



HAL
open science

Gestion de flot de conteneurs et de véhicules dans un réseau multimodal

Mohamed Hemmidy

► **To cite this version:**

Mohamed Hemmidy. Gestion de flot de conteneurs et de véhicules dans un réseau multimodal. Recherche opérationnelle [math.OC]. Normandie Université, 2018. Français. NNT : 2018NORMLH41 . tel-02132408

HAL Id: tel-02132408

<https://theses.hal.science/tel-02132408>

Submitted on 17 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité: Mathématiques Appliquées

Préparée au sein de «Université Le Havre Normandie - LMAH»

Gestion de flot de conteneurs et de véhicules dans un réseau multimodal

**Présentée et soutenue par
Mohamed HEMMIDY**

**Thèse soutenue publiquement le 06/12/2018
devant le jury composé de**

Mme Nathalie BOSTEL	Professeur – Université de Nantes	Rapporteur
Mme Andrea Cynthia DUHAMEL	Maître de Conférences HDR – Université de Technologie de Troyes	Rapporteur
M. Mohamed DIDI BIHA	Professeur – Université de Caen Normandie	Examineur
M. Abdelkader SBIHI	Professeur – ESCEM Ecole de Management, Tours	Examineur
M. Adnan YASSINE	Professeur – Université Le Havre Normandie	Directeur de thèse
M. Cédric JONCOUR	Maître de Conférences – Université Le Havre Normandie	Co-encadreur de thèse, membre invité
Mme Sophie MICHEL	Maître de Conférences – Université Le Havre Normandie	Co-encadreur de thèse, membre invité

Thèse dirigée par Adnan YASSINE, Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre (LMAH), Université Le Havre Normandie – France.

Etablissement



Ecole Doctorale



Laboratoire



REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser mes remerciements à Adnan Yassine, mon directeur de thèse d'avoir cru en moi, d'avoir consacré du temps pour la réalisation de cette thèse, de son soutien et de son implication dans ce travail aussi bien au niveau scientifique qu'au niveau administratif. Je remercie aussi mon encadrante Sophie Michel pour ses idées pertinentes, pour son implication dans le sujet, pour sa disponibilité et pour son aide. Je remercie également mon encadrant en Master 1, mon encadrant en Master 2, mon encadrant en doctorat et mon enseignant Cédric Joncour, avec qui j'ai appris toutes les connaissances nécessaires à la réalisation de ce travail aussi bien au niveau mathématique qu'au niveau informatique. Je suis vraiment reconnaissant à chacun d'entre eux et j'ai beaucoup apprécié leurs qualités humaines et leur rigueur mathématique.

Je remercie infiniment Mme Nathalie BOSTEL (Professeur-université de Nantes) et Mme Andrea Cynthia DUHAMEL (Maitre de Conférences HDR-Université de Technologie de Troyes) d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

Je remercie aussi les deux professeurs M. Mohamed DIDI BIHA (de l'Université de Caen Normandie) et M. Abdelkader SBIHI (de l'ESCEM Ecole de Management, Tours) d'avoir accepté d'être examinateurs de cette thèse.

Merci aussi à tous les membres permanents du LMAH dont la majorité d'entre eux m'ont enseigné en Master et m'ont accompagné durant ma mission doctorale d'enseignement et durant mon poste d'ATER. En parallèle du climat de travail, l'ambiance était riche, sympatrique et conviviale.

Merci également à tous les doctorants et amis du LMAH Mouhalilou Aleyouka, Achraf Berajaa, Mohamed Maama, Alexandre Thorel ainsi que mes amis du LITIS, avec qui j'ai passé des moments forts et mémorables.

Enfin, j'ai une pensée toute particulière pour mes parents, ma famille et ma femme qui m'ont toujours soutenu. Sans eux, jamais je n'aurais pu accomplir autant de choses.

Merci à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction générale	7
2	Revue de littérature et contexte du problème	15
2.1	Revue de littérature pour le niveau stratégique	17
2.2	Revue de littérature pour le niveau tactique	17
2.3	Revue de littérature pour le niveau opérationnel	18
2.4	Tableau récapitulatif de la revue de littérature	19
2.5	Conclusion	22
2.6	Présentation du flot, du réseau et des ressources	22
2.6.1	Le flux étudié	22
2.6.2	Le réseau	23
2.6.3	Les ressources	23
3	Modèle mathématique du PGFCRM	25
3.1	Les données du problème	26
3.1.1	L'horizon temporel	26
3.1.2	Les moyens de transport	26
3.1.3	Les catégories des demandes	26
3.1.4	Le réseau du transport	27
3.1.5	Les véhicules	28
3.1.6	Les demandes	29
3.2	Les variables de décision	29
3.2.1	Les variables de flot envoyé sur les arcs	29
3.2.2	Les variables d'activation des véhicules	29
3.2.3	Les variables de flot transitant dans les plateformes multimodales	30
3.3	Contraintes du problème	32
3.3.1	Contraintes liées aux plateformes multimodales	32
3.3.2	La conservation du flot de conteneurs au niveau des sites	36
3.3.3	Contraintes liées aux véhicules	37
3.3.4	Contraintes liées aux capacités des véhicules et aux matières dangereuses	39
3.4	L'objectif du problème	40
3.4.1	Le coût de transport	40

TABLE DES MATIÈRES

3.4.2	Le coût de stockage	41
3.4.3	Le coût de manutention	41
3.4.4	Le coût de déplacement des véhicules	41
3.4.5	Le coût d'activation des véhicules	42
3.5	Résultats numériques	42
3.5.1	Génération et présentation des instances	42
3.5.2	Résultats numériques	44
3.6	Conclusion	46
4	Modèle Agrégé et bornes (primale et duale)	47
4.1	Construction des données	47
4.1.1	L'horizon temporel	48
4.1.2	Les moyens de transport	48
4.1.3	Les catégories des demandes	48
4.1.4	Le réseau du transport	48
4.1.5	Les véhicules	52
4.1.6	Les demandes	53
4.2	Variables de décision	56
4.2.1	Les variables de flot envoyé sur les arcs	56
4.2.2	Les variables d'activation des véhicules	57
4.2.3	Les variables de flot transitant dans les plateformes multimodales	58
4.3	Contraintes du problème	59
4.3.1	Contraintes liées au plateformes multimodales	59
4.3.2	La conservation du flot des conteneurs au niveau des sites	61
4.3.3	Contraintes liées aux véhicules	61
4.3.4	Contraintes liées aux capacités des véhicules et aux matières dangereuses	63
4.4	L'objectif	63
4.5	Construction d'une borne duale au problème initial	66
4.5.1	Construction d'une solution S' du problème agrégé induite par la solution \mathcal{S} du problème initial	66
4.5.2	Vérification de la réalisabilité de la solution agrégée construite à partir de la solution initiale	72
4.5.3	La comparaison des deux fonctions objectifs	110
4.6	Construction d'une borne primale	118
4.6.1	Égalités induites par les variables associées aux trains et aux barges	118
4.6.2	Égalités induites par les variables associées aux camions	119
4.6.3	Égalités induites par les variables de flot transitant dans les plateformes multimodales	119
4.7	Proposition d'une solution pour le problème de zonage	120
4.8	Résultats numériques	121
4.8.1	Génération et présentation des instances	121
4.8.2	Résultats numériques	124
4.9	Conclusion	126
5	Conclusion générale et perspectives	129

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le transport maritime constitue l'un des plus anciens vecteurs d'interaction de la planète. En effet, dès que l'être humain a su creuser dans les troncs d'arbres, assembler les morceaux de bois ; il a compris que la voie d'eau pourrait servir pour transporter les personnes et les marchandises. Selon la CNUCED (Conférence des Nations Unies sur le Commerce et le Développement), 50 000 navires ont navigué dans le monde entier en 2012, transportant 9 milliards de tonnes, représentant un marché de 1500 milliards d'euros et faisant du transport maritime le moyen de transport le plus important dans le commerce mondial, en termes de capacité. En 2015, plus de 10 milliards de tonnes ont été transportées à travers des axes maritimes, ce qui représente 80% du commerce mondial en volume. Actuellement, le transport maritime représente 90% du commerce mondial et malgré un ralentissement dû à la crise économique, ce marché devrait continuer de croître pour atteindre 2000 milliards d'euros en 2020.

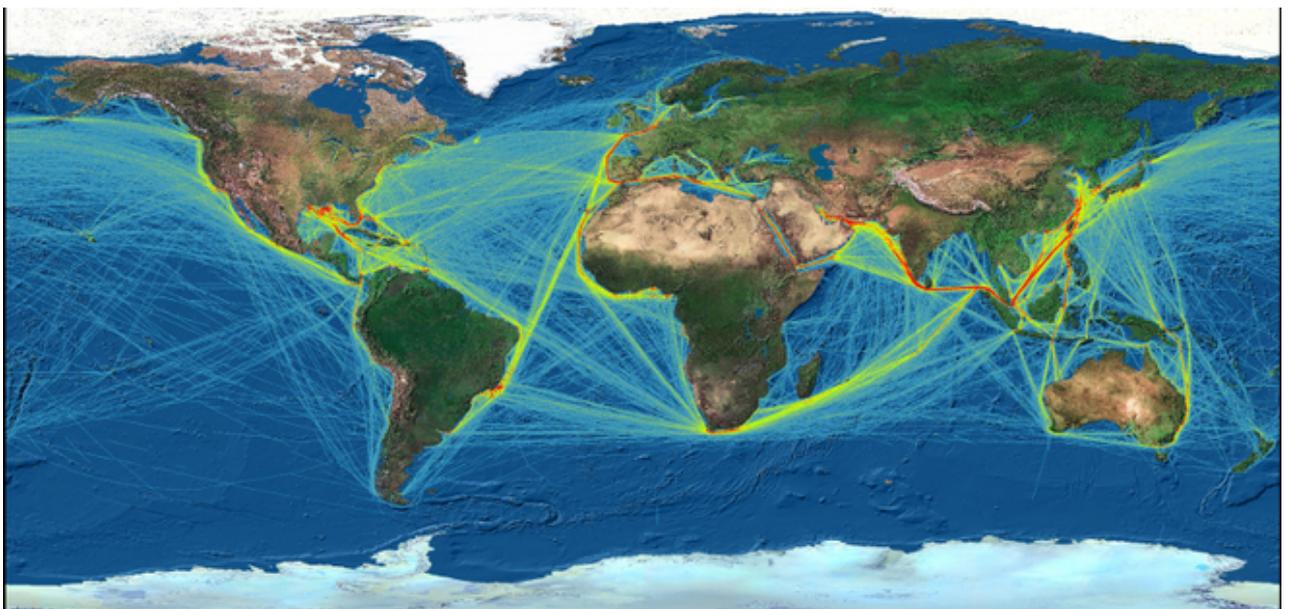


FIGURE 1 – Principales routes maritimes d'après les trajets des navires en juillet 2011 équipés du système AMVER (source [27])

CHAPITRE 1. INTRODUCTION GÉNÉRALE

En France, les flux de marchandises sont responsables de plus de 40% des émissions de CO₂ dans le secteur des transports et de plus de 10% des émissions totales de la France (tous secteurs confondus). Alors que les émissions de CO₂ baissent considérablement dans les industries et dans l'agriculture, elles augmentent dans le domaine du transport.

La route reste le moyen le plus flexible, le plus fiable, et le plus réactif (87% des transports s'effectue par le mode routier, 11% par le mode ferroviaire et 2% par le mode fluvial) malgré son prix au km parcouru qui est de plus en plus onéreux compte tenu de l'augmentation du prix du gazole. L'utilisation massive de ce mode de transport a entraîné la saturation de plusieurs axes majeurs de circulation qui sont devenus de véritables goulots d'étranglement et a augmenté l'émission de CO₂.

Le Grenelle de l'Environnement a fixé comme objectif de réduire de 20% les émissions de CO₂ liées au transport à l'horizon 2020. Il est donc important que les transporteurs et les chargeurs puissent utiliser les modes de transport les moins émetteurs en CO₂. Le transport routier restera le mode de transport privilégié en raison de sa flexibilité et de son atout à pouvoir livrer les marchandises destinées aux clients finaux sur le dernier kilomètre. Il est donc primordial de raisonner en terme de complémentarité des différents modes de transport et non en terme de concurrence ou d'opposition modale, puisque cette complémentarité entre les modes de transport est nécessaire dans le but de diminuer le coût économique et environnemental du transport de marchandises. En plus, le choix d'un transport multimodal est le résultat d'une démarche stratégique de chaque entreprise dans le cadre de la contribution au développement durable et le respect de l'environnement.

Particulièrement, si nous prenons comme exemple le Grand Port Maritime du Havre (GPHM) qui représente le 1^{er} port à conteneurs en France, 5^e en Europe et 65^e au niveau mondial, il a des connexions avec plus de 500 ports dans le monde qui sont repartis dans tous les continents. Aussi, il reçoit plus de 6000 escales annuels dont 40% de porte-conteneurs, 35% de vraquiers, 10% de ferries, 10% de navires rouliers. En 2017, le trafic dans le Grand Port Maritime du Havre a atteint plus de 72 millions de tonnes (contre 66 millions de tonnes en 2016) dont à peu près la moitié est transportée dans des conteneurs.

Au vu de la quantité de marchandises à transporter et de sa complexité à l'acheminer, il est absolument nécessaire de s'intéresser à l'ensemble de la chaîne logistique liées aux transport de ces marchandises. Celle-ci se compose principalement par le chargement dans un moyen de transport (maritime ou aérien), le transport du lieu de production vers un terminal portuaire, puis le transfert vers un nouveau mode de transport (voie ferrée, fluviale ou routière) pour un acheminement vers l'hinterland et le déchargement dans un lieu de consommation. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'acheminement des conteneurs vers l'hinterland (dans les deux sens : exportation ou importation).

Les modes d'organisation, de la planification et de la gestion du passage portuaire et d'évacuation des conteneurs vers l'hinterland sont en cours d'évolution dans tous les grands ports maritimes, avec en particulier une réorganisation des modes de post-acheminement. Grâce à l'axe seine et son importance au niveau national, les ports de Paris et les grands ports maritimes de Rouen et du Havre se sont réunis, depuis 2009, dans un Groupement d'Intérêt Économique appelé HAROPA. Ce dernier se positionne comme le quatrième port Nord-Européen et dessert un vaste hinterland dont le cœur se situe sur la vallée de la Seine et l'Île-de-France.



FIGURE 2 – Terminal de Normandie MSC (source [26])

Vu le flux considérable de conteneurs passant par le Grand Port Maritime du Havre et l'évolution croissante de ce flux, la combinaison de différents modes de transport devient nécessaire pour optimiser le passage portuaire de conteneurs. HAROPA a décidé en 2016 de construire une plate-forme multimodale connectée aux principaux terminaux. Le complexe portuaire HAROPA dispose de connexions intermodales qui permettent d'offrir le plus large service en matière de choix du mode de transport des marchandises, vers ou au départ des ports de l'axe Seine. Le transport routier chez HAROPA est un mode de transport performant et flexible, parfaitement intégré à l'organisation logistique multimodale. Il assure une connexion en moins de 10 minutes aux réseaux autoroutiers européens via les A131 et A29 et une connexion directe avec le sud-ouest ainsi qu'avec l'Espagne et le Portugal via l'A28. Le réseau ferroviaire HAROPA a pour objectif de maîtriser sa desserte terrestre tout en développant la multimodalité. Il compte plus de 10 000 trains par an et assure la desserte ferroviaire des terminaux maritimes et continentaux par une dizaine de navettes régulières sur la France et l'Allemagne en assurant une liaison directe avec Paris. L'hinterland fluvial HAROPA, sécurisé, éco-responsable et compétitif, s'étend tout le long de l'axe Seine sur plus de 500 km de voies navigables (s'étendant jusqu'à la Champagne-Ardenne et la Bourgogne), jusqu'au cœur d'un marché de 25 millions de consommateurs et au-delà.

Pour éviter une saturation des axes routiers, le développement de nouvelles dessertes fluviales et ferroviaires au sein du Grand Port Maritime du Havre devient impératif. Nous nous intéressons donc à l'organisation d'un port étendu au niveau opérationnel, en particulier à une réorganisation des modes de post-acheminement. On tend ainsi à encourager et à développer

CHAPITRE 1. INTRODUCTION GÉNÉRALE

les modes alternatifs à la route :

- le mode fluvial,
- le mode ferroviaire.

Cette organisation doit faciliter et accélérer le passage de marchandises d'un mode de transport à un autre de telle sorte que le transport de conteneurs reste rapide et fiable.

Pour la plateforme multimodale havraise, un exemple d'illustration est présenté dans la figure 3. Les deux images à gauche représentent, respectivement, un terminal portuaire havraise et un entrepôt et celles de droite représentent la plateforme multimodale du Havre et le port de Paris. Pour livrer un conteneur depuis ce terminal vers cet entrepôt, le transporteur dispose de plusieurs possibilités. Il peut l'envoyer directement par camion ce qui peut avoir comme inconvénient un prix plus élevé mais le processus de livraison va prendre moins de temps par rapport aux autres choix ; Il peut aussi le transporter par un train ou une barge ce qui coûtera moins cher et répond mieux aux exigences écologiques. Pour ces deux derniers choix, le conteneur doit passer par la plateforme collaborative havraise de nouvelle génération, qui permet aux acteurs de la chaîne logistique de fluidifier au niveau national l'ensemble des échanges liés au commerce extérieur.

Le problème de transport intervient dans de nombreuses problématiques. Il consiste simplement à organiser les flux dans un réseau en minimisant les coûts d'acheminement de ces différents flux. Cependant, pour la plupart des problématiques de transport rencontrées dans le monde industriel, de nombreuses contraintes techniques doivent souvent être prises en compte.

- contraintes de gestion temporelle : ne pas dépasser une durée maximale de transport, respecter l'ordonnancement et les horaires de livraison,
- contraintes de gestion de ressources : utiliser seulement les moyens (humains et matériels) disponibles, allouer de nouveaux moyens aux différents flux,
- contraintes de gestion de flux multiples : gérer plusieurs flux en même temps, prendre en compte les conflits éventuels entre produits
- contraintes de tournées : former des circuits de distribution de marchandises, gérer les retours aux dépôts des véhicules de transport, gérer le retour des produits défectueux,
- contraintes d'incertitudes : gérer des données (demandes ou capacités) aléatoires ou dynamiques, gérer les éventuels défaillances.

Les critères utilisés pour ce problème sont très variables en fonction des objectifs recherchés : minimisation des coûts ; ou maximisation du profil engendré par le flux transporté (en maximisant le flot transporté par des ressources limitées).

En pratique, plusieurs acteurs de transport interviennent dans le processus de livraison des conteneurs (pour chaque mode de transport, un ou plusieurs acteurs interviennent). Chaque acteur optimise ses tournées et propose des prix de transport et des éventuels horaires de trajet en fonction des demandes. Cependant, le prix total du transport pourra s'élever en l'absence d'une coopération entre ces acteurs afin d'optimiser l'ensemble des coûts intervenant dans la chaîne de transport. D'où la nécessité d'une étude globale du processus d'acheminement.

La figure 4 donne une vision sur la compétitivité du transport combiné barge-camion, et le transport routier sur l'import de conteneurs 20'DRY depuis le port fluvial de Gennevilliers. Le tableau 1.1 donne, aussi, une idée de la structure du coût de transport d'un conteneur depuis Le Havre vers l'Île-de-France, selon que l'on opte pour la voie routière ou fluviale-ferroviaire.

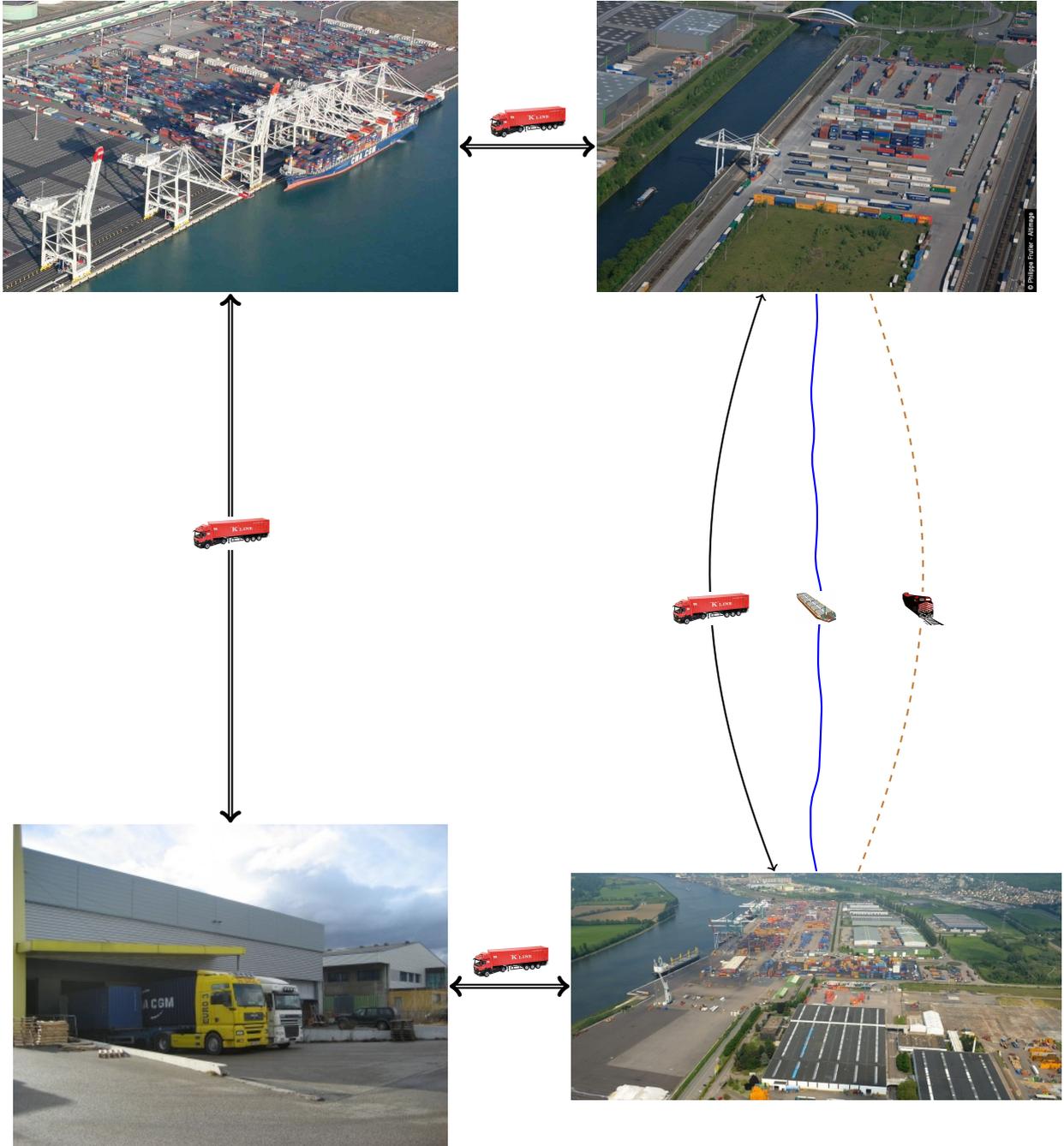


FIGURE 3 – Les acteurs en jeu : port, plateforme, entrepôt

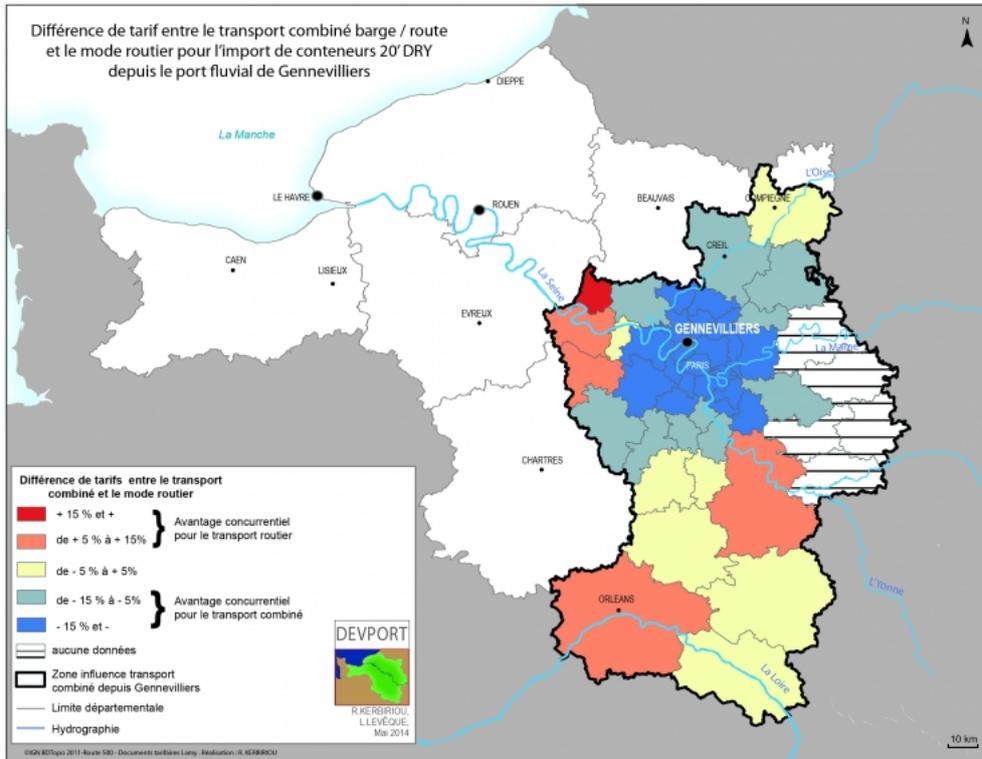


FIGURE 4 – Exemple de différences des tarifs entre le transport combiné et le mode routier

	Terrestre	Fer/Fleuve
Manutention, livraison finale et retour des conteneurs vides en Île-de-France		230€
Transport Le Havre → Île-de-France	450€	170€
Manutention et transfert au Havre		50€
Total	450 €	450 €

Tableau 1.1 – Structure des coûts de transport multimodal. (source GPMH)

Au cours du chapitre 2, nous allons présenter un état de l'art regroupant des travaux qui s'intéressent à des problèmes similaires, classés suivant la nature structure du réseau de transport (multimodal ou non) avec la présence ou l'absence des nœuds de transbordements et/ou de stockage (plateformes multimodales), ainsi que le niveau d'étude (stratégique, tactique ou opérationnel). Dans le chapitre 3, nous allons formuler le problème et construire un modèle mathématique réaliste qui prend en considération les différents aspects liés au transport et au stockage des conteneurs. L'objectif de notre modèle est de minimiser le coût global de transport

de conteneurs (coût de transport, de stockage et de manutention) tout en assurant une gestion optimale (en terme de coût) de l'ensemble de véhicules (camions, trains et barges). Dans le chapitre 4, nous allons construire un modèle agrégé qui prend en considération les principales spécificités du problème et nous allons montrer, sous certaines hypothèses, des liens entre les deux modèles mathématiques (toute solution du problème initial, induit une solution du problème agrégé; et la fonction objectif du problème agrégé est inférieure à celle du problème initial). Ainsi, à l'aide de ce problème agrégé, nous allons obtenir deux bornes : une borne duale et une borne primale de notre problème initial à partir de ce même modèle agrégé. Pour conclure, nous allons réaliser une synthèse des travaux et résultats trouvés et finir par quelques perspectives de recherche.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTÉRATURE ET CONTEXTE DU PROBLÈME

La gestion de la chaîne logistique globale nécessite un programme de transport optimal capable de gérer les déplacements de marchandises et leurs différents moyens de transport depuis leur conception jusqu'au client final. Pour ce faire, et pour améliorer la performance de la chaîne logistique globale, les acteurs de cette chaîne utilisent le transport multimodal qui n'est autre que la combinaison d'au moins deux modes de transport. Ce mode de transport considère le contenant et le contenu comme un élément indissociable entre le point de départ et la destination finale et nécessite, dans la plupart de cas, un stockage temporaire dans une zone de stockage dite « plateforme multimodale ». Les plateformes multimodales constituent des nœuds du réseau de transport permettant le passage des marchandises d'un mode à un autre mais pouvant aussi être des lieux privilégiés d'activités logistiques à valeur ajoutée. La gestion de ces plateformes multimodales devient une priorité et un objectif principal pour faciliter le passage de marchandises d'un mode de transport à un autre. Nous rappelons la distinction entre les deux termes multimodal et intermodal. Malgré qu'ils désignent tout les deux la présence d'au moins deux modes de transport, le premier terme sous entend qu'il peut y avoir d'empotage et de dépotage de conteneurs contrairement au second terme.

Le Problème de Gestion du Flot de Conteneurs dans un Réseau Multimodal (PGFCRM) a intéressé plusieurs chercheurs bien que les travaux de recherche développés dans ce domaine ne soient pas nombreux. Dans cette thèse nous présentons un nouveau modèle mathématique qui tient compte de la plupart des contraintes réelles existantes. Nous présentons, dans la première partie de ce chapitre, un état de l'art regroupant des travaux qui s'intéressent à des problèmes similaires, un tableau classifiant les différentes études suivant la structure du réseau de transport (multimodal ou non) avec la présence ou l'absence des nœuds de transbordements et/ou de stockage (plateformes multimodales), ainsi que le niveau d'étude (stratégique, tactique ou opérationnel). Dans la deuxième partie, nous présentons le contexte de notre problème.

