente souvent de façon brutale et imprévisible. Dans ce contexte, les épidémies liées aux infections respiratoires hivernales (bronchiolite, rhinovirus, virus respiratoire syncytial) comptent parmi les plus impactantes pour les hôpitaux [92, 85]. Ce sont des pathologies qui peuvent affecter lourdement les personnes les plus fragiles, ce qui les pousse à recourir aux services d'urgences. 30% des très jeunes enfants de moins de 1 an sont concernés chaque année, ce qui conduit en moyenne à 30 000 hospitalisations, d'après les bulletins de veille sanitaire. Bien que ce phénomène soit bien répertorié à l'échelle nationale, il est important de définir des plans d'action à l'échelle locale, car ce sont les hôpitaux de chaque région qui sont confrontés

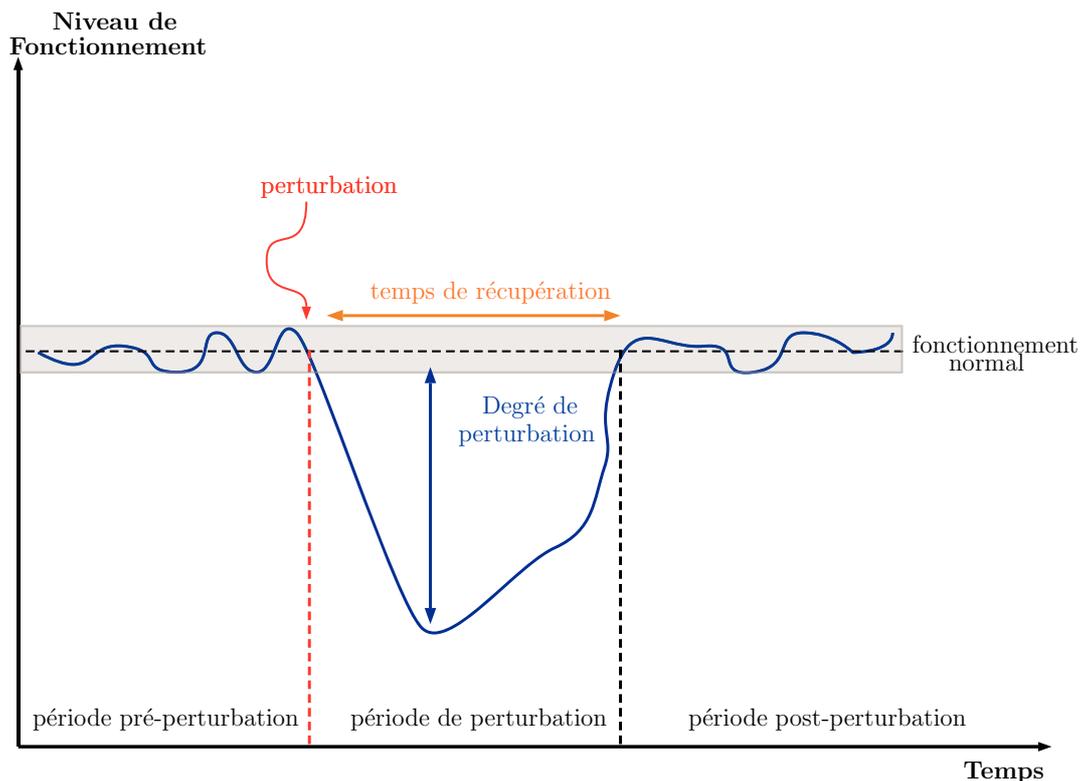


Figure 1.1.: Effet d'une perturbation sur un système sociotechnique, d'après [86] et [3]. Une perturbation, telle que celle causée par une épidémie affecte durablement les services de soins.

à ces conjonctures. Une réponse globale basée sur des statistiques nationales et donc sur des critères globaux ne peut être entièrement satisfaisante. Dans la région Rhône Alpes, une étude portant sur les variations saisonnières du flux d'arrivée de patients aux urgences pédiatriques arrive aux conclusions suivantes :

- L'activité globale dans les services de pédiatrie est plus importante en période hivernale (de novembre à avril) qu'en période estivale.
- Pour la tranche des 0 à 6 ans, nous observons une augmentation de 35%, et entre 15 et 20 % pour la tranche des 0 à 18 ans. Cela correspond, sur l'année, à plus de 5000 séjours supplémentaires.
- Ces perturbations sont principalement la conséquence d'épidémies saisonnières telles la bronchiolite et la gastroentérite.

Ceci confirme l'enjeu que recouvrent ces problématiques. Etant donné qu'il s'agit d'un phénomène récurrent, il nous semble important de l'investiguer en profondeur pour anticiper d'éventuelles défaillances des systèmes de soins. Il est particulièrement important de se pencher sur le cas des épidémies respiratoires hivernales pédiatriques, principalement propagées par le VRS (virus respiratoire syncytial) car elles sont souvent précurseurs d'autres pathologies pour d'autres

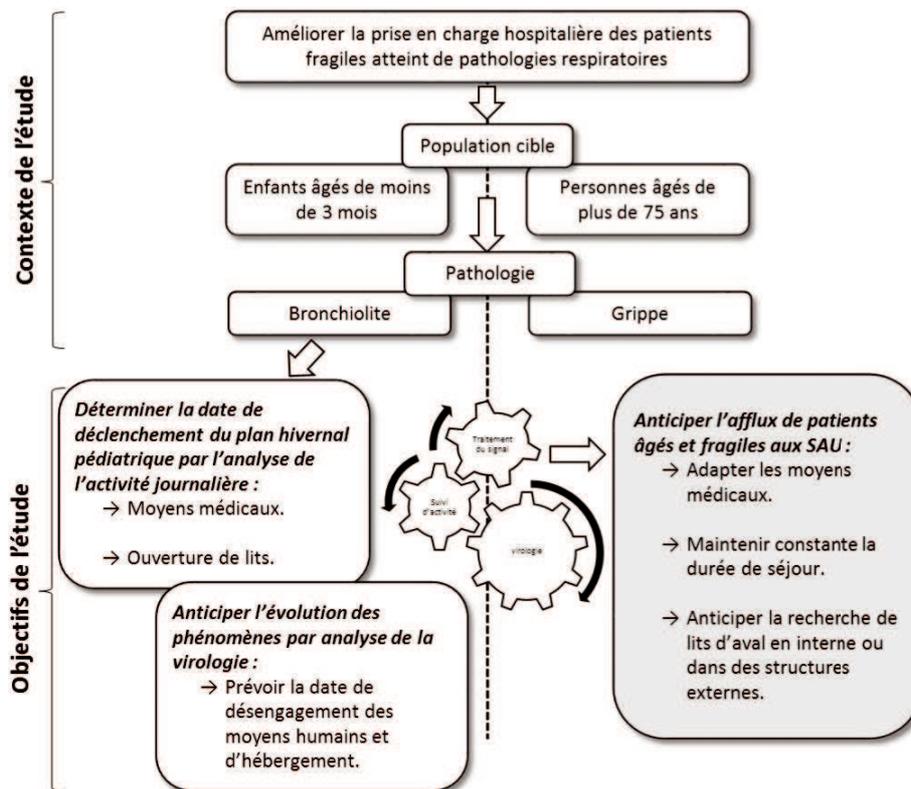


Figure 1.2.: Vision globale du projet PREDAFLU.

catégories de personnes, comme les personnes âgées et les adultes [130]. Les travaux de cette thèse s'inscrivent donc dans un contexte plus large, résumé à la Fig. 1.2.

Comme nous l'avons signalé plus haut, nous allons spécifiquement nous employer à l'étude des pics d'activités du point de vue extrinsèque. Pour cela, une mesure quotidienne de l'activité dans les services nous renseigne sur l'évolution de ces épidémies au jour le jour, vu à travers le nombre d'admissions aux urgences. Pour traiter cela, nous considérons le flux d'arrivées de patients comme un processus stochastique, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires $\{X_t\}_t$, où X_t mesure le nombre de patients admis le jour j , la semaine j ou le moins j selon l'échelle de temps utilisée. Ce formalisme nous permet de bénéficier de l'arsenal statistique et probabilistique nécessaire pour étudier et analyser les comportements aléatoires. Un exemple de ce processus d'arrivées mesurées quotidiennement est illustré à la Fig. 1.3. De plus nous choisissons un angle d'attaque original motivé par l'observation suivante : la dynamique du processus d'admissions varie d'année en année. Le processus d'admission est entaché d'une variabilité très importante [84], et non-stationnaire. Cette variabilité pose problème car elle complique l'anticipation des pics d'activité. Pour comprendre en profondeur ces épidémies et pour mieux les analyser, nous devons faire du caractère imprévisible une force et non une contrainte. La variabilité du flux

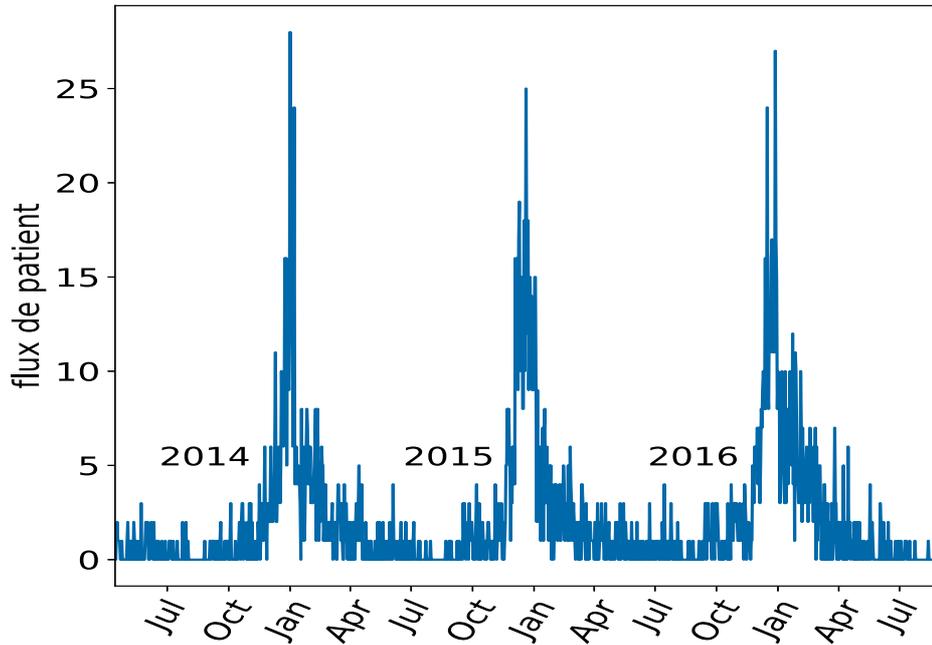


Figure 1.3.: Flux de patients : données journalières

d'arrivées demande donc d'être étudiée avec plus d'attention. Nous proposons une étude de ces phénomènes aléatoires se basant sur l'observation de cette variabilité.

Dans la suite de ce document, nous nous plaçons dans le cadre de travail suivant : un processus stochastique $X_{t,\omega}$ est une fonction $X : \mathbb{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, où \mathbb{K} est un corps (généralement \mathbb{R} ou \mathbb{C}), \mathbb{I} un ensemble d'indices. L'indice ω sera bien évidemment omis dans la suite pour alléger les notations. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un ensemble probabilisé : \mathcal{F} est une tribu sur Ω et \mathbb{P} une mesure de probabilité. Une fonction \mathcal{F} - mesurable est une variable aléatoire, et pour un processus stochastique, la fonction $X_{t,\cdot}$ est une variable aléatoire pour chaque $t \in \mathbb{I}$. Pour alléger l'écriture, nous allons désigner le processus stochastique $X_{t,\omega}$ seulement par X_t . L'espérance d'un processus est définie par :

$$\mathbb{E}(X_t) = \int_{\Omega} X_{t,\omega} \mathbb{P}(d\omega) \quad \forall t \in \mathbb{I}$$

et sa fonction d'auto-covariance est définie par :

$$R_{s,t} = \mathbb{E} \left\{ (X_s - \mathbb{E}(X_s)) \overline{(X_t - \mathbb{E}(X_t))} \right\}$$

Nous ne considérons que les processus de second ordre, c'est-à-dire que nous supposons $X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour un processus de moyenne nulle, $\mathbb{E}(X_s \overline{X_t})$ définit un produit scalaire sur L^2 , l'ensemble des fonctions de carré intégrable. Les processus stochastiques de moyenne nulle peuvent alors être interprétés comme des séquences de vecteurs dans un espace de Hilbert que nous noterons \mathcal{H} . Enfin, rappelons qu'un processus $X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit stationnaire au sens large si $\mathbb{E}(X_t) = c$, où c est une constante, et $R_{s,t} = R_{t-s}$ quelques soient $s < t$.

1.2 Processus aléatoires périodiquement corrélés

1.2.1 Detrended fluctuation analysis : processus de variabilité d'une série temporelle

Dans un premier temps nous allons prouver notre intuition de départ, à savoir qu'une augmentation de la variabilité du processus d'arrivées est la signature d'une phase épidémique. Nous souhaitons donc mesurer cette variabilité comme un écart par rapport à un comportement moyen. Pour pouvoir mesurer cela, nous avons d'abord transformé le signal grâce à un procédé connu sous le nom de DFA (detrended fluctuation analysis), [1, 73]. Cette méthode s'inscrit dans le cadre plus général de l'analyse multifractale des signaux. Nous avons retenus cette méthode car le signal résultant est facile à interpréter, comme nous allons le voir par la suite. Il s'agit de comparer les valeurs du signal en chaque instant par rapport à une tendance locale :

Soit $\{Y_t\}_{t=1}^N$ le processus d'admissions, et $\{Z_t\}$ le signal intégré :

$$Z_t = \sum_{k=1}^t (Y_k - \overline{Y}_t)$$

où \overline{Y}_t est la valeur moyenne temporelle de $\{Y_t\}_{t=1}^N$. La série $\{Z_t\}_{t=1}^N$ est ensuite divisée en $N_L = \lfloor T/L \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ désignant la partie entière) tranches de longueur L ne se recouvrant pas. L est l'échelle de temps selon laquelle nous allons observer la variabilité. Dans chaque fenêtre, une approximation au sens des moindres carrés est effectuée, et nous notons $\{Z_t^n\}_{t=n \times N_L}^{(n+1) \times N_L}$ pour $n = 1, 2, \dots, N_L$ la concaténation de ces approximations, ce qui nous donne donc une fonction linéaire par morceaux (Fig. 1.4). Enfin, pour chaque temps t nous comparons la valeur du

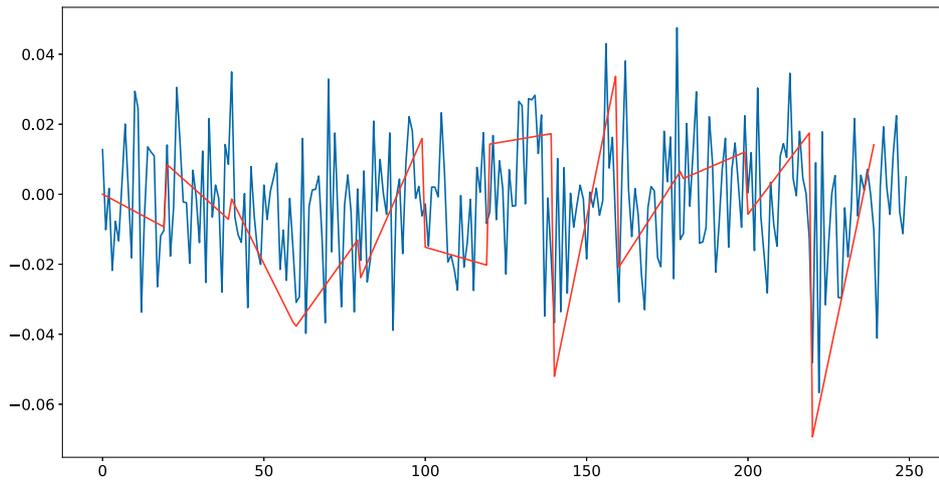


Figure 1.4.: Exemple d'une approximation linéaire par morceau pour le calcul de la DFA.

processus intégré à son approximation linéaire locale Fig. 1.5 :

$$X_t = Z_t - Z_t^n, \quad \forall t \in [n \times N_L, (n+1) \times N_L], \quad \forall n = 1, 2, \dots, N_L$$

La DFA du processus d'admission de la Fig. 1.3 est reportée à la Fig. 1.6. Nous pouvons à présent observer la variabilité dissimulée au sein des périodes épidémiques, en faisant abstraction du caractère global de l'épidémie c'est-à-dire sans tenir compte du fait que le nombre moyen de patients admis croisse ou décroisse pendant cette période là. A titre d'exemple, le signal de la Fig. 1.7 produirait une DFA complètement différente de celle que nous observons, car la variabilité est dans ce cas-ci plus importante hors période épidémique que pendant le pic épidémique.

Le processus de variabilité que nous observons, Fig. 1.6, est extrêmement intéressant pour deux raisons. Tout d'abord, c'est un processus stochastique clairement *non-stationnaire* : la variabilité du processus d'admissions n'est pas constante au cours du temps. Attention, nous parlons bien ici du processus de variabilité et non du processus d'admissions lui-même. La non-stationnarité du processus d'admissions est évidente car sinon il n'y aurait tout simplement pas lieu de parler de période épidémique. En revanche il n'est a priori pas évident que le processus de variabilité soit non-stationnaire. Ensuite, nous remarquons que les périodes de plus forte variabilité correspondent aux périodes de pics épidémiques. Autrement dit nous ne pouvons pas nous contenter de définir une épidémie par un nombre d'admissions plus important qu'à la

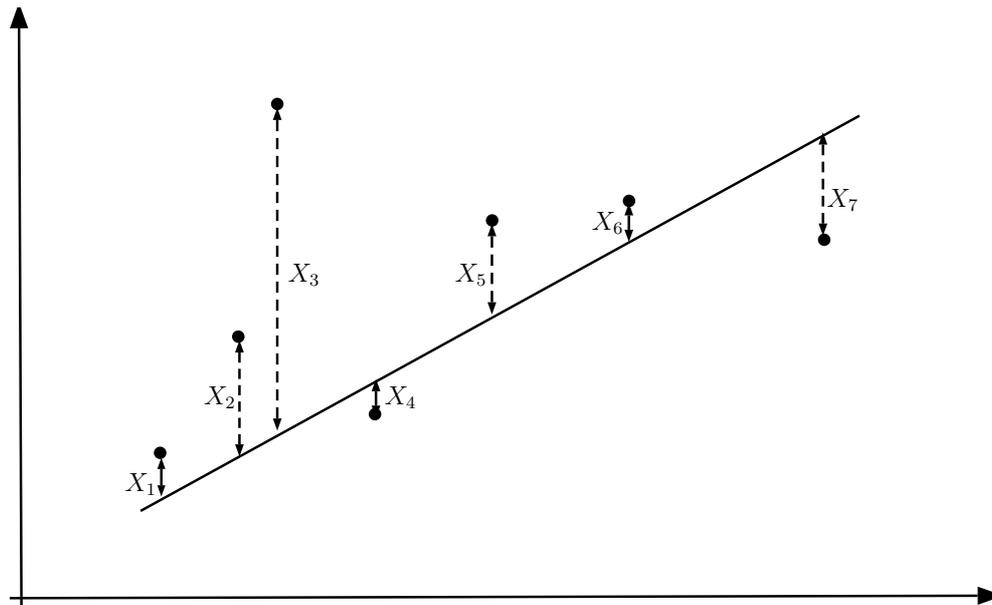


Figure 1.5.: Les valeurs du processus (points noirs) sont comparées à la tendance locale. Il en résulte une série temporelle $\{X_1, X_2, \dots\}$ qui est donnée par la longueur des doubles-flèches en pointillés, comptée positivement si les points sont situés au-dessus de la tendance et négativement si ils sont en-dessous.

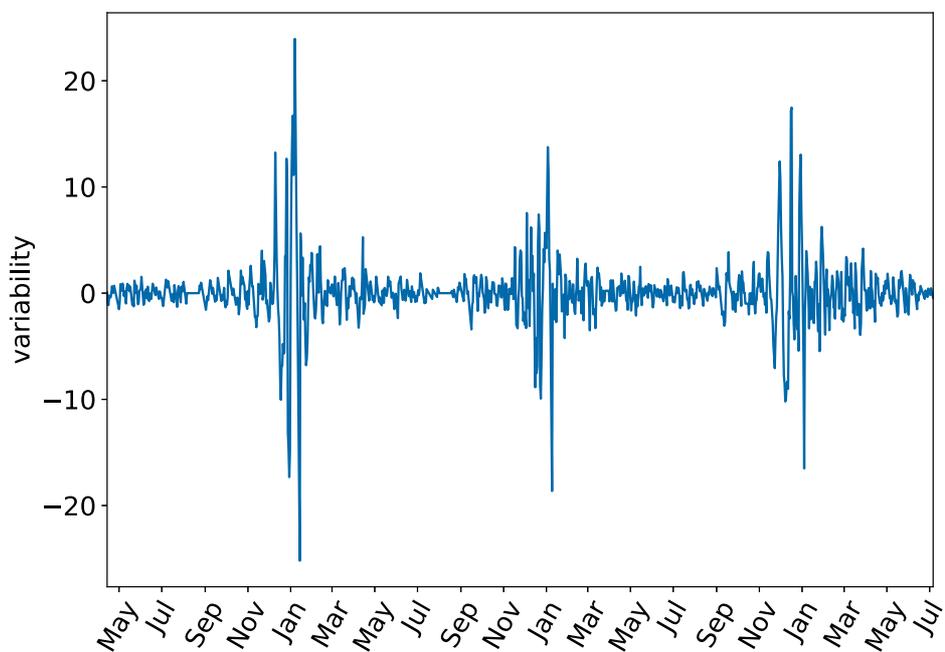


Figure 1.6.: DFA du signal de la Fig. 1.3

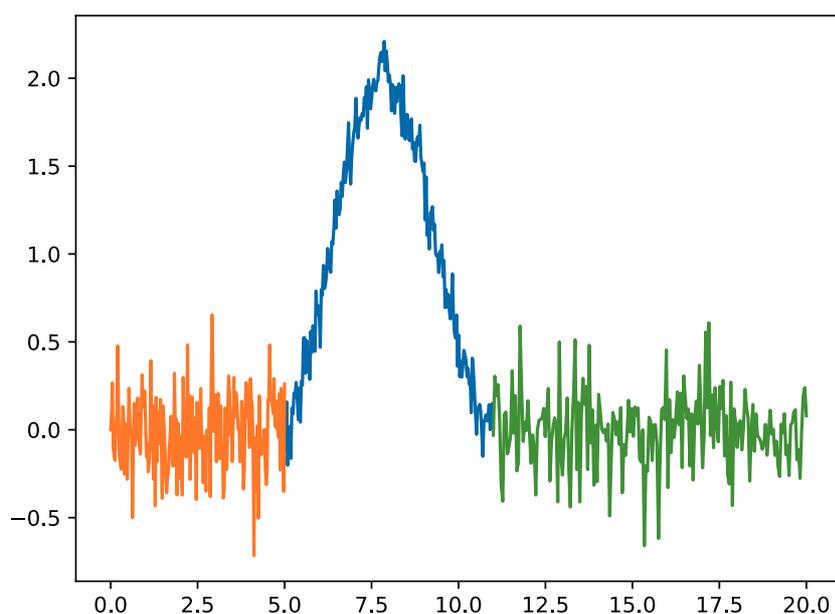


Figure 1.7.: Pour ce signal de synthèse, la DFA serait inversée par rapport à celle de la Fig. 1.6. En effet sur les trois périodes distinctes (orange, bleue et verte), la variabilité est plus importante lors des périodes orange et verte (hors "épidémie" que lors de la période bleue.

normale, Il faut également tenir compte du processus de variabilité. Cette forte variabilité est extrêmement préjudiciable pour les services d'urgences, et affecte fortement leur organisation. Cela conforte notre intuition que l'étude de la variabilité pour ce type de processus est un élément important à l'analyse.

La DFA est habituellement employée pour étudier les processus auto-similaires et multi-fractaux, c'est à dire les processus ayant une structure qui se conserve même lorsqu'ils sont observés à différentes échelles L . Dans ce cas, c'est la fonction

$$F(L) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_t^N X_{t,L}^2}$$

qui est étudiée, où L intervient dans la formule ci-dessus pour rendre compte de l'échelle utilisée. En particulier, si le processus sous-jacent est un mouvement Brownien le tracé de $\log F(L)$ en fonction de $\log(L)$ est une droite de pente $\alpha = 1,5$.

Le processus global d'admissions aux urgences hospitalières, toutes pathologies confondues, possède des caractéristiques multi-fractales, [61] . Nous observons que si nous nous restreignons

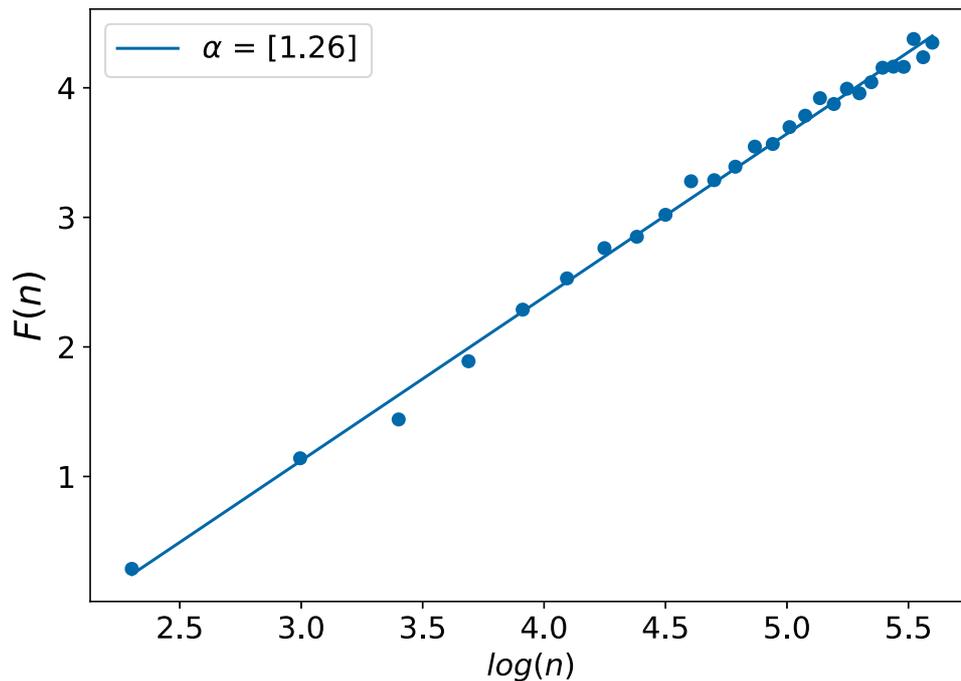


Figure 1.8.: Tracé de $\log F(L)$ en fonction de $\log(L)$

au sous-phénomène "admissions aux urgences pour les pathologies pédiatriques saisonnières", alors cette saisonnalité induit une certaine périodicité dans le processus dans un sens que nous préciserons plus tard. Le caractère fractal du processus ne disparaît pas totalement, Fig. 1.8.

Nous pouvons remarquer que ce processus de variabilité possède quelques ressemblances avec les signaux modulés en amplitudes, que l'on rencontre fréquemment en télécommunication. Ce sont des signaux dont la fonction de corrélation est périodique du fait de la multiplication du signal contenant l'information par une porteuse sinusoïdale. Bien que le processus de variabilité que nous observons ne soit pas exactement de ce type il reste néanmoins *périodiquement corrélé*. Ceci veut dire, comme nous pouvons nous en rendre compte dans la Fig. 1.6 que la relation de correspondance statistique qui existe entre deux valeurs du processus X_s et X_t aux temps s et t , est la même que celle entre X_{s+T} et X_{t+T} où $T > 0$ est appelé période cyclique. La différence essentielle par rapport à un processus stationnaire tient en ce que le support du spectre (ou la densité spectrale) du signal ne se compose plus d'une seule dimension fréquentielle, mais de deux. C'est ce que nous allons voir dans la prochaine partie.

1.2.2 Théorie de Fourier des signaux périodiquement corrélés.

L'étude des processus PC semble avoir été initiée par [25]. Une des premières représentations des signaux périodiquement corrélés à été donnée par [72]. Par la suite ces processus ont fait l'objet de nombreux travaux, [69, 48, 103, 67] car ils sont présents dans de nombreux domaines scientifiques : télécommunications [66], océanographie [54], économétrie [113], météorologie [79] pour ne citer qu'eux.

Quelques définitions s'imposent. Par souci de clarté, nous nous plaçons dans le cas de processus discrets. Dans cette section, nous allons noter, pour $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stochastique discret, $\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t)$ sa moyenne statistique en t et $c_{XX}(t, \tau) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_X(t)) \overline{(X_{t+\tau} - \mu_X(t+\tau))}]$ sa fonction d'autocovariance, où $\bar{\cdot}$ désigne le conjugué.

Définition 1.1 (Processus périodiquement corrélé). Le processus $\{X_t\}_t$ est dit périodiquement corrélé au sens large, ou cyclostationnaire, si et seulement si il existe un entier T tel que

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \mu_X(t + kT), \quad \text{et} \\ c_{XX}(n, \tau) &= c_{XX}(n + kT, \tau), \quad \forall t, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Etant donné que $c_{XX}(t, \tau)$ est périodique en t de période T, elle est développable en série de Fourier :

$$c_{XX}(t, \tau) = \sum_{k=0}^{T-1} C_{XX} \left(\frac{2\pi}{T}k, \tau \right) e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \xrightarrow{\text{Fourier}} C_{XX} \left(\frac{2\pi}{T}k, \tau \right) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} c_{xx}(n, \tau) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} \quad (1.2)$$

où j désigne le nombre complexe $j^2 = -1$. On note $\alpha_k = \frac{2\pi}{T}k$ les coefficients que nous nommons *fréquences cycliques*, et

$A_{XX} = \{\alpha_k, k = 0, 1, \dots, T-1\}$. Nous pouvons alors définir le *spectre cyclique* par [69] :

$$S_{XX}(t, \omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_{xx}(t, \tau) e^{-j\omega\tau} = \sum_{\alpha_k \in A_{XX}} S_{XX}(\alpha_k, \omega) e^{j\alpha_k t} \quad (1.3)$$

$$S_{XX}(\alpha_k, \omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C_{XX}(\alpha_k, \tau) e^{-j\omega\tau} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} S_{XX}(t, \omega) e^{-j\alpha_k t} \quad (1.4)$$

La périodicité de la fonction de corrélation induit donc une dissipation du spectre sur plusieurs fréquences. Ainsi le support du spectre n'est pas constitué d'une seule ligne comme c'est le cas pour un processus stationnaire, mais de plusieurs lignes parallèles espacées de $\frac{2\pi}{T}$. Comme cela

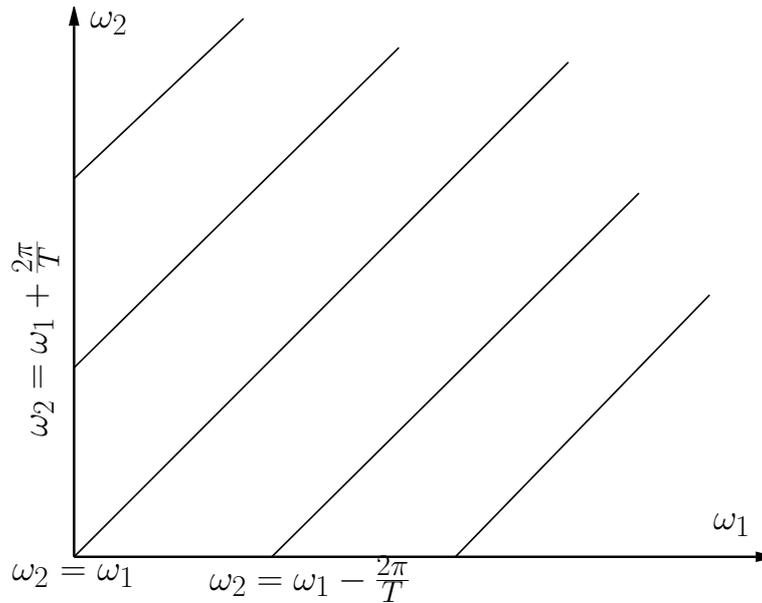


Figure 1.9.: Support du spectre d'un processus T-PC.

est prouvé dans [69] ainsi que dans [83, 48], l'équation 1.4 peut être réarrangée, et le spectre peut alors s'écrire sous la forme :

$$S_{XX}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} S_{XX}\left(\frac{2\pi}{T}k, \omega_1\right) \delta\left(\omega_2 - \omega_1 + \frac{2\pi}{T}k\right) \quad (1.5)$$

où δ désigne la distribution de Dirac. Le support spectral du processus PC consiste donc en un ensemble de droites du plan parallèlement espacées, Fig. 1.9. Cette expression englobe également les processus stationnaires, car dans ce cas $S_{XX}(\omega_1, \omega_2) = S_{XX}(0, \omega_1)\delta(\omega_2 - \omega_1)$. : l'information spectrale d'un processus stationnaire se concentre dans la diagonale du pavé de la Fig. 1.9. Dans [100], les auteurs proposent une méthode pour tester si un signal donné est bien périodiquement corrélé. Cette méthode consiste, dans les grandes lignes, à essayer plusieurs fréquences cycliques potentielles α_k et à ne conserver que celles pour lesquelles l'équation 1.4 n'a pas une valeur nulle. En appliquant cette méthode nous avons effectivement montré que le processus de variabilité est bien cyclostationnaire. Le support du spectre cyclique du processus de variabilité de la Fig. 1.6 est donné à la figure Fig. 1.10.

1.2.3 Une autre représentation des signaux PC

Nous venons de voir les processus PC sous un angle classique correspondant à une analyse harmonique de Fourier. Mais il existe une autre façon de représenter les processus stochastiques,

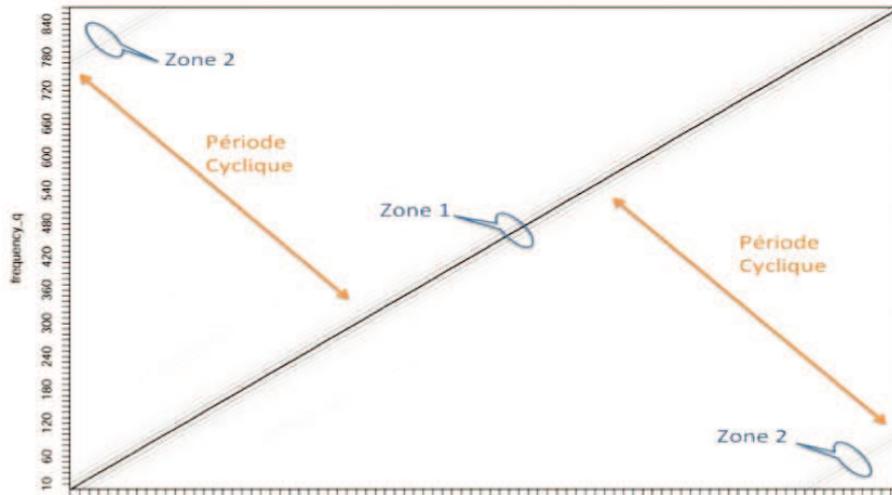


Figure 1.10.: Support du spectre cyclique du processus de variabilité.

bien plus éclairante et qui va par la suite attirer toute notre attention. Cette représentation est principalement employée dans [83], et nous la retrouvons également dans [102]. Soit un processus stationnaire $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Son *domaine temporel* \mathcal{H}_X est défini comme étant l'ensemble généré par tous les vecteurs X_t :

$$\mathcal{H}_X = \overline{\text{sp}} \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$$

où sp (span) désigne l'espace engendré, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires. Dans ce cas nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.1 (shift operator,[83]). Un processus stochastique de second ordre X_t est stationnaire si et seulement si il existe un opérateur unitaire défini sur \mathcal{H}_X tel que :

$$X_{t+1} = UX_t \tag{1.6}$$

pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Nous appelons cet opérateur le *shift operator*.

Démonstration. Rappelons qu'un opérateur unitaire U sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est un opérateur linéaire de \mathcal{H} dans \mathcal{H} vérifiant $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant le produit scalaire). S'il existe un tel opérateur unitaire, alors nous avons :

$$\langle X_s, X_t \rangle = \langle UX_s, UX_t \rangle = \langle X_{s+1}, X_{t+1} \rangle$$

Inversement, si nous supposons $\{X_t\}_t$ stationnaire, alors définissons $U : sp\{X_t, t \in \mathbb{Z}\} \rightarrow sp\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ par $Uh = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{t_i+1}$, $\forall h = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{t_i} \in sp\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre alors que pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} U(\lambda h + h') &= U\left(\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{t_i} + \sum_{i=1}^n \beta_i X_{t_i}\right) \\ &= U\left(\sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \beta_i) X_{t_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \beta_i) X_{t_i+1} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{t_i+1} + \sum_{i=1}^n \beta_i X_{t_i} = \lambda Uh + Uh' \end{aligned}$$

et on montre de la même façon que U est bien défini. Enfin nous avons

$$\langle Uh, Uh' \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle X_{t_i+1}, X_{t_j+1} \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle X_{t_i}, X_{t_j} \rangle = \langle h, h' \rangle$$

Par continuité, U peut être étendu à $\overline{sp}\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ □

Cet opérateur unitaire, qui admet pour représentation spectrale $U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} E(d\lambda)$, [78, 4] (voir Annexe B pour davantage de détails sur les mesures spectrales des opérateurs), conduit à une représentation intégrale du processus sous la forme :

$$X_t = \int_0^{2\pi} e^{it\lambda} \xi(d\lambda) \tag{1.7}$$

En effet, nous avons :

$$X_t = U^t X_0 = \int_0^{2\pi} e^{it\lambda} E(d\lambda) X_0 = \int_0^{2\pi} e^{it\lambda} \xi(d\lambda)$$

avec $\xi(\Delta) = E(\Delta)X_0$ pour tout sous-ensemble Borélien Δ de $[0, 2\pi]$. De plus, si nous définissons la mesure $F(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \langle \xi(\Delta_1), \xi(\Delta_2) \rangle$, pour Δ_1 et Δ_2 des sous-ensembles Boréliens de $[0, 2\pi]$, nous observons que :

$$\begin{aligned} \langle X_{t+\tau}, X_t \rangle &= \left\langle \int_0^{2\pi} e^{it+\tau\lambda} \xi(d\lambda), \int_0^{2\pi} e^{it\lambda} \xi(d\lambda) \right\rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it+\tau\lambda} e^{-it\theta} \langle \xi(d\lambda), \xi(d\theta) \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i\tau\lambda} F(d\lambda) = R_\tau \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ainsi nous voyons que la *mesure spectrale* du processus, $F(d\lambda)$, est directement héritée de la mesure de l'opérateur unitaire de shift. Lorsque le processus sous-jacent est périodiquement corrélé, le théorème 1.1 devient :

Théorème 1.2. Un processus $\{X_t\}$ est PC-T si et seulement si il existe un opérateur unitaire U définit sur \mathcal{H}_X telle que :

$$X_{t+T} = UX_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (1.9)$$

Démonstration. Ce résultat s'obtient de la même façon que le théorème 1.2, en considérant cette fois-ci $Uh = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{t_i+T}$ pour $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{t_i}$ □

D'une façon assez similaire au cas stationnaire, il est possible d'obtenir une représentation des processus périodiquement corrélés, qui est néanmoins beaucoup moins évidente : En effet, si l'on considère la racine T-ème de U , c'est-à-dire l'opérateur V tel que $V^T = U$ qui grâce à la représentation intégrale des opérateurs unitaires s'écrit $V = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda/T} E(d\lambda)$, alors la séquence $P_t = V^{-t}X_t$ est périodique car

$$\begin{aligned} \|P_{t+T} - P_t\| &= \left\| V^{-t-T}X_{t+T} - V^{-t}X_t \right\| \\ &= \left\| V^{-T}X_{t+T} - X_t \right\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

et vérifie :

$$X_t = V^t P_t \quad (1.10)$$

Toutefois aucune représentation matricielle concrète et exploitable du shift operator n'est donnée dans les travaux mentionnés ci-dessus. Notre première interrogation a donc été de savoir quelle forme pouvait prendre ce shift operator. La représentation du processus par la formule (1.10) n'est pas entièrement satisfaisante : comment peut-on espérer obtenir la racine T-ème d'un opérateur dont nous ne connaissons même pas la forme ? Or, dans [104], les auteurs suggèrent l'équivalence entre shift operator et une certaine classe d'opérateurs appelés opérateurs de dilation. Les auteurs ne donnent pas non plus de forme exploitable pour ces opérateurs mais nous allons voir qu'il est possible d'en obtenir une. Nous allons nous attarder sur cette classe d'opérateurs particuliers, mais auparavant nous devons introduire des coefficients qui sont cruciaux pour notre analyse car ils nous permettent justement de construire cet opérateur unitaire U . Il s'agit des coefficients de corrélation partiels, ou *parcours*, qui sont bien connus dans le champ du traitement de signal.

1.3 Coefficients de corrélation partiels.

Nous désignerons par *parcours* les coefficients de corrélation partiels. Ces coefficients sont les briques de base de notre développement, nous allons donc nous y attarder quelque peu. Nous allons commencer par présenter les *parcours* de la façon la plus simple qui soit, celle qui apparaît naturellement comme un sous-produit de l'algorithme de Levinson. Ensuite nous donnerons quelques exemples de domaines dans lesquels ces *parcours* interviennent. Les *parcours*, qu'ils soient nommés coefficients de Schur, de réflexion, de Szëgo ou de Verblunsky, et quelque soit leur champ d'appartenance seront toujours ici désignés par Γ . Le but de cette partie est de donner un aperçu de la très grande diversité de domaines dans lesquels des coefficients de ce type apparaissent.

1.3.1 Première approche des *parcours*

Les *parcours* peuvent se définir et se déterminer de plusieurs façons qui sont toutes équivalentes entre elles. Nous en présenterons trois, qui illustrent la diversité des approches afférentes à ce domaine. Nous allons voir une approche "signal", qui trouve son origine dans les travaux de Burg [35] et qui fait intervenir les équations de Yule-Walker ; une approche géométrique et enfin une approche matricielle, qui fait intervenir les compléments de Schur.

Plaçons nous d'abord dans le cas d'un processus stationnaire, dont nous pouvons trouver une présentation détaillée dans [27, 83]. Soit une matrice d'auto-covariance temporelle :

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{n-1} \\ \overline{R_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_1 \\ \overline{R_{n-1}} & \cdots & \overline{R_1} & R_0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Rappelons que cette matrice est Toeplitz, définie positive. Notons que cette matrice, dans le jargon du traitement de signal est parfois également nommée matrice d'auto-corrélation (mais sans division par la variance). Burg s'est posé la question de pouvoir identifier un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dont les coefficients d'auto-corrélations $\mathbb{E}(X_t \overline{X_{t+\tau}}) = R_\tau, \tau = 0, \dots, k$ sont connus d'avance. La contrainte principale consiste à faire un minimum de suppositions sur le processus recherché. Autrement dit, il est question de trouver le processus à maximum d'entropie, dans le sens où un minimum d'informations sont requises, et dont la matrice de corrélation est donnée par Δ_n . Il a montré que ce processus au temps t s'écrit comme une combinaison linéaire de ce même processus aux k précédents temps :

$$X_t = - \sum_{i=1}^k \alpha_i^{(k)} X_{t-i} + \epsilon_t^{(k)} \quad (1.12)$$

où $\{\epsilon_t^{(k)}\}$ est un bruit blanc Gaussien de variance $P_k > 0$. Nous dirons que l'approximation est faite dans le sens "backward". Un tel processus est qualifié d'auto-régressif d'ordre k . Alors, Le k -ème coefficient de corrélation partiel est défini par :

$$\Gamma_k = \alpha_k^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (1.13)$$

C'est le dernier coefficient de l'approximation linéaire de X_t par les k précédentes valeurs de X_t . Le processus étant stationnaire, le k -ème parcor de X_t est égal au k -ème parcor de X_s , où $s \neq t$, ce qui explique pourquoi le temps n'apparaît pas dans la notation des parcors. Le système d'équations de Yule-Walker associé est :

$$\begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_k \\ \overline{R_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_1 \\ \overline{R_k} & \cdots & \overline{R_1} & R_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_k^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Le calcul du déterminant de Δ_{k+1} donne, [74] :

$$\det(\Delta_{k+1}) = (-1)^{2(k+1)} \left(R_0 + \alpha_1^{(k)} R_1 + \dots + \alpha_k^{(k)} R_k \right) \det(\Delta_k)$$

d'où :

$$P_k = \frac{\det(\Delta_{k+1})}{\det(\Delta_k)} \quad (1.15)$$

Les coefficients auto-régressifs se trouvent alors grâce à l'algorithme récursif (la récurrence est faite sur k) de Levinson : étant donné que

$$\begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_{k+1} \\ \overline{R_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_1 \\ \overline{R_{k+1}} & \dots & \overline{R_1} & R_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1^{(k)} & \overline{\alpha_k^{(k)}} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_k^{(k)} & \overline{\alpha_1^{(k)}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k & \overline{e_k} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ e_k & P_k \end{pmatrix}$$

avec $e_k = R_{k+1} + \alpha_k^{(k)} R_k + \dots + \alpha_1^{(k)} R_1$, il faut, pour se ramener aux équations de Yule-Walker trouver une matrice A de sorte que

$$\begin{pmatrix} P_k & \overline{e_k} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ e_k & P_k \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} P_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & P_{k+1} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons :

$$M = \frac{P_{k+1}}{P_k^2 - |e_k|^2} \begin{pmatrix} P_k & -\overline{e_k} \\ -e_k & P_k \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1^{(k)} & \alpha_k^{(k)} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_k^{(k)} & \alpha_1^{(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\Gamma_{k+1}} \\ \alpha_1^{(k+1)} & \overline{\alpha_k^{(k+1)}} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_k^{(k+1)} & \overline{\alpha_1^{(k+1)}} \\ \Gamma_{k+1} & 1 \end{pmatrix}$$

et donc la récursion de Levinson est : $P_0 = R_0$, et pour $k = 0, \dots, n-2$

$$\begin{cases} \Gamma_{k+1} &= -\frac{R_{k+1} + \alpha_k^{(k)} R_k + \dots + \alpha_1^{(k)} R_1}{P_k} \\ \alpha_i^{k+1} &= \alpha_i^{(k)} + \Gamma_{k+1} \overline{\alpha_{(k+1-i)}^{(k)}}, \quad i = 1, \dots, k \\ P_{k+1} &= P_k (1 - |\Gamma_{k+1}|^2) \end{cases} \quad (1.16)$$

La positivité de la puissance du bruit blanc impose

$$|\Gamma_k| < 1, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (1.17)$$

Encore une fois, la stationnarité du processus conduit aux mêmes résultats si l'approximation linéaire est effectuée dans le sens "forward", c'est-à-dire si l'on exprime X_t comme combinaison linéaire des k valeurs suivantes du processus.

L'algorithme de Levinson s'étend naturellement au cas d'un processus non-stationnaire. Nous ne détaillerons par les calculs ici par soucis de clarté, le lecteur trouvera dans [83] un développement de l'algorithme de Levinson pour un processus périodiquement corrélé. La différence majeure tient en ce que deux indices sont attribués aux parcours, selon que l'approximation de X_t par combinaison linéaire se fasse dans le sens backward, $X_t \approx -\sum_{i=1}^k \alpha_i^{(k)} X_{t-i}$ ou forward, $X_t \approx -\sum_{i=1}^k \beta_i^{(k)} X_{t+i}$. Contrairement à un processus stationnaire, ces deux cas doivent être traités séparément.

