



**HAL**  
open science

# Analyse d'un problème d'interaction fluide-structure avec des conditions aux limites de type frottement à l'interface

Hela Ayed

► **To cite this version:**

Hela Ayed. Analyse d'un problème d'interaction fluide-structure avec des conditions aux limites de type frottement à l'interface. Physique mathématique [math-ph]. Normandie Université; École nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie), 2017. Français. NNT : 2017NORMC213 . tel-02132280

**HAL Id: tel-02132280**

**<https://theses.hal.science/tel-02132280>**

Submitted on 17 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

## THESE

**Pour obtenir le diplôme de doctorat**

**Spécialité Mathématiques**

**Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie**

**En partenariat international avec École nationale d'ingénieurs de Tunis Tunisie**

**Analyse d'un problème d'interaction fluide-structure  
avec des conditions aux limites de type frottement à l'interface**

**Présentée et soutenue par  
HELA AYED**

**Thèse soutenue publiquement le 16 mai 2017  
devant le jury composé de**

M. Chérif AMROUCHE	Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour	Rapporteur
Mme. Saloua AOUADI	Professeur, Université Tunis El Manar	Examinatrice
M. Mekki AYADI	Professeur, Université de Sousse	Examineur
M. Mejdi AZAIEZ	Professeur, INP Université de Bordeaux	Rapporteur
M. Leonardo BAFFICO	Maître de Conférences, Université de Caen Normandie	Examineur
M. Hedi BEL HADJ SALAH	Professeur, Université de Monastir	Examineur
M. Maher MOAKHER	Professeur, Université Tunis El Manar	Examineur
M. Taoufik SASSI	Professeur, Université de Caen Normandie	Directeur de thèse

**Thèse dirigée par Taoufik Sassi, laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme**



# Résumé

Cette thèse est consacrée à l'analyse mathématique et numérique d'un problème d'interaction fluide-structure stationnaire, couplant un fluide newtonien, visqueux et incompressible, modélisé par les équations de Stokes 2D et une structure déformable, décrite par les équations d'une poutre 1D. Le fluide et la structure sont couplés via une condition aux limites de type frottement à l'interface. Dans l'étude théorique, nous montrons un résultat d'existence et unicité de solutions faibles, dans le cadre de petits déplacements, du problème de couplage fluide structure avec une condition de glissement de type Tresca en utilisant le théorème de point fixe de Schauder. Dans l'analyse numérique, nous étudions d'abord, l'approximation du problème de Stokes avec la condition de Tresca par une méthode d'éléments finis mixtes à quatre champs. Nous montrons ensuite une estimation d'erreur *a priori* optimale pour des données régulières et nous réalisons des tests numériques. Enfin, nous présentons un algorithme de point fixe pour la simulation numérique du problème couplé avec des conditions aux limites non linéaires.

**Mots-clés :** Interaction fluide-structure, loi de Tresca, problème de Stokes, estimations d'erreur *a priori*, éléments finis mixtes, condition Inf-Sup, théorème de point fixe de Schauder.



# Abstract

This PHD thesis is devoted to the theoretical and numerical analysis of a stationary fluid-structure interaction problem between an incompressible viscous Newtonian fluid, modeled by the 2D Stokes equations, and a deformable structure modeled by the 1D beam equations. The fluid and structure are coupled via a friction boundary condition at the fluid-structure interface. In the theoretical study, we prove the existence of a unique weak solution, under small displacements, of the fluid-structure interaction problem under a slip boundary condition of friction type (SBCF) by using Schauder fixed point theorem. In the numerical analysis, we first study a mixed finite element approximation of the Stokes equations under SBCF. We also prove an optimal *a priori* error estimate for regular data and we provide numerical examples. Finally, we present a fixed point algorithm for numerical simulation of the coupled problem under nonlinear boundary conditions.

**Key- Words :** Fluid-structure interaction, slip boundary condition of friction type, Stokes equations, *a priori* error estimate, mixed finite element, Inf-Sup condition, Schauder fixed point theorem.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Motivations . . . . .	2
1.1.1	Conditions aux limites de glissement . . . . .	4
1.1.2	Condition aux limites de glissement de type frottement . . . . .	5
1.2	Objectif de la thèse . . . . .	6
1.3	Plan de la thèse . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Présentation des problèmes étudiés</b>	<b>9</b>
2.1	Notations et préliminaires . . . . .	10
2.1.1	Notations . . . . .	10
2.1.2	Quelques résultats préliminaires . . . . .	12
2.2	Problème d'interaction fluide-structure . . . . .	13
2.2.1	Présentation des problèmes . . . . .	14
2.3	Formulations variationnelles du problème fluide . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Analyse mathématique du problème d'interaction fluide-structure</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	30
3.2	Cadre fonctionnel et résultat principal . . . . .	30
3.3	Étude du problème fluide . . . . .	33
3.4	Étude du problème de la structure . . . . .	41
3.5	Démonstration du Théorème d'existence et unicité du problème couplé	42
3.5.1	Application des lemmes . . . . .	42
3.5.2	Procédure de point fixe . . . . .	45
3.5.3	Unicité . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Approximation du problème fluide et estimations d'erreur</b>	<b>55</b>
4.1	Introduction . . . . .	56
4.2	Problème continu . . . . .	56
4.2.1	Formulation variationnelle mixte à quatre champs . . . . .	57
4.2.2	Existence et unicité . . . . .	59

4.3	Approximation par éléments finis et estimations d'erreur . . . . .	61
4.3.1	Approximation par éléments finis . . . . .	61
4.3.2	Estimation d'erreur . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Mise en œuvre et résultats numériques</b>	<b>75</b>
5.1	Introduction . . . . .	76
5.2	Discrétisation du problème fluide . . . . .	77
5.2.1	Formulation mixte approchée . . . . .	77
5.2.2	Forme algébrique . . . . .	78
5.2.3	Mise sous forme de problème de minimisation . . . . .	81
5.2.4	Calcul des erreurs et ordre de convergence . . . . .	82
5.3	Discrétisation du problème de la structure . . . . .	91
5.3.1	Approximation par éléments finis . . . . .	92
5.4	Couplage fluide-structure . . . . .	94
5.4.1	La contrainte fluide . . . . .	94
5.4.2	Équations de la structure avec contrainte de volume . . . . .	95
5.4.3	Maillage déformé . . . . .	97
5.4.4	Algorithme de couplage . . . . .	97
5.5	Résultats numériques . . . . .	98
5.5.1	Tests numériques du Problème S1 . . . . .	99
5.5.2	Test numérique du Problème S2 . . . . .	104
5.5.3	Test numérique du Problème Leak . . . . .	107
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>111</b>
	<b>Annexe</b>	<b>113</b>
	<b>A Preuve du Lemme 2.3.1</b>	<b>113</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Motivations . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1.1	Conditions aux limites de glissement . . . . .	4
1.1.2	Condition aux limites de glissement de type frottement . . . . .	5
<b>1.2</b>	<b>Objectif de la thèse . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.3</b>	<b>Plan de la thèse . . . . .</b>	<b>7</b>

---

## 1.1 Motivations

Les problèmes d'interaction fluide-structure se présentent quand un ou plusieurs fluides sont en contact avec un solide (rigide ou déformable). L'évolution de chaque milieu continu est dépendante de celle de l'autre. En effet, le fluide exerce des forces sur l'interface fluide-solide et donc le solide se déplace ou se déforme sous leurs actions. Réciproquement, le mouvement de la structure (le déplacement ou la déformation) affecte l'écoulement du fluide.

De multiples problèmes d'interaction fluide-structure sont présents dans plusieurs disciplines, par exemple

- La recherche en biomécanique : déformations des vaisseaux sanguins en liaison avec le cycle cardiaque, écoulement du sang dans les veines, écoulement particulière des globules rouges dans le sang, etc..
- L'environnement : transport des produits fluides toxiques.
- L'aéroélasticité : l'écoulement de l'air autour d'ailes d'avions.
- En génie civile : le problème de l'instabilité d'un pont suspendu sous l'effet de vents forts ou le problème de vibrations de tubes immergés dans un fluide réfrigérant dans des centrales nucléaires.

Les phénomènes d'interaction fluide-structure sont parfois à l'origine de dysfonctionnement de certains systèmes. Rappelons à titre d'exemple la célèbre catastrophe de la rupture du pont de Tacoma en 1940 aux États-Unis « lorsque la vitesse de l'écoulement du fluide (le vent) qui arrive sur l'obstacle (le pont, ici) dépasse une certaine valeur critique, ce couplage "fluide-élastique" peut déstabiliser le mouvement vibratoire en générant des oscillations de grande amplitude susceptibles d'entraîner la destruction de la structure (pont) à plus ou moins court terme » [61]. La prédiction des problèmes d'instabilités provoqués par ces phénomènes est donc d'une importance capitale.

Dans le passé, fluides et solides étaient traités d'une façon indépendante et seule l'action d'un milieu (fluide ou solide) sur l'autre était prise en compte. Ce type de prédiction peut introduire des erreurs considérables dans les résultats de la simulation [49], d'où l'importance de la modélisation des interactions entre les deux milieux.

Le développement de modèles mathématiques et numériques peut alors être un moyen d'aider à la compréhension de certains phénomènes physiques, mécaniques, biologiques, etc.

La modélisation mathématique de ces problèmes se fait dans le cas où le mouvement du solide est assez important de telle sorte que la déformation du domaine fluide est considérée comme non négligeable. Le domaine occupé par le fluide est alors une inconnue et le problème couplé est ainsi non linéaire.

Dans l'étude théorique (existence, unicité, régularité de solutions), une procédure de point fixe est souvent adoptée (voir par exemple [23, 35, 55, 58, 57]), ce qui permet de découpler les deux systèmes, par exemple, de la manière suivante : Soit  $b$  un déplacement "admissible" de la structure. On résout, en utilisant le déplacement  $b$  comme donnée, le problème fluide. Ensuite, la solution obtenue du problème fluide sera une donnée pour la résolution du problème structure, ce qui nous donne un nouveau déplacement  $d$ . Ce déplacement est alors fonction de  $b$ , c.-à-d.  $d = S(b)$ . Si l'application  $S$  est bien définie et admet un point fixe alors, le problème d'interaction fluide-structure admet une solution. Dans le cadre de l'approximation numérique d'un problème d'interaction fluide-structure, la même stratégie peut être adoptée, c.-à-d. l'utilisation d'un algorithme de point fixe pour chaque pas de temps [58, 76, 92, 29].

Il existe une littérature importante concernant l'analyse mathématique et l'approximation numérique des problèmes de couplage fluide-structure. Les premiers résultats, dans le cas où le fluide est visqueux et incompressible et la structure est un solide rigide, ont été obtenus par Serre [106], Weinberger [111] et Judakov [67]. Plusieurs travaux de recherche se sont aussi intéressés à l'étude des solides rigides en mouvement dans un fluide newtonien, visqueux et incompressible dont le comportement est décrit par les équations de Navier-Stokes (voir, par exemple, [30], [40],[108]). D'autres études ont porté sur l'interaction entre un fluide et une structure élastique (par exemple, [31, 13, 88]). Dans [55], l'existence d'une solution forte d'un problème couplé fluide-structure, dans le cas stationnaire, a été démontrée ou encore dans [21], l'existence de solutions faibles est prouvée pour un fluide couplé à une plaque en flexion. On peut citer [17, 74, 94] dans le cas instationnaire, et [56, 47] dans le cas stationnaire, pour le problème d'interaction d'un fluide avec une structure tridimensionnelle élastique. Dans [26, 27] l'existence et l'unicité d'une solution forte en temps petit pour des données régulières est démontrée pour les équations de Navier-Stokes couplées à celles de l'élasticité linéarisée ou à un matériau de type Saint-Venant Kirchhoff. Dans [50, 51, 112, 86, 91, 10] un problème d'interaction fluide-solide avec condition de glissement de type frottement est étudié. Récemment, dans [87] l'existence d'une solution faible d'un problème couplant une structure élastique et un fluide incompressible avec une condition de glissement de type Navier est prouvée.

En ce qui concerne l'analyse numérique des problèmes couplés, dans le cas instationnaire, on peut citer les travaux de [38, 39, 103, 104, 102, 105, 41, 101], où les auteurs se sont intéressés à la discrétisation en temps et en espace de ce type de systèmes couplés fluide-structure. On cite aussi Maury [84], Glowinski [54] ou encore Nobile [90] et Bertoluzza [12] dans le cas d'un problème d'interaction fluide-solides rigides.

### 1.1.1 Conditions aux limites de glissement

Pour décrire l'écoulement d'un fluide dans une situation donnée, il est nécessaire de préciser des conditions aux limites qui traduisent le comportement du fluide sur une paroi solide, comme, par exemple, la condition de non-glissement ou d'adhérence à la paroi.

Dans les problèmes d'interaction fluide-structure, on impose souvent la condition aux limites de non glissement au niveau de l'interface fluide-structure, qui caractérise l'adhérence du fluide aux parois solides. Cette condition est acceptée à l'échelle macroscopique, mais à l'échelle microscopique, un glissement peut avoir lieu dans certaines situations. Nous nous référons à [75] pour une aperçue sur des expériences récentes qui montrent la forte possibilité de glissement (dépendant de plusieurs facteurs) sur des parois solides. Un autre exemple où la condition d'adhérence n'est plus valide est l'aérodynamique en haute altitude, comme Serrin l'a mentionné en 1959 dans son livre [107]. Pour des justifications physiques des différents types de conditions de glissement, on peut citer [93] et [64].

En hydrodynamique, Navier [89] puis Maxwell [85] sont les premiers qui ont proposé de remplacer la condition aux limites de non glissement par la condition aux limites plus générale suivante :

$$v_t = b \frac{\partial v_t}{\partial z}, \quad (1.1)$$

où  $b$  est la longueur de glissement, et  $v_t$  est la composante tangentielle de la vitesse. L'équation (1.1) peut être vue comme une position effective de l'interface. La longueur de glissement  $b$  est la distance à laquelle l'extrapolation linéaire du profil de vitesse vient s'annuler, comme le montre la figure 1.1

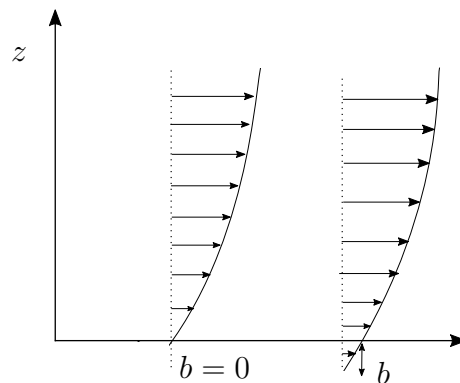


FIGURE 1.1 – La longueur de glissement  $b$

### 1.1.2 Condition aux limites de glissement de type frottement

Les premiers travaux sur le frottement ont été réalisés par Leonard de Vinci [28]. Il donne ainsi la première valeur du coefficient de proportionnalité entre la force de frottement et le poids du corps. Ces travaux furent ensuite développés par Amontons dans [2] puis formalisées par Coulomb dans [25].

Plusieurs lois de frottement entre solides existent, par exemple la loi de Coulomb et la loi de Tresca [36]. Nous allons énoncer la loi de Tresca, adaptée au glissement d'un fluide sur une paroi  $\Gamma$ .

#### Loi de Tresca :

La condition de frottement de Tresca est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\sigma_t\| \leq g \text{ sur } \Gamma \\ \text{Si } \|\sigma_t\| < g \text{ alors } u_t = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \text{Si } \|\sigma_t\| = g \text{ alors } u_t = -\lambda\sigma_t \text{ sur } \Gamma \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$$

où  $\sigma_t$  est la contrainte tangentielle du fluide sur  $\Gamma$ ,  $u_t$  est la vitesse tangentielle du fluide et  $g$ , le seuil de glissement, est une fonction de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}_+$ , connue et indépendante de la contrainte normale du fluide  $\sigma_n$ . Dans la condition de Tresca, la magnitude des efforts tangentiels ne peut pas dépasser le seuil  $g$ . Le glissement se produit lorsque le seuil est atteint, c.-à-d. quand  $\|\sigma_t\| = g$ . La vitesse tangentielle est alors proportionnelle à l'effort tangentiel (avec signe opposé).

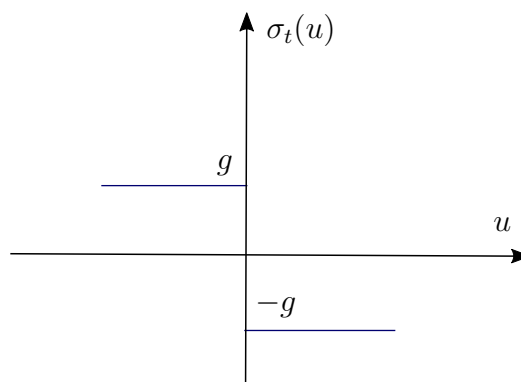


FIGURE 1.2 – Graphique de la loi de Tresca

Dans [95] et [63] d'autres conditions aux limites de type frottement sont présentées.

En ce qui concerne l'analyse mathématique du problème de Stokes avec la condition de Tresca, on peut citer les travaux de Fujita [43, 46, 45, 42] (où l'auteur étudie l'existence de solutions faibles) et de Saito [100] qui s'est intéressé à l'étude de la régularité de la solution faible pour le même type de problème (dans le cas stationnaire). Dans [70], l'existence d'une solution forte du problème de Navier-Stokes avec la condition de Tresca a été démontrée. Nous citons aussi [97, 98, 14, 16, 15].

Dans l'étude numérique, plusieurs travaux ont porté sur l'approximation numérique du problème de Stokes et de Navier-Stokes avec la condition de Tresca en régime stationnaire et instationnaire (voir, par exemple, [6, 71, 33, 34, 32, 79, 77, 82, 81, 68]).

D'autres études ont été faites avec un glissement donné par différentes lois de frottement, nous citons [3, 66, 109] où la loi de Navier a été considérée, ou encore [24, 96] dans le cas de la loi de Coulomb.

## 1.2 Objectif de la thèse

La plupart des travaux mathématiques sur les problèmes d'interaction fluide-structure ont considéré une condition aux limites de type adhérence à la frontière déformable pour les champs de vitesses du fluide (c.-à-d. une condition aux limites de type Dirichlet homogène ou non-homogène). Mais, dans certaines applications (par exemple, dans l'étude de l'écoulement du sang dans une artère athérosclérosée, voir [100, 44]) il serait possible d'imposer d'autres type de conditions aux limites, comme les conditions de glissement de type frottement, afin de pouvoir tenir compte d'autres phénomènes physiques qui sont négligés avec la condition d'adhérence.

Ainsi, on étudiera dans cette thèse un problème d'interaction fluide-structure avec une condition de frottement de type Tresca au niveau de l'interface entre le fluide et la structure. Compte tenu de la complexité du système couplé, on focalisera notre attention sur le cas stationnaire et on considèrera un fluide visqueux et incompressible, dont le mouvement est régi par les équations de Stokes en dimension deux, et une structure en dimension un, dont ses déplacements sont décrits par l'équation d'une poutre.

L'objectif de cette thèse est l'analyse mathématique et l'approximation numérique d'un problème de couplage fluide structure stationnaire avec des conditions aux limites non linéaires. Pour la partie théorique, cette thèse s'inspire du travail fait par C. Grandmont dans [60], où l'auteur a montré un théorème d'existence et unicité d'une solution forte d'un problème de couplage stationnaire entre les équations de Stokes bidimensionnelle et les équations d'une poutre monodimensionnelle, en imposant une condition de Dirichlet homogène sur l'interface fluide-structure.

Pour la partie numérique, on étudie d'abord l'approximation du problème fluide avec

une condition aux limites de type frottement en utilisant une méthode des éléments finis mixtes. En s'inspirant de [6], on obtient une estimation *a priori* optimale de l'erreur d'approximation. Ensuite, pour la résolution du problème d'interaction fluide-structure stationnaire, on utilise une méthode de point fixe comme dans [8].

### 1.3 Plan de la thèse

Dans le chapitre 2, on présentera le problème mathématique qu'on va étudier et on introduira les différentes formulations variationnelles du problème de Stokes avec une condition de Tresca réécrit dans une configuration de référence (inégalité variationnelle et formulations variationnelles mixtes à 3 et 4 champs)

Dans le chapitre 3, on montrera, en utilisant un argument de point fixe, un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible du problème d'interaction fluide-structure introduit dans le chapitre 2. .

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de l'estimation d'erreur a priori de l'approximation par la méthode des éléments finis du problème Stokes avec condition de Tresca : on présentera une formulation variationnelle mixte à quatre champs dont on montre qu'elle vérifie la condition "Inf-Sup" de Brezzi-Babuska, ensuite on approchera le problème fluide continu par une méthode des éléments finis mixtes  $\mathbb{P}_1$ -bulle pour la vitesse,  $\mathbb{P}_1$  pour la pression, et  $\mathbb{P}_1$  pour les multiplicateurs normal et tangentiel, et on montrera par la suite que le problème discret ainsi obtenu est bien posé. Pour des données régulières, une estimation a priori optimale est obtenue.

Le chapitre 5 est consacré à la présentation de simulations numériques du problème de couplage fluide-structure stationnaire avec des conditions aux limites non linéaire de type frottement, ainsi que l'étude numérique de l'ordre de convergence de l'erreur d'approximation de la méthode des éléments finis présentée dans le chapitre 4.

On finira par présenter quelques problèmes, encore ouverts, concernant l'étude numérique et théorique de ce type de problème.





# Chapitre 2

## Présentation des problèmes étudiés

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Notations et préliminaires . . . . .</b>	<b>10</b>
2.1.1	Notations . . . . .	10
2.1.2	Quelques résultats préliminaires . . . . .	12
<b>2.2</b>	<b>Problème d'interaction fluide-structure . . . . .</b>	<b>13</b>
2.2.1	Présentation des problèmes . . . . .	14
<b>2.3</b>	<b>Formulations variationnelles du problème fluide . . . . .</b>	<b>21</b>

---

Dans ce chapitre, on présente les problèmes auxquels on s'intéresse dans le cadre de cette thèse. Pour commencer, on rappelle quelques notions et résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle utilisés dans ce travail et on précise quelques notations.

## 2.1 Notations et préliminaires

### 2.1.1 Notations

Dans ce qui suit,  $\Omega$  désigne un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  muni de la mesure de Lebesgue et à frontière lipschitzienne  $\partial\Omega$ . La norme euclidienne de  $x \in \mathbb{R}^2$  sera notée  $|x|$ .

On note  $L^2(\Omega)$  l'espace classique de Lebesgue des fonctions de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  à carré intégrable et  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  sa norme induite par le produit scalaire usuel

$$(p, q) = \int_{\Omega} p(x)q(x) dx \quad \forall (p, q) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

la norme associée  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  est

$$\forall p \in L^2(\Omega), \quad \|p\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |p(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On introduit  $L_0^2(\Omega)$  le sous espace fermé de  $L^2(\Omega)$  défini par :

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega) ; \int_{\Omega} p dx = 0 \right\}.$$

Pour une fonction  $g : \Gamma \subset \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g > 0$  sur  $\Gamma$ , on définit l'espace  $L_g^1(\Gamma)$  :

$$L_g^1(\Gamma) = \left\{ \theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \|\theta\|_{L_g^1(\Gamma)} = \int_{\Gamma} g(s)|\theta(s)| d\Gamma < \infty \right\}.$$

et son dual  $L_g^\infty(\Gamma)$  [43, Lemme 2.1] par

$$L_g^\infty(\Gamma) = \left\{ \theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \|\theta\|_\infty = \sup_{s \in \Gamma} \frac{|\theta(s)|}{g(s)} < \infty \right\}.$$

On utilisera fréquemment les espaces de Sobolev classiques  $H^m(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) ; D^\alpha v \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \leq m \right\},$$

où  $\alpha = (\alpha_i)_{i=1,2} \in \mathbb{N}^2$  et  $D^\alpha$  représente la dérivée partielle  $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}$  avec  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

$H^m(\Omega)$  est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

On note  $H_0^m(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^m(\Omega)$  où  $\mathcal{D}(\Omega)$  est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans  $\Omega$ .

On considère en particulier l'espace

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) ; u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

et son dual  $H^{-1}(\Omega)$ .

Comme dans Grisvrad [62], l'espace de Sobolev d'ordre fractionnaire  $H^s(\Omega)$  avec  $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ , est défini par :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) ; \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x - y|^{1+\sigma}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \text{ pour } |\alpha| = m \right\},$$

où  $s = m + \sigma$ ,  $m$  représente la partie entière de  $s$  et  $\sigma \in [0, 1]$  sa partie fractionnaire.

L'espace  $H^s(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left( \|u\|_{H^m(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{2+2\sigma}} dx dy \right)^{1/2},$$

où le terme

$$|u|_m := \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{2+2\sigma}} dx dy,$$

est la semi-norme sur  $H^s(\Omega)$ , connue comme la semi-norme de Gagliardo. On note  $C^k(\Omega)$  l'espace des fonctions  $k$ -fois continûment différentiables sur  $\Omega$ .

On désigne par  $C^{k,\eta}(\Omega)$  pour  $k \geq 0$  et  $\eta \in ]0, 1]$ , l'espace des fonctions dans  $C^k(\Omega)$  telles que leurs dérivées  $k$ -ème sont  $\eta$ -höldérienne, c.-à-d. :

$$C^{k,\eta}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) ; \exists \text{ une constate } C > 0 \text{ telle que } \forall x, y \in \Omega \quad |u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\eta\}.$$

Soit  $\Gamma$  une partie du bord de  $\Omega$ , on définit l'espace  $H^{1/2}(\Gamma)$  comme l'espace des restrictions à  $\Gamma$  des fonctions de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ , muni de la norme

$$\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \left( \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy \right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

On note  $\varphi(x) = d(x, \partial\Gamma)$ , on désigne par  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  l'espace des traces sur  $\Gamma$  des fonctions de  $H^1(\Omega)$  nulles sur  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  [72].  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  est un espace de Sobolev muni de la norme

$$\|u\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} = \left( \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma} \frac{|u(x)|^2}{\varphi(x)} dx \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Une fonction de cet espace peut s'étendre à  $\partial\Omega$  par zéro en un élément de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

L'extension d'une fonction  $\psi$ , notée  $\bar{\psi}$ , est

$$\bar{\psi} = \begin{cases} \psi & \text{si } x \in \Gamma, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et  $\psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  si et seulement si  $\bar{\psi} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

Pour une présentation détaillée des opérateurs et des espaces de trace, on se réfère à [72], [83] et [1].

On note par  $H^{-1/2}(\Gamma)$  (respectivement  $H_*^{-1/2}(\Gamma)$ ) le dual topologique de  $H^{1/2}(\Gamma)$  (respectivement de  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ ) et par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité.

On introduit les normes suivantes

$$\forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \|\mu\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{v \in H^{1/2}(\Gamma); v \neq 0} \frac{\langle \mu, v \rangle}{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}},$$

$$\forall \mu \in H_*^{-1/2}(\Gamma), \quad \|\mu\|_{H_*^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{v \in H_{00}^{1/2}(\Gamma); v \neq 0} \frac{\langle \mu, v \rangle}{\|v\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}}.$$

On définit également les normes sur les espaces produits cartésien de  $k$  espaces vectoriels et sur les matrices :

$$\forall \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k) \in (H^m(\Omega))^k, \quad \|\mathbf{v}\|_{(H^m(\Omega))^k} = \left( \sum_{i=1}^k \|v_i\|_{H^m(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$

$$\forall \mathbf{v} \in (H^{1/2}(\Gamma))^k, \quad \|\mathbf{v}\|_{(H^{1/2}(\Gamma))^k} = \left( \sum_{i=1}^k \|v_i\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2},$$

$$\forall \mathbf{v} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^k, \quad \|\mathbf{v}\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^k} = \left( \sum_{i=1}^k \|v_i\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2},$$

$$\forall \mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,2} \in (H^m(\Omega))^4, \quad \|\mathbf{A}\|_{(H^m(\Omega))^4} = \left( \sum_{i,j=1}^2 \|a_{ij}\|_{H^m(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Finalement, notons  $\mathbf{H}^s(\Omega) = (H^s(\Omega))^2$  pour  $s \in \mathbb{R}^*$ ,  $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^2$ ,

$$(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}, \quad (\cdot, \cdot)_\Gamma = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Gamma)},$$

$$\text{et } \langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Gamma} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}.$$

### 2.1.2 Quelques résultats préliminaires

On énonce quelques résultats utiles dont on aura besoin dans la suite :

**Lemme 2.1.1** *Si  $m > 1$ , et si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $H^m(\Omega)$  est une algèbre : soient  $\mathbf{A} \in (H^m(\Omega))^4$  et  $\mathbf{B} \in (H^m(\Omega))^4$  alors il existe  $K > 0$  tel que*

$$\|\mathbf{AB}\|_{(H^m(\Omega))^4} \leq K \|\mathbf{A}\|_{(H^m(\Omega))^4} \|\mathbf{B}\|_{(H^m(\Omega))^4}.$$

**Lemme 2.1.2**  $H^m(\Omega)$ , pour  $m > 1$ , est un multiplicateur de  $H^1(\Omega)$  : si  $f \in H^m(\Omega)$  et  $g \in H^1(\Omega)$  alors  $fg \in H^1(\Omega)$  et il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\|fg\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}\|g\|_{H^1(\Omega)}.$$

Les preuves des Lemmes 2.1.1 et 2.1.2 se trouvent dans [1]. On aura besoin aussi du resultat suivant (voir [18], [20])

**Proposition 2.1.1** Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois espaces de Banach.

Soit  $B$  une fonction bilinéaire continue de  $E \times F$  à valeurs dans  $G$ .

Si  $(u_n)_n \subset E$  converge faiblement vers  $u$ , et si  $(v_n)_n \subset F$  converge fortement vers  $v$ , alors  $B(u_n, v_n)$  converge faiblement vers  $B(u, v)$  dans  $G$ .

Enfinement, on énonce le Théorème de point fixe de Schauder, qui sera utilisé dans la preuve d'existence d'une solution du problème couplé fluide-structure :

**Théorème 2.1.1 (Théorème de point fixe de Schauder)** Soient  $E$  un espace de Banach et  $F$  un ensemble fermé convexe et non vide de  $E$ . Soit  $T$  une application continue de  $F$  dans  $F$  telle que  $T(F)$  est relativement compacte. Alors,  $T$  a un point fixe dans  $F$ .

On renvoie à [52] pour plus de détails sur le Théorème 2.1.1.

**Définition 2.1.1** [20] Soient  $E$ ,  $F$  deux espaces de Banach, on dit qu'un opérateur  $T \in L(E; F)$  est compact si  $T(B_E)$  est relativement compact pour la topologie forte. En d'autres termes, on dit que  $T$  est compact si, pour toute suite bornée  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E$ , la suite  $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite qui converge.

## 2.2 Problèmes d'interaction fluide-structure avec conditions non linéaires

On commence par introduire le problème couplé d'interaction fluide-structure stationnaire avec des conditions aux limites non linéaires de type frottement. D'abord, on posera deux problèmes d'interaction fluide-structure avec des conditions aux limites de type glissement (Slip), ensuite un problème avec des conditions de type pénétration (Leak). Le fluide est supposé Newtonien, homogène, visqueux et incompressible. On suppose aussi que sa viscosité est grande où la vitesse d'écoulement est très petite et son comportement est donc gouverné par les équations de Stokes avec les conditions non linéaires (Slip ou Leak) imposées sur une partie  $\Gamma$  du bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Cette partie du bord représente l'interface de contact avec un matériau élastique, susceptible de se déformer sous l'effet des forces extérieures et des contraintes exercées par le fluide. La structure est monodimensionnelle et décrite par les équations d'une poutre.

### 2.2.1 Présentation des problèmes

Soit  $\Omega = ]0, 1[^2$  le carré unité, de frontière  $\partial\Omega$  constituée par deux parties disjointes  $\Gamma$  et  $\Gamma_D$  telles que

$$\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_D \text{ et } \Gamma \cap \Gamma_D = \emptyset.$$

La partie  $\Gamma = ]0, 1[ \times \{1\}$  est constituée d'un matériau élastique, tandis que  $\Gamma_D$ , qui correspond aux trois cotés du carré, est supposé rigide. Soient  $\mathbf{f}_f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$  et  $f_s \in L^2(\Gamma)$ , les champs de forces extérieures agissant sur le fluide et la structure, respectivement. Le mouvement de la structure (déplacement de la structure), sous l'effet de ces forces, induit un changement de la frontière du domaine fluide (déplacement de l'interface), on note  $\tilde{\Omega}(d)$  le domaine fluide déformé (configuration déformée), image de  $\Omega$  par une application dépendant du déplacement du matériau élastique.

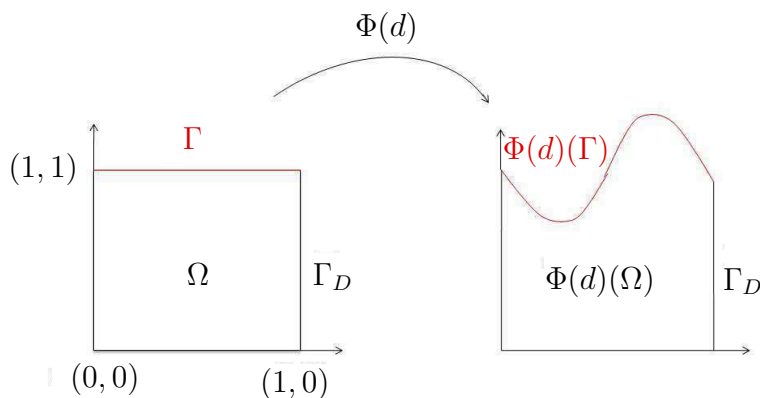


FIGURE 2.1 – Le domaine de référence et le domaine déformé

Les équations du fluide sont donc posées dans  $\tilde{\Omega}(d)$  (en coordonnées Euleriennes), en revanche les équations de la structure sont écrites dans la configuration de référence (en coordonnées Lagrangiennes). Soient  $\nu > 0$  la viscosité du fluide et  $g \in L^2(\Gamma)$ ,  $g > 0$  p.p. la fonction seuil pour la condition de Tresca. On désigne par  $\mathbf{v}$  la vitesse de l'écoulement du fluide, par  $p$  sa pression et par  $d$  le déplacement du matériau. Le système couplé est :

**Problème S1**

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}_f \text{ dans } \tilde{\Omega}(d), \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}(d), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D(d), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}(d), \quad (2.6)$$

$$|(\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{t}}| \leq \tilde{g}, \quad (\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{t}} (\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{t}}) + \tilde{g} |\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{t}}| = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}(d), \quad (2.7)$$

$$\partial_x^4 d = f_s + (T_f(\mathbf{v}, p))_2 \text{ dans } ]0, 1[, \quad (2.8)$$

$$d(0) = d(1) = 0, \quad \partial_x d(0) = \partial_x d(1) = 0, \quad (2.9)$$

où  $\tilde{\mathbf{n}}$  et  $\tilde{\mathbf{t}}$  sont respectivement le vecteur normal extérieur et le vecteur tangent à  $\tilde{\Gamma}$ . On note  $\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}$  la contrainte normale du fluide exprimée en coordonnées Euleriennes

$$\sigma_f \tilde{\mathbf{n}} = \nu(\nabla \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{n}} - p \tilde{\mathbf{n}}$$

et  $\tilde{g}$  la fonction seuil en coordonnées Euleriennes

$$\tilde{g}(x, 1 + d(x)) = g(x, 1).$$

La composante normale de la vitesse  $\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{n}}$  est nulle sur  $\tilde{\Gamma}(d)$ , ceci traduit la non pénétration du fluide dans la structure, et la composante tangentielle  $\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{t}}$  satisfait la loi de Tresca (2.7). Finalement,  $(T_f(\mathbf{v}, p))_2$  dans (2.8) représente la composante verticale de la contrainte exercée par le fluide sur le matériau élastique réécrite dans la configuration de référence.

**Problème S2**

Les équations (2.3)-(2.7) qui modélisent le fluide, introduites dans **Problème S1**, restent inchangées et sont couplées avec les équations de la structure suivantes

$$\partial_x^2 d_1 = f_s^1 + (T_f(\mathbf{v}, p))_1 \text{ dans } ]0, 1[, \quad (2.10)$$

$$\partial_x^4 d_2 = f_s^2 + (T_f(\mathbf{v}, p))_2 \text{ dans } ]0, 1[, \quad (2.11)$$

$$d(0) = d(1) = 0, \quad \partial_x d_2(0) = \partial_x d_2(1) = 0, \quad (2.12)$$

où  $d_1$  est le déplacement longitudinal et  $d_2$  est le déplacement transverse.

**Remarque 2.2.1** Si on considère les équations (2.10)-(2.12), l'étude de l'existence de la solution du **Problème S2** nécessite dans ce cas, plus de régularité sur la solution du problème fluide (2.3)-(2.7).

### Problème Leak

On considère dans ce système couplé, une condition aux limites de type pénétration ("leak boundary condition", voir [43, 100]) imposée au niveau de l'interface fluide-structure. Le système couplé est :

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}_f \text{ dans } \tilde{\Omega}(d), \quad (2.13)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}(d), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D(d), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{t}} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}(d), \quad (2.16)$$

$$|(\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}| \leq \tilde{g}, \quad (\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} (\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{n}}) + \tilde{g} |\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{n}}| = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}(d), \quad (2.17)$$

$$\partial_x^4 d = f_s + T_f(\mathbf{v}, p) \text{ dans } ]0, 1[, \quad (2.18)$$

$$d(0) = d(1) = 0, \quad \partial_x d(0) = \partial_x d(1) = 0, \quad (2.19)$$

où dans la condition Leak (2.16)-(2.17),  $\tilde{\mathbf{n}}$  et  $\tilde{\mathbf{t}}$  sont respectivement le vecteur normal extérieur et le vecteur tangent à  $\tilde{\Gamma}$ . La condition aux limites (2.16)-(2.17), imposée sur le bord  $\tilde{\Gamma}(d)$ , est décrite de la façon suivante :

- une condition de non glissement du fluide  $\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{t}} = 0$ ,
- la composante normale de la vitesse  $\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{n}}$  satisfait la condition de pénétration (Leak) :
  - ▷ Lorsque la composante normale du vecteur des contraintes  $\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}$  atteint le seuil  $\tilde{g}$ , le fluide pénètre dans la structure et la contrainte normale s'oppose à la vitesse.
  - ▷ Lorsque  $\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}$  n'atteint pas  $\tilde{g}$ , le fluide colle à la paroi de la structure et la vitesse est ainsi nulle sur le bord  $\tilde{\Gamma}(d)$ .

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du **Problème S1**, et dans le chapitre 4, on présente les simulations numériques des problèmes **Problème S1**, **Problème S2** et **Problème Leak**.