Dans le domaine de transport et de la logistique, les prises de décisions sont classées selon leurs types : stratégique, tactique ou opérationnel. Cette classification peut être illustrée par la logistique ferroviaire par les exemples suivants.

CHAPITRE 2. REVUE DE LITTÉRATURE ET CONTEXTE DU PROBLÈME

- Les décisions stratégiques : ce sont les décisions d'avenir lointain qui concernent les orientations générales de l'entreprise et qui définissent sa stratégie, ses relations avec son environnement, son organisation à long terme (missions, vision, objectifs, valeurs) et le choix des moyens/ressources à mettre en œuvre pour atteindre les objectifs fixés et réaliser la stratégie définie. Exemple : lancement d'un nouveau produit, abandon d'une activité, fusion avec une autre entreprise, construction de nouvelles infrastructures (lignes de trains ou bâtiments,...), dimensionnement du réseau ou la politique d'investissement (matériel ou humain). Elles sont prises par la direction générale de l'entreprise.
- Les décisions tactiques : ce sont les décisions à moyen termes relatives à la gestion des moyens définis par les décisions stratégiques (ressources humaines, matérielles, financières et technologiques) et qui ont une des conséquences importantes pour l'entreprise. Exemples : lancement d'une campagne publicitaire, acquisition de matériel de production, recrutement d'un cadre dirigeant, planification des chemins empruntés par les trains ou la prévention des effectifs pour assurer un bon fonctionnement du réseau lors des périodes d'affluence. En général, ces décisions sont prises par le personnel d'encadrement de l'entreprise.
- Les décisions opérationnelles : ce sont les décisions nécessaires au bon fonctionnement quotidien qui ont une portée limitée et comportent un risque mineur. Exemples : achat de fournitures de bureau, planification des horaires journaliers des équipes et des équipements en fonction des imprévus (trains en panne, personnels malades, augmentation des demandes). En général, elles sont prises par le personnel d'encadrement ou les employés.

Dans le tableau 2.1, nous présentons les spécificités de chaque niveau d'étude. En particulier, pour notre problème, nous nous intéressons à un niveau d'étude opérationnelle. Ainsi, dans la revue de littérature, nous présentons les différents problèmes existants dans la littérature suivant leur niveau de décision.

Niveau de décision	décision stratégique	décision tactique	décision opérationnelle
Prise de décision	décisions prises à un haut niveau hiérarchique	décisions liées au fonctionnement du quotidien	décisions consistant à ré-optimiser les décisions tactiques
Horizon temporel	long terme (décennies-années)	moyens termes (mois-semaines)	court terme (jours-heures)
Risque	élevé	moyen	faible
Niveau d'incertitude	décisions prises selon différents scénarios	décisions prises en fonction de données moyennes	gestion de données dynamique
Exemples de décisions	planification d'une stratégie future, conception de réseau complexes, investissement dans une entreprise,...	planification de décisions périodiques, gestion d'emploi du temps et des ressources, mise en application des décisions stratégiques,...	planification d'une solution technique, réajustement des décisions tactiques, optimisation des décisions liées aux imprévus,...

Tableau 2.1 – Les différents niveaux de décision (stratégique, tactique, opérationnel)



2.1 Revue de littérature pour le niveau stratégique

Plusieurs chercheurs se sont intéressés au problème de transport de conteneurs au niveau stratégique. En revanche, nous présentons un seul papier qui s'est intéressé à un problème ayant un réseau de transport similaire à celui du nôtre.

Zhi-Hua Hu a étudié dans [20] un problème de planification du transport multimodal (basé sur le modèle d'affinité immunitaire pour les secours d'urgence). Son modèle est proposé pour des situations d'urgences. En revanche, il est applicable pour une vision stratégique. Il propose un modèle mathématique multi-objectif pour la sélection d'un chemin d'approvisionnement. Il s'est intéressé au calcul du plus court chemin, en terme de coût de transport, entre deux sommets S et E. Son objectif est de minimiser les différents coûts. Les sommets intermédiaires représentent des plateformes (au sein desquelles on peut passer d'un mode de transport à un autre). La décision d'utiliser ces nœuds de transbordement pour des situations d'urgences est équivalente, dans une vision stratégique, à la décision de construire des plateformes multimodales dans des emplacements potentiels.

Le réseau de transport auquel nous nous intéressons a la même structure et la même nature des nœuds de transbordements que le réseau considéré par Zhi-Hua Hu dans cette étude. Cependant, l'aspect dynamique et plusieurs contraintes techniques sont absentes dans son modèle qui s'intéresse plutôt à un niveau stratégique du problème.

2.2 Revue de littérature pour le niveau tactique

Dans le papier [4], le travail réalisé par T-S. Chang était concentré sur le choix de meilleurs itinéraires routiers pour l'expédition de marchandises via un réseau international et intermodal. Il formule le problème sous forme d'un problème multi-objectif multimodal de flux (MMMFP) avec des fenêtres de temps. Il prend, donc, en considération les modes de transport programmés et les délais de livraison demandés. Le coût total de transport ainsi que le temps de livraison sont à minimiser. Le problème est NP-difficile. Ainsi, il propose une heuristique basée sur les techniques de relaxation et de décomposition. Le problème initial est divisé en une suite de sous-problèmes de dimensions plus petites et plus faciles à résoudre.

Il a étudié le problème de transport au niveau tactique pour un réseau international et il a considéré les deux modes : maritime et aérien. Par rapport à notre modèle, il ne considère pas la gestion du stock, la gestion des lieux de transbordement et la gestion des véhicules (camions, avions, bateaux ou barges selon les modes de transports considérés). En effet, le niveau décisionnel de notre problème nous oblige à considérer les différents critères qui entrent en jeu dans le processus de livraison.

L. Moccia, J-F. Cordeau, G. Laporte, S. Ropke et M. P. Valentini se sont intéressés dans [7], à la modélisation et la résolution du problème de routage multimodal avec des horaires et

des fenêtres de temps. Ils considèrent un ensemble de marchandises à livrer avec des fenêtres de temps de prise en charge et des fenêtres de temps pour la livraison. Ainsi, ils ont créé un graphe fictif qui modélise les différentes possibilités de livraison en affectant à ses arcs des poids qui représentent les coûts de transport et les durées nécessaires pour les parcourir. Ils ont construit, ensuite, un modèle mathématique afin d'optimiser les coûts des chemins parcourus pour la livraisons de l'ensemble des demandes tout en respectant les contraintes temporelles et techniques liées au problème de routage et ils utilisent, comme méthode de résolution, la génération des colonnes.

Contrairement à notre modèle, ils ont étudié le problème de routage (dans le but d'obtenir des chemins optimaux pour la livraison de marchandises) sur un niveau tactique. Ce qui rend les deux problèmes différents structurellement.

2.3 Revue de littérature pour le niveau opérationnel

Wen Fei Wang et Won Young Yun dans [1] ont proposé une combinaison de modes routier et ferroviaire dans leur modèle mathématique. Ils ont réalisé une classification des conteneurs suivant quatre types : la direction du conteneur (entrant ou sortant) et l'état du conteneur (plein ou vide). Ils considèrent aussi un éventuel changement de mode de transport dans un terminal ou dans une gare. Ils ont construit un graphe étendu dont les sommets sont les conteneurs et les points de dépôts. Pour construire les arcs de ce graphe, ils ont défini une structure de connectivité qui dépend de la nature de l'origine (point de départ) et de l'extrémité (la destination) de chaque arc. Ainsi, ils ont transformé le problème en un problème de connectivité du graphe. Ils ont construit un modèle quadratique ayant deux types de variables :

- variables binaires indexées par les arcs du graphe étendu et par les trains,
- variables continues (qui représentent le temps) indexées par les sommets.

Leur objectif est de minimiser le coût global de transport (routier et ferroviaire). Ils ont utilisé une méthode de recherche de tabou hybride et ils arrivent à résoudre, par exemple, des instances de 40 conteneurs, de 20 clients, de 5 trains d'importation et de 5 trains d'exportation en 3 heures. Et pour la résolution exacte de CPLEX, ils arrivent, par exemple, à résoudre des instances de seize conteneurs, de dix clients et de trois trains, dont chacun à une capacité de 3 conteneurs, en dix heures.

Contrairement à notre modèle, celui-ci s'intéresse plutôt à des problèmes ayant un nombre assez restreint de conteneurs et dont le niveau de décision se limite au niveau routier (les dates de départ et celles d'arrivée des trains sont données). De plus, il ne prend pas en compte ni les coûts de transbordement ni ceux de stockage. Les auteurs n'ont pas intégré le mode de transport fluvial et n'ont pas considéré les différents types de conteneurs ainsi que les incompatibilités entre marchandises.

S. Bock propose dans [2] une approche de contrôle en temps réel, en intégrant des chaînes de transport multimodales, afin de minimiser les déplacements des véhicules vides et de gérer les aléas et les perturbations dynamiques. Cette approche intègre le transport multimodal et les transbordements multiples pour la première fois. Une procédure d'optimisation qui adapte les processus de transport est continuellement appliquée. L'arrêt ou la décélération des véhicules sont des possibles scénarios de perturbation. Les restrictions relatives à la réglementation des

2.4. TABLEAU RÉCAPITULATIF DE LA REVUE DE LITTÉRATURE

temps de conduite et de repos pour les conducteurs sont omises. Cependant, ces restrictions sont intégrées dans la planification de la tournée de véhicules programmée. L'auteur propose, ainsi, une structure de voisinage locale pour étudier les éventuelles perturbations.

Il présente un modèle dynamique qui définit le problème d'optimisation temporaire du coût de transport des marchandises. Il considère que, pour les modes de transport, autres que la route, les prix du transport sont prédéfinis ainsi que les dates éventuelles de prise en charge et de livraison. Les décisions à prendre seront, donc, au niveau routier uniquement. Cette vision partielle du problème constitue la grande différence avec notre modèle mathématique proposé.

Zhang, Ruiyou, Yun, Won Young et Moon examinent, dans [3] le problème rencontré par les entreprises qui transportent des conteneurs par camion dans un environnement avec des contraintes de ressources. La zone considérée est axée sur l'exportation. Par conséquent, il existe trois types de mouvements des conteneurs, conteneurs entrants pleins, sortants pleins et entrants vides. Les temps passés au terminal et chez les clients ainsi que le temps de parcours des arcs sont à prendre en considération. Outre les camions et les conteneurs vides sont également considérés comme deux types de ressources. L'objectif est de minimiser le temps total, y compris le temps d'attente de tous les camions en fonctionnement.

Le problème est modélisé mathématiquement sur la base des graphes. Il est considéré comme de multiples problèmes de voyageurs de commerce avec fenêtres de temps (m-TSPTW) avec des contraintes de ressources.

Un algorithme basé sur la recherche de tabou réactif (RTS) est développé pour résoudre ce problème. Un certain nombre d'exemples générés aléatoirement indiquent que l'algorithme peut être appliqué sur des données réelles dont, en revanche, le nombre de conteneurs et celui des camions ne dépassent pas 20 et le temps de résolution peut dépasser 7h pour CPLEX. Par contre, pour le RTS proposé, le temps de résolution est très court (moins de vingt minutes) avec un GAP au dessous de 5% pour les instances résolues avec CPLEX.

Ce problème intègre l'aspect opérationnel de transport de marchandises et la possibilité de changement de véhicules au niveau des terminaux. En revanche, il ne prend en considération qu'un seul mode de transport qui est le transport routier.

Julia Funke et Herbert Kopfer proposent dans [6] un programme linéaire multi-objectif (PLM) avec deux objectifs :

- minimisation de la distance totale de déplacement des camions,
- minimisation du temps de fonctionnement des camions.

Les auteurs ont fait une extension du problème étudié par Zhang, Ruiyou, Yun, Won Young et Moon dans [3] en considérant deux types de conteneurs (20 et 40 pieds). En revanche, ils s'intéressent toujours à des demandes de très petites quantités de conteneurs et n'intègrent, dans leur modèle, qu'un seule mode de transport qui est le mode routier.

2.4 Tableau récapitulatif de la revue de littérature

CHAPITRE 2. REVUE DE LITTÉRATURE ET CONTEXTE DU PROBLÈME

Titre	Auteurs & année	Multimodal	Plateformes multimodales	niveau	Remarques
Scheduling for inland container truck and train transportation	Wen Fei Wang, Won Young Yun 2013	✓	✓	O.	minimisation de la distance totale de déplacement et minimisation du temps de fonctionnement des camions
Real-time control of freight forwarding transportation networks by integrating multimodal transport chains	Stefan Bock 2009	✓	✓	O.	Les décisions à prendre sont pour le mode routier uniquement
Modeling and optimization of a container drayage problem with resource constraints	R. Zhang, W. Y. Yun, I. K. Moon 2010	×	×	O.	Ce modèle n'intègre que le mode de transport routier
A model for a multi-size inland container transportation problem	Julia Funke, Herbert Kopfer 2016	×	×	O.	minimisation de la distance totale de déplacement et minimisation du temps de fonctionnement des camions
Developing a model for measuring the resilience of a port-hinterland container transportation network	Hong Chen, Kevin Cullinane, Nan Liu. 2017	✓	✓ (ports à sec)	O.	Construction d'un modèle quadratique qui mesure le niveau de résilience (capacité des infrastructures à s'adapter aux perturbations)

2.4. TABLEAU RÉCAPITULATIF DE LA REVUE DE LITTÉRATURE

Best routes selection in international intermodal networks	T-S. Chang 2007	✓	✓	T.	Il prend en considération plusieurs aspects de notre problème mais au niveau tactique.
A local search heuristic for the pre- and end-haulage of intermodal container terminals	A. Caris, G.K. Janssens 2009	×	×	T.	C'est un problème de ramassage et de livraison par des camions avec des fenêtres de temps
Modeling and solving a multimodal routing problem with flexible-time and schedules services	L. Moccia, J-F. Cordeau, Gilbert Laporte, S. Ropke, M. P. Valentin 2011	✓	✓	T.	Affectation de chaque demande à un chemin afin de minimiser le coût de transport
Multi-port vs. Hub-and-Spoke port calls by containerships	A. Imaia, K. Shintanib, Stratos Papadimitriou. 2009	✓	✓	T.	Le réseau est constitué de plusieurs ports et le but est d'optimiser la tournée des navires.
Computer assisted routing of intermodal shipments	B.S. Boardman, E.M. Malstrom, ... 1997	✓	✓	T.	Description d'un système aidant au choix d'itinéraires moins coûteuses à partir d'une base de données des chemins entre les pairs de sommets (orig., dest.).

A container multimodal transportation scheduling approach based on immune affinity model for emergency relief	Zhi-Hua Hu. 2011	✓	✓	S.	le réseau est similaire au notre. Son but est de trouver le plus court chemin (en terme de coût) entre les sommets : origine et destination d'un flux d'approvisionnement.
---	------------------	---	---	----	--

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons cité quelques références bibliographiques traitant des problèmes similaires aux niveaux tactique et stratégique. Nous nous sommes focalisés sur les travaux traitant le même problème au niveau opérationnel.

Dans la littérature, nous ne trouvons pas un modèle mathématique qui modélise le problème de transport de conteneurs dans un réseau multimodal, au niveau opérationnel et dont le niveau de décision s'étale sur les différents modes de transport. De plus, les chercheurs qui ont étudié le problème au niveau opérationnel et dont le champ décisionnel se limite au mode routier, n'arrivent à traiter qu'un nombre assez restreint de conteneurs.

2.6 Présentation du flot, du réseau et des ressources

2.6.1 Le flux étudié

Nous nous intéressons dans notre problème aux marchandises conteneurisées. Dans la pratique, il existe différentes dimensions de conteneurs : standard 20', standard 40', 45' high cube (une spécialité du groupe CMA CGM). Pour des raisons de simplicité, et vu que les conteneurs 45' high cube sont moins fréquents, nous ne considérons, dans notre problème, que deux types de conteneurs : les standards 20' et les standards 40'.

En pratique, les prix, proposés par les transporteurs, pour l'acheminement des conteneurs 40' n'est pas le double de celui des conteneurs 20'. Cependant, la capacité des véhicules reste proportionnelle aux type des conteneurs (capacité en 40' est égale à la moitié de la capacité en 20'). Dans la section 3.1 du chapitre suivant nous allons définir un coefficient pour chaque type de conteneurs.

En cas de transport de marchandises dangereuses (MD), les conteneurs doivent respecter la réglementation relative au transport maritime des marchandises dangereuses (Code IMDG). En France, le transport de marchandises dangereuses est réglementé par un texte unique comportant plusieurs annexes : l'arrêté consolidé du 29 mai 2009 relatif au transport de marchandises dangereuses par voie terrestre (dit "Arrêté TDM"). Cet arrêté s'applique au transport de MD par route, par voies ferrées et par voies de navigation intérieures effectué en France, y compris aux opérations de chargement/déchargement, au transfert d'un mode de transport vers un autre.

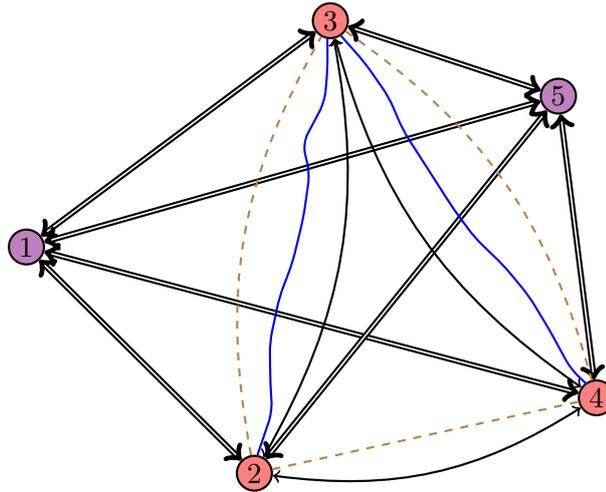


FIGURE 2.6.1 – Exemple du réseau initial

Les demandes seront classées suivant le type de conteneurs d'une part et suivant les catégories d'autre part : conteneurs vides, produits secs, frigorifiques et Matières Dangereuses (chimiques, radioactifs, explosifs,...). Le transport de ces dernières génère des contraintes d'incompatibilités, et des limitations de capacités des véhicules suivant les réglementations en vigueur.

2.6.2 Le réseau

Nous disposons d'un graphe simple orienté, comme par exemple le réseau de la figure 2.6.1 où les nœuds peuvent représenter des terminaux portuaires ou des entrepôts de stockage de départ ou d'arrivée des conteneurs, des lieux de transit et les "traits" représentent les arcs (routiers, ferroviaires et fluviaux) entre ces différents lieux. Les nœuds 1 et 5 représentent les sites origines et destination des demandes (terminaux portuaires, entrepôts, ...) et les nœuds 2, 3, 4 représentent les plateformes multimodales. Trois types d'arcs sont possibles :

- les routes (symbolisées par des doubles traits),
- les fleuves (symbolisés par des pointillés),
- les rails (symbolisés par des lignes courbes).

Dans la pratique, les routes ou les rails ne sont pas toujours à deux voies, les ponts, tunnels ou écluses peuvent n'être utilisés que dans un seul sens à la fois, alors les durées des trajets dans un sens peuvent être très différentes des durées de l'autre sens ainsi que les coûts de transport qui peuvent être différents. Dans ce cas nous pouvons remplacer certaines arêtes par deux arcs (ou même un seul).

2.6.3 Les ressources

Nous disposons d'un ensemble de ressources (humaines et matérielles). Les ressources matérielles comprennent les véhicules (camions, trains, barges), les portiques (au niveau de plateformes multimodales). La limitation de ces ressources génère des contraintes techniques que nous allons présenter dans le chapitre suivant.

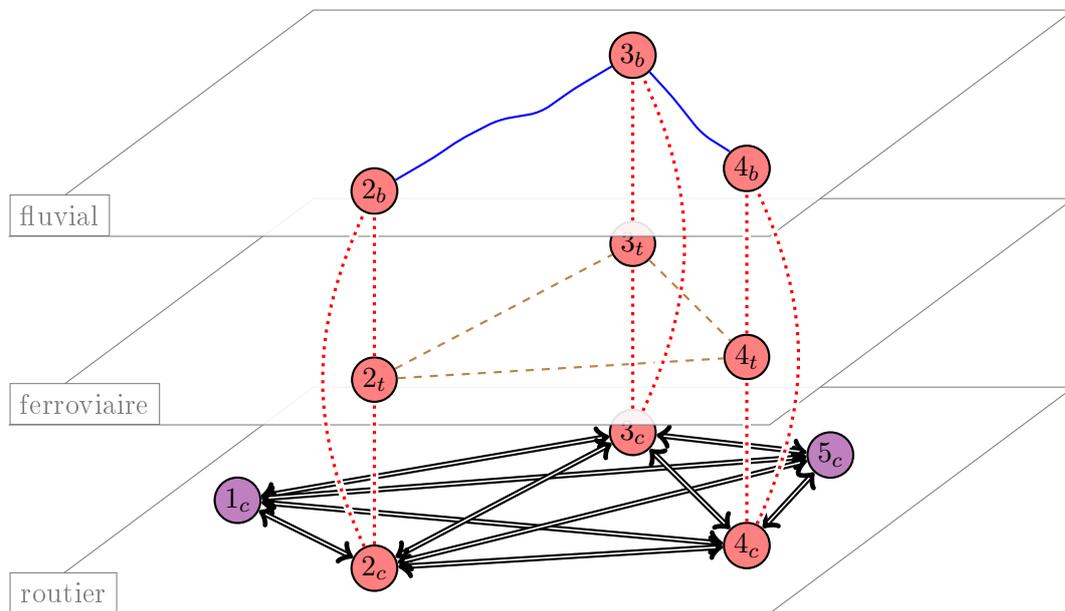


FIGURE 2.6.2 – Exemple d'un réseau multimodal (vision multicouches)

CHAPITRE 3

MODÈLE MATHÉMATIQUE DU PGFCRM

Dans le chapitre précédent, nous avons vu l'importance du transport multimodal et la nécessité d'une étude qui englobe le processus d'acheminement des conteneurs. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'organisation d'un port étendu au niveau opérationnel, en particulier à une réorganisation des modes de post-acheminement. On tend ainsi à encourager et à développer les modes alternatifs à la route :

- le mode fluvial,
- le mode ferroviaire.

Cette organisation doit se faire de telle sorte que le transport reste rapide et fiable. Le choix des modes de transport à utiliser, des quantités stockées et transitant dans les plateformes multimodales devient ainsi un problème opérationnel de premier ordre quant à la circulation des conteneurs.

L'optimisation du transport des marchandises et le dimensionnement des plateformes multimodales nécessitent l'utilisation optimale des infrastructures et des ressources en choisissant les modes de transport et les services associés, l'affectation des capacités aux demandes et la planification de leurs itinéraires et fréquences.

Nous proposons une modélisation mathématique réaliste du problème de gestion de flot de conteneurs dans un réseau multimodal (PGFCRM). Ce modèle peut montrer aux transporteurs le gain potentiel en se partageant les ressources fluviales et ferroviaires. Il peut être utilisé par les décideurs pour choisir l'acheminement des marchandises à travers les différentes plateformes. A savoir, il existe toujours une solution réalisable au problème où toute la marchandise passe par la route. Pour bien décrire le modèle mathématique, nous commençons par présenter les données du problème étudié, suivies par les variables de décision, les contraintes, et enfin l'objectif à atteindre.

L'objectif du problème consiste à minimiser le coût global de transport en respectant les différentes spécificités liées au transport et au stockage des conteneurs. Plusieurs contraintes sont à considérer. Tout d'abord, nous devons satisfaire la demande entre les sites (origine et destination de chaque demande). Pour chaque demande, nous devons respecter une fenêtre de temps pour la prise en charge et une fenêtre de temps pour la livraison. La circulation peut être limitée ou même arrêtée sur certains arcs dans des plages horaires spécifiques (règles de circulation imposant la priorité de certains navires ou trains, des interdictions de circulation la nuit ou le week-end dans certaines villes, etc.). De plus, pour le mode fluvial et le mode ferroviaire, la ca-

capacité de transport est limitée. Également, au niveau des plateformes multimodales, nous avons une capacité de stockage et une productivité limitée. On considère aussi des contraintes supplémentaires dues à l'incompatibilité entre marchandises (dangereuses-alimentaires, chimiques-explosifs, etc.).

3.1 Les données du problème

Les données du problème incluent l'horizon temporel de planification, les infrastructures existantes, les ressources, les demandes ainsi que toutes les informations liées à ces types de données. Dans cette section, nous présentons les données nécessaires du problème.

3.1.1 L'horizon temporel

Nous disposons d'un intervalle de temps $T = \llbracket t_0, \tau \rrbracket$. Cet intervalle représente la plage temporelle de planification. t_0 représente la date de début du processus de livraison et τ représente la date à laquelle toutes les demandes doivent être livrées et les véhicules doivent être revenus à leurs positions initiales. Δt est le pas de discrétisation du temps (en pratique, nous prenons $\Delta t = 60$ minutes). L'horizon a une longueur $\frac{\tau - t_0}{\Delta t}$ qui est égale au nombre total de périodes.

3.1.2 Les moyens de transport

Dans le modèle mathématique, nous pouvons considérer plusieurs modes de transport. Et puisque nous nous intéressons à l'Axe Seine, nous allons nous contenter des trois modes de transport existants. Notons, $M = \{b, c, t\}$, où

- b représente le mode fluvial ou la barge,
- c représente le mode routier ou le camion,
- t représente le mode ferroviaire ou le train.

3.1.3 Les catégories des demandes

Nous avons détaillé dans la section 2.6.1 du chapitre précédent les différents types de conteneurs à transporter et les différents types de marchandises conteneurisées. Nous disposons donc d'un ensemble Θ de catégories de demandes. Nous pouvons partitionner cet ensemble de deux manières différentes :

- une partition suivant le type du conteneur (20 pieds ou 40 pieds) :

$$\Theta = \Theta^{20} \cup \Theta^{40}.$$

- une partition suivant la catégorie de la marchandise transportée :
 - ▷ produits secs,
 - ▷ conteneurs vides,
 - ▷ matières frigorifiques (elles sont transportées dans des conteneurs à température dirigée),
 - ▷ matières dangereuses (chimiques, explosives, radioactives,...).

$$\Theta = \Theta^{PS} \cup \Theta^{CV} \cup \Theta^{MF} \cup \Theta^{MD}.$$

La présence des Matières Dangereuses (MD) génère des contraintes supplémentaires liées à la réglementation (voir la section 2.6.1) et présentées dans la section 4.3.4.

Chaque catégorie $\theta \in \Theta$ est caractérisée par un coefficient q^θ qui représente la proportionnalité de la capacité du véhicule perdue en transportant ce type de marchandise. Par exemple, si la catégorie θ correspond à des conteneurs vides de 20 pieds, ou de produits secs le coefficient q^θ sera égal à 1 ; et si les conteneurs sont de 40 pieds ce coefficient sera égal à 2 (la capacité d'un véhicule en nombre de conteneurs de 20 pieds est le double de la capacité de ce véhicule en conteneurs de 40 pieds).

De même, si la catégorie θ représente une matière dangereuse dans des conteneurs de 20 pieds, $q^\theta > 1$. Cette capacité perdue est due à la distance de sécurité à respecter en transformant ce type de marchandise.

3.1.4 Le réseau du transport

Considérons un graphe initial $G = (S, A)$ qui modélise le réseau de transport. où

- S est l'ensemble des sites (terminaux portuaires, plateformes multimodales, entrepôts...). Par exemple dans la figure 2.6.1, ces sites sont présentés par les nœuds $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Chaque site $i \in S$ (multimodal ou non) est caractérisé par un sous ensemble de modes de transport auxquels il est connecté. Notons

$$M_i \subseteq M,$$

l'ensemble des modes de transports connectés au site i .

On note aussi $\delta^+(i)$ l'ensemble des arcs sortants du site $i \in S$, et $\delta^-(i)$ l'ensemble des arcs entrants en i .

- $H \subset S$ est l'ensemble des plateformes multimodales (présentées, par exemple, dans la figure 2.6.1 par les noeuds $\{1, 5\}$). Chaque plateforme $h \in H$ est caractérisée par :
 - ◊ Une **productivité** $\nu_{h,t}$ (en evp/ Δt) qui dépend du nombre de portiques, du nombre de quais de chargement/déchargement, du nombre de personnels au sein de cette plateforme à chaque instant, de la productivité de chaque portique, des conditions climatiques à cet instant,...
 - Pour des raisons de simplicité, nous supposons que chaque plateforme ne peut traiter qu'un nombre bien limité de conteneurs par unité de temps.
 - ◊ Une **capacité de stockage** C_h (en evp).
 - ◊ Un **coût de stockage** $\Phi_{h,\theta,t}^{stk}$ (en euro, par conteneur, par type de marchandise et par unité de temps) et un **coût de manutention** $\Phi_{h,\theta,t}^{man}$ (en euro, par conteneur, par type de marchandise et par unité de temps) où $\theta \in \Theta$ représente la catégorie de la demande. Un exemple de ces coûts est donné dans le tableau 1.1.
- A est l'ensemble des arcs. Ils peuvent être classifiés selon leur mode de transport (terrestre, fluvial ou ferroviaire). Par exemple, la figure 2.6.2 présente une vision par couche ou par mode de transport du réseau initial présenté dans la figure 2.6.1. L'ensemble des arcs A est partitionné selon les modes de transport :

$$A = A^c \cup A^t \cup A^b,$$

où

- ▷ A^c est l'ensemble des arcs routiers,
- ▷ A^t est des arcs ferroviaires,
- ▷ A^b est l'ensemble des arcs fluviaux.

