



**HAL**  
open science

# Etude de l'opérade Swiss-cheese et applications à la théorie des longs noeuds

Julien Ducoulombier

► **To cite this version:**

Julien Ducoulombier. Etude de l'opérade Swiss-cheese et applications à la théorie des longs noeuds. Topologie générale [math.GN]. Université Sorbonne Paris Cité, 2015. Français. NNT : 2015US-PCD090 . tel-02128412

**HAL Id: tel-02128412**

**<https://theses.hal.science/tel-02128412v1>**

Submitted on 14 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 13  
Laboratoire Analyse,  
Géométrie et Applications, UMR 7539

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

*Discipline* : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par :

**Julien DUCOULOMBIER**

le 10 Décembre 2015

## Étude de l'opérateur Swiss-Cheese et applications à la théorie des longs nœuds

*Directrice de thèse* : **Muriel LIVERNET**

### RAPPORTEURS

M.	Grégory GINOT	Maître de Conférences Habilité	(Paris 6)
M.	Paolo SALVATORE	Maître de Conférences Habilité	(Rome)

### JURY

M.	Christian AUSONI	Professeur	(Paris 13)
M.	Grégory GINOT	Maître de Conférences Habilité	(Paris 6)
M.	Éric HOFFBECK	Maître de Conférences	(Paris 13)
M.	Pascal LAMBRECHTS	Professeur	(Louvain-la-Neuve)
Mme.	Muriel LIVERNET	Professeur	(Paris 7)
M.	Paolo SALVATORE	Maître de Conférences Habilité	(Rome)



UNIVERSITÉ PARIS 13  
Laboratoire Analyse,  
Géométrie et Applications, UMR 7539

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

*Discipline* : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par :

**Julien DUCOULOMBIER**

le 10 Décembre 2015

## Étude de l'opérateur Swiss-Cheese et applications à la théorie des longs nœuds

*Directrice de thèse* : **Muriel LIVERNET**

### RAPPORTEURS

M.	Grégory GINOT	Maître de Conférences Habilité	(Paris 6)
M.	Paolo SALVATORE	Maître de Conférences Habilité	(Rome)

### JURY

M.	Christian AUSONI	Professeur	(Paris 13)
M.	Grégory GINOT	Maître de Conférences Habilité	(Paris 6)
M.	Éric HOFFBECK	Maître de Conférences	(Paris 13)
M.	Pascal LAMBRECHTS	Professeur	(Louvain-la-Neuve)
Mme.	Muriel LIVERNET	Professeur	(Paris 7)
M.	Paolo SALVATORE	Maître de Conférences Habilité	(Rome)



## Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier ma directrice de thèse, Muriel Livernet, pour m'avoir donné la possibilité de faire cette thèse et pour m'avoir guidé soigneusement tout au long de mes deux années de master et ces trois années de doctorat. Elle a fait preuve d'une très grande disponibilité ainsi que d'une patience infinie lors de la rédaction de mon premier article et de la thèse. Exigeante et soucieuse des détails, elle a toujours eu pour objectif développer en moi des qualités de chercheurs. Pour cela, je lui en suis grandement reconnaissant. J'ai vécu une très belle aventure et j'espère sincèrement qu'il en est de même pour elle.

Je suis très heureux de pouvoir remercier Grégory Ginot et Paolo Salvatore pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail et d'y avoir prêté autant d'attention. Leurs commentaires très positifs m'ont beaucoup touché et conforté dans mon choix de persévérer dans la recherche. Mes remerciements vont également à Christian Ausoni, Éric Hoffbeck et Pascal Lambrechts pour m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury de thèse. Je suis particulièrement reconnaissant envers Éric Hoffbeck pour ses conseils avisés ainsi que ses commentaires sur le manuscrit.

Une partie de mes recherches s'inspire des travaux de Victor Turchin et ce fut un grand privilège de bénéficier de ses conseils. Il s'est toujours montré très enthousiaste vis-à-vis de mes travaux et a toujours pris le temps de discuter avec moi durant ses brefs passages à Paris. Nos conversations m'ont beaucoup inspiré et je suis très heureux de le compter aujourd'hui parmi mes collaborateurs et amis. J'ai aussi eu le plaisir de faire de nombreuses rencontres (via l'ANR HOGT, le Young Topologist Meeting...) toutes plus enrichissantes les unes que les autres. J'ai ainsi pu faire la connaissance de jeunes (et moins jeunes) mathématiciens passionnés et accueillants comme Andrea Cesaro, David Chataur, Benoit Fresse, Alex Gonzalez, Najib Idrissi, Ran Levi, François Petit, Paul Arnaud Songhafoua Tsopméné, Bruno Vallette, Sinan Yalin ... pour ne citer qu'eux.

J'ai pu bénéficier pendant la thèse d'excellentes conditions de travail offertes par le LAGA. Je tiens particulièrement à féliciter Isabelle Barbotin et Yolande Jimenez pour leur disponibilité, leur efficacité et leur bonne humeur ainsi que l'équipe de topologie algébrique pour m'avoir accueilli à bras ouvert. Je tiens à remercier l'ensemble des doctorants avec qui j'ai eu l'occasion de partager un repas ou un café : Giuseppe Ancona, Amal Attouchi, Asma Azaiez, Irène Balleli, Roland Casalis, Guillaume Cloitre, Nicolas Garrel, Didier Lesesvre, Alexandre Montaru, Giuseppe Negro, Cuong Nguyen et Nicolas Ricka. Une mention spéciale pour les doctorants du bureau B410 avec qui je partage de nombreux et précieux souvenirs. Commençons par les aînés Amine Bey, David Hébert et Nikolay Veniaminov qui ont su créer une légende autour du bureau B410. On retrouve ensuite Taiwang Deng et Elizaveta Vasilevskaya qui se livrent une guerre russo-chinoise à travers des jeux de société (lorsque Taiwang n'est pas occupé à jouer avec son téléphone). Rémi Molinier, ami et camarade de thèse, qui hélas n'a pas pu assister à ma soutenance préférant se perdre au milieu du Kansas entre les vaches et les tornades. La discrète et souriante Eva Hoening et le nouveau/doyen Pierre Rousselin. Enfin n'oublions pas Annalaura Stingo et Bruno Stonek, le duo de pipelettes qui ont le don d'animer les conversations.

Au-delà de la recherche, j'ai eu le privilège d'enseigner à l'IUT de Villetaneuse ainsi qu'en première année de licence à Paris 13. Les encadrants des différents cours ont tous été formidables et cela m'a permis de mieux me concentrer sur ma thèse. Je remercie donc Jean-Claude Roy, Clément Foucard, Alain Rousseau et encore une fois David Hébert pour m'avoir facilité la tâche durant ces années. Ayant fait ma

---

scolarité à Paris 13, j'en profite pour remercier l'ensemble de mes professeurs qui ont su me transmettre leur passion pour les mathématiques : Olivier Brinon, Jean-Marc Delort, Didier Gamblin, Bob Oliver, Emmanuel Roy, Lionel Schwartz, Jörg Wildeshaus, Maher Zerzeri...

Je remercie évidemment mes parents pour leur soutien et leur affection. Ils ont fait de moi l'homme que je suis aujourd'hui et j'espère à travers cette thèse les rendre fiers de moi. Je remercie aussi l'ensemble de ma famille : Marie, Jean-François, Quentin, Dimitri, Romane, Emma... mes nombreux cousins, oncles et tantes pour leur soutien et leur affection. Mon équilibre mental est dû aussi aux amis que je me suis fait tout au long de ces années. Thomas et Caroline qui, malgré la distance qui nous sépare, ont toujours une pensée pour moi et me rendent visite dès qu'ils en ont l'occasion. Salomé qui m'a volé la première place ainsi qu'une tablette en première année de master. Sans oublier Matthieu qui me prépare de délicieux repas lorsque mon frigo est vide (merci pour ces nombreuses soirées). Je remercie aussi les membres du club de Viet Vo Dao qui sont tous formidables ainsi que mes camarades d'agrégation à Jussieu. Enfin, un immense merci à Liza qui a su me supporter durant ces trois années et a partagé avec moi les moments de joie comme les moments difficiles. Mes remerciements ne seraient pas complets sans mentionner mes deux petits antidépresseurs sur pattes, Faust et Litchi.

*À vous tous, un grand merci !*

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Opérade, espace cosimplicial et bimodule "infinitésimal"</b>	<b>13</b>
1.1 Opérade colorée dans une catégorie symétrique monoïdale . . . . .	13
1.1.1 Opérade colorée non symétrique . . . . .	13
1.1.2 Opérade colorée symétrique . . . . .	16
1.1.3 Exemples d'opérades colorées topologiques . . . . .	17
1.2 Espace cosimplicial et semi-cosimplicial . . . . .	19
1.2.1 Espaces cosimpliciaux . . . . .	19
1.2.2 Espaces semi-cosimpliciaux . . . . .	21
1.2.3 Interprétation des critères de May pour les espaces (semi)-cosimpliciaux . . . . .	22
1.3 $\Sigma$ -Bimodule infinitésimal coloré . . . . .	23
1.4 $\Sigma$ -Bimodule coloré . . . . .	26
1.5 Opérade colorée différentielle graduée . . . . .	29
<b>2 Catégorie modèle, espace des morphismes dérivé</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction aux catégories modèles et au théorème de transfert . . . . .	33
2.1.1 Catégorie modèle . . . . .	33
2.1.2 Catégorie homotopique . . . . .	35
2.1.3 Catégorie modèle cofibrement engendrée . . . . .	36
2.1.4 Catégorie monoïdale modèle . . . . .	37
2.1.5 Foncteur dérivé et paire de Quillen . . . . .	38
2.1.6 Le théorème de transfert . . . . .	38
2.2 Applications du théorème de transfert aux opérades et aux bimodules (infinitésimaux) . . . . .	39
2.2.1 Arbre planaire et opérade colorée libre . . . . .	40
2.2.2 Arbre à section borné et bimodule libre . . . . .	43
2.2.3 Arbre perlé et bimodule infinitésimal libre . . . . .	46
<b>3 Structure des totalisations d'une opérade pointée</b>	<b>53</b>
3.1 $\mathcal{SC}_1$ -algèbre extraite d'un morphisme de $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodules . . . . .	53
3.2 La résolution de Boardman-Vogt pour les opérades. . . . .	59
3.3 $\mathcal{SC}_2$ -algèbre extraite d'un morphisme de $O$ -bimodules . . . . .	60
3.4 $\mathcal{SC}_2$ -algèbre extraite d'une opérade pointée . . . . .	66
<b>4 Application à l'espace des entrelacs</b>	<b>69</b>
4.1 Espace des longs nœuds et opérade de Kontsevich . . . . .	69
4.2 $\mathcal{SC}_2$ -algèbre obtenue à partir d'une opérade symétrique . . . . .	73
4.3 Étude de l'espace des longs entrelacs . . . . .	75



---

<b>5</b>	<b>Suites spectrales associées à une opérade pointée</b>	<b>79</b>
5.1	Structure de $sc_2$ -algèbre sur le couple d'homologies singulières . . . . .	79
5.1.1	Construction du crochet de degré 1 . . . . .	80
5.1.2	Construction du produit commutatif . . . . .	83
5.1.3	Construction du produit associatif . . . . .	85
5.1.4	Construction du module à gauche . . . . .	85
5.2	Structure de $sc_2$ -algèbre sur le couple d'homologies de Hochschild . . . . .	86
5.2.1	Construction du crochet de degré 1 . . . . .	86
5.2.2	Construction du produit commutatif . . . . .	86
5.2.3	Construction du produit associatif . . . . .	87
5.2.4	Construction du module à gauche . . . . .	87
5.3	Le morphisme de Bousfield . . . . .	87
5.3.1	La théorie des modèles acycliques . . . . .	89
5.3.2	Préservation de la structure de $sc_2$ -algèbre . . . . .	91
5.3.3	L'isomorphisme de Bousfield . . . . .	93
5.4	Suites spectrales de Bousfield et applications aux longs entrelacs . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Delooping relatif d'ordre supérieur</b>	<b>97</b>
6.1	La Boardman-Vogt résolution pour les $(P-Q)_\Sigma$ bimodules . . . . .	97
6.2	Delooping relatif associé à un morphisme d'opérades colorées . . . . .	102
6.3	Généralisation grâce à la conjecture de Dwyer-Hess . . . . .	112
6.4	Application à l'espace des longs nœuds en dimension supérieure . . . . .	113
6.4.1	Rappel sur le calcul de plongements. . . . .	113
6.4.2	Lien entre la tour de Taylor et les bimodules. . . . .	114
6.4.3	Application à l'espace des $(k)$ -immersions relatives. . . . .	115
	<b>Bibliographie</b>	<b>119</b>

## Introduction

C'est en 1963 que Stasheff introduit pour la première fois une famille d'espaces topologiques munie d'opérations permettant de comprendre la structure des espaces de lacets. Il réussit ainsi à donner une caractérisation des espaces ayant le type d'homotopie d'un espace de lacets à travers la notion de  $A_\infty$ -espace. Cependant, il faut attendre le début des années 1970 pour que Boardman, Vogt et May introduisent la notion d'opérade dans le but de modéliser les structures sur les espaces de lacets itérés. Depuis, cette théorie s'est développée touchant d'autres domaines que la topologie algébrique tels que la géométrie algébrique ou la géométrie différentielle. Les opérades sont ainsi devenues un outil efficace dans l'étude des structures sur les espaces topologiques mais aussi dans la compréhension des algèbres (à homotopie près) dans une catégorie symétrique monoïdale modèle quelconque.

Dans le but de généraliser les travaux de Stasheff, Boardman et Vogt ont introduit l'opérade des petits cubes  $C_d$  de telle sorte que les espaces de lacets  $d$ -itérés possèdent naturellement une structure de  $C_d$ -algèbre. Dans [31], May donne la preuve d'une conjecture de Boardman et Vogt montrant ainsi que l'opérade  $C_d$  caractérise les espaces de lacets  $d$ -itérés. Plus précisément, le critère de May affirme le fait suivant :

*Un espace topologique est une  $E_d$ -algèbre grouplike si et seulement si il est faiblement équivalent à un espace de lacets  $d$ -itéré,*

avec  $E_d$  une opérade faiblement équivalent à  $C_d$ . Cependant, il n'est pas évident de montrer qu'un espace possède une structure de  $E_d$ -algèbre. C'est en 2004, dans l'article [32], que McClure et Smith donnent une interprétation combinatoire du critère de May lorsque l'espace topologique provient de la totalisation d'un espace cosimplicial. En particulier, ils remarquent que la famille d'espaces composant une opérade multiplicative (i.e. une opérade sous l'opérade associative  $\mathcal{A}s$ ) dispose d'une structure cosimpliciale dont la totalisation est une  $E_2$ -algèbre. Plus explicitement, si  $hoTot$  désigne le foncteur dérivé de la totalisation alors McClure et Smith démontrent l'énoncé suivant :

*Si  $O$  est une opérade multiplicative et  $O^\bullet$  désigne l'espace cosimplicial associé alors les espaces topologiques  $Tot(O^\bullet)$  et  $hoTot(O^\bullet)$  sont des  $E_2$ -algèbres.*

Les critères énoncés jusqu'à présent donnent l'existence de l'espace de lacets  $d$ -itéré mais ne permettent pas de le déterminer explicitement. En 2010, Dwyer et Hess dans [14] et indépendamment Turchin dans [49] ont été capables d'identifier l'espace de lacets double associé à la totalisation homotopique d'une opérade multiplicative. Pour cela, Turchin utilise la catégorie des bimodules ainsi que la catégorie des bimodules infinitésimaux sous une opérade  $P$ , notées respectivement  $Bimod_P$  et  $Ibimod_P$ . Il remarque alors que la totalisation homotopique d'un espace cosimplicial est faiblement équivalent à un espace de morphismes dérivé dans la catégorie des bimodules infinitésimaux sous l'opérade associative. Dans le cas où  $O$  est une opérade multiplicative et  $O^\bullet$  désigne l'espace cosimplicial associé, Turchin démontre les équivalences faibles suivantes à condition que les espaces  $O(0)$  et  $O(1)$  soient contractiles :

$$hoTot(O^\bullet) \simeq Ibimod_{\mathcal{A}s}^h(\mathcal{A}s; O) \simeq \Omega Bimod_{\mathcal{A}s}^h(\mathcal{A}s; O) \text{ et } Bimod_{\mathcal{A}s}^h(\mathcal{A}s; O) \simeq \Omega Operad^h(\mathcal{A}s; O),$$

avec  $C^h$  la catégorie dérivée associée à une catégorie modèle  $C$ .

L'objet d'étude de cette thèse est l'opérade *Swiss-Cheese*, notée  $SC_d$ , qui est une version relative de l'opérade des petits cubes. C'est une opérade colorée, ayant pour couleurs l'ensemble  $S = \{o; c\}$ , qui a été introduite par Voronov dans [51]. En particulier, si  $f : A \rightarrow X$  est une application continue pointée alors le couple d'espaces topologiques :

$$\left( \Omega^d X ; \text{hofib}(\Omega^{d-1} A \rightarrow \Omega^{d-1} X) \right) \quad (1)$$

est une  $SC_d$ -algèbre. Contrairement au cas de l'opérade  $C_d$ , il n'est pas établi dans la littérature que l'opérade  $SC_d$  caractérise les couples de la forme (1) de manière générale. On sait uniquement que  $SC_1$  fournit une caractérisation grâce aux travaux de Hoefel, Livernet et Stasheff dans [26] visant à étudier les  $A_\infty$ -morphisms. Notre premier objectif est d'obtenir un théorème similaire à celui de Dwyer-Hess et Turchin dans le cas relatif. Pour cela, on se ramène à l'étude des espaces semi-cosimpliciaux dont la définition est celle des espaces cosimpliciaux sans les codégénérescences. De même, on a la notion de semi-totalisation qui, contrairement à la totalisation classique, est un invariant homotopique des espaces cosimpliciaux. Plus précisément, Dwyer et Dror montrent dans [12] qu'on peut se ramener à l'étude des espaces semi-cosimpliciaux grâce à l'énoncé suivant :

*Si  $X^\bullet$  est un espace cosimplicial alors la totalisation homotopique de  $X^\bullet$  est faiblement équivalent à la semi-totalisation de  $X^\bullet$  (obtenu en oubliant les codégénérescences).*

Dans le cas relatif, ce qui joue le rôle de l'opérade associative est l'opérade colorée  $\pi_0(SC_1)$  munie de la topologie discrète. Les  $\pi_0(SC_1)$ -algèbres sont les couples  $(X; Y)$  avec  $X$  un monoïde topologique et  $Y$  un  $X$ -module à gauche topologique. On désignera par  $\mathcal{A}ct_{>0}$  l'opérade colorée  $\pi_0(SC_1)$  et par  $\mathcal{A}ct$  la version unitaire de  $\mathcal{A}ct_{>0}$ . On montre qu'à partir d'une opérade pointée  $O$  (i.e. un opérade colorée au-dessous de  $\mathcal{A}ct$ ) on peut extraire un couple d'espaces semi-cosimpliciaux défini par :

$$O_c(n) = O(\underbrace{c, \dots, c}_n; c) \quad \text{et} \quad O_o(n) = O(\underbrace{c, \dots, c}_n, o; o).$$

Pour montrer que le couple d'espaces topologiques provenant des semi-totalisations est faiblement équivalent à une  $SC_2$ -algèbre explicite, on utilise dans cette thèse une méthode proche de celle employée par Turchin basée sur l'étude des bimodules (infinitésimaux) sous une opérade colorée. Dans un premier temps, on montre dans le chapitre 2 que la démonstration de Berger et Moerdijk visant à définir une structure de catégorie modèle sur la catégorie des opérades colorées peut s'adapter pour la catégorie des bimodules (infinitésimaux) :

**Théorème.** [Théorèmes 2.2.5, 2.2.12 et 2.2.20] *Les catégories des opérades colorées, des bimodules et des bimodules infinitésimaux topologiques possèdent une structure de catégorie modèle cofibrément engendrée dont tous les objets sont fibrants.*

Ce théorème nous permet de construire des remplacements cofibrants explicites. En particulier, grâce à l'étude d'un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}ct_{>0}$  en tant que  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule infinitésimal, on démontre que l'espace de morphismes dérivé  $\text{Ibimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}^h(\mathcal{A}ct_{>0}; O)$  est déterminé (à équivalence faible près) par sa partie fermée. Autrement dit, si  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow O$  est un morphisme de  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodules infinitésimaux alors  $(O_c; O_o)$  est un couple d'espaces semi-cosimpliciaux et on a l'équivalence faible :

$$\text{Ibimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}^h(\mathcal{A}ct; O) \simeq \text{sTot}(O_c).$$

L'étude des différents remplacements cofibrants permet d'extraire, dans le chapitre 3, un couple d'espaces faiblement équivalent à une  $SC_2$ -algèbre explicite à partir d'une opérade pointée. Notons que le théorème qui suit a fait l'objet d'un article [13] à paraître dans *Algebraic and Geometric Topology*.

**Théorème.** [Théorème 3.4.3] *Soit  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow O$  un morphisme d'opérades colorées avec  $O(; c)$ ,  $O(c; c)$  et  $O(o; o)$  des espaces contractiles. Si  $(O_c; O_o)$  désigne le couple d'espaces semi-cosimpliciaux associé à  $\eta$  alors  $(\text{sTot}(O_c); \text{sTot}(O_o))$  est faiblement équivalent à une  $SC_2$ -algèbre explicite :*

$$\left( \Omega^2 \text{Operad}^h(\mathcal{A}S_{>0}; O_c); \Omega^2(\text{Operad}^h(\mathcal{A}S_{>0}; O_c); \text{Operad}_{\{o; c\}}^h(\mathcal{A}ct_{>0}; O)) \right).$$

Une première application de ce théorème provient de l'étude des espaces de longs nœuds. Dans une série d'articles [41, 42, 43], Sinha démontre que l'espace des longs nœuds dans  $\mathbb{R}^n$  modulo les immersions, défini comme la fibre homotopique :

$$\mathcal{L}_{1;n} := \text{hofib}\left(\text{Emb}_c(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Imm}_c(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)\right),$$

dispose d'un remplacement cosimplicial à condition que la dimension de l'espace d'arrivée soit strictement supérieure à 3. Ce remplacement cosimplicial provient d'une opérade multiplicative  $\mathcal{K}_n$ , appelée l'opérade de Kontsevich, qui fut initialement introduite dans le but d'avoir une résolution cofibrante de l'opérade des petits cubes. Grâce à cela, pour  $n > 3$  on sait identifier l'espace  $\mathcal{L}_{1;n}$  à un espace de lacets double explicite :

$$\mathcal{L}_{1;n} \simeq \Omega^2 \text{Operad}^h(\mathcal{A}_{S_{>0}}; \mathcal{K}_n).$$

Par la suite, Munson et Volić démontrent dans [35] que l'espace des longs entrelacs à  $k$  brins modulo les immersions, défini comme la fibre homotopique :

$$\mathcal{L}_{k;n} := \text{hofib}\left(\text{Emb}_c\left(\bigsqcup_{i=1}^k \mathbb{R}; \mathbb{R}^n\right) \longrightarrow \text{Imm}_c\left(\bigsqcup_{i=1}^k \mathbb{R}; \mathbb{R}^n\right)\right),$$

possède aussi une résolution cosimpliciale pouvant s'exprimer comme un décalage de l'opérade de Kontsevich :

$$\Phi_k(\mathcal{K}_n)(i) = \mathcal{K}_n(k \times i).$$

L'objet ainsi obtenu ne possède pas de structure opéradique. Cependant, Dwyer et Hess montrent dans [15] qu'il est muni d'une structure de bimodule sous l'opérade associative. Par conséquent,  $\mathcal{L}_{k;n}$  a le type d'homotopie d'un espace de lacets à condition que  $n > 3$ . On montre dans le chapitre 4 que le couple  $(\mathcal{L}_{1;n}; \mathcal{L}_{k;n})$  est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_2$ -algèbre explicite. Plus précisément, ce résultat découle du fait qu'on peut construire une  $\mathcal{SC}_2$ -algèbre à partir d'une opérade symétrique multiplicative :

**Théorème.** [Théorème 4.2.5] *Soit  $O$  une opérade symétrique multiplicative avec  $O(0)$  et  $O(1)$  des espaces contractiles. Le couple  $(s\text{Tot}(O); s\text{Tot}(\Phi_k(O)))$  est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_2$ -algèbre explicite :*

$$\left(\Omega^2 \text{Operad}^h(\mathcal{A}_{S_{>0}}; O); \Omega^2\left(\text{Operad}^h(\mathcal{A}_{S_{>0}}; O); \text{Operad}_{\{0,c\}}^h(\mathcal{A}_{\text{Act}_{>0}}; \Theta)\right)\right),$$

avec  $\Theta$  une opérade colorée construite à partir de  $O$  et  $\Phi_k(O)$ .

Le chapitre 5 est dédié à l'étude des structures dans la catégorie des espaces vectoriels différentiels gradués. A partir d'un espace semi-cosimplicial  $X^\bullet$ , on peut lui associer un espace vectoriel différentiel gradué en prenant l'homologie singulière de la semi-totalisation  $s\text{Tot}(X^\bullet)$ . On peut aussi lui associer l'homologie de Hochschild du bicomplexe  $\{C_*^s(X^\bullet)\}$  que l'on note  $HH_*(X^\bullet)$ . Dans [7], Bousfield explicite un morphisme entre ces deux objets :

$$\varphi : H_*(s\text{Tot}(X^\bullet)) \longrightarrow HH_*(X^\bullet),$$

et énonce les conditions pour que  $\varphi$  soit un isomorphisme. Si l'espace semi-cosimplicial provient d'une opérade multiplicative alors  $s\text{Tot}(X^\bullet)$  est faiblement équivalent à une  $C_2$ -algèbre. Par conséquent, l'homologie singulière possède une structure de Gerstenhaber décrite explicitement par Sakaï dans [38]. Sous les mêmes conditions, Gerstenhaber et Voronov montrent dans [19] que l'homologie de Hochschild possède aussi une structure de Gerstenhaber explicite. Le résultat principal de l'article [38] affirme que :

*Si  $X^\bullet$  provient d'une opérade multiplicative alors le morphisme de Bousfield est un morphisme de Gerstenhaber préservant la structure définie par Sakaï sur l'homologie singulière et la structure définie par Gerstenhaber et Voronov sur l'homologie de Hochschild.*

La suite spectrale de Bousfield permet de calculer l'homologie singulière associée à la semi-totalisation  $s\text{Tot}(X^\bullet)$ . Si l'espace semi-cosimplicial provient d'une opérade multiplicative alors la suite spectrale possède une structure de Gerstenhaber. Par conséquent, si la suite spectrale converge, on peut se demander si elle calcule l'homologie singulière en tant qu'algèbre de Gerstenhaber. Il est important de comprendre le morphisme de Bousfield car la page  $E^2$  de la suite spectrale de Bousfield correspond à l'homologie de Hochschild.

Dans le chapitre 5, on adapte les résultats au cas coloré. A partir d'un couple d'espaces semi-cosimpliciaux  $(X_c^\bullet; X_o^\bullet)$ , on dispose des couples d'espaces vectoriels différentiels gradués :

$$(H_*(sTot(X_c^\bullet)); H_*(sTot(X_o^\bullet))) \quad \text{et} \quad (HH_*(X_c^\bullet); HH_*(X_o^\bullet)),$$

correspondant respectivement aux homologie singulières et aux homologies de Hochschild. On montre que si le couple d'espaces semi-cosimpliciaux provient d'une opérade pointée alors les deux couples d'homologies possèdent une structure de  $H_*(SC_2)$ -algèbre explicite et l'application de Bousfield induit un morphisme de  $H_*(SC_2)$ -algèbres. On termine le chapitre 5 par l'étude des suites spectrales de Bousfield. On énonce notamment un critère permettant de faire le lien entre le couple d'homologie singulière issu d'une opérade symétrique multiplicative topologique et la page  $E^2$  des suites spectrales de Bousfield :

**Théorème.** [Corollaire 5.4.9] *Soit  $O$  une opérade symétrique multiplicative topologique. Si  $O$  est  $\Sigma[\mathcal{A}_{S\mathbb{K}}]$ -formelle alors on a un isomorphisme de  $H_*(SC_2)$ -algèbres entre  $(H_*(sTot(O)); H_*(sTot(\Phi_k(O))))$  et le couple d'homologies provenant des pages  $E^2$  des suites spectrales de Bousfield issues des espaces cosimpliciaux  $O$  et  $\Phi_k(O)$ .*

L'étude des opérades pointées dans les chapitres 1 à 3 permet de démontrer dans le chapitre 4 que la paire  $(\mathcal{L}_{1;n}; \mathcal{L}_{k;n})$  est faiblement équivalente à une  $SC_2$ -algèbre. Cependant il est souvent difficile d'identifier un espace topologique à la semi-totalisation d'un espace semi-cosimplicial. Dans de nombreux cas les relations semi-cosimpliciales sont vérifiées uniquement à homotopie près. Par exemple on ne dispose pas de remplacements cosimpliciaux pour les espaces de plongements  $Emb(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$  et  $Emb(\bigsqcup_i \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$  lorsque la dimension de la variété source est strictement supérieure à 1. Il est néanmoins possible de les identifier à des espaces de bimodules infinitésimaux sous l'opérade  $C_d$ . C'est pourquoi il est nécessaire de généraliser les résultats du chapitre 3 afin d'étudier ces cas de figure. Pour cela on a besoin d'une méthode pour construire des remplacements cofibrants de manière fonctorielle dans la catégorie des bimodules. Dans le chapitre 6, on montre que la résolution de Boardman-Vogt admet un analogue dans le contexte des bimodules. A partir d'un bimodule  $M$ , on construit un bimodule  $\mathcal{B}(M)$  de telle sorte que l'on ait le théorème suivant :

**Théorème.** [Théorème 6.1.3] *Soient  $P, Q$  deux  $S$ -opérades symétriques bien pointées  $\Sigma$ -cofibrantes et  $M$  un  $P$ - $Q$  bimodule. Si  $M$  est cofibrant en tant que  $\Sigma$ -collection alors  $\mathcal{B}(M)$  est un remplacement cofibrant de  $M$  en tant que  $P$ - $Q$  bimodule.*

Cela nous permet d'adapter la preuve du delooping du chapitre 3 et ainsi d'extraire un couple d'espaces faiblement équivalent à une  $SC_1$ -algèbre explicite à partir d'un morphisme d'opérades colorées ayant pour couleurs l'ensemble  $S = \{o; c\}$ . Notons qu'à partir de deux opérades symétriques topologiques  $P$  et  $Q$ , on définit l'opérade colorée symétrique topologique  $P \oplus Q$  de la façon suivante :

$$P \oplus Q(c, \dots, c; c) = Q(n) \text{ pour } n \geq 0, \quad P \oplus Q(o, \dots, o; o) = P(n) \text{ pour } n > 0$$

et l'ensemble vide pour les autres configurations. On introduit alors la sous-catégorie  $Op[P; Q]$  constituée des opérades colorées symétriques au-dessous de  $P \oplus Q$ . On démontre ainsi le théorème suivant :

**Théorème.** [Théorème 6.2.16] *Soient  $P$  et  $Q$  deux opérades  $\Sigma$ -cofibrantes et bien pointées, avec  $P(0) = \emptyset$ , et  $\eta : O \rightarrow O'$  un morphisme dans la catégorie  $Op[P; Q]$ . Si  $\mathcal{R}(O)$  est  $\Sigma$ -cofibrant alors le couple d'espaces topologiques*

$$\left( \Sigma\text{-Bimod}_Q^h(Q; O'_c) ; \Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}^h(\mathcal{R}(O); \mathcal{R}(O')) \right)$$

*est faiblement équivalent à une  $SC_1$ -algèbre explicite :*

$$\left( \Omega\left( \Sigma\text{-Operad}^h(Q; O'_c) \right) ; \Omega\left( \Sigma\text{-Operad}^h(Q; O'_c) ; Op[P; \emptyset]^h(\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q) ; O') \right) \right).$$

*avec  $\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q)$  une opérade colorée issue du  $P$ - $Q$  bimodule  $\mathcal{R}(O) := \{O(c, \dots, c; o)\}$ .*

Pour généraliser le théorème ci-dessus afin de reconnaître des  $SC_{d+1}$ -algèbres à partir de morphismes d'opérades colorées, on doit admettre la conjecture de Dwyer et Hess suivante :

$$\text{Si } \eta : C_d \rightarrow M \text{ est un morphisme de } C_d\text{-bimodules, avec } M(0) \simeq * \text{ et } M(1) \simeq *, \\ \text{alors on a l'équivalence faible } \text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; M) \simeq \Omega^d \text{Bimod}_{C_d}^h(C_d; M).$$

**Théorème.** [Théorème 6.3.4] Admettons que la conjecture de Dwyer et Hess soit vraie. Si  $\eta : \mathcal{L}(C_d; C_d^{>0}; C_d) \rightarrow O$  est un morphisme dans la catégorie  $Op[C_d^{>0}; C_d]$ , avec  $O(; c) \simeq O(c; c) \simeq *$  et  $O(; o) \simeq O(c; o) \simeq *$ , alors le couple d'espaces topologiques

$$\left( \text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; O_c); \text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; \mathcal{R}(O)) \right),$$

est faiblement équivalent à une algèbre sous  $\mathcal{SC}_{d+1}$  explicite :

$$\left( \Omega^{d+1} \text{Operad}^h(C_d; O_c); \Omega^{d+1} \left( \text{Operad}^h(C_d; O_c); Op[C_d^{>0}; \emptyset]^h(\mathcal{L}(C_d; C_d^{>0}; C_d); O) \right) \right).$$

Une application de ce théorème est donnée par l'étude des espaces de longs nœuds et l'espace des  $(k)$ -immersions en dimension supérieure. Dans [42], Sinha a réussi à exprimer l'espace des longs nœuds  $\mathcal{L}_{1;n}$  comme un espace de lacets double car il disposait d'un remplacement semi-cosimplicial provenant de l'opérade de Kontsevich (voir le chapitre 4). Dans le contexte des espaces de longs nœuds en dimension supérieure, définis par la fibre homotopique :

$$\mathcal{L}_{1;n}^d := \text{hofib} \left( \text{Emb}_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Imm}_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \right),$$

on ne possède pas de remplacement semi-cosimplicial. Cependant, Arone et Turchin dans [1] ont développé une méthode, basée sur le calcul de plongements de Weiss [52], afin d'identifier des espaces de plongements à des bimodules infinitésimaux sous l'opérade des petits cubes :

$$\mathcal{L}_{1;n}^d \simeq \text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; C_n) \simeq \Omega^{d+1} \text{Operad}^h(C_d; C_n).$$

D'un autre côté, l'espace des  $(k)$ -immersions, noté  $\text{Imm}_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$ , est le sous-espace des immersions  $f \in \text{Imm}_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$  tel que pour tout sous-ensemble  $K \subset \mathbb{R}^d$  de cardinal  $k$ , la restriction  $f|_K$  est non-constante. L'espace des  $(k)$ -immersions relatives est défini comme la fibre homotopique :

$$\overline{\text{Imm}}_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) := \text{hofib} \left( \text{Imm}_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Imm}_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \right).$$

En utilisant une méthode similaire au cas des longs nœuds en dimension supérieure, Dobrinskaya et Turchin ont montré dans [11] que la limite de la tour de Taylor associée à  $\overline{\text{Imm}}_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$  peut s'exprimer comme un bimodule infinitésimal sous l'opérade  $C_d$  pour  $n > d$  :

$$T_\infty \overline{\text{Imm}}_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \simeq \text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; C_n^{(k)}),$$

avec  $C_n^{(k)}$  un  $C_n$ -bimodule appelé le bimodule des  $(k)$ -petits cubes. Contrairement au cas des longs nœuds, on ne sait pas si la tour de Taylor converge pour les  $(k)$ -immersions. On réussit néanmoins à démontrer que le couple  $(\mathcal{L}_{1;n}^d; T_\infty \overline{\text{Imm}}_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n))$  est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_{d+1}$ -algèbre explicite à la fin du chapitre 6 :

**Théorème.** [Théorème 6.4.8] Admettons que la conjecture de Dwyer et Hess soit vraie. Si  $n - d - 2 > 0$  alors le couple d'espaces topologiques  $(\mathcal{L}_{1;n}^d; T_\infty \overline{\text{Imm}}_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n))$  est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_{d+1}$ -algèbre explicite :

$$\left( \Omega^{d+1} \text{Operad}^h(C_d; C_n); \Omega^{d+1} \left( \text{Operad}^h(C_d; C_n); Op[C_d; \emptyset]^h(CC_d; \mathcal{L}(C_n^{(k)}; C_n; C_n)) \right) \right).$$



## Opérade, espace cosimplicial et bimodule "infinitésimal"

Dans ce chapitre, on introduit les notions utilisées dans la suite de la thèse. Dans un premier temps, on introduit la catégorie des opérades et notamment l'opérade des petits cubes  $C_d$ . On pourra ainsi énoncer les premiers critères de May permettant d'identifier les espaces topologiques faiblement équivalents à un espace de lacets  $d$ -itéré. Ensuite, on rappelle les travaux de McClure et Smith qui visent à simplifier ces critères lorsque l'espace topologique provient de la totalisation d'un espace cosimplicial. L'inconvénient de ces critères est qu'ils donnent l'existence des espaces de lacets  $d$ -itérés mais ne permettent pas de les déterminer explicitement. Pour remédier à cela, on introduit la catégorie des bimodules infinitésimaux ainsi que la catégorie des bimodules sous une opérade colorée. Enfin, comme le chapitre 5 est consacré à l'étude des structures en homologie, la dernière section est dédiée à l'étude des opérades dans la catégorie des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels différentiels gradués.

### 1.1 Opérade colorée dans une catégorie symétrique monoïdale

#### 1.1.1 Opérade colorée non symétrique

**Définition 1.1.1.** Soient  $S$  un ensemble et  $C$  une catégorie. Les objets de la catégorie des collections  $Coll(S; C)$  sont des familles d'objets de  $C$  indexées par les  $(n + 1)$ -uplets d'éléments de  $S$ , avec  $n \geq 0$ . Un objet  $M \in Coll(S; C)$  est noté de la façon suivante :

$$\{M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})\}, \quad \text{avec } n \geq 0 \text{ et } s_i \in S.$$

Un morphisme  $f : M_1 \rightarrow M_2$  dans la catégorie  $Coll(S; C)$  est la donnée d'une famille de morphismes :

$$\{f_{s_1, \dots, s_n; s_{n+1}} : M_1(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \rightarrow M_2(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})\}, \quad \text{avec } n \geq 0 \text{ et } s_i \in S.$$

Une collection  $M$  est dite pointée s'il existe un élément particulier  $*_s \in M(s; s)$  pour tout  $s \in S$ . On note  $Coll(S; C)_*$  la catégorie des collections pointées dont les morphismes sont les morphismes de collections préservant les éléments particuliers. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la catégorie  $C$ , on note respectivement  $Coll(S)_*$  et  $Coll(S)$  les catégories  $Coll(S; C)_*$  et  $Coll(S; C)$ .

*Notation 1.1.2.* On va s'intéresser en particulier aux collections indexées par l'ensemble  $S = \{o; c\}$ . Dans ce cas, l'élément  $o$  est appelé la couleur ouverte tandis que l'élément  $c$  est appelé la couleur fermée. Si  $M$  est un objet de  $Coll(\{o; c\})$  ou  $Coll(\{o; c\})_*$  alors on pose les notations suivantes :

$$M(\underbrace{c, \dots, c}_n; c) = M(n; c) = M_c(n) \quad \text{et} \quad M(\underbrace{c, \dots, c}_n, o; o) = M(n; o) = M_o(n). \quad (1.1)$$

**Définition 1.1.3.** Soit  $S$  un ensemble. Une  $S$ -opérade dans une catégorie symétrique monoïdale  $(C; \otimes; \mathbb{I})$  est la donnée d'un objet  $O \in Coll(S)_*$  muni de morphismes appelés *des compositions opéradiques partielles* :

$$\circ_i : O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_m; s_i) \rightarrow O(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_m, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}), \quad \text{avec } 1 \leq i \leq n,$$

vérifiant les axiomes suivants :



**A1** L'axiome de l'unité : pour tout  $s \in S$ , l'élément  $*_s \in O(s; s)$  vérifie les relations :

- ▷  $x \circ_i *_s = x$ , avec  $x \in O(s_1, \dots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1})$ ,
- ▷  $*_s \circ_1 x = x$ , avec  $x \in O(s_1, \dots, s_n; s)$ .

**A2** L'axiome d'associativité : pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \right] \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) & \xrightarrow{\circ_i \otimes id} & O(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \\
 \parallel & & \downarrow \circ_{i+j-1} \\
 & & O(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_{j-1}, s'_1, \dots, s''_q, s'_{j+1}, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \circ_i \\
 O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes \left[ O(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \right] & \xrightarrow{id \otimes \circ_j} & O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_{j-1}, s'_1, \dots, s''_q, s'_{j+1}, \dots, s'_p; s_i)
 \end{array}$$

**A3** L'axiome de commutativité : pour  $1 \leq i < j \leq n$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \right] \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) & \xrightarrow{\circ_i \otimes id} & O(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \\
 \parallel & & \downarrow \circ_{i+j-1} \\
 & & O(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_{j-1}, s'_1, \dots, s''_q, s_{j+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \circ_i \\
 \left[ O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \right] \otimes O(s'_1, \dots, s'_p; s_i) & \xrightarrow{\circ_j \otimes id} & O(s_1, \dots, s_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s_{j+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_p; s_i)
 \end{array}$$

Un morphisme  $f : O_1 \rightarrow O_2$  entre deux  $S$ -opérades est la donnée d'un morphisme de collections pointées préservant les compositions opéradiques partielles :

$$\begin{array}{ccc}
 O_1(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O_1(s'_1, \dots, s'_n; s_i) & \xrightarrow{\circ_i} & O_1(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_n, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \\
 \downarrow f_{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}} \otimes f_{s'_1, \dots, s'_n, s_i} & & \downarrow f_{s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_n, s_{i+1}, \dots, s_n, s_{n+1}} \\
 O_2(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O_2(s'_1, \dots, s'_n; s_i) & \xrightarrow{\circ_i} & O_2(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_n, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1})
 \end{array}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la catégorie  $\mathcal{C}$ , on note  $Operad_S$  la catégorie des  $S$ -opérades. Lorsque  $S$  est réduit à un élément, on retrouve la notion usuelle des opérades non symétriques dont la catégorie associée est notée  $Operad$ .

*Remarque 1.1.4.* De manière équivalente, on peut définir une  $S$ -opérade comme la donnée d'un objet  $O \in Coll(S)_*$  muni d'une composition opéradique totale :

$$\gamma : O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s_1^1, \dots, s_{m_1}^1; s_1) \otimes \dots \otimes O(s_1^n, \dots, s_{m_n}^n; s_n) \longrightarrow O(s_1^1, \dots, s_{m_n}^n; s_{n+1}),$$

vérifiant une liste d'axiomes (voir [30] dans le cas non coloré). Ces deux structures sont équivalentes grâce aux unités de l'opérade colorée  $O$ . En effet, à partir de  $\gamma$  on retrouve les compositions opéradiques partielles via la formule :

$$x \circ_i y = \gamma(x; *_s, \dots, *_s, y, *_s, \dots, *_s),$$

avec  $x \in O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $y \in O(s'_1, \dots, s'_m; s_i)$ . Inversement, à partir des compositions opéradiques partielles on retrouve la composition opéradique totale de la façon suivante :

$$\gamma(x; y_1, \dots, y_n) = (\dots((x \circ_1 y_1) \circ_{m_1+1} y_2) \dots) \circ_{m_1+\dots+m_{n-1}+1} y_n,$$

avec  $x \in O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $y_i \in O(s_1^i, \dots, s_{m_i}^i; s_i)$ .

*Remarque 1.1.5.* Lorsque l'ensemble  $S$  est réduit à un élément, une opérade  $O$  est la donnée d'une famille d'objets indexée par les entiers naturels  $\{O(n)\}_{n \geq 0}$  munie de compositions opéradiques partielles :

$$\circ_i : O(n) \otimes O(m) \rightarrow O(n + m - 1), \quad \text{avec } 1 \leq i \leq n.$$

Un élément de  $O(n)$  peut s'interpréter comme une opération sur  $n$  variables représentée par un arbre à  $n$  entrées. De manière similaire, si  $O$  est une  $S$ -opérade, alors un élément de  $O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  s'interprète comme une opération représentée par un arbre à  $n$  entrées qui sont indexées respectivement par  $s_i$  tandis que la sortie est indexée par l'élément  $s_{n+1}$ . En particulier, lorsque  $S = \{o; c\}$ , l'élément  $o$  est représenté par la couleur rouge tandis que l'élément  $c$  est représentée en noir.

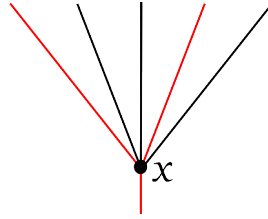


FIGURE 1.1 – Illustration d'un élément  $x \in O(o, c, c, o, c; o)$ .

**Définition 1.1.6.** Soient  $S$  un ensemble et  $O$  une  $S$ -opérade dans une catégorie symétrique monoïdale  $(\mathcal{C}; \otimes; \mathbb{I})$ . Une algèbre sous l'opérade colorée  $O$ , ou  $O$ -algèbre, est la donnée d'une famille d'objets  $X = \{X_s\}_{s \in S}$  munie de morphismes :

$$\mu : O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes X_{s_1} \otimes \dots \otimes X_{s_n} \longrightarrow X_{s_{n+1}},$$

compatible avec les compositions opéradiques partielles :

$$\begin{array}{ccc} [O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_m; s_i)] \otimes X_{s_1} \otimes \dots \otimes X_{s_n} & \xrightarrow{\circ_i} & O(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_m, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes X_{s_1} \otimes \dots \otimes X_{s_n} \\ \parallel & & \downarrow \mu \\ O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes X_{s_1} \otimes \dots \otimes [O(s'_1, \dots, s'_m; s_i) \otimes X_{s'_1} \otimes \dots \otimes X_{s'_m}] \otimes X_{s_n} & \xrightarrow{\mu} & O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes X_{s_1} \otimes \dots \otimes X_{s_n} \\ & & \uparrow \mu \\ & & X_{s_{n+1}} \end{array}$$

**Exemple 1.1.7.** L'opérade des endomorphismes  $End_X$

Soient  $S$  un ensemble et  $X = \{X_s\}_{s \in S}$  une famille d'objets dans une catégorie symétrique monoïdale  $(\mathcal{C}; \otimes; \mathbb{I})$ . L'opérade colorée des endomorphismes associée à  $X$ , notée  $End_X$ , est définie par la collection pointée suivante :

$$End_X(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) := \mathcal{C}(X_{s_1} \otimes \dots \otimes X_{s_n}; X_{s_{n+1}}), \quad \text{avec } n \geq 0 \text{ et } s_i \in S.$$

Les éléments particuliers sont les morphismes identité tandis que les compositions opéradiques partielles sont issues des compositions dans la catégorie  $\mathcal{C}$ . Notons qu'il existe un morphisme de  $S$ -opérades  $O \rightarrow End_X$  si et seulement si la famille  $X$  est une  $O$ -algèbre.

**Exemple 1.1.8.** L'opérade du groupe des permutations  $\Sigma$

L'opérade des permutations  $\Sigma$  est issue de la collection pointée composée des groupes finis  $\{\Sigma_n\}_{n \geq 0}$  et dont les compositions opéradiques partielles sont définies de la façon suivante :

$$\circ_i : \Sigma_n \times \Sigma_m \longrightarrow \Sigma_{n+m-1}; (a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_m) \longmapsto (a'_1, \dots, a'_{i-1}, b'_1, \dots, b'_m, a'_{i+1}, \dots, a'_n),$$

avec :

$$b'_j = b_j + a_i - 1 \quad \text{et} \quad a'_j = \begin{cases} a_j & \text{si } a_j < a_i, \\ a_j + m - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 1.1.2 Opérate colorée symétrique

**Définition 1.1.9.** Soient  $S$  un ensemble et  $\mathcal{C}$  une catégorie. La catégorie des collections symétriques, notée  $\Sigma\text{-Coll}(S; \mathcal{C})$ , est la sous-catégorie de  $\text{Coll}(S; \mathcal{C})$  constituée des collections  $\{M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})\}$  équipée d'une action à droite du groupe symétrique. Cela signifie que pour tout  $(n+1)$ -uplet d'éléments de  $S$  et chaque permutation  $\sigma \in \Sigma_n$ , on a un morphisme :

$$\begin{aligned} \sigma^* : M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) &\longrightarrow M(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}; s_{n+1}); \\ x &\longmapsto x \cdot \sigma. \end{aligned}$$

Un morphisme entre deux collections symétriques  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est la donnée d'un morphisme de collections préservant l'action à droite :

$$f_{s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}; s_{n+1}}(x \cdot \sigma) = f_{s_1, \dots, s_n; s_{n+1}}(x) \cdot \sigma, \quad (1.2)$$

avec  $x \in M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $\sigma \in \Sigma_n$ . De même, on définit la catégorie  $\Sigma\text{-Coll}(S; \mathcal{C})_*$  des collections symétriques pointées. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la catégorie  $\mathcal{C}$ , on note respectivement  $\Sigma\text{-Coll}(S)_*$  et  $\Sigma\text{-Coll}(S)$  les catégories  $\Sigma\text{-Coll}(S; \mathcal{C})_*$  et  $\Sigma\text{-Coll}(S; \mathcal{C})$ .

**Définition 1.1.10.** Soit  $S$  un ensemble. Une  $S$ -opérate symétrique dans une catégorie symétrique monoïdale  $(\mathcal{C}; \otimes; \mathbb{I})$  est la donnée d'une  $\Sigma$ -collection pointée  $O \in \Sigma\text{-Coll}(S)_*$  munie d'une structure de  $S$ -opérate compatible avec l'action du groupe symétrique :

$$(x \cdot \sigma) \circ_i (x' \cdot \sigma') = (x \circ_{\sigma(i)} x') \cdot (\sigma \circ_i \sigma'),$$

avec  $x \in O(s_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, s_{\sigma^{-1}(n)}; s_{n+1})$ ,  $x' \in O(s'_1, \dots, s'_m; s_i)$ ,  $\sigma \in \Sigma_n$  et  $\sigma' \in \Sigma_m$ . Un morphisme  $f : O_1 \rightarrow O_2$  entre deux  $S$ -opéradés symétriques est la donnée d'un morphisme de  $S$ -opéradés vérifiant la relation (1.2). On note  $\Sigma\text{-Operad}_S$  la catégorie des  $S$ -opéradés symétriques et  $\Sigma\text{-Operad}$  la catégorie des opéradés symétriques.

**Définition 1.1.11.** Soient  $S$  un ensemble et  $O$  une  $S$ -opérate symétrique dans une catégorie symétrique monoïdale  $(\mathcal{C}; \otimes; \mathbb{I})$ . Une algèbre sous la  $S$ -opérate symétrique  $O$ , ou  $O$ -algèbre, est la donnée d'une famille d'objets  $\{X_s\}_{s \in S}$  de  $\mathcal{C}$  munie de morphismes :

$$\mu : O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes X_{s_1} \otimes \dots \otimes X_{s_n} \longrightarrow X_{s_{n+1}},$$

vérifiant la commutativité des diagrammes de la définition 1.1.6 ainsi que la relation suivante :

$$\mu(x \cdot \sigma; x_1, \dots, x_n) = \mu(x; x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}),$$

avec  $x \in O(s_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, s_{\sigma^{-1}(n)}; s_{n+1})$ ,  $\sigma \in \Sigma_n$  et  $x_i \in X_{s_i}$ .

**Exemple 1.1.12.** Soient  $S$  un ensemble et  $X = \{X_s\}_{s \in S}$  une famille d'objets dans une catégorie symétrique monoïdale  $(\mathcal{C}; \otimes; \mathbb{I})$ . L'opérate des endomorphismes  $\text{End}_X$  est une  $S$ -opérate symétrique dont l'action à droite du groupe des permutations est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma^* : \text{End}_X(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) &\longrightarrow \text{End}_X(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}; s_{n+1}); \\ f &\longmapsto \begin{cases} f \cdot \sigma : X_{s_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes X_{s_{\sigma(n)}} &\rightarrow X_{s_{n+1}}, \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}). \end{cases} \end{aligned}$$

Notons qu'il existe un morphisme de  $S$ -opéradés symétriques  $O \rightarrow \text{End}_X$  si et seulement si la famille  $X$  est une  $O$ -algèbre.

*Remarque 1.1.13.* Soit  $S$  un ensemble. Dans une catégorie symétrique monoïdale  $(\mathcal{C}; \otimes; \mathbb{I})$  cocomplète, on dispose d'une adjonction entre les  $S$ -opéradés et les  $S$ -opéradés symétriques :

$$\Sigma[-] : \text{Operad}_S \rightleftarrows \Sigma\text{-Operad}_S : \mathcal{U}, \quad (1.3)$$

avec  $\mathcal{U}$  le foncteur oubliant l'action du groupe des permutations et  $\Sigma[-]$  envoyant une  $S$ -opérate  $O$  vers la  $S$ -opérate symétrique  $\Sigma[O]$  définie par :

$$\Sigma[O](s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) := \coprod_{\sigma \in \Sigma_n} O(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}; s_{n+1}).$$

### 1.1.3 Exemples d'opérides colorées topologiques

On va s'intéresser aux opérides colorées symétriques dans la catégorie des espaces topologiques munie du produit cartésien. Pour notre étude, un espace topologique est un espace de Hausdorff compactement engendré tandis que l'espace de morphismes entre deux espaces topologiques est équipé de la topologie compact-ouvert. Cette convention est nécessaire afin d'avoir l'homéomorphisme :

$$\text{Top}(X; \text{Top}(Y; Z)) \cong \text{Top}(X \times Y; Z),$$

avec  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces topologiques. Ceci nous permet d'avoir un homéomorphisme entre les algèbres sous une  $S$ -opéride topologique  $O$  et les morphismes de  $S$ -opérides  $O \rightarrow \text{End}_X$ .

Après avoir introduit l'opéride des petits cubes, on énoncera les premiers critères permettant d'identifier les espaces faiblement équivalents à un espace de lacets  $d$ -itéré. On fera aussi le lien avec le cas coloré à travers l'opéride *Swiss-Cheese*.

#### Exemple 1.1.14. L'opéride associatif $\mathcal{A}s$ et l'opéride associatif stricte $\mathcal{A}s_{>0}$

L'opéride associatif et l'opéride associatif stricte sont définies par les collections pointées suivantes :

$$\mathcal{A}s(n) = *_n, \text{ pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}s_{>0}(n) = \begin{cases} *_n & \text{pour } n > 0, \\ \emptyset & \text{pour } n = 0, \end{cases}$$

avec  $*_n$  l'espace topologique réduit à un point. Une algèbre sous l'opéride associatif est la donnée d'un monoïde topologique unitaire tandis qu'une algèbre sous l'opéride associatif stricte est la donnée d'un monoïde topologique.

**Définition 1.1.15.** Une opéride topologique  $O$  est dite *multiplicative* s'il existe un morphisme d'opérides  $\eta : \mathcal{A}s \rightarrow O$ . De même, une opéride topologique  $O$  est dite *multiplicative stricte* s'il existe un morphisme d'opérides  $\eta : \mathcal{A}s_{>0} \rightarrow O$ . De manière générale, une opéride  $O$  est *stricte* si  $O(0) = \emptyset$  tandis qu'une opéride est *réduite* si les espaces  $O(0)$  et  $O(1)$  sont réduits à un point.

*Remarque 1.1.16.* De même, une opéride symétrique  $O$  est dite *multiplicative* (resp. *multiplicative stricte*) s'il existe un morphisme d'opérides symétriques  $\eta : \Sigma[\mathcal{A}s] \rightarrow O$  (resp.  $\eta : \Sigma[\mathcal{A}s_{>0}] \rightarrow O$ ). Grâce à l'adjonction (1.3), on a la bijection :

$$\text{Operad}(\mathcal{A}s; \mathcal{U}(O)) \cong \Sigma\text{-Operad}(\Sigma[\mathcal{A}s]; O) \quad (\text{resp. } \text{Operad}(\mathcal{A}s_{>0}; \mathcal{U}(O)) \cong \Sigma\text{-Operad}(\Sigma[\mathcal{A}s_{>0}]; O)).$$

Par conséquent, une opéride symétrique est *multiplicative* (resp. *multiplicative stricte*) si l'opéride non symétrique sous-jacente est *multiplicative* (resp. *multiplicative stricte*).

#### Exemple 1.1.17. L'opéride action-monoïde $\mathcal{A}ct$ et l'opéride action-monoïde stricte $\mathcal{A}ct_{>0}$

En utilisant les notations (1.1), les  $\{o; c\}$ -opérides  $\mathcal{A}ct$  et  $\mathcal{A}ct_{>0}$  sont définies par les collections suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{A}ct(n; c) = *_n & \text{pour } n \geq 0, \\ \mathcal{A}ct(n; o) = *_{n+1} & \text{pour } n \geq 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{A}ct_{>0}(n; c) = *_n & \text{pour } n > 0, \\ \mathcal{A}ct_{>0}(n; o) = *_{n+1} & \text{pour } n \geq 0, \end{cases}$$

et l'ensemble vide pour les autres configurations d'entrées. Une algèbre sous la  $\{o; c\}$ -opéride  $\mathcal{A}ct$  est la donnée d'un couple d'espaces topologiques  $(X_c; X_o)$ . Comme la restriction de  $\mathcal{A}ct$  à la couleur fermée est l'opéride associatif, l'espace  $X_c$  est un monoïde topologique unitaire tandis que  $X_o$  est un  $X_c$ -module à gauche unitaire. De même, les  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -algèbres sont les couples d'espaces  $(X_c; X_o)$  avec  $X_c$  un monoïde topologique et  $X_o$  un  $X_c$ -module à gauche.

**Définition 1.1.18.** Une *opéride pointée* est la donnée d'une  $\{o; c\}$ -opéride  $O$  munie d'un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérides  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow O$ . De même, une *opéride pointée stricte* est la donnée d'une  $\{o; c\}$ -opéride  $O$  munie d'un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérides  $\eta : \mathcal{A}ct_{>0} \rightarrow O$ .

#### Exemple 1.1.19. L'opéride des petits cubes $C_d$

Un petit cube de dimension  $d$  est la donnée d'une application continue  $c : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]^d$  qui puisse s'obtenir comme la composée d'une translation et d'une dilatation. Ainsi, l'opéride symétrique  $C_d$  est issue de la collection symétrique pointée  $\{C_d(n)\}_{n \geq 0}$  avec  $C_d(0) = *$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $C_d(n)$  est l'espace des familles de petits cubes  $\{c_i\}_{i=1}^n$  vérifiant la condition suivante :

$$\text{Int}(Im(c_i)) \cap \text{Int}(Im(c_j)) = \emptyset, \quad \text{dès que } i \neq j. \quad (1.4)$$

Le point particulier de cette collection provient du petit cube  $id : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]^d$  tandis que l'action à droite du groupe symétrique consiste à ré-indexer les petits cubes :

$$C_d(n) \times \Sigma_n \rightarrow C_d(n) ; (\{c_i\}; \sigma) \mapsto \{c'_i := c_{\sigma(i)}\}.$$

Les compositions opéradiques partielles sont définies de la façon suivante :

$$\circ_i : C_d(n) \times C_d(m) \rightarrow C_d(n+m-1) ; (\{c_i\}_{i=1}^n ; \{c'_i\}_{i=1}^m) \mapsto \{c''_i\}_{i=1}^{n+m-1} := \begin{cases} c''_j = c_j & \text{si } i < j, \\ c''_j = c_i \circ c'_{j-i+1} & \text{si } i \leq j < i+m, \\ c''_j = c_{j-m+1} & \text{si } j \geq i+m. \end{cases}$$

Par convention la composition opéradique avec l'élément de  $C_d(0)$  consiste à oublier un petit cube.

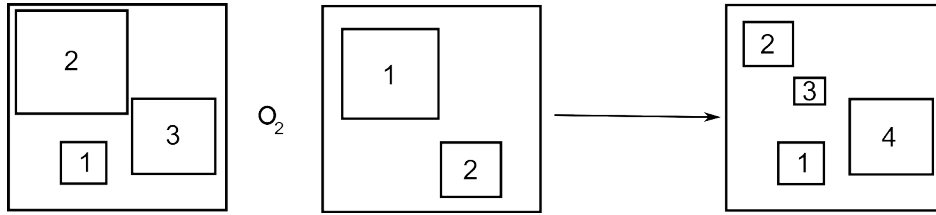


FIGURE 1.2 – Illustration de la composition opéradique  $\circ_2 : C_2(3) \times C_2(2) \rightarrow C_2(4)$ .

**Définition 1.1.20.** Soit  $(X; *)$  un espace topologique pointé. L'espace de lacets  $d$ -itéré associé à  $(X; *)$  est défini comme l'espace topologique :

$$\Omega^d X := \{f : [0, 1]^d \rightarrow X \mid f(\partial[0, 1]^d) = *\}.$$

**Proposition 1.1.21.** [4] Si  $(X; *)$  est un espace topologique pointé alors l'espace de lacets  $d$ -itéré  $\Omega^d X$  est une  $C_d$ -algèbre.

*Démonstration.* Les opérations induisant la structure de  $C_d$ -algèbre sur l'espace  $\Omega^d X$  sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mu : C_d(n) \times (\Omega^d X)^{\times n} &\longrightarrow \Omega^d X; \\ (\{c_i\}_{i=1}^n ; f_1, \dots, f_n) &\longmapsto f : [0, 1]^d \rightarrow X ; x \mapsto \begin{cases} f_i \circ c_i^{-1}(x) & \text{si } x \in \text{Im}(c_i), \\ * & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Les conditions  $f_i(\partial[0, 1]^d) = *$  impliquent que les opérations sont bien définies.  $\square$

**Définition 1.1.22.** Soit  $X$  une  $E_d$ -algèbre, avec  $d \geq 2$  et  $E_d$  une opérade faiblement équivalente à  $C_d$ . Comme les espaces  $C_d(n)$  sont connexes il en va de même pour les espaces  $E_d$  et les opérations :

$$\mu : \pi_0(E_d(2)) \times \pi_0(X) \times \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(X) \quad \text{et} \quad e : \pi_0(E_d(0)) \rightarrow \pi_0(X)$$

induisent une structure monoïdale unitaire sur  $\pi_0(X)$ . On dit alors que  $X$  est "grouplike" si le monoïde  $\pi_0(X)$  est un groupe.

**Théorème 1.1.23.** Un espace topologique  $X$  est une  $E_d$ -algèbre grouplike si et seulement si  $X$  est faiblement équivalent à un espace de lacets  $d$ -itéré.

La preuve du théorème 1.1.23 est due à Boardman et Vogt [4] dans le cas particulier où l'espace topologique  $X$  est connexe et  $d = 1$ . Par la suite, une preuve pour  $d$  quelconque fut apportée par May dans [30], toujours dans le contexte des espaces connexes. Il faudra attendre l'article [31] de May pour avoir la démonstration de la forme actuelle du théorème.

**Exemple 1.1.24.** L'opérade Swiss-Cheese  $SC_d$

On utilise la définition de Swiss-Cheese introduite par Voronov dans l'article [51]. L'opérade  $SC_d$  est une  $\{o; c\}$ -opérade symétrique dont la restriction à la couleur fermée coïncide avec la version stricte de l'opérade des petits cubes  $C_d$  :

$$SC_d(\underbrace{c, \dots, c}_n; c) = \begin{cases} C_d(n) & \text{si } n \geq 1, \\ \emptyset & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Pour décrire les espaces de la forme  $\mathcal{SC}_d(s_1, \dots, s_n; o)$ , avec  $s_i \in \{o; c\}$ , on commence par définir la face  $F_1$  du cube  $[0, 1]^d$  :

$$F_1 := \{(t_1, \dots, t_d) \in [0, 1]^d \mid t_1 = 1\}.$$

Ainsi,  $\mathcal{SC}_d(s_1, \dots, s_n; o)$  est l'espace des familles de petits cubes  $\{c_i\}_{i=1}^n$  vérifiant la relation (1.4) ainsi que la condition suivante :

$$s_i = o \Rightarrow c_i(F_1) \subset F_1.$$

Par convention  $\mathcal{SC}_d(; o)$  et  $\mathcal{SC}_d(c, \dots, c; o)$  sont réduits à l'ensemble vide tandis que  $\mathcal{SC}_d(s_1, \dots, s_n; c) = \emptyset$  s'il existe un entier  $i$  tel que  $s_i = o$ . La structure opéradique ainsi que l'action à droite du groupe des permutations sont définies de manière similaire à l'opérade des petits cubes (voir la définition 1.1.19).

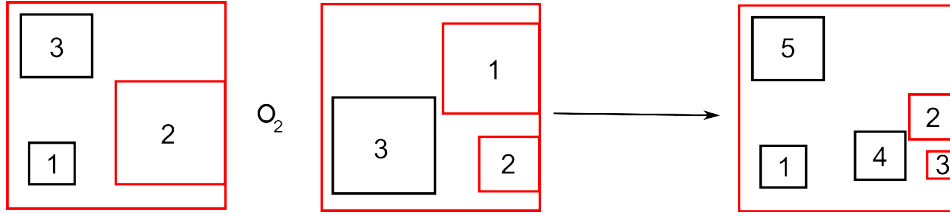


FIGURE 1.3 – Illustration de la composition opéradique  $\circ_2 : \mathcal{SC}_2(c, o, c; o) \times \mathcal{SC}_2(o, o, c; o) \rightarrow \mathcal{SC}_2(c, o, o, c; o)$ .

**Définition 1.1.25.** Soit  $f : (A; *) \rightarrow (X; *)$  une application entre des espaces topologiques pointés. L'espace de lacets relatif  $d$ -itéré associé à  $f$ , noté  $\Omega^d(X; A)$ , est défini comme la fibre homotopique :

$$\Omega^d(X; A) := \text{hofib}(\Omega^{d-1}f : \Omega^{d-1}A \rightarrow \Omega^{d-1}X),$$

au-dessus du lacet constant. En d'autres termes, un modèle pour l'espace de lacets  $d$ -itéré est donné par :

$$\Omega^d(X; A) := \left\{ g : [0, 1]^d \rightarrow X \mid g(\partial[0, 1]^d \setminus \overset{\circ}{F}_1) = * \text{ et } g(F_1) \subset f(A) \right\}.$$

**Proposition 1.1.26.** Soit  $f : (A; *) \rightarrow (X; *)$  une application entre espaces topologiques pointés. Le couple d'espaces  $(\Omega^d X; \Omega^d(X; A))$  est une  $\mathcal{SC}_d$ -algèbre.

*Démonstration.* Les opérations induisant la structure de  $\mathcal{SC}_d$ -algèbre sont similaires à celles introduites dans la preuve de la proposition 1.1.21.  $\square$

Pour l'instant, il n'existe pas d'analogue du théorème 1.1.23 avec l'opérade  $\mathcal{SC}_d$ , excepté dans le cas où  $d = 1$  (voir [26]). Cependant, lors du colloque [27], Hoefel et Stasheff ont présenté leurs travaux visant à montrer qu'un couple d'espaces  $(X; Y)$  est une  $\mathcal{SC}_d$ -algèbre grouplike si et seulement si il existe  $* \in Y' \subset X'$  des espaces topologiques avec  $(X; Y)$  faiblement équivalent à  $(\Omega^d X'; \Omega^d(X'; Y'))$ .

## 1.2 Espace cosimplicial et semi-cosimplicial

Lorsqu'un espace topologique  $X$  provient de la totalisation d'un espace cosimplicial, McClure et Smith montrent dans [33] qu'il est possible de savoir si  $X$  possède une structure de  $\mathcal{C}_d$ -algèbre via des critères combinatoires sur l'espace cosimplicial. Dans ce contexte, il est plus facile d'identifier les espaces ayant le type d'homotopie d'un espace de lacets  $d$ -itéré. Pour notre étude, on va uniquement s'intéresser à l'interprétation des critères permettant d'identifier les espaces de lacets simples et doubles.