Il devient alors nécessaire de donner une définition plus générale des parcours. Notons $\widehat{X}_{t+\delta;s:t}$ la projection orthogonale de $X_{t+\delta}$ sur $sp\{X_s, \dots, X_t\}$. Alors, nous définissons les parcours comme étant les coefficients [57, 94, 95, 83] :

$$\Gamma_{s,t} = \frac{\mathbb{E} \left\{ \left[X_t - \widehat{X}_{t;s:t-1} \right] \left[X_s - \widehat{X}_{s;s+1:t} \right] \right\}}{\sigma_s \sigma_t} \quad (1.18)$$

où σ_t et la variance du processus au temps t . Le parcours $\Gamma_{s,t}$ s'interprète alors comme étant la corrélation entre X_s , et X_t sans que l'influence de $\{X_{s+1}, X_{s+2}, \dots, X_{t-1}\}$ ne soit prise en compte.

Enfin, et c'est une propriété très importante, lorsque le processus est périodiquement corrélé, la périodicité des coefficients de corrélation se transmet naturellement aux parcours :

$$\Gamma_{s+T,t+T} = \Gamma_{s,t}, \quad \text{pour un processus PC} \quad (1.19)$$

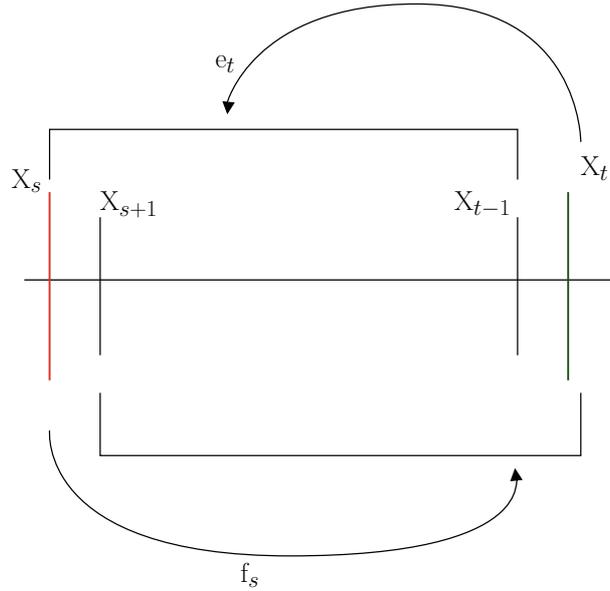


Figure 1.11.: Pour chaque s et t avec $s < t$ nous avons $\Gamma_{s,t} = \langle e_t, f_s \rangle$, où e_t est l'innovation forward X_t sur $sp\{X_s, \dots, X_{t-1}\}$ et f_s la projection de X_s sur $sp\{X_{s+1}, \dots, X_t\}$. e_t , l'innovation du processus au temps t est la composante de X_t qui ne peut pas être déduite des valeurs du signal aux temps précédents.

En effet, si nous développons le numérateur de l'eq. 1.18 :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left[X_t + \sum_{i=1}^k \alpha_i^{(k)} X_{t-i} \right] \times \left[X_s + \sum_{i=1}^k \beta_i^{(k)} X_{t+i} \right] \right\} \\ &= R_{t,s} + \sum_{i=1}^k \alpha_i^{(k)} R_{t-i,t+i} + \sum_{i=1}^k \beta_i^{(k)} R_{t-i,t+i} \\ & \quad + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i^{(k)} \beta_j^{(k)} R_{t-i,t+i} \end{aligned}$$

et tous les coefficients de corrélations sont périodiques en t .

1.3.2 Théories impliquant les parcours : autres définitions.

Sequences définies positives, fonctions de Caratheodory

A présent, voyons une autre définition des parcours, qui justifie que ces paramètres portent aussi le nom de coefficients de Schur ou de coefficients de Szëgo. Cette définition se base sur la propriété de positivité de la matrice de corrélation. Cette approche se retrouve dans [98, 87, 53]. Il est particulièrement intéressant d'étudier les parcours de ce point de vue car les arguments

employés ici sont proches de ceux que nous rencontrerons lors de la construction des matrices de dilations.

Pour une matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

(les matrices étant supposées inversibles) nous définissons le *complément de Schur* de A dans M comme étant la matrice :

$$M/A = D - CA^{-1}B$$

Le complément de Schur apparaît comme un sous produit de la réduction de Gauss de la matrice M. Le résultat qui nous intéresse ici est le suivant :

Théorème 1.3. Soit M la matrice :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}$$

où nous supposons que les matrices sont toutes inversibles. Alors, M est définie positive si et seulement si A et M/A sont définies positives.

Démonstration. Nous avons la factorisation suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^*A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - B^*A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Remarquons que

$$\begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Or nous savons que pour une matrice symétrique S et pour une matrice inversible N quelconque, alors S est définie positive si et seulement NSN^T , qui est évidemment symétrique et définie positive. Comme une matrice diagonale par blocs est définie positive si et seulement si chaque bloc est défini positif, nous avons bien le résultat. \square

Reprenons la matrice de corrélation $\Delta_n = (R_{s,t})_{0 \leq s, t \leq n}$. Désignons par $CS : \mathcal{M}(\mathbb{K})^{n \times n} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{K})^{(n-1) \times (n-1)}$ l'application qui consiste à associer à une matrice M de taille $n \times n$ son complément de Schur par rapport au coefficient $M_{0,0}$. Ainsi :

$$CS(\Delta_n) = \left\{ R_{t+1,s+1} - R_{t+1,0} R_{0,0}^{-1} R_{0,s+1}; 0 \leq t, s \leq n-1 \right\}.$$

Cette opération est appelée une réduction de Schur, dans le sens où la matrice $CS(\Delta_n)$ est de taille $n-1 \times n-1$. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, Δ_n est définie positive si et seulement si $R_{0,0} > 0$ et $CS(\Delta_n)$ est définie positive. Répétons cette opération n fois de sorte à avoir une séquence de matrices $\{\Delta_n, CS(\Delta_n), CS \circ CS(\Delta_n), \dots, CS \circ \dots \circ CS(\Delta_n)\}$ dont la taille décroît de 1 à chaque étape, jusqu'à l'obtention d'un scalaire. Ainsi, la positivité de Δ_n assure que chaque élément situé à la position $(0,0)$ des matrices Δ_i successives est positif. Les parcours, cette fois-ci appelés coefficients de Schur s'identifient à : $\Gamma_k = (CS \circ \dots \circ CS(\Delta_n))_{0,0}$, où la compositions est appliquée k fois. Comme le montre Kailath dans [87, 98], cette procédure revient à appliquer l'algorithme de Schur sur la fonction dite de Caratheodory obtenue à partir de la matrice Δ_∞ :

$$c(z) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R_k z \tag{1.21}$$

où z est un nombre complexe. Caratheodory a montré le théorème suivant :

Théorème 1.4. Une suite de nombres $\{R_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ est une sequence de coefficients de corrélation (aussi appelé une séquence de moments) si et seulement si $Re(c(z)) > 0$ dans le domaine $\{|z| < 1\}$, où $c(\cdot)$ est définie par eq. 1.21 Re désigne la partie réelle.

En étudiant ce problème, Schur [126] a montré l'équivalence entre les propositions suivantes :

- $c(z)$ est de partie réelle positive.
- La fonction $s(z) = \frac{c(z)-c(0)}{c(z)+c(0)}$ est analytique, c'est-à-dire développable en série entière, et vérifie $|s(z)| < 1$ pour $|z| < 1$.

Une telle fonction $s(z)$ est dite appartenir à la classe des fonctions de Schur. Il existe un procédé pour s'assurer qu'une fonction donnée est une fonction de Schur ou non :

Théorème 1.5 (Algorithme de Schur). Soit $s(z)$ une fonction, et

$$s_0(z) = s(z), \quad s_{i+1}(z) = \frac{1}{z} \frac{s_i(z) - \Gamma_i}{1 - \Gamma_i^* s_i(z)}, \quad \Gamma_i = s_i(0)$$

Alors :

- $s(z)$ est analytique et bornée par 1 dans le disque unité si et seulement si $|\Gamma_i| < 1$ pour tout i .
- $|\Gamma_i| < 1$ pour $0 \leq i < n$ et $|\Gamma_n| = 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $s(z)$ est un produit de Blaschke fini de degré n , c'est-à-dire est de la forme $s(z) = \zeta \prod_{i=1}^n \left(\frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z} \right)^{m_i}$ où ζ est une constante de module égal à un.
- Si la fonction initiale $s(z)$ est une fonction de Schur, alors chaque fonction $s_i(z)$ est aussi une fonction de Schur.

Cette procédure produit une suite de coefficients $\{\Gamma_i\}$, appelés paramètres de Schur qui ne sont rien d'autre que des parcours.

Polynômes orthogonaux, coefficients de Verblunsky

Les parcours sont également des éléments essentiels dans la théorie des polynômes orthogonaux, ce qui mérite d'y consacrer une courte section. Il existe en effet une importante connexion entre polynômes orthogonaux, [134, 68, 142], mesure spectrale, parcours et dilation (nous reviendrons sur ce point à la fin de la section suivante). Une présentation avec un ascendant probabiliste des polynômes orthogonaux et des parcours est donnée dans [26].

Théorème 1.6 (Theoreme de Verblunsky, [142]). Il existe une bijection entre les suites $\{\Gamma_n\}$ vérifiant $|\Gamma_i| < 1$, $\forall i$ et les mesures de probabilité sur le cercle unité \mathbb{T} .

La correspondance est établie comme suit : soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{T} . Un procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt du système $\{e^{in\lambda}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \mu(d\lambda)$$

fournit une base orthonormale constituée de polynômes $\{\Phi_n\}$. Ce sont les *polynômes orthogonaux* sur le cercle unité, aussi connus sous le nom de polynôme de Szëgo. Pour un polynôme P de degré n, définissons : $P^* = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$. La récursion de Szegö est :

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{\Gamma}_{n+1}\Phi_n^*(z) \quad (1.22)$$

où les paramètres $|\Gamma_n| < 1$ sont dans ce contexte appelés les coefficients de Verblunsky. Les polynômes matriciels orthogonaux sur le cercle unité (MOPUC), [50, 49] sont une extension des polynômes orthogonaux à coefficients scalaires. D'après [47] les polynômes matriciels orthogonaux vérifient une récursion de Szëgo équivalente à celle des polynômes orthogonaux scalaires, et dans ce cas les parcos sont des matrices.

Les parcos sont donc des objets qui sont implicitement manipulés dans de nombreux domaines : polynômes orthogonaux sur le cercle unité, algorithme de Levinson, algorithme de Burg, fonction de Schur. Le cas d'un signal périodiquement corrélé n'est qu'une extension du cas stationnaire, dans le sens où, comme pour les coefficients de corrélation, les parcos, doublement indexés sont périodiques.

1.3.3 Géométrie des parcos

Dans la section précédente nous avons vu que les coefficients de réflexion partiels apparaissent sous différentes formes. Une observation faite dans [53] suggère une première caractérisation géométrique des parcos. Les auteurs montrent que la relation de recursion vérifiée par les parcos et démontrée par Yule [149] correspond à la loi des sinus en géométrie sphérique. C'est une interprétation géométrique des relations de récurrences qui sont satisfaites par les parcos. Malgré cela nous revendiquons un angle d'attaque plus en lien avec le processus sous-jacent, notre propos n'étant pas l'étude intrinsèque des coefficients de réflexions, c'est-à-dire les parcos en tant que tels, mais l'étude de certaines propriétés géométriques et topologiques des processus périodiquement corrélés. Dans ce sens nous allons suivre une démarche similaire à celle que nous trouvons dans [115, 117, 116] où les auteurs traitent de la géométrie de *l'ensemble des matrices* de corrélations : l'ensemble des matrices définies positives de taille n, noté Sym^+ constitue une variété (plus couramment nommée manifold en anglais). Pour pouvoir travailler sur des variétés, il faut spécifier ce que l'on appelle une métrique : c'est un produit scalaire sur l'espace

tangent. Cette métrique nous permet de comparer des points sur la variété au moyen d'une distance, de définir la longueur d'une courbe et notamment de trouver la courbe de longueur minimale reliant deux points, qui s'appelle une *géodésique*. Par exemple, imaginons un ensemble de matrices de corrélations $\{M_i\}_i$, correspondant à plusieurs réalisations d'un même phénomène aléatoire. Si nous souhaitons trouver une matrice de corrélation moyenne, qui correspond donc au phénomène moyen, il est nécessaire que la matrice cherchée soit effectivement une matrice de corrélation, c'est-à-dire qu'elle soit définie positive. Si nous façonnons cette matrice moyenne de sorte que chacun de ses coefficients soit la moyenne des coefficients des autres matrice situés à la même place nous n'obtiendrons pas une matrice de corrélation. La moyenne doit donc être entendue au sens de Fréchet [110].

Lorsque deux processus stochastiques sont donnés, nous pouvons les comparer grâce à leur matrices de corrélations. En étudiant ces matrices de corrélation, nous en déduisons des informations, des propriétés sur les signaux qui les ont générées. Sur ce même principe, nous pouvons doter *l'ensemble des sequences de parcours* d'une métrique permettant la comparaison de signaux. Il se trouve que cette métrique est la métrique de Poincaré sur le disque du même nom, [?, 146, 15]. En effet les développements détaillés, notamment l'eq. 1.16 plus haut nous fournissent un système de coordonnées de \mathcal{T}_n^+ , l'ensemble des matrices Toeplitz définie positive (nous nous plaçons ici dans le cas stationnaire) :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{T}_n^+ &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{D}^{n-1} \\ \Delta_n &\mapsto (P_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.23)$$

où P_0 est la puissance du signal. L'application ϕ est en fait un difféomorphisme [142]. De plus, nous pouvons exhiber une métrique sur l'espace des parcours, $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{D}^{n-1}$. En effet, considérons l'ensemble \mathcal{T}_n^+ comme une variété Riemannienne dont la métrique dérive d'un potentiel de Kähler donné par $V(\Delta_n) = -\ln(\det(\Delta_n)) - n\ln(\pi e)$. Dans le système de coordonnées donné par les parcours, $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}) = (P_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1})$, cette métrique s'écrit, [?] :

$$ds^2 = -\frac{\partial \ln(\det \Delta_n)}{\partial \bar{\phi}_i \partial \phi_j} d\bar{\phi}_i d\phi_j$$

Avec le système d'équations 1.23, nous avons :

$$\det \Delta_n = P_0^n \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |\Gamma_i|^2)^{n-k} \quad (1.24)$$

d'où

$$ds^2 = -\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_i \partial \phi_j} \left(n \ln P_0 + \sum_{i=1}^{n_1} (n-i) \ln(1 - |\Gamma_i|^2) \right) d\bar{\phi}_i d\phi_j$$

et donc :

$$ds^2 = n \frac{dP_0^2}{P_0^2} + \sum_{i=1}^{n-1} (n-k) \frac{|d\mu_k|^2}{(1 - |\mu_k^2|)^2} \quad (1.25)$$

où l'on reconnaît la métrique sur un produit entre le demi plan supérieur \mathbb{R}_+ et des disques de Poincaré \mathbb{D} qui sont données respectivement par $ds_{\mathbb{R}_+} = n \left(\frac{dx}{x} \right)^2$ et $ds_{\mathbb{D}} = (n-i) \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$. A titre d'exemple la distance entre deux points $a = (P_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$, $b = (Q_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ est donnée par, [146] :

$$d(a, b) = \left(n \left| \ln \left(\frac{P_0}{Q_0} \right) \right|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-k) \tau(\mu_i, \nu_i)^2 \right)^{1/2}$$

avec $\tau(\mu_k, \nu_k) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \left| \frac{\nu_k - \mu_k}{1 - \bar{\mu}_k \nu_k} \right|}{1 - \left| \frac{\nu_k - \mu_k}{1 - \bar{\mu}_k \nu_k} \right|}$. De nombreux et très intéressants travaux, notamment en théorie de l'information s'inscrivent dans ce cadre, [14, 10, 13, 19, 121, 18].

Rappelons ici l'objectif d'une approche géométrique : nous avons vu que les parcours sont des éléments essentiels dans notre analyse. Pour pouvoir manipuler correctement ces objets, il faut tenir compte de leur spécificité. De même que la distance entre deux matrices définies positives n'est pas simplement la distance entre deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la distance entre deux séquences de parcours n'est pas une distance euclidienne.

Par la suite, nous allons étendre ce type de raisonnement et montrer qu'il faut aller plus loin que la simple étude géométrique des parcours, et s'attacher à des objets un plus complexes : les matrices de dilations.

1.4 Théories de la dilation

Maintenant que nous avons présenté les parcours, nous allons voir en quoi ces paramètres sont essentiels pour notre propos. Rappelons que, partant d'un processus aléatoire stationnaire, nous avons identifié un opérateur de déplacement ("shift operator") qui offre une représentation particulièrement simple et compacte de ce processus. Nous allons voir que la théorie de la dilation, dans laquelle interviennent les parcours, englobe l'existence de cet opérateur et permet également d'étendre ces résultats pour des processus non-stationnaires. Cette approche, qui paraît

assez obscure au premier abord, est singulièrement adaptée pour des processus périodiquement corrélés. Après une brève présentation générale de la dilation, nous allons voir comment les parcours introduits plus haut vont nous permettre de disposer de matrices de dilations qui seront dotées d'une structure multiplicative simple. Un premier résultat consistera à établir l'équivalence entre formule de Levinson et formule de Constantinescu. Enfin nous reviendrons sur des applications connexes de la dilation.

1.4.1 Présentation de la dilation

Plaçons nous dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . L'idée la plus simple de la dilation consiste, pour une fonction donnée $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ désigne l'ensemble des opérateurs de \mathcal{H} , à trouver une fonction g à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathcal{K})$, telle que $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ et :

$$f(t) = P_{\mathcal{H}}g(t), \quad t \in \mathcal{I}$$

où $P_{\mathcal{H}}$ désigne la projection orthogonale sur \mathcal{H} .

Ceci devient extrêmement utile lorsque l'on peut choisir une fonction g qui soit plus "simple" que f , plus facilement manipulable. Par exemple, pour un matrice donnée A nous pouvons chercher une matrice B telle que A soit la projection de B , en imposant que B soit unitaire. Le fait d'imposer un caractère unitaire à B nous permet, grâce au calcul fonctionnel, d'en donner une représentation intégrale comme cela est expliqué plus haut (voir également l'annexe B), et la matrice A héritera de cette représentation. Malheureusement tous les choix possibles pour la matrice A ne conviennent pas à cette théorie. En revanche, la dilation est parfaitement adaptée pour certaines classes de matrices, comme les matrices définies positives et particulièrement les matrices Toeplitz positives, comme la matrice Δ_n , eq. (1.11). C'est ce qui a été formalisé par Naimark et Sz-Nagy [133, 135, 65, 144]. Donnons d'abord la forme la plus abstraite de ces résultats, dont la preuve se trouve dans les références citées :

Théorème 1.7 (Dilation de Naimark I). Soit $E : \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une mesure positive à valeur opérateur, c'est-à-dire une application vérifiant, pour toute séquence d'ensemble de Borel $\{B_i\}_i$ de Σ disjoints :

$$\langle E \left(\bigcup_i B_i \right) x, y \rangle = \sum_i \langle E(B_i) x, y \rangle$$

en imposant également que $E(B)$ soit un opérateur positif pour tout B . Alors, il existe un espace de Hilbert \mathcal{K} , un opérateur borné $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K})$ et $F : \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K})$, une mesure positive à valeurs opérateurs tels que :

$$E(B) = V^*(B)F(B)V(B) \quad (1.26)$$

pour toute partie $B \in \Sigma$ où de plus $F(B)$ est un opérateurs auto-adjoint et spectral, c'est-à-dire vérifie $F(B_1 \cap B_2) = F(B_1)F(B_2)$, $\forall B_1, B_2 \in \Sigma$

Ce théorème est illustré par un exemple après le théorème 1.9. Il s'exprime aussi sous la forme :

Théorème 1.8 (Dilation de Naimark II,[65, 88, 62]). Une suite d'opérateurs $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ agissant sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est définie positive, c'est-à-dire vérifie $\sum_{0,0}^{\infty, \infty} \langle R_{i-j}h_i, h_j \rangle \geq 0$ pour toute suite d'éléments de \mathcal{H} $\{h_i\}_i^{\infty}$ à support fini (c'est-à-dire que $\{h_i\}_{i>N} = 0$ à partir d'un rang N), si et seulement si il existe une isométrie U sur un espace de Hilbert \mathcal{K} telle que

$$R_n = P_{\mathcal{H}}U_{|\mathcal{H}}^n \quad (1.27)$$

où $P_{\mathcal{H}}$ désigne la projection orthogonale sur \mathcal{H} . De plus, si

$$\mathcal{K} = \bigvee_{n \geq 0} U^n(\mathcal{H}) \quad (1.28)$$

, où \bigvee désigne la somme non orthogonale des espaces $U^n(\mathcal{H})$ alors U est unique à isomorphisme près.

Le premier théorème porte sur des mesures à valeurs opérateurs alors que le deuxième fait directement intervenir des opérateurs unitaires. Rappelons que le lien entre ces deux notions est, pour U un opérateur unitaire : $U = \int e^{i\lambda} E(d\lambda)$ (voir Annexe).

Nous voyons que la suite des coefficients de corrélations peut être retrouvée en partant d'une seule matrice et de ces puissances successives. Soit-dit en passant, lorsqu'une suite de coefficients de corrélations est donnée, il est possible de la prolonger par ce mécanisme : si nous avons la matrice U correspondant à la séquence des coefficients de corrélations $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$, alors la meilleure approximation au sens de la norme 2 de R_{n+1} est U^{n+1} . Evidemment ce résultat est adapté à un processus stationnaire, et une question légitime consiste à se demander s'il

est possible d'étendre ces résultats pour des processus non-stationnaires. C'est effectivement possible, et la dilation de Naimark prend alors une forme différente, connue sous le nom de *décomposition de Kolmogorov*. Nous avons même le résultat dans le cas général où nous ne considérons pas uniquement une matrice scalaire mais une matrice par blocs, ou alors, de façon équivalente une application A sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ telle que $A(i, j) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$, avec $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite d'espace de Hilbert.

Théorème 1.9 (Décomposition de Kolmogorov, [114, 43, 75]). Soit A un noyau (kernel) défini positif. Alors il existe un espace de Hilbert et une application V sur \mathbb{Z} telle que $V(n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{K})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, et :

- $A(i, j) = V^*(i)V(j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$.
- $\mathcal{K} = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} V(n)\mathcal{H}_n$ (condition de minimalité).

S'il existe un autre espace de Hilbert \mathcal{K}' et une autre application V' vérifiant les mêmes conditions, alors il existe un opérateur unitaire $\Phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ tel que $\Phi V(n) = V'(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Exemple :

Bien que tous ces résultats paraissent quelque peu formels, ce sont bien les facettes d'une même approche. Ils forment en outre un pont direct entre étude d'un signal aléatoire et dilation. En effet, considérons l'exemple pratique suivant [145] : si $\{X_t\}_{t \in T}$ est un processus aléatoire stationnaire défini sur un groupe T , alors il existe une *représentation unitaire* U de T dans le domaine temporel de X telle que, [42] : $X_t = U_t X_e$ (voici de nouveau le shift operator !) où e est l'élément neutre du groupe T . Si l'on note T^* le dual de T , la transformée de Fourier sur le groupe s'écrit :

$$R_\tau = \int_{T^*} [\tau, g] E(dg)$$

où $[\tau, g]$ est la valeur d'un caractère g du groupe T^* en τ . Si $T = \mathbb{R}$, les caractères sont les fonctions $g : x \mapsto e^{2k\pi x}$, $k \in \mathbb{N}$; T^* est isomorphe à \mathbb{R} et l'on retrouve la transformation de Fourier habituelle. D'autre part nous savons d'une part que $R_\tau = \langle X_\tau, X_e \rangle$ où cette fois $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire entre les deux variables aléatoires, et d'autre part qu'il existe une représentation unitaire U_g telle que :

$$R_\tau = \langle X_\tau, X_e \rangle = \langle U_\tau X_e, X_e \rangle = X_e^* U_\tau X_e = \int_{T^*} [\tau, g] X_e^* F(dg) X_e$$

où $F(\cdot)$ est la mesure spectrale de U_g . Par unicité de la mesure de Fourier :

$$E(\Delta) = X_e^* F(\Delta) X_e$$

où nous reconnaissons la formule de dilation de Naimark, ainsi que la formule 1.8. Nous retrouvons les résultats établis plus haut, notamment à l'équation 1.8. De plus cela conforte l'idée suggérée par Masani [104] qui prouve le lien direct entre dilation et shift operator. Nous pouvons apercevoir la puissance de cette théorie et nous saisissons son intérêt dans notre étude : plutôt que d'étudier directement, frontalement le processus, nous allons concentrer nos efforts sur ces matrices de dilations, à l'instar de la théorie de Fourier qui étudie un signal du point de vue spectral et non temporel. Signalons par ailleurs que la théorie de Fourier s'applique difficilement en cas de signal non-stationnaire alors que la théorie de la dilation ne tient pas compte de la stationnarité : si le signal est stationnaire, la théorie de la dilation conduit à la dilation de Naimark ; si le signal est non-stationnaire, elle conduit à la décomposition de Kolmogorov.

Il y a donc deux points de vue sur la dilation : dans le premier, la dilation s'exprime à travers une mesure, dans l'autre elle s'exprime à travers un opérateur. Les deux sont équivalentes. L'intérêt de la dilation est de faire intervenir un opérateur unitaire dont on peut exprimer la mesure.

Enfin, en partant du théorème 1.8 nous voyons que l'application $n \mapsto U^n$ peut s'interpréter comme une représentation unitaire de groupe. Un parallèle fructueux naît entre théorie de la dilation et théorie des représentations, [136].

1.4.2 Construction de la dilation

A présent nous allons voir comment construire la matrice dilation dans le cas de la dilation de Naimark, ou les matrices de dilation dans le cas de la décomposition de Kolmogorov. Nous allons principalement nous baser sur les démonstrations de Constantinescu [43, 12, 45] , car ce sont apparemment les seules qui fournissent une structure aussi explicite et complète des matrices de dilations quelque soit la forme considérée (Naimark ou Kolmogorov). La structure de la dilation

de Naimark apparaît également dans [87, 65, 137]. Plaçons nous dans le cas le plus général d'une matrice par blocs définie positive :

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots & R_{1,n} \\ \overline{R_{1,2}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_{n-1,n} \\ \overline{R_{n,1}} & \cdots & \overline{R_1} & R_{1,1} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas très général, les $R_{i,j}$ sont également des matrices, de même que les parcours $\Gamma_{i,j}$ qui sont alors des *contractions*, c'est-à-dire qu'ils vérifient $\|\Gamma\| \leq 1$. Cela est évident pour un processus multivarié, pour lequel la matrice de corrélation est bien entendue une matrice par bloc. De même, pour les MOPUC que nous avons évoqués plus haut, les coefficients de Verblunsky, donc les parcours, sont des contractions. Lorsque le processus est scalaire, il suffit pour se ramener au cas général de considérer les variables aléatoires du processus stochastique comme des opérateurs de \mathbb{C} vers $L^2(\mathbb{P})$ (où \mathbb{P} est la mesure de probabilité de la variable aléatoire) :

$$\begin{aligned} \hat{X}_n &: \mathbb{C} \longrightarrow L^2(\mathbb{P}) \\ \hat{X}_n \lambda &= \lambda X_n \end{aligned}$$

où le symbole $\hat{\cdot}$ ne sert qu'à marquer la différence entre l'opérateur et le scalaire X_n . Ainsi les éléments de la matrice de corrélation deviennent des opérateurs

$$R_{n,m} = (\hat{X}_n)^* \hat{X}_m$$

Comme nous l'avons vu ci-dessus, il existe une correspondance entre notre matrice Δ_n et l'ensemble de ses parcours :

$$\begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & & R_{1,n} \\ R_{1,2}^* & R_{2,2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & R_{n-1,n} \\ R_{1,n}^* & R_{n-1,1}^* & & R_{n,n} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{1,2} & \Gamma_{1,3} & \cdots & \Gamma_{1,n} \\ 0 & 0 & \Gamma_{2,3} & \Gamma_{2,4} & \cdots & \Gamma_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \Gamma_{n-2,n} \\ & & & & 0 & \Gamma_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Cette correspondance est en fait une bijection. Avant d'écrire explicitement cette relation bijective, définissons l'opérateur de défaut d'une contraction $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ (defect operator) par :

$$D_T = (I - T^*T)^{1/2} \quad (1.30)$$

dont l'adjoint est : $D_{T^*} = (I - TT^*)^{1/2}$. L'espace de défaut (defect space) est $\mathcal{D}_T = \text{range}(D_T) = D_T(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}'$. Davantage d'intuitions sur les opérateurs de défauts sont données en Annexe C.

Opérateur de Julia :

L'opérateur de défaut nous permet d'obtenir une toute première matrice de dilation élémentaire. En effet, si

$$J(\Gamma) = \begin{pmatrix} \Gamma & D_{\Gamma^*} \\ D_{\Gamma} & -\Gamma^* \end{pmatrix}$$

pour $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ une contraction où D_{Γ} désigne son defect operator, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} J(\Gamma)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les rotations élémentaires d'une contraction, appelées les opérateurs de Julia, forment aussi les dilations unitaires de cette contraction. Précisons que $J(\Gamma) : \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_{\Gamma^*} \rightarrow \mathcal{H}' \oplus \mathcal{D}_{\Gamma}$. Dans la mesure où $P_{\mathcal{H}' \cdot | \mathcal{H}}$ est un opérateur d'angle ($P_{\mathcal{H}'}$ désignant la projection orthogonale) et que $P_{\mathcal{H}'} J(\Gamma)|_{\mathcal{H}}$, nous voyons que Γ est en quelque sorte une mesure de l'angle entre \mathcal{H} et \mathcal{H}' .

Théorème 1.10. Pour une famille de contractions (de parcours dans le cas scalaire)

$\{\Gamma_{k,j} \mid k, j = 1, \dots, n, k \leq j\}$, définissons :

- $L_{k,j} = [\Gamma_{k,k+1} \quad D_{\Gamma_{k,k+1}^*} \Gamma_{k,k+2} \quad \dots \quad D_{\Gamma_{k,k+l}^*} \dots D_{\Gamma_{k,j-1}^*} \Gamma_{k,j}]$, une contraction en ligne (voir Annexe C)
- $C_{k,j} = [\Gamma_{j-1,j} \quad \Gamma_{j-2,j} D_{\Gamma_{j-1,j}} \quad \dots \quad \Gamma_{k,j} D_{\Gamma_{k+1,j}} \dots D_{\Gamma_{j-1,j}}]^T$, une contraction en colonne,

$$\bullet G_i(\Gamma_{i,i+l}) = I \oplus \begin{pmatrix} \Gamma_{i,i+l} & D_{\Gamma_{i,i+l}^*} \\ D_{\Gamma_{i,i+l}} & -\Gamma_{i,i+l}^* \end{pmatrix} \oplus I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Gamma_{i,i+l} & D_{\Gamma_{i,i+l}^*} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D_{\Gamma_{i,i+l}} & -\Gamma_{i,i+l}^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

une matrice de rotation élémentaire. C'est une *rotation de Givens*, où $\Gamma_{i,i+l}$ est situé à la position (i, i) .

$$\bullet U_{k,j} = G(\Gamma_{k,k+1})G(\Gamma_{k,k+2}) \cdots G(\Gamma_{k,k+j})(U_{k+1,j} \oplus I).$$

Alors, une matrice (par blocs) $\Delta_{(n)} = (R_{k,j})_{k,j=1}^n$ vérifiant $R_{j,k}^* = R_{k,j}$ est défini positive si et seulement si :

- $R_{kk} \geq 0$ pour tout k ,
- Il existe une famille de contractions $\{\Gamma_{k,j} \mid k, j = 1, \dots, n, k \leq j\}$ telle que :

$$R_{k,j} = B_{k,k}^* (L_{k,j-1} U_{k+1,j-1} C_{k+1,j} + D_{\Gamma_{k,k+l}^*} \cdots D_{\Gamma_{k,j-l}^*} \Gamma_{k,j} D_{\Gamma_{k+1,j}} \cdots D_{\Gamma_{j-1,j}}) B_{j,j} \quad (1.31)$$

où $B_{k,k}$ est la racine carré de $R_{k,k}$ obtenue par décomposition de Cholesky.

Cette formule est démontrée par récurrence dans [43, 140] et conduit à la décomposition de Kolmogorov, alors que dans [137], elle est obtenue en partant directement de la décomposition de Kolmogorov. Dans [88], des résultats similaires sont obtenus grâce à une construction en treillis dont l'algorithme de Burg montre qu'elle est inhérente à l'obtention des parcours, [27]. Mais c'est la forme 1.10 qui donne le plus de détails et qui est la plus exploitable. Pour voir comment se forge l'équivalence 1.29 nous allons l'appliquer sur le cas simple d'une matrice 3×3 . Tout d'abord, deux résultats importants, dont les preuves sont données en Annexe C sont nécessaires.

Théorème 1.11 (Structure élémentaire des opérateurs définis positifs). Soit A et C deux opérateurs positifs. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'opérateur $P = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ est positif.

2. Il existe une unique contraction Γ telle que $B = A^{1/2}\Gamma C^{1/2}$.

Théorème 1.12 (Structure élémentaire des contractions). Les proposition suivantes sont équivalentes :

1. L'opérateur $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_n \end{pmatrix}$ est une contraction.
2. $T_1 = \Gamma_1$ est une contraction, et, pour $i \geq 2$, il existe une unique contraction telle que $T_i = D_{\Gamma_1^*} D_{\Gamma_2^*} \cdots D_{\Gamma_{i-1}^*} \Gamma_i$.

Soit l'opérateur défini positif :

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} \\ R_{1,2}^* & R_{2,2} & R_{2,3} \\ R_{1,3}^* & R_{2,3}^* & R_{3,3} \end{pmatrix}$$

Avec $R_{i,j} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$ $i, j = 1, 2, 3$, et $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ des espaces de Hilbert. En appliquant le théorème C.1 à $\begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} \\ R_{1,2}^* & R_{2,2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} R_{2,2} & R_{2,3} \\ R_{2,3}^* & R_{3,3} \end{pmatrix}$ nous obtenons $R_{1,2} = R_{1,1}^{1/2} \Gamma_{1,2} R_{2,2}^{1/2}$ et $R_{2,3} = R_{2,2}^{1/2} \Gamma_{2,3} R_{3,3}^{1/2}$. Puis, en appliquant toujours le théorème C.1 cette fois-ci sur la matrice Δ_3 avec $A = R_{1,1}$, $B = \begin{pmatrix} R_{1,2} & R_{1,3} \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} R_{2,2} & R_{2,3} \\ R_{2,3}^* & R_{3,3} \end{pmatrix}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_{1,2} & R_{1,3} \end{pmatrix} &= R_{1,1}^{1/2} \begin{pmatrix} \Gamma'_1 & \Gamma'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2,2}^{1/2} & \Gamma_{2,3} R_{3,3}^{1/2} \\ 0 & D_{\Gamma_{2,3}} R_{3,3}^{1/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{1,1}^* \Gamma'_1 R_{2,2}^* & R_{1,1}^{1/2} \left(\Gamma'_1 \Gamma_{2,3} + \Gamma'_2 D_{\Gamma_{2,3}} R_{3,3}^{1/2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Le détail de la décomposition de Cholesky avec le defect operator est donné en Annexe C). D'après le théorème 1.12, $\begin{pmatrix} \Gamma'_1 & \Gamma'_2 \end{pmatrix}$ étant une contraction, alors nous pouvons écrire $\Gamma'_1 = \Gamma_{1,2}$ par unicité, et $\Gamma'_2 = D_{\Gamma_{1,2}^*} \Gamma_{1,3}$. En conclusion nous avons :

$$R_{1,2} = R_{1,1}^{1/2} \Gamma_{1,2} R_{2,2}^{1/2} \tag{1.32}$$

$$R_{2,3} = R_{2,2}^{1/2} \Gamma_{2,3} R_{3,3}^{1/2} \tag{1.33}$$

$$R_{1,3} = R_{1,1}^{1/2} \left(\Gamma_{1,2} \Gamma_{2,3} + D_{\Gamma_{1,2}^*} \Gamma_{1,3} D_{\Gamma_{2,3}} \right) R_{3,3}^{1/2} \tag{1.34}$$

Le théorème 1.10 procède exactement de la même façon. Avec l'interprétation angulaire des parcours évoquée lors de la présentation de l'opérateur de Julia, nous déduisons de l'équation

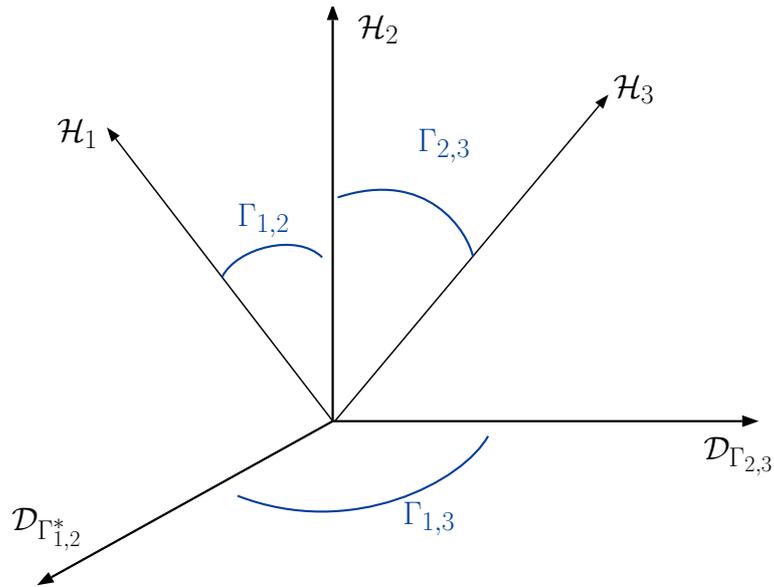


Figure 1.12.: Les parcours induisent un changement de repère de l'espace généré par $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$

(1.32) que $\Gamma_{1,2}$ mesure l'angle entre \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_1 ; de l'équation (1.33) que $\Gamma_{2,3}$ mesure l'angle entre \mathcal{H}_3 et ϵ ; et enfin de l'équation (1.34) que $\Gamma_{1,3}$ mesure l'angle entre $\mathcal{D}_{\Gamma_{2,3}}$ et $\mathcal{D}_{\Gamma_{1,2}^*}$, Fig. 1.12.

La structure multiplicative de la matrice U intervenant dans le théorème 1.10 est d'un intérêt certain : nous allons voir que nous pouvons sur ce même modèle former la dilation de Naimark ou la décomposition de Kolmogorov selon que la matrice de départ Δ_n soit Toeplitz ou non.

Cas où Δ_n est Toeplitz

Soit :

$$W = G_1(\Gamma_1)G_2(\Gamma_2) \cdots G_j(\Gamma_j) \cdots \quad (1.35)$$

Nous obtenons alors [12] :

$$W = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & D_{\Gamma_1^*} \Gamma_2 & D_{\Gamma_1^*} D_{\Gamma_2^*} \Gamma_3 & D_{\Gamma_1^*} D_{\Gamma_2^*} D_{\Gamma_3^*} \Gamma_4 & \cdots \\ D_{\Gamma_1} & -\Gamma_1^* \Gamma_2 & -\Gamma_1^* D_{\Gamma_2^*} \Gamma_3 & -\Gamma_1^* D_{\Gamma_2^*} D_{\Gamma_3^*} \Gamma_4 & \cdots \\ 0 & D_{\Gamma_2} & -\Gamma_2^* \Gamma_3 & -\Gamma_2^* D_{\Gamma_3^*} \Gamma_4 & \cdots \\ 0 & 0 & D_{\Gamma_3} & -\Gamma_3^* \Gamma_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & D_{\Gamma_4} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Ce qui conduit à [88, 12, 62] :

$$R_{i,j} = R_{j-i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} W^{j-i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Autrement dit, cette matrice W n'est rien d'autre que la dilation de Naimark. La matrice de dilation de Naimark a donc une simple structure multiplicative. W appartient à la classe de matrices dites *Hessenberg supérieures* à coefficients sous-diagonaux positifs (de nombreuses applications impliquent l'utilisation de telle matrices, notamment [76, 8, 77]). Le calcul fonctionnel nous indique que la mesure spectrale du shift operator, qui s'identifie à la dilation de Naimark, correspond aux projecteurs propres de cette matrice. Enfin, précisons le domaine de W , c'est à-dire l'espace de Hilbert sur lequel W agit. Si :

$$H_m = \bigvee_{n=0}^{m-1} W^n(\mathcal{H}), \quad \mathcal{D}_m = H_{m+1} \ominus H_m$$

alors W agit sur $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3 \cdots$. Ceci correspond juste à une orthogonalisation de la condition de minimalité de la dilation de Naimark. Il est d'ailleurs possible de retrouver la forme de W à partir de ce seul fait là [65].

$$\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{1,2} & \Gamma_{1,3} & \cdots & \Gamma_{1,j} & \cdots \\ 0 & 0 & \Gamma_{2,3} & \Gamma_{2,4} & \cdots & \Gamma_{2,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Gamma_{i,i+1} & \Gamma_{i,i+2} & \cdots & \Gamma_{i,i+j} & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{W_i}$$

Figure 1.13.: La matrice W_i s'obtient à partir de la ligne i de la matrices des parcours. Chaque parcours $\Gamma_{i,j}$ donne un angle d'une rotation de Givens.

Cas où Δ_n n'est pas Toeplitz.

Si maintenant la matrice Δ_n n'est plus Toeplitz, alors la famille de parcours est doublement indexée, la conséquence étant qu'une seule matrice de dilation W ne suffit plus et qu'il faut donc considérer plusieurs matrices de dilations W_i :

$$W_i = G(\Gamma_{i,i+1})G(\Gamma_{i,i+2}) \cdots G(\Gamma_{i,j}) \quad (1.37)$$

W_i s'obtient à partir de la ligne i de la "matrices des parcours", eq. 1.29, Fig. 1.13 . De cette façon là, la décomposition de Kolmogorov 1.9 s'écrit comme :

$$V(n) = W_0 W_1 \cdots W_{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad n > 0 \quad (1.38)$$

c'est-à-dire comme le produit des matrices de dilation réduites à leur première colonne. Nous vérifions bien que [43], théorème 6.1 :

$$V(i)^* V(j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} W_i W_{i+1} \cdots W_{j-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc retenir que les parcours permettent de construire la matrice de dilation d'un processus stationnaire, ou les matrices de dilations d'un processus non-stationnaire. Ces matrices

ont une structure multiplicative composée de matrices de rotations élémentaires. Ainsi, nous pouvons donner une forme précise au shift operator et caractériser le processus sous-jacent en étudiant ces matrices.

Formule de Constantinescu et procédure de Levinson

La structure de la matrice de dilation nous a conduit à un premier résultat :

Théorème 1.13. La formule de Constantinescu 1.10 revient à faire un algorithme de Levinson sur la matrice de dilation 1.36.

Pour prouver cela, étudions un peu plus en détail la structure de cette matrice de dilation. Rappelons nous que pour établir les équations de Yule-Walker nous sommes partis de l'approximation linéaire suivante : $X_t = -\sum_{i=1}^m \alpha_i X_{t-i} + \epsilon_t^m$, où ϵ est un bruit blanc gaussien. ϵ_t^m est appelé l'innovation du processus au temps t , à l'ordre m , dans le sens où cela représente la quantité aléatoire qui est apportée au temps t et qui ne peut pas être connue par simple inspection du passé. Il est possible d'appliquer ces mêmes principes à la dilation de Naimark : la forme théorique de la dilation de Naimark est de taille infinie. Nous pouvons donc nous demander quelle est l'erreur commise lorsque nous limitons cette matrice à une taille $n \times n$. Cette erreur correspond à une "prédiction en avant" (forward prediction) faite sur W et nous avons [62] :

$$W^n h - P_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_n} W^n h = \left(0, 0, \dots, 0, \mathcal{D}_n \mathcal{D}_{n-1} \dots \mathcal{D}_1 h, 0, \dots \right) \quad (1.39)$$

où $h \in \mathcal{H}$, $P_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_n}$ désigne la projection orthogonale sur les $n + 1$ èmes ligne de la matrice, et où l'élément non-nul du vecteur de droite est situé à la $n + 1$ ème place. Notons le vecteur de droite sous la forme plus compacte : $\phi_n \epsilon_n h$ avec $\epsilon = \mathcal{D}_n \mathcal{D}_{n-1} \dots \mathcal{D}_1$ et ϕ_n une application qui place un nombre à la $n + 1$ ème position d'un vecteur nul. De même, pour la prédiction "rétrograde" (backward prediction), nous avons :

$$h - P_{\bigcup C_n} h = \phi_n^* \epsilon_n^* h \quad (1.40)$$

avec $\epsilon_n^* = \mathcal{D}_n^* \mathcal{D}_{n-1}^* \cdots \mathcal{D}_1^*$ et C_n qui désigne les n premières colonnes de W .

Toujours d'après [62], la recursion de Levinson en terme de matrice de dilation s'écrit :

$$\epsilon_n^* \Gamma_{n+1} \epsilon_n h = R_{n+1} + \sum_{i=1}^n R_i A_{n,i-1} h \quad (1.41)$$

où les $A_{n,i}$ désignent les coefficients de régressions. Si maintenant nous réécrivons cette équation sous la forme :

$$R_{n+1} = \epsilon_n^* \Gamma_{n+1} \epsilon_n h - \sum_{i=1}^n R_i A_{n,i-1} h \quad (1.42)$$

et que nous la comparons avec la formule du théorème 1.10, nous remarquons que la récursion de Levinson sur la dilation de Naimark donne bien l'équivalence entre matrice définie-positive et parcours. \square

Ce résultat a des conséquences importantes car, pour une application pratique, nous n'allons pas utiliser la ou les matrices de dilations de taille infinie, mais nous allons les tronquer, c'est-à-dire les réduire à une taille $n \times n$. Cela conduit à des matrices de rotations de taille n , c'est-à-dire appartenant à $SO(n)$ ou $SU(n)$, et l'erreur commise reste (potentiellement) quantifiable.

1.4.3 Théories connexes impliquant la dilation

Retour sur les polynômes orthogonaux

Les matrices de dilations étant élaborées à partir de séquences de parcours, il n'est pas étonnant de les retrouver dans de nombreux domaines. Ainsi, elles interviennent naturellement lors de l'étude des polynômes orthogonaux dont nous avons vu qu'ils produisaient de telles séquence de parcours. Dans [9] un lien est perceptible entre polynômes orthogonaux et matrices de dilations : à partir d'une séquence de parcours $\{\Gamma_n\}_n$, construisons la matrice de Hessenberg $H_n = G_1(\Gamma_1)G_2(\Gamma_2) \cdots G_{n-1}(\Gamma_{n-1})\hat{G}_n(\Gamma_n)$, avec G_i la rotation de Givens définie plus haut et $\hat{G}_n(\Gamma_n) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & -\Gamma_n \end{pmatrix}$. Nous retrouvons les polynômes orthogonaux 1.22, [77] par :

$$\Phi_j(z) = \det(zI_j - H_j)$$

Les valeurs propres de H_n correspondent donc aux racines des polynômes orthogonaux Φ_n . En se servant de cette correspondance, Ammar [9] donne une procédure pour en trouver les racines. Etant donné que les valeurs propres de W portent aussi la mesure du processus, un parallèle est établi entre processus stochastiques et polynômes orthogonaux. Le chemin inverse est fait dans [6], où les auteurs partent d'un ensemble de nombres $\{\lambda_k\}$ donnés et cherchent à déterminer la matrice de Hessenberg supérieure unitaire dont les valeurs propres coïncident avec cette séquence de nombres.

