



**HAL**  
open science

# Analyse de quelques problèmes de conductivité avec changement de signe

Lionel Salesses

► **To cite this version:**

Lionel Salesses. Analyse de quelques problèmes de conductivité avec changement de signe. Thermique [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2018. Français. NNT : 2018GREAM087 . tel-02125956

**HAL Id: tel-02125956**

**<https://theses.hal.science/tel-02125956>**

Submitted on 10 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### **DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Lionel SALESSES**

Thèse dirigée par **Brigitte BIDEGARAY-FESQUET**, CR, CNRS  
et codirigée par **Charles Dapogny**

préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzmann** dans l'**École  
Doctorale Mathématiques, Sciences et technologies de  
l'information, Informatique**

### **Analyse de quelques problèmes de conductivité avec changement de signe**

### **Analysis of some conductivity problems with sign changing coefficients**

Thèse soutenue publiquement le **19 décembre 2018**,  
devant le jury composé de :

**Madame BRIGITTE BIDEGARAY-FESQUET**

CHARGE DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ALPES, Directeur de  
thèse

**Monsieur CHARLES DAPOGNY**

MAITRE DE CONFERENCES, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES,  
Examineur

**Monsieur FRANCK BOYER**

PROFESSEUR, UNIVERSITE TOULOUSE-III PAUL-SABATIER,  
Rapporteur

**Monsieur YANNICK PRIVAT**

PROFESSEUR, UNIVERSITE DE STRASBOURG, Rapporteur

**Monsieur LAURENT DESBAT**

PROFESSEUR, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES, Président

**Monsieur GREGORY VIAL**

PROFESSEUR, ECOLE CENTRALE DE LYON, Examineur



Pendant la période du 01/10/15 au 30/09/17, cette thèse a été dirigée par Faouzi Triki et Éric Bonnetier. La fin de cette thèse (du 01/10/17 au 19/12/18) a été dirigée par Brigitte Bidegaray-Fesquet et Charles Dapogny.

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
0.1 Permittivité des métaux nobles . . . . .	11
0.2 Matériaux négatifs et plasmons de surface . . . . .	13
0.3 Métamatériaux et applications . . . . .	18
0.4 Plan de la thèse . . . . .	20
<b>1 Préliminaires : Notations et outils</b>	<b>25</b>
1.1 Notations . . . . .	26
1.2 Problème de conductivité et opérateur de Poincaré-Neumann . . . . .	27
1.2.1 Potentiels de couche . . . . .	28
1.2.2 Équation intégrale et théorie de Fredholm . . . . .	30
1.3 Opérateur de Poincaré-Neumann variationnel . . . . .	33
1.3.1 Définition et propriétés élémentaires . . . . .	34
1.3.2 Propriétés spectrales de $T_D$ . . . . .	36
1.4 Opérateur de Poincaré-Neumann variationnel pour un domaine non borné . . . . .	45
1.4.1 Problème de Dirichlet extérieur . . . . .	46
1.4.2 Définition et propriétés de l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel . . . . .	47
1.4.3 Relation entre les opérateurs de Poincaré-Neumann variationnel pour un domaine borné et pour un domaine non-borné . . . . .	50
<b>2 Caractère bien posé des problèmes de conductivité</b>	<b>53</b>
2.1 Introduction . . . . .	54
2.2 Contexte . . . . .	55

2.2.1	Géométrie du problème et notations . . . . .	55
2.2.2	Problème . . . . .	56
2.3	Résultat principal . . . . .	57
2.4	Équation intégrale . . . . .	58
2.4.1	Résultats classiques de la théorie du potentiel . . . . .	58
2.4.2	Formule de représentation . . . . .	65
2.5	Preuve du Théorème 2.3.1 . . . . .	67
2.5.1	Singularité des potentiels de simple couche . . . . .	68
2.5.2	Singularité des opérateurs de Poincaré-Neumann . . . . .	74
2.5.3	Singularité de l'opérateur intégral . . . . .	82
2.6	Inversibilité de l'équation intégrale . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Approximation numérique du principe variationnel de Poincaré</b>	<b>87</b>
3.1	Introduction . . . . .	88
3.2	Résultats . . . . .	89
3.3	Étude préliminaire de l'opérateur de Poincaré-Neumann discrétisé . . . . .	91
3.4	Convergence du spectre . . . . .	93
3.4.1	Quelques résultats géométriques sur $D$ et son approximation $D_h$ . . . . .	94
3.4.2	Construction de l'opérateur $p_h$ . . . . .	95
3.4.3	Changement de variables dans la définition de $T_h$ . . . . .	98
3.4.4	Convergence des valeurs propres . . . . .	100
3.5	Convergence de la résolvante . . . . .	103
3.6	Extension des résultats de convergence du spectre pour $\Omega = \mathbb{R}^d$ . . . . .	106
3.6.1	Opérateur de Poincaré-Neumann défini sur le domaine $\mathbb{R}^d$ . . . . .	107
3.6.2	Réduction de l'opérateur $T_D^\infty$ à un domaine borné . . . . .	107
3.6.3	Discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Neumann sur le domaine $B$ . . . . .	112
3.7	Résultats numériques . . . . .	115
3.7.1	Calcul numérique des valeurs propres de l'opérateur de Poincaré-Neumann dans un domaine borné . . . . .	115
3.7.2	Calcul numérique des valeurs propres de l'opérateur de Poincaré-Neumann dans un domaine non borné avec un opérateur de <i>Dirichlet-to-Neumann</i> . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Étude du champ diffracté par une couche métallique dont l'épaisseur tend vers zéro</b>	<b>119</b>
4.1	Introduction . . . . .	121
4.2	Géométrie et problème limite . . . . .	121
4.3	Calcul de la fonction de Green . . . . .	124

4.3.1	Calcul de $\widehat{G}$ . . . . .	125
4.3.2	Régularisation de la fonction de Green . . . . .	130
4.4	Étude de la fonction de Green . . . . .	133



---

# TABLE DES FIGURES

1	Partie réelle et imaginaire de $\varepsilon(\omega)$ pour l'argent (en pointillé) déterminée par Johnson et Christy [JC72] et le modèle de Drude (trait continu). L'énergie d'un photon $\mathcal{E}$ en abscisse (donnée en électrons-volts) est associée à une pulsation par la relation $\omega = \mathcal{E}/\hbar$ , où $\hbar$ est la constante de Planck réduite. . . . .	13
2	Géométrie du problème . . . . .	13
3	Excitation d'un plasmon de surface à l'aide d'un prisme de verre positionné au dessus d'une couche métallique (configuration dite "d'Otto"). Lorsque l'onde incidente traverse le prisme et se réfléchit sur sa face interne positionnée au dessus de la couche métallique cela génère une onde évanescente qui interagit avec la couche de métal. La phase de cette onde dépend de l'angle de l'onde incidente au prisme. . . . .	17
4	Exemples de métamatériaux. Photos : À gauche un métamatériau de type "split-ring resonator" d'une hauteur de 1cm créé en déposant par lithographie un conducteur métallique sur un isolant [SPW04]; À droite une vue rapprochée (échelle de 1 $\mu\text{m}$ ) d'une structure élémentaire d'un métamatériau de type "split-ring resonator" [Sha07].	18
5	Illustration d'une cape d'invisibilité. Une onde incidente arrive à gauche de l'image, contourne le dispositif d'invisibilité au centre et ressort quasiment non-perturbée à droite. Ainsi tout se passe comme si l'onde n'avait pas rencontré le dispositif d'invisibilité. . . . .	19
6	Géométrie du problème . . . . .	23
2.1	Inclusion d'un matériau négatif dans un diélectrique positif . . . . .	56

3.1	<i>Illustration des notations de la Section 3.4.2.</i> . . . . .	96
3.2	Écart entre les valeurs propres calculées numériquement et celles prédites par la théorie en fonction du nombre de noeuds du maillage.	116
3.3	Distance entre la valeur propre calculée numériquement et la valeur $1/2$ en fonction du nombre de noeuds du maillage. . . . .	117
4.1	Géométrie du problème . . . . .	122
4.2	Graphe de $ G $ dans la région $-10 \leq y \leq -1, -20 \leq x \leq 20$ pour différentes valeurs de $\eta^2$ . Pour la figure (a): $\eta^2 = 0.05 + 0.5i$ , (b): $\eta^2 = 0.05 + 0.1i$ , (c): $\eta^2 = 0.05 + 0.01i$ , (d): $\eta^2 = 0.05 + 0.0001i$ . La couleur rouge correspond aux fortes intensités de $ G $ et la couleur bleu aux valeurs proches de zéro. . . . .	131

---

# INTRODUCTION

La réponse électromagnétique d'un matériau est caractérisée par les deux coefficients que sont la permittivité électrique et la perméabilité magnétique. La permittivité  $\varepsilon$  décrit de quelle manière un champ électrique  $\mathbf{E}$  appliqué à un matériau peut en modifier la polarisation  $\mathbf{P}$ , qui représente la densité des dipôles électriques, et comment ce champ agit sur la distribution de charges électriques dans ce matériau. Plus précisément le champ  $\mathbf{E}$  va déplacer, sous l'effet de la force de Lorentz, les électrons libres du matériau et donc induire un courant électrique. De plus ce champ électrique va également influencer les électrons liés aux atomes pour créer des dipôles électriques et donc modifier la polarisation du matériau. Ces effets sont modélisés par le champ d'induction électrique  $\mathbf{D}$  défini par

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité électrique du vide. Remarquons que dans le cas des diélectriques il n'y a pas d'électrons libres, en revanche, c'est un matériau qui peut être polarisé. Au niveau macroscopique, on peut interpréter la permittivité comme la capacité d'un matériau à modifier les lignes de champ électrique. Dans les matériaux linéaires ( $\varepsilon$  ne dépend pas de  $\mathbf{E}$ ) et isotropes ( $\varepsilon$  ne dépend pas de la direction) le champ  $\mathbf{D}$  est lié au champ électrique  $\mathbf{E}$  par la relation dite "constitutive"

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (2)$$

La perméabilité magnétique  $\mu$  décrit comment un champ magnétique  $\mathbf{B}$  appliqué à un matériau modifie l'orientation et la position des dipôles magnétiques. Cet effet est modélisé par le champ d'induction magnétique  $\mathbf{H}$ . Au niveau macroscopique on peut interpréter la perméabilité comme la capacité d'un matériau à modifier les lignes de champ magnétique. Pour un matériau linéaire et isotrope le champ d'induction magnétique vérifie la relation "constitutive"

$$\mathbf{H} = \mu \mathbf{B}. \quad (3)$$

On ne s'intéresse dans la suite qu'aux matériaux linéaires et isotropes. Les coefficients  $\varepsilon$  et  $\mu$  peuvent être des réels strictement positifs pour les matériaux diélectriques comme le verre ou l'air. Ils peuvent aussi être à valeurs complexes pour les métaux et dans ce cas la partie imaginaire traduit un phénomène de dissipation d'énergie. Toutefois, pour certains métaux comme l'or ou l'argent, la permittivité électrique dépend de la fréquence du champ électrique et sa partie réelle peut être négative dans certaines gammes de fréquences [JC72]. Pour étudier ce type de matériau on néglige souvent la partie imaginaire des coefficients, qui correspond à la dissipation d'énergie, pour se concentrer sur leur partie réelle. Les matériaux dits "négatifs" sont un modèle de matériaux où l'on a supposé que la permittivité électrique et/ou la perméabilité magnétique prennent des valeurs réelles

négatives. Nous allons voir dans un premier temps comment on peut modéliser la permittivité des métaux et dans quel domaine de fréquence ils se comportent comme un matériau négatif. Ensuite nous expliquerons que le caractère négatif de la permittivité donne naissance à un phénomène particulier appelé *plasmon de surface*. Pour finir nous expliquerons comment créer des matériaux négatifs artificiels puis nous présenterons les applications permises par les matériaux négatifs.

## 0.1 Permittivité des métaux nobles

Pour modéliser la permittivité des métaux dans une large gamme de fréquences, on peut faire appel au modèle de Drude ou *modèle plasma* (voir [Mai07] Chapitre 2 ou [Jac99, Orf16]). Cela consiste à considérer le métal comme un réseau rigide d'ions positifs dans lequel circule un fluide électronique de charge négative. On considère que les interactions électromagnétiques entre les électrons et le réseau ionique sont modélisées par une force de frottement fluide caractérisée par  $\gamma$  qui correspond à la fréquence caractéristique de collision des électrons (typiquement on prendra  $\gamma = 10^{14}$  Hz). Ainsi on suppose que les électrons ne subissent que cette force de frottement fluide et la force induite par le champ électrique extérieur  $\mathbf{E}$  dont on suppose qu'il est harmonique  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ . À partir de ce modèle, on montre que les électrons décrivent un mouvement d'oscillation :

$$\mathbf{x}(t) = \frac{e}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \mathbf{E}(t),$$

où  $\text{Re}[\mathbf{x}]$  est la position de l'électron. Les grandeurs  $e$  et  $m$  sont la charge et la masse de l'électron. De ces oscillations résulte une polarisation  $\mathbf{P} = -n e \mathbf{x}$  où  $n$  est la densité des électrons. À partir de la relation constitutive (2) et de la définition (1), on peut expliciter le coefficient de permittivité du métal  $\varepsilon(\omega)$  par

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega},$$

où  $\omega_p = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$  est la pulsation plasma du métal. La partie réelle et imaginaire de  $\varepsilon$  sont alors données par

$$\begin{aligned} \text{Re}[\varepsilon(\omega)] &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 + \omega^2}, \\ \text{Im}[\varepsilon(\omega)] &= \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega(\gamma^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Lorsque  $\omega/\gamma \gg 1$ , on peut faire l'approximation

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

On observe alors que  $\varepsilon(\omega_p) = 0$  et donc que  $\mathbf{D} = 0 = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ . On en déduit qu'à la fréquence plasma  $\omega_p$ , la polarisation qui résulte de l'oscillation des électrons annule exactement le champ électrique quelle que soit son amplitude. On peut alors interpréter la fréquence plasma comme la fréquence naturelle d'oscillation du fluide électronique.

Pour les métaux nobles (or, argent, cuivre par exemple), une correction doit être apportée au modèle de Drude à cause d'un effet de polarisation  $\mathbf{P}_\infty$  des ions du métal qui doit être ajouté à la polarisation induite par les électrons libres. Cet effet de polarisation s'explique par la configuration électronique particulière des métaux nobles (voir [Mai07] Section 1.2). Prendre en compte la polarisation  $\mathbf{P}_\infty$  revient alors introduire une constante diélectrique  $\varepsilon_\infty$  ( $1 \leq \varepsilon_\infty \leq 10$ ) pour rendre compte de cet effet. Dans ce cas, la permittivité s'écrit

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}.$$

Les limites d'un tel modèle sont illustrées par la Figure 1 dans le cas de l'argent. Les parties réelle et imaginaire de la permittivité mesurée expérimentalement pour l'argent y sont représentées en pointillés ainsi que la courbe théorique prévue par le modèle de Drude en trait plein. Ces grandeurs sont tracées en fonction de l'énergie  $\mathcal{E}$  d'un photon qui peut être associée à une pulsation par la relation  $\omega = \mathcal{E}/\hbar$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. On voit que ce modèle ne décrit plus correctement le comportement du métal à partir d'une certaine fréquence. En effet pour un photon dont l'énergie  $\mathcal{E}$  est supérieure à 3.5 eV (ce qui équivaut à une pulsation  $\omega = 5.3 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ) la permittivité déterminée expérimentalement diffère sensiblement du modèle de Drude. Cela s'explique par l'apparition d'un phénomène de transitions des électrons entre les bandes électroniques qui se produisent à haute énergie [ELRM06]. Il est alors possible de corriger le modèle de Drude à l'aide d'un terme plus complexe pour tenir compte de ce phénomène [VGM<sup>+</sup>05]. On observe également dans la Figure 1 que pour un photon dont l'énergie est inférieure à 3.5 eV, la partie réelle de la permittivité de l'argent est négative.

Maintenant que nous avons expliqué comment les métaux nobles peuvent se comporter comme un matériau négatif pour certaines fréquence du champ électrique nous allons étudier le comportement d'une onde électromagnétique lorsqu'elle rencontre un matériau négatif. Nous allons voir que cela donne naissance à un phénomène particulier appelé *plasmon de surface*.

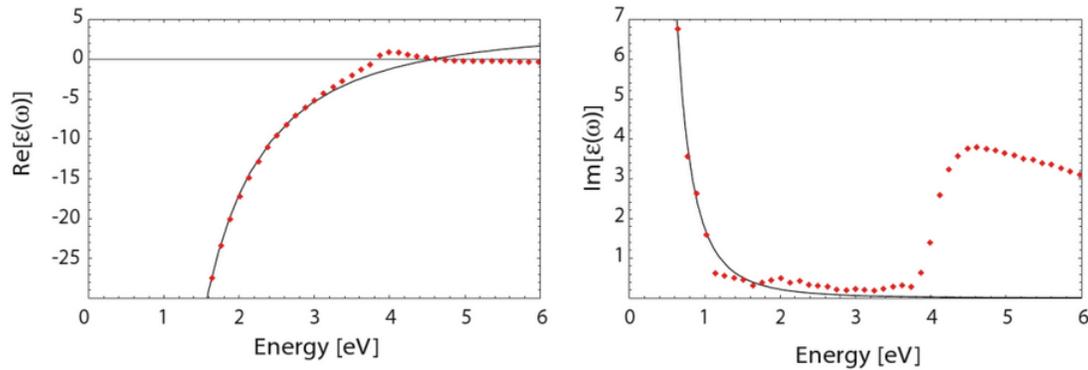


FIGURE 1 – Partie réelle et imaginaire de  $\varepsilon(\omega)$  pour l'argent (en pointillé) déterminée par Johnson et Christy [JC72] et le modèle de Drude (trait continu). L'énergie d'un photon  $\mathcal{E}$  en abscisse (donnée en électron-volts) est associée à une pulsation par la relation  $\omega = \mathcal{E}/\hbar$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite.

## 0.2 Matériaux négatifs et plasmons de surface

Un phénomène important pouvant exister sous certaines conditions à l'interface entre un métal et un diélectrique est la propagation d'ondes le long de la surface et évanescentes dans la direction perpendiculaire. Ces ondes, appelées *plasmons de surface*, sont la conséquence du couplage entre le champ électromagnétique extérieur et les oscillations du fluide électronique dans le métal [Hom06, Mai07, SSJ12, Str07]. Nous allons montrer comment ce phénomène apparaît formellement comme solution des équations de Maxwell sous certaines conditions. On considère un milieu métallique de permittivité constante  $\varepsilon = \varepsilon_m$  avec  $\text{Re}[\varepsilon_m] < 0$  occupant le demi-espace  $z \leq 0$  en contact avec un diélectrique de permittivité  $\varepsilon = \varepsilon_d$  occupant le demi-espace  $z > 0$  (voir Figure 2). On se place dans le cadre de matériaux linéaires,

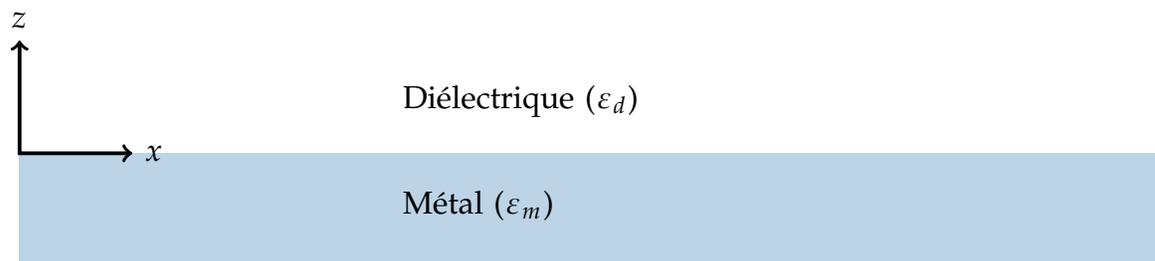


FIGURE 2 – Géométrie du problème

isotropes, non-magnétiques, de perméabilité  $\mu = 1$  et dont l'aimantation est nulle.

On suppose qu'il n'y a pas de charges électriques et de courants électriques non-liés (ou externes), c'est-à-dire qu'on n'impose pas de stimulus externe à partir d'une distribution de charges ou de courants. Les équations de Maxwell dans tout l'espace s'écrivent alors :

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}) = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (7)$$

où  $\mathbf{E}$  est le champ électrique et  $\mathbf{B}$  est le champ d'induction magnétique. L'opérateur  $\nabla \wedge$  désigne l'opérateur rotationnel. En combinant les équations (6) et (7), on obtient

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Comme  $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$  et que  $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon + \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  d'après l'équation (4), on obtient

$$\nabla \left( -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon \right) - \Delta \mathbf{E} = -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Étant donné qu'on a supposé  $\varepsilon$  constante par morceaux, cette équation se réécrit

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

avec les relations de passage à l'interface métal-diélectrique  $z = 0$

$$\mathbf{z} \wedge \mathbf{E}_m = \mathbf{z} \wedge \mathbf{E}_d,$$

$$\mathbf{z} \wedge \mathbf{B}_m = \mathbf{z} \wedge \mathbf{B}_d,$$

$$\varepsilon_m \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{z} = \varepsilon_d \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{z},$$

$$\mathbf{B}_m \cdot \mathbf{z} = \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{z},$$

où  $\mathbf{z}$  désigne le vecteur unitaire dans la direction  $z$  et  $\mathbf{E}_m, \mathbf{B}_m$  (respectivement  $\mathbf{E}_d, \mathbf{B}_d$ ) désignent les champs électromagnétiques dans le métal (respectivement le diélectrique). En se plaçant en régime harmonique, c'est-à-dire en supposant que  $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z)e^{i\omega t}$ , on obtient à partir de (8) l'équation de propagation des ondes :

$$\Delta \mathbf{E} + k_0^2 \varepsilon \mathbf{E} = 0, \quad (9)$$

où  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  est le module du vecteur d'onde d'une onde se propageant dans le vide. En sachant que la géométrie de notre problème est invariante par translation selon  $x$  et  $y$  et que  $\varepsilon = \varepsilon(z)$ , on peut supposer sans perte de généralité que le champ électrique ne dépend pas de la variable  $y$ . Comme on cherche une solution qui se propage le long de l'interface (dans notre cas selon la direction  $x$ ) on suppose que

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(z)e^{ik_x x}, \quad (10)$$

où  $k_x \in \mathbb{R}$  est la composante du vecteur d'onde dans la direction  $x$ . En reprenant l'équation (9), on montre que  $\mathbf{E}(z)$  satisfait le problème unidimensionnel suivant

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(z)}{\partial z^2} + (k_0^2 \varepsilon - k_x^2) \mathbf{E}(z) = 0. \quad (11)$$

En explicitant les équations de Maxwell couplées (6) et (7), étant donné la forme particulière du champ électrique (10), on peut obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} - ik_x E_z &= i\omega B_y, \\ ik_x B_y &= -i\omega \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon E_z, \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} &= i\omega \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon E_x, \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega B_x, \\ ik_x E_y &= i\omega B_z, \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - ik_x B_z &= -i\omega \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon E_y. \end{aligned}$$

On voit alors apparaître deux sous-problèmes indépendants. Le premier concerne les composantes  $E_x$ ,  $E_z$  et  $B_y$ , tandis que le second concerne les composantes  $E_y$ ,  $B_x$  et  $B_z$ . Cela correspond aux modes transverse magnétique (TM) et transverse électrique (TE) respectivement.

On parle de mode TM lorsque le champ magnétique est orthogonal au vecteur d'onde (dans notre cas le vecteur d'onde est dans le plan  $(x, z)$  et pour le premier sous-problème le champ magnétique est porté par  $y$ ). Dans ce cas, les champs électromagnétiques s'écrivent  $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$  et  $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)$  et vérifient

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} + (k_0^2 \varepsilon - k_x^2) B_y = 0, \quad (12)$$

avec les relations

$$E_x = -\frac{i}{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \omega} \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad (13)$$

$$E_z = -\frac{k_x}{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \omega} B_y. \quad (14)$$

On parle de mode TE lorsque le champ électrique est orthogonal au vecteur d'onde (pour le second sous-problème le champ électrique est porté par  $\mathbf{y}$ ). Dans ce cas, les champs électromagnétiques s'écrivent  $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$  et  $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$  et vérifient

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + (k_0^2 \varepsilon - k_x^2) E_y = 0, \quad (15)$$

avec les relations

$$B_x = \frac{i}{\omega} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (16)$$

$$B_z = \frac{k_x}{\omega} E_y. \quad (17)$$

On peut alors résoudre ces deux systèmes séparément. En mode TM, on obtient

$$B_y(z) = \begin{cases} A e^{ik_x x} e^{-k_d z}, & \text{pour } z > 0, \\ B e^{ik_x x} e^{k_m z}, & \text{pour } z < 0. \end{cases} \quad (18)$$

avec  $k_m^2 = k_x^2 - k_0^2 \varepsilon_m$  et  $k_d^2 = k_x^2 - k_0^2 \varepsilon_d$ . On peut récupérer  $E_x$  et  $E_z$  à partir des relations (13) et (14). À partir des relations de passage à l'interface  $z = 0$ , on en déduit que  $A = B$  et que

$$k_m/k_d = -\varepsilon_m/\varepsilon_d. \quad (19)$$

On remarque que cette relation ne peut être satisfaite que si  $\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_d$  sont de signes opposés. De plus, à partir de (19) et de l'expression de  $k_m$  et  $k_d$ , on obtient la relation de dispersion pour les plasmons de surface

$$k_x = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_d}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}}. \quad (20)$$

Cette relation relie la composante  $k_x$  du vecteur d'onde à la pulsation  $\omega$  à travers la dépendance  $\varepsilon_m = \varepsilon_m(\omega)$  et  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ . La relation de dispersion n'est pas toujours satisfaite, elle impose donc des conditions de validité sur  $\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_d$  (et donc sur  $\omega$ )

pour que les solutions que sont les plasmons de surface puissent exister. Pour une étude plus poussée de cette relation de dispersion, le lecteur pourra consulter le Chapitre 2 de [Mai07]. L'auteur calcule également la relation de dispersion pour les plasmons de surface lorsque la géométrie du problème consiste en une couche métallique infinie dans les directions  $x$  et  $y$  mais d'épaisseur finie.

On peut également montrer que les plasmons de surface ne peuvent pas exister en mode TE.

Nous avons vu qu'en dimension deux il est possible d'obtenir un plasmon de surface à l'interface entre un diélectrique et matériau négatif sous la condition de satisfaire la relation de dispersion. En d'autres mots en faisant interagir la couche métallique avec une onde électromagnétique dont la fréquence et le vecteur d'onde satisfont la relation de dispersion on obtient un plasmon de surface. En dimension trois l'existence d'un plasmon de surface requiert à la fois de satisfaire une condition sur la fréquence et sur la phase de l'onde. Cela ne peut se faire qu'en utilisant un dispositif supplémentaire, comme un prisme (voir [Mai07] Chapitre 3). Ce dispositif a pour but d'ajuster la phase de l'onde qui va interagir avec la couche métallique et donc de permettre l'existence d'un plasmon de surface (voir Figure 3).

Le phénomène des plasmons de surface que nous venons d'expliquer, et de façon plus générale les matériaux négatifs, ont plusieurs applications concrètes que nous allons présenter dans la prochaine section.

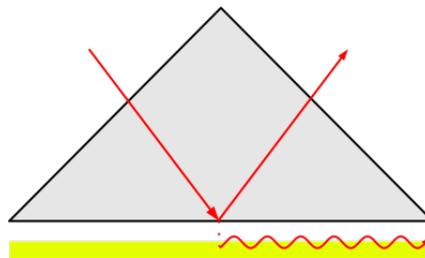


FIGURE 3 – Excitation d'un plasmon de surface à l'aide d'un prisme de verre positionné au dessus d'une couche métallique (configuration dite "d'Otto"). Lorsque l'onde incidente traverse le prisme et se réfléchit sur sa face interne positionnée au dessus de la couche métallique cela génère une onde évanescente qui interagit avec la couche de métal. La phase de cette onde dépend de l'angle de l'onde incidente au prisme.

### 0.3 Métamatériaux et applications

Nous avons vu que les métaux peuvent se comporter comme des matériaux négatifs pour certaines fréquences du champ électrique. On peut également créer artificiellement des matériaux de ce type à l'aide d'un assemblage périodique de structures élémentaires microscopiques de telle sorte que le comportement macroscopique effectif corresponde à celui d'un matériau homogène négatif [AKT05, ARW<sup>+</sup>16, SCC<sup>+</sup>05]. Ces assemblages sont appelés métamatériaux et possèdent des propriétés intéressantes et inhabituelles [Sha07, SPW04]. Ces propriétés macroscopiques

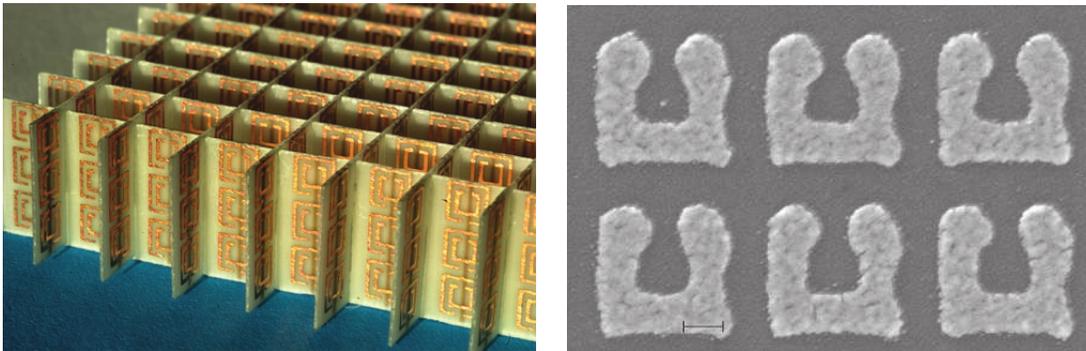


FIGURE 4 – Exemples de métamatériaux. Photos : À gauche un métamatériau de type "split-ring resonator" d'une hauteur de 1cm créé en déposant par lithographie un conducteur métallique sur un isolant [SPW04]; À droite une vue rapprochée (échelle de 1  $\mu\text{m}$ ) d'une structure élémentaire d'un métamatériau de type "split-ring resonator" [Sha07].

resultent de résonances locales au niveau des structures élémentaires qui composent le métamatériau. Le choix de la forme de ces structures est crucial pour obtenir les propriétés macroscopiques que l'on désire, c'est-à-dire une permittivité et une perméabilité données. L'utilisation par Bouchitté et Feldbach [BF04, FB97] puis par Zwölf [Zwö08] de techniques d'homogénéisation pour les problèmes de métamatériaux rend compte de ce passage de structures microscopiques assemblées périodiquement à un comportement macroscopique particulier. Cependant la convergence de ces techniques d'homogénéisation ne se justifie facilement que pour certaines structures à la géométrie particulière et ne fonctionne pas dans le cas général. C'est la possibilité de contrôler la permittivité et la perméabilité des métamatériaux (et donc la propagation des ondes électromagnétiques) à partir de la structure de base qui représente un grand potentiel pour les applications. Attardons nous en particulier sur les métamatériaux dits "négatifs" pour comprendre pourquoi leurs propriétés originales peuvent être très intéressantes pour les ap-

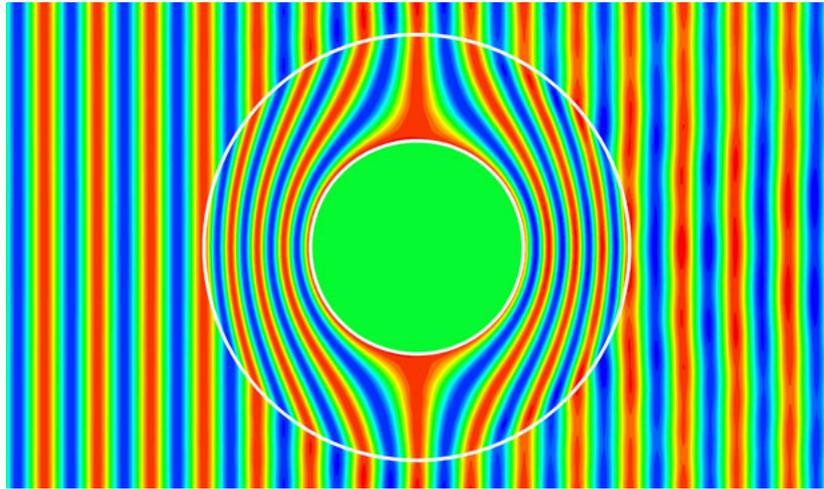


FIGURE 5 – Illustration d'une cape d'invisibilité. Une onde incidente arrive à gauche de l'image, contourne le dispositif d'invisibilité au centre et ressort quasiment non-perturbée à droite. Ainsi tout se passe comme si l'onde n'avait pas rencontré le dispositif d'invisibilité.

plications. L'une des applications phare de ces matériaux est la création de "capes d'invisibilité". L'idée consiste à disposer l'objet que l'on souhaite dissimuler dans une coquille dont on ajuste la permittivité et la perméabilité de sorte qu'une onde incidente contourne cet objet (voir Figure 5). Un tel dispositif d'invisibilité a été construit en 2006 [SMJ<sup>+</sup>06] à l'aide d'une structure cylindrique qui a permis de "dévier" des micro-ondes et ainsi masquer ce qui a été placé à l'intérieur du cylindre. Outre la possibilité de dissimuler des objets à l'oeil humain ou à une caméra, il est également envisageable de protéger des bâtiments contre les ondes sismiques à l'aide de dispositifs d'invisibilité [MKBP16]. En effet l'idée d'utiliser des métamatériaux pour manipuler les ondes électromagnétiques peut s'adapter au cas des ondes sismiques en utilisant des assemblages de matériaux de différentes densités et élasticités.

Une autre application notable des métamatériaux négatifs est de pouvoir s'affranchir de la limite de diffraction qui contraint la résolution de certains dispositifs optiques [LJJP03]. En effet considérons un objet qui émet un paquet d'ondes planes et une lentille placée dans son voisinage dont le but est de focaliser la lumière de cet objet afin de l'imager. Lorsque ces ondes planes rencontrent la lentille, la relation de dispersion impose qu'une partie d'entre elles va continuer de se propager à l'intérieur de la lentille tandis qu'une autre partie va donner naissance à des ondes évanescentes. L'information portée par ces ondes évanescentes, qui correspond aux détails de l'image dont la taille est inférieure ou égale à la longueur d'onde, est

alors perdue. Il y a donc une taille limite des détails que l'on peut imager. Par contre un métamatériau d'indice  $\varepsilon = -1$  et  $\mu = -1$  permet d'amplifier et de focaliser ces ondes évanescentes et donc de récupérer cette information. On peut également citer l'utilisation de métamatériaux pour la création d'antennes hautes performances et miniaturisées [VCF10].

Une application directe des plasmons de surface est la détection et l'identification de molécules organiques (en particulier les protéines) et plus généralement de nanoparticules [CK07]. Le dispositif repose sur la génération d'un plasmon de surface à l'interface entre un métal et un diélectrique à l'aide d'une onde incidente traversant un prisme (voir Figure 3). Pour qu'un plasmon de surface existe à l'interface métal-diélectrique, l'angle de l'onde incidente au prisme doit être judicieusement choisi. La présence d'une particule près de la surface métallique modifie les conditions d'existence du plasmon et donc l'angle d'incidence requis. Ces changements peuvent alors être détectés et permettent d'identifier la particule.

Une autre application clé des plasmons de surface est leur utilisation pour transmettre de l'information. Les circuits électroniques sont très efficaces pour manipuler et traiter l'information. Un des avantages de cette technologie est sa miniaturisation (à l'échelle du nanomètre aujourd'hui). Cependant elle perd en efficacité lorsqu'il s'agit de transporter des informations sur des distances plus importantes. La photonique permet de traiter ce problème : il s'agit de transporter l'information directement sous forme de lumière au sein de fibres optiques. Cependant la taille des dispositifs photoniques est importante (de l'ordre du micromètre) ce qui limite leur intégration aux circuits électroniques. Les circuits basés sur les plasmons de surface permettent d'intégrer le transport d'information sous forme de lumière (photonique) dans des circuits électroniques tout en restant sur des dispositifs dont la taille est nanométrique [EGB08, Ozb06].

## 0.4 Plan de la thèse

Lorsque l'on souhaite étudier l'interaction d'une onde électromagnétique avec un matériau négatif, plongé dans un diélectrique positif, il est primordial se demander si le problème est mathématiquement bien posé étant donné la valeur négative que prennent certains coefficients physiques (ce qui sort du cadre théorique classique). En dimension deux, les équations de Maxwell en régime harmonique se réduisent à des problèmes scalaires, associés aux modes de propagation transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM). Le mode TM autorise la propagation de plasmons de surface à l'interface entre le matériau négatif et le diélectrique, ce qui le rend particulièrement intéressant. Dans ce cas, les équations de Maxwell se réduisent à un problème de transmission pour une équation de la forme

$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) + \omega^2 u = f$  où  $\sigma$  prend une valeur négative  $\sigma_-$  dans le matériau négatif et une valeur positive  $\sigma_+$  dans le diélectrique et où  $f$  est un terme source. Il est pertinent et aussi plus simple d'étudier cette équation en régime quasi-statique ( $\omega = 0$ ), c'est-à-dire que l'on se concentre sur l'opérateur  $u \mapsto \operatorname{div}(\sigma \nabla u)$ . En effet le régime quasi-statique est suffisant pour étudier le caractère bien posé du problème. Il est également pertinent lorsque l'on étudie les résonances plasmoniques dans des nanoparticules [AMRZ17]. Le changement de signe de  $\sigma$  interdit l'utilisation du cadre classique de Lax-Milgram et fait apparaître une difficulté importante, à savoir que le problème de transmission des ondes électromagnétiques à l'interface entre le matériau négatif et le diélectrique admet du spectre discret. Sous quelles conditions et dans quel sens le problème de transmission est-il bien posé?

L'étude de ce problème fait naturellement intervenir un opérateur intégral appelé opérateur de Poincaré-Neumann (voir Section 1.2). On s'intéresse en particulier à son spectre, dont on montre qu'il encode les rapports de conductivité qui permettent l'existence des plasmons de surface. On ne connaît pas le spectre de l'opérateur de Poincaré-Neumann dans le cas général, on peut alors calculer les valeurs propres de cet opérateur numériquement en construisant un équivalent discrétisé de celui-ci à partir des méthodes classiques d'éléments finis. Est-il possible de prouver la convergence des valeurs propres de l'opérateur discrétisé vers celles de l'opérateur continu? On peut également étudier le problème de transmission pour une équation de conductivité dans le cadre des fonctions de Green [Fol95], qui par définition est une solution d'une équation aux dérivées partielles dont le terme source est une distribution  $\delta$  de Dirac. Quelle alors est la fonction de Green pour ce problème et quelles sont ses propriétés?

## Chapitre 1

Le Chapitre 1 de cette thèse est un préliminaire à la compréhension des chapitres suivants. On y présente plusieurs outils utiles dans l'étude des problèmes de transmission pour une équation de conductivité. On trouvera en particulier dans ce chapitre une introduction aux opérateurs de Fredholm, aux potentiels de couche, ainsi que la définition et les propriétés de l'opérateur de Poincaré-Neumann pour un domaine borné et pour un domaine non-borné.

## Chapitre 2

Dans le Chapitre 2, on s'intéresse au caractère bien posé du problème de transmission entre un matériau négatif et un diélectrique. Le cadre approprié pour étudier ce problème est de s'intéresser à son caractère bien posé au sens Fred-

holm (voir Section 1.2.2). Plusieurs techniques ont été développées pour étudier ce problème et aboutissent à des conditions suffisantes pour que ce problème soit bien posé au sens Fredholm. On citera en particulier les travaux de Costabel qui a travaillé avec une permittivité constante par morceaux ou appartenant à l'espace  $C^1(\Omega)$ . Dans [DCC12], l'approche de la  $T$ -coercivité (développée dans [DCJZ10]) est utilisée pour un bord lipschitzien avec des coefficients dans l'espace  $L^\infty(\Omega)$  et permet d'énoncer une condition suffisante de nature non-locale. En utilisant une technique de localisation, les auteurs se ramènent une condition locale à l'interface mais sous l'hypothèse que celle-ci est de régularité  $C^1$  avec éventuellement un nombre fini de coins. Dans ce chapitre, on travaillera avec une permittivité de régularité  $H^2$  et on suppose que le bord du matériau négatif est de régularité lipschitzienne. On étudiera la caractère bien posé du problème de transmission à l'aide d'une approche intégrale. Sous réserve d'admettre les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 énoncées dans les parties 2.5.1 et 2.5.2 respectivement, on montre que le problème de transmission est Fredholm sous une condition suffisante et locale à l'interface qui dépend de la géométrie de l'interface et des valeurs du coefficient de permittivité à l'interface. Les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 concernent la compacité de certains opérateurs intégraux. Les raisons qui nous font penser que ces conjectures sont vraies sont détaillées dans les Remarques 2.5.3 et 2.5.8.