### 1.2.1 Espaces cosimpliciaux

**Définition 1.2.1.** La catégorie  $\Delta$  a pour objet les ensembles finis ordonnés  $[n] := \{0, \dots, n\}$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ . Les morphismes sont engendrés par deux types d'applications :

$$d^i : [n-1] \rightarrow [n]; j \mapsto \begin{cases} j & \text{si } j < i, \\ j+1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad s^i : [n+1] \rightarrow [n]; j \mapsto \begin{cases} j & \text{si } j \leq i, \\ j-1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $i \in \{0, \dots, n\}$ , appelées respectivement cofaces et codégénérescences.

**Définition 1.2.2.** Un *espace cosimplicial* est un foncteur covariant  $X^\bullet : \Delta \rightarrow Top$ , avec  $Top$  la catégorie des espaces topologiques. La donnée d'un espace cosimplicial est équivalente à la donnée d'une famille d'espaces topologiques  $\{X^n\}_{n \geq 0}$  munie d'opérations :

$$d^i : X^{n-1} \rightarrow X^n \quad \text{et} \quad s^i : X^{n+1} \rightarrow X^n,$$

avec  $i \in \{0, \dots, n\}$ , vérifiant les *relations cosimpliciales* :

$$\begin{aligned} d^j d^i &= d^i d^{j-1}, & \text{si } i < j, \\ s^j s^i &= s^{i-1} s^j, & \text{si } i > j, \\ s^j d^i &= \begin{cases} d^i s^{j-1}, & \text{si } i < j, \\ id, & \text{si } i = j \text{ ou } i = j + 1, \\ d^{i-1} s^j, & \text{si } i > j + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

La donnée d'une transformation naturelle (ou *morphisme cosimplicial*) entre deux espaces cosimpliciaux  $X_1^\bullet$  et  $X_2^\bullet$  est équivalente à la donnée d'une famille d'applications continues  $f^\bullet = \{f^n : X_1^n \rightarrow X_2^n\}$  vérifiant les relations :

$$f^n \circ d^i = d^i \circ f^{n-1} \quad \text{et} \quad f^n \circ s^i = s^i \circ f^{n+1},$$

avec  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

**Exemple 1.2.3. 1)** l'espace cosimplicial  $\Delta^\bullet$  est constitué des espaces topologiques :

$$\Delta^n := \{(t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n \mid t_i \leq t_j \text{ si } i < j\}.$$

Les cofaces et les codégénérescences consistent respectivement à dupliquer ou oublier un élément. Plus précisément les opérations sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} s^i : \Delta^n &\rightarrow \Delta^{n-1}; (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_n), & \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}, \\ d^i : \Delta^n &\rightarrow \Delta^{n+1}; (t_1, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} (0, t_1, \dots, t_n), & \text{pour } i = 0, \\ (t_1, \dots, t_i, t_i, \dots, t_n), & \text{pour } i \in \{1, \dots, n\}, \\ (t_1, \dots, t_n, 1), & \text{pour } i = n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

2) Soit  $(X; *)$  un espace topologique pointé. L'espace cosimplicial  $\Omega X^\bullet$  est constitué des espaces topologiques :

$$\Omega X^n := X^{\times n}, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Les cofaces et les codégénérescences sont données par les formules :

$$\begin{aligned} s^i : \Omega X^n &\rightarrow \Omega X^{n-1}; (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n), & \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}, \\ d^i : \Omega X^n &\rightarrow \Omega X^{n+1}; (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} (*, x_1, \dots, x_n), & \text{pour } i = 0, \\ (x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_n), & \text{pour } i \in \{1, \dots, n\}, \\ (x_1, \dots, x_n, *), & \text{pour } i = n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

3) Soient  $(X; *)$  un espace topologique pointé et  $A$  un sous-espace de  $X$  contenant le point base. L'espace cosimplicial  $\Omega(X; A)^\bullet$  est constitué des espaces topologiques :

$$\Omega(X; A)^n := X^{\times n} \times A, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Les cofaces et les codégénérescences sont données par les formules :

$$\begin{aligned} s^i : \Omega(X; A)^n &\rightarrow \Omega(X; A)^{n-1}; (x_1, \dots, x_n, a) \mapsto (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n, a), & \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}, \\ d^i : \Omega(X; A)^n &\rightarrow \Omega(X; A)^{n+1}; (x_1, \dots, x_n, a) \mapsto \begin{cases} (*, x_1, \dots, x_n, a), & \text{pour } i = 0, \\ (x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_n, a), & \text{pour } i \in \{1, \dots, n\}, \\ (x_1, \dots, x_n, a, a), & \text{pour } i = n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

- 4) Soient  $O$  une opérade multiplicative et  $\eta : \mathcal{As} \rightarrow O$  le morphisme d'opérades associé. La famille  $\{O(n)\}_{n \geq 0}$  possède une structure cosimpliciale dont les cofaces et les codégénérescences sont données par les formules :

$$\begin{aligned} s^i : O(n) &\rightarrow O(n-1); x \mapsto x \circ_{i+1} \eta(*_0), & \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}, \\ d^i : O(n) &\rightarrow O(n+1); x \mapsto \begin{cases} \eta(*_2) \circ_2 x, & \text{pour } i = 0, \\ x \circ_i \eta(*_2), & \text{pour } i \in \{1, \dots, n\}, \\ \eta(*_2) \circ_1 x, & \text{pour } i = n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Les axiomes opéradiques induisent les relations cosimpliciales.

- 5) Soient  $O$  une opérade pointée et  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow O$  le morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades associé. Selon les notations (1.1), les familles d'espaces  $O_c = \{O_c(n)\}_{n \geq 0}$  et  $O_o = \{O_o(n)\}_{n \geq 0}$  sont des espaces cosimpliciaux. Les cofaces et codégénérescences de  $O_c$  correspondent au cas opéradique traité dans l'exemple précédent. Pour la famille  $O_o$ , la structure cosimpliciale est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} s^i : O_o(n) &\rightarrow O_o(n-1); x \mapsto x \circ_{i+1} \eta(*_0; c), & \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}, \\ d^i : O_o(n) &\rightarrow O_o(n+1); x \mapsto \begin{cases} \eta(*_2; o) \circ_2 x, & \text{pour } i = 0, \\ x \circ_i \eta(*_2; c), & \text{pour } i \in \{1, \dots, n\}, \\ x \circ_{n+1} \eta(*_2; o), & \text{pour } i = n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Les relations opéradiques induisent les relations cosimpliciales et on dispose d'un morphisme cosimplicial donné par :

$$f^n : O_c(n) \rightarrow O_o(n); x \mapsto \eta(*_2; o) \circ_1 x. \quad (1.5)$$

**Définition 1.2.4.** La *totalisation* d'un espace cosimplicial  $X^\bullet$ , noté  $Tot(X^\bullet)$ , est l'espace des transformations naturelles de  $\Delta^\bullet$  vers  $X^\bullet$ .

**Exemple 1.2.5.** La totalisation de  $\Omega X^\bullet$  est homéomorphe à l'espace de lacets  $\Omega X$ . En effet, les deux applications qui suivent sont inverses l'une de l'autre à cause des codégénérescences :

$$\begin{aligned} f : \Omega X &\rightarrow Tot(\Omega X^\bullet) & ; \{l : [0, 1] \rightarrow X\} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} l_n : \Delta^n \rightarrow \Omega X^n; \\ (t_1, \dots, t_n) \mapsto (l(t_1), \dots, l(t_n)), \end{array} \right\}_{n \geq 0} \\ g : Tot(\Omega X^\bullet) &\rightarrow \Omega X & ; \{l^n : \Delta^n \rightarrow \Omega X^n\}_{n \geq 0} \mapsto \{l^1 : [0, 1] \rightarrow X\}. \end{aligned}$$

De manière similaire, on peut montrer que la totalisation de  $\Omega(X; A)^\bullet$  est homéomorphe à l'espace de lacets relatif  $\Omega(X; A)$  associé à l'inclusion de  $A$  dans  $X$ .

## 1.2.2 Espaces semi-cosimpliciaux

Le problème de la totalisation est que celle-ci n'est pas un invariant homotopique. Cela signifie que si un morphisme cosimplicial  $f^\bullet : X_1^\bullet \rightarrow X_2^\bullet$  est un quasi-isomorphisme en chaque degré alors l'application induite  $f^* : Tot(X_1^\bullet) \rightarrow Tot(X_2^\bullet)$  n'est pas nécessairement un quasi-isomorphisme. Pour remédier à cela, on va introduire la notion d'espace semi-cosimplicial.

**Définition 1.2.6.** La catégorie  $\Delta^+$  est la sous-catégorie de  $\Delta$  ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont engendrés par les opérations cofaces :

$$d^i : [n] \rightarrow [n+1], \quad \text{avec } i \in \{0, \dots, n+1\}.$$

**Définition 1.2.7.** Un *espace semi-cosimplicial* est défini comme un foncteur covariant  $X^\bullet : \Delta^+ \rightarrow Top$ . La donnée d'un espace semi-cosimplicial  $X^\bullet$  est équivalente à la donnée d'une famille d'espaces topologiques  $\{X^n\}_{n \geq 0}$  munie d'opérations :

$$d^i : X^n \rightarrow X^{n+1}, \quad \text{avec } i \in \{0, \dots, n+1\}.$$

vérifiant les *relations semi-cosimpliciales* :

$$d^i d^j = d^j d^{i-1} \quad \text{si } i < j.$$



La donnée d'une transformation naturelle (ou *morphisme semi-cosimplicial*) entre deux espaces semi-cosimpliciaux  $X_1^\bullet$  et  $X_2^\bullet$  est équivalente à la donnée d'une famille d'applications continues  $f^\bullet = \{f^n : X_1^n \rightarrow X_2^n\}$  vérifiant les relations :

$$f^n \circ d^i = d^i \circ f^{n-1},$$

avec  $n > 0$  et  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

**Exemple 1.2.8.** 1) A partir d'un espace cosimplicial on peut construire un espace semi-cosimplicial en oubliant les codégénérescences. Cependant, tous les espaces semi-cosimpliciaux ne proviennent pas d'espaces cosimpliciaux. En effet, posons  $X^\bullet$  l'espace semi-cosimplicial défini de la façon suivante :

$$X^n := \begin{cases} [0, 1] & \text{si } n = 0, \\ * & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un tel objet ne peut pas posséder de codégénérescence  $s^0 : * \rightarrow [0, 1]$  car la relation  $s^0 d^0 = id$  oblige l'application  $s^0$  à être surjective.

2) Comme pour l'exemple 1.2.3, si  $O$  est une opérade multiplicative stricte alors la famille  $\{O(n)\}_{n \geq 0}$  possède une structure semi-cosimpliciale. De même, si  $O$  est une opérade pointée stricte alors il existe un morphisme semi-cosimplicial  $f^\bullet : O_c \rightarrow O_o$ .

**Définition 1.2.9.** La *semi-totalisation* d'un espace semi-cosimplicial  $X^\bullet$ , noté  $sTot(X^\bullet)$ , est l'espace des transformations naturelles entre les espaces semi-cosimpliciaux  $\Delta^\bullet$  et  $X^\bullet$ .

**Théorème 1.2.10.** [12, Lemme 3.8] La semi-totalisation d'un espace cosimplicial est un invariant homotopique.

*Remarque 1.2.11.* Il existe une approximation de la totalisation, appelé la totalisation homotopique  $hoTot$ , qui est un invariant homotopique. En utilisant les notations du chapitre 2,  $hoTot$  est le foncteur dérivé associé à la totalisation. Dans [12], Dror et Dwyer montrent alors que si un espace semi-cosimplicial provient d'un espace cosimplicial alors la semi-totalisation de ce dernier est faiblement équivalente à la totalisation homotopique.

### 1.2.3 Interprétation des critères de May pour les espaces (semi)-cosimpliciaux

McClure et Smith ont énoncé dans [32] et [33] les conditions pour que la (semi)-totalisation d'un espace (semi)-cosimplicial soit une  $C_d$ -algèbre. Pour notre étude, on va uniquement rappeler les critères avec  $d \in \{1; 2\}$ . Pour  $d = 2$ , le critère s'exprime facilement en terme d'opérades.

**Théorème 1.2.12.** [32, Proposition 10.3] Si un espace semi-cosimplicial provient d'une opérade multiplicative stricte alors sa semi-totalisation est une  $E_2$ -algèbre. De même, si un espace cosimplicial provient d'une opérade multiplicative alors sa totalisation (homotopique) est une  $E_2$ -algèbre.

Pour énoncer le critère avec  $d = 1$ , on doit introduire une structure monoïdale sur la catégorie des espaces (semi)-cosimpliciaux.

**Proposition 1.2.13.** [32, Proposition 2.2] Soient  $X_1^\bullet$  et  $X_2^\bullet$  deux espaces cosimpliciaux. L'espace cosimplicial  $(X_1 \boxtimes X_2)^\bullet$  est défini comme la famille d'espaces topologiques :

$$(X_1 \boxtimes X_2)^n := \coprod_{p+q=n} X_1^p \times X_2^q \Big/ \sim$$

avec  $\sim$  la relation d'équivalence engendrée par :

$$(x; d^0 y) \sim (d^{|\mathbf{x}|+1} x; y).$$

La structure cosimpliciale est donnée grâce aux opérations suivantes :

$$s^i : (X_1 \boxtimes X_2)^n \rightarrow (X_1 \boxtimes X_2)^{n-1} ; (x; y) \mapsto \begin{cases} (s^i x; y) & \text{si } i \leq |\mathbf{x}| - 1, \\ (x; s^{i-|\mathbf{x}|} y) & \text{si } i \geq |\mathbf{x}|, \end{cases}$$

$$d^i : (X_1 \boxtimes X_2)^n \rightarrow (X_1 \boxtimes X_2)^{n+1} ; (x; y) \mapsto \begin{cases} (d^i x; y) & \text{si } i \leq |\mathbf{x}|, \\ (x; d^{i-|\mathbf{x}|} y) & \text{si } i > |\mathbf{x}|. \end{cases}$$

Le produit  $\boxtimes$  définit une structure monoïdale sur la catégorie des espaces cosimpliciaux dont l'unité  $u^\bullet$  est donnée par l'espace cosimplicial réduit à un point en chaque degré. De même, si on ne tient pas compte des codégénérescences alors le produit  $\boxtimes$  définit une structure monoïdale sur la catégorie des espaces semi-cosimpliciaux.

**Théorème 1.2.14.** [32, Théorème 3.1] Si  $X^\bullet$  est un monoïde unitaire dans la catégorie des espaces cosimpliciaux muni du produit  $\boxtimes$  alors la totalisation (homotopique) de  $X^\bullet$  est une  $E_1$ -algèbre. De même, si  $X^\bullet$  est un monoïde unitaire dans la catégorie des espaces semi-cosimpliciaux muni du produit  $\boxtimes$  alors la semi-totalisation  $s\text{Tot}(X^\bullet)$  est une  $E_1$ -algèbre.

*Remarque 1.2.15.* Soient  $X_1^\bullet$  et  $X_2^\bullet$  deux espaces (semi)-cosimpliciaux. Notons que  $X_1^\bullet$  est un monoïde dans la catégorie des espaces (semi)-cosimpliciaux muni du produit  $\boxtimes$  si et seulement si il existe des applications :

$$\mu_1 : X_1^p \times X_1^q \rightarrow X_1^{p+q}, \quad \text{avec } p, q \geq 0,$$

vérifiant les égalités :

$$\mu_1(x; d^0 y) = \mu_1(d^{|\mathbf{x}|+1} x; y). \quad (1.6)$$

De même,  $X_2^\bullet$  est un  $X_1^\bullet$ -module à gauche dans la catégorie des espaces (semi)-cosimpliciaux muni du produit  $\boxtimes$  s'il existe des applications :

$$\mu_2 : X_1^p \times X_2^q \rightarrow X_2^{p+q}, \quad \text{avec } p, q \geq 0,$$

vérifiant les mêmes égalités :

$$\mu_2(x; d^0 y) = \mu_2(d^{|\mathbf{x}|+1} x; y). \quad (1.7)$$

**Corollaire 1.2.16.** Soient  $O$  une opérade pointée (resp. une opérade pointée stricte) et  $\eta$  le morphisme de  $\{0; c\}$ -opérades associé. En utilisant les notations (1.1), le couple  $(O_c; O_o)$  a les propriétés suivantes :

- ▷  $O_c$  provient d'une opérade multiplicative (resp. stricte)  $\implies s\text{Tot}(O_c)$  est une  $E_2$ -algèbre,
- ▷  $O_o$  est un monoïde unitaire pour le produit  $\boxtimes \implies O_o$  est une  $E_1$ -algèbre,
- ▷  $s\text{Tot}(O_o)$  est un  $O_c$ -module à gauche unitaire pour le produit  $\boxtimes$ .

*Démonstration.* On sait que la restriction de  $\eta$  à la couleur fermée induit un morphisme d'opérades  $\eta_c : \mathcal{A}s \rightarrow O_c$  (resp.  $\eta_c : \mathcal{A}s_{>0} \rightarrow O_c$  si  $O$  est une opérade pointée stricte). D'un autre côté, la structure monoïdale de  $O_o$  provient des opérations :

$$\mu_1 : O_o(n) \times O_o(m) \rightarrow O_o(n+m) ; (x; y) \mapsto x \circ_{n+1} y.$$

tandis que la structure de  $O_c$ -module à gauche est définie via les opérations :

$$\mu_2 : O_c(n) \times O_o(m) \rightarrow O_o(n+m) ; (x; y) \mapsto \eta(*_{2,o})(x; y).$$

Remarquons que l'unité dans la catégorie des espaces cosimpliciaux munie du produit  $\boxtimes$  coïncide avec l'opérade associative. Par conséquent, le monoïde  $O_o$  est unitaire grâce au morphisme cosimplicial issu de la composition :

$$\mathcal{A}s \xrightarrow{\eta_c} O_c \xrightarrow{f^\bullet} O_o$$

avec  $f^\bullet$  le morphisme cosimplicial (1.5) associé à  $\eta$ . □

### 1.3 $\Sigma$ -Bimodule infinitésimal coloré

Dans cette section,  $S$  est un ensemble tandis que  $(C; \otimes; \mathbb{I})$  désigne une catégorie symétrique monoïdale. Notons que dans la majorité de la thèse on va étudier les bimodules infinitésimaux topologiques. Par conséquent, on omettra de préciser la catégorie  $C$  s'il n'y a pas d'ambiguïté. On fixe aussi une  $S$ -opérade  $O$  dans la catégorie  $C$ .

**Définition 1.3.1.** Un  $O$ -bimodule infinitésimal est la donnée d'une collection  $M \in \text{Coll}(S)$  munie de morphismes :

$$\circ^i : M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_m; s_i) \rightarrow M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_m, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}),$$

$$\circ_i : O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(s'_1, \dots, s'_m; s_i) \rightarrow M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_m, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}),$$

avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ces opérations, appelées respectivement structure à droite et à gauche, vérifient les axiomes suivants :

**B1** *L'axiome de l'unité* : pour tout  $s \in S$ , on a les relations :

- ▷  $x \circ^i *_s = x$ , avec  $x \in M(s_1, \dots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $*_s \in O(s; s)$ ,
- ▷  $*_s \circ_1 x = x$ , avec  $x \in M(s_1, \dots, s_n; s)$  et  $*_s \in O(s; s)$ .

**B2** L'axiome d'associativité à droite : pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \right] \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) & \xrightarrow{\circ^i \otimes id} & M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \\
 \parallel & & \downarrow \circ^{i+j-1} \\
 & & M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s'_{j+1}, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \circ^i \\
 M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes \left[ O(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \right] & \xrightarrow{id \otimes \circ_j} & M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s'_{j+1}, \dots, s'_p; s_i)
 \end{array}$$

**B3** L'axiome d'associativité à gauche : pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \right] \otimes M(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) & \xrightarrow{\circ_i \otimes id} & O(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \\
 \parallel & & \downarrow \circ_{i+j-1} \\
 & & M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s'_{j+1}, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \circ_i \\
 O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes \left[ O(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \otimes M(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \right] & \xrightarrow{id \otimes \circ_j} & O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(s'_1, \dots, s'_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s'_{j+1}, \dots, s'_p; s_i)
 \end{array}$$

**B4** L'axiome de commutativité à droite : pour  $1 \leq i < j \leq n$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \right] \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) & \xrightarrow{\circ^i \otimes id} & M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \\
 \parallel & & \downarrow \circ^{i+j-1} \\
 & & M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s_{j+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \circ^i \\
 \left[ M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \right] \otimes O(s'_1, \dots, s'_p; s_i) & \xrightarrow{\circ_i \otimes id} & M(s_1, \dots, s_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s_{j+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s'_1, \dots, s'_p; s_i)
 \end{array}$$

**B5** L'axiome de l'associativité entre l'action droite et gauche : pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \right] \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) & \xrightarrow{\circ_i \otimes id} & M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \\
 \parallel & & \downarrow \circ_{i+j-1} \\
 & & M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s'_{j+1}, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \circ_i \\
 O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes \left[ M(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s'_j) \right] & \xrightarrow{id \otimes \circ_j} & O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(s'_1, \dots, s'_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s'_{j+1}, \dots, s'_p; s_i)
 \end{array}$$

**B6** L'axiome de compatibilité entre les opérations et la structure opéradique : pour  $1 \leq i < j \leq n$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(s'_1, \dots, s'_p; s_j) \right] \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s_i) & \xrightarrow{\circ_j \otimes id} & M(s_1, \dots, s_{j-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{j+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s_i) \\
 \parallel & & \downarrow \circ^i \\
 & & M(s_1, \dots, s_{i-1}, s''_1, \dots, s''_q, s_{i+1}, \dots, s_{j-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{j+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \circ_{j+q-1} \\
 \left[ O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s_i) \right] \otimes M(s'_1, \dots, s'_p; s_j) & \xrightarrow{\circ_i \otimes id} & O(s_1, \dots, s_{i-1}, s''_1, \dots, s''_q, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(s'_1, \dots, s'_p; s_j)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(s'_1, \dots, s'_p; s_i) \right] \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s_j) & \xrightarrow{\circ_i \otimes id} & M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s_j) \\
 \parallel & & \downarrow \circ_i \circ^{i+p-1} \\
 & & M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_p, s_{i+1}, \dots, s_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s_{j+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \circ_i \\
 \left[ O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O(s''_1, \dots, s''_q; s_j) \right] \otimes M(s'_1, \dots, s'_p; s_i) & \xrightarrow{\circ_j \otimes id} & O(s_1, \dots, s_{j-1}, s''_1, \dots, s''_q, s_{j+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(s'_1, \dots, s'_p; s_i)
 \end{array}$$

Un morphisme entre deux  $O$ -bimodules infinitésimaux est la donnée d'un morphisme de collections préservant les opérations à gauche et à droite. On note  $Ibimod_O$  la catégorie des  $O$ -bimodules infinitésimaux.

**Exemple 1.3.2.** Soit  $\eta : O_1 \rightarrow O_2$  un morphisme de  $S$ -opérades dans  $C$ . Dans ce cas,  $O_2$  possède une structure de  $O_1$ -bimodule infinitésimal dont les opérations sont définies grâce à la structure opéradique de  $O_2$  :

$$\begin{aligned}
 \circ^i : O_2(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O_1(s'_1, \dots, s'_m; s_i) &\longrightarrow O_2(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_m, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}); \\
 (x; y) &\longmapsto x \circ_i \eta(y), \\
 \circ_i : O_1(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O_2(s'_1, \dots, s'_m; s_i) &\longrightarrow O_2(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_m, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}); \\
 (x; y) &\longmapsto \eta(x) \circ_i y.
 \end{aligned}$$

**Définition 1.3.3.** Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux collections topologiques de  $Coll(S)$ . On dit que  $M_1$  est de type  $M_2$  si on a la relation suivante entre les deux objets :

$$M_2(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad M_1(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) = \emptyset.$$

**Proposition 1.3.4.** [13] La donnée d'un  $\mathcal{Act}$ -bimodule infinitésimal de type  $\mathcal{Act}$  est équivalente à la donnée d'un morphisme cosimplicial. De même, la donnée d'un  $\mathcal{Act}_{>0}$ -bimodule infinitésimal de type  $\mathcal{Act}$  est équivalente à la donnée d'un morphisme semi-cosimplicial.

*Démonstration.* Soit  $M$  un  $\mathcal{Act}$ -bimodule infinitésimal. En utilisant les notations (1.1), les familles  $M_c = \{M_c(n)\}_{n \geq 0}$  et  $M_o = \{M_o(n)\}_{n \geq 0}$  sont des espaces cosimpliciaux dont les cofaces et codégénérescences sont définies de la façon suivantes :

$$\begin{aligned}
 s^i : M_c(n) &\rightarrow M_c(n-1) ; x \mapsto x \circ^{i+1} *_{0;c} && \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}, \\
 d^i : M_c(n) &\rightarrow M_c(n+1) ; x \mapsto \begin{cases} *_{2;c} \circ_2 x & \text{pour } i = 0, \\ x \circ^i *_{2;c} & \text{pour } i \in \{1, \dots, n\}, \\ *_{2;c} \circ^1 x & \text{pour } i = n+1, \end{cases} \\
 s^i : M_o(n) &\rightarrow M_o(n-1) ; x \mapsto x \circ^{i+1} *_{0;o} && \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}, \\
 d^i : M_o(n) &\rightarrow M_o(n+1) ; x \mapsto \begin{cases} *_{2;o} \circ_2 x & \text{pour } i = 0, \\ x \circ^i *_{2;o} & \text{pour } i \in \{1, \dots, n\}, \\ x \circ^{n+1} *_{2;o} & \text{pour } i = n+1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les axiomes liés à la structure des  $\mathcal{Act}$ -bimodules infinitésimaux ainsi que la structure particulière de l'opérade colorée  $\mathcal{Act}$  impliquent les relations cosimpliciales. Le morphisme cosimplicial entre ces deux objets est donné via la formule :

$$f^n : M_c(n) \rightarrow M_o(n) ; x \mapsto *_{2;o} \circ_1 x.$$

Inversement, si on se donne  $f^\bullet : X_1^\bullet \rightarrow X_2^\bullet$  un morphisme cosimplicial alors on introduit la collection, de type  $\mathcal{Act}$ ,  $M \in Coll(\{o; c\})$  de la façon suivante :

$$M_c(n) = X_1^n \text{ pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad M_o(n) = X_2^n \text{ pour } n \geq 0.$$

La structure de  $\mathcal{Act}$ -bimodule infinitésimal est construite de la façon suivante :

- ▷  $- \circ^i *_{2;c} : M_c(n) \rightarrow M_c(n+1) ; x \mapsto d^i(x), \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, n\},$
- ▷  $*_{2;c} \circ_1 - : M_c(n) \rightarrow M_c(n+1) ; x \mapsto d^{n+1}(x),$
- ▷  $*_{2;c} \circ_2 - : M_c(n) \rightarrow M_c(n+1) ; x \mapsto d^0(x),$
- ▷  $- \circ^i *_{2;o} : M_o(n) \rightarrow M_o(n+1) ; x \mapsto d^i(x), \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, n\},$
- ▷  $- \circ^{n+1} *_{2;o} : M_o(n) \rightarrow M_o(n+1) ; x \mapsto d^{n+1}(x),$
- ▷  $*_{2;o} \circ_2 - : M_o(n) \rightarrow M_o(n+1) ; x \mapsto d^0(x),$
- ▷  $- \circ^i *_{0;c} : M_c(n) \rightarrow M_c(n-1) ; x \mapsto s^{i+1}(x), \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, n\},$
- ▷  $- \circ^i *_{0;o} : M_o(n) \rightarrow M_o(n-1) ; x \mapsto s^{i+1}(x), \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, n\}.$

Comme l'opérate  $\mathcal{A}ct$  est engendrée par les éléments  $*_{0;c}$ ,  $*_{2;c}$  et  $*_{2;o}$ , les opérations ci-dessus suffisent à construire une structure de bimodule infinitésimal sous l'opérate colorée  $\mathcal{A}ct$ . De plus, les relations cosimpliciales impliquent les axiomes des  $\mathcal{A}ct$ -bimodules infinitésimaux. La démonstration est similaire pour le cas des morphismes semi-cosimpliciaux. Il suffit de ne pas tenir compte des codégénérescences dans les constructions ci-dessus.  $\square$

*Remarque 1.3.5.* Comme on peut le voir dans la démonstration de la proposition 1.3.4, à partir d'un bimodule infinitésimal sous  $\mathcal{A}ct$  (resp.  $\mathcal{A}ct_{>0}$ ), on peut toujours extraire un morphisme cosimplicial (resp. semi-cosimplicial). Cependant, pour avoir l'équivalence des objets, on doit supposer que nos collections sont de type  $\mathcal{A}ct$ .

Si on restreint les objets de la proposition 1.3.4 à la couleur fermée, on retrouve la proposition énoncée par Turchin dans [48].

**Proposition 1.3.6.** [48, Lemme 4.2] *La catégorie des  $\mathcal{A}ct$ -bimodules infinitésimaux est équivalente à la catégorie des espaces cosimpliciaux. De même, la catégorie des  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodules infinitésimaux est équivalente à la catégorie des espaces semi-cosimpliciaux.*

*Remarque 1.3.7.* Lorsque  $O$  est une opérate colorée symétrique, la notion analogue est celle de  $(O)_\Sigma$ -bimodule infinitésimal. Dans ce cas, on demande une compatibilité entre la structure de bimodule infinitésimal et l'action du groupe des permutations :

$$(x \cdot \sigma) \circ^i (x' \cdot \sigma') = (x \circ^{\sigma(i)} x') \cdot (\sigma \circ_i \sigma') \quad \text{et} \quad (x'' \cdot \sigma'') \circ_i (x \cdot \sigma) = (x'' \circ_{\sigma(i)} x) \cdot (\sigma'' \circ_i \sigma),$$

avec

$$\begin{cases} x & \in M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}), \\ x' & \in O(s'_1, \dots, s'_p; s_i), \\ x'' & \in O(s''_1, \dots, s''_{i-1}, s_{n+1}, s''_{i+1}, \dots, s''_q; s''_{q+1}), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma & \in \Sigma_n, \\ \sigma' & \in \Sigma_p, \\ \sigma'' & \in \Sigma_q. \end{cases}$$

On note  $\Sigma\text{-Ibimod}_O$  la catégorie des  $(O)_\Sigma$ -bimodules infinitésimaux, avec  $O$  une  $S$ -opérate symétrique.

## 1.4 $\Sigma$ -Bimodule coloré

Dans cette section,  $S$  est un ensemble tandis que  $(C; \otimes; \mathbb{I})$  désigne une catégorie symétrique monoïdale. Notons que dans la majorité de la thèse on va étudier les bimodules topologiques. Par conséquent, on omettra de préciser la catégorie  $C$  s'il n'y a pas d'ambiguïté. On fixe aussi deux  $S$ -opérades  $P$  et  $Q$  dans la catégorie  $C$ .

**Définition 1.4.1.** Un  $P$ - $Q$  bimodule est la donnée d'une collection  $M \in \text{Coll}(S)$  muni de morphismes :

$$\begin{aligned} \gamma_r : M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes Q(s_1^1, \dots, s_{m_1}^1; s_1) \otimes \dots \otimes Q(s_1^n, \dots, s_{m_n}^n; s_n) &\longrightarrow M(s_1^1, \dots, s_{m_n}^n; s_{n+1}), \\ \gamma_l : P(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(s_1^1, \dots, s_{m_1}^1; s_1) \otimes \dots \otimes M(s_1^n, \dots, s_{m_n}^n; s_n) &\longrightarrow M(s_1^1, \dots, s_{m_n}^n; s_{n+1}). \end{aligned}$$

Ces opérations, appelées respectivement structure à droite et à gauche, vérifient les axiomes suivants :

**C1** *L'axiome de l'unité* : on a les égalités suivantes :

- ▷  $\gamma_r(x; *_{s_1}, \dots, *_{s_n}) = x,$  avec  $x \in M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $*_{s_i}$  le point particulier de  $Q(s_i; s_i)$ ,
- ▷  $\gamma_l(*_{s_{n+1}}; x) = x,$  avec  $x \in M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $*_{s_{n+1}}$  le point particulier de  $P(s_{n+1}; s_{n+1})$ .

**C2** L'axiome de l'associativité à droite : si on pose  $\underline{s}^i = (s_1^i, \dots, s_{m_i}^i; s_i)$  et  $\underline{s}^{i,j} = (s_1^{i,j}, \dots, s_{m_i,j}^{i,j}; s_i^j)$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m_i$ , alors on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 [M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes Q(\underline{s}^1) \otimes \dots \otimes Q(\underline{s}^n)] \otimes Q(\underline{s}^{1,1}) \otimes \dots \otimes Q(\underline{s}^{n,m_n}) & \xrightarrow{\quad} & M(s_1^1, \dots, s_{m_n}^n; s_{n+1}) \otimes Q(\underline{s}^{1,1}) \otimes \dots \otimes Q(\underline{s}^{n,m_n}) \\
 \parallel & & \downarrow \\
 & & M(s_1^{1,1}, \dots, s_{m_n, m_n}^{n, m_n}, s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \\
 M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes \prod_{1 \leq i \leq n} [Q(\underline{s}^i) \otimes Q(\underline{s}^{i,1}) \otimes \dots \otimes Q(\underline{s}^{i, m_i})] & \longrightarrow & M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes \prod_{1 \leq i \leq n} Q(s_1^{i,1}, \dots, s_{m_i, m_i}^{i, m_i}; s_i)
 \end{array}$$

**C3** L'axiome de l'associativité à gauche : si on pose  $\underline{s}^i = (s_1^i, \dots, s_{m_i}^i; s_i)$  et  $\underline{s}^{i,j} = (s_1^{i,j}, \dots, s_{m_i,j}^{i,j}; s_i^j)$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m_i$ , alors on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 [P(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes P(\underline{s}^1) \otimes \dots \otimes P(\underline{s}^n)] \times M(\underline{s}^{1,1}) \otimes \dots \otimes M(\underline{s}^{n, m_n}) & \xrightarrow{\quad} & P(s_1^1, \dots, s_{m_n}^n; s_{n+1}) \otimes M(\underline{s}^{1,1}) \otimes \dots \otimes M(\underline{s}^{n, m_n}) \\
 \parallel & & \downarrow \\
 & & M(s_1^{1,1}, \dots, s_{m_n, m_n}^{n, m_n}, s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \\
 P(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes \prod_{1 \leq i \leq n} [P(\underline{s}^i) \otimes M(\underline{s}^{i,1}) \otimes \dots \otimes M(\underline{s}^{i, m_i})] & \longrightarrow & P(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes \prod_{1 \leq i \leq n} M(s_1^{i,1}, \dots, s_{m_i, m_i}^{i, m_i}; s_i)
 \end{array}$$

**C4** L'axiome de compatibilité : si on pose  $\underline{s}^i = (s_1^i, \dots, s_{m_i}^i; s_i)$  et  $\underline{s}^{i,j} = (s_1^{i,j}, \dots, s_{m_i,j}^{i,j}; s_i^j)$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m_i$ , alors on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 [P(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes M(\underline{s}^1) \otimes \dots \otimes M(\underline{s}^n)] \otimes Q(\underline{s}^{1,1}) \otimes \dots \otimes Q(\underline{s}^{n, m_n}) & \xrightarrow{\quad} & M(s_1^1, \dots, s_{m_n}^n; s_{n+1}) \otimes Q(\underline{s}^{1,1}) \otimes \dots \otimes Q(\underline{s}^{n, m_n}) \\
 \parallel & & \downarrow \\
 & & M(s_1^{1,1}, \dots, s_{m_n, m_n}^{n, m_n}, s_{n+1}) \\
 & & \uparrow \\
 P(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes \prod_{1 \leq i \leq n} [M(\underline{s}^i) \otimes Q(\underline{s}^{i,1}) \otimes \dots \otimes Q(\underline{s}^{i, m_i})] & \longrightarrow & P(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes \prod_{1 \leq i \leq n} M(s_1^{i,1}, \dots, s_{m_i, m_i}^{i, m_i}; s_i)
 \end{array}$$

Un morphisme entre deux  $P$ - $Q$  bimodules est la donnée d'un morphisme de collections préservant les opérations  $\gamma_l$  et  $\gamma_r$ . On note  $Bimod_{P,Q}$  la catégorie des  $P$ - $Q$  bimodules. Lorsque  $P = Q$ , on désigne par  $Bimod_P$  la catégorie des  $P$ -bimodules.

*Remarque 1.4.2.* Dans la définition d'un  $P$ - $Q$  bimodule, l'opération  $\gamma_r$  peut être remplacée par une famille d'applications continues :

$$\sigma^i : M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes Q(s'_1, \dots, s'_{m_i}; s_i) \longrightarrow M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_{m_i}, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}),$$

avec  $1 \leq i \leq n$ , grâce aux unités de l'opérateur coloré  $Q$ . Cependant, comme  $M$  ne possède pas de points particuliers, il n'existe pas de substitution équivalente pour l'opération  $\gamma_l$ . Par conséquent, il n'y a pas nécessairement de lien entre les bimodules et les bimodules infinitésimaux à cause de la structure à gauche.

**Exemple 1.4.3.1)** Soit  $\eta : O_1 \rightarrow O_2$  un morphisme de  $S$ -opérades dans la catégorie  $C$ . Dans ce cas,  $O_2$  possède une structure de  $O_1$ -bimodule dont les opérations sont définies grâce à la structure opéradique de  $O_2$  :

$$\begin{aligned} \gamma_r : O_2(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O_1(s_1^1, \dots, s_{m_1}^1; s_1) \otimes \cdots \otimes O_1(s_1^n, \dots, s_{m_n}^n; s_n) &\longrightarrow O_2(s_1^1, \dots, s_{m_n}^n; s_{n+1}); \\ (x; y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \gamma(x; \eta(y_1), \dots, \eta(y_n)), \\ \gamma_l : O_1(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes O_2(s_1^1, \dots, s_{m_1}^1; s_1) \otimes \cdots \otimes O_2(s_1^n, \dots, s_{m_n}^n; s_n) &\longrightarrow O_2(s_1^1, \dots, s_{m_n}^n; s_{n+1}); \\ (x; y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \gamma(\eta(x); y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

2) Si  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow M$  est un morphisme de  $\mathcal{Act}$ -bimodules alors  $M$  possède une structure de  $\mathcal{Act}$ -bimodule infinitésimal. Grâce à la remarque 1.4.2, il suffit de définir les opérations à gauche :

$$\begin{aligned} \circ_i : \mathcal{Act}(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \times M(s'_1, \dots, s'_m; s_i) &\longrightarrow M(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_m, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}); \\ (*; x) &\longmapsto \gamma_l(*; \eta(*_1; s_1), \dots, \eta(*_1; s_{i-1}), x, \eta(*_1; s_{i+1}), \dots, \eta(*_1; s_n)). \end{aligned}$$

De même, si  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow M$  est un morphisme de  $\mathcal{Act}_{>0}$ -bimodules alors  $M$  possède une structure de  $\mathcal{Act}_{>0}$ -bimodule infinitésimal.

**Proposition 1.4.4.** [13] La donnée d'un morphisme de  $\mathcal{Act}$ -bimodules  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow M$ , avec  $M$  de type  $\mathcal{Act}$ , est équivalente à la donnée d'un morphisme cosimplicial  $f^\bullet : X_1^\bullet \rightarrow X_2^\bullet$  avec :

- $X_1^\bullet$  un monoïde unitaire dans la catégorie des espaces cosimpliciaux munie du produit  $\boxtimes$ ,
- $X_2^\bullet$  un  $X_1^\bullet$ -module à gauche unitaire dans la catégorie des espaces cosimpliciaux munie du produit  $\boxtimes$ ,
- $f^\bullet$  un morphisme de  $X_1^\bullet$ -module à gauche.

De même, la donnée d'un morphisme de  $\mathcal{Act}_{>0}$ -bimodules  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow M$ , avec  $M$  de type  $\mathcal{Act}$ , est équivalente à la donnée d'un morphisme semi-cosimplicial  $f^\bullet : X_1^\bullet \rightarrow X_2^\bullet$  avec :

- $X_1^\bullet$  un monoïde unitaire dans la catégorie des espaces semi-cosimpliciaux munie du produit  $\boxtimes$ ,
- $X_2^\bullet$  un  $X_1^\bullet$ -module à gauche unitaire dans la catégorie des espaces semi-cosimpliciaux munie du produit  $\boxtimes$ ,
- $f^\bullet$  un morphisme de  $X_1^\bullet$ -module à gauche.

*Démonstration.* Si  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow M$  est un morphisme de  $\mathcal{Act}$ -bimodules alors  $M$  est un  $\mathcal{Act}$ -bimodule infinitésimal dont la structure est décrite dans l'exemple 1.4.3. D'après la proposition 1.3.4, les familles  $M_c$  et  $M_o$  sont des espaces cosimpliciaux et il existe un morphisme cosimplicial  $f^\bullet : M_c \rightarrow M_o$ . La structure monoïdale sur  $M_c$  et la structure de module à gauche sur  $M_o$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \mu_1 : M_c(n) \times M_c(m) &\longrightarrow M_c(n+m); & \text{et} & & \mu_2 : M_c(n) \times M_o(m) &\longrightarrow M_o(n+m); \\ (x; y) &\longmapsto *_2;_c(x; y), & & & (x; y) &\longmapsto *_2;_o(x; y). \end{aligned}$$

Les axiomes liés aux  $\mathcal{Act}$ -bimodules induisent les égalités (1.6) et (1.7) tandis que  $f^\bullet$  est un morphisme de  $M_c$ -modules à gauche. Comme l'unité dans la catégorie des espaces cosimpliciaux munie du produit  $\boxtimes$  coïncide avec l'opérad associatif, le monoïde  $M_c$  et le module à gauche  $M_o$  sont unitaires grâce aux morphismes cosimpliciaux issus des compositions :

$$\mathcal{Act} \xrightarrow{\eta_c} M_c \quad \text{et} \quad \mathcal{Act} \xrightarrow{\eta_c} M_c \xrightarrow{f^\bullet} M_o,$$

avec  $\eta_c$  l'application provenant de la restriction de  $\eta$  à la couleur fermée.

Inversement, si on se donne un morphisme cosimplicial vérifiant les conditions du théorème alors la collection  $M \in \text{Coll}(\{o; c\})$  de type  $\mathcal{Act}$  définie par :

$$M_c(n) = X_1^n \quad \text{pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad M_o(n) = X_2^n \quad \text{pour } n \geq 0,$$

est un  $\mathcal{Act}$ -bimodule infinitésimal dont la structure est décrite dans la preuve de la proposition 1.3.4. D'après la remarque 1.4.2, pour montrer que  $M$  est un  $\mathcal{Act}$ -bimodule, il suffit de construire les opérations à gauche. Comme l'opérad  $\mathcal{Act}$  est engendrée par les points  $*_{0;c}$ ,  $*_{2;c}$  et  $*_{2;o}$ , les opérations ci-dessous suffisent à définir  $\gamma_l$  :

$$\begin{aligned} - *_2;_c - : M_c(n) \times M_c(m) &\longrightarrow M_c(n+m); & \text{et} & & - *_2;_o - : M_c(n) \times M_o(m) &\longrightarrow M_o(n+m); \\ (x; y) &\longmapsto x \boxtimes y, & & & (x; y) &\longmapsto x \boxtimes y. \end{aligned}$$

Remarquons que si on applique la construction ci-dessus au morphisme cosimplicial  $id : u^\bullet \rightarrow u^\bullet$ , avec  $u^\bullet$  l'unité pour le produit  $\boxtimes$ , alors l'objet obtenu coïncide avec l'opérate  $\mathcal{A}ct$ . Au final, le morphisme de  $\mathcal{A}ct$ -bimodules  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow M$  provient du morphisme de module à gauche  $f^\bullet$  et de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} u^\bullet & \longrightarrow & X_1^\bullet \\ id \downarrow & & \downarrow f^\bullet \\ u^\bullet & \longrightarrow & X_2^\bullet \end{array}$$

□

Si on restreint les objets de la proposition précédente à la couleur fermée alors on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 1.4.5.** *Soit  $\mathcal{A}s \rightarrow M$  un morphisme de  $\mathcal{A}s$ -bimodules. La totalisation (homotopique) de l'espace cosimplicial  $M$  est une  $E_1$ -algèbre. De même, si  $\mathcal{A}s \rightarrow M$  est un morphisme  $\mathcal{A}s_{>0}$ -bimodules alors la semi-totalisation de l'espace semi-cosimplicial  $M$  est une  $E_1$ -algèbre.*

D'après la proposition 1.4.4 et le théorème 1.2.14, si on a un morphisme de  $\mathcal{A}ct$ -bimodules  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow M$  alors la totalisation de  $M_c$  est une  $C_1$ -algèbre. Cependant, on ne dispose d'aucune information sur la totalisation de  $M_o$ . Dans l'exemple qui suit, on étudie un cas particulier où le morphisme de modules à gauche implique que le couple d'espaces  $(Tot(M_c); Tot(M_o))$  est une  $\mathcal{S}C_1$ -algèbre. L'objectif du chapitre 3 est de généraliser ce type de résultat en prenant la semi-totalisation.

**Exemple 1.4.6.** Soient  $(X; *)$  un espace topologique pointé et  $A$  un sous-espace de  $X$  contenant le point base. Remarquons que les espaces cosimpliciaux  $\Omega X^\bullet$  et  $\Omega(X; A)^\bullet$ , issus de l'exemple 1.2.3, possèdent respectivement une structure de monoïde unitaire et une structure de  $\Omega X^\bullet$ -module à gauche unitaire induites par la concaténation :

$$\begin{aligned} \mu_1 : \Omega X^n \times \Omega X^m &\rightarrow \Omega X^{n+m} && ; (x_1, \dots, x_n); (x'_1, \dots, x'_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m), \\ \mu_2 : \Omega X^n \times \Omega(X; A)^m &\rightarrow \Omega(X; A)^{n+m} && ; (x_1, \dots, x_n); (x'_1, \dots, x'_m, a) \mapsto (x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m, a), \end{aligned}$$

et dont l'unité provient dans les deux cas de l'application envoyant le point  $*_n \in u^n$  vers le  $n$ -uplet  $(*, \dots, *)$ , avec  $u^\bullet$  l'unité dans la catégorie des espaces cosimpliciaux (voir la proposition 1.2.13). Par conséquent, le couple d'espaces cosimpliciaux  $(\Omega X^\bullet; \Omega(X; A)^\bullet)$  provient d'un morphisme de  $\mathcal{A}ct$ -bimodules. Or, on sait que le couple  $(Tot(\Omega X^\bullet); Tot(\Omega(X; A)^\bullet))$  d'espaces topologiques est homéomorphe à une  $\mathcal{S}C_1$ -algèbre explicite  $(\Omega X; \Omega(X; A))$ .

*Remarque 1.4.7.* Lorsque  $P$  et  $Q$  sont des opérades colorées symétriques, la notion analogue est celle de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule. Dans ce cas on demande une compatibilité entre la structure de bimodule et l'action de groupe des permutations. On note  $\Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}$  la catégorie des  $(P-Q)_\Sigma$ -bimodules, avec  $P$  et  $Q$  deux  $S$ -opérades symétriques. Lorsque  $P = Q$ , on désigne par  $\Sigma\text{-Bimod}_P$  la catégorie des  $\Sigma$ -bimodules sous l'opérate  $P$ .

## 1.5 Opérate colorée différentielle graduée

Dans ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désigne un corps. On va s'intéresser à la méthode permettant de transformer une opérade colorée topologique en une opérade colorée dans la catégorie des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels différentiels gradués. L'objectif est de comprendre les algèbres sous les opérades différentielles graduées issues des opérades topologiques  $C_2$  et  $\mathcal{S}C_2$ .

**Définition 1.5.1.** La catégorie  $dg\text{-Vect}_{\mathbb{K}}$  est la catégorie symétrique monoïdale des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels différentiels gradués dont les objets sont les familles de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $V = \{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , indexées par les entiers relatifs, munies d'un morphisme linéaire de degré  $-1$  :

$$\{d_V : V_n \rightarrow V_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

appelé la différentielle et vérifiant la relation  $d \circ d = 0$ . Un morphisme  $f : (V; d_V) \rightarrow (V'; d_{V'})$  est la donnée d'une famille d'applications linéaires  $\{f_n : V_n \rightarrow V'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifiant l'égalité :

$$d_{V'} \circ f_n = f_{n-1} \circ d_V, \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.8)$$



Le produit tensoriel entre deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels différentiels gradués  $(V; d_V)$  et  $(V'; d_{V'})$  est donné par la famille d'espaces vectoriels :

$$(V \otimes V')_n := \bigoplus_{p+q=n} V_p \otimes_{\mathbb{K}} V'_q$$

et dont la différentielle est définie via la formule :

$$d_{V \otimes V'}(v \otimes v') = d_V(v) \otimes v' + (-1)^{|v|} v \otimes d_{V'}(v').$$

**Exemple 1.5.2.1)** A partir d'un objet  $(V; d_V) \in dg\text{-Vect}_{\mathbb{K}}$ , on définit l'homologie  $H_*(V; d_V)$  (ou juste  $H_*(V)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la différentielle) comme le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel différentiel gradué donné par le quotient :

$$H_n(V; d_V) := \frac{\ker(d_V : V_n \rightarrow V_{n-1})}{\text{Im}(d_V : V_{n+1} \rightarrow V_n)},$$

et dont la différentielle est nulle. Grâce à la relation (1.8), un morphisme  $f : (V; d_V) \rightarrow (V'; d_{V'})$  induit un morphisme en homologie.

2) A partir d'un espace topologique  $X$ , on définit le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel différentiel gradué  $C_*^s(X)$ , appelé le complexe de chaînes associé à  $X$ . Lorsque  $n \geq 0$ ,  $C_n^s(X)$  est le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel libre engendré par l'ensemble des applications continues  $\{f : \Delta^n \rightarrow X\}$ . Si  $n < 0$  alors  $C_n^s(X) = 0$ . Pour construire la différentielle, on utilise la structure semi-cosimpliciale de  $\Delta^\bullet$  :

$$d : C_n^s(X) \rightarrow C_{n-1}^s(X) ; \{f : \Delta^n \rightarrow X\} \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \left\{ \Delta^{n-1} \xrightarrow{d^i} \Delta^n \xrightarrow{f} X \right\}.$$

**Définition 1.5.3.** Soient  $f, g : (V; d_V) \rightarrow (V'; d_{V'})$  deux morphismes de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels différentiels gradués. On dit que  $f$  et  $g$  sont homotopes s'il existe un morphisme  $h$  de degré 1 :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & V_{n-1} & \longleftarrow & V_n & \longleftarrow & V_{n+1} & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n-1} & \searrow h_{n-1} & \downarrow f_n & \searrow h_n & \downarrow f_{n+1} & & \\ & & V'_{n-1} & \longleftarrow & V'_n & \longleftarrow & V'_{n+1} & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

vérifiant la relation :

$$f_n - g_n = d_{V'} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_V, \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}.$$

**Proposition 1.5.4.** [24, Proposition 2.12] Si deux morphismes  $f, g : (V; d_V) \rightarrow (V'; d_{V'})$  sont homotopes alors ils induisent la même application en homologie.

A partir d'une collection  $O \in \text{Coll}(S)$  dans les espaces topologiques, on peut construire une collection dans la catégorie  $dg\text{-Vect}_{\mathbb{K}}$  :

$$C_*^s(O)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) = C_*^s(O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})).$$

On va montrer que si  $O$  est une  $S$ -opérate symétrique topologique alors  $C_*^s(O)$  et  $H_*(O) = H_*(C^s(O))$  sont des  $S$ -opéradés différentiels gradués. Pour cela, on a besoin de la notion de shuffle.

**Définition 1.5.5.** Soit  $p_1, \dots, p_n$  une famille d'entiers naturels. L'ensemble des  $(p_1, \dots, p_n)$ -shuffles, noté  $Sh_{p_1, \dots, p_n}$ , est constitué des permutations  $\sigma \in \Sigma_{p_1 + \dots + p_n}$  vérifiant :

$$\sigma(p_1 + \dots + p_i + 1) < \dots < \sigma(p_1 + \dots + p_{i+1}), \quad \text{avec } 0 \leq i \leq n-1.$$

La signature d'un shuffle  $\varepsilon(\sigma)$  est définie comme la signature de la permutation associée. A partir d'un élément  $\sigma \in Sh_{p_1, \dots, p_n}$ , on définit l'application :

$$\begin{aligned} S_\sigma : \Delta^{p_1 + \dots + p_n} &\longrightarrow \Delta^{p_1} \times \dots \times \Delta^{p_n}; \\ (t_1, \dots, t_{p_1 + \dots + p_n}) &\longmapsto (t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(p_1)}); \dots; (t_{\sigma(p_1 + \dots + p_{n-1} + 1)}, \dots, t_{\sigma(p_1 + \dots + p_n)}). \end{aligned}$$

**Proposition 1.5.6.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. L'application d'Eilenberg et MacLane :

$$EM : C_*^s(X) \otimes C_*^s(Y) \longrightarrow C_*^s(X \times Y),$$

envoyant deux éléments  $\{f : \Delta^p \rightarrow X\}$  et  $\{g : \Delta^q \rightarrow Y\}$  vers l'élément de  $C_{p+q}^s(X \times Y)$  défini par :

$$\sum_{\sigma \in Sh_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{f \times g} X \times Y \right\}$$

fait de  $C_*^s : Top \rightarrow dg-Vect_{\mathbb{K}}$  un foncteur monoïdal symétrique.

Si  $O$  est une  $S$ -opérate symétrique topologique alors  $C_*^s(O)$  est aussi une  $S$ -opérate symétrique dans la catégorie des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels gradués dont les compositions opéradiques partielles sont définies grâce à l'application de Eilenberg et MacLane :

$$\circ_i : C_*^s(O)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes C_*^s(O)(s'_1, \dots, s'_m; s_i) \xrightarrow{C_*^s(\circ_i) \circ EM} C_*^s(O)(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_m, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}) .$$

Les axiomes opéradiques sont vérifiés car, via l'application de Eilenberg et MacLane, le foncteur  $C_*^s$  est monoïdal symétrique. De même, si  $X = \{X_s\}_{s \in S}$  est une algèbre sous l'opérate colorée topologique  $O$  alors la famille de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $\{C_*^s(X_s)\}_{s \in S}$  est une  $C_*^s(O)$ -algèbre :

$$\mu : C_*^s(O)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \otimes C_*^s(X_{s_1}) \otimes \dots \otimes C_*^s(X_{s_n}) \xrightarrow{EM} C_*^s(O)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \times X_{s_1} \times \dots \times X_{s_n} \xrightarrow{C_*^s(\mu)} C_*^s(X_{s_{n+1}}) .$$

En passant à l'homologie, on montre que  $H_*(O)$  est aussi une  $S$ -opérate différentielle graduée et que l'homologie des  $O$ -algèbres sont des  $H_*(O)$ -algèbres.

**Proposition 1.5.7.** [10] Une  $H_*(C_2)$ -algèbre, ou algèbre de Gerstenhaber, est la donnée d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel différentiel gradué  $V$  muni d'un produit commutatif et d'un crochet de Lie de degré 1 :

$$\begin{aligned} \triangleright [-; -] : V_n \otimes_{\mathbb{K}} V_m &\longrightarrow V_{n+m+1}; \\ \triangleright - * - : V_n \otimes_{\mathbb{K}} V_m &\longrightarrow V_{m+n}; \end{aligned}$$

vérifiant la relation suivante :

$$[v_1; v_2 * v_3] = [v_1; v_2] * v_3 + (-1)^{(|v_1|-1)|v_2|} v_2 * [v_1; v_3],$$

avec un élément particulier  $1 \in V$  étant une unité pour le produit et tel que  $[v; 1] = 0$ , avec  $v \in V$ .

**Définition 1.5.8.** Le complexe de Hochschild associé à un bicomplexe  $(X^{\bullet, \bullet}; d_1; d_2)$  est défini de la façon suivante :

$$CH_p(X^{\bullet, \bullet}; d_1; d_2) := \prod_{l \geq 0} X^{p+1; l} \quad \text{et} \quad d = d_1 + (-1)^{p+1} d_2.$$

On note  $HH_*(X^{\bullet, \bullet}; d_1; d_2)$  l'homologie du complexe de Hochschild. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur les différentielles, on désigne par  $HH_*(X^{\bullet, \bullet})$  l'homologie de Hochschild associée à  $(X^{\bullet, \bullet}; d_1; d_2)$ .

**Exemple 1.5.9.** On désigne par  $\mathcal{A}s_{\mathbb{K}} = C_*^s(\mathcal{A}s) \cong H_*(\mathcal{A}s)$  l'opérate dans la catégorie des espaces vectoriels différentiels gradués. Soit  $O$  une opérate multiplicative dans la catégorie  $dg-Vect_{\mathbb{K}}$ . Cela signifie qu'il existe un morphisme d'opérate  $\eta : \mathcal{A}s_{\mathbb{K}} \rightarrow O$  induisant un élément particulier  $m = \eta(m_2) \in O(2)$ . L'opérate  $O$  dispose d'une bigraduation  $O^{\bullet, \bullet}$  provenant de la graduation de  $O$  et de l'arité de l'opérate  $O$ . On introduit alors le bicomplexe dont les différentielles sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \triangleright d_1 : O^{p; q} &\rightarrow O^{p-1; q}, \quad \text{issue de la différentielle de } O(q), \\ \triangleright d_2 : O^{p; q} &\rightarrow O^{p; q+1}, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^p (-1)^i x \circ_i m - \sum_{i=1}^2 (-1)^i m \circ_i x. \end{aligned}$$

Gerstenhaber et Voronov dans [51], puis Turchin dans le cas gradué [47] montrent que l'homologie de Hochschild associée à ce bicomplexe est une algèbre de Gerstenhaber. Par convention, si  $x \in O(n)$  alors

$|x| = n$  et  $\tilde{x}$  correspond à la graduation de  $x$  dans l'espace vectoriel gradué  $O(n)$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $O$  alors le crochet de Lie provient de l'opération suivante :

$$[x; y] = \sum_{i=1}^{|x|} (-1)^{\xi_i} x \circ_i y - (-1)^{(\tilde{x}+|x|-1)(\tilde{y}+|y|-1)} \sum_{i=1}^{|y|} (-1)^{\xi'_i} y \circ_i x,$$

avec  $\xi_i = (|y| - 1)(i - 1) + (|x| - 1)\tilde{y}$  et  $\xi'_i = (|x| - 1)(i - 1) + (|y| - 1)\tilde{x}$ . De plus, on a  $[m; m] = 0$  et le produit commutatif entre deux éléments  $x$  et  $y$  provient de la formule :

$$x * y = \gamma(m; x, y),$$

avec  $\gamma$  la composition opéradique totale associée à  $O$ .

**Proposition 1.5.10.** [51, Théorème 3.3] Une  $H_*(SC_2)$ -algèbre, ou  $sc_2$ -algèbre, est la donnée d'un couple de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels différentiels gradués  $(V; V')$  tel que  $V$  est une algèbre de Gerstenhaber et  $V'$  est muni d'un produit associatif et d'une structure de module à gauche sous l'algèbre commutative  $V$  :

$$\begin{aligned} \triangleright - *_i - : V'_n \otimes_{\mathbb{K}} V'_m &\longrightarrow V'_{n+m}; \\ \triangleright - *_e - : V_n \otimes_{\mathbb{K}} V'_m &\longrightarrow V'_{m+n}. \end{aligned}$$

**Exemple 1.5.11.** On désigne par  $\mathcal{A}ct_{\mathbb{K}} = C_*^s(\mathcal{A}ct) \cong H_*(\mathcal{A}ct)$  la  $\{o; c\}$ -opérade dans la catégorie des espaces vectoriels différentiels gradués. Soit  $O$  une opérade pointée dans la catégorie  $dg-Vect_{\mathbb{K}}$ . Cela signifie qu'il existe un morphisme d'opérades  $\eta : \mathcal{A}ct_{\mathbb{K}} \rightarrow O$ . En particulier, on dispose de deux éléments particuliers :

$$m_c \in O(c, c; c) \quad \text{et} \quad m_o \in O(c, o; o).$$

Comme pour l'exemple 1.5.9, les familles d'espaces vectoriels différentiels gradués  $O_c$  et  $O_o$  fournissent deux bicomplexes dont le couple d'homologies de Hochschild est une  $sc_2$ -algèbre. Comme la restriction de  $\eta$  à la couleur fermée est un morphisme d'opérades  $\eta_c : \mathcal{A}ct_{\mathbb{K}} \rightarrow O_c$ , l'homologie de Hochschild associée à  $O_c$  est une algèbre de Gerstenhaber. Si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $O_o$  alors le produit associatif provient de l'opération suivante :

$$x *_i y = x \circ_{|x|} y.$$

Si  $x \in O_c$  et  $y \in O_o$  alors la structure de module à gauche est obtenue à partir de l'opération suivante :

$$x *_e y = \gamma(m_o; x, y),$$

avec  $\gamma$  la composition opéradique totale issue de  $O$ . Dans le chapitre 5, on étudiera plus attentivement cette structure lorsque  $O$  provient du complexe des chaînes singulières associé à une opérade pointée topologique.

## Catégorie modèle, espace des morphismes dérivé

Dans le chapitre précédent, on a montré que si un couple d'espaces semi-cosimpliciaux  $(O_c; O_o)$  provient d'une opérade pointée stricte  $O$  alors les espaces topologiques  $sTot(O_c)$  et  $sTot(O_o)$  ont respectivement le type d'homotopie d'un espace de lacets double et de lacets simple. De plus on a émis l'hypothèse que le couple d'espaces forme une algèbre sous l'opérade topologique  $\mathcal{SC}_2$ . Afin d'identifier explicitement les espaces de lacets et de lacets relatifs entrant en jeu, on doit définir une structure de catégorie modèle sur les opérades colorées ainsi que les bimodules (infinitésimaux).

Ce chapitre est divisé en deux sections. La première section consiste à rappeler les notions sur les catégories modèles nécessaires pour la suite de la thèse et pour la compréhension du théorème de transfert permettant de définir une structure de catégorie modèle à partir d'une adjonction. La seconde section est donc consacrée à la construction des différentes adjonctions afin d'appliquer le théorème de transfert pour la catégorie des opérades colorée ainsi que la catégorie des bimodules (infinitésimaux). On déterminera aussi des remplacements cofibrants des opérades  $\mathcal{Act}$  et  $\mathcal{As}$  en tant que bimodules (infinitésimaux) pour calculer des espaces de morphismes dérivés. En particulier, on prouvera les équivalences faibles suivantes :

$$Ibimod_{\mathcal{Act}_{>0}}^h(\mathcal{Act}; O) \simeq Ibimod_{\mathcal{As}_{>0}}^h(\mathcal{As}; O_c) \simeq sTot(O_c).$$

### 2.1 Introduction aux catégories modèles et au théorème de transfert

La théorie des catégories modèles a été introduite par Quillen dans [36] afin d'axiomatiser les conditions requises à une catégorie pour permettre une théorie de l'homotopie. L'idée est de mimer la théorie de l'homotopie classique pour les espaces topologiques. La plupart des notions abordées dans cette section sont étudiées de manière plus approfondie par Dwyer et Spalinski [16], Hirschhorn [25] ainsi que Hovey [28]. L'objectif, dans le cas présent, est d'énoncer les définitions ainsi que les lemmes nécessaires pour la suite de la thèse et, en particulier, le théorème de transfert. Pour ce dernier, on se réfère à l'article [2] de Berger et Moerdijk.

#### 2.1.1 Catégorie modèle

**Définition 2.1.1.** Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : A \rightarrow B$  deux morphismes dans une catégorie  $C$ . On dit que  $f$  est un *rétract* de  $g$  s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_1} & A & \xrightarrow{j_1} & X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & f \downarrow \\ Y & \xrightarrow{i_2} & B & \xrightarrow{j_2} & Y \end{array}$$

avec  $j_1 \circ i_1 = id_X$  et  $j_2 \circ i_2 = id_Y$ .

**Définition 2.1.2.** Une *catégorie modèle* est la donnée d'une catégorie  $C$  ainsi que de trois classes de morphismes stables par composition et contenant les morphismes identités. Ces trois classes sont appelées

respectivement les équivalences faibles ( $\xrightarrow{\sim}$ ), les fibrations ( $\twoheadrightarrow$ ) et les cofibrations ( $\hookrightarrow$ ). Un morphisme qui est à la fois une équivalence faible et une fibration (resp. cofibration) est appelé une fibration acyclique (resp. une cofibration acyclique). Les trois classes de morphismes doivent vérifier les axiomes suivants :

**MC1** : La catégorie  $C$  admet des colimites et des limites finies.

**MC2** : Soient  $f$  et  $g$  deux morphismes de  $C$  composables. Si deux morphismes sur trois parmi  $f$ ,  $g$  et  $g \circ f$  sont des équivalences faibles alors le troisième morphisme est aussi une équivalence faible.

**MC3** : Soient  $f$  et  $g$  deux morphismes de  $C$ . Si  $f$  est un rétract de  $g$  avec  $g$  appartenant à l'une des trois classes de morphismes alors  $f$  appartient à la même classe que  $g$ .

**MC4** : Le diagramme (2.1) possède un relèvement  $h$  si on est dans l'un des cas suivants :

- $i$  est une cofibration et  $p$  est une fibration acyclique,
- $i$  est une cofibration acyclique et  $p$  est une fibration.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & X \\
 i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 B & \longrightarrow & Y
 \end{array} \tag{2.1}$$

**MC5** : Tout morphisme  $f$  peut se décomposer de deux façons :

- $f = p \circ i$  avec  $i$  est une cofibration et  $p$  est une fibration acyclique,
- $f = p \circ i$  avec  $i$  est une cofibration acyclique et  $p$  est une fibration.

*Remarque 2.1.3.* Notre définition de catégorie modèle correspond à la notion de catégorie modèle fermée au sens de Quillen [36] à cause de l'axiome **MC1**. Le fait qu'une catégorie possède des colimites et des limites finies implique notamment l'existence d'un objet initial et d'un objet final notés  $\emptyset$  et  $*$  respectivement.

**Exemple 2.1.4. La catégorie au-dessous  $X \downarrow C$**

Soient  $C$  une catégorie modèle et  $X$  un objet de  $C$ . La catégorie  $X \downarrow C$  a pour objet les couples  $(Y; f_Y)$  avec  $Y$  un objet de  $C$  et  $f_Y \in C(X; Y)$ . Un morphisme  $f : (Y; f_Y) \rightarrow (Y'; f_{Y'})$  est la donnée d'un morphisme  $f \in C(Y; Y')$  tel que l'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 f_Y \swarrow & & \searrow f_{Y'} \\
 Y & \xrightarrow{f} & Y'
 \end{array}$$

La catégorie  $X \downarrow C$  hérite d'une structure de catégorie modèle de  $C$ . Un morphisme  $f : (Y; f_Y) \rightarrow (Y'; f_{Y'})$  est une équivalence faible (resp. une fibration ou une cofibration) si le morphisme sous-jacent  $f : Y \rightarrow Y'$  est une équivalence faible (resp. une fibration ou une cofibration) dans  $C$ . Notons que  $(X; id_X)$  est l'objet initiale de la catégorie  $X \downarrow C$ .

**Exemple 2.1.5. La catégorie produit  $\prod C_s$**

Soient  $S$  un ensemble et  $\{C_s\}_{s \in S}$  une famille de catégories modèles. La catégorie produit  $\prod C_s$  possède une structure de catégorie modèle où  $(f_s)_{s \in S}$  est une équivalence faible (resp. une fibration ou une cofibration) si, pour tout  $s \in S$ , le morphisme  $f_s$  est une équivalence faible (resp. une fibration ou une cofibration) dans la catégorie  $C_s$ .