Dans [129, 128], deux types de matrices construites à partir des polynômes orthogonaux ou des parcours sont misent en avant : les matrices CMV et GGT. Les matrices GGT sont définies par : $(GGT)_{i,j} = \langle \Phi_i, z\Phi_j \rangle$, $z \in \mathbb{C}$. Les matrices CMV sont elles formées par : $CMV = \text{Diag}(J(\Gamma_0), J(\Gamma_2), J(\Gamma_4), \dots) \text{Diag}(J(\Gamma_1), J(\Gamma_3), \dots)$ où $J(\Gamma_i)$ désigne l'opérateur de Julia, et $\text{Diag}(\cdot, \cdot, \dots)$ est la matrice diagonale par bloc. Ces structures sont très proches des matrices de dilations.

Matrices de Hessenberg unitaires et restitution d'harmoniques

Les matrices de Hessenberg unitaires sont également employées pour pouvoir retrouver la signature d'un mélange de sinusoides noyées dans du bruit. Dans [63, 64] les auteurs partent d'un modèle de signal de la forme $X_t = S_t + N_t$ où S_t désigne le signal d'intérêt, de la forme $S_t = \sum_{i=1}^k A_i \cos(n\omega_i + \phi_i)$ (où les ϕ_i indépendants et identiquement distribués sur $[0, 2\pi]$ sont les inconnues dont les valeurs doivent être retrouvées) et N_t le bruit. Après quelques transformations impliquant notamment des factorisations extérieure dans un espace de Hardy, les auteurs arrivent à une formule de type dilation de Naimark. Puis ils montrent comment l'identification des valeurs propres de la matrice de dilation permet de retrouver les phases ϕ_i . Une approche identique est adoptée dans [52].

Spectre évolutif

Dans [56]-définition 1, les auteurs définissent le spectre évolutif instantané d'un processus comme suit :

Définition 1.2. Soit $\beta(\cdot, \cdot)$ la fonction de corrélation partielle du processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (c'est-à-dire ces parcos, que nous avons noté Γ_\cdot dans le reste de ce texte). Le spectre évolutif instantané de $\{X_t\}_t$ est défini comme étant l'ensemble des mesures $\{dF_t(\lambda), t \in \mathbb{Z}\}$ sur $[-\pi, \pi]$ où, pour tout t , $dF_t(\lambda)$ est la mesure spectrale associée à $\beta_t(\cdot)$, où $\beta_t(\cdot)$ est donné par :

$$\beta_t(k) = \overline{\beta_t(-k)} = \beta(t, t - k), \quad k \geq 0$$

Une façon d'interpréter la mesure spectrale d'une séquence de parcos est de considérer la mesure des polynôme orthogonaux associés. Pour les processus stochastiques, il faut considérer eq. 1.7 et eq. 1.8. Au vu des précédents développements, nous confirmons que les matrices de dilations W_i représentent effectivement ce spectre évolutif instantané, dans la mesure où chaque matrice W_i est construite à partir d'une séquence de parcos.

Retour sur l'entropie

Enfin, remarquons qu'avec les instruments de la dilation que nous avons présentés plus haut, nous pouvons exprimer les relations entre entropie et mesure telles que présentées à la sous-section 1.3.3. Pour cela nous allons reprendre un exemple simple pour illustrer le caractère très général de la dilation. Soit une mesure F sur le cercle unité \mathbb{T} , c'est-à-dire une application linéaire positive $F : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{T} et \mathcal{H} un espace de Hilbert. Les coefficients de Fourier de F , $S_n(F) = S_n = F(\chi_n)$ où $\chi_n(e^{it}) = e^{int}$ définissent une 1-forme Toeplitz $T(F) = \{S_n\}_{n=1}^\infty$. A cette forme Toeplitz nous pouvons donc associer une séquence de parcos $\{\Gamma_i\}_i$ selon les développements précédents. Un processus Gaussien à valeurs dans \mathcal{H} sera entièrement caractérisé par cette forme Toeplitz, T , associée à

la mesure F (ou de façon équivalente à la densité spectrale $f = \frac{dF}{dt}$). A présent, si l'on définit l'entropie de ce processus Gaussien par :

$$H = \frac{-1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \left(\det \frac{dF}{dt}(t) dt \right)$$

Alors, il est prouvé dans [44, 12] que

$$\exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left(\det \frac{dF}{dt} dt \right) \right) = \prod_{i=1}^{\infty} \det D_{\Gamma_i}^2$$

(rappelons que $D_{\Gamma^*} = (I - \Gamma\Gamma^*)$ est l'opérateur de défaut associé au parcor Γ) soit :

$$\exp(-2H) = \prod_{i=1}^{\infty} \det D_{\Gamma_i}^2 \tag{1.43}$$

Pour rendre cette formule plus explicite, considérons un cas scalaire. Si la séquence de parcors est scalaire, alors elle peut être associée à la mesure correspondant au polynôme orthogonal dont elle est issue. Notons $\frac{dF}{dt}$ cette mesure. Alors l'expression ci-dessus se lit :

$$\exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{dF}{dt}(t) dt \right) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - |\Gamma_i|^2)$$

Cette formule est à comparer avec celle mise en avant par Barbaresco [16].

Autres theories

L'énumération ci-dessus n'est pas exhaustive tant les matrices de dilations, les parcors et les matrices de Hesenberg apparaissent dans de nombreux domaines. Citons notamment la représentation des processus en espaces d'états (state-space) qui consiste à introduire une variable latente, [65, 88], cette représentation étant souvent associée à un filtrage en treillis inhérent à la définition des parcors [87, 98, 125]; une approche de l'information quantique par une reparamétrisation des application complètement positive selon une démarche analogue à celle de Constantinescu [139], l'étude des flag manifold [7], des Schur Flow [8]...

1.5 Résumé et problématique

Les processus stochastiques peuvent donc être étudiés au travers de leur shift operator. Ce shift operator permet l'étude harmonique du processus car il y a équivalence entre mesure de l'opérateur et mesure du processus. Nous avons montré qu'il est possible d'obtenir une expression de ce shift operator sous la forme d'une matrice de Hessenberg supérieure. La construction des matrices de dilations repose sur des coefficients particuliers que nous avons nommés parcours. Ces coefficients interviennent dans un grand nombre de domaines, sous des dénominations parfois différentes : paramètres de Schur, séquences de choix, paramètres de Verblunsky, coefficients de réflexion...

Lorsque le processus sous-jacent est stationnaire, la théorie de la dilation conduit à la dilation de Naimark. Lorsque le processus est non-stationnaire, la structure de la dilation s'étend facilement et conduit à un ensemble de matrices de dilation et à la décomposition de Kolmogorov. En particulier, lorsque nous considérons un processus périodiquement corrélé, la séquence des matrices de dilation est elle-même périodique.

Le fait intéressant est que l'on peut munir l'ensemble des séquences de parcours d'une géométrie, ce qui permet par exemple de donner une mesure de dissemblance entre deux séries de parcours grâce à une distance Riemannienne, d'interpoler entre deux ou plusieurs séquences de parcours ou bien de calculer une séquence de parcours moyenne. Dans ce cadre là, les propriétés du processus sous-jacent s'observent dans cet espace géométrique. La question que nous posons alors est tout d'abord de savoir si il est possible de développer une approche géométrique impliquant les matrices de dilations, étant donné que ces matrices portent l'information spectrale du processus. Ensuite, nous nous demanderons s'il est possible d'aller plus loin que cette vision géométrique, et de considérer des aspects topologiques induits par les matrices de dilation. Nous souhaitons donc à la fois donner un cadre théorique de manipulation de ces matrices, ainsi que des applications plus concrètes, en mettant en avant certains indicateurs qui permettront de caractériser en profondeur un processus stochastique périodiquement corrélé.

Interpretation des processus périodiquement corrélés comme des éléments d'un groupe de Lie.

2.1 Rappels et position du problème

Dans le chapitre introductif nous avons montré qu'il est possible de faire correspondre à un processus T-PC un ensemble de matrices de dilations $\{W_i\}_i$, de sorte que l'application $i \mapsto W_i$ soit périodique de période T . Ces matrices de dilations sont des matrices de rotations et à ce titre appartiennent au groupe spécial orthogonal $SO(n)$ ou $SU(n)$ lorsqu'elles sont de taille n , c'est-à-dire lorsqu'elles sont bâties avec des séquences de n parcours. Nous souhaitons pouvoir analyser, caractériser et manipuler des processus T-PC par le biais de leurs matrices de dilations. Pour cela nous nous intéressons d'abord à la trajectoire formée par ces matrices, dont nous avons une observation partielle, Fig. 2.1. De plus rappelons que nous étudions une série temporelle qui peut être observée à plusieurs échelles : mensuelle, hebdomadaire, quotidienne... Plus l'échelle d'observation se réduit, plus le nombre de matrices de dilations augmente, car une périodicité de deux mois est équivalente à une périodicité de 60 jours et donc génère 60 matrices de dilations, et ainsi de suite. En affinant l'échelle d'observation, la trajectoire formée par les matrices de dilations se rapproche de plus en plus d'une trajectoire continue. Cette trajectoire réside dans le groupe $SO(n)$ ou $SU(n)$ et, du fait de la périodicité du processus, est fermée. Ainsi, la théorie de la dilation nous permet d'associer un processus T-PC à une trajectoire particulière sur des groupes qui ont en plus la particularité d'être des groupes de Lie. Pour manipuler de tels objets, nous devons nous doter d'un cadre géométrique adéquat. En effet, si nous souhaitons comparer deux de ces objets entre eux, c'est-à-dire comparer deux courbes sur un groupe de Lie, il est nécessaire de disposer d'une mesure de distance entre ces objets. De même si nous souhaitons faire une moyenne, au sens de Fréchet, entre plusieurs objets pour exhiber un comportement

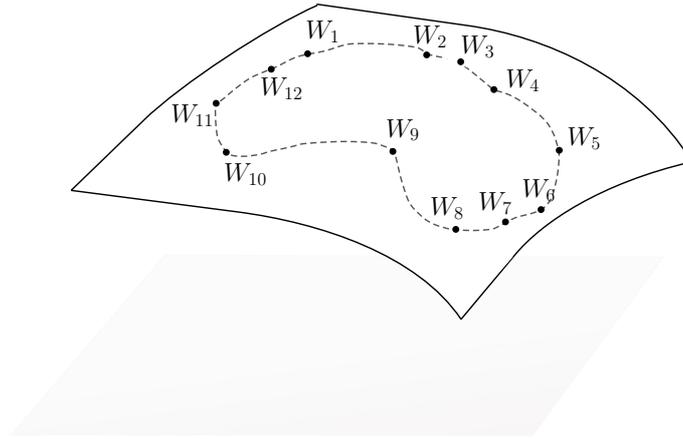


Figure 2.1.: Illustration d'une trajectoire fermée échantillonnée formée par des matrices de dilations sur $SO(n)$ ou $SU(n)$. Cela matérialise l'évolution temporelle de la mesure du processus PC.

moyen. Le cadre théorique global dans lequel nous nous plaçons est celui de l'étude des courbes sur une variété [11, 108, 131, 20, 22, 150, 23, 21, 38, 132]. Il est intéressant de noter que ce traitement géométrique s'inscrit dans la droite ligne de la géométrisation des parcours d'une part (§1.3.3), [19, 17, 16]; et poursuit d'autre part les développements de l'étude des courbes sur variétés induites par les parcours, [32, 33, 97, 121]. En combinant la structure de la dilation mise en avant par Constantinescu et l'étude des courbes et des formes sur variétés nous allons prouver dans cette partie que les processus non-stationnaires peuvent être vus comme des éléments d'un certain groupe de Lie.

2.2 Espace des courbes sur une variété induite par la dilation

2.2.1 Préliminaires : quelques rappels sur les groupes de Lie

Commençons par quelques préliminaires pour illustrer les avantages que nous avons à nous positionner dans un groupe de Lie. Une métrique sur un groupe de Lie G est dite invariante à gauche si :

$$\langle u, v \rangle_b = \langle (dL_a)_b u, (dL_a)_b v \rangle_{ab}$$

où $(dL_a)_b$ est la différentielle (tangent map) de la translation à gauche $L_a(\cdot)$ au point b . Une métrique invariante à droite se définit de la même façon. Une métrique qui est à la fois invariante

à gauche et à droite est dite bi-invariante. Un espace de Lie muni d'une métrique bi-invariante possède de nombreuses propriétés intéressantes que nous allons exploiter. Citons par exemple, [91] :

- Les géodésiques passant par e , l'élément identité, sont les courbes intégrales $t \mapsto \exp(tu)$, $u \in \mathfrak{g}$, où l'on désigne par \mathfrak{g} l'algèbre de Lie. Ce sont les sous-groupes à un paramètre. Grâce aux translations à droite et à gauche, les géodésiques passant par n'importe quel point $a \in G$ sont les versions translattées des géodésiques passant par e :

$$\gamma(t) = L_a(\exp(tu)), \quad u \in \mathfrak{g} \quad (2.1)$$

avec bien sûr

$$\gamma'(0) = (dL_a) \exp(u) \quad (2.2)$$

- La connection de Levi-Civita est donnée par : $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.
- Le tenseur de courbure est donné par : $R(u, v)w = \frac{1}{4}[[u, v], w]$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de Lie.

Voyons ce que deviennent ces formules lorsque la variété de base est spécifiquement $SO(n)$: la forme de Killing B d'une algèbre de Lie est une forme bilinéaire symétrique $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $B(u, v) = \text{tr}(ad(u) \circ ad(v))$, où $\text{tr}(\cdot)$ désigne la trace et ad la représentation adjointe du groupe, c'est-à-dire l'application $ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ telle que, pour tout $a \in G$ $ad_a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est l'isomorphisme linéaire défini par $ad_a = d(R_a^{-1} \circ L_a)_e$, R_a étant la translation à droite. Si nous supposons de plus que B est définie négative, alors $-B$ induit une métrique bi-invariante sur G . De plus la courbure de Ricci est donnée par $Ric(u, v) = -\frac{1}{4}B(u, v)$.

L'algèbre de Lie de $SO(n)$ est l'ensemble des matrices antisymétriques vérifiant : $M^T = -M$. La forme de Killing sur $SO(n)$ est donnée par $B_{so(n)} = (n-2)\text{tr}(XY)$, et nous avons $-B_{so(n)} = (n-2)\text{tr}(XY^T)$ comme conséquence de l'antisymétrie. Cette forme induit donc une métrique bi-invariante, qui est celle qui doit être injectée dans les équations définissant la métrique sur l'espace des courbes. Dans la suite de ce chapitre, l'espace de base sur lequel nous nous plaçons est $SO(n)$ muni de sa métrique bi-invariante.

2.2.2 Cadre de travail général

Nous nous intéressons donc aux courbes reposant sur une variété, et plus précisément sur un groupe de Lie, qui est à la fois un groupe et une variété différentielle, dans laquelle les opérations de groupe (inversion et multiplication) sont différentiables. Notons c une telle courbe : $c : [0, 1] \rightarrow SO(n)$. Nous considérons d'abord le cas où c est continue, et nous reviendrons sur le cas des courbes discrètes dans une seconde partie. Pour étudier la structure géométrique de ces objets, considérons l'ensemble des courbes de $SO(n)$ (que nous désignerons par espace de base) dont la vitesse ne s'annule pas : $\mathcal{M} = \{c \in C^\infty([0, 1], SO(n)) : c'(t) \neq 0 \ \forall t\}$. C'est en fait une sous-variété de $C^\infty([0, 1], SO(n))$. Une courbe c est alors un point particulier de \mathcal{M} . L'espace tangent en un point c (c'est-à-dire en une courbe c) est donné par

$$T_c\mathcal{M} = \left\{ v \in C^\infty([0, 1], TSO(n)) : v(t) \in T_{c(t)}SO(n) \right\} \quad (2.3)$$

où $TSO(n)$ désigne le fibré tangent de l'espace de base $SO(n)$. Remarquons que par cette définition, un vecteur tangent est une courbe dans le fibré tangent de $SO(n)$ (voir le théorème 5.6 dans [93]). Dans une variété, l'expression des distances (et par conséquent celle des géodésiques) dépendant de la métrique choisie, nous devons donc spécifier cette métrique. Lorsque nous comparons deux courbes, il est naturel de définir une distance entre ces courbes qui ne dépendent pas de leurs paramétrisations. Par exemple si nous avons deux courbes c_0 et c_1 identiques à la seule différence que c_1 passe par les mêmes points que c_0 mais avec des vitesses différentes, alors nous voulons une distance $d(c_0, c_1)$ entre c_0 et c_1 qui soit nulle : $d(c_0, c_1) = 0$. Lorsque la courbe est discrétisée, reparamétriser une courbe revient à changer l'échantillonnage de cette courbe, Fig. 2.2. De façon formelle, une reparamétrisation consiste en un difféomorphisme croissant $\phi \in \mathcal{D} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ agissant sur la courbe par la droite par composition. En d'autres termes, nous posons comme conditions que la métrique Riemannienne g sur \mathcal{M} soit invariante par reparamétrisation ϕ , c'est-à-dire vérifie :

$$g_{c \circ \phi}(u \circ \phi, v \circ \phi) = g_c(u, v) \quad (2.4)$$

Pour tout $c \in \mathcal{M}$, $u, v \in T_c\mathcal{M}$ et $\phi \in \mathcal{D}$. Nous insistons sur le fait que g est une métrique sur \mathcal{M} , l'espace des courbes sur $SO(n)$ et non sur $SO(n)$ lui-même. En termes de distances la condition sur la métrique devient :

$$d_{\mathcal{M}}(c_0 \circ \phi, c_1 \circ \phi) = d_{\mathcal{M}}(c_0, c_1) \quad (2.5)$$

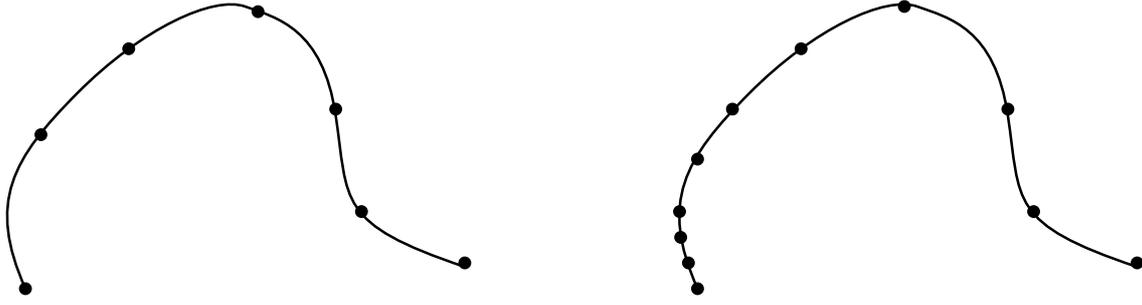


Figure 2.2.: Exemple de reparamétrisation d'une courbe. Ici cela consiste à changer la discrétisation de la courbe.

où $d_{\mathcal{M}}$ désigne la distance sur \mathcal{M} correspondante à la métrique g . Cette propriété d'invariance induit une relation d'équivalence entre les points de \mathcal{M} :

$$c_0 \underset{\phi}{\sim} c_1 : \exists \phi \in \mathcal{D} : c_0 = c_1 \circ \phi \quad (2.6)$$

A partir de cette relation d'équivalence, nous obtenons un espace quotient, qui est constitué par l'ensemble des classes d'équivalences, et que nous nommons espaces des formes (shape space) :

$$\mathcal{S} = \mathcal{M} / \sim, \text{ ou } \mathcal{S} = \mathcal{M} / \mathcal{D} \quad (2.7)$$

Nous pouvons en déduire une distance sur l'espace des formes à partir de celle définie sur \mathcal{M} :

$$d_{\mathcal{S}}([c_0], [c_1]) = \inf_{\phi \in \mathcal{D}} d_{\mathcal{M}}(c_0, c_1 \circ \phi) \quad (2.8)$$

où $[c_0], [c_1]$ sont respectivement des représentants des classes d'équivalences de c_0 et c_1 . Il est alors possible de démontrer que cette distance est indépendante du choix des représentants, [148, 20].

Nous devons ici prendre quelques précautions : bien que \mathcal{M} soit une sous-variété de la variété de Fréchet $\mathcal{C}^{\infty}([0, 1], SO(n))$ comme cela est montré dans [106], théorème 10.4, l'espace des formes, \mathcal{S} n'est pas une variété à proprement parlé et la structure de fibré principal $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}$ n'est pas formellement définie. Cependant une structure de variété peut être obtenue si nous nous limitons aux immersion libres, [109]. La métrique définie sur l'espace des formes étant invariante par reparamétrisation, elle garde sa valeur le long des "fibres" (le point d'origine étant par ailleurs fixe). Davantage d'explications sur les submersions Riemannienne sont disponibles dans [107]. Etant donné que les lacets sont au coeur de notre intérêt, nous définissons l'ensemble :

$$\mathcal{M}^c = \{c \in \mathcal{C}([0, 1], SO(n)) : c'(t) \neq 0, c(0) = c(1)\} \quad (2.9)$$

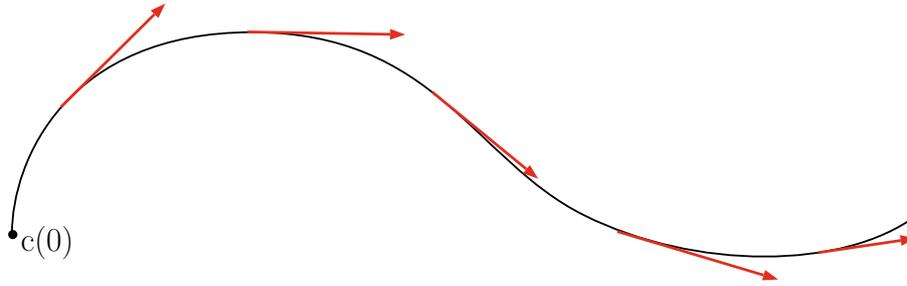


Figure 2.3.: La SRV s'appuie sur une représentation des courbes par leurs vecteurs vitesses.

La condition de fermeture de la courbe impose seulement que le premier et le dernier point de la courbe soient égaux, mais il n'y a pas a priori d'égalité des dérivées premières de la courbe en ces points. Pour pallier cela \mathcal{M}^C devient :

$$\mathcal{M}^{c^+} = \{c \in \mathcal{C}([0, 1], SO(n)) : c'(t) \neq 0, c(0) = c(1), c'(0) = c'(1)\} \quad (2.10)$$

Une autre façon de représenter une courbe est de la décrire par son point d'origine et son vecteur vitesse normalisé en chaque instant t , Fig. 2.3. C'est ce que l'on appelle la représentation par la fonction racine carrée de la vitesse, que nous nommerons SRV dans la suite (pour "square root velocity"), [131]. Il existe en fait plusieurs façons différentes de définir la SRV. Une définition des plus générales est la suivante :

$$\begin{aligned} SRV : \mathcal{M} &\rightarrow SO(n) \times T\mathcal{M} \\ c &\rightarrow \left(c(0), q = \frac{c'}{\sqrt{\|c'\|}} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Seulement, nous voudrions tirer avantage du fait que notre espace de base soit un groupe de Lie, et qu'alors il suffit d'effectuer les calculs dans l'algèbre de Lie, c'est-à-dire dans l'espace tangent à l'unité puis de les transporter par la suite. Dans cette section, nous noterons $G = SO(n)$ pour insister sur la structure de groupe, et g un élément du groupe. De même que dans [39, 38], nous nous restreignons aux courbes commençant à l'identité, le cas général s'obtenant par translation à gauche ou à droite de ce cas particuliers comme expliqué ci-dessus. Dans cette optique nous allons plutôt utiliser la SRV transportée (TSRV), qui n'est rien d'autre que la SRV qui a été transportée par rapport à un point de référence. Différentes versions en sont données dans [20, 39, 150] selon le point de référence considéré. Dans notre situation, les courbes commencent à l'identité et c'est donc l'identité que nous choisissons comme point de référence. Pour transporter la SRV nous allons utiliser la translation à droite définie sur le groupe de Lie $SO(n)$ (nous pourrions tout aussi bien utiliser les translations à gauches). A cause de la

courbure non nulle que génère la métrique bi-invariante, les translations droites ou gauche, qui ne dépendent pas de la courbe selon laquelle on transporte, ne définissent pas un transport parallèle pour la métrique bi-invariante. Seules les propriétés découlant de l'isométrie de ces translations seront utilisées. Cela revient à choisir une base dans l'algèbre de Lie et à exprimer la SRV dans cette base, et donc à identifier l'espace tangent en un point avec l'espace tangent en l'identité. Ceci justifie la forme suivante pour la TSRV :

$$\begin{aligned}
 TSRV : \mathcal{C}^\infty([0, 1], G) &\longrightarrow SO(n) \times \{q \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathfrak{g}), q(t) \neq 0, \forall t \in [0, 1]\} \\
 TSRV(c)(t) = (c(0), q(t)) &= \left(c(0), \frac{R_{c(t)^*}^{-1}(c'(t))}{\sqrt{\|c'(t)\|}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

où \mathfrak{g} désigne l'algèbre de Lie ; R la translation à droite sur le groupe : $R_{g_1}(g_2) = g_2g_1$; $R_{g^*} = T_e R_g$ est la différentielle à l'identité (c'est l'équivalent de la dérivée sur les manifold souvent notée dR_g), $\|\cdot\|$ est une norme induite par une métrique invariante à droite sur G ; et enfin $T_c^{c(t) \rightarrow I}$ est le transport parallèle de $c(t)$ à l'identité. Une courbe est donc représentée comme étant un élément du fibré tangent $(c(0), q(t)) \in \mathcal{M} \times T\mathcal{M}$ (rappelons nous que q est une courbe dans le fibré tangent), et $c(0)$ est l'identité du groupe de Lie. L'inverse de la SRV est simple à obtenir : pour tout $q \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], T\mathcal{M})$, il existe une unique courbe c telle que $F(c) = q$ et $c(t) = \int_0^t q(r) \|q(r)\| dr$ où $\|\cdot\|$ est une norme dans $SO(n)$. Cela permet de reconstruire la courbe d'origine à partir de sa SRV.

2.2.3 Métrique sur l'espace des courbes et l'espace des formes

Nous allons à présent donner quelques éclaircissements sur les métriques qui doivent être utilisées sur \mathcal{M} pour comparer différentes trajectoires. L'objectif est d'avoir une métrique sur \mathcal{M} qui puisse également se transmettre sur l'espace des formes. L'expression de la métrique que nous allons employer à été formalisée dans [32]. Il a été montré dans [108] que la norme L^2 dans \mathcal{M} donnée par :

$$g_c^{L^2}(u, v) = \int \langle u, v \rangle \|c'(t)\| dt, \quad \forall u, v \in T_c\mathcal{M} \tag{2.13}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la métrique Riemannienne sur $SO(n)$ induit une métrique dégénérée sur l'espace des formes, c'est-à-dire que nous ne pouvons pas distinguer les formes avec cette métrique. Pour surmonter cette difficulté, une classe de métriques, les métriques de Sobolev [21, 105] ont été

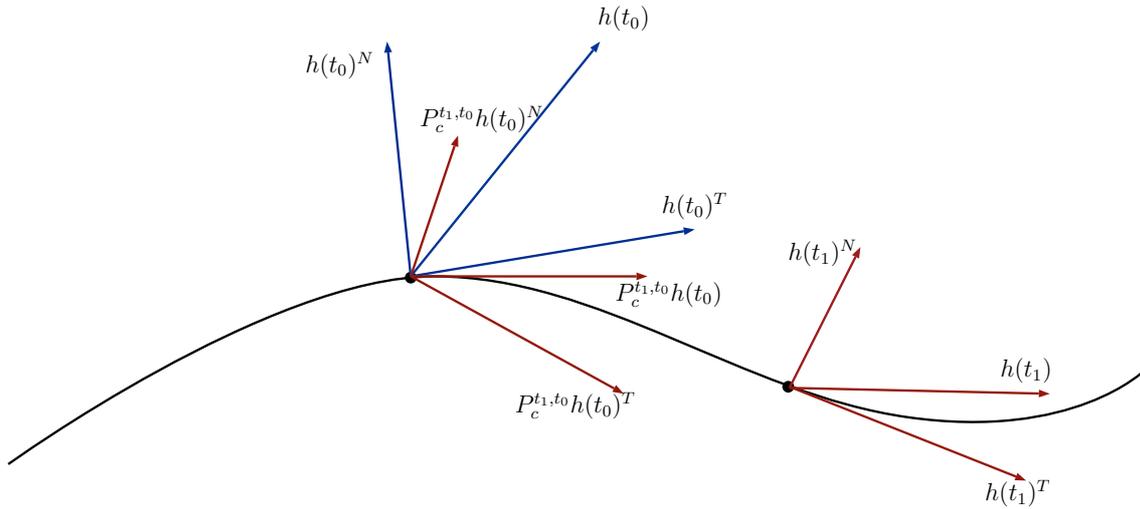


Figure 2.4.: Une façon d'interpréter la métrique élastique et de voir le produit scalaire dans l'intégrale comme une mesure de l'angle entre le repère en un temps donné t_0 , et ce même repère après avoir été transporté parallèlement en un temps ultérieur $t_1 = t_0 + \delta t$

mises en avant car elles n'annulent pas la distance sur l'espace des formes. Si l'espace de base est un espace Euclidien \mathbb{R}^n , ces métriques ont pour expressions :

$$g_c^{a,b}(u, v) = \int \left(a^2 \langle D_l u^N, D_l v^N \rangle + b^2 \langle D_l u^T, D_l v^T \rangle \right) \|c'(t)\| dt \quad (2.14)$$

avec $D_l u = u' / \|c'\|$, $D_l u^T = \langle D_l u, w \rangle w$ où $w = c' / \|c'\|$ et $D_l u^N = D_l u - D_l u^T$, de sorte que $(D_l u^N, D_l u^T)$ définisse un repère mobile le long de la courbe c , voir la figure Fig. (2.4).

Un cas spécial de cette métrique lorsque l'espace de base est une variété est proposé dans [32] :

$$g_c(u, v) = \langle u(0), v(0) \rangle + \int \left(\langle \nabla_l u^N, \nabla_l v^N \rangle + \frac{1}{4} \langle \nabla_l u^T, \nabla_l v^T \rangle \right) \|c'(t)\| dt \quad (2.15)$$

où maintenant : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne une métrique Riemannienne de l'espace de base (SO(n) dans notre cas) ; ∇ est la connection de Levi-Civita associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$; $\nabla_l u = \frac{1}{\|c'\|} \nabla_{c'} u$, $\nabla_l u^T = \langle \nabla_l u, w \rangle w$, $w = c' / \|c'\|$. Etant donné que les calculs sont effectués sur une variété, la dérivation ordinaire dans \mathbb{R}^n est tout naturellement remplacée par la connection de Levi-Civita. Notons que si les courbes ont pour origine l'identité, comme c'est le cas dans l'application que nous considérons, alors le premier élément du membre de droite est nul : $\langle u(0), v(0) \rangle = 0$. Cette métrique est obtenue par la pullback de la métrique canonique L^2 par l'application SRV. Souvenons-nous que si l'on se donne une application $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ ainsi qu'une 1-forme (c'est-à-dire une section) α de $T^*\mathcal{V}$, le fibré cotangent de \mathcal{V} , alors le pullback de α est la 1-forme sur \mathcal{U} définie par : $(\phi^* \alpha)_x(X) = \alpha_{\phi(x)}(d\phi(x)(X))$, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $X \in T_x \mathcal{U}$. Dans notre cas, $\alpha = F_{Lie}$, et

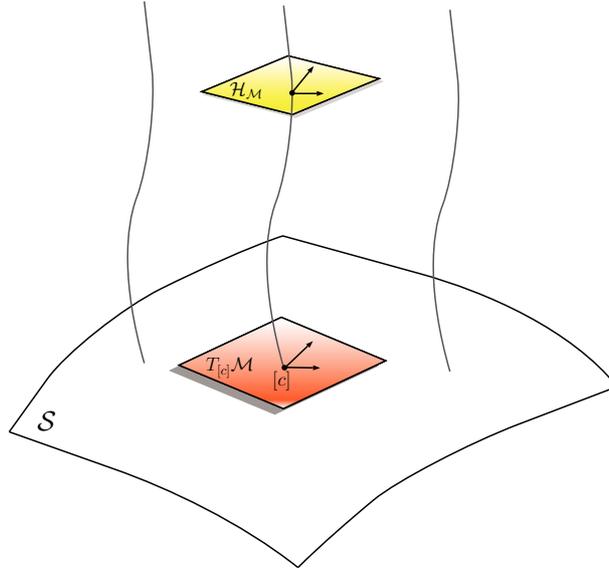


Figure 2.5.: l'espace tangent $T_{[c]}\mathcal{M}$ en un point $[c]$ de l'espace des courbes \mathcal{S} est isomorphe à la partie horizontale $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ de l'espace tangent en un point de la fibre associée.

$\mathcal{U} = \mathcal{M}, \mathcal{V} = T\mathcal{M}$ et nous voyons que la métrique est bien la pullback de la métrique L^2 -metric sur le fibré tangent (c'est-à-dire un produit scalaire sur le fibré tangent du fibré tangent, TTM) définit par :

$$\tilde{g}_c(f, g) = \int_0^1 \langle \nabla_s q^f(0, t), \nabla_s q^g(0, t) \rangle dt \quad (2.16)$$

Les briques élémentaires de la géométrie dans \mathcal{M} ayant été posées, nous pouvons en déduire celles de l'espace des formes grâce à sa structure d'espace quotient. Au préalable, il nous faut décomposer le fibré tangent en un sous-espace dit "horizontal" est un sous-espace dit "vertical" :

$$T\mathcal{M} = \mathcal{H}_{\mathcal{M}} \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{M}}$$

avec $\mathcal{V}_{\mathcal{M}} = \ker(T_c\pi)$ où T_c désigne la différentielle en c et $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}$ le fibré ; et $\mathcal{H}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{V}_{\mathcal{M}})^\perp$ et où l'orthogonalité est prise dans le sens de la métrique g_c . Cette métrique est alors invariante par reparamétrisation, c'est-à-dire constante le long des fibres, et le sous-espace horizontal $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ et l'espace tangent dans l'espace des formes sont isométriques : π est une submersion Riemannienne,[109, 107]. Cela se traduit en terme de métrique par :

$$g_c(u_{\mathcal{H}}, v_{\mathcal{H}}) = [g]_{\pi(c)}(T_c\pi(u), T_c\pi(v))$$

où $[g]$ désigne la métrique dans l'espace des formes.

Des résultats similaires mais dans un contexte légèrement différent sont établis dans [99], lemme 1. Bien que le développement ci-dessus peut paraître relativement complexe, une interprétation en terme de distance en simplifie la compréhension : la géodésique $s \mapsto [c](s)$ entre $[c_0]$ et $[c_1]$ dans l'espace des formes est la projection de la géodésique horizontale reliant c_0 à la fibre contenant c_1 . Il se trouve que la géodésique horizontale entre c_0 et c_1 intersecte la fibre de c_1 au point correspondant à la reparamétrisation de c_1 , $c_1 \circ \phi$, qui donne une formulation de la distance :

$$[d]([c_0], [c_1]) = d_g(c_0, c_1 \circ \phi) \quad (2.17)$$

où $[d]$ désigne la distance dans \mathcal{S} , et d_g la distance dans l'espace des courbes induite par la métrique sus-mentionnée. Exprimée avec la TSRV, la distance 2.17 consiste en un problème d'optimisation, facilement résoluble par programmation dynamique ou par descente de gradient, [22, 38] :

$$[d]([c_0], [c_1]) = \inf_{\phi \in \mathcal{D}} \left(\int_0^1 \left\| q_0(t) - q_1(\phi(t)) \sqrt{\phi'(t)} \right\|^2 \right)^{1/2} \quad (2.18)$$

avec $q_i(\cdot) = F_{Lie}(c_i)(\cdot)$. Comme ces courbes résidant dans l'espace tangent on été transportées par rapport au même point, qui est l'identité, elle sont donc dans le même espace et peuvent être comparées.

D'un point de vue pratique, toute les formules ci-dessus doivent être discretisées, en vue d'un traitement informatique ; c'est l'objet des travaux de [33]. Les formules sont essentiellement les mêmes, mais dans ce nouveau cadre, une courbe est représentée par un ensemble de points $c_{discr.}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et l'espace tangent devient

$$T_{discr.}\mathcal{M} = \{v = (v_0, v_1, \dots, v_n), v_i \in T_{x_i}SO(n), \forall i\} \quad (2.19)$$

Considérons pour $u \in T_{c_{discr.}}\mathcal{M}$, un chemin de géodésiques par morceaux : $(s, t) \mapsto c^u(s, t)$ vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} c^u(0, \frac{k}{n}) &= x_k \\ (\partial c^u / \partial t)(0, \frac{k}{n}) &= n \log_{x_k}(x_{k+1}) \end{aligned}$$

Cette dernière équation définit en fait un vecteur tangent entre deux points de la courbe, la fonction \log étant l'inverse de l'application exponentielle sur la variété de base, $SO(n)$. $c^u(s, \cdot)$ est une géodésique sur $SO(n)$ entre $x_{k/n}$ et $x_{(k+1)/n}$. La version discrète de La SRV s'écrit

$$q_k = \log_{x_k} x_{k+1} / \sqrt{\|\log_{x_k} x_{k+1}\|} \quad (2.20)$$

et nous avons

$$\nabla_{\partial c / \partial s} q \left(s, \frac{k}{n} \right) = \nabla_{\partial c / \partial s} q_k(s) \quad (2.21)$$

La métrique de Sobolev discrétisée sur l'espace des courbes devient quant à elle :

$$g_{c_{discr.}}(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle \nabla_{\partial c / \partial s} q^u(0, \frac{k}{n}), \nabla_{\partial c / \partial s} q^v(0, \frac{k}{n}) \rangle \quad \forall u, v \in T_{discr.} \mathcal{M} \quad (2.22)$$

2.2.4 L'équation des géodésiques sur un groupe de Lie

Voyons à présent quelle est l'équation des géodésiques dans l'espace des courbes. Une conséquence de la TSRV est que l'équation des géodésiques prend une forme bien plus simple que ce qui peut être trouvé dans [32] et [33]. L'équation des géodésiques dans ce contexte peut être retrouvée dans [39], mais par souci de complétude nous allons en reproduire la preuve et l'adapter à notre cadre de travail. Nous rappelons qu'une géodésique dans un espace de courbes est un chemin particulier de courbes, c'est-à-dire un ensemble particulier de courbes $s \mapsto c(s, \cdot)$ tel que pour chaque s , $c(s, \cdot)$ est un point dans \mathcal{M} ou, de façon équivalente, une courbe dans $SO(n)$. Ainsi, pour chaque courbe du chemin de courbes, nous pouvons définir sa TSRV, et pour tout $s \in [0, 1]$ nous avons $q = \frac{R_{c(t)^*}^{-1}(\partial c / \partial t)}{\sqrt{\|\partial c / \partial t\|}}$ (nous avons omis la lettre 's' pour ne pas alourdir les notations).

Théorème 2.1. Un ensemble de courbes $[0, 1] \ni s \mapsto (c(s, 0), q(s, t))$ (t étant le paramètre de la courbe $c(s, \cdot)$) constitue une géodésique dans \mathcal{M} si et seulement si :

$$\nabla_{\partial c / \partial s} \left(\nabla_{\partial c / \partial s} q(s, t) \right) (s, t) = 0 \quad \forall s, t \quad (2.23)$$

Démonstration. Pour justifier ce résultat et pour en donner une vision plus générale, nous allons d'abord nous placer dans le cadre de la SRV et non de la TSRV. La différence tient en ce que

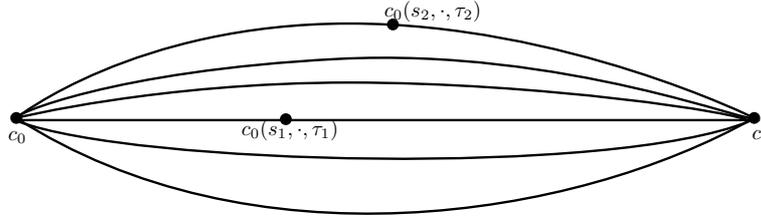


Figure 2.6.: Nous considérons un faisceau de courbes consistant en une légère modification d’une géodésique. Les différentes courbes sont indexées par τ . L’idée est de trouver laquelle de ces courbes fournit une énergie minimale pour aller de c_0 à c_1

le point d’origine n’est pas fixe, et son déplacement interviendra de fait dans l’équation des géodésiques, [32], mais disparaîtra ensuite dans notre cas. Nous allons donc montrer que un chemin de courbes $[0, 1] \ni s \mapsto (c(s, 0), q(s, t))$ (t étant le paramètre de la courbe $c(s, \cdot)$) est une géodésique dans \mathcal{M} si et seulement si :

$$\nabla_{\partial c / \partial s} c(s, 0) + \int_0^1 \mathcal{R} \left(q(s, t), \nabla_{\partial c / \partial s} q(s, t) \right) (c(s, 0)) dt = 0 \quad \forall s \quad (2.24)$$

$$\nabla_{\partial c / \partial s} \left(\nabla_{\partial c / \partial s} q(s, t) \right) (s, t) = 0 \quad \forall s, t \quad (2.25)$$

Considérons, comme cela est fait dans [150], de petites variations d’un chemin $s \mapsto c(s, 0), q(s, t)$ qui commencent et se terminent aux mêmes points, Fig. 2.6, que nous notons $\{(c(s, 0, \tau), q(s, t, \tau))\}$. Remarquons une subtile différence entre le cas que nous traitons et celui exposé dans [32]. Nous travaillons avec une représentation dans l’espace tangent, grâce à la SRV (ou la TSRV) et non directement avec la famille de courbes $c(s, t, \tau)$. Notons $\partial_\tau c(s, 0, \tau) = \frac{\partial c(s, 0, \tau)}{\partial \tau}$, et de même pour $\partial_s c(s, 0, \tau)$ et $\partial_\tau c(s, 0, \tau)$. L’énergie du chemin d’indice τ est :

$$E(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \partial_s c(s, 0, \tau), \partial_s c(s, 0, \tau) \rangle + \langle \nabla_{\partial c / \partial s} q(s, t, \tau), \nabla_{\partial c / \partial s} q(s, t, \tau) \rangle ds \quad (2.26)$$

En se souvenant que la dérivée du produit scalaire est donnée par : $\frac{d}{dx} \langle f(x), f(x) \rangle = 2 * \langle f(x), \frac{df}{dx} \rangle$ nous avons

$$E'(\tau) = \int_0^1 \langle \nabla_{\partial c / \partial \tau} \frac{\partial c}{\partial s}(s, 0, 0), \frac{\partial c}{\partial s}(s, 0, 0) \rangle + \langle \nabla_{\partial c / \partial \tau} \nabla_{\partial c / \partial s} q(s, t, 0), \nabla_{\partial c / \partial s} q(s, t, 0) \rangle ds \quad (2.27)$$

avec $\nabla_{\partial c/\partial s}(\partial_\tau c(s, 0, \tau)) = \nabla_{\partial c/\partial \tau}(\partial_s c(s, 0, \tau))$ et grâce à la définition du tenseur de courbure, $\mathcal{R}(\partial_\tau c(s, 0, \tau), \partial_s c(s, 0, \tau))(q(s, t, \tau)) = \nabla_{\partial c/\partial \tau} \nabla_{\partial c/\partial s}(q(s, t, \tau)) - \nabla_{\partial c/\partial s} \nabla_{\partial c/\partial \tau}(q(s, t, \tau))$ nous obtenons :

$$E'(0) = \int_0^1 \langle \nabla_{\partial_s c} \partial_\tau c(s, 0, \tau), \partial_s c(s, 0, \tau) \rangle + \langle \mathcal{R}(\partial_\tau c(s, 0, \tau), \partial_s c(s, 0, \tau)) q(s, t, \tau), \nabla_{\partial_s} q(s, t, \tau) \rangle + \langle \nabla_{\partial_s c} \nabla_{\partial_\tau c} q(s, t, 0), \nabla_{\partial_s c} q(s, t, 0) \rangle ds \quad (2.28)$$

En intégrant par partie :

$$\int_0^1 \langle \nabla_{\partial_\tau c} \partial_s c(s, 0, \tau), \partial_s c(s, 0, \tau) \rangle ds = - \int_0^1 \langle \nabla_{\partial_s c} \partial_s c(s, 0, \tau), \partial_\tau c(s, 0, \tau) \rangle ds$$

$$\int_0^1 \langle \nabla_{\partial_s c} \nabla_{\partial_\tau c}(q(s, t, \tau)), \nabla_{\partial_s} q(s, t, \tau) \rangle = - \int_0^1 \langle \nabla_{\partial_s c} \nabla_{\partial_s c}(q(s, t, \tau)), \nabla_{\partial_\tau} q(s, t, \tau) \rangle$$

ce qui amène à :

$$E'(0) = \int_0^1 (-\langle \nabla_{\partial_s c} \partial_s c(s, 0, \tau), \partial_\tau c(s, 0, \tau) \rangle) + \langle \mathcal{R}(\partial_\tau c(s, 0, \tau), \partial_s c(s, 0, \tau)) q(s, t, \tau), \nabla_{\partial_s} q(s, t, \tau) \rangle + (-\langle \nabla_{\partial_s c} \nabla_{\partial_s c} q(s, t, 0), \nabla_{\partial_\tau c} q(s, t, 0) \rangle) ds \quad (2.29)$$

Sachant que pour tout champ de vecteur X, Y, Z, W , $\langle \mathcal{R}(X, Y)Z, W \rangle = -\langle \mathcal{R}(X, Y)W, Z \rangle$:

$$E'(0) = - \int_0^1 \langle \nabla_{\partial_s c} \partial_\tau c(s, 0, \tau), \partial_s c(s, 0, \tau) \rangle + \langle \mathcal{R}(q(s, t, \tau), \nabla_{\partial_s} q(s, t, \tau))(\partial_s c(s, 0, \tau)), \partial_\tau c(s, 0, \tau) \rangle + \langle \nabla_{\partial c/\partial s} \nabla_{\partial c/\partial \tau} q(s, t, 0), \nabla_{\partial c/\partial s} q(s, t, 0) \rangle ds \quad (2.30)$$

Les géodésiques correspondent aux chemins d'énergie minimale. Cela signifie que tout autre chemin qui commence et qui se termine aux mêmes points génère une énergie plus importante. Il faut donc résoudre $E'(0) = 0$ pour tout $\partial_\tau c(s, 0, \tau)$ et tout $\nabla_{\partial_\tau}(q(s, t, \tau))$ ce qui donne le résultat. Enfin, dans le cadre fourni par la TSRV, le point de départ est fixe et donc seule l'équation 2.25 ne s'annule pas. \square

Les géodésiques dans le cadre de la TSRV ne sont rien d'autre qu'une interpolation linéaire sur l'espace tangent transporté. La géodésique entre c_0 et c_1 s'obtient par :

$$TSRV^{-1}((1-s)TSRV(c_0) + sTSRV(c_1)) \quad (2.31)$$

pour $s \in [0, 1]$.

Nous avons à présent tous les ingrédients nécessaires pour comparer et caractériser des processus non-stationnaires. Nous pouvons résumer cela sous la procédure suivante :

1. **Entrée** : un ensemble de matrices de rotations $\{W_i\}_i$ qui constituent une observation partielle d'une trajectoire sur $SO(n)$.
2. Grâce à l'application exponentielle inverse, transformer cet ensemble de matrices de $SO(n)$ en un ensemble de matrices $\{V_i\}_i$ de l'algèbre de Lie.
3. Interpoler entre ces matrices V_i par des splines, [81, 127, 30].
4. Revenir sur la variété de base grâce à l'application exponentielle.
5. Déplacer la courbe interpolée pour que la condition $c(0) = e$ soit satisfaite puis calculer la SRV grâce à l'équation 2.21.
6. Calculer la distance entre deux courbes avec l'équation 2.17. L'optimisation est réalisée par une programmation dynamique.
7. **Sortie** : Distance entre deux courbes. Il est aussi possible par la même procédure de calculer la géodésique entre ces courbes.