Pour chaque mode de transport $m \in M$ et pour chaque site $i \in S$ (multimodal ou non), un arc fictif (ou une boucle) est créé $a_i = (i, i)$. Le parcours de cet arc par un véhicule (chargé ou non) représente le stationnement de ce véhicule en ce site pendant une unité de temps.

On note alors, l'ensemble de ces arcs $A_f \subset A$:

$$A_f = A_f^c \cup A_f^t \cup A_f^b,$$

où

- ◁ $A_f^c \subset A^c$,
- ◁ $A_f^t \subset A^t$,
- ◁ $A_f^b \subset A^b$.

Chaque arc $a \in A$ est caractérisé par :

- * le **mode de transport** $m_a \in M$ utilisé sur cet arc,
- * un **coût variable** $\Phi_{a,\theta,t}^{var}$ de transport d'un conteneur avec $\theta \in \Theta$,
- * un **coût fixe** $\Phi_{a,t}^{fix}$ de l'utilisation de l'arc a par un véhicule (coût de déplacement d'un véhicule vide sur cet arc),
- * une **durée** t_a (en Δt) nécessaire pour le parcours de cet arc par un véhicule (pour les arcs fictifs, la durée de parcours est égale à une unité de temps),
- * une **capacité** $C_{a,t}$ (en nombre de véhicules). Cette capacité varie en fonction du temps. Elle pourra même s'annuler à certains instants (règles d'interdiction de circulation la nuit, le week-end, ou les heures de travail).

Nous supposons que le réseau routier est complet et que les sous graphes induits par A^t et A^b sont connexes.

3.1.5 Les véhicules

Nous disposons d'un ensemble de véhicules partitionnés selon le mode de transport. Notons

$$V = V^c \cup V^t \cup V^b,$$

où

- ▷ V^c est l'ensemble des camions,
- ▷ V^t est l'ensemble des trains,
- ▷ V^b est l'ensemble des barges.

Chaque véhicule $v \in V$ est caractérisé par :

- * son **mode** de transport $m_v \in M$,
- * sa **capacité** Q_v (en evp),
- * sa **position initiale** $p_v \in S$,
- * son **coût fixe d'utilisation** Φ_v .

On note $S^c \subset S$ l'ensemble des positions initiales pour les camions. Pour tout $l \in S^c$, on note N_l le nombre de camions ayant l comme position initiale. Le coût d'activation des camions est supposé identique pour tous les camions et il est noté Φ_c .

3.1.6 Les demandes

Nous disposons d'un ensemble de demandes K où chaque demande $k \in K$ est caractérisée par :

- son **origine** $O^k \in S$,
- sa **destination** $D^k \in S$,
- sa **quantité** d^k (en evp),
- sa **catégorie** $\theta^k \in \Theta$,
- une **fenêtre** de temps $T^k = \llbracket t_{min}^k, t_{max}^k \rrbracket \subseteq T$ dans laquelle elle peut être traitée.

3.2 Les variables de décision

3.2.1 Les variables de flot envoyé sur les arcs

Variables de flot sur les arcs fluviaux et ferroviaires

Pour toute demande $k \in K$, pour tout arc $a \in A^t \cup A^b$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout instant $t \in T^k$ avec $(t + t_a) \in T^k$ et $m_a = m_v$, notons

$$x_{a,v,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de flot envoyé sur l'arc } a \text{ dans le véhicule } v \\ \text{à l'instant } t \text{ pour livrer la demande } k, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Ces variables sont définies uniquement si les deux conditions $(t + t_a) \in T^k$ et $m_a = m_v$ sont vérifiées. En effet, la première condition est nécessaire puisque la demande k , ne doit être traitée que dans la fenêtre de temps T^k . On ne doit l'envoyer donc que si elle va arriver avant l'achèvement de sa fenêtre de traitement (il faut prévoir le temps t_a pour parcourir l'arc a). La deuxième condition sert tout simplement à ce que les modes de transports du véhicule et de l'arc soient identiques.

Variables de flot sur les arcs routiers

Contrairement aux trains et aux barges, les camions sont de l'ordre de grandeur des quantités des demandes. Il n'est pas judicieux de définir les variables de flot pour chaque camion. On définit ces variables de la manière suivante.

Pour toute demande $k \in K$, pour tout arc $a \in A^c$, pour toute position $l \in S^c$ (ensemble des positions initiales des camions) et pour tout instant $t \in T^k$ avec $(t + t_a) \in T^k$, notons

$$x_{a,l,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de flot envoyé sur l'arc } a \text{ dans les camions} \\ \text{initialement positionnés en } l \text{ à l'instant } t \text{ pour livrer la demande } k, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

3.2.2 Les variables d'activation des véhicules

Variables d'activation des trains et des barges

Pour tout arc $a \in A^t \cup A^b$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout instant $t \in T$, avec $m_a = m_v$ et $(t + t_a) \in T$, notons

$$y_{a,v,t} = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule } v \text{ débute sur l'arc } a \text{ à l'instant } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La condition $(t + t_a) \in T$ est nécessaire pour qu'à la fin de l'horizon, on ne se trouve pas dans une situation où le véhicule est en déplacement. On exige même dans les contraintes (3.3.3) qu'il soit revenu à sa position initiale.

Variables d'activation des camions

Pour tout arc $a \in A^c$, pour toute position $l \in S^c$ et pour tout instant $t \in T$ avec $(t + t_a) \in T$, notons

$$y_{a,l,t} = \begin{cases} \text{le nombre de camions initialement positionnés en } l \\ \text{qui débutent sur l'arc } a \text{ à l'instant } t, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variable d'activation des trains et des barges depuis leurs positions initiales

Pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$, pour tout instant $t \in T$, notons

$$\alpha_{v,t} = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule } v \text{ quitte la première fois sa position initiale } p_v \text{ à l'instant } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Variable d'activation des camions depuis leurs positions initiales

Pour tout instant $t \in T$, pour toute position $l \in S^c$, notons

$$\alpha_{l,t} = \begin{cases} \text{le nombre de camions qui quittent pour la première fois} \\ \text{leur position initiale } l \text{ à l'instant } t, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variable de libération des trains et des barges

Pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$, pour tout instant $t \in T$, notons

$$\beta_{v,t} = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule } v \text{ est libéré à l'instant } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Variables indiquant le nombre de camions libérés à chaque instant

Pour tout instant $t \in T$, pour toute position $l \in S^c$, notons

$$\beta_{l,t} = \begin{cases} \text{le nombre de camions initialement positionnés en } l \\ \text{et qui sont libérés à l'instant } t, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables indiquant la présence ou non de MD dans un véhicule

Pour tout $\theta \in MD$, pour tout $v \in V^t \cup V^b$, et pour tout $t \in T$, notons

$$\gamma_{v,t}^\theta = \begin{cases} 1 & \text{si la Matière Dangereuse } \theta \text{ est envoyée dans le véhicule } v \text{ à l'instant } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2.3 Les variables de flot transitant dans les plateformes multimodales

Trois types de variables entières liées au déchargement, au chargement et au transfert sont définies.

Variables de flot déchargé des trains et des barges pour être stocké dans les plateformes multimodales

Pour toute demande $k \in K$, pour toute plateforme $h \in H$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$, et pour tout instant $t \in T^k$ avec $m_v \in M_h$, notons

$$u_{h,v,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ déchargée du véhicule } v \\ \text{à l'instant } t \text{ pour être stockée dans la plateforme } h. \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot déchargé des camions pour être stocké dans les plateformes multimodales

Pour toute demande $k \in K$, pour toute plateforme $h \in H$, pour toute position $l \in S^c$, et pour tout instant $t \in T^k$, notons

$$u_{h,l,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ déchargée, à l'instant } t, \text{ des camions} \\ \text{initialement positionnés en } l \text{ pour être stockée dans la plateforme } h. \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot chargé depuis le stock des plateformes sur les trains et les barges

Pour toute demande $k \in K$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$, pour toute plateforme $h \in H$ et pour tout instant $t \in T^k$ avec $m_v \in M_h$, notons

$$z_{h,v,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ chargée depuis le stock} \\ \text{de la plateforme } h \text{ sur le véhicule } v \text{ à l'instant } t. \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot chargé depuis le stock des plateformes sur les camions

Pour toute demande $k \in K$, pour toute plateforme $h \in H$, pour toute position $l \in S^c$ et pour tout instant $t \in T^k$, notons

$$z_{h,l,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ chargée, à l'instant } t, \text{ depuis le stock} \\ \text{de la plateforme } h \text{ sur les camions initialement positionnés en } l. \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot transféré entre les trains et les barges au niveau des plateformes

Pour toute demande $k \in K$, pour toute plateforme $h \in H$, pour tout véhicule $v, v' \in V^t \cup V^b$, pour tout instant $t \in T^k$, tels que $v \neq v'$ et $m_v, m_{v'} \in M_h$, notons

$$q_{h,v,v',t}^k = \begin{cases} \text{quantité de la demande } k \text{ transférée dans la plateforme } h \\ \text{du véhicule } v \text{ vers le véhicule } v' \text{ à l'instant } t. \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot transféré entre les camions d'un côté et les trains et les barges d'autre côté au niveau des plateformes

Pour toute demande $k \in K$, pour toute plateforme $h \in H$, pour toute position $l \in S^c$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout instant $t \in T^k$, tel que $m_v \in M_h$, notons

$$q_{h,l,v,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ transférée, à l'instant } t, \\ \text{dans la plateforme } h, \text{ des camions initialement} \\ \text{positionnés en } l \text{ vers le véhicule } v. \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

et

$$q_{h,v,l,t}^k = \begin{cases} \text{quantité de la demande } k \text{ transférée, à l'instant } t, \\ \text{dans la plateforme } h \text{ du véhicule } v \text{ vers} \\ \text{les camions initialement positionnés en } l. \end{cases} \in \mathbb{N}$$

Variables de flot transféré entre les camions

Pour toute demande $k \in K$, pour toute plateforme $h \in H$, pour tout instant $t \in T^k$ et pour toutes positions $l, l' \in S^c$ telles que $l \neq l'$, notons

$$q_{h,l,l',t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ transférée à l'instant } t, \text{ dans} \\ \text{la plateforme } h \text{ des camions initialement positionnés en } l \\ \text{vers ceux initialement positionnés en } l' \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

3.3 Contraintes du problème

Nous pouvons modéliser ce problème comme un problème de flot transitant dans un graphe multimodal pondéré.

3.3.1 Contraintes liées aux plateformes multimodales

Pour mieux exprimer les contraintes au niveau des plateformes, nous avons besoin de définir certaines grandeurs.

Dans cette section, on considère une plateforme $h \in H$, une demande $k \in K$, un véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et un instant $t \in T^k$ avec $m_v \in M_h$, où m_v est le moyen de transport du véhicule v .

Le flot sortant des plateformes

On pose

$$\mathcal{F}_{h,v,t}^{sort,k} = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ sortante de la plateforme } h \\ \text{sur le véhicule } v \text{ à l'instant } t, \end{cases}$$

Cette grandeur s'exprime en fonction des variables de décisions définies dans la section 3.2 par :

$$\mathcal{F}_{h,v,t}^{sort,k} = \sum_{\substack{a \in \delta^+(h): \\ m_a = m_v, \\ t + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,v,t}^k. \quad (3.3.3.1)$$

La condition $t + t_a \leq t_{max}^k$ est nécessaire pour que le flot envoyé sur l'arc a arrive avant l'achèvement de la fenêtre de traitement de la demande k .

Le flot entrant dans les plateformes

On pose

$$\mathcal{F}_{h,v,t}^{ent,k} = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ entrante dans la plateforme } h \\ \text{sur le véhicule } v \text{ à l'instant } t, \end{cases}$$

Cette quantité s'exprime en fonction des variables de décision par :

$$\mathcal{F}_{h,v,t}^{ent,k} = \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,v,t-t_a}^k. \quad (3.3.3.2)$$

Le flot transféré vers les autres véhicules

On pose

$$\mathcal{F}_{h,v,t}^{transOut,k} = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ transférée dans la plateforme } h \\ \text{du véhicule } v \text{ vers les autres véhicules à l'instant } t, \end{cases}$$

Elle s'exprime en fonction des variables de décision par :

$$\mathcal{F}_{h,v,t}^{transOut,k} = \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^k + \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v',v,t}^k. \quad (3.3.3.3)$$

Le flot transféré depuis les autres véhicules

On pose

$$\mathcal{F}_{h,v,t}^{transIn,k} = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ transférée dans la plateforme } h \\ \text{vers le véhicule } v \text{ depuis les autres véhicules à l'instant } t, \end{cases}$$

Elle s'exprime en fonction des variables de décision par :

$$\mathcal{F}_{h,v,t}^{transIn,k} = \sum_{l \in S^c} q_{h,l,v,t}^k + \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v',v,t}^k. \quad (3.3.3.4)$$

La contrainte de conservation du flot

La loi du conservation de flot s'exprime pour les trains et les barges par la contrainte suivante (on prend en compte le flot qui entre ou sort, le flot qui est chargé ou déchargé et le flot qui transite depuis ou vers les autres véhicules)

$$\forall k \in K, \forall h \in H, \forall v \in V^t \cup V^b, \forall t \in T^k, \text{ avec } m_v \in M_h,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{h,v,t}^{sort,k} &= \mathcal{F}_{h,v,t}^{ent,k} \\ &+ z_{h,v,t}^k - u_{h,v,t}^k \\ &+ \mathcal{F}_{h,v,t}^{transIn,k} - \mathcal{F}_{h,v,t}^{transOut,k}. \end{aligned} \quad (3.3.3.5)$$

Et en utilisant les égalités (3.3.3.1), (3.3.3.2), (3.3.3.3) et (3.3.3.4), on réécrit la contrainte (3.3.3.5) de la manière suivante.

$$\forall k \in K, \forall h \in H, \forall v \in V^t \cup V^b, \forall t \in T^k, \text{ avec } m_v \in M_h,$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{a \in \delta^+(h): \\ m_a = m_v, \\ t + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,v,t}^k &= \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,v,t-t_a}^k \\
 &+ z_{h,v,t}^k - u_{h,v,t}^k \\
 &+ \sum_{l \in S^c} q_{h,l,v,t}^k + \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v',v,t}^k \\
 &- \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^k - \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k.
 \end{aligned} \tag{3.3.3.6}$$

Et pour les camions, la loi de conservation de flot au niveau des plateformes multimodales s'exprime par la contrainte suivante

$$\begin{aligned}
 \forall k \in K, \forall h \in H, \forall l \in S^c, \forall t \in T^k, \\
 \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^c: \\ t + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,l,t}^k &= \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^c: \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,l,t-t_a}^k \\
 &+ z_{h,l,t}^k - u_{h,l,t}^k \\
 &+ \sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l',l,t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,v,l,t}^k \\
 &- \sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k - \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^k.
 \end{aligned} \tag{3.3.3.7}$$

La contrainte de positivité du stock

Pour chaque plateforme $h \in H$, pour chaque demande $k \in K$ et à chaque instant $t \in T^k$, le stock au niveau de la plateforme h de la demande k à l'instant t doit être positif. Pour simplifier l'écriture, on va d'abord exprimer le stock au niveau de la plateforme. On pose

$$\mathcal{F}_{h,t}^{StockEnt,k} = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ déchargée des véhicules pour être stockée} \\ \text{dans la plateforme } h \text{ depuis le début du processus jusqu'à l'instant } t, \end{cases}$$

et

$$\mathcal{F}_{h,t}^{StockSort,k} = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ chargée dans les véhicules du stock} \\ \text{de la plateforme } h \text{ depuis le début du processus jusqu'à l'instant } t. \end{cases}$$

Ces deux grandeurs s'expriment à l'aide des variables de décisions par :

$$\mathcal{F}_{h,t}^{StockEnt,k} = \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} u_{h,v,t'}^k + \sum_{l \in S^c} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} u_{h,l,t'}^k, \tag{3.3.3.8}$$

et

$$\mathcal{F}_{h,t}^{StockSort,k} = \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} z_{h,v,t'}^k + \sum_{l \in S^c} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} z_{h,l,t'}^k. \tag{3.3.3.9}$$

La contrainte de positivité du stock dans les plateformes multimodales s'écrit par l'expression suivante.

$$\mathcal{F}_{h,t}^{StockEnt,k} - \mathcal{F}_{h,t}^{StockSort,k} \geq 0, \quad \forall h \in H, \forall k \in K, \forall t \in T^k.$$

Et en utilisant les égalités (3.3.3.8) et (3.3.3.9), la contrainte se réécrit à l'aide des variables de décisions de la manière suivante :

$$\forall h \in H, \forall k \in K, \forall t \in T^k, \quad \sum_{\substack{t' \leq t \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right) \geq 0. \quad (3.3.3.10)$$

La contrainte de capacité de stockage au niveau des plateformes

Pour chaque plateforme $h \in H$, et à chaque instant $t \in T$, le stock de la plateforme h ne doit pas dépasser sa capacité de stockage (notée C_h). En utilisant les grandeurs définies dans (3.3.3.8) et (3.3.3.9), on obtient donc la contrainte suivante.

$$\sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} (\mathcal{F}_{h,t}^{StockEnt,k} - \mathcal{F}_{h,t}^{StockSort,k}) \leq C_h, \quad \forall h \in H, \forall t \in T.$$

Et à l'aide des variables de décisions :

$$\forall h \in H, \forall t \in T, \quad \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right) \leq C_h. \quad (3.3.3.11)$$

Contraintes de respect de la productivité des plateformes

Chaque plateforme multimodale a une productivité limitée qui dépend du nombre de portiques et de leurs productivités, du nombre de quais de chargement/déchargement, du nombre de personnels, ... Elle ne peut donc traiter qu'un nombre bien limité de conteneurs par unité de temps.

Pour chaque plateforme $h \in H$, pour chaque instant $t \in T$, on pose

$$\mathcal{F}_{h,t}^{StockEntInstant} = \begin{cases} \text{le flot déchargé des véhicules pour être stocké} \\ \text{dans la plateforme } h \text{ à l'instant } t, \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{h,t}^{StockSortInstant} = \begin{cases} \text{le flot chargé dans les véhicules du stock} \\ \text{de la plateforme } h \text{ à l'instant } t, \end{cases}$$

et

$$\mathcal{F}_{h,t}^{transIn} = \begin{cases} \text{le flot transitant dans la plateforme } h \\ \text{à l'instant } t \text{ pour changer de véhicule.} \end{cases}$$

En utilisant les variables de décisions, nous pouvons exprimer ces grandeurs par les expressions suivantes.

$$\mathcal{F}_{h,t}^{StockEntInstant} = \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^k \right), \quad (3.3.3.12)$$

$$\mathcal{F}_{h,t}^{StockSortInstant} = \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} u_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} u_{h,l,t}^k \right), \quad (3.3.3.13)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{h,t}^{transIn} &= \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \sum_{l \in S^c} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^k \right) \\ &+ \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \left(\sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{i \in S^c} q_{h,v,i,t}^k \right) \end{aligned} \quad (3.3.3.14)$$

Le respect de la productivité des plateformes se traduit par :

$$\mathcal{F}_{h,t}^{StockEntInstant} + \mathcal{F}_{h,t}^{StockSortInstant} + \mathcal{F}_{h,t}^{transIn} \leq \nu_{h,t}, \quad \forall h \in H, \forall t \in T.$$

Et avec les variables de décisions, cette contrainte s'écrit :

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^k \right) + \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} u_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} u_{h,l,t}^k \right) \\ &+ \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \sum_{l \in S^c} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^k \right) \\ &+ \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \left(\sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^k \right) \\ &\leq \nu_{h,t}, \quad \forall h \in H, \forall t \in T. \end{aligned} \quad (3.3.3.15)$$

3.3.2 La conservation du flot de conteneurs au niveau des sites

Nous avons deux types de flot : le flot de conteneurs et le flot de véhicules. Dans cette section on va présenter les contraintes de conservation de flot des conteneurs au niveau des sites uni-modaux ($S \setminus H$).

La conservation du flot des conteneurs au niveau des origines des demandes s'exprime par les inégalités suivantes

$$\sum_{l \in S^c} \left(\sum_{a \in \delta^+(O^k)} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \geq t_{min}^k, \\ t' + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,l,t'}^k - \sum_{a \in \delta^-(O^k)} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t_{min}^k \leq t' - t_a}} x_{a,l,t' - t_a}^k \right) \leq d^k, \quad \forall k \in K, \forall t \in T^k. \quad (3.3.3.16)$$

La condition inférieure ou égale, n'exige pas d'envoyer toute la quantité disponible d'une demande donnée. Sauf que les contraintes de conservation de flot au niveau des autres nœuds du réseau vont exiger l'envoi de toute la quantité disponible de la demande.

La conservation du flot de conteneurs au niveau des destinations des demandes s'exprime quant à elle par les contraintes suivantes

$$\sum_{l \in S^c} \left(\sum_{a \in \delta^-(D^k)} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,l,t - t_a}^k - \sum_{a \in \delta^+(D^k)} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,l,t}^k \right) = d^k, \quad \forall k \in K. \quad (3.3.3.17)$$

Dans les contraintes (3.3.3.16), nous avons exigé de ne pas dépasser la quantité de la demande à chaque instant afin d'éviter d'envoyer une quantité qui n'existe pas. En effet, si on avait fait la somme des différences entre le flot sortant et le flot entrant sur toute la durée de traitement de la demande, nous pouvons envoyer un flot supérieur à la quantité de la demande à un instant $t_1 \in T^k$ et récompenser cet excès, par un flot entrant, à un instant $t_2 > t_1$ où $t_2 \in T^k$.

En revanche, pour les contraintes (3.3.3.17), on a fait la somme des différences entre le flot entrant et le flot sortant sur toute la période de traitement de la demande, car, à l'aide de la loi de conservation de flot dans chaque nœud du réseau, il n'y aura pas de flux supérieur à la quantité de la demande dans tout le réseau.

La conservation du flot de conteneurs au niveau des sites différents de l'origine et de la destination d'une demande s'exprime par les inégalités suivantes.

$$\forall k \in K, \forall i \in S \setminus (H \cup \{O^k, D^k\}), \forall l \in S^c, \forall t \in T^k, \\ \sum_{\substack{a \in \delta^+(i): \\ t + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,l,t}^k - \sum_{\substack{a \in \delta^-(i): \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,l,t - t_a}^k = 0,$$

3.3.3 Contraintes liées aux véhicules

Contraintes limitant les quantités déchargées des véhicules

Chaque véhicule doit contenir, au moins, la quantité qui en sera déchargée pour être stockée ou transférée vers un autre véhicule dans une plateforme multimodale.

Pour les trains et les barges, on obtient les contraintes suivantes.

$$\forall k \in K, \forall v \in V^t \cup V^b, \forall h \in H, \forall t \in T^k \text{ avec } m_v \in M_h,$$

$$u_{h,v,t}^k + \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} = m_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^k \leq \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,v,t-t_a}^k. \quad (3.3.3.18)$$

Et pour les camions,

$$\forall k \in K, \forall l \in S^c, \forall h \in H, \forall t \in T^k, \\ u_{h,l,t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v = m_h}} q_{h,l,v,t}^k + \sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k \leq \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^c: \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,l,t-t_a}^k. \quad (3.3.3.19)$$

Respect de la capacité des arcs en nombre de véhicules

Le respect de la capacités des arcs fluviaux et ferroviaires s'exprime par les contraintes suivantes.

$$\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v = m_a}} y_{a,v,t} \leq C_{a,t}, \quad \forall a \in A^t \cup A^b, \forall t \in T \text{ avec } (t + t_a) \in T. \quad (3.3.3.20)$$

Et pour les camions, le respect de la capacité des arcs routiers se traduit par les contraintes suivantes.

$$\sum_{l \in S^c} y_{a,l,t} \leq C_{a,t}, \quad \forall a \in A^c, \forall t \in T \text{ avec } (t + t_a) \in T. \quad (3.3.3.21)$$

Le passage (ou départ) des véhicules par (ou depuis) leurs positions initiales

Soit $v \in V$ et $t \in T$.

Le véhicule v , ne peut quitter sa position initiale à l'instant t que dans deux situations :

- à l'instant t , on décide d'activer le véhicule v . Dans ce cas la variable $\alpha_{v,t}$ sera égale à 1 et la variable de libération du véhicule v , $\beta_{v,t}$ est nulle.
- le véhicule v a été déjà déjà activé et vient juste de passer par sa position initiale p_v et dans ce cas

$$\sum_{\substack{a \in \delta^-(p_v): \\ m_v = m_a, \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,v,t-t_a} = 1.$$

Nous avons alors les contraintes suivantes pour les trains et les barges :

$$\forall v \in V^t \cup V^b, \forall t \in T \text{ avec } m_v = m_a, \\ \sum_{\substack{a \in \delta^+(p_v): \\ m_v = m_a, \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,v,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(p_v): \\ m_v = m_a, \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,v,t-t_a} = \alpha_{v,t} - \beta_{v,t}. \quad (3.3.3.22)$$

La contrainte (3.3.3.22) , oblige aussi le véhicule v , s'il passe par sa position initiale, à rester activé en l'obligeant de parcourir l'un des arcs sortant (y compris l'arc fictif) ou bien être libéré.

Et pour les camions :

$$\forall l \in S^c, \forall t \in T,$$

$$\sum_{\substack{a \in \delta^+(l) \cap A^c: \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,l,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(l) \cap A^c: \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,l,t-t_a} = \alpha_{l,t} - \beta_{l,t}. \quad (3.3.3.23)$$

De plus, nous avons d'autres contraintes qui exigent qu'on ne peut activer les véhicules qu'une seule fois.

Pour les trains et les barges, nous avons :

$$\sum_{t \in T} \alpha_{v,t} \leq 1. \quad \forall v \in V^t \cup V^b. \quad (3.3.3.24)$$

Et pour les camions :

$$\sum_{t \in T} \alpha_{l,t} \leq N_l. \quad \forall l \in S^c. \quad (3.3.3.25)$$

Le passage des véhicules par des sites différents de leurs positions initiales

Ces contraintes modélisent la loi de conservation des véhicules au niveau des sites différents de leurs positions initiales. Pour les trains et barges, nous avons les contraintes suivantes :

$$\forall v \in V^t \cup V^b, \forall h \in H \setminus \{p_v\}, \forall t \in T \text{ avec } m_v \in M_h,$$

$$\sum_{\substack{a \in \delta^+(h): \\ m_a = m_v, \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,v,t} = \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,v,t-t_a}. \quad (3.3.3.26)$$

Et pour les camions,

$$\forall l \in S^c, \forall i \in S \setminus \{l\}, \forall t \in T,$$

$$\sum_{\substack{a \in \delta^+(i) \cap A^c: \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,l,t} = \sum_{\substack{a \in \delta^-(i) \cap A^c: \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,l,t-t_a}. \quad (3.3.3.27)$$

3.3.4 Contraintes liées aux capacités des véhicules et aux matières dangereuses

Respect de la capacité des véhicules

Le respect de la capacité des trains et des barges est modélisé par les contraintes suivantes

$$\forall v \in V^t \cup V^b, \forall a \in A^t \cup A^b, \forall t \in T \text{ avec } (t+t_a) \in T \text{ et } m_v = m_a,$$

$$\sum_{k \in K} q^{\theta^k} x_{a,v,t}^k \leq Q_v y_{a,v,t}. \quad (3.3.3.28)$$

Et pour les camions :

$$\forall l \in S^c, \forall a \in A^c, \forall t \in T \text{ avec } (t+t_a) \in T,$$

$$\sum_{k \in K} q^{\theta^k} x_{a,l,t}^k \leq Q_c y_{a,l,t}. \quad (3.3.3.29)$$

Contraintes sur le flot de matières dangereuses dans les véhicules

Les matières dangereuses sont très contrôlées et leur quantités est limitée dans les véhicules. En plus, si nous avons une quantité de flot de matière dangereuse envoyé à un instant donné dans un véhicule donné, les variables indiquant la présence de cette catégorie à cet instant ne peuvent pas être nulles.

$$\sum_{\substack{a \in A^t \cup A^b: \\ m_a = m_v}} \sum_{\substack{k \in K, \\ m_v = m_a, \\ \theta^k = \theta}} q^\theta x_{a,v,t}^k \leq Q_v \gamma_{v,t}^\theta, \quad \forall v \in V, t \in T, \forall \theta \in \Theta^{MD}. \quad (3.3.3.30)$$

Les incompatibilités entre marchandises

Ces contraintes seront considérées pour les trains et les barges spécifiquement. En effet, pour les camions, les problèmes d'incompatibilité ne se posent pas du fait de leur petite capacité (2 evp).