**Définition 2.1.6.** Si un diagramme de la forme (2.2) possède un relèvement  $h$  alors on dit que  $g$  a la propriété de relèvement à gauche par rapport à  $f$  et que  $f$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à l'application  $g$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & X \\
 g \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\
 B & \longrightarrow & Y
 \end{array} \tag{2.2}$$

**Exemple 2.1.7. La catégorie modèle de Serre sur les espaces topologiques**

Dans la catégorie modèle de Serre, une application continue  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  est :

- une équivalence faible si, pour tout point  $x \in X$ , l'application  $f_n^* : \pi_n(X; x) \rightarrow \pi_n(Y; f(x))$  est un isomorphisme pour  $n \geq 1$  et l'application  $f_0^* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  est une bijection,
- une fibration de Serre si, pour tout CW-complexe  $A$ , les diagrammes de la forme (2.3) possèdent un relèvement  $h$  :

$$\begin{array}{ccc}
 A \times \{0\} & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\
 A \times [0, 1] & \longrightarrow & Y
 \end{array} \tag{2.3}$$

- une cofibration si  $f$  possède la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations de Serre acycliques.

**Exemple 2.1.8. La catégorie modèle de Hurewicz sur les espaces topologiques**

Dans la catégorie modèle de Hurewicz, une application continue  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  est :

- une équivalence faible si  $f$  est une équivalence d'homotopie,
- une fibration de Hurewicz si, pour tout espace  $A$ , les diagrammes de la forme (2.4) possèdent un relèvement  $h$  :

$$\begin{array}{ccc}
 A \times \{0\} & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\
 A \times [0, 1] & \longrightarrow & Y
 \end{array} \tag{2.4}$$

- une cofibration si  $f$  possède la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations de Hurewicz acycliques.

*Remarque 2.1.9.* Les catégories modèles des exemples (2.1.7) et (2.1.8) sont définies pour les espaces topologiques en toute généralité. Cependant, Hovey montre dans [28, Théorème 2.4.19 et Théorème 2.4.25] que l'on peut se restreindre aux espaces de Hausdorff compactement engendrés. Le lemme qui suit énonce une propriété propre aux catégories modèles qui sera utilisée à de nombreuses reprises dans la suite de la thèse.

**Lemme 2.1.10.** [16, Proposition 3.14] *Dans une catégorie modèle  $C$ , les produits fibrés préservent les fibrations et les fibrations acycliques tandis que les sommes amalgamées préservent les cofibrations et les cofibrations acycliques.*

**2.1.2 Catégorie homotopique**

**Définition 2.1.11.** Soient  $C$  une catégorie modèle et  $X$  un objet de  $C$ . Un *objet cylindre* associé à  $X$  est un objet de  $C$ , noté  $X \wedge I$ , muni de morphismes :

$$X \amalg X \xrightarrow{i} X \wedge I \xrightarrow{\sim} X,$$

qui factorisent le morphisme  $id_X + id_X : X \amalg X \rightarrow X$ . Ainsi, deux morphismes  $f, g : X \rightarrow Y$  sont dits *homotopes* s'il existe un objet cylindre  $X \wedge I$  et un morphisme  $H : X \wedge I \rightarrow Y$  tel que l'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & X \amalg X \\
 & \searrow g & \nearrow f \\
 & & Y
 \end{array}$$

$H \circ i$

*Notation 2.1.12.* Un objet  $X$  dans une catégorie modèle  $C$  est dit cofibrant si le morphisme  $\emptyset \rightarrow X$  est une cofibration. De même,  $X$  est dit fibrant si le morphisme  $X \rightarrow *$  est une fibration. Un remplacement cofibrant (resp. fibrant) de  $X$  est la donnée d'un objet de  $C$ , noté usuellement  $X^c$  (resp.  $X^f$ ), équipé de morphismes :

$$\emptyset \xrightarrow{i} X^c \xrightarrow{\sim} X \quad \text{et} \quad (\text{resp. } X \xrightarrow{\sim} X^f \xrightarrow{j} *)$$

avec  $i$  une cofibration et  $j$  une fibration. Grâce à l'axiome **MC5**, on sait que de tels remplacements existent.

**Lemme 2.1.13.** [16, Lemme 4.21] Soient  $C$  une catégorie modèle,  $X$  un objet cofibrant et  $Y$  un objet fibrant. La relation "être homotope" est une relation d'équivalence, notée  $\sim_h$ , sur l'ensemble des morphismes  $C(X; Y)$ .

**Définition 2.1.14.** La catégorie homotopique associée à une catégorie modèle  $C$ , notée  $C^h$ , possède les mêmes objets que  $C$  tandis que les morphismes entre deux objets  $X$  et  $Y$ , aussi appelé ensemble des morphismes dérivé, sont définis par :

$$C^h(X; Y) := C(X^c; Y^f) / \sim_h .$$

A partir d'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$ , on peut lui associer un morphisme  $\tilde{f} : X^c \rightarrow Y^f$ , avec  $X^c$  un remplacement cofibrant de  $X$  et  $Y^f$  un remplacement fibrant de  $Y$ . A homotopie près, le morphisme  $\tilde{f}$  ne dépend pas du choix du remplacement fibrant et du remplacement cofibrant. Par conséquent, on dispose d'un foncteur :

$$\gamma_C : C \longrightarrow C^h ; \begin{cases} \gamma_C(X) = X & \text{pour tout objet } X \text{ de } C, \\ \gamma_C(f) = \tilde{f} & \text{pour tout morphisme } f \text{ de } C. \end{cases} \quad (2.5)$$

*Remarque 2.1.15.* Au final, les axiomes liés à la structure de catégorie modèle sont suffisants pour définir une notion d'homotopie compatible avec la notion usuelle sur les espaces topologiques. En effet, si on regarde les espaces topologiques équipés des fibrations de Serre, alors un objet cylindre associé à un espace topologique  $X$  est donné par l'espace produit  $X \times [0, 1]$ .

### 2.1.3 Catégorie modèle cofibrement engendrée

Afin d'étudier l'ensemble des morphismes dérivé  $C^h(X; Y)$ , on doit déterminer des remplacements cofibrants et fibrants des objets. Même si l'axiome **MC5** des catégories modèles nous garantit l'existence de tels remplacements, il est parfois difficile de les construire explicitement. Il existe néanmoins des catégories où les cofibrations sont engendrées par un ensemble de morphismes et sont donc plus faciles à identifier. Notons que la définition de catégorie modèle cofibrement engendrée utilisée dans la thèse est une version simplifiée de la définition usuelle, ceci dans le but d'alléger les notations.

**Définition 2.1.16.** Une *catégorie modèle cofibrement engendrée* est la donnée d'une catégorie modèle  $C$  ainsi que de deux classes supplémentaires de morphismes :

- ▷ un ensemble  $I$ , appelé la classe des générateurs de cofibrations, tel qu'un morphisme  $f$  de  $C$  est une fibration acyclique si et seulement si  $f$  possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes de  $I$ ,
- ▷ un ensemble  $J$ , appelé la classe des générateurs de cofibrations acycliques, tel qu'un morphisme  $f$  de  $C$  est une fibration si et seulement si  $f$  possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes de  $J$ .

On notera  $(C; I; J)$  une catégorie modèle cofibrement engendrée.

*Notation 2.1.17.* Soient  $X$  et  $Y$  deux objets dans une catégorie modèle cofibrement engendrée  $(C; I; J)$ . On dit que  $Y$  est obtenu à partir de  $X$  le long d'une cofibration, s'il existe un morphisme  $A \rightarrow B \in I$  tel que l'on ait la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (2.6)$$

Grâce au lemme 2.1.10, on sait que l'application  $X \rightarrow Y$  est aussi une cofibration. L'intérêt des catégories modèles cofibrement engendrées réside dans la caractérisation des cofibrations.

**Proposition 2.1.18.** [25, Proposition 11.2.1] Soit  $(C; I; J)$  une catégorie modèle cofibrement engendrée. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est une cofibration si et seulement si elle est obtenue comme une limite de cofibrations de la forme (2.6).

**Exemple 2.1.19.** 1) Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq n$ , le "horn"  $\wedge_k^n$  est le sous-espace de  $\Delta^n$  défini par :

$$\wedge_k^n := \bigcup_{i \neq k} d^i(\Delta^{n-1}).$$

Les espaces topologiques équipés des fibrations de Serre forment une catégorie cofibrement engendrée où les ensembles générateurs des cofibrations et des cofibrations acycliques sont respectivement donnés par :

$$I := \{\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n \mid n \geq 0\} \quad \text{et} \quad J := \{\wedge_k^n \rightarrow \Delta^n \mid n \geq 0 \text{ et } 0 \leq k \leq n\}.$$

2) Soient  $S$  un ensemble et  $\{(C_s; I_s; J_s)\}_{s \in S}$  une famille de catégories modèles. La catégorie modèle produit  $\prod C_s$  est aussi cofibrement engendrée : l'ensemble générateur des cofibrations (resp. des cofibrations acycliques) est donnée par  $\prod I_s$  (resp.  $\prod J_s$ ). En particulier, la catégorie  $Coll(S)$ , équipée des fibrations de Serre, est une catégorie modèle cofibrement engendrée.

## 2.1.4 Catégorie monoïdale modèle

On a défini la notion d'opérade colorée et de bimodule (infinitésimal) dans des catégories symétriques monoïdales. On va donc s'intéresser à la compatibilité entre la structure monoïdale et la structure de catégorie modèle. Dans ce qui suit, les catégories monoïdales symétriques  $(C; \otimes; \mathbb{I})$  sont supposées fermées. Cela signifie que l'endofoncteur  $- \otimes X$  possède un adjoint à droite noté  $(-)^X$  :

$$- \otimes X : C \rightleftarrows C : (-)^X. \quad (2.7)$$

**Définition 2.1.20.** Une *catégorie monoïdale modèle* est la donnée d'une catégorie monoïdale  $(C; \otimes; \mathbb{I})$  fermée équipée d'une structure de catégorie modèle tel que, pour tout couple de cofibrations  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : A \rightarrow B$ , le morphisme :

$$X \otimes B \bigsqcup_{X \otimes A} Y \otimes A \longrightarrow Y \otimes B \quad (2.8)$$

est une cofibration qui est acyclique si l'un des deux morphismes  $f$  ou  $g$  est acyclique.

**Exemple 2.1.21.** La catégorie des espaces topologiques équipées des fibrations de Serre et du produit cartésien est une catégorie monoïdale modèle. De plus, comme on travaille avec les espaces de Hausdorff compactement engendrés et que l'ensemble des morphismes entre deux espaces est muni de la topologie compact-ouvert, l'adjonction (2.7) induit un homéomorphisme :

$$Top(X; Top(Y; Z)) \cong Top(X \times Y; Z), \quad (2.9)$$

pour tout triplet d'espaces topologiques  $X, Y$  et  $Z$ . De même, les catégories  $Coll(S; Top)$ ,  $\Sigma\text{-Ibimod}_{P-Q}$ ,  $\Sigma\text{-Bimod}_{P-Q}$  ainsi que la catégorie des opérades symétriques topologiques héritent d'une structure monoïdale provenant de  $Top$ . Les structures de catégories modèles sur ces catégories, définies dans la seconde partie de ce chapitre, sont compatibles avec la structure monoïdale. De plus, dans chacune des catégories citées ci-dessus, l'ensemble des morphismes dérivé sera munie d'une topologie. On parlera alors d'*espace de morphismes dérivé*. Le lemme qui suit est une conséquence de l'adjonction (2.9) et sera utilisé à de nombreuses reprises dans la suite de la thèse.

**Lemme 2.1.22.** Dans la catégorie modèle  $Top$  équipée des fibrations de Serre, si  $f : X \rightarrow Y$  est une cofibration alors, pour tout espace  $Z$ , l'application induite par la pré-composition avec  $f$  est une fibration :

$$Top(Y; Z) \rightarrow Top(X; Z).$$



### 2.1.5 Foncteur dérivé et paire de Quillen

**Définition 2.1.23.** Soient  $C$  une catégorie modèle et  $F : C \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. Le *foncteur dérivé à gauche*, noté  $(LF; t)$  est l'objet terminal parmi les couples  $(G; s)$  composés d'un foncteur  $G : C^h \rightarrow \mathcal{D}$  et d'une transformation naturelle  $s : G \circ \gamma_C \rightarrow F$ , avec  $\gamma_C$  le foncteur (2.5).

*Remarque 2.1.24.* On définit de façon similaire le *foncteur dérivé à droite*  $(RF; t)$  avec  $RF : C^h \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur et  $t : F \rightarrow (RF) \circ \gamma_C$  une transformation naturelle. Les foncteurs dérivés à gauche et à droite sont uniques à isomorphisme naturel près.

**Définition 2.1.25.** Soit  $F : C \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur entre deux catégories modèles. Le *foncteur dérivé total à gauche*  $\mathbb{L}F : C^h \rightarrow \mathcal{D}^h$  est défini comme le foncteur dérivé à gauche de la composée  $\gamma_{\mathcal{D}} \circ F : C \rightarrow \mathcal{D}^h$ . De même, le *foncteur dérivé total à droite*  $\mathbb{R}F : C^h \rightarrow \mathcal{D}^h$  est défini comme le foncteur dérivé à droite de la composée  $\gamma_{\mathcal{D}} \circ F : C \rightarrow \mathcal{D}^h$ .

**Théorème 2.1.26.** [16, Théorème 9.7] Soient  $C$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories modèles et  $F : C \rightleftarrows \mathcal{D} : G$  une adjonction. Si  $F$  préserve les cofibrations et  $G$  les fibrations alors les foncteurs :

$$\mathbb{L}F : C^h \rightleftarrows \mathcal{D}^h : \mathbb{R}G$$

existent et forment une paire de foncteurs adjoints. De tels couples sont appelés des paires de Quillen.

**Proposition 2.1.27.** [16, Remarque 9.8] Soit  $F : C \rightleftarrows \mathcal{D} : G$  une adjonction entre deux catégories modèles. Les énoncés suivants sont équivalents :

- i)  $F$  préserve les fibrations et  $G$  préserve les cofibrations,
- ii)  $F$  préserve les fibrations et les fibrations acycliques,
- iii)  $G$  préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques.

### 2.1.6 Le théorème de transfert

**Théorème 2.1.28.** [2, Section 2.5] Soit  $F : C \rightleftarrows \mathcal{D} : G$  une adjonction avec  $(C; I; J)$  une catégorie modèle cofibrement engendrée et  $\mathcal{D}$  une catégorie possédant des colimites et limites finies. On dit qu'un morphisme  $f$  de  $\mathcal{D}$  est une *équivalence faible* (resp. une *fibration*) si  $G(f)$  est une *équivalence faible* (resp. une *fibration*) dans la catégorie  $C$ . Le morphisme  $f$  est une *cofibration* dans  $\mathcal{D}$  si elle possède la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques. Cela induit une structure de catégorie modèle cofibrement engendrée sur  $\mathcal{D}$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i)  $G$  préserve les colimites filtrantes,
- ii)  $\mathcal{D}$  possède un remplacement fibrant fonctoriel,
- iii) si  $\mathcal{D}^f$  désigne la sous-catégorie pleine constituée des objets fibrants de  $\mathcal{D}$  alors il existe un endofoncteur  $\text{Path}(-) : \mathcal{D}^f \rightarrow \mathcal{D}^f$  tel que, pour tout objet fibrant  $X$ ,  $\text{Path}(X)$  factorise l'application diagonale :

$$X \xrightarrow[i]{\sim} \text{Path}(X) \xrightarrow[j]{\twoheadrightarrow} X \times X,$$

avec  $i$  une équivalence faible et  $j$  une fibration.

De plus, le couple  $(F; G)$  forme une paire de Quillen et les ensembles générateurs des cofibrations et des cofibrations acycliques de  $\mathcal{D}$  sont donnés par :

$$I' := \{F(f) \mid f \in I\} \quad \text{et} \quad J' := \{F(f) \mid f \in J\}.$$

**Exemple 2.1.29.** On dispose d'une adjonction entre les collections topologiques et les collections topologiques symétriques :

$$\Sigma[-] : \text{Coll}(S) \rightleftarrows \Sigma\text{-Coll}(S) : \mathcal{U}, \quad (2.10)$$

avec  $\mathcal{U}$  le foncteur oubliant l'action du groupe des permutations et  $\Sigma[-]$  le foncteur envoyant une collection  $M$  vers la collection symétrique définie par :

$$\Sigma[M](s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) := \coprod_{\sigma \in \Sigma_n} M(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}; s_{n+1}).$$

Dans l'article [2], Berger et Moerdijk montrent alors qu'on peut appliquer le théorème de transfert à l'adjonction (2.10) et ainsi définir une structure de catégorie modèle cofibrement engendrée sur  $\Sigma\text{-Coll}(S)$ . En effet, la catégorie  $\text{Coll}(S)$ , munie des fibrations de Serre, est une catégorie modèle cofibrement engendrée. La catégorie  $\Sigma\text{-Coll}(S)$  possède une structure monoïdale définie par :

$$(M_1 \times M_2)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) := M_1(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \times M_2(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}),$$

dont l'action du groupe des permutations provient de l'action diagonale :

$$\sigma^* : (M_1 \times M_2)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) \xrightarrow[\sigma^* \times \sigma^*]{\sigma^*} (M_1 \times M_2)(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}; s_{n+1}).$$

Ainsi définis,  $\mathcal{U}$  et  $\Sigma[-]$  sont des foncteurs monoïdaux et  $\mathcal{U}$  préserve les colimites filtrantes. Par conséquent la catégorie  $\Sigma\text{-Coll}(S)$  possède aussi les colimites et les limites filtrantes. De plus, comme tous les objets de  $\text{Coll}(S)$  sont fibrants, tous les objets de  $\Sigma\text{-Coll}(S)$  sont aussi fibrants et l'identité fournit un remplacement fibrant fonctoriel.

Il reste à vérifier la condition (iii). A partir d'une collection symétrique  $M$  on introduit  $\text{Path}(M)$  comme la collection symétrique :

$$\text{Path}(M)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) := \text{Top}([0, 1]; M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})).$$

Si  $f_1$  est un point de  $\text{Path}(M)$  alors pour tout  $\sigma \in \Sigma_n$  on définit l'action du groupe des permutations de la façon suivante :

$$f_1 \cdot \sigma : [0, 1] \rightarrow M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}); t \mapsto f_1(t) \cdot \sigma$$

La factorisation de l'application diagonale est obtenue via les morphismes suivants :

$$M \xrightarrow{i} \text{Path}(M) \xrightarrow{j} M \times M,$$

avec  $i$  le morphisme de collections symétriques envoyant un point  $x$  vers le chemin constant en  $x$ . Grâce à l'homotopie qui contracte un chemin sur son point d'origine, on sait que l'application  $i$  est une équivalence faible. Par ailleurs, le morphisme de collections symétriques  $j$  est défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} j : \text{Path}(M)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) &\longrightarrow (M \times M)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}); \\ f &\longmapsto (f(0); f(1)). \end{aligned}$$

Pour montrer que l'application  $j$  est une fibration, il suffit de vérifier que, pour chaque combinaison d'entrée, l'application  $j$  induit une fibration de Serre. Or, pour une combinaison de couleurs fixée, l'application  $j$  peut s'interpréter de la façon suivante :

$$j : \text{Top}([0, 1]; M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})) \longrightarrow \text{Top}(\partial[0, 1]; M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})). \quad (2.11)$$

Comme  $\partial\Delta^1 \rightarrow \Delta^1$  est une cofibration, l'application (2.11) est une fibration d'après le lemme 2.1.22. De manière similaire, Berger et Moerdijk ont montré que la catégorie  $\Sigma\text{-Coll}(S)_*$  est aussi une catégorie modèle cofibrement engendrée dont tous les objets sont fibrants.

## 2.2 Applications du théorème de transfert aux opérades et aux bimodules (infinitésimaux)

Soient  $P$  et  $Q$  deux  $S$ -opérades symétriques avec  $S$  un ensemble. L'objectif de cette section est de définir une structure de catégorie modèle sur les opérades colorées symétriques ainsi que sur les  $P$ - $Q$  bimodules (infinitésimaux). Pour cela, remarquons que l'on dispose de foncteurs oubliant les différentes structures :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \Sigma\text{-Operad}_S &\longrightarrow \Sigma\text{-Coll}(S)_*, \\ \mathcal{U} : \Sigma\text{-Bimod}_{P-Q} &\longrightarrow \Sigma\text{-Coll}(S), \\ \mathcal{U} : \Sigma\text{-Ibimod}_{P-Q} &\longrightarrow \Sigma\text{-Coll}(S). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Or on sait que les catégories  $\Sigma\text{-Coll}(S)_*$  et  $\Sigma\text{-Coll}(S)$ , équipées des fibrations de Serre, sont des catégories modèles cofibrément engendrées dont tous les objets sont fibrants. Afin d'utiliser le théorème de transfert 2.1.28, on doit construire des adjoints à gauche aux différents foncteurs oubliés (2.12). Les trois constructions sont similaires. Il s'agit dans un premier temps d'identifier l'ensemble d'arbres encodant la structure recherchée puis d'indexer les sommets des arbres par des éléments de  $\Sigma\text{-Coll}(S)$  adéquats. Ce type de construction a été introduite par Vogt dans [5] pour le cas opéradique sans couleur. On se réfère aussi à Berger et Moerdijk [3] ainsi que Vogt [50] pour des constructions similaires.

### 2.2.1 Arbre planaire et opérade colorée libre

**Définition 2.2.1.** Un *arbre planaire*  $T$  est la donnée d'un graphe planaire fini contractile muni d'une arête et d'un sommet particuliers, appelés respectivement le *tronc* et la *racine* de l'arbre  $T$  et notés  $e_0$  et  $r$ . Le tronc est uniquement connecté à la racine de l'arbre. De plus, un arbre planaire est équipé d'une orientation en direction de la racine. Pour la suite, on pose les notations suivantes :

- ▶ L'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes de l'arbre  $T$  sont notés  $V(T)$  et  $E(T)$  respectivement. L'ensemble des *arêtes internes*  $E^{int}(T)$  est constitué des arêtes de  $T$  reliant deux sommets. Chaque sommet et arête est connecté à la racine par un unique chemin composé d'arêtes.
- ▶ Si  $e$  est une arête interne alors son sommet le plus proche de la racine est nommé le *sommet but* tandis que son autre sommet est appelé le *sommet source* de  $e$ . Ils sont notés respectivement  $t(e)$  et  $s(e)$ .
- ▶ Les arêtes, autres que le tronc, connectées à un seul sommet sont appelées les *feuilles* de l'arbre  $T$  et sont naturellement ordonnées par la structure planaire de  $T$ . On désigne par  $in(T) = \{l_1, \dots, l_{|T|}\}$  l'ensemble des feuilles de  $T$ , avec  $|T|$  le cardinal de  $in(T)$ .
- ▶ Pour tout sommet  $v$ , l'ensemble des arêtes ayant pour but le sommet  $v$  est ordonné par la structure planaire de l'arbre  $T$ . On désigne cet ensemble par  $in(v) = \{e_1(v), \dots, e_{|v|}(v)\}$  avec  $|v|$  le cardinal de  $in(v)$ . L'unique arête ayant pour source le sommet  $v$  sera notée  $e_0(v)$ .
- ▶ Les sommets ne possédant pas d'arête entrante sont appelés *sommets univalents* tandis que les sommets possédant une unique arête entrante sont appelés *sommets bivalents*.

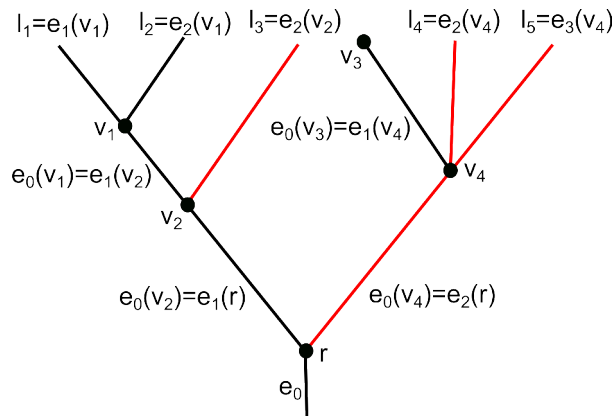


FIGURE 2.1 – Exemple d'un  $S$ -arbre planaire.

Un  $S$ -arbre planaire, avec  $S$  un ensemble, est la donnée d'un couple  $(T; f)$  avec  $T$  un arbre planaire et  $f : E(T) \rightarrow S$  une application indexant les arêtes de l'arbre  $T$  par des éléments de  $S$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté, on omettra de préciser l'application  $f$  et on désignera aussi par  $e_i(v)$  l'élément de  $S$  indexant l'arête  $e_i(v)$ .

L'ensemble des  $S$ -arbres planaires permet uniquement d'encoder la structure d'opérade colorée non-symétrique. Pour remédier à cela, on va faire agir le groupe des permutations sur les ensembles ordonnés  $in(T)$  et  $in(v)$ , avec  $T$  un  $S$ -arbre planaire et  $v \in V(T)$ .

**Définition 2.2.2.** Un  $S$ -arbre est la donnée d'un triplet  $(T; f; \sigma)$  avec  $(T; f)$  un  $S$ -arbre planaire et  $\sigma : \{1, \dots, |T|\} \rightarrow in(T)$  une bijection indexant les feuilles de l'arbre. La bijection  $\sigma$  peut être assimilée à un élément du groupe des permutations  $\Sigma_{|T|}$ . Notons que si l'arbre  $T$  ne possède pas de sommet univalent alors, pour tout sommet  $v$  de  $T$ , l'indexation  $\sigma$  induit une indexation sur l'ensemble  $in(v)$  :

$$\sigma_v : \{1, \dots, |v|\} \rightarrow in(v) := \{e_1(v), \dots, e_v(v)\},$$

avec  $e_i(v) < e_j(v)$  si la plus petite indexation des feuilles au-dessus de l'arête  $e_i(v)$  est inférieure à la plus petite indexation des feuilles au-dessus de  $e_j(v)$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté, on omettra de préciser les applications  $f$  et  $\sigma$ .

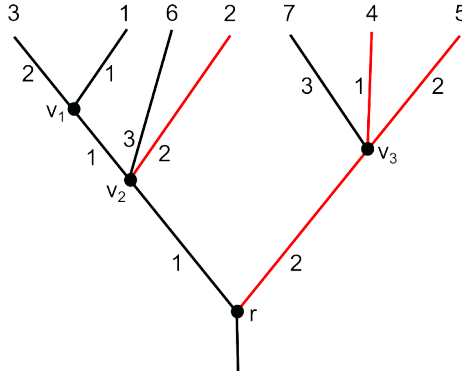


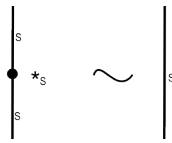
FIGURE 2.2 – Exemple d'un  $S$ -arbre avec  $\sigma = (2416735) = (3162745)^{-1}$

**Construction 2.2.3.** Soient  $S$  un ensemble et  $M \in \Sigma - Coll(S)_*$  une  $S$ -collection symétrique pointée. A partir de  $M$ , on peut construire une  $S$ -opérade symétrique  $\mathcal{F}_S(M)$  dont les points sont les couples  $[T; \{a_v\}]$  avec  $T$  un  $S$ -arbre et  $\{a_v\}$  une famille de points de  $M$  indexant les sommets de  $T$ . Plus précisément,  $\mathcal{F}_S(M)$  est donné par la formule suivante :

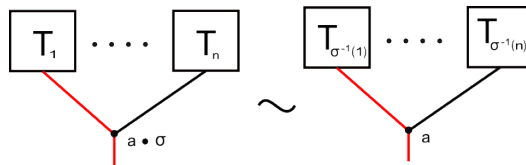
$$\mathcal{F}_S(M)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) := \coprod_{\substack{(T;f) \in S\text{-arbres} \\ f(l_i)=s_i, f(e_0)=s_{n+1}}} \prod_{v \in V(T)} M(e_1(v), \dots, e_{|v|}(v); e_0(v)) \Big| \sim.$$

La relation d'équivalence  $\sim$  est engendrée par les conditions suivantes :

i) Si un sommet est indexé par un point base  $*_s \in M(s; s)$  alors on a la relation suivante sur les sous-arbres :



ii) Si un sommet  $v$  est indexé par  $a \cdot \sigma$ , avec  $\sigma \in \Sigma_{|v|}$ , alors on a la relation suivante sur les sous-arbres :



Soient  $[T; \{a_v\}] \in \mathcal{F}_S(M)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $[T'; \{a'_v\}] \in \mathcal{F}_S(M)(s'_1, \dots, s'_n; s_i)$ . La composition opéradique  $[T; \{a_v\}] \circ_i [T'; \{a'_v\}]$  consiste à greffer l'arbre  $T'$  sur la feuille de  $T$  indexée par  $i$ , en préservant les indexations des sommets respectives. De plus, on dispose d'un morphisme de  $\Sigma - Coll(S)_*$  :

$$i : M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M),$$

envoyant un point  $m \in M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  vers le couple  $[T; \{m\}]$  avec  $T$  l'arbre planaire obtenu à partir de la corolle dont les feuilles  $l_i$  sont indexées respectivement par  $s_i$  tandis que le tronc est indexé par  $s_{n+1}$ .

**Proposition 2.2.4.** *Le foncteur  $\mathcal{F}_S$  est l'adjoint à gauche au foncteur oubli :*

$$\mathcal{F}_S : \Sigma\text{-Coll}(S)_* \rightleftarrows \Sigma\text{-Operad}_S : \mathcal{U}. \quad (2.13)$$

*Démonstration.* On se donne  $O$  une  $S$ -opéradе symétrique et  $M$  une collection symétrique pointée. Supposons qu'il existe un morphisme de collections symétriques pointées  $f : M \rightarrow O$ . On doit montrer que ce morphisme se prolonge de manière unique en un morphisme de  $S$ -opérades symétriques  $\tilde{f} : \mathcal{F}_S(M) \rightarrow O$  tel que l'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & O \\ \downarrow i & \nearrow \exists! \tilde{f} & \\ \mathcal{F}_S(M) & & \end{array} \quad (2.14)$$

On va construire l'application  $\tilde{f}$  par récurrence sur le nombre de sommets des  $S$ -arbres non indexés par un point particulier de  $M$ . Soit  $[T; \{a_v\}]$  un point de  $\mathcal{F}_S(M)$ . Si  $T$  possède un seul sommet alors, pour que la commutativité du diagramme (2.14) soit vérifiée, on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = f(a_v).$$

Supposons que l'application  $\tilde{f}$  soit définie pour les  $S$ -arbres ayant au plus  $k$  sommets avec  $k > 1$ . Prenons  $[T; \{a_v\}]$  un point de  $\mathcal{F}_S(M)$  avec  $T$  ayant  $k + 1$  sommets non indexés par un point particulier de  $M$ . Le point  $[T; \{a_v\}]$  se décompose alors sous la forme  $[T; \{a_v\}] = [T_1; \{a_v^1\}] \circ_i [T_2; \{a_v^2\}]$  avec  $T_2$  une corolle et  $T_1$  un  $S$ -arbre ayant  $k$  sommets non indexés par un point particulier de  $M$ . Pour que  $\tilde{f}$  soit un morphisme de  $S$ -opérades symétriques, on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = \tilde{f}([T_1; \{a_v^1\}]) \circ_i f(a_v^2). \quad (2.15)$$

Les propriétés des  $S$ -opérades symétriques impliquent que cette définition ne dépend pas du choix de la décomposition et que  $\tilde{f}$  est définie de manière unique.  $\square$

**Théorème 2.2.5.** *La catégorie  $\Sigma\text{-Operad}_S$  possède une structure de catégorie modèle cofibrément engendrée dont tous les objets sont fibrants.*

*Démonstration.* On va appliquer le théorème de transfert 2.1.28 avec l'adjonction (2.13). On rappelle que la catégorie  $\Sigma\text{-Coll}(S)_*$ , équipée des fibrations de Serre, est une catégorie modèle cofibrément engendrée dont tous les objets sont fibrants. Par conséquent, tous les objets de la catégorie  $\Sigma\text{-Operad}_S$  sont fibrants et l'identité fournit un remplacement fibrant fonctoriel.

Comme dans l'exemple 2.1.29, la catégorie des  $S$ -opérades symétriques possède une structure monoïdale et le foncteur oubli préserve les colimites finies et la structure monoïdale. Par conséquent,  $\Sigma\text{-Operad}_S$  possède les colimites et les limites finies.

Afin de vérifier la condition (iii) du théorème de transfert, à partir d'une  $S$ -opéradе symétrique  $O$  on introduit  $\text{Path}(O)$  comme la collection symétrique :

$$\text{Path}(O)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) := \text{Top}([0, 1]; O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})).$$

Pour tout élément  $s \in S$ , on dispose de l'application constante en  $*_s \in O(s; s)$ . Par conséquent, la  $S$ -collection  $\text{Path}(O)$  est pointée. De plus, la structure opéradique de  $\text{Path}(O)$  est définie de la manière suivante. Si  $f_1 \in \text{Path}(O)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $f_2 \in \text{Path}(O)(s'_1, \dots, s'_m; s_i)$  alors la composée  $f_1 \circ_i f_2$  est donnée par :

$$\begin{aligned} f_1 \circ_i f_2 : [0, 1] &\longrightarrow O(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_1, \dots, s'_m, s_{i+1}, \dots, s_n; s_{n+1}), \\ t &\longmapsto f_1(t) \circ_i f_2(t). \end{aligned}$$

La factorisation de l'application diagonale est obtenue via les morphismes suivants :

$$O \xrightarrow{i} \text{Path}(O) \xrightarrow{j} O \times O,$$

avec  $i$  le morphisme de  $S$ -opérades symétriques envoyant un point  $x$  vers le lacet constant en  $x$ . Grâce à l'homotopie qui contracte un chemin sur son point d'origine, on sait que l'application  $i$  est une équivalence faible. Par ailleurs, le morphisme de  $S$ -opérades symétriques  $j$  est défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} j : \text{Path}(O)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}) &\longrightarrow (O \times O)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1}); \\ f &\longmapsto (f(0); f(1)). \end{aligned}$$

Pour montrer que l'application  $j$  est une fibration, il suffit de vérifier que, pour chaque combinaison d'entrée, l'application  $j$  induit une fibration de Serre. Or, pour une combinaison de couleurs fixée, l'application  $j$  peut s'interpréter de la façon suivante :

$$j : \text{Top}([0, 1]; O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})) \longrightarrow \text{Top}(\partial[0, 1]; O(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})). \quad (2.16)$$

Comme  $\partial\Delta^1 \rightarrow \Delta^1$  est une cofibration, l'application (2.16) est une fibration d'après le lemme 2.1.22.  $\square$

**Définition 2.2.6.** Soient  $f : A \rightarrow B$  une application continue entre deux espaces topologiques et  $C$  un espace contenant  $A$ . L'espace des applications continues  $g : C \rightarrow B$  tel que  $g|_A = f$  est noté :

$$\text{Top}^f((C; A); B).$$

**Lemme 2.2.7.** [49, Lemme 2.2] Soient  $P$  et  $Q$  deux  $S$ -opérades symétriques topologiques. Si  $P$  est obtenu à partir de  $Q$  le long d'une cofibration :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_S(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}_S(i)} & \mathcal{F}_S(B) \\ \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & N \end{array}$$

alors, pour tout morphisme de  $S$ -opérades symétriques  $g : N \rightarrow Y$ , on a l'homéomorphisme :

$$\Sigma\text{-Operad}_S^g((M; N); Y) \cong \Sigma\text{-Coll}(S)^{g \circ f}((A; B); Y).$$

*Remarque 2.2.8.* La proposition 2.3, le théorème 2.2.5 ainsi que le lemme 2.2.7 ont des analogues dans le cas des  $S$ -opérades non symétriques. Pour cela, il suffit de se restreindre aux  $S$ -arbres planaires et de ne pas tenir compte de l'axiome (ii) dans la construction 2.2.3. Par abus de notation, on notera par  $\mathcal{F}_S$  le foncteur libre dans le cas non symétrique.

## 2.2.2 Arbre à section borné et bimodule libre

**Définition 2.2.9.** Soient  $P$  et  $Q$  deux opérades symétriques. Les arbres encodant la structure des  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules sont définis de la façon suivante :

- ▶ Le *joint* entre deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  d'un  $S$ -arbre  $T$ , noté  $j(v_1; v_2)$ , est le premier sommet commun aux chemins reliant les sommets  $v_1$  et  $v_2$  à la racine. Si  $j(v_1; v_2) = r$  alors on dit que les sommets sont connectés à la racine. De même, si  $j(v_1; v_2) \in \{v_1; v_2\}$  alors on dit que les sommets sont connectés. Par exemple, sur la figure 2.3, les sommets  $v_1$  et  $v_2$  sont connectés à la racine tandis que les sommets  $v_1$  et  $p_1$  sont connectés.
- ▶ Si  $T$  est un  $S$ -arbre alors on définit la distance  $d : V(T) \times V(T) \rightarrow \mathbb{N}$  comme étant le nombre d'arêtes internes composant le chemin reliant  $v_1$  et  $v_2$  lorsque les deux sommets sont connectés. Dans le cas où les sommets  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas connectés, on pose  $d(v_1; v_2) = d(v_1; v) + d(v_2; v)$  avec  $v$  le joint entre les sommets  $v_1$  et  $v_2$ . Par exemple, sur la figure 2.3 on a  $d(v_1; r) = 2$  et  $d(v_1; v_2) = 4$ .
- ▶ L'ensemble des  *$S$ -arbres à section borné*, noté  $S$ -section, est constitué des couples  $(T; V^p(T))$ , avec  $T$  un  $S$ -arbre et  $V^p(T)$  un sous-ensemble de sommets de  $T$  appelés *perles*. De plus, on demande que chaque chemin reliant une feuille ou sommet univalent à la racine passe par une unique perle et que l'ensemble  $V^p(T)$  vérifie la relation suivante :

$$\forall v \in V(T) \setminus V^p(T), \forall p \in V^p(T), j(v; p) \in \{v; p\} \Rightarrow d(v; p) = 1.$$

Les perles forment ainsi une section divisant l'arbre en deux parties. On désigne par  $V^u(T)$  l'ensemble des sommets au-dessus de la section et par  $V^d(T)$  ceux au-dessous de la section.

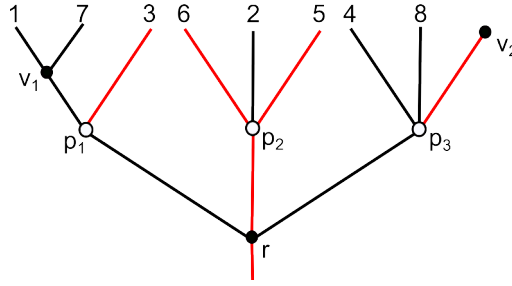


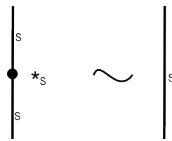
FIGURE 2.3 – Exemple d’un  $S$ -arbre à section borné.

**Construction 2.2.10.** Soient  $P$  et  $Q$  deux  $S$ -opérades symétriques avec  $S$  un ensemble. A partir d’une collection symétrique  $M$ , on construit le  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule  $\mathcal{F}_B(M)$  dont les points sont les couples  $[T; \{a_v\}]$  avec  $T$  un  $S$ -arbre à section borné et  $\{a_v\}$  une famille de points indexant les sommets de l’arbre  $T$ . Les perles de l’arbre sont indexées par des points de  $M$  tandis que les autres sommets sont indexés par des points de  $Q$  ou de  $P$  selon si le sommet est au-dessus ou au-dessous de la section. Plus précisément,  $\mathcal{F}_B(M)$  est donné par :

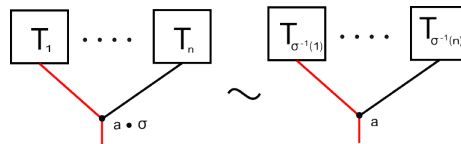
$$\coprod_{T \in \mathcal{S}\text{-section}} \prod_{v \in V^d(T)} P(e_1(v), \dots, e_{|v|}(v); e_0(v)) \times \prod_{v \in V^p(T)} M(e_1(v), \dots, e_{|v|}(v); e_0(v)) \times \prod_{v \in V^u(T)} Q(e_1(v), \dots, e_{|v|}(v); e_0(v)) \Big/ \sim$$

avec  $\sim$  la relation d’équivalence engendrée par :

i) Si un sommet est indexé par une unité  $*_s$  des opérades  $P$  ou  $Q$ , alors on a la relation suivante :



ii) Si un sommet  $v$  est indexé par  $a \cdot \sigma$ , avec  $\sigma \in \Sigma_{|v|}$ , alors on a la relation suivante sur les sous-arbres :



Afin de définir la structure de bimodule à droite, notons qu’un point  $a \in Q(s_1, \dots, s_n; s'_i)$  peut être interprété comme une corolle non perlée ayant  $n$  entrées indexées respectivement par les couleurs  $s_i$  et la sortie par la couleur  $s'_i$  tandis que le sommet est indexé par le point  $a$ . Si  $[T; \{a_v\}]$  est un point de  $\mathcal{F}_B(M)(s'_1, \dots, s'_m; s_{m+1})$  alors la composée  $[T; \{a_v\}] \circ_i a$  consiste à greffer la corolle associée à  $a$  sur la  $i$ -ème feuille de  $T$  puis à contracter les arêtes internes reliant deux sommets non perlés grâce à la structure opéradique de  $Q$ .

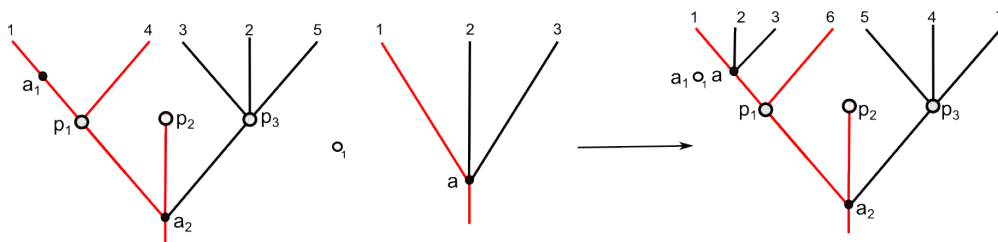


FIGURE 2.4 – Illustration de la structure de  $Q$ -bimodule à droite.

De manière similaire, si  $b$  est un point de  $P(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $[T_i; \{a_v^i\}]$  une famille de points dans les espaces  $\mathcal{F}_B(M)(s_1^i, \dots, s_{m_i}^i; s_i)$  alors la structure de  $P$ -bimodule à gauche consiste à greffer sur chacune des entrées de la corolle associée à  $b$  le point  $[T_i; \{a_v^i\}]$  correspondant puis à contracter l'ensemble des arêtes internes reliant deux sommets non perlés en utilisant la structure opéradique de  $P$ . De plus, on dispose d'un morphisme entre collections symétriques :

$$i : M \longrightarrow \mathcal{F}_B(M),$$

envoyant un point  $m \in M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  vers le couple  $[T; \{m\}]$  avec  $T$  la corolle perlée dont les feuilles  $l_i$  sont indexées respectivement par  $s_i$  tandis que le tronc est indexé par  $s_{n+1}$ .

**Proposition 2.2.11.** [13] *Le foncteur  $\mathcal{F}_B$  est l'adjoint à gauche au foncteur oublié :*

$$\mathcal{F}_B : \Sigma\text{-Coll}(S) \rightleftarrows \Sigma\text{-Bimod}_{P,Q} : \mathcal{U}.$$

*Démonstration.* On se donne  $M'$  un  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule et  $M$  une collection symétrique. Supposons qu'il existe un morphisme de collections symétriques  $f : M \rightarrow M'$ . On doit montrer que ce morphisme se prolonge de manière unique en un morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules  $\tilde{f} : \mathcal{F}_B(M) \rightarrow M'$  tel que l'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow i & \nearrow \exists! \tilde{f} & \\ \mathcal{F}_B(M) & & \end{array} \quad (2.17)$$

On va construire l'application  $\tilde{f}$  par récurrence sur le nombre de sommets non perlés. Soit  $[T; \{a_v\}]$  un point de  $\mathcal{F}_B(M)$ . Si  $T$  ne possède pas de sommet non perlé alors  $T$  est obligatoirement une corolle à cause des restrictions sur les arbres à section bornée. Pour que le diagramme (2.17) soit commutatif, on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = f(a_v).$$

Supposons que  $T$  possède un unique sommet non perlé. Dans ce cas, il existe une unique arête interne  $e$  et il y a deux possibilités à considérer. Si  $s(e)$  est une perle alors  $t(e)$  est indexé par un élément de  $P(1)$ . Pour que  $\tilde{f}$  soit un morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules, on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = a_{t(e)} \circ_1 f(a_{s(e)}).$$

Si  $t(e)$  est une perle alors  $s(e)$  est indexé par un élément de  $Q$  et  $[T; \{a_v\}]$  se décompose sous la forme  $[T_1; \{a_{t(e)}\}] \circ_i [T_2; \{a_{s(e)}\}]$  avec  $T_1$  et  $T_2$  des corolles. Pour que  $\tilde{f}$  soit un morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules, on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = f(a_{t(e)}) \circ_i a_{s(e)}.$$

Supposons que l'application  $\tilde{f}$  soit définie pour les  $S$ -arbres ayant au plus  $k$  sommets non perlés avec  $k > 1$ . Prenons  $[T; \{a_v\}]$  un point de  $\mathcal{F}_B(M)$  avec  $T$  ayant  $k+1$  sommets non perlés. Le point  $[T; \{a_v\}]$  se décompose alors sous la forme  $[T; \{a_v\}] = [T_1; \{a_v^1\}] \circ_i [T_2; \{a_v^2\}]$  avec  $T_2$  une corolle dont le sommet est indexé par un point de  $Q$  et  $T_1$  un  $S$ -arbre à section borné ayant  $k$  sommets non perlés. Si on veut que  $\tilde{f}$  soit un morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules, on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = \tilde{f}([T_1; \{a_v^1\}]) \circ_i a_v^2. \quad (2.18)$$

Les propriétés des  $(P-Q)_\Sigma$ -bimodules impliquent que cette définition ne dépend pas du choix de la décomposition et que  $\tilde{f}$  est définie de manière unique.  $\square$

**Théorème 2.2.12.** [13] *Soient  $P$  et  $Q$  deux  $S$ -opérades symétriques avec  $S$  un ensemble. La catégorie  $\Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}$  possède une structure de catégorie modèle cofibrément engendrée dont tous les objets sont fibrants.*

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle du théorème 2.2.5. Il suffit juste de remarquer que la catégorie  $\Sigma\text{-Coll}(S)$ , équipée des fibrations de Serre, est une catégorie modèle cofibrément engendrée dont tous les objets sont fibrants.  $\square$



**Lemme 2.2.13.** [49, Lemme 2.2] Soient  $M$  et  $N$  deux  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules avec  $P$  et  $Q$  deux  $S$ -opérides symétriques topologiques. Si  $M$  est obtenu à partir de  $N$  le long d'une cofibration :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_B(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}_B(i)} & \mathcal{F}_B(B) \\ \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & N \end{array}$$

alors, pour tout morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules  $g : N \rightarrow Y$ , on a l'homéomorphisme :

$$\Sigma\text{-Bimod}_{P-Q}^S((M; N); Y) \cong \Sigma\text{-Coll}(S)^{g \circ f}((A; b); Y).$$

**Remarque 2.2.14.** La proposition 2.2.11, le théorème 2.2.12 ainsi que le lemme 2.2.13 ont des analogues dans le cas où  $P$  et  $Q$  sont des  $S$ -opérides non symétriques. Pour cela, il suffit de se restreindre aux  $S$ -arbres planaires et de ne pas tenir compte de l'axiome (ii) dans la construction 2.2.10. Par abus de notation, on notera par  $\mathcal{F}_B$  le foncteur libre dans le cas non symétrique.

**Proposition 2.2.15.** [13] Un remplacement cofibrant de l'opéride  $\mathcal{A}ct_{>0}$  en tant que  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule est défini par la collection  $\square \in \text{Coll}(\{o; c\})$  de type  $\mathcal{A}ct_{>0}$  :

$$\square(n; c) = [0; 1]^{n-1} \text{ pour } n > 0 \quad \text{et} \quad \square(n; o) = [0; 1]^{n-1} \text{ pour } n > 0,$$

dont la structure de bimodule est donnée par les formules suivantes :

- ▷  $- \circ^i *_{2; c} :$   $\square(n; c) \rightarrow \square(n+1; c)$  ;  $(t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,
- ▷  $- \circ^i *_{2; o} :$   $\square(n; o) \rightarrow \square(n+1; o)$  ;  $(t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ,
- ▷  $- \circ^n *_{2; o} :$   $\square(n; o) \rightarrow \square(n+1; o)$  ;  $(t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{n-1}, 0)$ ,
- ▷  $*_{2; c}(-; -) :$   $\square(n; c) \times \square(m; c) \rightarrow \square(n+m; c)$ ;  $(t_1, \dots, t_{n-1}); (t'_1, \dots, t'_{m-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{n-1}, 1, t'_1, \dots, t'_{m-1})$ ,
- ▷  $*_{2; o}(-; -) :$   $\square(n; c) \times \square(m; o) \rightarrow \square(n+m; o)$ ;  $(t_1, \dots, t_{n-1}); (t'_1, \dots, t'_{m-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{n-1}, 1, t'_1, \dots, t'_{m-1})$ .

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{A}ct_{>0}$  est une opéride colorée engendrée par  $*_{2; c}$  et  $*_{2; o}$ , les opérations ci-dessus induisent une structure de  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule sur la  $\{o; c\}$ -collection  $\square$ . Pour  $N > 0$ , on définit  $\square_N$  comme le sous-bimodule de  $\square$  engendré par les espaces  $\square(n; k)_{n \in \{1, \dots, N\}}^{k \in \{o; c\}}$ . En d'autres termes les espaces  $\square_{N-1}(n; c)$  et  $\square_{N-1}(n; o)$  sont les  $N-2$  squelettes de  $\square(n; c)$  et  $\square(n; o)$  respectivement. Par convention,  $\square_0$  est le  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule  $\mathcal{F}_B(\emptyset)$ . Remarquons alors que le bimodule  $\square_N$  est obtenu à partir de  $\square_{N-1}$  via la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_B(\partial A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_B(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \square_{N-1} & \longrightarrow & \square_N \end{array}$$

avec  $A$  la  $\{o; c\}$ -collection définie par  $A(N; c) = A(N; o) = [0, 1]^{N-1}$  et l'ensemble vide pour les autres configurations d'entrées. Pour  $N > n$ , on a l'égalité  $\square_N(n; k) = \square(n; k)$ , avec  $k \in \{o; c\}$ . Par conséquent,  $\lim_N \square_N = \square$  et donc  $\square$  peut être obtenu comme une limite de cofibrations (voir le lemme 2.1.18). Le bimodule  $\square$  est donc cofibrant et faiblement équivalent à  $\mathcal{A}ct_{>0}$  car ses composantes sont contractiles.  $\square$

**Remarque 2.2.16.** Comme la restriction de l'opéride  $\mathcal{A}ct_{>0}$  à la couleur fermée est l'opéride associative stricte, on retrouve le résultat [49, Proposition 4.1] de Turchin disant que  $\square_c$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}ct_{>0}$  en tant que  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule.

### 2.2.3 Arbre perlé et bimodule infinitésimal libre

**Définition 2.2.17.** L'ensemble des  $S$ -arbres perlés, noté  $S$ -perle, est constitué des couples  $(T; p)$  avec  $T$  un  $S$ -arbre et  $p \in V(T)$  un sommet particulier de  $T$ , appelé la perle, satisfaisant la relation suivante :

$$\forall v \in V(T) \setminus \{p\}, d(v; p) = 1,$$

avec  $d$  la distance introduite dans la définition 2.2.9. La perle divise l'arbre en deux parties. On désignera par  $V^u(T)$  les sommets situés au-dessus de la perle et par  $V^d(T)$  ceux en dessous de la perle.

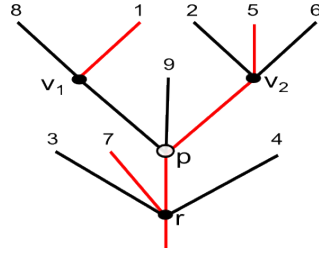


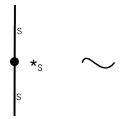
FIGURE 2.5 – Exemple d’un  $S$ -arbre perlé.

**Construction 2.2.18.** Soit  $O$  une  $S$ -opérade symétrique avec  $S$  un ensemble. A partir d’une collection symétrique  $M$ , on construit le  $(O)_\Sigma$ -bimodule infinitésimal symétrique  $\mathcal{F}_{lb}(M)$  dont les points sont les couples  $[T; \{a_v\}]$  avec  $T$  un  $S$ -arbre perlé et  $\{a_v\}$  une famille de points indexant les sommets de l’arbre  $T$ . La perle de l’arbre est indexée par un point de  $M$  tandis que les autres sommets sont indexés par des points de  $O$ . Plus précisément,  $\mathcal{F}_{lb}(M)$  est donné par :

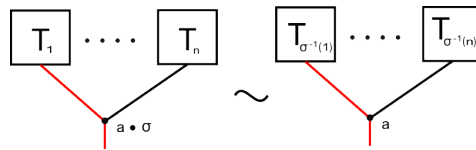
$$\coprod_{T \in S\text{-section}} M(e_1(p), \dots, e_{|p|}(p); e_0(p)) \times \coprod_{v \in V(T) \setminus \{p\}} O(e_1(v), \dots, e_{|v|}(v); e_0(v)) \Big/ \sim$$

avec  $\sim$  la relation d’équivalence engendrée par :

i) Si un sommet est indexé par une unité  $*_s$  de l’opérade  $O$  alors on a la relation suivante :



ii) Si un sommet  $v$  est indexé par  $a \cdot \sigma$ , avec  $\sigma \in \Sigma_{|v|}$ , alors on a la relation suivante sur les sous-arbres :



Afin de définir la structure de bimodule infinitésimal à droite, notons qu’un point  $a \in O(s_1, \dots, s_n; s'_i)$  peut être interprété comme une corolle non perlée ayant  $n$  entrées indexées respectivement par les couleurs  $s_i$  et la sortie par la couleur  $s'_i$  tandis que le sommet est indexé par le point  $a$ . Si  $[T; \{a_v\}]$  est un point de  $\mathcal{F}_{lb}(M)(s'_1, \dots, s'_m; s_{m+1})$  alors la composée  $[T; \{a_v\}] \circ_i a$  consiste à greffer la corolle associée à  $a$  sur la  $i$ -ème feuille de  $T$  puis à contracter les arêtes internes reliant deux sommets non perlés grâce à la structure opéradique de  $O$ .

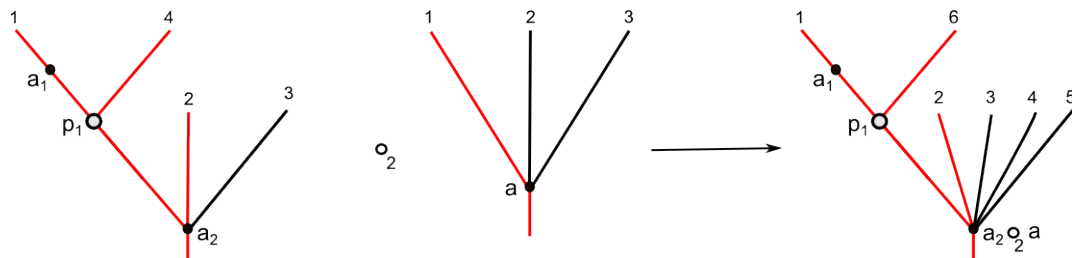


FIGURE 2.6 – Illustration de la structure de  $O$ -bimodule à droite.

On définit de manière similaire la structure de  $\Sigma$ -bimodule infinitésimal à gauche sous l’opérade  $O$ , en utilisant la structure opéradique de  $O$ . On dispose d’un morphisme entre collections symétriques :

$$i : M \longrightarrow \mathcal{F}_{lb}(M),$$

envoyant un point  $m \in M(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  vers le couple  $[T; \{m\}]$  avec  $T$  la corolle perlée dont les feuilles  $l_i$  sont indexées par  $s_i$  tandis que le tronc est indexé par  $s_{n+1}$ .

**Proposition 2.2.19.** [13] *Le foncteur  $\mathcal{F}_{lb}$  est l'adjoint à gauche au foncteur oubli :*

$$\mathcal{F}_{lb} : \Sigma\text{-Coll}(S) \rightleftarrows \Sigma\text{-Ibimod}_O : \mathcal{U}.$$

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle de la proposition 2.2.11. On se donne  $M'$  un  $(O)_\Sigma$ -bimodule infinitésimal et  $M$  une collection symétrique. Supposons qu'il existe un morphisme de collections symétriques  $f : M \rightarrow M'$ . On doit montrer que ce morphisme se prolonge de manière unique en un morphisme de  $(O)_\Sigma$ -bimodules infinitésimaux  $\tilde{f} : \mathcal{F}_{lb}(M) \rightarrow M'$  tel que l'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow i & \nearrow \exists! \tilde{f} & \\ \mathcal{F}_{lb}(M) & & \end{array} \quad (2.19)$$

On va construire l'application  $\tilde{f}$  par récurrence sur le nombre de sommets non indexés par une unité de l'opérade  $O$ . Soit  $[T; \{a_v\}]$  un point de  $\mathcal{F}_B(M)$ . Si  $T$  possède un unique sommet alors c'est automatiquement la perle. Pour que le diagramme (2.19) soit commutatif, on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = f(a_v).$$

Supposons que  $T$  possède deux sommets. Dans ce cas, il existe une unique arête interne  $e$  et il y a deux possibilités à considérer. Si  $s(e)$  est la perle alors  $t(e)$  est indexé par un élément de  $O(|t(e)|)$  et le point  $[T; \{a_v\}]$  se décompose sous la forme  $[T_1; a_{t(e)}] \circ_i [T_2; a_{s(e)}]$  avec  $T_1$  et  $T_2$  deux corolles. Pour que  $\tilde{f}$  soit un morphisme de  $(O)_\Sigma$ -bimodules infinitésimaux, on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = a_{t(e)} \circ_i f(a_{s(e)}).$$

Si  $t(e)$  est la perle alors  $s(e)$  est indexé par un élément de  $O$  et  $[T; \{a_v\}]$  se décompose sous la forme  $[T_1; \{a_{t(e)}\}] \circ_i [T_2; \{a_{s(e)}\}]$  avec  $T_1$  et  $T_2$  des corolles. Pour que  $\tilde{f}$  soit un morphisme de  $(O)_\Sigma$ -bimodules, on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = f(a_{t(e)}) \circ_i a_{s(e)}.$$

Supposons que l'application  $\tilde{f}$  soit définie pour les  $S$ -arbres ayant au plus  $k$  sommets, avec  $k > 2$ . Prenons  $[T; \{a_v\}]$  un point de  $\mathcal{F}_{lb}(M)$  avec  $T$  ayant  $k + 1$  sommets. Le point  $[T; \{a_v\}]$  se décompose alors sous la forme  $[T; \{a_v\}] = [T_1; \{a_v^1\}] \circ_i [T_2; \{a_v^2\}]$  avec  $T_2$  une corolle dont le sommet est indexé par un point de  $O$  et  $T_1$  un  $S$ -arbre perlé ayant  $k$  sommets. Si on veut que  $\tilde{f}$  soit un morphisme de  $(O)_\Sigma$ -bimodules infinitésimaux, on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = \tilde{f}([T_1; \{a_v^1\}]) \circ_i a_v^2. \quad (2.20)$$

Les propriétés des  $(O)_\Sigma$ -bimodules infinitésimaux impliquent que cette définition ne dépend pas du choix de la décomposition et que  $\tilde{f}$  est définie de manière unique.  $\square$

**Théorème 2.2.20.** [13] *Soit  $O$  une  $S$ -opérade symétrique avec  $S$  un ensemble. La catégorie  $\Sigma\text{-Ibimod}_O$  possède une structure de catégorie modèle cofibrément engendrée dont tous les objets sont fibrants.*

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle du théorème 2.2.5. Il suffit juste de remarquer que la catégorie  $\Sigma\text{-Coll}(S)$ , équipée des fibrations de Serre, est une catégorie modèle cofibrément engendrée dont tous les objets sont fibrants.  $\square$

**Lemme 2.2.21.** [49, Lemme 2.2] *Soient  $M$  et  $N$  deux  $(O)_\Sigma$ -bimodules infinitésimaux avec  $O$  une  $S$ -opérade symétrique topologique. Si  $M$  est obtenu à partir de  $N$  le long d'une cofibration :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{lb}(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{lb}(i)} & \mathcal{F}_{lb}(B) \\ \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & N \end{array}$$

alors, pour tout morphisme de  $(O)_\Sigma$ -bimodules infinitésimaux  $g : N \rightarrow Y$ , on a l'homéomorphisme :

$$\Sigma\text{-Ibimod}_O^g(M; N; Y) \cong \Sigma\text{-Coll}(S)^{g \circ f}(A; B; Y).$$

*Remarque 2.2.22.* La proposition 2.2.19, le théorème 2.2.20 ainsi que le lemme 2.2.21 ont des analogues dans le cas où  $O$  est une  $S$ -opérade non symétrique. Pour cela, il suffit de se restreindre aux  $S$ -arbres planaires et de ne pas tenir compte de l'axiome (ii) dans la construction 2.2.18. Par abus de notation, on notera par  $\mathcal{F}_{lb}$  le foncteur libre dans le cas non symétrique.

**Proposition 2.2.23.** [13] *Un remplacement cofibrant de l'opérade  $\mathcal{A}ct$ , en tant que  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule infinitésimal, est donné par la collection de type  $\mathcal{A}ct$  :*

$$\Delta(n; c) = \Delta^n, \text{ pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad \Delta(n; o) = \Delta^{n-1} \times [0, 1] \text{ pour } n \geq 1,$$

dont la structure de bimodule infinitésimal sous l'opérade  $\mathcal{A}ct_{>0}$  est définie via les formules suivantes :

- ▷  $- \circ^i *_{2;c}$  :  $\Delta(n; c) \rightarrow \Delta(n+1; c)$  ;  $(t_1 \leq \dots \leq t_n)$   $\mapsto (t_1 \leq \dots \leq t_i \leq t_i \leq \dots \leq t_n)$ ,
- ▷  $- \circ^i *_{2;o}$  :  $\Delta(n; o) \rightarrow \Delta(n+1; o)$  ;  $(t_1 \leq \dots \leq t_{n-1}) \times t$   $\mapsto (t_1 \leq \dots \leq t_i \leq t_i \leq \dots \leq t_{n-1}) \times t$ ,
- ▷  $- \circ^n *_{2;o}$  :  $\Delta(n; o) \rightarrow \Delta(n+1; o)$  ;  $(t_1 \leq \dots \leq t_{n-1}) \times t$   $\mapsto (t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq 1) \times t$ ,
- ▷  $*_{2;c} \circ_2 -$  :  $\Delta(n; c) \rightarrow \Delta(n+1; c)$  ;  $(t_1 \leq \dots \leq t_n)$   $\mapsto (0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n)$ ,
- ▷  $*_{2;c} \circ_1 -$  :  $\Delta(n; c) \rightarrow \Delta(n+1; c)$  ;  $(t_1 \leq \dots \leq t_n)$   $\mapsto (t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1)$ ,
- ▷  $*_{2;o} \circ_2 -$  :  $\Delta(n; o) \rightarrow \Delta(n+1; o)$  ;  $(t_1 \leq \dots \leq t_{n-1}) \times t$   $\mapsto (0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1}) \times t$ ,
- ▷  $*_{2;o} \circ_1 -$  :  $\Delta(n; o) \rightarrow \Delta(n+1; o)$  ;  $(t_1 \leq \dots \leq t_n)$   $\mapsto (t_1 \leq \dots \leq t_n) \times 1$ .

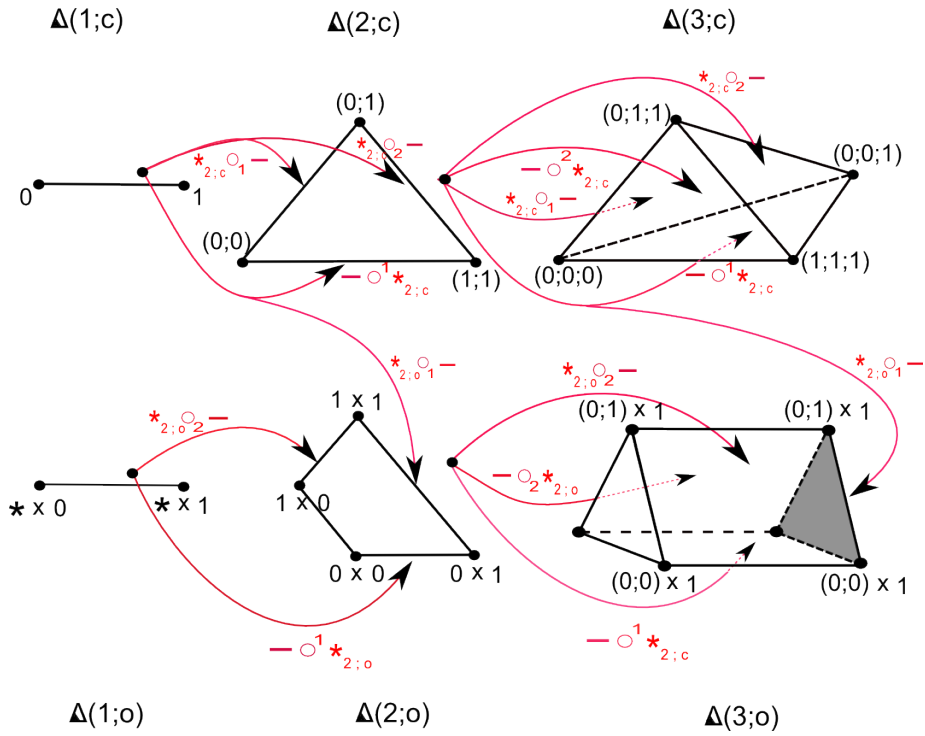


FIGURE 2.7 – Illustration de la structure de bimodule infinitésimal de  $\Delta$ .