Nous avons interpolés par des splines [89] pour nous assurer de la continuité de la courbe fermée résultante. Pour interpoler dans l'algèbre de Lie entre deux points distincts de l'identité, il faut tenir compte de la courbure, car seules les géodésiques reliant un point à l'identité sont des lignes droites. Cependant si les points sont très rapprochés par rapport à la courbure de la sphère, ce qui est le cas pour des signaux faiblement non-stationnaire (ou les matrices de dilations se confondent presque avec la dilation de Naimark), alors les géodésiques dans l'algèbre de Lie peuvent être approximées par des droites. Une fois que le modèle d'interpolation est entraîné dans l'algèbre de Lie, nous pouvons choisir un certain nombre de matrices issues de la courbe continue facilement, sans avoir à entraîner de nouveau le modèle d'interpolation. Cela évite

ainsi de nombreux et coûteux calculs d'exponentielles matricielles que l'on retrouve dans les méthodes de shooting géodésiques, [32, 121]. Enfin remarquons qu'interpoler entre deux ou plusieurs courbes de matrices de dilations conduit à une amélioration de la résolution spectrale, d'une façon analogue à ce que nous trouvons dans [60].

2.2.5 Résultats

Pour illustrer l'approche exposée ci-dessus, nous avons comparé quatre processus PC dont des réalisations sont illustrées à la Fig. 2.7.

- A la Fig. 2.8 nous trouvons les représentations de ces processus dans le groupe $SO(3)$ avec 200 points d'interpolation. La représentation est obtenue par action des matrices du group sur un vecteur de la sphère.
- A la Fig. 2.9 ce sont les représentations avec 50 points d'interpolation. La représentation est également obtenue par action des matrices du group sur un vecteur de la sphère.
- A la Fig. 2.10 ce sont les représentations avec 200 points d'interpolation. Cette fois-ci la représentation associé est dans la boule unité, c'est-à-dire que les matrice sont représenté par leur axes de rotation multiplié par l'amplitude de la rotation.

Comme nous allons l'illustrer par la suite, d'autres dimension de l'espace de représentation sont possible ($SO(4), SO(5)$) mais nous avons choisit ici d'illustrer les résultats sur $SO(3)$ pour pouvoir les visualiser. Ces quatre signaux, de 1000 points chacun sont :

- **(a)** : Une modulation d'amplitude $a(t) \cos(2\pi f/f_e t)$ avec une période de 20 points, où $a(t)$ désigne un processus stationnaire de moyenne nulle et de variance unitaire ;
- **(b)** : Un processus AR(2) périodique avec une période de 54 points.
- **(c)** : Un processus AR(2) (autoregressif d'ordre 2) périodique avec une période de 20 points.
- **(d)** : Un processus ARMA(2,1) (autoregressif, moyenne glissante d'ordre (2,1)) périodique avec une période de 20 points.

Nous avons utilisé le package PerARMA disponible dans R pour générer les signaux ARMA et AR. Les séquences de parcours ont été obtenues avec la fonction PerPACF de ce même package. Pour pouvoir visualiser les résultats nous nous sommes limité à des séquences de trois parcours.

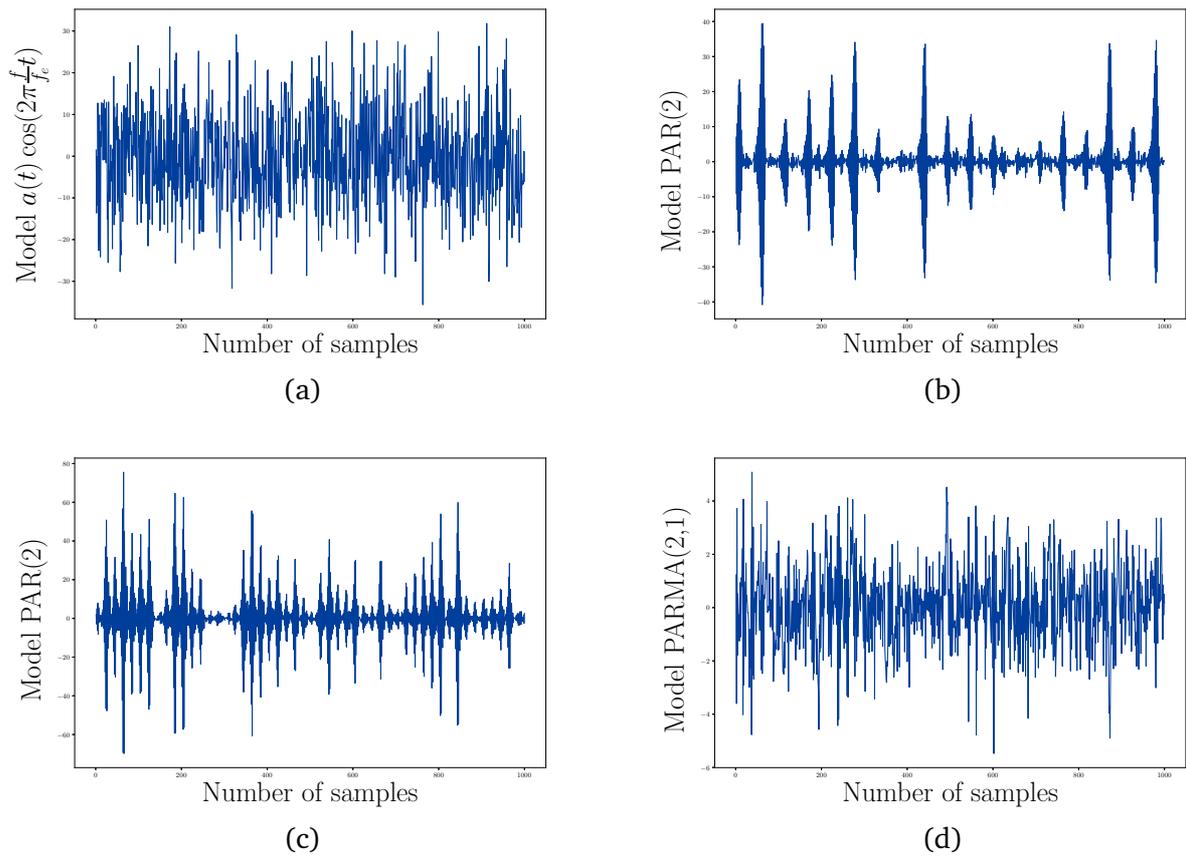
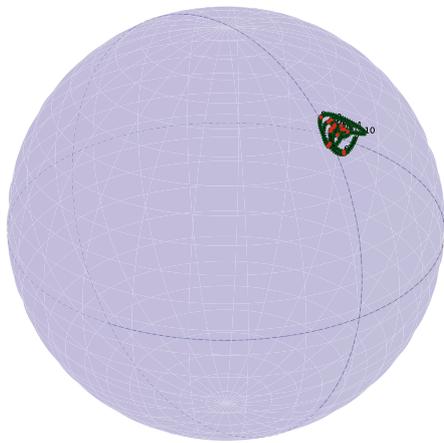
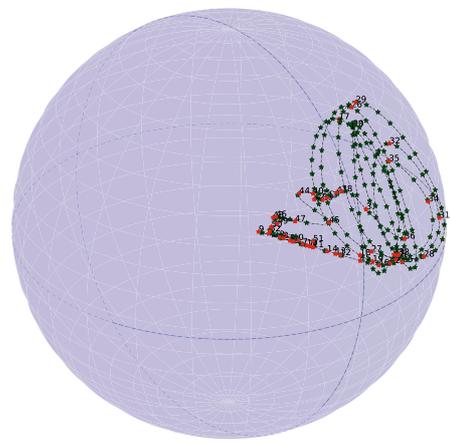


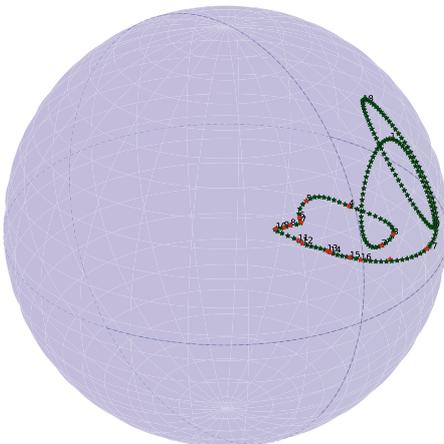
Figure 2.7.: 1000 échantillons des processus PC générés par : (a) un bruit blanc modulé en amplitude ; (b) un processus AR(2) périodique de période 54 points ; (c) un AR(2) périodique de période 20 points ; et (d) un ARMA(2,1) périodique de période 20 points.



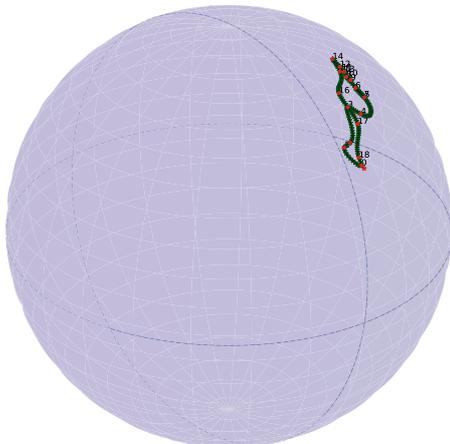
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 2.8.: Représentation des quatre processus PC de la Fig. 2.7 par l'action des matrices de dilation sur un vecteur de la sphere de π , dans le même ordre que la Fig. 2.7. Les courbes sont obtenues avec 200 points d'interpolations (étoiles vertes). La ligne noire en pointillée est la courbe théorique et les point rouges sont les matrices de dilation.

L'analyse de Fig. 2.8 nous montre que la mesure spectrale du signal à modulation d'amplitude, Fig. 2.7-(a) est associée à des matrices de dilations qui restent très regroupées. Ceci nous indique que ce signal n'est pas si éloigné d'un signal stationnaire : en effet un signal stationnaire est associée à une matrice de dilation unique. Expérimentalement, cela se traduira plutôt par un ensemble de matrices de dilation très rapprochées les unes des autres, la mesure des parcours étant forcément bruitée. Effectivement, "à l'oeil nu" le processus de la Fig. 2.7-(a) ne semble présenter qu'une non-stationnarité assez légère et il n'est pas du tout évident qu'un observateur puisse le distinguer un signal stationnaire. Au contraire, alors que la structure temporelle apparente du signal de la Fig. 2.7-(d) (PARMA(2,1)) est très proche de celle de la Fig. 2.7-(a), leur représentations dans $SO(3)$ sont très différentes. Les matrices de dilations, et donc la mesure spectrale, du PARMA(2,1) sont beaucoup plus dispersées. Enfin, l'observation des Fig. 2.7-(b),(c) qui sont issus du même modèle mais avec deux périodes différentes nous montre que plus le nombre de points est important, plus la courbe semble s'enrouler sur elle-même. Ceci-dit les deux courbes présentent de nombreuses similarités. Par exemple dans les deux cas la partie gauche de la courbe (matrices 10,11,12,13,14,15,16 pour la Fig. 2.7-(c)) est plutôt "linéaire" alors que la partie droite forme des boucles (matrices 17,18,19 d'une part, et 2,3,4 d'autre part, toujours pour la Fig. 2.7-(c)). Enfin, nous remarquons bien que la courbure est mieux appréhendée lorsque les points d'interpolation sont très rapprochés, comme c'est la cas pour les figures issus de l'échantillon d. Cela est également le cas pour l'échantillon a, dont nous observons une faible non-stationnarité.

Pour finir cette analyse, nous avons calculé la distance entre le processus PC de la Fig. 2.11 et les quatre autres processus des Fig. 2.7 et 2.8. Les distances sont reportées dans le tableau 2.1. Ces distances révèlent clairement certaines proximités spectrales entre les signaux PC étudiés. La rangée associée au modèle PAR(2), désigné par la lettre (c) a été surlignée en gris foncé. Quelque soit le nombre de points d'interpolation et la dimension de la variété de base, la représentation spectrale de ce signal à travers ces matrices de dilations est la plus proche (sur $SO(3)$) ou la seconde plus proche (sur $SO(4)$ et $SO(5)$) du signal de référence. Le signal désigné par la lettre (b) est rappelons le généré par le même modèle que le signal de référence, c'est-à-dire un PAR(2). La seule différence tient en ce que sa périodicité est de 54 points au lieu de 20. Dans le tableau, nous avons surligné les valeurs où ce signal est au plus proche du signal de référence. La courbe associée à ce signal comporte de nombreux laçages sur $SO(3)$, ce qui donne une grande distance par rapport au signal de référence. Mais lorsque la dimension augmente la comparaison

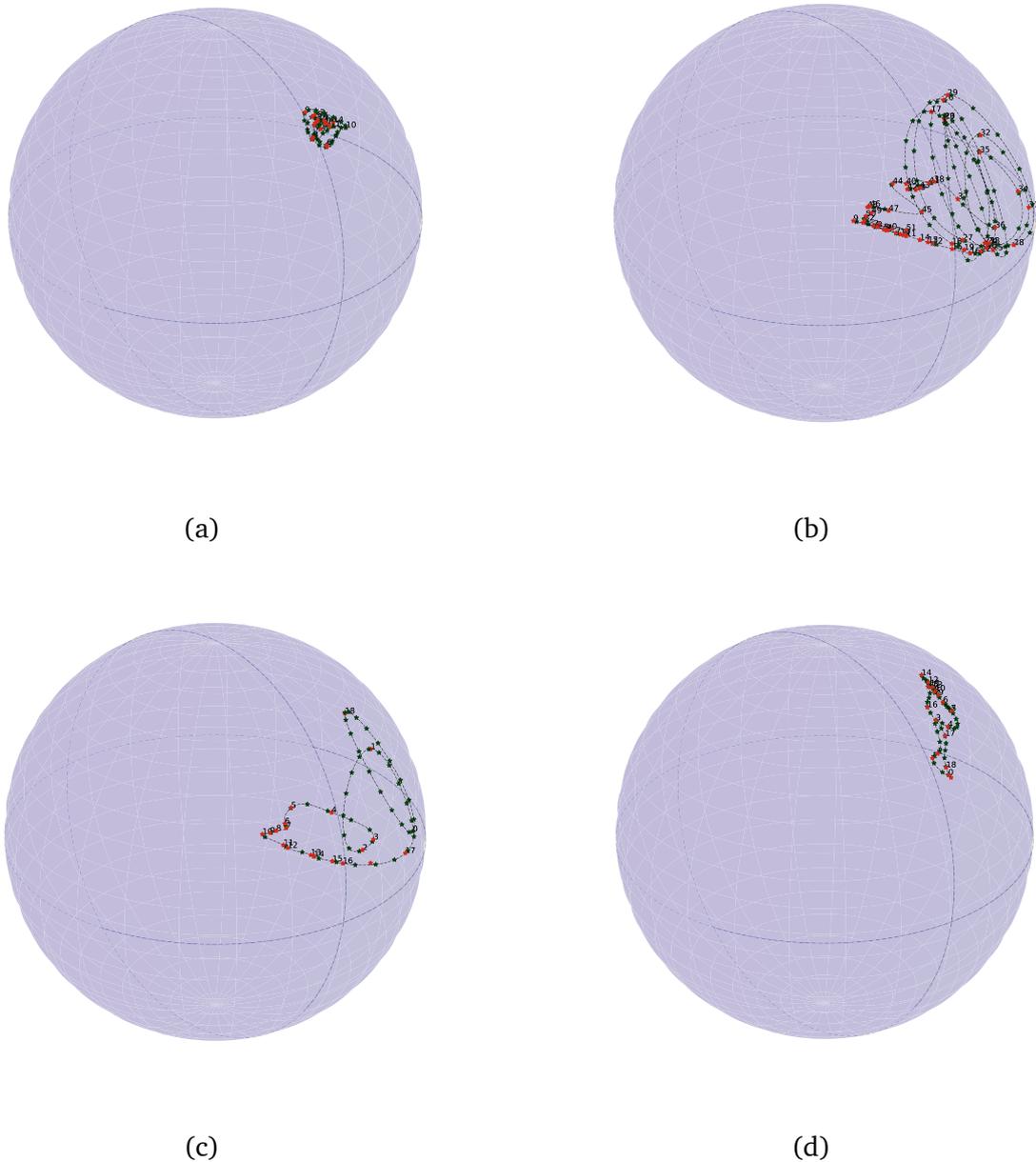


Figure 2.9.: Représentation des quatre processus PC de la Fig. 2.7 par l'action des matrices de dilation sur un vecteur de la sphere de π , dans le même ordre que la Fig. 2.7. Les courbes sont obtenues avec 100 points d'interpolations (étoiles vertes). La ligne noire en pointillée est la courbe théorique et les point rouges sont les matrices de dilation.

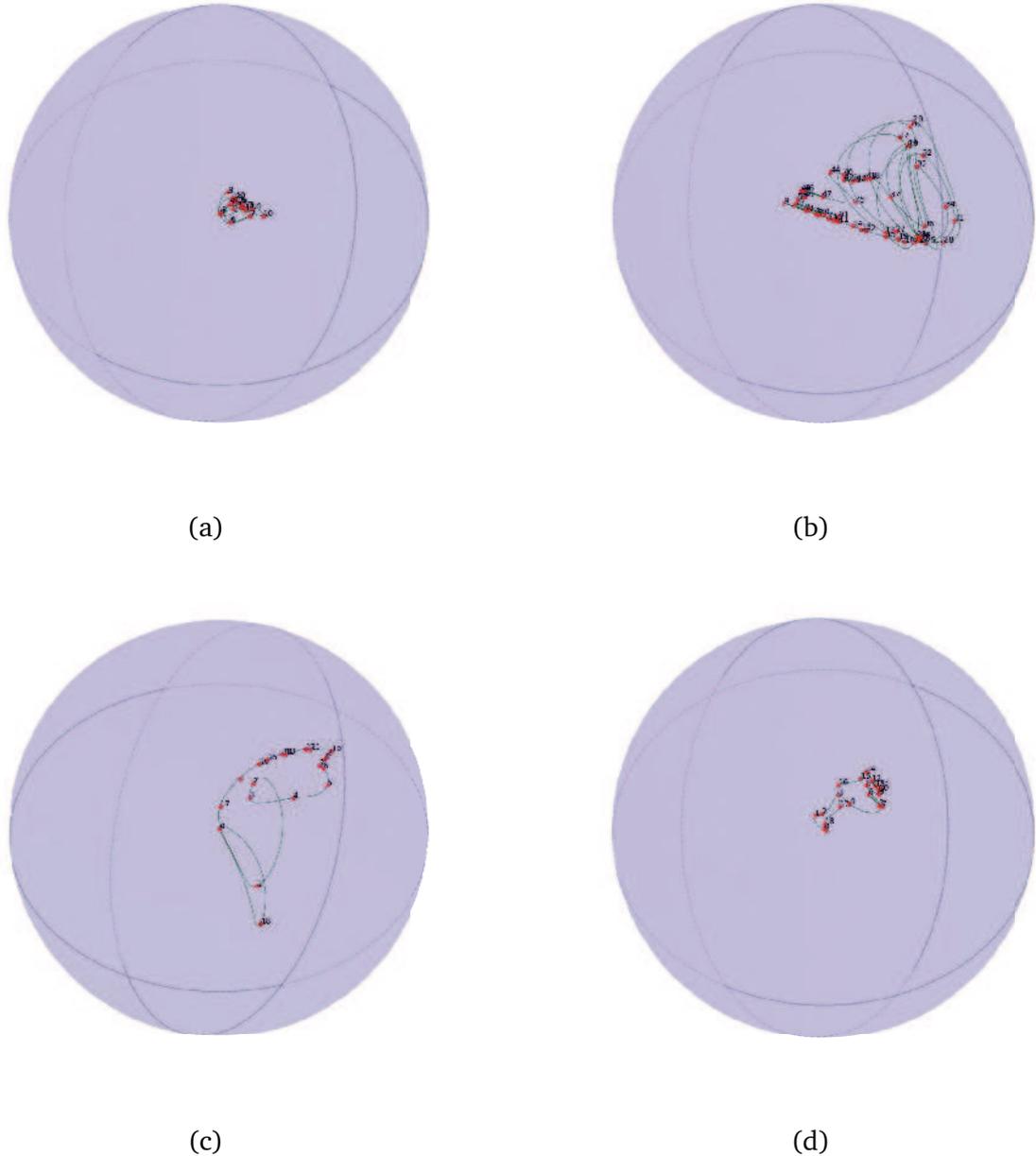


Figure 2.10.: 1000 échantillons des processus PC générés par : (a) un bruit blanc modulé en amplitude ; (b) un processus AR(2) périodique de période 54 points ; (c) un AR(2) périodique de période 20 points ; et (d) un ARMA(2,1) périodique de période 20 points. Représentation dans la boule unité.

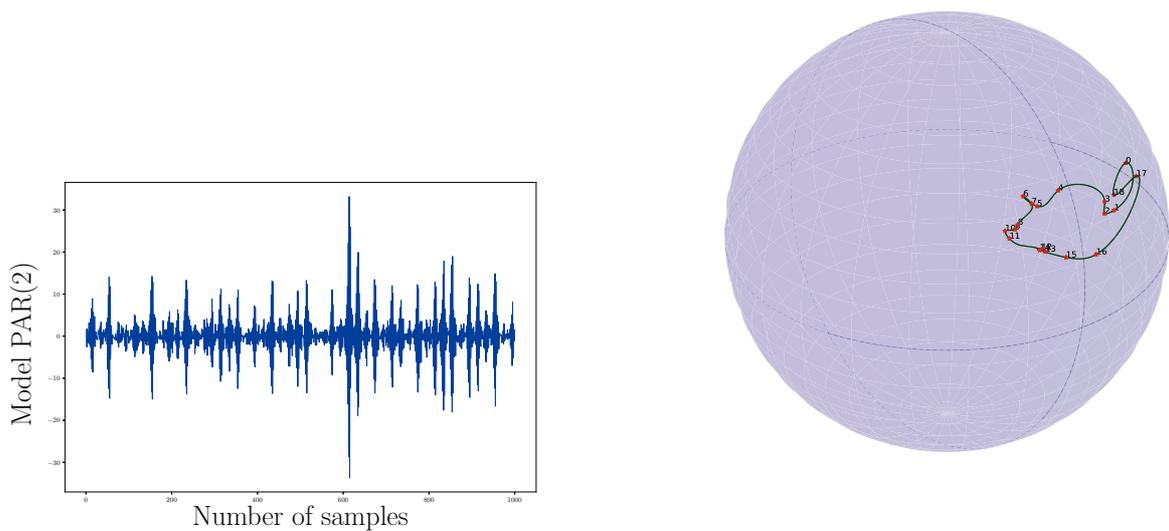


Figure 2.11.: Un PAR(2) de période 20 points pour 1000 point représenté, et sa trajectoire dans $SO(3)$ associée.

Table 2.1.: Tableau des distances des quatre modèles de signaux PC de la Fig. 2.7 par rapport au signal de référence Fig. 2.11. Les distances ont été calculées par programmation dynamique.

Modèle de signal représenté à la Fig. 2.7	Distance par rapport au signal Fig. 2.11					
	SO(3)		SO(4)		SO(5)	
	200 pts	50 pts	200 pts	50 pts	200 pts	50 pts
(a)	5.72	4.47	97.19	26.86	526.36	95.47
(b)—100 pts instead of 50 pts	31.63	28.98	41.78	12.98	298.64	220.32
(c)	3.44	3.29	90.89	20.23	476.55	116.06
(d)	4.19	4.50	187.42	50.36	621.51	171.73

s'améliore, et ce signal se révèle être le plus proche de la référence sur $SO(4)$ et $SO(5)$. Il est spécialement intéressant d'observer la rivalité entre les courbes issues d'un modèle PAR(2) avec des paramètres différents mais une périodicité identique, ou avec les mêmes paramètres mais une périodicité différente. Pour finir, remarquons que le PARMA(2,1) est le second signal le plus proche dans $SO(3)$. Comme la Fig. 2.8 le montre, sa mesure spectrale évolue d'une façon relativement similaire au signal de référence, avec une boucle importante et une boucle plus petite.

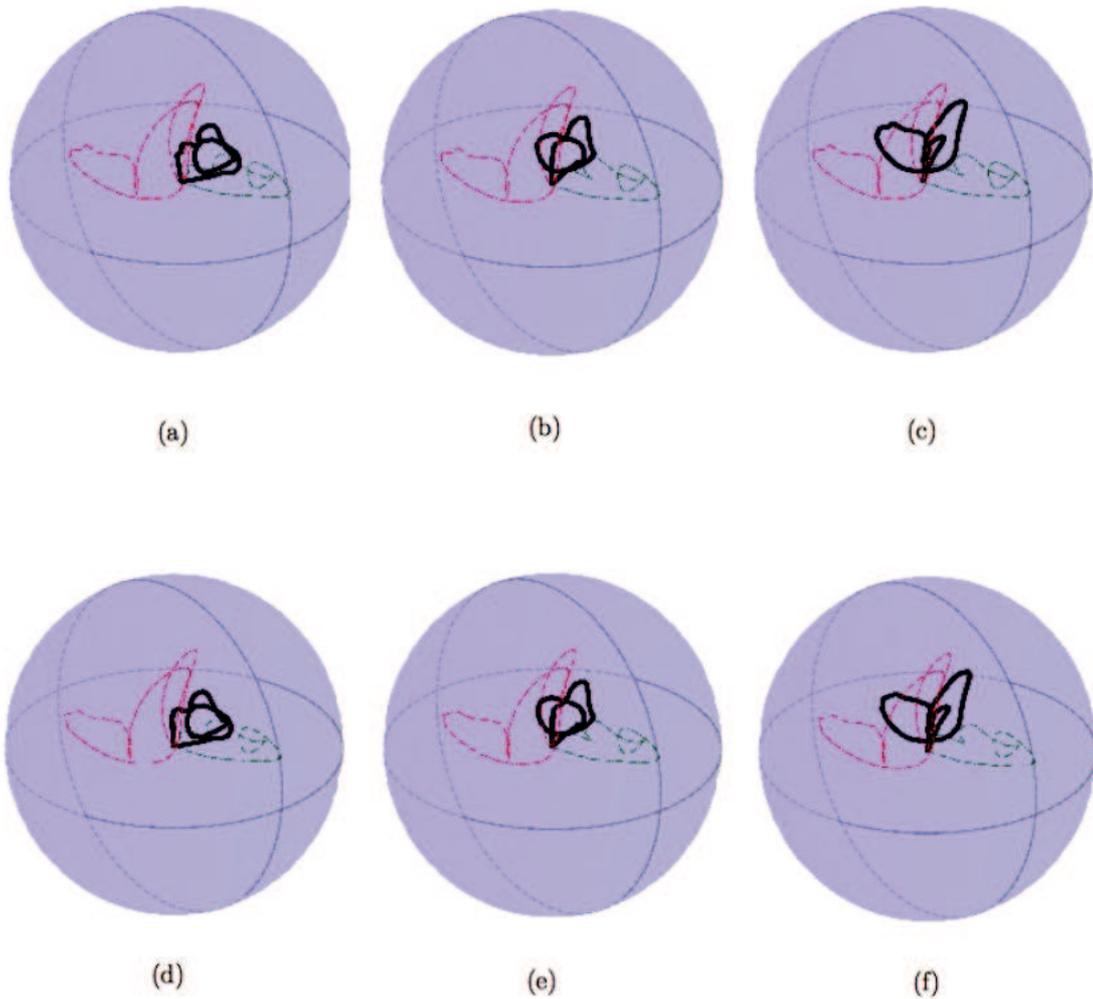


Figure 2.12.: Interpolation par géodésique entre le signal de référence (Fig. 2.11) et le signal de la Fig. 2.7-(c) calculée à partir de l'équation 2.31. La première ligne correspond à une interpolation avec 200 points, la seconde avec 50 points. Dans ces scénarios $s \in [1/4, 1/2, 3/4]$ ce qui correspond respectivement aux figures [(a-d), (b-e), (c-f)].

2.3 Conclusion

La théorie de la dilation appliquée aux processus non-stationnaires, et plus particulièrement aux processus PC, permet de constituer une courbe sur le groupe des rotations qui représente la mesure du processus. Ainsi un processus T-PC peut être interprété comme un élément du groupe de Lie défini par l'ensemble des courbes sur $SO(n)$ ou $SU(n)$. Les matrices de dilation étant fortement liée à la mesure spectrale du processus sous-jacent, les courbes qu'elles forment dans le groupe de rotation constituent une nouvelle vision de cette mesure, et vient compléter l'analyse spectrale. La non-stationnarité s'exprime dans la forme prise par ces courbes. Il est possible de comparer ces courbes grâce à une métrique adaptée. De plus, nous nous sommes affranchis de la paramétrisation des courbes en considérant l'espace des formes. La TSRV permet de traiter facilement ces objets, et l'équation des géodésiques qui en découle est éminemment simple à interpréter.

Cette partie a fait l'objet d'une publication : [55]

Aspects topologiques induits par la dilatation des processus PC

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons fourni un cadre mathématique permettant de manipuler les courbes dans $SO(n)$ ou $SU(n)$ induites par les matrices de dilations. Nous souhaitons ici apporter une vision complémentaire, plus intuitive sur la forme que peuvent avoir ces courbes, en évitant la complexité liée aux précédents développements géométriques. Comme nous avons pu le constater dans les figures précédentes, certains signaux forment de nombreuses boucles alors que d'autres n'en forment quasiment pas. Il semble que différents types de signaux puissent être caractérisés par ce biais. Nous souhaitons donc approfondir le lien entre un processus et ces matrices de dilations, c'est-à-dire entre l'aspect temporel du processus et l'agencement des matrices de dilations. Or, l'espace de base étant le groupe de rotation, l'homotopie, et plus particulièrement le groupe fondamental ou groupe de Poincaré, n'est pas d'une grande utilité car il se résume à \mathbb{Z}_2 . Autrement dit avec le groupe fondamental nous ne pouvons distinguer que deux types de courbes. Pour pallier ce manque d'information, nous allons considérer le *nuage de points* formé par les matrices de dilations, et chercher à en détailler la structure, l'organisation. Nous souhaitons caractériser la structure globale du nuage de points par un ensemble de paramètres qui seront cette fois-ci indépendants de la géométrie. De tels paramètres sont dit invariants. Nous nous inscrivons donc ici dans le cadre de l'analyse topologique des données (TDA), dont le fondement repose sur l'homologie persistante. Les domaines d'applications de l'homologie sont nombreux : classification de série temporelle par réseau de neurones et TDA [141], reconnaissance de formes [37], biologie [138], phylogénétique [36] et science du langage [122] à titre d'exemple. Les pionniers des calculs relatifs à l'homologie persistante sont [58, 59, 151].

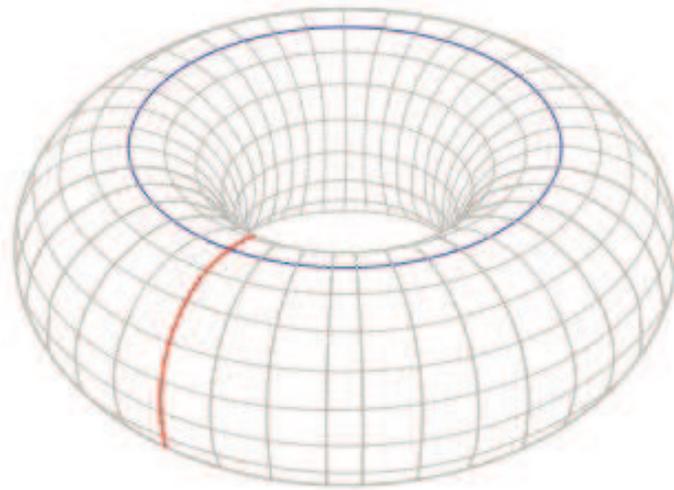


Figure 3.1.: Le groupe fondamental d'un tore est à égal \mathbb{Z}_2 , ce qui se traduit par le fait que les deux courbes fermées rouges et bleues ne peuvent pas se transformer l'une en l'autre par transformation continue. Imaginons que ces deux courbes soient des élastiques. Nous ne pouvons pas passer de l'élastique rouge à l'élastique bleu sans le casser.

3.2 Homologie persistante pour des nuages de points

3.2.1 Bases de l'homologie persistante

Nous allons ici introduire l'analyse topologique des données et illustrer la façon dont nous pouvons nous en servir pour étudier des séries temporelles. Un nuage de points consiste en une collection d'éléments dans un espace métrique, ce qui signifie qu'il existe une mesure de distance entre les points, ou tout du moins une mesure de dissimilarité. Le terme *topologique* fait référence à ce qu'il reste d'une structure lorsque la géométrie change, ce qui est par exemple le cas lorsque la structure considérée est étirée, déformée, contractée, mais jamais déchirée. C'est en quelque sorte la description fondamentale d'une structure en terme de trous, de vides, de composantes connexes et ainsi de suite. Soit par exemple un tore, qui est une structure dans l'espace \mathbb{R}^3 comprenant un trou en son centre et deux boucles qui ne peuvent pas être confondues par transformation continue, Fig. 3.1. Imaginons que ce tore soit constitué d'une matière étirable à l'infini. Il est alors possible d'agrandir, de comprimer, de tourner ce tore dans tous les sens, cela restera un tore dans la mesure où il n'est pas déchiré.

La question adressée par l'homologie est de pouvoir identifier les caractéristiques topologiques fondamentales d'une structure. Ainsi, nous aimerions trouver les éléments numériques nous permettant d'affirmer qu'une structure circulaire est bien, en effet, circulaire. Par exemple, si l'on s'intéresse à la Fig. 3.5, comment pouvons-nous numériquement retrouver le fait que les données se répartissent globalement selon une structure circulaire, très différente de ce que nous aurions obtenu à la suite d'un tirage uniforme dans le domaine $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5] \subset \mathbb{R}^2$?

Pour pouvoir travailler sur un nuage de points, nous allons devoir lui conférer une structure mathématiquement exploitable. Les structures algébriques sont idéales pour manipuler des ensembles d'objets, et parmi elles, la structure de groupe est extrêmement puissante. Par exemple, à chaque fois que nous travaillons avec des entiers naturels, nous utilisons en fait le groupe $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ muni d'une opération interne

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (i, j) &\mapsto i + j \end{aligned}$$

C'est cette structure de groupe qui nous permet de travailler sur les entiers naturels. Il en est de même pour \mathbb{Z} , \mathbb{R} et bien d'autres ensembles. Un exemple important pour notre développement est le cas du groupe cyclique à deux éléments $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Ce groupe est muni de l'addition : $0 + 0 = 0$, $1 + 1 = 1$ et $1 + 0 = 0$.

Voyons à présent comment, en partant d'un nuage de points, nous pouvons en faire émerger une structure de groupe. Les objets que nous allons manipuler sont les *simplexes*. Etant donné un ensemble de sommets $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ dans un espace métrique, le k -simplexe $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ consiste en l'enveloppe convexe de ces $(k + 1)$ déterminée par la métrique de l'espace ambiant choisie. Un simplexe n'est rien d'autre que la généralisation d'un triangle dans un espace de dimension n . Un 1-simplexe est un segment, un 2-simplexe un triangle dans le plan, un 3-simplexe un tétraèdre dans \mathbb{R}^3 et ainsi de suite, Fig. 3.2. Par analogie avec un triangle, nous pouvons définir les faces d'un simplexe comme étant la collection des sous-simplexes $(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)$, pour tout i , où $\hat{}$ signifie que l'élément a été omis. Toujours d'après la Fig.3.2, les faces du segment (a,b) sont les sommets (a) et (b), tandis que le segment (a,b) est une des faces du triangle (a,b,c). Nous désignons par *complexe simplicial* un ensemble de simplexes qui sont soit disjoints soit adjacents le long d'une face commune. Un exemple en est donné à la Fig. 3.3. Dans cette structure, nous distinguons deux trous : l'un est délimité par les 1-

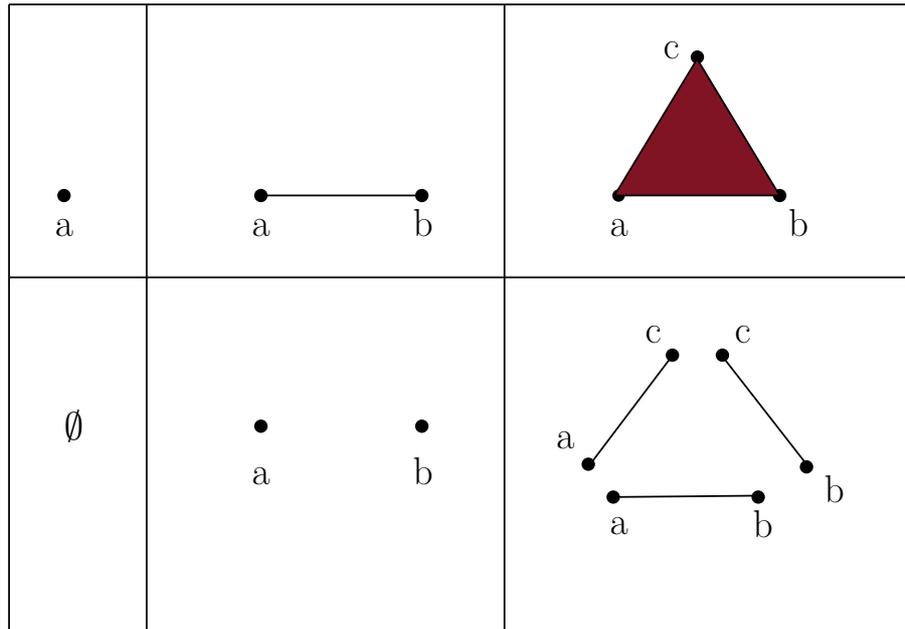


Figure 3.2.: Un n -simplexe est défini par l'enveloppe convexe de $n+1$ points dans un espace de dimensions n . Dans la rangée du haut sont représentés successivement un 0-simplexe, un 1-simplexe et un 2-simplexe. Dans la rangée du bas ce sont les faces de ces simplexes qui sont représentées.

simplexes (segments) $\{(v_2, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_8), (v_8, v_2)\}$ et l'autre est délimité par les segments : $\{(v_7, v_8), (v_8, v_9), (v_9, v_7)\}$. La seule différence entre les deux collections de simplexes $\{(v_7, v_8), (v_8, v_9), (v_9, v_7)\}$ et $\{(v_6, v_7), (v_7, v_8), (v_8, v_6)\}$ est que la dernière est constituée par des simplexes qui sont les faces du 2-simplexe (v_6, v_7, v_8) . Par conséquent, cette collection là ne forme pas un trou.

Formalisons ces intuitions : étant donné un complexe simplicial \mathcal{C} , définissons une k -chaîne comme étant un sous-ensemble de k -simplexes de \mathcal{C} . Par exemple, $\{(v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_8, v_2)\}$ est une 1-chaîne, et $\{(v_5, v_6), (v_7, v_9), (v_8, v_2)\}$ en est une autre. L'ensemble \mathcal{C}_k de toutes les k -chaînes est doté d'une *structure de groupe* lorsque l'on définit l'opération interne $i + j = (i \cup j) - (i \cap j)$ pour tout $i, j \in \mathcal{C}_k$ qui est une union disjointe. C'est une opération d'addition dans le corps \mathbb{Z}_2 : par exemple si deux sommets(a) et (b) sont disjoints alors $(a) + (b) = (a) + (b)$ tandis que $(a) + (a) = 0$. Ainsi, l'addition des deux 1-chaînes précédemment évoquées conduit à la 1-chaîne suivante : $\{(v_4, v_5), (v_7, v_9)\}$. Ainsi nous avons effectivement défini une structure de groupe \mathcal{C}_k , dont les éléments sont les k -chaînes. L'ensemble de tous les $(k - 1)$ -simplexes d'un k -simplexe σ forme la bordure de σ . Ceci nous permet de définir un *homomorphisme de groupe*

$$\partial_k : \mathcal{C}_k \rightarrow \mathcal{C}_{k-1} \tag{3.1}$$

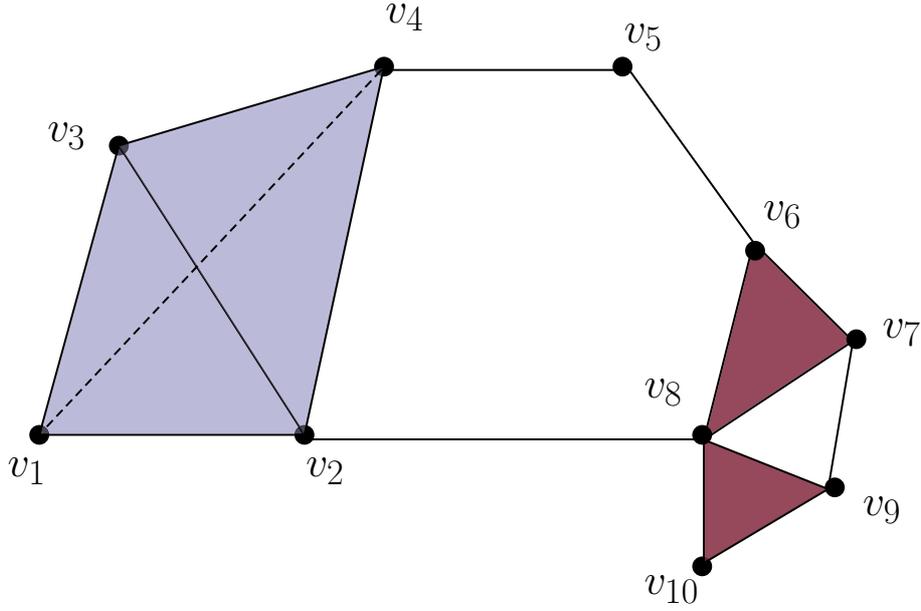


Figure 3.3.: Un complexe simplicial constitué d'un tétraèdre bleu : (v_1, v_2, v_3, v_4) , de deux triangles rouges : (v_6, v_7, v_8) et (v_8, v_9, v_{10}) , et de quatre segments noirs : (v_4, v_5) , (v_5, v_6) , (v_7, v_9) , et $(v_8 v_2)$.

agissant sur les k -chaînes, défini par :

$$\partial_k(\sigma) = \sum_i (v_1, v_2, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) \quad \forall \sigma = (v_1, v_2, \dots, v_k) \in c, \text{ où } c \in C_k. \quad (3.2)$$

C'est-à-dire que $\partial_k(\sigma)$ est la somme des bordures de σ . En faisant de même quelque soit k , on définit un complexe de chaîne C_* :

$$\dots \rightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2} \xrightarrow{\partial_{k-2}} \dots \rightarrow \emptyset \quad (3.3)$$

Un élément $u \in C_k$ est une *bordure* s'il existe $v \in C_{k+1}$ tel que $v = \partial_{k+1}(u)$. Un élément $u \in C_k$ est un *cycle* si $\partial_k(u) = 0$. Nous définissons donc les espaces

$$\begin{aligned} Z_k &= \ker(\partial_k) = \{u \in C_k, \partial_k(u) = 0\} \\ B_k &= \text{im}(\partial_k) = \{v \in C_{k-1}, \exists u \in C_k : v = \partial_k(u)\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le k -ème *groupe d'homologie* est défini par :

$$H_k = Z_k / B_{k+1} \quad (3.5)$$

Où / désigne un moins ensembliste. Le k -ème *groupe d'homologie* est donc composé par des éléments de C_k (des k -chaînes) qui sont des cycles mais qui ne sont pas des bordures. Nous

pouvons reprendre les exemples simples évoqués ci-dessus avec le formalisme adapté : le triangle $\sigma = (a, b, c)$ de la Fig. 3.2 a pour faces (a,b) , (b,c) et (c,a) . La bordure de σ est donnée par $\partial(\sigma) = (a, b) + (b, c) + (c, a)$. Si l'on applique une fois de plus l'application de bordure : $\partial_1((ab) + (bc) + (ca)) = (a) + (b) + (b) + (c) + (c) + (a) = 0$. Ceci montre que la k -chaîne $u = (ab) + (bc) + (ca)$ est un cycle. Mais c'est également une bordure, car $\partial_2(\sigma) = u$. Donc u n'est pas élément du premier groupe d'homologie de σ . La propriété $\partial_2 \circ \partial_1 = 0$ se généralise : $\partial_k \circ \partial_{k-1} = 0$.

Le rang de groupe H_k est le k -ème nombre de Betti :

$$\beta_k = \text{rank}(H_k) \quad (3.6)$$

Exprimé plus simplement, le nombre de Betti β_k compte le nombre de trous de dimension k présents dans le complexe simplicial considéré. Dans cette optique, un triangle (plein) n'a pas de trou, donc $\beta_1 = 0$, mais un ensemble de trois segments formant un triangle (vide) se caractérise par $\beta_1 = 1$. Pour avoir davantage d'intuitions concernant l'homologie simpliciale, ainsi que pour le calcul des groupes d'homologie, se référer à l'Annexe C.

Maintenant que les concepts d'homologie simpliciale ont été établis, nous allons décrire l'homologie persistante. Considérons la Fig. 3.5 : la caractéristique topologique principale consiste en un trou central, qui est bien plus imposant que les éventuels cycles qui peuvent se former à la périphérie. Les calculs menés ci-dessus permettent d'identifier, pour un complexe simplicial donné, les trous qui le composent. Mais alors se pose naturellement la question du choix du complexe simplicial sur lequel calculer l'homologie lorsqu'un nuage de points est à disposition. En effet, si nous choisissons de partir du plus grand simplexe possible formé par tous les points dont nous disposons, autrement dit si pour N points de données $\{v_1, \dots, v_N\}$ nous formons le $(N-1)$ -simplexe (v_1, \dots, v_N) et calculons ses groupes d'homologies, alors nous ne verrions pas ce trou central, car s'il s'identifie certes comme un cycle il sera également une bordure du $(N-1)$ -simplexe. Si au contraire nous nous choisissons les plus petits simplexes possibles, nous ne verrons pas davantage cette caractéristique principale qui ne serait alors même plus un cycle. De même si nous dessinons "à la main", de façon aléatoire un complexe simplicial à partir de ce nuage de points, nous risquerions très probablement de passer à côté de cette caractéristique, sans parler de la reproductibilité du calcul pour le moins hasardeuse.