Nous avons donc les contraintes suivantes :

$$\gamma_{v,t}^\theta + \gamma_{v,t}^{\theta'} \leq 1, \quad \forall \theta, \theta' \in \Theta^{MD}, \forall v \in V, \forall t \in T. \quad (3.3.3.31)$$

De plus, une matière dangereuse ne peut être envoyée sur un véhicule que si ce dernier est activé. Nous avons donc les contraintes suivantes :

$$\gamma_{v,t}^\theta \leq \sum_{\substack{a \in A^t \cup A^b: \\ m_a = m_v}} y_{a,v,t}, \quad \forall \theta \in \Theta^{MD}, \forall v \in V^t \cup V^b, \forall t \in T. \quad (3.3.3.32)$$

3.4 L'objectif du problème

L'objectif du PGFCRM est de minimiser le coût global d'acheminement des conteneurs. Afin d'avoir une vision globale du transport, tous les coûts liés à ce dernier sont pris en compte. Nous pouvons distinguer cinq types de coût dont trois sont liés aux conteneurs (transport, stockage et manutention) et deux aux véhicules. L'objectif du PGFCRM est donc de minimiser le coût global de transport :

$$\min (\Phi^{trans.} + \Phi^{stock.} + \Phi^{man.} + \Phi^{d.v.v.} + \Phi^{ac.veh.}),$$

où $\Phi^{trans.}$, $\Phi^{stock.}$, $\Phi^{man.}$, $\Phi^{d.v.v.}$ et $\Phi^{ac.veh.}$ sont donnés ci-dessous par (3.3.4.33), (3.3.4.34), (3.3.4.35), (3.3.4.36), et (3.3.4.37).

3.4.1 Le coût de transport

Il représente le coût total de déplacement des conteneurs sur les arcs routiers, fluviaux et ferroviaires. Nous ne considérons pas dans son expression les coûts fixes associés aux arcs. Ce

coût est donné par l'expression suivante.

$$\begin{aligned}
 \Phi^{trans.} = & \underbrace{\sum_{k \in K} \left(\sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} x_{a,v,t}^k \right)}_{\text{coût de transport fluvial-ferroviaire}} \\
 & + \underbrace{\sum_{k \in K} \left(\sum_{a \in A^c} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \sum_{l \in S^c} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} x_{a,l,t}^k \right)}_{\text{coût de transport routier}}.
 \end{aligned} \tag{3.3.4.33}$$

3.4.2 Le coût de stockage

Pour chaque plateforme multimodale, pour chaque demande et à chaque instant, la quantité en stock dans cette plateforme est déjà exprimée dans la contrainte (3.3.3.10). Pour exprimer le coût total de stockage, il suffit de multiplier la quantité stockée à chaque instant par le coût généré et faire la somme sur toutes les périodes, sur toutes plateformes et sur toutes les demandes. On obtient donc l'expression suivante :

$$\Phi^{stock.} = \sum_{k \in K} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h,\theta^k,t}^{stk} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t}^k - z_{h,v,t}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t}^k - z_{h,l,t}^k) \right). \tag{3.3.4.34}$$

3.4.3 Le coût de manutention

Il représente le coût des déplacements des conteneurs au sein des plateformes multimodales. Il comprend les coûts des chargements, les coûts des déchargements et ceux des transferts des conteneurs entre les véhicules (camions trains et barges). Nous avons exprimé ces trois flux dans la contrainte (3.3.3.15). Il suffit juste de multiplier le flot instantané transitant dans les plateformes par le coût de manutention associé à ces plateformes et faire la somme sur les périodes et sur les demandes. On obtient donc l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \Phi^{man.} = & \sum_{k \in K} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h,\theta^k,t}^{man} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \left(u_{h,v,t}^k + z_{h,v,t}^k + \sum_{\substack{v' \in V \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^k \right) \\
 & + \sum_{k \in K} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h,\theta^k,t}^{man} \sum_{l \in S^c} \left(u_{h,l,t}^k + z_{h,l,t}^k + \sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k + \sum_{\substack{v' \in V: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,l,v',t}^k \right).
 \end{aligned} \tag{3.3.4.35}$$

3.4.4 Le coût de déplacement des véhicules

Les coûts considérés dans cette expression représentent les coûts résultants des déplacements des véhicules (camions trains et barges) sur tout le réseau. Il suffit juste de faire la somme des

coûts fixes sur les arcs utilisés par les véhicules (chargés ou vides). On obtient donc l'expression suivante :

$$\Phi^{d.v.} = \sum_{v \in V^t \cup V^b} \sum_{\substack{a \in A^t \cup A^b \\ m_a = m_v}} \sum_{\substack{t \in T, \\ (t+t_a) \in T}} \Phi_{a,t}^{fix} y_{a,v,t} + \sum_{l \in S^c} \sum_{a \in A^c} \sum_{\substack{t \in T, \\ (t+t_a) \in T}} \Phi_{a,t}^{fix} y_{a,l,t}. \quad (3.3.4.36)$$

3.4.5 Le coût d'activation des véhicules

Le transporteur a intérêt à utiliser le moins possible de véhicules. Le coût d'activation des véhicules est donné par l'expression suivante :

$$\Phi^{ac.veh.} = \sum_{t \in T} \left(\sum_{v \in V^t \cup V^b} \Phi_v \alpha_{v,t} + \sum_{l \in S^c} \Phi_c \alpha_{l,t} \right). \quad (3.3.4.37)$$

3.5 Résultats numériques

Dans les sections précédentes, nous avons construit un modèle mathématique qui prend en considération les différents aspects et problématiques liés à la gestion du flot de conteneurs et de véhicules. Ce modèle sera appelé dans la suite le modèle initial. Nous allons présenter dans cette section des résultats numériques afin de tester ce modèle et voir ses limites en terme de taille des instances. Nous utilisons, dans toutes les simulations, une machine simple de 6 cœurs (CPU 2.8Ghz \times 6) et la version 18.1 de ILOG IBM CPLEX et le code est développé en C++. Le temps de calcul, pour cette première partie de résultats numérique est limité à 2000 secondes (environ 33 minutes).

3.5.1 Génération et présentation des instances

Toutes les instances sont générées aléatoirement en s'inspirant du réel. Nous présentons dans cette sous section les différentes instances du problème initial.

Instance 1

Cette instance est caractérisée par sa petite taille pour tester le modèle initial. Certains paramètres seront générés aléatoirement et les grandeurs qui définissent la taille de l'instance sont données par le tableau suivant :

$ S $	$ H $	$ S^c $	$ A^c $	$ A^t $	$ A^b $	$ D $	$ \Theta^{MD} $	$ \Theta $	$ T $	N_{S^c}	$ V^t $	$ V^b $	Φ^c	Q_c
4	2	2	16	4	4	5	2	5	10	500	1	1	200	2

où $|S|$ est le nombre de sites (uni-modaux et multimodaux), $|H|$ le nombre de plateformes multimodales, $|S^c|$ le nombre de positions initiales des camions, $|A^c|$ le nombre d'arcs routiers (on suppose que le sous graphe routier est complet avec des boucles associées à chaque site), $|A^t|$ le nombre d'arcs ferroviaires (dans notre cas les deux arcs qui relient les deux plateformes multimodales et les deux arcs fictifs associés aux plateformes), $|A^b|$ le nombre d'arcs fluviaux, $|D|$ le nombre de demandes, $|\Theta^{MD}|$ le nombre de matières dangereuses, $|\Theta|$ le nombre de catégories, $|T|$ le nombre de périodes, N_{S^c} le nombre de camions, $|V^t|$ le nombre de trains, $|V^b|$ le

nombre de barges, Φ^c le coût d'activation d'un camion, Q_c la capacité (en 20 pieds) d'un camion.

Le nombre de camions associés à chaque site est généré aléatoirement pour les deux sites uni-modaux dans l'intervalle défini par le nombre de camions divisé par le nombre de positions initiales $\pm 5\%$. Pour les deux plateformes multimodales, les capacités de stockage sont respectivement 300 et 500, les productivités sont générées aléatoirement pour chaque instant entre 40 evp et 50 evp. Pour les arcs routiers fictifs, dont le temps de parcours est toujours égale à une unité de temps, leurs capacité est générée aléatoirement entre 20 et 40 camions par unité de temps. Le temps de parcours des arcs routiers non fictifs est généré aléatoirement entre 1 et 4 unités de temps. Pour les arcs routiers qui relient les sites et les plateformes entre eux, les capacités sont générées entre 50 camions par unité de temps et 60 camions par unité de temps. Pour les arcs fluviaux et ferroviaires, les capacités sont générées entre 1 et 3 véhicules par unité de temps.

Les coûts de manutention sont générés pour chaque plateforme, à chaque instant et pour chaque catégorie entre 40 et 60€. Les coûts fixes des arcs routiers fictifs sont générés aléatoirement pour chaque instant entre 1€ et 4€. Pour les arcs routiers qui relient les sites et les plateformes entre eux, les coûts fixes sont générés aléatoirement à chaque période entre 400 et 800€ sauf pour les arcs (s_1, h_1) , (h_1, s_1) , (s_2, h_2) et (h_2, s_2) dont les coûts fixes sont générés à chaque instant entre 30 et 60€. En effet, nous supposons que la plateforme h_1 est proche, en terme de coût, au site s_1 et que la plateforme h_2 est proche au site s_2 . Pour les arcs fluviaux et ferroviaires les coûts fixes sont générés entre 500 et 2000€ et les capacités entre 1 et 3 véhicules par unité de temps. Les coûts variables associés aux arcs sont proportionnels aux coûts fixes suivant les catégories des demandes.

Les grandeurs associées aux demandes sont données par le tableau suivant :

demand	indexOrig	indexDest	t_{min}	t_{max}	category	quantity	q
d_1	s_1	s_2	0	9	0	100	1
d_2	s_1	s_2	3	9	1	150	2
d_3	s_2	s_1	2	9	2	200	1
d_4	s_1	s_2	4	9	3	50	1.5
d_5	s_2	s_1	1	8	4	10	3.2

Remarquons bien que nous nous disposons, pour cette instance, de 500 camions ce qui nous garantie l'existence d'une solution routière.

Instance 2

Elle est construite de la même manière que l'instance 1. Elles ont les mêmes grandeurs qui définissent la taille de l'instance sauf pour le nombre de périodes qui vaut 48, par conséquent les fenêtres de traitement des demandes sont réadaptées ainsi que les coûts et les capacités qui varient au cours du temps suivant la nouvelle plage horaire.

Instance 3

Similairement à l'instance 1, celle-ci est générée aléatoirement et les grandeurs qui définissent la taille de l'instance sont données par le tableau suivant :

CHAPITRE 3. MODÈLE MATHÉMATIQUE DU PGFCRM

$ S $	$ H $	$ S^c $	$ A^c $	$ A^t $	$ A^b $	$ D $	$ \Theta^{MD} $	$ \Theta $	$ T $	N_{S^c}	$ V^t $	$ V^b $	Φ^c	Q_c
8	3	5	64	9	7	8	2	5	24	500	2	2	200	2

Et par rapport aux grandeurs associées aux demandes, elles sont données par le tableau suivant :

demand	indexOrig	indexDest	t_{min}	t_{max}	category	quantity	q
d_1	s_1	s_2	0	9	0	100	1
d_2	s_2	s_4	3	9	1	150	2
d_3	s_3	s_4	8	23	2	200	1
d_4	s_3	s_5	2	18	2	200	1
d_5	s_4	s_2	5	22	2	200	1
d_6	s_4	s_5	9	23	3	60	1.5
d_7	s_5	s_4	4	9	3	50	1.5
d_8	s_2	s_1	1	8	4	10	3.2

Instance 4

Cette instance est construite à partir de l'instance 3 tout en gardant les mêmes grandeurs qui définissent la taille du problème sauf pour le nombre de périodes qui est égale à 48 au lieu de 24 dans l'instance 3. La nature de génération des coûts est la même dans les deux problèmes et les fenêtres de traitement des demandes sont générées aléatoirement dans le nouvel horizon temporel.

3.5.2 Résultats numériques

Le nombre de contraintes, après la réduction de CPLEX, pour l'instance 1 est de 845, le nombre de variables entières est de 1681 et le nombre de variables binaires est 72 (avec une réduction de 608 contraintes et 2153 variables soit un pourcentage de 41% pour les contraintes et 55% pour les variables). Cette instance est résolue exactement en 4.16 secondes avec environ 5982 nœuds exploités dans l'arbre de branchement de l'algorithme de Branch & Cut ; bien qu'au bout d'une seconde, CPLEX arrive déjà à trouver des solutions avec un gap de moins de 1%. Si nous exigeons l'utilisation du mode routier uniquement, la valeur de l'objectif passe de 489080€ à 582075€ (soit une différence de 92995). Les mouvements du flot de conteneurs transportés par le train et la barge dans la solution trouvée sont donnés dans le tableau suivant :

Demande	Instant	Véhicule	Départ	Destination	Quantité transportée
d_1	2	train	H_1	H_2	43
d_2	5	barge	H_1	H_2	41

Pour l'instance 2, et après la réduction de CPLEX, le nombre de contraintes est de 5513, le nombre de variables entières est 11814 et celui des variables binaires est 528 (avec une réduction de 2645 contraintes et 9545 variables soit un pourcentage de 32% pour les contraintes et 43% pour les variables). En limitant le temps de résolution pour CPLEX à 2000 secondes (environ 33 minutes), le solveur arrive à avoir 53 solutions réalisables avec un gap de 0.05% bien qu'il arrive à avoir des solutions au bout de 83 secondes avec un gap de 0.42%.

En exigeons l'utilisation du mode routier uniquement, la valeur de l'objectif passe de 222251€

à 567584€ (soit une différence de 345333€).

Pour l'instance 3, après la réduction de CPLEX, le nombre de contraintes est de 9784, le nombre de variables entières est 26460 et celui des variables binaires est 560 (avec une réduction de 7798 contraintes et 42807 variables soit une pourcentage de 44% pour les contraintes et 61% pour les variables). Au bout de 25 secondes, le solveur arrive déjà à résoudre le problème en atteignant l'optimum, 32 solutions réalisables sont trouvées.

Si nous exigeons l'utilisation du mode routier uniquement, la valeur de l'objectif passe de 873674€ à 949725€ (soit une différence de 76051€).

En ce qui concerne l'instance 4, la taille du problème est donnée par les chiffres suivants : 32172 contraintes, 118902 variables entières et 1589 variables binaires (avec une réduction de 10228 contraintes et 70728 variables soit une pourcentage de 24% pour les contraintes et 36% pour les variables). Une solution de la relaxation linéaire n'est obtenue qu'au bout de 52 secondes et après 33 minutes de résolution, le gap est toujours supérieur à 1.4%. Si nous exigeons l'utilisation du mode routier uniquement, la valeur de l'objectif passe de 532072€ à 806955€ (soit une différence de 274883€).

Le tableau suivant montre la différence entre le coût de transport en exigeant une solution routière et le coût de transport donné par le modèle mathématique combinant les différents modes de transports pour ces quatre instances.

Instance	valeur de l'objectif	coût du tout route	gain	pourcentage
1	489080 €	582075 €	92995€	15,97%
2	222251 €	567584 €	345333€	60,84%
3	873674 €	949725 €	76051€	8%
4	532072 €	806955 €	274883€	34.06%

Nous pouvons ainsi conclure de ce qui précède que la différence entre le coût de transport en partageant les ressources (trains barges et plateformes multimodales) et celui de transport en se limitant au mode routier uniquement peut être assez important (comme, par exemple, le cas de l'instance 2). Nous arrivons bien à résoudre efficacement les petites instances dans un temps raisonnable mais le temps de résolution d'un nœud augmente rapidement. Comme nous voudrions appliquer notre modèle sur des instances de taille réelle (comme l'Axe Seine) dont la taille des données est supérieure à celle de l'instance 4, il semble nécessaire de développer des nouvelles techniques afin de mieux résoudre notre problème et répondre à notre problématique.

Nous pouvons avoir des situations, comme par exemple, celles présentées dans la figure 3.5.1 où il y a deux demandes qui partagent le même train et chacun emprunte deux chemins différents. Dans cet exemple nous avons deux demandes ayant comme origine le site uni-modal s_1 et comme destination le site s_2 . Les demandes d_1 et d_2 ont la même quantité qui est égale à quatre conteneurs ; par contre, les catégories de ces deux demandes sont différentes (car le type de conteneurs de d_1 est 40 pieds et celui de d_2 est 20 pieds). Trois conteneurs de d_1 et deux conteneurs de d_2 sont envoyés dans des camions directement vers leurs destinations ; et un conteneur de d_1 , deux de d_2 sont envoyés dans des camions depuis leurs origines vers la plateforme multimodale H_1 , ils sont transférés des camions au train à destination la plateforme

multimodale H_2 pour être transférés après vers des camions allant de H_2 vers s_2 (destination des deux demandes).

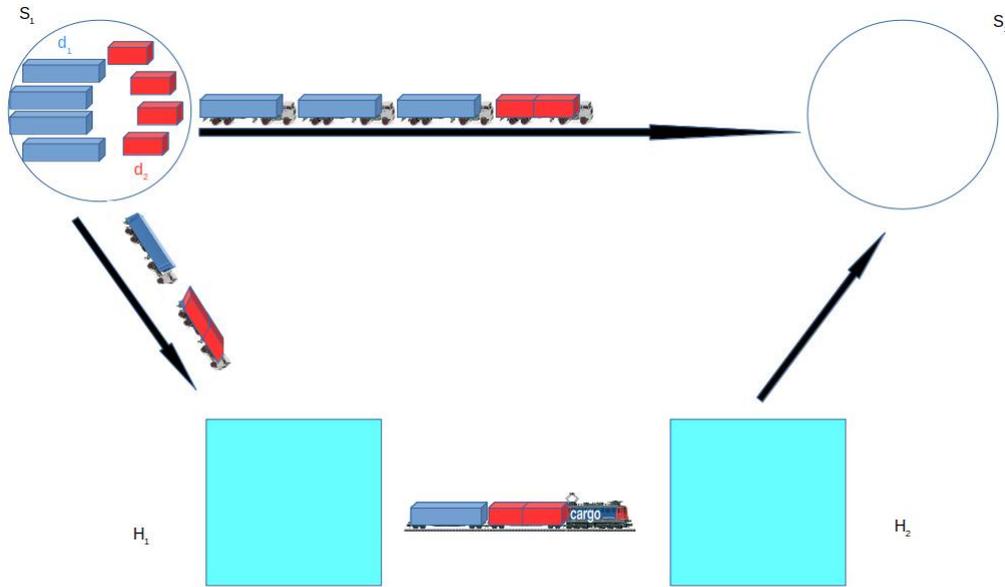


FIGURE 3.5.1 – Exemple de deux demandes qui partagent le même train

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit un modèle mathématique qui prend en considération les différentes spécificités liées au transport des conteneurs et à la gestion de leur stock au seins des plateformes multimodales. L’objectif de notre modèle est de minimiser le coût global d’acheminement tout en respectant les différentes contraintes techniques et celles exigées par la réglementation en vigueur.

Ce modèle peut montrer aux transporteurs le gain potentiel en se partageant les ressources fluviales et ferroviaires. Il peut être utilisé par les décideurs pour choisir l’acheminement des marchandises à travers les différentes plateformes.

Notre modèle mathématique donne des résultats acceptables (en terme de nombre de conteneurs et de camions traités) par rapport à la littérature (niveau de décision opérationnel : par exemple [1] et [3]) et avec un champ décisionnel plus large. Cependant, nous remarquons bien que sa résolution pour des instances de taille moyenne (par rapport à notre objectif de résolution) reste peu satisfaisante. Notre idée est d’utiliser l’efficacité de la résolution du modèle sur de petites instances mais appliquer à des instances plus grandes ; il nous semble donc important d’utiliser la structure du graphe associé au problème afin de réduire la taille de ce dernier pour une résolution plus efficace.

CHAPITRE 4

MODÈLE AGRÉGÉ ET BORNES (PRIMALE ET DUALE)

Nous avons présenté, dans le chapitre précédent un modèle mathématique qui prend en considération les différentes spécificités liées au transport des conteneurs. En revanche, dans le but de résoudre des instances de taille réelle, nous allons réduire la taille du problème en construisant un nouveau modèle mathématiques qui modélisera le problème d'une manière plus macroscopique. En se basant sur ce modèle, une borne duale (borne inférieure) et une borne primale (borne supérieure) pourront être construites. Nous allons négliger certains coûts et certaines contraintes du problème initial. En pratique, il existe des zones industrielles qui contiennent plusieurs sites et cette répartition des sites est prise en considération dans la génération des instances pour ce chapitre. On appelle zone industrielle un ensemble de sites uni-modaux dont le coût de transport des arcs entre eux est relativement petit.

Nous présentons, dans ce chapitre, un modèle mathématique agrégé qui prend en compte les principales spécificités du problème initial. Pour la définition de ce modèle agrégé, nous pouvons faire sans perte de généralité l'hypothèse suivante :

H1. *Il existe au moins une zone qui contient au moins deux sites.*

Cette hypothèse est nécessaire pour la construction du modèle agrégé. En effet, si les zones ne contiennent qu'un seul site, les deux problèmes sont identiques.

4.1 Construction des données

Dans cette section, nous présentons les différentes données du problème agrégé. Ces données seront construites à partir de celles du problème initial (présentées dans la section 3.1).

4.1.1 L'horizon temporel

Dans le problème agrégé, nous gardons le même horizon temporel et le même pas de discrétisation du problème initial. Nous avons donc :

$$T^{Ag} = T = \llbracket t_0, \tau \rrbracket$$

4.1.2 Les moyens de transport

Nous gardons aussi, dans le problème agrégé les mêmes modes de transport du problème initial. En pratique, ces modes sont $M = \{b, c, t\}$, où

- b représente le mode fluvial,
- c représente le mode routier,
- t représente le mode ferroviaire.

4.1.3 Les catégories des demandes

Dans le problème agrégé, certaines demandes seront supprimées (voir section 4.1.6). Nous pouvons donc réadapter les catégories des demandes en fonction des demandes qui seront gardées.

$$\Theta^{Ag} = \{\theta^k : k \in K^{Ag}\} \subseteq \Theta,$$

où K^{Ag} est l'ensemble des demandes du problème agrégé (présenté dans la sous section 4.1.6).

4.1.4 Le réseau du transport

En pratique, le réseau routier, composé des nœuds et des routes, a une densité beaucoup plus élevée par rapport à celle du réseau fluvial ou ferroviaire. L'agrégation du réseau sera donc au niveau routier uniquement. Notons $G^{Ag} = (S^{Ag}, A^{Ag})$ le graphe qui modélise le réseau de transport pour le problème agrégé.

- S^{Ag} est l'ensemble des zones industrielles et des plateformes multimodales.

$$S^{Ag} = Z \cup H,$$

où Z est l'ensemble des zones industrielles (par exemple, dans la figure 4.1.1, ces zones sont présentées par z_1 et z_2) et H est l'ensemble des plateformes multimodales présenté dans la section 3.1.4 et dans l'exemple de la figure 4.1.1, elles sont présentées par les nœuds h_1 et h_2 . Notons bien que les plateformes multimodales du problème agrégé sont identiques à celles du problème initial et que chaque site $i \in S \setminus H$ (ensemble des sites uni-modaux) est contenu dans une zone industrielle $z \in Z$.

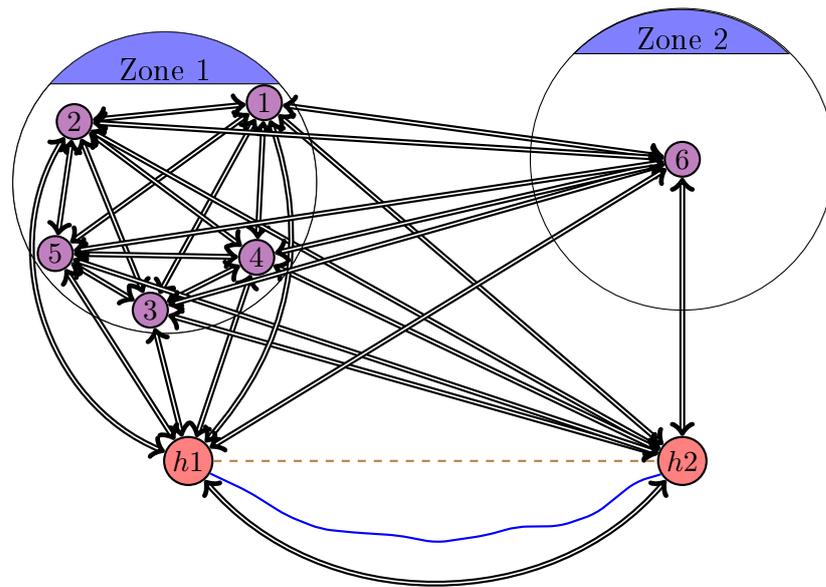


FIGURE 4.1.1 – Exemple d'agrégation du réseau

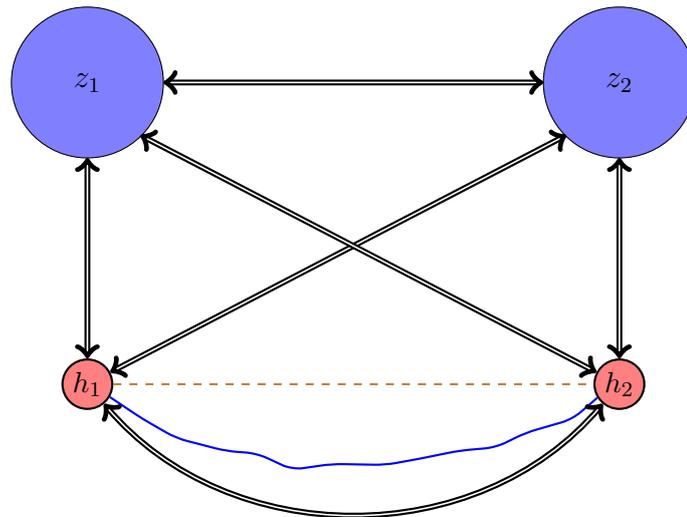


FIGURE 4.1.2 – Exemple du réseau agrégé

- A^{Ag} est l'ensemble des arcs du réseau agrégé. Ces arcs ont été classifiés, dans le problème initial, suivant leur mode de transport. Le réseau fluvial et le réseau ferroviaire, qui relie les plateformes multimodales, constituent une structure fixe du réseau pour les deux problèmes. En revanche, l'agrégation s'effectue au niveau du réseau routier. Les arcs dont les sommets sont contenus dans la même zone industrielle seront supprimés et ceux dont l'un des sommets est contenu dans une zone industrielle seront remplacés par d'autres arcs suivant les règles suivantes.

$$A^{Ag} = A^{c,Ag} \cup A^t \cup A^b,$$

où A^t et A^b représentent les mêmes ensembles de la section 3.1.4 (arcs fluviaux et ferroviaires entre les plateformes multimodales), et $A^{c,Ag}$ est l'ensemble des arcs routiers du problème agrégé.

$$A^{c,Ag} = A^{ZZ} \cup A^{ZH} \cup A^{HZ} \cup A^{c,HH}.$$

- ▷ $A^{c,HH}$ est l'ensemble des arcs routiers entre les plateformes multimodales qui gardent les mêmes caractéristiques de ceux du problème initial. Notons bien que pour tout $h \in H$, les arcs fictifs dans le problème initial sont gardés dans le problème agrégé avec les mêmes caractéristiques.
- ▷ A^{ZZ} représente l'ensemble des arcs entre les zones industrielles. Par exemple, dans la figure 4.1.2, les arcs A^{ZZ} sont présentés par les arcs (z_1, z_2) et (z_2, z_1) qui remplacent respectivement les ensembles $\{(1, 6), (2, 6), \dots, (5, 6)\}$ et $\{(6, 1), (6, 2), \dots, (6, 5)\}$ présentés dans la figure 4.1.1. En plus de ces arcs, on crée des arcs fictifs qui remplacent l'ensemble des arcs $\{(i, i) : i \in S\}$. Pour tout $z \in Z$, l'arc fictif associé à z est noté (z, z) .

Souhaitant que le problème agrégé fournisse une borne inférieure valide, nous choisissons pour chacun des nouveaux arcs routiers, le coût minimum parmi les coûts possibles. Et pour ne pas perdre la réalisabilité du problème, nous choisissons aussi pour chacun des nouveaux arcs routiers, le temps de parcours minimum parmi les temps de parcours possibles et on prend une capacité égale à la somme des capacités des arcs possibles.

Pour chaque arc $a = (z_1, z_2) \in A^{ZZ}$, pour chaque catégorie $\theta \in \Theta^{Ag}$ et à chaque instant $t \in T$, on définit les grandeurs qui sont associées à l'arc a .

- ◇ Le **coût variable** $\Phi_{a,\theta,t}^{var}$ de transport d'un conteneur de catégorie θ .

Si $z_1 \neq z_2$,

$$\Phi_{a,\theta,t}^{var} = \min_{(i,j) \in z_1 \times z_2} \Phi_{(i,j),\theta,t}^{var}. \quad (4.4.1.1)$$

Et si $z_1 = z_2$,

$$\Phi_{a,\theta,t}^{var} = 0. \quad (4.4.1.2)$$

- ◇ Le **coût fixe** $\Phi_{a,t}^{fix}$ de l'utilisation de l'arc par un camion (coût de déplacement d'un camion vide sur cet arc). Si $z_1 \neq z_2$,

$$\Phi_{a,t}^{fix} = \min_{(i,j) \in z_1 \times z_2} \Phi_{(i,j),t}^{fix}. \quad (4.4.1.3)$$

Et si $z_1 = z_2$,

$$\Phi_{a,t}^{fix} = 0. \quad (4.4.1.4)$$

- ◇ la **durée** t_a (en Δt) nécessaire pour parcourir cet arc par un camion

$$t_a = \min_{(i,j) \in z_1 \times z_2} t_{(i,j)}. \quad (4.4.1.5)$$

- ◇ la **capacité** de l'arc $C_{a,t}$ (en nombre de véhicules).