*Démonstration.* Comme l'opérade  $\mathcal{A}ct_{>0}$  est engendrée par  $*_{2;c}$  et  $*_{2;o}$ , les opérations ci-dessus induisent bien une structure de  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule infinitésimal sur la collection  $\Delta$ . On définit ensuite  $\Delta_N$  comme étant le sous-bimodule infinitésimal de  $\Delta$  engendré par les espaces  $\{\Delta(n; c)\}_{n=0}^N$  et  $\{\Delta(n; o)\}_{n=1}^N$ , avec  $N \geq 0$ . Par convention,  $\Delta_{-1}$  désigne le bimodule infinitésimal  $\mathcal{F}_{lb}(\emptyset)$ . Remarquons dans un premier temps que  $\Delta_0$  est obtenu à partir de  $\Delta_{-1}$  via la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{lb}(\partial A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{lb}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{-1} & \longrightarrow & \Delta_0 \end{array}$$

avec  $A(0; c) = \Delta^0$  et l'ensemble vide pour les autres configurations d'entrées. Pour traiter le cas général, fixons  $N > 0$  et posons  $B, C$  les deux collections de type  $\mathcal{A}ct$  définies par :

$$B(N; c) = \Delta^{N-1} \times \{0\}, \quad C(N; o) = \Delta^{N-1} \times [0, 1], \quad C(N; c) = \Delta^N$$

et l'ensemble vide pour les autres configurations d'entrées. Notons alors que  $\mathbf{\Delta}_N$  est obtenu à partir de  $\mathbf{\Delta}_{N-1}$  via une succession de sommes amalgamées :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{Ib}(\partial B) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{Ib}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{\Delta}_{N-1} & \longrightarrow & \Lambda \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{Ib}(\partial C) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{Ib}(C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda & \longrightarrow & \mathbf{\Delta}_N \end{array}$$

L'application d'attachement  $\partial B \rightarrow \mathbf{\Delta}_{N-1}$  provient de la restriction au bord de l'inclusion :

$$i : \Delta^{N-1} \rightarrow \mathbf{\Delta}(N; o) ; (t_1, \dots, t_{N-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{N-1}) \times \{0\},$$

tandis que l'application d'attachement  $\partial C \rightarrow \Lambda$  provient du fait que  $\Lambda(N; o)$  est homéomorphe au bord de l'espace  $\Delta^{N-1} \times [0, 1]$ . Comme les applications  $\partial B \rightarrow B$  et  $\partial C \rightarrow C$  sont des cofibrations génératrices dans la catégorie modèle des collections topologiques, elles induisent donc des cofibrations génératrices dans la catégorie des bimodules infinitésimaux. Ainsi,  $\mathbf{\Delta}_{N-1} \rightarrow \mathbf{\Delta}_N$  est une cofibration dans  $Ibimod_{\mathcal{A}ct_{>0}}$ . Pour  $N \geq n$ , on a les égalités  $\mathbf{\Delta}_N(n; c) = \mathbf{\Delta}(n; c)$  et  $\mathbf{\Delta}_N(n; o) = \mathbf{\Delta}(n; o)$ . Par conséquent,  $\lim_N \mathbf{\Delta}_N = \mathbf{\Delta}$  et  $\mathbf{\Delta}$  est cofibrant en tant que bimodule infinitésimal sous  $\mathcal{A}ct_{>0}$ . Enfin, l'équivalence faible entre  $\mathbf{\Delta}$  et  $\mathcal{A}ct_{>0}$  provient du fait que les espaces non-vides composant la collection  $\mathbf{\Delta}$  sont contractiles.  $\square$

*Remarque 2.2.24.* Comme la restriction de l'opérade  $\mathcal{A}ct$  à la couleur fermée est l'opérade associative, on retrouve le résultat [49, Proposition 3.2] de Turchin disant que l'espace semi-cosimplicial  $\mathbf{\Delta}_c = \Delta^\bullet$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}s$  en tant que  $\mathcal{A}s_{>0}$ -bimodule infinitésimal. Pour tout espace semi-cosimplicial  $X^\bullet$ , on a donc l'équivalence faible :

$$Ibimod_{\mathcal{A}s_{>0}}^h(\mathcal{A}s; X^\bullet) \simeq Ibimod_{\mathcal{A}s_{>0}}(\Delta^\bullet; X^\bullet) = sTot(X^\bullet).$$

Ainsi, Turchin [49, Théorème 7.2] et indépendamment Dwyer-Hess [14, Théorème 1.1] ont pu démontré le théorème suivant :

**Théorème 2.2.25.** *Si  $M$  est un bimodule pointé avec  $M(0) \simeq *$ , alors on a l'équivalence faible :*

$$sTot(M) \simeq \Omega Ibimod_{\mathcal{A}s_{>0}}^h(\mathcal{A}s_{>0}; M).$$

*Si  $O$  est une opérade pointée avec  $O(1) \simeq *$ , alors on a l'équivalence faible :*

$$Bimod_{\mathcal{A}s_{>0}}^h(\mathcal{A}s_{>0}; O) \simeq \Omega Operad^h(\mathcal{A}s_{>0}; O).$$

Grâce à l'étude du remplacement cofibrant  $\mathbf{\Delta}$ , on peut montrer que la structure "trop rigide" de l'opérade  $\mathcal{A}ct$  implique que l'espace  $Ibimod_{\mathcal{A}ct_{>0}}^h(\mathcal{A}ct; M)$  est homotopiquement déterminé par sa partie fermée. Plus précisément, on a la proposition suivante :

**Proposition 2.2.26.** [13] *Soient  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow M$  un morphisme de  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodules infinitésimaux et  $(M_c; M_o)$  le couple d'espaces semi-cosimpliciaux associé. On a l'équivalence faible :*

$$Ibimod_{\mathcal{A}ct_{>0}}^h(\mathcal{A}ct; M) \simeq sTot(M_c).$$

*Démonstration.* D'après ce qui précède, on sait que  $\mathbf{\Delta}$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}ct$  en tant que  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule infinitésimal tandis que  $\Delta$  est un remplacement cofibrant de l'opérade  $\mathcal{A}s$  en tant que  $\mathcal{A}s_{>0}$ -bimodule infinitésimal. On a donc les équivalences faibles :

$$Ibimod_{\mathcal{A}ct_{>0}}^h(\mathcal{A}ct; M) \simeq Ibimod_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\mathbf{\Delta}; M) \quad \text{et} \quad Ibimod_{\mathcal{A}s_{>0}}^h(\mathcal{A}s; M_c) \simeq Ibimod_{\mathcal{A}s_{>0}}(\Delta; M_c).$$

On peut voir  $Ibimod_{\mathcal{A}s_{>0}}(\Delta; M_c)$  comme un sous-espace de  $Ibimod_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\mathbf{\Delta}; M)$  via l'inclusion :

$$i : Ibimod_{\mathcal{A}s_{>0}}(\Delta; M_c) \longrightarrow Ibimod_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\mathbf{\Delta}; M),$$

envoyant un morphisme  $f = \{f^n : \Delta^n \rightarrow M(n; c)\}_{n \geq 0}$  vers l'application  $g$  définie par :

$$\begin{cases} g_{n;c} : \Delta^n \rightarrow M(n; c) & ; (t_1, \dots, t_n) \mapsto f_n(t_1, \dots, t_n), \\ g_{n;o} : \Delta^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow M(n; o) & ; (t_1, \dots, t_{n-1}) \times \{t\} \mapsto *_{2;o} f_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}). \end{cases}$$

On va montrer que l'inclusion  $i$  induit un rétract par déformation. Pour cela, on définit l'homotopie :

$$H : \text{Ibimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\Delta; M) \times [0, 1] \longrightarrow \text{Ibimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\Delta; M),$$

envoyant un point  $(g; u)$  vers le morphisme de bimodules infinitésimaux :

$$\begin{cases} H(g; u)_{n;c} : \Delta^n \rightarrow M(n; c) & ; (t_1, \dots, t_n) \mapsto g_{n;c}(t_1, \dots, t_n), \\ H(g; u)_{n;o} : \Delta^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow M(n; o) & ; (t_1, \dots, t_{n-1}) \times \{t\} \mapsto g_{n;o}((t_1, \dots, t_{n-1}) \times (ut + 1 - u)). \end{cases}$$

L'homotopie  $H$  est bien définie et on dispose de l'égalité  $H(g; 1) = g$ . De plus, on a :

$$\begin{aligned} H(g; 0)_{n;o}((t_1, \dots, t_{n-1}) \times \{t\}) &= g_{n;o}((t_1, \dots, t_{n-1}) \times \{1\}) = g_{n;o}(*_{2;o} \circ_1 (t_1, \dots, t_{n-1})) \\ &= *_{2;c} \circ_1 g_{n-1;c}(t_1, \dots, t_{n-1}) = i(g)_{n;o}((t_1, \dots, t_{n-1}) \times \{t\}). \end{aligned}$$

Par conséquent  $H(g; 0)$  est dans l'image de l'inclusion  $i$ . Il nous reste donc à vérifier que pour toute application  $f \in \text{Ibimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\Delta; M_c)$  on a l'égalité  $H(i(f); u) = i(f)$ , avec  $u \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} H(i(f); u)_{n;o}((t_1, \dots, t_{n-1}) \times \{t\}) &= i(f)_{n;o}((t_1, \dots, t_{n-1}) \times \{ut + 1 - u\}) \\ &= (*_{2;o} \circ_1 f_{n-1;c})(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ &= i(f)_{n;o}((t_1, \dots, t_{n-1}) \times \{t\}). \end{aligned}$$

□



## Structure des totalisations d'une opérade pointée

Dans le premier chapitre on a montré qu'on pouvait extraire un couple d'espaces topologiques à partir d'une  $\{o; c\}$ -opérade pointée. Le premier espace est issu de l'opérade multiplicative provenant de la restriction à la couleur fermée. Cet espace a déjà été étudié par McClure et Smith [33, 32], Dwyer et Hess [14] ainsi que Turchin [49]. On sait notamment l'identifier à un espace de lacets double explicite. En ce qui concerne le second espace, il provient d'un bimodule sous l'opérade  $\mathcal{A}_{S>0}$  et on sait seulement l'identifier à un espace de lacets simple.

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser l'interaction entre ces deux espaces pour reconnaître une algèbre sous l'opérade  $\mathcal{SC}_2$ . Dans un premier temps, on va montrer que si le couple d'espaces provient d'un morphisme de  $\mathcal{Act}_{>0}$ -bimodule alors on peut l'identifier à une algèbre sous  $\mathcal{SC}_1$ . Les sections 3 et 4 consisteront à montrer le résultat principal avec deux approches différentes. La première approche est similaire à la méthode utilisée pour la démonstration du théorème 3.1.2 de la section 1 et peut se généraliser pour des opérades colorées autres que des opérades pointées. La seconde preuve, basée sur les travaux de Turchin, est plus rapide et élégante mais a l'inconvénient de ne pas pouvoir se généraliser.

### 3.1 $\mathcal{SC}_1$ -algèbre extraite d'un morphisme de $\mathcal{Act}_{>0}$ -bimodules

Soit  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow M$  un morphisme de  $\mathcal{Act}_{>0}$ -bimodules et  $(M_c; M_o)$  le couple d'espaces semi-cosimpliciaux associé (voir la proposition 1.4.4). Par construction,  $M_c$  provient d'un morphisme de  $\mathcal{A}_{S>0}$ -bimodule  $\eta_c : \mathcal{A}_S \rightarrow M_c$  induit par la restriction de  $\eta$  à la couleur fermée. On a donc d'après 2.2.25 :

$$sTot(M_c) \simeq \Omega Bimod_{\mathcal{A}_{S>0}}^h(\mathcal{A}_{S>0}; M_c).$$

L'espace semi-cosimplicial  $M_o$  possède seulement une structure de module à gauche sous  $M_c$  et sa semi-totalisation n'a pas nécessairement le type d'homotopie d'un espace de lacets. On va néanmoins montrer que  $sTot(M_o)$  est faiblement équivalent à la fibre homotopique :

$$hofib\left(Bimod_{\mathcal{Act}_{>0}}^h(\mathcal{Act}_{>0}; M) \longrightarrow Bimod_{\mathcal{A}_{S>0}}^h(\mathcal{A}_{S>0}; M_c)\right), \quad (3.1)$$

au-dessus de  $\eta_c$ . On commence par donner un modèle de la fibre homotopique (3.1) en utilisant les remplacements cofibrants introduits dans le chapitre précédent.

**Définition 3.1.1.** Soit  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow M$  un morphisme de  $\mathcal{Act}_{>0}$ -bimodules. Un *lacet relatif*, à valeurs dans le  $\mathcal{Act}_{>0}$ -bimodule  $M$ , est la donnée d'une famille d'applications continues :

$$\begin{aligned} g_{n;c} &: \square(n; c) \times [0, 1] \longrightarrow M(n; c), \quad \text{pour } n > 0, \\ g_{n;o} &: \square(n; o) \times \{1\} \longrightarrow M(n; o), \quad \text{pour } n > 0, \end{aligned}$$

vérifiant des relations liées à la structure de bimodule sous l'opérade  $\mathcal{Act}_{>0}$  :

- ▷  $g_{n;c}(x \circ^i *_{2;c}; t) = g_{n-1;c}(x; t) \circ^i *_{2;c}$  pour  $x \in \square(n-1; c)$  et  $1 \leq i \leq n-1$ ,
- ▷  $g_{n;c}(*_{2;c}(x; y); t) = *_{2;c}(g_{l;c}(x; t); g_{n-l;c}(y; t))$  pour  $x \in \square(l; c)$  et  $y \in \square(n-l; c)$ ,
- ▷  $g_{n;o}(x \circ^i *_{2;o}; 1) = g_{n-1;o}(x; 1) \circ^i *_{2;o}$  pour  $x \in \square(n-1; o)$  et  $1 \leq i \leq n-2$ ,
- ▷  $g_{n;o}(x \circ^{n-1} *_{2;o}; 1) = g_{n-1;o}(x; 1) \circ^{n-1} *_{2;o}$  pour  $x \in \square(n-1; o)$ ,
- ▷  $g_{n;o}(*_{2;o}(x; y); 1) = *_{2;o}(g_{l;c}(x; 1); g_{n-l;o}(y; 1))$  pour  $x \in \square(l; c)$  et  $y \in \square(n-l; o)$ ,



ainsi que la condition au bord :

$$\triangleright g_{n;c}(x; 0) = \eta(*_{n;c}) \text{ pour } x \in \square(n; c).$$

Ce modèle pour les espaces de lacets relatif est noté  $\Omega(\text{Bimod}_{\mathcal{A}_{>0}}(\square_c; M_c); \text{Bimod}_{\mathcal{A}_{>0}}(\square; M))$ .

**Théorème 3.1.2.** [13] *Si  $M$  est un  $\mathcal{A}_{>0}$ -bimodule pointé alors on a l'équivalence faible :*

$$s\text{Tot}(M_o) \simeq \Omega(\text{Bimod}_{\mathcal{A}_{>0}}^h(\mathcal{A}_{>0}; M_c); \text{Bimod}_{\mathcal{A}_{>0}}^h(\mathcal{A}_{>0}; M)).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence des propositions 3.1.4 et 3.1.5.  $\square$

*Notation 3.1.3.* Soit  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow M$  un morphisme de  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodules. La collection  $M^* \in \text{Coll}(\{o; c\})$ , construite à partir de  $M$ , est définie par :

$$M^*(n; c) = \eta(*_{n;c}) \text{ pour } n \geq 0, \quad M^*(n; o) = M(n; o) \text{ pour } n > 0,$$

et l'ensemble vide pour les autres configurations d'entrées. La collection  $M^*$  possède une structure de  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule provenant de  $M$ . Par abus de notation on notera toujours par  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow M^*$  l'application correspondante.

**Proposition 3.1.4.** [13] *Soit  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow M$  un morphisme de  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodules. La semi-totalisation  $s\text{Tot}(M_o)$  est faiblement équivalente à l'espace  $\text{Bimod}_{\mathcal{A}_{>0}}^h(\mathcal{A}_{>0}; M^*)$ .*

*Démonstration.* Dans le chapitre 2 on a vu que l'espace semi-cosimplicial  $\Delta^\bullet$  est un remplacement cofibrant de l'opérate  $\mathcal{A}s$  dans la catégorie des  $\mathcal{A}_{>0}$ -bimodules infinitésimaux. Cela nous a permis d'identifier  $s\text{Tot}(M_o)$  à l'espace des morphismes dérivées  $\text{Ibimod}_{\mathcal{A}_{>0}}^h(\mathcal{A}s; M_o)$ .

**La première étape** de la démonstration consiste à trouver un remplacement cofibrant alternatif de  $\mathcal{A}s$ , noté  $\tilde{\square}$ , tel que l'on dispose d'une application continue :

$$\xi : \text{Bimod}_{\mathcal{A}_{>0}}(\square; M^*) \rightarrow \text{Ibimod}_{\mathcal{A}_{>0}}(\tilde{\square}; M_o).$$

On rappelle qu'un point  $g \in \text{Bimod}_{\mathcal{A}_{>0}}(\square; M^*)$  est la donnée d'une famille d'applications continues :

$$\begin{aligned} g_{n;c} : \square(n; c) &\rightarrow M^*(n; c); & x &\mapsto \eta(*_{n;c}), & \text{pour } n > 0, \\ g_{n;o} : \square(n; o) &\rightarrow M^*(n; o), & & & \text{pour } n > 0, \end{aligned}$$

satisfaisant les relations liées à la structure de bimodule sous  $\mathcal{A}ct_{>0}$  :

$$\begin{aligned} \triangleright g_{n;o}(x \circ^i *_{2;c}) &= g_{n-1;o}(x) \circ^i *_{2;c}, & \text{pour } x \in \square(n-1; o) \text{ et } i \neq n-1, \\ \triangleright g_{n;o}(x \circ^{n-1} *_{2;o}) &= g_{n-1;o}(x) \circ^{n-1} *_{2;o}, & \text{pour } x \in \square(n-1; o), \\ \triangleright g_{n;o}(*_{2;o}(x; y)) &= *_{2;o}(g_{l;c}(x); g_{n-l;o}(y)) = *_{2;o}(\eta(*_{l;c}); g_{n-l;o}(y)), & \text{pour } x \in \square(l; c) \text{ et } y \in \square(n-l; o). \end{aligned}$$

On introduit la relation d'équivalence  $\sim$  sur  $[0, 1]^n$  engendrée par :

$$(t_1, \dots, t_n) \sim (t'_1, \dots, t'_n) \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \begin{cases} \triangleright t_i = t'_i = 1, \\ \triangleright t_j = t'_j & \text{pour } j > i. \end{cases}$$

Montrons que la séquence  $\tilde{\square} := \{\tilde{\square}(n) = [0, 1]^n / \sim\}_{n \geq 0}$  est un remplacement cofibrant de l'opérate  $\mathcal{A}s$  en tant que  $\mathcal{A}_{>0}$ -bimodule infinitésimal. On commence par définir une structure de  $\mathcal{A}_{>0}$ -bimodule infinitésimal sur  $\tilde{\square}$  en utilisant la structure  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule de  $\square$  :

$$\begin{aligned} i) \quad - \circ^i *_2 & : \tilde{\square}(n) \rightarrow \tilde{\square}(n+1) & ; & [(t_1, \dots, t_n)] \mapsto [(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n)], & \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ ii) \quad *_2 \circ_1 - & : \tilde{\square}(n) \rightarrow \tilde{\square}(n+1) & ; & [(t_1, \dots, t_n)] \mapsto [(t_1, \dots, t_n, 0)], \\ iii) \quad *_2 \circ_2 - & : \tilde{\square}(n) \rightarrow \tilde{\square}(n+1) & ; & [(t_1, \dots, t_n)] \mapsto [(1, t_1, \dots, t_n)]. \end{aligned}$$

Remarquons que cette structure satisfait les axiomes des bimodules infinitésimaux sous  $\mathcal{A}_{>0}$  grâce au passage au quotient. Le contre-exemple ci-dessous montre que les relations ne sont pas vérifiées pour le  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule  $\square$  :

$$\begin{aligned} (*_2 \circ_2 [(t_1, \dots, t_n)]) \circ_1 *_2 &= [(1, t_1, \dots, t_n)] \circ_1 *_2 & \left| \quad *_2 \circ_1 (*_2 \circ_2 [(t_1, \dots, t_n)]) &= [(1, t_1, \dots, t_n)] \circ_1 *_2 \\ &= [(0, 1, t_1, \dots, t_n)] & &= [(1, 1, t_1, \dots, t_n)] \\ &= [(1, 1, t_1, \dots, t_n)] & &= [(0, 1, t_1, \dots, t_n)] \end{aligned}$$

Enfin, toute application  $g \in \text{Bimod}_{\mathcal{A}_{ct>0}}(\square; M^*)$  passe au quotient et induit une famille d'applications  $\tilde{g} := \{\tilde{g}_{n+1} : \tilde{\square}(n) \rightarrow M^*(n+1; 0)\}_{n \geq 0}$  préservant la structure de  $\mathcal{A}_{S>0}$ -bimodule infinitésimal. En effet, si on se donne deux points dans la même classe d'équivalence,  $(t_1, \dots, t_n) \sim (t'_1, \dots, t'_n)$ , alors il existe un entier  $i$  tel que  $t_i = t'_i = 1$  et  $t_j = t'_j$  pour  $j > i$ . Or on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} g_{n+1;0}(t_1, \dots, t_n) &= g_{n+1;0}(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n) &= g_{n+1;0}(*_{2;0}((t_1, \dots, t_{i-1}); (t_{i+1}, \dots, t_n))) \\ &= *_{2;0}(g_{i;c}(t_1, \dots, t_{i-1}); g_{n-i;0}(t_{i+1}, \dots, t_n)) &= g_{n+1;0}(t'_1, \dots, t'_n). \end{aligned}$$

On dispose donc d'une application continue :

$$\xi : \text{Bimod}_{\mathcal{A}_{ct>0}}(\square; M^*) \rightarrow \text{Ibimod}_{\mathcal{A}_{S>0}}(\tilde{\square}; M_0), \quad (3.2)$$

envoyant un élément  $g$  vers  $\tilde{g}$ .

**Cofibrant :** On va montrer que  $\tilde{\square}$  peut être obtenu comme une succession de cofibrations dans la catégorie des bimodules infinitésimaux sous l'opérateur  $\mathcal{A}_{S>0}$ . Pour cela, on introduit  $\tilde{\square}_n$ , le sous-bimodule infinitésimal de  $\tilde{\square}$  engendré par la famille d'espaces  $\{\tilde{\square}(i)\}_{i=0}^n$ . Par convention, on désignera par  $\tilde{\square}_{-1}$  le bimodule infinitésimal  $\mathcal{F}_{\text{Ib}}(\emptyset)$ . Dans un premier temps, remarquons que le bord de  $\tilde{\square}(n)$  est déterminé par  $\tilde{\square}(n-1)$  et la structure de bimodule infinitésimal. En effet, l'application quotient  $[0, 1]^n \rightarrow \tilde{\square}(n)$  préserve le bord. Or un point de  $\partial[0, 1]^n$  est de la forme :

$$(t_1, \dots, t_{l-1}, 0, t_{l+1}, \dots, t_n) \quad \text{ou} \quad (t_1, \dots, t_{l-1}, 1, t_{l+1}, \dots, t_n).$$

Dans le premier cas, la classe d'équivalence d'un tel point provient de  $\tilde{\square}(n-1)$  via les axiomes (i) et (ii). Dans le second cas, la classe d'équivalence provient de  $\tilde{\square}(n-1)$  via l'axiome (iii) et les identifications suivantes :

$$[(t_1, \dots, t_{l-1}, 1, t_{l+1}, \dots, t_n)] = \underbrace{[(1, \dots, 1, t_{l+1}, \dots, t_n)]}_l = *_{2} \circ_2 \underbrace{[(1, \dots, 1, t_{l+1}, \dots, t_n)]}_{l-1}.$$

Par conséquent,  $\tilde{\square}_n$  est obtenu à partir de  $\tilde{\square}_{n-1}$  comme la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\text{Ib}}(\partial A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\text{Ib}}(A) \\ \tilde{q} \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\square}_{n-1} & \longrightarrow & \tilde{\square}_n \end{array} \quad (3.3)$$

avec  $A$  la collection donnée par  $A(n) = [0, 1]^n$  et l'ensemble vide dans les autres cas. L'application d'attachement  $\tilde{q}$  provient de la propriété universelle du bimodule infinitésimal libre appliquée à la restriction de l'application quotient  $q : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n / \sim$  au bord  $\partial[0, 1]^n$ . Comme l'inclusion  $\partial A \rightarrow A$  est une cofibration, le morphisme de bimodules infinitésimaux  $\tilde{\square}_{n-1} \rightarrow \tilde{\square}_n$  est une cofibration dans la catégorie  $\text{Ibimod}_{\mathcal{A}_{S>0}}$ .

Lorsque  $n \geq i$ , on a l'égalité  $\tilde{\square}_n(i) = \tilde{\square}(i)$ . Par conséquent  $\lim_n \tilde{\square}_n = \tilde{\square}$  est obtenu par une succession de cofibrations dans la catégorie des bimodules infinitésimaux. C'est donc un objet cofibrant.

**Contractile :** On commence par montrer que  $\tilde{\square}_n(m)$  est un CW-complexe par récurrence sur l'entier  $n$ . On rappelle que la séquence  $A$ , utilisée dans la somme amalgamée (3.3), est définie par  $A(n) = [0, 1]^n$  et l'ensemble vide ailleurs. Par conséquent un point du bimodule infinitésimal libre  $\mathcal{F}_{\text{Ib}}(A)$  est la donnée d'un couple  $(t; x)$  avec  $x \in A(n)$  et  $t$  un  $\{c\}$ -arbre perlé satisfaisant les trois conditions suivantes :

$$\triangleright t \text{ a } m \text{ feuilles}, \quad \triangleright \forall v \in V(t) \setminus \{p\}, |v| > 1, \quad \triangleright |p| = n. \quad (3.4)$$

Posons  $tr_m^n$  le nombre de  $\{c\}$ -arbres perlés satisfaisant les relations (3.4). Par construction, l'espace  $\tilde{\square}_0(m)$  est l'union disjointe de  $tr_m^0$  points. C'est donc un CW-complexe.

Supposons que les espaces composant la séquence  $\tilde{\square}_{n-1}$  soient des CW-complexes, avec  $n > 0$ . On veut démontrer que la séquence  $\tilde{\square}_n$  est composée de CW-complexes. Si  $m \leq n-1$ , alors  $\tilde{\square}_n(m) = \tilde{\square}_{n-1}(m)$  est un CW-complexe. La somme amalgamée (3.3) implique que  $\tilde{\square}_n(m) = \tilde{\square}(n)$  est un CW-complexe. Enfin, pour  $n > m$ , l'espace  $\tilde{\square}_n(m)$  est obtenu à partir du CW-complexe  $\tilde{\square}_{n-1}(m)$  en attachant  $tr_m^n$  cellules de dimension  $n$  et en respectant la structure de bimodule infinitésimal sous  $\mathcal{A}_{S>0}$ . C'est donc bien un CW-complexe.

Par conséquent, l'application quotient  $q : [0, 1]^n \rightarrow \tilde{\square}(n)$  est une application continue entre CW-complexes compacts. Comme la fibre au dessus d'un représentant de la forme  $(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n)$ , avec  $t_j \neq 1$  pour  $j > i$ , est homéomorphe à l'espace contractile  $[0, 1]^{i-1}$ , l'application  $q$  est une équivalence faible [44, Théorème principal]. L'espace  $\tilde{\square}(n)$  est donc contractile.

Or l'espace  $Ibimod_{\mathcal{A}_{S_{>0}}}^{th}(\mathcal{A}_S; M_o)$  ne dépend pas du choix du remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}_S$ , à équivalence faible près. Comme  $\tilde{\square}$  et  $\Delta^\bullet$  sont tous deux des remplacements cofibrants de l'opérate  $\mathcal{A}_S$  dans la catégorie des bimodules infinitésimaux, on a l'équivalence faible :

$$sTot(M_o) := Ibimod_{\mathcal{A}_{S_{>0}}}(\Delta^\bullet; M_o) \simeq Ibimod_{\mathcal{A}_{S_{>0}}}(\tilde{\square}; M_o).$$

**La seconde étape** de la preuve consiste à montrer que l'application (3.2) est une équivalence faible. Pour cela on introduit deux tours de fibrations dont les composantes,  $A_k$  et  $B_k$ , sont définies comme les sous-espaces :

$$A_k \subset \underbrace{\prod_{i=1}^{k+1} Top(\square(i; c); M^*(i; c))}_{\text{réduit à un point}} \times \prod_{i=1}^{k+1} Top(\square(i; o); M^*(i; o)) \quad \text{et} \quad B_k \subset \prod_{i=0}^k Top(\tilde{\square}(i); M_o^i),$$

avec  $A_k$  le sous-espace des applications satisfaisant les axiomes des bimodules sous  $\mathcal{A}_{ct_{>0}}$  et  $B_k$  satisfaisant les axiomes des bimodules infinitésimaux sous  $\mathcal{A}_{ct_{>0}}$ . En d'autres termes, les espaces  $A_k$  et  $B_k$  sont, respectivement, les espaces  $Bimod_{\mathcal{A}_{ct_{>0}}}(\square_{k+1}; M^*)$  et  $Ibimod_{\mathcal{A}_{S_{>0}}}(\tilde{\square}_k; M_o)$ , avec  $\square_{k+1}$  le sous  $\mathcal{A}_{ct_{>0}}$ -bimodule introduit dans la preuve de la proposition 2.2.5. La projection :

$$\prod_{i=1}^{k+1} Top(\tilde{\square}(i); M_o^i) \rightarrow \prod_{i=1}^k Top(\tilde{\square}(i); M_o^i)$$

induit une application  $B_{k+1} \rightarrow B_k$  qui peut être obtenue comme le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} B_{k+1} & \longrightarrow & Top(\tilde{\square}(k+1); M_o^{k+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_k & \longrightarrow & Top(\partial\tilde{\square}(k+1); M_o^{k+1}) \end{array}$$

D'après le lemme 2.1.10, l'application verticale à droite du diagramme est une fibration. Comme le produit fibré préserve les fibrations, l'application  $B_{k+1} \rightarrow B_k$  est une fibration. De manière analogue on peut démontrer que l'application  $A_{k+1} \rightarrow A_k$ , induite par la projection, est aussi une fibration. Le produit fibré permettant d'exprimer  $A_{k+1}$  à partir de  $A_k$  est le suivant :

$$\begin{array}{ccc} A_{k+1} & \longrightarrow & Top(\square(k+2; c); M^*(k+2; c)) \times Top(\square(k+2; o); M^*(k+2; o)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_k & \longrightarrow & Top(\partial\square(k+2; c); M^*(k+2; c)) \times Top(\partial\square(k+2; o); M^*(k+2; o)) \end{array}$$

Finalement on obtient deux tours de fibrations :

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & \longleftarrow & A_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & A_k & \longleftarrow & A_{k+1} & \longleftarrow & \dots \\ B_0 & \longleftarrow & B_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & B_k & \longleftarrow & B_{k+1} & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

calculant les espaces  $Bimod_{\mathcal{A}_{ct_{>0}}}(\square_{k+1}; M^*)$  et  $Ibimod_{\mathcal{A}_{S_{>0}}}(\tilde{\square}_k; M_o)$  respectivement. De plus, l'application  $\xi$  induit, par restriction, un morphisme entre les deux tours :

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & \longleftarrow & A_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & A_k & \longleftarrow & A_{k+1} & \longleftarrow & \dots \\ \downarrow \xi_0 & & \downarrow \xi_1 & & & & \downarrow \xi_k & & \downarrow \xi_{k+1} & & \\ B_0 & \longleftarrow & B_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & B_k & \longleftarrow & B_{k+1} & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

avec  $\xi = \lim_k \xi_k = \text{holim}_k \xi_k$ . Par conséquent, pour démontrer que  $\xi$  est une équivalence faible il suffit de démontrer par récurrence que chacune des applications  $\xi_k$  est une équivalence faible.

Les applications  $\xi_0$  et  $\xi_1$  coïncident avec l'identité. Ce sont donc des équivalences faibles. Supposons que  $\xi_{k-1}$  soit une équivalence. On se donne  $g$  un point de  $A_{k-1}$ . Posons  $F_A$  la fibre au-dessus de  $g$  et  $F_B$  la fibre au-dessus de  $\xi_{k-1}(g)$ . On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A_{k-1} & \longleftarrow & A_k & \longleftarrow & F_A \\ \simeq \downarrow \xi_{k-1} & & \downarrow \xi_k & & \downarrow \xi_g \\ B_{k-1} & \longleftarrow & B_k & \longleftarrow & F_B \end{array}$$

Comme les applications horizontales à gauche du diagramme sont des fibrations, l'application  $\xi_k$  est une équivalence faible si et seulement si  $\xi_g$  est une équivalence faible. Or d'après les lemmes 2.2.13 et 2.2.21 ainsi que le diagramme (3.4), on connaît une description des fibres  $F_A$  et  $F_B$  :

$$\begin{aligned} F_A &\cong \text{Top}^{\mathcal{S}^{k+1};o} \left( ([0, 1]^k; \partial[0, 1]^k); M(k+1; o) \right), \\ F_B &\cong \text{Top}^{\xi_{k-1}(g)^{k \circ q}} \left( ([0, 1]^k; \partial[0, 1]^k); M(k+1; o) \right). \end{aligned}$$

On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_A & \xrightarrow{\cong} & \text{Top}^{\mathcal{S}^{k+1};o} \left( ([0, 1]^k; \partial[0, 1]^k); M(k+1; o) \right) \\ \xi_g \downarrow & & \parallel \text{id} \\ F_B & \xrightarrow{\cong} & \text{Top}^{\xi_{k-1}(g)^{k \circ q}} \left( ([0, 1]^k; \partial[0, 1]^k); M(k+1; o) \right) \end{array}$$

Par conséquent  $\xi_k$  est une équivalence faible.  $\square$

**Proposition 3.1.5.** [13] Soit  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow M$  un morphisme de  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodules. L'espace  $\text{Bimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}^h(\mathcal{A}ct_{>0}; M^*)$  est faiblement équivalent à l'espace des lacets relatifs :

$$\Omega \left( \text{Bimod}_{\mathcal{A}S_{>0}}^h(\mathcal{A}S_{>0}; M_c); \text{Bimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}^h(\mathcal{A}ct_{>0}; M) \right).$$

*Démonstration.* On rappelle que  $\square$  est un modèle cofibrant de  $\mathcal{A}ct_{>0}$  en tant que  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodule et que sa restriction à la couleur fermée, notée  $\square_c$ , est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}S_{>0}$  en tant que  $\mathcal{A}S_{>0}$ -bimodule. Grâce à la structure particulière du bimodule  $M^*$ , on dispose d'une l'inclusion :

$$\begin{aligned} i : \text{Bimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\square; M^*) &\rightarrow \Omega \left( \text{Bimod}_{\mathcal{A}S_{>0}}(\square_c; M_c); \text{Bimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\square; M) \right); \\ g &\mapsto \begin{cases} \tilde{g}_{n;c} : \square(n; c) \times [0, 1] \rightarrow M(n; c) & ; (x; t) \mapsto \eta(*_n; c), \\ \tilde{g}_{n;o} : \square(n; o) \times \{1\} \rightarrow M(n; o) & ; (x; 1) \mapsto g_{n;o}(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Comme dans la preuve précédente, on va montrer que l'inclusion  $i$  est une équivalence faible en comparant deux tours de fibrations. Dans la démonstration de la proposition 3.1.4 on a déjà construit une tour de fibrations  $\{A_k\}$  calculant l'espace  $\text{Bimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\square; M^*)$ . La seconde tour de fibrations est donnée par les sous-espaces :

$$C_k \subset \prod_{i=1}^{k+1} \text{Top}(\square(i; c) \times [0, 1]; M(i; c)) \times \prod_{i=1}^{k+1} \text{Top}(\square(i; o); M(i; o))$$

satisfaisant les relations de la définition 3.1.1. L'application  $C_{k+1} \rightarrow C_k$ , induite par la projection, peut être obtenue comme le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} C_{k+1} & \longrightarrow & \text{Top}(\square(k+2; c) \times [0, 1]; M(k+2; c)) \times \text{Top}(\square(k+2; o); M(k+2; o)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_k & \longrightarrow & \text{Top}(\partial \square(k+2; c) \times [0, 1]; M(k+2; c)) \times \text{Top}(\partial \square(k+2; o); M(k+2; o)) \end{array} \quad (3.5)$$

avec  $\partial(\square(k+2; c) \times [0, 1]) = \square(k+2; c) \times \{0\} \cup \partial \square(k+2; c) \times [0, 1]$ .

D'après le lemme 2.1.22, l'application verticale à droite du diagramme (3.5) est une fibration. Comme le produit fibré préserve les fibrations, l'application  $C_{k+1} \rightarrow C_k$  est aussi une fibration. L'inclusion  $i$  induit un morphisme entre les deux tours :

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_0 & \longleftarrow & A_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & A_k & \longleftarrow & A_{k+1} & \longleftarrow & \cdots \\
 \downarrow i_0 & & \downarrow i_1 & & & & \downarrow i_k & & \downarrow i_{k+1} & & \\
 C_0 & \longleftarrow & C_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & C_k & \longleftarrow & C_{k+1} & \longleftarrow & \cdots
 \end{array}$$

Afin de démontrer que l'inclusion  $i$  est une équivalence faible, on va prouver par récurrence que chacune des applications  $i_k$  est une équivalence faible. Lorsque  $k = 0$ , un point dans  $C_0$  est la donnée d'un couple  $(g_{1;c}; g_{1;o})$  tandis que les points dans l'image de  $i_0$  sont les couples vérifiant la condition supplémentaire :

$$g_{1;c} : \square(1; c) \times [0, 1] \rightarrow M(1; c) ; (*; t) \mapsto \eta(*_{1;c}).$$

Comme  $g_{1;c}(*; 0) = \eta(*_{1;c})$  pour tout point dans  $C_0$ , l'inclusion  $i_0$  induit un rétract par déformation :

$$\begin{aligned}
 H : C_0 \times [0, 1] &\rightarrow C_0; \\
 y = ((g_{1;c}; g_{1;o}); t_1) &\mapsto \begin{cases} H(y)_{1;c}(*; t) = g_{1;c}(*; t(1 - t_1)), \\ H(y)_{1;o}(*; 1) = g_{1;o}(*; 1). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $i_{k-1}$  soit une équivalence faible, avec  $k > 0$ . On définit  $F_A$  la fibre au-dessus de  $g$  ainsi que  $F_C$  la fibre au-dessus de  $i_{k-1}(g)$ , avec  $g$  un point de  $A_{k-1}$ . On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{k-1} & \longleftarrow & A_k & \longleftarrow & F_A \\
 \simeq \downarrow i_{k-1} & & \downarrow i_k & & \downarrow i_g \\
 C_{k-1} & \longleftarrow & C_k & \longleftarrow & F_C
 \end{array}$$

Comme les applications horizontales à gauche sont des fibrations, l'inclusion  $i_k$  est une équivalence faible si et seulement si l'application  $i_g$ , induite sur les fibres, est une équivalence faible. Or un point dans  $F_C$  est un couple  $(g_{k+1;c}; g_{k+1;o})$  satisfaisant les relations de la définition 3.1.1. En particulier, l'application  $g_{k+1;c}$  envoie toutes les faces de  $\square(k+1; c) \times [0, 1]$  vers le point base  $\eta(*_{k+1;c})$  à l'exception de la face  $\square(k+1; c) \times \{1\}$ . Notons aussi qu'il n'y a aucune interaction entre les applications  $g_{k+1;c}$  et  $g_{k+1;o}$ .

D'un autre côté, les points dans l'image de l'application  $i_g$  sont les couples  $(g_{k+1;c}; g_{k+1;o})$  vérifiant la condition supplémentaire :

$$g_{k+1;c} : \square(k+1; c) \times [0, 1] \rightarrow M(k+1; c) ; (x; t) \rightarrow \eta(*_{k+1;c}).$$

Afin de voir que l'inclusion  $i_g$  induit un rétract par déformation, on introduit l'homotopie :

$$H : (\square(k+1; c) \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow \square(k+1; c) \times [0, 1],$$

décrite dans [24] et que l'on peut illustrer de la manière suivante :

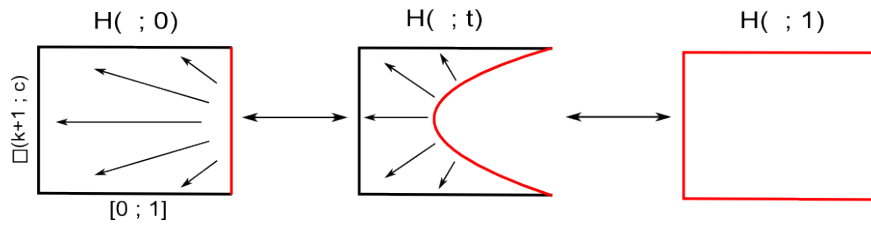


FIGURE 3.1 – Représentation de l'homotopie  $H$ .

En d'autres termes, les points dans l'image de  $i_g$  coïncident avec les couples vérifiant :

$$g_{k+1;c}(x; t) = g_{k+1;c}(H((x; t); 1)), \quad \text{pour } x \in \square(k+1; c) \text{ et } t \in [0, 1].$$

Finalement le rétract par déformation est donné par :

$$\begin{aligned}
 H_2 : F_C \times [0, 1] &\rightarrow F_C; \\
 y = ((g_{k+1;c}; g_{k+1;o}); t_1) &\mapsto \begin{cases} H_2(y)_{k+1;c}(x; t) = g_{k+1;c}(H((x; t); t_1)), & \text{pour } (x; t) \in (\square \times I)(k+1; c), \\ H_2(y)_{k+1;o}(x; 1) = g_{k+1;o}(x; 1), & \text{pour } x \in \square(k+1; o). \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'espace  $\Omega(\text{Bimod}_{As_0}(\square_c; M_c); \text{Bimod}_0(\square; M))$  est donc faiblement équivalent à  $\text{Bimod}_0(\square; M^*)$ .  $\square$

**Théorème 3.1.6.** [13] Soient  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow M$  un morphisme de  $\mathcal{A}ct_{>0}$ -bimodules et  $(M_c; M_o)$  la paire d'espaces semi-cosimpliciaux correspondant. Le couple d'espaces topologiques  $(sTot(M_c); sTot(M_o))$  est faiblement équivalent à une  $SC_1$ -algèbre explicite :

$$\left( \Omega Bimod_{\mathcal{A}S_{>0}}^h(\mathcal{A}S_{>0}; M_c); \Omega(Bimod_{\mathcal{A}S_{>0}}^h(\mathcal{A}S_{>0}; M_c); Bimod_{\mathcal{A}ct_{>0}}^h(\mathcal{A}ct_{>0}; M)) \right).$$

*Démonstration.* Les équivalences faibles proviennent des théorèmes 2.2.25 et 3.1.2.  $\square$

### 3.2 La résolution de Boardman-Vogt pour les opérades.

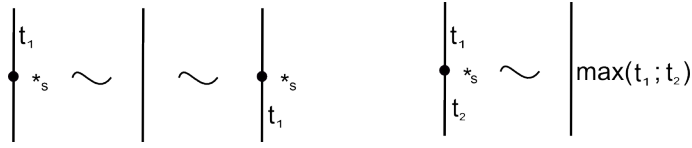
Pour démontrer le résultat principal des section 3 et 4, on a besoin d'un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}ct_{>0}$  en tant qu'opérade colorée. Pour cela, on va utiliser une construction introduite par Boardman et Vogt dans [5], appelée la Boardman-Vogt résolution, permettant d'obtenir un remplacement cofibrant d'une opérade symétrique colorée à condition que celle-ci soit  $\Sigma$ -cofibrante (i.e. cofibrante en tant que collection symétrique).

**Construction 3.2.1.** A partir d'une  $S$ -opérade symétrique  $O$ , on construit la  $S$ -opérade symétrique  $\mathcal{B}\mathcal{V}(O)$  dont les points sont les classes triplets  $[T; \{t_e\}; \{a_v\}]$  avec  $T$  un  $S$ -arbre et  $\{a_v\}$  une famille de points de  $O$  indexant les sommets de l'arbre  $T$ . Enfin,  $\{t_e\}$  est une famille de réels dans l'intervalle  $I = [0, 1]$  paramétrant les arêtes internes de l'arbre  $T$ . En d'autres termes,  $\mathcal{B}\mathcal{V}(O)$  est un quotient de l'espace topologique :

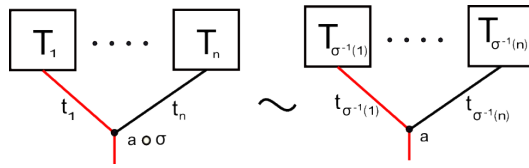
$$\coprod_{T \in S\text{-arbres}} \prod_{v \in V(T)} O(e_1(v), \dots, e_{|v|}(v); e_0(v)) \times \prod_{e \in E^{int}(T)} [0, 1] / \sim$$

La relation d'équivalence est engendrée par les conditions suivantes :

i) Si un sommet est indexé par une unité  $*_s \in O(s; s)$  alors on a la relation suivante sur les sous-arbres :



ii) Si un sommet  $v$  est indexé par  $a.\sigma$ , avec  $\sigma \in \Sigma_{|in(v)|}$ , alors on a la relation suivante :



iii) Si une arête interne est paramétrée par 0 alors on peut la contracter en utilisant la structure opéradique de  $O$  :

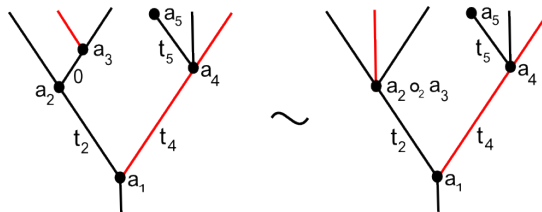


FIGURE 3.2 – Illustration de la relation (iii).

Soient  $[T; \{t_e\}; \{a_v\}] \in \mathcal{B}\mathcal{V}(O)(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $[T'; \{t'_e\}; \{a'_v\}] \in \mathcal{B}\mathcal{V}(O)(s'_1, \dots, s'_m; s_i)$ . La composition opéradique  $[T; \{t_e\}; \{a_v\}] \circ_i [T'; \{t'_e\}; \{a'_v\}]$  consiste à greffer l'arbre  $T'$  sur la  $i$ -ème feuille de  $T$  en conservant les indexations respectives puis en paramétrant la nouvelle arête interne par 1.

On rappelle que l'opérate libre  $\mathcal{F}_S(O)$  engendrée par  $O$  est l'ensemble des couples  $[T; \{a_v\}]$  avec  $T$  un  $S$ -arbre et  $\{a_v\}$  une famille de points de  $O$  indexant les sommets de l'arbre  $T$  (voir la construction 2.2.3). On dispose donc d'un morphisme :

$$\tau : \mathcal{F}_S(O) \rightarrow \mathcal{BV}(O) ; [T; \{a_v\}] \mapsto [T; \{1_e\}; \{a_v\}],$$

paramétrant toutes les arêtes internes par 1. Par construction, l'application  $\tau$  est un morphisme d'opéradés colorés symétriques. De même, on considère l'application :

$$\mu : \mathcal{BV}(O) \rightarrow O ; [T; \{t_e\}; \{a_v\}] \mapsto [T; \{0_e\}; \{a_v\}],$$

qui évalue les paramètres indexant les arêtes internes à 0. On identifie l'arbre obtenu à une corolle indexée par un point de  $O$ . Grâce à la condition (iii), l'application  $\mu$  est aussi un morphisme d'opéradés colorés symétriques.

**Théorème 3.2.2.** [50, Proposition 4.5] *Soit  $O$  une  $S$ -opérate symétrique. Si  $O$  est  $\Sigma$ -cofibrante et bien pointée alors les applications  $\tau : \mathcal{F}_S(O) \rightarrow \mathcal{BV}(O)$  et  $\mu : \mathcal{BV}(O) \rightarrow O$  sont respectivement une cofibration et une équivalence faible dans la catégorie modèle  $\Sigma\text{-Operad}_S$ . Par conséquent,  $\mathcal{BV}(O)$  est un remplacement cofibrant de  $O$  en tant qu'opérate colorée symétrique.*

*Remarque 3.2.3.* Dans le cas non symétrique, il suffit de regarder l'ensemble des  $S$ -arbres sans l'indexation des feuilles par le groupe des permutations et de supprimer la condition (ii) de la relation d'équivalence. On a pris le parti de présenter la construction générale de la Boardman-Vogt résolution car on aura besoin de cette version dans le chapitre 6.

**Exemple 3.2.4.** 1) L'opérate  $\mathcal{As}_{>0}$  est cofibrant et bien pointée. Comme le montre Salvatore dans [39], la Boardman-Vogt résolution coïncide avec la subdivision cubique de l'opérate de Stasheff  $\triangleleft$ .

2) L'opérate  $\mathcal{Act}_{>0}$  est bien pointée et cofibrant en tant que collection. On désigne par  $\mathcal{WA}$  sa Boardman-Vogt résolution. Comme la restriction à la couleur fermée de l'opérate colorée  $\mathcal{Act}_{>0}$  est l'opérate  $\mathcal{As}_{>0}$ , la restriction de l'opérate colorée  $\mathcal{WA}$  à la couleur fermée est l'opérate de Stasheff. De même,  $\mathcal{WA}(n; o)$  est homéomorphe, en tant qu'espace, au polytope  $\triangleleft(n)$ . Plus précisément, la structure particulière de  $\mathcal{Act}_{>0}$  implique que les points de  $\mathcal{WA}(n; o)$  sont indexés par des  $\{o; c\}$ -arbres  $T$  à  $n$  feuilles vérifiant :

$$\forall v \in V(T) : \begin{cases} f(e_0(v)) = c & \Rightarrow & f(e_i(v)) = c \quad \forall i \in \{1, \dots, |v|\} \\ f(e_0(v)) = o & \Rightarrow & |v| > 0, f(e_{|v|}(v)) = o \text{ et } f(e_i(v)) = c \quad \forall i \in \{1, \dots, |v| - 1\}. \end{cases} \quad (3.6)$$

En d'autres termes, uniquement les arêtes composant le chemin reliant la dernière feuille à la racine sont indexées par la couleur ouverte. L'opérate  $\mathcal{WA}$  a été introduite dans [26] afin de reconnaître les  $A_\infty$ -espaces ainsi que les  $A_\infty$ -morphisms.

### 3.3 $SC_2$ -algèbre extraite d'un morphisme de $O$ -bimodules

Soit  $f : A \rightarrow X$  une application entre espaces topologiques pointés. On rappelle que la fibre homotopique  $ho\,fib(f)$  ainsi que l'espace de lacets  $\Omega X$  sont équivalents aux produits fibrés (I) et (II) respectivement :

$$\begin{array}{ccc} Top([0, 1]; X) & & Top([0, 1]; X) \\ \downarrow (ev_0; ev_1) & (I) & \downarrow (ev_0; ev_1) \\ * \times A \xrightarrow{id \times f} X \times X & & * \times * \xrightarrow{\quad} X \times X \end{array} \quad (II)$$

On définit l'espace de lacets relatif d'ordre 2, noté  $\Omega^2(X; A)$ , comme l'espace de lacets associé à l'espace topologique  $ho\,fib(f)$ . Comme les colimites finies commutent entre elles, on aurait pu définir  $\Omega^2(X; A)$  comme la fibre homotopique associée à l'application continue  $\Omega f : \Omega A \rightarrow \Omega X$ .

Soit  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow O$  un morphisme d'opéradés colorés. Comme on l'a vu dans le chapitre 1, à partir du morphisme  $\eta$  on peut extraire une opérate multiplicative ainsi qu'un morphisme de  $\mathcal{As}_{>0}$ -bimodules :

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{As} &\rightarrow O_c & ; & \quad *_{n} \mapsto \eta(*_{n}), \\ \beta : O_c &\rightarrow O_o & ; & \quad x \mapsto \eta(*_{2;o}) \circ_1 x. \end{aligned}$$

Inversement, si on se donne  $\alpha : \mathcal{A}s \rightarrow O$  un morphisme d'opérades et  $\beta : O \rightarrow M$  un morphisme de  $O$ -bimodules alors on peut construire une  $\{o; c\}$ -opérade pointée définie par :

$$\Theta(n; c) = O(n), \quad \text{pour } n \geq 0 ; \quad \Theta(n; o) = M(n-1), \quad \text{pour } n > 0, \quad (3.7)$$

et l'ensemble vide pour les autres configurations d'entrées. La structure opéradique est donnée par :

$$\begin{aligned} \circ_i &: \Theta(n; c) \times \Theta(m; c) \rightarrow \Theta(n+m-1; c); (x; y) \mapsto x \circ_i y, & \text{via la structure opéradique de } O, \\ \circ_i &: \Theta(n; o) \times \Theta(m; c) \rightarrow \Theta(n+m-1; o); (x; y) \mapsto x \circ_i y, & \text{via la structure de } O\text{-bimodule à droite,} \\ \circ_n &: \Theta(n; o) \times \Theta(m; o) \rightarrow \Theta(n+m-1; o); (x; y) \mapsto \alpha(*_2)(x; y), & \text{via la structure de } O\text{-bimodule à gauche.} \end{aligned}$$

Les axiomes liés à la structure opéradique sont vérifiés à l'exception de l'axiome de l'unité. Pour pallier ce problème, on va supposer que notre couple d'applications  $(\alpha; \beta)$  vérifie l'hypothèse suivante :

$$\alpha(*_2)(\beta \circ \alpha(*_0); x) = \alpha(*_2)(x; \beta \circ \alpha(*_0)) = x \quad \text{pour } x \in \Theta(m; o). \quad (3.8)$$

L'opérade colorée  $\Theta$  est équipée d'un morphisme :  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow \Theta ; \begin{cases} \eta(*_{i;c}) = \alpha(*_i), \\ \eta(*_{i;o}) = \beta \circ \alpha(*_{i-1}). \end{cases}$

La composée  $\beta \circ \alpha : \mathcal{A}s \rightarrow M$  induit une structure de  $\mathcal{A}s_{>0}$ -bimodule sur  $M$ . Si  $M(0)$  est contractile alors on sait identifier la semi-totalisation de  $M$  à un espace de lacets simple explicite :

$$sTot(M) \simeq \Omega Bimod_{\mathcal{A}s_{>0}}^h(\mathcal{A}s_{>0}; M).$$

Comme  $M$  ne possède pas nécessairement de structure opéradique, sa semi-totalisation n'a pas nécessairement le type d'homotopie d'un espace de lacets double. On va néanmoins montrer que l'espace  $Bimod_{\mathcal{A}s_{>0}}^h(\mathcal{A}s_{>0}; M)$  est faiblement équivalent à la fibre homotopique :

$$hofib\left(Operad_{\{o;c\}}^h(\mathcal{A}ct_{>0}; \Theta) \longrightarrow Operad^h(\mathcal{A}s_{>0}; O)\right), \quad (3.9)$$

au-dessus de  $\alpha$ , provenant de la restriction à la couleur fermée. On commence par donner un modèle de la fibre homotopique (3.9) en utilisant le remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}ct_{>0}$  introduit dans la section précédente.

**Définition 3.3.1.** On définit  $\Omega\left(Operad^h(\square; O); Operad_{\{o;c\}}^h(\mathcal{W}\mathcal{A}; \Theta)\right)$  l'espace des applications :

$$\begin{aligned} g_{n;c} &: \mathcal{W}\mathcal{A}(n; c) \times [0, 1] \rightarrow \Theta(n; c), & \text{pour } n > 0, \\ g_{n;o} &: \mathcal{W}\mathcal{A}(n; o) \times \{1\} \rightarrow \Theta(n; o), & \text{pour } n > 0, \end{aligned}$$

vérifiant les relations liées à la structure opéradique :

$$\begin{aligned} \triangleright g_{n;c}(x \circ_i y; t) &= g_{l+1;c}(x; t) \circ_i g_{n-l;c}(y; t), & \text{pour } x \in \mathcal{W}\mathcal{A}(l+1; c), y \in \mathcal{W}\mathcal{A}(n-l; c) \text{ et } 1 \leq i \leq l+1, \\ \triangleright g_{n;o}(x \circ_i y; 1) &= g_{l+1;o}(x; 1) \circ_i g_{n-l;c}(y; 1), & \text{pour } x \in \mathcal{W}\mathcal{A}(l+1; o), y \in \mathcal{W}\mathcal{A}(n-l; c) \text{ et } 1 \leq i \leq l+1, \\ \triangleright g_{n;o}(x \circ_{l+1} y; 1) &= g_{l+1;o}(x; 1) \circ_{l+1} g_{n-l;o}(y; 1), & \text{pour } x \in \mathcal{W}\mathcal{A}(l+1; o) \text{ et } y \in \mathcal{W}\mathcal{A}(n-l; o), \end{aligned}$$

ainsi que la condition au bord :

$$\triangleright g_{n;c}(x; 0) = \eta(*_{n;c}) \quad \text{pour } x \in \mathcal{W}\mathcal{A}(n; c).$$

**Théorème 3.3.2.** [13] Soient  $\alpha : \mathcal{A}s \rightarrow O$  un morphisme d'opérades et  $\beta : O \rightarrow M$  un morphisme de  $O$ -bimodules vérifiant la relation 3.8. L'espace  $Bimod_{\mathcal{A}s_{>0}}^h(\mathcal{A}s_{>0}; M)$  est faiblement équivalent à l'espace de lacets relatif :

$$\Omega\left(Operad^h(\mathcal{A}s_{>0}; O); Operad_{\{o;c\}}^h(\mathcal{A}ct_{>0}; \Theta)\right).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence des propositions 3.3.4 et 3.3.5.  $\square$

*Notation 3.3.3.* Soient  $\alpha : \mathcal{A}s_{>0} \rightarrow O$  un morphisme d'opérades,  $\beta : O \rightarrow M$  un morphisme de  $O$ -bimodules vérifiant l'hypothèse (3.8) et  $\Theta$  l'opérade pointée associée. La collection  $\Theta^* \in Coll(\{o; c\})$ , construite à partir de  $\Theta$ , est donnée par :

$$\Theta^*(n; c) = \eta(*_{n;c}) \quad \text{pour } n \geq 0, \quad \Theta^*(n; o) = \Theta(n; o) \quad \text{pour } n > 0$$

et l'ensemble vide dans les autres cas. La séquence  $\Theta^*$  possède une structure de  $\{o; c\}$ -opérade pointée provenant de  $\Theta$ . Par abus de notation on notera par  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow \Theta^*$  l'application correspondante.



**Proposition 3.3.4.** [13] Soient  $\alpha : \mathcal{A}s \rightarrow \mathcal{O}$  un morphisme d'opérades et  $\beta : \mathcal{O} \rightarrow M$  un morphisme de  $\mathcal{O}$ -bimodules vérifiant la relation (3.8). On a alors l'équivalence faible :

$$\text{Bimod}_{\mathcal{A}s_{>0}}^{\text{th}}(\mathcal{A}s_{>0}; M) \simeq \text{Operad}_{\{0;c\}}^{\text{th}}(\mathcal{A}ct_{>0}; \Theta^*).$$

*Démonstration.* La démonstration est très similaire à celle du théorème 3.1.4. Cependant, à cause de subtilités liées aux choix des remplacements cofibrants, on redonne les détails de la preuve. Dans le chapitre 2, on a montré que  $\square_c$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}s_{>0}$  dans la catégorie des bimodules sous  $\mathcal{A}s_{>0}$ . Cela nous a permis d'identifier  $\text{Bimod}_{\mathcal{A}s_{>0}}^{\text{th}}(\mathcal{A}s_{>0}; M)$  à l'espace  $\text{Bimod}_{\mathcal{A}s_{>0}}(\square_c; M)$ .

**La première étape** de la démonstration consiste à construire un remplacement cofibrant alternatif de  $\mathcal{A}s_{>0}$ , noté  $\tilde{\mathcal{O}}$ , tel que l'on ait une application continue :

$$\xi : \text{Operad}_{\{0;c\}}(\mathcal{W}\mathcal{A}; \Theta^*) \rightarrow \text{Bimod}_{\mathcal{A}s_{>0}}(\tilde{\mathcal{O}}; M).$$

On rappelle qu'un point  $g \in \text{Operad}(\mathcal{W}\mathcal{A}; \Theta^*)$  est la donnée d'une famille d'applications continues :

$$\begin{aligned} g_{n;c} &: \mathcal{W}\mathcal{A}(n; c) \rightarrow \Theta^*(n; c); & x &\mapsto \eta(*_n; c), & \text{pour } n > 0, \\ g_{n;o} &: \mathcal{W}\mathcal{A}(n; o) \rightarrow \Theta^*(n; o), & & & \text{pour } n > 0. \end{aligned}$$

satisfaisant en particulier la relation :

$$g_{n;o}(x \circ_i y) = g_{l+1;o}(x) \circ_i g_{n-l;c}(y) = g_{l+1;o}(x) \circ_i \eta(*_{n-l}; c), \quad (3.10)$$

avec  $x \in \mathcal{W}\mathcal{A}(l+1; o)$ ,  $y \in \mathcal{W}\mathcal{A}(n-l; c)$  et  $i \in \{1, \dots, l\}$ .

Afin de définir une relation d'équivalence sur  $\mathcal{W}\mathcal{A}(n; o)$  on introduit une relation d'ordre partielle sur les arêtes internes d'un  $\{0; c\}$ -arbre planaire  $T$ . Si  $e_1$  et  $e_2$  sont deux arêtes internes de  $T$  alors  $e_1 < e_2$  s'il existe un chemin reliant une feuille à la racine passant par les deux arêtes et si  $d(s(e_1); r) < d(s(e_2); r)$  avec  $d$  la distance introduite dans la définition 2.2.9. Posons ensuite  $\approx$  la relation d'équivalence sur  $\mathcal{W}\mathcal{A}(n; o)$  engendrée par :

$$[T; \{t_e\}] \approx [T; \{l_e\}] \Leftrightarrow \begin{cases} \triangleright t_e = l_e, \quad \forall e \in E^{\text{int}}(T) \text{ indexée par la couleur } o, \\ \text{et} \\ \triangleright t_e = l_e \text{ si } \nexists e_1 < e \text{ tel que } t_{e_1} = l_{e_1} = 1 \text{ et } f(e_1) = c. \end{cases}$$

Il s'agit de montrer que la collection  $\tilde{\mathcal{O}} := \{\tilde{\mathcal{O}}(n) = \mathcal{W}\mathcal{A}(n+1; o) / \approx\}_{n \geq 0}$ , avec par convention  $\tilde{\mathcal{O}}(0) = \emptyset$ , est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}s_{>0}$  en tant que bimodule. On commence par définir une structure de  $\mathcal{A}s_{>0}$ -bimodule sur  $\tilde{\mathcal{O}}$  en utilisant la structure opéradique de  $\mathcal{W}\mathcal{A}$  :

$$i) - \circ^i *_2 : \tilde{\mathcal{O}}(n) \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}(n+1) \quad ; \quad [T; \{t_e\}] \mapsto [T; \{t_e\}] \circ_i \delta_{2;c}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n,$$

$$ii) *_2(-; -) : \tilde{\mathcal{O}}(n) \times \tilde{\mathcal{O}}(m) \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}(n+m); \quad ([T_1; \{t_e\}]; [T_2; \{l_e\}]) \mapsto [T_1; \{t_e\}] \circ_{n+1} [T_2; \{l_e\}].$$

avec  $\delta_{n;c}$  la corolle à  $n$  feuilles dont toutes les arêtes sont indexées par la couleur  $c$  et  $\delta_{n;o}$  la corolle dont uniquement la dernière feuille et le tronc sont indexés par la couleur  $o$ . Ces opérations induisent une structure de bimodule uniquement dans l'espace quotient.

Notons que toute application  $g \in \text{Operad}_{\{0;c\}}(\mathcal{W}\mathcal{A}; \Theta^*)$  passe au quotient et induit un morphisme  $\tilde{g} := \{\tilde{g}_n : \tilde{\mathcal{O}}(n) \rightarrow M(n)\}_{n > 0}$  préservant la structure de bimodule sous  $\mathcal{A}s_{>0}$ . En effet, si on se donne  $[T; \{t_e\}]$  et  $[T; \{l_e\}]$  deux points distincts dans la même classe d'équivalence, alors il existe une arête interne  $e_1$  indexée par la couleur  $c$  et paramétrée par  $t_{e_1} = l_{e_1} = 1$ . Par conséquent, on a les décompositions suivantes :

$$[T; \{t_e\}] = [T_1; \{t_e^1\}] \circ_i [T_2; \{t_e^2\}] \quad \text{et} \quad [T; \{l_e\}] = [T_1; \{l_e^1\}] \circ_i [T_2; \{l_e^2\}],$$

avec  $T_2$  le sous-arbre de  $T$  ayant pour tronc l'arête  $e_1$ . Supposons que  $[T_1; \{t_e^1\}] = [T_1; \{l_e^1\}]$ . Grâce à la relation (3.10), on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} g_{n+1;o}([T; \{t_e\}]) &= g_{|T_1|;o}([T_1; \{t_e^1\}]) \circ_i g_{|T_2|;c}([T_2; \{t_e^2\}]) \\ &= g_{|T_1|;o}([T_1; \{t_e^1\}]) \circ_i g_{|T_2|;c}([T_2; \{l_e^2\}]) \\ &= g_{n+1;o}([T; \{l_e\}]) \end{aligned}$$

Si  $[T_1; \{t_e^1\}]$  et  $[T_1; \{l_e^1\}]$  sont différents alors ils doivent être dans la même classe d'équivalence. Dans ce cas on réitère la démarche précédente sachant que ce processus est fini car on a un nombre fini d'arêtes internes. On dispose donc d'une application continue :

$$\xi : \text{Operad}_{\{0;c\}}(\mathcal{W}\mathcal{A}; \Theta^*) \rightarrow \text{Bimod}_{\mathcal{A}s_{>0}}(\tilde{\mathcal{O}}; M) \quad (3.11)$$

envoyant  $g$  sur  $\tilde{g}$ .

**Cofibrant :** Posons  $\tilde{\mathcal{C}}_n$  le sous  $\mathcal{A}s_{>0}$ -bimodule engendré par  $\{\tilde{\mathcal{C}}\}_{i=1}^n$  avec  $n > 0$ . Par convention on note  $\tilde{\mathcal{C}}_0$  le bimodule  $B_{\mathcal{A}s_{>0}}(\emptyset)$ . On doit commencer par montrer que le bord de  $\tilde{\mathcal{C}}(n)$  est déterminé par  $\tilde{\mathcal{C}}(n-1)$  via la structure de bimodule. Remarquons que l'application quotient  $\mathcal{W}\mathcal{A}(n+1; o) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}(n)$  préserve le bord et qu'un point dans  $\partial\mathcal{W}\mathcal{A}(n+1; o)$  a l'une des formes suivantes :

- ▷  $[T; \{t_e\}]$  tel que il existe  $e_1 \in E^{int}(T)$  avec  $t_{e_1} = 1$  et  $f(e_1) = o$ ,
- ▷  $[T; \{t_e\}]$  tel que il existe  $e_1 \in E^{int}(T)$  avec  $t_{e_1} = 1$  et  $f(e_1) = c$ .

Dans le premier cas, le point  $[T; \{t_e\}]$  peut se décomposer sous la forme  $[T_1; \{t_e^1\}] \circ_{|T_1|} [T_2; \{t_e^2\}]$  avec  $T_2$  le sous-arbre de  $T$  ayant pour tronc l'arête interne  $e_1$ . Par conséquent, ce point provient des  $\{\tilde{\mathcal{C}}(l)\}_{l < n}$  via l'axiome (ii). Dans le second cas,  $[T; \{t_e\}]$  possède une décomposition similaire  $[T_1; \{t_e^1\}] \circ_i [T_2; \{t_e^2\}]$  avec  $i < |T_1|$ . L'axiome (i) et la relation d'équivalence induisent les égalités suivantes :

$$[T; \{t_e\}] = [T_1; \{t_e^1\}] \circ_i [T_2; \{t_e^2\}] \approx [T_1; \{t_e\}_1] \circ_i \delta_{|T_2|; c} = [T_1; \{t_e^1\}] \circ_i \delta_{|T_2-1; c} \circ^i *_2,$$

Pour un entier  $n$  fixé, on peut en conclure que  $\tilde{\mathcal{C}}_n$  est obtenu à partir de  $\tilde{\mathcal{C}}_{n-1}$  comme la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_B(\partial A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_B(A) \\ \tilde{q} \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\mathcal{C}}_{n-1} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{C}}_n \end{array} \quad (3.12)$$

avec  $A$  la séquence donnée par  $A(n) = \mathcal{W}\mathcal{A}(n+1; o)$  et l'ensemble vide dans les autres cas. L'application d'attachement  $\tilde{q}$  provient de la restriction de l'application quotient  $q : \mathcal{W}\mathcal{A}(n+1; o) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}(n) / \approx$  au bord  $\partial\mathcal{W}\mathcal{A}(n+1; o)$  et de la propriété universelle du bimodule libre décrite dans le chapitre 2. De plus, si  $n \geq i$  alors on a l'égalité  $\tilde{\mathcal{C}}_n(i) = \tilde{\mathcal{C}}(i)$  et  $\lim_n \tilde{\mathcal{C}}_n = \tilde{\mathcal{C}}$ . Comme l'application  $\partial A \rightarrow A$  est une cofibration,  $\tilde{\mathcal{C}}$  peut être obtenu par une succession de cofibrations. Finalement  $\tilde{\mathcal{C}}$  est cofibrant dans la catégorie des bimodules sous l'opérateur  $\mathcal{A}s_{>0}$ .