### Chapitre 3

L'opérateur de Poincaré-Neumann défini dans la Section 1.2 intervient naturellement dans l'étude des problèmes de transmission pour l'équation de conduction où la conductivité change de signe à l'interface. On peut dans certains cas simples déterminer son spectre explicitement [Kan15] mais dans le cas général on doit recourir à des méthodes numériques pour le calculer. Dans [BTT16] le spectre de l'opérateur de Poincaré-Neumann est calculé à l'aide du principe du min-max pour deux inclusions proches. On peut également construire un équivalent discrétisé de cet opérateur à partir de sa définition variationnelle (1.3.1) et calculer son spectre avec des méthodes d'éléments finis classiques. Cependant on ne dispose pas d'un résultat général garantissant que les valeurs propres calculées numériquement avec ces méthodes d'éléments finis convergent vers les valeurs propres théoriques de l'opérateur lorsque la finesse du maillage augmente. Divers travaux ont été effectués sur la convergence des méthodes de Galerkin pour les problèmes de transmission pour l'équation de conduction en utilisant la méthode de la  $T$ -coercivité [DCC18, DCJZ10, NV11]. Dans ce chapitre, on commence par construire un équivalent discrétisé de l'opérateur de Poincaré-Neumann continu. Puis on compare le spectre de ces deux opérateurs afin d'obtenir un résultat de convergence des valeurs propres de l'opérateur discrétisé vers celles de l'opérateur continu. Notre idée

pour démontrer ce résultat de convergence était d'utiliser le principe du min-max. Cependant cette approche ne permet pas de conclure directement (voir Remarque 3.4.7). Ce résultat fait donc l'objet de la Conjecture 3.2.1. En admettant cette conjecture, on prouvera la convergence de la résolvante du problème discrétisé vers celle du problème continu. Pour finir, on formulera la même conjecture dans le cas d'un domaine non-borné.

## Chapitre 4

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le champ diffracté par une couche de métal plane, infinie dans deux directions, lorsque l'épaisseur  $2h$  de cette couche tend vers zéro (voir Figure 6). On veut en particulier étudier le champ qui se pro-

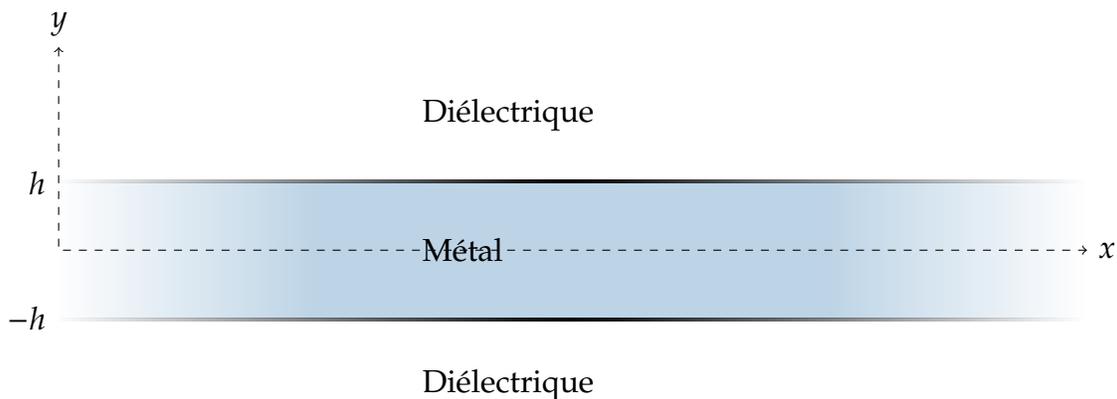


FIGURE 6 – Géométrie du problème

page dans la couche métallique et déterminer comment ce champ dépend de la permittivité du métal. Pour cela, nous allons réduire les équations de Maxwell à un problème scalaire de type Helmholtz auquel s'ajoutent des conditions de transmission à la surface de la plaque métallique et des conditions de radiation à l'infini garantissant que la solution est physiquement acceptable. Plus précisément, on accepte que les champs électromagnétiques se propagent le long de la couche métallique (plasmons de surface) mais on impose qu'ils décroissent fortement lorsqu'on s'éloigne dans la direction perpendiculaire à la couche. En faisant l'asymptotique formelle de ce problème lorsque l'épaisseur de la couche tend vers zéro, on récupère un problème limite plus simple à étudier car il fait disparaître la partie fréquentielle de l'équation de Helmholtz. On peut alors calculer la fonction de Green associée à l'aide d'une méthode de régularisation. Dès lors nous pourrions interpréter la dépendance de cette fonction de Green en la permittivité du métal.



---

---

# CHAP. 1

---

## PRÉLIMINAIRES : NOTATIONS ET OUTILS

### Sommaire

---

0.1	Permittivité des métaux nobles . . . . .	11
0.2	Matériaux négatifs et plasmons de surface . . . . .	13
0.3	Métamatériaux et applications . . . . .	18
0.4	Plan de la thèse . . . . .	20

---

Ce chapitre a pour objectif de présenter les notations (voir Section 1.1) et les outils nécessaires à la compréhension des autres chapitres de cette thèse. Dans la Section 1.2 on s'intéresse au problème de conductivité dans un domaine borné où l'on impose un courant électrique sur le bord du domaine. On traite ce problème à l'aide de la théorie des potentiels de couche et on verra que l'opérateur de Poincaré-Neumann apparaît naturellement dans l'étude de ce problème. Dans la Section 1.3 on s'intéresse au problème de conductivité dans un domaine macroscopique borné et on impose que le champ diffracté soit nul sur le bord de ce domaine. Ce cadre est une simplification de la nécessité physique que le champ diffracté soit nul à l'infini. On étudie ce problème à l'aide de la méthode variationnelle et il apparaît que l'on peut définir un opérateur de Poincaré-Neumann variationnel qui est intimement lié à l'opérateur de Poincaré-Neumann défini dans l'approche intégrale. Dans la Section 1.4 on étudie le problème de conductivité sur un domaine non-borné ce qui nécessite de travailler avec un espace de fonctions qui contient les conditions de radiations appropriées. Dans ce cas, on peut également définir un opérateur de Poincaré-Neumann variationnel.

## 1.1 Notations

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et une inclusion  $D \Subset \Omega$  dont le bord est au moins de régularité lipschitzienne, autrement dit  $D$  est localement l'hypographe strict d'une fonction lipschitzienne. La restriction d'une fonction arbitraire  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sur le domaine  $D$  (respectivement sur le domaine  $\Omega \setminus \overline{D}$ ) est notée  $u|_D$  (respectivement  $u|_{\Omega \setminus \overline{D}}$ ) et le saut d'une quantité  $q$  à travers la frontière  $\partial D$  est lui noté  $[q]_{\partial D}^{\pm} = q|_+ - q|_-$ . L'opérateur de trace sur  $\partial D$  est simplement noté  $\gamma_{\partial D} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial D)$ ,  $s \geq 1$ . Soit  $n$  le vecteur normal unitaire à  $\partial D$  pointant vers l'extérieur de  $D$ . Lorsque  $u$  est de régularité suffisante, on note

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\pm} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \nabla u(x \pm tn(x)) \cdot n(x)$$

les dérivées normales extérieures et intérieures de  $u$  au point  $x \in \partial D$ .

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach, l'adjoint d'un opérateur borné  $T : X \rightarrow Y$  est noté  $T^* : Y^* \rightarrow X^*$  (où  $X^*$  désigne le dual topologique de  $X$ ). On rappelle (voir [BCL99] Section II.6) que  $T^*$  est défini par la relation

$$\langle T^*(y^*), x \rangle_{X^*, X} = \langle y^*, Tx \rangle_{Y^*, Y},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*, X}$  (respectivement  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y^*, Y}$ ) désigne le crochet de dualité entre  $X^*$  et  $X$  (respectivement  $Y^*$  et  $Y$ ).

Soit  $L : X \rightarrow X$  un opérateur borné, on note  $\text{sp}(L)$  le spectre de l'opérateur  $L$  dont on rappelle [EE18] qu'il correspond à l'ensemble des nombres  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $\mu I - L$  n'admet pas d'opérateur inverse borné. On note alors  $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \text{sp}(T)$  l'ensemble résolvant. De plus on notera  $\sigma_{dis}(L)$  le spectre discret de l'opérateur  $L$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $\mu$  soit une valeur propre isolée de  $L$  de multiplicité finie. On rappelle que  $\mu$  est une valeur propre de  $L$  si  $\mu I - L$  n'est pas injectif. On définit le spectre essentiel, noté  $\sigma_{ess}(L)$ , comme le complémentaire du spectre discret dans le spectre, c'est-à-dire  $\sigma_{ess}(L) = \text{sp}(L) \setminus \sigma_{dis}(L)$ .

## 1.2 Problème de conductivité et opérateur de Poincaré-Neumann

On considère un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  avec un bord  $C^1$  et une inclusion  $D \subsetneq \Omega$  avec un bord  $C^1$ . Les sous-domaines  $D$  et  $\Omega \setminus \overline{D}$  sont assimilés à des matériaux dans lesquels la conductivité est constante et vaut  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et 1 respectivement. On note  $A(x) = a\chi_D(x) + \chi_{\Omega \setminus \overline{D}}(x)$  la distribution de conductivité sur  $\Omega$ . On s'intéresse au potentiel électrique  $u \in H^1(\Omega)$  généré par une distribution de courants  $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et solution du problème de conductivité suivant :

$$\begin{cases} \text{div}(A\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\partial\Omega} u(x) ds(x) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

On peut réécrire le problème (1.1) en faisant apparaître les conditions de transmission à l'interface  $\partial D$

$$\begin{cases} \text{div}(A\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \partial D, \\ u|_+ = u|_-, & \text{sur } \partial D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_+ = a \frac{\partial u}{\partial n}|_-, & \text{sur } \partial D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\partial\Omega} u(x) ds(x) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

On observe qu'une solution  $u$  du problème (1.2) est harmonique dans  $D$  et  $\Omega \setminus \overline{D}$  et continue sur le bord  $\partial D$ . Ces propriétés caractérisent l'opérateur de simple couche et il apparaît donc naturel d'employer cet opérateur pour expliciter une solution  $u$  [KPS07].

### 1.2.1 Potentiels de couche

Soit  $G_0$  la fonction de Green en espace libre pour l'opérateur laplacien en dimension deux :

$$G_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log |x - y|,$$

qui vérifie l'équation

$$\Delta_x G_0(x, y) = \delta_y(x), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2,$$

où  $\delta_y(x)$  est la fonction delta de Dirac au point  $y$ . Soit  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$ , on définit l'opérateur de simple couche associé au laplacien [McL00] par :

$$S_0[\varphi](x) = \int_{\partial D} G_0(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D. \quad (1.3)$$

On définit également l'opérateur de double couche associé au laplacien par :

$$\mathcal{D}_0[\varphi](x) = \int_{\partial D} \frac{\partial G_0}{\partial n_y}(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D. \quad (1.4)$$

On peut immédiatement noter que les potentiels de couche  $S_0[\varphi]$  et  $\mathcal{D}_0[\varphi]$  sont harmoniques dans  $D$  et  $\Omega \setminus \overline{D}$ . Précisons maintenant les applications que définissent ces opérateurs (voir [Cos88] Théorème 1, Théorème 2 et [McL00] Théorème 6.12, Théorème 7.1).

**Proposition 1.2.1.** *Les potentiels de couche*

$$S_0 : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^1(\Omega),$$

$$\mathcal{D}_0 : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^1(\Omega),$$

*sont des applications bornées.*

L'étude du comportement des opérateurs de simple et double couche sur le bord  $\partial D$ , qui fait l'objet de la Proposition 1.2.3, nécessite d'abord d'introduire l'opérateur de Poincaré-Neumann. L'opérateur faiblement singulier  $K_0^* : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial D)$ , aussi appelé opérateur de Poincaré-Neumann associé au domaine  $D$ , est défini par

$$K_0^*[\varphi](x) = \int_{\partial D} \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial n_x} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D. \quad (1.5)$$

L'adjoint  $L^2$  de  $K_0^*$  est l'opérateur  $K_0 : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial D)$  défini par

$$K_0[\varphi](x) = \int_{\partial D} \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial n_y} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D. \quad (1.6)$$

Les opérateurs  $K_0^*$  et  $K_0$  sont bornés et peuvent s'étendre naturellement comme des opérateurs  $K_0^* : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  et  $K_0 : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  et cela même pour un bord de régularité lipschitzienne (voir [CMM82]). Rappelons quelques résultats intéressants sur l'opérateur  $K_0^*$  (voir par exemple [AK07, Kan15, Kel12]).

**Proposition 1.2.2.** *Lorsque le bord  $\partial D$  est lisse ( $C^{1,\alpha}$  for  $\alpha > 0$ ), nous pouvons affirmer les résultats suivants :*

- (i)  $K_0 : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial D)$  est un opérateur compact,
- (ii)  $K_0^* : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  est un opérateur compact,
- (iii) le spectre de  $K_0^* : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  est composé de valeurs propres qui s'accumulent au point 0,
- (iv) le spectre de  $K_0^* : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  est inclus dans l'intervalle  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,
- (v)  $\frac{1}{2}I + K_0^*$  est inversible sur  $L^2(\partial D)$  et  $-\frac{1}{2}I + K_0^*$  est inversible sur  $L_0^2(\partial D)$  qui est l'ensemble des fonctions de  $L^2(\partial D)$  de moyenne nulle.

La propriété (iii) est une conséquence immédiate de la propriété de compacité (ii) et (v) découle de l'alternative de Fredholm (voir [Kan15]). Remarquons aussi que la propriété (iv) est toujours valable pour un bord lipschitzien. En général, l'opérateur  $K_0^*$  n'est pas auto-adjoint sur  $L^2(\partial D)$ . Toutefois, on peut montrer que  $K_0^*$  est auto-adjoint lorsque  $\partial D$  est un cercle ou une sphère. De plus, on peut prouver que  $K_0^*$  est auto-adjoint pour un autre produit scalaire à l'aide de l'identité de Calderón (voir [Kan15] pour plus de détails).

On rappelle maintenant les relations de saut satisfaites par les potentiels de couche (voir [McL00] Théorème 6.11 par exemple).

**Proposition 1.2.3.** *Sur la frontière  $\partial D$ , le potentiel de simple couche  $S_0$  vérifie les relations*

$$\left. \frac{\partial S_0}{\partial n} \right|_{\pm} = \pm \frac{1}{2}I + K_0^*, \quad (1.7)$$

et le potentiel de double couche  $\mathcal{D}_0$  vérifie les relations

$$\mathcal{D}_0|_{\pm} = \mp \frac{1}{2}I + K_0. \quad (1.8)$$

De plus,  $S_0$  et  $\frac{\partial \mathcal{D}_0}{\partial n}$  sont continus à travers  $\partial D$ .

On dispose aussi d'un résultat intéressant sur l'asymptotique de l'opérateur de simple couche  $S_0$ , dont on pourra trouver la preuve dans [AK07] Section 2.2.

**Proposition 1.2.4.** Pour  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$ , on a

$$S_0[\varphi](x) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\partial D} \varphi(y) ds(y) \right) \log |x| + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow +\infty.$$

Maintenant que nous avons défini l'opérateur de simple couche  $S_0$  et énoncé quelques-unes de ses propriétés, nous allons voir dans la suite comment représenter une solution  $u$  du problème (1.1) à l'aide cet opérateur.

## 1.2.2 Équation intégrale et théorie de Fredholm

On suppose que  $u$  est une solution du problème (1.1) et on note

$$h(x) = -S_{\partial\Omega}[g](x) + \mathcal{D}_{\partial\Omega}[u|_{\partial\Omega}](x), \quad \text{pour } x \in \Omega,$$

où  $S_{\partial\Omega}$  et  $\mathcal{D}_{\partial\Omega}$  sont les opérateurs de simple et double couche associés au bord  $\partial\Omega$  et définis pour  $\varphi_0 \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  par

$$\begin{aligned} S_{\partial\Omega}[\varphi_0](x) &= \int_{\partial\Omega} G_0(x, y) \varphi_0(y) ds(y), & x \in \Omega \setminus \partial D, \\ \mathcal{D}_{\partial\Omega}[\varphi_0](x) &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_0}{\partial n_y}(x, y) \varphi_0(y) ds(y), & x \in \Omega \setminus \partial D. \end{aligned}$$

On peut montrer [Kan96] qu'on peut représenter  $u$  à l'aide des potentiels de couche par :

$$u(x) = h(x) + S_0[\varphi](x), \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad (1.9)$$

où  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$  vérifie l'équation intégrale

$$(\lambda I - K_0^*)[\varphi] = \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\partial D}, \quad \text{sur } \partial D, \quad (1.10)$$

avec

$$\lambda = \frac{1+a}{2(a-1)}.$$

Le problème d'existence de solutions pour le problème de conductivité (1.1) se ramène finalement à étudier l'équation intégrale (1.10). Plus précisément on cherche à étudier l'opérateur  $\lambda I - K_0^*$  dans l'espace  $H^{-1/2}(\partial D)$ . Le caractère inversible de cet opérateur dépend directement des propriétés spectrales de  $K_0^*$ . Comme le bord  $\partial D$  est lisse on sait que l'opérateur  $K_0^* : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  est compact et donc il ne possède que du spectre discret. On en revient donc à étudier un opérateur de la forme  $\lambda I - K$  où  $K$  est un opérateur compact. L'étude de tels opérateurs a motivé la théorie des opérateurs Fredholm dont nous allons rappeler quelques résultats importants ici.

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. On définit d'abord ce qu'est un opérateur Fredholm (voir [Bre10] Section 6.2 ou [Ram01]).

**Définition 1.2.5.** *Un opérateur borné  $L : X \rightarrow Y$  est dit Fredholm si*

1.  $\text{Im}L$  est fermé dans  $Y$ .
2.  $\ker L$  et  $Y/\text{Im}L$  sont de dimension finie.

On définit alors l'indice de Fredholm de  $L$  par

$$\text{ind}(L) = \dim(\ker L) - \text{codim}(\text{Im}L). \quad (1.11)$$

L'intérêt de la notion d'opérateur Fredholm est en particulier l'alternative de Fredholm qui s'applique aux opérateurs Fredholm d'indice zéro (voir [BCL99] Théorème VI.6).

**Théorème 1.2.6** (Alternative de Fredholm). *Soit  $L$  un opérateur Fredholm d'indice zéro et  $f \in Y$ , alors on a l'alternative suivante :*

1. Soit  $u = 0$  est l'unique solution de l'équation homogène  $Lu = 0$  et alors l'équation  $Lu = f$  admet une unique solution.
2. Soit  $Lu = 0$  admet un nombre fini  $p$  de solutions linéairement indépendantes et l'équation adjointe  $L^*u = 0$  possède un sous espace vectoriel de solutions  $N^*$  de

*dimension finie  $p$ . De plus le problème  $Lu = f$  admet une solution si et seulement si  $f$  est orthogonale à  $N^*$ .*

Comme l'opérateur  $K_0^* : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  est compact et admet du spectre discret il est vain de montrer que l'équation intégrale (1.10) admet une unique solution car l'opérateur  $\lambda I - K_0^*$  n'est pas toujours inversible dans l'espace  $H^{-1/2}(\partial D)$ . Si le problème (1.10) n'est pas bien posé au sens classique, on peut en revanche se demander à quel point il est mal posé. C'est dans ce but qu'il est intéressant d'étudier le caractère Fredholm d'indice zéro de l'opérateur. En effet, lorsque l'on dispose d'un opérateur  $L$  Fredholm d'indice zéro, on connaît précisément le défaut d'inversibilité de cet opérateur. Plus précisément on sait que le noyau de  $L$  est de dimension finie et que l'image est de codimension finie donc les défauts d'injectivité et de surjectivité sont limités à des espace de dimension finie. De plus on sait caractériser le conoyau (c'est-à-dire l'espace  $Y/\text{Im}L$ ) à partir d'un nombre fini  $p = \dim(\ker L)$  d'équations données par  $L^*u = 0$ . Autrement dit on sait déterminer précisément le défaut de surjectivité. C'est pour ces raisons qu'on étend la notion de problème bien posé à celle de bien posé au sens Fredholm.

**Définition 1.2.7.** *Soit  $L : X \rightarrow Y$  un opérateur borné et  $f \in Y$ . On dit qu'un problème  $Lu = f$  est bien posé au sens Fredholm si l'opérateur  $L$  est Fredholm d'indice zéro.*

On s'intéresse maintenant aux propriétés des opérateurs Fredholm. On peut montrer que l'indice de Fredholm d'un opérateur est stable par perturbation compacte. C'est l'objet du prochain théorème.

**Théorème 1.2.8.** *Soit  $K : X \rightarrow Y$  un opérateur compact, alors*

$$\text{ind}(L + K) = \text{ind}(L).$$

On dispose également de la caractérisation suivante.

**Proposition 1.2.9.** *Un opérateur  $L : X \rightarrow Y$  est Fredholm si et seulement si il est inversible modulo un opérateur compact, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur compact  $K : X \rightarrow Y$  tel que  $L + K$  soit inversible.*

Pour finir, on énonce quelques propriétés intéressantes des opérateurs Fredholm.

**Proposition 1.2.10.** *Les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Un opérateur inversible est Fredholm.*
2. *La composition de deux opérateurs de Fredholm  $A$  et  $B$  donne un opérateur de Fredholm d'indice égal à  $\text{ind}(A) + \text{ind}(B)$ .*
3. *Si  $L$  est Fredholm alors son adjoint  $L^*$  l'est aussi et  $\text{ind}(L) = \text{ind}(L^*)$ .*

On s'intéresse maintenant à la notion de spectre essentiel qui est liée à celle d'opérateur Fredholm. En effet, on dispose de la définition suivante.

**Définition 1.2.11.** *Soit  $T : X \rightarrow X$  un opérateur borné, le spectre essentiel de  $T$ , noté  $\sigma_{\text{ess}}(T)$ , est l'ensemble des nombres  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $\mu I - T$  ne soit pas un opérateur Fredholm.*

Une propriété intéressante est que, comme la notion d'opérateur Fredholm, celle de spectre essentiel est stable par perturbation compacte.

**Proposition 1.2.12.** *Soit  $T : X \rightarrow X$  un opérateur borné. Si  $K : X \rightarrow X$  est un opérateur compact alors  $\sigma_{\text{ess}}(T + K) = \sigma_{\text{ess}}(T)$ .*

Revenons à l'étude de l'équation intégrale (1.10). D'après la Définition 1.2.11 on peut affirmer que si  $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(K_0^*)$  alors  $\lambda I - K_0^*$  est Fredholm d'indice zéro. Il est donc très intéressant de connaître le spectre essentiel de l'opérateur de Poincaré-Neumann pour étudier le caractère bien posé de l'équation (1.10). On sait en particulier [Cos15] que pour un bord lisse, le spectre essentiel de l'opérateur de Poincaré-Neumann est tel que  $\sigma_{\text{ess}}(K_0^*) = \{0\}$ . Dans ce cas on peut affirmer que si  $\lambda \neq 0$ , c'est-à-dire  $a \neq -1$  alors l'opérateur  $\lambda I - K_0^*$  est Fredholm d'indice zéro.

### 1.3 Opérateur de Poincaré-Neumann variationnel

Dans cette partie nous allons introduire l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel et étudier ses propriétés. Cet opérateur intervient lorsque l'on s'intéresse au problème de conductivité en utilisant l'approche variationnelle. Nous verrons dans la Proposition 1.3.8 qu'il existe un lien étroit entre l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel et l'opérateur de Poincaré-Neumann intégral défini dans la partie 1.2. On se limitera dans cette partie à considérer le problème de conductivité

défini sur un domaine macroscopique  $\Omega$  borné en imposant que le champ diffracté par une inclusion  $D$  soit nul sur le bord de  $\Omega$ . Ce cadre est une simplification du problème de conductivité en domaine non-borné pour lequel la physique impose que le champ diffracté soit nul à l'infini. Cette simplification n'a de sens que si on considère un domaine  $\Omega$  très grand devant l'inclusion  $D$ . On traitera le problème de conductivité en domaine non-borné dans la partie 1.4.

On considère un domaine borné  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  avec un bord  $C^1$  et une inclusion  $D \subsetneq \Omega$  avec un bord  $C^1$ . Les sous-domaines  $D$  et  $\Omega \setminus \bar{D}$  sont assimilés à des matériaux dans lesquels la conductivité est constante et vaut  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et 1 respectivement. On note  $A(x) = a\chi_D(x) + \chi_{\Omega \setminus \bar{D}}(x)$  la distribution de conductivité sur  $\Omega$ . Pour introduire l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel, on s'intéresse au potentiel électrique  $u \in H^1(\Omega)$  créé par une source  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et solution du problème de conductivité suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.12)$$

Sous forme variationnelle ce problème s'écrit de façon équivalente : Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad (1.13)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$  est le crochet de dualité entre les espaces  $H^{-1}(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ . Nous allons voir que l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel apparaît naturellement dans l'étude de ce problème, mais tout d'abord définissons le.

### 1.3.1 Définition et propriétés élémentaires

Dans toute la suite on muni l'espace  $H_0^1(\Omega)$  du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1(\Omega)}$  défini par

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \quad (1.14)$$

On définit maintenant l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel  $T_D$ .

**Proposition 1.3.1.** *Étant donné une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  alors on appelle  $T_D u$  la solution du problème variationnel suivant*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla T_D u \cdot \nabla v \, dx = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (1.15)$$

ce qui définit l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel  $T_D : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ .

*Démonstration.* L'existence et l'unicité de  $T_D u$  sont des conséquences immédiates du Théorème de Riesz. En effet,  $a(u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx$  est une forme bilinéaire continue sur l'espace de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$ . En utilisant le Théorème de Riesz, on en déduit qu'il existe un unique opérateur  $T_D : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  tel que  $\forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ,

$$a(u, v) = \langle T_D u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

□

De plus  $T_D$  satisfait les propriétés suivantes.

**Proposition 1.3.2.** *L'opérateur  $T_D$  est auto-adjoint et vérifie  $\|T_D\| = 1$ . De plus  $T_D$  est un opérateur positif, c'est-à-dire*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \langle u, u \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla T_D u \cdot \nabla u \, dx = \int_D |\nabla u|^2 \, dx \geq 0.$$

*Démonstration.* Soit  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , alors

$$\int_{\Omega} \nabla T_D u \cdot \nabla v \, dx = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla T_D v \, dx.$$

Donc  $T_D$  est auto-adjoint. De plus, par définition de  $T_D$  on a

$$\|T_D u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla T_D u|^2 = \int_D \nabla T_D u \cdot \nabla u \, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_D \nabla T_D u \cdot \nabla u \, dx \right| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(D)} \|\nabla T_D u\|_{L^2(D)} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|T_D u\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

ainsi  $\|T_D u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|T_D u\|_{H_0^1(\Omega)}$ , donc  $\|T_D u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$  et finalement  $\|T_D\| \leq 1$ . En sachant que  $u = 1$  est tel que  $T_D u = u$  on en déduit que 1 est une valeur propre de  $T_D$  et donc  $\|T_D\| = 1$ . □

La Proposition 1.3.3 illustre comment l'opérateur  $T_D$  apparaît naturellement dans l'étude du problème (1.13).

**Proposition 1.3.3.** *On suppose que  $a \neq 1$ . L'équation variationnelle (1.13) est équivalente à*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \langle (\lambda I - T_D)u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle \lambda g, v \rangle_{H_0^1(\Omega)}, \quad \text{avec } \lambda = \frac{1}{1-a}, \quad (1.16)$$

où  $g \in H_0^1(\Omega)$  est le représentant de Riesz de  $f$  :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \langle g, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

*Démonstration.* On fait apparaître l'opérateur  $T_D$  en effectuant les manipulations suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= a \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= (a-1) \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= (a-1) \int_{\Omega} \nabla T_D u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \langle (a-1)T_D u + u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (1.13) puis en divisant par  $1-a$ , on obtient l'équation (1.16).  $\square$

**Remarque 1.3.4.** *Lorsque  $a > 0$ , nous savons que le problème (1.12) est bien posé grâce au Théorème de Lax-Milgram. Le cas le plus intéressant est donc celui où  $a < 0$ .*

La Proposition 1.3.3 montre qu'étudier le problème (1.12) se réduit à étudier l'opérateur  $\lambda I - T_D$ , autrement dit à un problème spectral sur l'opérateur  $T_D$ . Il est donc intéressant d'étudier en détail le spectre de  $T_D$ .

### 1.3.2 Propriétés spectrales de $T_D$

Les propriétés spectrales de  $T_D$  ont déjà été bien étudiées (voir [BDT17, BT13, BTT16] par exemple) et on rappelle ici les résultats les plus intéressants.

## Décomposition spectrale

Le premier résultat est une décomposition spectrale qui isole les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 1 d'un autre sous-espace noté  $\mathfrak{h}$ . Dès lors, il reste à étudier l'opérateur  $T_D$  restreint à ce sous-espace.

**Proposition 1.3.5.** *Le spectre de  $T_D$ , noté  $\sigma(T_D)$ , est inclus dans l'intervalle  $[0, 1]$ . De plus,*

1. *L'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 0$  est*

$$\text{Ker}(T_D) = \{u \in H_0^1(\Omega), u \text{ est une constante sur } D\}.$$

2. *L'espace propre associé à  $\lambda = 1$  est*

$$\text{Ker}(I - T_D) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega), u = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \overline{D} \right\},$$

*et s'identifie naturellement à l'espace  $H_0^1(D)$ .*

3. *On dispose de la décomposition orthogonale de  $H_0^1(\Omega)$  suivante :*

$$H_0^1(\Omega) = \text{Ker}(T_D) \oplus \text{Ker}(I - T_D) \oplus \mathfrak{h}, \quad (1.17)$$

*où le sous-espace  $\mathfrak{h}$  est fermé et défini par :*

$$\mathfrak{h} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega), \Delta u = 0 \text{ dans } D \text{ et } \Omega \setminus \overline{D}, \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_+ ds = 0 \right\}. \quad (1.18)$$

*Démonstration.* D'après la Proposition 1.3.2 on sait que  $\|T_D\| \leq 1$  et que  $T_D$  est positif donc  $\sigma(T_D) \subset [0, 1]$ . On prouve maintenant les propriétés (1), (2) et (3).

*Preuve de la propriété (1) :* Soit  $u \in \text{Ker}(T_D)$ , par définition on sait que

$$\int_{\Omega} \nabla(T_D u) \cdot \nabla u \, dx = \int_D |\nabla u|^2 \, dx = 0,$$

donc  $u$  est constante sur  $D$ .

*Preuve de la propriété (2) :* Comme  $u \in \text{Ker}(I - T_D)$ , on sait que

$$\int_{\Omega} \nabla(T_D u) \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx,$$

et par définition de  $T_D$  on a alors

$$\int_D |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{\Omega \setminus \overline{D}} |\nabla u|^2 dx = 0.$$

Donc, on en déduit que  $u$  est constante dans  $\Omega \setminus \overline{D}$  et comme  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  on obtient que  $u = 0$  dans  $\Omega \setminus \overline{D}$ .

Réciproquement si  $u \in H_0^1(\Omega)$  est nul sur  $\Omega \setminus \overline{D}$  alors pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

En utilisant la définition de  $T_D u$ , on en déduit que

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega \nabla(T_D u) \cdot \nabla v dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Ainsi on obtient que pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$\int_\Omega \nabla(T_D u - u) \cdot \nabla v dx = 0,$$

ce qui prouve que  $u \in \text{Ker}(I - T_D)$ .

*Preuve de la propriété (3) :* On observe d'abord que  $\text{Ker}(T_D)$  et  $\text{Ker}(I - T_D)$  sont des sous-espaces fermés orthogonaux de  $H_0^1(\Omega)$  car  $T_D$  est auto-adjoint. On doit maintenant caractériser le sous-espace orthogonal à  $\text{Ker}(T_D) \oplus \text{Ker}(I - T_D)$ . Une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  est orthogonale à  $\text{Ker}(T_D)$  si et seulement si

$$\forall v \in \text{Ker}(T_D), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = 0 = \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega \setminus \overline{D}} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Sachant que  $T_D v = 0$ , on obtient

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla T_D v dx = 0,$$

et donc

$$\forall v \in \text{Ker}(T_D), \quad \int_{\Omega \setminus \overline{D}} \nabla u \cdot \nabla v dx = 0.$$

À l'aide de la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega \setminus \overline{D}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega \setminus \overline{D}} v \Delta u \, dx + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_+ v \, ds = 0.$$

En prenant des fonctions test dans l'ensemble  $v \in C_c^\infty(\Omega \setminus \overline{D}) \subset \text{Ker}(T_D)$  des fonctions infiniment dérivables et à support compact dans  $\Omega \setminus \overline{D}$ , on a donc

$$\int_{\Omega \setminus \overline{D}} v \Delta u \, dx = 0,$$

ce qui permet de conclure que  $\Delta u = 0$  sur  $\Omega \setminus \overline{D}$ . De plus,

$$\forall v \in \text{Ker}(T_D), \quad \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_+ v \, ds = 0,$$

et, comme  $v$  est constante sur  $D$ , on conclut que

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_+ \, ds = 0.$$

De la même manière, on prouve qu'une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  est orthogonale à  $\text{Ker}(I - T_D)$  si et seulement si  $\Delta u = 0$  sur  $D$ . Pour cela, on utilise la formule de Green et on remarque que les fonctions  $v \in \text{Ker}(I - T_D)$  sont nulles à l'extérieur de  $D$ . En prenant des fonctions test  $v \in C_c^\infty(D)$ , on obtient immédiatement que  $\Delta u = 0$  sur  $D$ .  $\square$

Pour caractériser le spectre de  $T_D$  sur  $\mathfrak{h}$ , on va l'étudier sur un ensemble un peu plus grand.

### Ensemble des potentiels de simple couche

On définit maintenant l'espace suivant

$$SL_D = \left\{ u \in H_0^1(\Omega), \Delta u = 0 \text{ dans } D \text{ et } \Omega \setminus \overline{D} \right\}, \quad (1.19)$$

muni de la semi-norme

$$\|u\|_{SL_D}^2 = \int_{D \cup (\Omega \setminus \overline{D})} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Observons tout d'abord que  $\mathfrak{h} \subset SL_D \subset H_0^1(\Omega)$ . Nous allons ensuite caractériser l'ensemble  $SL_D$  dans la Proposition 1.3.6, mais avant d'énoncer ce résultat il est

nécessaire d'introduire quelques outils. Remarquons que le noyau  $G_0$  permet de représenter des fonctions harmoniques mais ne tient pas compte de conditions au bord supplémentaires. Pour représenter des fonctions satisfaisant une condition de Dirichlet homogène sur  $\partial\Omega$ , on introduit le noyau de Poisson  $P(x, y)$  sur  $\Omega$  vérifiant les équations :

$$\begin{cases} \Delta_y P(x, y) = \delta_x(y) & \text{pour } y \in \Omega, \\ P(x, y) = 0 & \text{pour } y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On sait alors que  $P(x, y)$  diffère de  $G_0(x, y)$  seulement par un terme correctif régulier :

$$P(x, y) = G_0(x, y) - R(x, y),$$

où, pour  $x \in \Omega$  fixé,  $R(x, \cdot)$  est l'unique solution du problème :

$$\Delta_y R(x, \cdot) = 0, \text{ et } R(x, y) = G_0(x, y) \text{ pour } y \in \partial\Omega.$$

Le noyau de Poisson  $P(x, y)$  est symétrique (i.e.  $P(x, y) = P(y, x)$  pour  $x, y \in \Omega$ ,  $x \neq y$ ), et la théorie de la régularité elliptique nous assure que  $R$  est  $C^\infty(K \times K)$  sur tout ensemble compact  $K \Subset \Omega$  (voir [Fol95], §2.E par exemple).

On peut alors définir le potentiel de simple couche  $S_D : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow SL_D$  vérifiant la condition de Dirichlet homogène sur  $\partial\Omega$ , tel que

$$\forall x \in D \cup (\Omega \setminus \bar{D}), \quad S_D[\varphi](x) = \int_{\partial D} P(x, y)\varphi(y) ds. \quad (1.20)$$

Sachant que  $x \mapsto P(x, y)$  est harmonique dans  $D$  et  $\Omega \setminus \bar{D}$ , on montre que pour tout  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$ ,  $S_D[\varphi]$  est harmonique dans  $D$  et  $\Omega \setminus \bar{D}$  et donc que  $S_D[\varphi] \in SL_D$ . De plus, on rappelle que, comme pour  $S_0$  dans la Proposition 1.2.3,  $S_D$  vérifie les relations de saut sur  $\partial D$

$$\left. \frac{\partial S_D}{\partial n} \right|_{\pm} = \pm \frac{1}{2}I + K_D^*, \quad (1.21)$$

où  $K_D^* : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  est l'opérateur de Poincaré-Neumann défini par

$$K_D^*[\varphi](x) = \int_{\partial D} \frac{\partial P(x, y)}{\partial n_x} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (1.22)$$

dont on rappelle qu'il est compact de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ . On énonce maintenant la caractérisation de l'espace  $SL_D$ .

**Proposition 1.3.6.** *L'ensemble  $SL_D$  correspond exactement à l'ensemble des potentiels*

de simple couche :

$$SL_D = \{S_D[\varphi], \varphi \in H^{-1/2}(\partial D)\}. \quad (1.23)$$

*Démonstration.* Tout d'abord, on sait que pour tout  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$ ,  $S_D[\varphi]$  est harmonique dans  $D$  et  $\Omega \setminus \overline{D}$ , ce qui prouve que  $\{S_D[\varphi], \varphi \in H^{-1/2}(\partial D)\} \subset SL_D$ . Maintenant, prenons  $u \in SL_D$ . En appliquant la formule de Green à deux reprises, on montre que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D \cup (\Omega \setminus \overline{D})} \Delta u(y) P(x, y) dy = u(x) - \int_{\partial D} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_+ - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_- \right) (y) P(x, y) dy \\ &\quad + \int_{\partial D} (u|_+ - u|_-) (y) \frac{\partial P}{\partial n_y}(x, y) dy. \end{aligned}$$

De plus, comme  $u \in SL_D$ , on a  $u|_+ = u|_-$  sur  $\partial D$  et on en déduit que pour  $x \in D \cup (\Omega \setminus \overline{D})$

$$u(x) = \int_{\partial D} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_+ - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_- \right) (y) P(x, y) dy.$$

En posant

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_+ - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_- \in H^{-1/2}(\partial D),$$

on obtient bien que  $u = S_D[\varphi]$  et donc l'inclusion  $SL_D \subset \{S_D[\varphi], \varphi \in H^{-1/2}(\partial D)\}$ .  $\square$

De plus, on peut caractériser  $S_D$  de la façon suivante.

**Proposition 1.3.7.** *L'application  $S_D : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow SL_D$  définie par l'équation (1.20) est un isomorphisme dont l'inverse est*

$$S_D^{-1}[u] = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_+ - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_-.$$

*En d'autres termes, pour tout  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$ ,  $u := S_D[\varphi]$  est l'unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  du problème variationnel suivant :*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\partial D} \varphi v ds. \quad (1.24)$$

*Démonstration.* On fixe  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$  et on vérifie d'abord que  $S_D[\varphi]$  vérifie le problème variationnel (1.24). Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , alors  $S_D[\varphi]$  vérifie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla S_D[\varphi](x) \cdot \nabla v(x) \, dx &= \int_{\Omega} \nabla_x \left( \int_{\partial D} P(x, y) \varphi(y) \, ds(y) \right) \cdot \nabla v(x) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\partial D} \varphi(y) \nabla_x P(x, y) \cdot \nabla v(x) \, ds(y) \, dx \\ &= \int_{\partial D} \varphi(y) \int_{\Omega} \nabla_x P(x, y) \cdot \nabla v(x) \, dx \, ds(y). \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et par définition du noyau de Poisson  $P$  on montre que

$$\int_{\Omega} \nabla_x P(x, y) \cdot \nabla v(x) \, dx = -v(y),$$

ce qui permet donc de conclure que

$$\int_{\Omega} \nabla S_D[\varphi] \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\partial D} \varphi v \, ds.$$

Soient  $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$  deux solutions du problème variationnel (1.24), alors

$$\int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v \, dx = 0$$

En prenant  $v = u_1 - u_2$  et à l'aide de la condition sur le bord  $\partial\Omega$  on conclut que  $u_1 = u_2$  sur  $\Omega$ . Finalement  $S_D[\varphi]$  est l'unique solution du problème variationnel (1.24). Cela nous assure également que  $S_D$  est injective. Le Proposition 1.3.6 permet d'affirmer que  $S_D$  est surjective et à l'aide des formules de saut pour le potentiel de simple couche on prouve que son inverse est

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_+ - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_- = \varphi = S_D^{-1}[u],$$

ce qui conclut la démonstration. □

### Spectre de $T_D$ restreint à l'ensemble des potentiels de simple couche

Nous allons maintenant étudier le spectre de l'opérateur  $T_D$  restreint à  $SL_D$ . Pour cela, on dispose d'un résultat de compacité important [BTT16] rappelé dans la Proposition 1.3.8.