Si $z_1 \neq z_2$,

$$C_{a,t} = \sum_{(i,j) \in z_1 \times z_2} C_{(i,j),t}. \quad (4.4.1.6)$$

Et si $z_1 = z_2 = z$, on définit la capacité de l'arc (z, z) de façon à ce qu'on peut envoyer, sur cet arc, tous les camions que peut contenir la zone z dans le problème initial (pour mieux comprendre son expression, il faut se référer à la démonstration du théorème 4.5.1).

$$\begin{aligned}
 C_{a,t} &= \sum_{i \in z} \sum_{j \in z} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}+1}^t C_{(i,j),t'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t'=t-(t_{(i,h)}-t_{(z,h)})+1: \\ t_{(i,h)}-t_{(z,h)} > 0}}^t C_{(i,h),t'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t'+(t_{(h,i)}-t_{(h,z)}) \\ t'=t+1: \\ t_{(h,i)}-t_{(h,z)} > 0}} C_{(h,i),t'-t_{(h,i)}} \\
 &+ \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{\substack{t'+(t_{(i,j)}-t_{(z',z)}) \\ t'=t+1: \\ t_{(i,j)}-t_{(z',z)} > 0}} C_{(i,j),t'-t_{(i,j)}}.
 \end{aligned} \tag{4.4.1.7}$$

▷ A^{ZH} l'ensemble des arcs allant des zones industrielles vers les plateformes multimodales. Par exemple, dans la figure 4.1.2,

$$A^{ZH} = \left\{ \{(z_1, h_1), (z_1, h_2), (z_2, h_1), (z_2, h_2)\} \right\}.$$

Pour chaque arc $a = (z, h) \in A^{ZH}$, où $z \in Z$ et $h \in H$, on définit de la même manière que dans le paragraphe précédent les grandeurs qui lui sont associées.

◇ la **durée** t_a (en Δt) nécessaire pour parcourir cet arc par un camion

$$t_a = \min_{i \in z} t_{(i,h)}. \tag{4.4.1.8}$$

Pour tout $i \in z$, on définit $\Delta_{(i,h)}$ par l'expression suivante :

$$\Delta_{(i,h)} = t_{(i,h)} - t_{(z,h)} \geq 0.$$

Elle représente la différence entre le temps de parcours de l'arc initial et celui agrégé qui le remplace.

◇ Le **coût variable** $\Phi_{a,\theta,t}^{var}$ de transport d'un conteneur de catégorie $\theta \in \Theta$ à un instant $t \in T$.

$$\Phi_{a,\theta,t}^{var} = \min_{i \in z} \Phi_{(i,h),\theta,t-\Delta_{(i,h)}}^{var}. \tag{4.4.1.9}$$

◇ Le **coût fixe** $\Phi_{a,t}^{fix}$ d'utilisation de l'arc par un camion,

$$\Phi_{a,t}^{fix} = \min_{i \in z} \Phi_{(i,h),t-\Delta_{(i,h)}}^{fix}. \tag{4.4.1.10}$$

◇ la **capacité** de l'arc $C_{a,t}$ (en nombre de véhicules).

$$C_{a,t} = \sum_{i \in z} C_{(i,h),t-\Delta_{(i,h)}}. \tag{4.4.1.11}$$

▷ A^{HZ} l'ensemble des arcs allant des plateformes multimodales vers les zones industrielles. Par exemple, dans la figure 4.1.2,

$$A^{(HZ)} = \left\{ \{(h_1, z_1), (h_1, z_2), (h_2, z_1), (h_2, z_2)\} \right\}.$$

Pour chaque arc $a = (h, z)$, où $h \in H$ et $z \in Z$, on définit de la même manière que dans le paragraphe précédent les grandeurs qui lui sont associées.

◇ la **durée** t_a (en Δt) nécessaire pour parcourir cet arc par un camion

$$t_a = \min_{i \in z} t_{(h,i)}. \quad (4.4.1.12)$$

◇ Le **coût variable** $\Phi_{a,\theta,t}^{var}$ de transport d'un conteneur de catégorie $\theta \in \Theta$ à un instant $t \in T$.

$$\Phi_{a,\theta,t}^{var} = \min_{i \in z} \Phi_{(h,i),\theta,t}^{var}. \quad (4.4.1.13)$$

◇ Le **coût fixe** $\Phi_{a,t}^{fix}$ d'utilisation de l'arc par un camion,

$$\Phi_{a,t}^{fix} = \min_{i \in z} \Phi_{(h,i),t}^{fix}. \quad (4.4.1.14)$$

◇ la **capacité** de l'arc $C_{a,t}$ (en nombre de véhicules).

$$C_{a,t} = \sum_{i \in z} C_{(h,i),t}. \quad (4.4.1.15)$$

4.1.5 Les véhicules

Nous gardons l'ensemble des véhicules du problème initial et nous allons changer juste les positions initiales des camions.

Dans le problème initial, nous avons un ensemble de véhicules

$$V = V^c \cup V^t \cup V^b.$$

Alors, dans le problème agrégé, on définit

$$V^{Ag} = V^{c,Ag} \cup V^t \cup V^b.$$

On note $S^{c,Ag} \subset S^{Ag}$ l'ensemble des positions initiales des camions. Les positions initiales d'une même zone sont agrégées en une seule position r . En revanche lorsque la position initiale est une plateforme, elle reste inchangée et est aussi notée r . Et pour tout $r \in S^{c,Ag}$, on note N_r le nombre de camions ayant r comme position initiale.

$$N_r = \sum_{l \in r} N_l,$$

avec N_l le nombre de camions ayant $l \in S^c$ comme position initiale dans le problème initial (rappelons que comme r peut être une zone ou une plateforme, l , par conséquent, peut être un site uni-modal ou une plateforme).

4.1.6 Les demandes

Chaque demande ayant son origine et sa destination dans une même zone industrielle sera supprimée dans le problème agrégé. Ainsi, les demandes ayant une origine dans une zone et une destination dans une autre zone sont gardées.

Les demandes initiales $K^{z_1, z_2, \theta} \subset K$ ayant leur origine dans une zone $z_1 \in Z$ et leur destination dans une zone $z_2 \in Z$ et ayant la même catégorie $\theta \in \Theta^{Ag}$ sont remplacées, dans le problème agrégé, par une seule demande $k \in K^{Ag}$. L'origine de cette demande est z_1 , sa destination est z_2 et sa catégorie est θ . On définit, ainsi, la fenêtre de traitement et la quantité de cette demande de la manière suivante.

$$T^k = \llbracket t_{min}^k, t_{max}^k \rrbracket,$$

où

$$t_{min}^k = \min_{k' \in K^{z_1, z_2, \theta}} t_{min}^{k'},$$

et

$$t_{max}^k = \max_{k' \in K^{z_1, z_2, \theta}} t_{max}^{k'}.$$

En ce qui concerne la quantité de la demande, elle sera définie à l'aide de deux fonctions temporelles. Pour mieux exprimer ces fonctions, on définit pour chaque demande initiale $k' \in K^{z_1, z_2, \theta}$, deux fonctions temporelles qui représentent la quantité maximale sortante à chaque instant (resp. minimale entrante à chaque instant) de l'origine (resp. dans la destination).

$$d_s^{k'}(t) = d^{k'} \mathbb{1}_{T^{k'}}(t),$$

respectivement

$$d_e^{k'}(t) = d^{k'} \mathbb{1}_{\llbracket t_{max}^{k'}, \tau \rrbracket}(t).$$

où $\mathbb{1}_{T^{k'}}$ est la fonction indicatrice de la fenêtre de traitement de la demande k' et $\mathbb{1}_{\llbracket t_{max}^{k'}, \tau \rrbracket}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $\llbracket t_{max}^{k'}, \tau \rrbracket$.

Nous définissons alors la fonction temporelle qui limite la quantité sortante de l'origine z_1 de la demande k par :

$$d_s^k(t) = \sum_{k' \in K^{z_1, z_2, \theta}} d_s^{k'}(t), \quad (4.4.1.16)$$

et celle qui limite la quantité entrante dans la destination z_2 est donnée par :

$$d_e^k(t) = \sum_{k' \in K^{z_1, z_2, \theta}} d_e^{k'}(t). \quad (4.4.1.17)$$

Par exemple, dans la figure 4.1.3, nous avons trois demandes initiales ayant la même catégorie et dont les origines appartiennent à une seule zone ainsi que les destinations. Alors, ces trois demandes sont agrégeables en une seule demande dont la fonction qui limite la quantité sortante de l'origine est présentée dans la figure 4.1.4 et la fonction qui limite la quantité entrante dans la destination est présentée dans la figure 4.1.5.

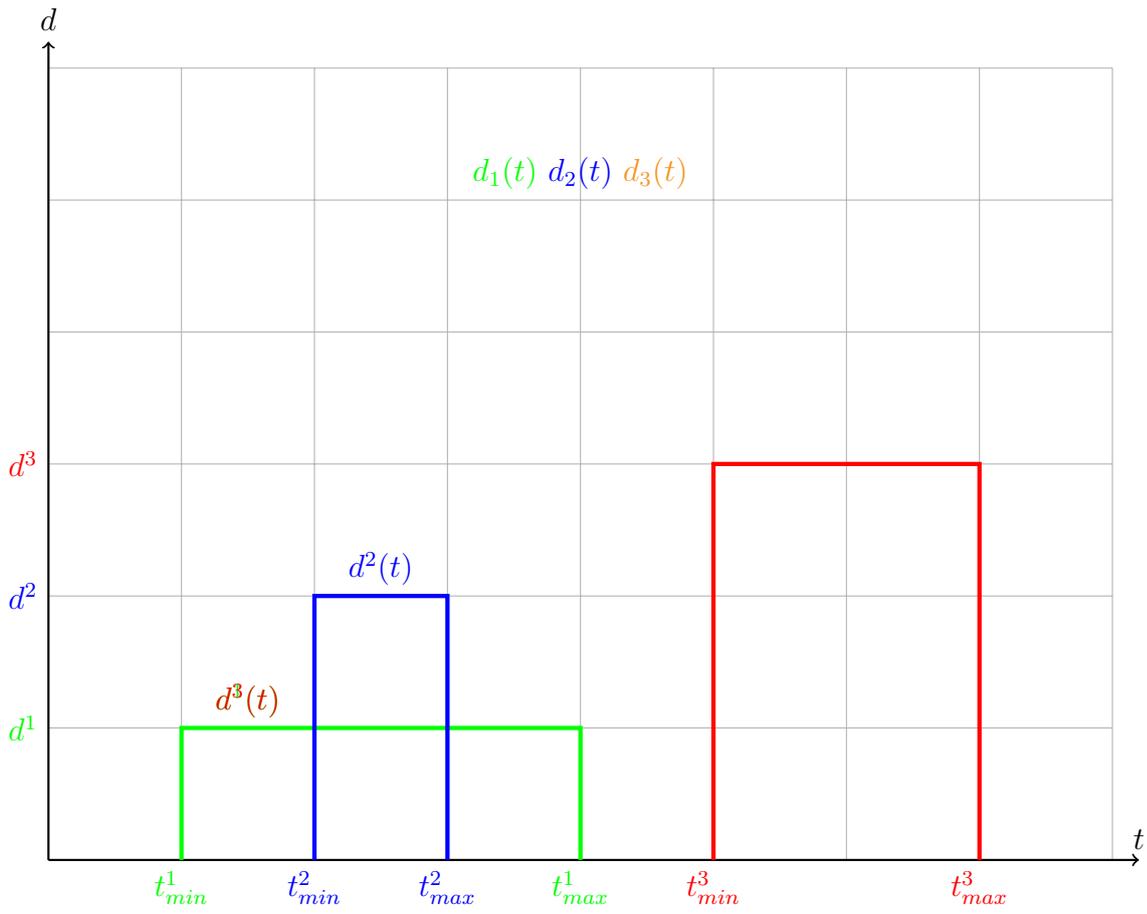


FIGURE 4.1.3 – Exemple de trois demandes initiales agrégables en une seule demande

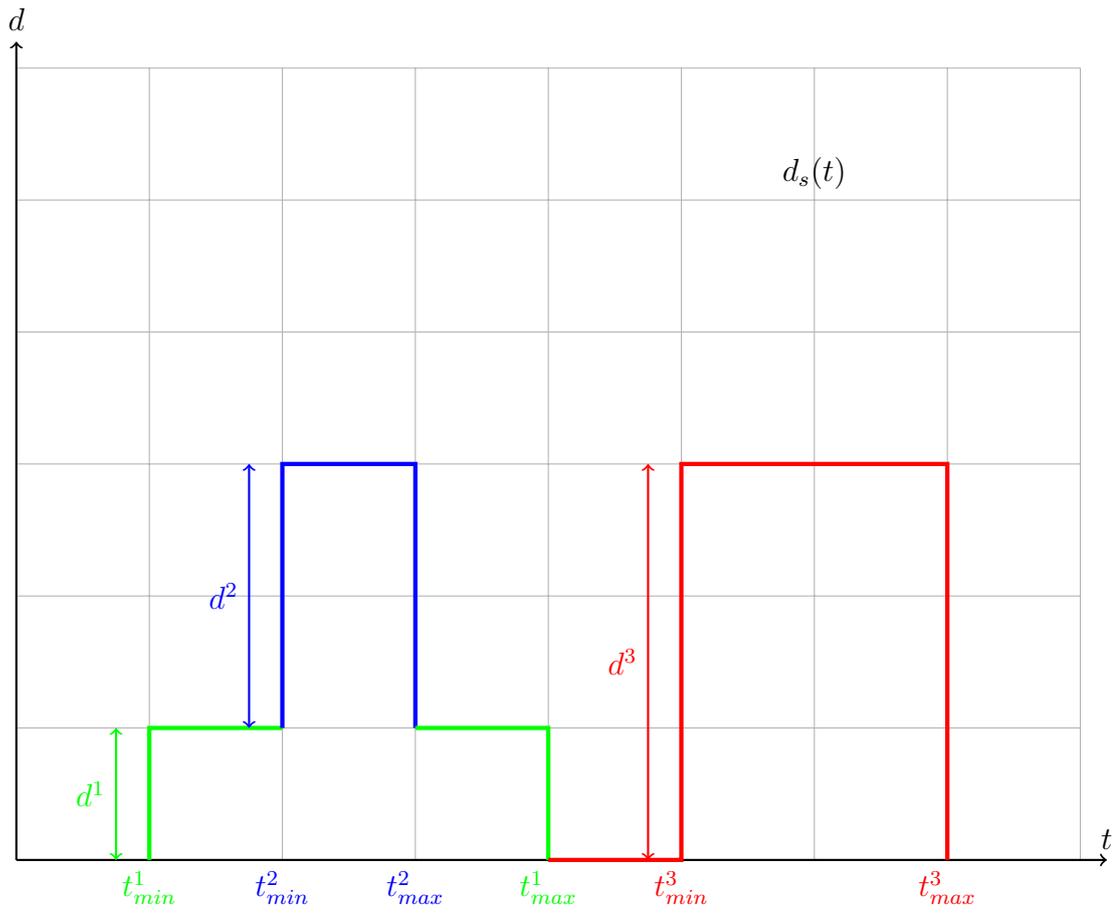


FIGURE 4.1.4 – Représentation graphique d'une fonction de quantité de demande sortante

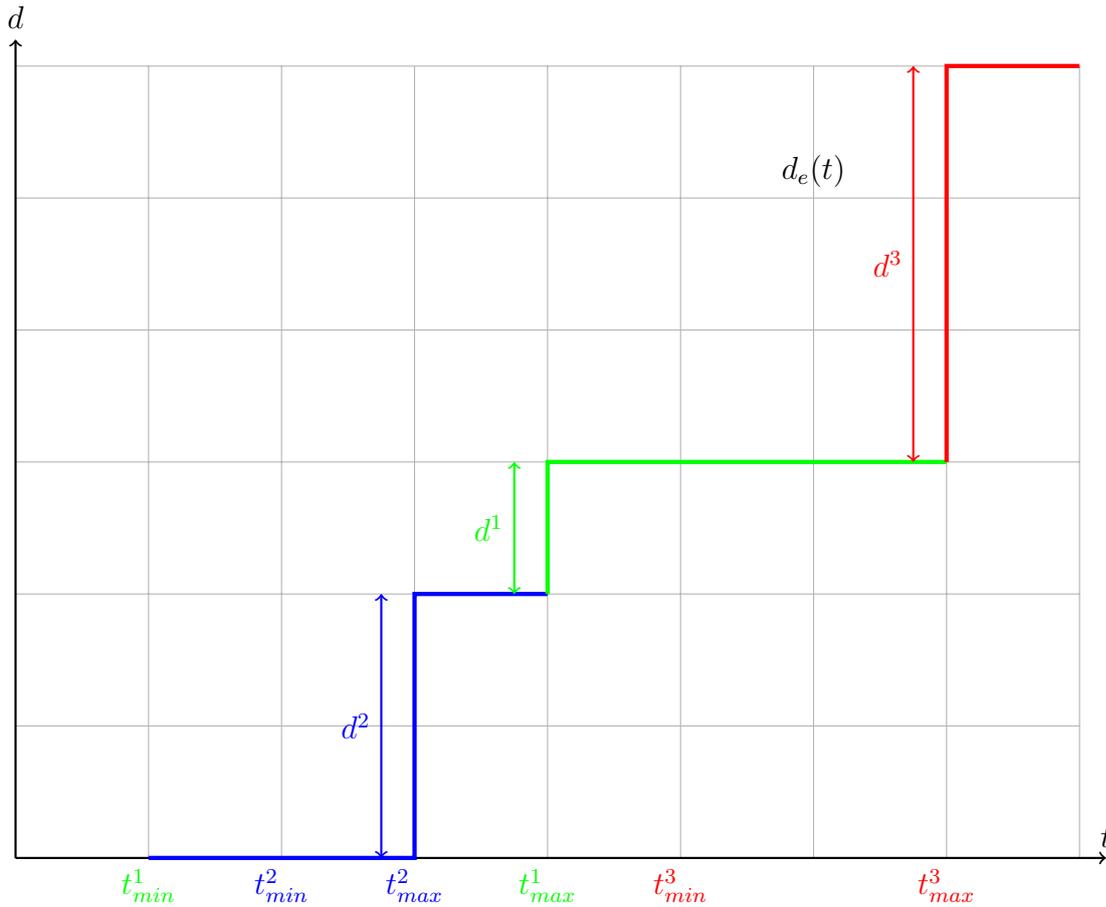


FIGURE 4.1.5 – Représentation graphique d'une fonction de quantité de demande entrante

4.2 Variables de décision

Dans cette section, nous allons passer en revue les variables utilisées dans le modèle agrégé. Les variables de flot liées aux demandes agrégées sont similaires au problème initial exceptées de celles liées au nouveau graphe routier. Les variables d'activation des trains et des barges sont identiques pour les deux modèles et celles d'activation des camions sont réadaptées.

4.2.1 Les variables de flot envoyé sur les arcs

Variables de flot envoyé sur les arcs fluviaux et ferroviaires

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour tout arc $a \in A^t \cup A^b$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout instant $t \in T^k$, avec $(t + t_a) \in T^k$, et $m_a = m_v$, notons

$$x_{a,v,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de flot envoyée sur l'arc } a \text{ dans le véhicule } v \\ \text{à l'instant } t \text{ pour livrer la demande } k. \end{cases} \in \mathbb{N}$$

Variables de flot envoyé sur les arcs routiers

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour tout arc $a \in A^{c,Ag}$, pour toute position $r \in S^{c,Ag}$, et pour tout instant $t \in T^k$, avec $(t + t_a) \in T^k$, notons

$$x_{a,r,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de flot envoyée sur l'arc } a \text{ dans les camions initialement} \\ \text{positionnés en } r \text{ à l'instant } t \text{ pour livrer la demande } k, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

4.2.2 Les variables d'activation des véhicules

Variables d'activation des trains et des barges

Pour tout arc $a \in A^t \cup A^b$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$, et pour tout instant $t \in T$, avec $m_a = m_v$ et $(t + t_a) \in T$, notons

$$y_{a,v,t} = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule } v \text{ débute sur l'arc } a \text{ à l'instant } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Variables d'activation des camions

Pour tout arc $a \in A^{c,Ag}$, pour toute position $r \in S^{c,Ag}$, et pour tout instant $t \in T$, avec $(t + t_a) \in T$, notons

$$y_{a,r,t} = \begin{cases} \text{le nombre de camions initialement positionnés en } r \\ \text{qui débute sur l'arc } a \text{ à l'instant } t, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variable d'activation des trains et des barges depuis leurs positions initiales

Pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$, pour tout instant $t \in T$, notons

$$\alpha_{v,t} = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule } v \text{ quitte la première fois sa position initiale } p_v \text{ à l'instant } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Variable d'activation des camions depuis leurs positions initiales

Pour tout instant $t \in T$, pour toute position $r \in S^{c,Ag}$, notons

$$\alpha_{r,t} = \begin{cases} \text{le nombre de camions qui quittent pour la première fois} \\ \text{leur position initiale } r \text{ à l'instant } t, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variable de libération des trains et des barges

Pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$, pour tout instant $t \in T$, notons

$$\beta_{v,t} = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule } v \text{ est libéré à l'instant } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Variables indiquant le nombre de camions libérés à chaque instant

Pour tout instant $t \in T$, pour toute position $r \in S^{c,Ag}$, notons

$$\beta_{r,t} = \begin{cases} \text{le nombre de camions initialement positionnés en } r \\ \text{et qui sont libérés à l'instant } t, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables indiquant la présence ou non de MD dans un véhicule

Pour tout $\theta \in MD^{Ag}$, pour tout $v \in V^t \cup V^b$, et pour tout $t \in T$, notons

$$\gamma_{v,t}^\theta = \begin{cases} 1 & \text{si la Matière Dangereuse } \theta \text{ est envoyée dans le véhicule } v \text{ à l'instant } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.2.3 Les variables de flot transitant dans les plateformes multimodales

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$, et pour tout instant $t \in T^k$ avec $m_v \in M_h$, notons

$$u_{h,v,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ déchargée du véhicule } v \\ \text{à l'instant } t \text{ pour être stockée dans la plateforme } h. \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot déchargé des camions pour être stocké dans les plateformes multimodales

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour toute position $r \in S^{c,Ag}$, et pour tout instant $t \in T^k$, notons

$$u_{h,r,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ déchargée, à l'instant } t, \text{ des camions} \\ \text{initialement positionnés en } r \text{ pour être stockée dans la plateforme } h. \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot chargé depuis le stock des plateformes sur les trains et les barges

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$, pour toute plateforme $h \in H$ et pour tout instant $t \in T^k$, avec $m_v \in M_h$, on note

$$z_{h,v,t}^k = \begin{cases} \text{quantité de la demande } k \text{ chargée depuis le stock} \\ \text{de la plateforme } h \text{ sur le véhicule } v \text{ à l'instant } t. \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot chargé depuis le stock des plateformes sur les camions

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour toute position $r \in S^{c,Ag}$ et pour tout instant $t \in T^k$, notons

$$z_{h,r,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ chargée, à l'instant } t, \text{ depuis le stock} \\ \text{de la plateforme } h \text{ sur les camions initialement positionnés en } r. \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot transféré entre les trains et les barges au niveau des plateformes

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour tout véhicule $v, v' \in V^t \cup V^b$, pour tout instant $t \in T^k$, tels que $v \neq v'$ et $m_v, m_{v'} \in M_h$, notons

$$q_{h,v,v',t}^k = \begin{cases} \text{quantité de la demande } k \text{ transférée dans la plateforme } h \\ \text{du véhicule } v \text{ vers le véhicule } v' \text{ à l'instant } t, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot transféré entre les camions d'un côté et les trains et les barges de l'autre côté au niveau des plateformes

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour toute position $r \in S^{c,Ag}$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout instant $t \in T^k$, tel que $m_v \in M_h$, notons

$$q_{h,r,v,t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ transférée, à l'instant } t, \text{ dans la plateforme } h \\ \text{des camions initialement positionnés en } r \text{ vers le véhicule } v, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Et

$$q_{h,v,r,t}^k = \begin{cases} \text{quantité de la demande } k \text{ transférée, à l'instant } t, \text{ dans la plateforme } h \\ \text{du véhicule } v \text{ vers les camions initialement positionnés en } r, \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

Variables de flot transféré entre les camions

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour tout instant $t \in T^k$, et pour toutes positions $r, r' \in S^{c,Ag}$ telles que $r \neq r'$, notons

$$q_{h,r,r',t}^k = \begin{cases} \text{la quantité de la demande } k \text{ transférée à l'instant } t \\ \text{dans la plateforme } h \text{ des camions initialement positionnés en } r \\ \text{vers ceux initialement positionnés en } r' \end{cases} \in \mathbb{N}.$$

4.3 Contraintes du problème

Les contraintes de conservation de flot pour les trains et les barges sont identiques dans les deux modèles et les autres contraintes sont réadaptées suivant la nouvelle structure de graphe et de données agrégées.

4.3.1 Contraintes liées aux plateformes multimodales

La conservation du flot au niveau des plateformes multimodales

- La conservation de flot pour les trains et les barges

$$\begin{aligned} \forall k \in K^{Ag}, \forall h \in H, \forall v \in V^t \cup V^b, \forall t \in T^k, \text{ avec } m_v \in M_h, \\ \sum_{\substack{a \in \delta^+(h): \\ m_a = m_v \\ t + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,v,t}^k = \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,v,t-t_a}^k \\ + z_{h,v,t}^k - u_{h,v,t}^k \\ + \sum_{r \in S^{c,Ag}} q_{h,r,v,t}^k + \sum_{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}} q_{h,v',v,t}^k \\ - \sum_{r \in S^{c,Ag}} q_{h,v,r,t}^k - \sum_{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}} q_{h,v,v',t}^k \end{aligned} \quad (4.4.3.18)$$

- La conservation de flot pour les camions

$$\forall k \in K^{Ag}, \forall h \in H, \forall r \in S^{c,Ag}, \forall t \in T^k,$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^{c, Ag}: \\ t+t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,r,t}^k &= \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^{c, Ag}: \\ t_{min}^k \leq t-t_a}} x_{a,r,t-t_a}^k \\
 &+ z_{h,r,t}^k - u_{h,r,t}^k \\
 &+ \sum_{r' \in S^{c, Ag} \setminus \{r\}} q_{h,r',r,t}^k + \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b, \\ m_v \in M_h}} q_{h,v,r,t}^k \\
 &- \sum_{r' \in S^{c, Ag} \setminus \{r\}} q_{h,r,r',t}^k - \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b, \\ m_v \in M_h}} q_{h,r,v,t}^k.
 \end{aligned} \tag{4.4.3.19}$$

La contrainte de positivité du stock

$$\begin{aligned}
 &\forall h \in H, \forall k \in K^{Ag}, \forall t \in T^k, \\
 &\sum_{\substack{t' \leq t \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{r \in S^{c, Ag}} (u_{h,r,t'}^k - z_{h,r,t'}^k) \right) \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.4.3.20}$$

La contrainte de capacité de stockage au niveau des plateformes

$$\begin{aligned}
 &\forall h \in H, \forall t \in T^{Ag}, \\
 &\sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{r \in S^{c, Ag}} (u_{h,r,t'}^k - z_{h,r,t'}^k) \right) \leq C_h.
 \end{aligned} \tag{4.4.3.21}$$

Contraintes de respect de la productivité des plateformes

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{r \in S^{c, Ag}} z_{h,r,t}^k \right) + \sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} u_{h,v,t}^k + \sum_{r \in S^{c, Ag}} u_{h,r,t}^k \right) \\
 &+ \sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} \sum_{r \in S^{c, Ag}} \left(\sum_{r' \in S^{c, Ag} \setminus \{r\}} q_{h,r,r',t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,r,v,t}^k \right) \\
 &+ \sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \left(\sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{r \in S^c} q_{h,v,r,t}^k \right) \\
 &\leq \nu_{h,t}, \quad \forall h \in H, \forall t \in T.
 \end{aligned} \tag{4.4.3.22}$$

4.3.2 La conservation du flot des conteneurs au niveau des sites

La conservation du flot des conteneurs au niveau des origines des demandes s'exprime par les inégalités suivantes

$$\sum_{r \in S^{c,Ag}} \left(\sum_{a \in \delta^+(O^k)} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \geq t_{min}^k, \\ t' + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,r,t'}^k - \sum_{a \in \delta^-(O^k)} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t_{min}^k \leq t' - t_a}} x_{a,r,t'-t_a}^k \right) \leq d_s^k(t), \quad \forall k \in K^{Ag}, \forall t \in T^k. \quad (4.4.3.23)$$

La conservation du flot des conteneurs au niveau des destinations des demandes s'exprime quant à elle par les contraintes suivantes

$$\sum_{r \in S^{c,Ag}} \left(\sum_{a \in \delta^-(D^k)} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,r,t-t_a}^k - \sum_{a \in \delta^+(D^k)} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,r,t}^k \right) \geq d_e^k(t), \quad \forall k \in K^{Ag}, \forall t \in T^k. \quad (4.4.3.24)$$

La conservation du flot des conteneurs au niveau des zones différentes de l'origine et de la destination d'une demande s'exprime par les inégalités suivantes

$$\forall k \in K^{Ag}, \forall z \in Z \setminus (\{O^k, D^k\}), \forall r \in S^{c,Ag}, \forall t \in T^k, \\ \sum_{\substack{a \in \delta^+(z): \\ t + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,r,t}^k - \sum_{\substack{a \in \delta^-(z): \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,r,t-t_a}^k = 0.$$

4.3.3 Contraintes liées aux véhicules

Contraintes limitant les quantités déchargées des véhicules

Chaque véhicule doit contenir, au moins, la quantité qui en sera déchargée pour être stockée ou transférée vers un autre véhicule dans une plateforme multimodale.