**Remarque 2.2.2** *La condition de glissement de Tresca utilise le tenseur de contraintes symétrisé  $\sigma = 2\mu e(\mathbf{v}) - pI$  avec  $e(\mathbf{v}) = 1/2(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^t)$ , le tenseur taux de déformation ([43]). Ici, on a choisi de travailler avec le tenseur de contraintes non symétrisé  $\sigma = \mu\nabla\mathbf{v} - pI$ , car, comme on verra par la suite, le changement de variable pour passer du domaine inconnu  $\tilde{\Omega}(d)$  au domaine de référence  $\Omega$  sera simplifié. Cependant, ce modèle reste moins fidèle à la réalité physique.*



### 2.2.1.1 Changement de variable

Afin de travailler dans un domaine connu, on réécrit les équations du fluide (2.3)-(2.7) dans la configuration de référence  $\Omega$ . Pour cela, on utilise un changement de variable  $\Phi$  défini à l'aide d'un opérateur de relèvement  $R$  de  $\partial\Omega$  sur  $\Omega$  de la manière suivante : pour un déplacement donné  $d$ , défini sur  $\Gamma$ , on pose  $\Phi(d)(x, y) = (x, y + R(d)(x, y))$ ,  $(x, y) \in \Omega$ , où  $d$  a été prolongé par 0 sur  $\Gamma_D$ . La trace de  $\Phi(d)$  sur  $\Gamma$  est égale au vecteur  $(x, 1 + d(x))$ . On note que

$$\Phi(d)(\Omega) = \tilde{\Omega}(d) \quad \text{et} \quad \Phi(d)(\Gamma) = \tilde{\Gamma}(d).$$

On introduit dans ce qui suit l'élément de surface  $d\tilde{x}$  au point  $\tilde{x} = \Phi(x)$  de la configuration déformée, et l'élément de longueur  $d\tilde{a}$  au point  $\tilde{a} = \Phi(a)$  du bord déformé  $\tilde{\Gamma}$ , donnés par les formules classiques suivantes [22] :

$$\begin{aligned} d\tilde{x} &= \det(\nabla(\Phi(x))) dx, \\ \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{a} &= \text{cof}(\nabla(\Phi(x))) \mathbf{n} da, \\ d\tilde{a} &= |G\mathbf{n}| da. \end{aligned}$$

Où  $\tilde{\mathbf{n}}$  et  $\tilde{\mathbf{t}}$  sont respectivement le vecteur normal extérieur et le vecteur tangent à  $\tilde{\Gamma}$ ,  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  sont la normale et la tangente à  $\Gamma$  et  $\text{cof}(\nabla(\Phi(x)))$  désigne la matrice des cofacteurs de la matrice  $\nabla(\Phi(x))$  donnée par

$$\text{cof}(\nabla(\Phi(x))) = \det(\nabla(\Phi(x))) \nabla(\Phi(x))^{-t}.$$

On commence par faire le changement de variable sur la première équation du problème fluide :

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}_f \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega}.$$

Soit  $A$  un sous domaine de  $\Omega$ , on en déduit de la formule de changement de variable et du théorème de la divergence :

$$\int_{\Phi(A)} \mathbf{f}_f d\tilde{x} + \int_{\Phi(A)} \text{div}(\nu \nabla \mathbf{v} - pI) d\tilde{x} = 0,$$

ce qui implique :

$$\int_A (\mathbf{f}_f \circ \Phi)(x) \det(\nabla(\Phi(x))) dx + \int_{\partial\Phi(A)} (\nu \nabla \mathbf{v} - pI) \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{a} = 0,$$

on a donc :

$$\int_A (\mathbf{f}_f \circ \Phi)(x) \det(\nabla(\Phi(x))) dx + \int_{\partial A} (\nu \nabla \mathbf{v}(\Phi(x)) - p(\Phi(x))) \text{cof}(\nabla(\Phi(x))) \mathbf{n} da = 0,$$

on obtient ainsi :

$$\int_A (\mathbf{f}_f \circ \Phi)(x) \det(\nabla(\Phi(x))) dx + \int_{\partial A} (\nu \nabla(\mathbf{v} \circ \Phi)(x) \nabla(\Phi(x))^{-1} - (p \circ \Phi)(x)) \operatorname{cof}(\nabla(\Phi(x))) \mathbf{n} da = 0.$$

Les nouvelles variables sont alors :

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} \circ \Phi, \quad q = p \circ \Phi.$$

On introduit  $\Sigma_f$  le tenseur de contrainte défini sur  $\Omega$  par :

$$\Sigma_f = -\nu(F\nabla)\mathbf{w} + qG.$$

Où  $G = \operatorname{cof}(\nabla(\Phi))$  et  $F = \nabla(\Phi(x))^{-1}G$  qui est une matrice symétrique.

Le vecteur contrainte  $\Sigma_{f,n}$  est donné par

$$\Sigma_{f,n} = \Sigma_f \mathbf{n}.$$

On définit l'opérateur  $(F\nabla)$  par :

$$((F\nabla)\mathbf{w})_{l,i} = \sum_{j=1}^2 F_{i,j} \partial_j \mathbf{w}_l \quad \text{pour } l, i = 1, 2.$$

On obtient d'après ce qui précède :

$$\int_A (\mathbf{f}_f \circ \Phi)(x) \det(\nabla(\Phi(x))) dx + \int_{\partial A} (\Sigma_f \mathbf{n}) da = 0,$$

le domaine  $A$  étant arbitraire et ceci implique que le tenseur  $\Sigma_f$  vérifie l'équation suivante :

$$-\operatorname{div}(\Sigma_f) = (\mathbf{f}_f \circ \Phi) \det(\nabla\Phi) \quad \text{dans } \Omega.$$

Maintenant pour le terme  $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  dans  $\Phi(\Omega)$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(A)} \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\tilde{x} &= \int_{\partial\Phi(A)} \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{a} \\ &= \int_{\partial A} (\mathbf{v} \circ \Phi) \cdot G \mathbf{n} da \\ &= \int_A \operatorname{div}(G^t \mathbf{w}) dx. \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\operatorname{div}(G^t \mathbf{w}) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

La condition de non pénétration du fluide imposée sur le bord  $\Gamma$ ,  $\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = 0$ , est alors :

$$\mathbf{w} \cdot G \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Chaque vecteur défini sur le bord  $\Gamma$  s'écrit désormais dans une base orthonormée locale formée par le vecteur  $\frac{G\mathbf{n}}{|G\mathbf{n}|}$  et son orthogonal  $\frac{E\mathbf{t}}{|E\mathbf{t}|}$ . En effet, soit  $(g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$  les composantes de la matrice  $G$ , on a d'une part

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}} d\tilde{a} &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{n}}_2 \\ -\tilde{\mathbf{n}}_1 \end{pmatrix} d\tilde{a} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{n}}_1 \\ \tilde{\mathbf{n}}_2 \end{pmatrix} d\tilde{a} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} G\mathbf{n} da \\ &= \begin{pmatrix} g_{2,2} & -g_{2,1} \\ -g_{1,2} & g_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{n}}_2 \\ -\tilde{\mathbf{n}}_1 \end{pmatrix} da \\ &= \text{cof}(G)\mathbf{t}da. \end{aligned}$$

On note  $E = \text{cof}(G)$ . D'autre part, comme  $d\tilde{a} = |G\mathbf{n}| da = |E\mathbf{t}| da$ , il vient que

$$\tilde{\mathbf{t}} = \frac{E\mathbf{t}}{|E\mathbf{t}|}.$$

On en déduit que la base  $(\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{n}})$  sur  $\tilde{\Gamma}$  se transforme en une base locale orthonormée sur  $\Gamma$  définie par  $\left(\frac{E\mathbf{t}}{|E\mathbf{t}|}, \frac{G\mathbf{n}}{|G\mathbf{n}|}\right)$ .

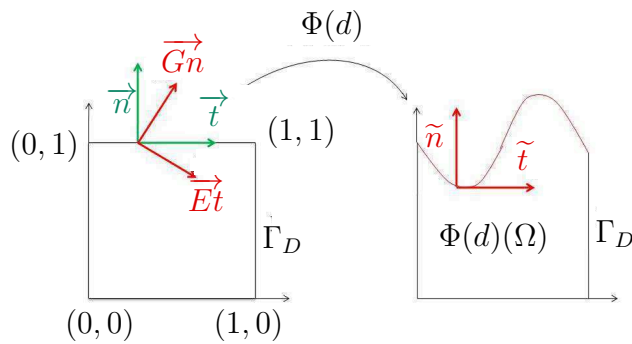


FIGURE 2.2 – La base locale  $(G\mathbf{n}, E\mathbf{t})$

On passe maintenant au changement de variable de la condition de glissement imposée sur la partie déformable  $\tilde{\Gamma}$ . On a déjà montré que l'expression du vecteur contraint

$\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}$ , réécrit dans la configuration de référence, est donnée par le vecteur  $\Sigma_{f,n} = \Sigma_f \mathbf{n}$ .

La condition

$$\begin{cases} |(\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{t}}| & \leq \tilde{g} \\ (\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{t}} (\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{t}}) + \tilde{g} |\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{t}}| & = 0 \end{cases}$$

s'écrit alors sur  $\Gamma$  :

$$(S) \quad \begin{cases} |\Sigma_{f,n} \cdot \frac{E\mathbf{t}}{|E\mathbf{t}}| & \leq g \\ \Sigma_f \cdot \left(\frac{E\mathbf{t}}{|E\mathbf{t}}\right) \mathbf{w} \cdot \left(\frac{E\mathbf{t}}{|E\mathbf{t}}\right) + g |\mathbf{w} \cdot \left(\frac{E\mathbf{t}}{|E\mathbf{t}}\right)| & = 0. \end{cases}$$

En multipliant la première équation du système (S) par  $\frac{1}{|E\mathbf{t}|}$  et en choisissant  $g$  tel que  $g = \hat{g}|E\mathbf{t}|$  où  $\hat{g} \in L^2(\Gamma)$ , (S) devient :

$$\begin{cases} \frac{|\Sigma_{f,n} \cdot (E\mathbf{t})|}{|E\mathbf{t}|^2} & \leq \hat{g} \\ \frac{\Sigma_{f,n} \cdot (E\mathbf{t})}{|E\mathbf{t}|^2} \mathbf{w} \cdot (E\mathbf{t}) + \hat{g} |\mathbf{w} \cdot (E\mathbf{t})| & = 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi le problème couplé suivant :

Trouver  $(\mathbf{w}, q, d, \alpha)$  tel que

$$-\nu \operatorname{div}((F\nabla)\mathbf{w}) + (G\nabla)q = (\mathbf{f}_f \circ \Phi)H(d) \text{ dans } \Omega,$$

$$\operatorname{div}(G^t \mathbf{w}) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$\mathbf{w} = 0 \text{ sur } \Gamma_D,$$

$$\mathbf{w} \cdot G\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$\frac{|\Sigma_{f,n} \cdot (E\mathbf{t})|}{|E\mathbf{t}|^2} \leq \hat{g}, \quad \frac{\Sigma_{f,n} \cdot (E\mathbf{t})}{|E\mathbf{t}|^2} \mathbf{w} \cdot (E\mathbf{t}) + \hat{g} |\mathbf{w} \cdot (E\mathbf{t})| = 0 \text{ sur } \Gamma$$

$$\partial_x^4 d + \alpha = f_s + [\Sigma_{f,n}]_2 \text{ dans } ]0, 1[, \quad (2.20)$$

$$d(0) = d(1) = 0, \quad \partial_x d(0) = \partial_x d(1) = 0 \quad (2.21)$$

$$\int_0^1 d(x) dx = 0, \quad (2.22)$$

où  $H(d) = \det(\nabla(\Phi(d)))$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de conservation de volume (2.22). Les matrices provenant du changement de variable sont bien définies si la transformation  $\Phi(d)$  est au moins un  $C^1$ -difféomorphisme pour des déplacements choisis dans des espaces convenables.

**Remarque 2.2.3** *Noter que la constante additive de la pression est déterminée, car on a ajouté, au problème de la structure, la condition (2.22) qui permet d'assurer la conservation du volume de la cavité déformée due à l'incompressibilité du fluide.*

### 2.2.1.2 Difficultés

Le système couplé pose des difficultés du point de vue de l'analyse mathématique ainsi que de l'implémentation numérique. La difficulté majeure réside dans la démonstration de l'existence de solution car le système est non-linéaire. Il existe deux types de non-linéarités : la condition aux limites de type Tresca ou de type pénétration (Leak) posée au niveau de l'interface fluide-structure et les non-linéarités de type géométrique dues au fait que le domaine fluide est une inconnue et dépend du déplacement de la structure. En effet les équations de fluide sont écrites en coordonnées Euleriennes (le domaine du fluide n'est donc pas fixe car la structure se déforme ou se déplace) tandis que les équations de la structure sont écrites en coordonnées Lagrangiennes. D'un point de vue numérique, la difficulté vient également des non-linéarités, plus particulièrement, comment peut-on gérer l'interface déformable et comment peut-on traiter numériquement la condition aux limites non-linéaire ?

Dans la section suivante, on présente les différentes formulations variationnelles du problème fluide avec la condition aux limites de type Tresca réécrite dans la configuration de référence.

## 2.3 Formulations variationnelles du problème de Stokes avec conditions Slip

Soit  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des matrices  $2 \times 2$  à coefficients variables. On considère le problème de Stokes généralisé avec condition de glissement de Tresca :

$$(P) \quad \begin{cases} -\nu \operatorname{div}((A\nabla)\mathbf{w}) + (B\nabla)q & = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(B^t\mathbf{w}) & = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{w} & = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{w} \cdot (B\mathbf{n}) & = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \frac{|\Sigma_{f,n}(\mathbf{Ct})|}{|\mathbf{Ct}|^2} \leq \hat{g}, & \frac{\Sigma_{f,n}(\mathbf{Ct})}{|\mathbf{Ct}|^2} (\mathbf{w} \cdot (\mathbf{Ct})) + \hat{g} |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{Ct})| = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

où  $\Sigma_{f,n} = \nu((A\nabla)\mathbf{w})\mathbf{n} - q(B\mathbf{n})$ .

Le cadre fonctionnel approprié à la résolution du problème fluide  $(P)$  consiste à

travailler dans un sous espace  $V_{Bn}$  de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  défini par :

$$V_{Bn} = \{\mathbf{u} \in V ; \mathbf{u} \cdot (B\mathbf{n})|_{\Gamma} = 0\},$$

où

$$V = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) ; \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

On introduit le convexe fermé  $Q$  :

$$Q = \{\mu \in L^2(\Gamma) ; |\mu| \leq \hat{g}, \text{ p.p. } \cdot \text{ sur } \Gamma\} \subset H_*^{-1/2}(\Gamma).$$

On définit les formes bilinéaires  $a : V_{Bn} \times V_{Bn} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b : L_0^2(\Omega) \times V_{Bn} \rightarrow \mathbb{R}$  et la fonctionnelle convexe et non-différentiable  $j : V_{Bn} \times V_{Bn} \rightarrow \mathbb{R}_+$  par :

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (A\nabla)\mathbf{w} : \nabla\mathbf{v} \, dx,$$

$$b(q, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(B^t\mathbf{v})q \, dx,$$

$$j(v_{Ct}) = \int_{\Gamma} \hat{g}|v_{Ct}| \, d\Gamma.$$

Dans ce qui suit, on présente les différentes formulations variationnelles du problème  $(P)$ .

**Problème 1** Trouver  $(\mathbf{w}, q) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega)$  tel que

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{ll} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - (\tilde{\Sigma}_{Ct}(\mathbf{w}), v_{Ct})_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V_{Bn} \\ b(\mathbf{w}, p) = 0 & \forall p \in L_0^2(\Omega) \\ \frac{\tilde{\Sigma}_{Ct}(\mathbf{w})}{\hat{g}} \in L^{\infty}(\Omega), \quad |\tilde{\Sigma}_{Ct}(\mathbf{w})| \leq \hat{g} & \text{p.p. sur } \Gamma \\ \tilde{\Sigma}_{Ct}(\mathbf{w})w_{Ct} + \hat{g}|w_{Ct}| = 0 & \text{p.p. sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où  $\tilde{\Sigma}_{Ct}(\mathbf{w}) := \frac{\Sigma_{f,n}(\mathbf{Ct})}{|\mathbf{Ct}|^2}$ ,  $v_{Ct} := \mathbf{v} \cdot \mathbf{Ct}$ .

On note que  $\tilde{\Sigma}_{Ct}(\mathbf{w}) \in L^2(\Gamma)$  et donc  $(\tilde{\Sigma}_{Ct}(\mathbf{w}), v_{Ct})_{\Gamma}$  a ainsi un sens.

**Problème 2** Trouver  $(\mathbf{w}, q) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega)$  tel que

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{ll} a(\mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} - \mathbf{w}, q) + j(v_{Ct}) - j(w_{Ct}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) & \forall \mathbf{v} \in V_{Bn} \\ b(\mathbf{w}, p) = 0 & \forall p \in L_0^2(\Omega). \end{array} \right.$$

**Problème 3** Trouver  $(\mathbf{w}, (q, \lambda)) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega) \times Q$  tel que

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{ll} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) + (\lambda, v_{Ct})_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V_{Bn} \\ b(\mathbf{w}, p) = 0 & \forall p \in L_0^2(\Omega) \\ (\mu - \lambda, w_{Ct})_{\Gamma} \leq 0 & \forall \mu \in Q \end{array} \right.$$

**Remarque 2.3.1** *La condition :*

$$\begin{cases} b(\mathbf{w}, p) = 0 & \forall p \in L_0^2(\Omega) \\ (\mu - \lambda, \mathbf{w})_\Gamma \leq 0 & \forall \mu \in Q, \end{cases}$$

est équivalente à la condition :

$$b_1((p - q, \mu - \lambda), \mathbf{w}) \leq 0 \quad \forall (p, \mu) \in \Lambda$$

avec

$$b_1((q, \lambda), \mathbf{w}) = -(q, \operatorname{div}(B^t \mathbf{w})) + \int_\Gamma \lambda w_{Ct} \, d\Gamma,$$

et  $\Lambda = L_0^2(\Omega) \times Q$ , un convexe fermé de  $L_0^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ .

**Formule de Green.** Si  $(\mathbf{w}, q) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  tels que  $\operatorname{div}(B^t \mathbf{w}) = 0$  et  $\mathbf{w}|_{\Gamma_D} = 0$  alors par integration par partie, on obtient :

$$(-\nu(A\nabla)\mathbf{w} + (B\nabla)q, \mathbf{v}) = a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - \int_\Gamma \Sigma_{f,n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.23)$$

L'intégrale qui apparaît dans (2.23) est bien définie car le vecteur contrainte  $\Sigma_{f,n} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) \subset \mathbf{L}^2(\Gamma)$ . Mais, si la solution  $(\mathbf{w}, q)$  est de régularité de type  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  alors  $\Sigma_{f,n}$  est vu comme un élément de l'espace dual  $\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)$  et il est défini de la façon suivante

**Définition 2.3.1** Soit  $(\mathbf{w}, q) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  tels que  $\operatorname{div}(B^t \mathbf{w}) = 0$  et  $\mathbf{w}|_{\Gamma_D} = 0$ . On définit  $\Sigma_{f,n} = (\tilde{\Sigma}_{Ct}, \tilde{\Sigma}_{Bn}) \in \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)$  par :

$$\langle \Sigma_{f,n}, \mathbf{v} \rangle = a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Sigma}_{Ct}, v_{Ct} \rangle &= a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}, \\ \langle \tilde{\Sigma}_{Bn}, v_{Bn} \rangle &= a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Ct}, \end{aligned}$$

où  $\tilde{\Sigma}_{Bn} = \frac{\Sigma_{f,n} \cdot B\mathbf{n}}{|B\mathbf{n}|^2}$  et  $V_{Ct} = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) ; \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0, \mathbf{u} \cdot (C\mathbf{t})|_\Gamma = 0\}$ .

On énonce le lemme suivant :

**Lemme 2.3.1** On a

$$Q = \{\mu \in L^2(\Gamma) ; \int_\Gamma \mu \psi \, d\Gamma - \int_\Gamma \hat{g} |\psi| \, d\Gamma \leq 0 \quad \forall \psi \in L^2(\Gamma)\} \quad (2.24)$$

**Preuve.** Voir annexe. □

Le résultat suivant, met en évidence l'équivalence entre les différentes formulations variationnelles.

**Théorème 2.3.1** *les problèmes  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  et  $(P_3)$  sont équivalents dans le sens suivant :*

- (a)  $(\mathbf{w}, q) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega)$  est une solution de  $(P_1)$  si et seulement si  $(\mathbf{w}, q)$  est une solution de  $(P_2)$ .
- (b) Si  $(\mathbf{w}, (q, \lambda)) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega) \times Q$  est une solution de  $(P_3)$  alors  $(\mathbf{w}, q)$  est une solution de  $(P_2)$ .
- (c) Si  $(\mathbf{w}, q) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega)$  est une solution de  $(P_2)$  alors il existe une unique  $\lambda \in Q$  tel que  $(\mathbf{w}, q, \lambda)$  est une solution de  $(P_3)$ .

**Preuve.**

- (a) On suppose que  $(\mathbf{w}, q) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega)$  est une solution du problème  $(P_1)$  :

on a

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - (\tilde{\Sigma}_{Ct}(\mathbf{w}), v_{Ct})_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}. \quad (2.25)$$

Soient  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{v} \in V_{Bn}$ , posons  $I = \int_{\Gamma} \tilde{\Sigma}_{Ct}(v_{Ct} - w_{Ct})$ , on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \tilde{\Sigma}_{Ct}(v_{Ct} - w_{Ct}) + \int_{\Gamma} \hat{g}(|v_{Ct}| - |w_{Ct}|) - \int_{\Gamma} \hat{g}(|v_{Ct}| - |w_{Ct}|), \\ &= \int_{\Gamma} \tilde{\Sigma}_{Ct}v_{Ct} + \int_{\Gamma} \hat{g}|v_{Ct}| - \int_{\Gamma} \hat{g}(|v_{Ct}| - |w_{Ct}|) \quad (\text{car } \tilde{\Sigma}_{Ct}w_{Ct} + \hat{g}|w_{Ct}| = 0), \\ &= \int_{\Gamma} \tilde{\Sigma}_{Ct}v_{Ct} + \int_{\Gamma} \hat{g}|v_{Ct}| - j(v_{Ct}) + j(w_{Ct}). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \tilde{\Sigma}_{Ct}v_{Ct} &\geq - \int_{\Gamma} |\tilde{\Sigma}_{Ct}||v_{Ct}| \\ &\geq - \int_{\Gamma} \hat{g}|v_{Ct}| \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_{\Gamma} \tilde{\Sigma}_{Ct}v_{Ct} + \int_{\Gamma} \hat{g}|v_{Ct}| \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}$$

donc

$$I = \int_{\Gamma} \tilde{\Sigma}_{Ct}(v_{Ct} - w_{Ct}) \geq j(w_{Ct}) - j(v_{Ct}) \quad (2.26)$$

en remplaçant  $\mathbf{v}$  par  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  dans (2.25) et d'après (2.26), on obtient l'inéquation du problème  $(P_2)$ .

Réciproquement, montrons que la solution du problème  $(P_2)$  est une solution du problème  $(P_1)$ .



La preuve est similaire à celle qui a été faite dans l'article dans [44]. On suppose que  $(\mathbf{w}, q) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega)$  est une solution de

$$\begin{cases} a(\mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} - \mathbf{w}, q) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) - j(v_{Ct}) + j(w_{Ct}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn} \\ b(\mathbf{w}, p) = 0 \quad \forall p \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.27)$$

D'après la Définition 2.3.1, on a :

$$\langle \tilde{\Sigma}_{Ct}, v_{Ct} \rangle = a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}. \quad (2.28)$$

En utilisant (2.28), l'inégalité variationnelle (2.27) se réduit à

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{w}, q) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \langle \tilde{\Sigma}_{Ct}, v_{Ct} - w_{Ct} \rangle + j(v_{Ct}) - j(w_{Ct}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn} \\ b(\mathbf{w}, p) = 0 \quad \forall p \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.29)$$

D'après (2.29), on obtient pour tout  $\mathbf{v} \in V_{Bn}$

$$- \langle \tilde{\Sigma}_{Ct}, v_{Ct} - w_{Ct} \rangle \leq j(v_{Ct}) - j(w_{Ct}) \leq \int_{\Gamma} \hat{g} |v_{Ct} - w_{Ct}|, \quad (2.30)$$

en particulier, pour  $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V_{Bn}$ , on a

$$- \langle \tilde{\Sigma}_{Ct}, v_{Ct} \rangle \leq \int_{\Gamma} \hat{g} |v_{Ct}| \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn},$$

or  $v_{Ct} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  alors on en déduit <sup>1</sup>

$$\forall \alpha \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) \quad - \langle \tilde{\Sigma}_{Ct}, \alpha \rangle \leq \int_{\Gamma} \hat{g} |\alpha|, \quad (2.31)$$

d'où

$$\forall \alpha \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) \quad | \langle \tilde{\Sigma}_{Ct}, \alpha \rangle | \leq \int_{\Gamma} \hat{g} |\alpha| \quad (2.32)$$

D'après (2.32), on a (voir Fujita [44])

$$|\tilde{\Sigma}_{Ct}| \leq \hat{g} \text{ p.p. sur } \Gamma.$$

Enfin, montrons que :

$$\tilde{\Sigma}_{Ct} w_{Ct} + \hat{g} |w_{Ct}| = 0.$$

---

1. (2.31) vient du fait que pour tout  $\alpha \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ , il existe un élément  $\mathbf{v} \in V_{Bn}$  vérifiant  $v_{Ct} = \alpha$ . La preuve de ce résultat est faite dans le chapitre 2.

Si on utilise, dans (2.29),  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  puis  $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$ , on obtient :

$$\int_{\Gamma} \tilde{\Sigma}_{Ct} w_{Ct} + \int_{\Gamma} \hat{g} |w_{Ct}| = 0. \quad (2.33)$$

Comme

$$|\tilde{\Sigma}_{Ct}| \leq \hat{g} \text{ p.p. sur } \Gamma \quad (2.34)$$

alors, en multipliant (2.34) par  $|w_{Ct}|$ , on obtient

$$|\tilde{\Sigma}_{Ct} w_{Ct}| \leq \hat{g} |w_{Ct}| \text{ p.p. sur } \Gamma,$$

d'où

$$\tilde{\Sigma}_{Ct} w_{Ct} + \hat{g} |w_{Ct}| \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma,$$

on conclut alors d'après (2.33) et (2.34)

$$\tilde{\Sigma}_{Ct} w_{Ct} + \hat{g} |w_{Ct}| = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma.$$

(b) On suppose que  $(\mathbf{w}, (q, \lambda)) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega) \times Q$  est une solution de problème  $(P_3)$ . On a

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} - \mathbf{w}, q) + j(v_{Ct}) - j(w_{Ct}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= \underbrace{-(v_{Ct}, \lambda)_{\Gamma} + j(v_{Ct})}_{\geq 0} + (w_{Ct}, \lambda)_{\Gamma} - j(w_{Ct}). \end{aligned}$$

Montrons que  $(w_{Ct}, \lambda)_{\Gamma} - j(w_{Ct}) \geq 0$  :

on a  $(\mu - \lambda, w_{Ct})_{\Gamma} \leq 0 \quad \forall \mu \in Q$ . En particulier pour  $\mu = \hat{g} \text{ sign}(w_{Ct}) \in Q$ , on obtient

$$(\hat{g}, |w_{Ct}|)_{\Gamma} = j(w_{Ct}) \leq (\lambda, w_{Ct})_{\Gamma},$$

d'où

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} - \mathbf{w}, q) + j(v_{Ct}) - j(w_{Ct}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \geq 0.$$

(c) On suppose que  $(\mathbf{w}, q) \in V_{Bn} \times L_0^2(\Omega)$  est une solution du problème  $(P_2)$ . D'une part on a

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} - \mathbf{w}, q) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) - j(v_{Ct}) + j(w_{Ct}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}.$$

En prenant  $\pm \mathbf{v} + \mathbf{w}$  comme fonction test, on obtient :

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) + j(v_{Ct}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}$$

d'autre part, d'après (a), la solution de  $(P_2)$  est une solution du problème  $(P_1)$ , on a ainsi :

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - (\tilde{\Sigma}_{Ct}(\mathbf{w}), v_{Ct})_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}.$$

On en déduit alors que  $j(v_{Ct}) = -(\tilde{\Sigma}_{Ct}, v_{Ct})_{\Gamma}$ , avec

$$\frac{\tilde{\Sigma}_{Ct}}{\hat{g}} \in L^{\infty}(\Gamma), \quad |\tilde{\Sigma}_{Ct}| \leq \hat{g} \text{ p.p. sur } \Gamma,$$

on pose ainsi  $\lambda = -\tilde{\Sigma}_{Ct} \in L^2(\Gamma)$ , avec  $|\lambda| = |\tilde{\Sigma}_{Ct}(u)| \leq \hat{g}$  p.p. sur  $\Gamma$ , et d'où l'existence d'un  $\lambda \in Q$  vérifiant

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) + (\lambda, v_{Ct})_{L^2(\Gamma)} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}$$

Il reste à montrer que  $(\mu - \lambda, w_{Ct})_{\Gamma} \leq 0 \quad \forall \mu \in Q$ . En effet, on a

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) + (\lambda, v_{Ct})_{L^2(\Gamma)} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}$$

et

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} - \mathbf{w}, q) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) - j(v_{Ct}) + j(w_{Ct}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}$$

On obtient

$$-(\lambda, v_{Ct} - w_{Ct})_{\Gamma} \leq j(w_{Ct}) - j(v_{Ct}) = \int_{\Gamma} \hat{g}(|w_{Ct}| - |v_{Ct}|) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}$$

en prenant  $\mathbf{v} = 2\mathbf{w} \in V_{Bn}$ , il vient que

$$(\lambda, w_{Ct})_{\Gamma} \geq j(w_{Ct}). \quad (2.35)$$

On en déduit ainsi, d'après (2.35), l'inégalité suivante :

pour  $\mu \in Q$  on a

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda, w_{Ct})_{\Gamma} &= (\mu, w_{Ct})_{\Gamma} - (\lambda, w_{Ct})_{\Gamma} \\ &\leq (\mu, w_{Ct})_{\Gamma} - j(w_{Ct}), \end{aligned}$$

or comme  $\mu \in Q$ , on a ainsi

$$\int_{\Gamma} \mu \psi - \int_{\Gamma} \hat{g}|\psi| \leq 0 \quad \forall \psi \in L^2(\Gamma),$$

en particulier pour  $\psi = w_{Ct}$ , on obtient

$$\int_{\Gamma} \mu w_{Ct} \leq \int_{\Gamma} \hat{g}|w_{Ct}|.$$

D'où

$$(\mu, w_{Ct})_{\Gamma} - j(w_{Ct}) \leq 0.$$

Par conséquent

$$(\mu - \lambda, w_{Ct})_{\Gamma} \leq 0 \quad \forall \mu \in Q.$$

□

**Définition 2.3.2** On définit le Lagrangien  $\mathcal{L}$  sur  $V_{Bn} \times \Lambda$  par la relation suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, (q, \lambda)) = \frac{1}{2}a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - \int_{\Omega} \operatorname{div}(B^t \mathbf{w})q + \int_{\Gamma} \mu w_{Ct} - L(\mathbf{w}).$$

On dit que  $(\mathbf{w}, (p, \lambda)) \in V_{Bn} \times \Lambda$  est un point selle de  $\mathcal{L}$  sur  $V_{Bn} \times \Lambda$  si

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, (q, \mu)) \leq \mathcal{L}(\mathbf{w}, (q, \lambda)) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, (q, \lambda)), \quad \forall \mathbf{v} \in V_{Bn}, \forall (q, \mu) \in Q. \quad (2.36)$$

**Théorème 2.3.2**  $(\mathbf{w}, (q, \lambda))$  est une solution du Problème 3 si et seulement si  $(\mathbf{w}, (q, \lambda))$  est l'unique point selle de  $\mathcal{L}$  sur  $V_{Bn} \times \Lambda$ .

□

# Chapitre 3

## Analyse mathématique du problème d'interaction fluide 2D - structure 1D stationnaire avec conditions de glissement de type Tresca

### Sommaire

---

3.1	Introduction . . . . .	30
3.2	Cadre fonctionnel et résultat principal . . . . .	30
3.3	Étude du problème fluide . . . . .	33
3.4	Étude du problème de la structure . . . . .	41
3.5	Démonstration du Théorème d'existence et unicité du problème couplé . . . . .	42
3.5.1	Application des lemmes . . . . .	42
3.5.2	Procédure de point fixe . . . . .	45
3.5.3	Unicité . . . . .	50

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on traite le problème de l'existence d'une solution faible du problème d'interaction entre une structure déformable (modélisée par l'équation d'une poutre  $1D$ ) et un fluide visqueux incompressible (modélisé par les équations de Stokes  $2D$ ) avec la condition aux limites non linéaire de type Tresca. Il s'agit du problème **S1** introduit dans le chapitre précédent.

Dans ce même chapitre, après changement de variable, on introduit les équations du problème fluide dans le domaine de référence. Le problème couplé fluide-structure s'écrit :

Trouver  $(\mathbf{w}, q, d, \alpha)$  tel que

$$-\nu \operatorname{div}((F(d)\nabla)\mathbf{w}) + (G(d)\nabla)q = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div}(G(d)^t \mathbf{w}) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{w} = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{w} \cdot (G(d)\mathbf{n}) = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (3.4)$$

$$\frac{|\Sigma_{f,n} \cdot (E(d)\mathbf{t})|}{|E(d)\mathbf{t}|^2} \leq \hat{g} \text{ sur } \Gamma \quad (3.5)$$

$$\frac{\Sigma_{f,n} \cdot (E(d)\mathbf{t})}{|E(d)\mathbf{t}|^2} (\mathbf{w} \cdot (E(d)\mathbf{t})) + \hat{g} |\mathbf{w} \cdot (E(d)\mathbf{t})| = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (3.6)$$

$$\partial_x^4 d + \alpha = f_s + [\Sigma_{f,n}]_2 \text{ dans } ]0, 1[, \quad (3.7)$$

$$d(0) = d(1) = 0, \quad \partial_x d(0) = \partial_x d(1) = 0 \quad (3.8)$$

$$\int_0^1 d(x) dx = 0, \quad (3.9)$$

où

$$F(d) = \nabla(\Phi(d))^{-1} \operatorname{cof}(\nabla(\Phi(d))), \quad G(d) = \operatorname{cof}(\nabla(\Phi(d))),$$

$$E(d) = \operatorname{cof}(G(d)), \quad H(d) = \det(\nabla(\Phi(d))),$$

et  $\Sigma_{f,n} = (\nu(F(d)\nabla)\mathbf{w})\mathbf{n} - q(G(d)\mathbf{n})$  est le vecteur de contrainte normale du fluide dans la configuration de référence.

### 3.2 Cadre fonctionnel et résultat principal

L'existence d'une solution du problème couplé (3.1)-(3.9) sera montrée grâce à une méthode de point fixe. Pour pouvoir effectuer cette procédure, il faut que le déplacement de la structure possède une régularité qui nous permet de définir les matrices  $F(d)$ ,  $G(d)$ ,

$E(d)$  et  $H(d)$  issues du changement de variable. La régularité est alors choisie de telle sorte que la transformation  $\Phi(d)$  soit au moins un  $C^1$ -difféomorphisme. Rappelons que

$$\Phi(d)(x, y) = (x, y + R(d)(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

On verra par la suite, une manière pour que  $\Phi(d)$  soit d'abord de classe  $C^1$  sera de chercher le déplacement  $d$  tel que son relèvement  $R(d)$  appartient à un sous espace de  $C^1(\overline{\Omega})$ . D'où le choix de  $H^{2+\eta}(\Omega)$  avec  $\eta > 0$ .

Le cadre fonctionnel approprié à la résolution du problème structure (3.7)-(3.9) consiste donc à travailler dans un sous ensemble (que l'on définira par la suite) de  $H^{3/2+\eta}(\partial\Omega) \cap H_0^2(\Gamma)$  et pour le problème fluide (3.1)-(3.6), dans  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ .

Soit  $1/2 < \eta < 1$  et soit  $R$  un relèvement linéaire continu de  $H^{3/2+\eta}(\partial\Omega)$  sur  $H^{2+\eta}(\Omega)$ . On définit la boule fermée de  $H^{3/2+\eta}(\partial\Omega)$  dans laquelle on va chercher le déplacement transverse  $d$  :

$$X^\eta = \{b \in H^{3/2+\eta}(0, 1) \cap H_0^2(0, 1) / \|b\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \leq M(\eta)\}.$$

Le choix de la constante  $M(\eta)$  est fait de telle sorte que la transformation  $\Phi(d) = I + R(d)$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme (voir [55]). Ainsi, les matrices  $F(b)$ ,  $G(b)$ ,  $E(b)$ ,  $H(b)$  et  $J(b)$  ( $J(b) = G(b)^{-1}$ ) sont définies pour tout  $b \in X^\eta$ .

Les applications  $F : b \mapsto F(b)$ ,  $G : b \mapsto G(b)$ ,  $E : b \mapsto E(b)$  et  $J : b \mapsto J(b)$  sont de classe  $C^\infty$  (voir [55]). De plus,  $F$  satisfait une condition d'ellipticité uniformément sur  $X^\eta$  : il existe une constante  $\beta(\eta) > 0$  telle que, au sens des matrices symétriques

$$F(b)(x, y) \geq \beta(\eta)I, \quad \forall b \in X^\eta, \forall (x, y) \in \Omega.$$

On notera  $DF(b)$ ,  $DG(b)$ ,  $DH(b)$ ,  $DE(b)$  et  $DJ(b)$  les différentielles de  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $E$  et  $J$ , on définit :

$$\begin{aligned} |||F||| &= \sup_{b \in X^\eta} \|DF(b)\|_{\mathcal{L}(H^{3/2+\eta}(0,1), (H^{1+\eta}(0,1))^4)}, \\ |||G||| &= \sup_{b \in X^\eta} \|DG(b)\|_{\mathcal{L}(H^{3/2+\eta}(0,1), (H^{1+\eta}(0,1))^4)}. \end{aligned}$$

**Remarque 3.2.1** *Dans le cas de déplacements de la structure seulement dans la direction transversale il est possible de donner une expression explicite de la transformation  $\Phi$  (voir [57], [59]) :*

$$\Phi(d)(x, y) = (x, y(1 + d(x))) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Les matrices  $F(d)$  et  $G(d)$  sont donc données par

$$F(d) = \frac{1}{1 + d(x)} \begin{pmatrix} (1 + d(x))^2 & -y\partial_x d(x)(1 + d(x)) \\ -y\partial_x d(x)(1 + d(x)) & (y\partial_x d(x))^2 + 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } G(d) = \begin{pmatrix} 1 + d(x) & -y\partial_x d(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après [57] il suffirait que  $d \in H_0^2(0, 1)$  tel que  $1/d \in L^\infty(0, 1)$  pour que le changement de variable soit régulier. On verra par la suite que, à cause de la condition de Tresca, on aura besoin du choix  $d \in H^{3/2+\eta}(0, 1) \cap H_0^2(0, 1)$  avec  $1/2 < \eta < 1$ .

□

Maintenant, on peut énoncer le résultat principal sur l'existence d'une solution faible du problème couplé :

**Théorème 3.2.1** *Soient  $\mathbf{f}_f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $f_s \in H^{-1/2}(\Gamma)$  et  $g \in L^2(\Gamma)$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que si*

$$\|f_s\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \leq C,$$

alors il existe une solution  $(\mathbf{w}, q, d, \alpha)$  du problème couplé (3.1) – (3.6)–(3.7) – (3.9) telle que  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ ,  $q \in L^2(\Omega)$ ,  $d \in H^{7/2}(0, 1) \cap B^\eta$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  avec

$$B^\eta = \{b \in X^\eta \mid \|b\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \leq M_0\},$$

où  $M_0$  une constante qui dépend des applications  $F$ ,  $G$ ,  $E$  et  $J$ .

Si de plus, on suppose que la viscosité  $\nu$  est assez grande,  $\mathbf{f}_f$  est contractante et que la force  $\mathbf{f}_f$  et le seuil  $g$  sont choisis de sorte que

$$\|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + C_l + \|g\|_{L^2(0,1)} \ll 1,$$

où  $C_l$  est la constante de Lipschitz de  $\mathbf{f}_f$ , alors la solution est unique.

Le Théorème 3.2.1 est démontré par une méthode découplée. Cette méthode consiste à résoudre le problème fluide posé dans un domaine fixe puis à déterminer ses contraintes et les utiliser comme données lors de la résolution du problème de la structure, soumis aux contraintes fluide, pour en déduire le déplacement. Pour recoupler le problème, on utilise une procédure de point fixe en imposant certaines conditions sur les forces extérieures appliquées.