**Proposition 1.3.8.** *L'opérateur  $R_D : SL_D \rightarrow SL_D$  défini par  $R_D = -\frac{1}{2}I + T_D$  est compact et auto-adjoint. De plus on a*

$$R_D = -S_D K_D^* S_D^{-1}.$$

*Démonstration.* Sachant que  $T_D$  est auto-adjoint et par définition de  $R_D$ , on conclut que  $R_D$  est un opérateur auto-adjoint. Soit  $u \in SL_D$ , alors  $R_D u$  est l'unique élément de  $H_0^1(\Omega)$  tel que  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(R_D u) \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} \nabla(T_D u) \cdot \nabla v \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \\ &= \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \\ &= \frac{1}{2} \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et sachant que  $u \in SL_D$ , on a alors

$$\begin{aligned} \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{-} v \, ds, \\ \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{+} v \, ds. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla(R_D u) \cdot \nabla v \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{+} + \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{-} \right) v \, ds.$$

D'après la Proposition 1.3.6 il existe  $\phi \in H^{-1/2}(\partial D)$  tel que  $u = S_D[\phi]$ . En utilisant les relations de saut pour le potentiel de simple couche (1.21) on a donc

$$\int_{\Omega} \nabla(R_D u) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial D} K_D^*[\phi] v \, ds. \quad (1.25)$$

D'après le Proposition 1.2.2 l'opérateur  $K_D^*$  est compact de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans lui-même, on peut donc conclure que  $R_D$  est un opérateur compact. De plus, en utilisant la relation (1.24) on peut écrire que  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla(R_D u) \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\partial D} (S_D^{-1} R_D u) v \, ds. \quad (1.26)$$

En sachant que  $u = S_D[\phi]$  et à l'aide de l'équation (1.25), on peut écrire que

$$\int_{\partial D} K_D^*[\phi] v ds = \int_{\partial D} K_D^*[S_D^{-1}u] v ds = \int_{\Omega} \nabla(R_D u) \cdot \nabla v dx.$$

En utilisant l'équation (1.26) on peut alors affirmer que  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\partial D} K_D^*[S_D^{-1}u] v ds = - \int_{\partial D} (S_D^{-1}R_D u)v ds.$$

On peut alors conclure que  $R_D = -S_D K_D^* S_D^{-1}$ .  $\square$

On en déduit alors le résultat suivant sur l'opérateur  $T_D$ .

**Proposition 1.3.9.** *Le spectre de l'opérateur  $T_D : SL_D \rightarrow SL_D$  est réel, discret, symétrique par rapport à la valeur  $1/2$  et s'accumule en ce point.*

*Démonstration.* Comme  $R_D$  est compact, son spectre est discret, dénombrable et s'accumule en zéro. D'où le résultat sur  $T_D$ .  $\square$

On note  $(\gamma_n^\pm)_{n \geq 1}$  les valeurs propres de  $T_D : SL_D \rightarrow SL_D$ , répétées selon leur multiplicité, où l'exposant  $-$  désigne les valeurs propres dans l'ensemble  $]0, 1/2]$  et  $+$  dans l'ensemble  $[1/2, 1[$ . Ces valeurs propres sont ordonnées tel que

$$0 \leq \gamma_1^- \leq \gamma_2^- \leq \dots \leq \frac{1}{2}, \quad (1.27)$$

et

$$1 > \gamma_1^+ \geq \gamma_2^+ \geq \dots \geq \frac{1}{2}. \quad (1.28)$$

Pour caractériser les valeurs propres de  $T_D : SL_D \rightarrow SL_D$ , on dispose d'un principe du min-max.

**Proposition 1.3.10.** *Les valeurs propres  $(\gamma_n^\pm)_{n \geq 1}$  de  $T_D : SL_D \rightarrow SL_D$  et les fonctions propres  $(u_n^\pm)_{n \geq 1}$  associées vérifient*

$$\gamma_n^- = \min_{\substack{E_n \subset SL_D \\ \dim(E_n) = n}} \max_{\substack{u \in E_n \\ u \neq 0}} \frac{\int_D |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx}, \quad (1.29)$$

et

$$\gamma_n^+ = \max_{\substack{E_n \subset SL_D \\ \dim(E_n) = n}} \min_{\substack{u \in E_n \\ u \neq 0}} \frac{\int_D |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx}, \quad (1.30)$$

*Démonstration.* La Proposition 1.3.10 est une conséquence de la Proposition 1.3.8 et du principe du min-max pour les opérateurs compacts et auto-adjoints (voir [RS78] Théorème XIII.2) appliqué à  $R_D$ .  $\square$

On peut alors décomposer toute fonction  $u \in SL_D$  de la façon suivante.

**Proposition 1.3.11.** *Soit  $u \in SL_D$ , alors on peut le décomposer sur une base de vecteurs propres de l'opérateur  $T_D : SL_D \rightarrow SL_D$  :*

$$u = \sum_{n \geq 1} \frac{\langle u, u_n^\pm \rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|u_n^\pm\|_{H_0^1(\Omega)}^2} u_n^\pm. \quad (1.31)$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du Théorème spectral pour les opérateurs compacts dans les espaces de Hilbert ([TL86] Théorème 4.2).  $\square$

## 1.4 Opérateur de Poincaré-Neumann variationnel pour un domaine non borné

Nous avons vu dans la partie précédente comment l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel apparaît naturellement quand on étudie le problème de conductivité pour un domaine macroscopique borné  $\Omega$  avec un condition de type  $u = 0$  sur le bord de  $\Omega$ . Ce cadre correspond à une simplification de la nécessité physique que le champ diffracté soit nul à l'infini. Lorsque l'on travaille sur le domaine  $\Omega = \mathbb{R}^2$  non borné on doit donc être attentif au comportement des solutions à l'infini et imposer les bonnes conditions de radiation pour que le problème de conductivité ait du sens. Ainsi la difficulté pour définir l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel dans un domaine non-borné consiste à travailler sur le bon espace de fonctions. Cette question fait l'objet de la sous-partie suivante.

### 1.4.1 Problème de Dirichlet extérieur

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , on considère le problème de Dirichlet extérieur :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial D, \\ u &\rightarrow 0 \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Nous allons préciser les conditions de radiation et les espaces dans lesquels vivent  $u$  et  $f$ . Pour traiter le problème (1.32) on ne peut pas travailler dans l'espace classique  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . En effet, la forme variationnelle associée à l'opérateur  $-\Delta$  n'est plus coercive dans un domaine non-borné. Ainsi, on ne peut plus utiliser le cadre classique du Théorème de Lax-Milgram. Pour dépasser cette difficulté on introduit l'espace de Sobolev pondéré (voir [Néd01] Section 2.5.4, [AGG97] ou [Bou05]) suivant :

$$\mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2) = \{u : \rho u \in L^2(\mathbb{R}^2), \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^2)\}, \tag{1.33}$$

où le poids  $\rho$  est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2} \log(2 + |x|^2)}.$$

On peut équiper cet espace de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2)} = \left( \|\rho(x)u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right)^{1/2}.$$

Dans l'espace  $\mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ , la forme bilinéaire  $-\Delta$  est alors coercive, ce qui nous autorise à utiliser le Théorème de Lax-Milgram.

Le lecteur peut consulter [Kuf85] pour avoir une vision plus générale des espace des Sobolev à poids. On peut maintenant reformuler correctement le problème de Dirichlet extérieur.

Pour une source  $f \in \mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})^*$ , trouver  $u \in \mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$  tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial D. \end{aligned} \tag{1.34}$$

**Théorème 1.4.1.** [Néd01] Théorème 2.5.14 : Le problème de Dirichlet extérieur (1.34) admet une unique solution dans l'espace  $\mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ .

*Démonstration.* En utilisant l'inégalité de Hardy ([Néd01] Lemme 2.5.7), on peut affirmer que la forme bilinéaire associée à  $-\Delta$  est coercive sur l'espace de Sobolev à poids  $\mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ . On peut alors utiliser le Théorème de Lax-Milgram pour conclure.  $\square$

**Remarque 1.4.2.** Le Théorème 1.4.1 reste vrai en prenant une condition  $u = g$  sur le bord  $\partial D$  avec  $g \in H^{-1/2}(\partial D)$  (voir par exemple [BT13]). De plus on peut étendre le Théorème 1.4.1 pour des conditions de type Neumann sur le bord  $\partial D$  (problème de Neumann extérieur). Toutefois, en sachant que  $\mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  contient les fonctions constantes qui ne sont pas décroissantes à l'infini on doit travailler avec l'espace quotient  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^d)/\mathbb{R}$ .

## 1.4.2 Définition et propriétés de l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel

On s'intéresse maintenant à un problème de conductivité en domaine non borné pour comprendre comment l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel apparaît dans ce contexte. Les domaines  $D$  et  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$  sont assimilés à des matériaux de conductivité constantes  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et 1 respectivement. Soit  $A(x) = a\chi_D(x) + \chi_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}}(x)$  la distribution de conductivité définie sur tout le domaine  $\mathbb{R}^2$ . On s'intéresse au potentiel électrostatique  $u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  créé par une source  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)^*$  à support compact et solution du problème de conductivité :

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \quad (1.35)$$

Mis sous forme variationnelle, ce problème est équivalent à : Trouver  $u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  tel que

$$\forall v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)^*, \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)}, \quad (1.36)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)^*, \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)}$  est le crochet de dualité entre  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)^*$  et  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ . On définit l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel sur l'espace  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  dans la proposition suivante.

**Proposition 1.4.3.** Soit  $u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  alors  $T_D^\infty u$  est l'unique élément de  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  vérifiant l'équation variationnelle

$$\forall v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \nabla T_D^\infty u \cdot \nabla v \, dx = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \quad (1.37)$$

*Démonstration.* L'existence et l'unicité de  $T_D^\infty$  sont assurés par le Théorème de Riesz, comme pour dans le cas d'un domaine borné. En effet, on remarque d'abord que l'espace  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (1.38)$$

est un espace de Hilbert. Ainsi  $a(u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx$  est une forme bilinéaire continue sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ . Par application du Théorème de Riesz, il existe un unique  $T_D^\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2))$  tel que  $\forall (u, v) \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$

$$a(u, v) = \langle T_D^\infty u, v \rangle.$$

□

Comme pour l'opérateur  $T_D$  défini sur un domaine borné, l'opérateur  $T_D^\infty$  satisfait les propriétés suivantes.

**Proposition 1.4.4.** L'opérateur  $T_D^\infty : \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  est un opérateur borné, auto-adjoint tel que  $\|T_D^\infty\| \leq 1$

On peut montrer que, comme dans le cas d'un domaine borné, le problème (1.36) est équivalent à : Trouver  $u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  tel que

$$\forall v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \quad \langle \lambda u - T_D^\infty u, v \rangle = \langle \lambda f, v \rangle_{\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)', \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)}, \quad (1.39)$$

où  $\lambda = \frac{1}{1-a}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire sur  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  défini dans (1.38). L'inversibilité du problème (1.39) est fortement liée à l'opérateur  $\lambda Id - T_D^\infty$  et donc aux propriétés spectrales de  $T_D^\infty$ . Comme pour l'opérateur  $T_D$  dans la Proposition 1.3.5, on dispose pour l'opérateur  $T_D^\infty$  d'une décomposition spectrale similaire. On note

$$\mathfrak{h}^\infty = \{u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \quad u \text{ est harmonique dans } D \text{ et } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}\},$$

et on énonce la proposition suivante.

**Proposition 1.4.5.** [BT13] Le spectre de  $T_D^\infty$ , noté  $\sigma(T_D^\infty)$ , est dans l'intervalle  $[0, 1]$ . De plus,

1. L'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 0$  est

$$\text{Ker}(T_D^\infty) = \{u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}), u = 0 \text{ sur } D\} \cup \mathbb{R}w_0,$$

avec  $w_0$  vérifiant

$$\begin{cases} \Delta w_0 = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \\ w_0 = 1, & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

De plus,  $\text{Ker}(T_D^\infty) \cap \mathfrak{h}^\infty = \mathbb{R}w_0$ .

2. L'espace propre associé à  $\lambda = 1$  est

$$\text{Ker}(I - T_D^\infty) = \left\{ u \in H_0^1(D), u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \right\},$$

et  $\text{Ker}(I - T_D^\infty) \cap \mathfrak{h}^\infty = \{0\}$ .

On peut montrer (voir [BT13]) que le spectre de  $T_D^\infty : \mathfrak{h}^\infty \rightarrow \mathfrak{h}^\infty$  est réel, discret, symétrique par rapport à la valeur  $1/2$  et tel que le seul point d'accumulation soit la valeur  $1/2$ . On note  $(\beta_n^\pm)_{n \geq 1}$  les valeurs propres de  $T_D^\infty : \mathfrak{h}^\infty \rightarrow \mathfrak{h}^\infty$ , répétées selon leur multiplicité, où l'exposant  $-$  désigne les valeurs propres dans l'ensemble  $]0, 1/2]$  et  $+$  dans l'ensemble  $[1/2, 1[$ . Ces valeurs propres sont ordonnées tel que

$$0 < \beta_1^- \leq \beta_2^- \leq \dots \leq \frac{1}{2},$$

et

$$1 > \beta_1^+ \geq \beta_2^+ \geq \dots \geq \frac{1}{2}.$$

On peut comme pour  $T_D$  caractériser les valeurs propres de  $T_D^\infty : \mathfrak{h}^\infty \rightarrow \mathfrak{h}^\infty$  avec un principe du min-max (voir [BT13]).

**Proposition 1.4.6.** Les valeurs propres  $(\beta_n^\pm)_{n \geq 1}$  de  $T_D : \mathfrak{h}^\infty \rightarrow \mathfrak{h}^\infty$  et les fonctions

propres  $(u_n^\pm)_{n \geq 1}$  associées vérifient

$$\beta_n^- = \min_{\substack{E_n \subset \mathfrak{h}^\infty \\ \dim(E_n) = n}} \max_{\substack{u \in E_n \\ u \neq 0}} \frac{\int_D |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx}, \quad (1.40)$$

et

$$\beta_n^+ = \max_{\substack{E_n \subset \mathfrak{h}^\infty \\ \dim(E_n) = n}} \min_{\substack{u \in E_n \\ u \neq 0}} \frac{\int_D |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx}, \quad (1.41)$$

### 1.4.3 Relation entre les opérateurs de Poincaré-Neumann variationnel pour un domaine borné et pour un domaine non-borné

On note  $B_R$  la boule ouverte centrée de  $\mathbb{R}^2$  de rayon  $R > 0$  et dans la suite on travaille avec  $\Omega = B_R$ . De plus on considère un sous-domaine  $D$  ouvert de  $B_R$ . Soit  $T_D$  l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel agissant sur l'espace  $H_0^1(B_R)$  précédemment défini dans la Proposition 1.3.1 et  $(\gamma_n^\pm)_{n \geq 1}$  ses valeurs propres. De même, on rappelle que  $T_D^\infty$  est l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel agissant sur l'espace  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  défini dans la Proposition 1.4.3 et que  $(\beta_n^\pm)_{n \geq 1}$  sont ses valeurs propres. On peut alors affirmer que le spectre de  $T_D^\infty$  est relié à celui de  $T_D$  de la façon suivante [BTT16].

**Proposition 1.4.7.** *Soit  $n \geq 1$  un entier, alors*

$$\frac{1}{C} \gamma_n^\pm \leq \beta_n^\pm \leq C \gamma_n^\pm,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $n$ .

Avant de prouver la Proposition 1.4.7, on rappelle le lemme suivant à propos des fonctions harmoniques.

**Lemme 1.4.8.** *Soit  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert, si la fonction  $u$  est harmonique sur  $\mathcal{O}$  alors elle minimise l'énergie de Dirichlet parmi toute les fonctions qui coïncident avec  $u$  sur le bord  $\partial\mathcal{O}$ . En d'autres termes*

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\mathcal{O}} |\nabla v|^2 dx,$$

pour toute fonction  $v \in H^1(\mathcal{O})$  tel que  $u = v$  sur  $\partial\mathcal{O}$ .

On va maintenant prouver la Proposition 1.4.7.

*Démonstration.* Soit  $f \in H^{1/2}(\partial D)$ , on considère les fonctions  $u_f \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  et  $v_f \in H_0^1(B_R)$  de telle sorte que  $u_f$  et  $v_f$  coïncident toutes les deux avec  $f$  sur  $\partial D$ . De plus, on suppose que  $u_f$  et  $v_f$  sont harmoniques dans  $D$ , que  $u_f$  est harmonique dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  et que  $v_f$  est harmonique dans  $B_R \setminus \bar{D}$ . On cherche alors à prouver l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{C} \frac{\int_D |\nabla v_f|^2 dx}{\int_{B_R} |\nabla v_f|^2 dx} \leq \frac{\int_D |\nabla u_f|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_f|^2 dx} \leq C \frac{\int_D |\nabla v_f|^2 dx}{\int_{B_R} |\nabla v_f|^2 dx}, \quad (1.42)$$

et ainsi on pourra conclure en utilisant le principe du min-max sur  $T_D$  et  $T_D^\infty$ . Pour cela, on remarque que, comme  $u_f$  et  $v_f$  sont harmoniques dans  $D$  et coïncident sur  $\partial D$ , ces deux fonctions sont égales sur  $D$  et elles ont la même énergie de Dirichlet :

$$\int_D |\nabla v_f|^2 dx = \int_D |\nabla u_f|^2 dx.$$

On définit alors  $\tilde{v}_f \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  l'extension de  $v_f$  par 0 à l'extérieur de  $B_R$ . En utilisant le Lemme 1.4.8, on sait que  $u_f$  minimise l'énergie de Dirichlet sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ , on peut donc affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}} |\nabla u_f|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}} |\nabla \tilde{v}_f|^2 dx = \int_{\Omega \setminus \bar{D}} |\nabla v_f|^2 dx.$$

Cela suffit à prouver l'inégalité de gauche de (1.42).

On considère maintenant  $\tilde{u}_f = \chi u_f \in H_0^1(B_R)$  où  $\chi$  est une fonction "cutoff" régulière telle que  $\chi = 1$  dans  $D$  et  $\chi = 0$  à l'extérieur de  $B_R$ . Alors il existe une constante  $C$  dépendant seulement de  $B_R$  tel que

$$\int_{B_R \setminus \bar{D}} |\nabla \tilde{u}_f|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}} |\nabla u_f|^2 dx.$$

En effet

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}_f\|_{L^2(B_R \setminus \bar{D})} &= \|\nabla(\chi u_f)\|_{L^2(B_R \setminus \bar{D})} = \|u_f \nabla \chi + \chi \nabla u_f\|_{L^2(B_R \setminus \bar{D})}, \\ &\leq \|u_f \nabla \chi\|_{L^2(B_R \setminus \bar{D})} + \|\chi \nabla u_f\|_{L^2(B_R \setminus \bar{D})}. \end{aligned}$$

On sait d'abord que  $\|\chi \nabla u_f\|_{L^2(B_R \setminus \bar{D})} \leq \|\nabla u_f\|_{L^2(B_R \setminus \bar{D})} \leq \|\nabla u_f\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})}$ . De plus comme  $\nabla \chi$  est borné sur  $B_R \setminus \bar{D}$ , on peut utiliser l'inégalité de Poincaré sur  $B_R \setminus \bar{D}$  pour obtenir  $\|u_f \nabla \chi\|_{L^2(B_R \setminus \bar{D})} \leq \tilde{C} \|u_f\|_{L^2(B_R \setminus \bar{D})} \leq C \|\nabla u_f\|_{L^2(B_R \setminus \bar{D})} \leq C \|\nabla u_f\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})}$ . Finalement en utilisant le Lemme 1.4.8, on sait que  $v_f$  minimise l'énergie de Dirichlet sur  $B_R \setminus \bar{D}$  et donc

$$\int_{B_R \setminus \bar{D}} |\nabla v_f|^2 dx \leq \int_{B_R \setminus \bar{D}} |\nabla \tilde{u}_f|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}} |\nabla u_f|^2 dx.$$

Ceci prouve l'inégalité de droite dans (1.42).  $\square$

---

---

## CHAP. 2

---

# CARACTÈRE BIEN POSÉ DES PROBLÈMES DE CONDUCTIVITÉ

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Notations</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>1.2</b>	<b>Problème de conductivité et opérateur de Poincaré-Neumann</b> .	<b>27</b>
1.2.1	Potentiels de couche . . . . .	28
1.2.2	Équation intégrale et théorie de Fredholm . . . . .	30
<b>1.3</b>	<b>Opérateur de Poincaré-Neumann variationnel</b> . . . . .	<b>33</b>
1.3.1	Définition et propriétés élémentaires . . . . .	34
1.3.2	Propriétés spectrales de $T_D$ . . . . .	36
<b>1.4</b>	<b>Opérateur de Poincaré-Neumann variationnel pour un domaine non borné</b> . . . . .	<b>45</b>
1.4.1	Problème de Dirichlet extérieur . . . . .	46
1.4.2	Définition et propriétés de l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel . . . . .	47
1.4.3	Relation entre les opérateurs de Poincaré-Neumann variationnel pour un domaine borné et pour un domaine non-borné . . . . .	50

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons considérer un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  et une inclusion  $D \subset \Omega$  assimilée à un matériau négatif de permittivité  $\varepsilon_-$  entourée d'un matériau diélectrique de permittivité  $\varepsilon_+$  remplissant le domaine  $\Omega \setminus \overline{D}$ . Pour des raisons de simplicité on prend la perméabilité magnétique  $\mu = 1$  et on se concentre sur la permittivité électrique. En mode Transverse Magnétique (TM) les équations de Maxwell en régime harmonique se réduisent à des problèmes scalaires du type

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) + \omega^2 u = f, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1)$$

où  $\omega$  est la pulsation,  $f \in H^{-1}(\Omega)$  est le terme source et

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_+ = \frac{1}{\varepsilon_+}, & x \in \Omega \setminus \overline{D}, \\ \sigma_- = \frac{1}{\varepsilon_-}, & x \in D. \end{cases}$$

À cause du changement de signe de la permittivité on ne peut pas utiliser le cadre classique du théorème de Lax-Milgram. De plus le problème (2.1) possède au moins du spectre discret. Le cadre approprié pour étudier le problème (2.1) est alors de s'intéresser à son caractère bien posé au sens Fredholm (voir Section 1.2.2). Cela revient à montrer qu'il ne possède pas de spectre essentiel et donc qu'il possède au plus du spectre discret. Comme l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  est compacte et en vertu du Théorème 1.2.8 on se concentre uniquement sur la partie principale, c'est à dire l'opérateur  $u \mapsto \operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ . Plusieurs techniques ont été développées pour étudier le problème (2.1) et aboutissent à des conditions suffisantes pour que ce problème soit bien posé au sens Fredholm.

Lorsque les coefficients  $\sigma_{\pm}$  sont constants ou appartiennent à l'espace  $C^1(\Omega)$ , il a été prouvé par Costabel dans [CS85, Cos15] que dès lors que la frontière  $\partial D$  est lisse, le problème (2.1) est bien posé au sens Fredholm si et seulement si  $\forall x \in \partial D, \frac{\sigma_+(x)}{\sigma_-(x)} \neq -1$ . Dans [DCC12] l'approche de la T-coercivité (développée dans [DCJZ10]) est utilisée pour un bord lipschitzien avec des coefficients dans l'espace  $L^\infty(\Omega)$  et continus sur  $\partial D$ . Les auteurs ont énoncé des conditions suffisantes pour que le problème (2.1) soit bien posé au sens Fredholm, ces conditions dépendant de la géométrie du bord  $\partial D$  et des valeurs de permittivité. Ils ont en particulier traité de l'influence des coins. Cependant ces conditions font appel au sup/inf des coefficients  $\sigma_{\pm}$  sur tout le domaine  $D$  et le domaine  $\Omega \setminus \overline{D}$  et sont donc de nature non-locales. En utilisant une technique de localisation ils parviennent malgré tout à énoncer une condition locale à  $\partial D$  mais sous l'hypothèse que  $\partial D$  est  $C^1$  avec éventuellement un nombre fini de coins. Cette condition locale n'est donc pas valable pour un bord lipschitzien.

Dans ce chapitre on considère  $\sigma_{\pm} \in H^2(\Omega)$  et on suppose que le bord  $\partial D$  est de régularité lipschitzienne. Sous réserve d'admettre les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 énoncées dans les parties 2.5.1 et 2.5.2 respectivement on montre que le problème (2.1) est Fredholm sous une condition suffisante qui fait intervenir les valeurs de  $\sigma_{\pm}$  sur  $\partial D$  et le spectre essentiel de l'opérateur de Poincaré-Neumann qui ne dépend que de la géométrie de  $\partial D$ . Cette condition est locale au bord  $\partial D$  et souligne que les valeurs de  $\sigma_{\pm}$  loin de  $\partial D$  n'ont pas d'influence sur le caractère Fredholm du problème (2.1). Les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 concernent la compacité de certains opérateurs intégraux. Les raisons qui nous font penser que ces conjectures sont vraies sont détaillées dans les Remarques 2.5.3 et 2.5.8.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. On introduit d'abord le contexte dans la partie 2.2 puis le résultat principal, à savoir le Théorème 2.3.2, dans la partie 2.3. Avant de s'intéresser au Théorème 2.3.2 on introduit dans la partie 2.4 quelques résultats classiques sur la théorie des potentiels de couche et on établit dans la Proposition 2.4.11 une équivalence entre le caractère bien posé de notre problème et le caractère bien posé d'une équation intégrale. La suite est une preuve du Théorème 2.3.2 qui se fait en deux étapes. La première consiste à s'intéresser à l'équation intégrale afin de lui trouver une forme plus simple à étudier et pour cela on isole sa partie singulière de sa partie compacte. Cela nécessite d'isoler la singularité des opérateurs de type simple couche et de type Poincaré-Neumann qui apparaissent dans l'équation intégrale. Pour prouver ces résultats intermédiaires on admet les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7. La seconde étape consiste à trouver une condition suffisante pour que l'équation intégrale soit bien posée au sens Fredholm. Cette condition dépend des coefficients électromagnétiques  $\sigma_{\pm}$  et du spectre essentiel de l'opérateur de Poincaré-Neumann.

## 2.2 Contexte

### 2.2.1 Géométrie du problème et notations

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  supposé simplement connexe. On considère un matériau négatif remplissant le domaine  $D \Subset \Omega$  dont le bord  $\partial D$  est de régularité lipschitzienne. Le domaine  $\Omega \setminus \overline{D}$  sera alors assimilé à un matériau positif. On notera  $\sigma$  l'inverse de la permittivité électrique, négative dans  $D$  et positive dans  $\Omega \setminus \overline{D}$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_+(x), & x \in \Omega \setminus \overline{D}, \\ \sigma_-(x), & x \in D, \end{cases}$$

avec  $\sigma_+ \geq c_+ > 0$  et  $\sigma_- \leq c_- < 0$ , où  $c_+, c_-$  sont des constantes fixées. On suppose également que les coefficients  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  appartiennent à l'espace de Sobolev  $H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ .

Dans la mesure où l'on ne s'intéresse qu'à leur valeur dans le voisinage de  $\partial D$  nous allons supposer que  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  sont des fonctions constantes à l'extérieur de  $\Omega$ , notées  $\sigma_+^e$  et  $\sigma_-^e$  respectivement. On remarquera que les coefficients  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  appartiennent aussi aux espaces  $C^{0,\beta}(\mathbb{R}^2)$  avec  $0 < \beta < 1$  et  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$  (voir [Bre10] pour les injections des espaces de Sobolev). Pour finir on note l'ensemble des fonctions à moyenne

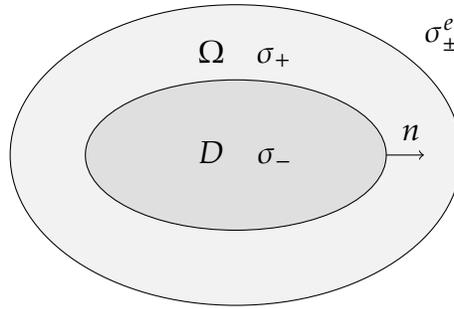


FIGURE 2.1 – Inclusion d'un matériau négatif dans un diélectrique positif

nulle sur le bord  $\Gamma = \partial D$  ou  $\partial\Omega$  par :

$$H_0^{-1/2}(\Gamma) = \left\{ \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \text{ avec } \int_\Gamma \varphi = 0 \right\}.$$

### 2.2.2 Problème

Soit une donnée  $g \in H_0^{1/2}(\partial\Omega)$ , on s'intéresse au problème de conductivité suivant : Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant les équations

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

La question qui nous intéresse est la suivante :

$$\text{Sous quelles conditions le problème (2.2) est bien posé au sens Fredholm?} \quad (2.3)$$

Soit  $T : H_g^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  tel que

$$T : u \mapsto \operatorname{div}(\sigma \nabla u), \quad (2.4)$$

l'opérateur elliptique associé au problème (2.2) où l'on a noté  $H_g^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u = g \text{ sur } \partial\Omega\}$ . On peut reformuler (2.3) de manière plus précise en :

$$\text{Sous quelles conditions l'opérateur } T \text{ est Fredholm d'indice zéro?} \quad (2.5)$$

## 2.3 Résultat principal

On définit l'opérateur intégral  $L_0 : H_0^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  par :

$$L_0 = \lambda I_0 - K_0^*,$$

où  $I_0$  est l'injection naturelle de l'espace  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ . La fonction  $\lambda$  est donnée par

$$\lambda(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_- + \gamma_{\partial D} \sigma_+}{\gamma_{\partial D} \sigma_+ - \gamma_{\partial D} \sigma_-} \right) (x), \quad x \in \partial D,$$

et  $K_0^* : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  est l'opérateur de Poincaré-Neumann pour le laplacien introduit dans la définition (1.5) que l'on rappelle ici :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\partial D), \forall x \in \partial D, K_0^*[\varphi](x) = \int_{\partial D} \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial n_x} \varphi(y) ds(y), \quad (2.6)$$

où  $G_0$  est la fonction de Green pour le laplacien. Pour étudier le problème de conductivité (2.2) nous allons représenter de façon équivalente la solution  $u$  à l'aide d'opérateurs de simple couche (Proposition 2.4.10) agissant sur des fonctions de densité. Ces fonctions sont construites à partir d'une équation intégrale (Proposition 2.4.11) qui est donc équivalente au problème (2.2). On s'intéresse alors à l'opérateur intégral associé et on cherche à se ramener à un opérateur intégral plus simple, à savoir  $L_0$ , pour étudier son caractère Fredholm.

**Théorème 2.3.1.** En admettant que les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 (énoncées dans les parties 2.5.1 et 2.5.2 respectivement) sont vraies on peut affirmer que l'opérateur  $T$  associé au problème de conductivité (2.2) et défini dans (2.4) est Fredholm d'indice zéro si et seulement si l'opérateur intégral  $L_0$  est Fredholm d'indice zéro.

Pour prouver le Théorème 2.3.1 on étudie l'équation intégrale vérifiée par les fonctions de densité dans le but d'isoler sa partie singulière  $L_0$  de sa partie compacte (Propositions 2.5.1 et 2.5.12). En vertu du Théorème 1.2.8 on pourra alors se concentrer uniquement sur le caractère Fredholm de  $L_0$ . Comme cette équation intégrale combine des opérateurs de type simple couche et de type Poincaré-Neumann on cherche donc à les décomposer, eux-aussi, en une partie singulière plus une partie compacte. Plus précisément, en admettant la Conjecture 2.5.2 on montre que la singularité des opérateurs de simple couche associés au problème (2.2) est identique à celle de l'opérateur de simple couche pour le laplacien (Théorème 2.5.4).

De la même manière, en admettant la Conjecture 2.5.7 on prouve que la singularité des opérateurs de Poincaré-Neumann associés au problème (2.2) est identique à celle de l'opérateur de Poincaré-Neumann pour le laplacien, à savoir  $K_0^*$  (Théorème 2.5.9). Les Remarques 2.5.3 et 2.5.8 expliquent pourquoi les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 nous semblent vraies. Pour terminer on discute d'une condition suffisante pour que l'opérateur  $L_0$  soit Fredholm d'indice zéro.

**Théorème 2.3.2.** En admettant que les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 sont vraies on peut affirmer que si l'image de  $\lambda(x)$  n'intersecte pas le spectre essentiel de l'opérateur de Poincaré-Neumann  $K_0^*$  alors  $L_0$  est Fredholm d'indice zéro.

## 2.4 Équation intégrale

L'objectif de cette section est de démontrer la Proposition 2.4.11 qui affirme que la résolution du problème (2.2) est équivalente à la résolution d'une certaine équation intégrale que nous allons déterminer. Tout d'abord nous allons réécrire le problème (2.2) pour faire apparaître les conditions de transmission à l'interface  $\partial D$ :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_- \nabla u) = 0 & \text{dans } D, \\ \operatorname{div}(\sigma_+ \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}, \\ u|_+ = u|_- & \text{sur } \partial D, \\ \gamma_{\partial D} \sigma_+ \frac{\partial u}{\partial n}|_+ = \gamma_{\partial D} \sigma_- \frac{\partial u}{\partial n}|_- & \text{sur } \partial D, \\ u = g & \text{sur } \partial \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

L'étape suivante consiste à représenter la solution du problème (2.7) en utilisant les potentiels de simple couche. Avant cela il est nécessaire de rappeler quelques définitions et résultats classiques.

### 2.4.1 Résultats classiques de la théorie du potentiel

L'opérateur de simple couche  $S_0$ , respectivement double couche  $\mathcal{D}_0$  pour le laplacien ont été introduits dans les définitions 1.3 et 1.4 respectivement. Les propriétés des ces opérateurs sont décrites dans les Propositions 1.2.1 et 1.2.3. De plus l'opérateur de Poincaré-Neumann  $K_0^*$  associé au laplacien a été introduit dans la définition 1.5. Nous allons introduire des opérateurs similaires à  $S_0$ ,  $\mathcal{D}_0$  et  $K_0^*$  mais associés à des noyaux de Green construits à partir de l'opérateur  $T$  défini dans (2.4) et donc appropriés à notre problème.

**Proposition 2.4.1.** Soit  $y \in \mathbb{R}^2$ , alors les solutions  $G_{\pm}$  aux problèmes

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_{\pm}(x)\nabla G_{\pm}(x, y)) = \delta_y(x), & x \in \mathbb{R}^2, \\ G_{\pm}(x, y) = O(G_0(x, y)), & \text{lorsque } |x| \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (2.8)$$

existent et sont uniques. On rappelle que  $\delta_y$  désigne la distribution delta de Dirac au point source  $y$  et que

$$G_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log |x - y|, \quad x \neq y.$$

*Démonstration.* Pour des raisons de simplicité on ne traitera que du cas de  $G_+$ . On pose  $R(x, y) = G_+(x, y) - \frac{1}{\sigma_+} G_0(x, y)$  pour  $x \neq y$ . Soit  $y \in \mathbb{R}^2$  et  $v$  une fonction de l'ensemble  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  à support compact, on évalue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \sigma_+(x)\nabla R(x, y) \cdot \nabla v(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \sigma_+(x)\nabla G_+(x, y) \cdot \nabla v(x) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \sigma_+(x)\nabla \left( \frac{1}{\sigma_+(x)} G_0(x, y) \right) \cdot \nabla v(x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \sigma_+(x)\nabla G_+(x, y) \cdot \nabla v(x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sigma_+(x)} G_0(x, y)\nabla \sigma_+(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla G_0(x, y) \cdot \nabla v(x) dx. \end{aligned}$$

Par définition de  $G_+$  et  $G_0$  on a pour tout  $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \sigma_+(x)\nabla G_+(x, y) \cdot \nabla v(x) dx &= v(0), \\ \int_{\mathbb{R}^2} \nabla G_0(x, y) \cdot \nabla v(x) dx &= v(0), \end{aligned}$$

on en déduit donc que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sigma_+(x)\nabla R(x, y) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sigma_+(x)} G_0(x, y)\nabla \sigma_+(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

On obtient alors que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div}(\sigma_+(x)\nabla R(x, y))v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\sigma_+(x)} G_0(x, y)\nabla \sigma_+(x) \right) v(x) dx.$$

On pose  $f(x) = \operatorname{div} \left( \frac{1}{\sigma_+(x)} G_0(x, y) \nabla \sigma_+(x) \right)$  et on a  $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$  pour  $p < 2$ . Comme  $\nabla \sigma$  est à support compact on en déduit que  $f$  est à support compact. Par un argument de régularité elliptique on montre que  $x \mapsto R(x, y) \in W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}^2)$ . Finalement on a  $G_+(x, y) = R(x, y) + \frac{1}{\sigma_+(x)} G_0(x, y)$  dont on va évaluer le comportement lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ . On introduit le domaine ouvert  $\Omega_o$  tel que le support de  $f$  soit inclus dans  $\Omega_o$  et avec  $\bar{\Omega} \subset \Omega_o$  et  $y \in \Omega_o$ . On observe alors que dans  $\Omega_o$ ,  $x \mapsto R(x, y) \in W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}^2)$  vérifie l'équation

$$\begin{cases} \Delta R = 0, & \text{dans } \Omega_o, \\ R = R|_{\partial\Omega_o}, & \text{sur } \partial\Omega_o. \end{cases}$$

On peut affirmer qu'il existe  $\varphi_0 \in H^{-1/2}(\partial\Omega_o)$  tel que

$$R(x, y) = \int_{\partial\Omega_o} G_0(x, y) \varphi_0(x) ds(x) + r,$$

avec  $r = \int_{\partial\Omega_o} \varphi_0(x) ds(x)$ . D'après le comportement à l'infini de l'opérateur de simple couche  $S_0$  associé à  $G_0$  (voir Proposition 1.2.4) on en déduit que  $R(x, y) = \mathcal{O}(G_0(x, y))$  lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Soit  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$ ,  $\psi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ , on définit les opérateurs de simple couche suivants [McL00] :

$$\begin{aligned} S_{D^\pm}[\varphi](x) &= \int_{\partial D} G_\pm(x, y) \varphi(y) ds(y), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D, \\ S_\Omega[\psi](x) &= \int_{\partial\Omega} G_+(x, y) \psi(y) ds(y), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.9)$$

On définit également les opérateurs de double couche suivants :

$$\mathcal{D}_{D^\pm}[\varphi](x) = \int_{\partial D} \gamma_{\partial D} \sigma_\pm(y) \frac{\partial G_\pm}{\partial n_y}(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D. \quad (2.10)$$

Enfin on définit les opérateurs de Poincaré-Neumann suivants :

$$K_\pm^*[\varphi](x) = \int_{\partial D} \frac{\partial G_\pm(x, y)}{\partial n_x} \varphi(y) ds(y),$$

ainsi que leurs adjoints

$$K_\pm[\varphi](x) = \int_{\partial D} \frac{\partial G_\pm(x, y)}{\partial n_y} \varphi(y) ds(y).$$

Rappelons au lecteur quelques résultats importants concernant les opérateurs de simple couche et les opérateurs de Poincaré-Neumann dans les trois propositions suivantes. Tout d'abord précisons les applications que définissent ces opérateurs (voir [Cos88] Théorème 1, Théorème 2 et [McL00] Théorème 6.12, Théorème 7.1).

**Proposition 2.4.2.** *Les potentiels de simple couche définissent les applications bornées suivantes*

$$\begin{aligned} S_{D^\pm} &: H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^1(\Omega), \\ S_\Omega &: H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega). \end{aligned}$$

*Les potentiels de double couche définissent les applications bornées suivantes*

$$\mathcal{D}_{D^\pm} : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^1(\Omega),$$

*et les opérateurs de Poincaré-Neumann définissent les applications bornées*

$$\begin{aligned} K_\pm^* &: H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D), \\ K_\pm &: H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D). \end{aligned}$$

Rappelons également les relations de saut satisfaites par les potentiels de couche (lire [McL00] Théorème 6.11 par exemple).

**Proposition 2.4.3.** *Sur la frontière  $\partial D$  les potentiels de simple couches  $S_{D^\pm}$  vérifient les relations*

$$(\gamma_{\partial D} \sigma_\pm) \frac{\partial S_{D^\pm}}{\partial n} \Big|_+ = \frac{1}{2}I + K_\pm^*, \quad (\gamma_{\partial D} \sigma_\pm) \frac{\partial S_{D^\pm}}{\partial n} \Big|_- = -\frac{1}{2}I + K_\pm^*, \quad (2.11)$$

*et les potentiels de double couche  $\mathcal{D}_{D^\pm}$  vérifient les relations*

$$\mathcal{D}_{D^\pm} \Big|_+ = -\frac{1}{2}I + K_\pm, \quad \mathcal{D}_{D^\pm} \Big|_- = \frac{1}{2}I + K_\pm. \quad (2.12)$$

De plus on rappelle le résultat suivant (voir [Cos88] Théorème 2).

**Proposition 2.4.4.**  *$\gamma_{\partial D} S_{D^\pm} : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^1(\Omega)$  et  $\gamma_{\partial\Omega} S_\Omega : H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  sont des opérateurs Fredholm d'indice zéro. Il sont donc inversibles modulo*

un opérateur compact.