Pour surmonter cette difficulté, nous allons composer une *filtration* du nuage de points. A l'instar de la théorie des probabilités, une filtration est une séquence d'ensembles emboîtés

$K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n = K$ de sorte que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, K_{i+1} contienne plus d'informations que K_i . Nous construisons cette filtration de la façon suivante : nous fixons d'abord un seuil $\rho \in \mathbb{R}_*^+$. Alors, une famille de points $\{v_1, \dots, v_p\}$ forme un $(p-1)$ -simplexe si, et seulement si :

$$\forall 1 \leq i, j \leq p, \quad d(v_i, v_j) \leq \rho$$

où $d(\cdot, \cdot)$ est une métrique de l'espace dans lequel reposent les données. Pour une telle famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ nous allons former le plus grand simplexe possible, ici le p -simplexe (v_1, \dots, v_p) , mais nous ne formons pas les simplexes de plus faibles dimensions comme par exemple (v_1, v_2, v_3) . A un seuil fixé ρ , nous formons tous les plus grands simplexes possibles. L'ensemble de ces simplexes forme le complexe simplicial R_ρ dit complexe de Vietoris Rips. Puis, le seuil ρ est augmenté, $\rho' = \rho + \epsilon$, et la même opération est effectuée, Fig. 3.4. Naturellement, si $\rho' > \rho$, alors $R_{\rho'} \supset R_\rho$. L'observation clef est que le nuage de points $\{v_i\}_{i=1}^N$ étant un ensemble fini, un nombre fini de complexes de Vietoris Rips est suffisant pour décrire entièrement la famille continue $\{R_\rho\}_{\rho>0}$. Autrement dit, nous pouvons nous limiter à une famille finie de complexes $K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n = K$ pour former une filtration. Pour un $\rho \in \mathbb{R}$ donné, il existe un K_i dans la filtration $K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n = K$ qui soit homéomorphe à R_ρ . K_1 est l'ensemble des 0-simplexes, c'est-à-dire les points de données eux-mêmes ; K est le $(N - 1)$ -simplexe formé à partir de tous les points de données. Dans la Fig. 3.2 une filtration pour le triangle pourrait être : $\emptyset \subset K_1 = (a), (b), (c) \subset K_2 = (ab), (ac), (bc) \subset K_3 = (abc)$. Cette filtration s'organise d'abord en ajoutant les sommets, puis les arêtes, puis enfin le triangle plein. A chacune des étapes il est possible de calculer les groupes d'homologie qui se basent sur une chaîne de complexes $\cdots \rightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2} \xrightarrow{\partial_{k-2}} \cdots$. Alors, l'inclusion $K_i \subset K_{i+1}$ induit un homomorphisme canonique de groupe f^i entre les k -chaînes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow \partial_3 & & \downarrow \partial_3 & & \downarrow \partial_3 & \\
 C_2^0 & \xrightarrow{f^0} & C_2^1 & \xrightarrow{f^1} & C_2^2 & \xrightarrow{f^2} & \cdots \\
 & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_2 & \\
 C_1^0 & \xrightarrow{f^0} & C_1^1 & \xrightarrow{f^1} & C_1^2 & \xrightarrow{f^2} & \cdots \\
 & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & \\
 C_0^0 & \xrightarrow{f^0} & C_0^1 & \xrightarrow{f^1} & C_0^2 & \xrightarrow{f^2} & \cdots \\
 & \downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_0 & \\
 0 & \xrightarrow{f^0} & 0 & \xrightarrow{f^1} & 0 & \xrightarrow{f^2} & \cdots
 \end{array} \tag{3.7}$$

où l'exposant \cdot^i correspond à la position i dans la filtration. La première colonne correspond donc au calcul de l'homologie pour le complexe simplicial K_0 , la deuxième s'adresse au calcul correspondant au complexe K_1 et ainsi de suite. Nous pouvons donc suivre l'évolution de ces groupes d'homologie le long de la filtration, et garder la trace de la naissance et de la disparition de ces groupes. Un élément d'un groupe d'homologie peut donc apparaître dans le complexe de Rips K_i puis disparaître dans le complexe K_j , c'est-à-dire que l'inclusion $K_i \subset K_j$ induit un homomorphisme de groupes entre les groupes d'homologie : $f_n^{ij} : H_n(K_i) \rightarrow H_n(K_j)$. Cette évolution est représentée dans un diagramme de persistance, qui consiste en une collection de points que nous dénoterons par $\{(x_i x_j)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$. L'existence de ces applications f_n^{ij} est justifiée par les propriétés fonctorielles de l'homologie persistante telle que nous l'avons échaufaudée. De façon formelle :

Définition 3.1 (Groupes d'homologies persistants et diagrammes de persistance). Soit un ensemble de points $\mathcal{X} = \{a_i\}_{i=1}^N$ et une filtration sur ce nuage de points $K_0 \subset K_1 \cdots \subset K_p$. Nous définissons les groupes d'homologie comme l'image des applications $f_n^{ij} : H_n(K_i) \rightarrow H_n(K_j)$. Ce sont donc l'ensemble des classes d'homologies qui sont apparues au temps i et qui n'ont pas encore disparues au temps j . Les nombres $\beta_n^{ij} = \text{rank}(\text{Im})$ (où rank désigne le rang, et Im l'image) sont appelés les *nombre de Betti*. Le diagramme de persistance est l'ensemble des points $\{(x_i x_j)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ correspondant aux valeurs β_n^{ij} .

Si l'on applique cette démarche aux données figurant à la Fig. 3.5, un cycle central se formera assez rapidement, mais disparaîtra après un temps plus long que tout les autres cycles qui peuvent se former pendant la filtration. Cela se traduit par un point isolé des autres dans le diagramme de persistance de la Fig. 3.5. Les diagrammes de persistance restent stables par rapport au bruit : une faibles variation des points de données n'entraînera pas de modification substantielle du diagramme de persistance, [59]. Cela veut dire que plusieurs tirages des données de la Fig. 3.5 produirons quasiment les mêmes diagrammes de persistance. La définition des nombres de Betti nous fournit également le moyen de les obtenir à partir du diagramme de persistance. Pour un complexe simplicial donné, le nombre de Betti correspond au nombre de trous dans la structure. Alors, au "temps" ρ de la filtration, le nombre de Betti β_ρ est le nombre de trous qui sont apparus pour $\rho_1 < \rho$ et qui disparaîtront pour un $\rho_2 > \rho$. Pour trouver le nombre de Betti β_ρ dans un diagramme de persistance il suffit donc de compter le nombre de points contenus dans une boîte délimitée par $(y > \rho) \cap (x < \rho)$, Fig. 3.6.

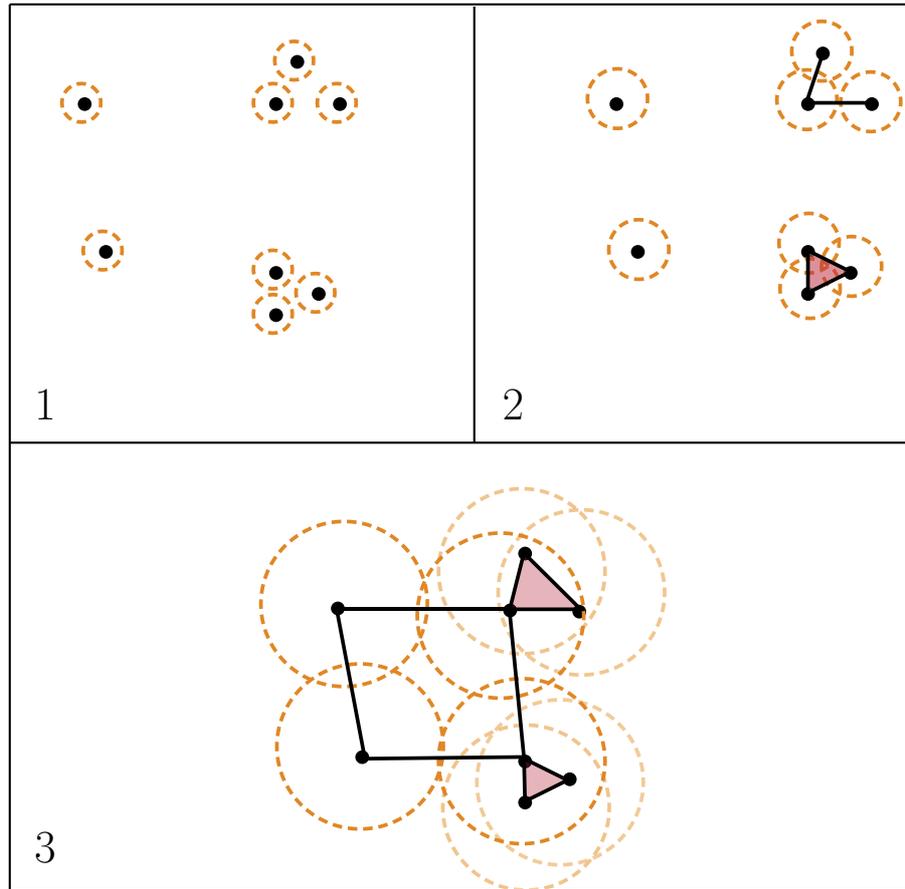


Figure 3.4.: Quelques étapes de la filtration de Vietoris-Rips. Un cycle se crée à la troisième étape (également à la deuxième en tant que bord du triangle). Il disparaîtra lorsque les quatre cercles centrés aux quatre sommets correspondant s'intersecteront.

3.2.2 Homologie persistante dans le groupe des rotations

Nous allons donc appliquer les calculs précédents pour un nuage de points constitué par des matrices de dilations, qui sont des matrices de rotations. Nous devons donc choisir une métrique qui tient compte de cette spécificité. Nous avons choisit la métrique invariante sur $SO(n)$, grâce à laquelle la distance entre deux matrices A , et B de $SO(n)$ s'écrit, [30] :

$$d(A, B) = \left\| \log \left(A^T B \right) \right\| \quad (3.8)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme de Frobenius. Prenons pour exemple le signal de la Fig. 3.7-(a) issu d'un modèle ARMA périodique d'ordre 2. Après avoir calculé 20 séquences de 3 parcours chacune nous avons représenté en (b) la trajectoire formée sur le groupe $SO(3)$. Le groupe $SO(3)$ a été représenté par la boule unité : pour une matrice de rotation, notons $u \in \mathbb{R}^3$ la direction de l'axe de rotation et $\theta \in [-\pi, \pi]$ l'angle de rotation autour de cet axe. Alors $U = \theta u \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur

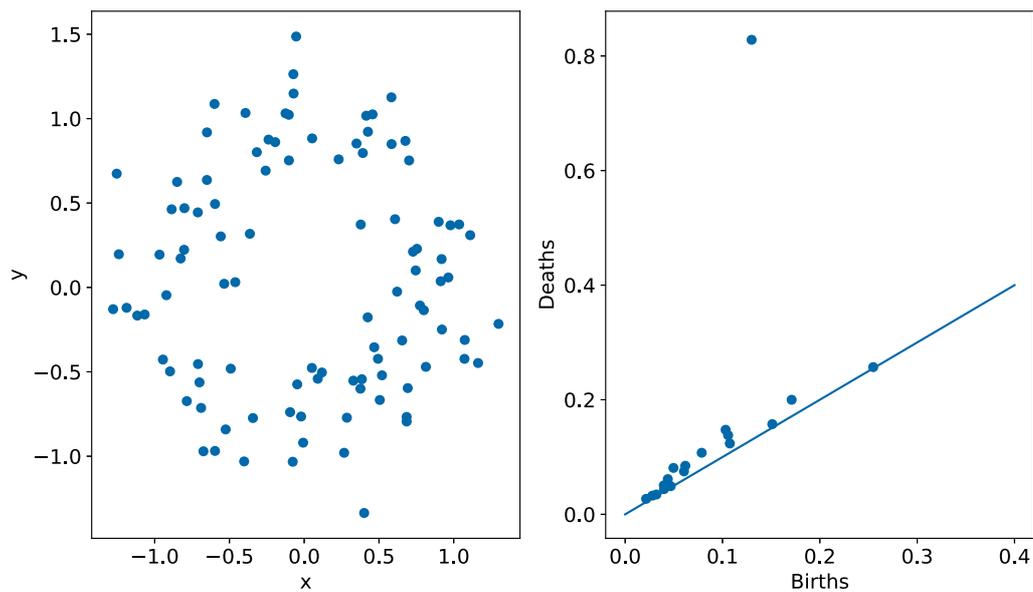


Figure 3.5.: Un cercle bruité. Le point isolé dans le diagramme de persistance traduit l'organisation circulaire de ce nuage de points.

de la boule unité qui représente une rotation. La courbe ainsi tracée semble indiquer la présence d'un trou important et d'un autre trou plus petit. Le diagramme de persistance de ce nuage de points dans $SO(3)$ est représenté à la Fig. 3.8. Les deux caractéristiques principales de ce nuage de points sont bien restituées par les deux points les plus éloignés de la diagonale.

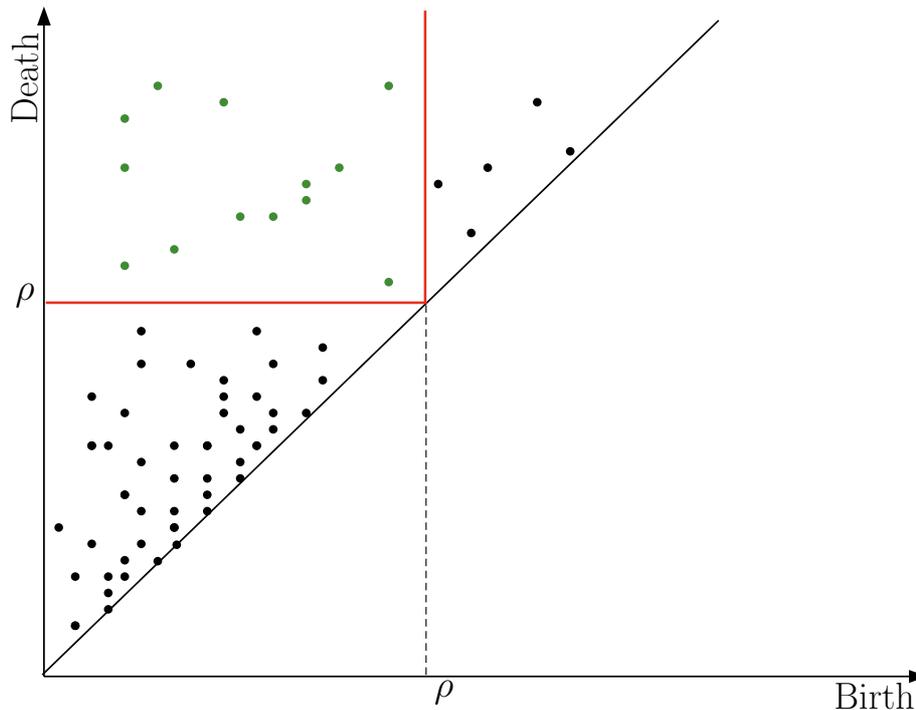


Figure 3.6.: Le nombre de Betti au temps ρ , β_{rho} , est donné par le nombre de points en vert. En faisant varier ρ , nous obtenons la séquence des nombres Betti.

3.3 Résultat : classification topologique de processus PC

3.3.1 Classification de processus PC selon leurs caractéristiques topologiques

Nous allons ici démontrer que les caractéristiques topologiques révélées par l'homologie persistante constitue effectivement une *signature* du signal sous-jacent. Pour évaluer les différences entre les structures topologiques cachées des processus PC, nous avons conduit un test de classification. Lorsqu'un ensemble de diagrammes de persistance est donné, deux approches sont possibles pour mener à bien une classification se basant sur ces diagrammes. La première consiste à considérer le diagramme comme un objet en tant que tel, et à classer ces objets en se donnant une mesure de distance entre ces objets, [34]. Dans cette même optique, un réseau de neurones profond peut également être utilisé, [80]. La seconde approche consiste à vectoriser les diagrammes, c'est-à-dire à encoder un maximum d'informations possible dans un vecteur, puis de classer ces vecteurs par des procédures d'apprentissage (machine learning) de type SVM, K-NN ou regression logistique. Nous avons choisi cette deuxième approche, car

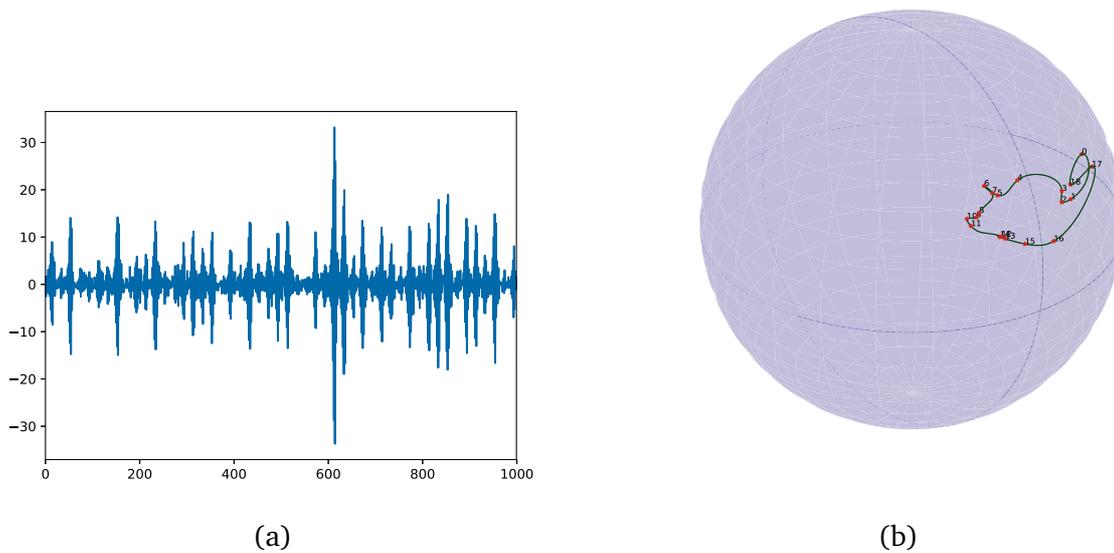


Figure 3.7.: (a) Un exemple d'un signal PC générée à partir d'un modèle ARMA d'ordre 2. 1000 échantillons on été tirés, avec 20 point par périodes. (b) La trajectoire sur le groupe $SO(3)$ formée par les matrices de dilations de ce signal. La trajectoire est représentée à l'intérieur d'une boule unit e.

elle nous a permis de mettre en avant certains indicateurs clefs dans la signature des processus PC. En effet une classification de type Deep-Learning ne permet pas d'accéder et d'interpréter facilement les critères sur lesquels se fondent la classification. De plus, la complexité du problème étant relativement faible, les performances des techniques de machine learning usuelles sont avantageuses par rapport à une méthode de type deep learning. Pour conduire notre test de classification, nous avons générée 500 signaux pour chacun des modèles suivants, où ϵ_t désigne un bruit blanc gaussien :

- Un processus à moyenne glissante périodique (periodic moving average) : $S_t^1 = \epsilon_t + \theta_t \times \epsilon_{t-1}$ où, $\theta_t = 1 + 0.25 \times \cos(2\pi t/T)$
- Une somme d'un processus stationnaire et d'une séquence périodique : $S_t^2 = A \times \cos(\pi t/T) + \epsilon_t$
- Un produit entre un processus stationnaire et un processus périodique : $S_t^3 = [1 + m \times \cos(2\pi t/T)] \times \epsilon_t$
- Une modulation temporelle d'une séquence stationnaire : pour un processus stationnaire $Y_t = 0.9X_{t-1} + \epsilon_t$ le processus PC est obtenu par $S_t^4 = Y_{t+f_t}$ où $f_t = f_{t+T}$ est une permutation des entiers $1, 2, \dots, T$.

Chacune des réalisations comporte 62 périodes avec 260 points par période, la période de chaque signal est de 32. Un tirage de chaque signal est présenté en Fig. 3.9.

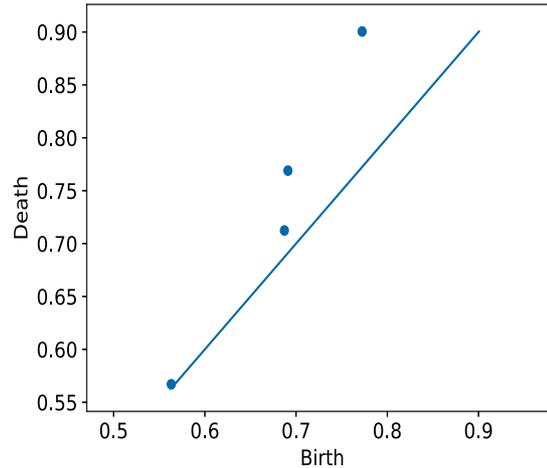


Figure 3.8.: Le diagramme de persistance à l'ordre 1 du signal de la Fig. 3.7-(a) . Deux trous se distinguent, dont l'un est plus important que l'autre.

Puis, les ensembles de matrices de dilations ont été calculés pour toutes les réalisations de chaque modèle, et les diagrammes de persistance à l'ordre 0 et 1 en ont été déduits. Le calcul des parcours a été effectué grâce au package `perARMA` sous R, et nous avons utilisé `dionysus` [112, 59] sous Python pour obtenir les diagrammes de persistance. Nous avons ensuite utilisé les implémentations des algorithmes de machine learning disponibles dans la librairie `Sklearn` de Python. Nous nous sommes limité à des séquences de 10 parcours pour construire les matrices de dilations, ce qui implique que nous avons travaillé avec des matrices de dilations de taille 10×10 . Une procédure pour évaluer le nombre de parcours à prendre en considération consiste à analyser le corrélogramme et la fonction d'autocorrélation partielle, comme cela est fait habituellement pour calquer un modèle ARMA sur un processus aléatoire, dans le but de ne pas choisir un nombre de parcours trop important. En effet la fonction d'autocorrélation partielle s'annule à partir d'un certain pas. Les diagrammes de persistance correspondant aux quatre réalisations de la Fig. 3.9 sont donnés à la Fig. 3.10.

Il est extrêmement difficile de distinguer les différences entre ces diagrammes à l'oeil nu. Ceci vient renforcer la nécessité de mettre en avant des caractéristiques, des indicateurs, qui vont synthétiser l'information contenue dans ces diagrammes et la rendre intelligible. Pour ce faire, adoptons la notation $D_{\mathcal{X}} = \{x_i, y_i\}$ pour désigner le diagramme de persistance d'un ensemble de points \mathcal{X} . Le vecteur de caractéristiques que nous allons associer au diagramme $D_{\mathcal{X}}$ est constitué de caractéristiques polynomiales, statistiques, ainsi que d'indicateurs se basant sur l'entropie et sur la séquence des nombres de Betti :

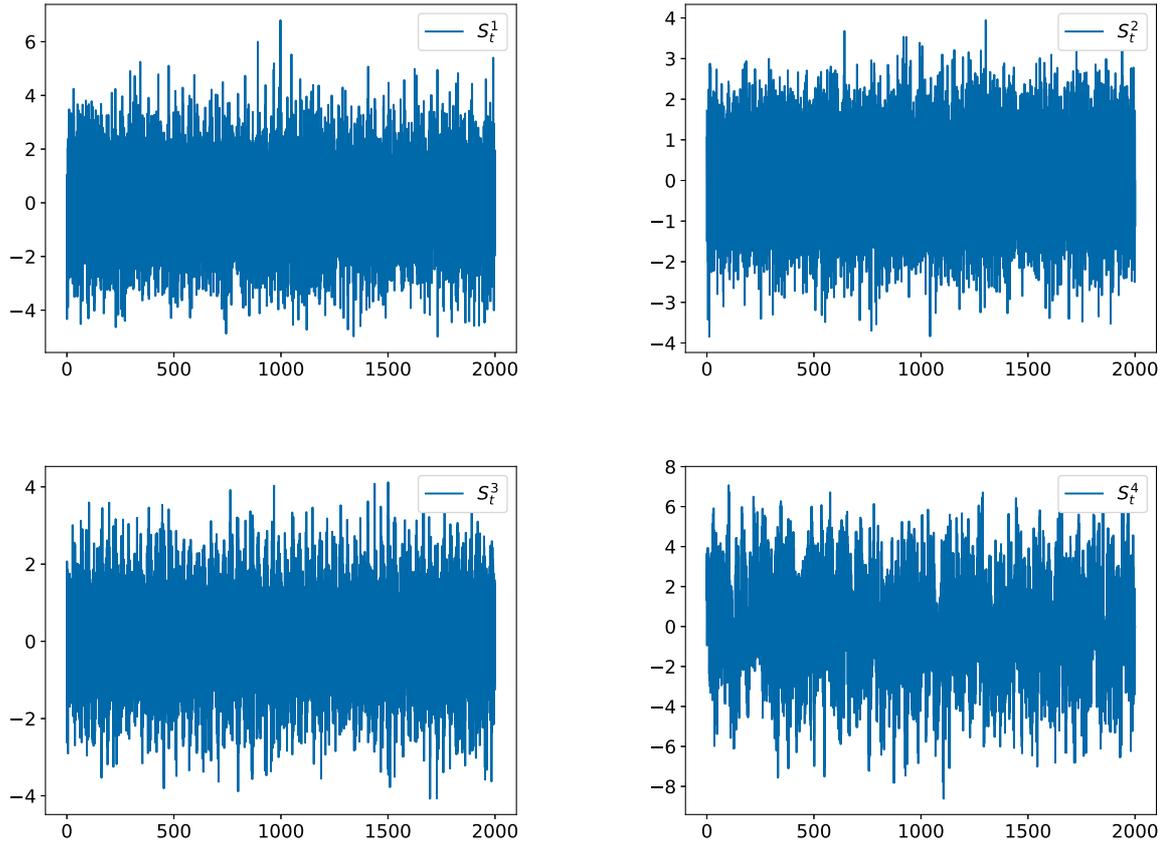


Figure 3.9.: Une réalisation de chaque modèle utilisé dans notre classification. Chaque signal est périodiquement corrélé de période 32.

- **Caractéristiques polynomiales :** $f_1 = \sum_{i=1}^n y_i - x_i$, $f_2 = \sum_{i=1}^n n(y_i - x_i)$,
 $f_3 = \sum_{i=1}^n (y_{max} - x_i)(y_i - x_i)$, $f_4 = \sum_{i=1}^n n * (y_{max} - x_i)(y_i - x_i)$,
 $f_5 = \sum_{i=1}^n (y_{max} - x_i)^2(y_i - x_i)^4$,
 $f_6 = \sum_{i=1}^n (y_{max} - x_i)^2(y_i - x_i)^4$.
- **Caractéristiques statistiques :** $g_1 = mean(x_i)$, $g_2 = mean(y_i)$, $g_3 = mean(y_{max} - x_i)$,
 $g_3 = mean(y_{max}x_i)$, $g_4 = mean(y_i x_i)$, $g_5 = std(x_i)$, $g_6 = std(y_i)$, $g_7 = std(y_i - x_i)$,
 $g_8 = std(y_i - x_i)$, où *std* désigne l'écart-type et *mean* la moyenne.
- **Coefficients de régression :** Les points du diagramme sont triés par ordonnées croissantes, puis une régression linéaire est effectuée. Nous conservons la pente de la droite obtenue comme indicateur.
- **Caractéristiques liées à l'entropie :** $H = -\frac{1}{\log(N)} \sum_i p_i \log(p_i)$, où $p_i = l_i/L$, $l_i = y_i - x_i$ pour les points tels que $x_i < y_i$ (les points sur la diagonale ne sont pas pris en compte) et $L = \sum_i l_i$. Cet indicateur, appelé *entropie persistante normalisée* mesure le désordre présent

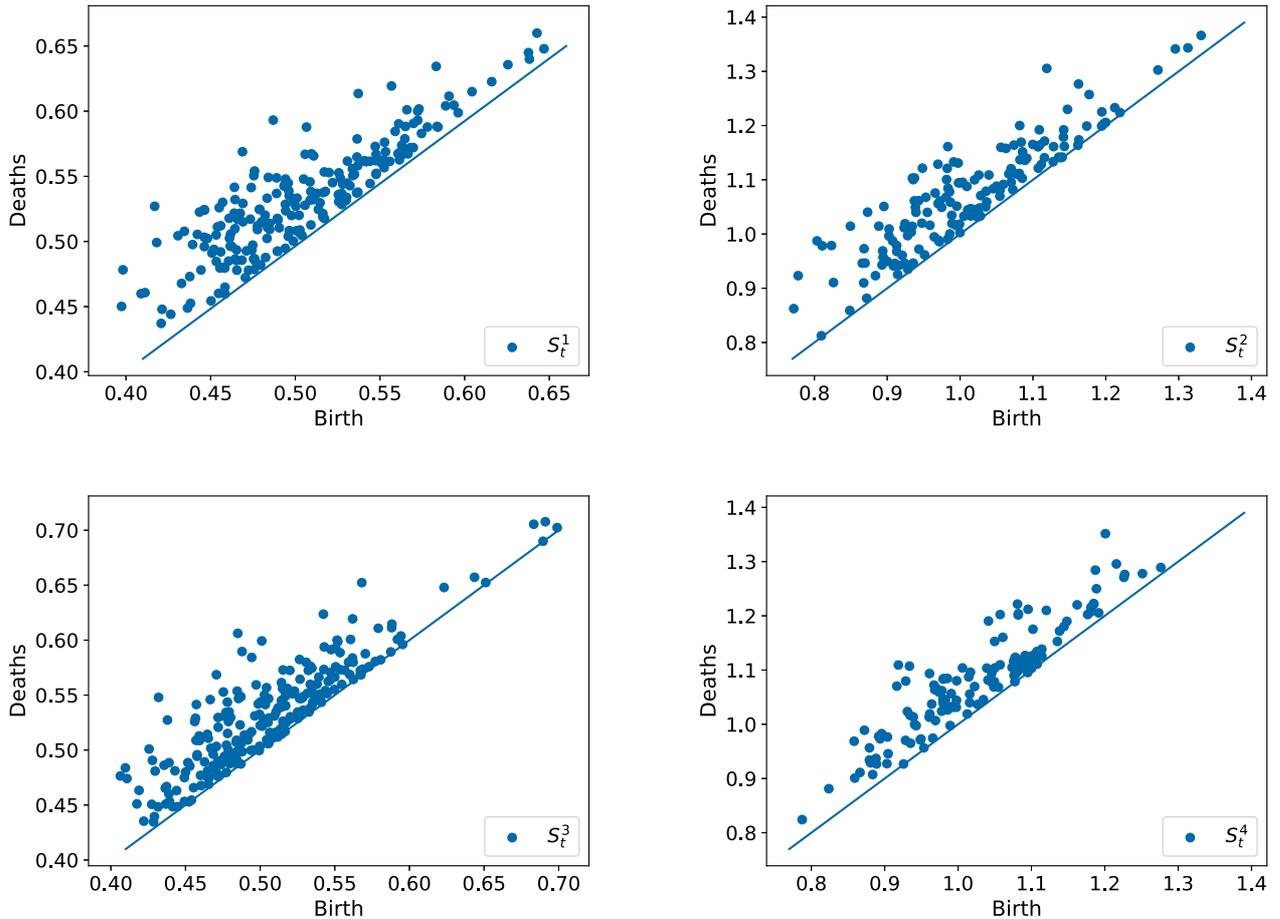


Figure 3.10.: Les diagrammes de persistance pour une réalisation de chacun des processus figurant à la Fig. 3.9. 32 séquences de 10 parcours chacune ont été utilisées pour obtenir le nuage de matrice de dilution. Les diagrammes de persistance ont été obtenus avec le package Dionysus sous Python.

dans le diagramme. L'entropie persistante a vraisemblablement été mentionnée pour la première fois dans [41, 124].

- Caractéristiques liées à la séquence de Betti : $b_1 = \min(b_i)$, $b_2 = \max(b_i)$, $b_3 = \text{std}\{b_i\}$ où b_i est la séquence de Betti du diagramme.

Nous avons donc un vecteur de caractéristiques de taille 36. Nous avons pris en compte beaucoup plus de caractéristiques que celles qui ont été envisagées dans [120, 70, 2, 24]. Nous motivons ce choix par la volonté de prendre en considération l'ensemble des éléments pouvant synthétiser un diagramme de persistance, que ce soit des facteurs statistiques, polynomiaux, liés à l'entropie... Nous avons souhaité garder un maximum d'information et ne pas nous limiter à un aspect spécifique. En particulier certains indicateurs jouent un rôle plus important que d'autres. Notamment, comme notre nuage de points est une réalisation d'un phénomène aléatoire, les diagrammes

de persistance héritent de cet aspect aléatoire. Nous allons voir que l'entropie persistante est particulièrement adaptée pour tenir compte de ce phénomène.

Quelques étapes de pré-traitement sont néanmoins nécessaires avant d'effectuer une classification. Les indicateurs choisis étant de natures différentes, nous devons les normaliser avec une méthode de rescaling, qui transforme une variable aléatoire en une autre variable aléatoire centrée réduite. Le nombre de caractéristiques que nous avons retenues étant relativement élevés et étant donné que certaines de ces caractéristiques pourront *in fine* se révéler inutiles nous avons procédé à une réduction de dimension : nous avons des vecteurs de taille 37, que nous voyons comme des vecteurs dans \mathbb{R}^n . Nous avons choisi pour cela d'appliquer une ACP à noyau, qui se comporte de façon adéquate en présence d'une répartition des données non-linéaires. Finalement, la classification a été réalisée au moyen d'un algorithme SVM (support vector machine) à noyau. Pour juger de la qualité de notre classifieur, l'ensemble des données a été séparé en deux sous-ensembles, selon une proportion 70/30 : 70% des données ont été utilisées pour entraîner le modèle, et 30% ont été utilisées pour le tester. La même procédure de partitionnement a été répétée 500 fois. Si nous nous limitons à seulement 2 composantes principales, la classification donne un score de 75%, ce qui n'est pas suffisant pour discriminer certains processus. Ce point est illustré à la Fig. 3.11-(a) où les signaux S_t^1 , S_t^2 et S_t^3 ne peuvent pas être correctement différenciés, même si, comme nous pouvons le constater à la Fig. 3.11-(b), certaines classes de processus sont clairement distinctes. Les meilleurs résultats de classification ont été obtenus lorsque 10 composantes principales ont été retenues. Nous avons obtenu en moyenne un score de 98.7% de classifications correctes. Bien entendu, les paramètres optimaux de la SVM (la sensibilité et le paramètre du noyau Gaussien) ont été obtenus par validations croisées.

Ce résultat est significatif car il confirme l'importance des caractéristiques topologiques que l'on peut extraire des processus stochastiques par la dilation. Nous pouvons aller plus loin en analysant la contribution des caractéristiques aux composantes principales, c'est-à-dire en observant à quel point chaque composante du vecteur de caractéristiques (de taille 36) influe sur la classification. Nous ne pouvons visualiser les résultats qu'en dimension deux, ce qui implique de se limiter à deux composantes lors de l'ACP, mais cela suffit pour se faire une idée très correcte de l'influence de chacun des facteurs. Il s'agit d'un cercle de corrélations : la projection des vecteurs sur les axes de coordonnées indique à quel point ces paramètres sont corrélés aux axes principaux. Les résultats sont reportés à la Fig. 3.12.

Nous observons que les caractéristiques s'agglomèrent par petits groupes. Pour interpréter ce schéma, il faut noter que :

- Les variables positivement corrélés sont regroupées.
- Les variables négativement corrélés sont sur positionnées sur des quadrants opposés.

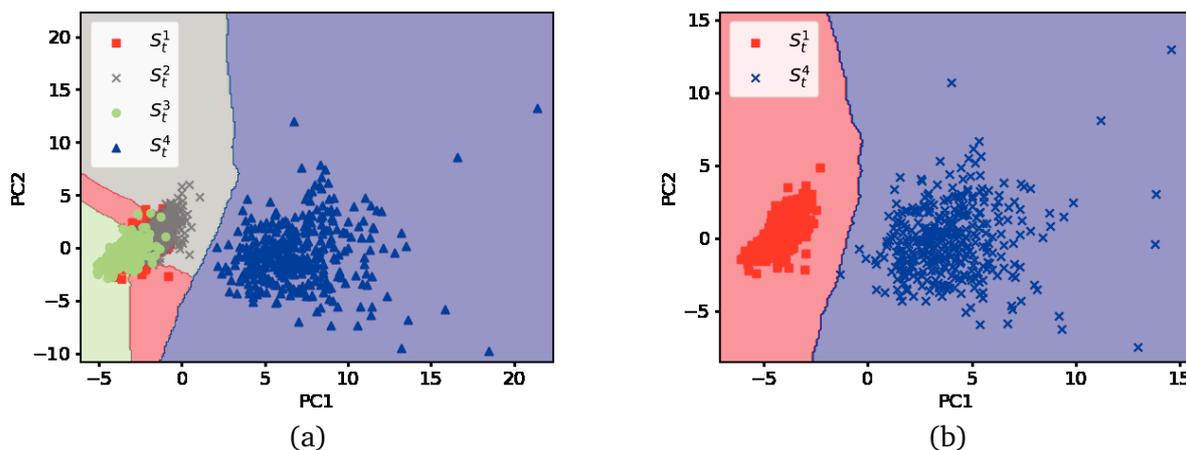


Figure 3.11.: Projection des données après une réduction de dimension à deux composantes principales, (a) Les données ne peuvent pas être différenciées avec seulement deux composantes principales. (b) Certains processus sont néanmoins bien distinguables.

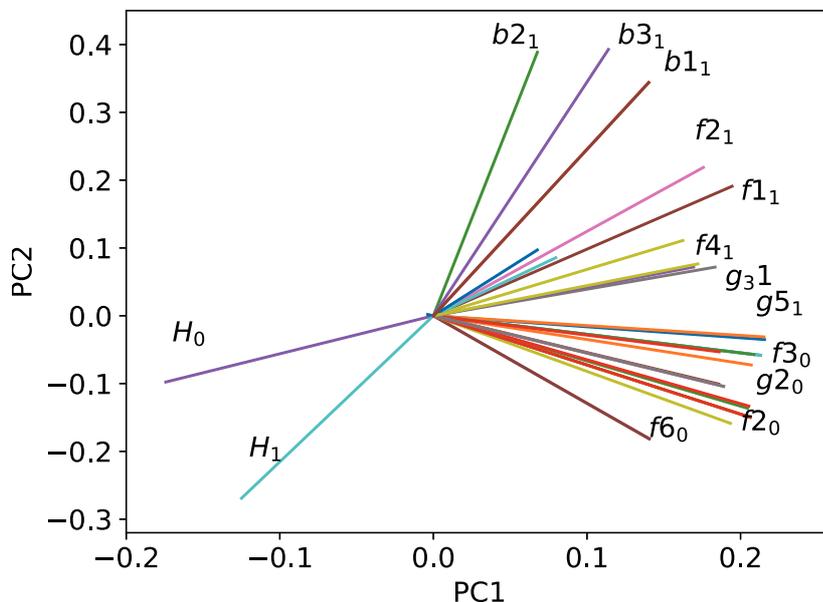


Figure 3.12.: Contributions des caractéristiques aux axes principaux PC1 et PC2. H_i désigne l'entropie persistante normalisée à l'ordre $i = 0, 1$; f_i , les caractéristique polynomiales à l'ordre i , b_i les caractéristique de Betti à l'ordre i . Le rôle singulier de l'entropie persistante est clairement visible.

- La distance entre les variables et l'origine mesure la qualité de la représentation des variables. Les variables associées à un vecteur de grande longueur sont bien représentées par l'ACP.

Nous pouvons dénombrer 10 groupes principaux, ce qui explique également que le choix de ne retenir que 10 composantes principales est judicieux. Nous remarquons que la première composante (PC1) distingue particulièrement les indicateurs d'entropie persistante du reste des indicateurs. La deuxième composante principale (PC2) a tendance à séparer les composantes d'ordre zéro (c'est à dire correspondant au diagramme d'ordre zéro) des composantes d'ordre 1 (diagramme d'ordre 1) : l'entropie persistante d'ordre zéro est au-dessus de celle d'ordre 1 ; la situation est symétrique pour le reste des indicateurs. Les indicateurs associés aux nombres de Betti d'ordre 1 sont isolés, et donc ne peuvent pas être exclus de l'analyse. L'entropie persistante joue un rôle tout particulier : sa contribution aux composantes principales est négative ; ce qui veut dire que la distinction entre les classes est très sensible à ce paramètre. Nous allons dans la section suivante explorer davantage ces paramètres et notamment leur distribution statistique.

3.3.2 Distributions statistiques des caractéristiques topologiques.

Les aspects statistiques de certains invariants topologiques des graphes aléatoires ont été étudiés dans [28] et dans [71]. Les auteurs montrent que lorsque des points sont positionnés aléatoirement dans l'espace, par exemple selon une distribution uniforme dans un cube unité, la séquence des nombres de Betti formée par ce nuage de points, qui est donc une fonction aléatoire, suit une distribution particulière. Nous allons nous baser sur ces résultats et les étendre à l'entropie persistante. Tout d'abord, insistons sur l'aspect statistique des diagrammes de persistance que nous avons obtenus. Contrairement à d'autres auteurs qui ont appliqué l'homologie persistante sur une seule réalisation d'un signal aléatoire [118, 119], notre approche est davantage probabiliste. En effet, les tirages répétés des signaux aléatoires utilisés dans notre test de classification nous permettent une description probabiliste des diagrammes de persistance, et donc de l'information topologique contenue dans la structure des données. En regard des résultats de la section précédente, nous allons particulièrement nous intéresser à l'entropie persistante normalisée et à

la séquence des nombres de Betti. Etant donnée une loi de probabilité discrète de cardinal N , l'entropie normalisée est définie par :

$$H_N(p) = -\frac{1}{\log(N)} \sum_{i=1}^N p_i \log(p_i)$$

L'entropie maximum (en l'absence de contraintes) est atteinte pour une distribution uniforme et vaut $\log(N)$. L'entropie normalisée prend donc ses valeurs entre 0 et 1. Pour une variable aléatoire, l'entropie révèle la quantité d'information qu'il est possible d'extraire de l'observation de ses réalisations. Une autre façon de définir l'entropie consiste à trouver une distribution de probabilité en faisant le moins de suppositions possibles (on parle alors de densité de probabilité à maximum d'entropie). Par exemple, comme nous l'avons mentionné précédemment, si l'on se donne un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} alors la distribution de probabilité que l'on peut créer dans cet intervalle sans faire aucune hypothèse sur ses paramètres est la distribution uniforme. C'est la distribution à maximum d'entropie. Si nous faisons l'hypothèse que la variance de cette loi de probabilité est fixée à σ , alors la densité de probabilité à maximum d'entropie est à présent une Gaussienne. L'entropie persistante normalisée indique si une structure particulière émerge du diagramme de persistance, en comparant la durée de vie des groupes d'homologie le long de la filtration. Si les points d'un nuage de points sont uniformément espacés les uns par rapport aux autres, de sorte que les cycles formés par cette structure aient tous la même durée de vie, en regard de la filtration de Vietoris-Rips, alors toutes les longueurs $l_i = y_i - x_i$ dans le diagramme de persistance seront égales, et $H = 1$.

Pour illustrer cet exemple, suivons l'évolution de l'entropie persistante d'un nuage de points formant un cercle plus ou moins bruité, Fig. 3.13. La figure de gauche illustre un cercle moyennement bruité : le trou central est clairement visible et dominant. Cela se traduit par un point isolé dans le diagramme de persistance, plus éloigné de la diagonale que les autres, c'est-à-dire un point (x_i, y_i) de sorte que la quantité $l_i = y_i - x_i$ soit bien plus importante que pour tous les autres points. La répartition des probabilités $\left\{ p_i = \frac{l_i}{\sum_{i=1}^n l_i} \right\}$ associée par la définition de l'entropie persistante est très "hétérogène", c'est-à-dire éloignée de la distribution uniforme, selon laquelle tous les p_i seraient égaux. La valeur de l'entropie est donc faible. Cette répartition des probabilités correspond à la répartition des cycles présents dans la structure, autrement dit aux nombres de "petits cycles" et de "grands cycles". Si les données sont un peu plus bruitées, comme c'est le cas dans la figure du milieu, le trou central sera un peu moins visible car il est davantage probable que des points viennent s'y placer au gré des tirages aléatoires. La répartition des cycles est moins inégale que dans l'exemple précédent et se rapproche d'une distribution uniforme : la

valeur de l'entropie augmente. Enfin, si les données sont fortement bruitées, de sorte à ce que le nuage de points semble être issu d'un tirage uniforme dans l'espace, le trou central disparaît complètement, et tous les cycles ont la même durée de vie. L'entropie persistante atteint sa valeur maximum.

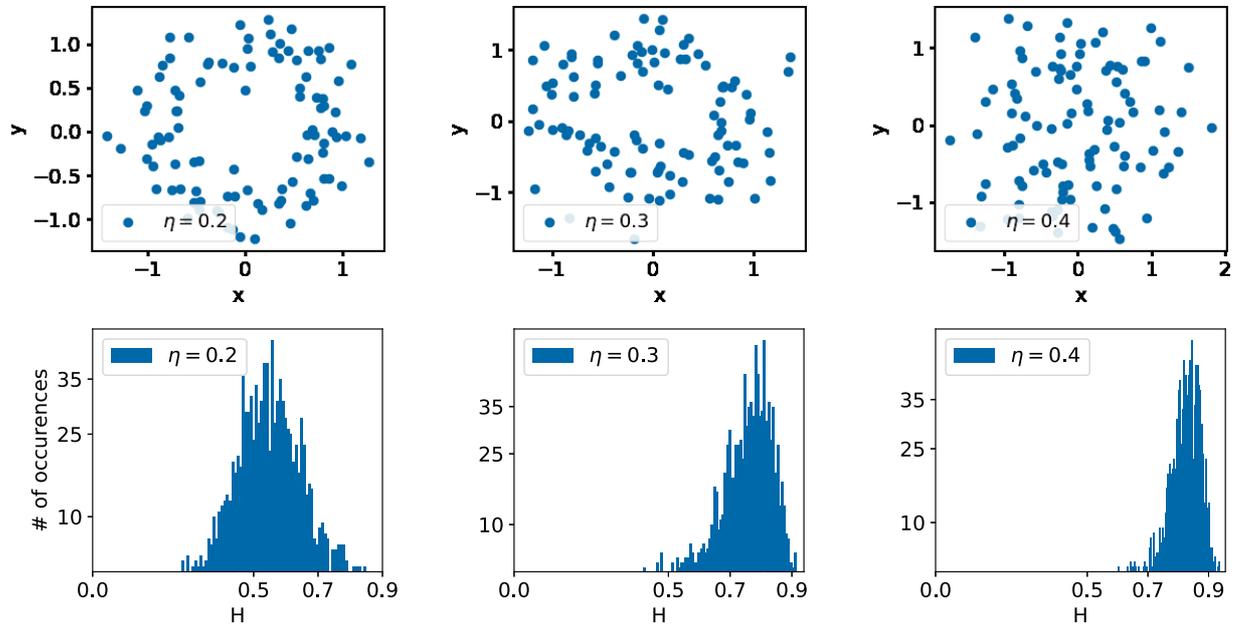


Figure 3.13.: 500 réalisations d'un cercle bruité ont été générées pour trois niveaux de bruit $\eta = 0.2, \eta = 0.3, \eta = 0.4$. Haut : un exemple du nuage de point obtenu pour chaque niveau de bruit. Bas : les histogrammes des valeurs d'entropies persistantes correspondants.

Nous remarquons également que l'histogramme est plus étalé dans la figure de gauche que dans celle de droite. Nous mesurons l'entropie d'un phénomène aléatoire et la question est donc de savoir pourquoi la dispersion de cette mesure est plus importante dans le cas de gauche, que dans le cas, quasi-complètement aléatoire, de droite. Il est possible que lors d'un tirage particulier issu d'une distribution uniforme dans l'espace, les données se positionnent le long d'un cercle. Mais la probabilité en est extrêmement faible car cette possibilité ne représente qu'un nombre extrêmement faible de cas envisageables, de même qu'il est très peu probable que tout le gaz d'une boîte se place à l'instant t seulement dans la moitié droite de la boîte. Ainsi les tirages effectués dans cette configuration ne différeront en réalité que très peu. L'entropie mesurée dans chacun des tirages sera quasiment la même. La liberté la plus absolue induit donc une certaine homogénéité dans les résultats. La situation est très différente dans la figure de gauche. Ici, il n'est pas impossible qu'un point (il n'en suffit que d'un seul) vienne se placer aléatoirement dans le trou central et par conséquent détruit la structure du nuage de points. Cela a pour effet d'augmenter la variance de la distribution car la valeur de l'entropie mesurée dans ce cas-ci,

c'est-à-dire lorsqu'un point se trouve au milieu de la structure circulaire, sera alors augmentée.

A présent, traçons la distribution de l'entropie persistante pour les processus PC que nous avons étudiés. Les résultats sont reportés à la Fig. 3.14 et à la Fig. 3.15. Nous pouvons voir que chacun des processus possède un degré de liberté différent, ce qui rend les distributions distinguables. Nous voyons par exemple que S_t^2 est un processus dont la non-stationnarité est plus "contrainte" que les autres. La mesure spectrale de ce processus évolue d'une façon qui génère plus de trous dans l'espace que pour les autres processus, certaines zones n'étant pas accessibles par les matrices de dilations associées. A l'autre extrême, la non-stationnarité du modèle S_t^4 est "moins contrainte"; les zones vides sont donc moins visibles. En définitive, l'entropie persistante est un outil pertinent pour l'étude de l'information topologique des processus non-stationnaires.