La preuve de ce théorème est donc présentée en trois étapes. Dans la première, on étudie des équations de même type que (3.1)–(3.6). La deuxième est consacrée à l'étude de la structure, et dans la dernière étape, on montre d'abord l'existence d'une solution du problème couplé grâce au théorème de point fixe de Schauder. L'unicité de cette solution est établie sous des hypothèses supplémentaires.



### 3.3 Étude du problème fluide

Soit  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ . Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des matrices  $2 \times 2$  à coefficients variables. On s'intéresse à l'existence de la solution faible du problème de Stokes généralisé suivant :

$$-\nu \operatorname{div}((A\nabla)\mathbf{w}) + (B\nabla)q = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{div}(B^t\mathbf{w}) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{w} = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{w} \cdot (B\mathbf{n}) = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (3.13)$$

$$\frac{|\Sigma_{f,n} \cdot (C\mathbf{t})|}{|C\mathbf{t}|^2} \leq \widehat{g}, \quad \frac{\Sigma_{f,n} \cdot (C\mathbf{t})}{|C\mathbf{t}|^2} (\mathbf{w} \cdot (C\mathbf{t})) + \widehat{g} |\mathbf{w} \cdot (C\mathbf{t})| = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (3.14)$$

où  $\Sigma_{f,n} = \nu((A\nabla)\mathbf{w})\mathbf{n} - q(B\mathbf{n})$ .

Comme dans [55], on considère les hypothèses suivantes :

**(H<sub>1</sub>)** (a)  $A$  est une matrice symétrique définie positive de  $(H^{1+\eta}(\Omega))^4$  avec  $\eta > 0$ .

Il existe une constante  $\zeta > 0$  telle que  $A \geq \zeta I$ ,

(b)  $B$  est une matrice inversible de  $(H^{1+\eta_0}(\Omega))^4$  avec  $\eta_0 > 0$ . Si  $\eta_0 < 1$ , il existe un  $\psi \in \mathbf{H}^{2+\eta_0}(\Omega)$  tel que  $B = \operatorname{cof}(\nabla\psi)$ ,

(c) La matrice  $C$  est définie telle que  $C = \operatorname{cof}(B)$ .

De plus on a besoin de l'hypothèse suivante :

**(H<sub>2</sub>)** Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $B^{-1}$  et  $C$  sont bornées dans  $(H^{1+\eta}(\Omega))^4$ .

Noter que **(H<sub>1</sub>)**(c) assure  $B\mathbf{n} \cdot C\mathbf{t} = 0$ , i.e.,  $(B\mathbf{n}, C\mathbf{t})$  est une base orthogonale locale non-unitaire sur  $\Gamma$ .

**Remarque 3.3.1** — Pour  $\eta > 0$ ,  $H^{1+\eta}(\Omega)$  s'injecte de façon continue dans  $L^\infty(\Omega)$ .

— Si  $(\mathbf{w}, q) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  est une solution du problème fluide alors les produits  $(A\nabla)\mathbf{w}$  et  $qB$  sont dans  $(L^2(\Omega))^4$ .

□

On rappelle que l'espace  $V_{Bn}$  et le convexe  $Q$  sont définis par

$$V_{Bn} = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2 : \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0, \mathbf{u} \cdot (B\mathbf{n})|_{\Gamma} = 0\},$$

$$Q = \{\mu \in L^2(\Gamma) : |\mu| \leq \widehat{g}, \text{ p.p. sur } \Gamma\}.$$

La formulation variationnelle mixte à trois champs du problème (3.10)-(3.14) est alors (voir, par exemple, [6]) :

Trouver  $(\mathbf{w}, (q, \lambda_t)) \in V_{Bn} \times (L_0^2(\Omega) \times Q)$  tel que

$$\begin{cases} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{v}) + (\lambda_t, v_{Ct})_\Gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V_{Bn} \\ b(r, \mathbf{w}) = 0 & \forall r \in L_0^2(\Omega) \\ (\mu - \lambda_t, w_{Ct})_\Gamma \leq 0 & \forall \mu \in Q \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \int_\Omega \nu (A \nabla) \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} \, dx, \\ b(r, \mathbf{v}) &= - \int_\Omega \operatorname{div}(B^t \mathbf{v}) r \, dx, \\ (\lambda_t, v_{Ct})_\Gamma &= \int_\Gamma \lambda_t v_{Ct} \, d\Gamma \quad \text{où } v_{Ct} = \mathbf{v} \cdot (C \mathbf{t}). \end{aligned}$$

Pour éviter de travailler avec un espace de fonctions tests qui dépend de la matrice  $B$ , on introduit un autre multiplicateur de Lagrange, qu'on note  $\lambda_n$ , associé à la condition de non pénétration du fluide dans la structure  $(\mathbf{u} \cdot (B \mathbf{n})|_\Gamma = 0)$ . On obtient ainsi une formulation variationnelle mixte à quatre champs du problème (3.10)-(3.14) (voir [63]) couplant la vitesse, la pression et les deux multiplicateurs  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$ .

Soit l'espace

$$V_{\Gamma_D} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

Le problème variationnel s'écrit alors :

Trouver  $(\mathbf{w}, (q, \boldsymbol{\lambda})) \in V_{\Gamma_D} \times L_0^2(\Omega) \times (H_*^{-1/2}(\Gamma) \times Q)$  avec  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_n, \lambda_t)$  tel que

$$(PV) \begin{cases} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{v}) + \langle \lambda_n, v_{Bn} \rangle + (\lambda_t, v_{Ct})_\Gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V_{\Gamma_D} \\ b(r, \mathbf{w}) + \langle \mu_n, w_{Bn} \rangle = 0 & \forall r \in L_0^2(\Omega), \mu_n \in H_*^{-1/2}(\Gamma) \\ (\mu_t - \lambda_t, w_{Ct})_\Gamma \leq 0 & \forall \mu_t \in Q \end{cases}$$

On définit  $h$  l'opérateur de Riesz

$$h : \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma).$$

Pour tout  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_n, \mu_t) \in \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)$  et pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$  on définit

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mu_n, v_{Bn} \rangle + (\mu_t, v_{Ct})_\Gamma.$$

Pour montrer l'existence d'une solution du problème variationnel (PV), on aura besoin des lemmes suivants.

**Lemme 3.3.1** Soient  $u \in H_{00}^{1/2}(0,1)$  et  $\psi \in C^{0,\eta}([0,1])$ . Si  $\eta > 1/2$ , alors  $u\psi \in H_{00}^{1/2}(0,1)$ . De plus on a

$$\|u\psi\|_{H_{00}^{1/2}(0,1)} \leq \tilde{C}\|u\|_{H_{00}^{1/2}(0,1)}. \quad (3.15)$$

**Preuve.** Comme  $\psi \in C^{0,\eta}([0,1])$ , alors on a  $\psi \in C^0([0,1])$ , donc  $\psi$  est bornée sur  $[0,1]$ , c.-à.d il existe  $M > 0$  tel que  $|\psi(x)| \leq M$  pour tout  $x \in [0,1]$ . De la définition de la norme de  $H_{00}^{1/2}$  (voir (2.2), Chapitre 2), on a

$$\|u\psi\|_{H_{00}^{1/2}(0,1)}^2 = \|u\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|(u\psi)\varphi^{-1/2}\|_{L^2(0,1)}^2,$$

avec  $\varphi(x) = d(x, \Gamma)$ .

Estimons maintenant  $\|(u\psi)\varphi^{-1/2}\|_{L^2(0,1)}^2$ . Comme  $\psi$  est bornée sur  $[0,1]$  par la constante  $M$ , alors

$$\|\psi(\varphi^{-1/2}u)\|_{L^2(0,1)} \leq M\|\varphi^{-1/2}u\|_{L^2(0,1)}$$

et

$$\|\psi u\|_{L^2(0,1)} \leq M\|u\|_{L^2(0,1)}.$$

De plus, en ajoutant et retranchant  $\psi(x)u(y)$  et en utilisant le fait que  $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{|\psi(x)u(x) - \psi(y)u(y)|^2}{|x-y|^2} dx dy &\leq 2 \left( \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{|\psi(x)(u(x) - u(y))|^2}{|x-y|^2} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{|u(x)(\psi(x) - \psi(y))|^2}{|x-y|^2} dx dy \right) \\ &\leq 2M \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^2} dx dy \\ &\quad + 2 \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{|u(x)(\psi(x) - \psi(y))|^2}{|x-y|^2} dx dy \end{aligned}$$

Comme  $\psi$  est dans  $C^{0,\eta}([0,1])$ , on a alors

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{|u(x)(\psi(x) - \psi(y))|^2}{|x-y|^2} dx dy &\leq \Lambda^2 \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{1}{|x-y|^{2-2\eta}} dy |u(x)|^2 dx \\ &\leq \Lambda^2 \int_{(0,1)} \int_{|z|<1} \frac{1}{|z|^{2-2\eta}} dz |u(x)|^2 dx \\ &\leq \hat{C}\|u\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

où  $\hat{C} = \Lambda^2 \int_{|z|<1} \frac{1}{|z|^{2-2\eta}} dz$  et  $\Lambda$  désigne la constante höldérienne de  $\psi$ . On a utilisé le fait que  $\int_{|z|<1} \frac{1}{|z|^{2-2\eta}} dz$  est intégrable si  $\eta > 1/2$ . On conclut ainsi

$$\|\psi u\|_{H_{00}^{1/2}(0,1)} \leq \tilde{C}\|u\|_{H_{00}^{1/2}(0,1)}.$$

□

**Lemme 3.3.2** *Pour tout  $\lambda$  dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ , il existe un élément  $\mathbf{v}$  dans  $V_{Bn}$  tel que*

$$\mathbf{v}.C\mathbf{t} = \lambda \text{ sur } \Gamma \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \alpha \|\lambda\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

où  $\alpha$  est une constante positive qui dépend de la matrice  $C$ .

**Preuve.** Soit  $\mathbf{w}$  défini par  $\mathbf{w} = \frac{\lambda C\mathbf{t}}{|C\mathbf{t}|^2}$ . Vérifions d'abord que  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$  :

— d'une part, on a

$$|C\mathbf{t}|^2 = C_{11|\Gamma}^2 + C_{21|\Gamma}^2.$$

Par hypothèses,  $C_{i1} \in H^{1+\eta}(\Omega)$ , pour  $i = 1, 2$ , donc  $C_{i1|\Gamma} \in H^{1/2+\eta}(0, 1)$ , or comme  $H^{1/2+\eta}(0, 1) \subset C^{0,\eta}([0, 1])$  pour  $0 < \eta < 1$  [62, Théorème 1.4.4.1], alors

$$C_{i1|\Gamma} \in C^{0,\eta}([0, 1]), \quad i = 1, 2.$$

Il vient que  $|C\mathbf{t}|^2 \in C^{0,\eta}([0, 1])$ , ainsi  $\frac{1}{|C\mathbf{t}|^2} \in C^{0,\eta}([0, 1])$ .

— d'autre part, on vérifie que  $\lambda C\mathbf{t}$  est dans  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(0, 1)$ .

D'après le Lemme 3.3.1, le produit de  $\lambda C\mathbf{t}$  par  $\frac{1}{|C\mathbf{t}|^2}$  est dans  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(0, 1)$ , car on a choisi  $\eta > 1/2$ .

Maintenant, comme  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(0, 1)$ , alors d'après la surjectivité de l'application trace définie sur  $V_{\Gamma_D}$  à valeurs dans  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$  [72], il existe un  $\mathbf{v}$  dans  $V_{\Gamma_D}$  tel que

$$\mathbf{v}|_{\Gamma} = \mathbf{w}.$$

Il vient que

$$\frac{\mathbf{v}.B\mathbf{n}}{|B\mathbf{n}|^2} B\mathbf{n} + \frac{\mathbf{v}.C\mathbf{t}}{|C\mathbf{t}|^2} C\mathbf{t} = \frac{\lambda}{|C\mathbf{t}|^2} C\mathbf{t} \text{ sur } \Gamma$$

et on obtient ainsi

$$\mathbf{v}.B\mathbf{n} = 0 \text{ et } \mathbf{v}.C\mathbf{t} = \lambda \text{ sur } \Gamma.$$

Finalement, en utilisant l'estimation (3.15), on a aussi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &\leq \gamma \left\| \frac{\lambda C\mathbf{t}}{|C\mathbf{t}|^2} \right\|_{\mathbf{H}^{1/2}(0,1)} \\ &\leq \gamma \tilde{C} \|C\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|\lambda\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Le résultat est donc vérifié avec  $\alpha = \alpha(C) = \gamma \tilde{C} \|C\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4}$ . □

Pour démontrer que le problème variationnel est bien posé, on a besoin de montrer que la condition inf-sup suivante est vérifiée :

**Proposition 3.3.1** *Pour tout  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_n, \mu_t) \in \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)$ , il existe  $\delta > 0$  tel que*

$$\sup_{\mathbf{v} \in V_{\Gamma_D}} \frac{\langle \mu_n, v_{Bn} \rangle + (\mu_t, v_{Ct})_{\Gamma}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \delta \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)}, \quad (3.16)$$

où  $\delta$  est une constante qui dépend des matrices  $B$  et  $C$ .

**Preuve.** Pour montrer (3.16), il suffit de prouver les deux conditions inf-sup suivantes (voir [65]) :

$$i) \quad \exists \delta_1 > 0 ; \quad \sup_{\mathbf{v} \in V_{\Gamma_D}} \frac{\langle \mu_n, v_{Bn} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \delta_1 \|\mu_n\|_{H_*^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall \mu_n \in H_*^{-1/2}(\Gamma), \quad (3.17)$$

$$ii) \quad \exists \delta_2 > 0 ; \quad \sup_{\mathbf{v} \in V^1} \frac{(\mu_t, v_{Ct})_{\Gamma}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \delta_2 \|\mu_t\|_{H_*^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall \mu_t \in H_*^{-1/2}(\Gamma), \quad (3.18)$$

où  $V^1 = \{\mathbf{v} \in V_{\Gamma_D} ; \langle \mu_n, v_{Bn} \rangle = 0 \forall \mu_n \in H_*^{-1/2}(\Gamma)\}$ .

— Montrons (3.17). Soit  $\mu_n \in H_*^{-1/2}(\Gamma)$ , on a  $h^{-1}(\mu_n) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ .

En utilisant la surjectivité de la trace normale définie de  $V_{\Gamma_D}$  à valeur dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  (voir [72]), on en déduit l'existence d'un  $\mathbf{w} \in V_{\Gamma_D}$  tel que  $\mathbf{w}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = h^{-1}(\mu_n)$ , et vérifiant

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|h^{-1}(\mu_n)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}.$$

On associe à  $\mathbf{w}$ , un  $\widehat{\mathbf{w}} \in V_{\Gamma_D}$  tel que  $B^t \widehat{\mathbf{w}}|_{\Gamma} = \mathbf{w}|_{\Gamma}$ , vérifiant

$$\widehat{\mathbf{w}} \cdot B\mathbf{n} = h^{-1}(\mu_n) \quad \text{sur } \Gamma,$$

de plus on a

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \|B^{-t}\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &\leq \|B^{-t}\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\leq C \|B^{-t}\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|h^{-1}(\mu_n)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v} \in V_{\Gamma_D}} \frac{\langle \mu_n, v_{Bn} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} &\geq \frac{\langle \mu_n, \widehat{\mathbf{w}} \cdot B\mathbf{n} \rangle}{\|\widehat{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &\geq \frac{1}{C \|B^{-t}\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4}} \|\mu_n\|_{H_*^{-1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

On note  $\delta_1 = \frac{1}{C \|B^{-t}\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4}}$ .

— Montrons (3.18). Soit  $\mu_t \in H_*^{-1/2}(\Gamma)$ . Comme  $h^{-1}(\mu_t) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ , alors d'après le Lemme 3.3.2, il existe un  $\mathbf{u} \in V_{\Gamma_D}$  tel que  $\mathbf{u} \cdot B\mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ ,  $\mathbf{u} \cdot C\mathbf{t} = h^{-1}(\mu_t)$  et vérifiant

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \alpha \|h^{-1}(\mu_t)\|_{H_*^{-1/2}(\Gamma)},$$

où la constante  $\alpha$  est donnée dans (3.15).

On obtient donc

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v} \in V^1} \frac{\langle \mu_t, v_{Ct} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} &\geq \frac{\langle \mu_t, \mathbf{u} \cdot C\mathbf{t} \rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &\geq \frac{1}{\alpha} \|\mu_t\|_{H_*^{-1/2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

on note  $\delta_2 = \frac{1}{\alpha}$ .

On en déduit ainsi la condition Inf-Sup suivante :

Il existe une constante  $\delta$  qui dépend des matrices  $B$  et  $C$  telle que

$$\sup_{v \in V_{\Gamma_D}} \frac{\langle \mu_n, v_{Bn} \rangle + (\mu_t, v_{Ct})_{\Gamma}}{\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \delta \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Dans [65], la constante  $\delta$  est donnée par

$$\delta = \frac{c}{4(1 + 2\omega/c)},$$

où  $\omega$  est la constante de continuité de la forme bilinéaire  $(\mu_t, v_{Ct})_{\Gamma}$  et  $c = \min(\delta_1, \delta_2)$ .

Dans notre cas  $\omega = \|C^t\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4}$ .

□

La condition inf-sup présentée ci-dessous découle de la Proposition 3.3.1.

**Proposition 3.3.2** *Pour tout  $(q, \boldsymbol{\mu}) \in L_0^2(\Omega) \times \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)$ , il existe  $\alpha > 0$  telle que*

$$\sup_{\mathbf{v} \in V_{\Gamma_D}} \frac{b(q, \mathbf{v}) + \langle \mu_n, v_n \rangle + (\mu_t, v_{Ct})_{\Gamma}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \alpha (\|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)}) \quad (3.19)$$

où  $\alpha$  est une constante qui dépend des matrices  $B$  et  $C$ .

**Preuve.** Pour montrer la Proposition 3.3.2, on a besoin de prouver les conditions inf-sup suivantes :

*i)*

$$\exists c_1 > 0 ; \sup_{\mathbf{v} \in V^2} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq c_1 \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega),$$

où  $V^2 = \{\mathbf{v} \in V_{\Gamma_D} ; \langle \mu, \mathbf{v} \rangle = 0 \forall \mu \in \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)\}$ .

ii)

$$\exists c_2 > 0 ; \sup_{\mathbf{v} \in V_{\Gamma_D}} \frac{\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq c_2 \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma) \quad (3.20)$$

— On sait qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que (voir [4])

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(q, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \gamma \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

En effet, soit  $q \in L_0^2(\Omega)$ , d'après la surjectivité de l'application "div" définie de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  sur  $L_0^2(\Omega)$ , il existe un  $\mathbf{z}$  dans  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tel que

$$\operatorname{div}(\mathbf{z}) = q \text{ et } \|\mathbf{z}\|_{(H_0^1(\Omega))^2} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

On associe à  $\mathbf{z}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}$  tel que  $B^t \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{z}$  avec  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , vérifiant

$$\operatorname{div}(B^t \hat{\mathbf{u}}) = q$$

et

$$\|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|B^{-t}\|_{(H^{1+\eta_0}(\Omega))^4} \|q\|_{L^2(\Omega)},$$

d'où (i) avec  $c_1 = \gamma = \frac{1}{C \|B^{-t}\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4}}$ .

— La condition inf-sup (3.20) est démontrée dans la Proposition 3.3.1, donc  $c_2 = \delta$ .

On en déduit alors la condition inf-sup suivante : Il existe une constante  $\alpha > 0$  qui dépend des matrices  $B^t$  et de  $B^{-t}$  telle que

$$\sup_{v \in V} \frac{b(q, \mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle}{\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \alpha (\|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)}).$$

La constante  $\alpha$  est donnée par

$$\alpha = \frac{c}{4(1 + 2\omega/c)},$$

où  $c = \min(c_1, c_2)$  et  $\omega$  est la constante de continuité de la forme bilinéaire  $b(q, \mathbf{v})$ , donc  $\omega = \|B^t\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4}$ .

Si l'hypothèse  $(\mathbf{H}_2)$  est vérifiée, alors la constante  $\alpha$  est indépendante des matrices.  $\square$

On énonce maintenant, le résultat d'existence d'une solution faible pour le problème mixte (PV) suivant :

**Lemme 3.3.3** *Si les hypothèses  $(\mathbf{H}_1)$  sont vérifiées alors, il existe une unique solution  $(\mathbf{w}, q, \boldsymbol{\lambda})$  de (PV) dans  $V_{\Gamma_D} \times L_0^2(\Omega) \times (H_*^{-1/2} \times Q)$ .*

*Si de plus, l'hypothèse  $(\mathbf{H}_2)$  est vérifiée alors, il existe une constante  $C_1 > 0$  indépendante des matrices  $A$ ,  $B^t$ ,  $B^{-t}$  et  $C^t$  telle que*

$$\nu \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_1 (\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\hat{g}\|_{L^2(\Gamma)}) \quad (3.21)$$

**Preuve.** On note  $b_2$  la forme bilinéaire définie par :

$$b_2((q, \lambda_n, \lambda_t), \mathbf{v}) = b(q, \mathbf{v}) + \langle \lambda_n, v_{Bn} \rangle + (\lambda_t, v_{Ct})_\Gamma.$$

Les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b_2(\cdot, \cdot)$  sont continues, on a

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &\leq \nu \|A \nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \nu \|A\|_{(L^\infty(\Omega))^4} \|\nabla \mathbf{w}\|_{(L^2(\Omega))^4} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\leq \nu \|A\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} b_2((q, \lambda_n, \lambda_t), \mathbf{v}) &\leq \max(\|B^t\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4}, \|C^t\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4}) \\ &\quad (\|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda_n\|_{H_*^{-1/2}(\Gamma)} + \|\lambda_t\|_{H_*^{-1/2}(\Gamma)}) \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'ellipticité de la matrice  $A$ , on peut facilement démontrer la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$ . En effet, grâce à l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) &\geq \nu \zeta \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \nu C_\Omega \zeta \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{w} \in V_{\Gamma_D}. \end{aligned}$$

Il en suit de la condition inf-sup (3.19) que le problème variationnel ( $PV$ ) admet une solution et une seule dans  $V_{\Gamma_D}$  avec une dépendance des données  $\mathbf{f}$ ,  $\widehat{g}$  et des matrices  $A$ ,  $B^t$ ,  $C^t$  et  $B^{-t}$ . En effet, comme on a

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{v}) + \langle \lambda_n, v_{Bn} \rangle + (\lambda_t, v_{Ct})_\Gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Gamma_D},$$

en particulier pour  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ , avec  $\mathbf{w}$  est la solution de ( $PV$ ), on obtient

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}) - (\lambda_t, w_{Ct})_\Gamma \quad (3.22)$$

en utilisant l'ellipticité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  et la continuité du second membre de (3.22), on trouve

$$\nu C_\Omega \zeta \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|C^t\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|\widehat{g}\|_{L^2(\Gamma)} \quad (3.23)$$

En ce qui concerne l'estimation de  $(q, \lambda_n, \lambda_t)$ , on a :

$$\frac{b(q, \mathbf{v}) + \langle \lambda_n, v_{Bn} \rangle + (\lambda_t, v_{Ct})_\Gamma}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} = \frac{a(\mathbf{w}, -\mathbf{v}) + (\mathbf{f}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Gamma_D}; \mathbf{v} \neq 0.$$

On en déduit d'après la condition inf-sup (3.19), l'estimation (3.23) et la continuité de  $a(\cdot, \cdot)$  et  $(\mathbf{f}, \cdot)$  l'inégalité suivante

$$\|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)} \leq \gamma (\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widehat{g}\|_{L^2(\Gamma)}) \quad (3.24)$$



où  $\gamma = \frac{1}{\alpha} \max\left(\frac{1}{C_{\Omega\zeta}} \|A\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} + 1, \frac{1}{C_{\Omega\zeta}} \|A\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|C^t\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4}\right)$ .

On obtient ainsi d'après (3.23) et (3.24), l'estimation (3.21).

L'hypothèse  $(\mathbf{H}_2)$  permet alors de trouver une constante indépendante des matrices, d'où l'estimation uniforme pour  $(\mathbf{w}, q, \boldsymbol{\lambda})$ . □

### 3.4 Étude du problème de la structure

On considère maintenant le problème structure, pour  $b$  fixé dans  $X^\eta$ , on étudie l'existence de la solution de la formulation variationnelle mixte de ce problème :

Trouver  $(d(b), \alpha(b)) \in H_0^2(0, 1) \times \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \int_{(0,1)} \partial_x^2(d(b)) \partial_x^2 \delta dx + \alpha(b) \int_{(0,1)} \delta dx = \int_{(0,1)} F_s(b) \delta dx \quad \forall \delta \in H_0^2(0, 1), \\ \int_{(0,1)} d(b) dx = v. \end{cases} \quad (3.25)$$

avec  $F_s(b) \in H^{-1/2}(0, 1)$  (qui sera précisé par la suite) et  $v \in \mathbb{R}$ .

On énonce le résultat d'existence suivant :

**Lemme 3.4.1** *Il existe une unique solution de (3.25) dans  $(H^{7/2}(0, 1) \cap H_0^2(0, 1)) \times \mathbb{R}$ . De plus, il existe une constante  $C_2 > 0$  indépendante de  $b$ ,  $F_s(b)$  et  $v$ , telle que*

$$\|d(b)\|_{H^{7/2}(0,1)} + |\alpha(b)| \leq C_2 (\|F_s(b)\|_{H^{-1/2}(0,1)} + |v|). \quad (3.26)$$

**Preuve.** L'existence de la solution  $(d(b), \alpha(b)) \in H_0^2(0, 1) \times \mathbb{R}$  de (3.25) repose sur la condition inf-sup suivante : il existe  $\beta_2 > 0$  indépendante de  $b$  et  $v$  telle que

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \sup_{d \in H_0^2(0,1)} \int_{(0,1)} \alpha d(x) dx \geq \beta_2 |\alpha| \|v\|_{H^2(0,1)}. \quad (3.27)$$

Montrer (3.27) revient à prouver l'existence d'un déplacement  $d_1 \in H_0^2(0, 1)$  tel que

$$\int_0^1 \alpha d_1(x) dx = \alpha^2 \quad \text{et} \quad \|d_1\|_{H_0^2(0,1)} \leq C |\alpha|.$$

Soit  $d_1$  un polynôme de degré 4 :

$$d_1(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f,$$

on cherche à trouver les coefficients  $a, b, c, e$  et  $f$  de telles sorte que

$$d_1(0) = d_1(1) = 0 \quad (3.28)$$

$$d_1'(0) = d_1'(1) = 0 \quad (3.29)$$

les conditions (3.28) et (3.29) nous amènent à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} e = f = 0 \\ a + b + c + e = 0 \\ 4a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$$

on obtient ainsi :

$$\begin{cases} e = f = 0 \\ a = c \\ b = -2c \\ c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le polynôme  $d_1$  est alors donné par

$$d_1(x) = cx^4 - 2cx^3 + cx^2.$$

Le coefficients  $c$  est choisi de manière a vérifier  $\int_{(0,1)} d_1(x) = \alpha$ , c.-à-d.,  $c = 30\alpha$ . Ainsi,  $\|d_1\|_{H_0^2(0,1)} = \kappa|\alpha|$ , où  $\kappa \approx 24.4714$ .

On en déduit ainsi la condition inf-sup (3.27), d'où l'existence d'une unique solution dans  $H_0^2(0,1) \times \mathbb{R}$  du problème (3.25).

La regularité  $H^{7/2}(0,1)$  est obtenue avec le résultat de regularité du problème biharmonique, en effet comme le second membre  $F_s(b)$  de (3.25)<sub>1</sub> est dans  $H^{-1/2}(0,1)$  alors  $d(b) \in H^{-1/2+4}(0,1) = H^{7/2}(0,1)$  (voir [62]).

□

## 3.5 Démonstration du Théorème d'existence et unicité du problème couplé

### 3.5.1 Application des Lemmes 3.3.3 et 3.4.1

Soit

$$B^\eta = \{b \in X^\eta \mid \|b\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \leq M_0\}.$$

On rappelle que :

$$X^\eta = \{b \in H^{3/2+\eta}(0,1) \cap H_0^2(0,1) \mid \|b\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \leq M(\eta)\}.$$

Le choix de  $M_0$  sera précisé par la suite.

Pour  $b$  fixé dans  $X^\eta$ , on considère le problème fluide (3.10)-(3.14) introduit dans la section 1.3 avec

$$\begin{aligned} A &= F(b), \quad B = G(b), \quad C = E(b), \\ \text{et } \mathbf{f} &= (\mathbf{f}_f \circ \Phi(d))H(d). \end{aligned}$$

On vérifie que les hypothèses  $(\mathbf{H}_1)$  sont satisfaites. Il existe alors une unique solution  $(\mathbf{w}(b), q(b))$  dans  $V_{Bn} \times L_0^2(\Omega)$ . On peut désormais donner un sens à la trace normale de  $\Sigma_f = -(F(b)\nabla)\mathbf{w}(b) + q(b)G(b)$  dans  $\mathbf{H}^{-1/2}(0, 1)$ , qui représente la contrainte exercée sur la structure. L'équation de la structure (3.25) admet alors d'après le Lemme 3.4.1 une unique solution  $(d(b), \alpha(b)) \in H^{7/2}(0, 1) \times \mathbb{R}$ .

Maintenant, pour avoir une estimation de  $(\mathbf{w}(b), q(b))$  qui ne dépend pas des matrices, on doit vérifier l'hypothèse  $(\mathbf{H}_2)$ . On souhaite choisir  $b$  de façon à avoir :

$$\begin{aligned} \|I - F(b)\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta}(\Omega))^4} &\leq C_0 \\ \|I - G(b)\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta}(\Omega))^4} &\leq C_0 \\ \|I - J(b)\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta}(\Omega))^4} &\leq C_0 \\ \|I - E(b)\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta}(\Omega))^4} &\leq C_0 \end{aligned}$$

Comme les fonctions  $F, G, J$  et  $E$  sont de classe  $C^\infty$  au voisinage de tout point de  $X^\eta$  et en remarquant que  $F(0) = G(0) = J(0) = E(0) = I$ , on obtient ainsi, en appliquant l'inégalité des accroissements finis, les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \|I - F(b)\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta}(\Omega))^4} &\leq \|F\| \|b\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \\ \|I - G(b)\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta}(\Omega))^4} &\leq \|G\| \|b\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \\ \|I - J(b)\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta}(\Omega))^4} &\leq \|J\| \|b\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \\ \|I - E(b)\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta}(\Omega))^4} &\leq \|E\| \|b\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \end{aligned}$$

Si  $M_0$  est choisi tel que  $\max(\|G\|, \|J\|, \|E\|, \|F\|)M_0 \leq C_0$ , alors l'hypothèse  $(\mathbf{H}_2)$  du lemme 3.3.3 est vérifiée pour  $b \in X^\eta$  et on obtient donc une estimation de  $(\mathbf{w}(b), q(b))$  dans  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  :

$$\nu \|\mathbf{w}(b)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|q(b)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 (\|(\mathbf{f}_f \circ \phi(b))H(b)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\widehat{g}\|_{L^2(0,1)})$$

**Remarque 3.5.1** — *En utilisant le fait que*

$$\|F(b)\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta_0}(\Omega))^4} \leq \|I - F(b)\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta_0}(\Omega))^4} + \|I\|_{(\mathbf{H}^{1+\eta_0}(\Omega))^4},$$

on montre que la matrice  $F(b)$  est bornée. De la même manière, on montre que les autres matrices  $G(b)$ ,  $J(b)$  et  $E(b)$  sont bornées. Donc, l'hypothèse  $(\mathbf{H}_2)$ .

— Dans ce qui suit,  $\|\widehat{g}\|_{L^2(0,1)}$  est estimée en fonction de  $\|g\|_{L^2(0,1)}$  ( $\widehat{g} = \frac{g}{|E\mathbf{t}|}$ ) :  
comme  $\frac{1}{|E\mathbf{t}|} \in C^0([0, 1])$ , il existe alors une constante  $N_0 > 0$  telle que

$$\left| \frac{1}{|E\mathbf{t}|} \right| \leq N_0 \text{ pour tout } x \in [0, 1],$$

il vient que  $\|\widehat{g}\|_{L^2(0,1)} \leq N_0 \|g\|_{L^2(0,1)}$ .

□

On vérifie que

$$\|(\mathbf{f}_f \circ \phi(b))H(b)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq h(\eta, C_0, C_I) \|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} \quad (3.30)$$

avec

$$h(\eta, C_0, C_I) = C_I \left( \frac{C_0 \|H\|}{\max(\|G\|, \|J\|, \|E\|, \|F\|)} + |\Omega| \right)^{1/2},$$

où  $C_I$  désigne la constante de continuité de l'injection compacte de  $H^{1+\eta}(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$ .

On a donc

$$\nu \|\mathbf{w}(b)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|q(b)\|_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{h}(\eta, C_0, C_I) (\|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{L^2(0,1)}) \quad (3.31)$$

où  $\widetilde{h}(\eta, C_0, C_I) = C_1 \max(h(\eta, C_0, C_I), N_0)$ .

De plus, comme  $[\nu(F(b)\nabla)\mathbf{w}(b).\mathbf{n} + G(b)q(b).\mathbf{n}]_2 \in H^{-1/2}(0, 1)$ , alors d'après le Lemme 3.4.1, le problème solide (3.25) possède une unique solution  $(d(b), \alpha(b)) \in H^{7/2}(0, 1) \times \mathbb{R}$  pour

$$\mathbf{v} = 0, \text{ et } F_s(b) = f_s - [\nu(F(b)\nabla)\mathbf{w}(b).\mathbf{n} + G(b)q(b).\mathbf{n}]_2,$$

et on a l'estimation suivante

$$\|d(b)\|_{H^{7/2}(0,1)} + |\alpha(b)| \leq C_2 \|F_s(b)\|_{H^{-1/2}(0,1)}.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \|\nu(F(b)\nabla)\mathbf{w}(b).\mathbf{n} + G(b)q(b).\mathbf{n}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(0,1)} &\leq C' (\|(\mathbf{f}_f \circ \phi(b))H(b)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\nu F(b)\nabla\mathbf{w}(b) + G(b)q(b)\|_{(L^2(\Omega))^4}), \end{aligned}$$

où  $C'$  désigne la constante de continuité de l'application  $\gamma_n$  (la trace normale) définie de  $H_{\text{div}} = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^4 ; \text{div}(\mathbf{v}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$  dans  $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ .

En utilisant le fait que les matrices  $F(b)$  et  $G(b)$  sont bornées, l'injection continue de  $H^{1+\eta}(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  les estimations (3.30) et (3.31), on obtient

$$\|[\nu(F(b)\nabla)\mathbf{w}(b)\cdot\mathbf{n} + G(b)q(b)\cdot\mathbf{n}]_2\|_{H^{-1/2}(0,1)} \leq C_3(\|\mathbf{f}_f\|_{(L^2(\mathbb{R}^2))^2} + \|g\|_{L^2(0,1)})$$

où  $C_3 = C'(h(\eta, C_0, C_I) + (C_0 + \|I\|_{(H^{1+\eta_0}(\Omega))^4})\tilde{h}(\eta, C_0, C_I))$ , on obtient ainsi

$$\|d(b)\|_{H^{7/2}(0,1)} + |\beta(b)| \leq C_4(\|f_s\|_{H^{-1/2}(0,1)} + \|\mathbf{f}_f\|_{(L^2(\mathbb{R}^2))^2} + \|g\|_{L^2(0,1)}). \quad (3.32)$$

avec  $C_4 = C_2 \max(C_3, 1)$ .

□

### 3.5.2 Procédure de point fixe

On considère l'application  $S$ , qui pour chaque  $b \in B^\eta$ , associe un nouveau déplacement  $d(b) \in H^{3/2+\eta}(0, 1)$ , où  $d(b)$  est l'unique solution de (3.25).

Montrer l'existence d'une solution du problème couplé est équivalent à prouver l'existence d'un point fixe de l'application  $S$ . Vérifions donc que  $S$  satisfait les conditions du théorème de point fixe de Schauder (voir Chapitre 2, Théorème 2.1.1) :

*i)*  $S(B^\eta) \subset B^\eta$ ,

*ii)*  $S$  est continue pour la topologie forte de  $H^{3/2+\eta}(0, 1)$ ,

*iii)*  $\overline{S(B^\eta)}$  est un compact dans la topologie de  $H^{3/2+\eta}(0, 1)$ .

— Vérifions *i)*, on a déjà montré que pour tout  $b \in B^\eta$ ,  $d(b)$  est majoré (voir l'estimation (3.32)) et on a

$$\|d(b)\|_{H^{7/2}(0,1)} \leq C_4(\|f_s\|_{H^{-2}(0,1)} + \|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|\hat{g}\|_{L^2(\Gamma)}).$$

Donc pour que  $d(b)$  reste dans la boule  $B^\eta$ , il faut choisir  $f_s$ ,  $\mathbf{f}_f$  et  $\hat{g}$  de telle sorte qu'elles vérifient l'inégalité suivante

$$C_4(\|f_s\|_{H^{-2}(0,1)} + \|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|\hat{g}\|_{L^2(\Gamma)}) \leq \min(M(\eta), M_0).$$

Sous cette condition,  $B^\eta$  est stable par l'application  $S$ .

— Pour montrer *ii)*, on considère une suite  $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$  dans  $B^\eta$  qui converge vers  $b$  dans  $H^{3/2+\eta}(0, 1)$ .

Grâce à l'estimation (3.21),  $(\mathbf{w}(b_m), q(b_m), \boldsymbol{\lambda}(b_m))$  est bornée dans  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)$  indépendamment de  $m$ , on en déduit alors l'existence d'une sous suite  $(\mathbf{w}(b_{m_l}), q(b_{m_l}), \boldsymbol{\lambda}(b_{m_l}))_{l \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(b_{m_l}) &\rightharpoonup \overline{\mathbf{w}} \text{ dans } (H^1(\Omega))^2 \text{ quand } l \rightarrow \infty \\ q(b_{m_l}) &\rightharpoonup q \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } l \rightarrow \infty \\ \boldsymbol{\lambda}(b_{m_l}) &\rightharpoonup \overline{\boldsymbol{\lambda}} \text{ dans } \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma) \text{ quand } l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De même, d'après l'estimation (3.32), la suite  $(d(b_m), \beta(b_m))$  est bornée dans  $H^{7/2}(0, 1) \times \mathbb{R}$ , on peut alors extraire une sous suite  $(d(b_{m_l}), \beta(b_{m_l}))_{l \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement dans  $H^{7/2}(0, 1)$  et fortement dans  $H^{3/2+\eta}(0, 1)$ , d'après l'injection compacte de  $H^{7/2}(0, 1)$  dans  $H^{3/2+\eta}(0, 1)$  (voir [62], page 38), et  $\alpha(b_{m_l})$  qui converge vers  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ . Il existe donc  $d \in H^{7/2}(0, 1)$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{aligned} d(b_{m_l}) &\rightharpoonup d \text{ dans } H^{7/2}(0, 1) \text{ quand } l \rightarrow \infty \\ d(b_{m_l}) &\rightarrow d \text{ dans } H^{3/2+\eta}(0, 1) \text{ quand } l \rightarrow \infty \\ \alpha(b_{m_l}) &\rightarrow \bar{\alpha} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ quand } l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

L'objectif est de montrer que  $(d, \bar{\alpha})$  est une solution du problème variationnel (3.25) et en déduire ensuite la convergence de toute la suite  $S(b_m)$  vers  $S(b)$  (quand  $m$  tend vers l'infini), ce qui prouverait la continuité de  $S$ .

Pour montrer cela, on passe d'abord à la limite dans la formulation variationnelle mixte du problème fluide (vérifiée par  $(w(b_{m_l}), q(b_{m_l}), \boldsymbol{\lambda}(b_{m_l}))$ ), puis celle du solide dont  $(d(b_{m_l}), \beta(b_{m_l}))$  est la solution.