On s'intéresse également au comportement des potentiels de simple couche à l'infini. Pour cela on va travailler avec l'espace de Sobolev à poids  $\mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  défini par (1.33). On rappelle ici sa définition

$$\mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2) = \left\{ u : \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2} \log(2+|x|^2)} u \in L^2(\mathbb{R}^2), \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\}.$$

Cet espace est approprié pour inverser l'opérateur laplacien dans un domaine non borné, cependant il contient les fonctions constantes qui ne décroissent pas à l'infini. On introduit donc l'espace quotient

$$\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}.$$

On peut d'abord estimer le comportement des opérateurs de simple couche à l'infini.

**Proposition 2.4.5.** *Pour  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$  et  $\psi \in H^{-1/2}(\partial \Omega)$  on a*

$$S_{D^\pm}[\varphi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(y) ds(y) \log|x| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow +\infty,$$

$$S_{\Omega}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \Omega} \psi(y) ds(y) \log|x| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* Comme les noyaux  $G_{\pm}$  ont le même comportement que  $G_0$  à l'infini on pourra se référer à la preuve de la même asymptotique pour l'opérateur  $S_0$  associé à  $G_0$  (voir Proposition 1.2.4).  $\square$

On peut ainsi énoncer la proposition suivante.

**Proposition 2.4.6.** *Les potentiels de simple couche définissent les applications bornées suivantes*

$$S_{D^\pm} : H_0^{-1/2}(\partial D) \rightarrow \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2),$$

$$S_{\Omega} : H_0^{-1/2}(\partial \Omega) \rightarrow \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2).$$

*Démonstration.* Pour montrer ce résultat il suffit, d'après le Proposition 2.4.2, de considérer le comportement de  $S_{D^\pm}$  et  $S_{\Omega}$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ . En utilisant la Proposition 2.4.5 et sachant que l'on considère les opérateurs  $S_{D^\pm}$  et  $S_{\Omega}$  sur les fonctions de densité à moyenne nulle  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  et  $H_0^{-1/2}(\partial \Omega)$  on obtient le résultat souhaité.  $\square$

Connaissant le comportement asymptotique de  $S_{D^\pm}$  et  $S_\Omega$  on peut utiliser la formule de Green dans le domaine  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemme 2.4.7.** Soit  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$  et  $\psi \in H_0^{-1/2}(\partial\Omega)$ , on dispose des formules de Green suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla S_{D^\pm}[\varphi](x)|^2 dx &= - \int_{\partial D} \gamma_{\partial D} S_{D^\pm}[\varphi](x) \varphi(x) ds(x), \\ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla S_\Omega[\psi](x)|^2 dx &= - \int_{\partial\Omega} \gamma_{\partial\Omega} S_\Omega[\psi](x) \psi(x) ds(x). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Sans perte de généralité on écrit la preuve pour  $S_\Omega$  seulement. Soit  $\psi \in H_0^{-1/2}(\partial\Omega)$  et  $B_R$  une boule de  $\mathbb{R}^2$  centrée en zéro et de rayon  $R$  tel que  $\Omega \subset B_R$ . Alors on peut appliquer la formule de Green dans  $B_R$  (en sachant que  $\Delta S_\Omega[\psi] = 0$  dans  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\nabla S_\Omega[\psi](x)|^2 dx &= - \int_{\partial\Omega} \gamma_{\partial\Omega} S_\Omega[\psi](x) \psi(x) ds(x) \\ &\quad - \int_{\partial B_R} \gamma_{\partial B_R} S_\Omega[\psi](x) \frac{\partial S_\Omega[\psi]}{\partial n}(x) ds(x). \end{aligned}$$

Comme  $\psi$  est à moyenne nulle sur  $\partial\Omega$  on peut affirmer d'après la Proposition 2.4.5 que  $S_\Omega[\psi](x) = \mathcal{O}(1/|x|)$  et que  $|\nabla S_\Omega[\psi](x)| = \mathcal{O}(1/|x|^2)$  lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ . Ceci permet de prouver que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} |\nabla S_\Omega[\psi](x)|^2 dx < +\infty,$$

et que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R} \gamma_{\partial B_R} S_\Omega[\psi](x) \frac{\partial S_\Omega[\psi]}{\partial n}(x) ds(x) = 0.$$

Finalement on fait tendre  $R$  vers  $+\infty$  pour obtenir le résultat.  $\square$

En dimension deux le potentiel de simple couche n'est pas toujours inversible mais on dispose alors du résultat suivant.

**Proposition 2.4.8.** Les opérateurs  $\mathbb{S}_\pm : H^{-1/2}(\partial D) \times \mathbb{R} \rightarrow H^{-1/2}(\partial D) \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}_\Omega :$

$H^{-1/2}(\partial D) \times \mathbb{R} \rightarrow H^{-1/2}(\partial D) \times \mathbb{R}$  définis par

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{\pm}[u, a] &= \left( \gamma_{\partial D} S_{D^{\pm}}[u] + a, \int_{\partial D} u(x) ds(x) \right), \\ \mathbb{S}_{\Omega}[u, a] &= \left( \gamma_{\partial \Omega} S_{\Omega}[u] + a, \int_{\partial \Omega} u(x) ds(x) \right),\end{aligned}$$

sont inversibles.

*Démonstration.* La démonstration étant la même pour les opérateurs  $\mathbb{S}_{\pm}$  et  $\mathbb{S}_{\Omega}$  on se limitera à traiter le cas de l'opérateur  $\mathbb{S}_{\Omega}$ . D'après la Proposition 2.4.4 l'opérateur  $\gamma_{\partial \Omega} S_{\Omega} : H^{-1/2}(\partial \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial \Omega)$  est un opérateur Fredholm d'indice zéro. On peut donc, d'après la Proposition 1.2.9 le décomposer en

$$\gamma_{\partial \Omega} S_{\Omega} = S + K,$$

avec  $S : H^{-1/2}(\partial \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial \Omega)$  inversible et  $K : H^{-1/2}(\partial \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial \Omega)$  compact. On va maintenant prouver que  $\mathbb{S}_{\Omega}$  est aussi Fredholm d'indice zéro. Pour cela on décompose

$$\mathbb{S}_{\Omega}[u, a] = (S[u], a) + \left( a + K[u], \int_{\partial \Omega} u(x) ds(x) - a \right),$$

et on remarque que le premier terme de droite est inversible car  $S$  l'est et le second terme est compact car  $K$  l'est. On conclut donc, en utilisant la Proposition 1.2.9, que  $\mathbb{S}_{\Omega}$  est Fredholm d'indice zéro. Il reste donc à prouver que  $\mathbb{S}_{\Omega}$  est injectif. Soit  $(u, a) \in H^{-1/2}(\partial D) \times \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{S}_{\Omega}[u, a] = (0, 0)$ , c'est à dire

$$\gamma_{\partial \Omega} S_{\Omega}[u] + a = 0, \quad \text{et} \quad \int_{\partial \Omega} u(x) ds(x) = 0.$$

En utilisant la formule de Green du Lemme 2.4.7 et en sachant que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla S_{\Omega}[u](x)|^2 dx &= - \int_{\partial \Omega} \gamma_{\partial \Omega} S_{\Omega}[u](x) u(x) ds(x) \\ &= a \int_{\partial \Omega} u(x) ds(x) = 0.\end{aligned}$$

Donc  $S_{\Omega}[u]$  est une constante qui est nulle étant donné le comportement de  $S_{\Omega}$  à l'infini.  $\square$

**Corollaire 2.4.9.** *Les opérateurs*

$$S_{D^\pm} : H_0^{-1/2}(\partial D) \rightarrow \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \text{ et } S_\Omega : H_0^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2),$$

*sont inversibles.*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la Proposition 2.4.8.  $\square$

Comme les opérateurs de simple couche (2.9) sont continus à travers le bord on conserve les notations  $S_{D^\pm}$ ,  $S_0$  et  $S_\Omega$  pour les traces de ces opérateurs  $\gamma_{\partial D} S_{D^\pm}$ ,  $\gamma_{\partial D} S_0$  et  $\gamma_{\partial\Omega} S_\Omega$  lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté. On note  $T_{1,D} \equiv \gamma_{\partial D} S_\Omega : H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial D)$  et  $T_{1,\Omega} \equiv \gamma_{\partial\Omega} S_{D^+} : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ . On appelle aussi  $T_{2,D} \equiv \frac{\partial S_\Omega}{\partial n_\Omega} : H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  où  $n_\Omega$  est la normale au bord  $\partial\Omega$  orientée extérieurement.

## 2.4.2 Formule de représentation

Dans toute la suite on choisit de travailler avec des fonctions de densité à moyenne nulle. Cela permet d'éliminer les constantes lors de l'inversion des opérateurs de simple couche. En voyant les potentiels de simple couche comme des potentiels électrostatiques cela revient à fixer un niveau de référence pour ces potentiels.

La formule de représentation permet de représenter la solution  $u$  du problème (2.7) en utilisant des opérateurs de simple couche et s'énonce de la façon suivante.

**Proposition 2.4.10.** *Soit  $u$  la solution de (2.7), alors il existe des fonctions de densité  $\varphi^+$ ,  $\varphi^- \in H_0^{-1/2}(\partial D)$  et  $\psi \in H_0^{-1/2}(\partial\Omega)$  telles que*

$$u(x) = \begin{cases} S_{D^-}[\varphi^-](x) & \text{dans } D, \\ S_{D^+}[\varphi^+](x) + S_\Omega[\psi](x) & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}. \end{cases} \quad (2.13)$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du Corollaire 2.4.9.  $\square$

Dans la suite nous allons nous intéresser aux fonctions  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  et  $\psi$  satisfaisant l'équation (2.13). Plus particulièrement on s'intéresse aux relations vérifiées par ces fonctions qui sont naturellement imposées par les conditions de transmissions que doit satisfaire la solution  $u$  de (2.7) sur  $\partial D$  et la condition de Dirichlet sur le bord  $\partial\Omega$ .

**Proposition 2.4.11.** *Étant donné la valeur  $g \in H_0^{1/2}(\partial\Omega)$  au bord  $\partial\Omega$  on construit  $u$  la solution du problème (2.7) définie par la formule de représentation (2.13) en déterminant de manière équivalente la fonction de densité  $\varphi^+$  comme solution de l'équation intégrale*

$$(\mathcal{L} + \mathcal{K} + \mathcal{T}T_{1,\Omega})[\varphi^+] = \mathcal{T}[g], \quad \text{sur } \partial D, \quad (2.14)$$

ainsi que les densités  $\varphi^-$ ,  $\psi$  vérifiant les relations

$$\psi = S_{\Omega}^{-1}[g] - S_{\Omega}^{-1}T_{1,\Omega}[\varphi^+], \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.15)$$

$$\varphi^- = S_{D^-}^{-1}S_{D^+}[\varphi^+] + S_{D^-}^{-1}T_{1,D}[\psi], \quad \text{sur } \partial D, \quad (2.16)$$

où les opérateurs  $\mathcal{T} : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$ ,  $\mathcal{L} : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  et  $\mathcal{K} : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  sont définis par

$$\mathcal{T} = \left(-\frac{1}{2}I + K_-^*\right)S_{D^-}^{-1}T_{1,D}S_{\Omega}^{-1} - (\gamma_{\partial D}\sigma_+)T_{2,D}S_{\Omega}^{-1}, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}S_{D^-}^{-1}(S_{D^+} + S_{D^-}), \quad (2.18)$$

$$\mathcal{K} = (K_+^*S_{D^+}^{-1} - K_-^*S_{D^-}^{-1})S_{D^+}. \quad (2.19)$$

*Démonstration.* Pour prouver cette proposition nous utilisons les relations de saut, les conditions de transmission et les conditions au bord énoncées dans (2.7). La condition de continuité de la solution sur  $\partial D$  se réécrit de la façon suivante en terme de potentiels

$$S_{D^+}[\varphi^+] + T_{1,D}[\psi] = S_{D^-}[\varphi^-] \quad \text{sur } \partial D,$$

et on peut donc déduire  $\varphi^-$  de  $\varphi^+$  et  $\psi$  à partir l'équation :

$$\varphi^- = S_{D^-}^{-1}S_{D^+}[\varphi^+] + S_{D^-}^{-1}T_{1,D}[\psi] \quad \text{sur } \partial D. \quad (2.20)$$

La condition de continuité du flux se réécrit directement en utilisant les formules de saut (2.11) pour obtenir l'équation

$$\left(\frac{1}{2}I + K_+^*\right)[\varphi^+] + T_{2,D}[\psi] = \left(-\frac{1}{2}I + K_-^*\right)[\varphi^-]. \quad (2.21)$$

En utilisant la formule de représentation (2.13) de la solution  $u$ , la condition de Dirichlet  $u = g$  sur le bord  $\partial\Omega$  s'écrit

$$T_{1,\Omega}[\varphi^+] + S_{\Omega}[\psi] = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.22)$$

À l'aide de l'équation (2.22) on déduit  $\psi$  à partir de  $\varphi^+$  et de  $g$

$$\psi = S_{\Omega}^{-1}[g] - S_{\Omega}^{-1}T_{1,\Omega}[\varphi^+]. \quad (2.23)$$

Ensuite en combinant les équations (2.20) et (2.23) on récupère l'expression de  $\varphi^-$  en fonction de  $\varphi^+$  et de  $g$

$$\varphi^- = (S_{D^-}^{-1}S_{D^+} - S_{D^-}^{-1}T_{1,D}S_{\Omega}^{-1}T_{1,\Omega})[\varphi^+] + S_{D^-}^{-1}T_{1,D}S_{\Omega}^{-1}[g]. \quad (2.24)$$

En injectant les équations (2.23) et (2.24) dans l'égalité (2.21) on obtient alors

$$\left( \left( \frac{1}{2}I + K_+^* \right) - \left( -\frac{1}{2}I + K_-^* \right) S_{D^-}^{-1}S_{D^+} \right) [\varphi^+] + \mathcal{T}T_{1,\Omega}[\varphi^+] = \mathcal{T}[g], \quad (2.25)$$

où l'on a noté

$$\mathcal{T} = \left( -\frac{1}{2}I + K_-^* \right) S_{D^-}^{-1}T_{1,D}S_{\Omega}^{-1} - (\gamma_{\partial D}\sigma_+)T_{2,D}S_{\Omega}^{-1}.$$

En utilisant les relations de saut (2.11) on obtient enfin l'équation intégrale suivante vérifiée par  $\varphi^+$  :

$$(\mathcal{L} + \mathcal{K} + \mathcal{T}T_{1,\Omega})[\varphi^+] = \mathcal{T}[g].$$

□

## 2.5 Preuve du Théorème 2.3.1

Dans cette partie nous allons étudier en détail l'équation intégrale (2.14).

**Théorème 2.3.1.** En admettant que les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 (énoncées dans les parties 2.5.1 et 2.5.2 respectivement) sont vraies on peut affirmer que l'opérateur  $T$  associé au problème de conductivité (2.2) et défini dans (2.4) est Fredholm d'indice zéro si et seulement si l'opérateur intégral  $L_0$  est Fredholm d'indice zéro.

Notre stratégie consiste à isoler les opérateurs compacts dans l'équation (2.14). Comme ajouter des opérateurs compacts n'a aucun effet sur l'indice de Fredholm de l'opérateur obtenu il suffit alors d'étudier l'indice de Fredholm des opérateurs singuliers.

**Proposition 2.5.1.**  $\mathcal{T}$  est un opérateur compact de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ .

*Démonstration.* On remarque tout d'abord que  $T_{2,D}$  et  $T_{1,D}$  sont des opérateurs intégraux compacts de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ . En effet ils sont définis par une intégrale sur le bord  $\partial\Omega$  mais comme on prend leur trace sur  $\partial D$  les noyaux de ces opérateurs sont continus. Ainsi ce sont des opérateurs compacts de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ . Les autres opérateurs apparaissant dans (2.17) sont bornés ce qui permet de conclure que  $\mathcal{T}$  est compact de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans lui-même.  $\square$

Remarquons que l'opérateur  $T_{1,\Omega}$  est borné et donc que  $\mathcal{T}T_{1,\Omega}$  est aussi un opérateur compact de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ .

Connaissant le résultat énoncé dans la Proposition 2.5.1 on se concentre sur le caractère Fredholm de l'opérateur  $\mathcal{L} + \mathcal{K}$ . Pour l'étudier il est nécessaire de s'intéresser aux singularités des opérateurs de simple couche  $S_{D^\pm}$  et des opérateurs de Poincaré-Neumann  $K_\pm^*$  que nous avons définis dans la sous-section 2.4.1. Cela fait l'objet des deux sous-sections suivantes.

## 2.5.1 Singularité des potentiels de simple couche

Dans cette partie on souhaite prouver que la singularité des opérateurs de simple couche  $S_{D^\pm}$  est la même que celle des opérateurs  $\frac{1}{\gamma_{\partial D}\sigma_\pm}S_0$  respectivement. Ce résultat est l'objet du Théorème 2.5.4. Toutefois, pour prouver le Théorème 2.5.4 on doit admettre la Conjecture 2.5.2 que nous n'avons pas réussi à démontrer. Cette conjecture affirme la compacité de certains opérateurs intégraux apparaissant dans la démonstration du Théorème 2.5.4. La Remarque 2.5.3 explique pourquoi cette conjecture nous semble correcte.

**Conjecture 2.5.2.** Les opérateurs  $R_\pm$  définis pour  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$  par

$$\forall y \in \partial D, \quad R_\pm[\varphi](y) = -\frac{1}{\sigma_\pm(y)} \int_{\mathbb{R}^2} (\sigma_\pm(y) - \sigma_\pm(x)) \nabla G_0 \cdot \nabla S_{D^\pm}[\varphi] dx. \quad (2.26)$$

sont compacts de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$ .

**Remarque 2.5.3.** Pour montrer que  $R_\pm$  sont des opérateurs compacts de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$ , on peut espérer gagner en régularité grâce au comportement particulier de  $S_{D^\pm}[\varphi]$ . En effet pour  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$ , on sait que  $S_{D^\pm}[\varphi] = \mathcal{O}(1/|x|)$  lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ . Toutefois nous ne sommes pas parvenus à démontrer la compacité de  $R_\pm$ .

On peut maintenant énoncer le théorème principal de cette partie.

**Théorème 2.5.4.** *En admettant que la Conjecture 2.5.2 est vraie on peut affirmer que les opérateurs de simple couche  $S_{D^+}$  et  $S_{D^-}$  vérifient les relations suivantes :*

$$S_{D^+} = \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} S_0 + R_+,$$

$$S_{D^-} = \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_-} S_0 + R_-,$$

où  $R_+$  et  $R_-$  sont des opérateurs compacts de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$ .

Avant de prouver ce théorème on doit vérifier que les opérateurs  $\frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}} S_0$  sont bornés.

**Lemme 2.5.5.**  *$\frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}} S_0$  sont des applications bornées de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^1(\Omega)$ .*

*Démonstration.* Rappelons d'abord que  $S_0$  est un opérateur borné de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^1(\Omega)$  (voir Proposition 2.4.2). Il reste donc à prouver que les opérateurs de multiplication par  $\frac{1}{\sigma_{\pm}}$  sont bornés de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ . Pour cela on considère la norme  $H^1$  des quantités  $\frac{1}{\sigma_{\pm}} u$  avec  $u \in H^1(\Omega)$ . Comme  $\frac{1}{\sigma_{\pm}}$  appartient à l'espace  $L^\infty(\Omega)$  le seul terme que l'on doit traiter en détail est  $\int_{\Omega} |u \nabla \sigma_{\pm}|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \sigma_{\pm}|^2 |u|^2$ . Sachant que  $\sigma_{\pm} \in H^2(\Omega)$  on obtient que  $\nabla \sigma_{\pm} \in H^1(\Omega)$ . En utilisant l'inégalité de Hölder il vient :

$$\int_{\Omega} |\nabla \sigma_{\pm}|^2 |u|^2 \leq \left( \int_{\Omega} |\nabla \sigma_{\pm}|^4 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |u|^4 \right)^{1/2}.$$

En utilisant les injections de Sobolev on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla \sigma_{\pm}|^2 |u|^2 \leq C \|\nabla \sigma_{\pm}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

ce qui est suffisant pour prouver le Lemme 2.5.5. □

Maintenant nous proposons une preuve du Théorème 2.5.4.

*Démonstration du Théorème 2.5.4.* On s'intéresse à la singularité des fonctions de Green  $G_{\pm}(x, y)$ . On se propose d'approcher  $G_{\pm}(x, y)$  par  $\frac{1}{\sigma_{\pm}(y)} G_0(x, y)$  et on introduit la notation suivante dans ce sens

$$\mathbb{G}_{\pm}(x, y) = G_{\pm}(x, y) - \frac{1}{\sigma_{\pm}(y)} G_0(x, y). \quad (2.27)$$

Par définition, on obtient que pour  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\operatorname{div}_x(\sigma_{\pm}(x)\nabla_x G_{\pm}(x, y)) - \Delta_x G_0(x, y) = 0,$$

qui se réécrit

$$\operatorname{div}_x [\sigma_{\pm}(x)\nabla_x G_{\pm}(x, y)] = \operatorname{div}_x \left[ \left(1 - \frac{\sigma_{\pm}(x)}{\sigma_{\pm}(y)}\right) \nabla_x G_0(x, y) \right]. \quad (2.28)$$

Maintenant on cherche à obtenir une représentation intégrale des opérateurs  $S_{D^{\pm}} - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}} S_0$  afin de prouver que ce sont des opérateurs compacts. Pour cela nous allons évaluer ces opérateurs sur une fonction  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$ . Soit les fonctions  $v_{\pm} \in \mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  définies par  $v_{\pm}(x) = S_{D^{\pm}}[\varphi](x)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , vérifiant les équations

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_{\pm} \nabla v_{\pm}) = 0 & \text{dans } D \text{ et } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \\ v_{\pm}|_+ = v_{\pm}|_- & \text{sur } \partial D, \\ v_{\pm} \rightarrow 0 & \text{à l'infini.} \end{cases}$$

Nous pouvons relier  $\varphi$  à  $v_{\pm}$  en utilisant les relations de saut de la dérivée normale du potentiel de simple couche (2.11) au niveau de l'interface :

$$\left[ \sigma_{\pm} \frac{\partial S_{D^{\pm}}[\varphi]}{\partial n} \right]_+^+ := \sigma_{\pm} \frac{\partial S_{D^{\pm}}[\varphi]}{\partial n} \Big|_+ - \sigma_{\pm} \frac{\partial S_{D^{\pm}}[\varphi]}{\partial n} \Big|_- = \left[ \sigma_{\pm} \frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} \right]_-^+ = \varphi. \quad (2.29)$$

Pour faire apparaître le terme  $\left(S_{D^{\pm}} - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}} S_0\right)[\varphi]$  notre stratégie consiste à intégrer le terme de gauche de l'équation (2.28) multiplié par la fonction test  $v_{\pm}$  sur  $\mathbb{R}^2$ , puis d'appliquer la formule de Green à deux reprises et enfin prendre  $y \in \partial D$ . Cependant on ne peut pas faire les choses de manière aussi directe car l'intégrale obtenue est singulière sur le bord  $\partial D$ . Pour contourner ce problème on doit travailler avec une intégrale sur  $D$  et une autre sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ . Ensuite on peut alors utiliser la formule de Green à deux reprises et pour finir prendre la limite quand  $y \in \partial D$ . L'utilisation de la formule de Green dans le domaine  $D$  ne pose pas de problème particulier mais pour le domaine  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$  on doit d'abord vérifier les bonnes conditions de décroissance à l'infini, ce qui fait l'objet du prochain lemme.

**Lemme 2.5.6.** *On dispose des formules de Green suivantes :*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] v_{\pm}(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}} \sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \cdot \nabla v_{\pm}(x) dx - \int_{\partial D} v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} \Big|_{+}(x, y) ds(x), \end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}} \sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \cdot \nabla v_{\pm}(x) dx = - \int_{\partial D} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} \Big|_{+}(x) ds(x).$$

*Démonstration.* Soit  $B_R$  une boule de  $\mathbb{R}^2$ , centrée en zéro, de rayon  $R$  tel que  $\Omega \subset B_R$ . On peut alors écrire la formule de Green dans le domaine borné  $B_R \setminus \overline{D}$  :

$$\begin{aligned} & \int_{B_R \setminus \overline{D}} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] v_{\pm}(x) dx \\ &= - \int_{B_R \setminus \overline{D}} \sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \cdot \nabla v_{\pm}(x) dx - \int_{\partial D} v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} \Big|_{+}(x, y) ds(x) \\ & \quad + \int_{\partial B_R} v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} \Big|_{+}(x, y) ds(x). \end{aligned} \tag{2.30}$$

On va maintenant étudier la convergence des différents termes de (2.30) lorsque  $R \rightarrow +\infty$ . Tout d'abord, d'après l'égalité (2.28) on sait que lorsque  $x \neq y$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] &= \operatorname{div} \left[ \left( 1 - \frac{\sigma_{\pm}(x)}{\sigma_{\pm}(y)} \right) \nabla_x G_0(x, y) \right] \\ &= \left( 1 - \frac{\sigma_{\pm}(x)}{\sigma_{\pm}(y)} \right) \underbrace{\Delta_x G_0}_{=0} + \nabla_x \left( 1 - \frac{\sigma_{\pm}(x)}{\sigma_{\pm}(y)} \right) \cdot \nabla_x G_0, \end{aligned}$$

et comme  $\nabla_x \sigma_{\pm}(x) = 0$  à l'extérieur de  $\Omega$  on en déduit que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R \setminus \overline{D}} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] v_{\pm}(x) dx < +\infty.$$

De plus on sait que lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$  on a  $v_{\pm} = \mathcal{O}(1/|x|)$  donc on en déduit que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} - \int_{B_R \setminus \overline{D}} \sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \cdot \nabla v_{\pm}(x) dx < +\infty,$$

et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R} v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} \Big|_{+}(x, y) ds(x) = 0.$$

On peut donc passer à la limite  $R \rightarrow +\infty$  dans l'équation (2.30) et on obtient alors la formule de Green dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ . La deuxième formule de Green s'obtient de la même manière et se justifie avec les mêmes arguments que précédemment.  $\square$

### Intégrale sur $D$

Prenons  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ , on intègre l'équation (2.28) sur  $D$  puis on applique la formule de Green pour obtenir l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \int_D \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] v_{\pm}(x) dx \\ &= \int_{\partial D} v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} \Big|_{-}(x, y) ds(x) - \int_D \sigma_{\pm}(x) \nabla v_{\pm}(x) \cdot \nabla \mathbb{G}_{\pm}(x, y) dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

En utilisant une seconde fois la formule de Green et en sachant que  $\operatorname{div}(\sigma_{\pm} \nabla v_{\pm}) = 0$  sur  $D$  il vient

$$\int_D \sigma_{\pm}(x) \nabla v_{\pm}(x) \cdot \nabla \mathbb{G}_{\pm}(x, y) dx = \int_{\partial D} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} \frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} \Big|_{-}(x) ds(x). \quad (2.32)$$

Enfin en combinant les équations (2.31) et (2.32) on a

$$\begin{aligned} & \int_D \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] v_{\pm}(x) dx \\ &= \int_{\partial D} v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} \Big|_{-}(x, y) ds(x) - \int_{\partial D} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} \Big|_{-}(x) ds(x). \end{aligned} \quad (2.33)$$

On doit examiner le terme  $v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} \Big|_{-}(x, y)$  lorsque  $y \rightarrow \tilde{y} \in \partial D$  avec attention. Tout d'abord on peut écrire

$$v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} \Big|_{-}(x, y) = v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \left( \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} - \frac{1}{\sigma_{\pm}(y)} \frac{\partial \mathbb{G}_0}{\partial n_x} \right) \Big|_{-}(x, y).$$

Lorsque  $y \rightarrow \tilde{y}$  avec un certain  $\tilde{y} \in \partial D$  on peut appliquer les relations de saut (2.12) et obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \tilde{y}} \int_{\partial D} v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \left( \frac{\partial G_{\pm}}{\partial n_x} - \frac{1}{\sigma_{\pm}(y)} \frac{\partial G_0}{\partial n_x} \right) \Big|_{-}(x, y) ds(x) \\ = \left( \frac{1}{2} I + K_{\pm} \right) [v_{\pm}](\tilde{y}) - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(\tilde{y})} \left( \frac{1}{2} I + K_0 \right) [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} v_{\pm}](\tilde{y}) \\ = (K_{\pm} - K_0) [v_{\pm}](\tilde{y}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

### Intégrale sur $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$

De la même manière on prend  $y \in D$  et on intègre (2.28) sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ , puis on utilise la formule de Green à deux reprises (ce qui est correct d'après le Lemme 2.5.6) et en sachant que  $\operatorname{div}(\sigma_{\pm} \nabla v_{\pm}) = 0$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  on obtient l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] v_{\pm}(x) dx \\ = - \int_{\partial D} v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} \Big|_{+}(x, y) ds(x) + \int_{\partial D} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} \Big|_{+}(x) ds(x). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Lorsque  $y \rightarrow \tilde{y}$  pour un  $\tilde{y} \in \partial D$  donné on peut utiliser les relations de saut (2.12) pour obtenir l'égalité suivante :

$$- \int_{\partial D} v_{\pm}(x) \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x} \Big|_{+}(x, y) ds(x) \rightarrow -(K_{\pm} - K_0) [v_{\pm}](\tilde{y}). \quad (2.36)$$

### Limite quand $y \in \partial D$

Maintenant fixons  $y \in \partial D$ . En utilisant les relations (2.33), (2.35) et en connaissant les limites au bord (2.34), (2.36) on arrive au résultat suivant :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] v_{\pm}(x) dx = \int_{\partial D} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \left[ \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} \frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} \right]_{-}^{+} ds(x). \quad (2.37)$$

En utilisant l'équation (2.29) et en remarquant que pour  $y \in \partial D$

$$\int_{\partial D} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \varphi(x) ds(x) = \left( S_{D^{\pm}} - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} S_0 \right) [\varphi](y),$$

on obtient pour  $y \in \partial D$

$$\left( S_{D^{\pm}} - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} S_0 \right) [\varphi](y) = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] v_{\pm}(x) dx.$$

Le terme de droite peut être réécrit à l'aide de l'équation (2.28) pour arriver à l'égalité

$$\left(S_{D^\pm} - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_\pm(y)} S_0\right) [\varphi](y) = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div} \left[ \left(1 - \frac{\sigma_\pm(x)}{\sigma_\pm(y)}\right) \nabla_x G_0(x, y) \right] v_\pm(x) dx.$$

On s'intéresse maintenant à l'intégrale du terme de droite. On se propose de la mettre sous une forme plus sympathique en utilisant la formule de Green. Toutefois on ne peut pas appliquer la formule de Green directement au risque d'obtenir une intégrale singulière. On doit travailler avec une intégrale sur  $D$  et une autre sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ , puis appliquer la formule de Green et enfin prendre le limite quand  $y$  tend vers  $\partial D$ . On obtient alors la relation suivante pour  $y \in \partial D$  :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div} \left[ \left(1 - \frac{\sigma_\pm(x)}{\sigma_\pm(y)}\right) \nabla_x G_0(x, y) \right] v_\pm(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{\sigma_\pm(x)}{\sigma_\pm(y)}\right) \nabla G_0 \cdot \nabla v_\pm dx.$$

Finalement pour un  $y \in \partial D$  fixé il vient

$$\begin{aligned} \left(S_{D^\pm} - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_\pm(y)} S_0\right) [\varphi](y) &= - \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{\sigma_\pm(x)}{\sigma_\pm(y)}\right) \nabla G_0 \cdot \nabla v_\pm dx \\ &= - \frac{1}{\sigma_\pm(y)} \int_{\mathbb{R}^2} (\sigma_\pm(y) - \sigma_\pm(x)) \nabla G_0 \cdot \nabla v_\pm dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

On note  $R_\pm$  les opérateurs définis pour  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$  par

$$\forall y \in \partial D, \quad R_\pm[\varphi](y) = - \frac{1}{\sigma_\pm(y)} \int_{\mathbb{R}^2} (\sigma_\pm(y) - \sigma_\pm(x)) \nabla G_0 \cdot \nabla S_{D^\pm}[\varphi] dx. \quad (2.39)$$

Ainsi pour  $y \in \partial D$

$$\left(S_{D^\pm} - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_\pm(y)} S_0\right) [\varphi](y) = R_\pm[\varphi](y).$$

En utilisant la Conjecture 2.5.2 on obtient le résultat souhaité.  $\square$

## 2.5.2 Singularité des opérateurs de Poincaré-Neumann

Notre objectif dans cette partie est d'étudier l'opérateur

$$\mathcal{K} = (K_+^* S_{D^+}^{-1} - K_-^* S_{D^-}^{-1}) S_{D^+} = K_+^* - K_-^* S_{D^-}^{-1} S_{D^+}.$$

Le premier résultat que nous allons démontrer concerne la singularité des opérateurs de type Poincaré-Neumann  $K_\pm^*$  et fait l'objet du Théorème 2.5.9. Toutefois pour prouver ce résultat nous devons admettre la Conjecture 2.5.7 que nous n'avons pas réussi à démontrer. La remarque 2.5.8 explique pourquoi cette conjecture nous semble vraie.

**Conjecture 2.5.7.** Les opérateurs  $\tilde{R}_\pm$  définis pour  $\Psi \in H^{-1/2}(\partial D)$  par

$$\forall y \in \partial D, \quad \tilde{R}_\pm[\Psi](y) = -\frac{1}{\sigma_\pm(y)} \int_{\mathbb{R}^2} (\sigma_\pm(y) - \sigma_\pm(x)) \nabla G_0 \cdot \nabla \mathcal{D}_{D^\pm}[\Psi] dx. \quad (2.40)$$

sont compacts de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$ .

**Remarque 2.5.8.** La Conjecture 2.5.2 affirme que les opérateurs  $R_\pm$  sont compacts de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$ . Comme les opérateurs  $\tilde{R}_\pm$  et  $R_\pm$  ont une forme très proche et que pour  $\Psi \in H^{-1/2}(\partial D)$ , la fonction  $w_\pm = \mathcal{D}_{D^\pm}[\Psi]$  présente la même décroissance que  $v_\pm$  à l'infini, à savoir  $w_\pm(x) = \mathcal{O}(1/|x|)$  lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ , on s'attend à ce que la preuve de compacité de  $\tilde{R}_\pm$  soit très similaire à celle de  $R_\pm$ . À noter que pour  $\tilde{R}_\pm$  on a pas besoin d'imposer que  $\Psi$  soit à moyenne nulle pour avoir une décroissance suffisante de  $w_\pm$  à l'infini. Tout comme pour  $R_\pm$ , nous ne sommes pas parvenus à montrer la compacité de  $\tilde{R}_\pm$  de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$ .

On peut maintenant énoncer puis démontrer le Théorème 2.5.9 qui traite de la singularité des opérateurs  $K_\pm^*$ .

**Théorème 2.5.9.** En admettant que la Conjecture 2.5.7 est vraie on peut affirmer que les opérateurs  $K_\pm^* - K_0^*$  sont compacts de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ .

*Démonstration.* La stratégie que nous proposons pour prouver ce théorème est très proche de celle utilisée dans la preuve du théorème 2.5.4. On multiplie le terme de gauche de l'équation (2.28) par une fonction test soigneusement choisie et ensuite on intègre en utilisant la formule de Green pour faire apparaître les opérateurs  $K_\pm^*$  et  $K_0^*$ . Soit  $\Psi \in H^{-1/2}(\partial D)$ , on définit les fonctions tests  $w_\pm = \mathcal{D}_{D^\pm}[\Psi] \in H^1(D) \cup H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$  vérifiant les équations

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_\pm \nabla w_\pm) = 0, & \text{dans } D \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}), \\ [w_\pm]_-^+ = -\Psi, & \text{sur } \partial D, \\ \left[ \gamma_{\partial D} \sigma_\pm \frac{\partial w_\pm}{\partial n} \right]_-^+ = 0, & \text{sur } \partial D, \\ w_\pm \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0. \end{cases}$$

Comme on l'a fait dans la preuve du Théorème 2.5.4 on multiplie le terme de gauche de (2.28) par  $w_\pm$  et on intègre sur  $D$  et  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ .

### Intégrale sur $D$

Commençons par nous intéresser à l'intégrale sur  $D$ . Pour un  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$  fixé on applique la formule de Green à deux reprises pour obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] w_{\pm}(x) dx &= \int_{\partial D} \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x}(x, y) w_{\pm}|_{-}(x) ds(x) \\ &\quad - \int_{\partial D} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \left( \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} \frac{\partial w_{\pm}}{\partial n_x} \right) \Big|_{-}(x) ds(x) + \int_D \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla w_{\pm}(x)] dx. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Par définition de  $w_{\pm}$  on sait que  $\operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla w_{\pm}(x)] = 0$  dans  $D$  et en utilisant les définitions (2.10) des potentiels de double couche on peut réécrire l'équation (2.41) pour  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$  :

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] w_{\pm}(x) dx &= \mathcal{D}_{D^{\pm}} [w_{\pm}|_{-}](y) - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} \mathcal{D}_0 [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} w_{\pm}|_{-}](y) \\ &\quad - \int_{\partial D} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \left( \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial w_{\pm}}{\partial n_x} \right) \Big|_{-}(x) ds(x). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Examinons attentivement le terme  $\mathcal{D}_{D^{\pm}} [w_{\pm}|_{-}](y) - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} \mathcal{D}_0 [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} w_{\pm}|_{-}](y)$  lorsque  $y$  tend vers  $\partial D$ . Fixons un certain  $\tilde{y} \in \partial D$ . En connaissant les relations de saut (2.12) pour le potentiel de double couche on fait tendre  $y$  vers  $\tilde{y}$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \tilde{y}} \mathcal{D}_{D^{\pm}} [w_{\pm}|_{-}](y) - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} \mathcal{D}_0 [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} w_{\pm}|_{-}] &= \left( -\frac{1}{2}I + K_{\pm} \right) [w_{\pm}|_{-}](\tilde{y}) - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(\tilde{y})} \left( -\frac{1}{2}I + K_0 \right) [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} w_{\pm}|_{-}](\tilde{y}) \\ &= K_{\pm} [w_{\pm}|_{-}](\tilde{y}) - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(\tilde{y})} K_0 [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} w_{\pm}|_{-}](\tilde{y}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

### Intégrale sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$

De la même manière on fixe  $y \in D$  puis on multiplie le terme de gauche de l'équation (2.28) par  $w_{\pm}$  et on intègre le tout sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ . Ensuite on utilise la formule

de Green à deux reprises et il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] w_{\pm}(x) dx &= - \int_{\partial D} \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial \mathbb{G}_{\pm}}{\partial n_x}(x, y) w_{\pm}(x)|_+ ds(x) \\ &+ \int_{\partial D} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \left( \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial w_{\pm}}{\partial n_x} \right) \Big|_+ ds(x) + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla w_{\pm}(x)] dx. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Comme  $\operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla w_{\pm}(x)] = 0$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$  et en utilisant à nouveau les définitions (2.10) on obtient pour  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] w_{\pm}(x) dx \\ &= -\mathcal{D}_{D^{\pm}} [w_{\pm}|_+](y) + \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} \mathcal{D}_0 [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} w_{\pm}|_+] \\ &+ \int_{\partial D} \mathbb{G}_{\pm}(x, y) \left( \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x) \frac{\partial w_{\pm}}{\partial n_x} \right) \Big|_+ ds(x). \end{aligned} \quad (2.45)$$

En prenant  $\tilde{y} \in \partial D$  et en faisant tendre  $y$  vers  $\tilde{y}$  puis en utilisant les relations de saut (2.12) on peut écrire que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \tilde{y}} -\mathcal{D}_{D^{\pm}} [w_{\pm}|_+](y) + \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} \mathcal{D}_0 [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} w_{\pm}|_+] \\ &= - \left( \frac{1}{2} I + K_{\pm} \right) [w_{\pm}|_+](\tilde{y}) + \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(\tilde{y})} \left( \frac{1}{2} I + K_0 \right) [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} w_{\pm}|_+](\tilde{y}) \\ &= -K_{\pm} [w_{\pm}|_+](\tilde{y}) + \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(\tilde{y})} K_0 [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} w_{\pm}|_+](\tilde{y}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

### Limite quand $y \in \partial D$

Maintenant on fixe  $y \in \partial D$  et on additionne les relations (2.42) et (2.45). En utilisant les valeurs limites (2.43), (2.46) sur  $\partial D$  et connaissant que  $\left[ \gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} \frac{\partial w_{\pm}}{\partial n} \right]_{-}^{+} = 0$  sur  $\partial D$  et  $\Psi = w_{\pm}|_+ - w_{\pm}|_-$  on obtient alors que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] w_{\pm}(x) dx = -K_{\pm}[\Psi](y) + \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} K_0 [\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} \Psi](y). \quad (2.47)$$

On s'intéresse au terme de gauche de cette égalité et on sait déjà d'après l'équation (2.28) que pour  $x, y \in \mathbb{R}^2$  avec  $x \neq y$

$$\operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] = \operatorname{div} \left[ \left( 1 - \frac{\sigma_{\pm}(x)}{\sigma_{\pm}(y)} \right) \nabla_x G_0(x, y) \right]. \quad (2.48)$$

Comme on l'a déjà fait auparavant on multiplie l'équation (2.48) par  $w_{\pm}$ , on l'intègre sur  $D$  et  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$  puis en appliquant la formule de Green à deux reprises et en prenant la limite  $y \in \partial D$  on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div} [\sigma_{\pm}(x) \nabla_x \mathbb{G}_{\pm}(x, y)] w_{\pm}(x) dx \\ &= \int_{\partial D} \left[ \left( 1 - \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x)}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} \right) \frac{\partial G_0}{\partial n_x}(x, y) w_{\pm}(x) \right]_{-}^{+} ds(x) + \widetilde{R}_{\pm}[\Psi](y), \end{aligned} \quad (2.49)$$

où les opérateurs  $\widetilde{R}_{\pm}$  sont définis pour  $\Psi \in H^{-1/2}(\partial D)$  par

$$\forall y \in \partial D, \quad \widetilde{R}_{\pm}[\Psi](y) = -\frac{1}{\sigma_{\pm}(y)} \int_{\mathbb{R}^2} (\sigma_{\pm}(y) - \sigma_{\pm}(x)) \nabla G_0 \cdot \nabla \mathcal{D}_{D^{\pm}}[\Psi] dx. \quad (2.50)$$

Il est intéressant d'observer que ces opérateurs ont une forme quasi-identique aux opérateurs  $R_{\pm}$  définis dans la preuve du Théorème 2.5.4 à l'équation (2.39).