**Contractile :** Comme dans la preuve du Théorème 3.1.4, on peut montrer que  $\tilde{\mathcal{C}}(n)$  est un CW-complexe et que le quotient  $q : \mathcal{W}\mathcal{A}(n+1; o) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}(n)$  est une application continue entre des CW-complexes compacts. Comme la fibre de  $q$  au-dessus d'un point est homéomorphe à un produit de polytopes qui est contractile, l'application  $q$  est une équivalence d'homotopie [44, Théorème principal]. Par conséquent  $\tilde{\mathcal{C}}(n)$  est contractile pour  $n > 0$ .

Comme  $\tilde{\mathcal{C}}$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}s_{>0}$  en tant que bimodule, on a l'équivalence faible :

$$Bimod_{\mathcal{A}s_{>0}}^h(\mathcal{A}s_{>0}; M) \simeq Bimod_{\mathcal{A}s_{>0}}(\tilde{\mathcal{C}}; M).$$

**La seconde étape** de la preuve consiste à montrer que l'application (3.11) est une équivalence faible. Pour cela on va introduire deux tours de fibrations construites à partir des sous-espaces :

$$A'_k \subset \underbrace{\prod_{i=1}^{k+1} Top(\mathcal{W}\mathcal{A}(i; c); \Theta^*(i; c))}_{\text{réduit à un point}} \times \prod_{i=1}^{k+1} Top(\mathcal{W}\mathcal{A}(i; o); \Theta^*(i; o)) \quad \text{et} \quad B'_k \subset \prod_{i=1}^k Top(\tilde{\mathcal{C}}(i); M(i))$$

où  $A'_k$  est le sous-espace des applications satisfaisant les axiomes opéradiques et  $B'_k$  vérifiant les axiomes des  $\mathcal{A}s_{>0}$ -bimodules, avec  $k > 0$ . En d'autres termes,  $A'_k$  et  $B'_k$  sont respectivement les espaces topologiques  $Operad_{[0; c]}(\mathcal{W}\mathcal{A}_{k+1}; \Theta^*)$  et  $Bimod_{\mathcal{A}s_{>0}}(\tilde{\mathcal{C}}_k; M)$ , avec  $\mathcal{W}\mathcal{A}_{k+1}$  la sous-opérateur engendrée par  $\{\mathcal{W}\mathcal{A}(i; c)\}_{i=1}^{k+1}$  et  $\{\mathcal{W}\mathcal{A}(i; o)\}_{i=1}^{k+1}$ . Comme dans la première section, les projections induisent deux tours de fibrations :

$$\begin{array}{ccccccc} A'_1 & \longleftarrow & A'_2 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & A'_k & \longleftarrow & A'_{k+1} & \longleftarrow & \cdots \\ B'_1 & \longleftarrow & B'_2 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & B'_k & \longleftarrow & B'_{k+1} & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

convergeant respectivement vers  $Operad_{\{0;c\}}(\mathcal{WA}; \Theta^*)$  et  $Bimod_{As>0}(\tilde{\diamond}; M)$ . De plus, l'application  $\xi$  induit un morphisme entre les deux tours de fibrations :

$$\begin{array}{ccccccc} A'_1 & \longleftarrow & A'_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & A'_k & \longleftarrow & A'_{k+1} & \longleftarrow & \dots \\ \downarrow \xi_1 & & \downarrow \xi_2 & & & & \downarrow \xi_k & & \downarrow \xi_{k+1} & & \\ B'_1 & \longleftarrow & B'_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & B'_k & \longleftarrow & B'_{k+1} & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

avec  $\xi = \lim_k \xi_k = \text{holim}_k \xi_k$ . Pour démontrer que  $\xi$  est une équivalence faible, il suffit donc de montrer par récurrence que chacune des applications  $\xi_k$  est une équivalence faible. Tout d'abord, remarquons que les espaces  $\mathcal{WA}(1; c)$  et  $\mathcal{WA}(1; o)$  sont réduits à un point qui correspondent aux unités de l'opérate. Les deux facteurs

$$Top(\mathcal{WA}(1; c); \Theta^*(1; c)) \quad \text{et} \quad Top(\mathcal{WA}(1; o); \Theta^*(1; o))$$

sont réduits à un point à cause des relations opéradiques et peuvent donc être ignorés.

L'application  $\xi_1$  coïncide avec l'identité. C'est donc une équivalence faible. Supposons que  $\xi_{k-1}$  soit une équivalence et fixons  $g$  un point de  $A'_{k-1}$ . Posons  $F_{A'}$  la fibre au-dessus de  $g$  et  $F_{B'}$  la fibre au-dessus de  $\xi_{k-1}(g)$ . On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A'_{k-1} & \longleftarrow & A'_k & \longleftarrow & F_{A'} \\ \simeq \downarrow \xi_{k-1} & & \downarrow \xi_k & & \downarrow \xi_g \\ B'_{k-1} & \longleftarrow & B'_k & \longleftarrow & F_{B'} \end{array}$$

Comme les applications horizontales à gauche du diagramme sont des fibrations, l'application  $\xi_k$  est une équivalence faible si et seulement si  $\xi_g$  est une équivalence faible. Or d'après les lemmes 2.2.7 et 2.2.13 ainsi que le diagramme (3.12), on connaît une description des fibres  $F_{A'}$  et  $F_{B'}$  :

$$\begin{aligned} F_{A'} &\cong Top^{\mathcal{S}^{k+1;o}}\left(\left(\mathcal{WA}(k+1; o); \partial\mathcal{WA}(k+1; o)\right); M(k)\right), \\ F_{B'} &\cong Top^{\xi_{k-1}(g)^{k;oq}}\left(\left(\mathcal{WA}(k+1; o); \partial\mathcal{WA}(k+1; o)\right); M(k)\right). \end{aligned}$$

On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_A & \xrightarrow{\cong} & Top^{\mathcal{S}^{k+1;o}}\left(\left(\mathcal{WA}(k+1; o); \partial\mathcal{WA}(k+1; o)\right); M(k)\right) \\ \xi_g \downarrow & & \parallel id \\ F_B & \xrightarrow[\cong]{} & Top^{\xi_{k-1}(g)^{k;oq}}\left(\left(\mathcal{WA}(k+1; o); \partial\mathcal{WA}(k+1; o)\right); M(k)\right) \end{array}$$

Par conséquent, l'application  $\xi_k$  est une équivalence faible.  $\square$

**Proposition 3.3.5.** [13] Soient  $\alpha : \mathcal{As} \rightarrow \mathcal{O}$  un morphisme d'opérate et  $\beta : \mathcal{O} \rightarrow M$  un morphisme de  $\mathcal{O}$ -bimodules vérifiant la relation (3.8). L'espace  $Operad_{\{0;c\}}^h(\mathcal{Act}_{>0}; \Theta^*)$  est faiblement équivalent à l'espace de lacets relatif :

$$\Omega\left(Operad^h(\mathcal{As}_{>0}; \mathcal{O}); Operad_{\{0;c\}}^h(\mathcal{Act}_{>0}; \Theta)\right).$$

*Démonstration.* La preuve de cette démonstration est similaire à la preuve de la proposition 3.1.5. On commence par identifier  $Operad_{\{0;c\}}^h(\mathcal{Act}_{>0}; \Theta^*)$  à un sous-espace du modèle de l'espace de lacets relatif, décrit dans la définition 3.3.1, via l'inclusion :

$$\begin{aligned} i : Operad_{\{0;c\}}(\mathcal{WA}; \Theta^*) &\rightarrow \Omega\left(Operad(\diamond; \mathcal{O}); Operad_{\{0;c\}}(\mathcal{WA}; \Theta)\right); \\ g &\mapsto \begin{cases} \tilde{g}_{n;c} : \mathcal{WA}(n; c) \times [0, 1] \rightarrow \Theta(n; c) & ; (x; t) \mapsto \eta(*_n; c), \\ \tilde{g}_{n;o} : \mathcal{WA}(n; o) \times \{1\} \rightarrow \Theta(n; o) & ; (x; 1) \mapsto g_{n;o}(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Pour démontrer que l'inclusion  $i$  est une équivalence faible, on va introduire deux tours de fibrations. Dans la preuve de la proposition 3.3.4, on a déjà introduit la tour de fibrations  $\{A'_k\}$  permettant de calculer l'espace  $Operad_{\{0;c\}}^h(\mathcal{Act}_{>0}; \Theta^*)$ . La seconde tour est constituées des sous-espaces :

$$C'_k \subset \prod_{i=1}^{k+1} Top(\mathcal{WA}(i; c) \times [0, 1]; \Theta(i; c)) \times \prod_{i=1}^{k+1} Top(\mathcal{WA}(i; o); \Theta(i; o))$$

satisfaisant les relations de la définition 3.3.1. Les projections induisent une tour de fibrations convergeant vers l'espace de lacets relatif. De plus, l'inclusion  $i$  induit un morphisme entre les deux tours de fibrations :

$$\begin{array}{ccccccc} A'_1 & \longleftarrow & A'_2 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & A'_k & \longleftarrow & A'_{k+1} & \longleftarrow & \cdots \\ \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & & & \downarrow i_k & & \downarrow i_{k+1} & & \\ C'_1 & \longleftarrow & C'_2 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & C'_k & \longleftarrow & C'_{k+1} & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Afin de prouver que  $i$  est une équivalence faible, il nous suffit de montrer par récurrence que chacune des applications  $i_k$  est une équivalence faible. Tout d'abord, remarquons que les espaces  $\mathcal{WA}(1; c)$  et  $\mathcal{WA}(1; o)$  sont réduits à un point qui coïncident avec les unités de l'opérate. Par conséquent, les deux facteurs

$$\text{Top}(\mathcal{WA}(1; c) \times [0, 1]; \Theta^*(1; c)) \quad \text{et} \quad \text{Top}(\mathcal{WA}(1; o); \Theta^*(1; o))$$

sont réduits à un point à cause des relations opéradiques et peuvent donc être ignorés.

Lorsque  $k = 1$ , un point dans  $C'_1$  est la donnée d'un couple  $(g_{2;c}; g_{2;o})$  vérifiant les relations de la définition 3.3.1. En particulier, on a l'égalité  $g_{2;c}(x; 0) = \eta(*_{1;c})$ . Par ailleurs, les points dans l'image de  $i_1$  sont les couples vérifiant la condition supplémentaire :

$$g_{2;c} : \mathcal{WA}(2; c) \times [0, 1] \rightarrow X(2; c); (x; t) \mapsto \eta(*_{2;c}).$$

L'inclusion  $i_1$  est un rétract par déformation :

$$H : \quad C'_1 \times [0, 1] \quad \rightarrow \quad C'_1; \\ y = ((g_{2;c}; g_{2;o}); t_1) \mapsto \begin{cases} H(y)_{2;c}(\delta_{2;c}; t) = g_{2;c}(\delta_{2;c}; t(1 - t_1)), \\ H(y)_{2;o}(\delta_{2;o}; 1) = g_{2;o}(\delta_{2;o}; 1). \end{cases}$$

Supposons que  $i_{k-1}$  soit une équivalence faible, avec  $k > 1$ , et fixons  $g$  un point de  $A'_{k-1}$ . On désignera par  $F_{A'}$  la fibre au-dessus de  $g$  ainsi que  $F_{C'}$  la fibre au-dessus de  $i_{k-1}(g)$ . On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A'_{k-1} & \longleftarrow & A'_k & \longleftarrow & F_{A'} \\ \simeq \downarrow i_{k-1} & & \downarrow i_k & & \downarrow i_g \\ C'_{k-1} & \longleftarrow & C'_k & \longleftarrow & F_{C'} \end{array}$$

Comme les applications horizontales à gauche sont des fibrations, l'inclusion  $i_k$  est une équivalence faible si et seulement si l'application induite sur les fibres  $i_g$  est une équivalence faible. Or un point dans  $F_{C'}$  est la donnée d'un couple  $(g_{k+1;c}; g_{k+1;o})$  satisfaisant les relations de la définition 3.3.1. En particulier, l'application  $g_{k+1;c}$  doit envoyer toutes les faces de  $\mathcal{WA}(k+1; c) \times [0, 1]$  vers le point base  $\eta(*_{k+1;c})$  à l'exception de la face  $\mathcal{WA}(k+1; c) \times \{1\}$ .

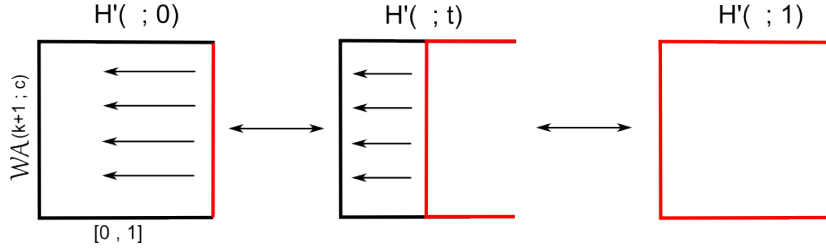
D'un autre coté, un point dans l'image de l'application  $i_g$  sont les couples  $(g_{k+1;c}; g_{k+1;o})$  vérifiant la condition supplémentaire :

$$g_{k+1;c} : \mathcal{WA}(k+1; c) \times [0, 1] \rightarrow \Theta(k+1; c); (x; t) \mapsto \eta(*_{k+1;c}).$$

Pour démontrer que  $i_g$  est un rétract par déformation, on considère un relèvement  $H'$  du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \partial(\mathcal{WA}(k+1; c) \times [0, 1]) \times [0, 1] \sqcup (\mathcal{WA}(k+1; c) \times [0, 1]) \times \{0\} & \longrightarrow & \mathcal{WA}(k+1; c) \times [0, 1] \\ \downarrow & \nearrow \text{---} H' \text{---} & \\ (\mathcal{WA}(k+1; c) \times [0, 1]) \times [0, 1] & & \end{array}$$

L'application horizontale est définie comme étant l'inclusion sur le facteur  $(\mathcal{WA}(k+1; c) \times [0, 1]) \times \{0\}$  et envoyant un point  $((x; t_1); t_2) \in \partial(\mathcal{WA}(k+1; c) \times [0, 1]) \times [0, 1]$  vers  $(x; (1 - t_2)t_1)$ . Le relèvement  $H'$  existe car l'application verticale est une cofibration acyclique tandis que l'espace  $\mathcal{WA}(k+1; c) \times [0, 1]$  est fibrant. On peut représenter l'homotopie  $H'$  via la figure suivante :


 FIGURE 3.3 – Illustration de l'homotopie  $H'$ .

En d'autres termes, les points dans l'image de  $i_g$  coïncident avec les couples vérifiant la relation :

$$g_{k+1;c}(x; t) = g_{k+1;c}(H'((x; t); 1)) = \eta(*_{k+1;c}), \quad \text{pour } x \in \mathcal{WA}(k+1; c) \text{ et } t \in [0, 1].$$

Finalement le rétract par déformation est donné par :

$$H_2 : F_C \times [0, 1] \rightarrow F_C;$$

$$y = ((g_{k+1;c}; g_{k+1;o}); t_1) \mapsto \begin{cases} H_2(y)_{k+1;c}(x; t) = g_{k+1;c}(H'((x; t); t_1)), & \text{pour } x \in \mathcal{WA}(k; c) \text{ et } t \in [0, 1], \\ H_2(y)_{k+1;o}(x; 1) = g_{k+1;o}(x; 1), & \text{pour } x \in \mathcal{WA}(k+1; o). \end{cases}$$

L'espace  $\text{Operad}_{[0;c]}(\mathcal{WA}; \Theta^*)$  est faiblement équivalent à  $\Omega(\text{Operad}(\diamond; O); \text{Operad}_{[0;c]}(\mathcal{WA}; \Theta))$ .  $\square$

**Théorème 3.3.6.** [13] Soient  $\alpha : \mathcal{As} \rightarrow O$  un morphisme d'opérades et  $\beta : O \rightarrow M$  un morphisme de  $O$ -bimodules vérifiant la relation (3.8). Si les espaces  $M(0)$ ,  $O(0)$  et  $O(1)$  sont contractiles alors le couple d'espaces topologiques  $(s\text{Tot}(O); s\text{Tot}(M))$  est faiblement équivalent à une algèbre sous  $\mathcal{SC}_2$  explicite :

$$\left( \Omega^2 \text{Operad}^h(\mathcal{As}_{>0}; O); \Omega^2(\text{Operad}^h(\mathcal{As}_{>0}; O); \text{Operad}_{[0;c]}^h(\mathcal{Act}_{>0}; \Theta)) \right)$$

*Démonstration.* Les équivalences faibles proviennent des théorèmes 2.2.25 et 3.3.2.  $\square$

### 3.4 $\mathcal{SC}_2$ -algèbre extraite d'une opérade pointée

Soient  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow O$  un morphisme d'opérades colorées et  $(O_c; O_o)$  le couple d'espaces semi-simpliciaux associés. D'après l'exemple 1.4.3, l'application  $\eta$  est aussi un morphisme de  $\mathcal{Act}_{>0}$ -bimodules. Le résultat de la section 3.1 affirme que si  $O(0; c)$  est contractile alors le couple d'espaces topologiques  $(s\text{Tot}(O_c); s\text{Tot}(O_o))$  est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_1$ -algèbre :

$$\left( \Omega \text{Bimod}_{\mathcal{As}_{>0}}^h(\mathcal{As}_{>0}; O_c); \Omega(\text{Bimod}_{\mathcal{As}_{>0}}^h(\mathcal{As}_{>0}; O_c); \text{Bimod}_{\mathcal{Act}_{>0}}^h(\mathcal{Act}_{>0}; O)) \right).$$

Si on suppose que l'espace  $O(1; c)$  est contractile alors on sait identifier  $\text{Bimod}_{\mathcal{As}_{>0}}^h(\mathcal{As}_{>0}; O_c)$  à un espace de lacets explicite  $\Omega \text{Operad}^h(\mathcal{As}_{>0}; O_c)$  grâce aux travaux de Dwyer-Hess [14] et Turchin [49]. On va montrer qu'il est possible d'adapter la démonstration de Turchin afin d'étendre ce résultat au cas coloré en remplaçant l'opérade associative par l'opérade  $\mathcal{Act}_{>0}$ .

**Proposition 3.4.1.** [13] Soit  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow O$  un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades avec  $O(1; c)$  et  $O(1; o)$  deux espaces contractiles. L'espace  $\text{Bimod}_{\mathcal{Act}_{>0}}^h(\mathcal{Act}_{>0}; O)$  est faiblement équivalent à l'espace de lacets  $\Omega \text{Operad}_{[0;c]}^h(\mathcal{Act}_{>0}; O)$ .

*Démonstration.* On va montrer comment adapter la preuve du théorème 2.2.25. Selon les notations de Turchin [49],  $\mathcal{B}\diamond$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{As}_{>0}$ , en tant que bimodule, muni d'une application continue :

$$\xi_c : \Omega \text{Operad}_{[0;c]}(\diamond; O_c) \rightarrow \text{Bimod}_{\mathcal{As}_{>0}}(\mathcal{B}\diamond; O_c) \simeq \text{Bimod}_{\mathcal{As}_{>0}}^h(\mathcal{As}_{>0}; O_c),$$

envoyant un lacet  $f$  vers le morphisme de bimodules  $\xi_c^f$ . En utilisant des tours de fibrations, Turchin a démontré que l'application  $\xi_c$  est une équivalence faible à condition que l'espace  $O_c(1)$  soit contractile.

L'application  $\xi_c$  est obtenue grâce à la construction de  $\mathcal{B}\diamond$  comme un recollement de polytopes indexés par des  $\{c\}$ -arbres planaires à  $n$  feuilles. Plus précisément, si  $T$  est un  $\{c\}$ -arbre planaire alors on définit  $\mathcal{B}\diamond(T)$  comme le produit des deux espaces :

$$\triangleright \lambda_{\diamond}(T) = \prod_{v \in V(T)} \diamond(|v|),$$

$$\triangleright \chi_{\blacktriangle}(T) = \{\{t_v\}_{v \in V(T)} \mid t_v \in [0, 1] \text{ et } t_{v_1} \leq t_{v_2} \text{ si } v_1 < v_2\} \subset [0, 1]^{|V(T)|},$$

où  $v_1 < v_2$  s'il existe un chemin reliant une feuille à la racine passant par les deux sommets avec  $d(v_1; r) < d(v_2; r)$ . On notera un point de  $\mathcal{B}\diamond(T)$  sous la forme  $\{x_v; t_v\}$  avec  $\{x_v\} \in \lambda_{\diamond}(T)$  et  $\{t_v\} \in \chi_{\blacktriangle}(T)$ . Ainsi, pour tout lacet  $f \in \text{Operad}(\diamond; O_c)$  et pour tout  $\{c\}$ -arbre planaire  $T$  à  $n$  feuilles, on définit par itération l'application :

$$\begin{aligned} \xi_{T;c}^f : \mathcal{B}\diamond(T) &\rightarrow O(n; c), \\ \{x_v; t_v\} &\mapsto f_{|r|}(x_r; t_r) \left( \xi_{T_1;c}^f(\{x^1; t^1\}), \dots, \xi_{T_{|r|};c}^f(\{x^{|r|}; t^{|r|}\}) \right), \end{aligned}$$

avec  $T_i$  le sous-arbre de  $T$  ayant pour tronc la  $i$ -ème entrée de la racine. On dispose d'un ordre partiel sur l'ensemble des  $\{c\}$ -arbres donné par  $T_1 < T_2$  si  $T_1$  peut être obtenu à partir de  $T_2$  en contractant des arêtes internes. On notera  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble partiellement ordonné constitué des arbres à  $n$  feuilles. L'espace  $\mathcal{B}\diamond$  est construit comme la colimite :

$$\mathcal{B}\diamond(n) := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_n} \mathcal{B}\diamond(T).$$

Par construction, la structure opéradique de  $\diamond$  induit une structure de  $\mathcal{A}s_{>0}$ -bimodule sur  $\mathcal{B}\diamond$  et l'application  $\xi_c^f := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_n} \xi_{T;c}^f$  est un morphisme de bimodules.

Comme on dispose des homéomorphismes  $\mathcal{W}\mathcal{A}(n; c) \cong \mathcal{W}\mathcal{A}(n; o) \cong \diamond(n)$ , un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}ct_{>0}$  en tant que bimodule est donné par la collection :

$$\mathcal{B}\diamond_{\{o;c\}}(n; c) = \mathcal{B}\diamond_{\{o;c\}}(n; o) = \mathcal{B}\diamond(n) \quad \text{pour } n > 0,$$

et l'ensemble vide pour les autres configurations d'entrées. De la même manière que dans le cas non-coloré, on peut construire une application :

$$\xi : \Omega \text{Operad}_{\{o;c\}}(\mathcal{W}\mathcal{A}; O) \rightarrow \text{Bimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\mathcal{B}\diamond_{\{o;c\}}; O) \simeq \text{Bimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}^h(\mathcal{A}ct_{>0}; O),$$

envoyant un lacet  $f$  vers le couple  $(\xi_c; \xi_o)$ . Pour décrire l'application  $\xi_o$ , on a besoin d'une décomposition de  $\mathcal{B}\diamond_{\{o;c\}}(n; o)$  en polytopes indexée par des  $\{o; c\}$ -arbres planaires vérifiant la condition (3.6).

Posons  $\mathcal{T}'_n$  l'ensemble partiellement ordonné constitué des  $\{o; c\}$ -arbres planaires à  $n$  feuilles vérifiant la condition (3.6), avec  $T_1 < T_2$  si  $T_1$  peut être obtenu à partir de  $T_2$  en contractant des arêtes internes. Pour  $T \in \mathcal{T}'_n$ , on définit l'espace  $\mathcal{B}\diamond_{\{o;c\}}(T)$  comme le produit des deux espaces :

$$\triangleright \lambda_{\diamond}(T) = \prod_{v \in V(T)} \mathcal{W}\mathcal{A}(n; e_0(v)),$$

$$\triangleright \chi_{\blacktriangle}(T) = \{\{t_v\}_{v \in V(T)} \mid t_v \in [0, 1] \text{ et } t_{v_1} \leq t_{v_2} \text{ si } v_1 < v_2\} \subset [0, 1]^{|V(T)|}.$$

Ainsi, pour tout lacet  $f \in \text{Operad}_{\{o;c\}}(\mathcal{W}\mathcal{A}; O)$  et pour tout élément  $T \in \mathcal{T}'_n$ , on définit l'application :

$$\begin{aligned} \xi_{T;o}^f : \mathcal{B}\diamond_{\{o;c\}}(T) &\rightarrow O(n; o), \\ \{x_v; t_v\} &\mapsto f_{|r|;o}(x_r; t_r) \left( \xi_{T_1;c}^f(\{x^1; t^1\}), \dots, \xi_{T_{|r|-1};c}^f(\{x^{|r|-1}; t^{|r|-1}\}), \xi_{T_{|r|};o}^f(\{x^{|r|}; t^{|r|}\}) \right), \end{aligned}$$

Au final, le couple d'applications  $(\xi_c^f; \xi_o^f)$ , avec  $\xi_o^f := \bigcup_{T \in \mathcal{T}'_n} \xi_{T;o}^f$ , forme un morphisme de bimodules colorés. En utilisant les mêmes arguments que Turchin, on peut montrer que  $\xi$  est une équivalence faible à condition que les espaces  $O(1; c)$  et  $O(1; o)$  soient contractiles.  $\square$

*Remarque 3.4.2.* Dans [37], Robertson a démontré une version plus générale de la proposition 3.4.1 en étendant le résultat pour des opérades colorées autres que  $\mathcal{A}ct$ . Pour cela, elle utilise une méthode moins combinatoire basée sur les travaux de Dwyer-Hess [14].

**Théorème 3.4.3.** [13] Soit  $\eta : \mathcal{A}ct \rightarrow O$  un morphisme d'opérades colorées avec  $O(0; c) \simeq O(1; c) \simeq *$  et  $O(1; o) \simeq *$ . Si  $(O_c; O_o)$  désigne le couple d'espaces semi-cosimpliciaux correspondant à  $\eta$  alors la paire  $(sTot(O_c); sTot(O_o))$  est faiblement équivalent à une  $SC_2$ -algèbre explicite :

$$\left( \Omega^2 \text{Operad}^h(\mathcal{A}s_{>0}; O_c); \Omega^2 \left( \text{Operad}^h(\mathcal{A}s_{>0}; O_c); \text{Operad}_{\{0; c\}}^h(\mathcal{A}ct_{>0}; O) \right) \right).$$

*Démonstration.* D'après le théorème 2.2.25,  $sTot(O_c)$  est faiblement équivalent à l'espace de lacets double  $\Omega^2 \text{Operad}^h(\mathcal{A}s_{>0}; O_c)$ . Pour démontrer la seconde équivalence faible, remarquons que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Omega \text{Operad}_{\{0; c\}}(\mathcal{W}\mathcal{A}; O) & \xrightarrow{\xi} & \text{Bimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\square; O) \\ \Omega(p_2) \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \Omega \text{Operad}(\square; O_c) & \xrightarrow{\xi_c} & \text{Bimod}_{\mathcal{A}s_{>0}}(\square_c; O_c) \end{array}$$

avec  $p_1$  et  $p_2$  les applications issues de la restriction à la couleur  $c$  tandis que  $\xi$  et  $\xi_c$  sont les équivalences faibles introduites dans la preuve de la proposition 3.4.1. Comme les fibres homotopiques commutent avec les limites homotopiques finies, on a la succession d'équivalences faibles :

$$\begin{aligned} \Omega \left( \text{Bimod}_{\mathcal{A}s_{>0}}(\square_c; O_c); \text{Bimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\square; O) \right) &\simeq \text{hofib} \left( \text{Bimod}_{\mathcal{A}ct_{>0}}(\square; O) \xrightarrow{p_1} \text{Bimod}_{\mathcal{A}s_{>0}}(\square_c; O_c) \right), \\ &\simeq \text{hofib} \left( \Omega \text{Operad}_{\{0; c\}}(\mathcal{W}\mathcal{A}; O) \xrightarrow{\Omega(p_2)} \Omega \text{Operad}(\square; O_c) \right), \\ &\simeq \Omega \text{hofib} \left( \text{Operad}_{\{0; c\}}(\mathcal{W}\mathcal{A}; O) \xrightarrow{p_2} \text{Operad}(\square; O_c) \right), \\ &\simeq \Omega^2 \left( \text{Operad}(\square; O_c); \text{Operad}_{\{0; c\}}(\mathcal{W}\mathcal{A}; O) \right), \\ &\simeq \Omega^2 \left( \text{Operad}^h(\mathcal{A}s_{>0}; O_c); \text{Operad}_{\{0; c\}}^h(\mathcal{A}ct_{>0}; O) \right). \end{aligned}$$

□

## Application à l'espace des entrelacs

Dans une série d'articles [41, 42, 43], Sinha a démontré que l'espace des longs nœuds dans  $\mathbb{R}^n$  modulo les immersions, noté  $\mathcal{L}_{1;n}$ , dispose d'un remplacement cosimplicial à condition que la dimension de l'espace d'arrivée soit strictement supérieure à 3. Ce remplacement cosimplicial provient d'une opérade multiplicative, appelée l'opérade de Kontsevich, qui fut initialement introduite dans le but d'avoir une résolution cofibrante de l'opérade des petits cubes. Grâce à cela, on sait identifier l'espace  $\mathcal{L}_{1;n}$  à un espace de lacets double explicite.

Par la suite, Munson et Volic ont démontré dans [35] que l'espace des longs entrelacs modulo les immersions, noté  $\mathcal{L}_{k;n}$ , possède aussi une résolution cosimpliciale pouvant s'exprimer comme un "décalage" de l'opérade de Kontsevich. L'objet ainsi obtenu ne possède pas de structure opéradique. Cependant, Dwyer et Hess ont montré dans [15] qu'il est muni d'une structure de bimodule sous l'opérade associative. Par conséquent,  $\mathcal{L}_{k;n}$  a le type d'homotopie d'un espace de lacets à condition que  $n > 3$ .

Dans ce chapitre, on rappelle la construction de l'opérade de Kontsevich et ses liens avec les espaces de nœuds et d'entrelacs. Ensuite on montrera que le couple  $(\mathcal{L}_{1;n}; \mathcal{L}_{k;n})$  est faiblement équivalent à une  $SC_2$ -algèbre explicite. On verra que ce résultat découle du fait qu'on peut construire une  $SC_2$ -algèbre à partir d'une opérade symétrique multiplicative.

### 4.1 Espace des longs nœuds et opérade de Kontsevich

L'espace des longs nœuds,  $Emb_c(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ , est constitué des plongements coïncidant avec le plongement standard,  $x \mapsto (x, 0, \dots, 0)$ , en dehors d'un compact. Lorsque  $n \geq 3$ , Budney montre dans [8] que cet espace est une  $C_2$ -algèbre et donne une interprétation de l'opération commutative à homotopie près. Le produit provient de la concaténation de deux nœuds tandis que la commutativité à homotopie près s'interprète comme le fait de "glisser" un nœud dans l'autre.

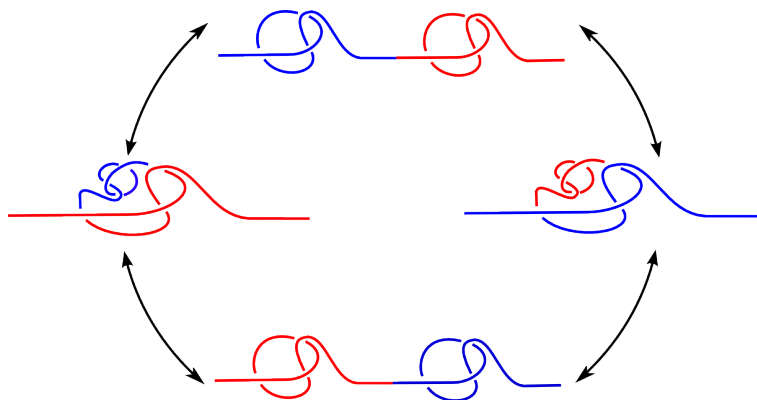


FIGURE 4.1 – Illustration de la commutativité du produit de deux nœuds de trèfle.



A partir d'un espace topologique pointé  $(X; *)$ , on peut construire un espace cosimplicial  $X^\bullet := \{X^n = X^{\times n}\}_{n \geq 0}$  dont les cofaces et les codégénérescences sont définies de la façon suivante :

$$s^i : X^n \rightarrow X^{n-1} \quad ; \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n) \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\},$$

$$d^i : X^n \rightarrow X^{n+1} \quad ; \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} (*, x_1, \dots, x_n) & \text{pour } i = 0, \\ (x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_n) & \text{pour } i \in \{1, \dots, n\}, \\ (x_1, \dots, x_n, *) & \text{pour } i = n+1. \end{cases}$$

Si on désigne le pôle sud  $*_S$  comme point base de la sphère  $S^{n-1}$  alors Sinha montre dans [43] qu'un remplacement cosimplicial de  $Emb_c(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  est donné par le produit de  $(S^{n-1})^\bullet$  avec l'espace cosimplicial associé à l'opérade multiplicative de Kontsevich. L'objet cosimplicial ainsi obtenu ne provient pas d'une opérade multiplicative à cause du facteur  $(S^{n-1})^\bullet$ . Pour remédier à ce problème, notons que  $(S^{n-1})^\bullet$  est une résolution cosimpliciale de l'espace des longues immersions, noté  $Imm_c(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ , constitué des immersions coïncidant avec le plongement standard en dehors d'un compact. On va étudier la fibre homotopique :

$$\mathcal{L}_{1;n} := \text{hofib}(Emb_c(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) \longrightarrow Imm_c(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)). \quad (4.1)$$

En prenant la fibre homotopique, on élimine les informations provenant de l'espace tangent dans  $Emb_c(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ . Ces informations correspondent exactement au facteur  $(S^{n-1})^\bullet$ . Sinha obtient ainsi le résultat suivant :

**Théorème 4.1.1.** [42, Corollaire 1.2] *Lorsque  $n > 3$ , la totalisation homotopique de l'espace cosimplicial associé à l'opérade de Kontsevich est faiblement équivalent à  $\mathcal{L}_{1;n}$ .*

Il est possible de définir les opérades réduites comme un foncteur covariant partant d'une catégorie d'arbres à valeurs dans une catégorie symétrique monoïdale. Dans [42], Sinha a pu ainsi donner une version plus combinatoire de l'opérade de Kontsevich dans le cas non symétrique en passant par l'opérade "choose-two". Dans cette section, on rappelle la construction de Sinha et on introduit l'action du groupe des permutations sur l'opérade de Kontsevich. On commence par introduire la catégorie d'arbres qui va encoder la structure des opérades réduites.

**Définition 4.1.2.** On introduit la catégorie  $\Gamma$  dont les objets sont les arbres planaires sans sommet univalent. On dispose d'un morphisme  $f_T : T'$  entre les arbres planaires  $T$  et  $T'$  si  $T'$  peut être obtenu à partir de  $T$  en contractant un ensemble d'arêtes autres que le tronc. On notera  $\Gamma_n$  la sous-catégorie constituée des arbres planaires à  $n$  feuilles. Cette sous-catégorie possède un objet terminal, noté  $\gamma_n$ , donné par la  $n$ -corolle. Par convention  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  sont constitués d'un seul objet.

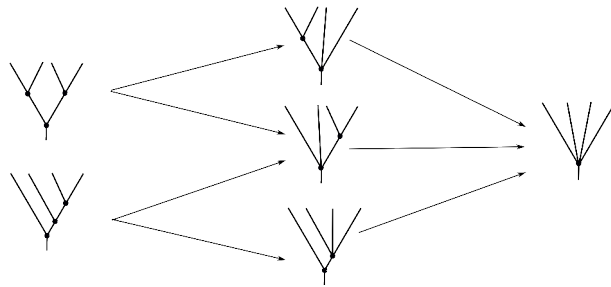


FIGURE 4.2 – Exemples de morphismes dans  $\Gamma_4$ .

**Définition 4.1.3.** Une opérade réduite dans une catégorie symétrique monoïdale  $(C; \otimes; \mathbb{I})$  est la donnée d'un foncteur covariant  $\mathcal{O} : \Gamma \rightarrow C$  vérifiant les conditions suivantes :

- (1)  $\mathcal{O}(T) := \bigotimes_{v \in V(T)} \mathcal{O}(\gamma_{|v|})$ , (2)  $\mathcal{O}(\gamma_1) = \mathcal{O}(\gamma_0) = \mathbb{I}$ ,
- (3) si une arête  $e$ , autre que le tronc, est l'unique arête entrante d'un sommet  $v'$  alors l'application issue de la contraction de  $e$  notée  $\mathcal{O}(f_{|e|})$  est l'identité sur le facteur  $\bigotimes_{v \neq v'} \mathcal{O}(\gamma_{\sigma_v})$  tensorisé avec l'isomorphisme  $\mathbb{I} \otimes -$  via la décomposition (1),

(4) si  $S$  est un sous-arbre de  $T$  et  $f_{S;S'}$ ,  $f_{T;T'}$  sont deux morphismes contractant les mêmes arêtes alors

$$\mathcal{O}(f_{T;T'}) = \mathcal{O}(f_{S;S'}) \otimes id,$$

*Remarque 4.1.4.* Les définitions 1.1.10 et 4.1.3 sont équivalentes. En effet, à partir d'un foncteur covariant  $\mathcal{O} : \Gamma \rightarrow \mathcal{C}$ , on définit la collection  $\{\mathcal{O}(n) := \mathcal{O}(\gamma_n)\}_{n \geq 0}$  d'objets de  $\mathcal{C}$ . Ainsi définie, la collection est pointée par l'unique élément de  $\mathcal{O}(\gamma_1) = \mathbb{I}$ . Les morphismes de la catégorie  $\Gamma$  induisent les compositions opéradiques. La condition (4) garantit les axiomes opéradiques tandis que la condition (2) implique que l'opérade est réduite. La condition (3) est équivalente à l'axiome de l'unité.

#### Exemple 4.1.5. L'opérade associative

Soit  $(\mathcal{C}; \otimes; \mathbb{I})$  une catégorie monoïdale. Le foncteur correspondant à l'opérade associative, noté  $\mathcal{A}s : \Gamma \rightarrow \mathcal{C}$ , est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{A}s(\gamma_n) = \mathbb{I} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}s(f_{T;T'}) = id.$$

*Notation 4.1.6.* La catégorie des ensembles finis est notée  $FSets$ . Si  $S$  est un objet de  $FSets$  alors  $S_+ := S \sqcup \{+\}$  est l'ensemble obtenu à partir de  $S$  en ajoutant un point base. On désignera par  $C_k(S)$  l'ensemble des  $k$ -uplets distincts formés à partir de  $S$  :

$$C_k(S) := \{(s_i) \in S^{\times k} \mid s_i \neq s_j \text{ si } i \neq j\}.$$

**Définition 4.1.7.** Soit  $T$  un arbre planaire. Le sommet joint entre les feuilles indexées par  $i$  et  $j$  est le premier sommet commun aux chemins reliant les deux feuilles à la racine. On définit l'application qui associe à un couple de feuilles  $(i; j)$  le couple d'entiers  $(J_v(i); J_v(j))$  avec  $v$  le joint entre  $i$  et  $j$  tandis que  $J_v(i)$  est la numérotation de l'arête entrante de  $v$  connectée à la feuille  $i$  issue de la structure planaire de l'arbre.

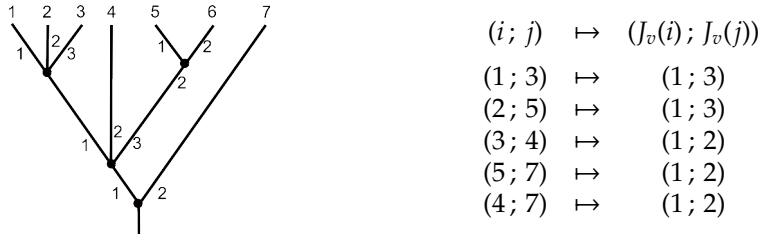


FIGURE 4.3 – Illustration de l'application.

#### Définition 4.1.8. L'opérade "choose-two"

Soit  $T$  un arbre planaire. L'opérade "choose-two" est définie comme le foncteur  $\beta : \Gamma \rightarrow FSets^{op}$  vérifiant :

$$\triangleright \beta(T) = \bigvee_{v \in V(T)} C_2(\{1, \dots, |v|\})_+$$

$$\triangleright \beta(T \rightarrow \gamma_{\sigma_T}) : C_2(\{1, \dots, |T|\})_+ \rightarrow \bigvee_{v \in V(T)} C_2(\{1, \dots, |v|\})_+ ; \begin{cases} (i; j) & \mapsto (J_v(i); J_v(j)), \\ + & \mapsto +, \end{cases}$$

Si  $X$  est un espace topologique alors on peut lui associer le foncteur  $X^- : FSets^{op} \rightarrow Top$  envoyant un ensemble fini  $S$  vers l'espace topologique  $X^S$  constitué des familles  $\{x_s\}_{s \in S}$  de points de  $X$  indexés par  $S$ . Si  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est un morphisme d'ensembles finis, alors on a :

$$X^f : X^{S_2} \rightarrow X^{S_1} ; \{x_s\}_{s \in S_2} \mapsto \{x_{f(s)}\}_{s \in S_1}.$$

A partir de l'espace topologique  $X$ , on construit l'opérade topologique  $Op(X)$  comme le foncteur covariant :

$$\Gamma \xrightarrow{\beta} FSets^{op} \xrightarrow{X^-} Top. \quad (4.2)$$

Sinha construit l'opérade de Kontsevich comme une sous-opérade de  $Op(S^{n-1})$ , pour  $n \geq 2$ . L'opérade de Kontsevich est initialement obtenue comme une compactification de l'espace de configurations :

$$\widetilde{C}_k(\mathbb{R}^n) := \{(x_i) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\} / \sim,$$

où la relation d'équivalence est engendrée par les translations et les dilations. La compactification est définie grâce à l'application :

$$\begin{aligned} \pi_k : \widetilde{C}_k(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow (S^{n-1})^{C_2(\underline{k})} \\ (x_i) &\longmapsto \left( \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} \right)_{(i,j)} \end{aligned}$$

avec  $\underline{k} := \{1, \dots, k\}$ . Le  $k$ -ième espace composant l'opérade de Kontsevich, noté  $\mathcal{K}_n(k)$ , est construit comme l'adhérence de l'image de l'application  $\pi_k$ . Pour décrire la structure opéradique de  $\mathcal{K}_n$ , on va utiliser l'opérade "choose-two". Pour cela, on a besoin d'une caractérisation des points de  $\mathcal{K}_n(k)$  comme sous-espace de  $(S^{n-1})^{C_2(\underline{k})}$ .

**Définition 4.1.9.** *i)* Une  $k$ -chaîne dans un ensemble  $S$  est la donnée d'une collection de couples de la forme

$$\{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k)\}$$

avec  $i_j \in S$  et  $i_j \neq i_{j+1}$ . Une  $k$ -chaîne est appelée  $k$ -lacet si  $i_k = i_0$ . Une chaîne est dite *stricte* si elle ne contient aucun lacet. L'inverse d'une  $k$ -chaîne  $\{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k)\}$  est obtenue en prenant la  $k$ -chaîne  $\{(i_k, i_{k-1}), (i_{k-1}, i_{k-2}), \dots, (i_1, i_0)\}$ .

*ii)* Un point  $(u_{ij}) \in (S^{n-1})^{C_2(\underline{k})}$  est dit "*three dependent*" si pour tout 3-lacet  $L$  il existe des scalaires  $a_{ij} \geq 0$ , non tous nuls, tel que :

$$\sum_{(i,j) \in L} a_{ij} u_{ij} = 0.$$

*iii)* Si  $S$  est un ensemble ordonné de cardinal 4 alors on peut associer à chaque 3-chaîne stricte  $C$ , une permutation  $\sigma(C)$  encodant l'ordre d'apparition des éléments.

$$\text{Ex : Si } S = \{1, 2, 3, 4\} \text{ et } C = \{23, 31, 14\} \text{ alors } \sigma(C) = (2314).$$

On définit le complémentaire d'une 3-chaîne stricte  $C$  comme l'unique 3-chaîne stricte  $C^*$  (à inversement près) issue des paires d'indices non-utilisées dans  $C$ .

$$\text{Ex : Si } C = \{23, 31, 14\} \text{ alors } \begin{cases} C^* = \{12, 24, 43\}, \\ C^* = \{34, 42, 21\}. \end{cases}$$

*iv)* Un point  $(u_{ij}) \in (S^{n-1})^{C_2(\underline{k})}$  est dit "*four consistent*" si  $\forall S \subset \{1, \dots, k\}$  de cardinal 4 et  $v, w \in S^{n-1}$  on a :

$$\sum_{C \in \mathcal{C}^3(S)} (-1)^{\text{sign}(\sigma(C))} \left( \prod_{(i,j) \in C} u_{ij} \cdot v \right) \left( \prod_{(i,j) \in C} u_{ij} \cdot w \right) = 0,$$

avec  $\mathcal{C}^3(S)$  l'ensemble des 3-chaînes strictes modulo les inverses.

*v)* Un point  $(u_{ij}) \in (S^{n-1})^{C_2(\underline{k})}$  est dit *antisymétrique* si  $u_{ij} = -u_{ji}$  pour  $i < j$ .

**Proposition 4.1.10.** [42, Théorème 4.4]  $\mathcal{K}_n(k)$  est le sous-espace de  $(S^{n-1})^{C_2(\underline{k})}$  constitué des points antisymétriques, three dependent et four consistent.

Sinha démontre dans [42] que les points antisymétriques, three dependent et four consistent sont préservés par la structure opéradique de  $(S^{n-1})^{C_2(\underline{k})}$  issue de la composée (4.2). Donc  $\mathcal{K}_n$  est une sous-opérade de  $(S^{n-1})^{C_2(\underline{k})}$  multiplicative et le morphisme d'opérade  $\eta : \mathcal{A}_S \rightarrow \mathcal{K}_n$  envoie  $*_k$  vers le point  $(u_{ij}) \in \mathcal{K}_n(k)$  défini par  $u_{ij} = *_S$  pour  $i < j$ . De plus, le groupe des permutations  $\Sigma_k$  agit naturellement sur les points  $(u_{ij}) \in \mathcal{K}_n(k)$ . En effet, pour  $\sigma \in \Sigma_k$ , on définit  $u \cdot \sigma$  de la façon suite :

$$(u \cdot \sigma)_{ij} = u_{\sigma(i)\sigma(j)}.$$

Comme la permutation d'une 3-chaîne (stricte) est toujours une 3-chaîne (stricte),  $u \cdot \sigma$  est antisymétrique, three dependent et four consistent. De plus, cette action est compatible avec la composition opéradique. D'où la proposition suivante :

**Proposition 4.1.11.** *L'opérade de Kontsevich  $\mathcal{K}_n$  est une opérade symétrique réduite multiplicative dont la structure opéradique provient de l'opérade "choose-two".*

## 4.2 $\mathcal{SC}_2$ -algèbre obtenue à partir d'une opérade symétrique

On va démontrer dans cette section que l'on peut extraire un couple d'espaces faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_2$ -algèbre explicite à partir d'une opérade topologique symétrique multiplicative. On utilisera pour cela la définition 1.1.10 des opérades symétriques  $O$ . Cela revient à se donner une collection symétrique pointée  $\{O(n)\}$  munie de compositions opéradiques.

**Définition 4.2.1.** Soit  $O$  une opérade symétrique. Pour  $k > 0$ , on définit  $\Phi_k(O)$  comme la collection :

$$\Phi_k(O)(n) = O(k \times n), \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Lorsque  $k > 1$ ,  $\Phi_k(O)$  n'est pas nécessairement une opérade. En effet, si l'on suppose que  $\Phi_k(O)$  possède une telle structure alors l'espace  $\Phi_k(O)(1) = O(k)$  doit être un monoïde topologique associatif et donc avoir le type d'homotopie d'un espace de lacets. Cependant, dans le cas particulier de l'opérade de Kontsevich, Sinha a montré dans [41] que l'espace  $\mathcal{K}_n(k)$  est faiblement équivalent à  $\widetilde{C}_k(\mathbb{R}^n)$ . Or, on sait que ce dernier n'a pas le type d'homotopie d'un espace de lacets grâce au calcul d'homologie des espaces de configurations [9].

On va néanmoins montrer que  $\Phi_k(O)$  possède une structure de  $O$ -bimodule. En utilisant la structure opéradique de  $O$ , la structure de bimodule à droite sous l'opérade  $O$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \circ^i : \Phi_k(O)(n) \times O(m) &\longrightarrow \Phi_k(O)(n + m - 1), \\ (x; y) &\longmapsto (\cdots ((x \circ_{i+(k-1)n} y) \circ_{i+(k-2)n} y) \cdots \circ_i y), \end{aligned} \quad (4.3)$$

On peut interpréter un point de  $O(n)$  comme une opération à  $n$  paramètres tandis qu'un point de  $\Phi_k(O)(n)$  s'interprète comme une opération avec  $k$  blocs de  $n$  paramètres. Ainsi, la structure (4.3) consiste à greffer le point  $y$  sur la  $i$ -ème entrée de chacun des  $k$  blocs.

**Définition 4.2.2.** On fixe les entiers naturels  $k, n_1, \dots, n_m$ . Un entier  $p \in \{1, \dots, k(n_1 + \dots + n_m)\}$  s'écrit de manière unique sous la forme  $p = l_1 n_1 + l_2 n_2 + \dots + l_m n_m + q$ , avec  $l_i \in \{0, \dots, k\}$ , vérifiant :

- ▷ si  $l_i \neq 0$  alors  $l_j = k$  pour  $j < i$ ,
- ▷ si  $l_i \neq k$  alors  $l_j = 0$  pour  $j > i$ ,
- ▷ si  $S = \max\{i \mid l_i = k\}$  alors  $q \leq n_{S+1}$ .

Via cette écriture, on définit la permutation  $\sigma(k; n_1, \dots, n_m) \in \Sigma_{k(n_1 + \dots + n_m)}$  par la formule :

$$p \longmapsto l_s(n_1 + \dots + n_m) + n_1 + \dots + n_{s-1} + q,$$

avec  $s = \begin{cases} 1 & \text{si tous les } l_i \text{ sont nuls,} \\ \min\{i \mid l_i \neq 0\} & \text{sinon.} \end{cases}$

Par exemple, lorsque  $m = 2$ , on dispose de  $k$  blocs de  $n_1$  éléments suivis de  $k$  blocs de  $n_2$  éléments. La permutation  $\sigma(k; n_1, n_2)$  va intercaler les blocs comme le montre la figure (4.4).

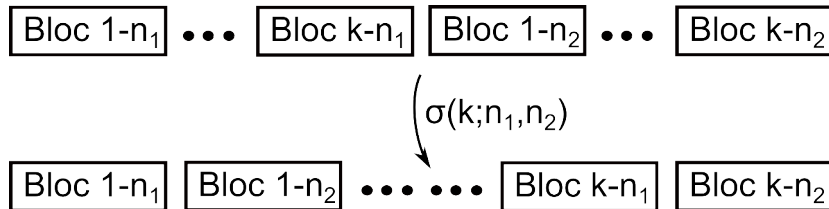


FIGURE 4.4 – Illustration de la permutation  $\sigma(k; n_1, n_2)$ .

En utilisant la symétrie de l'opérade  $O$ , on définit la structure de bimodule à gauche de  $\Phi_k(O)$  via la formule suivante :

$$\begin{aligned} \gamma_l : O(m) \times \Phi_k(O)(n_1) \times \cdots \times \Phi_k(O)(n_m) &\longrightarrow \Phi_k(O)(n_1 + \dots + n_m), \\ (x; y_1, \dots, y_m) &\longmapsto \gamma(x; y_1, \dots, y_m) \cdot \sigma(k; n_1, \dots, n_m). \end{aligned} \quad (4.4)$$

**Proposition 4.2.3.** *Soit  $O$  une opérade symétrique. Les opérations (4.3) et (4.4) font de  $\Phi_k(O)$  un  $O$ -bimodule.*

*Démonstration.* L'axiome de l'unité **C1** est vérifié grâce à la structure opéradique de  $O$  et au fait que  $\sigma(1; n) \in \Sigma_n$  correspond à la permutation triviale. De plus, l'axiome de l'associativité à droite **C2** est vérifié grâce aux axiomes opéradiques. L'axiome **C3** provient d'une propriété de compatibilité entre la structure opéradique  $\gamma$  et la structure de groupe  $\circ$  des composantes de  $\Sigma$  :

$$\sigma(k; n_1^1 + \dots + n_{i_1}^1, \dots, n_1^p + \dots + n_{i_p}^p) \circ (\gamma(id_{\Sigma_p}; \sigma(k; n_1^1, \dots, n_{i_1}^1), \dots, \sigma(k; n_1^p, \dots, n_{i_p}^p))) = \sigma(k; n_1^1, \dots, n_{i_p}^p).$$

Enfin, l'axiome de compatibilité **C4** provient de la propriété suivante :

$$\gamma\left(\sigma(k; n_1, \dots, n_p); \underbrace{id_{\Sigma_{m_1}}, \dots, id_{\Sigma_{m_p}}}_{\text{on répète k fois le bloc}}, \dots, \underbrace{id_{\Sigma_{m_1}}, \dots, id_{\Sigma_{m_p}}}\right) = \sigma(k; m_1^1 + \dots + m_{i_1}^1, \dots, m_1^p + \dots + m_{i_p}^p).$$

□

Au final, la séquence  $\Phi_k(O)$  possède une structure de  $O$ -bimodule mais ce n'est pas suffisant pour construire une  $\mathcal{SC}_2$ -algèbre à partir du couple  $(O; \Phi_k(O))$ . On va maintenant supposer que l'opérade  $O$  est multiplicative. Cela signifie qu'il existe un morphisme d'opérades non symétriques  $\eta_1 : \mathcal{As} \rightarrow O$ . Grâce à cette application, on dispose du morphisme :

$$\eta_2 : O \longrightarrow \Phi_k(O) ; x \longmapsto \eta_1(*_k)(x, \dots, x). \quad (4.5)$$

Par construction, l'application  $\eta_2$  préserve uniquement la structure de  $O$ -bimodule à droite. On ne peut donc pas utiliser le théorème 3.3.6 avec le couple de morphismes  $(\eta_1; \eta_2)$ . On a néanmoins la proposition suivante :

**Proposition 4.2.4.** *Soient  $O$  une opérade symétrique multiplicative et  $\eta_1 : \mathcal{As} \rightarrow O$  le morphisme d'opérades associé. Si  $\eta_2$  désigne l'application (4.5) alors la composée :*

$$\eta_2 \circ \eta_1 : \mathcal{As} \rightarrow \Phi_k(O),$$

*est un morphisme de  $\mathcal{As}$ -bimodules.*

*Démonstration.* Comme la collection  $\Phi_k(O)$  est un  $O$ -bimodule, elle possède aussi une structure de bimodule sous l'opérade  $\mathcal{As}$  via le morphisme d'opérades  $\eta_1$ . Comme l'application  $\eta_2$  préserve la structure de bimodule à droite, la composée  $\eta_2 \circ \eta_1$  est un morphisme de  $\mathcal{As}$ -bimodule à droite. Il reste donc à vérifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{As}(m) \times \mathcal{As}(n_1) \times \dots \times \mathcal{As}(n_m) & \longrightarrow & \mathcal{As}(m) \times \Phi_k(O)(n_1) \times \dots \times \Phi_k(O)(n_m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{As}(n_1 + \dots + n_m) & \longrightarrow & \Phi_k(O)(n_1 + \dots + n_m) \end{array}$$

Or, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_1\left(*_m ; \eta_2 \circ \eta_1(*_{n_1}), \dots, \eta_2 \circ \eta_1(*_{n_m})\right) &= \left[ *_m \left( *_k(*_{n_1}, \dots, *_{n_1}), \dots, *_k(*_{n_m}, \dots, *_{n_m}) \right) \right] \cdot \sigma(k; n_1, \dots, n_m) \\ &= *_k \left( *_m(*_{n_1}, \dots, *_{n_m}), \dots, *_k(*_{n_1}, \dots, *_{n_m}) \right) \\ &= \eta_2 \left( *_m(*_{n_1}, \dots, *_{n_m}) \right). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

D'après les résultats de Dwyer-Hess [14] et Turchin [49], on sait que le bimodule  $\Phi_k(O)$  possède une structure semi-cosimpliciale et que sa semi-totalisation est faiblement équivalente à un espace de lacets explicite. A partir du couple  $(O; \Phi_k(O))$ , on construit l'opérade colorée  $\Theta$  définie par :

$$\Theta(n; c) = O(n), \text{ pour } n \geq 0 \quad ; \quad \Theta(n; o) = \Phi_k(O)(n-1), \text{ pour } n > 0, \quad (4.6)$$

et l'ensemble vide pour les autres configurations d'entrées. La structure opéradique de  $\Theta$  est similaire à la construction de l'opérade (3.7). Tous les axiomes sont vérifiés y compris l'axiome de l'unité. En effet, l'unité de  $\Theta(1; o) = O(0)$  est obtenue comme l'image de  $*_0$  via l'application  $\eta_1$ . Si  $x \in \Theta(n; o)$  alors on a les égalités :

$$x \circ_n \eta_1(*_0) = \eta_1(*_2)(x; \eta_1(*_0)) = \sigma(k; n, 0) \cdot \eta_1(*_2)(x; \eta_1(*_0)) = x. \quad (4.7)$$

De plus, on dispose d'un morphisme d'opérades :

$$\eta : \mathcal{Act} \rightarrow \Theta ; \begin{cases} \eta(*_i; c) = \eta_1(*_i), & \text{pour } i \geq 0, \\ \eta(*_i; o) = \eta_2 \circ \eta_1(*_{i-1}), & \text{pour } i > 0. \end{cases}$$

En appliquant le théorème 3.4.3, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 4.2.5.** *Soient  $O$  une opérade symétrique multiplicative et  $\Theta$  l'opérade colorée associée (4.6). Si les espaces  $O(0)$  et  $O(1)$  sont contractiles alors le couple  $(sTot(O); sTot(\Phi_k(O)))$  est faiblement équivalent à une  $SC_2$ -algèbre explicite :*

$$\left( \Omega^2 Operad^h(\mathcal{As}_{>0}; O) ; \Omega^2 \left( Operad^h(\mathcal{As}_{>0}; O) ; Operad_{[0,c]}^h(\mathcal{Act}_{>0}; \Theta) \right) \right).$$

### 4.3 Étude de l'espace des longs entrelacs

L'espace des longs entrelacs à  $k > 1$  brins, noté  $Emb_c(\sqcup_k \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ , est constitué des plongements dont la restriction à la  $i$ -ème composante coïncide avec le plongement  $x \mapsto (x, i - 1, 0, \dots, 0)$  en dehors d'un compact. Contrairement à l'espace des longs nœuds, l'espace des longs entrelacs à  $k$  brins possède uniquement une structure d'algèbre sous l'opérade  $C_1$ . On dispose donc d'une opération associative à homotopie près qui peut s'interpréter comme la concaténation de deux longs entrelacs à  $k$  brins.

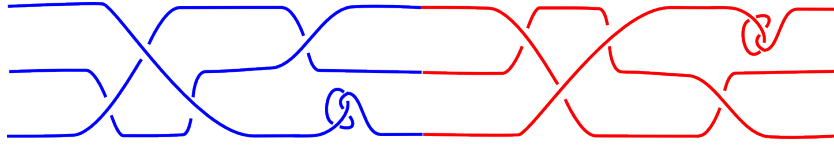


FIGURE 4.5 – Exemple de la concaténation de deux longs entrelacs à 3 brins.

Comme on peut le voir sur la figure 4.5, il semble difficile de permuter les deux entrelacs à cause de l'enchevêtrement des brins. Il existe néanmoins un cas de figure où la concaténation est commutative à homotopie près. On introduit le morphisme d'algèbres associatives à homotopie près :

$$Emb_c(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) \longrightarrow Emb_c\left(\bigsqcup_{i=1}^k \mathbb{R}; \mathbb{R}^n\right), \quad (4.8)$$

qui consiste à prendre  $k$  répliques du même long nœud. L'application (4.8), ainsi définie, est centrale à homotopie près. Cela signifie que la concaténation de deux entrelacs commute à homotopie près si l'un d'eux provient d'un long nœud. Cela suggère que le couple formé par les longs nœuds et entrelacs est une  $SC_2$ -algèbre.

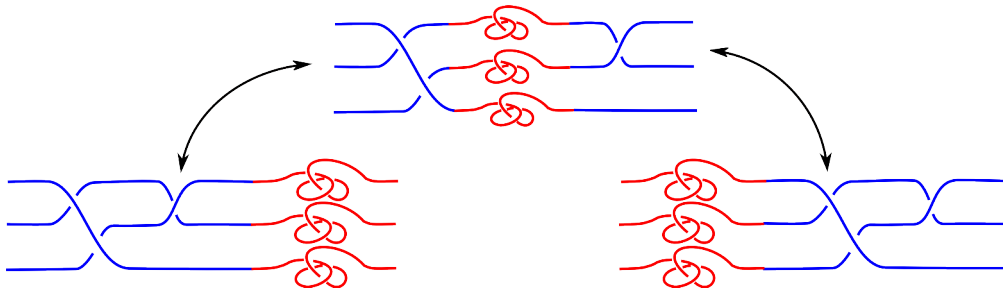


FIGURE 4.6 – Illustration de la commutativité avec le nœud de trèfle.

Munson et Volić ont remarqué dans [35] que l'étude des longs entrelacs à  $k$  brins consistait à itérer  $k$  fois les constructions introduites par Sinha dans [41, 42, 43]. L'analogie des espaces cosimpliciaux, dans le cas des entrelacs à  $k$  brins, est la notion d'espace  $k$ -cosimplicial.

**Définition 4.3.1.** On note  $(\Delta)^k$  le produit  $k$  fois itéré de la catégorie  $\Delta$ . Un *espace  $k$ -cosimplicial* est la donnée d'un foncteur covariant de  $(\Delta)^k$  vers les espaces topologiques. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'entier  $k$ , on notera  $X^{\vec{\bullet}}$  un espace  $k$ -cosimplicial. C'est donc la donnée d'une famille d'espaces :

$$X^{[\vec{p}]}, \quad \text{avec } [\vec{p}] = ([p_1], \dots, [p_k]) \in (\Delta)^k,$$

munie d'applications, appelées cofaces et codégénérescences, notées :

- ▷  $X^{\vec{\bullet}}(id, \dots, d_j^i, \dots, id) : X^{([p_1], \dots, [p_k])} \longrightarrow X^{([p_1], \dots, [p_j+1], \dots, [p_k])}$  pour  $j \in \{1, \dots, k\}$  et  $i \in \{0, \dots, p_j + 1\}$ ,
- ▷  $X^{\vec{\bullet}}(id, \dots, s_j^i, \dots, id) : X^{([p_1], \dots, [p_k])} \longrightarrow X^{([p_1], \dots, [p_j-1], \dots, [p_k])}$  pour  $j \in \{1, \dots, k\}$  et  $i \in \{0, \dots, p_j - 1\}$ ,

vérifiant des relations semblables aux relations cosimpliciales.

**Exemple 4.3.2.** Si  $X^\bullet$  est un espace cosimplicial alors  $X^{\vec{\bullet}}$  désigne l'espace  $k$ -cosimplicial :

$$X^{[\vec{p}]} = X^{p_1} \times \dots \times X^{p_k}, \quad \text{avec } [\vec{p}] = ([p_1], \dots, [p_k]) \in (\Delta)^k.$$

En particulier,  $\Delta^{\vec{\bullet}}$  est l'espace  $k$ -cosimplicial obtenu à partir des simplexes. Inversement, si  $X^{\vec{\bullet}}$  est un espace  $k$ -cosimplicial alors on introduit l'espace cosimplicial diagonal :

$$Diag(X^{\vec{\bullet}})^n := X^{([n], \dots, [n])}, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Les cofaces et les codégénérescences sont définies de la façon suivante :

- ▷  $d^i : Diag(X^{\vec{\bullet}})^n \rightarrow Diag(X^{\vec{\bullet}})^{n+1} \quad ; \quad x \mapsto X^{\vec{\bullet}}(d^i, \dots, d^i)(x), \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, n+1\},$
- ▷  $s^i : Diag(X^{\vec{\bullet}})^n \rightarrow Diag(X^{\vec{\bullet}})^{n-1} \quad ; \quad x \mapsto X^{\vec{\bullet}}(s^i, \dots, s^i)(x), \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}.$

**Définition 4.3.3.** La  $k$ -totalisation d'un espace  $k$ -cosimplicial, noté  $Tot_k(X^{\vec{\bullet}})$ , est l'espace des transformations naturelles de  $\Delta^{\vec{\bullet}}$  vers  $X^{\vec{\bullet}}$ . On notera  $hoTot_k$  le foncteur dérivé associé à la  $k$ -totalisation.

**Proposition 4.3.4.** [52, Proposition 8.1] Soit  $X^{\vec{\bullet}}$  un espace  $k$ -cosimplicial. L'application diagonale  $\Delta \rightarrow (\Delta)^k$  induit une équivalence faible :

$$sTot(Diag(X^{\vec{\bullet}})) \simeq hoTot_k(X^{\vec{\bullet}}).$$

**Définition 4.3.5.** Soient  $O$  une opérade symétrique multiplicative et  $\eta : \mathcal{As} \rightarrow O$  le morphisme d'opérades associé. A partir de  $O$ , on définit l'espace  $k$ -cosimplicial  $O_2^{\vec{\bullet}}$  :

$$O_2^{[\vec{p}]} = O(p_1 + \dots + p_k), \quad \text{avec } [\vec{p}] = ([p_1], \dots, [p_k]) \in (\Delta)^k.$$

Les cofaces et codégénérescences sont données par les formules :

- ▷  $O_2^{\vec{\bullet}}(id, \dots, s_j^i, \dots, id) : O(p_1 + \dots + p_k) \rightarrow O(p_1 + \dots + (p_j - 1) + \dots + p_k),$   
 $x \mapsto x \circ_{p_1 \dots + p_{j-1} + i + 1} \eta(*_0),$
- ▷  $O_2^{\vec{\bullet}}(id, \dots, d_j^i, \dots, id) : O(p_1 + \dots + p_k) \rightarrow O(p_1 + \dots + (p_j + 1) + \dots + p_k),$   
 $x \mapsto \begin{cases} (\eta(*_2) \circ_2 x) \cdot \sigma[p_1 + \dots + p_{j-1}] & \text{si } i = 0, \\ x \circ_{p_1 + \dots + p_{j-1} + i} \eta(*_2) & \text{si } i \in \{1, \dots, p_j\}, \\ (\eta(*_2) \circ_1 x) \cdot \sigma[p_1 + \dots + p_j] & \text{si } i = p_j + 1. \end{cases}$

avec  $\sigma[i]$  la permutation définie par :

$$\sigma[i](j) = \begin{cases} i & \text{si } j = 1, \\ j - 1 & \text{si } 1 < j \leq i, \\ j & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Munson et Volić ont montré que la  $k$ -totalisation homotopique de l'espace  $k$ -cosimplicial provenant du produit de  $(\mathcal{K}_n)_2^{\vec{\bullet}}$  et  $(S^{n-1})^{\vec{\bullet}}$  est faiblement équivalent à l'espace des longs entrelacs. D'après ce qui précède, on a les équivalences faibles :

$$Emb_c\left(\bigsqcup_{i=1}^k \mathbb{R}; \mathbb{R}^n\right) \simeq hoTot_k\left((\mathcal{K}_n)_2^{\vec{\bullet}} \times (S^{n-1})^{\vec{\bullet}}\right) \simeq sTot\left(Diag\left((\mathcal{K}_n)_2^{\vec{\bullet}} \times (S^{n-1})^{\vec{\bullet}}\right)\right).$$

Comme dans le cas des longs nœuds, l'espace cosimplicial  $Diag\left((\mathcal{K}_n)_2^{\vec{\bullet}} \times (S^{n-1})^{\vec{\bullet}}\right)$  ne peut pas provenir d'une opérade multiplicative ou d'un bimodule pointé à cause du facteur  $(S^{n-1})^{\vec{\bullet}}$ . On va donc regarder l'espace des entrelacs à  $k$  brins modulo les longues immersions :

$$\mathcal{L}_{k;n} := hofib\left(Emb_c\left(\bigsqcup_{i=1}^k \mathbb{R}; \mathbb{R}^n\right) \longrightarrow Imm_c\left(\bigsqcup_{i=1}^k \mathbb{R}; \mathbb{R}^n\right)\right).$$

En prenant la fibre homotopique, on élimine le facteur  $(S^{n-1})^{\vec{\bullet}}$ . On obtient ainsi le résultat suivant :

**Théorème 4.3.6.** [35, Théorème 5.17] Lorsque  $n > 3$ ,  $\mathcal{L}_{k;n}$  est faiblement équivalent à  $sTot(Diag((\mathcal{K}_n)_2^{\vec{\bullet}}))$ .