On rappelle que les applications  $F, G, H$  et  $E$  sont continues sur  $X^\eta$ , les termes  $F(b_m), G(b_m), H(b_m)$  et  $E(b_m)$  convergent fortement respectivement vers  $F(b), G(b), H(b)$  et  $E(b)$  dans  $(H^{1+\eta}(\Omega))^4$ .

Pour le terme  $\mathbf{f}_f \circ \Phi(b_m)H(b_m)$ , on utilise le lemme suivant démontré dans [60].

**Lemme 3.5.1** *Etant donné  $\mathbf{f}_f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , l'application*

$$\begin{aligned} X^\eta &\rightarrow L^2(\Omega) \\ b &\mapsto \mathbf{f}_f \circ \Phi(b)H(b) \end{aligned}$$

*est continue.*

□

Le Lemme 3.5.1 et la convergence forte des applications  $F, G, H$  et  $E$  nous permettent de passer à la limite dans la formulation faible satisfaite par  $(\mathbf{w}(b_{m_l}), q(b_{m_l}), \boldsymbol{\lambda}(b_{m_l}))$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{w}(b_{m_l}), \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q(b_{m_l})) + \langle \lambda_n(b_{m_l}), \mathbf{v} \cdot G(b_{m_l}) \mathbf{n} \rangle \\ \quad + \langle \lambda_t(b_{m_l}), \mathbf{v} \cdot E(b_{m_l}) \mathbf{t} \rangle_\Gamma \\ \quad = (\mathbf{f}_f \circ \Phi(b_{m_l})H(b_{m_l}), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Gamma_D} \\ \\ b(\mathbf{w}(b_{m_l}), p) + \langle \mu_n, \mathbf{w}(b_{m_l}) \cdot G(b_{m_l}) \mathbf{n} \rangle = 0 \quad \forall p \in L_0^2(\Omega), \mu_n \in H_*^{-1/2}(\Gamma) \\ \\ (\mu_t - \lambda_t(b_{m_l}), \mathbf{w}(b_{m_l}) \cdot E(b_{m_l}) \mathbf{t})_\Gamma \leq 0 \quad \forall \mu_t \in Q \end{array} \right.$$

- Étudions la convergence de  $(\mu_t - \lambda_t(b_{m_l}), \mathbf{w}(b_{m_l}) \cdot E(b_{m_l}) \mathbf{t})_\Gamma$

La suite  $E(b_m)^t \mathbf{w}(b_m) \cdot \mathbf{t}$  est bornée dans  $H^{\frac{1}{2}}(0, 1)$ , en effet, on a

$$\begin{aligned} \|E(b_m)^t \mathbf{w}(b_m) \cdot \mathbf{t}\|_{H^{1/2}(0,1)} &\leq \|E(b_m)^t \mathbf{w}(b_m)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(0,1)} \\ &\leq C_c \|E(b_m)^t \mathbf{w}(b_m)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\leq C_c C \|E(b_m)^t\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|\mathbf{w}(b_m)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où on a utilisé à la deuxième ligne la continuité de l'application trace définie de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ , et à la troisième ligne le Lemme 2.1.2.

Comme la suite  $\mathbf{w}(b_m)$  est bornée dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  et la suite  $E(b_m)^t$  est bornée dans  $(H^{1+\eta}(\Omega))^4$  (car il s'agit d'une suite convergente), alors le produit des deux termes est borné dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , d'où la convergence faible d'une sous suite  $E(b_{m_l})^t \mathbf{w}(b_{m_l}) \cdot \mathbf{t}$  vers  $\bar{\varphi} \cdot \mathbf{t}$  dans  $H^{1/2}(0, 1)$ .

Montrons maintenant que  $\bar{\varphi} \cdot \mathbf{t} = E(b)^t \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{t}$ .

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(b_{m_l}) &\rightharpoonup \bar{\mathbf{w}} \text{ dans } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ quand } l \rightarrow \infty \\ E(b_{m_l})^t &\rightarrow E(b)^t \text{ dans } (H^{1+\eta}(\Omega))^4 \text{ quand } l \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

d'après ([18], [20]), il en résulte

$$E(b_{m_l})^t \mathbf{w}(b_{m_l}) \cdot \mathbf{t} \rightharpoonup E(b)^t \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{t} \text{ dans } \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (3.33)$$

par suite

$$E(b_{m_l})^t \mathbf{w}(b_{m_l}) \cdot \mathbf{t} \rightharpoonup E(b)^t \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{t} \text{ dans } H^{1/2}(0, 1).$$

On obtient par unicité de la limite  $\bar{\varphi} \cdot \mathbf{t} = E(b)^t \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{t}$ .

L'injection compacte de  $H^{\frac{1}{2}}(0, 1)$  dans  $L^2(0, 1)$  nous donne :

$$E(b_{m_l})^t \mathbf{w}(b_{m_l}) \cdot \mathbf{t} \rightarrow E(b)^t \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{t} \text{ dans } L^2(0, 1). \quad (3.34)$$

D'autre part,  $\lambda_t(b_{m_l})$  est bornée dans  $L^2(0, 1)$ , il existe alors  $\bar{\lambda}_t \in L^2(0, 1)$ , tel que :

$$\lambda_t(b_{m_l}) \rightharpoonup \bar{\lambda}_t. \quad (3.35)$$

On conclut ainsi, d'après (3.34), (3.35) et [20] :

$$(\mu_t - \lambda_t(b_{m_l}), \mathbf{w}(b_{m_l}) \cdot E(b_{m_l}) \mathbf{t})_\Gamma \rightarrow (\mu_t - \bar{\lambda}_t, \bar{\mathbf{w}} \cdot E(b) \mathbf{t})_\Gamma$$

- Étudions maintenant la convergence de  $\langle \lambda_n(b_{m_l}), \mathbf{v} \cdot G(b_{m_l}) \mathbf{n} \rangle$  pour  $\mathbf{v} \in V_{\Gamma_D}$ . La trace du terme  $G(b_{m_l})^t \mathbf{v}$  est dans  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$  car il s'agit de la trace d'un élément dans  $V_{\Gamma_D}$  (le produit de  $G(b_{m_l})^t$  qui est dans  $(H^{1+\eta}(\Omega))^4$  et de  $\mathbf{v}$  qui

est un élément de  $V_{\Gamma_D}$ , est dans  $V_{\Gamma_D}$ ).

On vérifie de plus que la suite  $G(b_{m_i})^t \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  converge fortement vers  $G(b)^t \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ , en effet :

$$\begin{aligned} \|(G(b_{m_i})^t - G(b)^t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} &\leq \|(G(b_{m_i})^t - G(b)^t) \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C_{tr} \|(G(b_{m_i})^t - G(b)^t) \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\leq CC_{tr} \|G(b_{m_i})^t - G(b)^t\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où on a utilisé à la deuxième ligne la continuité de l'application trace définie de  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$  dans  $V_{\Gamma_D}$  (voir [72]).

La suite  $G(b_m)$  converge fortement vers  $G(b)$  dans  $(H^{1+\eta}(\Omega))^4$  d'où la convergence forte de la sous suite  $G(b_{m_i})^t$  vers la même limite.

D'autre part, la suite  $\lambda_n(b_{m_i})$  converge faiblement vers  $\bar{\lambda}_n$  dans  $H_*^{-1/2}(\Gamma)$ .

On en déduit ainsi la convergence de  $\langle \lambda_n(b_{m_i}), \mathbf{v} \cdot G(b_{m_i}) \mathbf{n} \rangle$  vers  $\langle \bar{\lambda}_n, \mathbf{v} \cdot G(b) \mathbf{n} \rangle$ .

- La convergence du terme  $\langle \mu_n, \mathbf{w}(b_{m_i}) \cdot G(b_{m_i}) \mathbf{n} \rangle$  pour  $\mu_n \in H_*^{-1/2}(\Gamma)$ .

Montrons que  $\mathbf{w}(b_{m_i}) \cdot G(b_{m_i}) \mathbf{n}$  converge faiblement vers  $\bar{\mathbf{w}} \cdot G(b) \mathbf{n}$  :

on a

$$(G(b_{m_i})^t \mathbf{w}(b_{m_i}) - G(b)^t \bar{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{n} = (G(b_{m_i})^t - G(b)^t) \mathbf{w}(b_{m_i}) \cdot \mathbf{n} + G(b)^t (\mathbf{w}(b_{m_i}) - \bar{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{n}$$

D'une part la suite  $(G(b_{m_i})^t - G(b)^t) \mathbf{w}(b_{m_i}) \cdot \mathbf{n}$  converge fortement vers 0 dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  d'où la convergence faible, en effet :

$$\begin{aligned} \|(G(b_{m_i})^t - G(b)^t) \mathbf{w}(b_{m_i}) \cdot \mathbf{n}\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} &\leq \|(G(b_{m_i})^t - G(b)^t) \mathbf{w}(b_{m_i})\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C \|G(b_{m_i})^t - G(b)^t\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|\mathbf{w}(b_{m_i})\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{w}(b_{m_i})$  est bornée dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  et la suite  $G(b_{m_i})^t$  converge fortement vers  $G(b)^t$  dans  $(H^{1+\eta}(\Omega))^4$ , on obtient alors la convergence voulue.

D'autre part, la suite  $G(b)^t (\mathbf{w}(b_{m_i}) - \bar{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{n}$  converge faiblement vers 0 dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ , cela provient de la convergence faible de la trace de la sous suite  $\mathbf{w}(b_{m_i})$  vers la trace de  $\bar{\mathbf{w}}$  dans  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$ .

En passant à la limite, on obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) + \langle \bar{\lambda}_n, \mathbf{v} \cdot G(b) \mathbf{n} \rangle \\ \quad \quad \quad + (\bar{\lambda}_t, \mathbf{v} \cdot E(b) \mathbf{t})_{\Gamma} = (\mathbf{f}_f \circ \Phi(b) H(b), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Gamma_D} \\ \\ b(\bar{\mathbf{w}}, p) + \langle \mu_n, \bar{\mathbf{w}} \cdot G(b) \mathbf{n} \rangle = 0 \quad \forall p \in L_0^2(\Omega), \quad \forall \mu_n \in H_*^{-1/2}(\Gamma) \\ \\ (\mu_t - \bar{\lambda}_t, \bar{\mathbf{w}} \cdot E(b) \mathbf{t})_{\Gamma} \leq 0 \quad \forall \mu_t \in Q \end{array} \right.$$



Le triplet  $(\bar{\mathbf{w}}, q, \bar{\lambda})$  est donc égale au  $(\mathbf{w}(b), q(b), \lambda(b))$  qui est l'unique solution de (PV).

On peut également passer à la limite faible (sous forme variationnelle), dans l'équation satisfaite par  $(d(b_{m_l}), \alpha(b_{m_l}))$ , quand  $l$  tend vers l'infini, en tenant compte du fait que  $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w}(b)$  et  $q = q(b)$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{(0,1)} \partial_x^2(d) \partial_x^2 \delta \, dx + \alpha \int_{(0,1)} \delta \, dx = \int_{(0,1)} (f_s + ((F(d)\nabla)\bar{\mathbf{w}}.\mathbf{n} + G(d)q.\mathbf{n})_2) \delta \, dx \\ \quad \forall \delta \in H_0^2(0,1), \\ \\ \int_{(0,1)} d \, dx = 0. \end{array} \right.$$

On obtient par unicité de la solution  $d = d(b) = S(b)$ , d'où la continuité de  $S$ .

En effet, vérifions que  $[\nu F((b_{m_l}))\nabla)\mathbf{w}(b_{m_l}).\mathbf{n} - G((b_{m_l}))q(b_{m_l}).\mathbf{n}]_2$  converge faiblement dans  $H^{-\frac{1}{2}}(0,1)$  vers  $[\nu F((b))\nabla)\mathbf{w}(b).\mathbf{n} - G((b))q(b).\mathbf{n}]_2$ .

On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nu(F(d)\nabla)\mathbf{w} + G(d)q) &= \mathbf{f}_f \in \mathbf{L}^2(\Omega) \\ \nu(F(d)\nabla)\mathbf{w} + G(d)q &\in (L^2(\Omega))^4 \end{aligned}$$

de plus,

$$\begin{aligned} &\langle \nu F((b_{m_l}))\nabla)\mathbf{w}(b_{m_l}).\mathbf{n} - G((b_{m_l}))q(b_{m_l}).\mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \int_{\Omega} -G((b_{m_l}))q(b_{m_l})\nabla\mathbf{v} + \int_{\Omega} \nu F(b_{m_l})\nabla)\mathbf{w}(b_{m_l})\nabla\mathbf{v} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_f\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} q(b_{m_l}) &\rightharpoonup q(b) \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \mathbf{w}(b_{m_l}) &\rightharpoonup \mathbf{w}(b) \text{ dans } \mathbf{H}^1(\Omega) \\ F(b_{m_l}) &\rightarrow F(b) \text{ dans } (H^{1+\eta}(\Omega))^4, \text{ donc dans } (L^\infty(\Omega))^4 \\ G(b_{m_l}) &\rightarrow G(b) \text{ dans } (H^{1+\eta}(\Omega))^4, \text{ donc dans } (L^\infty(\Omega))^4, \end{aligned}$$

on obtient alors la convergence voulue.

- Pour la démonstration de *iii*) on procède de la manière suivante : Comme  $(b_m)$  est une suite de  $B^\eta$ ,  $S(b_{m_l})$  est donc bornée dans  $H^{7/2}(0,1)$  par une constante qui ne dépend pas de  $m$ . L'injection de  $H^{7/2}(0,1)$  dans  $H^{3/2+\eta}(0,1)$  est compacte, donc  $S(B^\eta)$  est relativement compacte dans  $H^{3/2+\eta}(0,1)$ .

On conclut ainsi, sous les conditions *i*), *ii*) et *iii*), que  $S$  possède au moins un point fixe dans  $B^\eta$ .

□

Dans le paragraphe suivant, on s'intéresse à l'unicité du point fixe.

### 3.5.3 Unicité

On se place dans le cas où la viscosité du fluide  $\nu$  est assez grande. Pour montrer l'unicité, on suppose que  $S$  admet deux points fixes  $d_1$  et  $d_2$  dans  $B^\eta$ . En raison de la non linéarité du problème fluide (3.1)-(3.6), les fonctions  $(\mathbf{w}(d_i), q(d_i))$ ,  $i = 1, 2$ , sont considérées comme solutions de deux problèmes de Stokes modifiés avec des conditions de Dirichlet non homogène sur  $\Gamma$  (voir [100], [99]). En faisant la soustraction de ces deux problèmes linéaires, on peut montrer, en supposant certaines hypothèses sur les forces extérieures, que  $d_1 = d_2$ . L'unicité du problème fluide permet de conclure alors que  $\mathbf{w}(d_1) = \mathbf{w}(d_2)$  et  $q(d_1) = q(d_2)$ .

On considère deux points fixes de  $S$  dans  $B^\eta$  :  $d_i$ ,  $i = 1, 2$ , on a alors pour  $i = 1, 2$ , les équations du problème fluide posées dans un domaine fixe :

$$(PV_i) \left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{w}(d_i), \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q(d_i)) = - \langle \lambda_n(d_i), \mathbf{v} \cdot G(d_i) \mathbf{n} \rangle \\ \quad - (\lambda_t(d_i), \mathbf{v} \cdot E(d_i) \mathbf{t})_\Gamma \\ \quad + (\mathbf{f}_f \circ \Phi(d_i) H(d_i), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Gamma_D} \\ \\ b(\mathbf{w}(d_i), p) + \langle \mu_n(d_i), \mathbf{w} \cdot G(d_i) \mathbf{n} \rangle = 0 \quad \forall p \in L_0^2(\Omega), \forall \mu_n \in H_*^{-1/2}(\Gamma) \\ \\ (\mu_t - \lambda_t(d_i), \mathbf{w}(d_i) \cdot E(d_i) \mathbf{t})_\Gamma \leq 0 \quad \forall \mu_t \in Q, \end{array} \right.$$

et le problème de la structure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{(0,1)} \partial_x^2(d_i) \partial_x^2 \delta \, dx + \alpha(d_i) \int_{(0,1)} \delta \, dx = \int_{(0,1)} (\Sigma_i(d_i) \cdot \mathbf{n})_2 \delta \, dx \quad \forall \delta \in H_0^2(0,1), \\ \\ \int_{(0,1)} d_i \, dx = v, \end{array} \right.$$

on note  $\Sigma_i(d_i) = -\nu((F(d_i) \nabla) \mathbf{w}(d_i) + G(d_i) q(d_i))$ , pour  $i = 1, 2$ .

Notre objectif est de montrer qu'il existe une constante  $\gamma < 1$  telle que

$$\|S(d_1) - S(d_2)\|_{H^{7/2}(0,1)} \leq \gamma \|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)}. \quad (3.36)$$

L'inégalité (3.36), en utilisant que  $d_i$  est un point fixe de  $S$ , permet de montrer que  $d_1 = d_2$ .

- Etape 1 : Estimation de  $\|S(d_1) - S(d_2)\|_{H^{7/2}(0,1)} = \|d_1 - d_2\|_{H^{7/2}(0,1)}$ .

En faisant la soustraction des équations de la structure vérifiées par  $(d_1, \alpha(d_1))$  et  $(d_2, \alpha(d_2))$ , on obtient que  $d_1 - d_2$  est solution du problème variationnel

$$\begin{cases} \int_{(0,1)} \partial_x^2(d_1 - d_2) \partial_x^2 \delta \, dx + (\alpha(d_1) - \alpha(d_2)) \int_{(0,1)} \delta \, dx = \int_{(0,1)} \tilde{g}_2 \delta \, dx \quad \forall \delta \in H_0^2(0,1), \\ \int_{(0,1)} (d_1 - d_2) \, dx = 0. \end{cases}$$

Où  $\tilde{g}_2 = ((\Sigma_1(d_1) - \Sigma_2(d_2)) \cdot \mathbf{n})_2$ .

Vérifions que  $\tilde{g}_2 \in H^{-1/2}(0,1)$ . En effet, on a  $\Sigma_1(d_1) - \Sigma_2(d_2) \in (L^2(\Omega))^4$  et  $\operatorname{div}(\Sigma_1(d_1) - \Sigma_2(d_2)) = (\mathbf{f}_f \circ \phi(d_1))H(d_1) - (\mathbf{f}_f \circ \phi(d_2))H(d_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , donc  $\Sigma_1(d_1) - \Sigma_2(d_2) \in H_{\operatorname{div}}(\Omega)$ .

D'après le Lemme 3.4.1, on a

$$\|d_1 - d_2\|_{H^{7/2}(0,1)} \leq C \|\tilde{g}_2\|_{H^{-1/2}(0,1)}. \quad (3.37)$$

De plus, d'après le théorème de la trace normale [110], on a

$$\begin{aligned} \|(\Sigma_1(d_1) - \Sigma_2(d_2)) \cdot \mathbf{n}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(0,1)} &\leq \|\Sigma_1(d_1) - \Sigma_2(d_2)\|_{(L^2(\Omega))^4} \\ &\quad + \|(\mathbf{f}_f \circ \phi(d_1))H(d_1) - (\mathbf{f}_f \circ \phi(d_2))H(d_2)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'estimation suivante pour le second membre  $\tilde{g}_2$

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}_2\|_{H^{-1/2}(0,1)} &\leq \|(\mathbf{f}_f \circ \phi(d_1))H(d_1) - (\mathbf{f}_f \circ \phi(d_2))H(d_2)\|_{(L^2(\Omega))^4} \\ &\quad + \|\nu(F(d_1)\nabla)(\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2))\|_{(L^2(\Omega))^4} \\ &\quad + \|G(d_1)(q(d_1) - q(d_2))\|_{(L^2(\Omega))^4} \\ &\quad + \|\nu(F(d_1) - F(d_2))\nabla \mathbf{w}(d_2)\|_{(L^2(\Omega))^4} \\ &\quad + \|q(d_2)(G(d_1) - G(d_2))\|_{(L^2(\Omega))^4} \\ &\leq \|(\mathbf{f}_f \circ \phi(d_1))H(d_1) - (\mathbf{f}_f \circ \phi(d_2))H(d_2)\|_{(L^2(\Omega))^4} \\ &\quad + \nu \|F(d_1)\|_{(L^\infty(\Omega))^4} \|\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\quad + \|G(d_1)\|_{(L^\infty(\Omega))^4} \|q(d_1) - q(d_2)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \nu \|F(d_1) - F(d_2)\|_{(L^\infty(\Omega))^4} \|\mathbf{w}(d_2)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\quad + \|G(d_1) - G(d_2)\|_{(L^\infty(\Omega))^4} \|q(d_2)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

- Etape 2 : Estimation de  $\|\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  et  $\|q(d_1) - q(d_2)\|_{L^2(\Omega)}$  en fonction de  $\|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)}$ .

L'idée naturelle pour trouver cette estimation est de faire la soustraction de  $(PV_i)$  comme dans [60], or cela n'est pas possible à cause de la non-linéarité du problème. Cependant, dans [100] et [99], les auteurs, pour montrer que le problème de Stokes avec la condition de Tresca possède une solution forte, se

sont basés sur le fait que la solution faible satisfait aussi un problème de Stokes avec des conditions de Dirichlet non-homogènes. En s'inspirant de cette idée, on considère la solution  $(\mathbf{w}(d_i), q(d_i))$  de  $(PV_i)$  qui est dans  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  comme la solution d'un problème de Stokes généralisé avec la condition de Dirichlet non-homogène suivant

$$(P'_i) \begin{cases} -\operatorname{div}(\nu(F(d_i)\nabla)\mathbf{w}(d_i)) + (G(d_i)\nabla)q(d_i) & = \mathbf{f}_f \circ \Phi(d_i)H(d_i) & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(G(d_i)^t\mathbf{w}(d_i)) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{w}(d_i) & = \xi_i, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \beta_i & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où  $\beta_i = \mathbf{w}(d_i)|_\Gamma$ . Noter que  $\beta_i$  vérifie  $\beta_i.G(d_i)\mathbf{n} = 0$  et

$$\|\beta_i\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \leq C_c \|\mathbf{w}(d_i)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

où  $C_c$  est la constante de continuité de l'application trace de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ . Afin de trouver une estimation de  $\|\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  et  $\|q(d_1) - q(d_2)\|_{L^2(\Omega)}$  en fonction de  $\|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)}$ , on va soustraire les équations du fluide  $(P'_i)$  vérifiées par la solution  $(\mathbf{w}(d_1), q(d_1))$  et celles vérifiées par  $(\mathbf{w}(d_2), q(d_2))$ . On obtient alors, que le couple  $(\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2), q(d_1) - q(d_2))$  est solution du problème de Stokes suivant

$$(P'_1 - P'_2) \begin{cases} -\operatorname{div}(\nu(F(d_1)\nabla)(\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2))) \\ \quad + (G(d_1)\nabla)(q(d_1) - q(d_2)) & = \tilde{\mathbf{f}} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(G(d_1)^t(\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2))) & = \tilde{\chi} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2) & = \tilde{\xi} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_f \circ \Phi(d_1)H(d_1) - \mathbf{f}_f \circ \Phi(d_2)H(d_2) - \operatorname{div}(\nu((F(d_1) - F(d_2))\nabla)(\mathbf{w}(d_2))) \\ + ((G(d_1) - G(d_2))\nabla)q(d_2) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\tilde{\chi} = \operatorname{div}((G(d_2)^t - G(d_1)^t)\mathbf{w}(d_2)),$$

$$\tilde{\xi} = \xi_1 - \xi_2.$$

Comme  $\mathbf{w}(d_i).G(d_i)\mathbf{n} = 0$  pour  $i = 1, 2$ , alors

$$\begin{aligned} (\beta_1 - \beta_2).G(d_1)\mathbf{n} &= (\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2)).G(d_1)\mathbf{n} \\ &= \mathbf{w}(d_2).(G(d_2) - G(d_1))\mathbf{n}, \end{aligned}$$

et donc, la condition de compatibilité de  $(P'_1 - P'_2)$  est vérifiée, c.-à-d.

$$\int_{\Omega} \chi = \int_{\partial\Omega} \tilde{\xi} \cdot G(d_1) \mathbf{n} = \int_{\Gamma} (\beta_1 - \beta_2) \cdot G(d_1) \mathbf{n}.$$

Donc, d'après le résultat d'existence de la solution du problème de Stokes dans [60, 55], on a

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ + \|q(d_1) - q(d_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 [\|\tilde{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} + \|\chi\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\xi}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}] \end{aligned} \quad (3.38)$$

- Etape 3 : Estimation de  $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}$ ,  $\|\chi\|_{L^2(\Omega)}$  et  $\|\tilde{\xi}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$

Pour l'estimation de  $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} &\leq \|(\mathbf{f}_f \circ \phi(d_1))H(d_1) - (\mathbf{f}_f \circ \phi(d_2))H(d_2)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\quad + C_I \nu \|F(d_1) - F(d_2)\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|\mathbf{w}(d_2)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\quad + C_I \|G(d_1) - G(d_2)\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|q(d_2)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

D'une part, comme, par hypothèse,  $\mathbf{f}_f$  est contractante (on note  $C_l$  sa constante de Lipschitz), l'estimation suivante est ainsi vérifiée

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{f}_f \circ \phi(d_1))H(d_1) - (\mathbf{f}_f \circ \phi(d_2))H(d_2)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ \leq C_l \|H(d_1)\|_{(L^\infty(\Omega))^4} \|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} + C_I \|H(d_1) - H(d_2)\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \|H(d_1)\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} &\leq h(\eta, C_0, C_I) \\ \|H(d_1) - H(d_2)\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} &\leq \|H\| \|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{f}_f \circ \phi(d_1))H(d_1) - (\mathbf{f}_f \circ \phi(d_2))H(d_2)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ \leq C_5 [\|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + C_l] \|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

avec  $C_5 = \max(h(\eta, C_0, C_I), C_I \|H\|)$ .

D'autre part, comme  $d_i$  appartient à  $B^\eta$  alors  $\mathbf{w}(d_i)$  et  $q(d_i)$  satisfont l'estimation du Lemme 3.3.3,

$$\nu \|\mathbf{w}(d_i)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|q(d_i)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 (\|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}). \quad (3.40)$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité des accroissements finis sur les applications  $F$  et  $G$ , on obtient :

$$\|\tilde{\mathbf{f}}\|_{(H^{-1}(\Omega))^2} \leq C_6 [\|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} + C_l] \|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \quad (3.41)$$

où  $C_6 = C_5 + C_I C_1 (\|F\| + \|G\|)$ .

Pour l'estimation de  $\|\chi\|_{L^2(\Omega)}$  on a de manière analogue,

$$\begin{aligned} \|\chi\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|(G(d_1) - G(d_2))^t \mathbf{w}(d_1)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\leq \|G(d_1) - G(d_2)\|_{(H^{1+\eta}(\Omega))^4} \|\mathbf{w}(d_1)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\leq \|G\| \|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \|\mathbf{w}(d_1)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{C_1}{\nu} \|G\| (\|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) \|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Pour l'estimation de  $\|\tilde{\xi}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ , on a :

$$\|\tilde{\xi}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|\beta_1 - \beta_2\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_c \|\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (3.43)$$

En utilisant (3.38), (3.41), (3.42) et (3.43) on obtient alors

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|q(d_1) - q(d_2)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_2 \left[ \left( C_6 + \frac{C_1}{\nu} \|G\| \right) (\|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|g\|_{L^2(\Gamma)} + C_l) \|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)} \right] \\ &\quad + C_2 C_c \|\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

On suppose que  $\nu > C_2 C_c$ , on peut ainsi conclure que

$$\begin{aligned} \tilde{C}'_1 \|\mathbf{w}(d_1) - \mathbf{w}(d_2)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|q(d_1) - q(d_2)\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq C_2 \left( C_6 + \frac{C_1}{\nu} \|G\| \right) (\|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(0,1)} + C_l) \|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

où  $\tilde{C}'_1 = \nu - C_2 C_c$ .

• Etape 4 : Estimation (3.36)

En utilisant les estimations précédentes et l'inégalité des accroissements finis sur les applications  $F$  et  $G$ , on obtient

$$\|d_1 - d_2\|_{H^{7/2}(0,1)} \leq C_7(\eta, \nu, C_0) (\|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C_l + \|g\|_{L^2(0,1)}) \|d_1 - d_2\|_{H^{3/2+\eta}(0,1)},$$

Comme la force  $\mathbf{f}_f$  et le seuil  $g$  sont choisis assez petits on peut supposer qu'ils vérifient

$$C_7(\eta, \nu, C_0) (\|\mathbf{f}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C_l + \|g\|_{L^2(0,1)}) < 1.$$

et donc l'inégalité (3.36) est vérifiée. □

# Chapitre 4

## Approximation du problème fluide et estimations d'erreur a priori

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>56</b>
<b>4.2</b>	<b>Problème continu</b>	<b>56</b>
4.2.1	Formulation variationnelle mixte à quatre champs	57
4.2.2	Existence et unicité	59
<b>4.3</b>	<b>Approximation par éléments finis et estimations d'erreur</b>	<b>61</b>
4.3.1	Approximation par éléments finis	61
4.3.2	Estimation d'erreur	66

---

## 4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de contribuer à l'analyse numérique du problème de Stokes avec des conditions aux limites de type Tresca considérées dans les chapitres précédents. L'approximation de ces conditions aux limites non linéaires a fait l'objet de plusieurs travaux sur le plan théorique et numérique (voir par exemple [5], [6], [48], [69], [79]). Sur le plan théorique, des estimations d'erreur optimales sont établies, dans un contexte d'éléments finis, pour la résolution des problèmes de Stokes et Navier-Stokes avec des conditions de glissement de type Tresca ([6], [48], [69], [79], [78], [80]). Des réalisations numériques ont été effectuées essentiellement sur le problème Stokes utilisant la méthode itérative d'Uzawa ([48], [79]).

Dans ce chapitre, il s'agit d'approcher un problème de Stokes avec des conditions aux limites de type glissement par une méthode d'éléments finis mixte à quatre champs en introduisant un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte d'adhérence de la vitesse  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  sur la zone de glissement. On utilise les techniques de démonstration de [6] (approximation par éléments finis à trois champs) en tenant compte des spécificités de  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  pour établir une estimation d'erreur optimale.

Le chapitre est découpé comme suit. Après la présentation des équations modélisant le problème de Stokes avec des conditions aux limites de type Tresca, on introduit une formulation variationnelle à quatre champs du problème continu [63] et on montre que la condition Inf-Sup continue de Brezzi-Babuska est satisfaite. On présente ensuite le problème approché par des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ -bulle pour la vitesse,  $\mathbb{P}_1$  pour la pression et  $\mathbb{P}_1$  pour les deux multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$  associés respectivement à la composante normale et tangentielle du vecteur vitesse. Enfin, on établit une estimation d'erreur a priori optimale d'ordre 1 améliorant le résultat obtenu dans [6].

## 4.2 Problème continu

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière régulière  $\partial\Omega$  constituée par deux parties ouvertes et disjointes telles que

$$\partial\Omega = \bar{\Gamma} \cup \bar{\Gamma}_D \text{ et } \Gamma \cap \Gamma_D = \emptyset.$$

Sur  $\Gamma_D$ , on impose une condition de Dirichlet homogène tandis que sur  $\Gamma$ , une condition de Tresca est fixée.

Soit  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Gamma)$  telle que  $g > 0$ , nous nous intéressons à la résolution du



problème non linéaire suivant

$$(P) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(2\nu\varepsilon(\mathbf{w})) + \nabla q = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{w}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{w} = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ |\Sigma_n \cdot \mathbf{t}| \leq g, \quad (\Sigma_n \cdot \mathbf{t})\mathbf{w} \cdot \mathbf{t} + g|\mathbf{w} \cdot \mathbf{t}| = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  sont respectivement la normale extérieure unitaire et la tangente à  $\partial\Omega$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2)^t, \quad \mathbf{t} = (n_2, -n_1)^t.$$

On note  $\varepsilon(\mathbf{w})$  le tenseur de taux de déformation linéarisé

$$\varepsilon(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{w})^t),$$

et par  $\Sigma$  le tenseur de contrainte de Cauchy défini par

$$\Sigma = 2\nu\varepsilon(\mathbf{w}) - q\delta,$$

où  $\delta$  est le tenseur identité.

On désigne par  $\Sigma_n$  le vecteur contrainte donnée par

$$\Sigma_n = \Sigma\mathbf{n},$$

et on définit les composantes normale et tangentielle  $w_n$  et  $w_t$  de la vitesse par

$$w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \quad w_t = \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}.$$

#### 4.2.1 Formulation variationnelle mixte à quatre champs

On introduit, tout d'abord, les espaces de fonctions suivants

$$V = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) ; \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_D\},$$

$$V_n = \{\mathbf{u} \in V ; u_n = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

La formulation variationnelle du problème (P) (du point de vue inéquation variationnelle), introduite dans [100] est :

$$(FV) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{w}, q) \in V_n \times L_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ a(\mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} - \mathbf{w}, q) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) - j(v_t) + j(w_t) \quad \forall \mathbf{v} \in V_n, \\ b(\mathbf{w}, p) = 0 \quad \forall p \in L_0^2(\Omega), \end{cases}$$

où  $a : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b : L_0^2(\Omega) \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  sont respectivement les formes bilinéaires définies par :

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2\nu \varepsilon(\mathbf{w}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, dx,$$

$$b(q, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}) q \, dx.$$

Le terme non linéaire et non différentiable qui représente le frottement de Tresca est donné par

$$j(v_t) = \int_{\Gamma} g |v_t| \, d\Gamma.$$

On introduit une autre formulation variationnelle de  $(P)$  à trois champs (voir [5, 6]), qui consiste à trouver  $(\mathbf{w}, (q, \lambda_t)) \in V_n \times L_0^2(\Omega) \times Q$  vérifiant les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) + (\lambda_t, v_t)_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_n, \\ b(\mathbf{w}, p) = 0 \quad \forall p \in L_0^2(\Omega), \\ (\mu_t - \lambda_t, w_t)_{\Gamma} \leq 0 \quad \forall \mu_t \in Q, \end{array} \right.$$

où  $Q$  est le convexe fermé de  $L^2(\Gamma)$  défini par :

$$Q = \{\mu \in L^2(\Gamma) ; |\mu| \leq g \text{ p.p sur } \Gamma\}.$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_t$  est introduit pour régulariser le terme non différentiable  $j$ .

La formulation variationnelle mixte à trois champs présente des difficultés au niveau de l'implémentation numérique de la condition de non pénétration du fluide ( $w_n = 0$  sur  $\Gamma$ ) [8], pour surmonter cette difficulté, on propose d'ajouter un autre multiplicateur de Lagrange  $\lambda_n$  défini sur  $\Gamma$  et associé à cette condition. On obtient ainsi une nouvelle formulation variationnelle mixte à quatre champs (voir [63]) :

$$(PV_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{w}, q, (\lambda_n, \lambda_t)) \in V \times L_0^2(\Omega) \times (H_*^{-1/2}(\Gamma) \times Q) \text{ tel que} \\ a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) + \langle \lambda_n, v_n \rangle + (\lambda_t, v_t)_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ b(\mathbf{w}, p) + \langle \mu_n, w_n \rangle = 0 \quad \forall (p, \mu_n) \in L_0^2(\Omega) \times H_*^{-1/2}(\Gamma), \\ (\mu_t - \lambda_t, w_t)_{\Gamma} \leq 0 \quad \forall \mu_t \in Q. \end{array} \right.$$

Si on suppose que le problème  $(PV_0)$  possède une unique solution  $(\mathbf{w}, (q, \lambda_n, \lambda_t))$  dans  $V \times L_0^2(\Omega) \times (H_*^{-1/2}(\Gamma) \times Q)$  alors  $(\mathbf{w}, q)$  est la solution du problème  $(FV)$ . Inversement, si  $(\mathbf{w}, q) \in V_n \times L_0^2(\Omega)$  est la solution du problème  $(FV)$  alors il existe une unique  $(\lambda_n, \lambda_t) \in H_*^{-1/2}(\Gamma) \times Q$  telle que  $(\mathbf{w}, (q, \lambda_n, \lambda_t))$  est une solution du problème  $(PV_0)$  [63].

En appliquant la formule de Green à la première équation de  $(PV_0)$ , notée  $(PV_0)_1$ , on obtient :

$$\lambda_n = -\Sigma_n \cdot \mathbf{n} \text{ et } \lambda_t = -\Sigma_n \cdot \mathbf{t} \text{ sur } \Gamma.$$

En effet, on a d'après  $(PV_0)_1$

$$\int_{\Omega} 2\nu \varepsilon(\mathbf{w}) : \varepsilon(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w})q + \langle \lambda_n, v_n \rangle + \langle \lambda_t, v_t \rangle = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(2\nu \varepsilon(\mathbf{w})) + \nabla q - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} + \langle \lambda_n + \Sigma_n \cdot \mathbf{n}, v_n \rangle + (\lambda_t + \Sigma_n \cdot \mathbf{t}, v_t)_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

En particulier pour  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , on a  $-\operatorname{div}(2\nu \varepsilon(\mathbf{w})) + \nabla q = \mathbf{f}$  p.p. sur  $\Gamma$ .

Par conséquent

$$\langle \lambda_n + \Sigma_n \cdot \mathbf{n}, v_n \rangle = 0 \text{ et } (\lambda_t + \Sigma_n \cdot \mathbf{t}, v_t)_{\Gamma} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

d'où

$$\lambda_n = -\Sigma_n \cdot \mathbf{n} \text{ et } \lambda_t = -\Sigma_n \cdot \mathbf{t} \text{ sur } \Gamma.$$

Dans ce qui suit, on va travailler avec la formulation variationnelle  $(PV_0)$ .

#### 4.2.2 Existence et unicité

On réécrit  $(PV_0)$  d'une façon équivalente au problème variationnel suivant :

$$(PV_0') \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{w}, q, (\lambda_n, \lambda_t)) \in V \times L_0^2(\Omega) \times (H_*^{-1/2}(\Gamma) \times Q) \text{ tel que} \\ a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, (q, \lambda_n, \lambda_t)) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ b_1(\mathbf{w}, (p - q, \mu_n - \lambda_n, \mu_t - \lambda_t)) \leq 0 \quad \forall (p, (\mu_n, \mu_t)) \in L_0^2(\Omega) \times (H_*^{-1/2}(\Gamma) \times Q). \end{array} \right.$$

Avec

$$b_1(\mathbf{v}, (q, \mu_n, \mu_t)) = b(\mathbf{v}, q) + \langle \mu_n, v_n \rangle + (\mu_t, v_t)_{\Gamma}.$$

Pour tout  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_n, \mu_t) \in \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)$  et pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$  on définit

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mu_n, v_n \rangle + (\mu_t, v_t)_\Gamma.$$

On note dans la suite  $\Lambda = H_*^{-1/2}(\Gamma) \times Q$  et  $M = L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ .

Pour montrer l'existence et l'unicité du problème  $(PV_0')$ , il est suffisant de vérifier que cette condition Inf-Sup est satisfaite :

**Lemme 4.2.1** *Pour tout  $(q, \boldsymbol{\mu}) \in M$ , il existe une constante  $\beta > 0$  telle que :*

$$\sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b_1(\mathbf{v}, (q, \boldsymbol{\mu}))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \beta (\|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)}). \quad (4.2)$$

**Remarque 4.2.1** *un résultat similaire au Lemme 4.2.1, a été démontré dans [63]. On présente dans ce qui suit, une autre méthode pour montrer la condition Inf-Sup (4.2).*

**Preuve.** Pour montrer le Lemme 4.2.1, on a besoin de prouver l'existence des conditions Inf-Sup suivantes :

(i)

$$\exists \gamma > 0 ; \sup_{\mathbf{v} \in V^1} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \gamma \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Où  $V^1 = \{v \in V ; \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda\}$ .

(ii)

$$\exists \tilde{\gamma} > 0 ; \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \tilde{\gamma} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda.$$

— On sait qu'il existe  $\gamma > 0$  vérifiant

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \gamma \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega),$$

ceci provient de la surjectivité de l'application "div" définie de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  dans  $L_0^2(\Omega)$ , d'où (i).