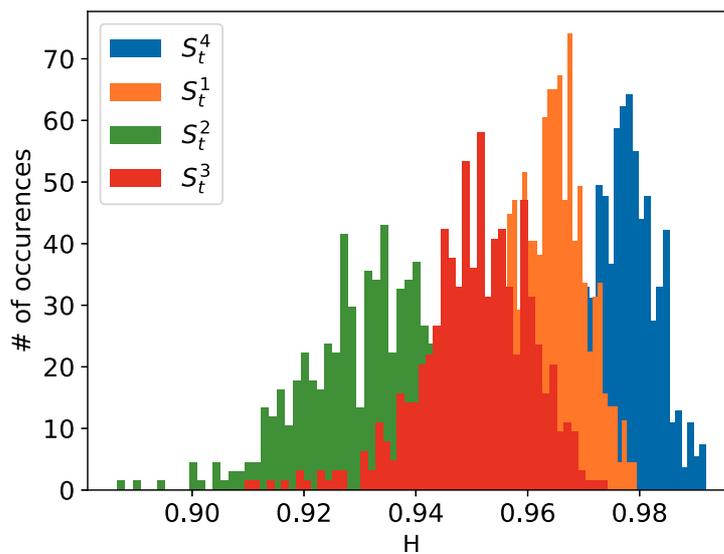


Figure 3.14.: Histogramme des valeurs de l'entropie normalisée à l'ordre 0 pour 500 réalisations par processus.

De façon similaire à [71], nous avons également analysé les séquences des nombres de Betti. A la fig. 3.16 nous avons représenté, pour chaque classe de processus, les courbes de Betti moyennes en fonction du seuil sur la distance. Nous observons que la forme de ces courbes est cohérente avec l'analyse faite dans [71]. Une fois de plus les classes de processus sont différenciées grâce à cette caractéristique topologique. A la vue de ces courbes, nous pouvons penser que la distinction durant la classification se fait principalement sur le nombre de Betti maximal.

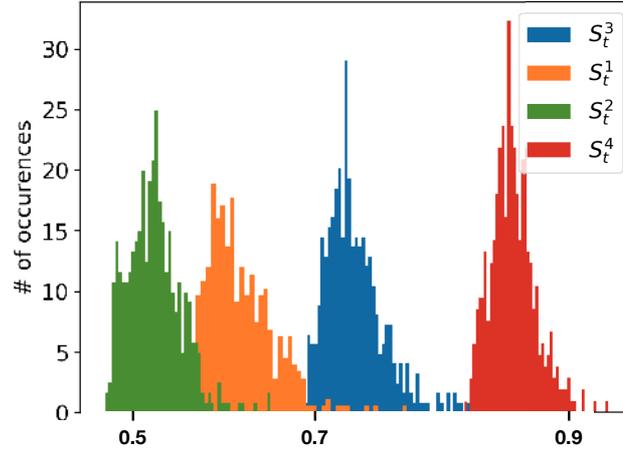


Figure 3.15.: Histogramme des valeurs de l'entropie normalisée à l'ordre 1 pour 500 réalisations par processus.

Nous pouvons donc affirmer que la structure du nuage de points formé par les matrices de dilations révèle d'importantes propriétés topologiques des processus PC qui ne sont pas accessibles directement. Chacun des processus étudiés possède ses propres caractéristiques intrinsèques.

3.3.3 Nouvelle mesure de dissimilarité entre diagrammes

Pour comparer des diagrammes de persistance, la distance de Bottleneck est majoritairement utilisée. La distance de Bottleneck est une distance de Wasserstein :

Définition 3.2 (Distance de Wasserstein et distance de Bottleneck). Soit $p \in [1, +\infty]$, et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux diagrammes de persistance. Rappelons qu'un diagramme de persistance est une collection de points $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x\}$. La distance de Wasserstein à l'ordre p entre \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est donnée par :

$$W_p^d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \inf_{\phi: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2} \left(\sum_{x \in \mathcal{D}_1} d(x, \phi(x)) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.9)$$

lorsque $p \neq +\infty$, et

$$W_\infty^d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \inf_{\phi: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2} \sup_{x \in \mathcal{D}_1} d(x, \phi(x)) \quad (3.10)$$

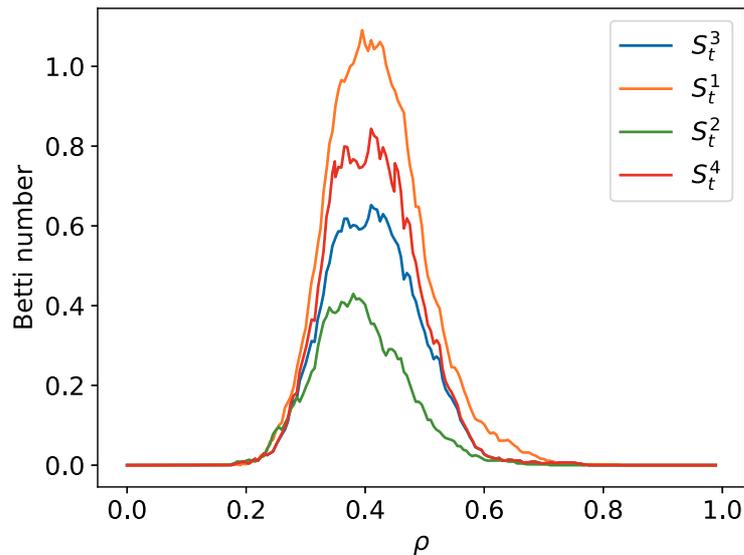


Figure 3.16.: Séquence de Betti moyenne obtenue après 500 réalisations pour chacun des processus.

pour $p = +\infty$, où d est une distance sur \mathbb{R}^2 et ϕ est une bijection de \mathcal{D}_1 dans \mathcal{D}_2 .

La distance de *Bottleneck* est $W_{\infty}^{L_{\infty}}$, L_{∞} désignant la norme infinie sur \mathbb{R}^2 .

Il est assez simple de visualiser la manière dont se calcule la distance de Bottleneck. Il faut associer les points du diagramme \mathcal{D}_1 à ceux du diagramme \mathcal{D}_2 de sorte que la somme des déplacements effectués soit minimale. Les points n'ayant pas été appariés se retrouvant associés à la diagonale, Fig. 3.17.

Au vu des résultats et du rôle particulier joué par ce que nous avons nommé l'entropie persistante, il semble judicieux d'introduire une nouvelle mesure de dissimilarité entre les diagrammes, basée sur la divergence de Kullback-Leibler. Pour deux distributions de probabilité discrètes p et q , la divergence de Kullback-Leibler s'écrit :

$$D_{KL}(p||q) = \sum_i p(i) \log \frac{p(i)}{q(i)} \quad (3.11)$$

Bien que cette divergence ne soit pas une distance à proprement parler, c'est néanmoins une mesure de dissimilarité entre deux distributions. Le passage d'un diagramme de persistance à une distribution de probabilité se fait de la même manière que pour le calcul de l'entropie

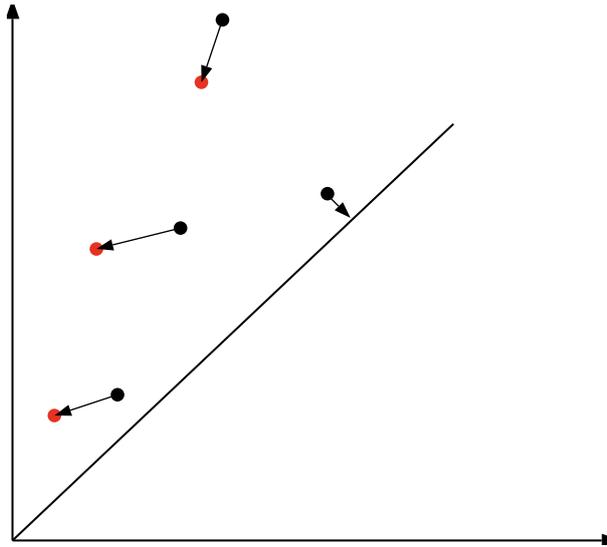


Figure 3.17.: Illustration de la distance de Bottleneck. Les points du diagramme noir sont associés aux points du diagramme rouge de sorte à ce que la somme des déplacements soit minimale.

persistante : chaque point (x_i, y_i) du diagramme est associée à une longueur $l_i = y_i - x_i$ divisée par la somme des longueurs de toutes les barres du diagramme. Se faisant, on extrait d'un diagramme de persistance une suite de nombres compris entre 0 et 1 dont la somme vaut 1, ce qui correspond bien à une loi de probabilité discrète. Alors, une simple application de la formule 3.11 suffit pour comparer deux diagrammes de même cardinalité grâce à la divergence de Kullback-Leibler. En revanche, un problème se pose lorsque les deux diagrammes n'ont pas la même cardinalité. Comment appliquer la formule de la divergence KL si l'une des distributions de probabilités est de cardinal n , alors que l'autre est de cardinal m . Pour cela une possibilité consiste à additionner certaines probabilités de la distribution de probabilité de plus grand cardinal jusqu'à ce que les deux distributions aient le même cardinal : pour deux distributions $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ et $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ avec $m > n$, il s'agit de trouver une distribution $p' = (p'_1, p'_2, \dots, p'_n)$ de sorte que chaque p'_i , obtenu par une somme d'éléments de p soit le plus proche possible de q_i . Chaque élément de p ne servant bien sûr qu'une seule fois. La façon la plus simple de procéder consiste dans un premier temps à trier les deux distributions. Puis, il faut sommer dans l'ordre les éléments de la première distribution p , de sorte que cette somme soit le plus proche possible du premier coefficient de la seconde distribution q , sans le dépasser. Cette opération est ensuite répétée à l'identique pour le deuxième coefficient, puis pour le troisième, et ce jusqu'à ce que tous les coefficients soient utilisés, [143]. Signalons que cette façon de procéder ne fonctionne que pour des distribution mono-variées.

3.3.4 Discussion

Pour deux matrices A et B de $SO(n)$ proches, la distance issue de la métrique invariante s'approxime par la distance euclidienne :

$$d(A, B) = \left\| \log(A^T B) \right\| \approx \|B - A\|.$$

En effet, pour Ω une matrice anti-symétrique telle que $\|\Omega\| = 1$, si $B = \text{Exp}(u\Omega)$, alors

$$d(A, B)^2 = \left\| \log(A^T B) \right\|^2 = u^2$$

et

$$\begin{aligned} \|B - A\|^2 &= \|\text{Exp}(u\Omega) - I_n\|^2 = \left\| u\Omega + \frac{1}{2}u^2\Omega^2 + \mathcal{O}(u^4) \right\|^2 \\ &= u^2 + u^3\langle\Omega, \Omega\rangle + \mathcal{O}(u^4) = u^2 + \mathcal{O}(u^4) \end{aligned}$$

car Ω est anti-symétrique. Malgré tout, nous n'avons pas utilisé cette méthode pour la simple raison que les processus ne produisent pas toujours des matrices de dilations suffisamment proches les unes des autres. Ainsi, nous pouvons envisager cette métrique euclidienne pour le processus (a) de la Fig. 2.9, mais pas pour le processus (b) de cette même figure. Néanmoins, la métrique Euclidienne étant plus rapide à calculer, elle peut s'envisager pour obtenir une bonne approximation des diagrammes.

3.4 Conclusion

L'objectif principal de cette partie était de révéler les caractéristiques topologiques fondamentales des processus stochastiques induites par la dilation. Le point de vue topologique vient apporter des éléments supplémentaires qui ne pouvaient pas être déduits de la seule courbe formée par les matrices de dilations. Pour cela nous avons étudié la structure du nuage de points issue de cet ensemble de matrices grâce à l'homologie persistante. Cette structure est intrinsèque au processus sous-jacent. Nous avons mis en évidence certaines caractéristiques qui résument cette structure, dont l'entropie persistante qui caractérise le désordre du nuage de points, autrement

dit son organisation. Enfin nous avons montré qu'il est possible de classifier différents modèles de processus stochastiques en se basant sur ces considérations topologiques.

Cette partie a fait l'objet d'une soumission à IEEE "Transaction on Information Theory".

Aide à la décision pour les systèmes de soins grâce à l'homologie persistante du processus de variabilité dans les services d'urgences

4.1 Introduction et rappels

Dans cette partie nous reprenons notre cas d'étude : l'analyse de la variabilité des épidémies pédiatriques saisonnières. Pour contrecarrer l'effet déstabilisateur des épidémies saisonnières, les hôpitaux ont mis au point des plans hivernaux, qui consistent notamment en une réorganisation des services d'urgences. Cependant, pour être efficaces et pour éviter un éventuel gaspillage financier, ces plans doivent être déclenchés au moment opportun. Nous allons appliquer cette fois-ci les techniques d'homologies persistantes directement sur le processus de variabilité dans le but d'analyser le comportement des épidémies pédiatriques saisonnières. Nous nous fixons deux objectifs : détecter le plus précocement possible l'épidémie, et en comprendre le comportement, c'est-à-dire suivre son évolution, sa dynamique. En effet, comme nous l'avons remarqué en introduction, les périodes épidémiques que nous étudions se caractérisent par une forte augmentation de la variabilité du processus d'admission observé par les services hospitaliers. Pour mesurer cette variabilité, nous avons appliqué une analyse de fluctuation sur le signal, qui consiste premièrement à désagréger les données, à effectuer un découpage de ces données puis à comparer dans chaque tranche ainsi obtenue l'écart entre les données et une tendance locale. Ce procédé se nomme DFA, pour *detrended fluctuation analysis*. Nous avons ainsi accès à un nouveau processus aléatoire qui caractérise la variabilité du processus. Nous allons donc construire un détecteur à partir de ces observations. Bien que des analyses topologiques de séries temporelles ont déjà été mises en évidence, [118, 119] nous proposons néanmoins une approche originale basée sur une observation dynamique d'un nuage de points associé au processus.

4.2 Construction du nuage de points par fenêtre glissante

Dans la Fig. 4.1 qui représente trois années successives, nous avons fait ressortir deux dates qui serviront de références : la première correspond à la détection précoce de l'épidémie (pour l'année 2014/2015), la deuxième correspond à l'intensité maximale.

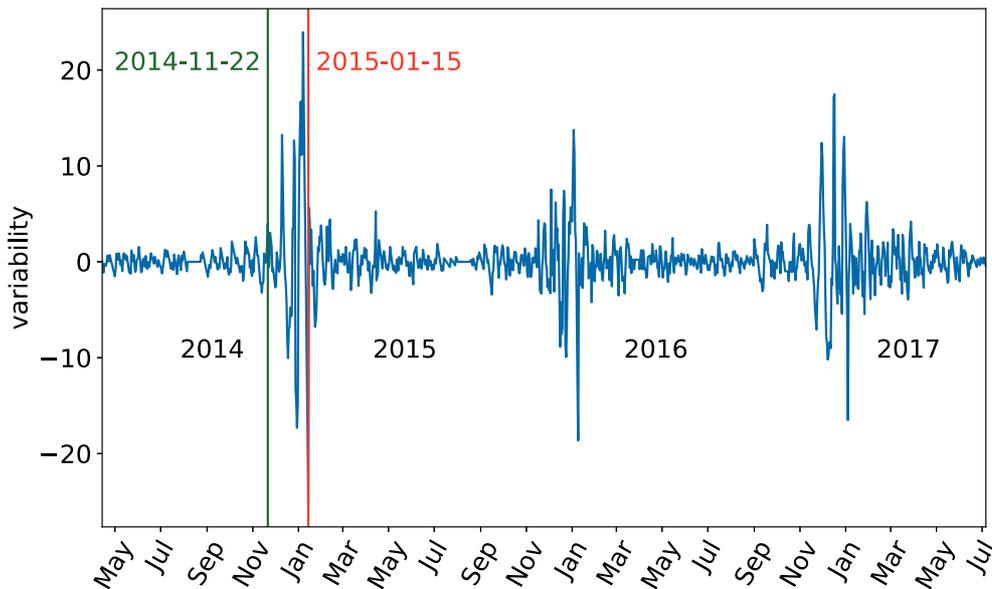


Figure 4.1.: DFA du processus d'admission.

Rappels et notations

Nous allons assembler un nuage de points à partir du signal de variabilité par fenêtre glissante [118]. Etant donné que nous traitons des séries temporelles, les fenêtres glissantes que nous considérons sont définies par :

$$FG_M[Y](t) = \begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t+1} \\ \vdots \\ Y_{t+M} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

où M est la longueur de la fenêtre. Le nuage de points est obtenu par la collection $\{FG[Y](t)\}_{n=0}^N$. Pour $M = 3$, le nuage de points qui se dessine dans un espace à trois dimensions est représenté

à la Fig. 4.2. Sur ce graphique, nous avons distingué quatre périodes particulières. Les points associés aux dates allant de 2014-07-01 à 2014-11-21 ainsi que de 2015-01-15 à 2015-07-01 se concentrent dans la même zone de l'espace et sont uniformément espacés. Ils correspondent à des phénomènes physiques comparables, à savoir que lors de ces périodes là, l'affluence aux services d'urgences était faible et peu volatile. Au contraire, pour la période courant de 2014-11-21 à 2014-12-05 les points sont espacés de façon plus erratique dans l'espace et ne sont plus concentrés dans une même zone. Cette période correspond au début de l'épidémie, ce qui se traduit par une affluence anormale. Enfin, la période allant du 2014-12-05 au 2015-01-15 marque la fin de l'épidémie. La volatilité diminue et les points correspondants se concentrent à nouveau dans une zone de l'espace plus confinée. Cette représentation en nuage de points rend perceptible de nombreux phénomènes cachés, qui vont être formalisés par une analyse approfondie.

Nous allons pour cela utiliser les techniques d'homologie persistante développées dans le chapitre précédent pour : i)- détecter précocement les affluences anormales pour anticiper le commencement de la période épidémique, ii)- fournir un indicateur de fin d'épidémie.

4.3 Résultats : homologie persistante sur un nuage de points évolutif

Pour avoir un suivi en temps réel de l'évolution de l'épidémie, nous allons former dynamiquement le nuage de points à partir d'une fenêtre glissante. Admettons que le nuage de points correspondant à la série temporelle $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ ait été formé. La dernière fenêtre glissante à avoir été intégrée dans le nuage de points est $(X_{p-M} \dots X_{p-1}, X_p)$. Lorsque la donnée X_{p+1} est disponible, alors la fenêtre glissante $(X_{p+1-M} \dots X_p, X_{p+1})$ est intégrée dans le nuage de point. De ce fait nous échafaudons un nuage de points qui évolue dans le temps.

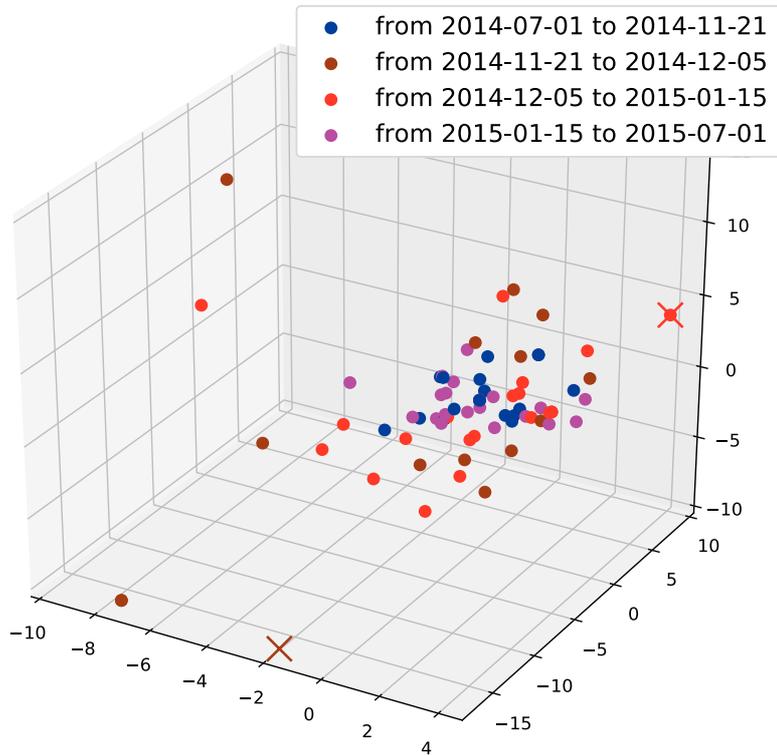


Figure 4.2.: Le nuage de points correspondant au processus de variabilité $\{Y_k\}_{k=1}^{36}$ de la Fig. 4.1. Différentes périodes sont distinguées par différentes couleurs. Les deux points représentés par des croix correspondent aux dates du 2014-11-22 et du 2014-12-05. Ici, nous avons utilisé $L = 24$.

4.3.1 Indicateurs de suivi de l'évolution de l'épidémie

Nous avons constitué une séquence de nuages de points imbriqués $\{\mathcal{S}_k\}_{k=1}^{N_L - N + 1}$ dont nous voulons suivre l'évolution. Pour ce faire, nous allons calculer pour chaque diagramme de persistance $\mathcal{D}_k = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N_{p_k}}$ associé au nuage de point \mathcal{S}_k les deux indicateurs suivants :

$$\text{Bar}_{\max}(k) = \max_{\mathcal{D}_k} \{y_i - x_i\}, i = 1, \dots, N_{p_k} \quad (4.2)$$

$$\text{PE}_{\text{norm}}(k) = -\frac{1}{\log(N_{p_k})} \sum_{j=1}^{N_{p_k}} p_j \log(p_j) \quad (4.3)$$

où $p_j = \frac{l_j}{L}$ et $l_j = y_j - x_j$, $L = \sum_{j=1}^{N_{pk}} l_j$. Ces deux indicateurs résument une partie de l'information contenue dans le diagramme. L'indicateur $\text{Bar}_{\max}(k)$ correspond au temps de survie maximal parmi les cycles du diagramme \mathcal{D}_k . $\text{PE}_{\text{norm}}(k)$ désigne l'entropie normalisée, et indique, comme cela a été montré dans la partie précédente la présence éventuelle d'une structure dominante dans le nuage de points, vue au travers de son diagramme de persistance.

4.3.2 Analyse des résultats

Contrôler l'évolution de $\text{Bar}_{\max}(k)$ et de $\text{PE}_{\text{norm}}(k)$, où k désigne le temps, nous permet de suivre en temps réel l'évolution de la dynamique du flux d'arrivées des patients. Les résultats des observations ont été reportés à la Fig. 4.3. Pour illustrer les apports de notre démarche, nous avons souligné deux dates importantes, qui ont également été placées dans la Fig. 4.1. La première indique le début de l'épisode anormal dans le processus d'admission correspondant à la bronchiolite ; la deuxième matérialise le moment où le maximum de variabilité a été atteint. L'analyse de la Fig. 4.3-(a) révèle un comportement atypique du processus de variabilité. En effet, nous voyons que l'indicateur $\text{Bar}_{\max}(\cdot)$ évolue par paliers successifs, à la manière d'une fonction en escalier, les marches étant d'une amplitude et d'une longueur plus ou moins importante. Chaque marche est associée à une augmentation de la variabilité, tandis que la longueur des marches indique le temps passé dans un régime de variabilité fixe. Ceci nous donne une forte indication sur la dynamique de ce type d'épidémie : l'épidémie évolue par phases, avec des sauts de variabilité. Lorsque le dernier saut de variabilité est atteint, l'indicateur $\text{Bar}_{\max}(k)$ atteint également son maximum. Lorsque une période épidémique est caractérisée par une évolution très rapide, les marches se succèdent à un rythme élevé et la forme globale de la courbe de $\text{Bar}_{\max}(\cdot)$ est abrupte.

Lorsque nous nous tournons vers l'indicateur $\text{PE}_{\text{norm}}(\cdot)$, nous voyons que ces extremum sont atteints lors d'un changement dans l'évolution tendancielle du processus de variabilité. Notamment, si la variabilité passe d'une phase ascendante à une phase descendante, nous observons un extremum local à la date de rupture. C'est ce que nous observons à la Fig. 4.3-(b) : un minimum est atteint à la date 2015-01-15. Après cette date, $\text{PE}_{\text{norm}}(\cdot)$ croît et nous affirmons que la phase la plus intense de l'épidémie est terminée. Cependant il faut être attentif, car le minimum de $\text{PE}_{\text{norm}}(\cdot)$ peut ne pas correspondre au jour où le maximum de patients ont été enregistrés. C'est pour cela que nous proposons d'identifier la fin de la phase épidémique en regard du nombre maximum d'arrivée et de la variabilité maximale. Ce n'est pas parce que le nombre maximum de

personnes admises à été atteint que l'épidémie est terminée, mais c'est bien lorsque la variabilité commence à diminuer, et donc lorsque $PE_{\text{norm}}(k)$ augmente.

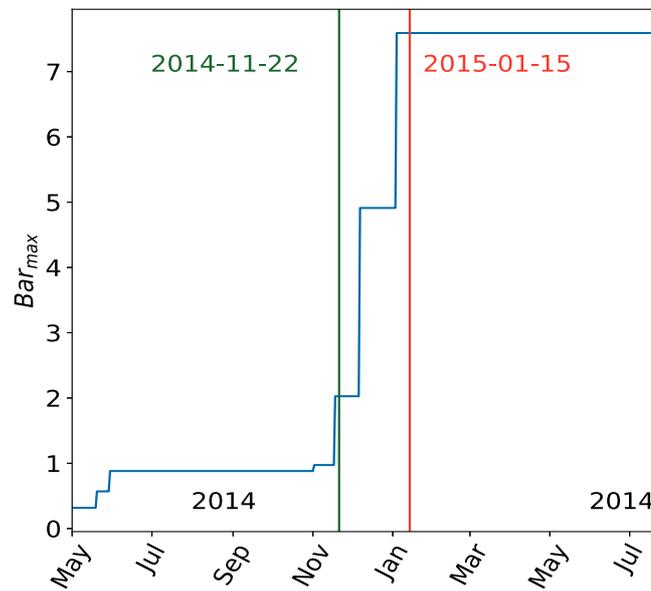
Nous voyons la force de ces deux indicateurs qui révèlent d'importantes informations sur la série temporelle formée par les admissions aux services d'urgences, et qui permettent un suivi en temps réel.

4.4 Influence des paramètres sur le détecteur

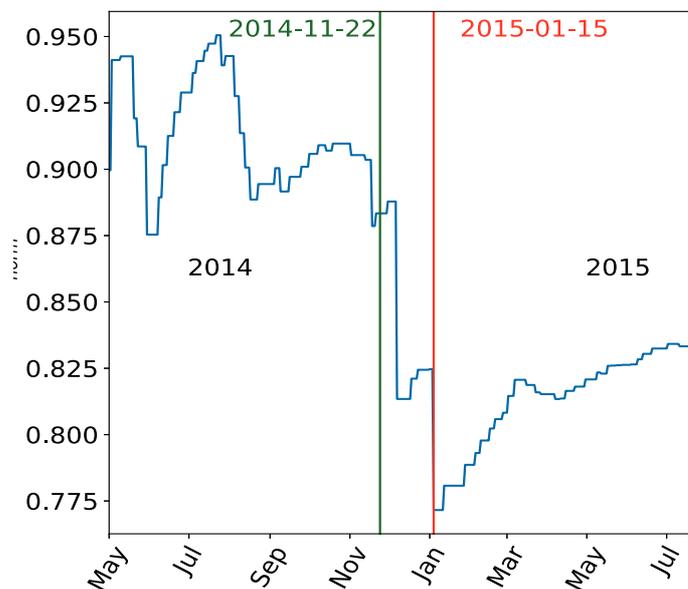
Pour automatiser la détection de phénomènes anormaux nous devons calibrer le modèle. Après avoir conduit plusieurs scénarios test, nous proposons de retenir d'abord le temps k tel que $\text{Bar}_{\text{max}}(k+1) - \text{Bar}_{\text{max}}(k) \geq 1$. Ensuite, pour estimer la période épidémique d'intensité maximale, nous retenons k' le temps auquel la dérivée $PE_{\text{norm}}(k)$ change avec $k' > k$ c'est-à-dire situé après le temps k obtenu pour le premier indicateur. Pour être plus précis, nous avons établis que lorsque $PE_{\text{norm}}(k)$ augmente de plus de 2.6% par rapport à sa valeur minimale détectée après la valeur fournie par Bar_{max} , alors l'épidémie pouvait être considérée comme révolue. Nous avons observé que la longueur de la fenêtre glissante, N , n'a pas d'impact majeur sur les résultats, l'aspect limitant étant le calcul de l'homologie persistante et surtout celui de la filtration de Vietoris-Rips. Cependant si la dimension n'est pas assez élevée, il est possible de ne pas repérer un cycle qui aurait pourtant été bien visible en dimension supérieure. En revanche, la longueur L qui intervient dans le calcul de la DFA influe sur la détection, et doit donc être optimisée.

4.4.1 Choix du détecteur

Un des paramètres principaux qui intervient dans le calcul de la DFA est la longueur L des segments par rapport auxquels nous calculons la tendance locale. Pour illustrer ce point, nous avons représenté à la Fig. 4.4 les résultats de la détection lorsque $L = 5$ puis lorsque $L = 50$. Les jours de références ont également été indiqués. Nous voyons que lorsque L est faible, le système est trop sensible aux faibles variations de variabilité, et la détection précoce ne se détache plus aussi clairement. Au contraire, lorsque L est trop important, nous ne détectons plus que les changements majeurs, et le phénomène troublant du 2014-11-22 n'est tout simplement pas détecté. Quant à l'évolution de l'indicateur $PE_{\text{norm}}(k)$, les mêmes phénomènes de sur/sous-



(a)



(b)

Figure 4.3.: Résultats d'une analyse de série temporelle par homologie persistante sur des données correspondant à une épidémie de Bronchiolite issu du CHU de Saint-Etienne entre le 2014-05-01 et le 2015-08-31. (a) évolution temporelle de $Bar_{\max}(k)$, (b) évolution temporelle de $PE_{\text{norm}}(k)$. Les calculs ont été menés avec $L = 30$ jours comme paramètre de la DFA et $N = 4$ jours pour la fenêtre temporelle du nuage de points.

sensibilité semblent se produire : quand L est faible, nous gagnons en précision sur la détection du minimum de $PE_{\text{norm}}(\cdot)$; quand L est grand, le plateau minimal de $PE_{\text{norm}}(\cdot)$ est beaucoup plus important. Nous devons donc optimiser la longueur L en tenant compte du comportement de ces deux indicateurs en fonction de ce paramètre.

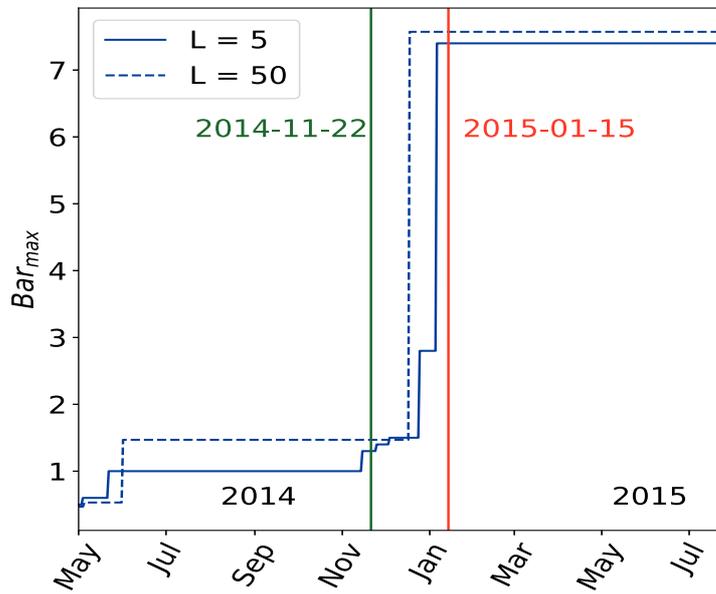
4.4.2 Calibration du détecteur

Pour choisir la valeur de L la plus adéquate, nous nous proposons de résoudre une optimisation pondérées de deux critères. Comme nous venons de le voir, le paramètre L influe à la fois sur la détection précoce et sur la précision de l'entropie persistante ; par conséquent deux fonctions doivent être minimisées. La première, notée $f(L)$ sert à optimiser la détection précoce et la seconde, notée $g(L)$ sert à optimiser la détection du pic épidémique, voir Fig. 4.5. D'après les professionnels de santé et au vu des données sur les 7 années précédentes, ils nous est apparu que la détection serait optimale environ 60 jours avant le pic épidémique. Plusieurs solutions existent pour résoudre de type de problèmes, [40]. Pour sa simplicité et son efficacité nous avons choisit la démarche suivante :

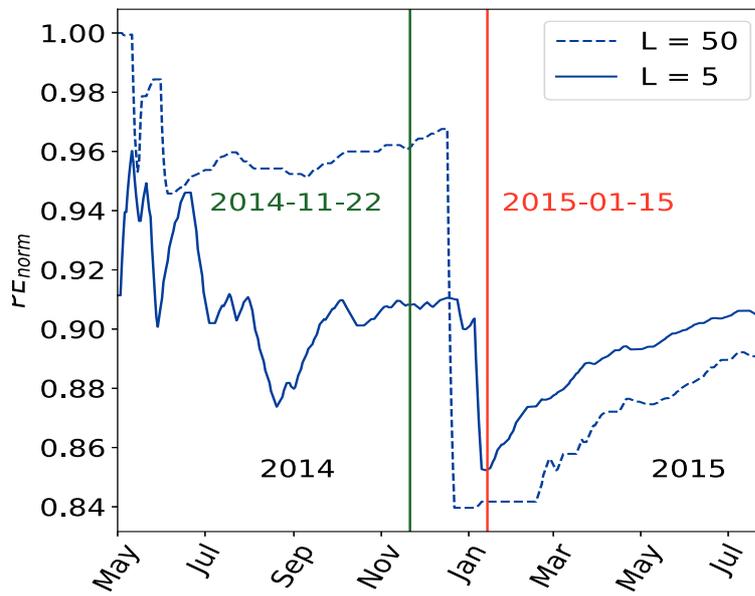
- Pour chacune des années j utilisées afin de calibrer le détecteur, trouver la valeur maximale du processus d'arrivées des patients et calculer $\alpha f_j(L) + \beta g_j(L)$ avec $0 < \alpha, \beta < 1$ et $\alpha + \beta = 1$. Les scalaires α et β servent à donner un poids plus ou moins important à l'un des critères.
- Sommer ces valeurs sur l'ensemble des années de calibrations : $Obj(L) = \sum_j (\alpha f_j(L) + \beta g_j(L))$. Répéter l'opération pour plusieurs L et choisir celui qui minimise $Obj(L)$.

Nous avons calibré notre détecteur sur les années allant de 2013 à 2016. Nous avons choisit $\alpha = 0.6$ et $\beta = 0.4$ pour donner une importance légèrement plus importante à la détection précoce. Le minimum de la fonction objectif $Obj(L)$ est atteint pour $L = 24$, Fig. 4.6-(a), ce qui est cohérent avec l'échelle de longueur caractéristique du phénomène observé. Les détections ainsi effectuées sur les années ayant servit à la calibration sont présentées à la Fig. 4.6-(b).

Le détecteur ayant maintenant été calibré, nous pouvons le tester sur une nouvelle année pour en vérifier l'acuité. Les résultats pour l'année 2016-2017 sont reportés à la Fig. 4.7. La première manifestation d'un phénomène anormal à été détectée le 2016-11-25, et la variabilité maximale à été détectée le 2017-01-15, ce qui marque la fin progressive de la période épidémique



(a)



(b)

Figure 4.4.: (a) évolution temporelle de $Bar_{max}(k)$, (b) évolution temporelle de $PE_{norm}(k)$ pour le processus Fig.4.1. La longueur de la fenêtre glissante est $N = 4$. Les longueurs de la DFA sont de $L = 50$ et $L = 5$.

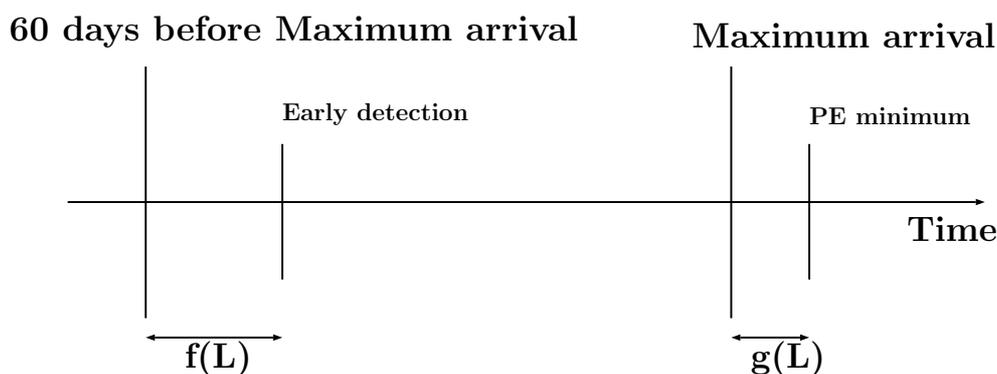


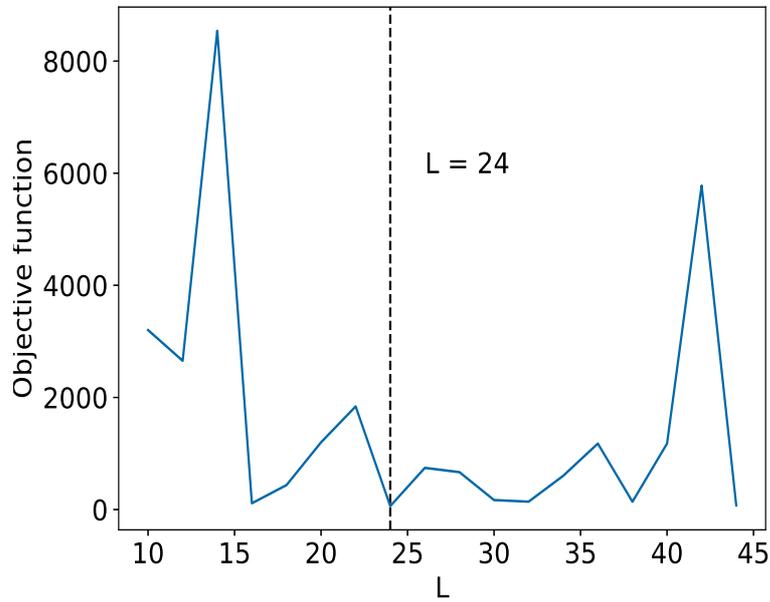
Figure 4.5.: Deux critères sont minimisés : $f(L)$, la détection précoce et $g(L)$ l'estimation de l'apogée de l'épidémie ; L est la longueur de la DFA .

pour cette année là. Dans la pratique Nous n'avons eu que trop peu de données pour que le minimum retourné par l'optimisation soit statistiquement significatif. Nous retenons cependant la signification "physique" de cette valeur : nous devons calculer cette variabilité sur une plage de temps qui correspond à la longueur caractéristique du phénomène. Ceci étant dit cette optimisation doit relancée chaque année, sur le jeu de donnée constitué par la donnée des années précédentes.

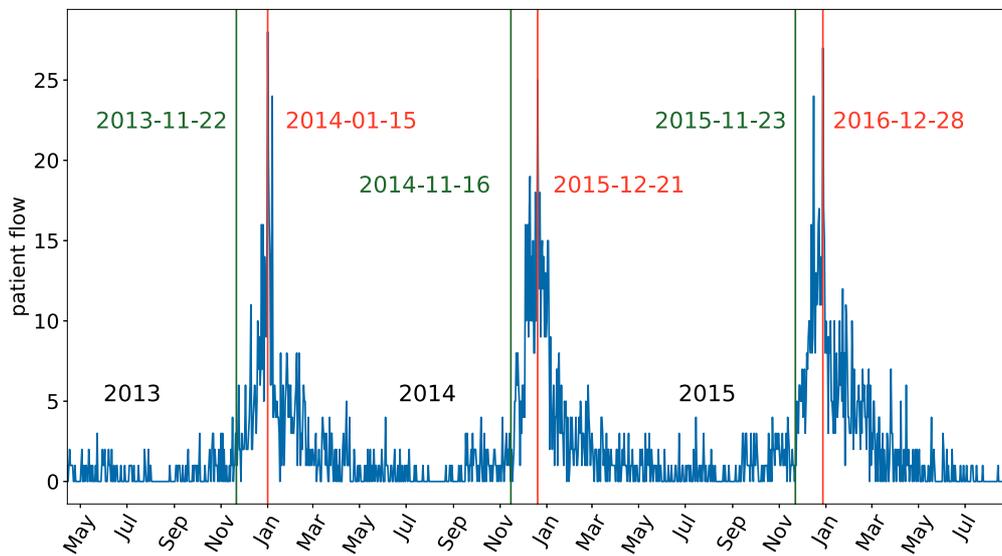
4.4.3 Comparaison avec d'autres méthodes

Pour juger de la qualité de notre approche, nous avons comparé nos résultats avec trois autres méthodes de détections parmi les plus avancées : des techniques de détections de changements de comportement dans les séries temporelles, et une méthode basée sur une estimation du kurtosis local. Les résultats sont reportés à la Fig. 4.8. Les principales méthodes utilisées pour détecter des changements dans une série temporelle sont le CUSUM et les carte de contrôle (Shewhart)[5, 123, 101]. Nous voyons que la détection que nous proposons est aussi bonne que le CUSUM, et meilleure que la carte de contrôle de Shewhart. Malgré cela, nous remarquons que les techniques de détection de points de changements, lorsqu'elles sont confrontées à nos signaux renvoient de multiples détections qui ne semblent pas convaincantes. Il apparaît en fait que ces méthodes sont trop sensibles aux variations non pertinentes. La sensibilité de la détection peut être abaissée, mais au risque de rater la détection précoce. Ces indicateurs sont difficilement utilisables en pratique comme outils d'aide à la décision. En revanche l'indicateur Bar_{max} offre une vision assez intuitive de l'évolution de l'épidémie.

La méthode basée sur le kurtosis, proposée dans [29] s'appuie sur une modélisation multi-



(a)



(b)

Figure 4.6.: (a) La fonction objectif $Obj(L)$ obtenue en calibrant le détecteur sur trois années successives, de 2013-05-01 à 2016-08-31. (b) Les dates correspondantes aux trois détections sur la période considérée pour une longueur de la DFA de $L = 24$.

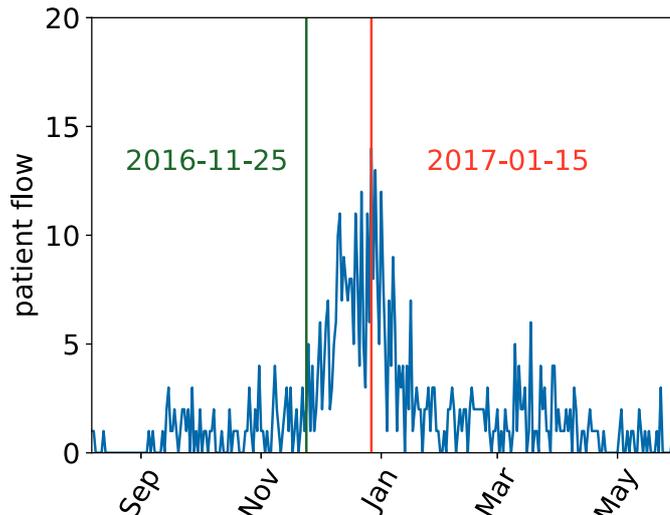


Figure 4.7.: Détection d'un nombre d'arrivées anormal (2016-11-25) et estimation du nombre d'arrivée maximal (2017-01-15) obtenue avec le détecteur calibré pour l'année 2016-2017.

périodique du signal. La différence entre le nombre d'arrivées réel et le modèle est enregistrée et produit ainsi une distribution des erreurs sur laquelle est estimée un indicateur de kurtosis. Dans cette méthode, les détections de phénomènes anormaux se basent sur les données directes, c'est-à-dire sur le flux entrant de patients, tandis que la méthode que nous proposons étudie la variabilité de ce flux. Nous voyons sur la Fig. 4.8 que l'indicateur Bar_{max} détecte l'épidémie plus précocement que cette méthode. L'intérêt de la méthode proposée dans [29] provient également du suivi de la fin de l'épidémie qu'elle rend possible. L'indicateur PE_{norm} réalise également cette performance.

4.5 Conclusion

Il est extrêmement important de pouvoir fournir aux services d'urgences une aide à la décision dans le but d'améliorer à la fois la qualité du système de soins et l'efficacité économique de ce système. Nous savons qu'en période hivernale, un excès d'admissions aux services d'urgences commence à se faire sentir lorsque les maladies respiratoires se manifestent. Les symptômes cliniques liés à ces pathologies sont bien identifiés, en particulier en ce qui concerne le virus respiratoire syncytial. A partir d'un signal constitué par l'enregistrement du nombre d'arrivées dans les services d'urgences au jour le jour, nous avons obtenu un nuage de points représentatif de sa variabilité. Ce nuage de points résulte d'une fenêtre glissante et est actualisé à chaque

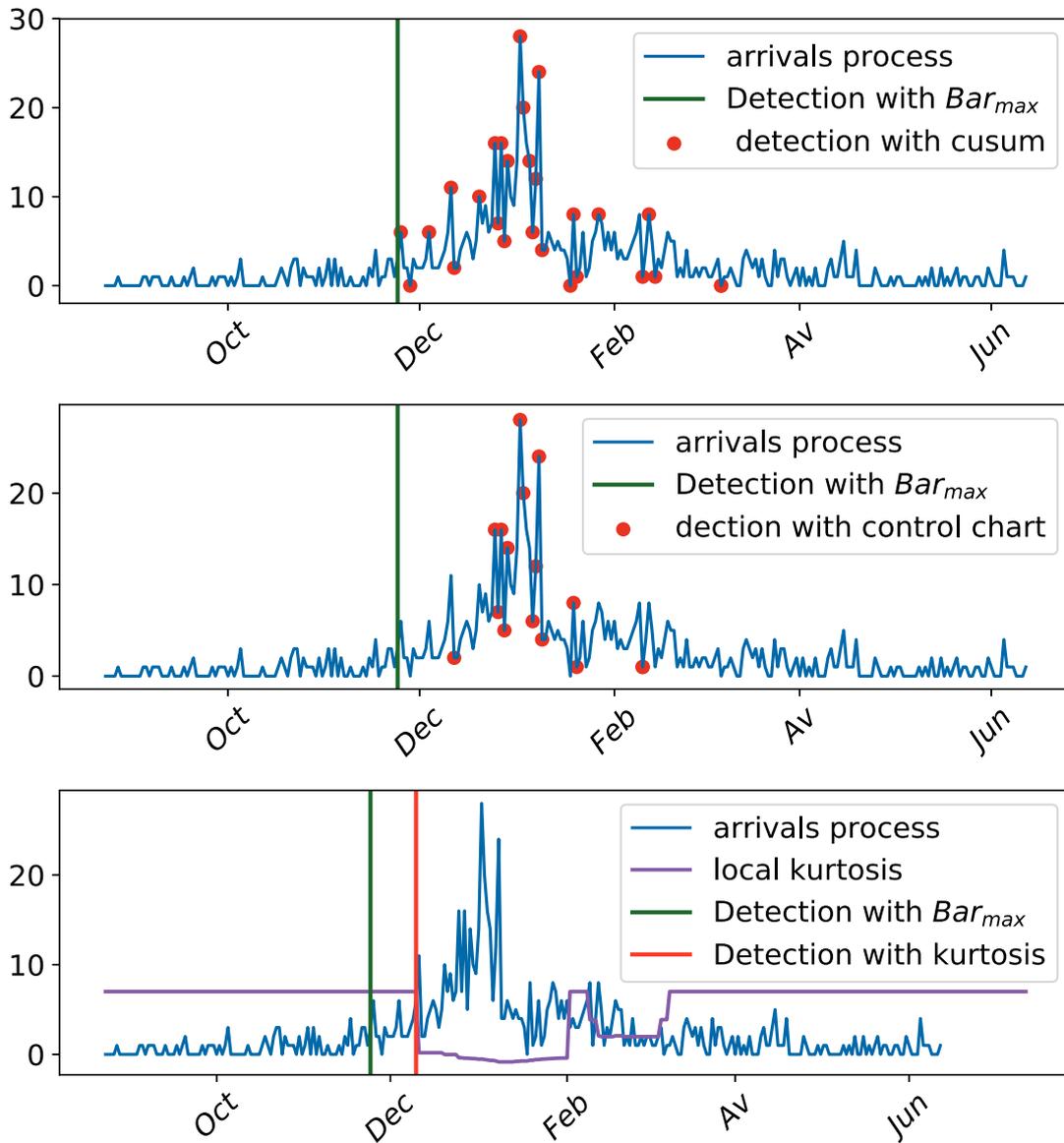


Figure 4.8.: Comparaison entre l'indicateur $\bar{B}ar_{max}$ et trois autres méthode de détection de changement : une carte de contrôle, un cusum et un kurtosis local.

nouvelle donnée disponible. Il en résulte une vision claire et intuitive de la dynamique des épidémies considérées. La structure de ce nuage de points est observée sous le spectre de l'homologie persistante. A partir du diagramme de persistance, tracé au fur et à mesure, nous pouvons construire un détecteur capable d'anticiper l'apogée de l'épidémie. Ce détecteur, par son aspect intuitif peut aisément constituer un outil d'aide à la décision.