**Remarque 2.5.10.** Dans la définition (2.50) de  $\widetilde{R}_{\pm}$  on remarque que  $\nabla \mathcal{D}_{D^{\pm}}[\Psi] \notin L^2(\mathbb{R}^2)$  à cause de la discontinuité sur  $\partial D$ . Cependant  $\nabla \mathcal{D}_{D^{\pm}}[\Psi] \in L^2(D)$  et  $\nabla \mathcal{D}_{D^{\pm}}[\Psi] \in L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ . Ainsi les opérateurs  $\widetilde{R}_{\pm}$  sont bien définis à condition de séparer l'intégrale sur  $\mathbb{R}^2$  en une intégrale sur  $D$  et une autre sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ . Par soucis de simplicité on conservera malgré tout la même notation pour  $\widetilde{R}_{\pm}$ .

On observe pour  $y \in \partial D$  que

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \left[ \left( 1 - \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(x)}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} \right) \frac{\partial G_0}{\partial n_x}(x, y) w_{\pm}(x) \right]_{-}^{+} ds(x) \\ &= -K_0[\Psi](y) + \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} K_0[\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} \Psi](y), \end{aligned} \quad (2.51)$$

et en combinant cette équation avec (2.47) on obtient pour  $y \in \partial D$  la relation suivante

$$\begin{aligned} & K_{\pm}[\Psi](y) - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} K_0[\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} \Psi](y) \\ &= K_0[\Psi](y) - \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm}(y)} K_0[\gamma_{\partial D} \sigma_{\pm} \Psi](y) - \widetilde{R}_{\pm}[\Psi](y). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Autrement dit

$$K_{\pm}[\Psi](y) - K_0[\Psi](y) = -\tilde{R}_{\pm}[\Psi](y). \quad (2.53)$$

Étant donné l'équation (2.53) et en admettant la Conjecture 2.5.7 on peut donc affirmer que les opérateurs  $K_{\pm} - K_0$  sont compacts de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$ . De plus on sait qu'un opérateur est compact si et seulement si son adjoint est compact. On peut alors conclure que les opérateurs  $K_{\pm}^* - K_0^*$  sont compacts de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ .  $\square$

Concentrons nous maintenant sur l'étude de la singularité de l'opérateur  $\mathcal{K}$  défini dans la Proposition 2.4.11. La Proposition 2.5.11 décompose l'opérateur  $\mathcal{K}$  en un opérateur compact plus un opérateur singulier fortement lié à  $K_0^*$ .

**Proposition 2.5.11.** *On suppose que les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 sont vraies, alors pour  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$  et pour tout  $y \in \partial D$*

$$\mathcal{K}[\varphi](y) = K_0^* \left[ \left( 1 - \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_-}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} \right) \varphi \right] (y) + Q[\varphi](y), \quad (2.54)$$

avec  $Q$  un opérateur compact de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H_0^{-1/2}(\partial D)$ .

*Démonstration.* En admettant que la Conjecture 2.5.2 est vraie on peut utiliser le Théorème 2.5.4 pour affirmer que

$$S_{D^+} = \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} S_0 + R_+,$$

$$S_{D^-} = \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_-} S_0 + R_-,$$

où  $R_+$  et  $R_-$  sont des opérateurs compacts de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$ . On écrit alors pour  $\phi \in H^{1/2}(\partial D)$  que

$$S_{D^-}^{-1}[\phi] = \left( \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_-} S_0 \right)^{-1} \left( I + R_- \left( \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_-} S_0 \right)^{-1} \right)^{-1} [\phi]$$

$$= S_0^{-1}[\gamma_{\partial D} \sigma_- \phi] + Q_1[\phi],$$

où  $Q_1$  est un opérateur compact de  $H^{1/2}(\partial D)$  dans  $H_0^{-1/2}(\partial D)$ . Ensuite on écrit pour

$\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$  que

$$\begin{aligned} S_{D^-}^{-1} S_{D^+}[\varphi] &= (S_0^{-1} \gamma_{\partial D} \sigma_- + Q_1) \left( \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} S_0 + R_+ \right) [\varphi] \\ &= (S_0^{-1} \gamma_{\partial D} \sigma_-) \left( \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} S_0 \right) [\varphi] + Q_2[\varphi], \end{aligned} \quad (2.55)$$

avec  $Q_2 = S_0^{-1} \gamma_{\partial D} \sigma_- R_+ + Q_1 \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} S_0 + Q_1 R_+$ . Comme  $Q_1$  et  $R_+$  sont des opérateurs compacts, on en déduit que  $Q_2$  est aussi un opérateur compact de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H_0^{-1/2}(\partial D)$ . Pour  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$  on procède à la manipulation d'écriture suivante

$$\left( \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} S_0 \right) [\varphi] = S_0 \left[ \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} \varphi \right] + \left( \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} S_0 [\varphi] - S_0 \left[ \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} \varphi \right] \right),$$

et pour  $y \in \partial D$  on note

$$\begin{aligned} Q_3[\varphi](y) &= \left( \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} S_0 [\varphi] - S_0 \left[ \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} \varphi \right] \right) (y) \\ &= \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+(y)} \int_{\partial D} \left( 1 - \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_+(y)}{\gamma_{\partial D} \sigma_+(x)} \right) G_0(x, y) \varphi(x) ds(x). \end{aligned} \quad (2.56)$$

L'équation (2.56) définit l'opérateur intégral  $Q_3$  dont le noyau est continu car  $\sigma_+ \in C^{0,\alpha}$ . Ainsi  $Q_3 = \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} S_0 - S_0 \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+}$  est un opérateur compact de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$ . On en déduit donc que pour  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$

$$\left( \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} S_0 \right) [\varphi] = S_0 \left[ \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} \varphi \right] + Q_3[\varphi]. \quad (2.57)$$

Identiquement on obtient pour  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$

$$\left( \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_-} S_0 \right) [\varphi] = S_0 \left[ \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_-} \varphi \right] + Q_4[\varphi], \quad (2.58)$$

où  $Q_4 = \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_-} S_0 - S_0 \frac{1}{\gamma_{\partial D} \sigma_-}$  est un opérateur compact de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$ .

Ensuite on écrit pour  $\phi \in H^{1/2}(\partial D)$  que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\gamma_{\partial D}\sigma_-}S_0\right)^{-1}[\phi] &= \left(S_0\frac{1}{\gamma_{\partial D}\sigma_-} + Q_4\right)^{-1}[\phi] \\ &= \left(S_0\frac{1}{\gamma_{\partial D}\sigma_-}\right)^{-1} \left(I + Q_4\left(S_0\frac{1}{\gamma_{\partial D}\sigma_-}\right)^{-1}\right)^{-1}[\phi] \\ &= \left(S_0\frac{1}{\gamma_{\partial D}\sigma_-}\right)^{-1}[\phi] + Q_5[\phi], \end{aligned} \quad (2.59)$$

où  $Q_5$  est un opérateur compact de  $H^{1/2}(\partial D)$  dans  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  car l'opérateur  $Q_4$  l'est. En utilisant les résultats (2.57) et (2.59) dans l'équation (2.55) on écrit pour  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$  que

$$\begin{aligned} S_{D^-}^{-1}S_{D^+}[\varphi] &= (\gamma_{\partial D}\sigma_-S_0^{-1} + Q_5) \left(S_0\frac{1}{\gamma_{\partial D}\sigma_+} + Q_3\right)[\varphi] + Q_2[\varphi] \\ &= \gamma_{\partial D}\sigma_-S_0^{-1}S_0\left[\frac{1}{\gamma_{\partial D}\sigma_+}\varphi\right] + Q_6[\varphi] \\ &= \frac{\gamma_{\partial D}\sigma_-}{\gamma_{\partial D}\sigma_+}\varphi + Q_6[\varphi], \end{aligned} \quad (2.60)$$

où  $Q_6 = \gamma_{\partial D}\sigma_-S_0^{-1}Q_3 + Q_5S_0\frac{1}{\gamma_{\partial D}\sigma_+} + Q_5Q_3$  est un opérateur compact de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H_0^{-1/2}(\partial D)$ . En utilisant (2.60) dans la définition (2.19) de l'opérateur  $\mathcal{K}$  il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= (K_+^*S_{D^+}^{-1} - K_-^*S_{D^-}^{-1})S_{D^+} = K_+^* - K_-^*S_{D^-}^{-1}S_{D^+} \\ &= K_+^* - K_-^* \left(\frac{\gamma_{\partial D}\sigma_-}{\gamma_{\partial D}\sigma_+}I + Q_6\right) \\ &= K_+^* - K_-^*\frac{\gamma_{\partial D}\sigma_-}{\gamma_{\partial D}\sigma_+} + K_-^*Q_6. \end{aligned}$$

En admettant que la Conjecture 2.5.7 est vraie on peut utiliser le Théorème 2.5.9 pour affirmer que pour  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$

$$\mathcal{K}[\varphi] = K_0^* \left[ \left(1 - \frac{\gamma_{\partial D}\sigma_-}{\gamma_{\partial D}\sigma_+}\right)\varphi \right] + Q[\varphi]. \quad (2.61)$$

Avec  $Q$  un opérateur compact de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H_0^{-1/2}(\partial D)$ . Ceci conclut la preuve de la Proposition 2.5.11.  $\square$

### 2.5.3 Singularité de l'opérateur intégral

On a montré dans la Proposition 2.4.11 que la caractère bien posé du problème de conductivité (2.2) est équivalent au caractère bien posé de l'équation intégrale (2.62) pour  $\varphi^+ \in H_0^{-1/2}(\partial D)$  et  $g \in H_0^{1/2}(\partial \Omega)$

$$(\mathcal{L} + \mathcal{K} + \mathcal{T}T_{1,\Omega})[\varphi^+] = \mathcal{T}[g]. \quad (2.62)$$

On s'intéresse alors aux conditions suffisantes pour que l'opérateur intégral  $\mathcal{L} + \mathcal{K} + \mathcal{T}T_{1,\Omega}$  soit Fredholm d'indice zéro. On sait d'après la Proposition 2.5.1 que  $\mathcal{T}$  est un opérateur compact de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ . Ainsi il suffit d'étudier le caractère Fredholm de l'opérateur  $\mathcal{L} + \mathcal{K}$ .

**Proposition 2.5.12.** *On suppose que les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 sont vraies. Étudier le caractère Fredholm de l'opérateur  $\mathcal{L} + \mathcal{K}$  est équivalent à étudier celui de l'opérateur  $L_0 : H_0^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  défini par*

$$L_0 = \lambda I_0 - K_0^*, \quad (2.63)$$

où

$$\forall x \in \partial D, \quad \lambda(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_- + \gamma_{\partial D} \sigma_+}{\gamma_{\partial D} \sigma_- - \gamma_{\partial D} \sigma_+} \right) (x).$$

*Démonstration.* En utilisant l'équation (2.60) on peut affirmer que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (I_0 + S_{D^-}^{-1} S_{D^+}) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_-}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} \right) I_0 + Q_6,$$

avec  $Q_6$  un opérateur compact de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$  et  $I_0$  est l'injection naturelle de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ . En utilisant la Proposition 2.5.11, sachant qu'on a supposé que les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 sont vraies, on obtient pour  $\varphi \in H_0^{-1/2}(\partial D)$  que

$$(\mathcal{L} + \mathcal{K})[\varphi] = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_-}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} \right) I_0[\varphi] + K_0^* \left[ \left( 1 - \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_-}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} \right) \varphi \right] + C[\varphi],$$

où  $C$  est un opérateur compact de  $H_0^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ . Comme l'opérateur de multiplication  $\left( 1 - \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_-}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} \right)$  est inversible ( $\sigma_+ \neq \sigma_-$ ) il vient

$$(\mathcal{L} + \mathcal{K})[\varphi] = - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_- + \gamma_{\partial D} \sigma_+}{\gamma_{\partial D} \sigma_- - \gamma_{\partial D} \sigma_+} \right) I_0 - K_0^* \right) \left[ \left( 1 - \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_-}{\gamma_{\partial D} \sigma_+} \right) \varphi \right] + C[\varphi].$$

Comme ajouter un opérateur compact à un opérateur ne modifie pas l'indice Fredholm de ce dernier (voir Corollaire 5.12 dans [KMK89]), on se ramène à l'étude de l'opérateur  $L_0 : H_0^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$

$$L_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{\partial D} \sigma_- + \gamma_{\partial D} \sigma_+}{\gamma_{\partial D} \sigma_- - \gamma_{\partial D} \sigma_+} \right) I_0 - K_0^* = \lambda I_0 - K_0^*.$$

□

Le Théorème 2.3.1 est une conséquence des Propositions 2.4.11, 2.5.1 et 2.5.12. Il reste alors à étudier l'opérateur  $L_0$  pour déterminer sous quelles conditions cet opérateur est Fredholm d'indice zéro, ce qui fait l'objet de la partie suivante.

## 2.6 Inversibilité de l'équation intégrale

Pour étudier  $L_0 : H_0^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  on va se contenter de l'étudier comme un opérateur de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ . Pour cela il est nécessaire d'introduire  $M_\lambda$  l'opérateur de multiplication par  $\lambda(x)$  et de prouver que  $M_\lambda$  est bien défini comme un opérateur  $H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$ .

**Lemme 2.6.1.** *Sachant que  $\lambda \in L^\infty(\partial D)$ , les affirmations suivantes sont vraies :*

- $M_\lambda : H^{1/2}(\partial D) \rightarrow H^{1/2}(\partial D)$  est un opérateur borné,
- $M_\lambda : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$  est un opérateur borné.

*Démonstration.* On s'intéresse d'abord à l'opérateur de multiplication  $u \mapsto \lambda u$  de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  et on montre que pour  $u \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{H^1(\Omega)} &= \|\lambda u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(\lambda u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u \nabla \lambda\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u \nabla \lambda\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on prouve aussi

$$\|u \nabla \lambda\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{2/\alpha}(\Omega)} \|\nabla \lambda\|_{L^{2/(1-\alpha)}(\Omega)}.$$

Comme  $\nabla \lambda \in H^1(\Omega)$  et  $u \in H^1(\Omega)$  on en déduit que

$$\|\lambda u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\lambda \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

et donc que  $u \mapsto \lambda u$  de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  est borné.

Soit  $E : H^{1/2}(\partial D) \rightarrow H^1(\Omega)$  un opérateur d'extension bornée, on vérifie facilement que  $M_\lambda : H^{1/2}(\partial D) \rightarrow H^{1/2}(\partial D)$  est tel que  $M_\lambda u = \gamma_{\partial D}(\lambda E(u))$  et par composition d'opérateurs bornés on en déduit qu'il est lui-même borné.

$M_\lambda$  est bien défini au sens des distributions de la manière suivante avec  $f \in H^{-1/2}(\partial D)$  et  $h \in H^{1/2}(\partial D)$  :

$$\langle \lambda(x)f(x), h(x) \rangle_{-1/2,1/2} = \langle f(x), \lambda(x)h(x) \rangle_{-1/2,1/2},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1/2,1/2}$  est le crochet de dualité de  $H^{-1/2}(\partial D)$ ,  $H^{1/2}(\partial D)$ . Comme l'opérateur  $\lambda(x)h(x)$  est bien défini de  $H^{1/2}(\partial D)$  dans  $H^{1/2}(\partial D)$  on en déduit que  $\lambda(x)f(x)$  est bien défini de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ .  $\square$

On peut alors énoncer le théorème principal qui discute du caractère Fredholm de l'opérateur  $L_0$ .

**Théorème 2.3.2.** En admettant que les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 sont vraies on peut affirmer que si l'image de  $\lambda(x)$  n'intersecte pas le spectre essentiel de l'opérateur de Poincaré-Neumann  $K_0^*$  alors  $L_0$  est Fredholm d'indice zéro.

*Démonstration.* Par définition du spectre essentiel,  $L_0$  est Fredholm d'indice zéro si et seulement si  $0 \notin \sigma_{ess}(L_0)$ . Examinons alors le spectre essentiel de  $L_0 = \lambda I - K_0^*$ . Il est prouvé dans le Corollaire 3.3 de [Ros56] et dans [ACJ12, LR59] que le spectre essentiel de deux opérateurs  $A$  et  $B$  qui commutent satisfait  $\sigma_{ess}(A + B) \subset \sigma_{ess}(A) + \sigma_{ess}(B) = \{a + b, a \in \sigma_{ess}(A), b \in \sigma_{ess}(B)\}$ . Nous devons donc juste vérifier que  $K_0^*$  et  $M_\lambda$  commutent. Écrivons pour  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial D)$

$$K_0^*[\lambda\varphi] - \lambda(y)K_0^*[\varphi] = \int_{\partial D} (\lambda(x) - \lambda(y)) \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{|x - y|^2} \varphi(x) ds(x).$$

Comme  $\lambda \in C^{0,\alpha}$  on en déduit que l'opérateur intégral dans le terme de droite est compact de  $H^{-1/2}(\partial D)$  dans  $H^{-1/2}(\partial D)$ . Ainsi  $K_0^*$  et  $M_\lambda$  commutent modulo un opérateur compact, ce qui est suffisant d'après le Théorème 1.2.8 (un opérateur compact n'ayant pas de spectre essentiel). Donc nous obtenons

$$\sigma_{ess}(\lambda I - K_0^*) \subset \sigma_{ess}(M_\lambda) - \sigma_{ess}(K_0^*) = \{m - k, m \in \sigma_{ess}(M_\lambda), k \in \sigma_{ess}(K_0^*)\}.$$

D'après le Théorème 4.3 dans [BM09] on sait que le spectre essentiel de  $M_\lambda$  est égal à l'image essentielle de  $\lambda(x)$  définie par

$$\mathcal{I}_e(\lambda) = \{y \in \mathbb{R}, \forall \eta > 0, \mu(\{x : |\lambda(x) - y| < \eta\}) > 0\}, \quad (2.64)$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue. Ici  $\lambda \in H^{\frac{1}{2}+\alpha}(\partial D) \subset C^{0,\alpha}(\partial D)$ , donc le spectre essentiel de  $M_\lambda$  est simplement l'image de la fonction  $\lambda(x)$ . Finalement on peut énoncer que  $L_0$  est Fredholm indice zéro sous la condition suffisante que l'image de  $\lambda(x)$  n'intersecte pas  $\sigma_{ess}(K_0^*)$  car dans ce cas  $0 \notin \sigma_{ess}(\lambda I - K_0^*)$ .  $\square$

**Remarque 2.6.2.** Le spectre essentiel de  $K_0^*$  est tel que [Cos15]

- $\sigma_{ess}(K_0^*) = \{0\}$  pour un bord  $\partial D$  de régularité  $\mathcal{C}^1$ .
- Pour un bord  $\partial D$  de régularité lipschitzienne on a  $\sigma_{ess}(K_0^*) \subset ]-r_0, r_0[ \subset ]-1/2, 1/2[$ . Plus précisément il est prouvé dans [PP14] que pour un bord polygonal dont les angles sont notés  $0 < \theta_j < \pi$  pour  $1 \leq j \leq N$  (et vérifiant  $\sum_{j=1}^N (\pi - \theta_j) + \pi + \theta_N \leq 2\pi$ ) alors  $\sigma_{ess}(K_0^*) \subset ]-r_0, r_0[$  avec  $r_0 = \max_{1 \leq j \leq N} (1 - \theta_j/\pi) \leq 1/2$ .

**Remarque 2.6.3.**

- Pour un bord de régularité  $\mathcal{C}^1$  le spectre essentiel  $\sigma_{ess}(K_0^*)$  se réduit à l'ensemble  $\{0\}$  et le Théorème 2.3.2 s'écrit alors : si  $\frac{\gamma_{\partial D} \sigma_+}{\gamma_{\partial D} \sigma_-} \neq -1$  sur  $\partial D$  alors  $L_0$  est Fredholm d'indice zéro.
- Le Théorème 2.3.2 reste vrai lorsque l'image de  $\lambda(x)$  est remplacée par l'image essentielle de  $\lambda(x)$  définie dans (2.64). Dans notre cas l'image essentielle de  $\lambda$  est simplement son image. Cependant cela suggère que l'on pourrait améliorer notre résultat en requérant une régularité plus faible sur les coefficients  $\sigma_\pm$  telle que l'image essentielle de  $\lambda$  ne soit plus simplement son image. Si on suppose que le Théorème 2.3.2 est toujours vrai pour  $\sigma_\pm \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ , alors  $L_0$  reste Fredholm d'indice zéro lorsque  $\lambda(x)$  appartient à  $\sigma_{ess}(K_0^*)$  pour  $x$  dans n'importe quel ensemble dont la mesure de Lebesgue est nulle. En d'autres termes il serait permis d'avoir des valeurs critiques de  $\lambda$  sur un ensemble dénombrable de points où le problème serait localement mal-posé mais serait toujours globalement bien-posé au sens Fredholm. De plus pour un bord de régularité  $\mathcal{C}^1$  le Théorème 2.3.2 s'écrirait : si  $\frac{\gamma_{\partial D} \sigma_+}{\gamma_{\partial D} \sigma_-} \neq -1$  presque partout alors  $L_0$  est Fredholm indice zéro. Cependant il y a peu d'espoir que les Conjectures 2.5.2 et 2.5.7 restent vraies lorsque  $\sigma_\pm \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  à cause d'un manque de régularité pour prouver la compacité de certains opérateurs.

## Conclusion

Le Théorème 2.3.2 stipule que le problème (2.1) est Fredholm sous une certaine condition et en faisant l'hypothèse d'un bord  $\partial D$  lipschitzien avec des coefficients de permittivité dans l'espace  $H^2(\Omega)$ . Cette condition fait intervenir les valeurs des coefficients  $\sigma_{\pm}$  localement à l'interface  $\partial D$  et le spectre essentiel de l'opérateur de Poincaré-Neumann pour le laplacien, ce dernier ne dépendant que de la géométrie de l'interface. Comme cette condition a la particularité d'être locale à l'interface cela confirme l'idée physiquement intuitive que les valeurs de  $\sigma_{\pm}$  loin du bord  $\partial D$  n'ont pas d'influence sur le caractère Fredholm du problème (2.1).

---

---

## CHAP. 3

---

# APPROXIMATION NUMÉRIQUE DU PRINCIPE VARIATIONNEL DE POINCARÉ

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>2.2</b>	<b>Contexte</b> . . . . .	<b>55</b>
2.2.1	Géométrie du problème et notations . . . . .	55
2.2.2	Problème . . . . .	56
<b>2.3</b>	<b>Résultat principal</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>2.4</b>	<b>Équation intégrale</b> . . . . .	<b>58</b>
2.4.1	Résultats classiques de la théorie du potentiel . . . . .	58
2.4.2	Formule de représentation . . . . .	65
<b>2.5</b>	<b>Preuve du Théorème 2.3.1</b> . . . . .	<b>67</b>
2.5.1	Singularité des potentiels de simple couche . . . . .	68
2.5.2	Singularité des opérateurs de Poincaré-Neumann . . . . .	74
2.5.3	Singularité de l'opérateur intégral . . . . .	82
<b>2.6</b>	<b>Inversibilité de l'équation intégrale</b> . . . . .	<b>83</b>

---

### 3.1 Introduction

L'opérateur de Poincaré-Neumann défini dans 1.5 intervient, entre autres, dans l'étude des problèmes de transmission pour l'équation de conduction où la conductivité change de signe à l'interface. Le caractère bien posé de ce problème est intimement lié au spectre de l'opérateur de Poincaré-Neumann. Ce dernier ne dépend, par définition, que de la géométrie du problème et dans certains cas simples on peut déterminer son spectre explicitement [Kan15]. Pour un cercle on rappelle que son spectre est réduit à  $\{0\}$ . Dans le cas d'une ellipse de grand axe  $a$  et de petit axe  $b$ , les valeurs propres sont

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

On peut également déterminer explicitement les valeurs propres lorsque le domaine est un ellipsoïde ou une boule de  $\mathbb{R}^3$ .

En général on ne connaît pas explicitement le spectre de l'opérateur de Poincaré-Neumann et on peut recourir à des méthodes numériques pour le calculer. Dans [BTT16] le spectre de l'opérateur de Poincaré-Neumann est calculé à l'aide du principe du min-max pour deux inclusions proches. On peut également construire un équivalent discrétisé de cet opérateur à partir de sa définition variationnelle 1.3.1 et calculer son spectre avec des méthodes d'éléments finis classiques. Cependant on dispose pas de résultat général garantissant que les valeurs propres calculées numériquement avec ces méthodes d'éléments finis convergent vers les valeurs propres théoriques de l'opérateur lorsque la finesse du maillage augmente. En effet, lorsque l'opérateur de Poincaré-Neumann est compact les méthodes classiques d'approximation du spectre [BO91, Bof10, DAA<sup>+</sup>99] permettent d'obtenir la convergence du spectre sous-résolve que la famille des opérateurs discrétisés soit collectivement compacte. Divers travaux ont été effectués sur la convergence des méthodes de Galerkin pour les problèmes de transmission pour l'équation de conduction où l'opérateur de Poincaré-Neumann intervient naturellement. Dans [DCJZ10], les auteurs développent la méthode de la  $T$ -coercivité pour une interface polygonale et il est prouvé que si le contraste est assez grand le problème est bien posé. Du point de vue numérique on peut utiliser la méthode de la  $T$ -coercivité en rajoutant une hypothèse sur le maillage et prouver le caractère bien posé du problème de Galerkin conforme. Dans [NV11], les auteurs utilisent la technique de la  $T$ -coercivité pour une interface polygonale et prouvent que le problème de transmission est bien posé si le contraste est assez grand mais sans condition particulière sur le maillage. De plus la méthode de Galerkin conforme est bien posée dans ce contexte et les auteurs énoncent une estimation d'erreur *a posteriori* entre  $u$  et  $u_h$  ce qui garantit la convergence de la résolvante. Dans [DCC18] les auteurs

étudient, à l'aide de la  $T$ -coercivité la convergence des méthodes d'éléments finis pour le problème de transmission pour les interface polygonales (avec des coins). Ils établissent des estimations d'erreur optimales lorsque le contraste est assez grand pour que le problème soit bien posé.

Dans ce chapitre on se propose d'abord de construire un équivalent discrétisé  $T_h$  de l'opérateur de Poincaré-Neumann continu  $T_D$  à partir de sa définition variationnelle 1.3.1. Puis on construit une transformation permettant de comparer le spectre de ces deux opérateurs. L'étape suivante consiste alors à comparer le spectre de ces deux opérateurs afin d'obtenir un résultat de convergence des valeurs propres de l'opérateur discrétisé  $T_h$  vers celles de l'opérateur continu  $T_D$ . Notre idée pour démontrer ce résultat de convergence était d'utiliser le principe du min-max. Cependant cette approche ne permet pas de conclure directement comme expliqué dans la Remarque 3.4.7. Ce résultat est donc laissé sous forme de conjecture, à savoir la Conjecture 3.2.1. En admettant cette conjecture on prouvera la convergence de la résolvante du problème discrétisé vers celle du problème continu. Pour finir on formulera la même conjecture dans le cas d'un domaine non-borné.

## 3.2 Résultats

On se place dans un domaine borné  $\Omega$  et on suppose qu'il contient un sous-domaine  $D$  de bord régulier  $C^2$ . On commence par définir une version discrète de l'opérateur de Poincaré-Neumann variationnel. Pour cela on équipe le domaine  $\Omega$ , dont le bord est supposé polyédrique, d'un maillage triangulaire  $\mathcal{T}_h = \{T_k\}_{k=1, \dots, N_h}$ , le paramètre  $h$  décrivant la taille des triangles, plus précisément  $h$  est la longueur maximale des arêtes du maillage  $\mathcal{T}_h$ . Pour des raisons de simplicité on fait l'hypothèse non-essentielle que  $\mathcal{T}_h$  est conforme avec le domaine  $\Omega$  et qu'il est aussi conforme au domaine  $D$ , c'est à dire qu'il contient une discrétisation de  $D$  notée  $D_h$ . On suppose aussi que la triangulation est régulière, c'est à dire que pour tout triangle  $T_k \in \mathcal{T}_h$  le ratio  $|T_k|/h$  est borné par une constante indépendante de  $T_k$  et de  $h$  où  $|T_k|$  désigne le volume du triangle. On suppose aussi que le maillage du bord  $\partial D$  noté  $\partial D_h$  en fait une bonne approximation, plus précisément :

$$\text{Tout les sommets du bord polygonal } \partial D_h \text{ sont sur } \partial D, \quad (3.1)$$

Soit  $V_h$  l'ensemble des fonctions affines par morceaux sur le maillage  $\mathcal{T}_h$  :

$$V_h = \{u_h \in H_0^1(\Omega), \quad u_h|_{T_k} \text{ est affine pour } k = 1, \dots, N_h\},$$

et on note

$$V_h^0 = \{u_h \in V_h, \quad u_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On équipe l'espace  $V_h$  du produit scalaire de  $H_0^1(\Omega)$  défini dans (1.14). On définit alors  $T_h : V_h \rightarrow V_h$  tel que pour tout  $u_h \in V_h$ ,  $T_h u_h$  est l'unique élément de  $V_h$  vérifiant :

$$\forall v_h \in V_h, \int_{\Omega} \nabla(T_h u_h) \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{D_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx. \quad (3.2)$$

L'existence et l'unicité de  $T_h$  sont les conséquences du Théorème de Riesz. On note  $(\lambda_k^\pm)_{k \geq 1}$  les valeurs propres de l'opérateur  $T_D$  et  $(\lambda_{k,h}^\pm)_{k=1, \dots, N_h}$  celles de l'opérateur  $T_h$ , où la numérotation est celle présentée dans 1.27 et 1.28. On peut alors conjecturer que les valeurs propres de l'opérateur discrétisé  $T_h$  convergent vers celles de l'opérateur  $T_D$  défini dans 1.3.1 lorsque  $h$  tend vers 0, c'est l'objet de la Conjecture 3.2.1.

**Conjecture 3.2.1.** Les valeurs propres de l'opérateur discrétisé  $T_h$  convergent vers celles de l'opérateur continu  $T_D$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . En d'autres termes pour tout  $1 \leq k \leq N_h$  on a

$$|\lambda_{k,h}^\pm - \lambda_k^\pm| \leq C_k h,$$

où la constante  $C_k$  dépend de l'indice  $k$ .

Nous n'avons pas réussi à démontrer entièrement cette conjecture, cependant ce chapitre propose une méthode prometteuse comme expliqué dans la Remarque 3.4.7.

On s'intéresse maintenant à la convergence de la résolvante. Soit  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $g \in H_0^1(\Omega)$  le représentant de Riesz associé. Pour un certain  $\lambda \notin \sigma(T_D)$  on considère l'unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème suivant

$$\lambda u - T_D u = g. \quad (3.3)$$

Soit  $\lambda_h$  une suite réelle telle que  $\lambda_h \rightarrow \lambda$  lorsque  $h \rightarrow 0$  et  $g_h \in H_0^1(\Omega)$  une suite de discrétisation de  $g$  vérifiant

$$\|g - g_h\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0; \quad (3.4)$$

On pourra, par exemple, prendre  $g_h$  comme l'interpolation affine par morceaux de  $g$ . En admettant la Conjecture 3.2.1 on sait que l'équation

$$\lambda_h u_h - T_h u_h = g_h \quad (3.5)$$

admet une unique solution dans  $V_h$  pour  $h$  assez petit. On souhaite prouver la convergence de l'opérateur résolvant discret, à savoir  $(\lambda_h Id - T_h)^{-1}$ , vers l'opérateur résolvant continu  $(\lambda Id - T_D)^{-1}$ . En d'autres termes on peut prouver la convergence de  $u_h$  vers  $u$  sous réserve d'admettre la Conjecture 3.2.1. C'est l'objet du théorème suivant.

**Théorème 3.2.2.** En admettant la Conjecture 3.2.1 on peut affirmer qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  tel que

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(|\lambda - \lambda_h| + \|g - g_h\|_{H_0^1(\Omega)} + h).$$

On peut formuler un résultat similaire à la Conjecture 3.2.1 lorsque le domaine est non-borné. En notant  $T_D^\infty$  l'opérateur de Poincaré-Neumann défini sur un domaine non-borné, introduit dans la Proposition 1.4.3 et en admettant qu'on arrive à construire un opérateur discrétisé  $\mathbb{T}_D^h$  associé (voir Section 3.6.3) on peut énoncer la conjecture suivante.

**Conjecture 3.2.3.** Les valeurs propres de l'opérateur discrétisé  $\mathbb{T}_D^h$  convergent vers celles de l'opérateur continu  $T_D^\infty$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . Plus précisément, pour tout  $1 \leq k \leq N_h$  et pour  $h$  assez petit on a

$$|\lambda_{k,h}^\pm - \lambda_k^\pm| \leq C_k h,$$

où la constante  $C_k$  dépend de l'indice  $k$ .

### 3.3 Étude préliminaire de l'opérateur de Poincaré-Neumann discrétisé

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux propriétés de l'opérateur  $T_h$ . La Proposition 3.3.1 est une version discrète de la Proposition 1.3.5 et décompose le spectre de  $T_h$  en isolant les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 1 d'un autre sous-espace noté  $\mathfrak{h}_h$  dans la proposition. Dès lors il reste à étudier l'opérateur  $T_h$  restreint à ce sous-espace. On omet la preuve de la Proposition 3.3.1 car celle-ci est quasi-identique à celle de la Proposition 1.3.5.

**Proposition 3.3.1.** L'espace  $V_h$  admet la décomposition orthogonale suivante :

$$V_h = \text{Ker}(T_h) \oplus \text{Ker}(I - T_h) \oplus \mathfrak{h}_h,$$

où :

- Le noyau  $\text{Ker}(T_h)$  s'écrit :

$$\text{Ker}(T_h) = \{u_h \in V_h, u_h = \text{constante sur } D_h\}. \quad (3.6)$$

- Le sous-espace propre  $\text{Ker}(I - T_h)$  est tel que :

$$\text{Ker}(I - T_h) = \left\{ u_h \in V_h, u_h = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \overline{D_h} \right\}. \quad (3.7)$$

- L'espace  $\mathfrak{h}_h$  est l'ensemble des fonctions  $u_h \in V_h$  qui satisfont les trois propriétés suivantes :

$$\forall v_h \in V_h^0(D_h), \int_{D_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = 0, \quad (3.8)$$

$$\forall v_h \in V_h^0(\Omega \setminus \overline{D_h}), \int_{\Omega \setminus \overline{D_h}} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = 0, \quad (3.9)$$

$$\int_{\Omega \setminus \overline{D_h}} \nabla u_h \cdot \nabla w_h^0 \, dx = 0, \quad (3.10)$$

où  $w_h^0$  l'unique fonction de  $V_h$  tel que  $w_h = 1$  sur les sommets du maillage de  $\overline{D_h}$  noté  $\mathcal{T}_h(\overline{D_h})$ , et vaut 0 ailleurs.

**Remarque 3.3.2.** Les propriétés (3.8) et (3.9) sont les versions discrètes des conditions d'harmonicité de la Proposition 1.3.5, à savoir  $-\Delta u = 0$  sur  $D$  et  $-\Delta u = 0$  sur  $\Omega \setminus \overline{D}$  respectivement. La propriété (3.10) est quant à elle la version discrète de la propriété  $\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_+ \, ds = 0$ .

On définit l'ensemble des potentiels de simple couche discret par

$$SL_h = \{ u_h \in V_h, u_h \text{ vérifie (3.8) et (3.9)} \}. \quad (3.11)$$

Il s'agit de la version discrète de l'ensemble  $SL_D$  défini dans (1.19). Le premier résultat dont on dispose sur l'opérateur discret  $T_h$  est le suivant.

**Lemme 3.3.3.** Soit  $u \in H_0^1(\Omega)$ , on considère une suite  $u_h \in V_h$  telle que  $u_h \rightarrow u$  fortement dans  $H_0^1(\Omega)$ . Alors  $T_h u_h \rightarrow T_D u$  fortement dans  $H_0^1(\Omega)$ .

*Démonstration.* On note  $\Pi_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h(\Omega)$  l'opérateur de projection de Galerkin tel que pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\Pi_h u$  est l'unique élément de  $V_h(\Omega)$  vérifiant :

$$\forall v_h \in V_h(\Omega), \int_{\Omega} \nabla(\Pi_h u) \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_h \, dx.$$

Tout d'abord on observe que

$$\|T_h u_h - T_D u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\Pi_h T_D u - T_D u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|T_h u_h - \Pi_h T_D u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Sachant que pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\Pi_h u \rightarrow u$  fortement dans  $H_0^1(\Omega)$  lorsque  $h \rightarrow 0$ , il ne reste qu'à prouver que  $\|T_h u_h - \Pi_h T_D u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$ , ce qui est l'objet de la suite de cette preuve. Soit  $v_h \in V_h(\Omega)$ , alors on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(\Pi_h T_D u) \cdot \nabla v_h \, dx &= \int_{\Omega} \nabla(T_D u) \cdot \nabla v_h \, dx = \int_D \nabla u \cdot \nabla v_h \, dx, \\ \int_{\Omega} \nabla(T_h u_h) \cdot \nabla v_h \, dx &= \int_{D_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx. \end{aligned}$$

Par soustraction des deux dernières égalités on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(\Pi_h T_D u - T_h u_h) \cdot \nabla v_h \, dx &= \int_D \nabla u \cdot \nabla v_h \, dx - \int_{D_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx, \\ &= \int_{D \setminus \overline{D_h}} \nabla u \cdot \nabla v_h \, dx - \int_{D_h \setminus \overline{D}} \nabla u \cdot \nabla v_h \, dx \\ &\quad + \int_{D_h} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v_h \, dx. \end{aligned}$$

En prenant  $v_h = \Pi_h T_D u - T_h u_h$  et à l'aide de l'inégalité de Cauchy Schwarz on a :

$$\|\Pi_h T_D u - T_h u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(D \setminus \Delta D_h)} + \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui conclut cette démonstration.  $\square$

### 3.4 Convergence du spectre

L'objectif de cette partie est proposer une preuve partielle de la Conjecture 3.2.1 qui stipule que les valeurs propres de l'opérateur discrétisé  $T_h$  convergent vers celles de l'opérateur  $T_D$  lorsque  $h$  tend vers 0. Une des difficultés pour prouver cette conjecture consiste à pouvoir comparer les opérateurs  $T_D$  et  $T_h$  afin de comparer leur spectre. En effet  $T_h$  est défini sur le domaine  $D_h$  et l'opérateur  $T_D$  sur  $D$ . La stratégie que nous proposons pour dépasser cette difficulté est la suivante :

- i On construit un difféomorphisme qui envoie le domaine discrétisé  $D_h$  sur le domaine continu  $D$ . Plus précisément on construit un difféomorphisme lipschitzien noté  $p_h : \Omega \rightarrow \Omega$  tel que  $p_h$  envoie  $D_h$  sur  $D$  et  $p_h \equiv \text{Id}$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{U}_r$ , où  $\mathcal{U}_r := \{x \in \Omega, d(x, \partial D) < r\}$  est un voisinage tubulaire d'épaisseur  $2r > 0$  autour du bord  $\partial D$ . De plus nous allons préciser le comportement de  $p_h$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

- ii On effectue ensuite un changement de variables pour transformer l'opérateur  $T_h$  en un opérateur  $\widetilde{T}_h$  qui agit sur l'espace d'éléments finis déformés par  $p_h$ . On vérifie également que l'opérateur  $\widetilde{T}_h$  possède le même spectre que  $T_h$ . Ainsi on va pouvoir comparer  $T_D$  qui est défini sur le domaine  $D$  avec  $\widetilde{T}_h$  qui est aussi défini sur  $D$ .
- iii On peut maintenant comparer les valeurs propres de  $T_h$  et celles de  $T_D$  à travers celles  $\widetilde{T}_h$ . L'idée que nous avons exploré pour prouver la convergence des valeurs propres s'appuie sur le principe du min-max. Cependant cette approche ne fonctionne pas directement comme expliqué dans la Remarque 3.4.7. C'est donc l'étape manquante pour compléter la preuve de la Conjecture 3.2.1.

En guise de préliminaires nous allons d'abord introduire quelques outils géométriques utiles à la démonstration partielle de la Conjecture 3.2.1.