Pour les trains et les barges, on obtient les contraintes suivantes.

$$\forall v \in V^t \cup V^b, \forall h \in H, \forall k \in K^{Ag}, \forall t \in T^k \text{ avec } m_v \in M_h, \\ u_{h,v,t}^k + \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{r \in S^{c,Ag}} q_{h,v,r,t}^k \leq \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,v,t-t_a}^k. \quad (4.4.3.25)$$

Et pour les camions,

$$\forall r \in S^{c,Ag}, \forall h \in H, \forall k \in K^{Ag}, \forall t \in T^k, \\ u_{h,r,t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,r,v,t}^k + \sum_{r' \in S^{c,Ag} \setminus \{r\}} q_{h,r,r',t}^k \leq \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^{c,Ag}: \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,r,t-t_a}^k. \quad (4.4.3.26)$$

Respect de la capacité des arcs en nombre de véhicules

Le respect de la capacité des arcs fluviaux et ferroviaires s'exprime par les contraintes suivantes

$$\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v = m_a}} y_{a,v,t} \leq C_{a,t}, \quad \forall a \in A^t \cup A^b, \forall t \in T \text{ avec } (t + t_a) \in T. \quad (4.4.3.27)$$

Et pour les camions, le respect de la capacité des arcs routiers se traduit par les contraintes suivantes

$$\sum_{r \in S^{c,Ag}} y_{a,r,t} \leq C_{a,t}, \quad \forall a \in A^{c,Ag}, \forall t \in T \text{ avec } (t + t_a) \in T. \quad (4.4.3.28)$$

Le passage (ou départ) des véhicules par (ou depuis) leurs positions initiales

Pour les trains et les barges, nous avons les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} & \forall v \in V^t \cup V^b, \forall t \in T, \\ & \sum_{\substack{a \in \delta^+(p_v): \\ m_v = m_a, \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,v,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(p_v): \\ m_v = m_a, \\ (t-t_a) \in T}} y_{b,v,t-t_a} = \alpha_{v,t} - \beta_{v,t}. \end{aligned} \quad (4.4.3.29)$$

Et pour les camions :

$$\begin{aligned} & \forall r \in S^{c,Ag}, \forall t \in T, \\ & \sum_{\substack{a \in \delta^+(r) \cap A^{c,Ag}: \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,r,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(r) \cap A^{c,Ag}: \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,r,t-t_a} = \alpha_{r,t} - \beta_{r,t}. \end{aligned} \quad (4.4.3.30)$$

De plus, nous avons d'autres contraintes qui exigent qu'on ne peut activer les véhicules qu'une seule fois. Pour les trains et les barges, nous avons :

$$\sum_{t \in T} \alpha_{v,t} \leq 1. \quad \forall v \in V^t \cup V^b. \quad (4.4.3.31)$$

Et pour les camions :

$$\sum_{t \in T} \alpha_{r,t} \leq N_r = \sum_{l \in r} N_l. \quad \forall r \in S^{c,Ag}. \quad (4.4.3.32)$$

Le passage de véhicules par des sites différents de leurs positions initiales

Pour les trains et barges, nous avons les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} & \forall v \in V^t \cup V^b, \forall h \in H \setminus \{p_v\}, \forall t \in T, \text{ avec } m_v \in M_h, \\ & \sum_{\substack{a \in \delta^+(h): \\ m_a = m_v, \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,v,t} = \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,v,t-t_a}. \end{aligned} \quad (4.4.3.33)$$

Et pour les camions,

$$\begin{aligned} & \forall r \in S^{c,Ag}, \forall i \in S^{Ag} \setminus \{r\}, \forall t \in T, \\ & \sum_{\substack{a \in \delta^+(i) \cap A^{c,Ag}: \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,r,t} = \sum_{\substack{a \in \delta^-(i) \cap A^{c,Ag}: \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,r,t-t_a}. \end{aligned} \quad (4.4.3.34)$$

4.3.4 Contraintes liées aux capacités des véhicules et aux matières dangereuses

Respect de la capacité des véhicules

Le respect de la capacité des trains et des barges est traduit par les contraintes suivantes :

$$\forall v \in V^t \cup V^b, \forall a \in A^t \cup A^b, \forall t \in T \text{ avec } (t + t_a) \in T \text{ et } m_v = m_a,$$

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} x_{a,v,t}^k \leq Q_v y_{a,v,t}. \quad (4.4.35)$$

Et pour les camions :

$$\forall r \in S^{c,Ag}, \forall a \in A^{c,Ag}, \forall t \in T \text{ avec } (t + t_a) \in T,$$

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} x_{a,r,t}^k \leq Q_c y_{a,r,t}. \quad (4.4.36)$$

Contraintes sur le flot de matières dangereuses dans les véhicules

$$\sum_{\substack{a \in A^t \cup A^b: \\ m_a = m_v}} \sum_{\substack{k \in K^{Ag}, \\ m_v = m_a, \\ \theta^k = \theta}} q^{\theta} x_{a,v,t}^k \leq Q_v \gamma_{v,t}^{\theta}, \quad \forall v \in V^t \cup V^b, \forall t \in T, \forall \theta \in \Theta^{MD,Ag}. \quad (4.4.37)$$

Les incompatibilités entre marchandises

Ces deux contraintes sont identiques à celles présentées dans le modèle initial avec un ensemble de matières dangereuses adapté suivant l'agrégation des demandes.

$$\gamma_{v,t}^{\theta} + \gamma_{v,t}^{\theta'} \leq 1, \quad \forall \theta, \theta' \in \Theta^{MD,Ag}, \forall v \in V^t \cup V^b, \forall t \in T. \quad (4.4.38)$$

De plus, une matière dangereuse ne peut être envoyée sur un véhicule que s'il est activé. Nous avons donc les contraintes suivantes :

$$\gamma_{v,t}^{\theta} \leq \sum_{\substack{a \in A^t \cup A^b: \\ m_a = m_v}} y_{a,v,t}, \quad \forall \theta \in \Theta^{MD,Ag}, \forall v \in V^t \cup V^b, \forall t \in T. \quad (4.4.39)$$

4.4 L'objectif

L'objectif reste de minimiser le coût global d'acheminement de conteneurs. Nous retrouvons les 5 types de coûts. Pour les coûts de transport sur les arcs fluvio-ferroviaires, de chargement et de déchargement des trains et des barges, nous gardons les même coûts et ce qui change c'est l'ensemble de demandes. Les coûts de transport sur les arcs routiers changent suivant le nouveau graphe agrégé et les nouvelles positions initiales des camions.

Le coût de transport

$$\begin{aligned}
 \Phi_{Ag}^{trans.} = & \sum_{k \in K^{Ag}} \underbrace{\left(\sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} x_{a,v,t}^k \right)}_{\text{coût de transport fluvial-ferroviaire}} \\
 & + \sum_{k \in K^{Ag}} \underbrace{\left(\sum_{a \in A^c, Ag} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \sum_{r \in S^c, Ag} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} x_{a,r,t}^k \right)}_{\text{coût de transport routier}}.
 \end{aligned} \tag{4.4.4.40}$$

Le coût de stockage

$$\Phi_{Ag}^{stock.} = \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h,\theta^k,t}^{stk} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t}^k - z_{h,v,t}^k) + \sum_{r \in S^c, Ag} (u_{h,r,t}^k - z_{h,r,t}^k) \right). \tag{4.4.4.41}$$

Le coût de manutention

$$\begin{aligned}
 \Phi_{Ag}^{man.} = & \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h,\theta^k,t}^{man} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \left(u_{h,v,t}^k + z_{h,v,t}^k + \sum_{\substack{v' \in V \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{r \in S^c, Ag} q_{h,v,r,t}^k \right) \\
 & + \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h,\theta^k,t}^{man} \sum_{i \in S^c, Ag} \left(u_{h,r,t}^k + z_{h,r,t}^k + \sum_{r' \in S^c, Ag \setminus \{r\}} q_{h,r,r',t}^k + \sum_{\substack{v' \in V: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,r,v,t}^k \right).
 \end{aligned} \tag{4.4.4.42}$$

Le coût de déplacement des véhicules

$$\Phi_{Ag}^{d.v.} = \sum_{v \in V^t \cup V^b} \sum_{\substack{a \in A^t \cup A^b: \\ m_a = m_v}} \sum_{\substack{t \in T: \\ (t+t_a) \in T}} \Phi_{a,t}^{fix} y_{a,v,t} + \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{a \in A^c, Ag} \sum_{\substack{t \in T: \\ (t+t_a) \in T}} \Phi_{a,t}^{fix} y_{a,r,t}. \tag{4.4.4.43}$$

Le coût d'activation des véhicules

$$\Phi_{Ag}^{ac.veh.} = \sum_{v \in V^t \cup V^b} \sum_{t \in T} \Phi_v \alpha_{v,t} + \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{t \in T} \Phi_c \alpha_{r,t}. \tag{4.4.4.44}$$

Le coût global d'acheminement des conteneurs

L'objectif est de minimiser le coût global de transport :

$$\min (\Phi_{Ag}^{trans.} + \Phi_{Ag}^{stock.} + \Phi_{Ag}^{man.} + \Phi_{Ag}^{d.v.v.} + \Phi_{Ag}^{ac.veh.}),$$

où $\Phi_{Ag}^{trans.}$, $\Phi_{Ag}^{stock.}$, $\Phi_{Ag}^{man.}$, $\Phi_{Ag}^{d.v.v.}$ et $\Phi_{Ag}^{ac.veh.}$ sont donnés par (4.4.4.40), (4.4.4.41), (4.4.4.42), (4.4.4.43), et (4.4.4.44).

4.5 Construction d'une borne duale au problème initial

En pratique, comme un camion ne peut transporter qu'un, voir deux conteneurs, et qu'il est plus sûr que ça soit le même camion qui fasse le transport de bout en bout, il y a très peu d'échanges de conteneurs entre camions en particulier si leurs positions initiales sont proches entre eux en terme de coûts.

Ainsi nous faisons l'hypothèse suivante :

H2. *Pour le problème initial, dans chaque plateforme multimodale, il n'y a pas d'échange de flot entre les camions initialement positionnés dans la même zone industrielle.*

Sous cette hypothèse, nous allons démontrer le théorème 4.5.1 et, par conséquent, la résolution optimale du problème agrégé, ou plus généralement, toute borne duale du problème agrégé fournit une borne duale au problème initial (c'est-à-dire une borne inférieure sur la valeur optimale de la fonction objective). On annonce ainsi le théorème suivant.

Théorème 4.5.1.

Sous l'hypothèse H2, nous avons les deux points suivants :

1. *Chaque solution réalisable du problème initial induit une solution du problème agrégé.*
2. *La valeur de la fonction objectif du problème agrégé est inférieure à celle du problème initial.*

La démonstration de ce théorème comprend toutes les sous sections 4.5.1, 4.5.2 (pour le premier point du théorème) et 4.5.3 (pour le deuxième point).

Démonstration. Soit $\mathcal{S} = (x, y, \alpha, \beta, \gamma, u, z, q,)$ une solution du problème initial.

4.5.1 Construction d'une solution \mathcal{S}' du problème agrégé induite par la solution \mathcal{S} du problème initial

Dans cette section, nous construisons une solution $\mathcal{S}' = (x', y', \alpha', \beta', \gamma', u', z', q')$ à partir de la solution \mathcal{S} . Nous gardons les mêmes valeurs pour variable d'activation et de libération des trains et des barges et on somme sur les demandes agrégeables pour les variables de flot associés aux trains et aux barges. Pour les variables liées aux camions, nous faisons la somme sur les positions initiales appartenant à une même zone industrielle. Et vu que les temps de parcours changent, nous envoyons le flot arrivant avant sa date sur les arcs fictifs associés aux zones industrielles.

Fixation des variables de flot envoyé sur les arcs

Soient $k \in K^{Ag}, a \in A^{Ag}, r \in S^{c,Ag}, v \in V^t \cup V^b, t \in T^k$.

Pour chaque type d'arc (mode de transport, nature des extrémités), nous allons fixer les variables de flot qui lui sont associées. Et pour des raisons de simplification d'écriture, nous utilisons la notation $k' \in k$, pour désigner $k' \in K^{O^k, D^k, \theta^k}$.

► Si $a \in A^{HH}$ (réseaux identiques dans les deux problèmes), *i.e.* : $a = (h, h')$ avec $h, h' \in H$.

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

- * Si $a \in A^{c,HH}$,
on pose

$$x'_{a,r,t} = \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} x_{a,l,t}^{k'} \quad (4.4.5.45)$$

- * Si $a \in A^t \cup A^b$ et $m_a = m_v$,
on pose

$$x'_{a,v,t} = \sum_{k' \in k} x_{a,v,t}^{k'} \quad (4.4.5.46)$$

- Si $a \in A^{ZH}$, i.e. : $a = (z, h)$ avec $z \in Z$ et $h \in H$.
Nous calculons le flot de conteneurs provenant de la zone z qui doit arriver à la plateforme h à l'instant $t+t_{(z,h)}$. Donc, pour $i \in z$, le flot envoyé depuis le site i et qui doit arriver à la plateforme h à l'instant $t+t_{(z,h)}$ est celui envoyé depuis i vers h à l'instant $t+t_{(z,h)}-t_{(i,h)}$. Or,

$$t + t_{(z,h)} - t_{(i,h)} = t - (t_{(i,h)} - t_{(z,h)}) = t - \Delta_{(i,h)}.$$

on pose donc :

$$x'_{a,r,t} = \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} x_{(i,h),l,t-\Delta_{(i,h)}}^{k'} \quad (4.4.5.47)$$

- Si $a \in A^{HZ}$, i.e. : $a = (h, z)$ avec $h \in H$ et $z \in Z$.
on pose

$$x'_{a,r,t} = \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} x_{(h,i),l,t}^{k'} \quad (4.4.5.48)$$

- Si $a \in A^{ZZ}$, i.e. : $a = (z, z')$ avec $z, z' \in Z$. Nous avons deux cas :
 - ▷ si $z \neq z'$,
on pose

$$x'_{a,r,t} = \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z'} x_{(i,j),l,t}^{k'} \quad (4.4.5.49)$$

- ▷ Si $a = (z, z)$, avec $z \in Z$,

On fixe les variables du flot des conteneurs qui prend l'arc fictif a de la manière suivante.

Pour mieux exprimer la valeur de $x'_{a,r,t}$, nous définissons quelques grandeurs.

- (a) Le flot des demandes agrégables en k circulant dans la zone z .

On définit :

$$\mathcal{F}_{r,t}^{k,z,z} = \begin{cases} \text{le flot de demandes agrégables en } k, \text{ envoyé sur les camions} \\ \text{associés à } r, \text{ présent à l'instant } t, \text{ sur les arcs d'extrémités dans } z. \end{cases}$$

Ce flot s'exprime à l'aide des valeurs de x de la solution S par :

$$\mathcal{F}_{r,t}^{k,z,z} = \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}+1}^t x_{(i,j),l,t'}^{k'} \quad (4.4.5.50)$$

Notons bien que le flux envoyé sur les arcs fictifs associés aux sommets agrégables en z est inclus dans cette expression.

- (b) Le flot envoyé depuis les sites de la zone z vers les plateformes et qui va arriver après sa date, s'il aurait été envoyé directement sur les arcs agrégés allant de la zone z vers ces plateformes.

Pour $h \in H$, dans l'égalité (4.4.5.58), nous avons décidé d'envoyer sur l'arc agrégé (z, h) le flot envoyé depuis les sites de la zone z , et qui arrive à la plateforme h à l'instant $t + t_{(z,h)}$. En revanche pour qu'il n'y ait pas une perte de flux, on décide d'envoyer sur l'arc fictif (z, z) le flux qui, à l'instant t , est en route vers la plateforme h et qui va arriver après l'instant $t + t_{(z,h)}$. Sur l'ensemble des plateformes multimodales, ce flux est noté $\mathcal{F}_{r,t}^{k,z,H}$ et donné, en fonction des valeurs des variables de flot de la solution \mathcal{S} , par l'égalité suivante :

$$\mathcal{F}_{r,t}^{k,z,H} = \sum_{h \in H} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t' = t - \Delta_{(i,h)} + 1: \\ \Delta_{(i,h)} > 0}}^t x_{(i,h),l,t'}^{k'}. \quad (4.4.5.51)$$

- (c) Le flot provenant des plateformes susceptible d'arriver à la zone z avant sa date prévue.

Analogiquement au point (b), on décide d'envoyer sur l'arc fictif (z, z) , le flot envoyé des plateformes multimodales vers les sites de la zone z , et qui va faire un trajet supérieure à celui de l'arc (h, z) , où $h \in H$. En considérant ce flot pour l'ensemble des plateformes, on utilise la notation $\mathcal{F}_{r,t}^{k,H,z}$. En fonction des valeurs des variables de flot de la solution \mathcal{S} , ce flot est donné par l'égalité suivante :

$$\mathcal{F}_{r,t}^{k,H,z} = \sum_{h \in H} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t' = t + 1: \\ \Delta_{(h,i)} > 0}}^{t + \Delta_{(h,i)}} x_{(h,i),l,t' - t_{(h,i)}}^{k'}. \quad (4.4.5.52)$$

- (d) Le flot provenant des autres zones et qui fait, dans le problème initial, un trajet supérieur à celui des arcs agrégés

Similairement au point (c), on définit $\mathcal{F}_{r,t}^{k,Z,z}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_{r,t}^{k,Z,z} = \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{\substack{t' = t + 1: \\ \Delta_{(i,j)} > 0}}^{t + \Delta_{(i,j)}} x_{(i,j),r,t' - t_{(i,j)}}^{k'}. \quad (4.4.5.53)$$

Alors, on pose finalement

$$x_{a,r,t}^k = \mathcal{F}_{r,t}^{k,z,z} + \mathcal{F}_{r,t}^{k,z,H} + \mathcal{F}_{r,t}^{k,H,z} + \mathcal{F}_{r,t}^{k,Z,z}, \quad (4.4.5.54)$$

où $\mathcal{F}_{z,r,t}^{k,z}$, $\mathcal{F}_{r,t}^{k,z,H}$, $\mathcal{F}_{r,t}^{k,H,z}$ et $\mathcal{F}_{r,t}^{k,Z,z}$ sont donnés par les équations (4.4.5.50), (4.4.5.51), (4.4.5.52) et (4.4.5.53).

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

Et en fonction des valeurs des variables de flot de la solution \mathcal{S} , nous avons :

$$\begin{aligned}
 x'_{a,r,t}{}^k &= \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z} \sum_{t' = t - t_{(i,j)} + 1}^t x_{(i,j),l,t'}^{k'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t' = t - \Delta_{(i,h)} + 1: \\ \Delta_{(i,h)} > 0}}^t x_{(i,h),l,t'}^{k'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t' = t + 1: \\ \Delta_{(h,i)} > 0}}^{t + \Delta_{(h,i)}} x_{(h,i),l,t' - t_{(h,i)}}^{k'} \\
 &+ \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{\substack{t' = t + 1: \\ \Delta_{(i,j)} > 0}}^{t + \Delta_{(i,j)}} x_{(i,j),l,t' - t_{(i,j)}}^{k'}.
 \end{aligned} \tag{4.4.5.55}$$

Notons bien que k, a, r, v et t sont arbitraires et respectivement dans $K^{Ag}, A^{Ag}, S^{c,Ag}, V^t \cup V^b$ et T^k . Donc, nous pouvons généraliser les expressions précédentes.

Fixation des variables d'activation des véhicules sur les arcs

Similairement à ce qui a été fait pour les variables du flot des conteneurs sur les arcs, nous définissons les valeurs des variables d'activation des véhicules sur les arcs de façon à ce que les deux types de variables soit synchronisés (c'est à dire les véhicules seront envoyés au même instant que le flot de conteneurs qu'il transportent).

Soient $a \in A^{Ag}, r \in S^{c,Ag}, v \in V^t \cup V^b, t \in T$ avec $t + t_a \in T$.

► Si $a \in A^{HH}$, i.e. : $a = (h, h')$ avec $h, h' \in H$.

* Si $a \in A^{c,HH}$,
on pose

$$y'_{a,r,t} = \sum_{l \in r} y_{a,l,t}. \tag{4.4.5.56}$$

* Si $a \in A^t \cup A^b$ et $m_a = m_v$, on pose

$$y'_{a,v,t} = y_{a,v,t}. \tag{4.4.5.57}$$

► Si $a \in A^{ZH}$, i.e. : $a = (z, h)$ avec $z \in Z$ et $h \in H$,

On pose

$$y'_{a,r,t} = \sum_{i \in z} \sum_{l \in r} y_{(i,h),l,t - \Delta_{(i,h)}}. \tag{4.4.5.58}$$

► Si $a \in A^{HZ}$, i.e. : $a = (h, z)$, avec $z \in Z, h \in H$.

On pose

$$y'_{a,r,t} = \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(h,i),l,t}. \tag{4.4.5.59}$$

► Si $a \in A^{ZZ}$, i.e. : $a = (z, z')$ avec $z, z' \in Z$.

▷ Si $z \neq z'$, on pose

$$y'_{a,r,t} = \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z'} y_{(i,j),l,t}. \quad (4.4.5.60)$$

▷ Si $a = (z, z)$,

Similairement à ce qu'on a fait pour la fixation des variables de flot sur les arcs fictifs (dans l'égalité (4.4.5.55)), on fixe les variables d'activation des camions sur l'arc a de la manière suivante.

$$\begin{aligned} y'_{a,r,t} &= \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z} \sum_{t' = t - t_{(i,j)} + 1}^t y_{(i,j),l,t'} \\ &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t' = t - \Delta_{(i,h)} + 1: \\ \Delta_{(i,h)} > 0}}^t y_{(i,h),l,t'} \\ &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t' = t + 1: \\ \Delta_{(h,i)} > 0}}^{t + \Delta_{(h,i)}} y_{(h,i),l,t' - t_{(h,i)}} \\ &+ \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{\substack{t' = t + 1: \\ \Delta_{(i,j)} > 0}}^{t + \Delta_{(i,j)}} y_{(i,j),l,t' - t_{(i,j)}}. \end{aligned} \quad (4.4.5.61)$$

Fixation des variables d'activation des trains et des barges depuis leurs positions initiales

Pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout instant $t \in T$, on pose

$$\alpha'_{v,t} = \alpha_{v,t}. \quad (4.4.5.62)$$

Fixation des variables de libération des trains et des barges

Pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout instant $t \in T$, on pose

$$\beta'_{v,t} = \beta_{v,t}. \quad (4.4.5.63)$$

Fixation des variables d'activation des camions depuis leurs positions initiales

Pour toute position initiale $r \in S^{c,Ag}$ et pour tout instant $t \in T$, on pose

$$\alpha'_{r,t} = \sum_{l \in r} \alpha_{l,t}. \quad (4.4.5.64)$$

Fixation des variables de libération des camions

Pour toute position initiale $r \in S^{c,Ag}$ et pour tout instant $t \in T$,
on pose

$$\beta'_{r,t} = \sum_{l \in r} \beta_{l,t}. \quad (4.4.5.65)$$

Fixation des variables indiquant la présence ou non de MD dans un véhicule

Pour tout $\theta \in \Theta^{MD}$, pour tout $v \in V^t \cup V^b$, et pour tout $t \in T$, on pose

$$\beta'_{v,t}^\theta = \beta_{v,t}^\theta. \quad (4.4.5.66)$$

Fixation des variables de flot déchargé des camions pour être stocké dans les plateformes multimodales

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour toute position $r \in S^{c,Ag}$,
et pour tout instant $t \in T^k$,
on pose

$$u'_{h,r,t}{}^k = \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} u_{h,l,t}^{k'}. \quad (4.4.5.67)$$

Fixation des variables de flot déchargé des trains et des barges pour être stocké dans les plateformes multimodales

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$
et pour tout instant $t \in T^k$, avec $m_v \in M_h$,
on pose

$$u'_{h,v,t}{}^k = \sum_{k' \in k} u_{h,v,t}^{k'}. \quad (4.4.5.68)$$

Fixation des variables de flot chargé depuis le stock des plateformes sur les camions

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour toute position $r \in S^{c,Ag}$,
et pour tout instant $t \in T^k$,
on pose

$$z'_{h,r,t}{}^k = \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} z_{h,l,t}^{k'}. \quad (4.4.5.69)$$

Fixation des variables de flot chargé depuis le stock des plateformes sur les trains et les barges

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$,
et pour tout instant $t \in T^k$, avec $m_v \in M_h$,
on pose

$$z'_{h,v,t}{}^k = \sum_{k' \in k} z_{h,v,t}^{k'}. \quad (4.4.5.70)$$

Fixation des variables de flot transféré entre les trains et les barges au niveau des plateformes

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour tout véhicule $v, v' \in V^t \cup V^b$, pour tout instant $t \in T^k$, tels que $v \neq v'$ et $m_v, m_{v'} \in M_h$, on pose

$$q_{h,v,v',t}^k = \sum_{k' \in k} q_{h,v,v',t}^{k'} \quad (4.4.5.71)$$

Fixation des variables de flot transféré entre les camions d'un côté et les trains et les barges de l'autre côté au niveau des plateformes

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour toute position $r \in S^{c,Ag}$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout instant $t \in T^k$, tel que $m_v \in M_h$, on pose

$$q_{h,r,v,t}^k = \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} q_{h,l,v,t}^{k'} \quad (4.4.5.72)$$

et

$$q_{h,v,r,t}^k = \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} q_{h,v,l,t}^{k'} \quad (4.4.5.73)$$

Fixation des variables de flot transféré entre les camions

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour toutes positions $r, r' \in S^{c,Ag}$, avec $r \neq r'$, pour tout instant $t \in T^k$, on pose

$$q_{h,r,r',t}^k = \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{l' \in r'} q_{h,l,l',t}^{k'} \quad (4.4.5.74)$$

4.5.2 Vérification de la réalisabilité de la solution agrégée construite à partir de la solution initiale

Dans cette section, nous allons montrer que la solution \mathcal{S}' , construite dans la sous-section précédente (sous-section 4.5.1), satisfait toutes les contraintes du problème agrégé. Nous utilisons la structure du graphe agrégé et les contraintes du problème initial et nous en déduisons les contraintes du problème agrégé.

Vérification des contraintes de conservation du flot des conteneurs au niveau des plateformes

- La conservation du flot des conteneurs pour les trains et des barges
Soient $k \in K^{Ag}$, $h \in H$, $v \in V^t \cup V^b$, $t \in T^k$ avec $m_v \in M_h$.
On sait que S est solution du problème initial, donc, x vérifie la contrainte (3.3.3.6). Nous avons donc,

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

pour tout $k' \in k$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{a \in \delta^+(h): \\ m_a = m_v, \\ t+t_a \leq t_{max}^{k'}}} x_{a,v,t}^{k'} &= \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ t_{min}^{k'} \leq t-t_a}} x_{a,v,t-t_a}^{k'} \\
 &+ z_{h,v,t}^{k'} - u_{h,v,t}^{k'} \\
 &+ \sum_{l \in S^c} q_{h,l,v,t}^{k'} + \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v',v,t}^{k'} \\
 &- \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^{k'} - \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^{k'}.
 \end{aligned} \tag{4.4.5.75}$$

Dans le problème initial, les variables $x^{k'}$, $u^{k'}$, $z^{k'}$, $q^{k'}$ ne sont pas définies pour $t > t_{max}^{k'}$ ou $t < t_{min}^{k'}$.