— Afin de montrer la condition (ii), on définit l'opérateur  $h$  de Riesz :

$$h : \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma).$$

Pour  $h^{-1}(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$  et d'après la surjectivité de l'application trace définie de  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$  dans  $V$  (voir [72]), il existe  $\mathbf{u}$  dans  $V$  vérifiant

$$\mathbf{u}|_\Gamma = h^{-1}(\boldsymbol{\mu}), \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|h^{-1}(\boldsymbol{\mu})\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} &\geq \frac{\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\
&\geq \frac{\langle \boldsymbol{\mu}, h^{-1}(\boldsymbol{\mu}) \rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\
&= \frac{\langle h^{-1}(\boldsymbol{\mu}), h^{-1}(\boldsymbol{\mu}) \rangle_{1/2, \Gamma}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\
&\geq \frac{\|h^{-1}(\boldsymbol{\mu})\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)}^2}{C \|h^{-1}(\boldsymbol{\mu})\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)}} \\
&= \frac{1}{C} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

À partir de (i) et (ii), on en déduit alors d'après [65], la condition Inf-Sup (4.2).  $\square$

## 4.3 Approximation par éléments finis et estimations d'erreur

Dans cette partie, on s'intéresse à l'approximation par la méthode des éléments finis du problème  $(PV'_0)$ . On commence par introduire sa discrétisation pour démontrer par la suite l'existence d'une solution unique du problème discret. Ensuite, on donne une estimation d'erreur a priori correspondante.

### 4.3.1 Approximation par éléments finis

#### 4.3.1.1 Problème discret

Le domaine  $\Omega$  est supposé polygonal, partitionné en un nombre fini de triangles. Pour tout paramètre de discrétisation  $h > 0$ , on considère une triangulation régulière  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ , constituée d'éléments triangulaires, telle que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K,$$

et qui satisfait les hypothèses suivantes :

$$\forall K, K' \in \mathcal{T}_h, \quad K \cap K' = \begin{cases} \text{soit } \emptyset \\ \text{soit un sommet commun} \\ \text{soit un coté commun} \end{cases}$$

Le paramètre  $h$  désigne dans ce cas la taille du maillage, et il est défini de la manière suivante :

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$$

où  $h_K$  est le diamètre du plus petit cercle contenant l'élément  $K$ .

La partie du bord  $\Gamma$  hérite d'une triangulation régulière  $\mathcal{T}_{h|\Gamma}$  définie par la subdivision  $(x_i)_{0 < i < I}$  et dont les  $(e_i = ]x_i, x_{i+1}[)_{0 < i < I}$  sont ses éléments. On suppose aussi que le maillage est construit de sorte que les points extrêmes de  $\Gamma$  soient des sommets communs de la triangulation.

On introduit les espaces d'approximation suivants

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) ; v_{h|K} \in \mathbb{P}_1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{h|\Gamma_D} = 0\},$$

où  $\mathbb{P}_1(K)$  est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 1 sur  $K$ .

Soit  $\mathbb{B}$  l'espace

$$\mathbb{B} = \bigoplus_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{B}_K,$$

avec  $\mathbf{B}_K$  l'espace des fonctions bulles<sup>1</sup> définies sur le triangle  $K$ .

Pour approximer  $V$ , on définit :

$$\mathbf{V}_h = [V_h + \mathbb{B}]^2.$$

Afin d'exprimer la condition de glissement de type Tresca dans le cas discret sur  $\Gamma$ , on introduit les espaces des multiplicateurs de Lagrange :

$$\mathbf{W}_h = W_h \times W_h,$$

avec

$$W_h = \{\mu_h \in C^0(\bar{\Gamma}) ; \mu_{h|e} \in \mathbb{P}_1(e) \forall e \in \mathcal{T}_{h|\Gamma}\}.$$

L'espace des fonctions de type éléments finis utilisé sur  $\Omega$  pour approcher la pression est donné par :

$$\mathbb{L}_h = \{q_h \in C^0(\bar{\Omega}) ; q_{h|K} \in \mathbb{P}_1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\} \cap L_0^2(\Omega).$$

On vérifie que

$$W_h = \{v_{h|\Gamma} ; v_h \in V_h\}.$$

---

1. Une fonction bulle est une fonction continue sur  $\bar{K}$ . Elle est définie sur  $K$  en fonction de ses coordonnées barycentriques et vaut 0 sur  $\partial K$  (le bord de  $K$ ).

On note :

$$Q_h = \{\mu_h \in W_h, \int_{\Gamma} \mu_h \psi_h - \int_{\Gamma} g |\psi_h| \leq 0 \forall \psi_h \in W_h\},$$

$$M_h = \mathbb{L}_h \times W_h \times Q_h.$$

Le problème variationnel discret associé à la formulation variationnelle  $(PV'_0)$  s'écrit :

$$(PV'_0)_h \begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{w}_h, (q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h})) \in \mathbf{V}_h \times M_h \text{ tel que} \\ a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) + b_1(\mathbf{v}_h, (q_h, \boldsymbol{\lambda}_h)) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b_1(\mathbf{w}_h, (p_h - q_h, \boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\lambda}_h)) \leq 0 \forall (p_h, \boldsymbol{\mu}_h) \in M_h. \end{cases}$$

Où  $b_1(\mathbf{w}_h, (q_h, \boldsymbol{\mu}_h)) = b(q_h, \mathbf{w}_h) + \langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{w}_h \rangle$ .

On présente maintenant, quelques résultats d'approximation de l'opérateur d'interpolation de Lagrange et de l'opérateur de projection (au sens de  $L^2(\Gamma)$ ) entre les espaces continus et les espaces discrets, ces résultats vont être utilisés par la suite dans le calcul des estimations d'erreur.

Si  $I_h$  et  $i_h$  désignent respectivement les opérateurs d'interpolation de Lagrange sur  $\mathbf{V}_h$  et  $W_h$  :

$$I_h : C^0(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbf{V}_h, \quad i_h : C^0(\overline{\Gamma}) \rightarrow W_h,$$

alors les estimations d'erreur suivantes sont vérifiées (voir par exemple [19]).

Il existe une constante  $C > 0$  qui ne dépend pas de  $h$ , telle que pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$  et pour tout  $\psi \in H^{3/2}(\Gamma)$ , on a :

$$\|\mathbf{v} - I_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq Ch \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}. \quad (4.3)$$

$$\|\psi - i_h \psi\|_{L^2(\Gamma)} \leq Ch^{3/2} \|\psi\|_{H^{3/2}(\Gamma)}. \quad (4.4)$$

Ensuite, soit  $\Pi_h$  l'opérateur de projection de  $L^2(\Omega)$  sur  $\mathbb{L}_h$  :

$$\Pi_h q \in \mathbb{L}_h, \text{ et } \int_{\Omega} (q - \Pi_h q) q_h = 0 \quad \forall q_h \in \mathbb{L}_h \quad (4.5)$$

alors, il existe une constante  $C$  (indépendante de  $h$ ) telle que

$$\|q - \Pi_h q\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|q\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall q \in H^1(\Omega). \quad (4.6)$$

On introduit maintenant l'opérateur de projection  $\pi_h$  de  $L^2(\Gamma)$  dans  $W_h$  :

$$\forall \mu \in L^2(\Gamma) \quad \pi_h \mu \in W_h$$

$$\int_{\Gamma} (\mu - \pi_h \mu) \mu_h = 0 \quad \forall \mu_h \in W_h. \quad (4.7)$$

L'opérateur de projection  $\pi_h$  vérifie l'estimation suivante [72] :

Il existe une constante indépendante de  $h$  telle que pour tout  $v \in H^{\eta+\frac{1}{2}}(\Gamma)$  avec  $\eta \in [0, 1]$  et pour tout  $\nu \leq \frac{1}{2}$ , on a :

$$\|v - \pi_h v\|_{H^\nu(\Gamma)} \leq Ch^{\eta+\frac{1}{2}-\nu} \|v\|_{H^{\eta+\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (4.8)$$

On définit  $\tilde{\pi}_h$  de  $\mathbf{L}^2(\Gamma)$  dans  $\mathbf{W}_h$  par

$$\tilde{\pi}_h = \pi_h \times \pi_h.$$

Soit  $L_h$  l'opérateur de relèvement discret défini de  $\mathbf{W}_h$  dans  $V_h \times V_h$  vérifiant les propriétés suivantes (voir [11, Théorème 5.1])

- $L_h(\mathbf{v}_h)|_{\Gamma} = \mathbf{v}_h$ ,
- il existe une constante  $C$  (indépendante de  $h$ ) telle que

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h, \quad \|L_h(\mathbf{v}_h)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \quad (4.9)$$

Enfin, si  $(\mathbf{w}, (q, \lambda_n, \lambda_t))$  est la solution du  $(PV'_0)$  telle que  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$  et  $q \in H^1(\Omega)$  alors on a

$$\|\lambda_t\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}, \quad (4.10)$$

$$\|\lambda_n\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C (\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \|q\|_{H^1(\Omega)}). \quad (4.11)$$

#### 4.3.1.2 Existence : Condition Inf-Sup discrète

Pour montrer que le problème  $(PV'_0)_h$  est bien posé, on montre le lemme suivant :

**Lemme 4.3.1** *Pour tout  $(q_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \in M_h$ , il existe une constante  $\beta > 0$  qui ne dépend pas de  $h$ , telle que*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_1(\mathbf{v}_h, (q_h, \boldsymbol{\lambda}_h))}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \beta (\|q_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}). \quad (4.12)$$



**Preuve.**

D'une part, on vérifie qu'il existe une constante  $\beta_1 > 0$  telle que

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h^1} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \beta_1 \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q_h \in \mathbb{L}_h \quad (4.13)$$

où

$$V_h^1 = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h ; \langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{W}_h\},$$

on note que  $\{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h ; \mathbf{v}_h|_\Gamma = 0\} \subset V_h^1$  et à partir de la condition Inf-Sup discrète du problème de Stokes classique (voir par exemple [53],[37]), on en déduit (4.13).

D'autre part, on montre qu'il existe une constante  $\beta_2 > 0$  telle que

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h \times V_h} \frac{\langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h \rangle}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \beta_2 \|\boldsymbol{\mu}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall \boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{W}_h \quad (4.14)$$

En effet, soit  $\boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{W}_h$ , il existe un  $\psi \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ ;  $\|\psi\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} = 1$ , vérifiant

$$(\boldsymbol{\mu}_h, \psi)_\Gamma = (\boldsymbol{\mu}_h, \tilde{\pi}_h \psi)_\Gamma = \|\boldsymbol{\mu}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Pour  $\tilde{\pi}_h \psi$ , on définit un élément  $\mathbf{u}_h$  dans  $V_h \times V_h$  tel que

$$\mathbf{u}_h = L_h(\tilde{\pi}_h \psi),$$

où  $L_h$  est l'opérateur de relèvement discret (4.9), de plus  $\mathbf{u}_h$  satisfait

$$\mathbf{u}_h|_\Gamma = \tilde{\pi}_h \psi, \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|\tilde{\pi}_h \psi\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \leq C \|\psi\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}.$$

On obtient ainsi la condition Inf-Sup suivante

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h \times V_h} \frac{\langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h \rangle}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} &\geq \frac{\langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{u}_h \rangle}{\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &\geq \frac{1}{C} \langle \boldsymbol{\mu}_h, \tilde{\pi}_h \psi \rangle \\ &= \frac{1}{C} \|\boldsymbol{\mu}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

Comme  $V_h \times V_h \subset \mathbf{V}_h$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{\langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h \rangle}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} &\geq \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h \times V_h} \frac{\langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h \rangle}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &\geq \frac{1}{C} \|\boldsymbol{\mu}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Les conditions Inf-Sup discrètes (4.13) et (4.14) sont satisfaites, d'après ([65]), on a (4.12).

□

### 4.3.2 Estimation d'erreur

Dans cette partie, notre objectif est d'établir une estimation d'erreur optimale et de montrer que son ordre de convergence est égale à 1 lorsque la fonction seuil  $g$  est dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Un travail similaire a été fait dans [6], les auteurs ont montré une estimation d'erreur d'ordre 3/4 en travaillant avec une formulation variationnelle mixte à trois champs et en supposant que la donnée  $g$  est seulement dans  $L^2(\Gamma)$ .

On commence par introduire un outil de base de cette étude.

**Lemme 4.3.2** *Soient  $(\mathbf{w}, q, (\lambda_n, \lambda_t))$  et  $(\mathbf{w}_h, q_h, (\lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}))$  solutions de  $(PV'_0)$  et de  $(PV'_0)_h$ . Alors pour tout  $(\mathbf{v}_h, p_h, (\mu_{n,h}, \mu_{t,h})) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ , on a :*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{w} - \mathbf{w}_h) &\leq a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{w} - \mathbf{v}_h) + b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}), \mathbf{w}_h - \mathbf{w}) \\ &\quad + b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}), \mathbf{w} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}), \mathbf{w}) \\ &\quad + b_1((q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}) - (q, \lambda_n, \lambda_t), \mathbf{w}) \end{aligned}$$

**Preuve.**

Soit  $\mathbf{v}_h$  un élément de  $\mathbf{V}_h$ , on a :

$$a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{w} - \mathbf{w}_h) = a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{w} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h).$$

En faisant la soustraction entre les premières équations du  $(PV'_0)$  et de  $(PV'_0)_h$ , on obtient

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h) &= a(\mathbf{w}, \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h) - a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h), \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h) - b_1((q, \lambda_n, \lambda_t), \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h) - (f, \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h) \\ &\quad + b_1((q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}), \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h) \\ &= b_1((q, \lambda_n, \lambda_t), \mathbf{w}_h - \mathbf{v}_h) + b_1((q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}), \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h). \end{aligned}$$

On en déduit ainsi

$$a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{w} - \mathbf{w}_h) = a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{w} - \mathbf{v}_h) + b_1((q, \lambda_n, \lambda_t), \mathbf{w}_h - \mathbf{v}_h) + b_1((q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}), \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h).$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{w} - \mathbf{w}_h) &= a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{w} - \mathbf{v}_h) + b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}), \mathbf{w}_h - \mathbf{w}) \\ &\quad + b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}), \mathbf{w} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}), \mathbf{w}) \\ &\quad + b_1((q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}) - (q, \lambda_n, \lambda_t), \mathbf{w}) \\ &\quad + b_1((p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}) - (q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}), \mathbf{w}_h). \end{aligned}$$

D'après  $(PV'_0)_h$ , on a

$$b_1((p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}) - (q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}), \mathbf{w}_h) \leq 0, \quad \forall (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}) \in M_h,$$

d'où l'estimation voulue. □

Dans le lemme suivant, on établit une relation entre l'estimation d'erreur de la vitesse et l'estimation d'erreur des multiplicateurs  $q$  et  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_n, \lambda_t)$ .

**Lemme 4.3.3** *Soient  $(\mathbf{w}, (q, \lambda_n, \lambda_t))$  et  $(\mathbf{w}_h, (q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}))$  les solutions de  $(PV'_0)$  et de  $(PV'_0)_h$ , on suppose que  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $q \in H^1(\Omega)$  et  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Alors*

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq C (h^2 + h\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} + h\|q - q_h\|_{L^2(\Gamma)}),$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}$ ,  $\|q\|_{H^1(\Omega)}$  et  $\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ .

**Preuve.**

On montre qu'il existe  $(\mathbf{v}_h, (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h})) \in V_h \times M_h$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{w} - \mathbf{v}_h) \leq C(u)h\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}), \mathbf{w}_h - \mathbf{w}) \leq C(\mathbf{w})h\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ b_1((q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}) - (q, \lambda_n, \lambda_t), \mathbf{w} - \mathbf{v}_h) \leq Ch(\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C(q)h + C(\mathbf{w})h) \\ b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}), \mathbf{w}) \leq C(\mathbf{w})h^2 \\ b_1((q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}) - (q, \lambda_n, \lambda_t), \mathbf{w}) \leq C(\mathbf{w})(h\|\lambda_t - \lambda_{t,h}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + C(\mathbf{w})h^2 + C(g)h^2) \end{array} \right.$$

En effet, en prenant  $\mathbf{v}_h = I_h \mathbf{w}$ ,  $p_h = \Pi_h q$ ,  $\boldsymbol{\mu}_h = (\mu_{n,h}, \mu_{t,h}) = \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda} = (\pi_h \lambda_n, \pi_h \lambda_t)$ .

i) La première inégalité est obtenue en utilisant la continuité de la forme bilinéaire  $a(., .)$ , la construction de  $\mathbf{v}_h$  et la propriété (4.3) de l'opérateur  $I_h$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{w} - \mathbf{v}_h) &\leq C\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\mathbf{w} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &\leq C(\mathbf{w})h\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

ii) Les estimations (4.6), (4.8), (4.10) et (4.11) impliquent

$$\begin{aligned}
b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}), \mathbf{w}_h - \mathbf{w}) &= -(q - p_h, \operatorname{div}(\mathbf{w}_h - \mathbf{w})) + \langle \lambda_n - \mu_{n,h}, \mathbf{w}_{n,h} - \mathbf{w}_n \rangle \\
&\quad + \langle \lambda_t - \mu_{t,h}, \mathbf{w}_{t,h} - \mathbf{w}_t \rangle \\
&\leq C[\|q - p_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda_n - \mu_{n,h}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\quad + \|\lambda_t - \mu_{t,h}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}] \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&\leq C(\mathbf{w}, q)h \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

iii) La troisième inégalité est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned}
b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}), \mathbf{w} - \mathbf{v}_h) &= -(q - q_h, \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{v}_h)) + \langle \lambda_n - \lambda_{n,h}, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}_{n,h} \rangle \\
&\quad + \langle \lambda_t - \lambda_{t,h}, \mathbf{w}_t - \mathbf{v}_{t,h} \rangle, \\
&\leq C[\|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda_n - \lambda_{n,h}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\quad + \|\lambda_t - \lambda_{t,h}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}] \|\mathbf{w} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\
&\leq Ch[\|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda_n - \lambda_{n,h}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\quad + \|\lambda_t - \lambda_{t,h}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}]
\end{aligned}$$

iv) Afin d'estimer le terme  $b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}), \mathbf{w})$ , on utilise la définition (4.7) de l'opérateur de projection  $\pi_h$  et l'estimation (4.10) :

$$\begin{aligned}
b_1((q, \lambda_n, \lambda_t) - (p_h, \mu_{n,h}, \mu_{t,h}), \mathbf{w}) &= \int_{\Gamma} (\lambda_t - \mu_{t,h}) w_t \, d\Gamma, \quad \forall \mu_{t,h} \in W_h, \\
&= \int_{\Gamma} (\lambda_t - \pi_h \lambda_t) w_t \, d\Gamma, \\
&= \int_{\Gamma} (\lambda_t - \pi_h \lambda_t) w_t \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\lambda_t - \pi_h \lambda_t) \pi_h w_t \, d\Gamma, \\
&= \int_{\Gamma} (\lambda_t - \pi_h \lambda_t) (w_t - \pi_h w_t) \, d\Gamma, \\
&\leq \|\lambda_t - \pi_h \lambda_t\|_{L^2(\Gamma)} \|w_t - \pi_h w_t\|_{L^2(\Gamma)}, \\
&\leq C(\mathbf{w})h^2.
\end{aligned}$$

v) Pour la dernière estimation, on note que pour  $\lambda_{t,h} \in Q_h$ , on a

$$\int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} \pi_h w_t - g |\pi_h w_t|) \, d\Gamma \leq 0 \tag{4.15}$$

et

$$\lambda_t w_t - g |w_t| = 0 \quad \text{pp sur } \Gamma. \tag{4.16}$$

On a

$$\begin{aligned}
b_1((q_h, \boldsymbol{\lambda}_h) - (q, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{w}) &= b(q_h - q, \mathbf{w}) + \langle \lambda_n - \lambda_{n,h}, w_n \rangle + (\lambda_t - \lambda_{t,h}, w_t)_{\Gamma} \\
&= \int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} - \lambda_t) w_t \, d\Gamma,
\end{aligned}$$

où  $b(q_h - q, \mathbf{w}) + \langle \lambda_n - \lambda_{n,h}, w_n \rangle = 0$  puisque  $q_h - q \in L_0^2(\Omega)$  et  $\lambda_n - \lambda_{n,h} \in H_*^{-1/2}(\Gamma)$ .

La suite de la démonstration reprend le cheminement de la preuve présentée dans [6] en faisant intervenir l'opérateur de projection  $\pi_h$  au lieu de l'opérateur d'interpolation de Lagrange  $i_h$ . Ceci nous permet d'améliorer l'estimation trouvée dans [6].

$$\begin{aligned}
b_1((q_h, \boldsymbol{\lambda}_h) - (q, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{w}) &= \int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} - \lambda_t)(w_t - \pi_h w_t + \pi_h w_t) \, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} - \lambda_t)(w_t - \pi_h w_t) \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} - \lambda_t) \pi_h w_t \, d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma} (\lambda_t w_t - g|w_t|) \, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} - \lambda_t)(w_t - \pi_h w_t) \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} \pi_h w_t - g|w_t|) \, d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma} (\lambda_t (w_t - \pi_h w_t)) \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

- On commence par estimer le terme  $\int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} - \lambda_t)(w_t - \pi_h w_t) \, d\Gamma$  :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} - \lambda_t)(w_t - \pi_h w_t) \, d\Gamma &= \langle \lambda_{t,h} - \lambda_t, w_t - \pi_h w_t \rangle \\
&\leq \| \lambda_{t,h} - \lambda_t \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \| w_t - \pi_h w_t \|_{H^{1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

D'après la propriété (4.8) :

$$\| w_t - \pi_h w_t \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq Ch \| \mathbf{w} \|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}.$$

On a donc :

$$\int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} - \lambda_t)(w_t - \pi_h w_t) \, d\Gamma \leq C(w)h \| \lambda_{t,h} - \lambda_t \|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

- On a

$$\int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} \pi_h w_t - g|w_t|) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} \pi_h w_t - g|\pi_h w_t| + g|\pi_h w_t| - g|w_t|) \, d\Gamma.$$

D'après (4.15) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} \pi_h w_t - g|w_t|) \, d\Gamma &\leq \int_{\Gamma} g(|\pi_h w_t| - |w_t|) \, d\Gamma \\
&\leq \int_{\Gamma} g|\pi_h w_t - w_t| \, d\Gamma
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} \pi_h w_t - g|w_t|) \, d\Gamma \leq \|\pi_h w_t - w_t\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

D'après la propriété (4.8) on obtient

$$\|\pi_h w_t - w_t\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq Ch^2 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}.$$

Donc

$$\int_{\Gamma} (\lambda_{t,h} \pi_h w_t - g|w_t|) \, d\Gamma \leq Ch^2 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

- Estimons maintenant  $\int_{\Gamma} \lambda_t (w_t - \pi_h w_t) \, d\Gamma$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \lambda_t (w_t - \pi_h w_t) \, d\Gamma &= \langle w_t - \pi_h w_t, \lambda_t \rangle \\ &\leq \|w_t - \pi_h w_t\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\lambda_t\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

en utilisant de nouveau les estimations (4.8) et (4.10), on obtient

$$\int_{\Gamma} \lambda_t (w_t - \pi_h w_t) \, d\Gamma \leq Ch^2 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} b^1((q_h, \lambda_{n,h}, \lambda_{t,h}) - (q, \lambda_n, \lambda_t), \mathbf{w}) &\leq C(\mathbf{w})h \|\lambda_t - \lambda_{h,t}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + C(\mathbf{w})h^2 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + C(\mathbf{w})h^2 \\ &\leq C_1 [h \|\lambda_t - \lambda_{t,h}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + h^2], \end{aligned}$$

où  $C_1$  est une constante qui dépend uniquement de  $\mathbf{w}$  et de  $g$ .

En regroupant les estimations précédentes et d'après la  $V$ -ellipticité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ , on trouve

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq C (h \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} + h \|q - q_h\|_{L^2(\Gamma)} + h \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}) + Ch^2.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient pour tout  $A > 0$

$$Ch \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \left( Ah^2 + \frac{1}{A} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right).$$

Le choix de  $A$  tel que  $\frac{C}{A} < 1$  nous amène à l'estimation voulue.

□

Dans les deux lemmes suivants, on établit des estimations d'erreur commises par la pression et par les deux multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$  en fonction de  $h$  et de l'erreur d'approximation de la vitesse.

**Lemme 4.3.4** Soient  $(\mathbf{w}, (q, \boldsymbol{\lambda}))$  et  $(\mathbf{w}_h, (q_h, \boldsymbol{\lambda}_h))$  les solutions de  $(PV'_0)$  et de  $(PV'_0)_h$ , on suppose que  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $q \in H^1(\Omega)$  et  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Alors

$$\|q_h - q\|_{L^2(\Omega)} \leq C[h + \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}]. \quad (4.17)$$

**Preuve.**

Comme  $(\mathbf{w}, (q, \boldsymbol{\lambda}))$  et  $(\mathbf{w}_h, (q_h, \boldsymbol{\lambda}_h))$  sont solutions de  $(PV'_0)$  et de  $(PV'_0)_h$ , alors pour tout  $v_h \in \mathbf{V}_h$ , on a :

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}_h) - (q, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) + \langle \lambda_n, v_{n,h} \rangle + (\lambda_t, v_{t,h}) = 0$$

$$a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) - (q_h, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) + \langle \lambda_{n,h}, v_{n,h} \rangle + (\lambda_{t,h}, v_{t,h})_\Gamma = 0$$

En faisant la soustraction des deux équations, on obtient :  $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ ,

$$a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) - (q - q_h, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) + \langle \lambda_n - \lambda_{n,h}, v_{n,h} \rangle + (\lambda_t - \lambda_{t,h}, v_{t,h})_\Gamma = 0. \quad (4.18)$$

Si on choisit  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^0 = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h ; \mathbf{v}_h|_\Gamma = 0\}$  alors (4.18) devient

$$a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) - (q - q_h, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^0 \quad (4.19)$$

Ensuite, on introduit  $\Pi_h q$  dans (4.19) :

$$-(\Pi_h q - q_h, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) = -a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) + (q - \Pi_h q, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^0$$

En utilisant (4.6) on obtient ainsi

$$-(\Pi_h q - q_h, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) \leq C\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}(\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^0$$

D'après la condition Inf-sup (4.13), on a :

$$\begin{aligned} \beta\|q_h - \Pi_h q\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^0} \frac{-(\Pi_h q - q_h, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h))}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &\leq C(\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + h). \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire

$$\|q_h - q\|_{L^2(\Omega)} \leq \|q_h - \Pi_h q\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_h q - q\|_{L^2(\Omega)}$$

et l'estimation précédente conduisent à l'estimation (4.17). □

**Lemme 4.3.5** Soient  $(\mathbf{w}, (q, \boldsymbol{\lambda}))$  et  $(\mathbf{w}_h, (q_h, \boldsymbol{\lambda}_h))$  les solutions de  $(PV'_0)$  et de  $(PV'_0)_h$ , on suppose que  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $q \in H^1(\Omega)$  et  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Alors

$$\|\boldsymbol{\lambda}_h - \boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C[h + \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}]$$

**Preuve.**

On a

$$a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) - (q - q_h, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) + \langle \lambda_n - \lambda_{n,h}, v_{n,h} \rangle + (\lambda_t - \lambda_{t,h}, v_{t,h})_\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h,$$

d'où

$$\langle \boldsymbol{\lambda}_h - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h \rangle = a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) - (q - q_h, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (4.20)$$

en ajoutant et en retranchant  $\tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda}$  dans (4.20), il vient que

$$\langle \boldsymbol{\lambda}_h - \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h \rangle = a(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) - (q - q_h, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) - \langle \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

On obtient ainsi pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\lambda}_h - \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h \rangle &\leq C(\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}) \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ , on en déduit l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \frac{\langle \boldsymbol{\lambda}_h - \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h \rangle}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} &\leq C(\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} + h) \\ &\leq C(\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + h). \end{aligned}$$

D'autre part, la condition d'inf-sup discrète (4.14) donne

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{\langle \boldsymbol{\lambda}_h - \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h \rangle}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \beta \|\boldsymbol{\lambda}_h - \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}$$

Ceci conduit à l'estimation suivante :

$$\|\boldsymbol{\lambda}_h - \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C(\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + h). \quad (4.21)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire

$$\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\lambda}_h - \tilde{\pi}_h \boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)},$$

d'après l'estimation (4.21) et la propriété (4.8), on arrive finalement à estimer  $\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}$  :

$$\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C(h + \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}).$$

□

Le résultat du Lemme suivant découle des estimations données dans les Lemmes 4.3.3, 4.3.4 et 4.3.5.



**Lemme 4.3.6** Soient  $(\mathbf{w}, (q, \boldsymbol{\lambda}))$  et  $(\mathbf{w}_h, (q_h, \boldsymbol{\lambda}_h))$  les solutions de  $(PV'_0)$  et de  $(PV'_0)_h$ , on suppose que  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $q \in H^1(\Omega)$  et  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Alors

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq Ch$$

**Preuve.**

D'après les Lemmes 4.3.3, 4.3.4 et 4.3.5 :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 &\leq C(h^2 + h\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} + h\|q - q_h\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq Ch^2 + Ch(h + \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}) \\ &\leq C(h^2 + h\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young : il existe  $A > 0$  tel que

$$h\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq Ah^2 + \frac{1}{A}\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2$$

ce qui nous donne

$$\left(1 - \frac{C}{A}\right)\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq C(1 + A)h^2,$$

on peut trouver un  $A$  tel que  $1 - \frac{C}{A} > 0$  d'où

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C'h.$$

On peut en déduire ainsi les estimations d'erreurs suivantes

$$\|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C'h \quad \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C'h$$

ce qui montre le résultat voulu.

□



# Chapitre 5

## Mise en œuvre et résultats numériques

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>76</b>
<b>5.2</b>	<b>Discrétisation du problème fluide</b>	<b>77</b>
5.2.1	Formulation mixte approchée	77
5.2.2	Forme algébrique	78
5.2.3	Mise sous forme de problème de minimisation	81
5.2.4	Calcul des erreurs et ordre de convergence	82
<b>5.3</b>	<b>Discrétisation du problème de la structure</b>	<b>91</b>
5.3.1	Approximation par éléments finis	92
<b>5.4</b>	<b>Couplage fluide-structure</b>	<b>94</b>
5.4.1	La contrainte fluide	94
5.4.2	Équations de la structure avec contrainte de volume	95
5.4.3	Maillage déformé	97
5.4.4	Algorithme de couplage	97
<b>5.5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>98</b>
5.5.1	Tests numériques du Problème S1	99
5.5.2	Test numérique du Problème S2	104
5.5.3	Test numérique du Problème Leak	107

---

## 5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation d'un algorithme de point fixe pour la résolution numérique d'un problème stationnaire de couplage fluide structure avec des conditions aux limites non linéaires. Nous traitons le **Problème S1**, **Problème S2** et le **Problème Leak** introduits dans le chapitre 1.

Ce chapitre est divisé en quatre sections : dans la première, on présente la mise en œuvre de l'approximation par la méthode des éléments finis de la formulation variationnelle mixte à quatre champs du problème fluide et on évalue l'ordre de convergence obtenu par cette méthode numérique, la seconde partie est consacrée à la discrétisation du problème de la structure. Dans la troisième section, on s'intéresse à la construction d'un algorithme de couplage entre les équations du fluide et celles de la structure, et dans la dernière section, on présente des simulations numériques du problème couplé, d'abord avec la condition de glissement de Tresca, ensuite avec la condition Leak. L'objectif des simulations numériques du **Problème S1** (resp. **Problème S2**) est de chercher l'effet de la condition de glissement sur la déformation du domaine fluide ou encore son effet sur le déplacement de la structure.

On reprend les équations du problème fluide posées dans la configuration déformée  $\tilde{\Omega}(d)$  :

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}_f \text{ dans } \tilde{\Omega}(d), \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}(d), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D(d), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}(d), \quad (5.4)$$

$$|(\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{t}}| \leq \tilde{g}, \quad (\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{t}} (\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{t}}) + \tilde{g} |\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{t}}| = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}(d), \quad (5.5)$$

où  $\mathbf{f}_f$  est le champ de force agissant sur le système et  $\tilde{g}$  est la fonction seuil pour la condition de Tresca.

Dans la condition de Tresca (5.4) et (5.5),  $\tilde{\mathbf{n}}$  et  $\tilde{\mathbf{t}}$  sont respectivement le vecteur normal extérieur et le vecteur tangent à  $\tilde{\Gamma}$ ;  $\sigma_f \tilde{\mathbf{n}}$  est la contrainte normale du fluide exprimée en coordonnées Eulériennes, c.-à-d.  $\sigma_f \tilde{\mathbf{n}} = \nu(\nabla \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{n}} - p \tilde{\mathbf{n}}$ .

Ce problème fluide est couplé avec une structure déformable, modélisée par les équations d'une poutre encastree.

On traite numériquement, dans un premier temps, le modèle de Navier-Bernoulli sui-

vant :

$$\partial_x^4 d_2 = f_s + (T_f(\mathbf{v}, p))_2 \text{ dans } ]0, 1[, \quad (5.6)$$

$$d_2(0) = d_2(1) = 0, \quad \partial_x d_2(0) = \partial_x d_2(1) = 0, \quad (5.7)$$

et dans un second temps, on considère le modèle suivant :

$$\partial_x^2 d_1 = f_s^1 + (T_f(\mathbf{v}, p))_1 \text{ dans } ]0, 1[, \quad (5.8)$$

$$\partial_x^4 d_2 = f_s^2 + (T_f(\mathbf{v}, p))_2 \text{ dans } ]0, 1[, \quad (5.9)$$

$$d(0) = d(1) = 0, \quad \partial_x d_2(0) = \partial_x d_2(1) = 0, \quad (5.10)$$

où  $f_s$ ,  $f_s^1$  et  $f_s^2$  sont les champs de forces extérieurs agissant sur la structure. Finalement,  $(T_f(\mathbf{v}, p))_1$  et  $(T_f(\mathbf{v}, p))_2$  dans (5.8) et dans (5.9) (resp. (5.6)) représentent la première et la deuxième composante de la contrainte exercée par le fluide sur le matériau élastique exprimée en coordonnées Lagrangiennes.

## 5.2 Discrétisation du problème fluide

Dans cette section, on s'intéresse à la partie fluide du problème. On suppose pour l'instant que le domaine fluide est connu :  $\Omega = ]0, 1[^2$ .

### 5.2.1 Formulation mixte approchée

Pour tout paramètre de discrétisation  $h > 0$ , on considère une triangulation régulière  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ , constituée d'éléments triangulaires. Le paramètre  $h$  désigne dans ce cas la taille du maillage.

On rappelle les espaces d'approximations suivants :

— Soit  $\mathbb{B}$  l'espace défini par

$$\mathbb{B} = \bigoplus_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{B}_K,$$

avec  $\mathbf{B}_K$  l'espace des fonctions bulles.

—  $\mathbf{V}_h = [V_h + \mathbb{B}]^2$ ,

où  $V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) ; v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_{\Gamma_D} = 0\}$ .

—  $W_h = \{\mu_h \in C^0(\overline{\Gamma}) ; \mu_h|_e \in \mathbb{P}_1(e) \forall e \in \mathcal{T}_h|_{\overline{\Gamma}}\}$ ,

où  $\mathcal{T}_h|_{\overline{\Gamma}}$  est définie par la subdivision  $(x_i)_{0 < i < I}$  et dont les  $(e_i = ]x_i, x_{i+1}[)_{0 < i < I}$  sont ses éléments.

—  $\mathbb{L}_h = \{q_h \in C^0(\overline{\Omega}) ; q_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\} \cap L_0^2(\Omega)$ .

$$— Q_h = \{\mu_h \in W_h ; |\mu_h| \leq g\}.$$

La formulation variationnelle mixte approchée du problème fluide posé dans  $\Omega$  est donnée par :

$$(PV_0)_h \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h, (\lambda_{n,h}, \lambda_{t,h})) \in \mathbf{V}_h \times \mathbb{L}_h \times (W_h \times Q_h) \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b^1((p_h, \lambda_{n,h}), \mathbf{v}_h) + (\lambda_{t,h}, v_{t,h})_\Gamma = (\mathbf{f}_f, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b^1((q_h, \mu_{n,h}), \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall (q_h, \mu_{n,h}) \in M_0^h \\ (\mu_{t,h} - \lambda_{t,h}, u_{t,h})_\Gamma \leq 0 \quad \forall \mu_{t,h} \in W_h \end{array} \right.$$

avec

$$b^1((q_h, \mu_{n,h}), \mathbf{v}_h) = -(\operatorname{div}(\mathbf{v}_h), q_h) + (\mu_{n,h}, v_{n,h})_\Gamma,$$

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h.$$

**Remarque 5.2.1** *La formulation mixte approchée  $(PV_0)_h$  est équivalente à la formulation  $(PV'_0)_h$  présentée dans le troisième chapitre et dont on a montré qu'elle satisfait la condition Inf-Sup discrète.*

## 5.2.2 Forme algébrique

Pour chaque  $T \in \mathcal{T}_h$ , on définit la fonction bulle associée  $\varphi_T$  par

$$\varphi_T = \prod_{i=1}^3 \lambda_i(x) \quad \forall x \in T,$$

où  $\lambda_i$  désigne la  $i$ -ème coordonnée barycentrique dans  $T$ .

— Soit  $\{(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N_s}, (\varphi_{T_i})_{1 \leq i \leq N_t}\}$  les fonctions de base de l'espace discret  $[V_h + \mathbb{B}]$ , avec  $N_s$  est le nombre de sommets de la triangulation et  $N_t$  est le nombre de triangles de  $\mathcal{T}_h$ .

La base de  $\mathbf{V}_h$  est alors donnée par

$$\{(\lambda_i, 0)_{1 \leq i \leq N_s}, (\varphi_{T_i}, 0)_{1 \leq i \leq N_t}, (0, \lambda_i)_{1 \leq i \leq N_s}, (0, \varphi_{T_i})_{1 \leq i \leq N_t}\}.$$

Dans cette base, chaque composante du vecteur  $\mathbf{u}_h = (u_h^1, u_h^2)^T \in \mathbf{V}_h$  se décompose de manière unique sous la forme

$$u_h^i = \sum_{k=1}^{N_s} u_h^i(x_k) \lambda_k + \sum_{k=1}^{N_t} u_{h|T_k}^i \varphi_{T_k}, \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

— La base de  $\mathbb{L}_h$  est donnée par  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N_s}$ .

Pour chaque élément  $p_h \in \mathbb{L}_h$ , on a la décomposition suivante

$$p_h = \sum_{k=1}^{N_s} p_h(x_k) \lambda_k.$$

— La base de  $W_h$  est constituée par une famille de fonctions polynomiales par morceaux de degré 1 sur chaque élément  $e_i = ]x_i, x_{i+1}[$  et qu'on définit par :

$$\widehat{\varphi}_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

Chaque élément  $\lambda_h$  de  $W_h$  s'écrit alors d'une façon unique :

$$\lambda_h = \sum_{i=1}^{N_\Gamma} \lambda_h(x_i) \widehat{\varphi}_i,$$

où  $N_\Gamma$  désigne le nombre des noeuds sur le bord  $\Gamma$ .