Cette partie a fait l'objet d'une publication à IEEE Journal of biomedical health information.

Conclusion

5.1 Résumé des contributions

Nous avons souhaité aborder l'étude des processus stochastiques par un angle novateur : la théorie de la dilation. Notre but est de susciter de l'intérêt sur cette façon de procéder et sur la richesse des concepts qui en découlent. L'analyse harmonique selon Fourier des processus stochastiques stationnaires est largement connue. Nous avons montré qu'un autre formalisme, impliquant le shift operator conduit aux mêmes résultats. En effet, l'analyse harmonique de cet opérateur et celle du processus sous-jacent sont équivalentes. Pourtant la structure de cet opérateur ainsi que ces implications ne nous semblaient pas avoir été totalement explorées. En voulant décrire puis exploiter la structure de cet opérateur, nous nous sommes aperçu que nous étions amenés à manipuler des objets très singuliers : les matrices de dilations. Ces matrices s'obtiennent à partir des parcours, paramètres assez largement répandus en traitement du signal, mais qui interviennent également dans de nombreuses autres théories sous des dénominations différentes. Aussi notre premier travail a été de rassembler et de mettre en relation tous ces domaines très hétérogènes mais qui partagent néanmoins implicitement des concepts similaires. A partir de là, nous avons pu maçonner un ensemble cohérent qui offre une vision originale des processus stochastiques. Ce qui est éminemment intéressant c'est que cette démarche se généralise très facilement au cas des processus non-stationnaires, et surtout au cas des processus périodiquement corrélés, qui ont été au coeur de notre étude. Dans ce cas-ci les matrices de dilation sont périodiques. Après avoir approfondi la structure de ces matrices, nous nous sommes employés à mettre en relief le lien entre processus et agencement de ces matrices de dilations. De même que différents modèles de processus aléatoires produisent différents type de spectres (ou de densités spectrales), ils produisent aussi différents types d'ensembles de matrices de dilations. C'est ce que nous avons souhaiter définir et quantifier.

Représentation des processus PC comme éléments d'un groupe de Lie

Dans cette partie, nous avons étudié la courbe de matrices de rotations qui caractérise les processus stochastiques. Pour manipuler de tels objets, nous nous sommes placés dans le cadre plus général que constitue l'étude des courbes sur variétés. Les matrices que nous considérons étant des matrices de rotations, réelles ou complexes, l'espace support de ces courbes est un groupe de Lie. Plus précisément il s'agit de $SO(n)$ ou de $SU(n)$, que nous avons muni de sa métrique invariante par reparamétrisation. Pour traiter ces courbes, nous avons choisi le formalisme fourni par la TSRV, c'est-à-dire que nous avons d'abord transporté les courbes par transport parallèle de sorte à ce que point d'origine devienne l'élément identité du groupe. La métrique L^2 sur l'ensemble des TSRV induit la métrique de l'espace des courbes. Ceci dit, il est important de s'affranchir de la paramétrisation avec laquelle ces courbes ont été obtenues, ou tracées. C'est pourquoi il convient également de se placer dans l'espace des formes, et donner une métrique sur cet espace. Nous avons obtenus l'équation des géodésiques qui, dans le contexte qui est le nôtre, se ramène à une interpolation linéaire dans l'espace des TSRV. Nous avons illustrés ces résultats par des exemples, où le lien entre la forme temporelle des signaux et leur représentation sur le groupe est clairement perceptible.

Topologie des processus induite par la dilation

Certaines caractéristiques ne sont pas accessibles par la simple étude des courbes sur variétés. Par exemple, nous nous sommes rendus compte que la configuration de certaines courbes laisse entrevoir de nombreux lacets, alors que d'autres n'en forment pas. Mais ces courbes ayant pour support $SO(n)$ ou $SU(n)$, il n'est pas possible de révéler ces caractéristiques grâce au groupe fondamental. Nous avons donc choisi une analyse topologique. L'homologie persistante était tout indiquée pour ce genre de situation. Nous nous sommes donc concentrés sur le nuage de points formé par les matrices de dilations. La première étape consiste à transformer ce nuage de points en un ensemble d'objets mathématiquement manipulables. Pour cela nous construisons une filtration basée sur le complexe de Vietoris-Rips. Nous avons alors une vision claire de la structure du nuage de points, et nous pouvons résumer cette structure sur un diagramme de persistance. Nous avons montré que différentes classes de signaux sont associées à différentes classes de diagrammes. L'originalité consiste en une vision stochastique de la topologie des signaux. Nous

avons mis en lumière certains paramètres clefs qui caractérisent les propriétés topologiques des signaux. C'est notamment le cas de l'entropie persistante, qui rend compte du désordre du nuage de points. Enfin nous avons proposé une nouvelle mesure de dissimilarité entre diagrammes de persistance basée sur cette entropie persistante.

Application à la détection précoce des épidémies dans les services d'urgences

Dans cette partie nous avons utilisé les outils d'homologie persistante développés dans la partie précédente directement sur le processus de variabilité, le but étant d'une part d'analyser en profondeur les épidémies saisonnières, et d'autre part d'anticiper leurs apogées. Deux indicateurs ont été mis à l'épreuve et se sont révélés particulièrement instructifs. Ils apportent une visibilité claire du comportement de ces phénomènes. Un suivi graphique et en temps réel des épidémies par ces moyens semble être un outil d'aide à la décision judicieux.

5.2 Perspectives

Nous voyons plusieurs voies pour poursuivre et améliorer les recherches que nous avons entreprise :

- Dans le calcul de la DFA, nous comparons la dispersion des données par rapport à une tendance locale. Cette tendance locale est calculée par approximation linéaire (moindres carrés). Cependant une approximation polynomiale, ou par splines peut être envisagée.
- Pour une utilisation pratique, les matrices de dilations sont tronquées, car bien entendu nous ne pouvons calculer qu'un nombre fini de parcours. Mais originellement les matrices de dilations sont de dimension infinie. Il semble intéressant d'adapter notre démarche pour tenir compte de ce cas. Notamment, le produit scalaire sur l'espace tangent est défini par la norme de Hilbert-Schmidt :

$$\|A\|_{H.S} = \text{tr}(AA^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(AA^*), \quad (5.1)$$

où A est un opérateur de classe trace, et $\{\lambda_k(AA^*)\}_k$ sont les valeurs propres de AA^* . C'est une généralisation de la norme de Frobenius pour des opérateurs de dimension infinie.

- Pour obtenir un nuage de points plus riche, et plus précis il peut être envisageable d'utiliser une discrétisation de la courbe d'interpolation entre les matrices de dilations. Ces courbes ont été utilisées dans la partie X. De même, lors de l'interpolation géodésique entre deux courbes de matrices de dilations, il serait instructif d'observer l'évolution des diagrammes de persistance le long de cette interpolation. Ce pourrait être en quelque sorte une interpolation entre deux diagrammes de persistance.
- Nous avons calculé l'entropie selon la définition donnée par Shannon. Mais il existe d'autres formules exprimant l'entropie, comme par exemple l'entropie de Tsallis. Il serait intéressant de reprendre nos études avec d'autres expressions de l'entropie.
- Il existe plusieurs façons de calculer l'homologie persistante. Nous avons choisi l'homologie simpliciale pour son aspect intuitif et sa mise en œuvre relativement simple. Néanmoins, pour poursuivre nos analyses, les autres formes d'homologie persistante devraient être envisagées et pourraient potentiellement apporter des éléments nouveaux. C'est également le cas de la filtration qui fournit la séquence imbriquée de complexes simpliciaux sur laquelle se calcule l'homologie persistante. Parmi les nombreuses autres théories portant sur l'homologie et l'homologie persistante, citons : les alpha-complexes, les fonctions de Morse ...
- Dans la dernière section, il peut être envisagé d'utiliser des indicateurs basés sur les autres caractéristiques invariantes, tel que la série des nombres de Betti.
- Enfin, l'interpolation entre les matrices de dilations peut permettre d'augmenter la résolution du spectre du processus en fournissant davantage de matrices portant ces informations.

Annexe A : Quelques intuitions sur l'homologie

Le but de cet annexe est de donner une vision plus intuitive de l'homologie, base des précédents calculs portant sur l'homologie persistante. Aussi, bien que les calculs et les algorithmes utilisés et mis en œuvre dans cette thèse n'utilisent que le corps quotient \mathcal{Z}_2 , nous allons ici nous considérer le corps \mathcal{Z} . Bien que l'idée générale de l'homologie persistante soit simple, de nombreux concepts algébriques vont être mobilisés.

A.1 Simplexes

Un *simplexe* est simplement la généralisation d'un triangle dans un espace de plus grande dimension. Considérons le triangle de la figure Fig. A.1 formé par les extrémités de trois vecteurs \vec{V}_0 , \vec{V}_1 et \vec{V}_2 . Le triangle peut être décrit par l'ensemble des points du plan $\{(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)\}$ vérifiant :

$$\lambda_0 \vec{V}_0 + \lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 \quad \text{où} \quad \begin{cases} 0 \leq \lambda_i \\ \sum_i \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Cette définition s'étend trivialement pour un espace à n dimensions : si, dans \mathbb{R}^n , $\vec{V}_0, \vec{V}_2 \dots \vec{V}_n$ désignent n+1 points, alors un n-simplexe est décrit par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{V}_i \\ 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \text{for all } i \\ \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \end{cases}$$

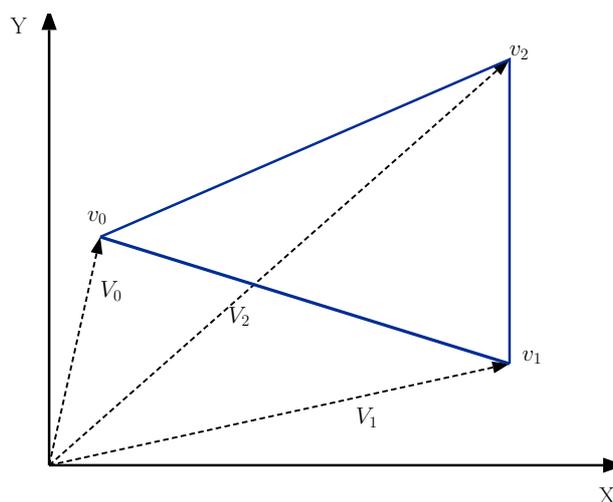


Figure A.1.: Un triangle dans un espace à deux dimensions.

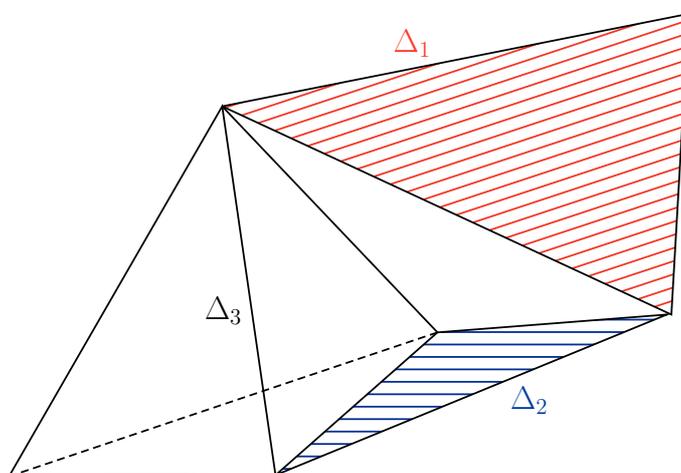


Figure A.2.: un complexe simplicial constitué de trois simplexes Δ_1 (triangle), Δ_2 (triangle), Δ_3 (tétraèdre)

Ainsi, un n -simplexe se définit comme l'enveloppe convexe formée par $n+1$ points dans un espace à n dimensions. Notons (v_0, v_1, \dots, v_n) le simplexe formé par les sommets v_0, v_1, \dots, v_n

Le simplexe est une brique de base qui nous permet de définir des espaces plus complexes, que nous appelons des *complexes simpliciaux*. Un complexe simplicial est une structure formée de simplexes qui ne sont pas nécessairement de mêmes dimensions, avec la seule règle que les constituants sont soit disjoints, soit se rencontrent le long d'une *face* commune, Fig. A.2 ce qui signifie que les simplexes ne se coupent pas. Bien que la notion de face peut paraître évidente, elle demande néanmoins d'être redéfinie dans l'esprit de l'homologie simpliciale. Soit un n -simplexe S . Alors \mathcal{P} est une face de S si c'est un simplexe dont les sommets forment est un

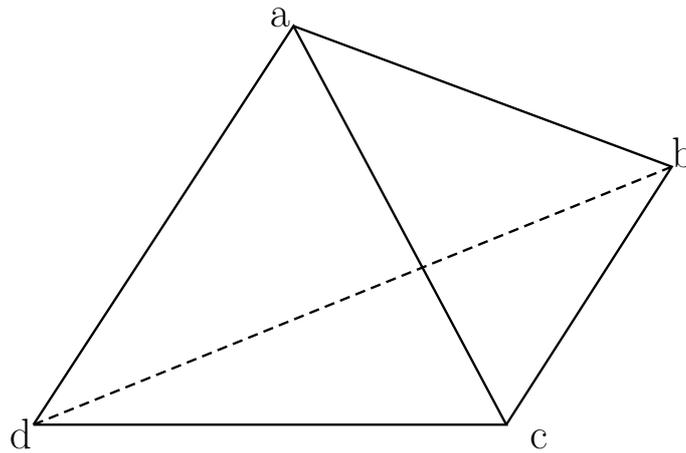


Figure A.3.: Un tétraèdre est un 3-simplexe. Ces faces sont des 2-simplexes ou des 1-simplexes.

(n-1)-simplexe contenu dans \mathcal{S} dont les sommets sont aussi des sommets de \mathcal{S} . Ainsi, dans la figure Fig. A.3 le tétraèdre possède des faces à deux dimensions (les triangles (abc), (abd), (bcd) ...) des faces à une dimension (les segments (ab), (bc), (da)...) et des faces à zéro dimensions (les sommets (a), (b), (c) et (d)). Nous pouvons également donner une *orientation* aux simplexes, en choisissant un ordre préférentiel dans leur désignations. Ceci nous permet de définir une opération de bord, qui associe un simplexe à sa "frontière".

Lorsque l'on calcule l'homologie dans le corps \mathbb{Z}_2 et non dans \mathbb{Z} il devient inutile de définir une orientation pour les simplexes...

Pour un 1-simplexe orienté (v_0v_1) , son bord est défini par : $\partial\mathcal{S} = v_1 - v_0$. Pour un 3-simplexe $\mathcal{S} = (v_0v_1v_2)$, Fig. A.1 son bord est, Fig.

$$\partial\mathcal{S} = (v_0v_1) + (v_1v_2) + (v_2v_0) = (v_0v_1) - (v_0v_2) + (v_1v_2) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i (v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_2)$$

où le l'exposant $\hat{\cdot}$ signifie que l'on omet le sommet concerné. Plus généralement, pour un n-simplexe $\mathcal{S} = (v_0 \cdots v_n)$, son bord est :

$$\partial\mathcal{S} = \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_n)$$

Enfin, remarquons une propriété de l'application de bord : composée avec elle-même, elle retourne toujours zéro. Vérifions cela pour un 3-simplexe $\mathcal{S} = (v_0 v_1 v_2 v_3)$. Nous avons par définition : $\partial \mathcal{S} = (v_1 v_2 v_3) - (v_0 v_2 v_3) + (v_0 v_1 v_3) - (v_0 v_1 v_2)$, et donc

$$\begin{aligned} \partial(\partial \mathcal{S}) &= \partial(v_1 v_2 v_3) - \partial(v_0 v_2 v_3) + \partial(v_0 v_1 v_3) - \partial(v_0 v_1 v_2) \\ &= [(v_2 v_3) - (v_1 v_3) + (v_1 v_2)] - [(v_2 v_3 - (v_0 v_3) + (v_0 v_3))] + \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

A.2 Homologie : introduction

Le groupe fondamental d'un espace \mathcal{X} , $\pi_1(\mathcal{X})$ permet l'étude des courbes fermées. Pour étudier les courbes fermées de dimensions deux, il faut s'intéresser à $\pi_2(\mathcal{X})$. Nous pouvons par exemple imaginer une nappe que entourant une sphère. Mais il est souvent difficile d'obtenir ces groupes d'homotopie qui d'ailleurs conduisent à des résultats qui parfois échappent à l'intuition : si \mathbb{S}^k désigne la k-sphère unité, il est ainsi possible de montrer que les groupes d'homotopies $\pi_n(\mathbb{S}^k)$ existent même pour $n > k$, ce qui n'est pas extrêmement intuitif... L'homologie est une alternative commutative à l'homotopie : pour un espace \mathcal{X} , ses groupes d'homologie $H_n(\mathcal{X})$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ sont tous commutatifs. Nous allons voir que $H_n(\mathcal{X})$ mesure le nombre de trous de dimension n dans \mathcal{X} .

Prenons un exemple. Nous allons définir une structure algébrique pour la structure orientée présentée en Fig. A.4. C'est un espace constitué de sommets x, y, z, ainsi que d'arrêtes a, b, c et d. Nous pouvons identifier plusieurs "boucles" dans cette structure, comme par exemple la boucle abc, qui débute en x et finit en x, la boucle bca, qui commence en y et finit en y, et enfin la boucle cab qui commence et finit en z. La commutativité implique que le point de départ de la boucle n'a pas d'importance, contrairement au groupe fondamental qui lui est dépendant du point de base spécifié. Les boucles sont maintenant identifiées par des expressions du type $a + b + c (= b + c + a = a + c + b)$, et nous appelons ces expressions des *cycles*. c-d est un aussi un cycle, qui commence et se termine en z ; et a+b+d encore un autre. Ensuite, il nous faut définir des relations algébriques entre ces cycles, pour pouvoir écrire, par exemple, que $a + b + c = (a + b + d) + (c - d)$. Soit \mathcal{C}_0 , le *groupe abélien libre* sur les sommets x, y et z. Ce groupe est constitué par les combinaisons linéaires des sommets avec des coefficients entiers.

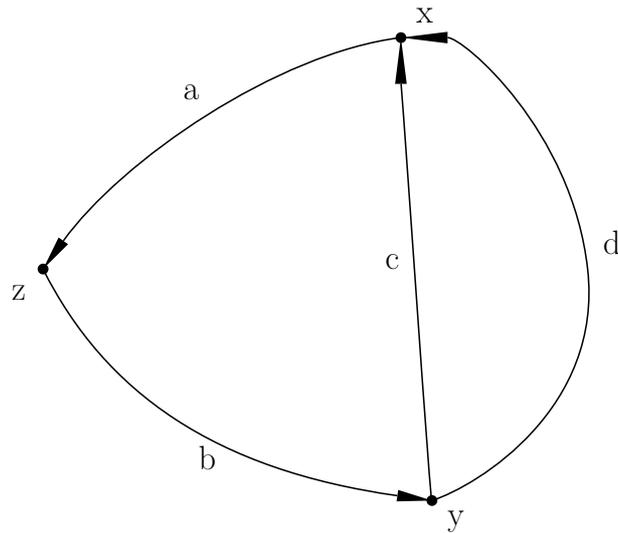


Figure A.4.: Ex.1 espace \mathcal{X}_1

$\mathbb{Z} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ est un groupe abélien libre. Nous pouvons partir d'un élément, ajouter successivement 1 et ne jamais revenir sur cet élément ; au lieu de cela nous parcourons tous les autres éléments.

De même, définissons \mathcal{C}_1 comme étant le groupe abélien libre sur les arrêtes orientées a, b, c, d. $2x - 3y + 4z$ est un élément de \mathcal{C}_0 , et $2a + b - 5c + 4d$ est un élément de \mathcal{C}_1 . Les éléments de \mathcal{C}_0 sont appelés les *chaînes* de dimension 0, ceux de \mathcal{C}_1 sont des chaînes de dimensions 1.

C'est ici où les calculs effectués dans le reste du manuscrit diffèrent de ceux de cette annexe. Dans le manuscrit, nous nous sommes restreint au groupe \mathbb{Z}_2 c'est à dire que les seules opérations autorisées correspondent à l'addition de deux éléments. Nous pouvons donc seulement écrire $a + b + c$, mais pas $2*a + 3*b + c$, et ce avec la règle $a + a = 0$. Comme mentionné dans le corps de ce manuscrit, l'addition entre deux chaînes correspond à l'union disjointe de ces chaînes. Le raisonnement est le même, mais nous pensons qu'il est plus aisé pour le lecteur de se familiariser d'abord avec le cas où le corps de base est \mathbb{Z} , car cela fait appel à de l'algèbre linéaire connue de tous.

Nous pouvons à présent nous demander quelle est la signification *algébrique* d'un cycle. Qu'est ce qui est spécial à propos de $a + b + c$ (Fig. A.4) et qui n'est pas partagé par $2a + b - 5c + 4d$?

Reprenons l'application de bord. Nous avons $\partial a = y - x$, $\partial b = z - y$, \dots . Nous voyons que cette application est en fait un homomorphisme de groupe

$$\partial : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_0$$

Or $\partial(a + b + c) = (y - x) + (z - y) + (x - z) = 0$. Ainsi, nous définissons un cycle comme étant une chaîne t dans \mathcal{C}_1 qui vérifie

$$\partial(t) = 0$$

Trouver l'ensemble des cycles relève à présent de simples calculs d'algèbre linéaire : nous souhaitons trouver l'ensemble des chaînes de la forme $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$ tels que :

$$\begin{aligned} \partial(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) &= \alpha \partial(a) + \beta \partial(b) + \gamma \partial(c) + \delta \partial(d) \\ &= \alpha(y - x) + \beta(z - y) + \gamma(x - z) + \delta(x - z) \\ &= (-\alpha + \gamma + \delta)x + (\alpha - \beta)y + (\beta - \gamma - \delta)z \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous cherchons donc toutes les solutions du système

$$\begin{cases} -\alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \beta - \gamma - \delta = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0$$

Le lecteur peut vérifier que les solutions sont données par $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : (r, s) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

ce qui veut dire que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a + b + c$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a + b + d$ forment une base de l'ensemble des

solutions, et donc génèrent à eux deux l'ensemble des cycles de la Fig. A.4. En d'autres termes nous avons $\ker(\partial) = \text{sp}\{a + b + c, a + b + d\}$ où sp (span) désigne l'ensemble des combinaisons linéaires (souvent noté vec dans les livres d'algèbre linéaire...). Alors, les cycles vu comme un

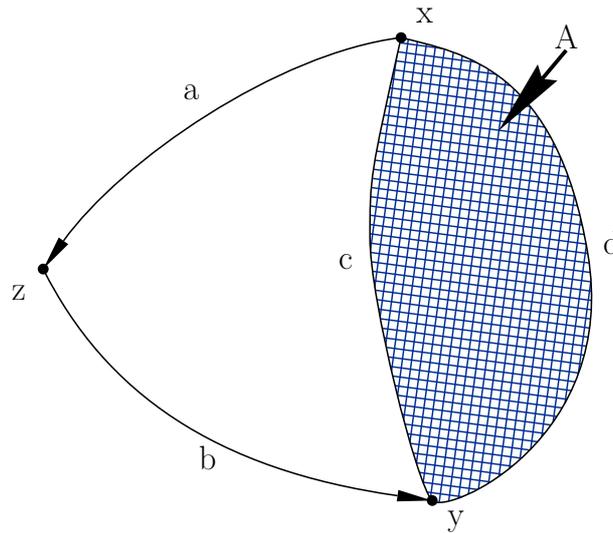


Figure A.5.: Ex.1 espace \mathcal{X}_2

groupe sont isomorphes à $\mathbb{Z} + \text{oplus}\mathbb{Z}$, puisque identifier un cycle revient à choisir deux nombres entiers :

$$H_1(\mathcal{X}) = \{\text{cycles}\} \simeq \mathbb{Z}^2$$

L'interprétation de ce résultat est que deux trous sont présents dans l'ensemble \mathcal{X} , $c - d$ étant déjà compté dans le noyau de ∂ .

A présent, modifions la Fig. A.4 en ajoutant une cellule A entre les arrêtes c et d que nous orientons dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est en fait la même figure que précédemment, mais la zone entre c et d est pleine, Fig. A.5. La bordure de cette zone A est $\partial(A) = c - d$. Le cycle $c - d$ est donc maintenant la bordure de la cellule A . Nous introduisons naturellement \mathcal{C}_2 , l'ensemble des combinaisons linéaires entières de A : $3A, -5A, \dots$. Ce sont les chaînes à deux dimensions. Grâce aux applications de bord composons le complexe de chaînes :

$$\mathcal{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0$$

Le fait notable est que $c - d$ qui est toujours un cycle ne représente plus un trou ! Algébriquement, nous souhaitons avoir $c - d = 0$, mais alors $a + b + c = a + b + d$. Il faut donc "quotienter" le groupe des cycles à une dimension, généré jusqu'alors par $a + b + c$ et $a + b + d$ par le sous-groupe des bordures à une dimensions, généré par $c - d$. Nous définissons le premier groupe homologique par :

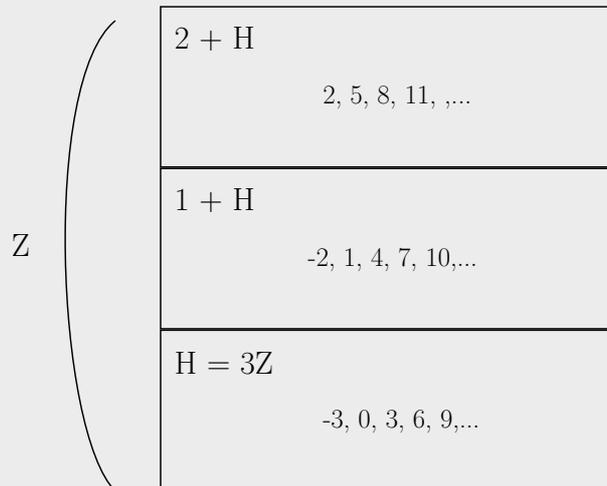
$$H_1 = \mathbb{K}_1 / B_1 \tag{A.1}$$

où \mathbb{K}_1 sont les cycles à une dimension et B_1 les bordures à une dimension. Il s'agit d'identifier les cosets de B_1 dans K_1 . Nous obtenons $H_1(\mathcal{X}_2) = \frac{sp\{a+b+c, a+b+d\}}{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} / \frac{sp\{c-d\}}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. Ceci est cohérent avec la figure car étant donné qu'il n'y a qu'un seul trou, il n'y a qu'un seul degré de liberté pour l'identifier.

Rappel : groupes quotients.

Considérons l'exemple de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. $\mathbb{H} = 3\mathbb{Z}$ est le groupe des multiples de 3 : $-3, 0, 3, 6, 9, \dots$, et \mathbb{Z} est le groupe des entiers : $0, 1, 2, \dots$. \mathbb{Z}/\mathbb{H} est l'ensemble des cosets de \mathbb{H} dans \mathbb{Z} , donc \mathbb{Z}/\mathbb{H} est constitué de trois éléments dont on peut choisir un représentant. Le groupe quotient étant un groupe, il faut le munir d'une opération de composition interne comme suit : $(1 + \mathbb{H}) + (2 + \mathbb{H}) = \mathbb{H}$, dont nous vérifions la cohérence avec l'exemple suivant :

$$\underbrace{-2}_{\in 1+\mathbb{H}} + \underbrace{8}_{\in 2+\mathbb{H}} = \underbrace{6}_{\in \mathbb{H}}$$



A.3 Calcul des groupes d'homologies

D'après les développements précédents, Nous pouvons attacher à un espace topologique la structure suivante, appelée complexe de chaînes :

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0$$

avec la propriété fondamentale que $\partial_i^2 = 0$. Notons $K_n = \ker(\partial_n)$, qui est un sous-groupe de \mathcal{C}_n , et $B_n = \text{im}(\partial_{n+1})$ qui est aussi un groupe de \mathcal{C}_n . La propriété fondamentale de l'application de bord implique que $B_n \subset K_n$. La définition des groupes d'homologies par :

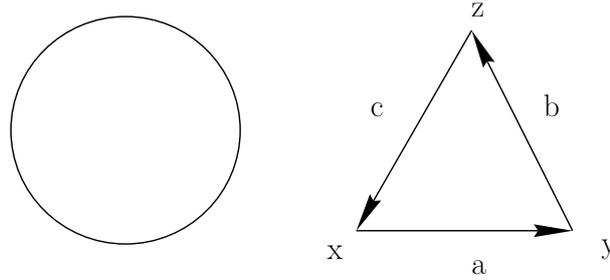


Figure A.6.: Ex.3 un cercle est homéomorphe à un triangle.

$$H_n = K_n/B_n \tag{A.2}$$

a alors un sens. De plus les *nombre de Betti* sont définis par $\beta_n = \text{rank}(H_n)$

A.3.1 Cercle

Calculons les groupes d'homologie d'un cercle S^1 , Fig. A.6. Il y a trois simplexes $a = (xy)$, $b = (yz)$ et $c = (zx)$ et l'espace est donc $\mathcal{X} = \{a, b, c, x, y, z\}$, et son complexe de chaînes est :

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0$$

Nous avons $K_0 = \ker(\delta_0) = \text{sp} \{x, y, z\} = \mathcal{C}_0$ car tout élément de \mathcal{C}_0 est envoyé dans $\{0\}$ par ∂_0 . Ensuite, $B_0 = \text{im}(\partial_1) = \text{sp} \{y - x, z - x, x - z\}$. Nous devons donc expliciter $H_0 = K_0/B_0$. Faire le quotient de K_0 par B_0 revient à mettre les éléments de B_0 à zero dans K_0 . On souhaite donc avoir :

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = y \end{cases} \implies x = y = z$$

Alors, $H_0 \simeq \mathbb{Z}$ car tout élément de ce groupe est de la forme $\alpha x + B_0$.

Calculons maintenant $H_1 = K_1/B_1$:

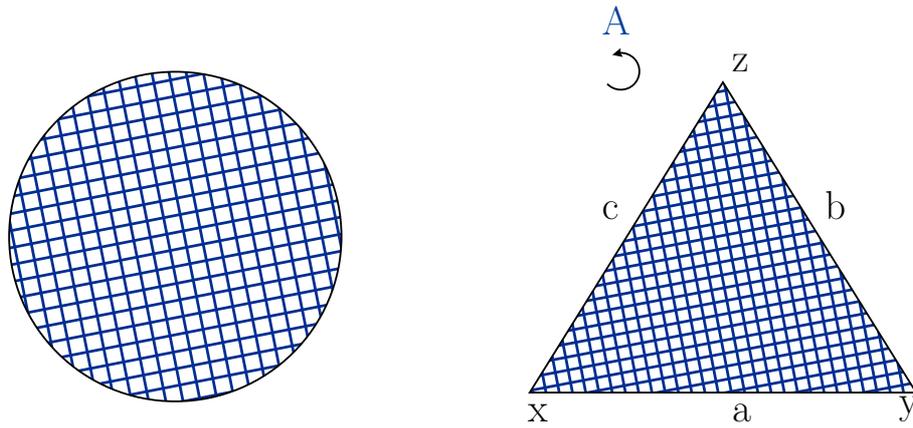


Figure A.7.: Ex.4 un disque est homéomorphe à un triangle. Le triangle est orienté dans le sens trigonométrique.

$$\begin{aligned}
 \partial_1(la + mb + nc) &= l(y - x) + m(z - y) + n(x - z) \\
 &= (n - l)x + (m)y + (m - n)z \quad \implies \quad l = m = n \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

et donc : $\ker(\partial_1) = \text{sp}\{a + b + c\} \simeq \mathbb{Z}$. De même, $B_1 = \text{im}(\partial_2) = 0$, d'où $H_1 \simeq \mathbb{Z}$. En résumé $H_0 \simeq \mathbb{Z}$ mesure le nombre de composantes connexes et $H_1 \simeq \mathbb{Z}$ mesure le nombre de trous à une dimension. Les groupes d'homologies de dimensions supérieures sont naturellement nuls.

A.3.2 Disque

Regardons à présent le cas d'un disque, qui est homéomorphe à un 2-simplexe (triangle), Fig. A.7.

Avec $\partial(A) = b + c + a$ nous avons :

$$\begin{cases} \ker(\partial_1) = a + b + c = K_1 \\ \text{im}(\partial_2) = a + b + c = B_1 \end{cases} \implies H_1 = \{a + b + c\} / \{a + b + c\} = 0$$

Ainsi, $H_0 = \mathbb{Z}$ (une seule composante connexe), $H_1 = 0$ (pas de trous), et $H_n = 0, \forall n \geq 2$.

A.3.3 Sphere

Passons maintenant à la sphère, qui est homéomorphe à un tétraèdre, Fig. A.8. L'espace considéré ici est donc $\mathcal{X} = \{(xyz), (xzw), (y wz), (xwy)\}$, avec un complexe de chaîne :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}_3 & \xrightarrow{\partial_3} & \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{\partial_2} & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\partial_1} & \mathcal{C}_0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^4 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^6 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^4 \end{array}$$

De façon très similaire au cas précédent, nous obtenons $H_0 \simeq \mathbb{Z} = \{x\} + B_0$. Quant à H_1 , cela demande un peu plus de calculs. Nous avons

$$\ker(\partial_1) = \{\alpha(y - x) + \beta(z - y) + \gamma(x - z) + \delta(w - x) + \epsilon(z - w) + \eta(y - w) = 0\}$$

soit

$$x(-\alpha + \gamma - \delta) + y(\alpha - \beta + \eta) + z(\beta - \gamma + \epsilon) + w(\delta - \epsilon - \eta) = 0$$

Ici encore, les bases de l'algèbre linéaire nous poussent à considérer le système $AX = 0$, avec

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha) & (\beta) & (\gamma) & (\delta) & (\epsilon) & (\eta) \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les symboles entre parenthèses ne sont là que pour indiquer à quoi correspondent les colonnes.

Les solutions de ce système sont :

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \eta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : (r, s, t) \in \mathbb{Z}^3 \right\}$$

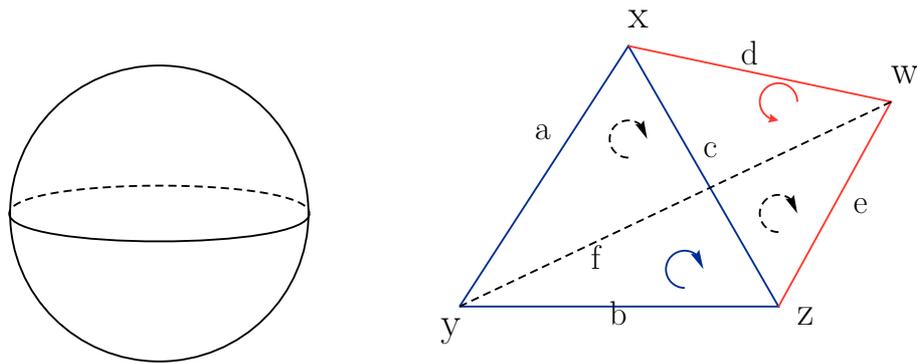


Figure A.8.: Ex.5 Une sphère, homéomorphe à un tétraèdre. Par souci de clarté, toutes les orientations non pas été représentées.

Il y a trois vecteurs de base (générateurs), donc l'espace des solutions est de dimension trois et ainsi $K_1 \simeq \mathbb{Z}^3$. Tout cycle est donc combinaison linéaire de $(a + b + c)$, $(-a - b + d + e)$ et $(-a + d + f)$. Les bordures sont plus faciles à calculer : $B_1 = \text{im}(\partial_2) = \text{sp} \{a + b + c, -c - e - d, -f - b + e, d + f - c\}$. On remarque que un des vecteurs de B_1 s'obtient comme combinaison linéaire des trois autres, et que les trois restant sont égaux aux vecteurs présents dans K_1 . Donc $B_1 = K_1, \implies H_1 = 0$, ce qui se traduit par le fait que la sphère n'a pas de trous à une dimension. Enfin, comme $\partial \left(\underbrace{(xyz)}_A + \underbrace{(xzw)}_B + \underbrace{(y wz)}_C + \underbrace{(xwy)}_D \right) = 0$ alors $K_2 = \text{sp} \{A + B + C + D\} \simeq \mathbb{Z}$ d'où $H_2 \simeq \mathbb{Z}$ (car $B_2 = 0$) ce qui est traduit par le fait qu'une sphère possède bien un trou bidimensionnel.

A.3.4 Autre cas (non détaillés)

Bien d'autres structures peuvent être analysées sous cet angle et avec les mêmes procédures. Citons entre autre le tore, Fig. A.9, le plan projectif qui se représente par un disque dont les points diamétralement opposés sont collés., Fig. A.10

A.4 Vers l'homologie persistante

Le développement ci-dessus permet le calcul des groupes d'homologies pour un complexe simplicial donné, autrement dit lorsque les simplexes sont donnés. Lorsque nous sommes face à un nuage de points il n'y a pas a priori de simplexes prédéfinis. Il faut donc pouvoir bâtir un complexe simplicial à partir de ce nuage de points qui en reflète le mieux la structure. La

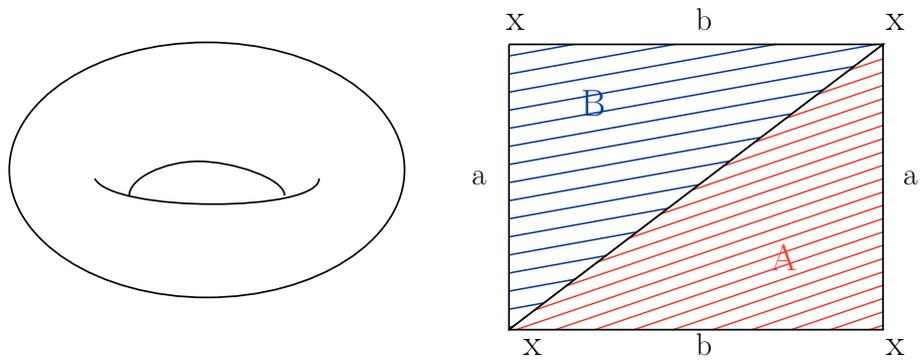


Figure A.9.: Ex.6 Un tore, qui est homéomorphe à deux triangles collés dont tous les sommets on été identifiés. Par souci de clarté, toutes les orientations non pas été représentées.

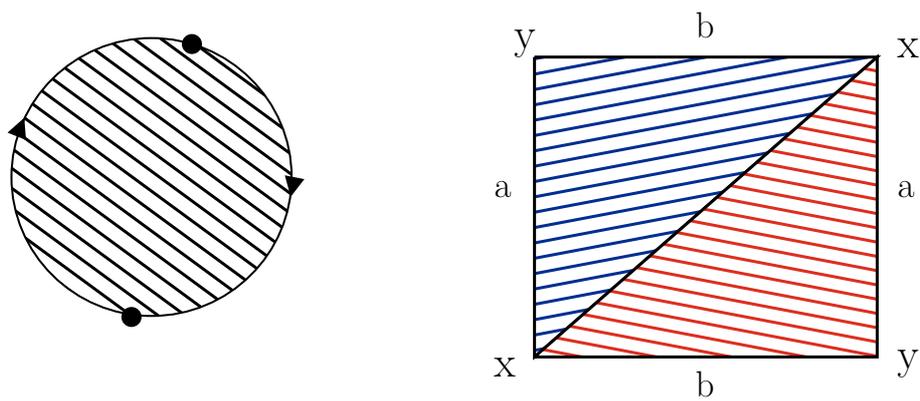


Figure A.10.: Ex.7 Le plan projectif. Par souci de clarté, toutes les orientations non pas été représentées.

meilleure approche est en fait de construire une filtration de complexes simpliciaux, c'est-à-dire une séquence de complexes simpliciaux qui sont emboîtés les uns dans les autres :

$$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{S}_N$$

comme $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}_j$ si $i < j$, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{S}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{S}_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{N-1}} \mathcal{S}_N$$

où f_i désigne l'application (inclusion) canonique. A partir de là, la démarche consiste à appliquer la procédure décrite plus haut pour calculer les groupes d'homologies dans chaque complexes, et d'identifier les groupes d'homologies qui apparaissent dans \mathcal{S}_i et qui disparaissent dans \mathcal{S}_j . Le formalisme rigoureux pour ce genre de situation est à chercher du coté de la théorie des catégories. Les applications f_i sont alors des foncteurs entre catégories...

Annexe B : Éléments de théorie spectrale des opérateurs

Dans cette section nous souhaitons apporter quelques éléments de compréhension sur ce qu'il faut comprendre lorsque l'on évoque les mesures spectrales, les mesures à valeurs opérateurs, les intégrales spectrales... Comme toujours en mathématiques un symbole n'est que l'écriture condensée de toute une série de concepts qui s'articulent harmonieusement entre eux. L'intégration en est le paroxysme et dans cette optique, il est nécessaire à chaque fois que le symbole \int apparaît d'en préciser le sens. C'est ce que nous nous efforçons de faire dans cette annexe. Cependant nous ne donnons pas ici les fondements complets et exhaustifs, mais seulement l'essentiel permettant de comprendre les ressorts de l'intégration spectrale. Nous renvoyons le lecteur qui souhaite approfondir ce sujet aux références citées.

B.1 Mesure spectrale

Les mesures spectrales sont à la base de l'intégration d'opérateurs. Comme leurs noms l'indiquent ce sont des mesures, et elles vont donc jouer un rôle similaire au dx de l'intégration de Riemann, c'est-à-dire que ce sont des fonctions qui permettent de mesurer une quantité. Les propriétés que doivent vérifier ces mesures sont assez similaires à celles vérifiées par des mesures scalaires. Nous nous plaçons dans un espace mesurable (X, \mathcal{F}) où X est un ensemble et \mathcal{F} la tribu de ses parties.

Définition B.1 (Mesure spectrale). Une fonction $E : \mathcal{F} \mapsto P(\mathcal{H})$ où $P(\mathcal{H})$ désigne l'ensemble des projecteurs orthogonaux dans un espace de Hilbert \mathcal{H} (i.e pour $\Sigma \in \mathcal{F}$, $E(\Sigma)$ est un projecteur

orthogonal) est une *mesure spectrale* si $E(X) = I$, l'opérateur identité, et si pour toute suite $\{\Delta_n\}_n$ de sous-parties disjointes de \mathcal{F} :

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$$

Parmi plusieurs propriétés intéressantes, citons l'additivité finie, et surtout l'orthogonalité : si M et N sont des ensembles disjoints dans \mathcal{F} , alors $E(M) \perp E(N)$. Nous avons également le résultat suivant qui établit un lien entre mesure spectrale et mesure scalaire :

Théorème B.1. Une fonction à valeur projecteurs E sur \mathcal{F} est une mesure spectrale si et seulement si $E(X) = I$ et si pour chaque paire de vecteurs x et y dans \mathcal{H} , la fonction scalaire $\mu_{x,y} = \langle E(\Delta)x, y \rangle$ est une mesure scalaire, où Δ est un borélien de \mathcal{F} .

B.2 Intégrales spectrales

Commençons par rappeler un théorème majeur de l'analyse fonctionnelle :

Théorème B.2 (Théorème de Riesz, cas d'une application bilinéaire). Pour toute fonction bilinéaire ϕ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} il existe un unique opérateur A sur \mathcal{H} tel que :

$$\phi(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

Soit f une fonction mesurable sur (X, \mathcal{F}) et E une mesure spectrale sur \mathcal{F} . Pour chaque paire $(x, y) \in \mathcal{H}$, l'intégrale scalaire $\int f(\lambda) d\mu_{x,y}$ par rapport à la mesure scalaire $\mu_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y \rangle$ peut être formée. Dans ce cas, nous considérons la forme bilinéaire $\phi(x, y) = \int f(\lambda) d\mu_{x,y}$. D'après le théorème B.2 il existe donc un unique opérateur $A(f)$ sur \mathcal{H} tel que

$$\langle A(f)x, y \rangle = \phi(x, y) = \int f(\lambda) \langle E(d\lambda)x, y \rangle$$

On note alors :

$$\int f(\lambda)E(d\lambda) = A(f) \quad (\text{B.1})$$

Le lecteur pourra vérifier que les propriétés des intégrales (linéarité, définition...) sont bien vérifiées. Comme A est un opérateur, il est également possible d'écrire

$$\int f(\lambda)E(d\lambda)x = A(f)x$$

pour x un vecteur \mathcal{H} . Nous pouvons aussi définir l'intégrale spectrale $\int f(\lambda)E(d\lambda)x$ d'une façon très similaire à l'intégrale de Lebesgue. Pour cela commençons d'abord par définir l'intégrale d'une fonction simple $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{\Delta_i}$ comme étant :

$$\int f(\lambda)E(d\lambda)x = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(\Delta_i)x$$

où les Δ_i sont deux à deux disjoints.

Pour une fonction f dans $L^2(\mu_x)$, soit $(f_n)_n$ une suite de fonction simple convergeant vers f au sens de la norme $L^2(\mu_x)$. Alors on définit :

$$\int f(\lambda)E(d\lambda)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(\lambda)E(d\lambda)x$$

Ceci justifié par le fait que :

$$\begin{aligned} \left\| \int f(\lambda)E(d\lambda)x \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i E(\Delta_i)x \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \|E(\Delta_i)x\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \langle E(\Delta_i)x, E(\Delta_i)x \rangle \\ &= \int |f|^2 d\mu_x \end{aligned}$$

B.3 Théorème Spectral

Une question émerge naturellement : étant donné un opérateur $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, existe-il une mesure spectrale E sur un espace mesuré $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ et une fonction f telle que $A = \int f(\lambda)E(d\lambda)$? La réponse

est positive pour les opérateurs normaux bornés (un opérateur normal est un opérateur qui commute avec son adjoint : $AA^* = A^*A$). Notamment nous avons le théorème suivant :

Théorème B.3 (Théorème spectral pour les opérateurs unitaires,[78, 4]). Si U est un opérateur unitaire sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , alors il existe une unique mesure spectrale E sur la tribu Borélienne de $[0, 2\pi]$ telle que

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} E(d\lambda) \quad (\text{B.2})$$

Élever U à la puissance k ne pose aucun problème :

$$U^k = \int_0^{2\pi} e^{ik\lambda} E(d\lambda)$$

Annexe C : Contractions, opérateurs de défaut

C.1 Contractions, opérateurs de défaut et opérateurs positifs

Dans cette annexe nous donnons quelques éléments de compréhension sur l'opérateur de défaut qui intervient massivement dans la construction de la dilation, ainsi que sur la structure des opérateurs définis positifs. Il est intéressant ici de donner une vision "opérateur" des coefficients de corrélation partiels, qui ne sont rien d'autre que des opérateurs de contractions.

Pour une contraction T , l'opérateur de défaut est défini par $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$. Cet opérateur "mesure" l'écart entre T et l'identité, autrement dit donne une indication pour savoir à quel point T diffère d'un opérateur unitaire.