On pose alors, pour tout $t \in T^k \cap ([t_0, t_{min}^{k'}] \cup [t_{max}^{k'}, \tau])$, pour tout $v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}$ et pour tout $r \in S^{c,Ag}$,

$$x_{a,v,t}^{k'} = u_{h,v,t}^{k'} = z_{h,v,t}^{k'} = q_{h,v,v',t}^{k'} = q_{h,v',v,t}^{k'} = q_{h,r,v,t}^{k'} = q_{h,v,r,t}^{k'} = 0.$$

En faisant la somme sur k' de l'égalité (4.4.5.75), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k' \in k} \sum_{\substack{a \in \delta^+(h): \\ m_a = m_v, \\ t+t_a \leq t_{max}^{k'}}} x_{a,v,t}^{k'} &= \sum_{k' \in k} \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ t_{min}^{k'} \leq t-t_a}} x_{a,v,t-t_a}^{k'} \\
 &+ \sum_{k' \in k} z_{h,v,t}^{k'} - \sum_{k' \in k} u_{h,v,t}^{k'} \\
 &+ \sum_{k' \in k} \sum_{l \in S^c} q_{h,l,v,t}^{k'} + \sum_{k' \in k} \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v',v,t}^{k'} \\
 &- \sum_{k' \in k} \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^{k'} - \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^{k'}.
 \end{aligned}$$

Or, l'ensemble de positions initiales des camions du problème initial S^c est partitionné en $S^{c,Ag}$: ensemble de positions initiales des camions du problème agrégé. Nous pouvons donc décomposer la somme $l \in S^c$ en deux sommes $r \in S^{c,Ag}$ et $l \in r$. On obtient alors

l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k' \in k} \sum_{\substack{a \in \delta^+(h): \\ m_a = m_v, \\ t + t_a \leq t_{max}^{k'}}} x_{a,v,t}^{k'} &= \sum_{k' \in k} \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ t_{min}^{k'} \leq t - t_a}} x_{a,v,t-t_a}^{k'} \\
 &+ \sum_{k' \in k} z_{h,v,t}^{k'} - \sum_{k' \in k} u_{h,v,t}^{k'} \\
 &+ \sum_{k' \in k} \sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} q_{h,l,v,t}^{k'} + \sum_{k' \in k} \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v',v,t}^{k'} \\
 &- \sum_{k' \in k} \sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} q_{h,v,l,t}^{k'} - \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^{k'}.
 \end{aligned}$$

Or, $v \in V^t \cup V^b$, donc pour tout $a \in \delta^+(h) \cup \delta^-(h)$, si $m_a = m_v$, alors $a \in A^{HH}$ (en effet, les sites différents des plateformes multimodales sont connectés uniquement au mode routier).

Et en utilisant, alors, les égalités (4.4.5.46), (4.4.5.68), (4.4.5.70), (4.4.5.73) et (4.4.5.72), et en utilisant l'extension de la définition des variables de flot sur toute la fenêtre de traitement de la demande k , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{a \in \delta^+(h): \\ m_a = m_v, \\ t + t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,v,t}^{k'} &= \sum_{\substack{a \in \delta^-(h): \\ m_a = m_v, \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,v,t-t_a}^{k'} \\
 &+ z_{h,v,t}^{k'} - u_{h,v,t}^{k'} \\
 &+ \sum_{r \in S^{c,Ag}} q_{h,r,v,t}^{k'} + \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v',v,t}^{k'} \tag{4.4.5.76} \\
 &- \sum_{r \in S^{c,Ag}} q_{h,v,r,t}^{k'} - \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^{k'}.
 \end{aligned}$$

Or, k, h, v , et t sont arbitraires dans $K^{Ag}, H, V^t \cup V^b$ et T^k , on peut alors conclure, d'après l'égalité (4.4.5.76), que S' satisfait bien les contraintes (4.4.3.18).

- La conservation du flot des conteneurs pour les camions
Soient $k \in K^{Ag}$, $h \in H$, $r \in S^{c,Ag}$ et $t \in T^k$.
On sait que \mathcal{S} est une solution du problème initial, donc, x vérifie la contrainte (3.3.3.7).
Nous avons donc,

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

Pour tout $k' \in k$, pour tout $l \in S^c$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^c: \\ t+t_a \leq t_{max}^{k'}}} x_{a,l,t}^{k'} &= \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^c: \\ t_{min}^{k'} \leq t-t_a}} x_{a,l,t-t_a}^{k'} \\
 &+ z_{h,l,t}^{k'} - u_{h,l,t}^{k'} \\
 &+ \sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l',l,t}^{k'} + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,v,l,t}^{k'} \\
 &- \sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^{k'} - \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^{k'}.
 \end{aligned}$$

En faisant la somme $k' \in k$ et la somme $l \in r$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^c: \\ t+t_a \leq t_{max}^{k'}}} x_{a,l,t}^{k'} &= \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^c: \\ t_{min}^{k'} \leq t-t_a}} x_{a,l,t-t_a}^{k'} \\
 &+ \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} z_{h,l,t}^{k'} - \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} u_{h,l,t}^{k'} \\
 &+ \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l',l,t}^{k'} + \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,v,l,t}^{k'} \\
 &- \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^{k'} - \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^{k'}.
 \end{aligned} \tag{4.4.5.77}$$

Exprimons chaque terme de l'égalité (4.4.5.79).

(a) Le flot sortant

En séparant le voisinage sortant en deux types de voisinages : sortant vers les plateformes et sortant vers les zones, on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^c: \\ t+t_a \leq t_{max}^{k'}}} x_{a,l,t}^{k'} &= \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{h' \in H: \\ t+t_{(h,h')} \leq t_{max}^{k'}}} x_{(h,h'),l,t}^{k'} \\
 &+ \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{i \in S \setminus H: \\ t+t_{(h,i)} \leq t_{max}^{k'}}} x_{(h,i),l,t}^{k'}.
 \end{aligned}$$

Or, l'ensemble $S \setminus H$ (ensemble des sites uni-modaux) est partitionné en Z (ensemble des zones). Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^c: \\ t+t_a \leq t_{max}^{k'}}} x_{a,l,t}^{k'} &= \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{h' \in H: \\ t+t_{(h,h')} \leq t_{max}^{k'}}} x_{(h,h'),l,t}^{k'} \\
 &+ \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{z \in Z} \sum_{\substack{i \in z: \\ t+t_{(h,i)} \leq t_{max}^{k'}}} x_{(h,i),l,t}^{k'}.
 \end{aligned}$$

Et en utilisant l'extension de la définition des variables de flot, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^c: \\ t+t_a \leq t_{max}^{k'}}} x_{a,l,t}^{k'} &= \sum_{\substack{h' \in H: \\ t+t_{(h,h')} \leq t_{max}^k}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} x_{(h,h'),l,t}^{k'} \\ &+ \sum_{\substack{z \in Z: \\ t+t_{(h,z)} \leq t_{max}^k}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} x_{(h,i),l,t}^{k'}. \end{aligned}$$

En injectant alors les égalités (4.4.5.45) (4.4.5.48) et en regroupant les deux sous-ensembles du voisinage sortant de h , on obtient :

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^c: \\ t+t_a \leq t_{max}^{k'}}} x_{a,l,t}^{k'} = \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^c, Ag: \\ t+t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,r,t}^{k'}. \quad (4.4.5.78)$$

(b) Le flot entrant

Pour le voisinage entrant, nous pouvons aussi le décomposer en deux types de voisinages (entrant des plateformes multimodales et entrant des zones).

Nous avons alors, en utilisant aussi l'extension de la définition des variables de flot :

$$\begin{aligned} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^c: \\ t_{min}^k \leq t-t_a}} x_{a,l,t-t_a}^{k'} &= \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{h' \in H: \\ t_{min}^k \leq t-t_{(h',h)}}} x_{(h',h),l,t-t_{(h',h)}}^{k'} \\ &+ \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{i \in S \setminus H: \\ t_{min}^k \leq t-t_{(i,h)}}} x_{(i,h),l,t-t_{(i,h)}}^{k'} \end{aligned} \quad (4.4.5.79)$$

Or, d'après la définition des variables de flot associées aux arcs routiers entre les plateformes qui est donné par l'égalité (4.4.5.45),

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{h' \in H: \\ t_{min}^k \leq t-t_{(h',h)}}} x_{(h',h),l,t-t_{(h',h)}}^{k'} = \sum_{\substack{h' \in H: \\ t_{min}^k \leq t-t_{(h',h)}}} x_{(h',h),r,t-t_{(h',h)}}^{k'}. \quad (4.4.5.80)$$

De plus, on sait que l'ensemble des sites uni-modaux $S \setminus H$ est partitionné en Z . Nous pouvons donc réécrire le deuxième terme de l'expression du flot entrant comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{i \in S \setminus H: \\ t_{min}^k \leq t-t_{(i,h)}}} x_{(i,h),l,t-t_{(i,h)}}^{k'} &= \sum_{\substack{z \in Z: \\ t_{min}^k \leq t-t_{(z,h)}}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} x_{(i,h),l,t-t_{(i,h)}}^{k'} \\ &= \sum_{\substack{z \in Z: \\ t_{min}^k \leq t-t_{(z,h)}}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} x_{(i,h),l,(t-t_{(z,h)})-\Delta_{(i,h)}}^{k'} \end{aligned}$$

Et si on injecte la définition des variables de flot de conteneurs du problème agrégé sur les arcs allant des zones vers les plateformes qui est donnée par l'égalité (4.4.5.47), on obtient :

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{i \in S \setminus H: \\ t_{min}^k \leq t-t_{(i,h)}}} x_{(i,h),l,t-t_{(i,h)}}^{k'} = \sum_{\substack{z \in Z: \\ t_{min}^k \leq t-t_{(z,h)}}} x_{a,r,t-t_a}^{k'}. \quad (4.4.5.81)$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

Finalement, en faisant la somme de (4.4.5.80) et (4.4.5.81), on obtient :

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^c, \\ t_{min}^{k'} \leq t - t_a}} x_{a,l,t-t_a}^{k'} = \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^c, Ag, \\ t_{min}^k \leq t - t_a}} x_{a,r,t-t_a}^k. \quad (4.4.5.82)$$

(c) Le flot déchargé des camions pour être stocké et celui chargé depuis le stock.

D'après la définition des variables de flot déchargé pour être stocké et chargé depuis le stock, qui est donné par les égalités (4.4.5.69) et (4.4.5.67), nous avons :

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} z_{h,l,t}^{k'} - \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} u_{h,l,t}^{k'} = z_{h,r,t}^k - u_{h,r,t}^k. \quad (4.4.5.83)$$

(d) Le flot transféré vers les camions associés à r .

En utilisant le fait que l'ensemble des positions initiales des camions dans le problème initial S^c est partitionné en $S^{c,Ag}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l',l,t}^{k'} + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,v,l,t}^{k'} \right) &= \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{r' \in S^{c,Ag}} \sum_{l' \in r' \setminus \{l\}} q_{h,l',l,t}^{k'} \\ &+ \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} q_{h,v,l,t}^{k'} \\ &= \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{r' \in S^{c,Ag} \setminus \{r\}} \sum_{l' \in r'} q_{h,l',l,t}^{k'} \\ &+ \underbrace{\sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{l' \in r \setminus \{l\}} q_{h,l',l,t}^{k'}}_{= 0, \text{ (d'après H2)}} \\ &+ \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} q_{h,v,l,t}^{k'}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les définitions des variables de flot transféré entre les camions (donné par l'égalité (4.4.5.74)) et celui transféré depuis les trains et les barges vers les camions (donné par l'égalité (4.4.5.73)), on obtient :

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l',l,t}^{k'} + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,v,l,t}^{k'} \right) = \sum_{r' \in S^{c,Ag} \setminus \{r\}} q_{h,r',r,t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,v,r,t}^k. \quad (4.4.5.84)$$

(e) Le flot transféré depuis les camions associés à r .

Similairement à ce qu'on a fait pour le flot transféré vers les camions associés à r , on

montre que

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^{k'} + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^{k'} \right) = \sum_{r' \in S^c, Ag \setminus \{r\}} q_{h,r,r',t}^{k'} + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,r,v,t}^{k'}. \quad (4.4.5.85)$$

Finalement, en injectant les égalités (4.4.5.78), (4.4.5.82), (4.4.5.83), (4.4.5.84) et (4.4.5.85) dans l'égalité (4.4.5.79), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^c, Ag: \\ t+t_a \leq t_{max}^k}} x_{a,r,t}^{k'} &= \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^c, Ag: \\ t_{min}^k \leq t-t_a}} x_{a,r,t-t_a}^{k'} \\ &+ z_{h,r,t}^{k'} - u_{h,r,t}^{k'} \\ &+ \sum_{r' \in S^c, Ag \setminus \{r\}} q_{h,r',r,t}^{k'} + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b, \\ m_v \in M_h}} q_{h,v,r,t}^{k'} \\ &- \sum_{r' \in S^c, Ag \setminus \{r\}} q_{h,r,r',t}^{k'} - \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,r,v,t}^{k'}. \end{aligned}$$

Or, k, h, r , et t sont arbitraires dans K^{Ag}, H, S^c, Ag et T^k . Donc la solution \mathcal{S}' satisfait bien les contraintes (4.4.3.19).

Vérification des contraintes de positivité du stock

Soient $k \in K^{Ag}, h \in H$ et $t \in T^k$

On sait que la solution \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.10), alors pour tout $k' \in k$,

$$\sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^{k'}}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^{k'} - z_{h,v,t'}^{k'}) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^{k'} - z_{h,l,t'}^{k'}) \right) \geq 0.$$

En faisant la somme sur k' et en utilisant le fait que l'ensemble des positions initiales des camions dans le problème initial S^c est partitionné en S^c, Ag , nous avons :

$$\sum_{k' \in k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^{k'}}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^{k'} - z_{h,v,t'}^{k'}) + \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{l \in r} (u_{h,l,t'}^{k'} - z_{h,l,t'}^{k'}) \right) \geq 0.$$

Et en utilisant l'extension de la définition des variables de flot ($u^{k'}$ et $z^{k'}$ sont nulles pour tout $t' \notin T^{k'}$), nous avons :

$$\sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{k' \in k} (u_{h,v,t'}^{k'} - z_{h,v,t'}^{k'}) + \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} (u_{h,l,t'}^{k'} - z_{h,l,t'}^{k'}) \right) \geq 0.$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

On injecte alors les égalités (4.4.5.70), (4.4.5.68), (4.4.5.69) et (4.4.5.67) et on obtient :

$$\sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u'_{h,v,t'} - z'_{h,v,t'}) + \sum_{r \in S^c, Ag} (u'_{h,r,t'} - z'_{h,r,t'}) \right) \geq 0.$$

Or, k, h et t étant arbitraires dans K^{Ag}, H et T^k , donc \mathcal{S}' satisfait bien les contraintes (4.4.3.20).

Vérification des contraintes de capacité de stockage des plateformes

Soient $h \in H$ et $t \in T$. On sait que \mathcal{S} est solution du problème initial. Elle satisfait donc les contraintes (3.3.3.11). Nous avons alors :

$$\sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right) \leq C_h. \quad (4.4.5.86)$$

Or,

$$\forall k \in K^{Ag}, \{k' \in k\} = \{k' \in K^{O^k, D^k, \theta^k}\} \subseteq K.$$

Donc,

$$\bigcup_{k \in K^{Ag}} \{k' \in k\} \subseteq K.$$

On pose

$$K' = \bigcup_{k \in K^{Ag}} \{k' \in k\}.$$

Nous réécrivons donc le terme qui représente le stock de la plateforme h à l'instant t (terme de gauche de l'inéquation (4.4.5.86)) sous cette forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right) \\ &= \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right) \\ &+ \sum_{\substack{k \in K \setminus K': \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right). \end{aligned} \quad (4.4.5.87)$$

Or, on sait que \mathcal{S} est solution du problème initial. Alors, elle satisfait les contraintes de positivité du stock de la plateforme h à l'instant t , pour toute demande $k \in K \setminus K'$ (contraintes (3.3.3.10)). Nous avons alors,

$$\forall k \in K \setminus K',$$

$$\sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right) \geq 0.$$

On multiplie par le coefficient q^{θ^k} et on fait la somme $k \in K \setminus K'$ sous condition que l'instant t soit contenu dans la fenêtre de traitement de la demande k (T^k). On obtient donc :

$$\sum_{\substack{k \in K \setminus K': \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right) \geq 0. \quad (4.4.5.88)$$

Nous avons donc, d'après l'égalité (4.4.5.87) et l'inégalité (4.4.5.88),

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k \in K': \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right) \\ & \leq \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right). \end{aligned} \quad (4.4.5.89)$$

Nous avons ainsi, d'après les inégalités (4.4.5.86) et (4.4.5.89) :

$$\sum_{\substack{k \in K': \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t'}^k - z_{h,l,t'}^k) \right) \leq C_h.$$

Alors, en utilisant le fait que l'ensemble des positions initiales des camions dans le problème initial S^c est partitionné en $S^{c,Ag}$ (ensemble des positions initiales des camions dans le problème agrégé) et que l'ensemble des demandes K' est partitionné en K^{Ag} et en utilisant aussi l'extension de la définition des variables de flot de chaque demande $k \in K'$, on obtient :

$$\sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{k' \in k} (u_{h,v,t'}^{k'} - z_{h,v,t'}^{k'}) + \sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} (u_{h,l,t'}^{k'} - z_{h,l,t'}^{k'}) \right) \leq C_h.$$

Ainsi, en injectant les définitions des variables du flot chargé et du flot déchargé pour le problème agrégé, qui sont données par les égalités (4.4.5.70), (4.4.5.68), (4.4.5.69) et (4.4.5.67), on obtient :

$$\sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} q^{\theta^k} \sum_{\substack{t' \leq t: \\ t' \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t'}^k - z_{h,v,t'}^k) + \sum_{r \in S^c} (u_{h,r,t'}^k - z_{h,r,t'}^k) \right) \leq C_h.$$

Or, h et t sont arbitraires dans les ensembles H et T . Donc, \mathcal{S}' satisfait bien les contraintes (3.3.3.11).

Vérification des contraintes de respect de la productivité des plateformes

Soient $h \in H$ et $t \in T$. On sait que \mathcal{S} est solution de problème initial. Donc elle satisfait les contraintes (3.3.3.15). Nous avons alors,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^k \right) + \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} u_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} u_{h,l,t}^k \right) \\
 & + \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \sum_{l \in S^c} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l',t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^k \right) \\
 & + \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \left(\sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^k \right) \\
 & \leq \nu_{h,t}.
 \end{aligned} \tag{4.4.5.90}$$

Dans cette sous section, nous allons développer, ré-exprimer et minorer chaque terme de l'inéquation (4.4.5.90). Similairement à ce qu'on a fait pour la vérification des contraintes de capacité de stockage des plateformes dans la sous section précédente, on pose

$$K' = \bigcup_{k \in K^{Ag}} \{k' \in k\} \subseteq K$$

(a) Le flot chargé du stock de la plateforme h à l'instant t .

En décomposant la somme sur l'ensemble des demandes initiales K en deux sommes : sur K' et sur $K \setminus K'$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^k \right) &= \sum_{\substack{k \in K': \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^k \right) \\
 &+ \sum_{\substack{k \in K \setminus K': \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^k \right).
 \end{aligned}$$

Or, les variables du flot chargé sont positives. Nous avons donc :

$$\sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^k \right) \geq \sum_{\substack{k \in K': \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^k \right).$$

De plus, l'ensemble K' est partitionné en K^{Ag} et l'ensemble des positions initiales des camions S^c est partitionné en $S^{c,Ag}$. En prenant en considération l'extension de la définition des variables de flot chargé depuis le stock, nous avons alors :

$$\sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^k \right) \geq \sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{k' \in k} z_{h,v,t}^{k'} + \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} z_{h,l,t}^{k'} \right).$$

En utilisant alors les définitions des variables de flot chargé depuis le stock pour le problème agrégé qui sont données par les égalités (4.4.5.70) et (4.4.5.69), nous avons :

$$\sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^k \right) \geq \sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} z'_{h,v,t}^k + \sum_{r \in S^c, Ag} z'_{h,r,t}^k \right). \quad (4.4.5.91)$$

(b) Le flot déchargé pour être stocké

Similairement à ce qu'on a fait pour le flot chargé du stock, nous avons :

$$\sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} u_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} u_{h,l,t}^k \right) \geq \sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{k' \in k} u_{h,v,t}^{k'} + \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} u_{h,l,t}^{k'} \right).$$

Et en utilisant les définitions des variables de flot déchargé des véhicules pour être stocké dans la plateforme h à l'instant t pour le problème agrégé, qui sont données par les égalités (4.4.5.68) et (4.4.5.67), nous avons :

$$\sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} u_{h,v,t}^k + \sum_{l \in S^c} u_{h,l,t}^k \right) \geq \sum_{\substack{k \in K^{Ag}: \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} u'_{h,v,t}^k + \sum_{r \in S^c, Ag} u'_{h,r,t}^k \right). \quad (4.4.5.92)$$

(c) Le flot transféré depuis les camions

On sait que $K' \subseteq K$. En utilisant alors, l'extension de la définition des variables de flot transféré des camions, nous avons :

$$\sum_{\substack{k \in K: \\ t \in T^k}} \sum_{l \in S^c} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^k \right) \geq \sum_{\substack{k \in K': \\ t \in T^k}} \sum_{l \in S^c} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^k \right). \quad (4.4.5.93)$$

Or, l'ensemble des demandes K' est partitionné en K^{Ag} et l'ensemble des positions initiales des camions S^c est partitionné en $S^{c,Ag}$. Nous pouvons donc, décomposer le

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

terme de gauche de l'inéquation (4.4.5.93) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \in K' \\ t \in T^k}} \sum_{l \in S^c} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^k \right) &= \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{r' \in S^c \setminus \{r\}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{l' \in r'} q_{h,l,l',t}^{k'} \\
&+ \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \sum_{r \in S^c, Ag} \underbrace{\sum_{l \in r} \sum_{l' \in r \setminus \{l\}} \sum_{k' \in k} q_{h,l,l',t}^{k'}}_{= 0, \text{ (d'après H2)}} \\
&+ \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} q_{h,l,v,t}^{k'}.
\end{aligned}$$

Et utilisant alors les définitions des variables de flot transféré entre les camions et celui transféré depuis les camions vers les trains et les barges qui sont données par les égalités (4.4.5.74) et (4.4.5.72), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \in K' \\ t \in T^k}} \sum_{l \in S^c} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^k \right) &= \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{r' \in S^c \setminus \{r\}} q'_{h,r,r',t}^k \\
&+ \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} q'_{h,r,v,t}^k.
\end{aligned} \tag{4.4.5.94}$$

Ainsi, en injectant l'égalité (4.4.5.94) dans l'inégalité (4.4.5.93), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \in K' \\ t \in T^k}} \sum_{l \in S^c} \left(\sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} q_{h,l,v,t}^k \right) &\geq \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{r' \in S^c \setminus \{r\}} q'_{h,r,r',t}^k \\
&+ \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} q'_{h,r,v,t}^k.
\end{aligned} \tag{4.4.5.95}$$

(d) Le flot transféré depuis les trains et les barges

Similairement, et en utilisant les définitions (4.4.5.71) et (4.4.5.73), on montre que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \in K' \\ t \in T^k}} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} \left(\sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\} \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^k \right) &\geq \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\} \\ m_{v'} \in M_h}} q'_{h,v,v',t}^k \\
&+ \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ m_v \in M_h}} \sum_{v \in V^t \cup V^b} \sum_{r \in S^c, Ag} q'_{h,v,r,t}^k.
\end{aligned} \tag{4.4.5.96}$$

CHAPITRE 4. MODÈLE AGRÉGÉ ET BORNES (PRIMALE ET DUALE)

Finalement, en injectant les inégalités (4.4.5.91), (4.4.5.92), (4.4.5.95) et (4.4.5.96) dans l'inégalité (4.4.5.90), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} z_{h,v,t}^k + \sum_{r \in S^c, Ag} z_{h,r,t}^k \right) + \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} u_{h,v,t}^k + \sum_{r \in S^c, Ag} u_{h,r,t}^k \right) \\
& + \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \sum_{r \in S^c, Ag} \left(\sum_{r' \in S^c \setminus \{r\}} q_{h,r,r',t}^k + \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} q_{h,r,v,t}^k \right) \\
& + \sum_{\substack{k \in K^{Ag} \\ t \in T^k}} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b \\ m_v \in M_h}} \left(\sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\} \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{r \in S^c, Ag} q_{h,v,r,t}^k \right) \\
& \leq \nu_{h,t}.
\end{aligned}$$

Or, h et t sont arbitraires dans H et T . Donc, nous pouvons conclure que \mathcal{S}' satisfait bien les contraintes (4.4.3.22).

Vérification des contraintes de conservation du flot des conteneurs au niveau des sites

- Conservation de flot au niveau des origines des demandes.

Soient $k \in K^{Ag}$ et $t \in T^k$. La solution \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.16). Alors, pour tout $k' \in K^{O^k, D^k, \theta^k}$, $\forall t \in T^{k'}$,

$$\sum_{l \in S^c} \left(\sum_{a \in \delta^+(O^{k'})} \sum_{\substack{t' \leq t \\ t' \geq t_{min}^{k'} \\ t' + t_a \leq t_{max}^{k'}}} x_{a,l,t'}^{k'} - \sum_{a \in \delta^-(O^{k'})} \sum_{\substack{t' \leq t \\ t_{min}^{k'} \leq t' - t_a}} x_{a,r,t'-t_a}^{k'} \right) \leq d^{k'} \mathbb{1}_{T^{k'}}(t). \quad (4.4.5.97)$$

Pour tout $i \in S$, pour tout $t' \in T^k$ et pour tout $a \in \delta^+(i)$, si $t' + t_a > t_{max}^{k'}$, on pose $x_{a,l,t'} = 0$.

Et pour tout $t' \in T^k$, pour tout $a \in \delta^-(i)$, si $t' - t_a < t_{min}^{k'}$, on pose $x_{a,l,t'-t_a} = 0$.

On note

$$\mathcal{F}_{i,l,t'}^s = \sum_{a \in \delta^+(i)} x_{a,l,t'}^{k'},$$

et

$$\mathcal{F}_{i,l,t'}^e = \sum_{a \in \delta^-(i)} x_{a,l,t'-t_a}^{k'}.$$

On peut alors, réécrire l'inégalité (4.4.5.97), sous cette forme.

$$\sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{l \in r} \sum_{t' \leq t} \left(\mathcal{F}_{O^{k'},l,t'}^s - \mathcal{F}_{O^{k'},l,t'}^e \right) \leq d^{k'} \mathbb{1}_{T^{k'}}(t).$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

En faisant la somme sur k' , on obtient :

$$\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{t' \leq t} \sum_{k' \in k} \left(\mathcal{F}_{O^{k'},l,t'}^s - \mathcal{F}_{O^{k'},l,t'}^e \right) \leq d_s^k(t). \quad (4.4.5.98)$$

Or, la solution \mathcal{S} satisfait aussi les contraintes (3.3.3.18). Alors pour tout $i \in O^k \setminus \{O^{k'}\}$,

$$\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{t' \leq t} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k \setminus \{O^{k'}\}} \left(\mathcal{F}_{i,l,t'}^s - \mathcal{F}_{i,l,t'}^e \right) = 0. \quad (4.4.5.99)$$

En effet, d'après la construction du modèle agrégé, la destination de chaque demande $k' \in k$ n'appartient pas à la zone à laquelle appartient son origine.

En faisant la somme de (4.4.5.98) et de (4.4.5.100), on obtient :

$$\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{t' \leq t} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \left(\mathcal{F}_{i,l,t'}^s - \mathcal{F}_{i,l,t'}^e \right) \leq d_s^k(t). \quad (4.4.5.100)$$

Et Soit $r \in S^{c,Ag}$, $t' \in T^k$.

- Le flot sortant de l'origine O^k

le flot envoyé sur l'arc fictif par les camions associés à r à l'instant t' est donné par l'expression suivante :

$$\mathcal{F}_{O^k,r,t'}^s = \mathcal{F}_{O^k,r,t'}^{s,O^k} + \mathcal{F}_{O^k,r,t'}^{s,H} + \mathcal{F}_{O^k,r,t'}^{s,Z}$$

Pour $t', t' + 1 \in T^k$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{O^k,r,t'}^{s,O^k} &= \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t'-t_{(i,j)}+1}^{t'} x_{(i,j),l,t''}^{k'} \\ &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t'-\Delta_{(i,h)}+1}^{t'} x_{(i,h),l,t''}^{k'} \\ &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t'+1}^{t'+\Delta_{(h,i)}} x_{(h,i),l,t''-t_{(h,i)}}^{k'} \\ &+ \sum_{z \in Z \setminus \{O^k\}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in z} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t'+1}^{t'+\Delta_{(i,j)}} x_{(i,j),l,t''-t_{(i,j)}}^{k'}. \end{aligned}$$

En rajoutant le flot envoyé vers les plateformes H' tel que :

$$t', t' + t_{(O^k,h)} \in T^k, \quad \forall h \in H'.$$

Ce flot est donné, pour chaque arc, par l'égalité (4.4.5.47)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{s, O^k} + \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{s, H} &= \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t' - t_{(i,j)} + 1}^{t'} x_{(i,j), l, t''}^{k'} \\
 &+ \sum_{h \in H'} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t' - \Delta_{(i,h)}}^{t'} x_{(i,h), l, t''}^{k'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t'+1}^{t' + \Delta_{(h,i)}} x_{(h,i), l, t'' - t_{(h,i)}}^{k'} \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{O^k\}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in z} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t'+1}^{t' + \Delta_{(i,j)}} x_{(i,j), l, t'' - t_{(i,j)}}^{k'}.
 \end{aligned}$$

En rajoutant le flot envoyé vers les zones Z' tel que :

$$t', t' + t_{(O^k, z)} \in T^k, \quad \forall z \in Z'.$$

Ce flot est donné, pour chaque arc, par l'égalité (4.4.5.49)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{s, O^k} + \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{s, H} + \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{s, Z} &= \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t' - t_{(i,j)} + 1}^{t'} x_{(i,j), l, t''}^{k'} \\
 &+ \sum_{h \in H'} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t' - \Delta_{(i,h)}}^{t'} x_{(i,h), l, t''}^{k'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t'+1}^{t' + \Delta_{(h,i)}} x_{(h,i), l, t'' - t_{(h,i)}}^{k'} \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{O^k\}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in z} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t'+1}^{t' + \Delta_{(i,j)}} x_{(i,j), l, t'' - t_{(i,j)}}^{k'} \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{O^k\}} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in O^k} \sum_{j \in z} x_{(i,j), l, t'}^{k'}.
 \end{aligned}$$

- Le flot entrant dans l'origine O^k .

$$\mathcal{F}_{O^k, r, t'}^e = \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{e, O^k} + \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{e, H} + \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{e, Z}.$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

Pour $t', t' - 1 \in T^k$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{e, O^k} &= \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t'-t(i,j)}^{t'-1} x_{(i,j), l, t''}^{k'} \\
&+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t'-\Delta(i,h)}^{t'-1} x_{(i,h), l, t''}^{k'} \\
&+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t'}^{t'+\Delta(h,i)-1} x_{(h,i), l, t''-t(h,i)}^{k'} \\
&+ \sum_{z \in Z \setminus \{O^k\}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in z} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t'}^{t'+\Delta(i,j)-1} x_{(i,j), l, t''-t(i,j)}^{k'}.
\end{aligned}$$

En rajoutant le flot provenant des plateformes H'_e tel que :

$$t', t' - t_{(O^k, h)} \in T^k, \quad \forall h \in H'_e.$$

Ce flot est donné, pour chaque arc, par l'égalité (4.4.5.48)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{e, O^k} + \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{e, H} &= \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t'-t(i,j)}^{t'-1} x_{(i,j), l, t''}^{k'} \\
&+ \sum_{h \in H'} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t'-\Delta(i,h)}^{t'-1} x_{(i,h), l, t''}^{k'} \\
&+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t'}^{t'+\Delta(h,i)} x_{(h,i), l, t''-t(h,i)}^{k'} \\
&+ \sum_{z \in Z \setminus \{O^k\}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in z} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t'}^{t'+\Delta(i,j)-1} x_{(i,j), l, t''-t(i,j)}^{k'}.
\end{aligned}$$

On rajoute le flot provenant des zones Z'_e vérifiant :

$$t', t' - t_{(O^k, z)} \in T^k, \quad \forall z \in Z'.$$

Ce flot est donné, pour chaque arc, par l'égalité (4.4.5.49).