Pour simplifier les termes apparaissant dans la projection de Galerkin, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} u_k^i &:= u_h^i(x_k), \quad \forall k \in \{1, \dots, N_s\}, \\ \beta_k^i &:= u_{h|T_k}^i, \quad \forall k \in \{1, \dots, N_t\}, \\ p_k &:= p_h(x_k) \quad \forall k \in \{1, \dots, N_s\}, \\ \lambda_{n,k} &:= \lambda_{n,h}(x_k) \quad \text{et} \quad \lambda_{t,k} := \lambda_{t,h}(x_k) \quad \forall k \in \{1, \dots, N_\Gamma\}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \tilde{p}, \lambda_t) \text{ tel que} \\ A\mathbf{u} + \begin{bmatrix} \tilde{B} & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \lambda_t \end{pmatrix} = F \\ \begin{pmatrix} q - \tilde{p} \\ \mu - \lambda_t \end{pmatrix}^t \begin{bmatrix} \tilde{B}^t \\ C^t \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq 0 \quad \forall (q, \mu) \in \mathbb{R}^{N_s + N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N_\Gamma}; \quad |\mu| \leq g. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

où  $\tilde{B}$  est une matrice par bloc définie par  $\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & D \end{bmatrix}$ , et le vecteur  $\tilde{p}$  est constitué par  $\tilde{p} = (p, \lambda_n)$ .

Les inconnues  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$ , présentées dans le système (5.11), sont définies comme suit :

$$\mathbf{u} = (u^1, u^2)^T$$

avec  $u^i = (u_1^i, \dots, u_{N_s}^i, \beta_1^i, \dots, \beta_{N_t}^i)^T \in \mathbb{R}^{N_s+N_t}$ , pour  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} p &= (p_1, \dots, p_{N_s})^T \in \mathbb{R}^{N_s}, \\ \lambda_n &= (\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,N_\Gamma})^T \in \mathbb{R}^{N_\Gamma}, \\ \lambda_t &= (\lambda_{t,1}, \dots, \lambda_{t,N_\Gamma})^T \in \mathbb{R}^{N_\Gamma}. \end{aligned}$$

Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $F$  sont définies de la façon suivante :

— La matrice  $A$  est la matrice associée à la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  :

$$A \in \mathcal{M}_{2(N_s+N_t) \times 2(N_s+N_t)} \text{ telle que } A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } A_i = \begin{pmatrix} (\int_{\Omega} \nabla \lambda_k \nabla \lambda_j)_{1 \leq k, j \leq N_s} & (\int_{\Omega} \nabla \varphi_{T_k} \nabla \lambda_j)_{1 \leq k \leq N_t, 1 \leq j \leq N_s} \\ (\int_{\Omega} \nabla \lambda_k \nabla \mu_j)_{1 \leq k \leq N_s, 1 \leq j \leq N_t} & (\int_{\Omega} \nabla \varphi_{T_k} \nabla \mu_j)_{1 \leq k, j \leq N_t} \end{pmatrix}$$

— La matrice  $B$  est la matrice associée à la forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  :

$$B \in \mathcal{M}_{2(N_s+N_t) \times N_s}, \text{ telle que } B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } B_i = \begin{pmatrix} (\int_{\Omega} \partial_{x_i} \lambda_k \lambda_j)_{1 \leq k, j \leq N_s} \\ (\int_{\Omega} \partial_{x_i} \varphi_{T_k} \lambda_j)_{1 \leq k \leq N_t, 1 \leq j \leq N_s} \end{pmatrix}.$$

— La matrice  $C$  est la matrice associée à  $\int_{\Gamma} \lambda_t v_t$ , et la matrice  $D$ , est celle associée à  $\int_{\Gamma} \lambda_n v_n$  :

$$D, C \in \mathcal{M}_{N_\Gamma \times 2(N_s+N_t)}, \text{ telles que } C = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } D = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & 0 & D_2 & 0 \end{pmatrix},$$

où pour  $i = 1, 2$ , on a :

$$C_i, D_i \in \mathcal{M}_{N_\Gamma \times N_\Gamma}, \text{ telles que } (C_i)_{k,j} = \int_{\sup(\hat{\varphi}_k) \cap \sup(\hat{\varphi}_j)} \hat{\varphi}_k \hat{\varphi}_j t_i,$$

$$\text{et } (D_i)_{k,j} = \int_{\sup(\hat{\varphi}_k) \cap \sup(\hat{\varphi}_j)} \hat{\varphi}_k \hat{\varphi}_j n_i, \text{ pour } 1 \leq k, j \leq N_\Gamma.$$



$$F \in \mathbb{R}^{2(N_s+N_t)}, F_i = \int_{\Omega} \mathbf{f}_f \varphi$$

pour  $\varphi \in \{(\lambda_i, 0)_{1 \leq i \leq N_s}, (\varphi_{T_i}, 0)_{1 \leq i \leq N_t}, (0, \lambda_i)_{1 \leq i \leq N_s}, (0, \varphi_{T_i})_{1 \leq i \leq N_t}\}$ .

### 5.2.3 Mise sous forme de problème de minimisation

Comme la matrice  $A$  est inversible, on peut alors exprimer  $\mathbf{u}$  en fonction des inconnues  $\tilde{p}$  et  $\lambda_t$ . À partir de la première ligne du système linéaire (5.11)<sub>1</sub>, on obtient la relation suivante :

$$\mathbf{u} = A^{-1} \left( F - \begin{bmatrix} \tilde{B} & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \lambda_t \end{pmatrix} \right), \quad (5.12)$$

dans (5.11)<sub>2</sub>, on injecte l'expression de  $\mathbf{u}$  donnée dans (5.12) et on obtient l'inégalité suivante : pour tout  $(q, \mu) \in \mathbb{R}^{N_s+N_\Gamma} \times \mathbb{R}^{N_\Gamma}$ ;  $|\mu| \leq g$  on a

$$\begin{pmatrix} q - \tilde{p} \\ \mu - \lambda_t \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \tilde{B}^t \\ C^t \end{pmatrix} \left( F - \begin{bmatrix} \tilde{B} & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \lambda_t \end{pmatrix} \right) \leq 0 \quad (5.13)$$

Soit  $J$  la fonctionnelle définie sur un convexe fermé  $K_h$  de  $\mathbb{R}^{2N_\Gamma+N_s}$  par :

$$J(\pi) = \frac{1}{2} \pi^t \begin{pmatrix} \tilde{B}^t \\ C^t \end{pmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B} & C \end{bmatrix} \pi - \begin{pmatrix} \tilde{B}^t \\ C^t \end{pmatrix} A^{-1} F \pi$$

avec

$$K_h = \{X \in \mathbb{R}^{2N_\Gamma+N_s}; |X_i| \leq g_i \forall 1 \leq i \leq N_\Gamma\},$$

où  $g_i$  est la valeur de  $g$  au noeud  $x_i$  du bord  $\Gamma = ]0, 1[$ .

L'inégalité (5.13) peut se réécrire d'une façon équivalente au problème de minimisation sous contrainte de la fonctionnelle  $J$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in K_h ; \\ J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in K_h} J(\mathbf{v}) \end{cases} \quad (5.14)$$

En résolvant le problème d'optimisation (5.14), on trouve ainsi le vecteur  $\begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \lambda_t \end{pmatrix}$ , ensuite  $\mathbf{u}$  est obtenu en résolvant le système linéaire suivant

$$A\mathbf{u} = F - \begin{bmatrix} \tilde{B} & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \lambda_t \end{pmatrix}.$$

**Remarque 5.2.2** *Le code de calcul, utilisé pour résoudre numériquement (5.14), a été développé dans [73].*

### 5.2.4 Calcul des erreurs et ordre de convergence

L'objet de cette partie est d'évaluer l'ordre de convergence des erreurs commises dans la simulation numérique du problème fluide (5.1)-(5.5) dans un domaine fixe. Dans les cas tests suivants, ce problème est posé dans un domaine carré  $\Omega = ]0, 1[^2$  de frontière  $\partial\Omega$  telle que

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

où  $\Gamma_1 = ]0, 1[ \times \{0\}$ ,  $\Gamma_2 = \{1\} \times [0, 1]$ ,  $\Gamma_3 = ]0, 1[ \times \{1\}$  et  $\Gamma_4 = \{0\} \times [0, 1]$ .

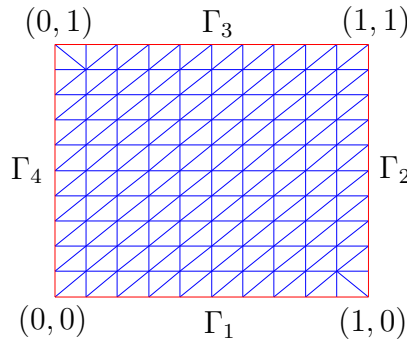


FIGURE 5.1 – Domaine fluide

Pour le calcul des ordre de convergence, nous introduisons les erreurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{u}}^0 &= \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & e_{\mathbf{u}}^1 &= \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \\ e_p^0 &= \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}, & e_{\lambda_n}^0 &= \|\lambda_n - \lambda_{n,h}\|_{L^2(0,1)}, \\ & & \text{et } e_{\lambda_t}^0 &= \|\lambda_t - \lambda_{t,h}\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

#### 5.2.4.1 Test 1

Dans ce premier cas test (voir [48]), nous allons comparer le champ de vitesse, la pression et les deux multiplicateurs de Lagranges  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$  obtenus numériquement pour un maillage fin ( $h = 1/256$ ) aux champs obtenus pour des différentes valeurs de  $h \in \{1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128\}$ . On rappelle que  $h$  désigne la taille du maillage.

Pour les conditions aux limites utilisées dans la résolution numérique, on choisit un profil parabolique sur les deux bords du carré  $\Gamma_4 = \{0\} \times [0, 1]$  et  $\Gamma_2 = \{1\} \times [0, 1]$  tels que

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_4} = \mathbf{u}|_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} y(1-y) \\ -y(1-y) \end{pmatrix},$$

et on impose la condition de Tresca sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ .

On désigne par  $(\mathbf{u}, p, \lambda_n, \lambda_t)$  la solution de référence du problème (5.1)-(5.5), trouvée numériquement pour un pas du maillage  $h = 1/256$ .

Les tableaux 5.1 et 5.2 donnent, pour différentes valeurs de  $h$ , les erreurs numériques commises pour la vitesse en norme  $\mathbf{H}^1$  et  $\mathbf{L}^2$ , pour la pression en norme  $L^2$  et pour les deux multiplicateurs  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$  en norme  $L^2$ .

$h$	$e_{\mathbf{u}}^0$	$e_{\mathbf{u}}^1$	$e_p^0$
1/8	$1.1072 \times 10^{-2}$	$3.2437 \times 10^{-1}$	$5.2259 \times 10$
1/16	$2.9897 \times 10^{-3}$	$1.5227 \times 10^{-1}$	$2.4140 \times 10$
1/32	$8.1016 \times 10^{-4}$	$7.3361 \times 10^{-2}$	$1.1508 \times 10$
1/64	$2.1356 \times 10^{-4}$	$3.3180 \times 10^{-2}$	5.9852
1/128	$5.0087 \times 10^{-5}$	$1.6984 \times 10^{-2}$	1.6980

TABLE 5.1 – Erreurs calculées  $e_{\mathbf{u}}^0$ ,  $e_{\mathbf{u}}^1$  et  $e_p^0$  en fonction de  $h$  (Test 1).

$h$	$e_{\lambda_n}^0$	$e_{\lambda_t}^0$
1/8	$8.9884 \times 10$	$2.6049 \times 10$
1/16	$7.2850 \times 10$	$1.7532 \times 10$
1/32	$5.7133 \times 10$	$1.2500 \times 10$
1/64	$4.5410 \times 10$	8.1084
1/128	$4.4014 \times 10$	5.6072

TABLE 5.2 – Erreurs calculées  $e_{\lambda_n}^0$  et  $e_{\lambda_t}^0$  en fonction de  $h$  (Test 1).

Sur les figures 5.2 et 5.3 sont représentées en échelle logarithmique les courbes décrivant les variations de  $e_{\mathbf{u}}^0$ ,  $e_{\mathbf{u}}^1$ ,  $e_p^0$ ,  $e_{\lambda_n}^0$  et  $e_{\lambda_t}^0$  en fonction de  $h$ .

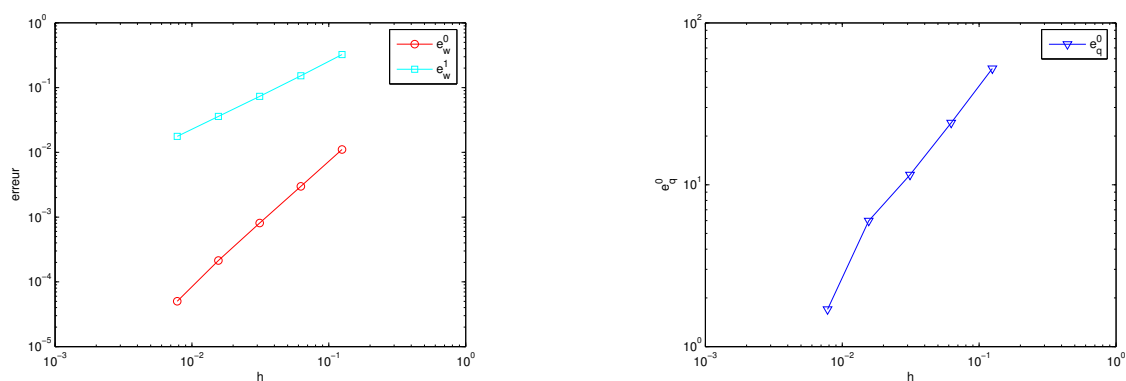
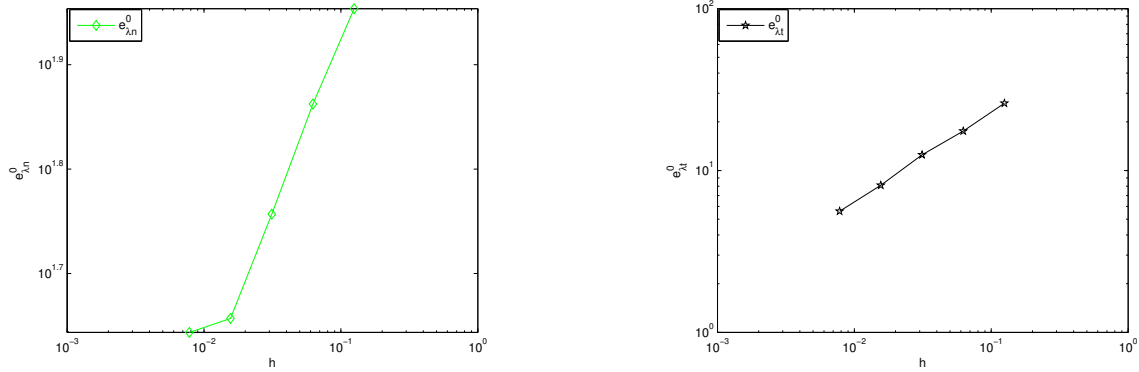


FIGURE 5.2 – Courbe des erreurs  $e_{\mathbf{u}}^0$ ,  $e_{\mathbf{u}}^1$  et  $e_p^0$  (Test 1).

FIGURE 5.3 – Courbe des erreurs  $e_{\lambda_n}^0$  et  $e_{\lambda_t}^0$  (Test 1).

En représentant graphiquement, en fonction du pas de maillage  $h$ , les valeurs numériques des erreurs reportées dans les tableaux 5.1 et 5.2, il est possible après interpolation linéaire de déterminer l'ordre de ces erreurs.

Pour l'erreur  $e_{\mathbf{u}}^0$ , la droite d'interpolation a pour équation :

$$\log(e_{\mathbf{u}}^0) = 1.938 \log(h) - 0.439,$$

ce qui nous permet de conclure que l'ordre de l'erreur en norme  $\mathbf{L}^2$  est d'environ 2.

Pour l'erreur  $e_{\mathbf{u}}^1$ , la droite d'interpolation a pour équation :

$$\log(e_{\mathbf{u}}^1) = 1.048 \log(h) + 1.036,$$

on conclut ainsi que l'erreur de la vitesse en norme  $\mathbf{H}^1$  est d'environ 1.

En ce qui concerne l'erreur de la pression  $e_p^0$ , l'ordre est approximativement 6/5 (la pente de la droite d'interpolation est 1.189).

Pour les multiplicateurs  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$ , l'ordre est respectivement d'environ 1/3 (la pente de la droite est 0.27) et 2/3 (la pente est 0.55).

#### 5.2.4.2 Test 2 avec solution exacte

Ce deuxième cas test consiste à comparer la solution exacte du problème fluide aux champs obtenus pour  $h \in \{1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256\}$ .

On considère le problème fluide suivant

$$(P^e) \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}^e \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_b^e \text{ sur } \Gamma_2, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ sur } \Gamma_4, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \\ |\Sigma_n \cdot \mathbf{t}| \leq g^e, & (\Sigma_n \cdot \mathbf{t}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} + g^e |\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}| = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \end{cases} \quad (5.15)$$

où la viscosité  $\nu$  du fluide est égale à 0.1, la force volumique  $\mathbf{f}^e = (\mathbf{f}_1^e, \mathbf{f}_2^e)^t$  et  $\mathbf{u}_b^e = (0, \mathbf{u}_{b,2}^e)^t$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1^e &= \nu(6x - 2)(-10y^3 + 18y^2 - 7) + \nu(x^3 - x^2)(-60y + 36), \\ \mathbf{f}_2^e &= \nu(2 - 6x)(10y^3 - 18y^2 + 7y) + \nu(x^2 - x^3)(60y - 36) + 2(2y - 1), \\ \mathbf{u}_{b,2}^e &= -2.5y^4 + 6y^3 - 3.5y^2.\end{aligned}$$

On choisit une grande valeur du seuil de glissement  $g^e$  sur le bord  $\Gamma_1$ , et sur le bord  $\Gamma_3$   $g^e$  est égale à  $\lambda_t^e$  (qui sera précisé par la suite).

Sur les figures 5.4 et 5.5 sont représentés le champ de vitesse et les isovaleurs de la pression obtenus en résolvant numériquement le problème  $(P^e)$  pour un maillage  $h = 1/16$ . Comme nous pouvons le constater sur la figure 5.4, la vitesse est nulle sur  $\Gamma_1$  (le seuil  $g^e$  n'est pas atteint) et sur  $\Gamma_3$ , il y a glissement (la vitesse tangentielle est non nulle).

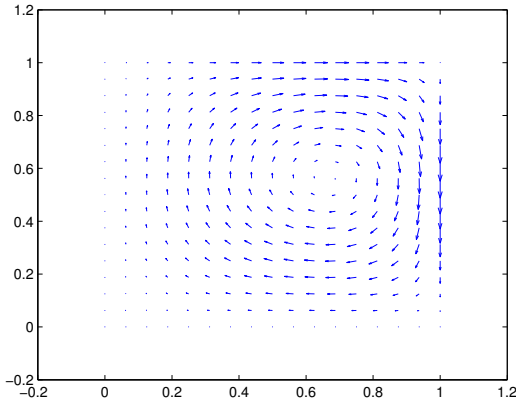


FIGURE 5.4 – Champ de vitesses calculé

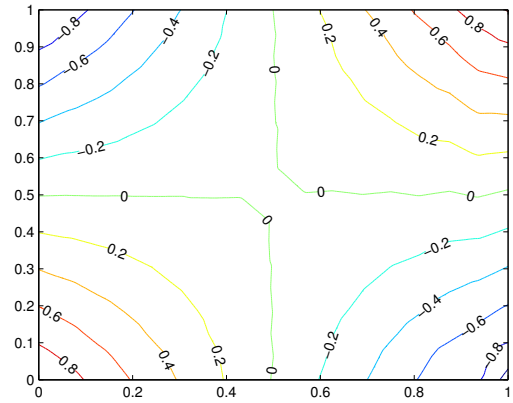
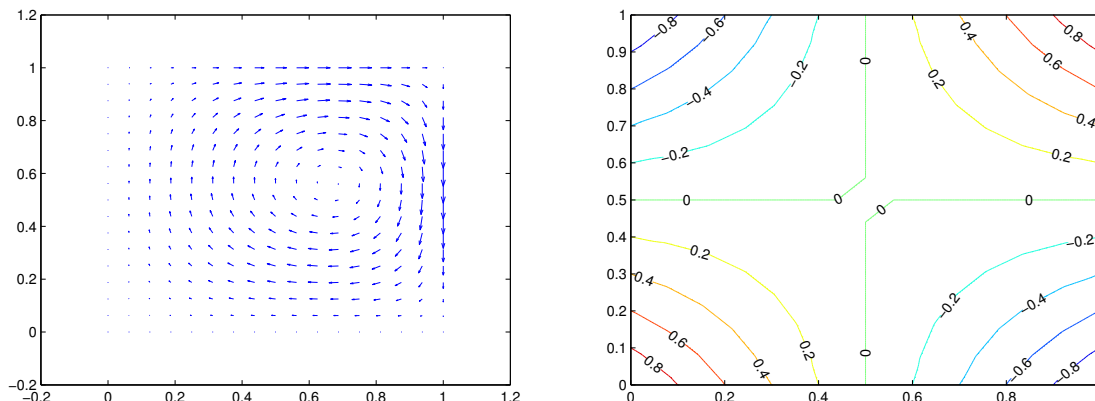


FIGURE 5.5 – Isovaleurs de la pression calculée

Les termes sources  $\mathbf{f}^e$ ,  $\mathbf{u}_b^e$  et  $\lambda_t$  sont choisis de telle sorte que la solution analytique  $(\mathbf{u}^e, p^e)$  du problème  $(P^e)$  soit

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1^e &= (x^2 - x^3)(-10y^3 + 18y^2 - 7y), \\ \mathbf{u}_2^e &= (3x^2 - 2x)(-2.5y^4 + 6y^3 - 3.5y^2), \\ p^e &= (2x - 1)(2y - 1). \end{cases} \quad (5.16)$$

Nous présentons sur la figure 5.6 la solution exacte (5.16) pour un maillage  $h = 1/16$ .

FIGURE 5.6 – La solution exacte  $(\mathbf{u}^e, p^e)$ 

À partir de (5.16), nous en déduisons les valeurs de  $\lambda_t^e = -\Sigma_n \cdot \mathbf{t}$  et  $\lambda_n^e = -\Sigma_n \cdot \mathbf{n}$  sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  :

$$\begin{aligned}\lambda_{t|\Gamma_1}^e &= 7\nu(x^2 - x^3), \\ \lambda_{t|\Gamma_3}^e &= \nu(x^2 - x^3), \\ \lambda_{n|\Gamma_1}^e &= -(2x - 1), \\ \lambda_{n|\Gamma_3}^e &= -\nu(3x^2 - 2x) + (2x - 1).\end{aligned}$$

**Remarque 5.2.3** — Sur le bord  $\Gamma_3$ , le seuil de glissement est toujours atteint vu le choix de  $g^e$  ( $g^e = \lambda_t^e$  sur  $\Gamma_3$ ) :

$$g^e < \max_{\bar{\Gamma}_3} |\Sigma_n \cdot \mathbf{t}|.$$

— Pour que le seuil ne soit pas atteint sur le bord  $\Gamma_1$ ,  $g^e$  est choisi tel que

$$g^e \geq \max_{\bar{\Gamma}_1} |\Sigma_n \cdot \mathbf{t}| = \frac{14}{135}.$$

Nous trouvons dans les tableaux 5.3 et 5.4 les erreurs numériques suivantes

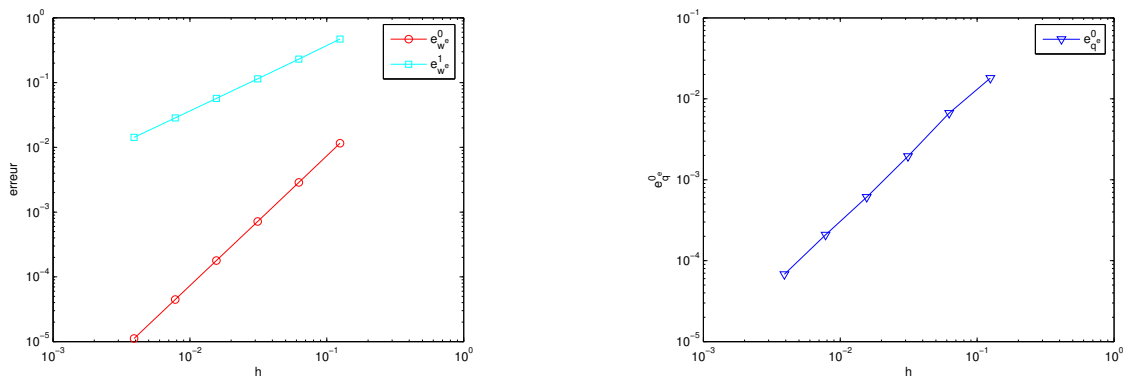
$h$	$e_{\mathbf{u}^e}^0$	$e_{p^e}^0$	$e_{\mathbf{u}^e}^1$
1/8	$1.1594 \times 10^{-2}$	$1.8030 \times 10^{-2}$	$4.7084 \times 10^{-1}$
1/16	$2.8795 \times 10^{-3}$	$6.6585 \times 10^{-3}$	$2.3072 \times 10^{-1}$
1/32	$7.1677 \times 10^{-4}$	$1.9494 \times 10^{-3}$	$1.1451 \times 10^{-1}$
1/64	$1.7879 \times 10^{-4}$	$6.0922 \times 10^{-4}$	$5.7119 \times 10^{-2}$
1/128	$4.4656 \times 10^{-5}$	$2.0847 \times 10^{-4}$	$2.8538 \times 10^{-2}$
1/256	$1.1159 \times 10^{-5}$	$6.7753 \times 10^{-5}$	$1.4266 \times 10^{-2}$

TABLE 5.3 – Erreurs calculées  $e_{\mathbf{u}^e}^0$ ,  $e_{p^e}^0$  et  $e_{\mathbf{u}^e}^1$  en fonction de  $h$  (Test 2).

$h$	$e_{\lambda_n^e \Gamma_3}^0$	$e_{\lambda_n^e \Gamma_1}^0$	$e_{\lambda_t^e \Gamma_1}^0$
1/8	$1.4770 \times 10^{-1}$	$1.5177 \times 10^{-1}$	$4.4729 \times 10^{-1}$
1/16	$1.0126 \times 10^{-1}$	$1.0269 \times 10^{-1}$	$3.4294 \times 10^{-1}$
1/32	$7.0602 \times 10^{-2}$	$7.1106 \times 10^{-2}$	$2.6547 \times 10^{-1}$
1/64	$4.9554 \times 10^{-2}$	$4.9719 \times 10^{-2}$	$2.1249 \times 10^{-1}$
1/128	$3.4899 \times 10^{-2}$	$3.4956 \times 10^{-2}$	$1.7903 \times 10^{-1}$
1/256	$2.4627 \times 10^{-2}$	$2.4657 \times 10^{-2}$	$1.5936 \times 10^{-1}$

TABLE 5.4 – Erreurs calculées  $e_{\lambda_n^e}^0$  et  $e_{\lambda_t^e}^0$  en fonction de  $h$  (Test 2).

Sur les figures 5.7 et 5.8 sont représentées en échelle logarithmique les courbes des erreurs  $e_{\mathbf{u}^e}^0$ ,  $e_{\mathbf{u}^e}^1$ ,  $e_{p^e}^0$ ,  $e_{\lambda_n^e|\Gamma_1}^0$ ,  $e_{\lambda_n^e|\Gamma_3}^0$  et  $e_{\lambda_t^e|\Gamma_1}^0$  en fonction du pas de maillage  $h$ .

FIGURE 5.7 – Courbes des erreurs  $e_{\mathbf{u}^e}^0$ ,  $e_{\mathbf{u}^e}^1$  et  $e_{p^e}^0$  (Test 2).

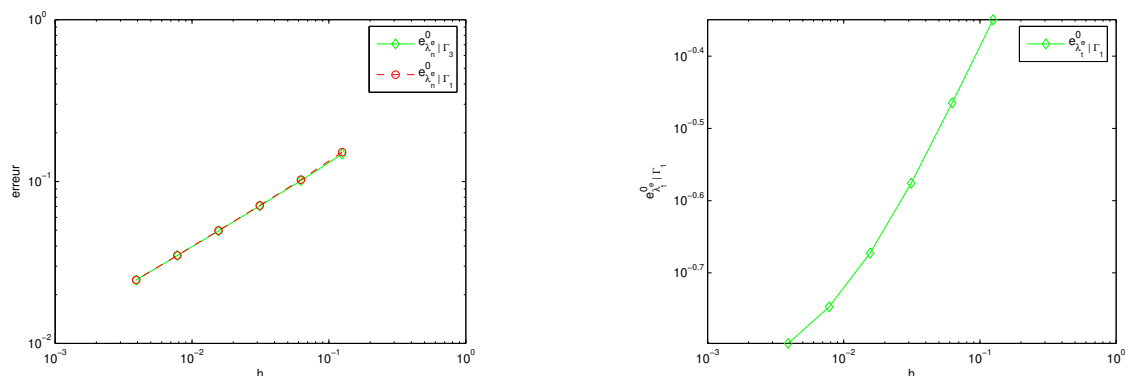


FIGURE 5.8 – Courbes des erreurs  $e_{\lambda_n}^0$  et  $e_{\lambda_t}^0$  (Test 2).

On en déduit ainsi l'ordre des erreurs reportées dans les tableaux 5.3 et 5.4 :  
 Pour l'erreur  $e_{\mathbf{u}}^0$ , la droite d'interpolation a pour équation :

$$\log(e_{\mathbf{u}}^0) = 2.00 \log(h) - 0.29,$$

l'ordre de l'erreur en norme  $\mathbf{L}^2$  est alors 2.

Pour l'erreur  $e_{\mathbf{u}}^1$ , la droite d'interpolation a pour équation :

$$\log(e_{\mathbf{u}}^1) = 1.00 \log(h) + 1.33,$$

l'erreur de la vitesse en norme  $\mathbf{H}^1$  est donc 1.

En ce qui concerne l'erreur de la pression  $e_p^0$ , la pente de la droite d'interpolation est 1.63, l'ordre est approximativement 5/3.

Pour les multiplicateurs  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$  : l'ordre est d'environ 1/2 (la pente de la droite est 0.52) pour  $e_{\lambda_n|\Gamma_3}^0$  et  $e_{\lambda_n|\Gamma_1}^0$ , est d'environ 1/3 (la pente de la droite est 0.30) pour  $e_{\lambda_t|\Gamma_1}^0$ .

### 5.2.4.3 Test 3

Dans ce cas test, nous allons calculer les estimations d'erreurs en travaillant avec un seuil  $g$  dans  $L^2(0, 1)$  mais qui n'appartient pas à  $H^{1/2}(0, 1)$ .

Soit  $g$  la fonction donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{10}{\left|x - \frac{1}{2}\right|^{(1/4)}} & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ +\infty & \text{si } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On choisit les mêmes conditions aux limites que dans le premier cas test. La solution de référence  $(\mathbf{u}, p, \lambda_n, \lambda_t)$  du problème  $(P)$  est calculée pour  $h = 1/256$ .



Sur les figures 5.9 et 5.10 sont représentés la vitesse tangentielle, le multiplicateur  $\lambda_t$  sur le bord  $\Gamma_3$  et le champ de vitesse obtenus en résolvant numériquement le problème (5.1)-(5.5).

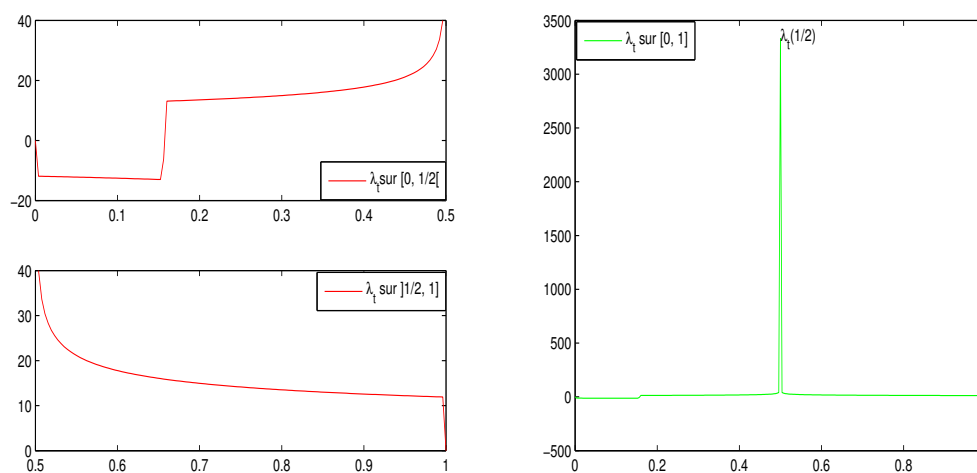


FIGURE 5.9 – Le multiplicateur  $\lambda_t$  :  $\lambda_t = -\Sigma_n \cdot \mathbf{t}$  pour  $h = 1/256$  (Test 3).

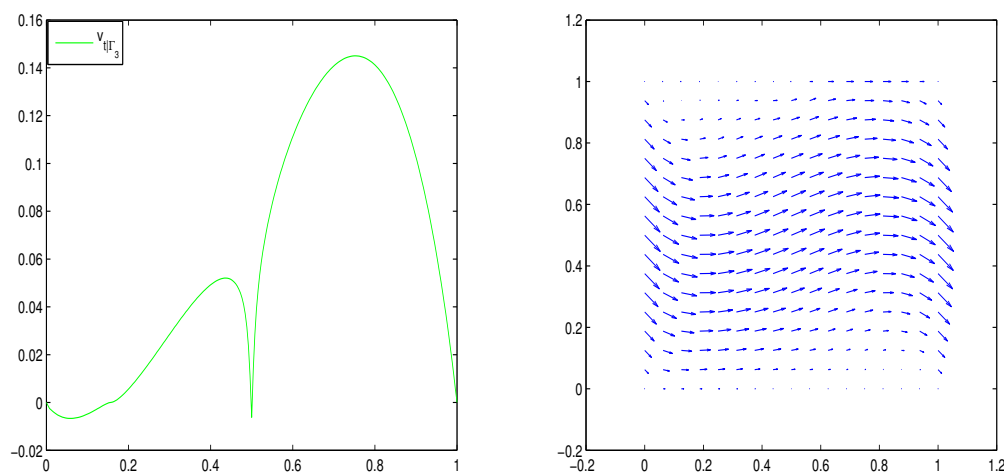


FIGURE 5.10 – La composante tangentielle de la vitesse pour  $h = 1/256$  et le champs de vitesse pour  $h = 1/16$  (Test 3).

Les erreurs numériques sont présentées dans les tableaux 5.5 et 5.6 suivants

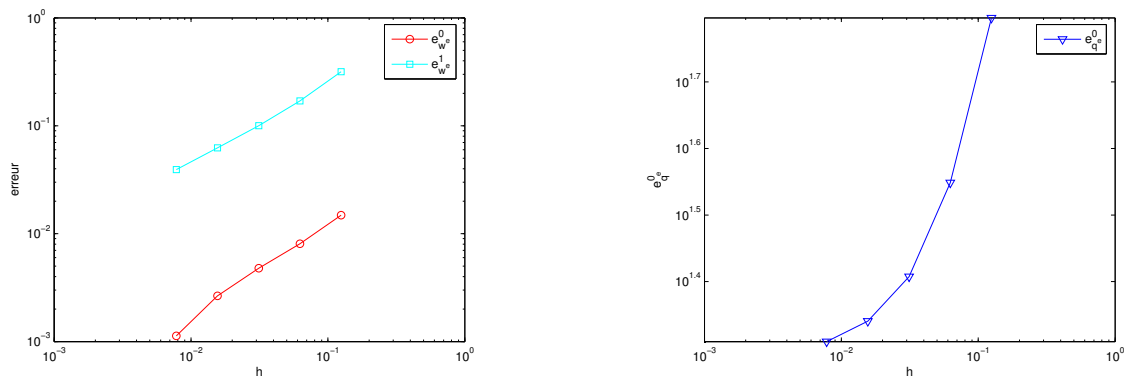
$h$	$e_{\mathbf{u}}^0$	$e_p^0$	$e_{\mathbf{u}}^1$
1/8	$1.4837 \times 10^{-2}$	$6.2529 \times 10$	$3.1723 \times 10^{-1}$
1/16	$8.0583 \times 10^{-3}$	$3.5358 \times 10$	$1.7015 \times 10^{-1}$
1/32	$4.7837 \times 10^{-3}$	$2.5556 \times 10$	$1.0020 \times 10^{-1}$
1/64	$2.6524 \times 10^{-3}$	$2.1905 \times 10$	$6.2407 \times 10^{-2}$
1/128	$1.1309 \times 10^{-3}$	$2.0414 \times 10$	$3.9288 \times 10^{-2}$

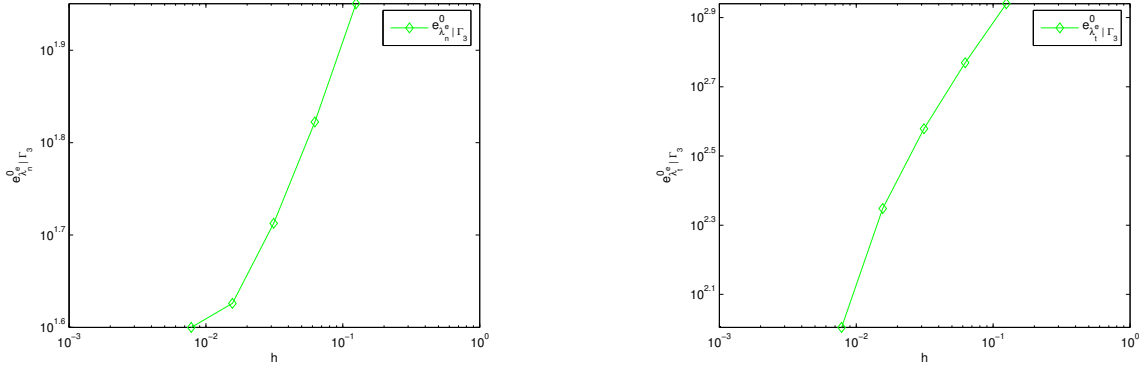
TABLE 5.5 – Erreurs calculées  $e_{\mathbf{u}}^0$ ,  $e_p^0$  et  $e_{\mathbf{u}}^1$  en fonction de  $h$  (Test 3).

$h$	$e_{\lambda_n}^0$	$e_{\lambda_t}^0$
1/8	$8.9226 \times 10$	$8.7172 \times 10^2$
1/16	$6.6423 \times 10$	$5.8839 \times 10^2$
1/32	$5.1588 \times 10$	$3.7915 \times 10^2$
1/64	$4.2260 \times 10$	$2.2287 \times 10^2$
1/128	$3.9805 \times 10$	$1.0108 \times 10^2$

TABLE 5.6 – Erreurs calculées  $e_{\lambda_n}^0$  et  $e_{\lambda_t}^0$  en fonction de  $h$  (Test 3).

Nous présentons sur les figures 5.11 et 5.12 les courbes d'erreurs en fonction du pas de maillage  $h$  en échelle logarithmique. La pente est de l'ordre 0.903 pour  $e_{\mathbf{u}}^0$  et de 0.747 pour  $e_{\mathbf{u}}^1$ , 0.392 pour  $e_p^0$  et elle est égale à 0.298 pour  $e_{\lambda_n}^0$  et 0.762 pour  $e_{\lambda_t}^0$ .

FIGURE 5.11 – Courbes des erreurs  $e_{\mathbf{u}}^0$ ,  $e_p^0$  et  $e_{\mathbf{u}}^1$  (Test 3).

FIGURE 5.12 – Courbes des erreurs  $e_{\lambda_n}^0$  et  $e_{\lambda_t}^0$  sur  $\Gamma_3$  (Test 3).

**Remarque 5.2.4** Nous remarquons que l'ordre de l'erreur de la vitesse en norme  $\mathbf{H}^1$  et du multiplicateur  $\lambda_t$  est à peu près égale à  $3/4$ , ce qui vérifie l'estimation d'erreur théorique et le résultat du test numérique obtenus dans [6], en revanche, l'ordre de l'erreur de la pression est approximativement  $2/5$  et pour le multiplicateur  $\lambda_n$ , l'ordre est d'environ  $1/3$ .