Théorème C.1 (Structure élémentaire des opérateurs définis positifs). Soit A et C deux opérateurs positifs. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- L'opérateur $P = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ est positif.
- Il existe une unique contraction Γ telle que $B = A^{1/2}\Gamma C^{1/2}$.

Démonstration. Supposons que A et C sont inversibles. Alors, nous avons la décomposition suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^*A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^*A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Nous reconnaissons ici le complément de Schur $C - B^*A^{-1}B$. Alors, P est défini positif si et seulement si le complément de Schur est défini positif également, c'est-à-dire si $C - B^*A^{-1}B \geq 0$.

$0 \iff I - C^{-1/2}B^*A^{-1/2}A^{-1/2}BC^{-1/2} \geq 0$. Si l'on définit $\Gamma = A^{-1/2}BC^{-1/2}$, alors nous concluons que Γ est une contraction, et : $C = A^{1/2}\Gamma Z^{1/2}$.

Lorsque les opérateurs A et C ne sont pas inversibles, il suffit de considérer les opérateurs $A_n = A + nI$ et $B_n = B + nI$, avec $n \rightarrow 0$. Enfin, soulignons la proximité entre l'obtention de ce résultat et la preuve du théorème 1.3. En un sens, la structure de la dilation telle que donnée par Constantinescu est directement dérivée du complément de Schur. \square

Théorème C.2 (Contraction et opérateurs positifs). Soit X et Y des opérateurs dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- Il existe une contraction Γ telle que $X = \Gamma Y$
- $X^*X \leq Y^*Y$

Démonstration. Pour prouver cela il suffit de définir une contraction Γ' telle que $\Gamma'Xh = Yh$, $h \in \mathcal{H}$ et de s'assurer que cette contraction remplit bien les conditions du théorème. Un corollaire immédiat est que si $X^*X = Y^*Y$ alors il existe une isométrie partielle telle que $VX = Y$, et de plus V peut être choisie comme étant la contraction Γ ci-dessus. Pour un opérateur positif $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, si $A^{1/2}$ désigne son unique racine carré positive, alors tout opérateur L tel que $L^*L = A$ est relié à $A^{1/2}$ par $A^{1/2} = VL$. \square

Citons enfin deux résultats qui sont à la base de la construction de la dilation dans l'approche de Constantinescu :

Théorème C.3 (Contractions en ligne). Soit $T = [T_1 \ T_2] \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \mathcal{H})$, alors $\|T\| \leq 1$ si et seulement si il existe des contractions $\Gamma_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$ et $\Gamma_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H})$ telles que

$$T = [\Gamma_1 \ D_{\Gamma_1^*}\Gamma_2]$$

Démonstration. Pour prouver ce résultat il nous suffit d'appliquer le théorème précédent : pour la première inclusion, il est évident que $\Gamma_1 = T_1$. Pour la deuxième inclusion $\|T\| \leq 1$ implique que

$$I - TT^* = I - \Gamma_1\Gamma_1^* - T_2T_2^* \geq 0$$

, soit $D_{\Gamma_1^*}^2 \geq T_2T_2^*$. Donc il existe Δ tel que $\Delta D_{\Gamma_1^*} = T_2^*$. Alors, choisir $\Gamma_2 = \Delta^*$ finit la preuve. \square

Il est alors possible d'écrire une factorisation de type Cholesky pour l'opérateur $T = [T_1 \ T_2]$:

$$D_T^2 = \begin{pmatrix} D_{\Gamma_1} & 0 \\ -\Gamma_2^* \Gamma_1 & D_{\Gamma_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\Gamma_1} & -\Gamma_1^* \Gamma_2 \\ 0 & D_{\Gamma_1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Alors, grâce au théorème C.2 il existe un opérateur α tel que

$$D_T = \begin{pmatrix} D_{\Gamma_1} & 0 \\ -\Gamma_2^* \Gamma_1 & D_{\Gamma_1} \end{pmatrix} \alpha$$

De même,

$$D_{T^*}^2 = (D_{\Gamma_1^*} D_{\Gamma_2^*} D_{\Gamma_2^*}^* D_{\Gamma_1^*}^*)$$

Ainsi l'opérateur α cité dans l'ouvrage de Constantinescu permet de travailler indirectement avec l'opérateur de défaut alors même que seule une expression de son carré est explicitement exploitable.

Le cas général est donné :

Théorème C.4 (Contraction en ligne, cas général, 1.12). Les propositions suivantes sont équivalentes :

- L'opérateur $T^n = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n]$ dans $\mathcal{L}(\oplus_{k=1}^n \mathcal{H}_k, \mathcal{H}')$ est une contraction.
- $T_1 = \Gamma_1$ est une contraction et, pour $k > 2$, il existe une unique contraction $\Gamma_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_k, \mathcal{R}(\gamma_k))$ telle que $T_k = D_{\Gamma_1^*} D_{\Gamma_2^*} \dots D_{\Gamma_{k-1}^*} \Gamma_k$.

Démonstration. Ce résultat se démontre par récurrence à partir du cas simple évoqué plus haut. □

De plus, l'opérateur de défaut de la contraction T est de la forme :

$$D_T^2 = \begin{pmatrix} D_{\Gamma_1} & 0 & \dots & 0 \\ -\Gamma_2^* \Gamma_1 & D_{\Gamma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Gamma_n^* D_{\Gamma_{n-1}^*} \dots D_{\Gamma_2^*} & -\Gamma_n^* D_{\Gamma_{n-1}^*} \dots D_{\Gamma_3^*} \Gamma_2 & \dots & D_{\Gamma_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\Gamma_1} & -\Gamma_1^* \Gamma_2 & \dots & -\Gamma_1^* D_{\Gamma_2^*} \dots D_{\Gamma_{n-1}^*} \Gamma_n \\ 0 & D_{\Gamma_2} & \dots & -\Gamma_2^* D_{\Gamma_3^*} \dots D_{\Gamma_{n-1}^*} \Gamma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{\Gamma_n} \end{pmatrix}$$

et de même

$$D_{\Gamma^*}^2 = D_{\Gamma_1^*} \cdots D_{\Gamma_n^*} D_{\Gamma_n^*} \cdots D_{\Gamma_1^*}$$

Ce résultat peut être prouvé par récurrence.

Bibliographie

- [1] P-A Absil, Rodolphe Sepulchre, A Bilge, and Paul Gérard. Nonlinear analysis of cardiac rhythm fluctuations using dfa method. *Physica A : Statistical mechanics and its applications*, 272(1-2) :235–244, 1999.
- [2] Aaron Adcock, Erik Carlsson, and Gunnar Carlsson. The ring of algebraic functions on persistence bar codes. 18, 04 2013.
- [3] MS Aini and A Fakhurul-Razi. Development of socio-technical disaster model. *Safety science*, 48(10) :1286–1295, 2010.
- [4] NI Akhiezer and IM Glazman. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Volume 1*. Frederick Ungar Publishing, 1961.
- [5] Samaneh Aminikhanghahi and Diane J Cook. A survey of methods for time series change point detection. *Knowledge and information systems*, 51(2) :339–367, 2017.
- [6] G. Ammar, W. Gragg, and L. Reichel. Constructing a Unitary Hessenberg Matrix from Spectral Data. Number 70 in NATO ASI Series, pages 385–395. Springer Berlin Heidelberg, 1991.
- [7] Gregory Ammar and Clyde Martin. The geometry of matrix eigenvalue methods. *Acta Applicandae Mathematica*, 5(3) :239–278, 1986.
- [8] Gregory S Ammar and William B Gragg. Schur flows for orthogonal hessenberg matrices. 1993.
- [9] GS Ammar, D Calvetti, and L Reichel. Continuation methods for the computation of zeros of szegő polynomials. *Linear algebra and its applications*, 249(1-3) :125–155, 1996.
- [10] Marc Arnaudon, Frédéric Barbaresco, and Le Yang. Riemannian medians and means with applications to radar signal processing. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 7(4), 2013.

- [11] Vladimir I Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de lie de dimension infinie et ses applicationsa l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier*, 16(1) :319–361, 1966.
- [12] Gr. Arsene and T. Constantinescu. The structure of the Naimark dilation and Gaussian stationary processes. *Integr equ oper theory*, 8(2) :181–204, March 1985.
- [13] B. Balaji, F. Barbaresco, and A. Decurninge. Information geometry and estimation of Toeplitz covariance matrices. In *2014 Int. Radar Conf.*, pages 1–4. IEEE, oct 2014.
- [14] F. Barbaresco. Geometric Radar Processing based on Fréchet distance : Information geometry versus Optimal Transport Theory. In *2011 12th Int. Radar Symp.*, pages 663–668, 2011.
- [15] F. Barbaresco. Information Geometry of Covariance Matrix : Cartan-Siegel Homogeneous Bounded Domains, Mostow/Berger Fibration and Fréchet Median. In *Matrix Inf. Geom.*, pages 199–255. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [16] Frederic Barbaresco. Interactions between symmetric cone and information geometries : Bruhat-tits and siegel spaces models for high resolution autoregressive doppler imagery. In *Emerging Trends in Visual Computing*, pages 124–163. Springer, 2009.
- [17] Frédéric Barbaresco. Geometric radar processing based on fréchet distance : information geometry versus optimal transport theory. In *Radar Symposium (IRS), 2011 Proceedings International*, pages 663–668. IEEE, 2011.
- [18] Frederic Barbaresco. Poly-symplectic model of higher order souriau lie groups thermodynamics for small data analytics. In *International Conference on Geometric Science of Information*, pages 432–441. Springer, 2017.
- [19] Frédéric Barbaresco and Matias Ruiz. Radar detection for non-stationary doppler signal in one burst based on information geometry : Distance between paths on covariance matrices manifold. In *Radar Conference (EuRAD), 2015 European*, pages 41–44. IEEE, 2015.
- [20] Martin Bauer, Martins Bruveris, Stephen Marsland, and Peter W. Michor. Constructing reparameterization invariant metrics on spaces of plane curves. *Differential Geometry and its Applications*, 34 :139–165, 2014.
- [21] Martin Bauer, Martins Bruveris, and Peter W. Michor. Why Use Sobolev Metrics on the Space of Curves. In *Riemannian Computing in Computer Vision*, pages 233–255. Springer, Cham, 2016.

- [22] Martin Bauer, Markus Eslitzbichler, and Markus Grasmair. Landmark-guided elastic shape analysis of human character motions. *arXiv preprint arXiv :1502.07666*, 2015.
- [23] Martin Bauer, Markus Eslitzbichler, and Markus Grasmair. Landmark-Guided Elastic Shape Analysis of Human Character Motions. *arXiv :1502.07666 [cs]*, February 2015. arXiv : 1502.07666.
- [24] Paul Bendich, James S Marron, Ezra Miller, Alex Pieloch, and Sean Skwerer. Persistent homology analysis of brain artery trees. *The annals of applied statistics*, 10(1) :198, 2016.
- [25] WR Bennett. Statistics of regenerative digital transmission. *Bell System Technical Journal*, 37(6) :1501–1542, 1958.
- [26] N.H. Bingham. Szegő’s theorem and its probabilistic descendants. *Probability Surveys*, 9 :287–324, 2012.
- [27] Gérard Blanchet and Maurice Charbit. Signaux et images sous matlab. *HERMES Science Europe Ltd*, 2001.
- [28] Omer Bobrowski and Matthew Kahle. Topology of random geometric complexes : a survey. *Journal of Applied and Computational Topology*, pages 1–34, 2014.
- [29] Guillaume Bouleux, Eric Marcon, and Olivier Mory. Early index for detection of pediatric emergency department crowding. *IEEE journal of biomedical and health informatics*, 19(6) :1929–1936, 2015.
- [30] Nicolas Boumal. Interpolation and regression of rotation matrices. In *Geometric Science of Information*, pages 345–352. Springer, 2013.
- [31] Florence T Bourgeois, Clarissa Valim, Jennie C Wei, Alexander J McAdam, and Kenneth D Mandl. Influenza and other respiratory virus-related emergency department visits among young children. *Pediatrics*, 118(1) :e1–e8, 2006.
- [32] Alice Le Brigant. Computing distances and geodesics between manifold-valued curves in the SRV framework. *arXiv preprint arXiv :1601.02358*, 2016.
- [33] Alice Le Brigant. A discrete framework to find the optimal matching between manifold-valued curves. *arXiv preprint arXiv :1703.05107*, 2017.
- [34] Peter Bubenik. Statistical Topological Data Analysis Using Persistence Landscapes. *J. Mach. Learn. Res.*, 16(1) :77–102, January 2015.
- [35] J.P Burg. Maximum entropy spectral analysis. In *37th Annual International Meeting. Society of Exploration Geophysics*, 1967.

- [36] Pablo G Cámara, Arnold J Levine, and Raúl Rabadán. Inference of ancestral recombination graphs through topological data analysis. *PLoS computational biology*, 12(8) :e1005071, 2016.
- [37] Gunnar Carlsson, Tigran Ishkhanov, Vin De Silva, and Afra Zomorodian. On the local behavior of spaces of natural images. *International journal of computer vision*, 76(1) :1–12, 2008.
- [38] Elena Celledoni, Sølve Eidnes, and Alexander Schmeding. Shape analysis on homogeneous spaces : a generalised srvt framework. *arXiv preprint arXiv :1704.01471*, 2017.
- [39] Elena Celledoni, Markus Eslietzichler, and Alexander Schmeding. Shape analysis on Lie groups with applications in computer animation. *arXiv preprint arXiv :1506.00783*, 2015.
- [40] G. Chiandussi, M. Codegone, S. Ferrero, and F. E. Varesio. Comparison of multi-objective optimization methodologies for engineering applications. *Computers & Mathematics with Applications*, 63(5) :912–942, March 2012.
- [41] Harish Chintakunta, Thanos Gentimis, Rocio Gonzalez-Diaz, Maria-Jose Jimenez, and Hamid Krim. An entropy-based persistence barcode. *Pattern Recognition*, 48(2) :391–401, February 2015.
- [42] Sergei Akopovich Chobanyan and Aleksander Weron. Banach-space-valued stationary processes and their linear prediction. 1975.
- [43] T. Constantinescu. *Schur Parameters, Factorization and Dilation Problems*. Birkhäuser Basel, Basel, 1995.
- [44] Tiberiu Constantinescu. On the structure of the naimark dilation. *Journal of Operator Theory*, pages 159–175, 1984.
- [45] Tiberiu Constantinescu. Some aspects of non-stationarity. *Prepr. ser. in mathematics*, 1988.
- [46] P Coriat, F Braun, JP Genet, P Goldstein, A Nazac, B Pol, et al. Propositions sur la composition, les missions et le champ d’action du conseil national de l’urgence et de la permanence des soins. paris : Ministère de la santé, de la jeunesse, des sports et de la vie associative ; 2008.
- [47] David Damanik, Alexander Pushnitski, and Barry Simon. The analytic theory of matrix orthogonal polynomials. *Surveys in Approximation Theory*, 4, 2008.
- [48] Dominique Dehay, Harry L Hurd, and Andrzej Makagon. Spectrum of periodically correlated fields. *arXiv preprint arXiv :1307.2546*, 2013.

- [49] Ph Delsarte, Y Genin, and Y Kamp. Schur parametrization of positive definite block-toeplitz systems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 36(1) :34–46, 1979.
- [50] Philippe Delsarte, Y Genin, and Y Kamp. Orthogonal polynomial matrices on the unit circle. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 25(3) :149–160, 1978.
- [51] Robert W Derlet and John R Richards. Overcrowding in the nation’s emergency departments : complex causes and disturbing effects. *Annals of emergency medicine*, 35(1) :63–68, 2000.
- [52] F Desbouvries. Unitary hessenberg and state-space model based methods for the harmonic retrieval problem. *IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation*, 143(6) :346–348, 1996.
- [53] F. Desbouvries. Non-euclidean geometrical aspects of the schur and levinson-szego algorithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(8) :1992–2003, August 2003.
- [54] YP Dragan and IN Yavorskii. The periodic correlation-random field as a model for bidimensional ocean waves. *Otbor Peredacha Inform*, 51 :15–21, 1982.
- [55] M. Dugast, G. Bouleux, and E. Marcon. Representation and characterization of non-stationary processes by dilation operators and induced shape space manifolds. *submitted to Communications on Pure and Applied Mathematics*.
- [56] S. Dégerine and S. Lambert-Lacroix. Evolutive instantaneous spectrum associated with partial autocorrelation function. 2002.
- [57] S. Dégerine and S. Lambert-Lacroix. Characterization of the partial autocorrelation function of nonstationary time series. *Journal of Multivariate Analysis*, 87(1) :46–59, October 2003.
- [58] Herbert Edelsbrunner, David Letscher, and Afra Zomorodian. Topological persistence and simplification. In *Foundations of Computer Science, 2000. Proceedings. 41st Annual Symposium on*, pages 454–463. IEEE, 2000.
- [59] Herbert Edelsbrunner and Dmitriy Morozov. *Persistent Homology : Theory and Practice*.
- [60] Filip Elvander, Andreas Jakobsson, and Johan Karlsson. Using optimal mass transport for tracking and interpolation of toeplitz covariance matrices. In *2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 4469–4473. IEEE, 2018.
- [61] S A Emine, G Bouleux, H Haouba, and E. Marcon. Emergency Department Overcrowding Detection by a Multifractal Analysis. In *10th IFAC Symposium on Biological and Medical Systems (IFACBMS 2018)*, Sao Paulo, Brazil, September 2018.

- [62] C. Foias and A. E. Frazho. A geometric approach to positive definite sequences. In *The Commutant Lifting Approach to Interpolation Problems*, number 44 in OT44 Operator Theory : Advances and Applications, pages 497–546. Birkhäuser Basel, 1990. DOI : 10.1007/978-3-0348-7712-1_15.
- [63] C. Foias, A. E. Frazho, and P. J. Sherman. A geometric approach to the maximum likelihood spectral estimator for sinusoids in noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(5) :1066–1070, 1988.
- [64] C. Foias, A. E. Frazho, and P. J. Sherman. A new approach for determining the spectral data of multichannel harmonic signals in noise. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 3(1) :31–43, 1990.
- [65] A. E. Frazho. On Stochastic Bilinear Systems. In Uday B. Desai, editor, *Modelling and Application of Stochastic Processes*, pages 215–241. Springer US, 1986. DOI : 10.1007/978-1-4613-2267-2_9.
- [66] William A Gardner. *Statistical spectral analysis : a nonprobabilistic theory*. Prentice-Hall, Inc., 1986.
- [67] William A Gardner, Antonio Napolitano, and Luigi Paura. Cyclostationarity : Half a century of research. *Signal processing*, 86(4) :639–697, 2006.
- [68] IA L Geronimus. *Polynomials orthogonal on a circle and interval*, volume 18. Pergamon Press, 1960.
- [69] Georgios B Giannakis. Cyclostationary signal analysis. *Digital Signal Processing Handbook*, pages 17–1, 1998.
- [70] N. Giansiracusa, R. Giansiracusa, and C. Moon. Persistent homology machine learning for fingerprint classification. *arXiv preprint arXiv :1711.09158*, 2017.
- [71] C. Giusti, E. Pastalkova, C. Curto, and V. Itskov. Clique topology reveals intrinsic geometric structure in neural correlations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(44) :13455–13460, November 2015.
- [72] EG Gladyshev. Periodically correlated random sequences. In *Doklady Akademii Nauk*, volume 137, pages 1026–1029. Russian Academy of Sciences, 1961.
- [73] Agnieszka Kitlas Golinska. Detrended fluctuation analysis (dfa) in biomedical signal processing : selected examples. *Stud. Logic Grammar Rhetoric*, 29 :107–115, 2012.
- [74] Gene H Golub and Charles F Van Loan. *Matrix computations*, volume 3. JHU Press, 2012.

- [75] J Górnjak and A Weron. Aronszajn-kolmogorov type theorems for positive definite kernels in locally convex spaces. *Studia Math*, 69(3) :235–246, 1980.
- [76] William B Gragg. The qr algorithm for unitary hessenberg matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 16(1) :1–8, 1986.
- [77] William B Gragg. Positive definite toeplitz matrices, the arnoldi process for isometric operators, and gaussian quadrature on the unit circle. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 46(1-2) :183–198, 1993.
- [78] PR Halmos. Introduction to hilbert space and the theory of spectral multiplicity, chelsea, new york, 1951. *MR*, 13(563) :512, 1957.
- [79] K Hasselmann and TP Barnett. Techniques of linear prediction for systems with periodic statistics. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 38(10) :2275–2283, 1981.
- [80] Christoph Hofer, Roland Kwitt, Marc Niethammer, and Andreas Uhl. Deep learning with topological signatures. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 1634–1644, 2017.
- [81] Michael Hofer and Helmut Pottmann. Energy-minimizing splines in manifolds. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 23(3) :284–293, 2004.
- [82] Nathan R. Hoot, Stephen K. Epstein, Todd L. Allen, Spencer S. Jones, Kevin M. Baumlin, Neal Chawla, Anna T. Lee, Jesse M. Pines, Amandeep K. Klair, Bradley D. Gordon, Thomas J. Flottemesch, Larry J. LeBlanc, Ian Jones, Scott R. Levin, Chuan Zhou, Cynthia S. Gadd, and Dominik Aronsky. Forecasting emergency department crowding : an external, multicenter evaluation. *Annals of Emergency Medicine*, 54(4) :514–522.e19, October 2009.
- [83] H. L. Hurd and A. Miamee. *Periodically Correlated Random Sequences : Spectral Theory and Practice*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2007.
- [84] Valerie Isham. Assessing the variability of stochastic epidemics. *Mathematical biosciences*, 107(2) :209–224, 1991.
- [85] Spencer S. Jones, Todd L. Allen, Thomas J. Flottemesch, and Shari J. Welch. An independent evaluation of four quantitative emergency department crowding scales. *Academic Emergency Medicine : Official Journal of the Society for Academic Emergency Medicine*, 13(11) :1204–1211, November 2006.

- [86] Farid Kadri. *Contribution à la conception d'un système d'aide à la décision pour la gestion de situations de tension au sein des systèmes hospitaliers. Application à un service d'urgence*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2014.
- [87] T. Kailath. Time-Variant and Time-Invariant Lattice Filters for Nonstationary Processes. Technical report, DTIC Document, 1982.
- [88] T. Kailath and A. M. Bruckstein. Naimark Dilations, State-Space Generators and Transmission Lines. Number 17 in *Operator Theory : Advances and Applications*, pages 173–186. Birkhäuser Basel, 1986.
- [89] IG Kang and FC Park. Cubic spline algorithms for orientation interpolation. *International journal for numerical methods in engineering*, 46(1) :45–64, 1999.
- [90] Krishan L Khatri and Lakshman S Tamil. Early detection of peak demand days of chronic respiratory diseases emergency department visits using artificial neural networks. *IEEE journal of biomedical and health informatics*, 22(1) :285–290, 2018.
- [91] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. Interscience publishers New York, 1963.
- [92] Alexander Kolker. Process Modeling of Emergency Department Patient Flow : Effect of Patient Length of Stay on ED Diversion. *Journal of Medical Systems*, 32(5) :389–401, October 2008.
- [93] Andreas Kriegl and Peter W Michor. Aspects of the theory of infinite dimensional manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, 1(2) :159–176, 1991.
- [94] Sophie Lambert. Sur l'estimation autorégressive des processus périodiquement corrélés. In *Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA, 1997*. GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images, 1997.
- [95] S. Lambert-Lacroix. Extension of Autocovariance Coefficients Sequence for Periodically Correlated Processes. *Journal of Time Series Analysis*, 26(3) :423–435, May 2005.
- [96] Marek Laskowski, Robert D. McLeod, Marcia R. Friesen, Blake W. Podaima, and Attahiru S. Alfa. Models of Emergency Departments for Reducing Patient Waiting Times. *PLOS ONE*, 4(7) :e6127, July 2009.
- [97] Alice Le Brigant, Marc Arnaudon, and Frédéric Barbaresco. Optimal matching between curves in a manifold. In *International Conference on Geometric Science of Information*, pages 57–64. Springer, 2017.

- [98] H. Lev-Ari and T. Kailath. Lattice filter parameterization and modeling of nonstationary processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 30(1) :2–16, January 1984.
- [99] Yili Li and Kon Max Wong. Riemannian distances for signal classification by power spectral density. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 7(4) :655–669, 2013.
- [100] Keh-Shin Lii, Murray Rosenblatt, et al. Estimation for almost periodic processes. *The Annals of Statistics*, 34(3) :1115–1139, 2006.
- [101] Robert C Lloyd. *Quality health care : a guide to developing and using indicators*. Jones & Bartlett Learning, 2004.
- [102] A. Makagon and H. Salehi. Notes on infinite dimensional stationary sequences. In *Probability Theory on Vector Spaces IV*, pages 200–238. Springer, 1989.
- [103] Andrzej Makagon and Abolghassem Miamee. Spectral representation of periodically correlated sequences. *Probab. Math. Statist*, 33(1) :175–188, 2013.
- [104] P. Masani. Dilations as Propagators of Hilbertian Varieties. *SIAM J. Math. Anal.*, 9(3) :414–456, June 1978.
- [105] ACG Mennucci, Anthony Yezzi, and Ganesh Sundaramoorthi. Sobolev-type metrics in the space of curves. *Interfaces and Free Boundaries*, 10(4) :423–445, 2008.
- [106] Peter W Michor. *Manifolds of differentiable mappings*, volume 3. Birkhauser, 1980.
- [107] Peter W Michor. *Topics in differential geometry*, volume 93. American Mathematical Soc., 2008.
- [108] Peter W. Michor and David Mumford. Vanishing geodesic distance on spaces of submanifolds and diffeomorphisms. *Doc. Math*, 10 :217–245, 2005.
- [109] Peter W Michor and David Mumford. An overview of the riemannian metrics on spaces of curves using the hamiltonian approach. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 23(1) :74–113, 2007.
- [110] Frank Nielsen and Rajendra Bhatia. *Matrix information geometry*. Springer, 2013.
- [111] S Othman and S Hammadi. Driven workflow orchestration of patient pathway in hospital emergencies. In *meta 2016*, 2016.
- [112] Nina Otter, Mason A Porter, Ulrike Tillmann, Peter Grindrod, and Heather A Harrington. A roadmap for the computation of persistent homology. *EPJ Data Science*, 6(1) :17, 2017.
- [113] Emanuel Parzen, Marcello Pagano, et al. An approach to modeling seasonally stationary time series. *Journal of Econometrics*, 9(1-2) :137–153, 1979.

- [114] Raymond Payen. Fonctions aléatoires du second ordre à valeurs dans un espace de hilbert. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 3 :323–396, 1967.
- [115] Xavier Pennec. *Probabilities and statistics on riemannian manifolds : A geometric approach*. PhD thesis, INRIA, 2004.
- [116] Xavier Pennec. Intrinsic statistics on Riemannian manifolds : Basic tools for geometric measurements. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25(1) :127–154, 2006.
- [117] Xavier Pennec, Pierre Fillard, and Nicholas Ayache. A Riemannian framework for tensor computing. *International Journal of Computer Vision*, 66(1) :41–66, 2006.
- [118] Jose A Perea and John Harer. Sliding windows and persistence : An application of topological methods to signal analysis. *Foundations of Computational Mathematics*, 15(3) :799–838, 2015.
- [119] Cássio MM Pereira and Rodrigo F de Mello. Persistent homology for time series and spatial data clustering. *Expert Systems with Applications*, 42(15-16) :6026–6038, 2015.
- [120] Marco Piangerelli, Matteo Rucco, Luca Tesei, and Emanuela Merelli. Topological classifier for detecting the emergence of epileptic seizures. *BMC research notes*, 11(1) :392, 2018.
- [121] Marion Pilté and Frédéric Barbaresco. Tracking quality monitoring based on information geometry and geodesic shooting. In *Radar Symposium (IRS), 2016 17th International*, pages 1–6. IEEE, 2016.
- [122] Alexander Port, Iulia Gheorghita, Daniel Guth, John M Clark, Crystal Liang, Shival Dasu, and Matilde Marcolli. Persistent topology of syntax. *Mathematics in Computer Science*, 12(1) :33–50, 2018.
- [123] Lloyd P Provost and Sandra K Murray. *The data guide : learning from data to improve health care*. Associates in Process Improvement and Corporate Transformation Concepts, 2010.
- [124] Matteo Rucco, Filippo Castiglione, Emanuela Merelli, and Marco Pettini. Characterisation of the Idiotypic Immune Network Through Persistent Entropy. In *Proceedings of ECCS 2014*, Springer Proceedings in Complexity, pages 117–128. Springer, Cham, 2016.
- [125] A. H. Sayed, T. Constantinescu, and T. Kailath. Recursive Construction of Multichannel Transmission Lines with a Maximum Entropy Property. In *Codes, Graphs, and Systems*, pages 259–290. Springer, 2002.
- [126] I Schur. On power series which are bounded in the interior of the unit circle i and ii. *J. fur die reine und angewandte Mathematik*, 148 :122–145, 1918.

- [127] Tatiana Shingel. Interpolation in special orthogonal groups. *IMA journal of numerical analysis*, 29(3) :731–745, 2008.
- [128] B. Simon. CMV matrices : Five years after. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 208(1) :120–154, November 2007.
- [129] B. Simon. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle Part 1 and Part 2*, volume 54. American Mathematical Society, 2009.
- [130] Gregory Soler, Guillaume Bouleux, Eric Marcon, Aymeric Cantais, Sylvie Pillet, and Olivier Mory. Emergency department admissions overflow modeling by a clustering of time evolving clinical diagnoses. In *14th IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE 2018)*, 2018.
- [131] A. Srivastava, E. Klassen, S. H. Joshi, and I. H. Jermyn. Shape Analysis of Elastic Curves in Euclidean Spaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 33(7) :1415–1428, July 2011.
- [132] Zhe Su, Eric Klassen, and Martin Bauer. Comparing Curves in Homogeneous Spaces. *arXiv :1712.04586 [math]*, December 2017. arXiv : 1712.04586.
- [133] B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, and L. Kérchy. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*. Springer New York, New York, NY, 2010.
- [134] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, 1959.
- [135] Hiroshi Takai and Hiroaki Yamada. A note on the dilation theorems. *Proceedings of the Japan Academy*, 48(4) :216–220, 1972.
- [136] Hiroshi Takai and Hiroaki Yamada. A note on the dilation theorems. *Proceedings of the Japan Academy*, 48(4) :216–220, 1972.
- [137] D. Timotin. Prediction theory and choice sequences : an alternate approach. In *Advances in invariant subspaces and other results of operator theory*, pages 341–352. Springer, 1986.
- [138] Chad M Topaz, Lori Ziegelmeier, and Tom Halverson. Topological data analysis of biological aggregation models. *PloS one*, 10(5) :e0126383, 2015.
- [139] M. C. Tseng. Contractions, Matrix Parametrizations, and Quantum Information. *arXiv :quant-ph/0610259*, October 2006. arXiv : quant-ph/0610259.
- [140] M. C. Tseng and V. Ramakrishna. Dilation Theoretic Parametrizations of Positive Matrices with Applications to Quantum Information. *arXiv :quant-ph/0610021*, October 2006. arXiv : quant-ph/0610021.

- [141] Yuhei Umeda. Time series classification via topological data analysis. *Information and Media Technologies*, 12 :228–239, 2017.
- [142] S. Verblunsky. On positive harmonic functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1) :290–320, 1936.
- [143] Mathukumalli Vidyasagar. Kullback-leibler divergence rate between probability distributions on sets of different cardinalities. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pages 948–953. IEEE, 2010.
- [144] A Weron. Remarks on positive-definite operator valued functions in banach spaces. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Chimiques*, 24(10) :873–876, 1976.
- [145] A. Weron. Stochastic Processes of Second Order with Values in Banach Spaces. Number 7A in *Transactions of the 7th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes*, pages 567–574. Springer Netherlands, 1977. DOI : 10.1007/978-94-010-9910-3_60.
- [146] L. Yang, M. Arnaudon, and F. Barbaresco. Riemannian median, geometry of covariance matrices and radar target detection. In *Radar Conference (EuRAD), 2010 European*, pages 415–418, September 2010.
- [147] Florence H. Y. Yap, Pak-Leung Ho, Kwok-Fai Lam, Paul K. S. Chan, Yeung-Hung Cheng, and Joseph S. M. Peiris. Excess hospital admissions for pneumonia, chronic obstructive pulmonary disease, and heart failure during influenza seasons in Hong Kong. *Journal of Medical Virology*, 73(4) :617–623, August 2004.
- [148] Laurent Younes. Computable elastic distances between shapes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58(2) :565–586, 1998.
- [149] George Udny Yule. On the theory of correlation for any number of variables, treated by a new system of notation. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 79(529) :182–193, 1907.
- [150] Zhengwu Zhang, Jingyong Su, Eric Klassen, Huiling Le, and Anuj Srivastava. Video-based action recognition using rate-invariant analysis of covariance trajectories. *arXiv preprint arXiv :1503.06699*, 2015.
- [151] A. Zomorodian and G. Carlsson. Computing Persistent Homology. *Discrete Comput Geom*, 33(2) :249–274, February 2005.

Table des figures

1.1	Effet d'une perturbation sur un système sociotechnique, d'après [86] et [3]. Une perturbation, telle que celle causée par une épidémie affecte durablement les services de soins.	5
1.2	Vision globale du projet PREDAFLU.	6
1.3	Flux de patients : données journalières	7
1.4	Exemple d'une approximation linéaire par morceau pour le calcul de la DFA.	9
1.5	Les valeurs du processus (points noirs) sont comparées à la tendance locale. Il en résulte une série temporelle $\{X_1, X_2, \dots\}$ qui est donnée par la longueur des doubles-flèches en pointillés, comptée positivement si les points sont situés au-dessus de la tendance et négativement si ils sont en-dessous.	10
1.6	DFA du signal de la Fig. 1.3	10
1.7	Pour ce signal de synthèse, la DFA serait inversée par rapport à celle de la Fig. 1.6. En effet sur les trois périodes distinctes (orange, bleue et verte), la variabilité est plus importante lors des périodes orange et verte (hors "épidémie" que lors de la période bleue.	11
1.8	Tracé de $\log F(L)$ en fonction de $\log(L)$	12
1.9	Support du spectre d'un processus T-PC.	14
1.10	Support du spectre cyclique du processus de variabilité.	15
1.11	Pour chaque s et t avec $s < t$ nous avons $\Gamma_{s,t} = \langle e_t, f_s \rangle$, où e_t est l'innovation forward X_t sur $sp\{X_s, \dots, X_{t-1}\}$ et f_s la projection de X_s sur $sp\{X_{s+1}, \dots, X_t\}$. e_t , l'innovation du processus au temps t est la composante de X_t qui ne peut pas être déduite des valeurs du signal aux temps précédents.	22
1.12	Les parcours induisent un changement de repère de l'espace généré par $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$	37
1.13	La matrice W_i s'obtient à partir de la ligne i de la matrices des parcours. Chaque parcor $\Gamma_{i,j}$ donne un angle d'une rotation de Givens.	39

2.1	Illustration d'une trajectoire fermée échantillonnée formée par des matrices de dilations sur $SO(n)$ ou $SU(n)$. Cela matérialise l'évolution temporelle de la mesure du processus PC.	48
2.2	Exemple de reparamétrisation d'une courbe. Ici cela consiste à changer la discrétisation de la courbe.	51
2.3	La SRV s'appuie sur une représentation des courbes par leurs vecteurs vitesses. . . .	52
2.4	Une façons d'interpréter la métrique élastique et de voir le produit scalaire dans l'intégrale comme une mesure de l'angle entre le repère en un temps donné t_0 , et ce même repère après avoir été transporté parallèlement en un temps ultérieur $t_1 = t_0 + \delta t$	54
2.5	l'espace tangent $T_{[c]}\mathcal{M}$ en un point $[c]$ de l'espace des courbes \mathcal{S} est isomorphe à la partie horizontale $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ de l'espace tangent en un point de la fibre associée. . . .	55
2.6	Nous considérons un faisceau de courbes consistant en une légère modification d'une géodésique. les différentes courbes sont indexées par τ . L'idée est de trouver laquelle de ces courbes fournit une énergie minimale pour aller de c_0 à c_1	58
2.7	1000 échantillons des processus PC générés par : (a) un bruit blanc modulé en amplitude; (b) un processus AR(2) périodique de période 54 points; (c) un AR(2) périodique de période 20 points; et (d) un ARMA(2,1) périodique de période 20 points.	62
2.8	Représentation des quatre processus PC de la Fig. 2.7 par l'action des matrices de dilation sur un vecteur de la sphere de π , dans le même ordre que la Fig. 2.7. Les courbes sont obtenues avec 200 points d'interpolations (étoiles vertes). La ligne noire en pointillée est la courbe théorique et les points rouges sont les matrices de dilation.	63
2.9	Représentation des quatre processus PC de la Fig. 2.7 par l'action des matrices de dilation sur un vecteur de la sphere de π , dans le même ordre que la Fig. 2.7. Les courbes sont obtenues avec 100 points d'interpolations (étoiles vertes). La ligne noire en pointillée est la courbe théorique et les points rouges sont les matrices de dilation.	65
2.10	1000 échantillons des processus PC générés par : (a) un bruit blanc modulé en amplitude; (b) un processus AR(2) périodique de période 54 points; (c) un AR(2) périodique de période 20 points; et (d) un ARMA(2,1) périodique de période 20 points. Représentation dans la boule unité.	66

2.11	Un PAR(2) de période 20 points pour 1000 point représenté, et sa trajectoire dans $SO(3)$ associée.	67
2.12	Interpolation par géodésique entre le signal de référence (Fig. 2.11) et le signal de la Fig. 2.7-(c) calculée à partir de l'équation 2.31. La première ligne correspond à une interpolation avec 200 points, la seconde avec 50 points. Dans ces scenarios $s \in [1/4, 1/2, 3/4]$ ce qui correspond respectivement aux figures [(a-d), (b-e), (c-f)].	68
3.1	Le groupe fondamental d'un tore est à égal \mathbb{Z}_2 , ce qui se traduit par le fait que les deux courbes fermées rouges et bleues ne peuvent pas se transformer l'une en l'autre par transformation continue. Imaginons que ces deux courbes soient des élastiques. Nous ne pouvons pas passer de l'élastique rouge à l'élastique bleu sans le casser.	72
3.2	Un n-simplexe est défini par l'enveloppe convexe de $n+1$ points dans un espace de dimensions n . Dans la rangée du haut sont représentés successivement un 0-simplexe, un 1-simplexe et un 2-simplexe. Dans la rangée du bas ce sont les faces de ces simplexes qui sont représentées.	74
3.3	Un complexe simplicial constitué d'un tétraèdre bleu : (v_1, v_2, v_3, v_4) , de deux triangles rouges : (v_6, v_7, v_8) et (v_8, v_9, v_{10}) , et de quatre segments noirs : (v_4, v_5) , (v_5, v_6) , (v_7, v_9) , et (v_8, v_{10})	75
3.4	Quelques étapes de la filtration de Vietoris-Rips. Un cycle se crée à la troisième étape (également à la deuxième en tant que bord du triangle). Il disparaîtra lorsque les quatre cercles centrés aux quatre sommets correspondant s'intersecteront.	79
3.5	Un cercle bruité. Le point isolé dans le diagramme de persistance traduit l'organisation circulaire de ce nuage de points.	80
3.6	Le nombre de Betti au temps ρ , β_{rho} , est donné par le nombre de points en vert. En faisant varier ρ , nous obtenons la séquence des nombres Betti.	81
3.7	(a) Un exemple d'un signal PC généré à partir d'un modèle ARMA d'ordre 2. 1000 échantillons ont été tirés, avec 20 point par périodes.(b) La trajectoire sur le groupe $SO(3)$ formée par les matrices de dilations de ce signal. La trajectoire est représenté à l'intérieur d'une boule unité.	82
3.8	Le diagramme de persistance à l'ordre 1 du signal de la Fig. 3.7-(a) . Deux trous se distinguent, dont l'un est plus important que l'autre.	83

3.9	Une réalisation de chaque modèle utilisé dans notre classification. Chaque signal est périodiquement corrélé de période 32.	84
3.10	Les diagrammes de persistance pour une réalisation de chacun des processus figurant à la Fig. 3.9. 32 sequences de 10 parcours chacune ont été utilisées pour obtenir le nuage de matrice de dilation. Les diagrammes de persistance ont été obtenus avec le package Dionysus sous Python.	85
3.11	Projection des données après une réduction de dimension à deux composantes principales, (a) Les données ne peuvent pas être différenciées avec seulement deux composantes principales. (b) Certains processus sont néanmoins bien distinguables.	87
3.12	Contributions des caractéristiques aux axes principaux PC1 et PC2. H_i désigne l'entropie persistante normalisée à l'ordre $i = 0, 1$; f_i , les caractéristique polynomiales à l'ordre i , b_i les caractéristique de Betti à l'ordre i . Le rôle singulier de l'entropie persistante est clairement visible.	87
3.13	500 réalisations d'un cercle bruité ont été générées pour trois niveau de bruit $\eta = 0.2, \eta = 0.3, \eta = 0.4$. Haut : un exemple du nuage de point obtenu pour chaque niveaux de bruit. Bas : les histogrammes des valeurs d'entropies persistantes correspondants.	90
3.14	Histogramme des valeurs de l'entropie normalisée à l'ordre 0 pour 500 réalisations par processus.	91
3.15	Histogramme des valeurs de l'entropie normalisée à l'ordre 1 pour 500 réalisations par processus.	92
3.16	Séquence de Betti moyenne obtenue après 500 réalisations pour chacun des processus.	93
3.17	Illustration de la distance de Bottleneck. Les points du diagramme noir sont associés aux points du diagramme rouge de sorte à ce que la somme des déplacements soit minimale.	94
4.1	DFA du processus d'admission.	98
4.2	Le nuage de points correspondant au processus de variabilité $\{Y_k\}_{k=1}^{36}$ de la Fig. 4.1. Différentes périodes sont distinguées par différentes couleurs. Les deux points représentés par des croix correspondent aux dates du 2014-11-22 et du 2014-12-05. Ici, nous avons utilisé $L = 24$	100

4.3	Resultats d'une analyse de série temporelle par homologie persistante sur des données correspondant à une épidémie de Bronchiolite issu du CHU de Saint-Etienne entre le 2014-05-01 et le 2015-08-31. (a)évolution temporelle de $\text{Bar}_{\max}(k)$, (b) evolution temporelle de $\text{PE}_{\text{norm}}(k)$. Les calculs ont été menés avec $L = 30$ jours comme paramètre de la DFA et $N = 4$ jours pour la fenêtre temporelle du nuage de points.	103
4.4	(a) évolution temporelle de $\text{Bar}_{\max}(k)$, (b) évolution temporelle de $\text{PE}_{\text{norm}}(k)$ pour le processus Fig.4.1. La longueur de la fenêtre glissante est $N = 4$. Les longueurs de la DFA sont de $L = 50$ et $L = 5$	105
4.5	Deux critères sont minimisés : $f(L)$, la détection précoce et $g(L)$ l'estimation de l'apogée de l'épidémie ; L est la longueur de la DFA	106
4.6	(a) La fonction objectif $\text{Obj}(L)$ obtenue en calibrant le detecteur sur trois années successives, de 2013-05-01 à 2016-08-31. (b) Les dates correspondantes aux trois détections sur la période considérée pour une longueur de la DFA de $L = 24$	107
4.7	Détection d'un nombre d'arrivées anormal (2016-11-25) et estimation du nombre d'arrivée maximal (2017-01-15) obtenue avec le détecteur calibré pour l'année 2016-2017.	108
4.8	Comparaison entre l'indicateur Bar_{\max} et trois autres méthode de détection de changement : une carte de contrôle, un cusum et un kurtosis local.	109
A.1	Un triangle dans un espace à deux dimensions.	116
A.2	un complexe simplicial constitué de trois simplexes Δ_1 (triangle), Δ_2 (triangle), Δ_3 (tétraèdre)	116
A.3	Un tetraedre est un 3-simplexes. Ces faces sont des 2-simplexes ou des 1-simplexes.	117
A.4	Ex.1 espace \mathcal{X}_1	119
A.5	Ex.1 espace \mathcal{X}_2	121
A.6	Ex.3 un cercle est homéomorphe à un triangle.	123
A.7	Ex.4 un disque est homéomorphe à un triangle. Le triangle est orienté dans le sens trigonométrique.	124
A.8	Ex.5 Une sphère, homéomorphe à un tétraèdre. Par souci de clarté, toutes les orientations non pas été représentées.	126
A.9	Ex.6 Un tore, qui est homéomorphe à deux triangles collés dont tous les sommets on été identifiés. Par souci de clarté, toutes les orientations non pas été représentées.	127

A.10 Ex.7 Le plan projectif. Par souci de clarté, toutes les orientations non pas été représentées. 127

Liste des tableaux

2.1 Tableau des distances des quatre modèles de signaux PC de la Fig. 2.7 par rapport au signal de référence Fig. 2.11. Les distances ont été calculées par programmation dynamique. 67



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : DUGAST
(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

DATE de SOUTENANCE : 21/12/2018

Prénoms : Maël

TITRE : Géométrie et topologie des processus périodiquement corrélés: applications à l'analyse de la variabilité des épidémies pédiatriques saisonnières.

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2018LYSEI127

Ecole doctorale : Infomaths ED 512

Spécialité : Mathématiques appliquées

RESUME :

Chaque année lors de la période hivernale, des phénomènes épidémiques affectent l'organisation des services d'urgences pédiatriques et dégradent la qualité de la réponse fournie. Ces phénomènes présentent une forte variabilité qui rend leur analyse difficile. Nous nous proposons d'étudier cette volatilité pour apporter une vision nouvelle et éclairante sur le comportement de ces épidémies. Pour ce faire, nous avons adopté une vision géométrique et topologique originale directement issue d'une application de la théorie de la dilation: le processus de variabilité étant périodiquement corrélé, cette théorie fournit un ensemble de matrices dites de dilations qui portent toute l'information utile sur ce processus. Cet ensemble de matrices nous permet de représenter les processus stochastiques comme des éléments d'un groupe de Lie particulier, à savoir le groupe de Lie constitué de l'ensemble des courbes sur une variété. Il est alors possible de comparer des processus par ce biais. Pour avoir une perception plus intuitive du processus de variabilité, nous nous sommes ensuite concentrés sur le nuage de points formé par l'ensemble des matrices de dilations. En effet, nous souhaitons mettre en évidence une relation entre la forme temporelle d'un processus et l'organisation de ces matrices de dilations. Nous avons utilisé et développé des outils d'homologie persistante et avons établi un lien entre la désorganisation de ce nuage de points et le type de processus sous-jacents. Enfin nous avons appliqué ces méthodes directement sur le processus de variabilité pour pouvoir détecter le déclenchement de l'épidémie. Ainsi nous avons établi un cadre complet et cohérent, à la fois théorique et appliqué pour répondre à notre problématique.

MOTS-CLÉS : Processus stochastiques, processus périodiquement corrélés, topologie, géométrie, géométrie de l'information, courbes sur variétés, entropie, nuage de points, analyse topologique des données

Laboratoire (s) de recherche : DISP

Directeur de thèse: MARCON Eric

Président de jury :

Composition du jury :

PENNEC, Xavier, Directeur de Recherche, INRI

Rapporteur

VIGUIER-PLA, Sylvie, Maître de Conférences HDR, Université de Perpignan

Rapporteur

BARBARESCO, Frédéric, Docteur, Thales air and space system

Examineur

HADJ-HAMOU, Khaled, Professeur des Universités, INSA-Lyon

Examineur

BAUDOT, Pierre, Chargé de Recherche, INSERM

Examineur

Allasonière, Stéphanie, Professeur, Université Paris-Descartes

Présidente

MARCON, Eric, Professeur, Université Saint-Etienne

Directeur de thèse

Bouleux, Guillaume, Maître de Conférence, Université Saint-Etienne

Co-encadrant

Mory, Olivier, Praticien Hospitalier, CHU de Saint-Etienne

Invité