Par ailleurs,  $\mathcal{K}_n$  est une opérade symétrique multiplicative. D'après la proposition 4.2.4, le bimodule  $\Phi_k(\mathcal{K}_n)$  est pointé et possède donc une structure cosimpliciale. La proposition qui suit permet d'identifier la semi-totalisation de  $\Phi_k(\mathcal{K}_n)$  à l'espace des entrelacs  $\mathcal{L}_{k;n}$ .

**Théorème 4.3.7.** Si  $n > 3$  alors le couple  $(\mathcal{L}_{1;n}; \mathcal{L}_{k;n})$  est faiblement équivalent à une  $SC_2$ -algèbre explicite :

$$\left(\Omega^2 Operad^h(\mathcal{A}_{S>0}; \mathcal{K}_n); \Omega^2\left(Operad^h(\mathcal{A}_{S>0}; \mathcal{K}_n); Operad_{\{0,c\}}^h(\mathcal{A}_{\mathcal{T}>0}; \Theta)\right)\right),$$

avec  $\Theta$  l'opérade pointée obtenue à partir du couple  $(\mathcal{K}_n; \Phi_k(\mathcal{K}_n))$  via la construction 4.6.

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{K}_n$  est une opérade symétrique multiplicative,  $\Phi_k(\mathcal{K}_n)$  possède une structure cosimpliciale. Remarquons alors que les objets  $\Phi_k(\mathcal{K}_n)$  et  $Diag((\mathcal{K}_n)_2^{\vec{\bullet}})$  sont isomorphes en tant qu'espaces cosimpliciaux. En effet, on a les égalités suivantes :

$$Diag((\mathcal{K}_n)_2^{\vec{\bullet}})^i = (\mathcal{K}_n)_2^{([i], \dots, [i])} = \mathcal{K}_n(i \times k) = \Phi_k(\mathcal{K}_n)(i).$$

et les structures cosimpliciales coïncident. Il suffit d'appliquer le théorème 4.2.5 au couple  $(\mathcal{K}_n; \Phi_k(\mathcal{K}_n))$  pour obtenir le résultat.  $\square$





## Suites spectrales associées à une opérade pointée

A tout espace semi-cosimplicial  $X^\bullet$ , on peut associer un espace vectoriel différentiel gradué en prenant l'homologie singulière de la semi-totalisation  $sTot(X^\bullet)$ . On peut aussi lui associer l'homologie de Hochschild du bicomplexe  $\{C_p^s(X^q)\}_{p,q \geq 0}$  (voir la définition 1.5.8) que l'on notera  $HH_*(X^\bullet)$ . Dans [7], Bousfield explicite un morphisme entre ces deux objets :

$$\varphi : H_*(sTot(X^\bullet)) \longrightarrow HH_*(X^\bullet), \quad (5.1)$$

et énonce les conditions pour que  $\varphi$  soit un isomorphisme. Si l'espace semi-cosimplicial provient d'une opérade multiplicative alors  $sTot(X^\bullet)$  est faiblement équivalent à une  $C_2$ -algèbre. Par conséquent, l'homologie singulière possède une structure de Gerstenhaber décrite explicitement par Sakaï dans [38]. Sous les mêmes conditions, Gerstenhaber et Voronov montrent dans [19] que l'homologie de Hochschild possède aussi une structure de Gerstenhaber explicite. De plus, l'application (5.1) est un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber.

La suite spectrale de Bousfield permet de calculer l'homologie singulière de la semi-totalisation  $sTot(X^\bullet)$ . Si l'espace semi-cosimplicial provient d'une opérade multiplicative alors la suite spectrale possède une structure de Gerstenhaber. Par conséquent, si la suite spectrale converge, on peut se demander si elle calcule l'homologie singulière en tant qu'algèbre de Gerstenhaber. Comme l'explique Salvatore dans [40], il est important de comprendre le morphisme (5.1) car la page  $E^2$  de la suite spectrale de Bousfield correspond à l'homologie de Hochschild.

Dans ce chapitre, on va étendre ces résultats au cas coloré. A partir d'un couple d'espaces semi-cosimpliciaux  $(X_c^\bullet; X_o^\bullet)$ , on dispose des couples d'espaces vectoriels différentiels gradués :

$$(H_*(sTot(X_c^\bullet)); H_*(sTot(X_o^\bullet))) \quad \text{et} \quad (HH_*(X_c^\bullet); HH_*(X_o^\bullet)), \quad (5.2)$$

correspondant respectivement aux homologies singulières et aux homologies de Hochschild. On montrera que si le couple d'espaces semi-cosimpliciaux provient d'une opérade pointée alors les deux couples d'homologies (5.2) possèdent une structure de  $sc_2$ -algèbre explicite et que l'application de Bousfield induit un morphisme de  $sc_2$ -algèbres. On termine ce chapitre par l'étude des suites spectrales de Bousfield. On énonce notamment un critère permettant de faire le lien entre le couple d'homologies singulières issu d'une opérade symétrique multiplicative topologique et la page  $E^2$  des suites spectrales de Bousfield.

### 5.1 Structure de $sc_2$ -algèbre sur le couple d'homologies singulières

Soient  $O$  une  $\{0; c\}$ -opérade et  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow O$  un morphisme de  $\{0; c\}$ -opérades. On désignera par  $(O_c; O_o)$  le couple d'espaces semi-cosimpliciaux associé à l'application  $\eta$  (voir l'exemple 1.2.3). D'après le théorème 3.4.3, le couple d'espaces  $(sTot(O_c); sTot(O_o))$  est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_2$ -algèbre. Par conséquent, le couple d'espaces vectoriels gradués :

$$(H_*(sTot(O_c)); H_*(sTot(O_o))),$$

est une  $sc_2$ -algèbre. L'objectif de cette section est de construire explicitement cette structure. Comme  $sTot(O_c)$  a le type d'homotopie d'un espace de lacets double,  $H_*(sTot(O_c))$  est une algèbre de Gerstenhaber composée d'un crochet de Lie  $[-; -]$  de degré 1 et d'un produit commutatif  $- * -$  de degré 0 :

- ▷  $[-; -] : H_p(sTot(O_c)) \otimes H_q(sTot(O_c)) \rightarrow H_{p+q+1}(sTot(O_c)),$
- ▷  $- * - : H_p(sTot(O_c)) \otimes H_q(sTot(O_c)) \rightarrow H_{p+q}(sTot(O_c)).$

D'un autre côté, l'espace  $sTot(O_o)$  a le type d'homotopie d'un espace de lacets simple, ce qui induit un produit associatif  $- *_i -$  de degré 0 en homologie. Enfin, le morphisme cosimplicial  $O_c \rightarrow O_o$  fournit, en homologie, une structure de module à gauche  $- *_e -$  de degré 0 sous l'algèbre commutative  $(H_*(sTot(O_c)); - * -)$  :

- ▷  $- *_i - : H_p(sTot(O_o)) \otimes H_q(sTot(O_o)) \rightarrow H_{p+q}(sTot(O_o)),$
- ▷  $- *_e - : H_p(sTot(O_c)) \otimes H_q(sTot(O_o)) \rightarrow H_{p+q}(sTot(O_o)).$

Notons que le crochet  $[-; -]$  a déjà été construit par Sakaï [38]. Cependant, comme on utilise pleinement cette construction dans la suite du chapitre et afin de faciliter la compréhension, on prend le parti de rappeler les détails de la construction.

### 5.1.1 Construction du crochet de degré 1

Afin de simplifier les définitions, on va modifier légèrement les notations usuelles que l'on retrouve dans le reste de la thèse. Dans ce qui suit on a les conventions suivantes :

$$S^1 := [-1, 1] / \{-1 \sim 1\} \quad \text{et} \quad \Delta^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in [-1; 1]^n \mid t_i \leq t_j \text{ si } i < j\}.$$

Les opérations cofaces de  $\Delta^\bullet$  sont maintenant données par les formules :

$$d^i : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}; (t_1, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} (-1, t_1, \dots, t_n), & \text{si } i = 0, \\ (t_1, \dots, t_i, t_i, \dots, t_n), & \text{si } i \in \{1, \dots, n\}, \\ (t_1, \dots, t_n, 1), & \text{si } i = n + 1. \end{cases}$$

A homéomorphisme près, ces notations coïncident avec les notations usuelles. Le crochet de degré 1 est obtenu en prenant l'homologie de l'application continue :

$$\lambda_1 : S^1 \times sTot(O_c)^{\times 2} \rightarrow sTot(O_c).$$

Soient  $f_1, f_2$  deux éléments de  $sTot(O_c)$  et  $\tau$  un point de  $[-1, 1]$ . On commence par définir l'application  $\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^0$  comme un recollement de polytopes de dimension 1 :

$$\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^0 : \Delta^0 \longrightarrow O(0; c) ; * \mapsto \begin{cases} f_2^1(2\tau - 1) \circ_1 f_1^0(*), & \text{si } \tau \geq 0, \\ f_1^1(2\tau + 1) \circ_1 f_2^0(*), & \text{si } \tau \leq 0. \end{cases}$$

La continuité en  $\tau = 0$  et le passage au quotient  $\{-1 \sim 1\}$  sont bien définis grâce à la structure opéradique de  $O_c$ . Afin de comprendre le problème de continuité et le rôle de la structure opéradique de  $O_c$ , on va donner les détails des preuves de la construction de  $\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^1 : \Delta^1 \rightarrow O(1; c)$ . Il y a deux cas à considérer :

- ▷ Si  $-1 \leq \tau \leq 0$  alors on définit  $\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^1(t) = f_1^{2+i_0-i_1}(u_1) \circ_{i_0+1} f_2^{i_1-i_0}(u_2)$  avec :

$$(i_0, i_1) = \begin{cases} (1; 1), & \text{si } t < \tau, \\ (0; 1), & \text{si } \tau \leq t < 1 + \tau, \\ (0; 0), & \text{si } 1 + \tau \leq t, \end{cases} \quad \text{et} \quad (u_1, u_2) = \begin{cases} [(2t + 1, 1 + 2\tau); *], & \text{si } t < \tau, \\ [(2\tau + 1); (2(t - \tau) - 1)], & \text{si } \tau \leq t < 1 + \tau, \\ [(1 + 2\tau, 2t - 1); *], & \text{si } 1 + \tau \leq t. \end{cases}$$

- ▷ Si  $0 \leq \tau \leq 1$  alors on définit  $\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^1(t) = f_2^{2+j_0-j_1}(v_1) \circ_{j_0+1} f_1^{j_1-j_0}(v_2)$  avec :

$$(j_0, j_1) = \begin{cases} (1; 1), & \text{si } t < \tau - 1, \\ (0; 1), & \text{si } \tau - 1 \leq t < \tau, \\ (0; 0), & \text{si } \tau \leq t, \end{cases} \quad \text{et} \quad (v_1, v_2) = \begin{cases} [(2t + 1, 2\tau - 1); *], & \text{si } t < \tau - 1, \\ [(2\tau - 1); (2(t - \tau) + 1)], & \text{si } \tau - 1 \leq t < \tau, \\ [(2\tau - 1, 2t - 1); *], & \text{si } \tau \leq t. \end{cases}$$

**Lemme 5.1.1.** *L'application  $\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^1$  est bien définie.*

*Démonstration.* L'application  $\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^1$  est construite comme un recollement de polytopes de dimension 2, comme l'illustre la figure 5.1. On va utiliser la structure opéradique de  $\mathcal{O}_c$  pour montrer que l'application est bien continue.

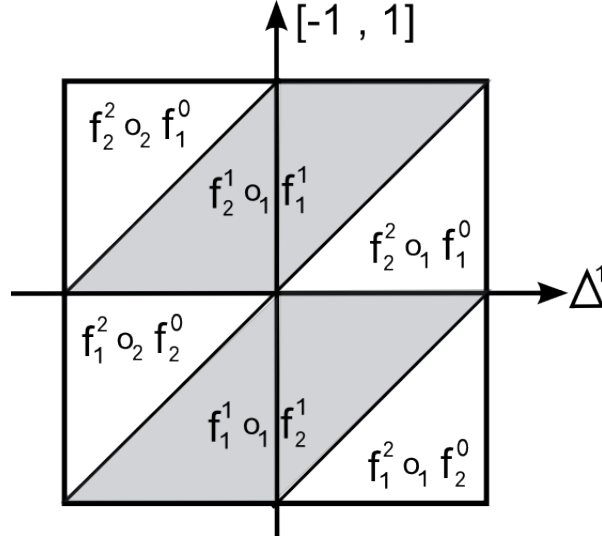


FIGURE 5.1 – Illustration du recollement des polytopes.

► La continuité lorsque  $-1 < \tau < 0$  :

$$\begin{aligned}
 \text{si } t = \tau : \quad & f_1^2(2t+1, 2t+1) \circ_2 f_2^0(*) & \text{si } t = 1 + \tau : \quad & f_1^2(2\tau+1, 2\tau+1) \circ_1 f_2^0(*) \\
 & = f_1^2((2t+1) \circ_1 *_{2;c}) \circ_2 f_2^0(*) & & = f_1^2((2\tau+1) \circ_1 *_{2;c}) \circ_1 f_2^0(*) \\
 & = f_1^1(2t+1) \circ_1 (*_{2;c} \circ_2 f_2^0(*)) & & = f_1^1(2\tau+1) \circ_1 (*_{2;c} \circ_1 f_2^0(*)) \\
 & = f_1^1(2t+1) \circ_1 f_2^1(-1), & & = f_1^1(2\tau+1) \circ_1 f_2^1(1).
 \end{aligned}$$

► La continuité lorsque  $0 < \tau < 1$  :

$$\begin{aligned}
 \text{si } t = \tau - 1 : \quad & f_2^2(2\tau-1, 2\tau-1) \circ_2 f_1^0(*) & \text{si } t = \tau : \quad & f_2^2(2\tau-1, 2\tau-1) \circ_1 f_1^0(*) \\
 & = f_2^2((2\tau-1) \circ_1 *_{2;c}) \circ_2 f_1^0(*) & & = f_2^2((2\tau-1) \circ_1 *_{2;c}) \circ_1 f_1^0(*) \\
 & = f_2^1(2\tau-1) \circ_1 (*_{2;c} \circ_2 f_1^0(*)) & & = f_2^1(2\tau-1) \circ_1 (*_{2;c} \circ_1 f_1^0(*)) \\
 & = f_2^1(2\tau-1) \circ_1 f_1^1(-1), & & = f_2^1(2\tau-1) \circ_1 f_1^1(1).
 \end{aligned}$$

► La continuité au voisinage de  $\tau = 0$  :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(0^-; f_1; f_2)^1 &= \begin{cases} f_1^2(2t+1, 1) \circ_2 f_2^0(*), & t \leq 0, \\ f_1^1(1) \circ_1 f_2^1(2t-1), & t \geq 0, \end{cases} & = \begin{cases} *_{2;c}(f_1^1(2t+1); f_2^0(*)), & t \leq 0, \\ *_{2;c}(f_1^0(*); f_2^1(2t-1)), & t \geq 0, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f_2^1(-1) \circ_1 f_1^1(2t+1), & t \leq 0, \\ f_2^2(-1, 2t-1) \circ_1 f_1^0(*), & t \geq 0, \end{cases} & = \lambda_1(0^+; f_1; f_2)^1.
 \end{aligned}$$

► Le passage au quotient  $-1 \sim 1$  :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(-1; f_1; f_2)^1 &= \begin{cases} f_1^1(-1) \circ_1 f_2^1(2t+1), & t \leq 0, \\ f_1^2(-1, 2t-1) \circ_1 f_2^0(*), & t \geq 0, \end{cases} & = \begin{cases} *_{2;c}(f_2^1(2t+1); f_1^0(*)), & t \leq 0, \\ *_{2;c}(f_2^0(*); f_1^1(2t-1)), & t \geq 0, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f_2^2(2t+1, 1) \circ_2 f_1^0(*), & t \leq 0, \\ f_2^2(1) \circ_1 f_1^1(2t-1), & t \geq 0, \end{cases} & = \lambda_1(1; f_1; f_2)^1.
 \end{aligned}$$

□

L'application  $\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n : \Delta^n \rightarrow O(n; c)$  est construite comme un recollement de polytopes de dimension  $n + 1$  en utilisant la structure opérادية de  $O_c$ . Comme dans le cas  $n = 1$ , on divise la construction en deux parties :

► Si  $-1 \leq \tau \leq 0$  alors on définit :

$$\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n(t_1, \dots, t_n) = f_1^{n+i_0-i_1+1}(u_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{i_0+1} f_2^{i_1-i_0}(u_2(\tau; t_1, \dots, t_n)),$$

avec  $\begin{cases} i_0 = \min\{i \mid t_{i+1} \geq \tau\}, \\ i_1 = \min\{i \mid t_{i+1} \geq 1 + \tau\}, \end{cases}$  et  $\begin{cases} u_1(\tau; t_1, \dots, t_n) = (2t_1 + 1, \dots, 2t_{i_0} + 1, 1 + 2\tau, 2t_{i_1+1} - 1, \dots, 2t_n - 1), \\ u_2(\tau; t_1, \dots, t_n) = (2t_{i_0+1} - 2\tau - 1, \dots, 2t_{i_1} - 2\tau - 1). \end{cases}$

► Si  $0 \leq \tau \leq 1$  alors on définit :

$$\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n(t_1, \dots, t_n) = f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{j_0+1} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n)),$$

avec  $\begin{cases} j_0 = \min\{j \mid t_{j+1} \geq \tau - 1\}, \\ j_1 = \min\{j \mid t_{j+1} \geq \tau\}, \end{cases}$  et  $\begin{cases} v_1(\tau; t_1, \dots, t_n) = (2t_1 + 1, \dots, 2t_{j_0} + 1, 2\tau - 1, 2t_{j_1+1} - 1, \dots, 2t_n - 1), \\ v_2(\tau; t_1, \dots, t_n) = (2t_{j_0+1} - 2\tau + 1, \dots, 2t_{j_1} - 2\tau + 1). \end{cases}$

Par convention, si  $\forall i, t_i < \tau$  (resp.  $\forall j, t_j < \tau - 1$ ) alors on pose  $i_0 = n$  (resp.  $j_0 = n$ ).

**Lemme 5.1.2.** La famille d'applications  $\{\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n\}_{n \geq 0}$  est un morphisme semi-cosimplicial.

*Démonstration.* La preuve, du fait que les applications  $\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n$  soient bien définies, est similaire au cas  $n = 1$ . On va uniquement vérifier les axiomes liés à la structure semi-cosimpliciale :

$$\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^{n+1} \circ d^i = d^i \circ \lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n, \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, n+1\}.$$

A cause de la symétrie associée à la construction des applications, on peut se restreindre au cas où  $0 \leq \tau \leq 1$ . Pour  $j_0$  et  $j_1$  associés à  $(t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n$ , on a les égalités suivantes :

► Lorsque  $i = 0$  :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau; f_1; f_2)^{n+1}(d^0(t_1, \dots, t_n)) &= f_2^{n+j_1-j_0+2}(-1, v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{j_0+2} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n)) \\ &= [*_{2;c} \circ_2 f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n))] \circ_{j_0+2} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n)) \\ &= [*_{2;c} \circ_2 [f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{j_0+1} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n))] \\ &= d^0(\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n(t_1, \dots, t_n)). \end{aligned}$$

► Lorsque  $i = n + 1$  :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau; f_1; f_2)^{n+1}(d^{n+1}(t_1, \dots, t_n)) &= f_2^{n+j_1-j_0+2}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n), 1) \circ_{j_0+2} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n)) \\ &= [*_{2;c} \circ_1 f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n))] \circ_{j_0+2} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n)) \\ &= [*_{2;c} \circ_1 [f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{j_0+1} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n))] \\ &= d^{n+1}(\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n(t_1, \dots, t_n)). \end{aligned}$$

► Lorsque  $0 < i \leq j_0$  :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau; f_1; f_2)^{n+1}(d^i(t_1, \dots, t_n)) &= f_2^{n+j_1-j_0+2}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_i, t_i, \dots, t_n)) \circ_{j_0+2} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n)) \\ &= [f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_i *_{2;c}] \circ_{j_0+2} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n)) \\ &= [f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{j_0+1} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n))] \circ_i *_{2;c} \\ &= d^i(\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n(t_1, \dots, t_n)). \end{aligned}$$

► Lorsque  $j_0 < i \leq j_1$  :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau; f_1; f_2)^{n+1}(d^i(t_1, \dots, t_n)) &= f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{j_0+1} f_1^{j_1-j_0+1}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_i, t_i, \dots, t_n)) \\ &= f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{j_0+1} [f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{i-j_0} *_{2;c}] \\ &= [f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{j_0+1} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n))] \circ_i *_{2;c} \\ &= d^i(\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n(t_1, \dots, t_n)). \end{aligned}$$

► Lorsque  $j_1 < i < n + 1$  :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau; f_1; f_2)^{n+1}(d^i(t_1, \dots, t_n)) &= f_2^{n+j_1-j_0+2}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_i, t_i, \dots, t_n)) \circ_{j_0+1} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n)) \\ &= [f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{i-j_0-j_1+1} *_{2;c}] \circ_{j_0+1} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n)) \\ &= [f_2^{n+j_1-j_0+1}(v_1(\tau; t_1, \dots, t_n)) \circ_{j_0+1} f_1^{j_1-j_0}(v_2(\tau; t_1, \dots, t_n))] \circ_i *_{2;c} \\ &= d^i(\lambda_1(\tau; f_1; f_2)^n(t_1, \dots, t_n)). \quad \square \end{aligned}$$

En utilisant ce générateur ainsi que le morphisme de Eilenberg-MacLane (voir la proposition 1.5.6) et comme  $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ , l'application  $\lambda_1$  induit une opération de degré 1 en homologie :

$$[-; -] : H_p(sTot(O_c)) \otimes H_q(sTot(O_c)) \rightarrow H_{p+q+1}(sTot(O_c)). \quad (5.3)$$

Plus explicitement, si on se donne deux morphismes :

$$g_1 : \Delta^p \rightarrow sTot(O_c) \quad \text{et} \quad g_2 : \Delta^q \rightarrow sTot(O_c),$$

alors  $[g_1; g_2]$  est définie comme une somme d'applications :

$$[g_1; g_2] := \sum_{\sigma \in Sh_{1,p,q}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q+1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^1 \times \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{id \times g_1 \times g_2} \Delta^1 \times sTot(O_c)^{\times 2} \xrightarrow{\lambda_1} sTot(O_c) \right\}.$$

Comme l'espace  $C_2(2)$  est faiblement équivalent au cercle  $S^1$ , l'application (5.3) est le crochet recherché.

### 5.1.2 Construction du produit commutatif

L'application  $\lambda_1$  fournit aussi, en homologie, une opération de degré 0 qui correspond au produit commutatif. Pour la suite du chapitre, on donne une construction de ce produit. On commence par définir l'application continue :

$$\lambda_2 : sTot(O_c) \times sTot(O_c) \rightarrow sTot(O_c).$$

Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux éléments de  $sTot(O_c)$ . On définit alors :

$$\begin{aligned} \lambda_2(f_1; f_2)^n : \Delta^n &\longrightarrow O(n; c); \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto *_{2;c} \left( f_1^l(2t_1 + 1, \dots, 2t_l + 1); f_2^{n-l}(2t_{l+1} - 1, \dots, 2t_n - 1) \right), \end{aligned}$$

avec  $t_l \leq 0 < t_{l+1}$ . L'application est construite comme un recollement de polytopes de dimension  $n$  en utilisant la structure  $\mathcal{A}_{S_{>0}}$ -bimodule de  $O_c$ , comme l'illustre la figure 5.2 dans le cas  $n = 2$ .

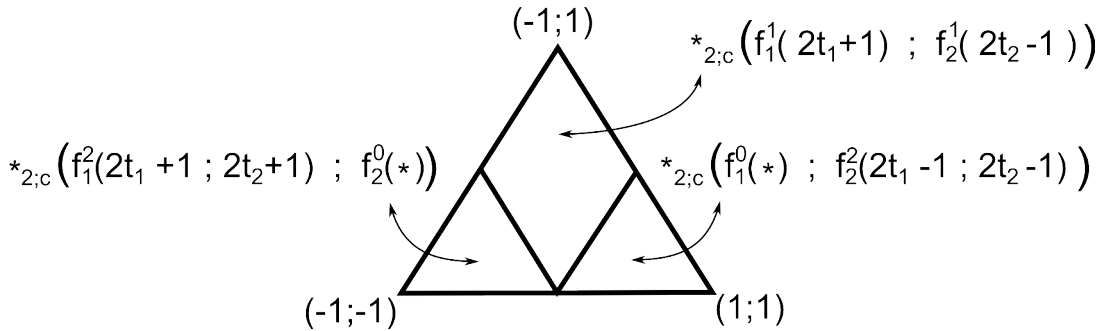


FIGURE 5.2 – Illustration du recollement de polytope pour  $n = 2$ .

Comme on a l'égalité  $\lambda_2(f_1; f_2) = \lambda_1(0; f_1; f_2)$ , l'application  $\lambda_2$  est bien définie. En prenant l'homologie singulière de cette application, on obtient une opération de degré 0 :

$$-* - : H_p(sTot(O_c)) \otimes H_q(sTot(O_c)) \rightarrow H_{p+q}(sTot(O_c)). \quad (5.4)$$

Plus explicitement, si on se donne deux morphismes :

$$g_1 : \Delta^p \rightarrow sTot(O_c) \quad \text{et} \quad g_2 : \Delta^q \rightarrow sTot(O_c),$$

alors  $g_1 * g_2$  est définie comme une somme d'applications :

$$g_1 * g_2 := \sum_{\sigma \in Sh_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{g_1 \times g_2} sTot(O_c) \times sTot(O_c) \xrightarrow{\lambda_2} sTot(O_c) \right\}.$$

**Proposition 5.1.3.** *Les opérations (5.3) et (5.4) font de  $H_*(sTot(O_c))$  une algèbre de Gerstenhaber.*

*Démonstration.* La preuve du fait que l'application (5.3) est bien le crochet de Lie recherché est faite par Sakai dans [38]. Pour la suite, on a besoin de la démonstration de la commutativité du produit (5.4). Dans un premier temps, on montre que l'application  $\lambda_2$  est associative à homotopie près. Soient  $f_1, f_2$  et  $f_3$  des points de l'espace  $sTot(O_c)$ . On commence par décrire l'application :

$$\lambda_2(\lambda_2(-; -); -) : sTot(O_c)^{\times 3} \longrightarrow sTot(O_c). \quad (5.5)$$

Le morphisme semi-cosimplicial  $\lambda_2(\lambda_2(f_1; f_2); f_3)^n : \Delta^n \rightarrow O(n; c)$  envoie un élément  $(t_1, \dots, t_n)$  vers :

$$*_{3;c} \left( f_1^i(4t_1 + 3, \dots, 4t_i + 3) ; f_2^j(4t_{i+1} + 1, \dots, 4t_{i+j} + 1) ; f_3^{n-i-j}(2t_{i+j+1} - 1, \dots, 2t_n - 1) \right),$$

avec  $t_i \leq -1/2 < t_{i+1} \leq t_{i+j} \leq 0 < t_{i+j+1}$ . D'un autre coté, on a l'application :

$$\lambda_2(-; \lambda_2(-; -)) : sTot(O_c)^{\times 3} \longrightarrow sTot(O_c). \quad (5.6)$$

Le morphisme semi-cosimplicial  $\lambda_2(f_1; \lambda_2(f_2; f_3))^n : \Delta^n \rightarrow O(n; c)$  envoie un élément  $(t_1, \dots, t_n)$  vers :

$$*_{3;c} \left( f_1^p(2t_1 + 1, \dots, 2t_p + 1) ; f_2^q(4t_{p+1} - 1, \dots, 4t_{p+q} - 1) ; f_3^{n-p-q}(4t_{i+j+1} - 3, \dots, 4t_n - 3) \right),$$

avec  $t_p \leq 0 < t_{p+1} \leq t_{p+q} \leq 1/2 < t_{p+q+1}$ . On dispose d'une homotopie  $H^\bullet : \Delta^\bullet \times [0, 1] \rightarrow \Delta^\bullet$  définie par :

$$H^n : \Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \Delta^n ; (t_1, \dots, t_n) ; u \mapsto (t'_1, \dots, t'_n),$$

avec

$$t'_i := \begin{cases} (1-u)t_i + \frac{u(t_i - 1)}{2} & \text{si } t_i \leq 0, \\ (1-u)t_i + \frac{u(2t_i - 1)}{2} & \text{si } 0 < t_i \leq 1/2, \\ (1-u)t_i + u(2t_i - 1) & \text{si } 1/2 < t_i. \end{cases}$$

L'homotopie est bien définie et, pour  $u \in [0, 1]$  fixé,  $H^\bullet$  est un morphisme semi-cosimplicial. Au final, l'application qui suit définit une homotopie entre (5.5) et (5.6) :

$$H_1 : sTot(O_c)^{\times 3} \times [0, 1] \longrightarrow sTot(O_c), \\ (f_1; f_2; f_3) ; u \longmapsto H_1(f_1; f_2; f_3; u),$$

avec

$$H_1(f_1; f_2; f_3; u)^n(t_1, \dots, t_n) = \lambda_2(\lambda_2(f_1; f_2); f_3)^n(H^n((t_1, \dots, t_n); u)).$$

Contrairement à l'associativité qui dépendait uniquement de la structure  $\mathcal{A}_{s>0}$ -bimodule sur  $O_c$ , la commutativité à homotopie près de l'application  $\lambda_2$  est due à la structure opérادية de  $O_c$ . En effet, remarquons que l'on a les égalités suivantes :

$$\lambda_1(0; f_1; f_2) = \lambda_2(f_1; f_2) \quad \text{et} \quad \lambda_1(1; f_1; f_2) = \lambda_2(f_2; f_1).$$

Par conséquent, l'homotopie entre  $\lambda_2(f_1; f_2)$  et  $\lambda_2(f_2; f_1)$  est donnée par la formule :

$$H : sTot(O_c)^{\times 2} \times [0, 1] \longrightarrow sTot(O_c), \\ (f_1; f_2) ; t \longmapsto \lambda_1(t; f_1; f_2).$$

□

*Remarque 5.1.4.* Pour définir l'application  $\lambda_2$  et dans la démonstration de l'associativité de l'application (5.4), on a uniquement utilisé la structure de bimodule sous l'opérade associative de  $O_c$ . Par conséquent, si  $X^\bullet$  est un espace semi-cosimplicial provenant d'un bimodule pointé alors  $H_*(sTot(X^\bullet))$  est une algèbre associative dont l'opération est donnée par l'homologie de l'application  $\lambda_2$ .

### 5.1.3 Construction du produit associatif

La structure d'algèbre associative sur  $H_*(sTot(O_o))$  se construit de manière similaire au produit commutatif de  $H_*(sTot(O_c))$ . On commence par définir une application continue :

$$\lambda_3 : sTot(O_o) \times sTot(O_o) \rightarrow sTot(O_o).$$

Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux éléments de  $sTot(O_o)$ . On définit alors :

$$\begin{aligned} \lambda_3(f_1; f_2)^n : \Delta^n &\longrightarrow O(n+1; o); \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto f_1^l(2t_1+1, \dots, 2t_l+1) \circ_{l+1} f_2^{n-l}(2t_{l+1}-1, \dots, 2t_n-1), \end{aligned}$$

avec  $t_l \leq 0 < t_{l+1}$ . L'application est construite comme un recollement de polytopes de dimension  $n$  en utilisant la structure opéradique de  $O$ . Comme dans le cas précédent, l'application  $\lambda_3$  est bien définie et induit le produit associatif recherché en homologie :

$$- *_i - : H_p(sTot(O_o)) \otimes H_q(sTot(O_o)) \rightarrow H_{p+q}(sTot(O_o)). \quad (5.7)$$

Plus explicitement, si on se donne deux morphismes :

$$g_1 : \Delta^p \rightarrow sTot(O_o) \quad \text{et} \quad g_2 : \Delta^q \rightarrow sTot(O_o),$$

alors  $g_1 *_i g_2$  est définie comme une somme d'applications :

$$g_1 *_i g_2 := \sum_{\sigma \in Sh_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{g_1 \times g_2} sTot(O_o) \times sTot(O_o) \xrightarrow{\lambda_3} sTot(O_o) \right\}.$$

### 5.1.4 Construction du module à gauche

La structure de module à gauche sur  $H_*(sTot(O_o))$  se construit de manière similaire au produit commutatif de  $H_*(sTot(O_c))$ . On commence par définir une application continue :

$$\lambda_4 : sTot(O_c) \times sTot(O_o) \rightarrow sTot(O_o).$$

Soient  $f_1$  un point de  $sTot(O_c)$  et  $f_2$  un point de  $sTot(O_o)$ . On définit alors :

$$\begin{aligned} \lambda_4(f_1; f_2)^n : \Delta^n &\longrightarrow O(n+1; o); \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto *_2; o \left( f_1^l(2t_1+1, \dots, 2t_l+1) ; f_2^{n-l}(2t_{l+1}-1, \dots, 2t_n-1) \right), \end{aligned}$$

avec  $t_l \leq 0 < t_{l+1}$ . L'application est construite comme un recollement de polytopes de dimension  $n$  en utilisant l'action de l'opérade  $O_c$  sur le bimodule  $O_o$ . Comme dans le cas précédent, l'application  $\lambda_4$  est bien définie et induit la structure de module recherchée en homologie :

$$- *_e - : H_p(sTot(O_c)) \otimes H_q(sTot(O_o)) \rightarrow H_{p+q}(sTot(O_o)). \quad (5.8)$$

Plus explicitement, si on se donne deux morphismes :

$$g_1 : \Delta^p \rightarrow sTot(O_c) \quad \text{et} \quad g_2 : \Delta^q \rightarrow sTot(O_o),$$

alors  $g_1 *_e g_2$  est définie comme une somme d'applications :

$$g_1 *_e g_2 := \sum_{\sigma \in Sh_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{g_1 \times g_2} sTot(O_c) \times sTot(O_o) \xrightarrow{\lambda_4} sTot(O_o) \right\}.$$

**Proposition 5.1.5.** *Les opérations (5.3), (5.4), (5.7) et (5.8) induisent une structure de  $sc_2$ -algèbre sur le couple :*

$$(H_*(sTot(O_c)) ; H_*(sTot(O_o))).$$

*Démonstration.* On sait déjà que les opérations (5.2) et (5.4) induisent une structure de Gerstenhaber sur  $H_*(sTot(O_c))$ . De plus, les vérifications de l'associativité de l'opération (5.7) et l'axiome de module à gauche pour l'opération (5.8) sont identiques à la première partie de la preuve de la proposition 5.1.2.  $\square$

*Remarque 5.1.6.* Pour définir l'application  $\lambda_4$ , on a uniquement besoin de la structure bimodule pointé de  $O$ . Par conséquent, si un couple d'espaces semi-cosimpliciaux  $(X_c^\bullet ; X_o^\bullet)$  provient d'un bimodule pointé alors le théorème 3.1.6 affirme que le couple  $(H_*(sTot(X_c^\bullet)) ; H_*(sTot(X_o^\bullet)))$  est une  $sc_1$ -algèbre dont le produit associatif et la structure de module à gauche proviennent de l'homologie des application  $\lambda_2$  et  $\lambda_4$  respectivement.



## 5.2 Structure de $sc_2$ -algèbre sur le couple d'homologies de Hochschild

D'après la définition 1.5.8, l'homologie de Hochschild associée à un espace semi-cosimplicial  $X^\bullet$  est obtenue à partir du bicomplexe  $\{C_p^s(X^q)\}_{p,q \geq 0}$ . On dispose de deux différentielles :

$$\begin{aligned} \partial : C_p^s(X^q) &\longrightarrow C_{p-1}^s(X^q) & ; \quad \{f : \Delta^p \rightarrow X^q\} &\longmapsto \sum_{i=0}^p (-1)^i \left\{ \Delta^{p-1} \xrightarrow{d^i} \Delta^p \xrightarrow{f} X^q \right\}, \\ \delta : C_p^s(X^q) &\longrightarrow C_p^s(X^{q+1}) & ; \quad \{f : \Delta^p \rightarrow X^q\} &\longmapsto \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \left\{ \Delta^p \xrightarrow{f} X^q \xrightarrow{d^i} X^{q+1} \right\}. \end{aligned}$$

On introduit ainsi le complexe de Hochschild :

$$C_p(X^\bullet) := \prod_{l \geq 0} C_{p+l}^s(X^l) \quad \text{et} \quad d = \partial + (-1)^{p+1} \delta, \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}.$$

**Définition 5.2.1.** Soit  $X^\bullet$  un espace semi-cosimplicial. On note  $HH_*(X^\bullet)$  l'homologie du complexe de chaînes  $(C_*(X^\bullet); d)$ .

Soient  $O$  une  $\{o; c\}$ -opérate et  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow O$  un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérateurs. On désignera par  $(O_c; O_o)$  le couple d'espaces semi-cosimpliciaux associé à l'application  $\eta$  (voir l'exemple 1.2.3). Comme  $O_c$  provient d'une opérate multiplicative, Gerstenhaber et Voronov ont démontré dans [19] que l'homologie de Hochschild  $HH_*(O_c)$  possède une structure de Gerstenhaber explicite. De même, on va montrer que le couple  $(HH_*(O_c); HH_*(O_o))$  possède une structure de  $sc_2$ -algèbre explicite.

### 5.2.1 Construction du crochet de degré 1

En utilisant la structure opéradique de  $O_c$ , on construit une opération de degré 1 :

$$[-; -] : HH_p(O_c) \otimes HH_q(O_c) \longrightarrow HH_{p+q+1}(O_c). \quad (5.9)$$

Si on se donne deux morphismes :

$$g_1^\bullet := \{g_1^l : \Delta^{p+l} \rightarrow O(l; c)\}_{l \geq 0} \in \prod_{l \geq 0} C_{p+l}^s(O_c^l) \quad \text{et} \quad g_2^\bullet := \{g_2^l : \Delta^{q+l} \rightarrow O(l; c)\}_{l \geq 0} \in \prod_{l \geq 0} C_{q+l}^s(O_c^l),$$

alors  $[g_1^\bullet; g_2^\bullet]$  est défini sur le facteur  $C_{p+q+l+1}^s(O_c^l)$  via la formule :

$$\begin{aligned} &\sum_{r+s=l} \left( \sum_{\sigma \in Sh_{p+r+1; q+s}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i \left\{ \Delta^{p+q+l+1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p+r+1} \times \Delta^{q+s} \xrightarrow{g_1^{r+1} \times g_2^s} O_c^{r+1} \times O_c^s \xrightarrow{o_i} O_c^l \right\} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{(p+1)(q+1)} \sum_{\sigma \in Sh_{q+r+1; p+s}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i \left\{ \Delta^{p+q+l+1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{q+r+1} \times \Delta^{p+s} \xrightarrow{g_2^{r+1} \times g_1^s} O_c^{r+1} \times O_c^s \xrightarrow{o_i} O_c^l \right\} \right), \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon = (s-1)(i-1) + r(q+s)$  et  $\varepsilon' = (s-1)(i-1) + r(p+s)$ .

### 5.2.2 Construction du produit commutatif

En utilisant la structure de bimodule sous l'opérate associative de  $O_c$ , on construit l'opération :

$$- * - : HH_p(O_c) \otimes HH_q(O_c) \longrightarrow HH_{p+q}(O_c). \quad (5.10)$$

Si on se donne deux morphismes :

$$g_1^\bullet := \{g_1^l : \Delta^{p+l} \rightarrow O(l; c)\}_{l \geq 0} \in \prod_{l \geq 0} C_{p+l}^s(O_c^l) \quad \text{et} \quad g_2^\bullet := \{g_2^l : \Delta^{q+l} \rightarrow O(l; c)\}_{l \geq 0} \in \prod_{l \geq 0} C_{q+l}^s(O_c^l),$$

alors  $g_1^\bullet * g_2^\bullet$  est défini sur le facteur  $C_{p+q+l}^s(O_c^l)$  via la formule :

$$\sum_{r+s=l} \sum_{\sigma \in Sh_{p+r; q+s}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p+r} \times \Delta^{q+s} \xrightarrow{g_1^r \times g_2^s} O_c^r \times O_c^s \xrightarrow{*_{2; c(-; -)}} O_c^l \right\}.$$

### 5.2.3 Construction du produit associatif

En utilisant la structure de bimodule sous l'opérade associative de  $O_o$ , on construit l'opération :

$$- *_i - : HH_p(O_o) \otimes HH_q(O_o) \longrightarrow HH_{p+q}(O_o). \quad (5.11)$$

Si on se donne deux morphismes :

$$g_1^\bullet := \{g_1^l : \Delta^{p+l} \rightarrow O(l+1; o)\}_{l \geq 0} \in \prod_{l \geq 0} C_{p+l}^s(O_o^l) \quad \text{et} \quad g_2^\bullet := \{g_2^l : \Delta^{q+l} \rightarrow O(l+1; o)\}_{l \geq 0} \in \prod_{l \geq 0} C_{q+l}^s(O_o^l),$$

alors  $g_1^\bullet *_i g_2^\bullet$  est défini sur le facteur  $C_{p+q+l}^s(O_o^l)$  via la formule :

$$\sum_{r+s=l} \sum_{\sigma \in Sh_{p+r, q+s}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p+r} \times \Delta^{q+s} \xrightarrow{g_1^r \times g_2^s} O_o^r \times O_o^s \xrightarrow{\circ_{r+1}} O_o^l \right\}.$$

### 5.2.4 Construction du module à gauche

En utilisant l'action du bimodule  $O_c$  sur  $O_o$ , on construit l'opération :

$$- *_e - : HH_p(O_c) \otimes HH_q(O_o) \longrightarrow HH_{p+q}(O_o). \quad (5.12)$$

Si on se donne deux morphismes :

$$g_1^\bullet := \{g_1^l : \Delta^{p+l} \rightarrow O(l; c)\}_{l \geq 0} \in \prod_{l \geq 0} C_{p+l}^s(O_c^l) \quad \text{et} \quad g_2^\bullet := \{g_2^l : \Delta^{q+l} \rightarrow O(l+1; o)\}_{l \geq 0} \in \prod_{l \geq 0} C_{q+l}^s(O_o^l),$$

alors  $g_1^\bullet *_e g_2^\bullet$  est défini sur le facteur  $C_{p+q+l}^s(O_o^l)$  via la formule :

$$\sum_{r+s=l} \sum_{\sigma \in Sh_{p+r, q+s}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p+r} \times \Delta^{q+s} \xrightarrow{g_1^r \times g_2^s} O_c^r \times O_o^s \xrightarrow{\circ_{*2; o(-; -)}} O_o^l \right\}.$$

**Proposition 5.2.2.** Les opérations (5.9), (5.10), (5.11) et (5.12) induisent une structure de  $sc_2$ -algèbre sur le couple :

$$(HH_*(O_c) ; HH_*(O_o)).$$

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle de Gerstenhaber et Voronov dans le cas classique [19] ainsi que la preuve de Turchin [47] dans le cas gradué. La démonstration est basée sur les propriétés du shuffle et sur la structure particulière de l'opérade  $\mathcal{A}ct$ .  $\square$

## 5.3 Le morphisme de Bousfield

Dans un premier temps, on redonne la définition du morphisme de Bousfield. Soit  $X^\bullet$  un espace semi-cosimplicial. Comme on travaille avec des espaces de Hausdorff compactement engendrés, la donnée d'un élément  $g^\bullet : \Delta^p \rightarrow sTot(X^\bullet) \in C_p^s(sTot(X^\bullet))$  est équivalente à la donnée d'une famille d'applications :

$$\{g^l : \Delta^p \times \Delta^l \rightarrow X^l\}_{l \geq 0},$$

vérifiant les relations :

$$d^i \circ g^l = g^{l+1} \circ (id \times d^i), \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, l+1\}. \quad (5.13)$$

Ainsi, pour  $p \geq 0$ , on construit l'application :

$$\varphi_p : C_p^s(sTot(X^\bullet)) \rightarrow C_p(X^\bullet) = \prod_{l \geq 0} C_{p+l}^s(X^l),$$

envoyant  $g^\bullet$  vers une somme d'applications définie sur le facteur  $C_{p+l}^s(X^l)$  via la formule :

$$\sum_{\sigma \in Sh_{p, l}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^l \xrightarrow{g^l} X^l \right\}.$$

On prolonge l'application  $\varphi_p$  aux entiers  $p$  négatifs en posant :

$$C_p^s(sTot(X^\bullet)) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_p : 0 \mapsto 0.$$

**Lemme 5.3.1.** [7] La famille d'applications  $\{\varphi_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$  est un morphisme de complexes de chaînes.

*Démonstration.* On doit montrer la commutativité des diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} C_p^s(sTot(X^\bullet)) & \xleftarrow{d} & C_{p+1}^s(sTot(X^\bullet)) \\ \downarrow \varphi_p & & \downarrow \varphi_p \\ C_p(X^\bullet) & \xleftarrow{d} & C_{p+1}(X^\bullet) \end{array}$$

Lorsque  $p < -1$ , on a la commutativité par construction. Supposons que  $p \geq -1$  et fixons  $g^\bullet$  un point de  $C_{p+1}^s(sTot(X^\bullet))$ . On commence par regarder la composée  $\varphi_p \circ d$  :

$$\begin{aligned} d(g^\bullet) &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \left\{ \Delta^p \xrightarrow{d^i} \Delta^{p+1} \xrightarrow{g^\bullet} sTot(X^\bullet) \right\}, \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \left\{ \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{d^i \times id} \Delta^{p+1} \times \Delta^q \xrightarrow{g^q} X^q \right\}_{q \geq 0}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la composée  $(\varphi_p \circ d)(g^\bullet)$  est définie sur le facteur  $C_{p+1}^s(X^l)$  par :

$$\sum_{\sigma \in Sh_{p,l}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \left\{ \Delta^{p+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^l \xrightarrow{d^i \times id} \Delta^{p+1} \times \Delta^l \xrightarrow{g^l} X^l \right\}.$$

D'un autre coté, la composée  $(d \circ \varphi_{p+1})(g^\bullet)$  est définie sur le facteur  $C_{p+1}^s(X^l)$  par la formule :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in Sh_{p+1,l}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^{p+l+1} (-1)^i \left\{ \Delta^{p+l} \xrightarrow{d^i} \Delta^{p+l+1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p+1} \times \Delta^l \xrightarrow{g^l} X^l \right\} \\ + (-1)^{p+2} \sum_{\sigma \in Sh_{p+1,l-1}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^l (-1)^i \left\{ \Delta^{p+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p+1} \times \Delta^{l-1} \xrightarrow{g^{l-1}} X^{l-1} \xrightarrow{d^i} X^l \right\}. \end{aligned}$$

Le premier facteur provient de  $C_{p+l+1}^s(X^l)$  via la différentielle  $\partial$  tandis que le second facteur provient de  $C_{p+l}^s(X^{l-1})$  via la différentielle  $\delta$ . Comme  $g^\bullet$  préserve la structure semi-cosimpliciale vis-à-vis du second facteur (voir relation (5.13)), on peut réécrire l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in Sh_{p+1,l}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^{p+l+1} (-1)^i \left\{ \Delta^{p+l} \xrightarrow{d^i} \Delta^{p+l+1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p+1} \times \Delta^l \xrightarrow{g^l} X^l \right\} \\ + (-1)^{p+2} \sum_{\sigma \in Sh_{p+1,l-1}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^l (-1)^i \left\{ \Delta^{p+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p+1} \times \Delta^{l-1} \xrightarrow{id \times d^i} \Delta^{p+1} \times \Delta^l \xrightarrow{g^l} X^l \right\}. \end{aligned}$$

Par fonctorialité on cherche à montrer l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in Sh_{p+1,l}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^{p+l+1} (-1)^i \left\{ \Delta^{p+l} \xrightarrow{d^i} \Delta^{p+l+1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p+1} \times \Delta^l \right\} \\ = \sum_{\sigma \in Sh_{p,l}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \left\{ \Delta^{p+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^l \xrightarrow{d^i \times id} \Delta^{p+1} \times \Delta^l \right\} \\ + (-1)^{p+1} \sum_{\sigma \in Sh_{p+1,l-1}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^l (-1)^i \left\{ \Delta^{p+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p+1} \times \Delta^{l-1} \xrightarrow{id \times d^i} \Delta^{p+1} \times \Delta^l \right\} \end{aligned}$$

Cette égalité est due au fait que l'application d'Eilenberg-MacLane est un morphisme de complexes de chaînes. Il suffit d'appliquer la commutativité du diagramme qui suit à l'élément  $id_{\Delta_{p+1}} \otimes id_{\Delta^l} \in C_{p+1}^s(\Delta^{p+1}) \otimes C_l^s(\Delta^l)$  :

$$\begin{array}{ccc} (C_p^s(\Delta^{p+1}) \otimes C_l^s(\Delta^l)) \oplus (C_{p+1}^s(\Delta^{p+1}) \otimes C_{l-1}^s(\Delta^l)) & \xleftarrow{d} & C_{p+1}^s(\Delta^{p+1}) \otimes C_l^s(\Delta^l) \\ \downarrow EM & & \downarrow EM \\ C_{p+l}^s(\Delta^{p+1} \times \Delta^l) & \xleftarrow{d} & C_{p+l+1}^s(\Delta^{p+1} \times \Delta^l) \end{array} \quad (5.14)$$

□

**Définition 5.3.2.** Le morphisme de Bousfield est défini comme l'homologie du morphisme de complexes de chaînes  $\{\varphi_p\}$  :

$$\varphi^* : H_p(sTot(X^\bullet)) \longrightarrow HH_p(X^\bullet).$$

Soient  $O$  une  $\{0; c\}$ -opéradé et  $\eta : \mathcal{Act} \rightarrow O$  un morphisme de  $\{0; c\}$ -opéradés. On désignera par  $(O_c; O_o)$  le couple d'espaces semi-cosimpliciaux associé à l'application  $\eta$ . Le morphisme de Bousfield induit une application :

$$(H_*(sTot(O_c)); H_*(sTot(O_o))) \longrightarrow (HH_*(O_c); HH_*(O_o)). \quad (5.15)$$

D'après les sections précédentes, on sait que les deux couples d'homologies possèdent une structure de  $sc_2$ -algèbre explicite. Pour démontrer que l'application (5.15) préserve cette structure, on va utiliser la théorie des modèles acycliques.

### 5.3.1 La théorie des modèles acycliques

**Définition 5.3.3.** Soient  $R$  un anneau,  $C$  une catégorie et  $\mathcal{M}$  un sous-ensemble d'objets de  $C$ . Un foncteur  $F : C \rightarrow R\text{-mod}$  est dit libre pour le modèle  $\mathcal{M}$  si et seulement si il existe un sous-ensemble  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$  et un élément  $e_M \in FM$ , pour tout  $M \in \mathcal{M}'$ , tel que l'ensemble :

$$Ens(C) := \{(Fa)e_M \in FC \mid M \in \mathcal{M}', a \in C(M; C)\},$$

forme une base de  $FC$  pour  $C \in C$ . En d'autres termes, le foncteur  $F$  peut se factoriser de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & R\text{-mod} \\ & \searrow^{Ens(-)} & \nearrow_{\text{construction libre}} \\ & \text{Sets} & \end{array}$$

On dira qu'un foncteur  $F : C \rightarrow Ch(R)$  est libre pour le modèle  $\mathcal{M}$  si, pour tout entier naturel  $p$ , la projection sur le  $p$ -ième  $R$ -module  $F_p : C \rightarrow R\text{-mod}$  est libre pour un modèle  $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}$ .

**Théorème 5.3.4.** [53, Théorème 2.1] Soient  $C$  une petite catégorie,  $\mathcal{M}$  un sous-ensemble de l'ensemble des objets de  $C$  et  $F, G : C \rightarrow Ch(R)$  deux foncteurs nuls en degré négatif. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- ▷  $F$  est libre pour le modèle  $\mathcal{M}$ ,
- ▷  $G$  est acyclique en  $\mathcal{M}$  (i.e.  $H_i(GM) = 0 \forall i > 0$  et  $M \in \mathcal{M}$ ),
- ▷ il existe une transformation naturelle  $\alpha : H_0F \rightarrow H_0G$ ,

alors il existe une transformation naturelle, unique à homotopie près,  $\tilde{\alpha} : F \rightarrow G$  induisant  $\alpha$  sur le premier groupe d'homologie.

**Corollaire 5.3.5.** [53, Corollaire 2.3] Sous les conditions du théorème 5.3.4, deux transformations naturelles entre les foncteurs  $F$  et  $G$ , induisant la même transformation naturelle  $\alpha : H_0F \rightarrow H_0G$ , sont homotopes en tant que complexes de chaînes.

**Application 5.3.6. La subdivision shuffle**

Soit  $X$  un espace topologique. On définit la subdivision shuffle sur le  $n$ -ième complexe de chaînes singulière, notée  $S_n(X) : C_n^s(X) \rightarrow C_n^s(X)$ , envoyant un élément  $g : \Delta^n \rightarrow X$  vers la somme d'applications donnée par la formule :

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 0}} \sum_{\sigma \in Sh_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^n \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{s} \Delta^n \xrightarrow{g} X \right\},$$

avec  $s : \Delta^p \times \Delta^q \rightarrow \Delta^{p+q} ; (t_1, \dots, t_p) \times (t'_1, \dots, t'_q) \mapsto \frac{(t_1 - 1, \dots, t_p - 1, t'_1 + 1, \dots, t'_q + 1)}{2}$ .

La famille d'applications  $\{S_n(X)\}$  forme un morphisme de complexes de chaînes. En effet, remarquons que le diagramme (5.14), appliqué à l'élément  $id_p \otimes id_{\Delta_q} \in C_{\Delta_p}^s(\Delta^p) \otimes C_{\Delta_q}^s(\Delta^q)$ , nous donne les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (d \circ S_n(X))(g) &= \sum_{p+q=n} \sum_{\sigma \in Sh_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^n (-1)^i \left\{ \Delta^{n-1} \xrightarrow{d^i} \Delta^n \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{s} \Delta^n \xrightarrow{g} X \right\} \\ &= \sum_{p+q=n} \left[ \sum_{\sigma \in Sh_{p-1,q}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^p (-1)^i \left\{ \Delta^{n-1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p-1} \times \Delta^q \xrightarrow{d^i \times id} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{s} \Delta^n \xrightarrow{g} X \right\} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{p+1} \sum_{\sigma \in Sh_{p,q-1}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^q (-1)^i \left\{ \Delta^{n-1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^{q-1} \xrightarrow{id \times d^i} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{s} \Delta^n \xrightarrow{g} X \right\} \right] \\ &= \sum_{p+q=n} \left[ \sum_{\sigma \in Sh_{p-1,q}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \left\{ \Delta^{n-1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^{p-1} \times \Delta^q \xrightarrow{d^i \times id} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{s} \Delta^n \xrightarrow{g} X \right\} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{p+1} \sum_{\sigma \in Sh_{p,q-1}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=1}^q (-1)^i \left\{ \Delta^{n-1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^{q-1} \xrightarrow{id \times d^i} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{s} \Delta^n \xrightarrow{g} X \right\} \right] \\ &= \sum_{p+q=n-1} \sum_{\sigma \in Sh_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=0}^n (-1)^i \left\{ \Delta^{n-1} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{s} \Delta^{n-1} \xrightarrow{d^i} \Delta^n \xrightarrow{g} X \right\} \\ &= (S_{n-1}(X) \circ d)(g). \end{aligned}$$

On va utiliser le corollaire 5.3.5 afin de prouver que les deux morphismes de chaînes, provenant de l'identité et de la subdivision shuffle, sont homotopes. Pour cela, remarquons que ces deux morphismes peuvent être vus comme des transformations naturelles entre les foncteurs  $F = G = C_*^s : Top \rightarrow Ch(\mathbb{K})$ . Posons :

$$\mathcal{M} = \{ \Delta^p \mid p \in \mathbb{N} \}, \quad \mathcal{M}_p = \{ \Delta^p \} \quad \text{et} \quad e_p = id_{\Delta_p} \in C_p^s(\Delta^p).$$

Ainsi, pour tout espace topologique  $X$ , l'ensemble  $\{C_p^s(a)e_p \mid a \in C_p^s(X)\}$  est une base de  $C_p^s(X)$  par définition des chaînes singulières. De plus,  $C_*^s(\Delta^p)$  est acyclique car les simplexes sont contractiles. Enfin, comme la subdivision shuffle d'un point est le point lui-même,  $S_*(X)$  induit la transformation naturelle  $id : H_0(X) \rightarrow H_0(X)$ . Par conséquent, il existe une homotopie de chaînes  $\{t_n(X)\}_{n \geq 0}$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & C_{n-1}^s(X) & \longleftarrow & C_n^s(X) & \longleftarrow & C_{n+1}^s(X) & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow id & \searrow t_{n-1}(x) & \downarrow id & \searrow t_n(x) & \downarrow id & & \\ \cdots & \longleftarrow & C_{n-1}^s(X) & \longleftarrow & C_n^s(X) & \longleftarrow & C_{n+1}^s(X) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

fonctorielle en la variable  $X$  et vérifiant la relation :

$$id - S_n(X) = d \circ t_n(X) + t_{n-1}(X) \circ d.$$

### 5.3.2 Préservation de la structure de $sc_2$ -algèbre

Sakai [38] a démontré que le morphisme de Bousfield préserve le crochet de degré 1. Dans cette sous-section, on va montrer qu'il en est de même pour les autres opérations. Comme les preuves sont similaires, on va uniquement traiter le cas du produit commutatif. On doit prouver que, pour tous entiers naturels  $p$  et  $q$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_p(sTot(O_c)) \otimes H_q(sTot(O_c)) & \xrightarrow{-*-} & H_{p+q}(sTot(O_c)) \\ \downarrow \varphi_p^* \otimes \varphi_q^* & & \downarrow \varphi_{p+q}^* \\ HH_p(O_c) \otimes HH_q(O_c) & \xrightarrow{-*-} & HH_{p+q}(O_c) \end{array}$$

Cela revient à construire une homotopie  $\{h_n\}_{n \geq 0}$  au niveau des complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \longleftarrow \bigoplus_{p+q=n} C_p^s(sTot(O_c)) \otimes C_q^s(sTot(O_c)) & \longleftarrow & \bigoplus_{p+q=n+1} C_p^s(sTot(O_c)) \otimes C_q^s(sTot(O_c)) & \longleftarrow & \cdots \\ & & \searrow h_n & & \\ \cdots \longleftarrow C_n(O_c) & \longleftarrow & C_{n+1}(O_c) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

$\beta_1^n \parallel \beta_2^n$        $\beta_1^{n+1} \parallel \beta_2^{n+1}$

avec  $\beta_1^n$  et  $\beta_2^n$  correspondant respectivement aux composées  $\varphi_{p+q}^* \circ (-*-)$  et  $(-*) \circ (\oplus \varphi_p^* \otimes \varphi_q^*)$  au niveau des chaînes singulières. Plus explicitement, si on se fixe deux morphismes :

$$g_1 : \Delta^p \longrightarrow sTot(O_c) \quad \text{et} \quad g_2 : \Delta^q \longrightarrow sTot(O_c),$$

alors les applications  $\beta_1^n$  et  $\beta_2^n$  sont définies sur le facteur  $C_{p+q+l}^s(O_c^l)$  par les formules :

$$\begin{aligned} \triangleright \beta_1^n(g_1 \otimes g_2) &= \sum_{\sigma \in Sh_{p,q,l}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \times \Delta^l \xrightarrow{\lambda_2'(g_1; g_2)} O_c^l \right\}, \\ \triangleright \beta_2^n(g_1 \otimes g_2) &= \sum_{r+s=l} \sum_{\sigma \in Sh_{p,q;r,s}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^r \times \Delta^q \times \Delta^s \xrightarrow{g_1^r \times g_2^s} O_c^r \times O_c^s \xrightarrow{*_2; c(-;-)} O_c^l \right\} \\ &= \sum_{r+s=l} \sum_{\sigma \in Sh_{p,q;r,s}} \varepsilon(\sigma) \left\{ \Delta^{p+q+l} \xrightarrow{S_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \times \Delta^r \times \Delta^s \xrightarrow{id \times id \times s} \Delta^p \times \Delta^q \times \Delta^l \xrightarrow{\lambda_2'(g_1; g_2)} O_c^l \right\}, \end{aligned}$$

avec  $\lambda_2'(g_1; g_2)(x; y; z) = \lambda_2(g_1(x); g_2(y))(z)$  et  $s : \Delta^r \times \Delta^s \rightarrow \Delta^{r+s}$  introduite dans l'application 5.3.6. On peut donc exprimer  $\beta_2$  à l'aide de la subdivision shuffle. On va ainsi pouvoir utiliser l'homotopie  $\{t_n\}_{n \geq 0}$ , issue de l'application 5.3.6, pour construire l'homotopie  $\{h_n\}_{n \geq 0}$ .

Remarquons que, sur le facteur  $C_{n+l}^s(O_c^l)$ , les applications  $\beta_1^n$  et  $\beta_2^n$  correspondent à l'image de l'élément  $id_p \otimes id_q \otimes id_l \in C_p^s(\Delta^p) \otimes C_q^s(\Delta^q) \otimes C_l^s(\Delta^l)$  via les composées verticales à gauche du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \longleftarrow \bigoplus_{a+b+c=n+l} C_a^s(\Delta^p) \otimes C_b^s(\Delta^q) \otimes C_c^s(\Delta^l) & \longleftarrow & \bigoplus_{a+b+c=n+l+1} C_a^s(\Delta^p) \otimes C_b^s(\Delta^q) \otimes C_c^s(\Delta^l) & \longleftarrow & \cdots \quad (5.16) \\ & & \searrow t'_{n+l}(\Delta^l) & & \\ \cdots \longleftarrow \bigoplus_{a+b+c=n+l} C_a^s(\Delta^p) \otimes C_b^s(\Delta^q) \otimes C_c^s(\Delta^l) & \longleftarrow & \bigoplus_{a+b+c=n+l+1} C_a^s(\Delta^p) \otimes C_b^s(\Delta^q) \otimes C_c^s(\Delta^l) & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow EM & & \downarrow EM \\ \cdots \longleftarrow C_{n+l}^s(\Delta^p \times \Delta^q \times \Delta^l) & \longleftarrow & C_{n+l+1}^s(\Delta^p \times \Delta^q \times \Delta^l) & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow C_{n+l}^s(\lambda_2'(g_1; g_2)) & & \downarrow C_{n+l+1}^s(\lambda_2'(g_1; g_2)) \\ \cdots \longleftarrow C_{n+l}^s(O_c^l) & \longleftarrow & C_{n+l+1}^s(O_c^l) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

avec  $t'_n$  une opération définie à partir de l'homotopie  $\{t_n\}$  entre les morphismes de chaînes provenant de l'identité et de la subdivision shuffle (voir l'application 5.3.6) :

$$\begin{aligned} t'_{n+l}(\Delta^l) : \bigoplus_{a+b+c=n+l} C_a^s(\Delta^p) \otimes C_b^s(\Delta^q) \otimes C_c^s(\Delta^l) &\longrightarrow \bigoplus_{a+b+c=n+l+1} C_a^s(\Delta^p) \otimes C_b^s(\Delta^q) \otimes C_c^s(\Delta^l) \\ x \otimes y \otimes z &\longmapsto (-1)^{|x||y|} x \otimes y \otimes t_{|z|}(\Delta^l)(z) \end{aligned}$$

Par construction, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (d \circ t'_{n+l}(\Delta^l) + t'_{n+l-1}(\Delta^l) \circ d)(x \otimes y \otimes z) &= d\left((-1)^{|x||y|} x \otimes y \otimes t_{|z|}(\Delta^l)(z)\right) + t'_{n+l-1}(\Delta^l)\left(d(x) \otimes y \otimes z + (-1)^{|x|} x \otimes d(y) \otimes z + (-1)^{|x||y|} x \otimes y \otimes d(z)\right) \\ &= (-1)^{|x||y|} d(x) \otimes y \otimes t_{|z|}(\Delta^l)(z) + (-1)^{|y|} x \otimes d(y) \otimes t_{|z|}(\Delta^l)(z) + x \otimes y \otimes d(t_{|z|}(\Delta^l)(z)) \\ &\quad + (-1)^{(|x|-1)|y|} d(x) \otimes y \otimes t_{|z|}(\Delta^l)(z) + (-1)^{|y|-1} x \otimes d(y) \otimes t_{|z|}(\Delta^l)(z) + x \otimes y \otimes t_{|z|}(\Delta^l)(d(z)) \\ &= x \otimes y \otimes d(t_{|z|}(\Delta^l)(z)) + x \otimes y \otimes t_{|z|}(\Delta^l)(d(z)) \\ &= (id - id \otimes id \otimes S_{|z|}(\Delta^l))(x \otimes y \otimes z). \end{aligned}$$

On a donc la relation :

$$id - \oplus id \otimes id \otimes S_c(\Delta^l) = d \circ t'_{n+l}(\Delta^l) + t'_{n+l-1}(\Delta^l) \circ d. \quad (5.17)$$

On va utiliser la functorialité du diagramme (5.16) ainsi que la relation ci-dessus afin de montrer que la famille d'applications :

$$h_n(g_1 \otimes g_2) := \left\{ \left[ C_{n+l+1}^s(\lambda'_2(g_1; g_2)) \circ EM \circ t'_{n+l}(\Delta^l) \right] (id_p \otimes id_q \otimes id_l) \right\}_{l \geq 0} \in C_{n+1}(O_c),$$

forme une homotopie entre les morphismes de chaînes  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Pour cela, on doit vérifier la relation :

$$\beta_1^n - \beta_2^n = d \circ h_n + h_{n-1} \circ d.$$

Or la commutativité du diagramme (5.16) et du diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc} C_p^s(\Delta^p) \otimes C_q^s(\Delta^q) \otimes C_{l-1}^s(\Delta^{l-1}) & \xrightarrow{t'_{n+l-1}(\Delta^{l-1})} & C_p^s(\Delta^p) \otimes C_q^s(\Delta^q) \otimes C_l^s(\Delta^{l-1}) & \xrightarrow{EM} & C_{n+l}^s(\Delta^p \times \Delta^q \times \Delta^{l-1}) & \xrightarrow{C_{n+l}^s(\lambda'_2(g_1; g_2))} & C_{n+l}^s(O_c^{l-1}) \\ \downarrow id \otimes id \otimes \Sigma(-1)^i C_{l-1}^s(d^i) & & id \otimes id \otimes \Sigma(-1)^i C_l^s(d^i) & & \Sigma(-1)^i C_{n+l}^s(id \times id \times d^i) & & \Sigma(-1)^i C_{n+l}^s(d^i) \\ C_p^s(\Delta^p) \otimes C_q^s(\Delta^q) \otimes C_{l-1}^s(\Delta^l) & \xrightarrow{t'_{n+l-1}(\Delta^l)} & C_p^s(\Delta^p) \otimes C_q^s(\Delta^q) \otimes C_l^s(\Delta^l) & \xrightarrow{EM} & C_{n+l}^s(\Delta^p \times \Delta^q \times \Delta^l) & \xrightarrow{C_{n+l}^s(\lambda'_2(g_1; g_2))} & C_{n+l}^s(O_c^l) \end{array}$$

impliquent les égalités suivantes sur le facteur  $C_{n+l}^s(O_c^l)$  :

$$\begin{aligned} (d \circ h_n)(g_1 \otimes g_2) &= \partial \circ \left[ C_{n+l+1}^s(\lambda'_2(g_1; g_2)) \circ EM \circ t'_{n+l}(\Delta^l) \right] (id_p \otimes id_q \otimes id_l) \\ &\quad + (-1)^n \delta \circ \left[ C_{n+l}^s(\lambda'_2(g_1; g_2)) \circ EM \circ t'_{n+l-1}(\Delta^{l-1}) \right] (id_p \otimes id_q \otimes id_{l-1}) \\ &= \left[ C_{n+l}^s(\lambda'_2(g_1; g_2)) \circ EM \circ d \circ t'_{n+l}(\Delta^l) \right] (id_p \otimes id_q \otimes id_l) \\ &\quad + (-1)^n \left[ C_{n+l}^s(\lambda'_2(g_1; g_2)) \circ EM \circ t'_{n+l-1}(\Delta^l) \right] (id_p \otimes id_q \otimes d(id_{l-1})). \end{aligned}$$

De même, en utilisant des diagrammes similaires à (5.16), on obtient les égalités :

$$\begin{aligned} (h_n \circ d)(g_1 \otimes g_2) &= h_{n-1}(d g_1 \otimes g_2) + (-1)^p h_{n-1}(g_1 \otimes d g_2) \\ &= \left[ \sum_{i=0}^p (-1)^i C_{n+l}^s(\lambda'_2(d^i g_1; g_2)) \circ EM \circ t'_{n+l-1}(\Delta^l) \right] (id_{p-1} \otimes id_q \otimes id_l) \\ &\quad + (-1)^p \left[ \sum_{i=0}^q (-1)^i C_{n+l}^s(\lambda'_2(g_1; d^i g_2)) \circ EM \circ t'_{n+l-1}(\Delta^l) \right] (id_p \otimes id_{q-1} \otimes id_l) \\ &= \left[ C_{n+l}^s(\lambda'_2(g_1; g_2)) \circ EM \circ d \circ t'_{n+l-1}(\Delta^l) \right] (d(id_{p-1}) \otimes id_q \otimes id_l) \\ &\quad + (-1)^p \left[ C_{n+l}^s(\lambda'_2(g_1; g_2)) \circ EM \circ t'_{n+l-1}(\Delta^l) \right] (id_p \otimes d(id_{q-1}) \otimes id_l). \end{aligned}$$

Par exemple, le diagramme associé au premier facteur est le suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{p-1}^s(\Delta^{p-1}) \otimes C_q^s(\Delta^q) \otimes C_l^s(\Delta^l) & \xrightarrow{t'_{n+l-1}(\Delta^l)} & C_{p-1}^s(\Delta^{p-1}) \otimes C_q^s(\Delta^q) \otimes C_{l+1}^s(\Delta^l) & \xrightarrow{EM} & C_{n+l}^s(\Delta^{p-1} \times \Delta^q \times \Delta^l) \\
 \downarrow \Sigma(-1)^i c_{p-1}^s(d^i) \otimes id \otimes id & & \downarrow \Sigma(-1)^i c_{p-1}^s(d^i) \otimes id \otimes id & & \downarrow \Sigma(-1)^i C_{n+l}^s(d^i \times id \times id) \\
 C_{p-1}^s(\Delta^p) \otimes C_q^s(\Delta^q) \otimes C_l^s(\Delta^l) & \xrightarrow{t'_{n+l-1}(\Delta^l)} & C_{p-1}^s(\Delta^p) \otimes C_q^s(\Delta^q) \otimes C_{l+1}^s(\Delta^l) & \xrightarrow{EM} & C_{n+l}^s(\Delta^p \times \Delta^q \times \Delta^l) \\
 & & & & \nearrow \Sigma(-1)^i C_{n+l}^s(\lambda'_2(d^i g_1; g_2)) \\
 & & & & C_{n+l}^s(O_c^l) \\
 & & & & \nwarrow C_{n+l}^s(\lambda'_2(g_1; g_2))
 \end{array}$$

Au final, grâce à la relation (5.17) on obtient :

$$\begin{aligned}
 (d \circ h_n + h_{n-1} \circ d)(g_1 \otimes g_2) &= [C_{n+l+1}^s(\lambda'_2(g_1; g_2)) \circ EM] \circ [d \circ t'_{n+l}(\Delta^l) + t'_{n+l-1}(\Delta^l) \circ d](id_p \otimes id_q \otimes id_l) \\
 &= [C_{n+l+1}^s(\lambda'_2(g_1; g_2)) \circ EM] \circ [id - \oplus id \otimes id \otimes S_c(\Delta^l)](id_p \otimes id_q \otimes id_l) \\
 &= (\beta_1^n - \beta_2^n)(g_1 \otimes g_2).
 \end{aligned}$$

On a donc démontré que le morphisme de Bousfield préserve le produit commutatif. Pour le produit associatif et la structure de module à gauche, il suffit de remplacer l'application  $\lambda_2$  dans ce qui précède par les applications  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  respectivement. On a donc le résultat suivant :

**Théorème 5.3.7.** *Le morphisme de Bousfield induit un morphisme de  $sc_2$ -algèbres :*

$$(H_*(sTot(O_c)) ; H_*(sTot(O_o))) \longrightarrow (HH_*(O_c) ; HH_*(O_o)),$$

préservant les structures introduites dans les sections 5.1 et 5.2.