Nous concluons ainsi que pour un choix du seuil  $g$  moins régulier, l'ordre de convergence de l'erreur de la solution du problème (5.1)-(5.5) diminue.

□

Dans la section suivante, nous cherchons à approximer la solution du problème de la structure monodimensionnel.

### 5.3 Discrétisation du problème de la structure

On cherche à trouver une solution approchée du déplacement vertical  $d_1$  modélisé par les équations d'une poutre décrite dans le **Problème S1** :  $d_1$  est une solution du problème suivant

$$\begin{aligned} EI \partial_x^4 d_2 &= f_s \text{ dans } ]0, 1[, \\ d_2(0) = d_2(1) &= 0, \quad \partial_x d_2(0) = \partial_x d_2(1) = 0, \end{aligned}$$

Dans le **Problème S2**, on cherche le déplacement vertical  $d_1$  et le déplacement transversal  $d_2$  vérifiant

$$\begin{aligned} -ES_e \partial_x^2 d_1 &= f_s^1 \text{ sur } ]0, 1[ \\ EI \partial_x^4 d_2 &= f_s^2 \text{ sur } ]0, 1[ \\ d(0) = d(1) = 0 &\text{ et } \partial_x d_2(0) = \partial_x d_2(1) = 0. \end{aligned}$$

Avec  $E$  est le module d'Young,  $I$  est le moment d'inertie et  $S_e$  est la section de la poutre.

Les formulations variationnelles sont données par :

$$(PV_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } d_2 \in H_0^2(]0, 1[) \text{ tel que} \\ \tilde{a}_2(d_2, v) = (f_s, v) \quad \forall v \in H_0^2(]0, 1[) \end{array} \right.$$

$$(PV_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (d_1, d_2) \in H_0^1(]0, 1[) \times H_0^2(]0, 1[) \text{ tel que} \\ \tilde{a}_1(d_1, v) = (f_s^1, v) \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[) \\ \tilde{a}_2(d_2, v) = (f_s^2, v) \quad \forall v \in H_0^2(]0, 1[) \end{array} \right.$$

avec

$$\tilde{a}_1(u, v) = \int_0^1 ES_e \partial_x u \partial_x v,$$

$$\text{et } \tilde{a}_2(u, v) = \int_0^1 EI \partial_x^2 u \partial_x^2 v.$$

On vérifie d'après le théorème de Lax-Milgram que les problèmes  $(PV_1)$  et  $(PV_2)$  possèdent une unique solution.

### 5.3.1 Approximation par éléments finis

On fait, maintenant, recours à l'approximation numérique par la méthode des éléments finis pour chercher une solution approchée de  $d_1$  et  $d_2$ . Soit  $h$  un réel strictement positif, censé tendre vers zéro, et soient  $V_1^h$  et  $V_2^h$  deux sous espaces vectoriels respectivement de  $H_0^1(]0, 1[)$  et  $H_0^2(]0, 1[)$  de dimension finie. On considère le problème variationnel discret suivant :

$$(PV_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (d_1^h, d_2^h) \in V_1^h \times V_2^h \text{ tel que} \\ \tilde{a}_1(d_1^h, v) = (\tilde{g}_1, v) \quad \forall v \in V_1^h \\ \tilde{a}_2(d_2^h, v) = (\tilde{g}_2, v) \quad \forall v \in V_2^h \end{array} \right. \quad (5.17)$$

— maillage de la poutre :

On maille le domaine dans lequel le problème est posé, en subdivisant l'intervalle  $[0, 1]$  en  $N + 1$  sous intervalles où  $N \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $h = \frac{1}{N + 1}$  le pas du maillage et  $x_i = ih, \forall 0 \leq i \leq N + 1$  les noeuds du maillage.

— Choix de l'approximation :

- Pour le déplacement  $d_1$ , on choisit comme approximation l'élément finis de classe  $\mathcal{C}^0$ . Dans ce cas les fonctions de  $V_1^h$  sont des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , affines par morceaux et nulles aux points 0 et 1. L'espace  $V_1^h$  est donc défini par

$$V_1^h = \{v_h \in \bar{V}_1^h ; v_h(0) = v_h(1) = 0\},$$

avec  $\bar{V}_1^h = \{v_h \in \mathcal{C}^0([0, 1]) ; \mathbf{v}_h|_{x_i, x_{i+1}[} \in \mathbb{P}_1 \forall 0 \leq i \leq N + 1\}$ , la famille  $(\hat{\varphi}_i)_{1 \leq i \leq N+2}$  forme une base de  $V_1^h$ ,  $d_1^h$  s'écrit alors :

$$d_1^h = \sum_{i=1}^{N+2} d_{1,i}^h \hat{\varphi}_i, \quad (5.18)$$

où  $d_{1,i}^h := d_1^h(x_i)$ .

En injectant l'expression de  $d_1^h$  (5.18) dans  $(PV_h)_1$ , on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } X_1 = (d_{1,i}^h)_{1 \leq i \leq N+2} ; \\ A_1 X_1 = B_1 \end{cases}$$

Avec

$$(A_1)_{i,j} = \tilde{a}_1(\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_j),$$

$$\text{et } B_i = (f_s^2, \hat{\varphi}_i).$$

- Pour le déplacement  $d_2$ , on choisit l'élément finis de classe  $\mathcal{C}^1$ . Dans ce cas, les fonctions de  $V_2^h$  sont des fonctions continûment différentiables sur l'intervalle  $[0, 1]$ , polynômiales de degré trois par morceaux et nulles en 0 et en 1. le sous espace  $V_2^h$  est donc défini par

$$V_2^h = \{v_h \in \bar{V}_2^h ; v_h(0) = v_h(1) = 0, \partial_x v_h(0) = \partial_x v_h(1) = 0\},$$

avec  $\bar{V}_2^h = \{v_h \in \mathcal{C}^1([0, 1]) ; \mathbf{v}_h|_{x_i, x_{i+1}[} \in \mathbb{P}_3 \forall 0 \leq i \leq N + 1\}$ , où  $\mathbb{P}_3$  désigne l'espace des polynômes de degré trois.

Les fonctions de  $V_2^h$  sont complètement déterminées par les valeurs qu'elles prennent aux noeuds du maillage  $x_i$  ainsi que leurs dérivées en  $x_i$ , pour tout  $0 \leq i \leq N + 1$ . La base de  $V_2^h$  est ainsi formée par  $w_i^0$  et  $w_i^1$ , ces fonctions sont définies par :

$$w_i^0(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad \partial_x w_i^0(x_j) = 0 \quad \forall 0 \leq j \leq N + 1$$

$$w_i^1(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x w_i^1(x_j) = \delta_{i,j} \quad \forall 0 \leq j \leq N + 1$$

$d_2^h$  s'écrit alors :

$$d_2^h = \sum_{i=1}^{N+2} d_{2,i}^h w_i^0 + \sum_{i=1}^{N+2} \partial_x d_{2,i}^h w_i^1,$$

où on a posé  $d_{2,i}^h := d_2^h(x_i)$  et  $\partial_x d_{2,i}^h = \partial_x d_2^h(x_i)$ .

On obtient ainsi le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } X_2 = (d_{2,i}^h, \partial_x d_{2,i}^h)_{0 \leq i \leq N+1} ; \\ A_2 X_2 = B_2 \end{cases}$$

## 5.4 Couplage fluide-structure

La recherche d'une solution approchée du problème de couplage fluide-structure se fait par la construction d'un algorithme de point fixe [8]. Cet algorithme comporte ainsi les trois étapes suivantes :

1. Résolution numérique des équations du fluide posées dans  $\Omega^d$  (la configuration déformée)
2. Résolution numérique des équations de la structure posées sur  $]0, 1[ = \Gamma$ .
3. Le couplage : recherche de  $\Omega^d$  et de la force que le fluide exerce sur la structure : contrainte fluide qu'on note par  $\sigma_f$ .

Dans les deux sections précédentes, on a présenté la discrétisation du problème fluide posé dans  $]0, 1]^2$ , et celle du problème de la structure. Dans cette partie, on s'intéresse à coupler ces deux problèmes en calculant le terme de couplage  $\sigma_f$  et en cherchant le domaine fluide déformé. On finira par présenter l'algorithme de couplage.

### 5.4.1 La contrainte fluide

La contrainte  $\sigma_f$  exercée par le fluide sur le matériau élastique, représente un terme de couplage et elle est égale aux contraintes fluides exprimées en coordonnées Lagrangiennes :

$$\sigma_f = -\lambda_n \tilde{\mathbf{n}} - \lambda_t \tilde{\mathbf{t}},$$

où  $\tilde{\mathbf{n}}$  et  $\tilde{\mathbf{t}}$  désignent respectivement la normale et la tangente à la déformé de  $\Gamma$ ,  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$  sont les multiplicateurs de Lagrange qui s'identifient respectivement à  $-\sigma_f \cdot \tilde{\mathbf{n}}$  et  $-\sigma_f \cdot \tilde{\mathbf{t}}$ .

La normale  $\tilde{\mathbf{n}}$  est exprimée en fonction du déplacement de la structure  $d = (d_1, d_2)$  sur  $\Gamma$  par :

$$\tilde{\mathbf{n}} = (-\partial_x d_2, 1 + \partial_x d_1),$$

et la tangente  $\tilde{\mathbf{t}}$  est égale à  $(\tilde{\mathbf{n}}_2, -\tilde{\mathbf{n}}_1)$ .

L'expression du vecteur contrainte, réécrit sur  $\Gamma$ , est alors donnée par la relation suivante :

$$T_f = \begin{pmatrix} \lambda_n \circ \Phi(x) \partial_x d_2(x) - \lambda_t \circ \Phi(x) (1 + \partial_x d_1(x)) \\ -\lambda_n \circ \Phi(x) (1 + \partial_x d_1(x)) - \lambda_t \circ \Phi(x) \partial_x d_2(x) \end{pmatrix}$$

où  $\Phi$  est une application qui décrit la déformation du domaine fluide.

La première et la deuxième composante du vecteur  $T_f$  dans la base  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = ((1, 0), (0, 1))$ , où  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$  sont respectivement la tangente et la normale à la non déformée de  $\Gamma$ , sont données par les expressions suivantes

$$\begin{cases} (T_f)_1 = \lambda_n \partial_x d_2(x) - \lambda_t (1 + \partial_x d_1(x)) \\ (T_f)_2 = -\lambda_n (1 + \partial_x d_1(x)) - \lambda_t \partial_x d_2(x) \end{cases}$$

À partir des valeurs de  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$  obtenues en résolvant numériquement le problème de fluide et à l'aide de la formule d'approximation de Simpson, on arrive à calculer les valeurs approchées des seconds membres du problème de la structure :

$$((T_f)_1, v), \text{ pour } v \in V_1^h, \text{ et de } ((T_f)_2, v) \text{ pour } v \in V_2^h.$$

**Remarque 5.4.1** Dans le cas où le déplacement considéré de la structure est seulement le déplacement vertical  $d_2$  (i.e. on considère le problème (5.6)-(5.7)), la normale  $\tilde{\mathbf{n}}$ , exprimée sur  $\Gamma$ , est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{n}} = (-\partial_x d_2, 1).$$

### 5.4.2 Équations de la structure avec contrainte de volume

Pour un déplacement  $b$  fixé, on ajoute aux systèmes d'équations de la structure, une inconnue  $\mu$  associée à la condition de conservation de volume traduite par

$$\int_0^1 d_2 \tilde{\mathbf{n}}(b)_2 = 0,$$

cette condition provient du fait que le fluide est incompressible, on cherche alors  $d(b) = (d_1(b), d_2(b))$  vérifiant le système suivant :

$$\begin{aligned} -ES_e \partial_x^2 d_1(b) + \mu(b) \tilde{\mathbf{n}}(b)_1 &= f_s^1 + (T_f(b))_1 \text{ sur } ]0, 1[ \\ EI \partial_x^4 d_2(b) + \mu(b) \tilde{\mathbf{n}}(b)_2 &= f_s^2 + (T_f(b))_2 \text{ sur } ]0, 1[ \\ \mathbf{d}(0) = \mathbf{d}(1) = 0, \quad \partial_x d_2(0) = \partial_x d_2(1) = 0 \\ \int_0^1 d_2 \tilde{\mathbf{n}}(b)_2 &= 0 \end{aligned}$$

On note  $\tilde{\mathbf{n}}(b)_1$  et  $\tilde{\mathbf{n}}(b)_2$  la première et la deuxième composante du vecteur normal  $\tilde{\mathbf{n}}(b)$  à la déformée de  $\Gamma$ .

On cherche une solution approchée  $d(b)_h$  de  $d(b)$ , par la méthode des éléments finis, sous la forme

$$d(b)_h = \bar{d}_h + \mu(b) \underline{d}_h, \quad (5.19)$$

avec  $\bar{d}_h$  est une solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} -ES_e \partial_x^2 \bar{d}_{h,1} &= f_s^1 + (T_f(b))_1 \text{ sur } ]0, 1[ \\ EI \partial_x^4 \bar{d}_{h,2} &= f_s^2 + (T_f(b))_2 \text{ sur } ]0, 1[ \\ d_h(0) = d_h(1) = 0, \quad \partial_x d_{h,2}(0) = \partial_x d_{h,2}(1) = 0, \end{aligned}$$

et  $\underline{d}_h$  est une solution du problème ci dessous :

$$\begin{aligned} -ES_e \partial_x^2 \underline{d}_{h,1} &= -\tilde{\mathbf{n}}(b)_1 \text{ sur } ]0, 1[ \\ EI \partial_x^4 \underline{d}_{h,2} &= -\tilde{\mathbf{n}}(b)_2 \text{ sur } ]0, 1[ \\ \underline{d}_h(0) = \underline{d}_h(1) = 0, \quad \partial_x \underline{d}_{h,2}(0) = \partial_x \underline{d}_{h,2}(1) = 0, \end{aligned}$$

Ensuite, on cherche le multiplicateur  $\mu(b)$  tel que

$$\mu(b) \int_0^1 \underline{d}_{h,2} \tilde{\mathbf{n}}(b)_2 = - \int_0^1 \bar{d}_{h,2} \tilde{\mathbf{n}}(b)_2.$$

**Remarque 5.4.2** — La méthode utilisée pour chercher la solution  $d(b)_h$  sous la forme (5.19) est inspirée de [60].

— Dans le cas du problème de la structure (5.6)–(5.7), la condition de conservation de volume se traduit par

$$\int_0^1 d_2(b) = 0.$$



### 5.4.3 Maillage déformé

La déformation du domaine  $\Omega = ]0, 1]^2$  se fait par la construction d'une application  $\Phi$  qui décrit le déplacement de tous les noeuds du maillage du domaine  $\Omega$ , et donnée par  $\Phi = I + \delta$ , où  $\delta$  est le relèvement du prolongement du déplacement  $d = (d_1, d_2)$ , qu'on note par  $R\bar{d}$ .

La construction de la transformation  $\Phi$  se traduit par la résolution par la méthode des éléments finis en dimension deux du problème de Laplace suivant :

$$(P) \begin{cases} -\Delta\delta = 0 & \text{dans } \Omega \\ \delta = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ \delta = d & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases}$$

La résolution de  $(P)$  se fait par la méthode de pénalisation.

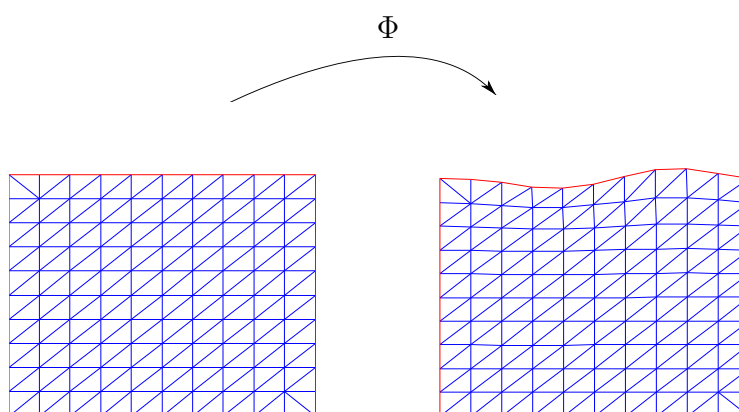


FIGURE 5.13 – Maillage déformé

### 5.4.4 Algorithme de couplage

La solution du problème couplé fluide-structure est un point fixe d'une application  $S$ , qui associe pour chaque déplacement  $b$ , un nouveau déplacement  $d(b)$  où  $d(b)$  est obtenue en résolvant le problème de la structure qui subit les forces exercées par le fluide. Dans l'ordre de trouver ce point fixe, on construit une suite  $(d^m)_{m \in \mathbb{N}}$ , définie

par :

$$d^{m+1} = S(d^m), \quad \forall m \geq 0$$

où  $d^0 = 0$ .

Examinons maintenant la construction de la suite  $(d^m)_{m \in \mathbb{N}}$  :

Pour obtenir le déplacement  $d^{m+1}$ , on résout d'abord le problème fluide écrit sous forme algébrique (5.11), posé dans  $\Omega^{d^m}$  qui est l'image du maillage initial (le carré unité) par la transformation  $I + R\bar{d}^m$  où  $d^m$  est le déplacement obtenu à la  $m$ -ème étape. Avec la solution discrète obtenue  $(u^{d^m}, p^{d^m}, \lambda_n^{d^m}, \lambda_t^{d^m})$ , on calcule la contrainte fluide exercée sur la structure et on finit par résoudre le problème de la poutre pour obtenir le nouveau déplacement  $d^{m+1}$ .

Ces étapes sont présentées dans l'algorithme de couplage fluide-structure suivant : Soit  $\Phi^{d^m}$  la déformation du domaine à la  $m$ -ème itération donnée par

$$\Phi^{d^m} = I + \delta^{d^m},$$

avec  $\delta^{d^m} = R\bar{d}^m$  est la solution approchée du problème harmonique  $(P)$ .

Pour  $\epsilon$  une tolérance donnée, on a

- pour  $m = 0$ ,  $d^0 = (0, 0)$ ,  $\Omega^0 = ]0, 1[ \times ]0, 1[$
- Répéter jusqu'à la convergence

1. Calcul de  $d^{m+1}$  :

**1.a** déformation du domaine :  $\Omega^{d^m} = \Phi^{d^m}(\Omega^0)$

**1.b** Résolution du problème de Stokes dans  $\Omega^{d^m}$  :  $(u^{d^m}, p^{d^m}, \lambda_n^{d^m}, \lambda_t^{d^m})$

**1.c** Calcul de la contrainte fluide  $T_f^m$ .

**1.d** Résolution des équations de la structure :  $d^{m+1}$

2. (test de convergence) :  $\|d^{m+1} - d^m\| \leq \epsilon$  sinon  $m \leftarrow m + 1$  et revenir à 1.

□

## 5.5 Résultats numériques

Dans cette section, on s'occupe de l'implémentation numérique sous Matlab de l'algorithme de couplage.

Pour les tests numériques, on choisit l'exemple d'un domaine  $\Omega = ]0, 1[^2$ .

Pour le fluide, on choisit une viscosité  $\nu = 100$ ,  $\mathbf{f}_f = (0, 0)$  et une condition de Dirichlet non-homogène pour la vitesse donnée par le profil parabolique sur les bords  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  défini par

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_2} = \mathbf{w}|_{\Gamma_4} = \begin{pmatrix} y(1-y) \\ -y(1-y) \end{pmatrix}.$$

Le choix du profil parabolique sur les deux cotés du carré est fait dans le but de renforcer le glissement du fluide au niveau de l'interface fluide-structure (respectivement la pénétration du fluide).

La condition de Tresca (respectivement la condition Leak) est imposée sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ .

Pour la structure (poutre), la section  $S_e$  et le moment d'inertie  $I$  sont donnés par

$$S_e = b \times h, \quad I = \frac{b \times h^3}{12},$$

où  $h$  est l'hauteur de la poutre et  $b$  est sa largeur, dans ce qui suit  $h = 0.5$  et  $b = 1$ .

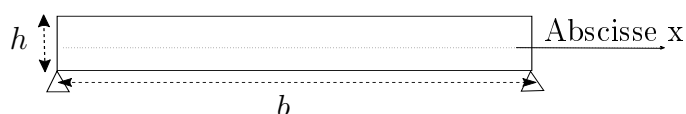


FIGURE 5.14 – La poutre

Les tests suivants sont faits dans le cas où le seuil  $g$  est une fonction constante et  $h = 1/50$ . On choisit deux différentes valeurs de  $g$ , une valeur pour laquelle le seuil est atteint et une autre où il n'est pas atteint par la composante tangentielle du vecteur contrainte (resp. la composante normale du vecteur contrainte).

### 5.5.1 Tests numériques du Problème S1

**Test 1 :** Ce cas test est fait dans le cas où  $E = 200$ .

Sur les figures 5.15 et 5.16 sont représentés le champ de vitesse et la déformation du domaine fluide.

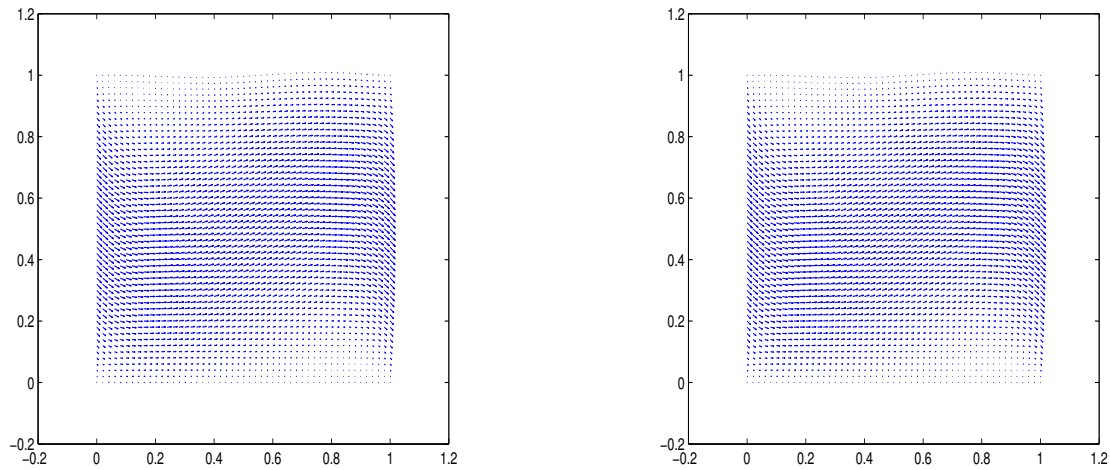


FIGURE 5.15 – Le champ de vitesse pour  $g = 150$  (à gauche) et pour  $g = 1500$  (à droite).

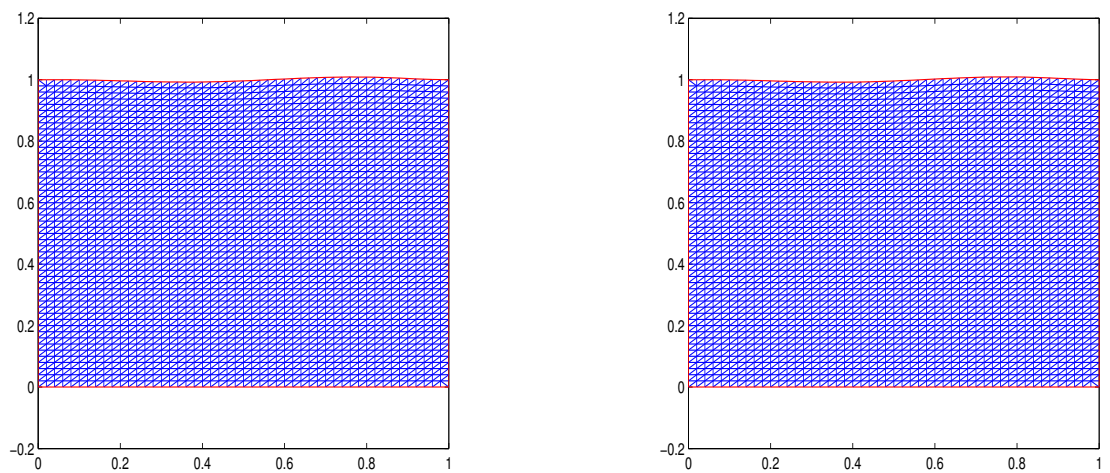


FIGURE 5.16 – Maillage du domaine déformé pour  $g = 150$  et pour  $g = 1500$ .

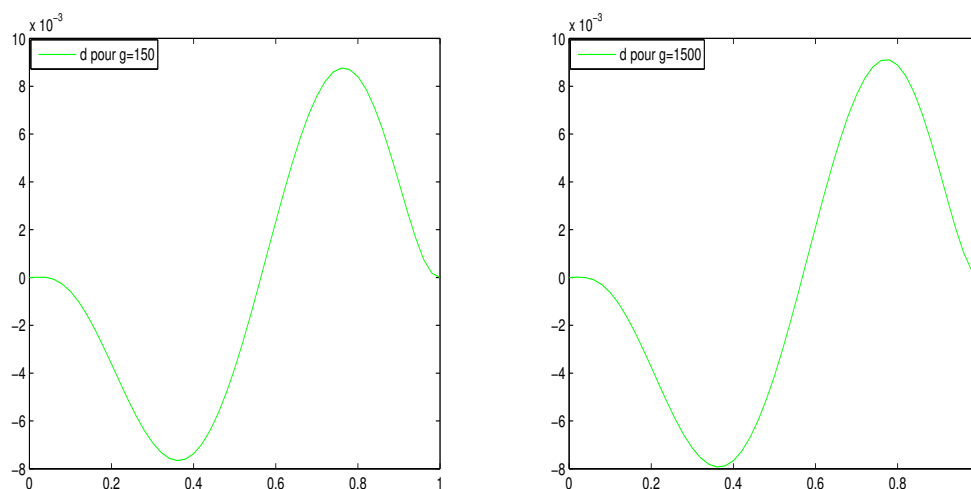


FIGURE 5.17 – La figure à gauche : le déplacement de la structure pour  $g = 150$  :  $|d| = 0.0374$ . La figure à droite : Le déplacement de la structure pour  $g = 1500$ ,  $|d| = 0.0390$ .

Dans la figure 5.17, le déplacement transversal augmente légèrement quand le seuil  $g$  n'est pas atteint.

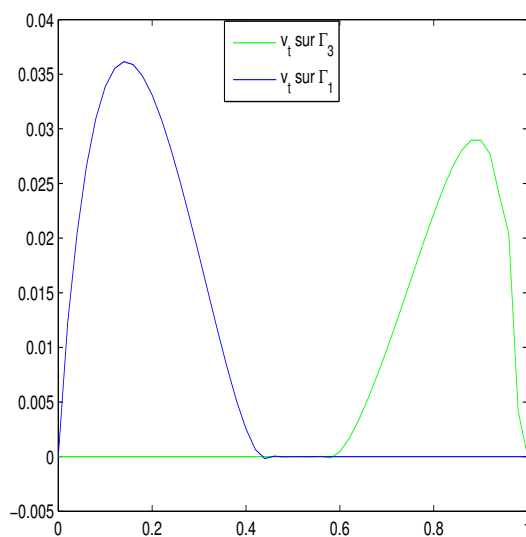


FIGURE 5.18 – La vitesse tangentielle sur  $\Gamma_3$  et sur  $\Gamma_1$  pour  $g = 150$ .  $|v_{t|\Gamma_1}| = 0.1148$  et  $|v_{t|\Gamma_3}| = 0.0854$ .

Dans la figure 5.18, sous l'effet de la déformation de la structure  $\Gamma_3$ , le fluide glisse moins sur le bord déformable que sur le bord rigide  $\Gamma_1$ .

**Test 2 :** Dans ce cas test, on choisit  $E = 500$ .

La déformation du domaine est plus petite que le premier test :

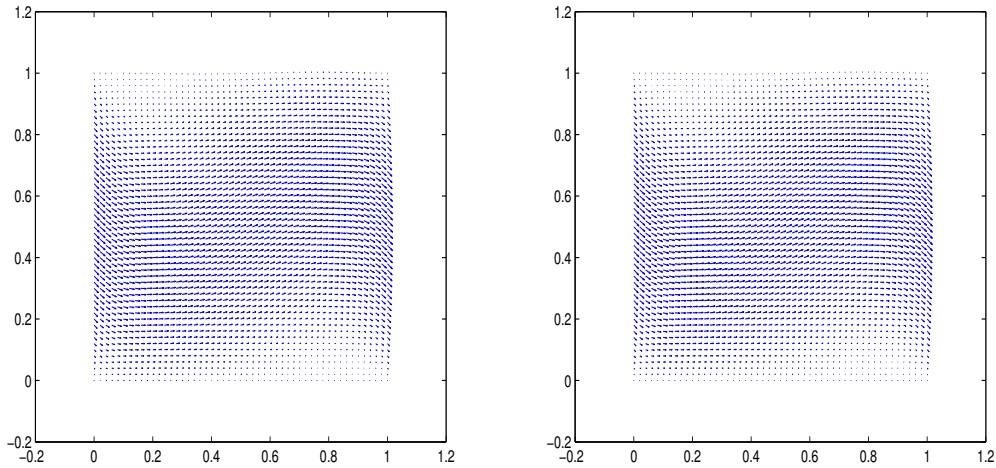


FIGURE 5.19 – Le champ de vitesse pour  $g = 150$  (à gauche) et pour  $g = 1500$  (à droite).

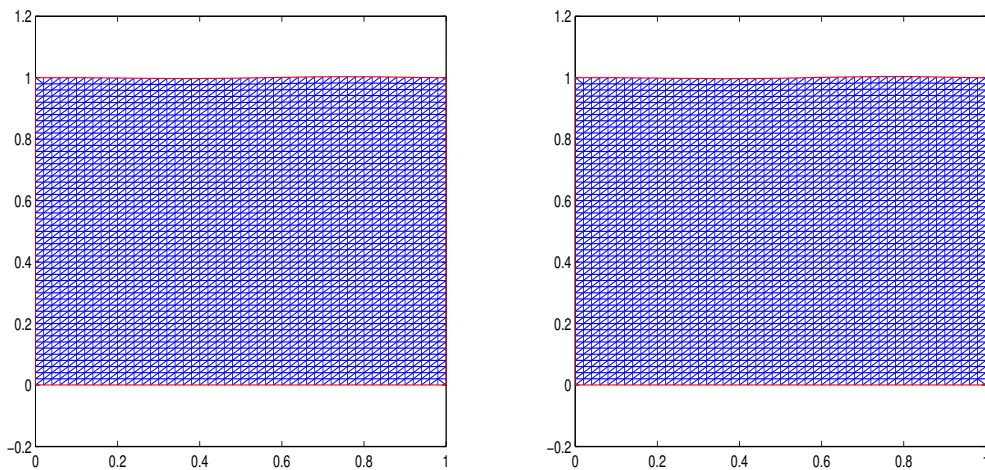


FIGURE 5.20 – Maillage du domaine déformé pour  $g = 150$  et pour  $g = 1500$ .

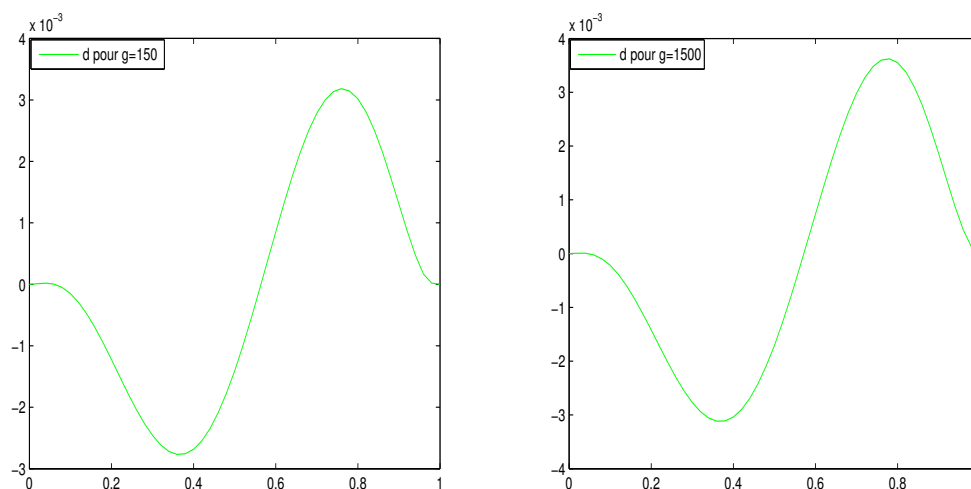


FIGURE 5.21 – La figure à gauche : le déplacement de la structure pour  $g = 150$  :  $|d| = 0.0134$ . La figure à droite : Le déplacement de la structure pour  $g = 1500$ ,  $|d| = 0.0154$ .

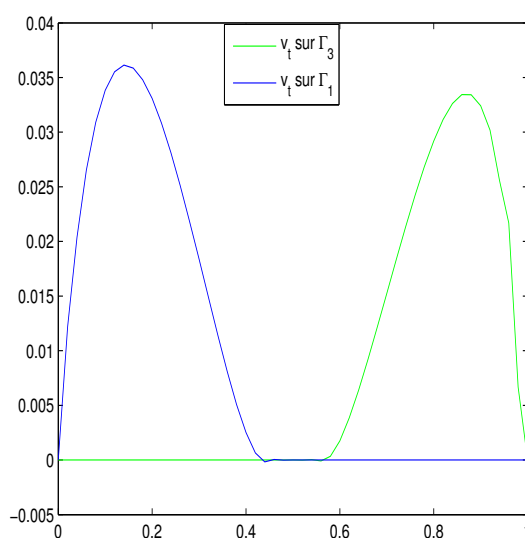


FIGURE 5.22 – La vitesse tangentielle sur  $\Gamma_3$  et sur  $\Gamma_1$  pour  $g = 150$ .  $|v_{t|\Gamma_1}| = 0.1147$  et  $|v_{t|\Gamma_3}| = 0.1043$ .

Dans la figure 5.22, la vitesse d'écoulement du fluide (la vitesse tangentielle) sur le bord déformable  $\Gamma_3$  s'approche de celle sur le bord rigide  $\Gamma_1$ , et ceci est dû aux petits déplacements.

### 5.5.2 Test numérique du Problème S2

Ce cas test est fait dans le cas où  $E = 40 \times 10^3$  et  $h = 0.1$ .

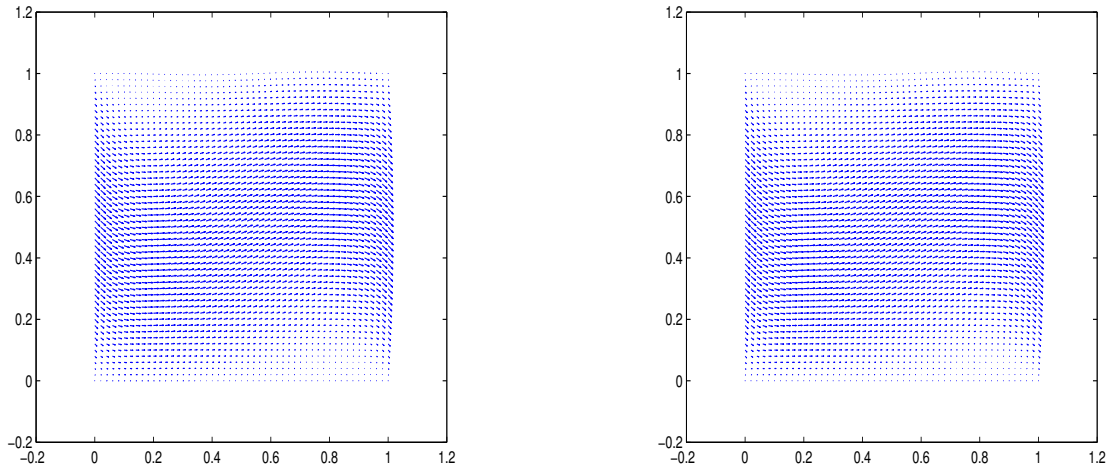


FIGURE 5.23 – Le champ de vitesse pour  $g = 150$  (à gauche) et pour  $g = 1500$  (à droite).

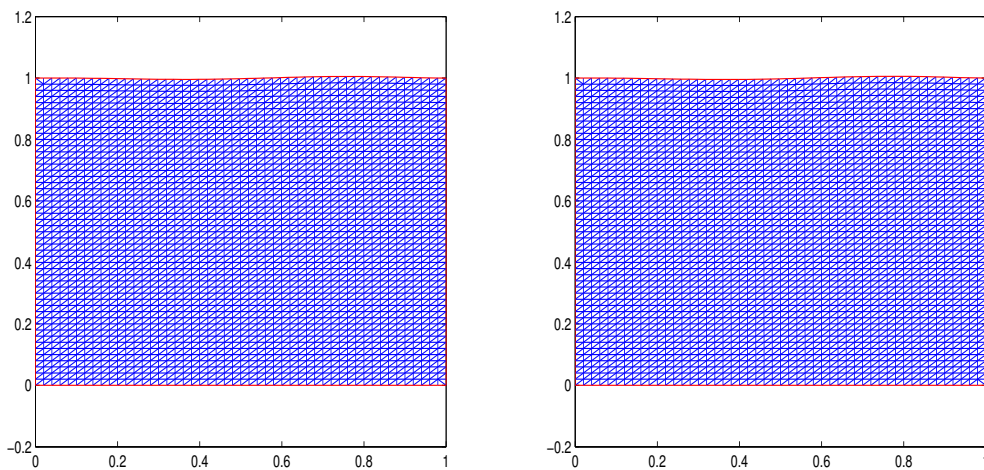


FIGURE 5.24 – Maillage du domaine déformé pour  $g = 150$  et pour  $g = 1500$ .



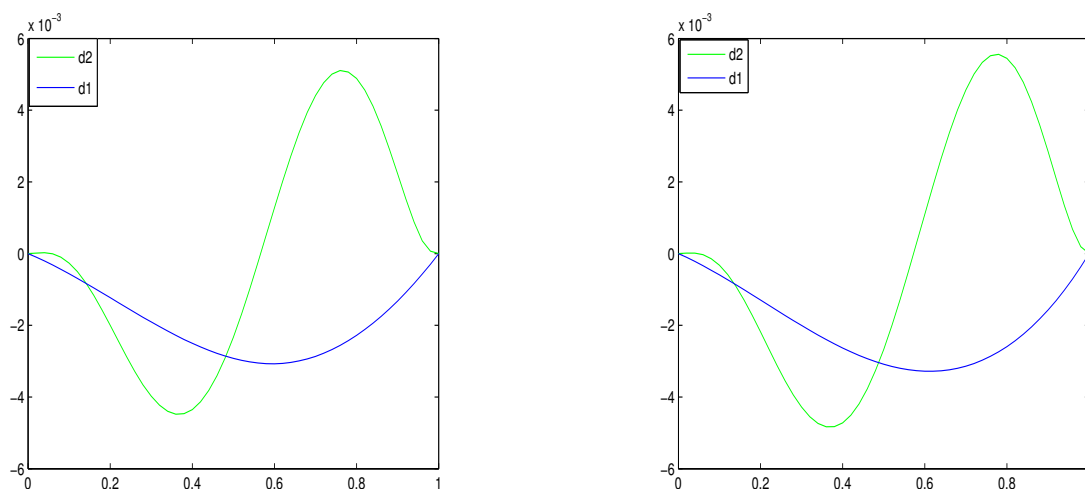


FIGURE 5.25 – La figure à gauche : le déplacement de la structure pour  $g = 150$  :  $d_2$  est le déplacement transversal et  $d_1$  est le déplacement longitudinal,  $|d| = 0.0264$ . La figure à droite : Le déplacement de la structure pour  $g = 1500$ ,  $|d| = 0.0287$ .

Pour voir l'effet du glissement sur le déplacement de la structure, on illustre les déplacements  $d_1$  et  $d_2$  dans les cas  $g = 150$  et  $g = 1500$  dans la même figure.