### 3.4.1 Quelques résultats géométriques sur $D$ et son approximation $D_h$

On rappelle qu'on a supposé que le domaine  $D$  est au moins de régularité  $C^2$ . Pour un point  $p \in \partial D$  on note  $n(p)$  la normale au bord  $\partial D$  au point  $p$  et orientée extérieurement. On note  $\tau(p)$  le vecteur tangent associé tel que  $(n(p), \tau(p))$  forme une base directe orthonormée de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $r > 0$ , on définit un voisinage tubulaire  $\mathcal{U}_r$  de la frontière  $\partial D$  et de d'épaisseur  $2r$  par

$$\mathcal{U}_r := \{x \in \mathbb{R}^2, d(x, \partial D) < r\}.$$

Alors il existe un  $r > 0$  tel que l'application

$$\partial D \times (-r, r) \rightarrow \mathcal{U}_r, (p, s) \mapsto p + sn(p),$$

soit un difféomorphisme (voir [HP06], Proposition 5.4.14). L'application inverse est alors donnée par

$$\mathcal{U}_r \rightarrow \partial D \times (-r, r), x \mapsto (p_{\partial D}(x), d(x, \partial D)),$$

où  $d(x, \partial D)$  est la distance euclidienne signée de  $x$  au bord  $\partial D$ . désigne la distance d'un point  $x$  au bord  $\partial D$  et où la projection  $p_{\partial D} : \mathcal{U}_r \rightarrow \partial D$  est définie par

$$p_{\partial D}(x) = \arg \min_{p \in \partial D} |x - p|.$$

L'application  $p_{\partial D}$  est bien définie, dérivable sur  $\mathcal{U}_r$  et on rappelle l'expression de son gradient exprimé dans la base locale  $(\tau(p), n(p))$  :

$$\forall x \in \mathcal{U}_r, \nabla p_{\partial D}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+d(x,\partial D)\kappa(p_{\partial D}(x))} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

avec  $\kappa(p)$  désignant la courbure au point  $p \in \partial D$  (correctement définie car  $\partial D$  est au moins de régularité  $C^2$ ). Pour un point  $y \in \partial D$  on note

$$\text{ray}_{\partial D}(y) = \{x \in \mathcal{U}_r, p_{\partial D}(x) = y\}$$

le rayon émergent de  $y$ , c'est à dire l'ensemble des points de  $\mathcal{U}_r$  dont la projection sur  $\partial D$  par l'application  $p_{\partial D}$  est le point  $y$ . On étend la notation  $\text{ray}_{\partial D}$  pour un point  $x \in \mathcal{U}_r$  en notant  $\text{ray}_{\partial D}(x) = \text{ray}_{\partial D}(p_{\partial D}(x))$ .

Le lemme suivant permet alors de comparer le domaine  $D$  avec son approximation  $D_h$ .

**Lemme 3.4.1.** *Nous disposons des deux estimations suivantes :*

1. *Il existe une constante  $C > 0$  qui ne dépend que de la géométrie de  $\partial D$  tel que*

$$\forall x \in \partial D_h, d(x, \partial D) \leq Ch^2.$$

2. *Il existe une constante  $\tilde{C} > 0$  qui ne dépend que de la géométrie de  $\partial D$  tel que*

$$\forall x \in \partial D_h, |n_h(x) - n(p_{\partial D}(x))| \leq \tilde{C}h,$$

*où  $n_h$  désigne la normale au bord  $\partial D_h$  orientée extérieurement.*

*Démonstration.* Ces deux estimations sont les conséquences directes de la régularité de  $\partial D$  et de l'hypothèse (3.1). □

### 3.4.2 Construction de l'opérateur $p_h$

La construction de l'opérateur  $p_h$  est analogue à celle développée dans [Chr02] Propositions 1.4.2 et 1.4.3. Pour des raisons de simplicité on construira l'opérateur  $p_h$  en dimension deux mais la méthode employée s'adapte très bien en dimension trois, bien qu'elle soit plus laborieuse à écrire.

Tout d'abord, pour un point  $x \in \mathcal{U}_r$  on note  $\delta_h(x) \in (-r, r)$  l'unique valeur (voir Figure 3.1) tel que

$$p_{\partial D}(x) + \delta_h(x)n(p_{\partial D}(x)) \in \partial D_h.$$

Cette valeur correspond à la distance entre  $\partial D$  et  $\partial D_h$  le long du rayon généré par  $x$ . Par définition  $\delta_h(x)$  est constante pour tout les points appartenant au même rayon. Autrement dit  $\delta_h$  est une fonction constante sur les ensembles du type  $\text{ray}_{\partial D}(y)$  avec  $y \in \partial D$ . L'existence de  $\delta_h(x)$  est assurée dès lors que  $h$  est suffisamment petit car dans ce cas les arêtes de  $\partial D_h$  sont une "bonne" approximation de  $\partial D$ . Comme  $p_{\partial D}$  est différentiable on peut prouver que la fonction  $\delta_h(x)$  l'est aussi à l'aide du théorème des fonctions implicites. On va maintenant s'employer à définir  $p_h$

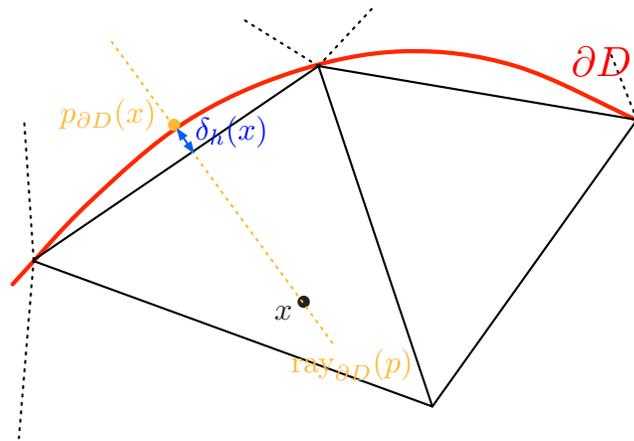


FIGURE 3.1 – Illustration des notations de la Section 3.4.2.

sur chaque ensemble de la forme  $\text{ray}_{\partial D}(y)$  où  $y \in \partial D$ . On souhaite qu'un point  $x$  de  $\partial D_h$  soit envoyé sur  $\partial D$ , c'est à dire qu'on veut lui retrancher la quantité  $\delta_h(x)n(p_{\partial D}(x))$ . De plus on souhaite que les points  $\partial \mathcal{U}_r$  restent inchangés. Le long d'un rayon cela correspond à définir l'unique polynôme  $P(s)$  du second-degré vérifiant

$$\begin{cases} P(-r) = -r, \\ P(\delta) = 0, \\ P(r) = r, \end{cases} \quad \text{c'est à dire } P(s) = s - \frac{\delta}{\delta^2 - r^2}(s^2 - r^2),$$

où  $\delta$  est la valeur de  $\delta_h$  constante sur ce rayon et  $s$  représente le distance signée à  $\partial D$  des points le long du rayon. Ce polynôme correspond au comportement que l'on souhaite avoir pour  $p_h$  le long des rayons  $\text{ray}_{\partial D}(y)$  pour  $y \in \partial D$ . En effet on impose qu'en  $\pm r$ , c'est à dire au bord de  $\mathcal{U}_r$ ,  $p_h$  se comporte comme l'identité. De plus pour un point sur  $D_h$ , c'est à dire pour lequel  $s = \delta$  alors on a  $P(s) = 0$  ce qui signifie que  $P(s)$  est sur  $\partial D$ . En s'inspirant de la définition de  $p_h$  le long d'un rayon

avec le polynôme  $P$  on peut alors définir :

$$p_h(x) = \begin{cases} x - \frac{\delta_h(x)}{\delta_h^2(x) - r^2} (d(x, \partial D)^2 - r^2) n(p_{\partial D}(x)) & \text{si } x \in \mathcal{U}_r, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application  $p_h$  est bien définie et différentiable sur  $\Omega$ . La Proposition 3.4.2 s'intéresse aux propriétés de  $p_h$ .

**Proposition 3.4.2.** *L'application  $p_h$  appartient à l'espace  $W^{1,\infty}(\Omega)^d$  et on dispose de plus des estimations suivantes :*

$$\|p_h - \text{Id}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2, \text{ et } \|\nabla p_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \leq Ch.$$

*Démonstration.* On se concentre d'abord sur l'estimation de  $p_h - \text{Id}$ . Pour tout point  $x \in \mathcal{U}_r$  on a

$$|p_h(x) - x| = \left| \frac{\delta_h(x)}{\delta_h^2(x) - r^2} (d(x, \partial D)^2 - r^2) n(p_{\partial D}(x)) \right|.$$

De plus pour  $x \in \mathcal{U}_r$  on sait que  $|d_{\partial D}^2(x) - r^2| \leq 2r^2$  et que  $|\delta_h^2(x) - r^2|$  est bornée inférieurement à condition que  $r$  soit suffisamment grand pour que  $\mathcal{U}_r$  contiennent tout les sommets de  $\partial D_h$ . Ainsi on récupère l'inégalité

$$|p_h(x) - x| \leq C|\delta_h(x)|.$$

Il reste alors à estimer la quantité  $\delta_h$  et comme elle est constante le long des rayons on se limitera à la considérer sur  $\partial D$ . Soit  $y \in \partial D$ , alors par définition  $x := y + \delta_h(y)n(y)$  est sur le bord  $\partial D_h$ . Comme  $y = p_{\partial D}(x)$  on a  $d(x, \partial D) = |x - y|$  et donc en utilisant le Lemme 3.4.1 on obtient

$$|\delta_h(y)| = |x - y| \leq Ch^2.$$

Ceci prouve l'estimation sur  $p_h - \text{Id}$ .

On s'intéresse maintenant à l'estimation sur  $\nabla p_h - I$ . Pour  $x \in \mathcal{U}_r$  on a

$$|\nabla p_h(x) - I| = |\nabla(\delta_h(x)s(x))| = |s(x)\nabla\delta_h(x) + \delta_h(x)\nabla s(x)|,$$

avec  $s(x) := \frac{d_{\partial D}^2(x) - r^2}{\delta_h^2(x) - r^2} n(p_{\partial D}(x))$ . On observe d'abord que  $s$  and son gradient sont bornés sur  $\mathcal{U}_r$ , donc il ne reste qu'à estimer  $\nabla\delta_h$  sur  $\mathcal{U}_r$ . En utilisant le fait que  $\delta_h(x) = \delta_h(p_{\partial D}(x))$  on obtient

$$\nabla\delta_h(x) = \nabla\delta_h(p_{\partial D}(x))\nabla p_{\partial D}(x);$$

Connaissant le résultat (3.12) on a  $\frac{\partial \delta_h}{\partial n} = 0$  et donc il suffit de montrer que  $|\frac{\partial \delta_h}{\partial \tau}(y)| \leq Ch$  pour tout  $y \in \partial D$ . Pour cela on note  $d_D(x) = d(x, \partial D) = \delta_h(p_{\partial D}(x))$  pour tout  $x \in \partial D_h$ . En prenant  $y \in \partial D$  et  $x = y + \delta_h(y)n(y) \in \partial D_h$ , on remarque d'abord que le gradient de la distance au bord est  $\nabla d_D(x) = n(p_{\partial D}(x)) = n(y)$ , puis on peut écrire que

$$\nabla d_D(x)\tau_h(x) = \nabla \delta_h(y)\nabla p_{\partial D}(x)\tau_h(x) = \frac{\tau_h(x) \cdot \tau(y)}{1 + d(x, \partial D)\kappa(y)} \frac{\partial \delta_h}{\partial \tau}(y),$$

d'où

$$\frac{\partial \delta_h}{\partial \tau}(y) = \frac{(1 + d(x, \partial D)\kappa(y))}{\tau_h \cdot \tau(y)} (n(y) \cdot \tau_h(x)).$$

En utilisant le fait que, d'après le Lemme 3.4.1,  $\tau_h(x) = \tau(y) + \mathcal{O}(h)n(y)$  on a alors  $|n(y) \cdot \tau_h(x)| < Ch$  et on obtient le résultat souhaité.  $\square$

### 3.4.3 Changement de variables dans la définition de $T_h$

On a défini dans la Section 3.4.2 le difféomorphisme  $p_h$  qui envoie le domaine  $D_h$  sur le domaine  $D$ . On va maintenant l'utiliser pour effectuer un changement de variables dans la définition de  $T_h$  afin d'obtenir un opérateur agissant sur le maillage  $D_h$  après déformation par  $p_h$ .

**Proposition 3.4.3.** *En considérant la définition (3.2) de  $T_h$ , et en faisant un changement de variables par le difféomorphisme lipschitzien  $q_h := p_h^{-1}$  (voir [EG15]) on obtient*

$$\forall v_h \in V_h^0(\Omega), \quad \int_{\Omega} A_h \nabla((T_h u_h) \circ q_h) \cdot \nabla(v_h \circ q_h) dx = \int_D A_h \nabla(u_h \circ q_h) \cdot \nabla(v_h \circ q_h) dx,$$

où  $A_h = |\det \nabla q_h| \nabla q_h^{-1} \nabla q_h^{-t}$  est une matrice symétrique, définie et positive.

*Démonstration.* Par définition de  $T_h$  on a

$$\int_{\Omega} \nabla(T_h u_h) \cdot \nabla v_h dx = \int_{D_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx.$$

On effectue alors le changement de variables par  $q_h$  :

$$\begin{aligned} \int_{D_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx &= \int_{D=p_h(D_h)} |\det \nabla q_h| (\nabla u_h)(q_h(y)) \cdot (\nabla v_h)(q_h(y)) dy, \\ \int_{\Omega} \nabla(T_h u_h) \cdot \nabla v_h dx &= \int_{\Omega=p_h(\Omega)} |\det \nabla q_h| (\nabla(T_h u_h))(q_h(y)) \cdot (\nabla v_h)(q_h(y)) dy. \end{aligned}$$

Comme  $\nabla(u_h(q_h(y))) = \nabla q_h^t(y)(\nabla u_h)(q_h(y))$  on réécrit les intégrales précédentes :

$$\begin{aligned} \int_{D_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx &= \int_D |\det \nabla q_h| \nabla q_h^{-t} \nabla(u_h \circ q_h) \cdot \nabla q_h^{-t} \nabla(v_h \circ q_h) \, dx, \\ \int_{\Omega} \nabla(T_h u_h) \cdot \nabla v_h \, dx &= \int_{\Omega} |\det \nabla q_h| \nabla q_h^{-t} \nabla((T_h u_h) \circ q_h) \cdot \nabla q_h^{-t} \nabla(v_h \circ q_h) \, dx. \end{aligned}$$

En définissant  $R_u = \nabla(u_h \circ q_h)$ ,  $R_v = \nabla(v_h \circ q_h)$ ,  $Q = \nabla q_h^{-t}$  on observe que

$$\begin{aligned} \nabla q_h^{-t} \nabla(u_h \circ q_h) \cdot \nabla q_h^{-t} \nabla(v_h \circ q_h) &= QR_u \cdot QR_v \\ &= (QR_u)^t QR_v \\ &= R_u^t Q^t QR_v \\ &= (Q^t QR_u)^t R_v \\ &= (Q^t QR_u) \cdot R_v \\ &= \nabla q_h^{-1} \nabla q_h^{-t} \nabla(u_h \circ q_h) \cdot \nabla(v_h \circ q_h), \end{aligned}$$

et donc finalement on peut écrire que

$$\begin{aligned} \int_{D_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx &= \int_D |\det \nabla q_h| \nabla q_h^{-1} \nabla q_h^{-t} \nabla(u_h \circ q_h) \cdot \nabla(v_h \circ q_h) \, dx \\ &= \int_D A_h \nabla(u_h \circ q_h) \cdot \nabla(v_h \circ q_h) \, dx, \\ \int_{\Omega} \nabla(T_h u_h) \cdot \nabla v_h \, dx &= \int_{\Omega} |\det \nabla q_h| \nabla q_h^{-1} \nabla q_h^{-t} \nabla((T_h u_h) \circ q_h) \cdot \nabla(v_h \circ q_h) \, dx \\ &= \int_{\Omega} A_h \nabla((T_h u_h) \circ q_h) \cdot \nabla(v_h \circ q_h) \, dx, \end{aligned}$$

avec  $A_h = |\det \nabla q_h| \nabla q_h^{-1} \nabla q_h^{-t}$  qui est clairement symétrique et positive.  $\square$

Concernant  $A_h$  la matrice Jacobienne du changement de variable par  $Q_h$  on a l'estimation suivante.

**Lemme 3.4.4.** *Il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  tel que*

$$\|A_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \leq Ch.$$

*Démonstration.* Soit  $Q = \nabla q_h^{-t}$ ,  $\alpha = |\det Q|$ , alors on a

$$\begin{aligned} \|A_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} &= \|\alpha Q^t Q - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \\ &= \|\alpha(Q^t Q - I) + (\alpha - 1)I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \\ &= \|\alpha((Q^t - I)(Q - I) + (Q^t - I) + (Q - I)) + (\alpha - 1)I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \\ &\leq \|\alpha(Q^t - I)(Q - I)\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} + \|(Q^t - I)\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} + \|(Q - I)\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \\ &\quad + \|(\alpha - 1)I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \end{aligned}$$

De plus  $\alpha = |\det Q|$  est borné sur  $\Omega$  et  $\alpha - 1 = O(h)$  sur  $\Omega$ . Pour finir on utilise la Proposition 3.4.2 pour obtenir le résultat.  $\square$

On introduit maintenant l'espace d'éléments finis déformés

$$\widetilde{V}_h := \{ \widetilde{v}_h = v_h \circ q_h, v_h \in V_h^0(\Omega) \}, \quad (3.13)$$

et on définit l'opérateur  $\widetilde{T}_h : \widetilde{V}_h \rightarrow \widetilde{V}_h$  de la manière suivante : Soit  $\widetilde{u}_h \in \widetilde{V}_h$ , alors  $\widetilde{T}_h \widetilde{u}_h$  est l'unique élément de  $\widetilde{V}_h$  vérifiant l'équation variationnelle

$$\forall \widetilde{v}_h \in \widetilde{V}_h, \int_{\Omega} A_h \nabla(\widetilde{T}_h \widetilde{u}_h) \cdot \nabla \widetilde{v}_h dx = \int_D A_h \nabla \widetilde{u}_h \cdot \nabla \widetilde{v}_h dx. \quad (3.14)$$

D'après le Lemme 3.4.3 on peut affirmer que

$$\text{si } \widetilde{u}_h = u_h \circ q_h \text{ pour } u_h \in V_h^0(\Omega) \text{ alors } \widetilde{T}_h \widetilde{u}_h = (T_h u_h) \circ q_h. \quad (3.15)$$

On peut maintenant comparer le spectre des opérateurs  $T_h$  et  $\widetilde{T}_h$ .

**Lemme 3.4.5.** *Les opérateurs  $T_h : V_h^0(\Omega) \rightarrow V_h^0(\Omega)$  et  $\widetilde{T}_h : \widetilde{V}_h \rightarrow \widetilde{V}_h$  ont le même spectre. De plus,  $u_h$  est une fonction propre de  $\lambda \in \sigma(T_h)$  si et seulement si  $u_h \circ q_h$  est une fonction propre de  $\widetilde{T}_h$  associée à la même valeur propre.*

*Démonstration.* Soit  $R_h : V_h \rightarrow \widetilde{V}_h$  l'application définie par  $R_h : v_h \mapsto v_h \circ q_h$ . D'après l'identité (3.15) on peut donc dire que  $\widetilde{T}_h = R_h T_h R_h^{-1}$ . Mais on peut aussi remarquer que  $R_h$  et  $R_h^{-1}$  sont adjoints l'un de l'autre lorsque l'espace  $\widetilde{V}_h$  est équipé du produit scalaire :

$$(\widetilde{u}_h, \widetilde{v}_h) = \int_{\Omega} A_h \nabla \widetilde{u}_h \cdot \nabla \widetilde{v}_h dx,$$

ce qui suffit pour prouver le lemme.  $\square$

### 3.4.4 Convergence des valeurs propres

On s'intéresse maintenant aux valeurs propres de  $\widetilde{T}_h$  et leur convergence vers celles de  $T_D$ . On a d'abord besoin du lemme technique suivant.

**Lemme 3.4.6.** Lorsque  $h$  est suffisamment petit l'inégalité suivante est vraie :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \left| \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} - \frac{\int_D A_h |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega A_h |\nabla u|^2 dx} \right| \leq C \|A_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}}, \quad (3.16)$$

où la constante  $C > 0$  est indépendante de  $h$  et de  $u$ .

*Démonstration.* On va d'abord décomposer le côté gauche de l'inégalité (3.16) en

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} - \frac{\int_D A_h |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega A_h |\nabla u|^2 dx} \right| &\leq \left| \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} - \frac{\int_D A_h |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} \right| \\ &\quad + \left| \frac{\int_D A_h |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} - \frac{\int_D A_h |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega A_h |\nabla u|^2 dx} \right|. \end{aligned}$$

Pour le premier terme de droite on a directement

$$\left| \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} - \frac{\int_D A_h |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} \right| \leq \|A_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \left( \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} \right) \leq \|A_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}}.$$

On doit maintenant traiter le second terme :

$$\left| \frac{\int_D A_h |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} - \frac{\int_D A_h |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega A_h |\nabla u|^2 dx} \right| = \left| \int_D A_h |\nabla u|^2 dx \right| \left| \frac{1}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} - \frac{1}{\int_\Omega A_h |\nabla u|^2 dx} \right|.$$

On remarque d'abord que :

$$\left| \int_D A_h |\nabla u|^2 dx \right| \leq \|A_h\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \left| \int_D |\nabla u|^2 dx \right|.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx} - \frac{1}{\int_{\Omega} A_h |\nabla u|^2 dx} \right| &= \left| \frac{\int_{\Omega} (A_h - I) |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \int_{\Omega} A_h |\nabla u|^2 dx} \right| \\ &\leq \|A_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \left| \frac{1}{\int_{\Omega} A_h |\nabla u|^2 dx} \right|, \end{aligned}$$

mais comme  $\|A_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  on en déduit que pour  $h$  assez petit  $\frac{1}{2} \leq \|A_h\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \leq 2$ . Ainsi on obtient

$$\left| \frac{1}{\int_{\Omega} A_h |\nabla u|^2 dx} \right| \leq \frac{2}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}.$$

Donc on en déduit que

$$\left| \frac{1}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx} - \frac{1}{\int_{\Omega} A_h |\nabla u|^2 dx} \right| \leq 2 \|A_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \frac{1}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}.$$

Finalement on récupère l'estimation

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int_D A_h |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx} - \frac{\int_D A_h |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} A_h |\nabla u|^2 dx} \right| &\leq 2 \|A_h\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \|A_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx} \\ &\leq C_1 \|A_h - I\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}}, \end{aligned}$$

ce qui est suffisant pour prouver le lemme.  $\square$

On peut alors formuler la conjecture concernant la convergence des valeurs propres.

**Conjecture 3.2.1.** Les valeurs propres de l'opérateur discrétisé  $T_h$  convergent vers celles de l'opérateur continu  $T_D$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . En d'autres termes pour tout  $1 \leq k \leq N_h$  on a

$$|\lambda_{k,h}^\pm - \lambda_k^\pm| \leq C_k h,$$

où la constante  $C_k$  dépend de l'indice  $k$ .

**Remarque 3.4.7.** Pour démontrer la Conjecture 3.2.1 une première idée consiste s'appuyer sur la formule du min-max. Un sens de l'inégalité est simple à montrer car une fonction harmonique continue  $f \in SL_D$  peut être transformée en une fonction harmonique discrète  $f_h \in SL_h$  à l'aide d'un opérateur d'interpolation, on peut donc les comparer. En revanche le sens inverse est plus difficile car à partir d'une fonction harmonique discrète on ne peut pas construire de façon simple une fonction harmonique continue. On pourrait contourner cette difficulté en ne travaillant pas directement sur l'espace de fonction harmonique discrète  $SL_h$  mais d'abord sur l'ensemble  $\widetilde{SL}_h$  des simple couche appliqués à une fonction de densité discrète ( $\mathbb{P}_1$  par exemple). Dans ce cas on a directement  $\widetilde{SL}_h \subset SL_D$  et on peut utiliser la formule du min-max pour prouver la convergence des valeurs propres. Dans un second temps il faudrait montrer la convergence des valeurs propres de l'opérateur de Poincaré-Neumann défini sur  $\widetilde{SL}_h$  vers celles de l'opérateur discrétisé  $T_h$  défini sur  $SL_h$ . On obtiendrait alors une sorte de convergence en deux temps. Jusqu'à présent les tentatives pour prouver cette seconde étape ont été infructueuses.

### 3.5 Convergence de la résolvante

On s'intéresse dans cette partie à établir la convergence de la résolvante lorsque  $h \rightarrow 0$ . Soit  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $g \in H_0^1(\Omega)$  le représentant de Riesz associé. Pour un certain  $\lambda \notin \sigma(T_D)$  on considère l'unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème suivant

$$\lambda u - T_D u = g. \quad (3.17)$$

Soit  $\lambda_h$  une suite réelle telle que  $\lambda_h \rightarrow \lambda$  lorsque  $h \rightarrow 0$  et  $g_h \in H_0^1(\Omega)$  une suite de discrétisation de  $g$  vérifiant

$$\|g - g_h\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0; \quad (3.18)$$

On pourra, par exemple, prendre  $g_h$  comme l'interpolation affine par morceaux de  $g$ . En admettant la Conjecture 3.2.1 on sait que l'équation

$$\lambda_h u_h - T_h u_h = g_h \quad (3.19)$$

admet une unique solution dans  $V_h$  pour  $h$  assez petit. On souhaite prouver la convergence de l'opérateur résolvant discret, à savoir  $(\lambda_h \text{Id} - T_h)^{-1}$ , vers l'opérateur résolvant continu  $(\lambda \text{Id} - T_d)^{-1}$ . C'est l'objet du théorème suivant.

**Théorème 3.2.2.** En admettant la Conjecture 3.2.1 on peut affirmer qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  tel que

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(|\lambda - \lambda_h| + \|g - g_h\|_{H_0^1(\Omega)} + h).$$

*Démonstration.* On prouve tout d'abord la stabilité de l'opérateur résolvant, c'est à dire que l'on prouve qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  tel que pour tout  $g_h \in V_h$  on ait

$$\|(\lambda_h \text{Id} - T_h)^{-1} g_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|g_h\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (3.20)$$

On rappelle qu'on a noté  $(\lambda_{h,k})_{k=1,\dots,N_h}$  les valeurs propres de  $T_h$  et  $(v_{h,k})_{k=1,\dots,N_h}$  la suite de fonctions propres associées. Comme  $\lambda_h \notin \sigma(T_h)$  pour  $h$  assez petit, l'élément  $u_h := (\lambda_h \text{Id} - T_h)^{-1} g_h$  peut alors se décomposer dans la base spectrale  $(v_{h,k})_{k=1,\dots,N_h}$  de l'espace  $V_h^0(\Omega)$  :

$$u_h = \sum_{k=1}^{N_h} \frac{1}{\lambda_h - \lambda_{h,k}} \langle g_h, v_{h,k} \rangle v_{h,k},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne ici le produit scalaire de  $H_0^1(\Omega)$ . On en déduit l'estimation suivante :

$$\|u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \frac{\|g_h\|_{H_0^1(\Omega)}}{\text{dist}(\lambda_h, \sigma(T_h))},$$

ce qui prouve l'inégalité (3.20).

On considère maintenant  $\pi_h u \in V_h^0(\Omega)$  l'interpolation affine par morceaux de  $u$  sur le maillage  $\mathcal{T}_h$ , en s'appuyant par exemple sur l'interpolation de Scott-Zhang (voir [EG13]). Comme on sait que

$$\|u - \pi_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad (3.21)$$

il ne reste qu'à prouver que  $\|u_h - \pi_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$ . En utilisant (3.20) et le fait que

$$u_h - \pi_h u = (\lambda_h \text{Id} - T_h)^{-1} (\lambda_h \text{Id} - T_h)(u_h - \pi_h u),$$

on peut se limiter à prouver que

$$(\lambda_h \text{Id} - T_h)(u_h - \pi_h u) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad (3.22)$$

ce qui est l'objet de la suite de cette preuve. En utilisant les définitions (3.17) et (3.19) on obtient d'abord que

$$(\lambda_h \text{Id} - T_h)(u_h - \pi_h u) = (g - g_h) + (\lambda_h - \lambda)u + \lambda_h(\pi_h u - u) + (T_D u - T_h \pi_h u).$$

On se ramène donc à prouver que  $(T_D u - T_h \pi_h u)$  tend vers zéro lorsque  $h$  tend vers zéro. Pour cela on écrit l'équation variationnelle qui définit l'opérateur  $T_h \pi_h u$  et on effectue un changement de variables :

$$\forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h, \quad \int_{\Omega} A_h \nabla(T_h \pi_h u \circ q_h) \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx = \int_D A_h \nabla(\pi_h u \circ q_h) \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx. \quad (3.23)$$

Ensuite on écrit l'équation variationnelle satisfaite par  $T_D u$  :

$$\forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h, \quad \int_{\Omega} \nabla(T_D u) \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx = \int_D \nabla u \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx, \quad (3.24)$$

et en soustrayant (3.23) et (3.24) on obtient pour tout  $\tilde{v}_h \in \tilde{V}_h$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla(T_D u - T_h u \circ q_h) \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx \\ &= \int_D \nabla u \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx - \int_D A_h \nabla(\pi_h u \circ q_h) \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx \\ & \quad + \int_{\Omega} (A_h - \text{Id}) \nabla(T_h u \circ q_h) \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx, \\ &= \int_D \nabla(u - \pi_h u \circ q_h) \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx - \int_D (A_h - \text{Id}) \nabla(\pi_h u \circ q_h) \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx \\ & \quad + \int_{\Omega} (A_h - \text{Id}) \nabla(T_h u \circ q_h) \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx. \end{aligned}$$

À l'aide de la Proposition 3.4.2 et du Lemme 3.4.4 on obtient que

$$r_h := \sup_{\substack{\tilde{v}_h \in \tilde{V}_h \\ \tilde{v}_h \neq 0}} \frac{1}{\|\tilde{v}_h\|_{H_0^1(\Omega)}} \left| \int_{\Omega} \nabla(T_D u - T_h u \circ q_h) \cdot \nabla \tilde{v}_h \, dx \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (3.25)$$

On note  $w_h \in V_h^0(\Omega)$  l'interpolation de Scott-Zhang [SZ90] de  $T_D u$  et on rappelle qu'il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$\|w_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|T_D u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On peut alors écrire que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla(T_D u - T_h u \circ q_h) \cdot \nabla(T_D u - T_h u \circ q_h) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla(T_D u - T_h u \circ q_h) \cdot \nabla(T_D u - w_h) \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \nabla(T_D u - T_h u \circ q_h) \cdot \nabla(w_h - T_h u \circ q_h) \, dx, \\
&\leq \|\nabla(T_D u - T_h u \circ q_h)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla(T_D u - w_h)\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + r_h (\|w_h\|_{H_0^1(\Omega)} + \|T_h u \circ q_h\|_{H_0^1(\Omega)}).
\end{aligned}$$

On en déduit que  $e_h := \|T_D u - T_h u \circ q_h\|_{H_0^1(\Omega)}$  vérifie

$$e_h^2 \leq \|\nabla(T_D u - w_h)\|_{L^2(\Omega)^d} e_h + C r_h,$$

et donc que  $e_h \rightarrow 0$  comme attendu. En utilisant à nouveau la Proposition 3.4.2 on conclut que

$$\begin{aligned}
\|T_D u - T_h u\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C \|T_D u \circ q_h - T_h u \circ q_h\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C (\|T_D u - T_D u \circ q_h\|_{H_0^1(\Omega)} + \|T_D u - T_h u \circ q_h\|_{H_0^1(\Omega)}),
\end{aligned}$$

qui s'annule lorsque  $h \rightarrow 0$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

### 3.6 Extension des résultats de convergence du spectre pour $\Omega = \mathbb{R}^d$

L'objectif de cette partie est la Conjecture 3.2.1 et le Théorème 3.2.2 (qui suppose la Conjecture 3.2.1 vraie) au cas où  $\Omega = \mathbb{R}^d$ . On va d'abord définir l'opérateur de Poincaré-Neumann sur le domaine non borné  $\Omega$ . Afin de pouvoir discrétiser cet opérateur il est nécessaire se ramener à un domaine borné pour lequel un maillage fait sens numériquement. On construit alors un opérateur défini sur ce domaine borné, équivalent à l'opérateur de Poincaré-Neumann défini sur  $\mathbb{R}^d$  et ayant le même spectre. On peut finalement discrétiser cet opérateur et se ramener au cadre borné de la preuve partielle de la Conjecture 3.2.1 et du Théorème 3.2.2 ce qui permet d'étendre ces résultats à l'opérateur de Poincaré-Neumann sur  $\mathbb{R}^d$ .

### 3.6.1 Opérateur de Poincaré-Neumann défini sur le domaine $\mathbb{R}^d$

On rappelle la définition de l'opérateur de Poincaré-Neumann sur l'espace  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ , noté  $T_D^\infty$ , introduit dans la Proposition 1.4.3 : Pour tout  $u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ ,  $T_D^\infty u$  est l'unique élément de  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  vérifiant

$$\forall v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \nabla T_D^\infty u \cdot \nabla v \, dx = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \quad (3.26)$$

On rappelle également que l'opérateur  $T_D^\infty$  apparaît naturellement dans l'étude des problèmes de conductivité en domaine non borné. En effet, on suppose que les domaines  $D$  et  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$  sont assimilés à des matériaux de conductivité constantes  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et 1 respectivement. Soit  $A(x) = a\chi_D(x) + \chi_{D^c}(x)$  la distribution de conductivité définie sur tout le domaine  $\mathbb{R}^2$ . On s'intéresse au potentiel électrostatique  $u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  créée par une source  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)^*$  à support compact et solution du problème de conductivité :

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad (3.27)$$

Mis sous forme variationnelle ce problème est équivalent à : Trouver  $u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  tel que

$$\forall v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)^*, \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)}, \quad (3.28)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)^*, \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)}$  est le crochet de dualité entre  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)^*$  et  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ .

Une première idée pour discrétiser l'opérateur  $T_D^\infty$  est d'opérer la discrétisation au niveau de la définition de sa définition (3.26) en associant un maillage à la géométrie et en travaillant sur des fonctions d'éléments finis sur ce maillage. Cependant le maillage d'un domaine non-borné n'a pas de sens dans l'optique de faire des simulations numériques. On ne peut pas appliquer la méthode des éléments finis à un maillage avec un nombre infini de noeuds. Pour contourner ce problème nous allons construire un opérateur équivalent à  $T_D^\infty$  mais défini sur un domaine borné, puis le discrétiser.

### 3.6.2 Réduction de l'opérateur $T_D^\infty$ à un domaine borné

Dans cette partie on construit un opérateur équivalent à  $T_D^\infty$  mais défini sur un domaine borné. Pour cela on se propose d'utiliser un opérateur "Dirichlet-to-Neumann" qui va nous permettre de ramener un problème sur un domaine non borné en un problème sur un domaine borné de façon équivalente. Nous

allons d'abord introduire un domaine borné "artificiel" sur lequel on va "réduire" l'opérateur  $T_D^\infty$ , et ceci de manière équivalente. C'est ensuite sur ce domaine borné qu'on effectuera la discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Neumann. Soit  $R > 0$  tel que  $D \subsetneq B$  et  $\text{supp}(f) \subsetneq B$  où  $B = B(0, R)$  est la boule ouverte de rayon  $R$  centrée en zéro. Soit  $w \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B})$  l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}, \\ w = U, & \text{sur } \partial B, \end{cases} \quad (3.29)$$

où la donnée au bord  $U$  est supposée connue. On définit maintenant quelques opérateurs qui vont nous être utiles :

- L'opérateur d'extension  $E : H^{1/2}(\partial B) \rightarrow \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B})$  tel que  $Ep$  est une solution du problème (3.29) avec  $U = p$ . Cet opérateur est bien et bijectif défini d'après le Théorème de Lax-Milgram. Pour des raisons de simplicité on utilisera la notation raccourcie  $Eu = E(u|_{\partial B})$  lorsque  $u|_{\partial B} \in H^{1/2}(\partial B)$ .

- L'opérateur d'extension  $\tilde{E} : \mathcal{H}^1(B) \rightarrow \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  associé à  $E$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \tilde{E}p(x) = p(x)\chi_B(x) + E(p|_{\partial B})(x)\chi_{\mathbb{R}^2 \setminus B}(x).$$

- L'opérateur de *Dirichlet-to-Neumann*  $M$  défini par

$$MU = -\frac{\partial w}{\partial n}, \quad \text{sur } \partial B, \quad (3.30)$$

où  $n$  est ici la normale sortante du bord  $\partial B$  et où  $w, U$  ont été introduit dans le problème (3.29). En mettant (3.29) sous forme variationnelle puis en utilisant la définition (3.30) en remarquant que  $w = EU$  on obtient alors que  $MU$  satisfait l'équation variationnelle suivante dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$ :

$$\forall v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\Gamma} vMU \, ds = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla(EU) \cdot \nabla v \, dx. \quad (3.31)$$

Le lecteur pourra se référer à [MM13] et [SU90] pour la théorie des opérateurs de *Dirichlet-to-Neumann* et à [Giv13], [GPK98] pour des considérations numériques.

On considère maintenant le problème suivant dans le domaine  $B$  : Trouver  $u \in \mathcal{H}^1(B) = H^1(B)/\mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} -\text{div}(A\nabla u) = f, & \text{dans } B, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -Mu, & \text{sur } \partial B. \end{cases} \quad (3.32)$$

Mis sous forme variationnelle ce problème est équivalent à : Trouver  $u \in \mathcal{H}^1(B)$  tel que

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(B), \quad \int_B A \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial B} v M u \, ds = \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}^1(B)^*, \mathcal{H}^1(B)}, \quad (3.33)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^1(B)^*, \mathcal{H}^1(B)}$  est le crochet de dualité entre  $\mathcal{H}^1(B)^*$  et  $\mathcal{H}^1(B)$ .

**Remarque 3.6.1.** Pour des raisons de simplicité on a fait l'hypothèse que  $\text{supp}(f) \subset B$  mais notre analyse reste valide lorsque  $\text{supp}(f) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$  ou même lorsqu'on impose que  $u$  soit harmonique à l'infini.

**Théorème 3.6.2.** Si  $u$  est une solution de (3.28) alors  $u|_B \in \mathcal{H}^1(B)$  la restriction de  $u$  à  $B$  est solution de (3.33). Inversement, si  $u \in \mathcal{H}^1(B)$  est une solution de (3.33) alors  $\tilde{E}u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  est une solution de (3.33).

*Démonstration.* Soit  $u$  une solution de (3.28), il est clair que  $u|_B \in \mathcal{H}^1(B)$ . On découpe d'abord l'intégrale

$$\forall v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} A \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_B A \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

puis on observe que  $u|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}}$  satisfait le problème (3.29) avec  $U = u|_{\partial B}$ . Comme ce problème admet une unique solution on en déduit qu'il s'agit de  $Eu$ . Cela signifie donc que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla Eu \cdot \nabla v \, dx,$$

et à l'aide de la définition (3.31) de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann on a

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} A \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_B A \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla Eu \cdot \nabla v \, dx, \\ &= \int_B A \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial B} v M u \, ds. \end{aligned}$$

En sachant que  $\text{supp}(f) \subset B$  et  $v|_B \in \mathcal{H}^1(B)$  on en déduit que  $u|_B$  satisfait (3.33), c'est à dire

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(B), \quad \int_B A \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial B} v M u \, ds = \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}^1(B)^*, \mathcal{H}^1(B)}.$$

Inversement, on suppose que  $u$  est une solution de (3.33) et on construit  $\tilde{u} = \tilde{E}u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ . Pour  $v \in \mathcal{H}^1(B)$  on sait que

$$\begin{aligned} \int_B A \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial B} v M u \, ds &= \int_B A \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla E u \cdot \nabla E v \, dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} A \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} \, dx, \end{aligned}$$

où  $\tilde{v} = \tilde{E}v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ . En sachant que  $\text{supp}(f) \subset B$  on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} A \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} \, dx = \langle f, \tilde{v} \rangle_{\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)^*, \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)},$$

qui reste vrai quelque soit  $\tilde{v} \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ .  $\square$

On définit la forme bilinéaire  $S$  par

$$\forall u, v \in \mathcal{H}^1(B), \quad S(u, v) = \int_B \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial B} v M u \, ds.$$

**Proposition 3.6.3.**  $S$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{H}^1(B)$ .

*Démonstration.* Soit  $u, v \in \mathcal{H}^1(B)$  alors  $u|_{\partial B}, v|_{\partial B} \in H^{1/2}(\partial B)$  et donc  $\int_{\partial B} v M u \, ds = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla E u \cdot \nabla E v \, dx$ . De plus  $S$  est symétrique, positive et définie car

$$\begin{aligned} S(u, u) = 0 &\iff \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} |\nabla E u|^2 \, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_B |\nabla u|^2 \, dx = 0 \\ &\iff E u \text{ est constante sur } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B} \text{ and } u \text{ est constante sur } B \end{aligned}$$

D'après les conditions de décroissance à l'infini on peut affirmer que  $E u = 0$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$ , d'où  $u = 0$  sur  $B$  et donc sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier.  $\square$

On définit maintenant l'opérateur de Poincaré-Neumann  $\mathbb{T}_D$  agissant sur l'espace  $\mathcal{H}^1(B)$  comme l'unique solution de l'équation variationnelle

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(B), \quad S(\mathbb{T}_D u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

$\mathbb{T}_D$  bien défini comme un opérateur de  $\mathcal{H}^1(B)$  dans lui-même grâce au Théorème de représentation de Riesz en sachant que  $S$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{H}^1(B)$  (Proposition 3.6.3). Dans un certain sens  $\mathbb{T}_D$  est la restriction de  $T_D^\infty$  à l'espace  $\mathcal{H}^1(B)$ . En effet ils sont liés de la façon suivante.