### 5.3.3 L'isomorphisme de Bousfield

Contrairement à l'homologie de Hochschild, l'homologie singulière associée à la semi-totalisation est définie uniquement en degré positif. Par conséquent, le morphisme de Bousfield n'est pas nécessairement un isomorphisme. Cependant, dans l'article [7], Bousfield démontre que l'application  $\phi_p^* : H_p(sTot(X^\bullet)) \rightarrow HH_p(X^\bullet)$  est un isomorphisme dès que  $p \geq 0$ , avec  $X^\bullet$  un espace semi-cosimplicial.

## 5.4 Suites spectrales de Bousfield et applications aux longs entrelacs

Dans ce qui précède, les opérades considérées sont par défaut non symétriques. On précisera la symétrie s'il y a une ambiguïté. Dans l'article [7], Bousfield introduit une suite spectrale calculant l'homologie singulière de la totalisation homotopique d'un espace cosimplicial. Grâce à la remarque 1.2.11, on sait que cette suite spectrale permet aussi de calculer l'homologie singulière de la semi-totalisation de l'espace semi-cosimplicial associé :

**Théorème 5.4.1.** [7] *Soit  $X^\bullet$  un espace cosimplicial. Il existe une suite spectrale du second cadran calculant l'homologie singulière de  $sTot(X^\bullet)$ . Sa page  $E^1$  est définie par :*

$$E_{-n; m}^1 := \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(s_*^i) \subseteq H_m(X^n), \quad (5.18)$$

et la différentielle est donnée par la restriction de l'application suivante :

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i H_m(d^i) : H_m(X^n) \rightarrow H_m(X^{n+1}). \quad (5.19)$$

Alternativement, on obtient la même suite spectrale à partir de la page  $E^2$  en prenant  $E_{-n; m}^1 = H_m(X^n)$  et l'application (5.19) comme différentielle (sans tenir compte de la restriction à l'intersection des noyaux des codégénérescences).



**Théorème 5.4.2.** [29, Proposition 3.4] On dit qu'un espace cosimplicial  $X^\bullet$  est bon à la page  $E^1$  si la suite spectrale de Bousfield (5.18) associée à  $X^\bullet$  satisfait les conditions suivantes :

- i)  $E_{-n,m}^1 = 0$  pour  $m \leq n$ ,
- ii) pour tout entier  $i$ , il existe un nombre fini de  $n$  tel que  $E_{-n,n+i}^1 \neq 0$ .

Si un espace cosimplicial  $X^\bullet$  est bon à la page  $E^1$  alors la suite spectrale de Bousfield associée à  $X^\bullet$  converge fortement vers  $H_*(sTot(X^\bullet))$ .

**Théorème 5.4.3.** [42, Théorème 7.2] Pour  $n \geq 4$ , l'espace cosimplicial associé à l'opérade multiplicative de Kontsevich  $\mathcal{K}_n$  est bon à la page  $E^1$ . En particulier, la suite spectrale associée à  $\mathcal{K}_n$  converge fortement vers  $H_*(\mathcal{L}_{1;n})$ , pour  $n \geq 4$ .

Notons qu'il existe une seconde suite spectrale calculant l'espace  $H_*(\mathcal{L}_{1;n})$  appelée la suite spectrale de Vassiliev qui consiste à étudier le complémentaire d'un nœud. Turchin, Lambrechts et Volić ont montré dans [29] que la page  $E^1$  de la suite spectrale de Vassiliev coïncide avec la page  $E^2$  de la suite spectrale de Bousfield associée à  $\mathcal{K}_n$ , pour  $n \geq 4$ . Cependant, pour  $n = 3$ , on ne sait pas si les suites spectrales convergent fortement et certains résultats laissent à penser que ces deux suites spectrales ne convergent pas vers le même objet. Dans le même article, les trois auteurs démontrent aussi que la suite spectrale de Bousfield associée à  $\mathcal{K}_n$  dégénère à la page  $E^2$  pour  $n \geq 4$ . Par la suite, Moriya dans [34] et indépendamment Tsopméné dans [46] ont étendu ce résultat pour  $n = 3$ .

**Théorème 5.4.4.** [34, 46] Pour  $n \geq 3$ , la suite spectrale de Bousfield à coefficients rationnels associée à  $\mathcal{K}_n$  dégénère à la page  $E^2$ .

Dans le chapitre précédent, on a vu que  $\mathcal{K}_n$  est une opérade symétrique multiplicative. On a montré que le  $\mathcal{K}_n$ -bimodule  $\Phi_k(\mathcal{K}_n)$  est équipé d'un morphisme de  $\mathcal{A}s$ -bimodules  $\eta : \mathcal{A}s \rightarrow \Phi_k(\mathcal{K}_n)$ . Par conséquent,  $\Phi_k(\mathcal{K}_n)$  possède une structure cosimpliciale. Cependant, malgré le fait que  $\mathcal{K}_n$  soit bon à la page  $E^1$ , on n'a aucune information sur la convergence forte de la suite spectrale de Bousfield associée à  $\Phi_k(\mathcal{K}_n)$ . Néanmoins, Tsopméné réussit dans [45] à obtenir des résultats sur la dégénérescence de la suite spectrale :

**Théorème 5.4.5.** [45, Théorème 1.4] Pour  $n \geq 6$ , la suite spectrale de Bousfield à coefficients rationnels associée à  $\Phi_k(\mathcal{K}_n)$  dégénère à la page  $E^2$ .

**Définition 5.4.6.** Soit  $X^\bullet$  un espace topologique. On note  $HH_*^2(X^\bullet)$  l'homologie de Hochschild (voir la définition 1.5.8) associée au bicomplexe défini par :

$$X^{p,q} := H_p(X^q),$$

et dont les différentielles sont données par les formules :

$$d_1 = 0 : H_p(X^q) \rightarrow H_{p-1}(X^q) \quad \text{et} \quad d_2 = (-1)^{p-q+1} \sum_{i=0}^{q+1} H_p(d^i) : H_p(X^q) \rightarrow H_p(X^{q+1}).$$

Grâce à la seconde description de la suite spectrale de Bousfield du théorème 5.4.1, on peut identifier la page  $E^2$  de la suite spectrale de Bousfield à l'homologie de Hochschild  $HH_*^2(X^\bullet)$ . Si  $X^\bullet$  provient d'une opérade multiplicative alors  $HH_*(X^\bullet)$  et  $HH_*^2(X^\bullet)$  sont toutes deux des algèbres de Gerstenhaber. De plus, dans le cas particulier  $X^\bullet = \mathcal{K}_d$  et  $d \geq 3$ , Moriya [34] et indépendamment Tsopméné [46] ont montré que  $HH_*(X^\bullet)$  et  $HH_*^2(X^\bullet)$  sont isomorphes en tant qu'algèbre de Gerstenhaber. On va s'intéresser au cas où un couple d'espaces semi-cosimpliciaux provient d'une opérade pointée.

**Définition 5.4.7.** Soit  $P$  une  $S$ -opérade (symétrique) dans la catégorie  $dg-Vect_{\mathbb{K}}$ , avec  $S$  un ensemble. Une  $S$ -opérade (symétrique) topologique  $O$  est dite  $P$ -formelle s'il existe un zig-zag d'équivalences faibles dans la catégorie des  $S$ -opérades (symétriques) différentielles graduées :

$$\begin{array}{ccccccc} P & \xlongequal{\quad} & P & \xlongequal{\quad} & \dots & \xlongequal{\quad} & P & \xlongequal{\quad} & P \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ C_*^s(O) & \xleftarrow{\simeq} & \bullet & \xrightarrow{\simeq} & \dots & \xleftarrow{\simeq} & \bullet & \xrightarrow{\simeq} & H_*(O) \end{array}$$

Notons que dans cette catégorie, un morphisme est une équivalence faible s'il induit un quasi-isomorphisme en chaque degré.

**Proposition 5.4.8.** *Si  $O$  est une opérade symétrique multiplicative  $\Sigma[\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}]$ -formelle alors la  $\{o; c\}$ -opérade non symétrique  $\Theta$ , obtenue à partir du couple  $(O; \Phi_k(O))$  via la construction (4.6), est  $\mathcal{A}ct_{\mathbb{K}}$ -formelle.*

*Démonstration.* Comme  $O$  est  $\Sigma[\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}]$ -formelle, on dispose d'un zig-zag d'équivalences faibles dans la catégorie des opérades symétriques différentielles graduées :

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma[\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}] & \xlongequal{\quad} & \Sigma[\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}] & \xlongequal{\quad} & \cdots & \xlongequal{\quad} & \Sigma[\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}] & \xlongequal{\quad} & \Sigma[\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}] \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ C_*^s(O) & \xleftarrow{\simeq} & A_1 & \xrightarrow{\simeq} & \cdots & \xleftarrow{\simeq} & A_m & \xrightarrow{\simeq} & H_*(O) \end{array}$$

avec  $A_i$  des opérades symétriques multiplicatives. En oubliant l'action du groupe des permutations, on obtient un zig-zag de d'équivalences faibles dans la catégorie des opérades non symétriques différentielles graduées :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}s_{\mathbb{K}} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{A}s_{\mathbb{K}} & \xlongequal{\quad} & \cdots & \xlongequal{\quad} & \mathcal{A}s_{\mathbb{K}} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{A}s_{\mathbb{K}} & \tag{5.20} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ C_*^s(O) & \xleftarrow{\simeq} & A_1 & \xrightarrow{\simeq} & \cdots & \xleftarrow{\simeq} & A_m & \xrightarrow{\simeq} & H_*(O) \end{array}$$

La construction de la section 4.2 peut s'adapter dans le contexte d'opérades symétriques différentielles graduées. Pour tout entier  $i \in \{1 \dots, m\}$ ,  $\Phi_k(A_i)$  est un  $A_i$ -bimodule équipé d'un morphisme de  $\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}$ -bimodules  $\eta_i : \mathcal{A}s_{\mathbb{K}} \rightarrow \Phi_k(A_i)$ . De plus, on a les égalités  $\Phi_k(C_*^s(O)) = C_*^s(\Phi_k(O))$  et  $\Phi_k(H_*(O)) = H_*(\Phi_k(O))$ . Le diagramme (5.20) induit le diagramme dans la catégorie des  $\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}$ -bimodules différentiels gradués :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}s_{\mathbb{K}} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{A}s_{\mathbb{K}} & \xlongequal{\quad} & \cdots & \xlongequal{\quad} & \mathcal{A}s_{\mathbb{K}} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{A}s_{\mathbb{K}} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ C_*^s(\Phi_k(O)) & \xleftarrow{\simeq} & \Phi_k(A_1) & \xrightarrow{\simeq} & \cdots & \xleftarrow{\simeq} & \Phi_k(A_m) & \xrightarrow{\simeq} & H_*(\Phi_k(O)) \end{array}$$

dont les morphismes horizontaux au bas du diagramme sont des équivalences faibles. Grâce à la functorialité de la construction (4.6), on dispose d'un zig-zag d'équivalences faibles dans la catégorie des  $\{o; c\}$ -opérades non symétriques différentielles graduées :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}ct_{\mathbb{K}} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{A}ct_{\mathbb{K}} & \xlongequal{\quad} & \cdots & \xlongequal{\quad} & \mathcal{A}ct_{\mathbb{K}} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{A}ct_{\mathbb{K}} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ C_*^s(\Theta) & \xleftarrow{\simeq} & \Theta_1 & \xrightarrow{\simeq} & \cdots & \xleftarrow{\simeq} & \Theta_m & \xrightarrow{\simeq} & H_*(\Theta) \end{array}$$

avec  $\Theta_i$  l'opérade colorée obtenue à partir du couple  $(A_i; \Phi_k(A_i))$  via la construction (4.6). Par conséquent,  $\Theta$  est  $\mathcal{A}ct_{\mathbb{K}}$ -formelle.  $\square$

**Corollaire 5.4.9.** *Soit  $O$  est une opérade symétrique multiplicative. Si  $O$  est  $\Sigma[\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}]$ -formelle alors on a un isomorphisme de  $sc_2$ -algèbres :*

$$(HH_*(O); HH_*(\Phi_k(O))) \cong (HH_*^2(O); HH_*^2(\Phi_k(O)))$$

D'après Kontsevich et Tamarkin, on sait que l'opérade de Kontsevich est formelle en tant qu'opérade symétrique (i.e. qu'il existe un zig-zag d'équivalence faible entre  $C_*^s(\mathcal{K}_d)$  et  $H_*(\mathcal{K}_d)$  dans la catégorie des opérades symétriques différentielles graduées) si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . De plus Moriya et indépendamment Tsopméné ont montré que l'opérade de Kontsevich est  $\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}$ -formelle. Cependant rien ne garantit que  $\mathcal{K}_d$  soit  $\Sigma[\mathcal{A}s_{\mathbb{K}}]$ -formelle.



## Delooping relatif d'ordre supérieur

Dans ce qui précède, on s'est intéressé à l'étude des opérades pointées car cela nous a permis d'avoir des résultats sur les couples d'espaces semi-cosimpliciaux. On a pu ainsi montrer que la paire  $(\mathcal{L}_{1;n}; \mathcal{L}_{k;n})$  était faiblement équivalente à une  $SC_2$ -algèbre. Cependant il est souvent difficile d'identifier un espace topologique à un espace semi-cosimplicial. Dans de nombreux cas les relations semi-cosimpliciales sont vérifiées uniquement à homotopie près. Par exemple on ne dispose pas de remplacements cosimpliciaux pour les espaces de plongements  $Emb(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$  et  $Emb(\bigsqcup_k \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$  lorsque la dimension de la variété source est strictement supérieure à 1. Il est néanmoins possible de les identifier à des espaces de bimodules infinitésimaux sous l'opérade  $C_d$ . C'est pourquoi il est nécessaire de généraliser les résultats du chapitre 3 afin d'étudier ces cas de figure.

### 6.1 La Boardman-Vogt résolution pour les $(P-Q)_\Sigma$ bimodules

On a introduit dans le chapitre 2 la notion de bimodule libre engendré par une  $\Sigma$ -collection. Cela nous a permis de définir une structure de catégorie modèle sur  $\Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}$  où  $P$  et  $Q$  sont deux opérades colorées symétriques. La particularité de cette structure modèle est que tous ses objets sont fibrants et que l'on dispose d'un ensemble générateur de cofibrations. On va montrer dans cette section que la catégorie d'arbres introduite pour construire le bimodule libre va nous permettre de construire de manière fonctorielle des remplacements cofibrants. On se fixe pour la suite  $P$  et  $Q$  deux  $S$ -opérades symétriques ainsi qu'un  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule  $M$ . On commence par introduire l'ensemble des arbres qui va encoder la structure.

**Définition 6.1.1.** On note  $\Phi_n$  l'ensemble constituée des couples  $(T; V^p(T))$  avec  $T$  un  $S$ -arbre ayant  $n$  feuilles et  $V^p(T)$  un sous-ensemble des sommets de l'arbre appelées perles. On demande que chaque chemin reliant une feuille ou un sommet univalent (i.e sans entrée) à la racine passe par une unique perle. Les perles forment ainsi une section divisant l'arbre en deux parties. Un élément de  $\Phi_n$  est appelé un *arbre à section*. On désigne par  $V^u(T)$  l'ensemble des sommets au-dessus de la section et par  $V^d(T)$  ceux situés au-dessous de la section.

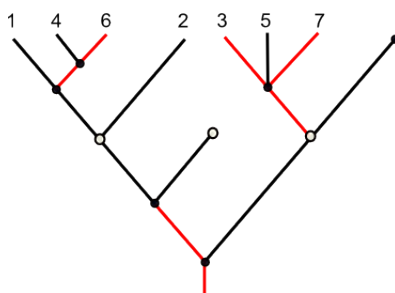


FIGURE 6.1 – Illustration d'un arbre à section.

**Construction 6.1.2.** A partir d'un  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule  $M$  on peut construire le  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule  $\mathcal{B}(M)$  dont les points sont les classes triplets  $[T; \{t_v\}; \{a_v\}]$  avec  $T$  un  $S$ -arbre à section et  $\{a_v\}$  une famille de points indexant les sommets de l'arbre. Les perles sont alors indexées par des points du bimodule  $M$  tandis que les sommets au-dessus de la section sont indexés par des points de  $Q$  et ceux au-dessous de la section sont indexés par des points de  $P$ . Enfin  $\{t_v\}$  est une famille de réels dans l'intervalle  $I = [0, 1]$  paramétrant uniquement les sommets non perlés. Si une arête  $e$  au-dessus de la section connecte deux sommets non perlés alors on demande que  $t_{s(e)} \geq t_{t(e)}$ . Dans le cas où  $e$  est au-dessous de la section, on a  $t_{s(e)} \leq t_{t(e)}$ . On construit  $\mathcal{B}(M)$  comme un quotient du sous-espace :

$$\prod_{\Phi_n} \prod_{v \in V^d(T)} [P(e_1(v), \dots, e_{|v|}(v); e_0(v)) \times I] \times \prod_{v \in V^p(T)} M(e_1(v), \dots, e_{|v|}(v); e_0(v)) \times \prod_{v \in V^u(T)} [Q(e_1(v), \dots, e_{|v|}(v); e_0(v)) \times I]$$

obtenu à partir des restrictions sur les familles  $\{t_v\}$ . La relation d'équivalence est engendrée par les conditions suivantes :

i) Si  $*$  est une unité de  $P$  ou  $Q$  alors on a la relation suivante sur les sous-arbres :

$$\begin{array}{c} | \\ \bullet (*; t) \\ | \end{array} \sim \begin{array}{c} | \\ | \end{array}$$

ii) Si un sommet  $v$  est indexé par  $a \cdot \sigma$ , avec  $\sigma \in \Sigma_{|in(v)|}$ , alors on a la relation suivante :

$$\begin{array}{c} \boxed{T_1} \dots \boxed{T_n} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet (a \cdot \sigma; t) \\ | \end{array} \sim \begin{array}{c} \boxed{T_{\sigma^{-1}(1)}} \dots \boxed{T_{\sigma^{-1}(n)}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet (a; t) \\ | \end{array}$$

iii) Si deux sommets consécutifs sont paramétrés par le même réel  $t \in [0, 1]$  alors on peut contracter l'arête interne les reliant via la structure opéradique. Le sommet issu de la contraction est ensuite paramétré par  $t$ .

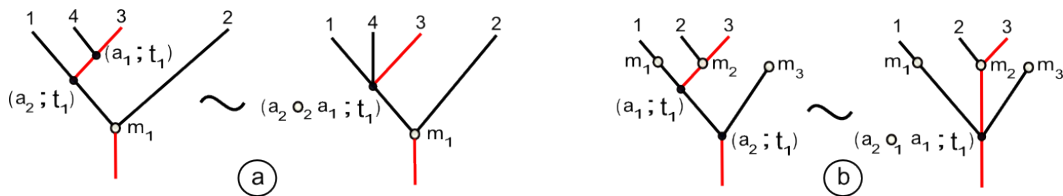


FIGURE 6.2 – Exemples de la relation (iii).

iv) Si un sommet au-dessus de la section est paramétré par 0 alors on peut contracter sa sortie. Inversement, si un sommet au-dessous de la section est paramétré par 0 alors on peut contracter simultanément toutes ses entrées via la structure de bimodule à gauche.

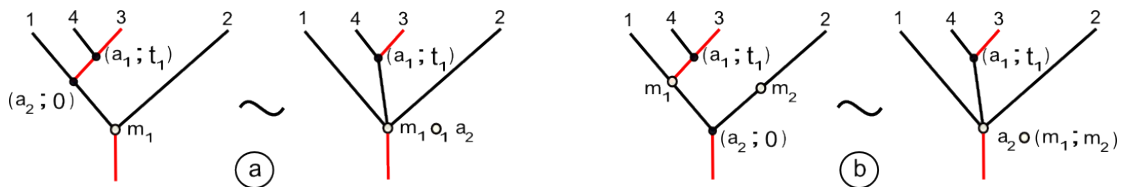


FIGURE 6.3 – Exemples de la relation (iv).

Afin de définir la structure de bimodule à droite, notons qu'un point  $a \in Q(s_1, \dots, s_n; s'_i)$  peut être interprété comme une corolle non perlée ayant  $n$  entrées indexées respectivement par les couleurs  $s_i$  et la sortie par la couleur  $s'_i$  tandis que le sommet est indexé par le point  $a$ . Si  $[T; \{t_v\}; \{a_v\}]$  est un point de  $\mathcal{B}(M)(s'_1, \dots, s'_n; s'_{n+1})$  alors la composée  $[T; \{t_v\}; \{a_v\}] \circ_i a$  consiste à greffer la corolle sur la  $i$ -ème feuille de  $T$  et à paramétrer le nouveau sommet non perlé par le réel 1.

De manière similaire, si  $b \in P(s_1, \dots, s_n; s_{n+1})$  et  $[T_i; \{t_v^i\}; \{a_v^i\}]$  est une famille de points dans les espaces  $\mathcal{B}(M)(s_1^i, \dots, s_n^i; s_i)$  alors la structure de  $P$ -bimodule à gauche consiste à greffer sur chacune des entrées de la corolle associée à  $b$  le point de  $\mathcal{B}(M)$  correspondant. Le nouveau sommet non perlé issu de la corolle est ensuite paramétré par 1.

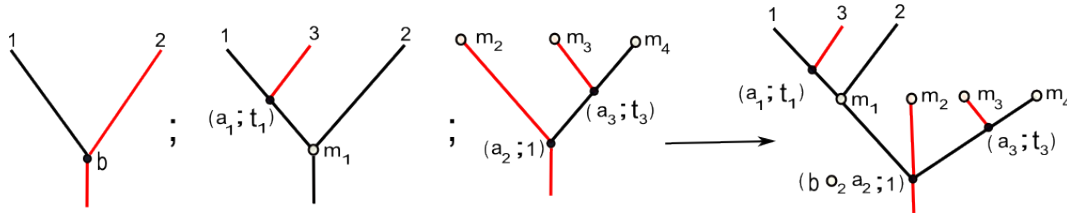


FIGURE 6.4 – Illustration de la structure de bimodule à gauche.

On rappelle que le  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule libre  $\mathcal{F}_B(M)$  engendré par  $M$  est l'ensemble des couples  $[T; \{a_v\}]$  avec  $T$  un  $S$ -arbre à section borné et  $\{a_v\}$  une famille de points indexant les sommets de l'arbre (voir la définition 2.2.9). L'ensemble des  $S$ -arbres à section bornés à  $n$  feuilles peut être interprété comme un sous-ensemble de  $\Phi_n$  constituée des éléments n'ayant pas deux sommets non perlés consécutifs. On dispose donc d'un morphisme :

$$\tau : \mathcal{F}_B(M) \rightarrow \mathcal{B}(M) ; [T; \{a_v\}] \mapsto [T; \{1_v\}; \{a_v\}], \quad (6.1)$$

paramétrant tous les sommets non perlés par 1. Grâce à la condition (iii), l'application  $\tau$  est un morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules. On considère aussi l'application :

$$\mu : \mathcal{B}(M) \rightarrow M ; [T; \{t_v\}; \{a_v\}] \mapsto [T; \{0_v\}; \{a_v\}], \quad (6.2)$$

qui fixe les paramètres des sommets non perlés à 0. On identifie l'arbre obtenu à une corolle indexée par un point de  $M$ . Les conditions (iii) et (iv) impliquent que l'application  $\mu$  est un morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules.

**Théorème 6.1.3.** *Soient  $P, Q$  deux  $S$ -opérades symétriques bien pointées  $\Sigma$ -cofibrantes et  $M$  un  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule. Si  $M$  est cofibrant en tant que  $\Sigma$ -collection alors les applications  $\tau : \mathcal{F}_B(M) \rightarrow \mathcal{B}(M)$  et  $\mu : \mathcal{B}(M) \rightarrow M$  sont respectivement une cofibration et une équivalence faible dans la catégorie modèle  $\Sigma\text{-Bimod}_{P-Q}$ . Par conséquent  $\mathcal{B}(M)$  est un remplacement cofibrant de  $M$  en tant que  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule.*

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est similaire à celle de Berger et Moerdijk dans le cas opéradique. L'étape clef de la démonstration est d'exprimer  $\mathcal{B}(M)$  à l'aide d'une séquence de cofibrations acycliques dans la catégorie des  $\Sigma$ -collections :

$$\mathcal{B}(M)_1 \rightarrow \mathcal{B}(M)_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{B}(M)_{k-1} \rightarrow \mathcal{B}(M)_k \rightarrow \dots \quad (6.3)$$

avec  $\mathcal{B}(M)_k(n)$  la restriction aux  $S$ -arbres à section à  $n$  feuilles ayant au plus  $k$  sommets. Si  $k = 1$  alors le sommet est automatiquement une perle et  $\mathcal{B}(M)_1$  coïncide avec  $M$ . Pour la preuve on va reprendre les notations de Berger et Moerdijk dans [3].

Pour  $T$  un  $S$ -arbre à section, on note  $H(T)$  l'espace des paramétrisations possibles des sommets non perlés de  $T$  par des réels de l'intervalle  $[0, 1]$  respectant les restrictions décrites dans la construction 6.1.2. Si  $l$  désigne le nombre de sommets non perlés de l'arbre  $T$  alors  $H(T)$  est un polytope inclus dans  $[0, 1]^l$  issu d'un recollement de simplexes. Par exemple, si  $T$  est un arbre composé uniquement de sommets à une entrée alors  $H(T) = \Delta^{|V^u(T)|} \times \Delta^{|V^d(T)|}$ .

Soit  $D$  un sous-ensemble des sommets non-perlés de  $T$ . On définit  $H_D(T)$  comme le sous-espace de  $H(T)$  dont les sommets  $e \in D$  au-dessus de la section vérifient l'égalité  $t_e = t_{e'}$  si  $e$  possède un successeur  $e'$  non perlé, ou l'égalité  $t_e = 0$  si le successeur de  $e$  est une perle. Dans le cas où le sommet  $e \in D$  est au-dessous de la section alors on a soit l'égalité  $t_e = t_{e'}$ , avec  $e'$  un antécédent non perlé de  $e$ , soit l'égalité  $t_e = 0$  si tous les sommets antécédents de  $e$  sont des perles. Par construction l'inclusion :

$$H^-(T) = \bigcup_{D \neq \emptyset} H_D(T) \rightarrow H(T) \quad (6.4)$$

est une cofibration acyclique. En effet, à cause des restrictions sur les paramétrisations issues de la construction 6.1.2, l'arbre  $T$  induit un ensemble de paramètres maximaux indexé par un sous-ensemble  $V'$  des sommets non-perlés. Un sommet  $v$  non perlé est un élément de  $V'$  si c'est la racine de  $T$  ou si aucune des arêtes entrantes de  $v$  est une arête interne. Par construction,  $H_D(T)$  est une face du polytope  $H(T)$  et le sous-espace  $H^-(T)$  est constitué de toutes les faces du polytope excepté celles de la forme  $t_v = 1$  avec  $v \in V'$ . L'application 6.4 est donc une cofibration. Pour montrer que la cofibration est acyclique, on vérifie que  $H^-(T)$  est contractile via l'homotopie :

$$h : H^-(T) \times [0, 1] \rightarrow H^-(T) ; (\{t_v\}; u) \mapsto \{ut_v\}, \quad (6.5)$$

faisant tendre les paramètres vers 0.

De même, posons  $\underline{M}(T)$  l'espace des indexations des sommets de  $T$  par des familles  $\{a_v\}$  vérifiant les restrictions décrites dans la construction 6.1.2. Si  $B$  est un sous-ensemble de sommets non perlés possédant une seule entrée de la même couleur que sa sortie alors on définit  $\underline{M}_B(T)$  comme le sous-espace de  $\underline{M}(T)$  dont les sommets  $v \in B$  sont indexés par une unité de  $P$  ou  $Q$  selon si on est au-dessous ou au-dessus de la section. Le groupe des automorphismes de  $T$ , noté  $Aut(T)$ , agit sur les espaces  $\underline{M}(T)$ ,  $\underline{M}_B(T)$  et l'inclusion  $\underline{M}_B(T) \rightarrow \underline{M}(T)$  préserve cette action. Comme les  $S$ -opéradés  $P$  et  $Q$  sont bien pointés et que tous nos objets sont  $\Sigma$ -cofibrants, l'application :

$$\underline{M}^-(T) = \bigcup_{B \neq \emptyset} \underline{M}_B(T) \rightarrow \underline{M}(T) \quad (6.6)$$

est une  $Aut(T)$ -cofibration. Notons  $(H \times \underline{M})^-(T)$  la somme amalgamée :

$$(H^-(T) \times \underline{M}(T)) \bigcup_{H^-(T) \times \underline{M}^-(T)} (H(T) \times \underline{M}^-(T)). \quad (6.7)$$

D'après la propriété (2.8) des catégories monoïdales modèles, l'application  $(H \times \underline{M})^-(T) \rightarrow H(T) \times \underline{M}(T)$ , induite par les cofibrations (6.4) et (6.6), est une  $Aut(T)$ -cofibration acyclique. Par conséquent  $\mathcal{B}(\underline{M})_k(n)$  peut être obtenu à partir de  $\mathcal{B}(M)_{k-1}(n)$  via la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{[T]; T \in \Phi_{n,k}} (H \times \underline{M})^-(T) \times_{Aut(T)} I[\Sigma_n] & \longrightarrow & \prod_{[T]; T \in \Phi_{n,k}} (H(T) \times \underline{M}(T)) \times_{Aut(T)} I[\Sigma_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(M)_{k-1}(n) & \longrightarrow & \mathcal{B}(M)_k(n) \end{array} \quad (6.8)$$

où  $\Phi_{n;k}$  est le sous-ensemble de  $\Phi_n$  constitué des arbres ayant au plus  $k$  sommets. L'application verticale à gauche du diagramme (6.8) provient des deux isomorphismes  $\underline{M}_B(T) \rightarrow \underline{M}(T/B)$  et  $H_D(T) \rightarrow H(T/D)$  avec  $T/B$  le  $S$ -arbre à section obtenu en supprimant les sommets  $B$  et  $T/D$  le  $S$ -arbre à section obtenu en contractant la sortie ou une partie des entrées des sommets dans  $D$  selon si on est au-dessus ou au-dessous de la section. Comme les cofibrations sont stables par les sommes amalgamées, l'application  $\mathcal{B}(M)_{k-1}(n) \rightarrow \mathcal{B}(M)_k(n)$  est une  $\Sigma_n$ -cofibration acyclique. Ainsi (6.3) est une séquence de  $\Sigma$ -cofibrations acycliques.

L'une des conséquences est que l'application  $\mathcal{B}(M)_1 \rightarrow \mathcal{B}(M)$  est une équivalence faible. Comme la composée  $\mathcal{B}(M)_1 \rightarrow \mathcal{B}(M) \rightarrow M$  avec  $\mu$  coïncide avec l'identité, l'axiome **MC2** des catégories modèles implique que  $\mu$  est une équivalence faible en tant que  $\Sigma$ -collection et donc aussi en tant que  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule.

Afin de démontrer que l'application  $\tau$  est une cofibration dans la catégorie des  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules, on va introduire un raffinement de la séquence de  $\Sigma$ -cofibrations acycliques (6.3). Si  $T$  est un  $S$ -arbre à section et  $D$  un sous-ensemble de sommets non perlés, alors on définit  $H_D^+(T)$  comme le sous-espace de  $H(T)$  contenant  $H_D(T)$  dont les sommets  $e \in D$  peuvent aussi être paramétrés par 1. Par conséquent  $H^+(T) = \bigcup_{D \neq \emptyset} H_D^+(T)$  est constitué de l'ensemble des faces du polytope  $H(T)$ . On dispose donc d'une succession de cofibrations  $H^-(T) \rightarrow H^+(T) \rightarrow H(T)$  non-acycliques. En effet, contrairement à  $H^-(T)$ , l'espace  $H^+(T)$  n'est pas nécessairement contractile. Posons  $(H \times \underline{M})^+(T)$  la somme amalgamée :

$$(H^+(T) \times \underline{M}(T)) \bigcup_{H^+(T) \times \underline{M}^-(T)} (H(T) \times \underline{M}^-(T)). \quad (6.9)$$

On a une succession de  $Aut(T)$ -cofibrations  $(H \times \underline{M})^-(T) \rightarrow (H \times \underline{M})^+(T) \rightarrow H(T) \times \underline{M}(T)$  non-acycliques ainsi qu'une factorisation du diagramme (6.8) :

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{[T] \in \Phi_{n;k}} (H \times \underline{M})^-(T) \times_{Aut(T)} I[\Sigma_n] & \longrightarrow & \coprod_{[T] \in \Phi_{n;k}} (H \times \underline{M})^+(T) \times_{Aut(T)} I[\Sigma_n] & \longrightarrow & \coprod_{[T] \in \Phi_{n;k}} (H(T) \times \underline{M}(T)) \times_{Aut(T)} I[\Sigma_n] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(M)_{k-1}(n) & \longrightarrow & \mathcal{B}(M)_{k-1}^+(n) & \longrightarrow & \mathcal{B}(M)_k(n) \end{array}$$

avec  $\mathcal{B}(M)_{k-1}^+(n)$  obtenu comme la somme amalgamée de la partie gauche du diagramme. Comme les cofibrations sont préservées par les sommes amalgamées, on peut écrire  $\mathcal{B}(M)$  comme la colimite de la séquence de  $\Sigma$ -cofibrations suivante :

$$\mathcal{B}(M)_1 \longrightarrow \mathcal{B}(M)_1^+ \longrightarrow \mathcal{B}(M)_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{B}(M)_{k-1} \longrightarrow \mathcal{B}(M)_{k-1}^+ \longrightarrow \mathcal{B}(M)_k \longrightarrow \cdots \quad (6.10)$$

Maintenant on se donne  $\chi : Y \rightarrow X$  une fibration acyclique dans la catégorie des  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules ainsi que le diagramme commutatif (I) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_B(M) & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \mu \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathcal{B}(M) & \longrightarrow & X \end{array} \quad (I) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(M)_0 & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathcal{B}(M) & \longrightarrow & X \end{array} \quad (II)$$

On veut montrer que le diagramme de gauche admet d'un relèvement dans la catégorie des  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules. Grâce à la propriété universelle du bimodule libre, un morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules  $\alpha : \mathcal{F}_B(M) \rightarrow Y$  est équivalent à la donnée d'un morphisme de  $\Sigma$ -collections  $\alpha : M = \mathcal{B}(M)_0 \rightarrow Y$ . Pour avoir l'existence du relèvement du diagramme (I), il suffit donc de montrer qu'il existe un relèvement du diagramme (II) dans la catégorie des  $\Sigma$ -collections qui préserve la structure de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule.

Notons que  $\mathcal{B}(M)_k$  ne possède pas de structure de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule car les opérations ne préservent pas le nombre de sommets. On dit que le morphisme de  $\Sigma$ -collections  $f_k : \mathcal{B}(M)_k \rightarrow Y$  est un morphisme de  $(P-Q)_k$  bimodules si pour tout point  $x \in \mathcal{B}(M)_k$  s'écrivant sous la forme :

$$x = y_0 \circ (y_1, \dots, y_n) \qquad \text{ou} \qquad x = z_0 \circ_i z_1, \quad (6.11)$$

avec  $y_0 \in P$ ,  $z_1 \in Q$  et  $z_0, y_{i>0}$  des points de  $\mathcal{B}(M)_k$ , on a l'égalité :

$$f_k(x) = f_k(y_0) \circ (f_k(y_1), \dots, f_k(y_n)) \qquad \text{ou} \qquad f_k(x) = f_k(z_0) \circ_i f_k(z_1). \quad (6.12)$$

Intuitivement  $f_k$  n'est pas un morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules mais sa limite lorsque  $k$  tend vers l'infini l'est. On va construire par récurrence une famille  $\{\alpha_k : \mathcal{B}(M)_k \rightarrow Y\}$  où  $\alpha_k$  est un morphisme de  $(P-Q)_k$  bimodule prolongeant  $\alpha_{k-1}$  et relevant le diagramme (II). Posons  $\alpha_0 = \alpha : \mathcal{B}(M)_0 \rightarrow Y$ . Supposons que l'on dispose d'un morphisme de  $(P-Q)_{k-1}$  bimodules  $\alpha_{k-1} : \mathcal{B}(M)_{k-1} \rightarrow Y$  prolongeant  $\alpha$ . Remarquons que les points de  $\mathcal{B}(M)_k$  qui sont de la forme (6.11) sont ceux indexés par un arbre ayant un sommet paramétré par 1. Il existe donc un unique morphisme de  $(P-Q)_k$  bimodules  $\alpha_{k-1}^+ : \mathcal{B}(M)_{k-1}^+ \rightarrow Y$  tel que les égalités (6.12) soient vérifiées. On définit  $\alpha_k : \mathcal{B}(M)_k \rightarrow Y$  en prenant un relèvement quelconque du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(M)_{k-1}^+ & \xrightarrow{\alpha_{k-1}^+} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathcal{B}(M)_k & \longrightarrow & X \end{array} \quad (6.13)$$

Comme  $\mathcal{B}(M)_{k-1}^+ \rightarrow \mathcal{B}(M)_k$  est une  $\Sigma$ -cofibration et  $\chi : Y \rightarrow X$  est une  $\Sigma$ -fibration acyclique, on a l'existence d'un relèvement  $\alpha_k$ . Au final l'application  $\mu$  est une cofibration dans la catégorie des  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules.

La structure de catégorie modèle sur les bimodules a été construite à partir du foncteur libre  $\mathcal{F}_B(M)$ . Par conséquent, si  $M$  est  $\Sigma$ -cofibrant alors  $\mathcal{F}_B(M)$  est cofibrant en tant que  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule. Finalement  $\mathcal{B}(M)$  est cofibrant en tant que  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule via la composée  $\emptyset \rightarrow \mathcal{F}_B(M) \rightarrow \mathcal{B}(M)$ .  $\square$



*Remarque 6.1.4.* La Boardman-Vogt résolution définit un endofoncteur dans la catégorie des  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules. Il est important de noter qu'on a aussi la functorialité au niveau des opérades  $P$  et  $Q$ . Plus précisément, si on se donne deux morphismes de  $S$ -opérades symétriques  $f_p : P_1 \rightarrow P_2$  et  $f_q : Q_1 \rightarrow Q_2$  ainsi qu'un morphisme  $f$  entre un  $(P_1-Q_1)_\Sigma$  bimodule  $M_1$  et un  $(P_2-Q_2)_\Sigma$  bimodule  $M_2$  vérifiant la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} P_1 \times M_1^1 \times \cdots \times M_1^k & \xrightarrow{\circ} & M_1 \\ \downarrow f_p \times f \times \cdots \times f & & \downarrow f \\ P_2 \times M_2^1 \times \cdots \times M_2^k & \xrightarrow{\circ} & M_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M_1 \times Q_1 & \xrightarrow{\circ_i} & M_1 \\ \downarrow f \times f_q & & \downarrow f \\ M_2 \times Q_2 & \xrightarrow{\circ_i} & M_2 \end{array}$$

alors  $f$  induit un morphisme  $\tilde{f} : \mathcal{B}(M_1) \rightarrow \mathcal{B}(M_2)$  avec  $\mathcal{B}(M_1)$  et  $\mathcal{B}(M_2)$  la Boardman-Vogt résolution dans la catégorie des  $(P_1-Q_1)_\Sigma$  bimodules et  $(P_2-Q_2)_\Sigma$  bimodules respectivement. Notons aussi que cette construction peut s'adapter dans le cas non symétrique ainsi que pour les bimodules infinitésimaux.

## 6.2 Delooping relatif associé à un morphisme d'opérades colorées

On a vu dans les chapitres précédents qu'un morphisme d'opérades  $\eta : O \rightarrow O'$  est aussi un morphisme de bimodules sous l'opérade  $O$ . Dans le cas où  $O$  est l'opérade non symétrique  $\mathcal{A}s$ , il a été démontré par Dwyer-Hess [14] et indépendamment par Turchin [49] que l'espace de morphismes dérivé  $Bimod_{\mathcal{A}s}^h(O; O')$  est faiblement équivalent à un espace de lacets explicite  $\Omega Operad^h(\mathcal{A}s; O')$ . Par la suite, Robertson a étendu ce résultat dans [37] pour une opérade colorée symétrique  $O$  quelconque.

**Théorème 6.2.1.** [37, Théorème A] Si  $\eta : O \rightarrow O'$  est un morphisme de  $S$ -opérades symétriques alors on a l'équivalence faible :

$$\Sigma\text{-}Bimod_o^h(O; O') \simeq \Omega(\Sigma\text{-}Operad_\Sigma^h(O; O')).$$

Dans cette section on va démontrer que les théorèmes 3.3.6 et 3.4.3 admettent aussi une généralisation pour des opérades autres que  $\mathcal{A}ct$ . Plus précisément, on veut montrer que si on se donne un morphisme d'opérades symétriques  $\eta_1 : O_1 \rightarrow O_2$  ainsi qu'un morphisme de  $O_2$ -bimodules  $\eta_2 : O_2 \rightarrow M$  alors le couple d'espaces topologiques  $(\Sigma\text{-}Bimod_{O_1}^h(O_1; O_2); \Sigma\text{-}Bimod_{O_1}^h(O_1; M))$  est faiblement équivalent à une  $SC_1$ -algèbre explicite.

**Définition 6.2.2.** Soit  $O$  une  $\{o; c\}$ -opérade symétrique. On note  $O_c$  l'opérade symétrique provenant de la restriction de  $O$  à la couleur  $c$  et  $O_o$  l'opérade symétrique stricte obtenue à partir de la restriction à la couleur  $o$  :

$$O_c(n) = O(c, \dots, c; c) \text{ pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad O_o(n) = \begin{cases} O(o, \dots, o; o) & \text{pour } n \geq 1, \\ \emptyset & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

Inversement, soient  $P$  une opérade symétrique stricte et  $Q$  une opérade symétrique. On désignera par  $P \oplus Q$  la  $\{o; c\}$ -opérade symétrique définie par :

$$P \oplus Q(c, \dots, c; c) = Q(n) \text{ pour } n \geq 0 \quad ; \quad P \oplus Q(o, \dots, o; o) = P(n) \text{ pour } n \geq 1$$

et l'ensemble vide pour les autres configurations. Ainsi, la donnée d'un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades symétriques  $f : P \oplus Q \rightarrow O$  est équivalente à la donnée de deux morphismes d'opérades symétriques  $f_c : Q \rightarrow O_c$  et  $f_o : P \rightarrow O_o$ .

**Définition 6.2.3.** Soient  $P$  une opérade symétrique stricte et  $Q$  une opérade symétrique. Posons

$$Op[P; Q] := (P \oplus Q) \downarrow \Sigma\text{-}Operad_{\{o; c\}}$$

la catégorie des  $\{o; c\}$ -opérades symétriques au-dessous de  $P \oplus Q$ . Un objet est la donnée d'un couple  $(O; \tau_O)$  avec  $O$  une  $\{o; c\}$ -opérade symétrique et  $\tau_O : P \oplus Q \rightarrow O$  un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades symétriques. Un morphisme  $f : (O; \tau_O) \rightarrow (O'; \tau_{O'})$  est un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades symétriques  $f : O \rightarrow O'$  vérifiant la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & P \oplus Q & \\ \tau_O \swarrow & & \searrow \tau_{O'} \\ O & \xrightarrow{f} & O' \end{array}$$

A partir d'un objet  $(O; \tau_O) \in Op[P; Q]$ , on définit le  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule  $\mathcal{R}(O; \tau_O)$  avec  $\mathcal{R}(O; \tau_O)(n) := O(c, \dots, c; o)$  pour  $n \geq 0$ . On obtient ainsi un foncteur :

$$\mathcal{R} : Op[P; Q] \longrightarrow \Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}. \quad (6.14)$$

On omettra de préciser  $\tau_O$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la structure du bimodule  $\mathcal{R}(O; \tau_O)$ . L'objectif de la construction qui suit est de définir un adjoint à gauche au foncteur  $\mathcal{R}$ .

**Construction 6.2.4.** Soient  $P$  une opérade symétrique stricte,  $Q$  une opérade symétrique et  $M$  un  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule. A partir de  $M$ , on construit une  $\{o; c\}$ -opérade symétrique  $\mathcal{L}(M; P; Q)$  de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(M; P; Q)(c, \dots, c; c) = Q(n) \text{ pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(M; P; Q)(c, \dots, c; o) = M(n) \text{ pour } n \geq 0.$$

Pour décrire les autres configurations de couleurs  $\mathcal{L}(M; P; Q)(I_c, I_o; o)$ , avec  $|I_c| \geq 0$  et  $|I_o| \geq 1$ , on introduit l'ensemble  $\Upsilon(I_c, I_o)$  constitué des  $\{o; c\}$ -arbres ayant le tronc indexé par  $o$  et dont les feuilles indexées par l'ensemble  $I_c$  sont de couleurs  $c$  tandis que les feuilles indexées par  $I_o$  sont de couleurs  $o$ . De plus les éléments de  $\Upsilon(I_c, I_o)$  sont des arbres à deux niveaux (i.e chaque chemin reliant une feuille ou sommet à la racine passe par au plus deux sommets) vérifiant les conditions suivantes :

- les arêtes entrantes des sommets autres que la racine sont indexés par  $c$ ,
- les arêtes entrantes de la racine sont indexées par la couleur  $o$ ,
- la racine possède au moins une feuille entrante.

L'espace  $\mathcal{L}(M; P; Q)$  est obtenu en indexant la racine par un point de  $P$  tandis que les autres sommets sont indexés par des points du bimodule  $M$ . Autrement dit, on a :

$$\mathcal{L}(M; P; Q)(I_c, I_o; o) := \coprod_{[T], T \in \Upsilon(I_c, I_o)} \left[ P(|r|) \times \prod_{v \neq r} M(|v|) \right] / \sim$$

La relation d'équivalence  $\sim$  est engendrée par l'axiome de compatibilité avec l'action du groupe symétrique qui correspond à la condition (ii) de la construction 6.1.2. On interprétera un point  $a \in \mathcal{L}(M; P; Q)(c, \dots, c; c)$  comme une corolle dont le sommet est indexé par  $a$  et les feuilles par la couleur  $c$  tandis que le tronc est de couleur  $c$ . De même, on interprétera un point  $a \in \mathcal{L}(M; P; Q)(c, \dots, c; o)$  comme une corolle dont le sommet est indexé par  $a$  et les feuilles par la couleur  $c$  tandis que le tronc est de couleur  $o$ . On note  $[T; \{a_v\}]$  un point de  $\mathcal{L}(M; P; Q)$ .

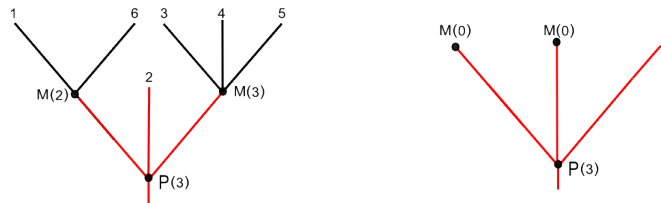


FIGURE 6.5 – Exemples d'un point dans  $\mathcal{L}(M; P; Q)(\{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2\}; o)$  et  $\mathcal{L}(M; P; Q)(\emptyset, \{1\}; o)$ .

La composition d'un point  $[T; \{a_v\}] \in \mathcal{L}(M; P; Q)(I_c, I_o; o)$  avec un point  $a \in Q$  sur une entrée fermée consiste à greffer la corolle associée à  $a$  sur l'arbre  $T$  puis à contracter la nouvelle arête interne en utilisant la structure de  $Q$ -bimodule à droite de  $M$ .

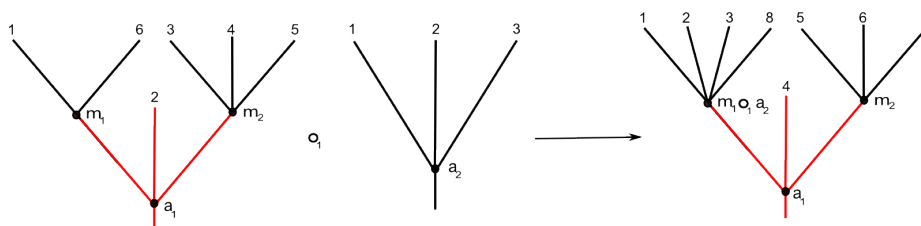


FIGURE 6.6 – Exemple de composition opéradique partielle.

La composition d'un point  $[T; \{a_v\}] \in \mathcal{L}(M; P; Q)(I_c, I_o; o)$  avec un autre point  $[T'; \{a'_v\}] \in \mathcal{L}(M; P; Q)(I'_c, I'_o; o)$  consiste à greffer l'arbre  $T'$  sur  $T$  en conservant les indexations respectives puis à contracter la nouvelle arête interne provenant du tronc de  $T'$  en utilisant la structure opéradique de  $P$  si  $|I'_o| \geq 1$ . Si toutes les arêtes entrantes de la nouvelle racine sont des arêtes internes alors on les contracte simultanément via la structure de  $P$ -bimodule à gauche de  $M$ .

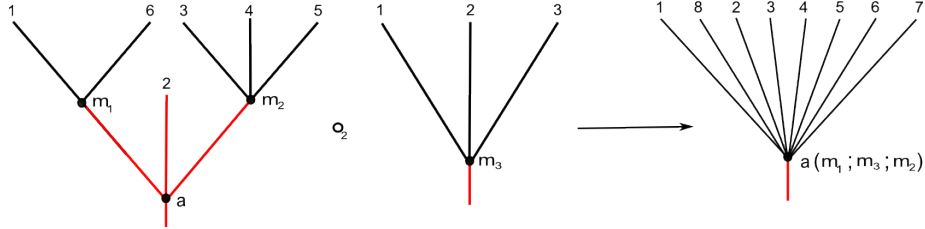


FIGURE 6.7 – Exemple de composition opéradique partielle.

Ainsi définie,  $\mathcal{L}(M; P; Q)$  est une  $\{o; c\}$ -opérade symétrique que l'on désignera par  $\mathcal{L}(M)$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les opérades  $P$  et  $Q$ . On dispose d'un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades symétriques :

$$\tau_M : P \oplus Q \rightarrow \mathcal{L}(M; P; Q),$$

induit par l'identité  $Q \rightarrow \mathcal{L}(M; P; Q)_c = Q$  ainsi que le morphisme d'opérades strictes  $P \rightarrow \mathcal{L}(M; P; Q)_o$  envoyant un point sur la corolle associée. Par conséquent  $(\mathcal{L}(M; P; Q); \tau_M)$  est un objet de la catégorie  $Op[P; Q]$ .

En ce qui concerne la functorialité, remarquons que si  $f_p : P \rightarrow P'$ ,  $f_q : Q \rightarrow Q'$  sont deux morphismes d'opérades symétriques et  $f_m : M \rightarrow M'$  est une application entre un  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule  $M$  et un  $(P'-Q')_\Sigma$  bimodule  $M'$  vérifiant la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} P(n) \times M(m_1) \times \cdots \times M(m_n) & \xrightarrow{\gamma^i} & M(m_1 + \cdots + m_n) & & M(n) \times Q(m) & \xrightarrow{\circ^i} & M(n + m - 1) & (6.15) \\ \downarrow f_p \times f_m \times \cdots \times f_m & & \downarrow f_m & & \downarrow f_m \times f_q & & \downarrow f_m \\ P'(n) \times M'(m_1) \times \cdots \times M'(m_n) & \xrightarrow{\gamma^i} & M'(m_1 + \cdots + m_n) & & M'(n) \times Q'(m) & \xrightarrow{\circ^i} & M'(n + m - 1) \end{array}$$

alors on a un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades symétriques :

$$f : \mathcal{L}(M; P; Q) \rightarrow \mathcal{L}(M'; P'; Q'); \quad [T; \{a'_v\}] \mapsto [T; \{a_v\}], \quad \text{avec} \quad a'_v = \begin{cases} f_p(a_v) & \text{si } a_v \in P, \\ f_m(a_v) & \text{si } a_v \in M, \\ f_q(a_v) & \text{si } a_v \in Q. \end{cases}$$

En particulier, on dispose d'un foncteur :

$$\mathcal{L}(-; P; Q) : \Sigma\text{-Bimod}_{P-Q} \rightarrow Op[P; Q]. \quad (6.16)$$

**Proposition 6.2.5.** *Le couple de foncteurs  $(\mathcal{L}; \mathcal{R})$  forme une adjonction.*

*Démonstration.* On se donne  $(O; \tau_O) \in Op[P; Q]$  et  $f : M \rightarrow \mathcal{R}(O)$  un morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules. On doit montrer qu'il existe un unique morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades symétriques  $\tilde{f} : \mathcal{L}(M; P; Q) \rightarrow O$  prolongeant l'application  $f$  et vérifiant l'égalité  $\tilde{f} \circ \tau_M = \tau_O$ . Cela signifie que si l'application  $\tilde{f}$  existe alors elle doit respecter les conditions suivantes :

- i)  $\tilde{f} : \mathcal{L}(M; P; Q)_c(n) = Q(n) \rightarrow O_c(n)$  doit coïncider avec l'application  $\tau_O : Q(n) \rightarrow O_c(n)$ ,
- ii) la restriction de  $\tilde{f} : \mathcal{L}(M; P; Q)_o(n) \rightarrow O_o(n)$  à  $P(n)$  doit coïncider avec  $\tau_O : P(n) \rightarrow O_o(n)$ ,
- iii)  $\tilde{f} : \mathcal{L}(M; P; Q)(c, \dots, c; o) = M(n) \rightarrow \mathcal{R}(O)(n)$  doit coïncider avec l'application  $f$ .

On va construire l'application  $\tilde{f}$  sur les facteurs  $\mathcal{L}(M; P; Q)(I_c, I_o; o)$  par récurrence sur le nombre de sommets des arbres  $T \in \Upsilon(I_c, I_o)$ . On se donne  $[T; \{a_v\}]$  un point de  $\mathcal{L}(M; P; Q)(I_c, I_o; o)$ . Si  $T$  possède un seul sommet alors  $|I_c| = 0$  ou  $|I_o| = 0$  car toutes les arêtes adjacentes (i.e ayant le même sommet d'arrivée) ont la même couleur. Dans ces cas, l'application est déjà définie à cause des restrictions (ii) et (iii).

Supposons que l'application  $\tilde{f}$  soit définie pour les arbres possédant au plus  $k$  sommets avec  $k \geq 2$ . Prenons  $[T; \{a_v\}]$  un point de  $\mathcal{L}(M; P; Q)(I_c, I_o; o)$  avec  $T$  ayant  $k + 1$  sommets. Par construction,  $[T; \{a_v\}]$  s'écrit sous la forme  $[T_1; \{a_v\} \setminus \{a_0\}] \circ_i [T_2; a_0]$  avec  $T_2$  une corolle ayant toutes ses entrées indexées par la couleur  $c$  tandis que son sommet est indexé par un point  $a_0 \in M$ . Si on veut que  $\tilde{f}$  soit un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades symétriques alors on doit avoir l'égalité :

$$\tilde{f}([T; \{a_v\}]) = \tilde{f}([T_1; \{a_v\} \setminus \{a_0\}]) \circ_i f(a_0),$$

avec  $T_1$  un arbre ayant  $k$  sommets. Les propriétés des opérades impliquent que cette définition ne dépend pas du choix de la décomposition et que  $\tilde{f}$  est définie de manière unique.  $\square$

On a vu dans le second chapitre que la catégorie  $\Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}$  est enrichie dans les espaces topologiques et qu'elle est munie d'une structure de catégorie modèle cofibrement engendrée (voir le théorème 2.2.12). Comme  $Op[P; Q]$  est définie comme la catégorie  $(P \oplus Q) \downarrow \Sigma\text{-Operad}_{\{o; c\}}$ , elle est aussi enrichie dans les espaces topologiques et possède une structure de catégorie modèle cofibrement engendrée (voir l'exemple 2.1.4). La proposition qui suit montre que l'adjonction  $(\mathcal{L}; \mathcal{R})$  se comporte bien vis-à-vis des structures homotopiques.

**Proposition 6.2.6.** *Le couple de foncteurs  $(\mathcal{L}; \mathcal{R})$  forme une paire de Quillen.*

*Démonstration.* Pour démontrer que le couple  $(\mathcal{L}; \mathcal{R})$  est une paire de Quillen, on va vérifier que le foncteur  $\mathcal{R}$  préserve les fibrations ainsi que les fibrations acycliques. Soit  $f : (O; \tau_O) \rightarrow (O'; \tau_{O'})$  une fibration dans la catégorie  $Op[P; Q]$ . Cela signifie que l'application sous-jacente  $f : O \rightarrow O'$  est une fibration dans la catégorie des  $\{o; c\}$ -opérades symétriques. On rappelle que la structure de catégorie modèle sur les opérades a été construite à partir d'une adjonction :

$$\mathcal{F}_{\{o; c\}} : \Sigma\text{-Coll}(\{o; c\}) \rightleftarrows \Sigma\text{-Operad}_{\{o; c\}} : \mathcal{U},$$

avec  $\mathcal{U}$  le foncteur oublié et  $\mathcal{F}_{\{o; c\}}$  l'opérade libre. Ainsi,  $f$  est une fibration si et seulement si  $\mathcal{U}(f)$  est une fibration degré par degré. En particulier, pour  $n \geq 0$ , l'application  $f_M : \mathcal{R}(O)(n) = O(c, \dots, c; o) \rightarrow \mathcal{R}(O')(n) = O'(c, \dots, c; o)$  est une fibration dans  $Top$ . De même, la structure de catégorie modèle sur les bimodules a été définie à partir d'une adjonction :

$$\mathcal{F}_B : \Sigma\text{-Coll} \rightleftarrows \Sigma\text{-Bimod}_{P,Q} : \mathcal{U},$$

avec  $\mathcal{F}_B$  le  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule libre. Ainsi, un morphisme dans  $\Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}$  est une fibration si c'est une fibration degré par degré dans  $Top$ . Par conséquent  $\mathcal{R}(f) = f_M$  est une fibration. Un raisonnement similaire permet de démontrer que  $\mathcal{R}$  préserve les fibrations acycliques.  $\square$

**Corollaire 6.2.7.** *Soient  $P$  et  $Q$  deux opérades symétriques  $\Sigma$ -cofibrantes et bien pointées avec  $P(0) = \emptyset$ . Soit  $O$  un objet de la catégorie  $Op[P; Q]$ . Si  $\mathcal{R}(O)$  est  $\Sigma$ -cofibrant alors  $\mathcal{L}(\mathcal{B}\mathcal{R}(O); P; Q)$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q)$  dans la catégorie  $Op[P; Q]$  et on a l'équivalence faible :*

$$\Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}^h(\mathcal{R}(O); \mathcal{R}(O')) \simeq Op[P; Q]^h(\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q); O'). \quad (6.17)$$

*Démonstration.* D'après le théorème 6.1.3,  $\mathcal{B}\mathcal{R}(O)$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{R}(O)$  en tant que  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule. Comme le foncteur  $\mathcal{L}$  est l'adjoint à gauche d'une paire de Quillen, il préserve les cofibrations ainsi que les objets cofibrants. Par conséquent  $\mathcal{L}(\mathcal{B}\mathcal{R}(O); P; Q)$  est cofibrant dans la catégorie  $Op[P; Q]$ .

Un point  $[T; \{a_v\}] \in \mathcal{L}(\mathcal{B}\mathcal{R}(O); P; Q)(I_c, I_o; o)$  est la donnée d'un arbre  $T \in \Upsilon(I_c; I_o)$  dont certains sommets sont indexés par des arbres à section. On dispose donc de l'homotopie faisant tendre les paramètres des sommets non perlés vers 0. Par conséquent, le morphisme de  $(P-Q)_\Sigma$  bimodules  $\mu : \mathcal{B}\mathcal{R}(O) \rightarrow \mathcal{R}(O)$ , évaluant l'ensemble des paramètres à zéro, induit une équivalence faible entre  $\{o; c\}$ -opérades :

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}\mathcal{R}(O); P; Q) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q).$$

Au final,  $\mathcal{L}(\mathcal{B}\mathcal{R}(O); P; Q)$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q)$  dans  $Op[P; Q]$ . Comme tous les objets sont fibrants dans les catégories que l'on considère, on a les équivalences faibles :

$$\begin{aligned} \Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}^h(\mathcal{R}(O); \mathcal{R}(O')) &\simeq \Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}(\mathcal{B}\mathcal{R}(O); \mathcal{R}(O')), \\ Op[P; Q]^h(\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q); O') &\simeq Op[P; Q](\mathcal{L}(\mathcal{B}\mathcal{R}(O); P; Q); O'). \end{aligned}$$

L'équivalence faible (6.17) provient donc de l'adjonction  $(\mathcal{L}; \mathcal{R})$  qui induit un homéomorphisme :

$$\Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}(\mathcal{BR}(O); \mathcal{R}(O')) \cong \text{Op}[P; Q](\mathcal{L}(\mathcal{BR}(O); P; Q); O'). \quad \square$$

**Théorème 6.2.8.** Soit  $\eta : O \rightarrow O'$  un morphisme dans la catégorie  $\text{Op}[P; Q]$  avec  $P$  et  $Q$  deux opérades  $\Sigma$ -cofibrantes et bien pointées. Si  $\mathcal{R}(O)$  est  $\Sigma$ -cofibrant et bien pointé alors  $\Sigma\text{-Bimod}_{P,Q}^h(\mathcal{R}(O); \mathcal{R}(O'))$  est faiblement équivalent à l'espace de lacets relatif :

$$\Omega(\text{Operad}^h(Q; O'_c); \text{Op}[P; \emptyset]^h(\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q); O')). \quad (6.18)$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du corollaire 6.2.7 ainsi que des propositions 6.2.12, 6.2.14 et 6.2.15.  $\square$

La catégorie  $\text{Op}[P; \emptyset]$  est un cas particulier de la définition 6.2.3. Les objets sont les couples  $(O; f_o)$  avec  $O$  une  $\{o; c\}$ -opérade symétrique et  $f_o : P \rightarrow O_o$  un morphisme d'opérades symétriques strictes. Par conséquent tout objet de  $\text{Op}[P; Q]$  peut être vu comme un objet de la catégorie  $\text{Op}[P; \emptyset]$  en oubliant l'application sur la partie fermée. Ainsi  $\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q)$  et  $\mathcal{L}(\mathcal{BR}(O); P; Q)$  sont tous deux des objets de  $\text{Op}[P; \emptyset]$ . Cependant  $\mathcal{L}(\mathcal{BR}(O); P; Q)$  n'est pas nécessairement cofibrant dans cette catégorie car  $Q$  n'est pas nécessairement cofibrant en tant qu'opérade. On commence donc par modifier légèrement la construction 6.1.2 afin de définir un remplacement cofibrant de  $\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q)$  dans  $\text{Op}[P; \emptyset]$ .