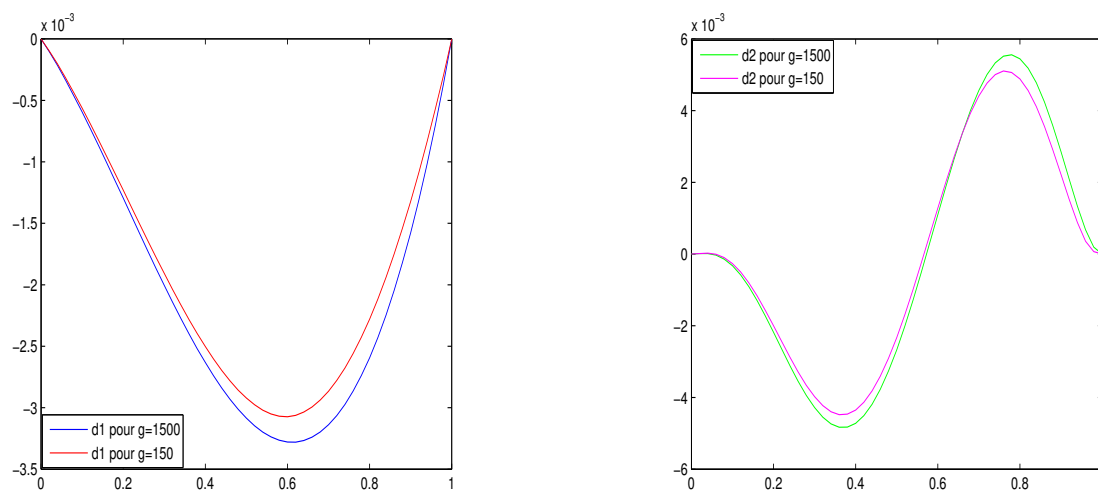


FIGURE 5.26 – Les déplacements de la structure pour  $g = 150$  et pour  $g = 1500$ .

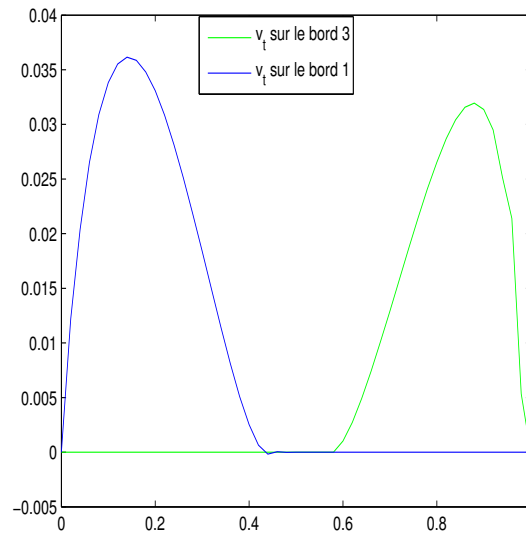


FIGURE 5.27 – La vitesse tangentielle sur  $\Gamma_3$  et sur  $\Gamma_1$  pour  $g = 150$ .  $|v_{t|\Gamma_1}| = 0.1148$  et  $|v_{t|\Gamma_3}| = 0.0971$ .

Sur les figures 5.25 et 5.26, on a représenté le déplacement de la structure pour deux valeurs différentes du seuil  $g$ . Comme prévu, le déplacement  $d = (d_1, d_2)$  augmente (en norme Euclidienne) quand le seuil n'est pas atteint, en effet, quand  $g$  augmente, le fluide exerce des efforts plus importantes sur la structure, ce qui induit de déplacements plus importants.

Dans la figure 5.27, la vitesse tangentielle sur la partie du bord susceptible d'être déformable  $\Gamma_3$  diminue par rapport à la vitesse tangentielle sur le bord rigide  $\Gamma_1$ .

### 5.5.3 Test numérique du Problème Leak

On considère les mêmes paramètres présentés dans les deux premiers cas tests pour le problème fluide et on choisit  $E = 200$  pour l'équation de la poutre. La condition aux limites de type pénétration est imposée sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ .

Les figures suivantes sont obtenues :

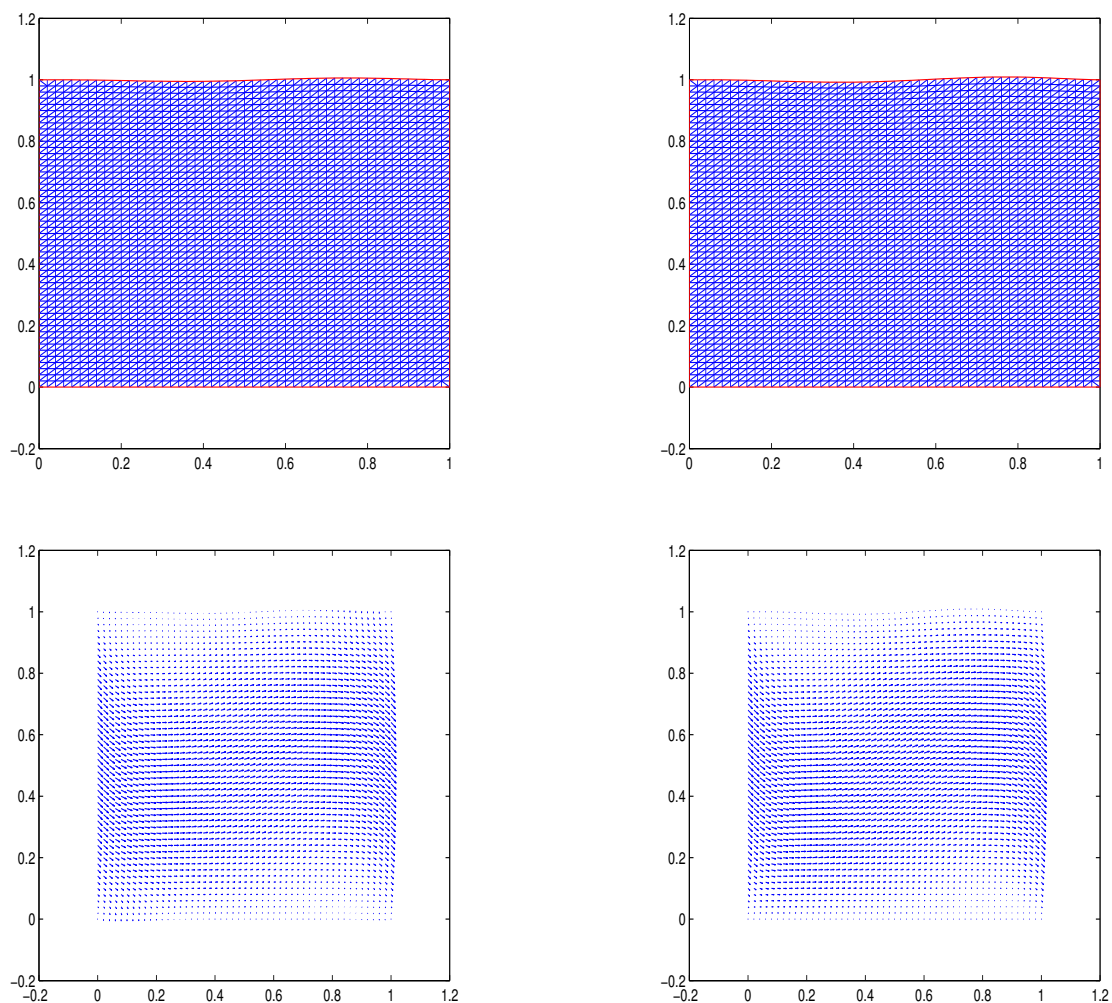


FIGURE 5.28 – Représentation du maillage du domaine déformé et du champ de vitesse pour  $g = 150$  (à gauche) et pour  $g = 1500$  (à droite).

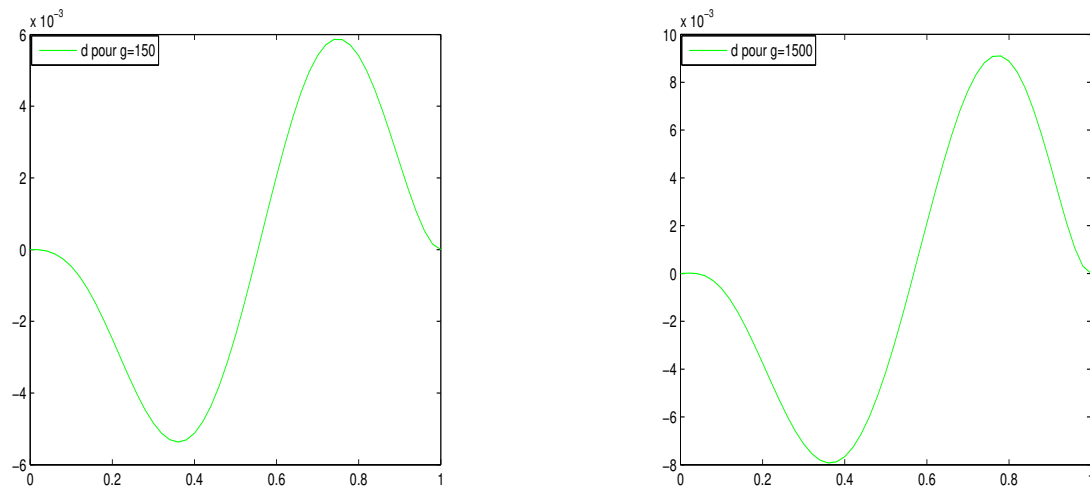


FIGURE 5.29 – La figure à gauche : le déplacement de la structure pour  $g = 150$ ,  $|d| = 0.0255$ . La figure à droite : Le déplacement de la structure pour  $g = 1500$ ,  $|d| = 0.0390$ .

Sur la figure 5.29, le déplacement de la structure est présenté pour deux valeurs du seuil  $g$ . On constate que le déplacement augmente quand  $g = 1500$  ce qui induit plus de déformation sur le domaine fluide comme le montre la figure 5.28.

**Remarque 5.5.1** *La contrainte fluide a plus d'effet sur le déplacement longitudinal que sur le déplacement vertical (voir figure 5.18).*

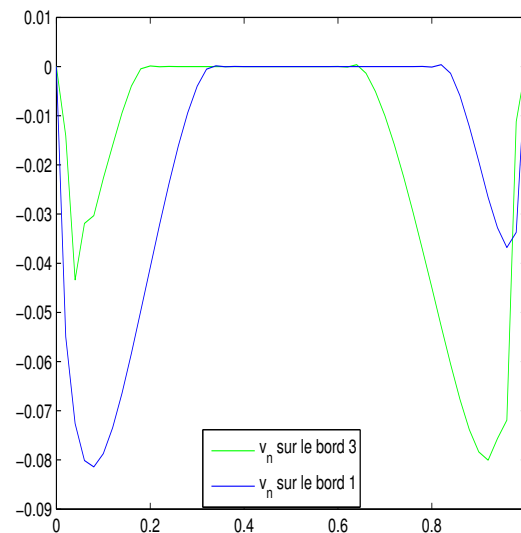


FIGURE 5.30 – La vitesse normale sur  $\Gamma_3$  et sur  $\Gamma_1$  pour  $g = 150$ .  $|v_{n|\Gamma_1}| = 0.2273$  et  $|v_{n|\Gamma_3}| = 0.2238$ .

Dans la figure 5.30, la vitesse normale sur la partie déformée  $\Gamma_3$  diminue par rapport à celle sur la partie rigide  $\Gamma_1$ .



# Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'analyse d'un problème d'interaction fluide-structure stationnaire dans le cas où le fluide est visqueux incompressible gouverné par le système de Stokes 2D et la structure est déformable et décrite par les équations d'une poutre 1D. Les systèmes d'équations considérés sont couplés via une condition aux limites non linéaire de type frottement à l'interface. La non-linéarité provenant de cette condition s'est avérée être une difficulté majeure pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème couplé.

Les contributions de cette thèse recouvrent deux aspects : analyse mathématique et simulation numérique. Nous avons tout d'abord démontré un résultat d'existence d'une unique solution faible du problème couplé, où le modèle de Navier-Bernoulli a été considéré pour la structure, en utilisant le théorème de point fixe de Schauder. Ensuite, nous avons étudié l'estimation d'erreur *a priori* de l'approximation du problème de Stokes avec la condition de Tresca par la méthode des éléments finis mixtes à quatre champs : on a établi une estimation d'erreur optimale d'ordre 1 et nous avons réalisé des tests numériques validant les résultats démontrés théoriquement. Enfin, nous avons présenté un algorithme de point fixe pour la résolution numérique du problème couplé et nous avons réalisé des simulations numériques pour le problème d'interaction fluide-structure avec la condition de Tresca et la condition Leak.

Plusieurs perspectives de développement restent encore envisageables. Nous présentons certains :

- Sur le plan théorique, il serait intéressant d'étudier l'existence d'une solution régulière du problème couplé avec la condition Slip ou Leak dans le cas où les déplacements de la structure, un déplacement vertical et un autre transversal, sont modélisées par les équations d'une poutre (voir **Problème S2**), un travail qu'on a déjà commencé à le traiter. Nous pouvons aussi étudier le même type de problème en remplaçant les équations de Stokes par celles de Navier-Stokes et à considérer d'autres modèles pour la structure dans les deux cas stationnaire et

instationnaire.

- D'un point de vue numérique, nous avons seulement présenté la discrétisation et la simulation numérique par la méthode des éléments finis du problème couplé avec la condition de Tresca, l'étape suivante consistera donc à étudier l'estimation d'erreur *a priori* de ce problème couplé. Nous pouvons également refaire l'étude de l'estimation d'erreur du chapitre 4, en considérant les équations de Navier-Stokes avec la condition de Tresca. Un autre développement possible des travaux de cette thèse est l'analyse numérique des problèmes couplés instationnaires pour lesquels le domaine fluide dépend du temps, avec des conditions aux limites de type frottement à l'interface.



# Annexe A

## Preuve du Lemme 2.3.1

On note

$$\chi := \left\{ \mu \in L^2(\Gamma) ; \int_{\Gamma} \mu \psi \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \widehat{g} |\psi| \, d\Gamma \leq 0 \, \forall \psi \in L^2(\Gamma) \right\}.$$

Montrons que  $Q = \chi$ .

D'une part, on a  $\chi \subset Q$ , en effet :

soit  $\mu \in L^2(\Gamma)$  tel que  $\int_{\Gamma} \mu \psi \, d\Gamma \leq \int_{\Gamma} \widehat{g} |\psi| \, d\Gamma \, \forall \psi \in L^2(\Gamma)$ .

En particulier, on a :

—

$$\int_{\Gamma} (\mu - \widehat{g}) \psi \, d\Gamma \leq 0 \, \forall \psi \in L^2(\Gamma) \text{ tel que } \psi \geq 0,$$

ce qui implique

$$\mu - \widehat{g} \leq 0 \text{ p.p sur } \Gamma. \tag{A.1}$$

—

$$\int_{\Gamma} (\mu + \widehat{g}) \psi \, d\Gamma \leq 0 \, \forall \psi \in L^2(\Gamma) \text{ tel que } \psi \leq 0,$$

il vient que

$$\mu + \widehat{g} \geq 0 \text{ p.p sur } \Gamma. \tag{A.2}$$

On en déduit ainsi d'après (A.1) et (A.2) :

$$|\mu| \leq \widehat{g} \text{ p.p sur } \Gamma,$$

on montre alors que  $\chi \subset Q$ .

D'autre part, on vérifie que  $Q \subset \chi$ , en effet :

soit  $\mu \in Q$ , pour  $\psi \in L^2(\Gamma)$  on a

$$|\mu \psi| \leq \widehat{g} |\psi| \text{ p.p sur } \Gamma,$$

ce qui implique

$$\mu\psi \leq \widehat{g} |\psi| \quad \text{p.p sur } \Gamma,$$

d'où

$$\int_{\Gamma} \mu\psi \leq \int_{\Gamma} \widehat{g} |\psi|,$$

on montre ainsi que  $Q \subset \chi$ .

On obtient alors, d'après ce qui précède, l'égalité voulue.

□

# Table des figures

1.1	La longueur de glissement $b$ . . . . .	4
1.2	Graphique de la loi de Tresca . . . . .	5
2.1	Le domaine de référence et le domaine déformé . . . . .	14
2.2	La base locale $(G\mathbf{n}, E\mathbf{t})$ . . . . .	19
5.1	Domaine fluide . . . . .	82
5.2	Courbe des erreurs $e_{\mathbf{u}}^0$ , $e_{\mathbf{u}}^1$ et $e_p^0$ (Test 1). . . . .	83
5.3	Courbe des erreurs $e_{\lambda_n}^0$ et $e_{\lambda_t}^0$ (Test 1). . . . .	84
5.4	Champ de vitesses calculé . . . . .	85
5.5	Isovaleurs de la pression calculée . . . . .	85
5.6	La solution exacte $(\mathbf{u}^e, p^e)$ . . . . .	86
5.7	Courbes des erreurs $e_{\mathbf{u}}^0$ , $e_{\mathbf{u}}^1$ et $e_{p^e}^0$ (Test 2). . . . .	87
5.8	Courbes des erreurs $e_{\lambda_n^e}^0$ et $e_{\lambda_t^e}^0$ (Test 2). . . . .	88
5.9	Le multiplicateur $\lambda_t : \lambda_t = -\Sigma_n \cdot \mathbf{t}$ pour $h = 1/256$ (Test 3). . . . .	89
5.10	La vitesse tangentielle et le champ de vitesse . . . . .	89
5.11	Courbes des erreurs $e_{\mathbf{u}}^0$ , $e_p^0$ et $e_{\mathbf{u}}^1$ (Test 3). . . . .	90
5.12	Courbes des erreurs $e_{\lambda_n}^0$ et $e_{\lambda_t}^0$ sur $\Gamma_3$ (Test 3). . . . .	91
5.13	Maillage déformé . . . . .	97
5.14	La poutre . . . . .	99
5.15	Le champ de vitesse pour $g = 150$ (à gauche) et pour $g = 1500$ (à droite). 100	
5.16	Maillage du domaine déformé pour $g = 150$ et pour $g = 1500$ . . . . .	100
5.17	test 1 : le déplacement transversale $d$ . . . . .	101
5.18	test 1 : La vitesse tangentielle . . . . .	101
5.19	Le champ de vitesse pour $g = 150$ (à gauche) et pour $g = 1500$ (à droite). 102	
5.20	Maillage du domaine déformé pour $g = 150$ et pour $g = 1500$ . . . . .	102
5.21	test 2 : le déplacement transversale $d$ . . . . .	103
5.22	test 2 : La vitesse tangentielle . . . . .	103
5.23	Le champ de vitesse pour $g = 150$ (à gauche) et pour $g = 1500$ (à droite). 104	

5.24	Maillage du domaine déformé pour $g = 150$ et pour $g = 1500$ . . . . .	104
5.25	Les déplacements $d_1$ et $d_2$ . . . . .	105
5.26	Les déplacements de la structure pour $g = 150$ et pour $g = 1500$ . . . . .	105
5.27	test 1 : La vitesse tangentielle . . . . .	106
5.28	Cas Leak : Représentation du maillage domaine déformé et du champ de vitesse . . . . .	107
5.29	Cas leak : le déplacement $d$ . . . . .	108
5.30	Cas leak : La vitesse normal . . . . .	108

# Liste des tableaux

5.1	Erreurs calculées $e_{\mathbf{u}}^0$ , $e_{\mathbf{u}}^1$ et $e_p^0$ en fonction de $h$ (Test 1). . . . .	83
5.2	Erreurs calculées $e_{\lambda_n}^0$ et $e_{\lambda_t}^0$ en fonction de $h$ (Test 1). . . . .	83
5.3	Erreurs calculées $e_{\mathbf{u}^e}^0$ , $e_{p^e}^0$ et $e_{\mathbf{u}^e}^1$ en fonction de $h$ (Test 2). . . . .	87
5.4	Erreurs calculées $e_{\lambda_n^e}^0$ et $e_{\lambda_t^e}^0$ en fonction de $h$ (Test 2). . . . .	87
5.5	Erreurs calculées $e_{\mathbf{u}}^0$ , $e_p^0$ et $e_{\mathbf{u}}^1$ en fonction de $h$ (Test 3). . . . .	90
5.6	Erreurs calculées $e_{\lambda_n}^0$ et $e_{\lambda_t}^0$ en fonction de $h$ (Test 3). . . . .	90



# Bibliographie

- [1] ADAMS, R.A. Sobolev spaces, Academic Press, New York NY, San Francisco CA, London, 1975.
- [2] AMONTONS, G. De la résistance causée dans les machines, tant par les frottements des parties qui les composent, que par la raideur des cordes qu'on emploie, et la manière de calculer l'un et l'autre. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris, 1699.
- [3] AMROUCHE, C. AND SELOULA, N.E.H. On the Stokes equations with the Navier-type boundary conditions, Differential Equations and Applications, Vol. 3, 581-607, 2011.
- [4] ASTORINO, M. AND GRANDMONT, C. Convergence of a projection semi-implicit scheme for fluid structure interaction problems.
- [5] AYADI, M, GDOURA, M.K., AND SASSI, T. Mixed formulation for Stokes problem with Tresca friction, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 435 348, 1069-1072, 2010.
- [6] AYADI, M., BAFFICO, L., GDOURA, M.K., SASSI, T. Error estimates for Stokes problem with Tresca conditions. ESAIM M2AN (published on line DOI : [http :dx.doi.org/10.1051/m2an/2014001](http://dx.doi.org/10.1051/m2an/2014001)), 2014.
- [7] AZIZ, A.K. The mathematical foundation of the Finite Element method with applications to partial differential equations. Academic Press, New York and London 1972.
- [8] BAFFICO, L. AND SASSI, T. Existence result for a fluid structure interaction problem with friction type slip boundary condition. ZAMM (published on line DOI : [10.1002/zamm.201300301](https://doi.org/10.1002/zamm.201300301)), 2014.
- [9] BEN BELGACEM, F. AND RENARD, Y Hybrid finite element method for the Signorini problem, Math. Comput., Vol. 72, 243, 1117-1145, 2003.
- [10] BALILESCU, L., SAN MARTÍN, J. AND TAKAHASHI, T. Fluid-structure interaction system with Coulomb's law, HAL Id : [hal-01386574](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01386574) [https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01386574](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01386574), submitted on 24 Oct 2016.

- [11] BERNARDI, C. AND GIRAULT, V. A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements, *SIAM J. Numer. Anal.* 35, 1893-1916, 1998.
- [12] BERTOLUZZA, S., ISMAIL, M. AND MAURY, B. The fat boundary method : semi-discrete scheme and some numerical experiments. In *Domain decomposition methods in science and engineering*, vol. 40 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* Springer, Berlin, pp. 513-520, 2005.
- [13] BODNAR, T., P. GALDI, G. AND NECASOVA, S. Editors. *Fluid-Structure Interaction and Biomedical Applications*. Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
- [14] BOUKROUCHE, M., BOUSSETOUAN, I. AND PAOLI, L. Non-isothermal Navier-Stokes system with mixed boundary conditions and friction law : uniqueness and regularity properties, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, Vol. 102, 168-185, 2014.
- [15] BOUKROUCHE, M., BOUSSETOUAN, I. AND PAOLI, L. Unsteady 3D-Navier-Stokes system with Tresca's friction law, *arXiv preprint arXiv :1512.06607*, 2015.
- [16] BOUKROUCHE, M., BOUSSETOUAN, I. AND PAOLI, L. Existence for non-isothermal fluid flows with Tresca's friction and Cattaneo's heat law, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 427, 499-514, 2015.
- [17] BOULAKIA, M., SCHWINDT, E. AND TAKAHASHI, T. Existence of strong solutions for the motion of an elastic structure in an incompressible viscous fluid. *Interfaces Free Bound.* 14, no.3, 273-306, 2012.
- [18] BOYER, F. AND FABRIE, P. *Mathematical tools for the study of incompressible Navier-Stokes Equation and related Models*. Volume 183, Springer.
- [19] BRENNER, S. C. AND SCOTT, L. R. *The mathematical theory of finite element methods*, 3rd ed., Springer, 2007.
- [20] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [21] CHAMBOLLE, A., DESJARDINS, B., ESTEBAN, M. AND GRANDMONT, C. : Existence of weak solutions for an unsteady fluid-plate interaction problem, *J. Math. Fluid Mech.*, 7, 368-404, 2005.
- [22] CIARLET, P.G. *Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1988.
- [23] CONCA, C. AND DONATO, P. Existence results for a nonlinear problem modeling the displacement of a solid in a transverse flow. *RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique*, 28(5), 539-556, 1994.
- [24] CONSIGLIERI, L. Existence for a class of non-Newtonian fluids with a nonlocal friction boundary condition, *Acta Mathematica Sinica*, Vol. 22, 523-534, 2006.



- [25] COULOMB, C.A. Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et à la raideur des cordages. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie Royale, Paris, pages 161-342, 1785.
- [26] COUTAND, D. AND SHKOLLER, S. Motion of an elastic solid inside an incompressible viscous fluid. Arch. Ration. Mech. Anal., 176(1) :25-102, 2005.
- [27] COUTAND, D. AND SHKOLLER, S. The interaction between quasilinear elastodynamics and the Navier-Stokes equations. Arch. Ration. Mech. Anal., 179(3) :303-352, 2006.
- [28] DE VINCI, L. Les carnets. Trad.L.Servicen. Paris : Gallimard, 1942.
- [29] DEPARIS, S., FERNANDEZ, M.A. AND FORMAGGIA, L. Acceleration of a fixed point algorithm for fluid-structure interaction using transpiration conditions. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 37(4) :601-616, 2003.
- [30] DESJARDINS, B. AND ESTEBAN, M.J. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. Arch. Ration. Mech. Anal., 146(1) : 59-71, 1999.
- [31] DESJARDINS, B., ESTEBAN, M.J., GRANDMONT, C. AND LE TALLEC, P. Weak Solutions for a Fluid- Elastic Structure Interaction Model, Rev. Mat. Complut.,14 , no. 2, 523-538, 2001.
- [32] DJOKO, J. K. AND MBEHOU, M. Finite element analysis of the stationary power-law Stokes equations driven by friction boundary conditions. Journal of Numerical Mathematics, 23(1), 21-40, 2015.
- [33] DJOKO, J. K. Discontinuous Galerkin finite element discretization for steady stokes flows with threshold slip boundary condition. Quaestiones Mathematicae, 36(4), 501-516, 2013.
- [34] DJOKO, J. K. On the times approximation of thse Stokes equations with non-linear Slip boundary conditions. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 11(1), 2014.
- [35] DURANY, J., GARCÍA, G. AND VASQUEZ, C. An elastohydrodynamic coupled problem between a piezoviscous Reynolds equation and a hinged plate model. RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique, 31(4), 495-516, 1997.
- [36] DUVAUT, G. AND LIONS, J.L.Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972
- [37] ERN, A. AND GUERMOND, J-L. Eléments Finis : Théorie, Application, Mise en Oeuvre, Mathématiques et Applications 36, SMAI, Springer, 2001.
- [38] FARHAT, C., GEUZAINÉ, P. AND GRANDMONT, C. Design and analysis of ALE schemes with provable second-order time-accuracy for inviscid and viscous flow simulations, J. of Comput. Phys., 191, no 1, 206-227, 2003.

- [39] FARHAT, C., GEUZAIN, P. AND GRANDMONT, C. The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids, *J. Comput. Phys.*, 174, no. 2, 669-694, 2001.
- [40] FEIREISL, E. On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 167 No 4, 281-308, 2003.
- [41] FERNANDEZ, M., GERBEAU, J.-F. AND GRANDMONT, C. A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 69, no. 4, 794-821, 2007.
- [42] FUJITA, H. A coherent analysis of Stokes flows under boundary conditions of friction type, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 149, 57-69, 2002.
- [43] FUJITA, H. A Mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak and slip boundary conditions, *Mathematical Fluid Mechanics and Modelling*, 888, 199-216, 1994.
- [44] FUJITA, H. Flow Problems with Unilateral Boundary conditions. *Leçons, Collège de France*, October, 1993.
- [45] FUJITA, H. Remarks on the Stokes flows under slip and leak boundary conditions of friction type, *Topics in Mathematical Fluid Mechanics*, Vol. 10, 73-94, 2002.
- [46] FUJITA, H. AND KAWARADA, H. Variational inequalities for the Stokes equation with boundary conditions of friction type, *Recent Developments in Domain Decomposition Methods and Flow Problems*, Vol. 11, 15-33, 1998.
- [47] GALDI, G.P. AND KYED, M. Steady flow of a Navier-Stokes liquid past an elastic body. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 194, no. 3, 849-875, 2009.
- [48] GDOURA, M.K. Problème de Stokes avec des conditions aux limites non-linéaires : analyse numérique et algorithmes de résolution, *Thèse en co-tutelle, Université Tunis El Manar et Université de Caen Basse Normandie*, 2011.
- [49] GENDRE, L. AND NERON, D. La simulation multi-physique, édité le 03-09-2010, *Université Paris-Saclay*.
- [50] GÉRARD-VARET, D AND HILLAIRET, M. Existence of weak solutions up to collision for viscous fluid-solid systems with slip. *Comm. Pure Appl. Math.*, 67(12) :2022-2075, 2014.
- [51] GÉRARD-VARET, D., HILLAIRET, M. AND WANG, C. The influence of boundary conditions on the contact problem in a 3D Navier-Stokes flow. *J. Math. Pures Appl.* (9), 103(1) :1-38, 2015.

- [52] GILBARG, D. AND TRUDINGER, N.S. Elliptic partial differential equations of second order, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [53] GIRAULT, V. AND RAVIART, P.A. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [54] GLOWINSKI, R., PAN, T. W., HESLA, T. I., JOSEPH, D. D. AND PERIAUX, J. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : application to particulate flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2), 363-426, 2001.
- [55] GRANDMONT, C. Existence and uniqueness for a two-dimensional steady-state fluid -structure interaction problem. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326, pp.651-656, 1998.
- [56] GRANDMONT, C. Existence for a three-dimensional steady state fluid-structure interaction problem. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 4(1), 76-94, 2002.
- [57] GRANDMONT, C. AND HILLAIRET, M. Existence of global strong solutions to a beam-fluid interaction system. arXiv preprint arXiv :1504.00830, 2015.
- [58] GRANDMONT, C. Analyse mathématique et numérique de problèmes d'interaction fluide-structure. Application a la modélisation de l'appareil respiratoire (mémoire HDR, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI), 2009.
- [59] GRANDMONT, C. On an unsteady fluid-beam interaction problem. preprint september 7, 2004.
- [60] GRANDMONT, C. Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'interaction fluide-structure. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1998.
- [61] GRANGER, S. Comment éviter l'accident du Pont de Tacoma ?, DER/Cher, INIS-FR-104.
- [62] GRISVARD, P. : Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Monographs and Studies in Mathematics, 24. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [63] HASLINGER, J. AND STEBEL, J. Stokes problem with a solution dependent slip bound : Stability of solutions with respect to domains. *ZAMM · Z. Angew. Math. Mech.* 1-12 / DOI 10.1002/zamm.201500117, 2016.
- [64] HERVET, H. AND LEGER, L. Flow with slip at the wall : from simple to complex fluids, *C.R. Physique* 4, 241-249, 2003.
- [65] HOWELL, J. S. AND WALKINGTON, N. J. Inf-sup conditions for twofold saddle point problems, *Numerische Mathematik* 118(4), 663-693, 2011.

- [66] ITOH, S. AND TANI, A. The initial value problem for the non-homogeneous Navier-Stokes equations with general slip boundary condition, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics, Vol. 130, 827-835, 2000.
- [67] JUDAKOV, N. The solvability of the problem of the motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid. *Dinamika Splosn. Sredy, Vyp. 18 Dinamika Zidkost. so Svobod. Granicami*, 249-253, 255, 1974.
- [68] KASHIWABARA, T. On a finite element approximation of the Stokes equations under boundary conditions of friction type. Part I : slip boundary problem, 1-30, submitted 2011.
- [69] KASHIWABARA, T. On a finite element approximation of the Stokes problem under leak or slip boundary conditions of friction type. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 51, No. 4, pp. 2448-2469, 2013.
- [70] KASHIWABARA, T. On a strong solution of the non-stationary Navier-Stokes equations under slip or leak boundary conditions of friction type. *Journal of Differential Equations*, 254(2), 756-778, 2013.
- [71] KASHIWABARA, T. On a finite element approximation of the Stokes equations under a slip boundary condition of the friction type. *Japan journal of industrial and applied mathematics*, 30(1), 227-261, 2013.
- [72] KIKUCHI, N. AND ODEN, J. T. Contact problems in elasticity, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [73] KUCERA, R. Convergence rate of an optimization algorithm for minimizing quadratic functions with separable convex constraints. *SIAM J.OPTIM.* Vol. 19, No.2, pp.846-862.
- [74] KUKAVICA, I. AND TUFFAHA, A. Well-posedness for the compressible Navier-Stokes-Lamé system with a free interface. *Nonlinearity* 25, no. 11, 3111-3137, 2012.
- [75] LAUGA, E., BRENNER, M. AND STONE, H. Microfluidics : the no-slip boundary condition. In *Springer handbook of experimental fluid mechanics* (pp. 1219-1240). Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [76] LE TALLEC, P. AND MOURO, J. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190 :3039-3067, 2001.
- [77] LI, Y. AND AN, R. Penalty finite element method for Navier-Stokes equations with nonlinear slip boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 69(3), 550-566, 2012.
- [78] LI, Y. AND AN, R. Two-level pressure projection finite element methods for Navier-Stokes equations with nonlinear slip boundary conditions. *Applied Numerical Mathematics*, 61(3), 285-297, 2011.

- [79] LI, Y. AND LI, K. Pressure projection stabilized finite element method for Stokes problem with nonlinear slip boundary conditions, 461 J. Comput. Appl. Math. 235, 3673-682, 2011.
- [80] LI, Y. AND LI, K. T. Locally stabilized finite element method for Stokes problem with nonlinear slip boundary conditions. Journal of Computational Mathematics, 826-836, 2010.
- [81] LI, Y. AND LI, K. Pressure projection stabilized finite element method for Navier-Stokes equations with nonlinear slip boundary conditions. Computing, 87(3-4), 113-133., 2010.
- [82] LI, Y. AND LI, K.T. Uzawa iteration method for Stokes type variational inequality of the second kind. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 27(2), 303-316, 2011.
- [83] LIONS, J.-L. ET MAGENES, E. Problèmes aux limites non homogènes, Dunod, 1968.
- [84] MAURY, B. Direct simulations of 2D fluid-particle flows in biperiodic domains. Journal of computational physics, 156(2), 325-351., 1999.
- [85] MAXWELL, J. C. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., 170 : 231-256, 1879.(<http://dx.doi.org/10.1137/120896396>)
- [86] MUHA, B. AND ZVONIMIR TUTEK, Z. Note on evolutionary free piston problem for Stokes equations with slip boundary conditions. Commun. Pure Appl. Anal., 13(4) :1629-1639, 2014.
- [87] MUHA, B. AND CANIC, S. Existence of a weak solution to a fluid-elastic structure interaction problem with the Navier slip boundary condition. Journal of Differential Equations Volume 260, Issue 12, Pages 8550-8589, 15 June 2016.
- [88] MUHA, B. AND CANIC, S. Existence of a Weak Solution to a Nonlinear Fluid-Structure Interaction Problem Modeling the Flow of an Incompressible, Viscous Fluid in a Cylinder with Deformable Walls. Arch. Ration. Mech. Anal., 207(3) :919-968, 2013.
- [89] NAVIER, C. L. M. H. mouvement des fluides. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, VI :389-440, 1823.
- [90] NOBILE, F. Numerical Approximation of fluid-structure interaction problems with application to haemodynamics. PhD thesis, 2001.
- [91] PLANAS, G. AND SUEUR, F. On "the viscous incompressible fluid + rigid body" system with Navier conditions. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 31(1) :55-80, 2014.

- [92] RABACK, P., RUOKOLAINEN, J., LYLÿ, M. AND JÄRVINEN, E. Fluid-structure interaction boundary conditions by artificial compressibility. In ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Swansea, 2001.
- [93] RAO, I. AND RAJAGOPAL, K. The effect of the slip boundary conditions on the flow of fluids in a channel, *Acta Mechanica* 135, 113- 126, 1999.
- [94] RAYMOND, J.-P. AND VANNINATHAN, M. A fluid-structure model coupling the Navier-Stokes equations and the Lam system. *J. Math. Pures Appl.* (9) 102, no. 3, 546-596, 2014.
- [95] ROUX, C. L. AND TANI, A. Steady solutions of the Navier-Stokes equations with threshold slip boundary conditions. *Mathematical methods in the applied sciences*, 30(5), 595-624, 2007.
- [96] SAIDI, F. Non-Newtonian flow in a thin film with boundary conditions of Coulomb's type, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/ Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 86, 702-721, 2006.
- [97] SAIDI, F. Non-Newtonian Stokes flow with frictional boundary conditions, *Math.Model .Anal.*12, 483-495, 2007.
- [98] SAIDI, F. Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes avec des conditions aux bords non linéaires. *Etude mathématique et numérique*, thèse de doctorat à l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne, 2005.
- [99] SAITO, N. AND FUJITA, H. Regularity of solutions to the Stokes equations under a certain nonlinear boundary condition, *The Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, Vol 223, 73-86, 2001.
- [100] SAITO, N. On the Stokes equation with the leak and slip boundary conditions of friction type : regularity of solutions(in English), 465 *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 40(2), 345-383, 2004 ; errata *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 48(2), 475-476, 2012.
- [101] SAN MARTÍN, J.S., SCHEID, J.-F. AND SMARANDA, L. The Lagrange-Galerkin method for fluid-structure interaction problems. *Boundary Value Problems*, 2013(1), 1-15, 2013.
- [102] SAN MARTÍN, J.S., SCHEID, J.-F AND SMARANDA, L. A time discretization scheme of a characteristics method for a fluid-rigid system with discontinuous density, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 348, 935-939, 2010.
- [103] SAN MARTÍN, J.S., SCHEID, J-F., TAKAHASHI, T. AND TUCSNAK, M. Convergence of the Lagrange- Galerkin method for the equations modelling the motion of a fluid-rigid system, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 43, no. 4, 1536-1571, 2005.

- [104] SAN MARTÍN, J.S., SCHEID, J.-F. AND SMARANDA, L. A modified Lagrange-Galerkin method for a fluid-rigid system with discontinuous density. *Numerische Mathematik*, 122(2), 341-382., 2012.
- [105] SAN MARTÍN, J.S., SCHEID, J.-F AND SMARANDA, L. Convergence of the Lagrange- Galerkin method for the equations modelling the motion of a fluid-rigid system, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 339, 2004.
- [106] SERRE, D. Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence. *Japan J. Appl. Math.*, 4(1) : 99-110, 1987.
- [107] SERRIN, J. Mathematical principles of classical fluid mechanics. *Handbuch der Physik* (herausgegeben von S. Flugge), Bd. 8/1, *Stromungsmechanik I* (Mitherausgeber C. Truesdell), 125-263, Springer-Verlag, 1959.
- [108] TAKAHASHI, T. Analysis of strong solutions for the equations modeling the motion of a rigid-fluid system in a bounded domain. *Adv. Differential Equations*, 8(12) : 1499-1532, 2003.
- [109] TANI, A. The initial value problem for the equations of motion of general fluids with general slip boundary condition, *Mathematical Analysis of Fluid and Plasma Dynamics*, Vol. 734, 123-142, 1990.
- [110] TEMAM, R. *Navier-Stokes equations theory and numerical analysis*, AMS Chelsea Publishing, Third Revised Edition, 2001.
- [111] WEINBERGER, H.F. On the steady fall of a body in a Navier-Stokes fluid. In *Partial differential equations* (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIII, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971). Amer. Math. Soc., Providence, R. I., pp. 421-439, 1973.
- [112] WANG, C. Strong solutions for the fluid-solid systems in a 2-D domain. *Asymptot. Anal.*, 89(3-4) :263-306, 2014.