**Théorème 3.6.4.** Soit  $u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ , alors  $T_D^\infty u = \tilde{E}\mathbb{T}_D(u|_B)$ .

*Démonstration.* Notre stratégie est de prouver que  $R = \tilde{E}\mathbb{T}_D(u|_B)$  vérifie l'équation variationnelle (3.26) satisfaite par  $T_D^\infty$ , ce qui suffit à prouver le théorème par unicité de la solution à cette équation. Soit  $u, v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ , on peut écrire que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla R u \cdot \nabla v \, dx = \int_B \nabla R u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla R u \cdot \nabla v \, dx.$$

En utilisant la définition de  $\tilde{E}$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_B \nabla \tilde{E}\mathbb{T}_D(u|_B) \cdot \nabla v \, dx &= \int_B \nabla \mathbb{T}_D(u|_B) \cdot \nabla v \, dx, \\ \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla \tilde{E}\mathbb{T}_D(u|_B) \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla E\mathbb{T}_D(u|_B) \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

À l'aide de l'équation (3.31) et sachant que  $E\mathbb{T}_D(u|_B)$  vérifie (3.29) par définition de l'opérateur d'extension  $E$ , on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}} \nabla E\mathbb{T}_D(u|_B) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial B} v M\mathbb{T}_D(u|_B) \, ds.$$

Ensuite, par définition de  $\mathbb{T}_D$ , on obtient

$$\int_B \nabla \mathbb{T}_D(u|_B) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial B} v M\mathbb{T}_D(u|_B) \, ds = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

d'où

$$\forall u, v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \nabla R u \cdot \nabla v \, dx = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

□

**Théorème 3.6.5.**  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathbb{T}_D$  si et seulement si  $\lambda$  est une valeur propre de  $T_D^\infty$ .

*Démonstration.* Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $T_D^\infty$ , alors  $\exists u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $T_D^\infty u = \lambda u$ . En utilisant le Théorème (3.6.4) on obtient que  $\tilde{E}\mathbb{T}_D(u|_B) = \lambda u$ . En

prenant la restriction sur  $B$  de l'égalité précédente et en utilisant la définition de  $\tilde{E}$  on obtient alors que  $\mathbb{T}_D(u|_B) = \lambda u|_B$ . Cela prouve que  $u|_B$  est un vecteur propre de  $\mathbb{T}_D$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Inversement, on considère  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathbb{T}_D$ , alors  $\exists u \in \mathcal{H}^1(B)$ ,  $\mathbb{T}_D u = \lambda u$ . En appliquant l'opérateur  $\tilde{E}$  à l'égalité précédente et en notant  $\tilde{u} = \tilde{E}u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  on obtient que  $\tilde{E}\mathbb{T}_D u = \lambda \tilde{u}$ . L'utilisation du Théorème (3.6.4) nous permet alors d'affirmer que  $T_D^\infty \tilde{u} = \lambda \tilde{u}$ .  $\square$

On peut maintenant réécrire le problème (3.33) pour faire apparaître l'opérateur  $\mathbb{T}_D$  de la façon suivante

$$\begin{aligned} \int_B A \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{B \setminus \bar{D}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + a \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_B \nabla u \cdot \nabla v \, dx + (a-1) \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_B \nabla u \cdot \nabla v \, dx + (a-1) S(\mathbb{T}_D u, v) \\ &= S(u, v) - \int_{\partial B} v M u \, ds + (a-1) S(\mathbb{T}_D u, v) \\ &= S(u + (a-1)\mathbb{T}_D u, v) - \int_{\partial B} v M u \, ds. \end{aligned}$$

Finalement le problème (3.33) est équivalent à : Trouver  $u \in \mathcal{H}^1(B)$  tel que

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(B), \quad S(u + (a-1)\mathbb{T}_D u, v) = \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}^1(B)^*, \mathcal{H}^1(B)}. \quad (3.34)$$

On cherche maintenant à construire un équivalent discret de l'opérateur  $T_D^\infty$ .

### 3.6.3 Discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Neumann sur le domaine $B$

Maintenant qu'on a défini  $\mathbb{T}_D$  comme un équivalent de l'opérateur  $T_D^\infty$  sur le domaine borné  $B$  et que l'on sait qu'ils possèdent le même spectre on s'attache à discrétiser  $\mathbb{T}_D$ . Soit  $B_h$  un maillage triangulaire approximant le domaine  $B$  avec le paramètre  $h$  décrivant la taille des triangles. On suppose que  $B_h$  est conforme par rapport à  $D$  et on note  $D_h$  le sous-maillage correspondant. On considère alors les ensembles d'éléments finis suivants

$$\begin{aligned} V_h &= \{u_h \in \mathcal{H}^1(B_h), u_h|_{T_k} \text{ est affine pour tout les triangles } T_k \text{ de } B_h\}, \\ V_h^b &= \{u_h \in H^{1/2}(\partial B_h), u_h|_{e_k} \text{ est affine pour toutes les arêtes } e_k \text{ de } \partial B_h\}. \end{aligned}$$

On définit alors l'opérateur discret  $\mathbb{T}_D^h : V_h \rightarrow V_h$  tel que pour  $u_h \in V_h$ ,  $\mathbb{T}_D^h u_h$  est l'unique solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{B_h} \nabla \mathbb{T}_D^h u_h \cdot \nabla v_h \, dx + \int_{\partial B_h} v_h M_h \mathbb{T}_D^h u_h \, ds = \int_{D_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx,$$

où  $M_h$  est l'opérateur de *Dirichlet-to-Neumann* agissant sur  $V_h^b$ . Pour  $u_h \in V_h^b$ , on sait par définition que  $M_h u_h$  est l'unique solution du problème variationnel

$$\forall v_h \in V_h^b, \quad \int_{\partial B_h} v_h M_h u_h \, ds = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_h} \nabla E_h u_h \cdot \nabla E_h v_h \, dx,$$

avec  $E_h : V_h^b \rightarrow \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_h)$  l'opérateur d'extension tel que pour tout  $p \in V_h^b$ ,  $E_h p$  vérifie le problème extérieur :

$$\begin{aligned} \Delta E_h p &= 0, & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_h, \\ E_h p &= p, & \text{on } \partial B_h. \end{aligned}$$

Comme on l'a fait précédemment on construit l'opérateur d'extension  $\widetilde{E}_h : V_h \rightarrow \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  associé à  $E_h$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \widetilde{E}_h p(x) = p(x) \chi_{B_h}(x) + E_h(p|_{\partial B_h})(x) \chi_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_h}(x).$$

Ainsi, pour  $u_h \in V_h$ ,  $\mathbb{T}_D^h u_h$  satisfait de façon équivalente l'équation

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \widetilde{E}_h(\mathbb{T}_D^h u_h) \cdot \nabla \widetilde{E}_h v_h \, dx = \int_{D_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{D_h} \nabla \widetilde{E}_h u_h \cdot \nabla \widetilde{E}_h v_h \, dx. \quad (3.35)$$

Maintenant qu'on a construit l'opérateur  $\mathbb{T}_D^h$  qui est, en quelque sorte, un équivalent discret de l'opérateur  $T_D^\infty$  on cherche à adapter la démarche employée dans la Section 3.4 pour proposer une preuve partielle de la conjecture suivante.

**Conjecture 3.2.3.** Les valeurs propres de l'opérateur discrétisé  $\mathbb{T}_D^h$  convergent vers celles de l'opérateur continu  $T_D^\infty$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . Plus précisément, pour tout  $1 \leq k \leq N_h$  et pour  $h$  assez petit on a

$$|\lambda_{k,h}^\pm - \lambda_k^\pm| \leq C_k h,$$

où la constante  $C_k$  dépend de l'indice  $k$ .

La première étape dans la preuve partielle de la Conjecture 3.2.3 consiste à construire un difféomorphisme  $p_h$  qui envoie  $\partial D_h$  sur  $\partial D$  et  $\partial B_h$  sur  $\partial B$  comme nous l'avons fait dans la Section 3.4.2. On omettra les détails de la construction de  $p_h$  car elle est identique à celle développée dans la Section 3.4.2. La Proposition 3.4.2 est toujours valable pour la transformation  $p_h$  ainsi construite, et on peut alors effectuer un changement de variable dans (3.35).

**Proposition 3.6.6.** *En appliquant un changement de variable par le difféomorphisme lipschitzien  $q_h := p_h^{-1}$  dans la définition (3.35) on obtient*

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h, \quad \int_{\mathbb{R}^2} A_h \nabla((\tilde{E}_h(\mathbb{T}_D^h u_h)) \circ q_h) \cdot \nabla((\tilde{E}_h v_h) \circ q_h) dx \\ = \int_D A_h \nabla((\tilde{E}_h u_h) \circ q_h) \cdot \nabla((\tilde{E}_h v_h) \circ q_h) dx. \end{aligned}$$

Où  $A_h = |\det \nabla q_h| \nabla q_h^{-1} \nabla q_h^{-t}$  est une matrice symétrique et positive.

Il est aussi clair que le Lemme 3.4.4 reste valable.

On introduit l'espace de dimension finie

$$\tilde{V}_h := \left\{ \tilde{v}_h = (\tilde{E}_h v_h) \circ q_h, \quad v_h \in V_h \right\},$$

et on définit l'opérateur  $\tilde{T}_h : \tilde{V}_h \rightarrow \tilde{V}_h$  tel que pour  $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h$ ,  $\tilde{T}_h \tilde{u}_h$  est l'unique élément de  $\tilde{V}_h$  vérifiant

$$\forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h, \quad \int_{\mathbb{R}^2} A_h \nabla(\tilde{T}_h \tilde{u}_h) \cdot \nabla \tilde{v}_h dx = \int_D A_h \nabla \tilde{u}_h \cdot \nabla \tilde{v}_h dx.$$

Il est clair que pour  $\tilde{u}_h = u_h \circ q_h$  avec  $u_h \in V_h$  alors  $\tilde{T}_h \tilde{u}_h = (\tilde{E}_h(\mathbb{T}_D^h u_h)) \circ q_h$ . D'après le Théorème 3.6.5 on peut énoncer le résultat suivant.

**Lemme 3.6.7.** *Les opérateurs  $\mathbb{T}_D^h : V_h \rightarrow V_h$  et  $\tilde{T}_h : \tilde{V}_h \rightarrow \tilde{V}_h$  possèdent le même spectre. De plus,  $u_h$  est une fonction propre  $\mathbb{T}_D^h$  de associée à  $\lambda \in \sigma(\mathbb{T}_D^h)$  si et seulement si  $(\tilde{E}_h(\mathbb{T}_D^h u_h)) \circ q_h$  est une fonction propre de  $\tilde{T}_h$  associée à la même valeur propre.*

On peut maintenant revenir à la preuve partielle de la Conjecture 3.2.3. Comme on sait que  $\lambda \in \sigma(\mathbb{T}_D)$  si et seulement si  $\lambda \in \sigma(T_D^\infty)$  (d'après le Théorème 3.6.5) et que  $\lambda_h \in \sigma(\mathbb{T}_D^h)$  si et seulement si  $\lambda_h \in \sigma(\tilde{T}_h)$  on doit donc étudier la convergence des

valeurs propres  $\lambda_h \in \sigma(\widetilde{T}_h)$  vers les valeurs propres  $\lambda \in T_D^\infty$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . Comme pour la Conjecture 3.2.1 nous ne sommes par parvenus à terminer la preuve de la Conjecture 3.2.3 pour les mêmes raisons que celles évoquées dans la Remarque 3.4.7.

## 3.7 Résultats numériques

Dans cette partie on se propose d'illustrer numériquement la convergence des valeurs propres de l'opérateur de Poincaré-Neumann discrétisé vers les valeurs propres théoriques de l'opérateur de Poincaré-Neumann. On traitera d'abord le cas de deux disques concentriques. Dans un second temps on travaillera sur un domaine non borné. Toutes les simulations numériques ont été réalisées avec le logiciel FreeFem++ [Hec12].

### 3.7.1 Calcul numérique des valeurs propres de l'opérateur de Poincaré-Neumann dans un domaine borné

Soit  $D_i$  et  $D_e$  deux disques de  $\mathbb{R}^2$  centrées en zéro et de rayons  $R_i$  et  $R_e$  respectivement, avec  $R_i \leq R_e$ . On note  $\Gamma$  l'interface entre les domaines  $D_e$  et  $D_i$ . Notre objectif est de calculer numériquement les valeurs propres de l'opérateur  $T_{D_i} : H_0^1(D_e) \rightarrow H_0^1(D_e)$ . D'après la décomposition spectrale (1.3.5) on s'intéresse uniquement à l'opérateur de Poincaré-Neumann restreint à l'espace des potentiels de simple couche  $\mathfrak{h}$ .

On introduit une discrétisation  $D_e^h$  de  $D_e$  par un maillage triangulaire  $\mathcal{T}_h$  conforme avec le domaine  $D_i$  et on note  $D_i^h$  le sous-maillage associé à  $D_i$ . Le paramètre  $h$  étant associé à la taille des triangles du maillage. Soit  $V_h$  l'espace des fonctions affines par morceaux sur  $\mathcal{T}_h$  et  $T_h : V_h \rightarrow V_h$  l'opérateur de Poincaré-Neumann discret défini dans (3.2). Comme sa version continue  $T_h$  admet une décomposition spectrale (voir Proposition 3.3.1) et on s'intéresse uniquement à sa restriction à l'espace des potentiels de simple couche discrets  $\mathfrak{h}_h$  qui est la version discrète de l'espace  $\mathfrak{h}$ .

Le problème spectral sur  $T_h$  restreint à  $\mathfrak{h}_h$  peut être écrit ainsi : Trouver  $(u, \lambda) \in \mathfrak{h}_h \times \mathbb{C}$  tel que

$$\forall v \in \mathfrak{h}_h, \quad a(u, v) = \lambda M(u, v),$$

où  $m(u, v) = \int_{D_e} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$  et  $a(u, v) = \int_{D_i} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ . Pour calculer le spectre de  $T_h$  on construit d'abord une base de  $\mathfrak{h}_h$ , notée  $(e_i)_{i=1..N}$  où  $N$  est le nombre de noeuds sur le bord  $\Gamma$ . On peut tout simplement choisir le vecteur  $e_i$  de telle manière qu'il prenne la valeur 1 sur le noeud  $i$  et 0 sur les autres noeuds. Ensuite on calcule les

matrices  $M = (m(e_i, e_j))_{i,j=1..N}$  et  $A = (a(e_i, e_j))_{i,j=1..N}$ . La dernière étape consiste à résoudre le problème matriciel aux valeurs propres  $AX = \lambda MX$  avec des méthodes classiques d'algèbre linéaire.

Dans le cas de deux disques concentriques les valeurs propres de  $T_{D_i}$  restreint à  $\mathfrak{h}$  sont données par [ACK<sup>+</sup>13]:

$$\lambda_n^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R_i}{R_e} \right)^{2n}, n \geq 0.$$

L'écart entre les valeurs propres calculées numériquement et celles prédites par la théorie est donné dans la figure (3.2) en fonction du nombre de noeuds du maillage. On observe alors la convergence des valeurs propres de l'opérateur discrétisé vers

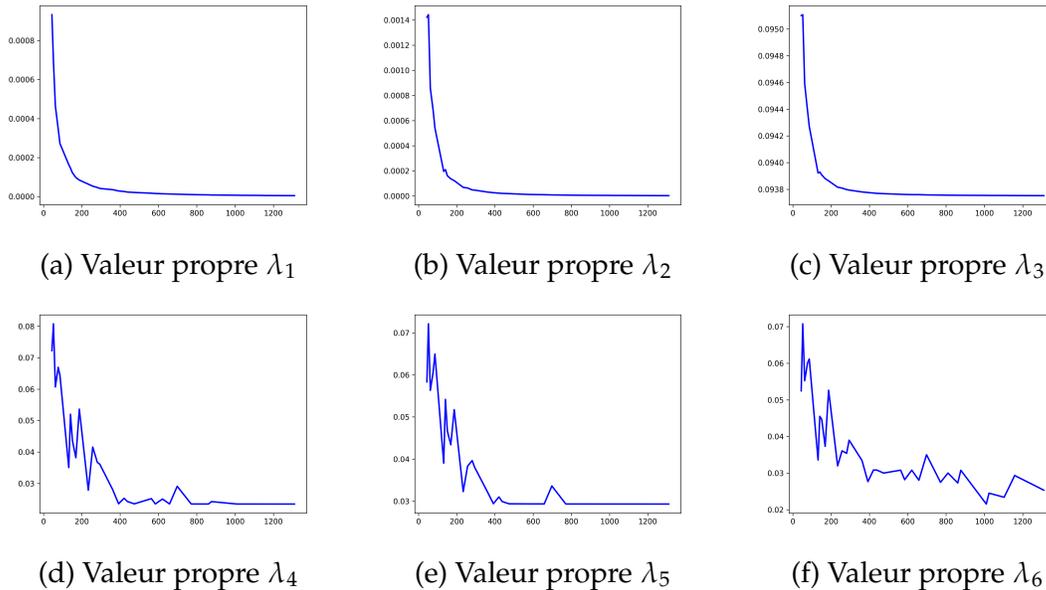


FIGURE 3.2 – Écart entre les valeurs propres calculées numériquement et celles prédites par la théorie en fonction du nombre de noeuds du maillage.

celles prédites par la théorie lorsque  $h \rightarrow 0$ .

### 3.7.2 Calcul numérique des valeurs propres de l'opérateur de Poincaré-Neumann dans un domaine non borné avec un opérateur de Dirichlet-to-Neumann

Pour un disque inclu dans  $\mathbb{R}^2$  on s'attend à ce que le spectre de l'opérateur de Poincaré-Neumann  $T_D^\infty$  soit réduit à  $\{1/2\}$ . Pour calculer numériquement le spectre

de l'opérateur de Poincaré-Neumann défini sur un domaine non-borné on doit le réduire à un problème sur un domaine borné qui peut être discrétisé. Une méthode classique pour régler cette difficulté est d'utiliser un opérateur de *Dirichlet-to-Neumann*. Pour cela on introduit un bord artificiel définissant le domaine de calcul. Lorsque ce domaine est une sphère on peut calculer la matrice associée à l'opérateur de *Dirichlet-to-Neumann* explicitement (voir [Giv13]). Ainsi on peut calculer le spectre de l'opérateur de Poincaré-Neumann avec la même méthode que dans le cas borné mais en ajoutant la matrice associée à l'opérateur de *Dirichlet-to-Neumann*. Plus précisément on résout le problème d'algèbre linéaire  $(A + B)X = \lambda MX$  où  $A$ ,  $M$  sont définies comme dans le cas borné (voir Section 3.7.1) et  $B$  est la matrice associée à l'opérateur de *Dirichlet-to-Neumann*.

**Remarque 3.7.1.** Pour calculer les valeurs propres de  $T_D^\infty$  une autre stratégie consiste à approcher l'opérateur  $\Delta$  par l'opérateur de Helmholtz  $\Delta + k^2$  avec  $k^2 \ll 1$ . Les conditions de radiations sont traitées à l'aide de conditions absorbantes au bord ou en utilisant la méthode *Perfectly Matching Layer* (PML). Cette méthode donne la même valeur propre que l'utilisation de l'opérateur de *Dirichlet-to-Neumann*.

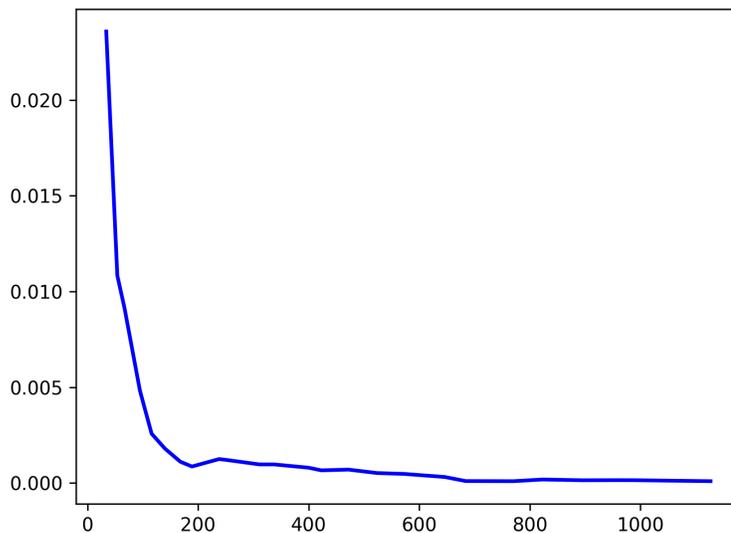


FIGURE 3.3 – Distance entre la valeur propre calculée numériquement et la valeur 1/2 en fonction du nombre de noeuds du maillage.

Finalement on observe aussi la convergence de la valeur propre calculée numériquement vers celle prédite par la théorie, à savoir la valeur  $1/2$ .

---

---

## CHAP. 4

---

# ÉTUDE DU CHAMP DIFFRACTÉ PAR UNE COUCHE MÉTALLIQUE DONT L'ÉPAISSEUR TEND VERS ZÉRO

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>88</b>
<b>3.2</b>	<b>Résultats</b> . . . . .	<b>89</b>
<b>3.3</b>	<b>Étude préliminaire de l'opérateur de Poincaré-Neumann discrétisé</b> . . . . .	<b>91</b>
<b>3.4</b>	<b>Convergence du spectre</b> . . . . .	<b>93</b>
3.4.1	Quelques résultats géométriques sur $D$ et son approximation $D_h$ . . . . .	94
3.4.2	Construction de l'opérateur $p_h$ . . . . .	95
3.4.3	Changement de variables dans la définition de $T_h$ . . . . .	98
3.4.4	Convergence des valeurs propres . . . . .	100
<b>3.5</b>	<b>Convergence de la résolvante</b> . . . . .	<b>103</b>
<b>3.6</b>	<b>Extension des résultats de convergence du spectre pour <math>\Omega = \mathbb{R}^d</math></b> . . . . .	<b>106</b>
3.6.1	Opérateur de Poincaré-Neumann défini sur le domaine $\mathbb{R}^d$ . . . . .	107
3.6.2	Réduction de l'opérateur $T_D^\infty$ à un domaine borné . . . . .	107
3.6.3	Discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Neumann sur le domaine $B$ . . . . .	112

<b>3.7 Résultats numériques</b> . . . . .	<b>115</b>
3.7.1 Calcul numérique des valeurs propres de l'opérateur de Poincaré-Neumann dans un domaine borné . . . . .	115
3.7.2 Calcul numérique des valeurs propres de l'opérateur de Poincaré-Neumann dans un domaine non borné avec un opérateur de <i>Dirichlet-to-Neumann</i> . . . . .	116

---

## 4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le champ diffracté par une couche de métal plane, infinie dans deux directions, lorsque l'épaisseur de cette couche tend vers zéro. On veut en particulier étudier le champ qui se propage dans la couche métallique et comment ce champ dépend de la permittivité du métal. Pour cela nous allons réduire les équations de Maxwell à un problème scalaire de type Helmholtz auquel s'ajoutent des conditions de transmission à la surface de la plaque métallique et des conditions de radiation à l'infini garantissant que la solution est physiquement acceptable. Plus précisément on accepte que les champs électromagnétiques se propagent le long de la couche métallique (plasmons de surface) mais on impose qu'ils décroissent fortement lorsqu'on s'éloigne dans la direction perpendiculaire à la couche. En faisant l'asymptotique de ce problème lorsque l'épaisseur de la couche tend vers zéro on récupère un problème limite plus simple à étudier car il fait disparaître la partie fréquentielle de l'équation de Helmholtz (Section 4.2). Pour comprendre comment ce problème dépend de la permittivité du métal nous allons calculer la fonction de Green associée (Section 4.3). Dès lors nous pourrons interpréter la dépendance de cette fonction de Green à la permittivité du métal (Section 4.4).

## 4.2 Géométrie et problème limite

On se place dans  $\mathbb{R}^2$  et on s'intéresse à une couche métallique homogène, infinie dans une direction et d'épaisseur  $2h$  (voir Figure 4.1). On note  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -h \leq y \leq h\}$  la région occupée par la couche métallique et on suppose qu'il s'agit d'un métal réel. C'est à dire que la permittivité électrique, notée  $\varepsilon_m(\omega)$ , est un nombre complexe dépendant de la fréquence de l'onde incidente  $\omega$ . De plus on va supposer que

$$\operatorname{Re} \varepsilon_m < 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \varepsilon_m > 0. \quad (4.1)$$

On notera  $D_+$  et  $D_-$  les régions  $y > h$  et  $y < -h$  respectivement. On les assimilera à un matériau diélectrique de permittivité constante  $\varepsilon_d \in \mathbb{R}^+$ . Finalement le coefficient de permittivité dans  $\mathbb{R}^2$  est donné par

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \varepsilon_d, & \text{pour } |y| \geq h, \\ \varepsilon_m(\omega), & \text{pour } |y| < h. \end{cases}$$

On notera également  $\Gamma^+$  le bord  $y = h$  et  $\Gamma^-$  le bord  $y = -h$ . On se place dans le cadre de matériaux non-magnétiques, de perméabilité  $\mu = 1$  et de magnétisation

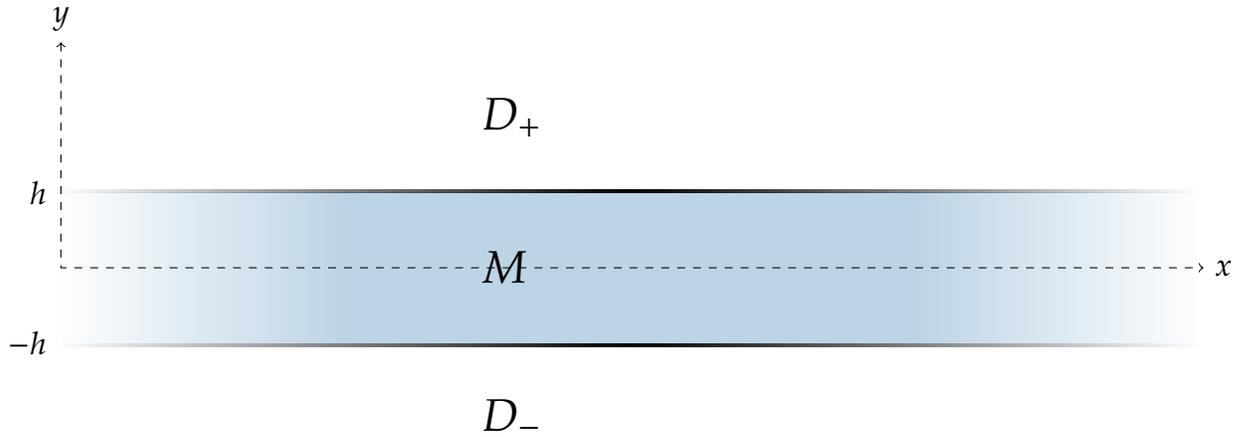


FIGURE 4.1 – Géométrie du problème

$\mathbf{M} = 0$ . On considère alors les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= -i\omega \mathbf{B}, \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \frac{i\omega}{c^2} \varepsilon \mathbf{E},\end{aligned}$$

où le champ d'induction électrique  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{E}$ ,  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $\varepsilon_0$  la permittivité électrique du vide. Comme la géométrie du problème est invariante par translation selon la direction  $z$ , les champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  ne dépendent pas de la variable  $z$ . Dès lors on peut se limiter à considérer les modes transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM). Pour le reste de ce chapitre on se concentre sur le mode transverse électrique. Dans ce cas le champ électrique s'écrit  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$  et le champ magnétique  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ . Les équations de Maxwell se réduisent alors à un problème scalaire sur  $B_z(x, y)$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla B_z \right) + \frac{\omega^2}{c^2} B_z = 0,$$

auquel s'ajoutent des conditions de transmission à l'interface métal-diélectrique :

$$\begin{aligned}[B_z]_{\Gamma^\pm} &= 0, \\ \left[ \frac{1}{\varepsilon} \partial_y B_z \right]_{\Gamma^\pm} &= 0.\end{aligned}$$

De plus on peut récupérer le champ électrique en utilisant la relation

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{i\omega}{c^2} \varepsilon \mathbf{E}.$$

À ces équations on doit rajouter des conditions de radiation à l'infini afin d'avoir une solution physiquement acceptable, c'est à dire que l'énergie du champ diffracté se disperse à l'infini. Plus précisément on va imposer que lorsqu'on s'éloigne dans la direction  $y$  (perpendiculaire à la couche métallique), le champ diffracté  $B_z$  soit décroissant à l'infini (dans un sens qui sera précisé lors du calcul de  $G$  dans la partie 4.3). En revanche on autorise la propagation d'onde le long de la couche métallique (dans la direction  $x$ ).

Finalement on se ramène au problème scalaire suivant

$$\begin{cases} \Delta u + \varepsilon_d k_0^2 u = 0 & \text{dans } D_+ \cup D_-, \\ \Delta u + \varepsilon_m(\omega) k_0^2 u = 0 & \text{dans } M, \\ [u]_{\Gamma^\pm} = 0, \\ \left[ \frac{1}{\varepsilon} \partial_x u \right]_{\Gamma^\pm} = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, |u(x, y)| \rightarrow 0 & \text{quand } y \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4.2)$$

avec  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  et  $u(x, y) = B_z(x, y)$ . On effectue maintenant le changement d'échelle  $u_h = u\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}\right)$  dans l'équation (4.2) et on obtient le problème équivalent :

$$\begin{cases} \Delta u_h + h^2 \varepsilon_d k_0^2 u_h = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[, \\ \Delta u_h + h^2 \varepsilon_m(\omega) k_0^2 u_h = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times [-1, 1], \\ [u_h]_{y=\pm 1} = 0, \\ \left[ \frac{1}{\varepsilon} \partial_y u_h \right]_{y=\pm 1} = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, |u_h(x, y)| \rightarrow 0 & \text{quand } y \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (4.3)$$

On peut maintenant écrire formellement la limite du problème (4.3) lorsque  $h \rightarrow 0$  :

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [u_0]_{y=\pm 1} = 0, \\ \left[ \frac{1}{\varepsilon} \partial_y u_0 \right]_{y=\pm 1} = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, |u_0(x, y)| \rightarrow 0 & \text{quand } y \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4.4)$$

ou de façon équivalente

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla u_0 \right) (x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \forall x \in \mathbb{R}, |u_0(x, y)| \rightarrow 0 & \text{quand } y \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (4.5)$$

La justification du passage à la limite formelle peut être trouvée dans [TB16, TV17]. L'approximation du problème (4.3) par le problème (4.5) n'a physiquement de sens que lorsque le coefficient  $|h^2 k^2 \varepsilon| = |h^2 \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon|$  est très petit devant 1. Cette condition se vérifie lorsque  $h$  est petit devant la longueur d'onde de l'onde incidente, c'est à dire qu'il n'y a quasiment pas de propagation de l'onde à l'échelle de la couche métallique.

### 4.3 Calcul de la fonction de Green

Dans cette partie on cherche à calculer la fonction de Green  $G(x, y, x_0, y_0)$  solution du problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla G \right) (x, y, x_0, y_0) = \delta_{x_0}(x) \delta_{y_0}(y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \forall x \in \mathbb{R}, |G(x, y, x_0, y_0)| \rightarrow 0 & \text{quand } y \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (4.6)$$

Comme on cherche à construire la fonction de Green pour le champ diffracté par la couche métallique on s'intéresse aux solutions confinées autour de cette couche, c'est à dire ne se propageant pas dans la direction  $y$ . De cette façon la fonction de Green  $G$  ne contiendra que des modes "confinés" à la couche de métal. De plus on fera l'hypothèse que le point source  $(x_0, y_0)$  se trouve à l'extérieur de la couche de métal et sans perte de généralité on suppose que  $y_0 > 1$ . Pour calculer  $G$  on se propose, dans un premier temps, de calculer sa transformée de Fourier  $\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = FT_x(G(x, y, x_0, y_0))$  par rapport à la variable  $x$ , puis ensuite d'inverser cette transformation. On vérifie facilement que  $\widehat{G}$  est solution de l'équation

$$\left[ -\frac{t^2}{\varepsilon(y)} \widehat{G} + \partial_y \left( \frac{1}{\varepsilon(y)} \partial_y \widehat{G} \right) \right] (t, y, x_0, y_0) = e^{-itx_0} \delta_{y_0}(y), \quad (t, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.7)$$

On peut décomposer l'équation (4.7) en

$$[-t^2 + \partial_{yy}] \widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = \varepsilon(y) e^{-itx_0} \delta_{y_0}(y), \quad t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad (4.8)$$

avec les conditions de saut

$$[\widehat{G}]_{y=\pm 1} = 0, \quad (4.9)$$

$$\left[ \frac{1}{\varepsilon} \partial_y \widehat{G} \right]_{y=\pm 1} = 0. \quad (4.10)$$

**Remarque 4.3.1.** Les conditions de radiation que nous avons imposé n'autorisent que certaines solutions particulières aux équations de Maxwell. On a imposé que le champ diffracté soit décroissant dans la direction  $y$  perpendiculaire à la couche métallique. En revanche on autorise la propagation dans la direction  $x$  de la couche de métal. L'application de la transformée de Fourier par rapport à  $x$  permet alors de décomposer  $G$  selon les modes se propageant dans le métal. Dès lors on peut voir le paramètre de Fourier  $t$  comme la composante selon  $x$  d'un vecteur d'onde associé à une onde se propageant selon  $x$ . La sommation sur  $t \in \mathbb{R}$  (inversion de la transformée de Fourier) permet ainsi de récupérer la contribution de tous les modes. D'un point vue plus physique le point source génère toute une famille d'ondes de surface (plasmons de surface), confinées autour de la couche métallique.

### 4.3.1 Calcul de $\widehat{G}$

On peut maintenant calculer explicitement  $\widehat{G}$ , ce qui est l'objet de la Proposition 4.3.2. On pose d'abord  $k = \varepsilon_m / \varepsilon_d$  et

$$\eta = \frac{1+k}{1-k}.$$

**Proposition 4.3.2.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ , on dispose de l'expression de  $\widehat{G}$  selon les cas suivants :

- Au-dessous de la couche métallique ( $y < -1 < y_0$ ) :

$$\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = \frac{2k\varepsilon_d}{(1-k)^2} \frac{e^{-itx_0}}{|t|} \frac{e^{|t|(y-y_0)}}{e^{-4|t|} - \eta^2}. \quad (4.11)$$

Cela correspond à la partie du champ diffracté transmise à travers la couche métallique.

- Dans la couche métallique ( $1 \geq y \geq -1$ ) :

$$\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = -\frac{\varepsilon_m}{(1-k)} \frac{e^{-itx_0}}{|t|(\eta^2 - e^{-4|t|})} \left( \eta e^{|t|(y-y_0)} + e^{-|t|(y+y_0+2)} \right). \quad (4.12)$$

- Entre la couche métallique et le point source ( $1 < y < y_0$ ) :

$$\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = -\frac{\varepsilon_d e^{-itx_0}}{|t|} \left( \frac{1}{2} e^{|t|(y-y_0)} + \eta \frac{\sinh(2|t|) e^{-|t|(y+y_0)}}{e^{-4|t|} - \eta^2} \right). \quad (4.13)$$

- Au-dessus de la couche métallique et du point source ( $y > y_0 > 1 > 0$ ) :

$$\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = -\frac{\varepsilon_d e^{-itx_0}}{|t|} \left( \frac{1}{2} e^{-|t|(y-y_0)} + \eta \frac{\sinh(2|t|) e^{-|t|(y+y_0)}}{e^{-4|t|} - \eta^2} \right). \quad (4.14)$$

Le premier terme est l'onde générée par la source qui se propage vers le haut sans rencontrer la couche métallique. Le second terme est le champ diffracté réfléchi par la couche.

*Démonstration.* On va maintenant calculer  $\widehat{G}$  en utilisant la méthode du Wronskien que nous allons détailler ci-dessous. Soit  $\Phi_+(t, y)$  définie pour  $y > y_0$  une solution homogène du problème (4.7) et décroissante lorsque  $y \rightarrow +\infty$  :

$$\Phi_+(t, y) = e^{-|t|y}, \quad y > y_0,$$

et  $\Phi_-(t, y)$  définie pour  $y < y_0$  une solution homogène du problème (4.7) et décroissante lorsque  $y \rightarrow -\infty$  :

$$\Phi_-(t, y) = \begin{cases} e^{|t|y}, & y < -1, \\ Ae^{|t|y} + Be^{-|t|y}, & y \in ]-1, 1[, \\ Ce^{|t|y} + De^{-|t|y}, & y \in ]1, y_0[, \end{cases}$$

où  $A, B, C, D \in \mathbb{C}$  doivent être déterminées à partir des conditions de saut (4.9) et (4.10).

En utilisant la condition de saut (4.9) en  $y = -1$  on obtient

$$e^{-|t|} = Ae^{-|t|} + Be^{|t|},$$

puis en utilisant la condition de saut (4.10) en  $y = -1$  on a

$$\frac{1}{\varepsilon_d} e^{-|t|} = \frac{1}{\varepsilon_m} (Ae^{-|t|} - Be^{|t|}).$$

On peut alors écrire que

$$\begin{aligned} 2Ae^{-|t|} &= (1+k)e^{-|t|}, \\ 2Be^{|t|} &= (1-k)e^{-|t|}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$A = \frac{1}{2}(1 + k),$$

$$B = \frac{1}{2}(1 - k)e^{-2|t|}.$$

Les conditions de saut (4.9) et (4.10) en  $y = 1$  donnent

$$Ae^{|t|} + Be^{-|t|} = Ce^{|t|} + De^{-|t|},$$

$$\frac{1}{\varepsilon_m}(Ae^{|t|} - Be^{-|t|}) = \frac{1}{\varepsilon_d}(Ce^{|t|} - De^{-|t|}),$$

d'où

$$2Ce^{|t|} = A\left(1 + \frac{1}{k}\right)e^{|t|} + B\left(1 - \frac{1}{k}\right)e^{-|t|},$$

$$2De^{-|t|} = A\left(1 - \frac{1}{k}\right)e^{|t|} + B\left(1 + \frac{1}{k}\right)e^{-|t|}.$$

On obtient donc que

$$C = \frac{1}{4}(1 + k)\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{4}(1 - k)\left(1 - \frac{1}{k}\right)e^{-4|t|},$$

$$D = \frac{1}{4}(1 + k)\left(1 - \frac{1}{k}\right)e^{2|t|} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{k}\right)(1 - k)e^{-2|t|}.$$

On pose alors

$$\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = \frac{1}{d} \begin{cases} \Phi_+(t, y)\Phi_-(t, y_0), & y > y_0, \\ \Phi_-(t, y)\Phi_+(t, y_0), & y < y_0, \end{cases}$$

avec  $d$  le Wronskien tel que

$$\frac{1}{d}(\Phi_-\partial_y\Phi_+ - \Phi_+\partial_y\Phi_-)(t, y_0) = \varepsilon_d e^{-itx_0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$\partial_y\Phi_+(t, y_0) = -|t|e^{-|t|y_0},$$

$$\partial_y\Phi_-(t, y_0) = |t|(Ce^{|t|y_0} - De^{-|t|y_0}),$$

on obtient

$$d = -2C|t|\frac{1}{\varepsilon_d}e^{itx_0},$$

où on rappelle que

$$C = \frac{1}{4} \left( \frac{(1+k)^2}{k} - \frac{(1-k)^2}{k} e^{-4|t|} \right) = \frac{1}{4} \frac{(1-k)^2}{k} (\eta^2 - e^{-4|t|}).$$

Lorsque  $k \neq 0$  et  $k \neq 1$  on peut écrire que

$$d = -\frac{|t| e^{itx_0} (1-k)^2}{2\varepsilon_d k} (\eta^2 - e^{-4|t|})$$

On peut maintenant détailler l'expression de  $\widehat{G}$  selon la région dans laquelle se trouve  $y$ . Tout d'abord pour  $y < -1 < y_0$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \widehat{G}(t, y, x_0, y_0) &= \frac{1}{d} \Phi_-(t, y) \Phi_+(t, y_0), \\ &= \frac{1}{d} e^{|t|(y-y_0)}, \end{aligned}$$

et donc

$$\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = \frac{2k\varepsilon_d}{(1-k)^2} \frac{e^{-itx_0}}{|t|} \frac{e^{|t|(y-y_0)}}{e^{-4|t|} - \eta^2}.$$

Dans le diélectrique au-dessus de la couche métallique on doit distinguer deux cas :  $y > y_0$  et  $y < y_0$ . Pour  $y > y_0 > 1$ , on a

$$\begin{aligned} \widehat{G}(t, y, x_0, y_0) &= \frac{1}{d} \Phi_-(t, y_0) \Phi_+(t, y), \\ &= \frac{1}{d} \left( C e^{-|t|(y-y_0)} + D e^{-|t|(y+y_0)} \right), \end{aligned}$$

et sachant que

$$D = \frac{(k^2 - 1)}{2k} \sinh(2|t|),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{G}(t, y, x_0, y_0) &= -\frac{\varepsilon_d e^{-itx_0}}{2|t|} e^{-|t|(y-y_0)} - \eta \frac{\varepsilon_d e^{-itx_0} \sinh(2|t|)}{|t|(e^{-4|t|} - \eta^2)} e^{-|t|(y+y_0)}, \\ &= -\frac{\varepsilon_d e^{-itx_0}}{|t|} \left( \frac{1}{2} e^{-|t|(y-y_0)} + \eta \frac{\sinh(2|t|) e^{-|t|(y+y_0)}}{e^{-4|t|} - \eta^2} \right). \end{aligned}$$

Pour  $1 < y < y_0$ , on sait que

$$\begin{aligned}\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) &= \frac{1}{d} \Phi_-(t, y) \Phi_+(t, y_0), \\ &= \frac{1}{d} \left( C e^{|t|(y-y_0)} + D e^{-|t|(y+y_0)} \right),\end{aligned}$$

et donc il vient

$$\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = -\frac{\varepsilon_d e^{-itx_0}}{|t|} \left( \frac{1}{2} e^{|t|(y-y_0)} + \eta \frac{\sinh(2|t|) e^{-|t|(y+y_0)}}{e^{-4|t|} - \eta^2} \right).$$

Pour finir lorsque  $1 \geq y \geq -1$ , on a

$$\begin{aligned}\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) &= \frac{1}{d} \Phi_-(t, y) \Phi_+(t, y_0), \\ &= \frac{1}{d} \left( A e^{|t|(y-y_0)} + B e^{-|t|(y+y_0)} \right),\end{aligned}$$

et donc

$$\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = -\frac{\varepsilon_m}{(1-k)|t|(\eta^2 - e^{-4|t|})} \frac{e^{-itx_0}}{\eta e^{|t|(y-y_0)} + e^{-|t|(y+y_0+2)}}.$$

□

On vérifie facilement que lorsque  $\eta \neq 0$ , la fonction  $t \mapsto \widehat{G}(t, y, x_0, y_0)$  décroît exponentiellement quand  $t \rightarrow \pm\infty$ . Cependant cette fonction n'est pas intégrable en  $t = 0$  et elle n'appartient donc pas à l'espace  $L^1(\mathbb{R})$ . Dès lors la transformée de Fourier inverse n'est pas définie au sens classique de l'intégration. De plus pour les mêmes raisons,  $t \mapsto \widehat{G}(t, y, x_0, y_0)$  n'est pas une distribution tempérée et on ne peut pas utiliser la transformée de Fourier au sens des distributions. Pour donner un sens à la transformée inverse de  $t \mapsto \widehat{G}(t, y, x_0, y_0)$  on va régulariser l'intégrale divergente associée à l'aide de la partie finie de Hadamard dans la partie 4.3.2.