**Construction 6.2.9.** A partir d'un  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule  $M$  on peut construire le  $(P\text{-}\mathcal{BV}(Q))_\Sigma$  bimodule  $\mathcal{B}_\theta(M)$  dont les points sont les triplets  $[T; \{t_u\}; \{a_v\}]$  avec  $T$  un arbre à section et  $\{a_v\}$  une famille de points indexant les sommets de l'arbre de la même manière que dans la construction 6.1.2. La famille  $\{t_u\}$  est un ensemble de réels dans l'intervalle  $I = [0, 1]$  paramétrant les sommets non perlés au-dessous de la section ainsi que les arêtes internes au-dessus de la section. Si une arête  $e$  au-dessous de la section connecte deux sommets non perlés alors on a l'inégalité  $t_{s(e)} \leq t_{t(e)}$ . Ainsi  $\mathcal{B}_\theta(M)$  est un quotient du sous-espace :

$$\coprod_{\Phi_n} \prod_{v \in V^d(T)} [P(|v|) \times I] \times \prod_{v \in V^p(T)} M(|v|) \times \prod_{v \in V^u(T)} [Q(|v|) \times I]$$

obtenu à partir des restrictions sur les familles  $\{t_u\}$ . La relation d'équivalence est engendrée par les axiomes (ii), (iii.b) et (iv.b) de la construction 6.1.2 ainsi que les axiomes suivants :

i') Si  $*_p$  et  $*_q$  sont les unités de  $P$  et  $Q$  respectivement alors on a les relations suivantes :

$$\begin{array}{c} | \\ \bullet (*_p; t) \end{array} \sim \begin{array}{c} | \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ t_1 \\ \bullet *_q \\ t_2 \end{array} \sim \begin{array}{c} | \\ \max(t_1; t_2) \end{array}$$

v) Si une arête interne au-dessus de la section est paramétrée par 0 alors on peut la contracter en utilisant la structure opéradique de  $Q$  ou la structure de  $Q$ -bimodule à droite de  $M$ .

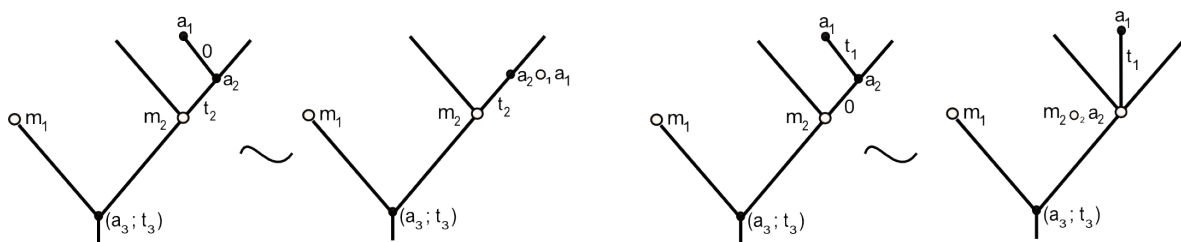


FIGURE 6.8 – Exemples de la relation (v).

La structure de  $(P\text{-}\mathcal{BV}(Q))_\Sigma$  bimodule est définie de manière similaire à la construction 6.1.2.

**Lemme 6.2.10.** Soit  $M$  un  $(P-Q)_\Sigma$  bimodule avec  $P, Q$  deux opérades symétriques  $\Sigma$ -cofibrantes bien pointées et  $P(0) = \emptyset$ . Si le bimodule  $M$  est  $\Sigma$ -cofibrant alors  $\mathcal{B}_\theta(M)$  est un remplacement cofibrant de  $M$  en tant que  $(P\text{-}\mathcal{BV}(Q))_\Sigma$  bimodule.

*Démonstration.* Tout d'abord, notons que  $M$  possède une structure de  $(P\text{-}\mathcal{BV}(Q))_\Sigma$  bimodule grâce au morphisme d'opérades symétriques  $\eta : \mathcal{BV}(Q) \rightarrow Q$ . Le reste de la démonstration est similaire à la preuve du théorème 6.1.3.  $\square$

Notation 6.2.11. Soit  $O$  un objet de la catégorie  $Op[P; Q]$ . On note

$$\mathcal{BV}_\emptyset(O) := \mathcal{L}(\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O)); P; \mathcal{BV}(Q)).$$

**Proposition 6.2.12.** *Soit  $O$  un objet de  $Op[P; Q]$  avec  $P$  et  $Q$  deux opérades  $\Sigma$ -cofibrantes et bien pointées. Si  $\mathcal{R}(O)$  est  $\Sigma$ -cofibrant alors  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q)$  dans la catégorie  $Op[P; \emptyset]$ .*

*Démonstration.* Sous les conditions de la proposition, le lemme 6.2.10 implique que  $\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))$  est un remplacement cofibrant de  $\mathcal{R}(O)$  en tant que  $(P\text{-}\mathcal{BV}(Q))_\Sigma$  bimodule. Comme le foncteur  $\mathcal{L}$  préserve les cofibrations,  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)$  est cofibrant dans la catégorie  $Op[P; \mathcal{BV}(Q)]$ . Par conséquent  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)$  est aussi cofibrant dans la catégorie  $Op[O_\emptyset; \emptyset]$  via la succession de cofibrations :

$$P \oplus \emptyset \longrightarrow P \oplus \mathcal{BV}(Q) \longrightarrow \mathcal{BV}_\emptyset(O).$$

Un point de  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)$  est constitué d'un arbre de  $\Upsilon$  dont les sommets sont indexés par des points de  $\mathcal{BV}(Q)$ ,  $\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))$  ou  $P$  adéquats. Par conséquent, l'application  $\mathcal{BV}_\emptyset(O) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q)$ , évaluant l'ensemble des paramètres à zéro, est une équivalence faible dont l'homotopie consiste à faire tendre les paramètres vers zéro.  $\square$

Par construction, le morphisme d'opérades  $\mathcal{BV}(Q) \rightarrow \mathcal{BV}_\emptyset(O)_c = \mathcal{BV}(Q)$  provient de l'identité. On dispose donc d'une application continue :

$$h : Op[P; \emptyset](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O') \longrightarrow \Sigma\text{-Operad}(\mathcal{BV}(Q); O'). \quad (6.19)$$

Ainsi, un modèle pour l'espace de lacets relatif (6.18) est obtenu comme la fibre homotopique de l'application  $h$  au-dessus de la composée  $(\tau_{O'})_c \circ \mu : \mathcal{BV}(Q) \rightarrow O'_c$ . Plus précisément on a la définition suivante :

**Définition 6.2.13.** Un point de la fibre homotopique (6.19) au-dessus de la composée  $(\tau_{O'})_c \circ \mu$  est la donnée d'applications continues :

$$\begin{aligned} f(n; c) & : \mathcal{BV}(Q)(n) \times [0, 1] \longrightarrow O'(c, \dots, c; c), \quad \text{pour } n \geq 0, \\ f(I_c, I_o; o) & : \mathcal{BV}_\emptyset(O)(I_c, I_o; o) \times \{1\} \longrightarrow O'(I_c, I_o; o), \quad \text{pour } |I_c| \geq 0 \text{ et } |I_o| \geq 0, \end{aligned}$$

vérifiant des relations liées à la structure opéradique :

- ▷  $f(n + m - 1; c)(x \circ_i y; t) = f(n; c)(x; t) \circ_i f(m; c)(y; t)$ , pour  $x \in \mathcal{BV}(O_c)(n)$ , et  $y \in \mathcal{BV}(O_c)(m)$ ,
- ▷  $f(I'_c, I''_o; o)(x \circ_i y; 1) = f(I_c, I_o; o)(x; 1) \circ_i f(I'_c, I''_o; o)(y; 1)$ , pour  $x \in \mathcal{BV}_\emptyset(O)(I_c, I_o; o)$  et  $y \in \mathcal{BV}_\emptyset(O)(I'_c, I''_o; o)$ ,
- ▷  $f(I'_c, I''_o; o)(x \circ_i y; 1) = f(I_c, I_o; o)(x; 1) \circ_i f(I'_c, \emptyset; c)(y; 1)$ , pour  $x \in \mathcal{BV}_\emptyset(O)(I_c, I_o; o)$  et  $y \in \mathcal{BV}_\emptyset(O)(I'_c, \emptyset; c)$ .

Ainsi que des restrictions liées au point base :

- ▷  $f(n; c)(x; 0) = (\tau_{O'})_c \circ \mu(x)$ , pour  $x \in \mathcal{BV}(Q)(n)$ .

Pour démontrer le théorème 6.2.8 on va employer une méthode similaire à celles du chapitre 3. On va utiliser l'espace  $Op[P; \mathcal{BV}(Q)](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')$  comme intermédiaire entre l'espace de lacets relatif et  $Op[P; Q]^h(\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q); O')$ . Notons que la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & P \oplus \mathcal{BV}(Q) & \\ \tau \swarrow & & \searrow (\tau_{O'})_c \circ \mu \\ \mathcal{BV}_\emptyset(O) & \xrightarrow{\quad} & O' \end{array}$$

implique que  $Op[P; \mathcal{BV}(Q)](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')$  est le sous-espace de  $Op[P; \emptyset](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')$  constitué des applications  $f$  vérifiant la relation :

$$f(x) = (\tau_{O'})_c \circ \mu(x) \quad \forall x \in \mathcal{BV}(Q). \quad (6.20)$$

**Proposition 6.2.14.** *Sous les conditions du théorème 6.2.8, l'espace  $Op[P; \mathcal{BV}(Q)](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')$  est homéomorphe à  $Op[P; Q](\mathcal{L}(\mathcal{BR}(O); P; Q); O')$ .*

*Démonstration.* Notons que cette proposition est une version explicite des constructions introduites par Fresse dans [18, Chapitre 7]. D'après le corollaire 6.2.7, pour démontrer le résultat il suffit de construire un homéomorphisme :

$$\xi : \Sigma\text{-Bimod}_{P\text{-}\mathcal{BV}(Q)}(\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O)); \mathcal{R}(O')) \longrightarrow \Sigma\text{-Bimod}_{P\text{-}Q}(\mathcal{BR}(O); \mathcal{R}(O'))$$

On commence par définir une application ensembliste  $i : \mathcal{BR}(O) \rightarrow \mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))$  envoyant un point  $[T; \{t_v\}; \{a_v\}]$  vers un élément  $[T; \{t'_v\}; \{a_v\}]$ . L'arbre à section, l'indexation des sommets ainsi que la paramétrisation des sommets non perlés au-dessous de la section restent inchangés. Si  $e$  est une arête interne au-dessus de la section alors elle sera paramétrée par le réel  $t'_e \in [0, 1]$  défini par :

$$t'_e = \begin{cases} (t_{t(e)} - t_{s(e)}) / (t_{t(e)} - 1) & \text{si } t_{t(e)} < 1, \\ 1 & \text{si } t_{t(e)} = 1. \end{cases} \quad (6.21)$$

Pour la construction on considère que, par défaut, une perle est paramétrée par 0. L'application  $i$ , ainsi définie, ne dépend pas du choix du représentant. Cependant elle n'est pas continue. En effet, si  $e$  est une arête interne au-dessus de la section reliant deux sommets non perlés alors le paramètre  $t'_e$  n'est pas défini lorsque  $t_{t(e)}$  tend vers 1.

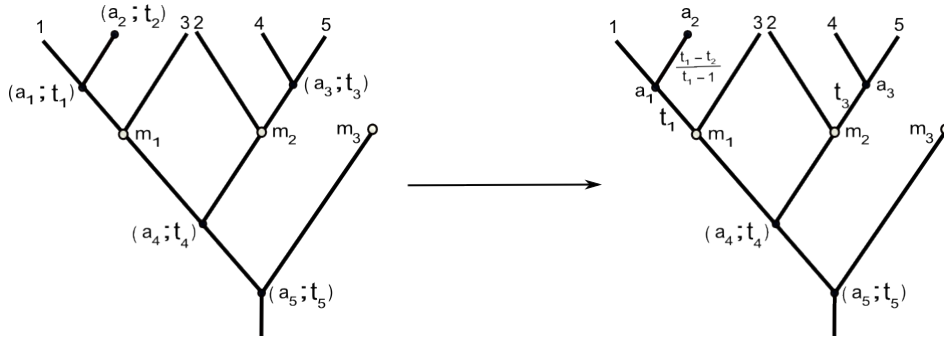


FIGURE 6.9 – Illustration de l'application  $i : \mathcal{BR}(O) \rightarrow \mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))$ .

Afin de pallier ce problème, on introduit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))$ . Soit  $\sim$  la relation engendrée par  $x \sim x'$  si et seulement si il existe  $y \in \mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))$  et  $[T; \{t_e\}; \{a_v\}], [T; \{t'_e\}; \{a_v\}] \in \mathcal{BV}(Q)$  tel que :

$$x = y \circ_i [T; \{t_e\}; \{a_v\}] \quad \text{et} \quad x' = y \circ_i [T; \{t'_e\}; \{a_v\}].$$

On note  $\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim(n)$  l'espace quotient  $\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))(n)/\sim$ . La structure de  $(P\text{-}\mathcal{BV}(Q))_\Sigma$  bimodule sur  $\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))$  induit une structure de  $(P\text{-}Q)_\Sigma$  bimodule sur la  $\Sigma$ -collection  $\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim$  :

- ▷  $\circ_i : \mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim(n) \times Q(m) \longrightarrow \mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim(n+m-1)$   
 $(x; y) \longmapsto x \circ_i y,$
- ▷  $\circ : P(n) \times \mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim(m_1) \times \cdots \times \mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim(m_n) \longrightarrow \mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim(m_1 + \cdots + m_n)$   
 $(x, y_1, \dots, y_n) \longmapsto \gamma_i(x; y_1, \dots, y_n).$

Les axiomes liés à la structure des  $(P\text{-}Q)_\Sigma$  bimodules sont vérifiés uniquement grâce à la relation d'équivalence. La structure de  $\mathcal{BV}(Q)$ -bimodule à droite de  $O'$  provient du morphisme de bimodules  $\mu : \mathcal{BV}(Q) \rightarrow Q$ . Par conséquent, toute application  $f \in \text{Bimod}_{P\text{-}\mathcal{BV}(Q)}(\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O)); \mathcal{R}(O'))$  passe au quotient et induit un morphisme  $\tilde{f} \in \text{Bimod}_{P\text{-}Q}(\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim; \mathcal{R}(O'))$ . Grâce à la propriété universelle du quotient, on obtient un homéomorphisme :

$$\xi_1 : \Sigma\text{-Bimod}_{P\text{-}\mathcal{BV}(Q)}(\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O)); \mathcal{R}(O')) \longrightarrow \Sigma\text{-Bimod}_{P\text{-}Q}(\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim; \mathcal{R}(O')).$$

Soit  $e$  une arête interne au-dessus de la section reliant deux sommets non perlés. Si  $t_{t(e)}$  vaut 1 alors tous les paramètres  $t'_e$  sont identifiés dans l'espace quotient rendant l'application  $i : \mathcal{BR}(O) \rightarrow \mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim$  continue. Par construction, l'application  $i$  est un homéomorphisme et préserve la structure  $(P\text{-}Q)_\Sigma$  bimodule. On dispose d'un second homéomorphisme provenant de la pré-composition par  $i$  :

$$\xi_2 : \Sigma\text{-Bimod}_{P\text{-}Q}(\mathcal{B}_\emptyset(\mathcal{R}(O))/\sim; \mathcal{R}(O')) \longrightarrow \Sigma\text{-Bimod}_{P\text{-}Q}(\mathcal{BR}(O); \mathcal{R}(O')).$$

Au final on définit l'homéomorphisme  $\xi$  comme la composée  $\xi_2 \circ \xi_1$ . □

**Proposition 6.2.15.** *Sous les conditions du théorème 6.2.8, l'espace  $Op[P; \mathcal{BV}(Q)](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')$  est faiblement équivalent à l'espace de lacets relatif :*

$$\Omega\left(\Sigma\text{-Operad}(\mathcal{BV}(Q); O'_c); Op[P; \emptyset](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')\right).$$

*Démonstration.* Rappelons que  $Op[P; \mathcal{BV}(Q)](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')$  est le sous-espace de  $Op[P; \emptyset](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')$  constitué des applications dont la restriction à l'opérate  $\mathcal{BV}(Q)$  coïncide avec la composée  $(\tau_{O'})_c \circ \mu$ . On peut donc voir  $Op[P; \mathcal{BV}(Q)](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')$  comme un sous-espace de la fibre homotopique (6.19) via l'inclusion :

$$\begin{aligned} \iota : Op[P; \mathcal{BV}(Q)](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O') &\longrightarrow \Omega\left(\Sigma\text{-Operad}(\mathcal{BV}(Q); O'_c); Op[P; \emptyset](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')\right); \\ f &\longmapsto \begin{cases} \tilde{f}(n; c)(x; t) &= (\tau_{O'})_c \circ \mu(x) & \text{pour } x \in \mathcal{BV}(Q)(n), \\ \tilde{f}(I_c, I_o; o)(x; 1) &= f(I_c, I_o; o)(x) & \text{pour } x \in \mathcal{BV}_\emptyset(O)(I_c, I_o; o). \end{cases} \end{aligned}$$

On va démontrer que  $\iota$  est une équivalence faible. Pour cela on va introduire deux tours de fibrations associées à des filtrations de  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)$  permettant d'avoir un contrôle sur le nombre de sommets indexés par des points de l'opérate symétrique  $Q$ .

On commence par rappeler qu'un élément de  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)(I_c, I_o; o)$  est la donnée d'un arbre  $T \in \Upsilon(I_c, I_o)$  dont les sommets autres que la racine sont indexés par des arbres à section de  $\Phi$  (voir la définition 6.1.1). Un tel élément est noté  $[T; \{\Phi_v\}]$ . Si  $\Psi(I_c, I_o)$  désigne l'ensemble des éléments  $[T; \{\Phi_v\}]$ , avec  $T \in \Upsilon(I_c, I_o)$ , alors  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)(I_c, I_o; o)$  peut s'écrire comme le quotient du sous-espace :

$$X(I_c, I_o; o) \subseteq \prod_{[T; \{\Phi_v\}] \in \Psi(I_c, I_o)} P(|r|) \times \prod_{v \in V(T) \setminus \{r\}} \left[ \prod_{v \in V^u(\Phi_v)} [P(|v|) \times I] \times \prod_{v \in V^p(\Phi_v)} \mathcal{R}(O)(|v|) \times \prod_{v \in V^h(\Phi_v)} [Q(|v|) \times I] \right]$$

obtenu à partir des restrictions de la construction 6.2.9 sur les points de l'intervalle  $I$ . La relation d'équivalence est engendrée par les axiomes des constructions 6.2.4 et 6.2.9. On dispose donc d'une projection que l'on note de la façon suivante :

$$\pi : X(I_c, I_o; o) \longrightarrow \mathcal{BV}_\emptyset(O)(I_c, I_o; o).$$

De même, un point de  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)(I_c, \emptyset; c) = \mathcal{BV}(Q)(I_c)$  peut être interprété comme la corolle de  $\Upsilon$  dont les arêtes sont de couleur  $c$  et le sommet est indexé par un  $\{c\}$ -arbre. Posons  $\Psi_k$  l'ensemble des éléments  $[T; \{\Phi_v\}]$  dont la somme des sommets au-dessus des sections des arbres  $\Phi_v$  vaut  $k$ . On désigne par  $\Psi_{\leq k}$  l'ensemble des éléments de  $\Psi_i$  avec  $i \leq k$ .

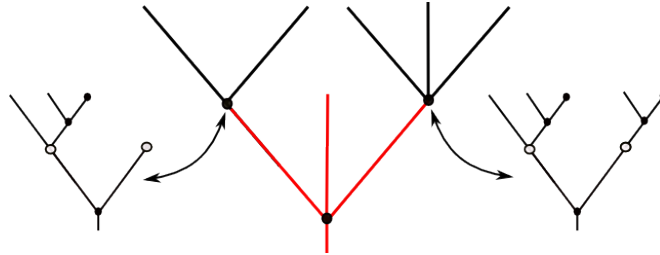


FIGURE 6.10 – Illustration d'un élément de  $\Psi_6$ .

Un élément  $[T; \{\Phi_v\}] \in \Psi_k$  possède une arête *redondante* si l'un des arbres  $\Phi_v$  a une arête interne  $e$  au-dessus de la section tel que le sous-arbre de  $\Phi_v$  ayant pour tronc  $e$  dispose de  $k$  sommets. On notera  $\Psi_{\leq k}^+$  l'ensemble constitué des éléments de  $\Psi_{\leq k}$  ainsi que des éléments de  $\Psi_{k+1}$  n'ayant aucune arête redondante. Si  $X_{\leq k}$  et  $X_{\leq k}^+$  désignent respectivement la restriction de  $X$  aux ensembles  $\Psi_{\leq k}$  et  $\Psi_{\leq k}^+$ , alors on définit les  $\{o; c\}$ -collections symétriques :

$$\mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k} := \pi(X_{\leq k}) \quad \text{et} \quad \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+ := \pi(X_{\leq k}^+).$$

Notons que ces deux collections ne possèdent pas de structure opéradique car la composition ne préserve pas nécessairement le nombre de sommets au-dessus des sections. Cependant, cela fournit une filtration de l'opérate colorée symétrique  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)$  en tant que collection grâce à la succession d'inclusions  $\Psi_{\leq k} \subset \Psi_{\leq k}^+ \subset \Psi_{\leq k+1}$  :

$$\mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq 0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k} \longrightarrow \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+ \longrightarrow \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k+1} \longrightarrow \cdots \quad (6.22)$$



On construit ensuite les composantes des deux tours permettant de calculer  $Op[P; \mathcal{BV}(Q)](\mathcal{BV}_\emptyset(O); O')$  ainsi que l'espace de lacets relatif :

$$\begin{aligned} \triangleright A_{\leq k} &\subset Top(\mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}; O'); & \triangleright A_{\leq k}^+ &\subset Top(\mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+; O'); \\ \triangleright B_{\leq k} &\subset \prod_{I_c, I_o} Top(\mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}(I_c, I_o; o) \times \{1\}; O'(I_c, I_o; o)) \times \prod_{I_c} Top(\mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}(I_c, \emptyset; c) \times [0, 1]; O'(I_c, \emptyset; c)); \\ \triangleright B_{\leq k}^+ &\subset \prod_{I_c, I_o} Top(\mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+(I_c, I_o; o) \times \{1\}; O'(I_c, I_o; o)) \times \prod_{I_c} Top(\mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+(I_c, \emptyset; c) \times [0, 1]; O'(I_c, \emptyset; c)); \end{aligned}$$

avec  $B_{\leq k}$  et  $B_{\leq k}^+$  les sous-espaces des applications vérifiant les conditions de la définition 6.2.13 tandis que  $A_{\leq k}$  et  $A_{\leq k}^+$  sont les sous-espaces vérifiant les conditions de la définition 6.2.13 ainsi que la relation (6.20). La filtration (6.22) induit deux séquences :

$$\begin{array}{ccccccccccc} A_{\leq 0} & \longleftarrow & A_{\leq 0}^+ & \longleftarrow & A_{\leq 1} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & A_{\leq k} & \longleftarrow & A_{\leq k}^+ & \longleftarrow & A_{\leq k+1} & \longleftarrow & \dots \\ \downarrow \iota_0 & & \downarrow \iota_0^+ & & \downarrow \iota_1 & & & & \downarrow \iota_k & & \downarrow \iota_k^+ & & \downarrow \iota_{k+1} & & \\ B_{\leq 0} & \longleftarrow & B_{\leq 0}^+ & \longleftarrow & B_{\leq 1} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & B_{\leq k} & \longleftarrow & B_{\leq k}^+ & \longleftarrow & B_{\leq k+1} & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

avec  $\iota_k$  et  $\iota_k^+$  les applications induites par l'inclusion  $\iota$ .

Dans un premier temps, il faut démontrer que les deux séquences forment des tours de fibrations. Les constructions qui suivent sont semblables à celles introduites dans la preuve du théorème 6.1.3. Afin d'alléger les notations, on ne tient pas compte de l'action du groupe des permutations. On commence par montrer que l'application  $A_{\leq k}^+ \rightarrow A_{\leq k}$  est une fibration. Pour cela, posons  $\partial X_{\leq k}^+$  le sous-espace de  $X_{\leq k}^+$  constitué des points vérifiant l'une des conditions suivantes :

- i) soit un sommet bivalent est indexé par l'unité de  $Q$ ,
- ii) soit l'une des arêtes des arbres  $\{\Phi_v\}$  est paramétrée par 0.

Comme l'opérade  $Q$  est bien pointée, l'inclusion  $\partial X_{\leq k}^+ \rightarrow X_{\leq k}^+$  est une cofibration (acyclique) et on a la somme amalgamée suivante qui est une réécriture du passage au quotient :

$$\begin{array}{ccc} \partial X_{\leq k}^+ & \longrightarrow & X_{\leq k}^+ \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k} & \longrightarrow & \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+ \end{array}$$

où l'application verticale à gauche du diagramme consiste à contracter les arêtes paramétrées par 0 et oublier les sommets indexés par l'unité de l'opérade  $Q$ . Comme la somme amalgamée préserve les cofibrations, l'application  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k} \rightarrow \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+$  est aussi une cofibration. On introduit maintenant la collection  $\partial' X_{\leq k}^+$  comme le sous-collage de  $X_{\leq k}^+$ , contenant  $\partial X_{\leq k}^+$ , constituée des points vérifiant l'une des conditions suivantes :

- i) soit un sommet bivalent est indexé par l'unité de  $Q$ ,
- ii) soit l'une des arêtes des arbres  $\{\Phi_v\}$  est paramétrée par 0 ou 1.

Les applications  $\partial X_{\leq k}^+ \rightarrow \partial' X_{\leq k}^+ \rightarrow X_{\leq k}^+$  sont des cofibrations (non acycliques) et on introduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \partial X_{\leq k}^+ & \longrightarrow & \partial' X_{\leq k}^+ & \longrightarrow & X_{\leq k}^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k} & \longrightarrow & \partial \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+ & \longrightarrow & \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+ \end{array}$$

avec  $\partial \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+$  obtenu comme la somme amalgamée de la partie gauche du diagramme. Comme les sommes amalgamées préservent les cofibrations, les applications horizontales en bas du diagramme sont aussi des cofibrations. De plus,  $\partial \mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+$  contient les points de  $\mathcal{BV}_\emptyset(O)_{\leq k}^+$  s'écrivant sous la forme  $x \circ_i y$ . Par conséquent, comme la partie fermée est déterminée par la relation (6.20), on a le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 A_{\leq k}^+ & \longrightarrow & \prod_{I_c; I_o} \text{Top}(\mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k}^+(I_c, I_o; o); O'(I_c, I_o; o)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_{\leq k} & \longrightarrow & \prod_{I_c; I_o} \text{Top}(\partial\mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k}^+(I_c, I_o; o); O'(I_c, I_o; o))
 \end{array}$$

D'après le lemme 2.1.22, on sait que l'application verticale à droite du diagramme est une fibration. Comme le produit fibré préserve les fibrations, l'application  $A_{\leq k}^+ \rightarrow A_{\leq k}$  est aussi une fibration.

De la même manière, on démontre que  $A_{\leq k+1} \rightarrow A_{\leq k}^+$  ainsi que les applications composants la tour associée à l'espace de lacets relatif sont des fibrations. Pour démontrer que l'application  $\iota$  est une équivalence faible, il suffit de montrer par récurrence que chacune des applications  $\iota_k$  et  $\iota_k^+$  est une équivalence faible. Par construction l'application  $\iota_0$  coïncide avec l'identité qui est une équivalence faible. Supposons que  $\iota_k$  est une équivalence faible. On va démontrer que  $\iota_k^+$  et  $\iota_{k+1}$  sont des équivalences faibles. On commence par se donner  $\tilde{f}$  un point de  $A_{\leq k}$ . On notera  $F_A$  la fibre au-dessus de  $\tilde{f}$  et  $F_B$  la fibre au-dessus de  $\iota_k(\tilde{f})$ . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{\leq k} & \longleftarrow & A_{\leq k}^+ & \longleftarrow & F_A \\
 \downarrow \simeq \iota_k & & \downarrow \iota_k^+ & & \downarrow \iota_{\tilde{f}} \\
 B_{\leq k} & \longleftarrow & B_{\leq k}^+ & \longleftarrow & F_B
 \end{array}$$

Comme les applications horizontales à gauche du diagramme sont des fibrations, l'application  $\iota_k^+$  est une équivalence faible si et seulement si l'application entre les fibres  $\iota_{\tilde{f}}$  l'est aussi. Or un point de  $F_B$  est la donnée d'une famille d'applications continues :

$$\begin{array}{lll}
 f(n; c) & : \mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k}^+(c, \dots, c; c) \times [0, 1] & \longrightarrow O'(c, \dots, c; c), \\
 f(I_c, I_o; o) & : \mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k}^+(I_c, I_o; o) \times \{1\} & \longrightarrow O'(I_c, I_o; o),
 \end{array}$$

avec  $f(n; c)(x; 0) = (\tau_{O'})_c \circ \mu(x)$  et dont la restriction à  $\mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k}$  coïncide avec  $\iota_k(\tilde{f})$ . En particulier, la restriction de  $f(n; c)$  à  $\mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k}$  coïncide avec  $(\tau_{O'})_c \circ \mu$ . Par ailleurs, l'image de  $F_A$  est constituée des familles d'applications vérifiant  $f(n; c)(x; t) = (\tau_{O'})_c \circ \mu(x)$  pour  $t \in [0, 1]$ . Comme il n'y a pas d'arête redondante, on peut définir l'homotopie :

$$\begin{array}{ll}
 H : F_B \times [0, 1] & \longrightarrow F_B \\
 (f; t') & \longmapsto \begin{cases} H[f; t'](n; c)(x; t) = f(n; c)(x; tt') & \text{pour } x \in \mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k}^+(c, \dots, c; c) \text{ et } t \in [0, 1], \\ H[f; t'](I_c, I_o; o)(x; 1) = f(I_c, I_o; o)(x; 1) & \text{pour } x \in \mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k}^+(I_c, I_o; o). \end{cases}
 \end{array}$$

Par conséquent  $\iota_k^+$  est une équivalence faible.

Pour montrer que  $\iota_{k+1}$  est une équivalence faible, on se donne  $\tilde{f}'$  un point de  $A_{\leq k}^+$ . On notera  $F'_A$  la fibre au dessus de  $\tilde{f}'$  et  $F'_B$  la fibre au dessus de  $\iota_k(\tilde{f}')$ . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{\leq k}^+ & \longleftarrow & A_{\leq k+1} & \longleftarrow & F'_A \\
 \downarrow \simeq \iota_k^+ & & \downarrow \iota_{k+1} & & \downarrow \iota_{\tilde{f}'} \\
 B_{\leq k}^+ & \longleftarrow & B_{\leq k+1} & \longleftarrow & F'_B
 \end{array}$$

Comme les applications horizontales à gauche du diagramme sont des fibrations, l'application  $\iota_{k+1}$  est une équivalence faible si et seulement si l'application entre les fibres  $\iota_{\tilde{f}'}$  l'est aussi. Or un point de  $F'_B$  est la donnée d'une famille d'applications continues :

$$\begin{array}{lll}
 f(n; c) & : \mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k+1}(c, \dots, c; c) \times [0, 1] & \longrightarrow O'(c, \dots, c; c), \\
 f(I_c, I_o; o) & : \mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k+1}(I_c, I_o; o) \times \{1\} & \longrightarrow O'(I_c, I_o; o),
 \end{array}$$

dont la restriction à  $\mathcal{B}\mathcal{V}_\emptyset(O)_{\leq k}^+$  coïncide avec  $\iota_k^+(\tilde{f}')$ . En particulier on a  $f(n; c)(x; t) = (\tau_{O'})_c \circ \mu(x)$  pour  $t \in [0, 1]$ . Par conséquent, l'application  $\iota_{\tilde{f}'}$  est l'identité et  $\iota_k$  est une équivalence faible.  $\square$

**Théorème 6.2.16.** Soient  $P$  et  $Q$  deux opérades  $\Sigma$ -cofibrantes et bien pointées, avec  $P(0) = \emptyset$ , et  $\eta : O \rightarrow O'$  un morphisme dans la catégorie  $Op[P; Q]$ . Si  $\mathcal{R}(O)$  est  $\Sigma$ -cofibrant alors le couple d'espaces topologiques

$$\left( \Sigma\text{-Bimod}_{O'}^h(Q; O'_c) ; \Sigma\text{-Bimod}_{P-Q}^h(\mathcal{R}(O); \mathcal{R}(O')) \right)$$

est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_1$ -algèbre explicite :

$$\left( \Omega\left( \Sigma\text{-Operad}^h(Q; O'_c) \right) ; \Omega\left( \Sigma\text{-Operad}^h(Q; O'_c) ; Op[P; \emptyset]^h(\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); P; Q) ; O') \right) \right).$$

*Démonstration.* Pour le premier facteur, l'équivalence faible est due au théorème 6.2.1 de Robertson tandis que pour le second facteur, l'équivalence faible provient du corollaire 6.2.7 et du théorème 6.2.8.  $\square$

**Corollaire 6.2.17.** Soit  $\eta : O \rightarrow O'$  un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades symétriques avec  $O_c(0) = \emptyset$ . Si  $O$  est  $\Sigma$ -cofibrant et bien pointé alors le couple d'espaces topologiques

$$\left( \Sigma\text{-Bimod}_{O'_c}^h(O_c; O'_c) ; \Sigma\text{-Bimod}_{O_o-O_c}^h(\mathcal{R}(O); \mathcal{R}(O')) \right)$$

est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_1$ -algèbre explicite :

$$\left( \Omega\left( \Sigma\text{-Operad}^h(O_c; O'_c) \right) ; \Omega\left( \Sigma\text{-Operad}^h(O_c; O'_c) ; Op[O_o; \emptyset]^h(\mathcal{L}(\mathcal{R}(O); O_o, O_c) ; O') \right) \right).$$

*Démonstration.* Provient du fait que  $\eta : O \rightarrow O'$  est un morphisme dans la catégorie  $Op[O_o; O_c]$ .  $\square$

*Notation 6.2.18.* Si  $O$  est une opérade symétrique alors on désignera par  $O^{>0}$  l'opérade stricte obtenue à partir de  $O$ . Ainsi  $O$  possède une structure de  $(O^{>0}-O)_\Sigma$  bimodule. Plus généralement, la donnée d'un  $\Sigma$ -bimodule sous l'opérade  $O$  est équivalente à la donnée d'un  $(O^{>0}-O)_\Sigma$  bimodule.

**Corollaire 6.2.19.** Soient  $\eta_1 : O_1 \rightarrow O_2$  un morphisme d'opérades et  $\eta_2 : O_2 \rightarrow M$  un morphisme de  $O_2$ -bimodules. Si  $O_1$  est  $\Sigma$ -cofibrant et bien pointé alors le couple d'espaces topologiques

$$\left( \Sigma\text{-Bimod}_{O_1}^h(O_1; O_2) ; \Sigma\text{-Bimod}_{O_1}^h(O_1; M) \right)$$

est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_1$ -algèbre explicite :

$$\left( \Omega\left( \Sigma\text{-Operad}^h(O_1; O_2) \right) ; \Omega\left( \Sigma\text{-Operad}^h(O_1; O_2) ; Op[O_1^{>0}; \emptyset]^h(\mathcal{L}(O_1; O_1^{>0}; O_1) ; \mathcal{L}(M; O_2^{>0}; O_2)) \right) \right).$$

*Démonstration.* On dispose d'un morphisme d'opérades  $\eta_1 : O_1 \rightarrow O_2$  ainsi que d'un morphisme  $f_m = \eta_2 \circ \eta_1 : O_1 \rightarrow M$ , avec  $O_1$  vu comme un  $\Sigma$ -bimodule sous l'opérade  $O_1$  et  $M$  un  $\Sigma$ -bimodule sous l'opérade  $O_2$ , vérifiant la commutativité des diagrammes (6.15). On a donc un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades symétriques :

$$f : \mathcal{L}(O_1; O_1^{>0}; O_1) \rightarrow \mathcal{L}(M; O_2^{>0}; O_2).$$

Ainsi  $f$  est un morphisme dans la catégorie  $Op[O_1^{>0}; O_1]$ . Pour obtenir le résultat du corollaire, il suffit d'appliquer le théorème 6.2.16 à l'application  $f$  en remarquant que  $\mathcal{L}(\mathcal{R}(\mathcal{L}(O_1; O_1^{>0}; O_1)); O_1^{>0}; O_1) = \mathcal{L}(O_1; O_1^{>0}; O_1)$  car  $\mathcal{R}\mathcal{L} = id$  par construction.  $\square$

*Remarque 6.2.20.* Tous les théorèmes et corollaires ci-dessus possèdent des équivalents lorsque les opérades  $P$  et  $Q$  ne sont pas symétriques. Pour cela, il suffit de ne pas tenir compte de l'action du groupe des permutations dans les différentes constructions.

### 6.3 Généralisation grâce à la conjecture de Dwyer-Hess

Dans cette section on va montrer qu'il est possible d'utiliser le théorème 6.2.16 afin d'identifier des algèbres sous l'opérade topologique  $\mathcal{SC}_{d+1}$  à partir d'un morphisme de  $\{o; c\}$ -opérades. Pour cela on doit admettre une conjecture de Dwyer-Hess introduite dans [17]. Dans ce qui suit, l'opérade  $C_d$  est vue comme l'opérade non symétrique  $\mathcal{U}(C_d)$  via l'adjonction (1.3).

**Conjecture 6.3.1.** [17] Soit  $M$  un  $C_d$ -bimodule avec  $M(0) \simeq *$  et  $M(1) \simeq *$ . Si  $\eta : C_d \rightarrow M$  est un morphisme de  $C_d$ -bimodules alors on a l'équivalence faible :

$$Ibimod_{C_d}^h(C_d; M) \simeq \Omega^d Bimod_{C_d}^h(C_d; M).$$

Notons que Dwyer et Hess ont énoncé des résultats préliminaires pour la démonstration de cette conjecture dans l'article [17]. De plus, Boavida et Weiss ont démontré la conjecture dans [6] dans le contexte des espaces de plongements. Une application directe de la conjecture 6.3.1 et du théorème 6.2.1 est l'identification de  $C_{d+1}$ -algèbres à partir de morphismes d'opéades.

**Théorème 6.3.2.** *Admettons que la conjecture 6.3.1 soit vraie. Si  $\eta : C_d \rightarrow O$  est un morphisme d'opéades, avec  $O(0) \simeq *$  et  $O(1) \simeq *$ , alors on a l'équivalence faible :*

$$\text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; O) \simeq \Omega^{d+1} \text{Operad}^h(C_d; O).$$

*Notation 6.3.3.* L'analogie de l'opéade  $C_d$ , dans le cas coloré, sera la  $\{o; c\}$ -opéade symétrique :

$$CC_d = \mathcal{L}(C_d; C_d^{>0}; C_d).$$

**Théorème 6.3.4.** *Admettons que la conjecture 6.3.1 soit vraie. Si  $\eta : CC_d \rightarrow O$  est un morphisme dans la catégorie  $\text{Op}[C_d^{>0}; C_d]$ , avec  $O(c; c) \simeq O(c; c) \simeq *$  et  $O(o; o) \simeq O(c; o) \simeq *$ , alors le couple d'espaces topologiques*

$$\left( \text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; O_c); \text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; \mathcal{R}(O)) \right),$$

*est faiblement équivalent à une algèbre sous  $\mathcal{SC}_{d+1}$  explicite :*

$$\left( \Omega^{d+1} \text{Operad}^h(C_d; O_c); \Omega^{d+1} \left( \text{Operad}^h(C_d; O_c); \text{Op}[C_d^{>0}; \emptyset]^h(CC_d; O) \right) \right).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 6.2.16 et de la conjecture 6.3.1. □

**Corollaire 6.3.5.** *Admettons que la conjecture 6.3.1 soit vraie. Soient  $\eta_1 : C_d \rightarrow O$  un morphisme d'opéades et  $\eta_2 : O \rightarrow M$  un morphisme de  $O$ -bimodules. Si  $O(0) \simeq O(1) \simeq *$  et  $M(0) \simeq M(1) \simeq *$  alors le couple d'espaces topologiques*

$$\left( \text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; O); \text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; M) \right),$$

*est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_{d+1}$ -algèbre explicite :*

$$\left( \Omega^{d+1} \text{Operad}^h(C_d; O); \Omega^{d+1} \left( \text{Operad}^h(C_d; O); \text{Op}[C_d^{>0}; \emptyset]^h(CC_d; \mathcal{L}(M; O^{>0}; O)) \right) \right).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 6.2.19 et de la conjecture 6.3.1. □

## 6.4 Application à l'espace des longs nœuds en dimension supérieure

Dans [42], Sinha a réussi à exprimer l'espace des longs nœuds  $\mathcal{L}_{1;n}$  comme un espace de lacets double car il disposait d'un remplacement semi-cosimplicial provenant de l'opéade de Kontsevich (voir le chapitre 4). Dans le contexte des espaces de longs nœuds en dimension supérieure définis par la fibre homotopique :

$$\mathcal{L}_{1;n}^d := \text{hofib} \left( \text{Emb}_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Imm}_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \right),$$

on ne possède pas de remplacement semi-cosimplicial. Cependant, Arone et Turchin ont développé dans [1] une méthode, basée sur le calcul de plongements de Weiss [52], afin d'identifier des espaces de plongements à des bimodules infinitésimaux sous l'opéade des petits cubes.

### 6.4.1 Rappel sur le calcul de plongements.

On fixe  $M$  une variété lisse de dimension  $d$ . On désigne par  $O(M)$  l'ensemble partiellement ordonné des ouverts de  $M$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $O_k(M)$  le sous-ensemble de  $O(M)$  constitué des éléments homéomorphes à une union disjointe d'au plus  $k$  boules ouvertes de  $\mathbb{R}^d$ . A partir d'un foncteur contravariant  $F : O(M) \rightarrow \text{Top}$ , Weiss a introduit le foncteur  $T_k F : O(M) \rightarrow \text{Top}$  via la formule :

$$T_k F(U) := \text{holim}_{V \in O_k(U)} F(V).$$

Le foncteur  $T_k F$  est appelé le  $k$ -ième polynôme de Taylor associé à  $F$ . Ce dernier a l'avantage d'être plus simple à étudier que le foncteur d'origine. La restriction de  $\mathcal{O}_k$  à  $\mathcal{O}_{k-1}$  induit une transformation naturelle  $T_k F \rightarrow T_{k-1} F$ . On obtient ainsi une tour, appelée *tour de Taylor*, permettant d'interpoler le foncteur  $F$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & & & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & & & \\ T_0 F & \longleftarrow & T_1 F & \longleftarrow & T_2 F & \longleftarrow & T_3 F \longleftarrow \dots \end{array}$$

Dans certains cas favorables, la limite homotopique de la tour de Taylor, notée  $T_\infty F$ , est un foncteur équivalent au foncteur initial  $F$  (i.e  $\forall U \in \mathcal{O}(M)$  on a  $T_\infty F(U) \simeq F(U)$ ). On dit alors que la tour de Taylor associée au foncteur  $F$  converge.

Les tours de Taylor ont été utilisées dans l'étude des espaces de plongements par Goodwillie [20, 21, 22] et Weiss [52, 23]. L'idée est d'interpréter l'espace  $Emb(M; N)$  comme un foncteur contravariant :

$$Emb(-; N) : \mathcal{O}(M) \rightarrow Top,$$

avec  $N$  une variété lisse de dimension  $n$ . De même, on peut étudier l'espace des immersions  $Imm(M; N)$  ainsi que l'espace des longs plongements définis par la fibre homotopique :

$$\overline{Emb}(M; N) := \text{hofib}(Emb(M; N) \rightarrow Imm(M; N)).$$

**Théorème 6.4.1.** [52] Soient  $M$  et  $N$  deux variétés lisses de dimension  $d$  et  $n$  respectivement. Si  $n - d - 2 > 0$  alors les tours de Taylor associées aux foncteurs ci-dessous convergent :

$$Emb(-; N), Imm(-; N) \text{ et } \overline{Emb}(-; N) : \mathcal{O}(M) \rightarrow Top.$$

Dans le cas particulier où l'on étudie les espaces de plongements et d'immersions à support compact, on doit modifier légèrement la définition de la tour de Taylor. Si  $M$  est le complémentaire d'un compact de  $\mathbb{R}^d$  alors on définit  $\widetilde{\mathcal{O}}(M)$  comme l'ensemble des ouverts de  $M$  s'écrivant sous la forme  $V \cup W$  avec  $W$  le complémentaire d'un disque fermé,  $V \in \mathcal{O}(M)$  et  $V \cap W = \emptyset$ . On note  $\widetilde{\mathcal{O}}_k(M)$  le sous-ensemble de  $\widetilde{\mathcal{O}}(M)$  constitué des ouverts  $V \cup W$  avec  $V \in \mathcal{O}_k(M)$ .

A partir d'un foncteur  $F : \widetilde{\mathcal{O}}(M) \rightarrow Top$ , on définit le  $k$ -ième polynôme de Taylor  $T_k F : \widetilde{\mathcal{O}}(M) \rightarrow Top$  via la formule :

$$T_k F(U) := \text{holim}_{V \in \widetilde{\mathcal{O}}_k(U)} F(V).$$

**Théorème 6.4.2.** [52] Soit  $M$  le complémentaire d'un compact de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $n - d - 2 > 0$  alors les tours de Taylor associées aux foncteurs :

$$Emb_c(-; \mathbb{R}^n), Imm_c(-; \mathbb{R}^n) \text{ et } \overline{Emb}_c(-; \mathbb{R}^n) : \widetilde{\mathcal{O}}(M) \rightarrow Top.$$

convergent. En particulier, la tour de Taylor associée à l'espace des longs nœuds de dimension supérieure converge.

## 6.4.2 Lien entre la tour de Taylor et les bimodules.

Un isomorphisme standard de  $\mathbb{R}^d$  est la composée d'une translation et d'une dilatation. Soient  $A = \cup_{s \in S} A_s$  l'union disjointe d'ouverts de  $\mathbb{R}^d$  indexée par un ensemble  $S$  et  $M$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^d$ . Une application  $f : A \rightarrow M$  est appelée *plongement standard* si  $f$  est un plongement tel que, pour tout  $s \in S$ , la composée  $f|_{A_s} : A_s \rightarrow M \hookrightarrow \mathbb{R}^d$  est égale à l'inclusion dans  $\mathbb{R}^d$  suivie d'un isomorphisme standard. On note  $sEmb(A; M)$  l'espace des plongements standards.

**Définition 6.4.3.** Soit  $M$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . La  $\Sigma$ -collection  $sEmb(-; M)$  est donnée par :

$$sEmb(-; M)(k) = sEmb(k \times C^d; M),$$

avec  $C^d$  le cube unité de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $M = C^d$  alors la  $\Sigma$ -collection  $sEmb(-; C^d)$  coïncide avec l'opérade  $C_d$ . De manière générale,  $sEmb(-; M)$  possède une structure de  $C_d$ -bimodule à droite :

$$\circ_i : sEmb(-; M)(n) \times C_d(m) \rightarrow sEmb(-; M)(n + m - 1),$$

induit par la pré-composition avec le plongement standard provenant de  $C_d$ .

**Théorème 6.4.4.** [1, Théorème 5.10] Soit  $M$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d < n$ . On a les équivalences faibles :

$$T_\infty \overline{Emb}(M; \mathbb{R}^n) \simeq Rmod_{C_d}^h(sEmb(-; M); C_n) \quad \text{et} \quad T_\infty \overline{Emb}_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \simeq Ibimod_{C_d}^h(C_d; C_n).$$

Si  $M$  est le complémentaire d'un compact de  $\mathbb{R}^d$  alors on a l'équivalence faible :

$$T_\infty \overline{Emb}_c(M; \mathbb{R}^n) \simeq Rmod_{C_d}^h(sEmb(-; M); C_n).$$

**Corollaire 6.4.5.** Admettons que la conjecture 6.3.1 soit vraie. Si  $n - d - 2 > 0$  alors on a l'équivalence faible :

$$\mathcal{L}_{1;n}^d \simeq Ibimod_{C_d}^h(C_d; C_n) \simeq \Omega^{d+1} Operad^h(C_d; C_n).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence de la conjecture 6.3.1 ainsi que des théorèmes 6.4.2 et 6.4.4.  $\square$

### 6.4.3 Application à l'espace des $(k)$ -immersions relatives.

L'espace des  $(k)$ -immersions, noté  $Imm_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$ , est le sous-espace des immersions  $f \in Imm_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$  tel que pour tout sous-ensemble  $K \subset \mathbb{R}^d$  de cardinal  $k$ , la restriction  $f|_K$  est non-constante. En particulier, lorsque  $k = 2$ , on retrouve l'espace des plongements classique  $Emb_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$ . Les  $(k)$ -immersions définissent une famille d'espaces intermédiaires entre l'espace de plongements et l'espace d'immersions :

$$Emb_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \longrightarrow Imm_c^{(3)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \dots \longrightarrow Imm_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \dots \longrightarrow Imm_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$$

L'espace des  $(k)$ -immersions relatives est défini comme la fibre homotopique :

$$\overline{Imm}_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) := \text{hofib}\left(Imm_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \longrightarrow Imm_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)\right).$$

Contrairement aux espaces de plongements, on ne sait pas si la tour de Taylor associée aux  $(k)$ -immersions converge. Dobrinskaya et Turchin ont néanmoins réussi à identifier la limite de la tour de Taylor à un espace de morphismes de bimodules infinitésimaux sous l'opérade  $C_d$ . Pour cela, on a besoin d'introduire l'espace des  $(k)$ -petits cubes.

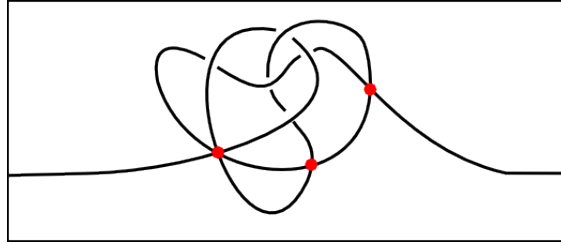


FIGURE 6.11 – Exemple d'un point de  $\overline{Imm}_c^{(4)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^3)$ .

**Définition 6.4.6.** Le  $C_d$ -bimodule des  $(k)$ -petits cubes, noté  $C_d^{(k)}$ , est la donnée de la  $\Sigma$ -collection  $\{C_d^{(k)}(n)\}$  dont la  $n$ -ième composante est l'espace des familles de petits cubes  $\{c_i\}_{i=1}^n$  (voir la définition 1.1.19) vérifiant la condition suivante :

$$\forall (i_1, \dots, i_k) \in C_n^k, \quad \bigcap_{1 \leq j \leq k} \text{Int}(\text{Im}(c_{i_j})) = \emptyset. \quad (6.23)$$

La structure de bimodule à droite est définie de la façon suivante :

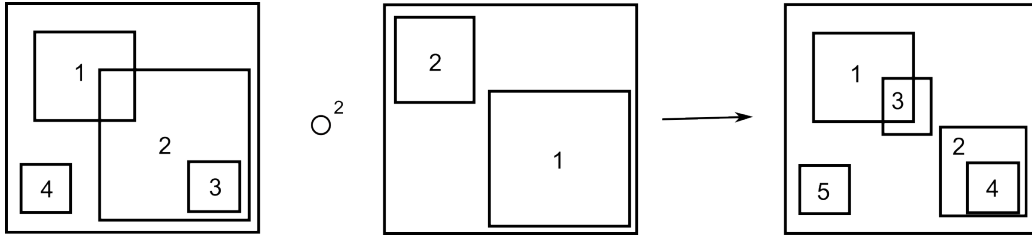
$$\begin{aligned} \circ^i : C_d^{(k)}(n) \times C_d(m) &\longrightarrow C_d^{(k)}(n+m-1); \\ (\{c_i\}_{i=1}^n; \{c'_i\}_{i=1}^m) &\longmapsto \{c''_i\}_{i=1}^{n+m-1} := \begin{cases} c''_j = c_j & \text{si } i < j, \\ c''_j = c_i \circ c'_{j-i+1} & \text{si } i \leq j < i+m, \\ c''_j = c_{j-m+1} & \text{si } j \geq i+m, \end{cases} \end{aligned}$$

tandis que la structure de bimodule à gauche est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \gamma_l : C_d(n) \times C_d^{(k)}(m_1) \times \dots \times C_d^{(k)}(m_n) &\longrightarrow C_d^{(k)}(m_1 + \dots + m_n); \\ (\{c_i\}_{i=1}^n; \{c_i^1\}_{i=1}^{m_1}, \dots, \{c_i^1\}_{i=1}^{m_n}) &\longmapsto \{c'_i\}_{i=1}^{m_1 + \dots + m_n}, \end{aligned}$$

avec

$$c'_j = c_{l+1} \circ c_{j-m_1-\dots-m_l}^{l+1} \quad \text{si } m_1 + \dots + m_l + 1 \leq j \leq m_1 + \dots + m_{l+1}.$$


 FIGURE 6.12 – Illustration de la structure de  $C_2$ -bimodule à droite de  $C_2^{(3)}$ .

**Théorème 6.4.7.** [11, Théorème 11.2] Si  $n > d$  alors on a  $T_\infty \overline{\text{Imm}}_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \simeq \text{Ibimod}_{C_d}^h(C_d; C_n^{(k)})$ .

A cause de la condition (6.23), le bimodule des  $(k)$ -petits cubes ne possède pas de structure opéradique. On dispose néanmoins de la composition :

$$C_d \xrightarrow{\eta_1} C_n \xrightarrow{\eta_2} C_n^{(k)},$$

avec  $\eta_1$  un morphisme d'opérades et  $\eta_2$  le morphisme de  $C_n$ -bimodules issu de l'inclusion. En utilisant le corollaire 6.3.5 avec le couple de morphismes  $(\eta_1; \eta_2)$  et grâce au corollaire 6.4.5 et au théorème 6.4.7, on obtient l'énoncé suivant :

**Théorème 6.4.8.** Admettons que la conjecture 6.3.1 soit vraie. Si  $n-d-2 > 0$  alors le couple d'espaces topologiques  $(\mathcal{L}_{1;n}^d; T_\infty \overline{\text{Imm}}_c^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n))$  est faiblement équivalent à une  $\text{SC}_{d+1}$ -algèbre explicite :

$$\left( \Omega^{d+1} \text{Operad}^h(C_d; C_n); \Omega^{d+1} \left( \text{Operad}^h(C_d; C_n); \text{Op}[C_d; \emptyset]^h(CC_d; \mathcal{L}(C_n^{(k)}; C_n; C_n)) \right) \right).$$

## Bibliographie

- [1] Gregory Arone and Victor Turchin. On the rational homology of high dimensional analogues of spaces of long knots. *Geometry and Topology*, 18 :1261–1322, 2014.
- [2] C. Berger and I. Moerdijk. Axiomatic homotopy theory for operads. *Comment. Math. Helv.*, 78 :805–831, 2003.
- [3] C. Berger and I. Moerdijk. The Boardman-Vogt resolution of operads in monoidal model categories. *Topology*, 45(5) :807–849, 2006.
- [4] J. M. Boardman and R. M. Vogt. Homotopy-everything  $H$ -spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 :1117–1122, 1968.
- [5] J.M. Boardman and R.M. Vogt. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [6] Pedro Boavida de Brito and Michael Weiss. Spaces of smooth embeddings and configuration categories. *arXiv :1502.01640*, 2015.
- [7] A. K. Bousfield. On the homology spectral sequence of a cosimplicial space. *Amer. J. Math.*, 109(2) :361–394, 1987.
- [8] Ryan Budney. Little cubes and long knots. *Topology*, 46(1) :1–27, 2007.
- [9] F. R. Cohen. On loop spaces of configuration spaces, and related spaces. In *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, volume 350 of *Contemp. Math.*, pages 63–81. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [10] Frederick R. Cohen, Thomas J. Lada, and J. Peter May. *The homology of iterated loop spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 533. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [11] N. Dobrinskaya and V. Turchin. Homology of non- $k$ -overlapping discs. *arXiv : 1403.0881*, 2014.
- [12] E. Dror and W. G. Dwyer. A long homology localization tower. *Comment. Math. Helv.*, 52(2) :185–210, 1977.
- [13] J. Ducoulombier. Swiss-cheese action on the totalization of action-operads. *arXiv : 1410.3236*. to appear in *Algebraic and Geometric topology*.
- [14] W. Dwyer and K. Hess. Long knots and maps between operads. *Geometry and topology*, 16 :919–955, 2012.
- [15] W. Dwyer and K. Hess. A delooping of the space of string links. *arXiv : 1501.00575*, 2015.
- [16] W. G. Dwyer and J. Spaliński. Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73–126. North-Holland, Amsterdam, 1995.



- 
- [17] William Dwyer and Kathryn Hess. The Boardman-Vogt tensor product of operadic bimodules. In *Algebraic topology : applications and new directions*, volume 620 of *Contemp. Math.*, pages 71–98. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
- [18] Benoit Fresse. *Modules over operads and functors*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1967. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [19] Murray Gerstenhaber and Alexander A. Voronov. Homotopy  $G$ -algebras and moduli space operad. *Internat. Math. Res. Notices*, (3) :141–153, 1995.
- [20] Thomas G. Goodwillie. Calculus. I. The first derivative of pseudoisotopy theory. *K-Theory*, 4(1) :1–27, 1990.
- [21] Thomas G. Goodwillie. Calculus. II. Analytic functors. *K-Theory*, 5(4) :295–332, 1991/92.
- [22] Thomas G. Goodwillie. Calculus. III. Taylor series. *Geom. Topol.*, 7 :645–711, 2003.
- [23] Thomas G. Goodwillie and Michael Weiss. Embeddings from the point of view of immersion theory. II. *Geom. Topol.*, 3 :103–118, 1999.
- [24] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [25] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*, volume 99 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [26] E. Hoefel, M. Livernet, and J. Stasheff.  $A_\infty$ -actions and Recognition of Relative Loop Spaces. *arXiv :1312.7155*, 2013.
- [27] J. Hoefel, E. et Stasheff. Exposé : 28 colóquio brasileiro de matemática. [http://www.impa.br/opencms/pt/pesquisa/pesquisa\\_coloquio\\_brasileiro\\_de\\_matematica/CBM28/index.html](http://www.impa.br/opencms/pt/pesquisa/pesquisa_coloquio_brasileiro_de_matematica/CBM28/index.html), 2011.
- [28] Mark Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [29] Pascal Lambrechts, Victor Turchin, and Ismar Volić. The rational homology of spaces of long knots in codimension  $> 2$ . *Geom. Topol.*, 14(4) :2151–2187, 2010.
- [30] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 271. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [31] J. P. May.  $E_\infty$  spaces, group completions, and permutative categories. In *New developments in topology (Proc. Sympos. Algebraic Topology, Oxford, 1972)*, pages 61–93. London Math. Soc. Lecture Note Ser., No. 11. Cambridge Univ. Press, London, 1974.
- [32] James E. McClure and Jeffrey H. Smith. Cosimplicial objects and little  $n$ -cubes. I. *Amer. J. Math.*, 126(5) :1109–1153, 2004.
- [33] James E. McClure and Jeffrey H. Smith. Operads and cosimplicial objects : an introduction. In *Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory*, volume 131 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 133–171. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [34] Syunji Moriya. Multiplicative formality of operads and Sinha’s spectral sequence for long knots. *Kyoto J. Math.*, 55(1) :17–27, 2015.
- [35] Brian A. Munson and Ismar Volić. Cosimplicial models for spaces of links. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 9(2) :419–454, 2014.
- [36] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [37] M. Robertson. Spaces of Operad Structures. *arXiv :1111.3904*, 2011.

- 
- [38] Keiichi Sakai. Poisson structures on the homology of the space of knots. In *Groups, homotopy and configuration spaces*, volume 13 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 463–482. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008.
- [39] P. Salvatore. Configuration spaces with summable labels. In *Cohomological methods in homotopy theory*, volume 196 of *Progr. Math.*, page 375–395. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [40] Paolo Salvatore. Knots, operads, and double loop spaces. *Int. Math. Res. Not.*, pages 22, Art. ID 13628, 2006.
- [41] Dev P. Sinha. Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces. *Selecta Math. (N.S.)*, 10(3) :391–428, 2004.
- [42] Dev P. Sinha. Operads and knot spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 19(2) :461–486, 2006.
- [43] Dev P. Sinha. The topology of spaces of knots : cosimplicial models. *Amer. J. Math.*, 131(4) :945–980, 2009.
- [44] Stephen Smale. A Vietoris mapping theorem for homotopy. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 :604–610, 1957.
- [45] P. A. Songhafou Tsopméné. The rational homology of spaces of long links. *arXiv : 1312.7280*, 2013.
- [46] Paul Arnaud Songhafou Tsopméné. Formality of Sinha’s cosimplicial model for long knots spaces and the Gerstenhaber algebra structure of homology. *Algebr. Geom. Topol.*, 13(4) :2193–2205, 2013.
- [47] V. Turchin. On the homology of the spaces of long knots. In *Advances in topological quantum field theory*, volume 179 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 23–52. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [48] Victor Turchin. Hodge-type decomposition in the homology of long knots. *J. Topol.*, 3(3) :487–534, 2010.
- [49] Victor Turchin. Delooping totalization of a multiplicative operad. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 9(2) :349–418, 2014.
- [50] R. M. Vogt. Cofibrant operads and universal  $E_\infty$ -operads. *Topology Appl.*, 133(1) :69–87, 2003.
- [51] Alexander A. Voronov. The Swiss-cheese operad. In *Homotopy invariant algebraic structure (Baltimore, MD, 1998)*, volume 239 of *Contemp. Math.*, pages 365–373. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [52] Michael Weiss. Embeddings from the point of view of immersion theory. I. *Geom. Topol.*, 3 :67–101, 1999.
- [53] Kay Werndli. Homology theory. <http://sma.epfl.ch/~werndli/scripts/homology/homology.pdf>, 2009.

---

## Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de l'opérade *Swiss-Cheese*  $\mathcal{SC}_d$  qui est une version relative de l'opérade des petits cubes  $C_d$ . On montre que les théorèmes classiques dans le cadre des opérades non colorées admettent des analogues dans le cas relatif. Il est ainsi possible d'extraire d'une opérade pointée  $O$  (i.e. un opérade colorée sous  $\pi_0(\mathcal{SC}_1)$ ) un couple d'espaces semi-cosimpliciaux  $(O_c; O_o)$  dont les semi-totalisations sont faiblement équivalentes à une  $\mathcal{SC}_2$ -algèbre explicite. En particulier, on prouve que le couple  $(\mathcal{L}_{1;n}; \mathcal{L}_{m;n})$ , composé de l'espace des longs nœuds et de l'espace des longs entrelacs à  $m$  brins, est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_2$ -algèbre explicite.

Dans un second temps, on s'intéresse aux couples d'homologies singulières et d'homologies de Hochschild associés à une paire d'espaces semi-cosimpliciaux provenant d'une opérade pointée. Dans ce contexte, les couples  $(H_*(sTot(O_c)); H_*(sTot(O_o)))$  et  $(HH_*(O_c); HH_*(O_o))$  possèdent tous deux une structure de  $H_*(\mathcal{SC}_2)$ -algèbre explicite. On montre alors que le morphisme de Bousfield entre ces deux couples préserve les structures de  $H_*(\mathcal{SC}_2)$ -algèbres. Cela nous permet de mieux appréhender le couple de suites spectrales de Bousfield calculant  $(H_*(sTot(O_c)); H_*(sTot(O_o)))$ . En particulier, on énonce un critère permettant de faire le lien entre le couple d'homologies singulières issu d'une opérade symétrique multiplicative topologique et la page  $E^2$  des suites spectrales de Bousfield.

La dernière étape de notre étude consiste à généraliser les précédents résultats. Pour cela, on se base sur une conjecture de Dwyer et Hess qui vise à identifier une  $C_{d+1}$ -algèbre à partir d'un morphisme d'opérades  $C_d \rightarrow O$ . En admettant ce résultat, on introduit une opérade colorée  $CC_d$  telle que l'on peut extraire une  $\mathcal{SC}_{d+1}$ -algèbre à partir d'un morphisme d'opérades colorées  $CC_d \rightarrow O$ . On montre ainsi que le couple d'espaces  $(\mathcal{L}_{1;n}^d; T_\infty \overline{Imm}^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n))$ , composé de l'espace des longs nœuds en dimension  $d$  et de l'approximation polynomiale des  $(k)$ -immersions, est faiblement équivalent à une  $\mathcal{SC}_{d+1}$ -algèbre explicite.

---

## Abstract

The aim of this work is to study the *Swiss-Cheese* operad, denoted by  $\mathcal{SC}_d$ , which is a relative version of the little cubes operad  $C_d$ . We show that the classical theorems in the context of uncolored operads can be generalized to the relative case. From a pointed operad  $O$  (i.e. a two colored operad under  $\pi_0(\mathcal{SC}_1)$ ), we build two semi-cosimplicial spaces  $(O_c; O_o)$  such that the pair of semi-totalizations is weakly equivalent to an explicit  $\mathcal{SC}_2$ -algebra. In particular, we prove that the pair  $(\mathcal{L}_{1;n}; \mathcal{L}_{m;n})$ , composed of the space of long knots and the space of long links, is weakly equivalent to an explicit  $\mathcal{SC}_2$ -algebra.

We study two homology theories, namely singular and Hochschild homology, of a pair of semi-cosimplicial spaces arising from a pointed operad. In this context,  $(H_*(sTot(O_c)); H_*(sTot(O_o)))$  and  $(HH_*(O_c); HH_*(O_o))$  are equipped with an explicit  $H_*(\mathcal{SC}_2)$ -algebra structure. We show that the map introduced by Bousfield between these two pairs is a morphism of  $H_*(\mathcal{SC}_2)$ -algebras. This result helps us to understand the pair of spectral sequences computing  $(H_*(sTot(O_c)); H_*(sTot(O_o)))$ . In particular we give some conditions on a multiplicative symmetric operad so that the  $E^2$  pages of the Bousfield spectral sequences are weakly equivalent to  $H_*(sTot(O_c))$  and  $H_*(sTot(O_o))$  as  $H_*(\mathcal{SC}_2)$ -algebras.

Finally we generalize our previous results, relying on a conjecture by Dwyer and Hess. We define a colored operad  $CC_d$  and obtain an  $\mathcal{SC}_{d+1}$ -algebra from an operad morphism  $CC_d \rightarrow O$ . As a consequence, we prove that the couple of topological spaces  $(\mathcal{L}_{1;n}^d; T_\infty \overline{Imm}^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n))$ , where  $\mathcal{L}_{1;n}^d$  is the space of long knots from  $\mathbb{R}^d$  to  $\mathbb{R}^n$  and where  $T_\infty \overline{Imm}^{(k)}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$  is the polynomial approximation of the  $(k)$ -immersions, is weakly equivalent to an explicit  $\mathcal{SC}_{d+1}$ -algebra.

---

Julien Ducoulombier  
ducoulombier@math.univ-paris13.fr  
Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité,  
LAGA, UMR 7539 du CNRS,  
99, Av. Jean-Baptiste Clément,  
93430 Villetaneuse,  
FRANCE