**Remarque 4.3.3.** Lorsque  $\eta \neq 0$ , on est assuré que la fonction  $t \mapsto \widehat{G}(t, y, x_0, y_0)$  décroît exponentiellement quand  $t \rightarrow \pm\infty$ . Cependant la situation  $\eta = 0$  se produit lorsque  $\varepsilon_m = -\varepsilon_d$  et donc que  $k = -1$ . Dans ce cas  $\widehat{G}$  dans le métal ( $-1 < y < 1$ ) s'écrit

$$\widehat{G}(t, y, x_0, y_0) = \frac{\varepsilon_m}{2} e^{-itx_0} e^{-|t|(y+y_0-2)},$$

qui ne décroît exponentiellement lorsque  $|t| \rightarrow +\infty$  que sous la condition  $y + y_0 - 2 > 0$ . Comme  $1 > y > -1$  il suffit que  $y_0 > 3$ . Si  $y + y_0 - 2 = 0$  on observe que  $G$  est une fonction delta de Dirac en  $x = x_0$  et  $y = 2h - y_0$ . Dans le cas où  $y + y_0 - 2h$  est négatif

alors  $t \mapsto \widehat{G}(t, y, x_0, y_0)$  n'est pas intégrable. Autrement dit si la source est trop proche de la couche de métal lorsque  $\eta = 0$ , alors le fonction de Green n'est pas correctement définie.

On peut également interpréter  $\widehat{G}$  comme l'amplitude associée à une onde se propageant selon  $x$  et de vecteur d'onde  $t$ . Ainsi les zéros de la relation de dispersion

$$\eta^2 - e^{-4|t|} = 0, \quad (4.15)$$

correspondent aux pôles de cette amplitude. Lorsque  $\text{Im } \varepsilon_m \neq 0$ ,  $\eta^2$  n'est pas sur l'axe réel et il n'existe aucune valeur de  $t \in \mathbb{R}$  solution de (4.15). En revanche la valeur  $t$  qui minimise le terme  $|\eta^2 - e^{-4|t|}|$  correspond à l'onde qui sera le plus fortement amplifiée, et ceci d'autant plus que  $\eta^2$  sera proche de l'axe réel. Dans la figure 4.2 on a affiché la valeur de  $|G|$  dans le diélectrique au-dessous de la couche de métal (région  $-10 \leq y \leq -1$ ,  $-20 \leq x \leq 20$ ) pour différentes valeurs du paramètre  $\eta^2$ . On observe que lorsque  $\text{Im } \eta^2 \rightarrow 0$ , un phénomène propagatif apparaît dans la direction  $x$ . Cela correspond à une onde amplifiée et confinée autour de la couche métallique dont la fréquence (calculée avec une FFT) est  $t_0/2\pi$  avec  $t_0 = |-\frac{1}{4} \log(\eta^2)|$ .

### 4.3.2 Régularisation de la fonction de Green

Nous avons vu que la transformée de Fourier inverse de  $\widehat{G}$  n'existe pas au sens classique de l'intégration ou au sens des distribution car elle est définie par une intégrale hypersingulière. La régularisation de Hadamard permet de donner un sens à ce type d'intégrale, tout en conservant de bonnes propriétés comme l'intégration par parties. Cette régularisation peut s'interpréter comme la continuation méromorphe d'une intégrale convergente. Plus précisément comme la continuation méromorphe en  $s$  de la distribution  $T(s)$  définie par

$$\langle T(s), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|^s} \varphi(t) dt.$$

Pour en savoir plus sur cette méthode de régularisation et le sur le traitement des intégrales hypersingulières le lecteur peut consulter [BF00, CFPF07, KCM94, Sel94]. Dans cette partie nous allons présenter succinctement la méthode de régularisation de Hadamard puis nous allons calculer la régularisation de la fonction de Green dans la Proposition 4.3.4.

On fixe  $f \in C_{pw}^1(\mathbb{R})$  tel que  $f(t) = o(\frac{1}{t})$  lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$  où  $C_{pw}^1(\mathbb{R})$  désigne

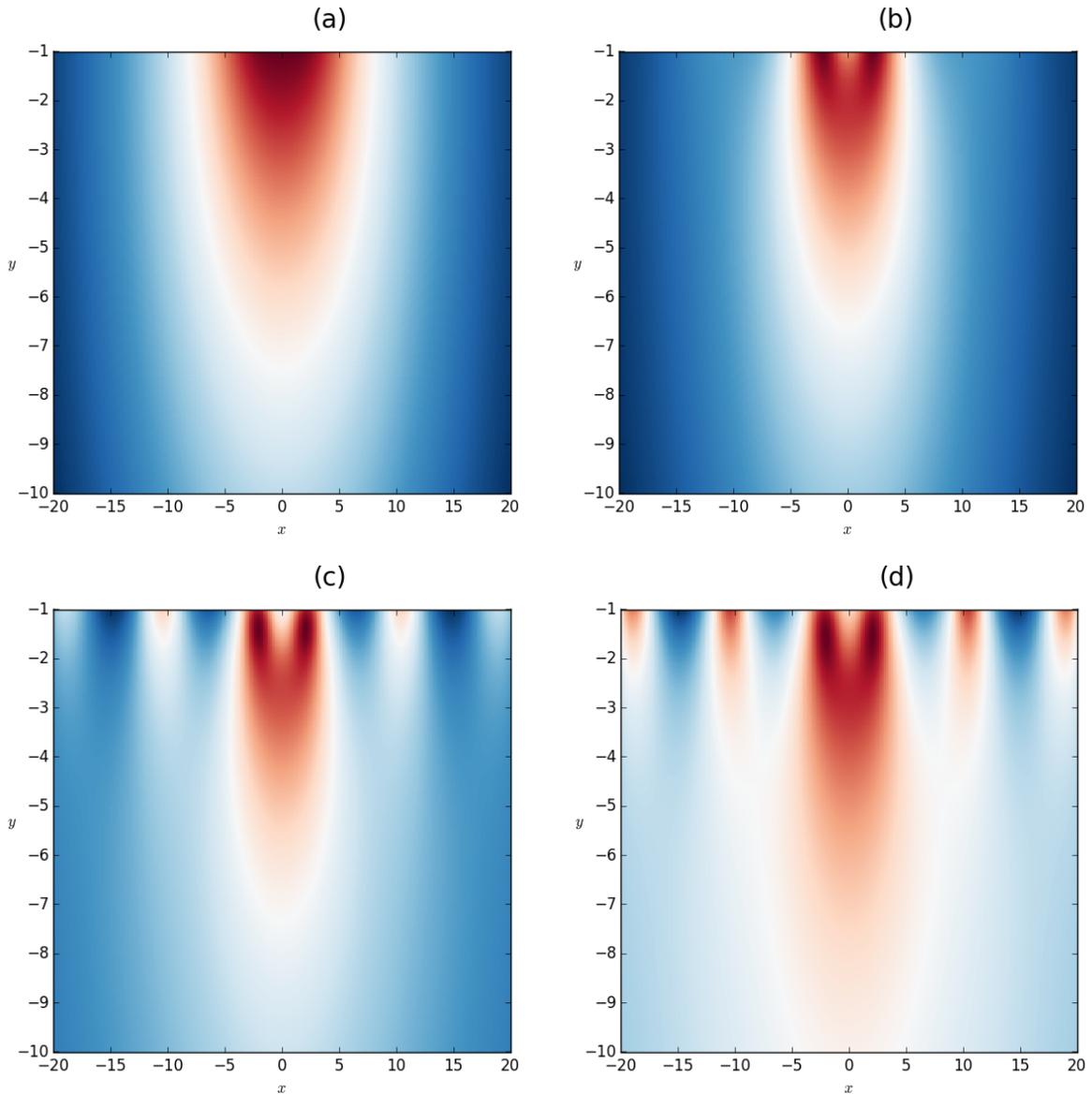


FIGURE 4.2 – Graphe de  $|G|$  dans la région  $-10 \leq y \leq -1$ ,  $-20 \leq x \leq 20$  pour différentes valeurs de  $\eta^2$ . Pour la figure (a):  $\eta^2 = 0.05 + 0.5i$ , (b):  $\eta^2 = 0.05 + 0.1i$ , (c):  $\eta^2 = 0.05 + 0.01i$ , (d):  $\eta^2 = 0.05 + 0.0001i$ . La couleur rouge correspond aux fortes intensités de  $|G|$  et la couleur bleu aux valeurs proches de zéro.

l'espace des fonctions continues et dont la dérivée est continue par morceaux.

On considère alors l'intégrale divergente suivante :

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{|t|} dt.$$

Pour la régulariser on introduit l'intégrale tronquée  $I_\rho$  définie par

$$I_\rho = \int_{|t| \geq \rho} \frac{f(t)}{|t|} dt = \int_{1 \geq |t| \geq \rho} \frac{f(t)}{|t|} dt + \int_{|t| \geq 1} \frac{f(t)}{|t|} dt.$$

On observe d'abord que l'intégrale sur le domaine  $|t| \geq 1$  est finie. De plus on note

$$J_\rho = \int_{1 \geq |t| \geq \rho} \frac{f(t)}{|t|} dt.$$

En utilisant le jeu d'écriture  $f(t) = f(0) + (f(t) - f(0))$  on peut maintenant écrire que

$$J_\rho = \int_{1 \geq |t| \geq \rho} \frac{f(0)}{|t|} dt + \int_{1 \geq |t| \geq \rho} \frac{f(t) - f(0)}{|t|} dt.$$

Comme  $f'$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  on peut affirmer que la seconde intégrale est finie lorsque  $\rho \rightarrow 0$  :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{1 \geq |t| \geq \rho} \frac{f(t) - f(0)}{|t|} dt < +\infty.$$

On a donc séparé la partie finie de  $I_\rho$  de la partie qui diverge lorsque  $\rho \rightarrow 0$ , à savoir :

$$\int_{1 \geq |t| \geq \rho} \frac{f(0)}{|t|} dt = -2f(0) \ln(\rho).$$

Ainsi en soustrayant la partie divergente de  $I_\rho$  à  $I_\rho$  on récupère la partie finie :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \{I_\rho + 2f(0) \ln(\rho)\} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{|t| \geq 1} \frac{f(t)}{|t|} dt + \int_{1 \geq |t| \geq \rho} \frac{f(t) - f(0)}{|t|} dt \right\} < +\infty.$$

Finalement la partie finie de Hadamard de  $I$  est donnée par :

$$\tilde{I} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \{I_\rho + 2f(0) \ln(\rho)\} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{|t| \geq \rho} \frac{f(t)}{|t|} dt + 2f(0) \ln(\rho) \right\}.$$

À l'aide de cette notion nous allons donner du sens à la transformée de Fourier inverse de  $\widehat{G}$ .

**Théorème 4.3.4.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ , la régularisation de la transformée de Fourier inverse de  $\widehat{G}$ , pour laquelle on conserve la notation  $G$ , est donnée par :

- Au-dessous de la couche métallique ( $y < -1 < y_0$ ) :

$$G(x, y, x_0, y_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{|t| \geq \rho} \frac{2\varepsilon_m}{(1-k)^2} \frac{e^{|t|(y-y_0)}}{|t|(e^{-4|t|} - \eta^2)} e^{it(x-x_0)} dt - \varepsilon_d \ln(\rho) \right\}. \quad (4.16)$$

- Dans la couche métallique ( $1 \geq y \geq -1$ ) :

$$G(x, y, x_0, y_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{|t| \geq \rho} \frac{\varepsilon_m}{(1-k)} \frac{e^{it(x-x_0)}}{|t|(\eta^2 - e^{-4|t|})} \left( \eta e^{|t|(y-y_0)} + e^{-|t|(y+y_0+2)} \right) dt - \varepsilon_d \ln(\rho) \right\}. \quad (4.17)$$

- Entre la couche métallique et le point source ( $1 < y < y_0$ ) :

$$G(x, y, x_0, y_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{|t| \geq \rho} \frac{\varepsilon_d}{|t|} \left( \frac{1}{2} e^{|t|(y-y_0)} + \eta \frac{\sinh(2|t|) e^{-|t|(y+y_0)}}{e^{-4|t|} - \eta^2} \right) e^{it(x-x_0)} dt + \varepsilon_d \ln(\rho) \right\}. \quad (4.18)$$

- Au-dessus de la couche métallique et du point source ( $y > y_0 > 1 > 0$ ) :

$$G(x, y, x_0, y_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{|t| \geq \rho} \frac{\varepsilon_d}{|t|} \left( \frac{1}{2} e^{-|t|(y-y_0)} + \eta \frac{\sinh(2|t|) e^{-|t|(y+y_0)}}{e^{-4|t|} - \eta^2} \right) e^{it(x-x_0)} dt + \varepsilon_d \ln(\rho) \right\}. \quad (4.19)$$

On va maintenant s'intéresser au comportement de  $G$  en fonction de la valeur de  $\eta^2$ .

## 4.4 Étude de la fonction de Green

Dans cette partie nous allons étudier le comportement de  $G$  (donnée par la Proposition 4.3.4) selon la valeur prise par le paramètre  $\eta^2 \in \mathbb{C}$ . En particulier on

cherche à distinguer les valeurs de  $\eta^2$  pour lesquelles  $G$  est singulière. On va se limiter à traiter le cas du diélectrique au-dessous de la couche métallique (c'est à dire  $y < -1$ ) et on va donc s'intéresser à l'intégrale suivante :

$$I(\eta^2) = \int_{\rho}^{+\infty} \frac{e^{t(y-y_0)}}{t(e^{-4t} - \eta^2)} \cos(t(x - x_0)) dt. \quad (4.20)$$

Avant d'étudier le comportement de  $I(\eta^2)$ , nous allons énoncer un résultat de localisation sur  $\eta^2$  qui est la conséquence directe de l'hypothèse (4.1).

**Lemme 4.4.1.** *Comme  $\operatorname{Re}(\varepsilon_m) < 0$  et  $\operatorname{Im}(\varepsilon_m) > 0$  on a  $|\eta|^2 < 1$ .*

On va donc étudier le comportement de  $I(\eta^2)$  sur le disque unité. On dispose d'un premier résultat permettant de montrer que  $I(\eta^2)$  est finie dès lors que  $\eta^2 \notin [0, 1]$ .

**Proposition 4.4.2.** *Soit  $C$  un ensemble compact inclus dans le disque unité et n'ayant pas d'intersection avec l'axe réel positif, alors  $I(\eta^2)$  est une fonction continue de  $\eta^2$  sur  $C$ .*

*Démonstration.* Comme  $e^{-4t} \in [0, 1]$  il existe une constante  $0 < c < 1$  tel que  $\forall \eta^2 \in C, \forall t \in [\rho, +\infty[, |e^{-4th} - \eta^2| > c$ . Ainsi on obtient

$$\left| \frac{e^{t(y-y_0)}}{t(e^{-4t} - \eta^2)} \cos(t(x - x_0)) \right| < \frac{1}{c\rho} e^{t(y-y_0)}$$

En sachant que  $(y - y_0) < 0$ , on peut alors utiliser le théorème de convergence dominée pour prouver le résultat attendu.  $\square$

On s'intéresse maintenant au comportement de  $I(\eta^2)$  sur le segment  $[0, 1]$ . On montre alors dans la Proposition 4.4.3 que  $I(\eta^2)$  est finie sauf potentiellement en  $\eta^2 = 0$  ou  $\eta^2 = 1$  et on explicite dans la Proposition 4.4.4 le comportement de  $I(\eta^2)$  lorsque  $\eta^2$  tend vers une valeur de l'ensemble  $]0, 1[$ .

**Proposition 4.4.3.** *Soit  $\eta^2 \in \mathbb{R}^+$  tel que  $1 > \eta^2 > 0$ , alors  $I(\eta^2)$  a une valeur finie.*

*Démonstration.* Soit  $t_0 = -\frac{\log(\eta^2)}{4} > 0$  l'unique racine de  $e^{-4t} - \eta^2$ . On peut calculer

$$\partial_t(e^{-4t} - \eta^2)(t_0) = \partial_t(e^{-4t} - e^{-4t_0})(t_0) \neq 0,$$

ce qui montre que  $t_0$  est une racine simple. On en déduit qu'il existe une fonction régulière  $R$  tel que dans le voisinage de  $t_0$  on ait

$$e^{-4t} - \eta^2 = (t - t_0)R(t_0),$$

avec  $R(t_0) \neq 0$ . On peut alors affirmer que  $I(\eta^2)$  est une intégrale impropre mais convergente par valeur principale de Cauchy.  $\square$

**Proposition 4.4.4.** *Si  $\operatorname{Re}(\eta^2) \neq 0$  alors la fonction  $I(\eta^2)$  possède une limite finie lorsque  $\operatorname{Im}(\eta^2) \rightarrow 0^+$  ou lorsque  $\operatorname{Im}(\eta^2) \rightarrow 0^-$ .*

*Démonstration.* Le résultat découle directement de la formule de Plemelj [Hen93, Ple64].  $\square$

Finalement on peut déduire des Propositions 4.4.2, 4.4.3 et 4.4.4 le théorème suivant.

**Théorème 4.4.5.**  *$I(\eta^2)$  est une fonction continue par morceaux pour  $1 \geq |\eta|^2 > 0$ .*

À ce stade on peut affirmer qu'aucune valeur de  $\eta^2$  dans le disque unité excepté zéro, ne fait diverger  $I(\eta^2)$ . Autrement la seule valeur de  $\eta^2$  susceptible de rendre  $G$  singulière est  $\eta^2 = 0$ . Il devient alors intéressant d'étudier le comportement de  $I(\eta^2)$  lorsque  $\eta^2$  tend vers 0. Formellement on peut déjà observer que lorsque  $\eta^2 = 0$ , on doit intégrer le terme  $\frac{1}{t} e^{t(y-y_0+4)}$  dont le comportement à l'infini est déterminé par le signe de  $y - y_0 + 4$ . Si  $y - y_0 + 4 < 0$  on s'attend à ce que  $I(\eta^2)$  soit bornée lorsque  $\eta^2$  tend vers 0, ce qui est l'objet de la Proposition 4.4.6. On remarque que si on impose que la source soit suffisamment loin de la couche métallique, à savoir  $y_0 > 3$  alors la condition  $y - y_0 + 4 < 0$  est toujours satisfaite pour  $y < -1$ .

**Proposition 4.4.6.** *Si  $y - y_0 + 4 < 0$  alors  $I(\eta^2)$  est bornée lorsque  $\eta^2$  tend vers 0.*

*Démonstration.* On note  $\alpha = -\frac{(y-y_0)}{4} - 1$  et on commence par faire le changement de variable  $z = e^{-4t}$  dans l'expression de  $I(\eta^2)$  et on obtient

$$I(\eta^2) = \int_0^{e^{-4\rho}} \frac{z^\alpha}{\log(z)(z - \eta^2)} \cos\left(-\frac{\log(z)(x - x_0)}{4}\right) dz,$$

que l'on peut majorer par

$$|I(\eta^2)| < \int_0^{e^{-4\rho}} \frac{z^\alpha}{|\log(z)(z - \eta^2)|} dz.$$

On note  $\phi(z) = \frac{z^\alpha}{|\log(z)|}$  et on effectue le jeu d'écriture suivant :

$$\int_0^{e^{-4\rho}} \frac{z^\alpha}{|\log(z)(z - \eta^2)|} dz = \int_0^{e^{-4\rho}} \frac{\phi(z) - \phi(\eta^2)}{|z - \eta^2|} dz + \phi(\eta^2) \int_0^{e^{-4\rho}} \frac{1}{|z - \eta^2|} dz.$$

Comme  $\phi$  est Hölder-continue il existe des constantes  $C > 0$  et  $0 < \theta \leq 1$  tel que

$$|\phi(z) - \phi(\eta^2)| < C|z - \eta^2|^\theta.$$

Ceci permet de prouver que

$$\lim_{\eta^2 \rightarrow 0} \int_0^{e^{-4\rho}} \frac{\phi(z) - \phi(\eta^2)}{|z - \eta^2|} dz < +\infty.$$

De plus une primitive de  $1/|z - \eta^2|$  est  $-\log(|z - \eta^2| + \operatorname{Re}(\eta^2) - z)$ . On peut alors écrire que

$$\int_0^{e^{-4\rho}} \frac{1}{|z - \eta^2|} dz = -\log(|e^{-4\rho} - \eta^2| + \operatorname{Re}(\eta^2) - e^{-4\rho}) + \log(|\eta^2| + \operatorname{Re}(\eta^2)),$$

et comme

$$\lim_{\eta^2 \rightarrow 0} \phi(\eta^2) \left| -\log(|e^{-4\rho} - \eta^2| + \operatorname{Re}(\eta^2)) + \log(|\eta^2| + \operatorname{Re}(\eta^2)) \right| < +\infty,$$

on en déduit que  $|I|$  est bornée quand  $\eta^2 \rightarrow 0$ . □

Il reste maintenant à traiter le cas où  $y - y_0 + 4 \geq 0$ . On s'attend à ce que  $I(\eta^2)$  diverge quand  $\eta^2 \rightarrow 0$  et on souhaiterait connaître plus précisément son comportement asymptotique. Cependant nous ne sommes pas parvenus à prouver une estimation satisfaisante de  $I(\eta^2)$  en zéro.

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [ACJ12] Faïçal Abdmouleh, Salma Charfi, and Aref Jeribi. On a characterization of the essential spectra of the sum and the product of two operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 386(1):83 – 90, 2012.
- [ACK<sup>+</sup>13] Habib Ammari, Giulio Ciraolo, Hyeonbae Kang, Hyundae Lee, and Graeme W Milton. Spectral theory of a Neumann–Poincaré-type operator and analysis of cloaking due to anomalous localized resonance. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 208(2):667–692, 2013.
- [AGG97] Chérif. Amrouche, Vivette. Girault, and Jean. Giroire. Dirichlet and Neumann exterior problems for the n-dimensional Laplace operator an approach in weighted Sobolev spaces. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 76(1):55 – 81, 1997.
- [AK07] Habib Ammari and Hyeonbae Kang. *Polarization and moment tensors: with applications to inverse problems and effective medium theory*, volume 162 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [AKT05] Habib Ammari, Hyeonbae Kang, and Karim Touibi. Boundary layer techniques for deriving the effective properties of composite materials. *Asymptotic Analysis*, 41(2):119–140, 2005.
- [AMRZ17] Habib Ammari, Pierre Millien, Matias Ruiz, and Hai Zhang. Mathematical analysis of plasmonic nanoparticles: the scalar case. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 224(2):597–658, 2017.

- [ARW<sup>+</sup>16] Habib Ammari, Matias Ruiz, Wei Wu, Sanghyeon Yu, and Hai Zhang. Mathematical and numerical framework for metasurfaces using thin layers of periodically distributed plasmonic nanoparticles. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472(2193), 2016.
- [BCL99] Haïm Brezis, Philippe G Ciarlet, and Jacques Louis Lions. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999.
- [BDT17] Eric Bonnetier, Charles Dapogny, and Faouzi Triki. Homogenization of the eigenvalues of the Neumann-Poincaré operator. *arXiv preprint arXiv:1702.01798*, 2017.
- [BF00] Luc Blanchet and Guillaume Faye. Hadamard regularization. *Journal of Mathematical Physics*, 41(11):7675–7714, 2000.
- [BF04] Guy Bouchitté and Didier Felbacq. Homogenization near resonances and artificial magnetism from dielectrics. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(5):377 – 382, 2004.
- [BM09] Hannalie Brooks and Manfred Möller. Spectra of multiplication operators in Sobolev spaces. *Results in Mathematics*, 55(3-4):281–293, 2009.
- [BO91] Ivo Babuška and John Osborn. Eigenvalue problems. *Handbook of numerical analysis*, 2:641–787, 1991.
- [Bof10] Daniele Boffi. Finite element approximation of eigenvalue problems. *Acta Numerica*, 19:1–120, 2010.
- [Bou05] Tahar Zamène Boulmezaoud. Inverted finite elements: a new method for solving elliptic problems in unbounded domains. 2005.
- [Bre10] Haïm Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.
- [BT13] Eric Bonnetier and Faouzi Triki. On the spectrum of the Poincaré variational problem for two close-to-touching inclusions in 2D. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 209(2):541–567, Aug 2013.
- [BTT16] Eric Bonnetier, Faouzi Triki, and Chun-Hsiang Tsou. Eigenvalues of the Neumann-Poincaré operator for two inclusions. 2016.
- [CFPF07] Youn-Sha Chan, Albert C Fannjiang, Glaucio H Paulino, and Bao-Feng Feng. Finite part integrals and hypersingular kernels. *Adv. Dyn. Syst.*, 14(S2):264–269, 2007.

- [Chr02] Snorre H Christiansen. *Résolution des équations intégrales pour la diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques-Stabilisation d'algorithmes itératifs et aspects de l'analyse numérique*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2002.
- [CK07] Charles T Campbell and Gibum Kim. Spr microscopy and its applications to high-throughput analyses of biomolecular binding events and their kinetics. *Biomaterials*, 28(15):2380–2392, 2007.
- [CMM82] Ronald R. Coifman, Alan McIntosh, and Yves Meyer. L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes lipschitziennes. *Annals of Mathematics*, 116(2):361–387, 1982.
- [Cos88] Martin Costabel. Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 19(3):613–626, 1988.
- [Cos15] Martin Costabel. On the spectrum of volume integral operators in acoustic scattering. In *Integral Methods in Science and Engineering*, pages 119–127. Springer, 2015.
- [CS85] Martin Costabel and Ernst Stephan. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *Journal of mathematical analysis and applications*, 106(2):367–413, 1985.
- [DAA<sup>+</sup>99] R. Dautray, M. Artola, J.C. Amson, J.L. Lions, P. Benilan, M. Bernadou, M. Cessenat, J.C. Nedelec, J. Planchard, and B. Scheurer. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Volume 4 Integral Equations and Numerical Methods*. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [DCC12] Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Lucas Chesnel, and Patrick Ciarlet. T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46(06):1363–1387, 2012.
- [DCC18] Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Camille Carvalho, and Patrick Ciarlet. Mesh requirements for the finite element approximation of problems with sign-changing coefficients. *Numerische Mathematik*, 138(4):801–838, 2018.

- [DCJZ10] Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Patrick Ciarlet Jr, and Carlo Maria Zwölf. Time harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(6):1912–1919, 2010.
- [EE18] David Edmunds and Des Evans. *Spectral theory and differential operators*. Oxford University Press, 2018.
- [EG13] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159. Springer Science & Business Media, 2013.
- [EG15] Lawrence Craig Evans and Ronald F Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC press, 2015.
- [EGB08] Thomas W Ebbesen, Cyriaque Genet, and Sergey I Bozhevolnyi. Surface-plasmon circuitry. *Physics Today*, 61(5):44, 2008.
- [ELRM06] P. G. Etchegoin, E. C. Le Ru, and M. Meyer. An analytic model for the optical properties of gold. *The Journal of Chemical Physics*, 125(16):164705, 2006.
- [FB97] D Felbacq and G Bouchitté. Homogenization of a set of parallel fibres. *Waves in Random Media*, 7(2):245–256, 1997.
- [Fol95] Gerald B Folland. *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, 1995.
- [Giv13] D. Givoli. *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*. Studies in Applied Mechanics. Elsevier Science, 2013.
- [GPK98] Dan Givoli, Igor Patlashenko, and Joseph B Keller. Discrete Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded domains. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 164(1-2):173–185, 1998.
- [Hec12] Frédéric Hecht. New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4):251–265, 2012.
- [Hen93] Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis, Volume 3: Discrete Fourier analysis, Cauchy integrals, construction of conformal maps, univalent functions*, volume 3. John Wiley & Sons, 1993.
- [Hom06] J. Homola. *Surface Plasmon Resonance Based Sensors*. Springer Series on Chemical Sensors and Biosensors. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

- [HP06] Antoine Henrot and Michel Pierre. *Variation et optimisation de formes: une analyse géométrique*, volume 48. Springer Science & Business Media, 2006.
- [Jac99] John David Jackson. *Classical electrodynamics*, 1999.
- [JC72] P. B. Johnson and R. W. Christy. Optical constants of the noble metals. *Phys. Rev. B*, 6:4370–4379, Dec 1972.
- [Kan96] Hyeonbae Kang. The layer potential technique for the inverse conductivity problem. *Inverse Problems*, 12(3):267–278, 6 1996.
- [Kan15] Hyeonbae Kang. Layer potential approaches to interface problems. *Inverse problems and imaging, Panoramas et Synthèses, Société Mathématique de France*, 2015.
- [KCM94] Toh Kim-Chuan and Subrata Mukherjee. Hypersingular and finite part integrals in the boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*, 31(17):2299–2312, 1994.
- [Kel12] Oliver Dimon Kellogg. *Foundations of Potential Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [KMK89] Rainer Kress, Vladimir Maz'ya, and Vladimir Kozlov. *Linear integral equations*, volume 17 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1989.
- [KPS07] Dmitry Khavinson, Mihai Putinar, and Harold S Shapiro. Poincaré's variational problem in potential theory. *Archive for rational mechanics and analysis*, 185(1):143–184, 2007.
- [Kuf85] Alois Kufner. *Weighted Sobolev Spaces*. Teubner-Texte zur Mathematik. B.G. Teubner, 1985.
- [LJJP03] Chiyang Luo, Steven G. Johnson, J. D. Joannopoulos, and J. B. Pendry. Subwavelength imaging in photonic crystals. *Phys. Rev. B*, 68:045115, Jul 2003.
- [LR59] Gunter Lumer and Marvin Rosenblum. Linear operator equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 10(1):32–41, 1959.
- [Mai07] Stefan Alexander Maier. *Plasmonics - Fundamentals and Applications*. Springer, 2007.
- [McL00] William C. H. McLean. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, 2000.

- [MKBP16] Marco Miniaci, Anastasiia Krushynska, Federico Bosia, and Nicola M Pugno. Large scale mechanical metamaterials as seismic shields. *New Journal of Physics*, 18(8):083041, 2016.
- [MM13] Yasunori Maekawa and Hideyuki Miura. On Poisson operators and Dirichlet-Neumann maps in  $H^s$  for divergence form elliptic operators with Lipschitz coefficients. 368, 07 2013.
- [Néd01] Jean-Claude Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations: integral representations for harmonic problems*, volume 144. Springer Science & Business Media, 2001.
- [NV11] Serge Nicaise and Juliette Venel. A posteriori error estimates for a finite element approximation of transmission problems with sign changing coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(14):4272–4282, 2011.
- [Orf16] Sophocles J. Orfanidis. *Electromagnetic Waves and Antennas*. 2016.
- [Ozb06] Ekmel Ozbay. Plasmonics: merging photonics and electronics at nanoscale dimensions. *science*, 311(5758):189–193, 2006.
- [Ple64] Josip Plemelj. *Problems in the sense of Riemann and Klein*. Interscience Publishers, 1964.
- [PP14] Karl-Mikael Perfekt and Mihai Putinar. Spectral bounds for the Neumann-Poincaré operator on planar domains with corners. *Journal d'Analyse Mathématique*, 124(1):39–57, 2014.
- [Ram01] Alexander G Ramm. A simple proof of the fredholm alternative and a characterization of the fredholm operators. *The American Mathematical Monthly*, 108(9):855–860, 2001.
- [Ros56] Marvin Rosenblum. On the operator equation  $BX - XA = Q$ . *Duke Math. J.*, 23(2):263–269, 06 1956.
- [RS78] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. IV Analysis of Operators*. Academic Press, New York, 1978.
- [SCC<sup>+</sup>05] Vladimir M Shalaev, Wenshan Cai, Uday K Chettiar, Hsiao-Kuan Yuan, Andrey K Sarychev, Vladimir P Drachev, and Alexander V Kildishev. Negative index of refraction in optical metamaterials. *Optics letters*, 30(24):3356–3358, 2005.

- [Sel94] A. Sellier. Hadamard's finite part concept in dimension  $n \geq 2$ , distributional definition, regularization forms and distributional derivatives. *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, 445(1923):69–98, 1994.
- [Sha07] Vladimir M Shalaev. Optical negative-index metamaterials. *Nature photonics*, 1(1):41, 2007.
- [SMJ<sup>+</sup>06] David Schurig, JJ Mock, BJ Justice, Steven A Cummer, John B Pendry, AF Starr, and DR Smith. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 314(5801):977–980, 2006.
- [SPW04] David R Smith, John B Pendry, and Mike CK Wiltshire. Metamaterials and negative refractive index. *Science*, 305(5685):788–792, 2004.
- [SSJ12] Vahid Siahpoush, Thomas Søndergaard, and Jesper Jung. Green's function approach to investigate the excitation of surface plasmon polaritons in a nanometer-thin metal film. *Phys. Rev. B*, 85:075305, Feb 2012.
- [Str07] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic theory*. John Wiley & Sons, 2007.
- [SU90] John Sylvester and Gunther Uhlmann. The Dirichlet to Neumann map and applications. *Inverse problems in partial differential equations*, pages 101–139, 1990.
- [SZ90] L. Ridgway Scott and Shangyou Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Mathematics of Computation*, 54(190):483–493, 1990.
- [TB16] Faouzi Triki and Éric Bonnetier. Asymptotic of plasmonic resonances. 2016. preprint.
- [TL86] Angus Ellis Taylor and David C. Lay. *Introduction to Functional Analysis*, 2Nd Ed. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, USA, 1986.
- [TV17] Faouzi Triki and Margaux Vauthrin. Mathematical modelization of the photoacoustic effect generated by the heating of metallic nanoparticles. *Quarterly of Applied Mathematics*, 01 2017.
- [VCF10] John Leonidas Volakis, Chi-Chih Chen, and Kyohei Fujimoto. *Small antennas: miniaturization techniques & applications*, volume 1. McGraw-Hill New York, 2010.

- [VGM<sup>+</sup>05] Alexandre Vial, Anne-Sophie Grimault, Demetrio Macías, Dominique Barchiesi, and Marc Lamy de la Chapelle. Improved analytical fit of gold dispersion: Application to the modeling of extinction spectra with a finite-difference time-domain method. *Phys. Rev. B*, 71:085416, Feb 2005.
- [Zwö08] Carlo Maria Zwölf. *Méthodes variationnelles pour la modélisation des problèmes de transmission d'onde électromagnétique entre diélectrique et métamatériau*. PhD thesis, Université Versailles - Saint-Quentin, 2008.

## Résumé

Dans cette thèse on étudie le comportement des ondes électromagnétiques lorsqu'elles rencontrent un matériau négatif, c'est-à-dire un matériau dont la permittivité électrique et/ou la perméabilité magnétique est négative. On se focalise ici sur le cas où seulement la permittivité change de signe. En dimension deux, les équations de Maxwell en régime harmonique se réduisent à deux sous-problèmes scalaires plus aisés à traiter. L'un de ces sous-problèmes autorise la propagation d'ondes de surface, appelées *plasmons de surface*, à l'interface entre le matériau négatif et le diélectrique, ce qui le rend particulièrement intéressant pour les applications. On se concentre sur ce sous-problème et en particulier sur sa partie principale qui correspond à une équation de conductivité. Cependant, comme la permittivité change de signe les outils classiques comme le Théorème de Lax-Milgram sont mis en défaut. Dans le premier chapitre, on introduit des outils utiles à la compréhension du reste de la thèse. On décrit en particulier comment l'étude l'équation de conductivité fait naturellement intervenir l'opérateur de Poincaré-Neumann dont le spectre encode les rapports de permittivité qui permettent l'existence des plasmons de surface. On présente une formulation intégrale et une formulation variationnelle de l'opérateur de Poincaré-Neumann et le lien qui existe entre ces deux formulations. Le second chapitre de ce manuscrit s'intéresse au caractère bien posé de l'équation de conductivité lorsque la permittivité change de signe. En utilisant des méthodes d'équations intégrales on propose une condition suffisante pour que ce problème soit bien posé. Dans le troisième chapitre de cette thèse, on se concentre sur le calcul numérique du spectre de l'opérateur de Poincaré-Neumann à l'aide des méthodes d'éléments finis. On s'intéresse à la convergence des valeurs propres calculées numériquement vers les valeurs propres théoriques. Dans le dernier chapitre, on étudie le problème de transmission des ondes électromagnétiques dans une couche métallique de permittivité négative sous l'angle des fonctions de Green. En particulier on s'intéresse au comportement de la fonction de Green pour ce problème lorsque l'épaisseur de la couche métallique tend vers zéro.

## Abstract

In this thesis, we study the behaviour of electromagnetic waves when interacting with a negative material. Such a material has a negative electric permittivity and/or magnetic permeability. Here we only focus on negative permittivity materials. In dimension two, Maxwell's equations in harmonic regime reduce to a couple of scalar, easier to tackle, sub-problems. One of these sub-problems allows surface waves to propagate along the interface between a negative material and a dielectric, which makes it very interesting for the applications. Such surface waves are called *surface plasmons*. Here, we focus on this sub-problem and more specifically on its main part which is a conductivity equation. Yet, as the permittivity sign changes between the negative material and the dielectric, it is not allowed to use the classical Lax-Milgram framework. In the first chapter, we introduce tools which are useful to understand the rest of this thesis. In particular, we describe how studying conductivity equation leads us to deal with the Poincaré-Neumann operator. The spectrum of this operator encodes permittivity ratios that allow surface plasmons to propagate. We propose both the integral formulation and the variational formulation of this operator, and we explain the link existing in-between. In the second chapter of this thesis, we focus on the well-posedness property of the conductivity equation when permittivity sign changes. Using integral equation methods, we propose a sufficient well-posedness condition for this problem. In the third chapter, we deal with the numerical computation of the Poincaré-Neumann operator spectrum using finite element methods. We are interested in the convergence of numerically computed eigenvalues to the theoretical ones. In the last chapter, we study the electromagnetic wave transmission problem in a metallic layer with a negative permittivity from the Green's function point of view. In particular, we investigate the Green's function behaviour when the metallic layer thickness goes to zero.