Pour que ce flot arrive, à l'instant t' à la zone O^k , il est envoyé à l'instant $t' - t(z, O^k)$.
 Pour $i \in z$ et $j \in O^k$,

$$\begin{aligned}
t' - t(z, O^k) &= t' - \left(t(z, O^k) + \Delta(i, j) \right) + \Delta(i, j) \\
&= t' - t_{(i, j)} + \Delta(i, j).
\end{aligned}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{e, O^k} + \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{e, H} + \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^{e, Z} &= \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t'-t(i, j)}^{t'-1} x_{(i, j), l, t''}^{k'} \\
 &+ \sum_{h \in H'} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t'-\Delta(i, h)}^{t'-1} x_{(i, h), l, t''}^{k'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{t''=t'}^{t'+\Delta(h, i)} x_{(h, i), l, t''-t(h, i)}^{k'} \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{O^k\}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in z} \sum_{j \in O^k} \sum_{t''=t'}^{t'+\Delta(i, j)} x_{(i, j), l, t''-t(i, j)}^{k'}.
 \end{aligned}$$

En faisant la soustraction $\mathcal{F}_{O^k, r, t'}^s - \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^e$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^s - \mathcal{F}_{O^k, r, t'}^e &= \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{j \in O^k} x_{(i, j), l, t'}^{k'} \\
 &- \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{j \in O^k} x_{(i, j), l, t'-t(i, j)}^{k'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} x_{(i, h), l, t'}^{k'} \\
 &- \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} x_{(h, i), l, t'-t(h, i)}^{k'} \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{O^k\}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in O^k} \sum_{j \in z} x_{(i, j), l, t'}^{k'} \\
 &- \sum_{z \in Z \setminus \{O^k\}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in z} \sum_{j \in O^k} x_{(i, j), l, t'-t(i, j)}^{k'}.
 \end{aligned}$$

Alors, en faisant les sommes $t' \leq t$ et $r \in S^{c, Ag}$ et en utilisant l'inégalité (4.4.5.100), on peut conclure que \mathcal{S}' satisfait les contraintes (4.4.3.23).

- Conservation du flot au niveau des destinations des demandes

Soient $k \in K^{Ag}$ et $t \in T^k$.

On sait que \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.17). Alors, pour tout $k' \in k$,

$$\sum_{t' \in T^{k'}} \sum_{l \in S^c} \left(\sum_{\substack{a \in \delta^+(D^{k'}) \\ t'+t_a \in T^{k'}}} x_{a, l, t'}^{k'} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(D^{k'}) \\ t'-t_a \in T^{k'}}} x_{a, l, t'-t_a}^{k'} \right) \geq d^{k'}.$$

Ce que l'on peut réécrire, en utilisant l'extension de la définition des variables de flot sur

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

la fenêtre de traitement de la demande k (T^k) sous cette forme :

$$\sum_{t'=t_{min}^k}^t \sum_{l \in S^c} \left(\sum_{\substack{a \in \delta^+(D^{k'}) \\ t'+t_a \in T^{k'}}} x_{a,l,t'}^{k'} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(D^{k'}) \\ t'-t_a \in T^{k'}}} x_{a,l,t'-t_a}^{k'} \right) \geq d^{k'} \mathbb{1}_{\llbracket t_{max}^{k'}, t_{max}^k \rrbracket}(t) \quad \forall t \in T^k.$$

En faisant la somme sur k' , on obtient :

$$\sum_{t'=t_{min}^k}^t \sum_{l \in S^c} \sum_{k' \in k} \left(\sum_{\substack{a \in \delta^+(D^{k'}) \\ t'+t_a \in T^k}} x_{a,l,t'}^{k'} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(D^{k'}) \\ t'-t_a \in T^k}} x_{a,l,t'-t_a}^{k'} \right) \geq d_e^k(t), \quad \forall t \in T^k. \quad (4.4.5.101)$$

On note $\mathcal{D}^k \subseteq D^k$ l'ensemble des destinations des demandes agrégeables en k .

On sait que \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.18). Donc, pour tout $i \in D^k \setminus \mathcal{D}^k$, pour tout $k' \in k$ et pour tout $l \in S^c$,

$$\sum_{\substack{a \in \delta^+(i) \\ t'+t_a \in T^k}} x_{a,l,t'}^{k'} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(i) \\ t'-t_a \in T^k}} x_{a,l,t'-t_a}^{k'} = 0.$$

Et en faisant la somme sur k' , sur l , sur t' et sur i , on obtient :

$$\sum_{t'=t_{min}^k}^t \sum_{k' \in k} \sum_{l \in S^c} \sum_{i \in D^k \setminus \mathcal{D}^k} \left(\sum_{\substack{a \in \delta^+(i) \\ t'+t_a \in T^k}} x_{a,l,t'}^{k'} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(i) \\ t'-t_a \in T^k}} x_{a,l,t'-t_a}^{k'} \right) = 0. \quad (4.4.5.102)$$

On fait la somme de (4.4.5.101) et (4.4.5.102) et on a donc :

$$\sum_{t'=t_{min}^k}^t \sum_{k' \in k} \sum_{l \in S^c} \sum_{i \in D^k} \left(\sum_{\substack{a \in \delta^+(i) \\ t'+t_a \in T^k}} x_{a,l,t'}^{k'} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(i) \\ t'-t_a \in T^k}} x_{a,l,t'-t_a}^{k'} \right) \geq d_e^k(t). \quad (4.4.5.103)$$

Or, d'après les mêmes démarches pour la vérification des contraintes de conservation de

flot au niveau des origines des demandes, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{D^k,r,t'}^s - \mathcal{F}_{D^k,r,t'}^e &= \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in D^k} \sum_{j \in O^k} x_{(i,j),l,t'}^{k'} \\
 &- \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in D^k} \sum_{j \in D^k} x_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}^{k'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in D^k} x_{(i,h),l,t'}^{k'} \\
 &- \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in D^k} x_{(h,i),l,t'-t_{(h,i)}}^{k'} \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{D^k\}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in D^k} \sum_{j \in z} x_{(i,j),l,t'}^{k'} \\
 &- \sum_{z \in Z \setminus \{D^k\}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in z} \sum_{j \in D^k} x_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}^{k'},
 \end{aligned}$$

Et en faisant la somme sur t' , sur r , et en utilisant l'inégalité (4.4.5.103), on obtient :

$$\sum_{t'=t_{min}^k}^t \sum_{r \in S^{c,Ag}} \left(\sum_{\substack{a \in \delta^+(D^k): \\ t'+t_a \in T^k}} x_{a,l,t'}^{k'} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(D^k): \\ t'-t_a \in T^k}} x_{a,l,t'-t_a}^{k'} \right) \geq d_e^k(t).$$

De plus, k et t sont arbitraires dans K^{Ag} et T^k . Donc, \mathcal{S}' satisfait bien les contraintes (4.4.3.24).

- Conservation du flot au niveau des zones différentes des origines et des destinations des demandes.

Démonstration identique à celle des contraintes de conservation du flot au niveau des origines et des destinations.

Vérification des contraintes limitant les quantités déchargées des véhicules

Soient $k \in K^{Ag}$, $v \in V^t \cup V^b$, $r \in S^{c,Ag}$, $h \in H$, $t \in T^k$, avec $m_v \in M_h$.

La solution \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.18). Donc, pour $k' \in k$,

$$u_{h,v,t}^{k'} + \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}, \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^{k'} + \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^{k'} \leq \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \\ m_a = m_v, \\ t-t_a \geq t_{min}^{k'}}} x_{a,v,t-t_a}^{k'} = \sum_{\substack{h' \in H: \\ m_{(h',h)} = m_v, \\ t-t_{(h',h)}}} x_{(h',h),v,t-t_{(h',h)}}^{k'}.$$

En faisant la somme sur k' , en décomposant la somme de $l \in S^c$ en deux sommes $r' \in S^{c,Ag}$ et $l \in r'$, et en utilisant les égalités (4.4.5.68), (4.4.5.71), (4.4.5.73) et (4.4.5.46), on obtient :

$$u_{h,v,t}^{k'} + \sum_{\substack{v' \in V^t \cup V^b \setminus \{v\}, \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^{k'} + \sum_{r' \in S^{c,Ag}} q_{h,v,r',t}^{k'} \leq \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \\ m_a = m_v, \\ t-t_a \geq t_{min}^k}} x_{a,v,t-t_a}^{k'}.$$

Ce qui prouve que \mathcal{S}' satisfait bien les contraintes (4.4.3.25).

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

Ainsi, pour les camions, la démarche est identique en partant des contraintes (4.4.3.26) au lieu de (4.4.3.25) et des égalités (4.4.5.45) au lieu de (4.4.5.46) et en conclusion, \mathcal{S}' satisfait les contraintes (4.4.3.26).

Vérification des contraintes de respect de la capacité des arcs en nombre de véhicules

Pour les arcs fluviaux et ferroviaires, la vérification est évidente. Nous allons alors vérifier que \mathcal{S}' vérifie les contraintes de respect de la capacité pour les arcs routiers.

Soient $a \in A^{c,Ag}$ et $t \in T$.

- Si $a \in A^{HH'}$ ($a = (h, h')$ avec $h, h' \in H$),
On sait que \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.21). Nous avons donc :

$$\sum_{l \in S^c} y_{a,l,t} \leq C_{a,t}.$$

En séparant la somme $l \in S^c$ en deux sommes (sur $r \in S^{c,Ag}$ et $l \in r$) et en injectant l'égalité (4.4.5.56), on obtient :

$$\sum_{r \in S^{c,Ag}} y'_{a,l,t} \leq C_{a,t}.$$

- Si $a \in A^{HZ}$ ($a = (h, z)$ avec $h \in H$ et $z \in Z$),
On sait que \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.21). On a donc, pour tout $i \in z$,

$$\sum_{l \in S^c} y_{(h,i),l,t} \leq C_{(h,i),t}.$$

En séparant la somme sur S^c , on a

$$\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} y_{(h,i),l,t} \leq C_{(h,i),t}.$$

En faisant la somme $i \in z$ et en injectant l'égalité (4.4.5.59), on obtient :

$$\sum_{r \in S^{c,Ag}} y'_{(h,z),r,t} \leq \sum_{i \in z} C_{(h,i),t} = C_{(h,z),t}.$$

\mathcal{S}' satisfait donc les contraintes (4.4.3.28).

- Si $a \in A^{ZH}$ ($a = (z, h)$ avec $z \in Z$ et $h \in H$)
Pour tout $i \in z$, on a :

$$\sum_{l \in S^c} y_{(i,h),l,t-\Delta_{(i,h)}} \leq C_{(i,h),t-\Delta_{(i,h)}},$$

car \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.21).

Alors, en séparant la somme $l \in S^c$, on obtient :

$$\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} y_{(i,h),l,t-\Delta_{(i,h)}} \leq C_{(i,h),t-\Delta_{(i,h)}},$$

Et en faisant la somme sur i et en injectant l'égalité (4.4.5.58) on obtient :

$$\sum_{r \in S^{c, Ag}} y'_{(z,h),l,t} = \sum_{r \in S^{c, Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,h),l,t-\Delta(i,h)} \leq \sum_{i \in z} C_{(i,h),t-\Delta(i,h)} = C_{(z,h),t}.$$

Alors, \mathcal{S}' satisfait bien les contraintes (4.4.3.28).

Vérification des contraintes de respect de la conservation du flot des véhicules au niveau de leurs positions initiales

Pour les trains et les barges le résultat est évident. Nous allons alors, montrer que \mathcal{S}' satisfait ces contraintes pour les camions.

Soient $r \in S^{c, Ag}$ et $t \in T$ avec $t+1 \in T$.

- Si $r \in H$,

On sait que la solution \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.23). Nous avons donc :

$$\sum_{\substack{a \in \delta^+(r) \cap A^c: \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,r,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(r) \cap A^c: \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,r,t-t_a} = \alpha_{r,t} - \beta_{r,t}. \quad (4.4.5.104)$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \in \delta^+(r) \cap A^c: \\ (t+t_a) \in T}} y'_{a,r,t} &= \sum_{\substack{h' \in H: \\ (t+t_{(h,h')}) \in T}} y'_{(h,h'),r,t} \\ &+ \sum_{\substack{z \in Z: \\ (t+t_{(h,z)}) \in T}} y'_{(h,z),r,t}. \end{aligned}$$

Et en injectant les égalités (4.4.5.56) et (4.4.5.59), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \in \delta^+(r) \cap A^c: \\ (t+t_a) \in T}} y'_{a,r,t} &= \sum_{\substack{h' \in H: \\ (t+t_{(h,h')}) \in T}} y_{(h,h'),r,t} \\ &+ \sum_{\substack{z \in Z: \\ (t+t_{(h,z)}) \in T}} y_{(h,z),r,t} \\ &= \sum_{\substack{a \in \delta^+(r) \cap A^c: \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,r,t}. \end{aligned}$$

Similairement, on montre que :

$$\sum_{\substack{a \in \delta^-(r) \cap A^c: \\ (t-t_a) \in T}} y'_{a,r,t-t_a} = \sum_{\substack{a \in \delta^-(r) \cap A^c: \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,r,t-t_a}.$$

Nous avons donc, d'après (4.4.5.104),

$$\sum_{\substack{a \in \delta^+(r) \cap A^c: \\ (t+t_a) \in T}} y'_{a,r,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(r) \cap A^c: \\ (t-t_a) \in T}} y'_{a,r,t-t_a} = \alpha_{r,t} - \beta_{r,t}.$$

Et \mathcal{S}' satisfait donc les contraintes (4.4.3.30).

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

- Si $r \in Z$,

On exprime le flot de camions sortant de r à l'instant t et celui entrant en r à l'instant t et on calcule la différence.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{r,t}^+ &= \sum_{\substack{a \in \delta^+(r): \\ (t+t_a) \in T}} y'_{a,r,t} = \sum_{\substack{h \in H: \\ t+t_{(r,h)} \in T}} y'_{(r,h),r,t} \\
 &+ \sum_{\substack{z \in Z \setminus \{r\}: \\ t+t_{(r,z)} \in T}} y'_{(r,z),r,t} \\
 &+ y'_{(r,r),r,t}.
 \end{aligned}$$

En utilisant alors les égalités (4.4.5.58), (4.4.5.60) et (4.4.5.61), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{r,t}^+ &= \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} y_{(i,h),l,t-\Delta_{(i,h)}} \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in z} y_{(i,j),l,t} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}+1}^t y_{(i,j),l,t'} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} y_{(i,i),l,t} \\
 &+ \sum_{i \in r} \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t-\Delta_{(i,h)}+1: \\ \Delta_{(i,h)} > 0}}^t y_{(i,h),l,t'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{i \in r} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t+1: \\ \Delta_{(h,i)} > 0}}^{t+\Delta_{(h,i)}} y_{(h,i),l,t'-t_{(h,i)}} \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t+1: \\ \Delta_{(i,j)} > 0}}^{t+\Delta_{(i,j)}} y_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}.
 \end{aligned}$$

Alors, en regroupant le premier terme avec le cinquième terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{r,t}^+ &= \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in z} y_{(i,j),l,t} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}+1}^t y_{(i,j),l,t'} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} y_{(i,i),l,t} \\
 &+ \sum_{i \in r} \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{t'=t-\Delta_{(i,h)}}^t y_{(i,h),l,t'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{i \in r} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t+1: \\ \Delta_{(h,i)} > 0}}^{t+\Delta_{(h,i)}} y_{(h,i),l,t'-t_{(h,i)}} \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t+1: \\ \Delta_{(i,j)} > 0}}^{t+\Delta_{(i,j)}} y_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}.
 \end{aligned} \tag{4.4.5.105}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{r,t}^- &= \sum_{\substack{a \in \delta^-(r): \\ (t-t_a) \in T}} y'_{a,r,t-t_a} = \sum_{\substack{h \in H: \\ t-t_{(h,r)} \in T}} y'_{(h,r),r,t-t_{(h,r)}} \\
 &+ \sum_{\substack{z \in Z \setminus \{r\}: \\ t-t_{(z,r)} \in T}} y'_{(z,r),r,t-t_{(z,r)}} \\
 &+ y'_{(r,r),r,t-1}.
 \end{aligned}$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

En utilisant les égalités (4.4.5.58), (4.4.5.60) et (4.4.5.61), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{r,t}^- &= \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \mathcal{Y}(i,h),l,t-t_{(h,z)} \\
&+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r} \mathcal{Y}(i,j),l,t-t_{(z,r)} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}-1}^{t-1} \mathcal{Y}(i,j),l,t' \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \mathcal{Y}(i,i),l,t-1 \\
&+ \sum_{i \in r} \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t-\Delta(i,h): \\ \Delta(i,h) > 0}}^{t-1} \mathcal{Y}(i,h),l,t' \\
&+ \sum_{h \in H} \sum_{i \in r} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t: \\ \Delta(h,i) > 0}}^{t+\Delta(h,i)-1} \mathcal{Y}(h,i),l,t'-t_{(h,i)} \\
&+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t: \\ \Delta(i,j) > 0}}^{t+\Delta(i,j)-1} \mathcal{Y}(i,j),l,t'-t_{(i,j)}.
\end{aligned}$$

On a donc,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{r,t}^- &= \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \mathcal{Y}(h,i),l,t-t_{(h,i)}+\Delta(h,i) \\
&+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r} \mathcal{Y}(i,j),l,t-t_{(i,j)}+\Delta(i,j) \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}-1}^{t-1} \mathcal{Y}(i,j),l,t' \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \mathcal{Y}(i,i),l,t-1 \\
&+ \sum_{i \in r} \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t-\Delta(i,h): \\ \Delta(i,h) > 0}}^{t-1} \mathcal{Y}(i,h),l,t' \\
&+ \sum_{h \in H} \sum_{i \in r} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t: \\ \Delta(h,i) > 0}}^{t+\Delta(h,i)-1} \mathcal{Y}(h,i),l,t'-t_{(h,i)} \\
&+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t: \\ \Delta(i,j) > 0}}^{t+\Delta(i,j)-1} \mathcal{Y}(i,j),l,t'-t_{(i,j)}.
\end{aligned}$$

Alors, en regroupant le premier terme avec le sixième terme et le deuxième terme avec

le septième terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{r,t}^- &= \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t(i,j)}^{t-1} y(i,j),l,t' \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} y(i,i),l,t-1 \\
 &+ \sum_{i \in r} \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t-\Delta(i,h): \\ \Delta(i,h) > 0}}^{t-1} y(i,h),l,t' \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{i \in r} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t: \\ \Delta(h,i) > 0}}^{t+\Delta(h,i)} y(h,i),l,t'-t(h,i) \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r} \sum_{l \in r} \sum_{\substack{t'=t: \\ \Delta(i,j) > 0}}^{t+\Delta(i,j)} y(i,j),l,t'-t(i,j).
 \end{aligned} \tag{4.4.5.106}$$

En faisant alors la soustraction (4.4.5.105) moins (4.4.5.106), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{r,t}^+ - \mathcal{F}_{r,t}^- &= \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in z} y(i,j),l,t \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} \left(\sum_{t'=t-t(i,j)+1}^t y(i,j),l,t' - \sum_{t'=t-t(i,j)}^{t-1} y(i,j),l,t' \right) \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} y(i,i),l,t - \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} y(i,i),l,t-1 \\
 &+ \sum_{i \in r} \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \left(\sum_{t'=t-\Delta(i,h)}^t y(i,h),l,t' - \sum_{t'=t-\Delta(i,h)}^{t-1} y(i,h),l,t' \right) \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{i \in r} \sum_{l \in r} \left(\sum_{t'=t+1}^{t+\Delta(h,i)} y(h,i),l,t'-t(h,i) - \sum_{t'=t}^{t+\Delta(h,i)} y(h,i),l,t'-t(h,i) \right) \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r} \sum_{l \in r} \left(\sum_{t'=t+1}^{t+\Delta(i,j)} y(i,j),l,t'-t(i,j) - \sum_{t'=t}^{t+\Delta(i,j)} y(i,j),l,t'-t(i,j) \right).
 \end{aligned}$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{r,t}^+ - \mathcal{F}_{r,t}^- &= \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in z} y_{(i,j),l,t} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} \left(y_{(i,j),l,t} - y_{(i,j),l,t-t_{(i,j)}} \right) \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \left(y_{(i,i),l,t} - y_{(i,i),l,t-1} \right) \\
&+ \sum_{i \in r} \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} y_{(i,h),l,t} \\
&- \sum_{h \in H} \sum_{i \in r} \sum_{l \in r} y_{(h,i),l,t-t_{(h,i)}} \\
&- \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r} \sum_{l \in r} y_{(i,j),l,t-t_{(i,j)}}.
\end{aligned}$$

Ce que l'on peut réécrire sous cette forme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{r,t}^+ - \mathcal{F}_{r,t}^- &= \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in z} y_{(i,j),l,t} \\
&- \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r} \sum_{l \in r} y_{(i,j),l,t-t_{(i,j)}} \\
&+ \sum_{i \in r} \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} y_{(i,h),l,t} \\
&- \sum_{h \in H} \sum_{i \in r} \sum_{l \in r} y_{(h,i),l,t-t_{(h,i)}} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} y_{(i,j),l,t} \\
&- \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} y_{(i,j),l,t-t_{(i,j)}} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} y_{(i,i),l,t} \\
&- \sum_{l \in r} \sum_{i \in r} y_{(i,i),l,t-1}.
\end{aligned}$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{r,t}^+ - \mathcal{F}_{r,t}^- &= \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} \sum_{j \in z} y_{(i,j),l,t} \\
 &+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(l,i),l,t} \\
 &- \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r \setminus \{l\}} y_{(i,j),l,t-t_{(i,j)}} \\
 &- \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,l),l,t-t_{(i,l)}} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{h \in H} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} y_{(i,h),l,t} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{h \in H} y_{(l,h),l,t} \\
 &- \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} y_{(h,i),l,t-t_{(h,i)}} \\
 &- \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} y_{(h,l),l,t-t_{(h,l)}} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} y_{(i,j),l,t} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{j \in r \setminus \{l\}} y_{(l,j),l,t} \\
 &- \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} \sum_{j \in r \setminus \{l\}} y_{(i,j),l,t-t_{(i,j)}} \\
 &- \sum_{l \in r} \sum_{j \in r \setminus \{l\}} y_{(l,j),l,t-t_{(l,j)}} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} y_{(i,i),l,t} \\
 &+ \sum_{l \in r} y_{(l,l),l,t} \\
 &- \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} y_{(i,i),l,t-1} \\
 &- \sum_{l \in r} y_{(l,l),l,t-1}.
 \end{aligned}$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

Ce que l'on peut réécrire par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{r,t}^+ - \mathcal{F}_{r,t}^- &= \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} \sum_{j \in z} y_{(i,j),l,t} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{h \in H} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} y_{(i,h),l,t} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} \sum_{j \in r \setminus \{i\}} y_{(i,j),l,t} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} y_{(i,i),l,t} \\
&- \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in r \setminus \{l\}} y_{(i,j),l,t-t_{(i,j)}} \\
&- \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} y_{(h,i),l,t-t_{(h,i)}} \\
&- \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} \sum_{j \in r \setminus \{l\}} y_{(i,j),l,t-t_{(i,j)}} \\
&- \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} y_{(i,i),l,t-1} \\
&+ \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(l,i),l,t} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{h \in H} y_{(l,h),l,t} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{j \in r \setminus \{l\}} y_{(l,j),l,t} \\
&+ \sum_{l \in r} y_{(l,l),l,t} \\
&- \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,l),l,t-t_{(i,l)}} \\
&- \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} y_{(h,l),l,t-t_{(h,l)}} \\
&- \sum_{l \in r} \sum_{j \in r \setminus \{l\}} y_{(l,j),l,t-t_{(l,j)}} \\
&- \sum_{l \in r} y_{(l,l),l,t-1}.
\end{aligned}$$

Or, on sait que \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.27). Alors, pour tout $l \in r$, et pour tout $i \in r \setminus \{l\}$, on a :

$$\sum_{\substack{a \in \delta^+(i): \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,l,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(i): \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,l,t-t_a} = 0.$$

Alors, en faisant la somme sur i , on obtient :

$$\sum_{i \in r \setminus \{l\}} \sum_{\substack{a \in \delta^+(i): \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,l,t} - \sum_{i \in r \setminus \{l\}} \sum_{\substack{a \in \delta^-(i): \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,l,t-t_a} = 0.$$

Et en faisant la somme sur l , on obtient :

$$\sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} \sum_{\substack{a \in \delta^+(i): \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,l,t} - \sum_{l \in r} \sum_{i \in r \setminus \{l\}} \sum_{\substack{a \in \delta^-(i): \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,l,t-t_a} = 0.$$

Et en injectant cette expression dans la dernière expression de $\mathcal{F}_{r,t}^+ - \mathcal{F}_{r,t}^-$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{r,t}^+ - \mathcal{F}_{r,t}^- &= \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(l,i),l,t} \\ &+ \sum_{l \in r} \sum_{h \in H} y_{(l,h),l,t} \\ &+ \sum_{l \in r} \sum_{j \in r \setminus \{l\}} y_{(l,j),l,t} \\ &+ \sum_{l \in r} y_{(l,l),l,t} \\ &- \sum_{z \in Z \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,l),l,t-t_{(i,l)}} \\ &- \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} y_{(h,l),l,t-t_{(h,l)}} \\ &- \sum_{l \in r} \sum_{j \in r \setminus \{l\}} y_{(l,j),l,t-t_{(l,j)}} \\ &- \sum_{l \in r} y_{(l,l),l,t-1}. \end{aligned}$$

De plus, on sait que \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.23). Donc, pour tout $l \in r$,

$$\sum_{\substack{a \in \delta^+(l): \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,l,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(l): \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,l,t-t_a} = \alpha_{l,t} - \beta_{l,t}.$$

Et en faisant la somme sur l , on obtient

$$\sum_{l \in r} \sum_{\substack{a \in \delta^+(l): \\ (t+t_a) \in T}} y_{a,l,t} - \sum_{l \in r} \sum_{\substack{a \in \delta^-(l): \\ (t-t_a) \in T}} y_{a,l,t-t_a} = \sum_{l \in r} (\alpha_{l,t} - \beta_{l,t}).$$

Et en injectant cette égalité dans la dernière expression de $\mathcal{F}_{r,t}^+ - \mathcal{F}_{r,t}^-$, on obtient :

$$\sum_{\substack{a \in \delta^+(r): \\ t+t_a \in T}} y'_{a,r,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(r): \\ t-t_a \in T}} y'_{a,r,t-t_a} = \alpha'_{r,t} - \beta'_{r,t}.$$

On peut alors en conclure que \mathcal{S}' satisfait les contraintes (4.4.3.30).

Vérification des contraintes limitant le nombre de véhicules activés

Pour les trains et les barges le résultat est évident.
 Soit $r \in S^{c,Ag}$. On sait qu \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.25). Alors, pour tout $l \in r$, on a :

$$\sum_{t \in T} \alpha_{l,t} \leq V_l^c.$$

Et en faisant la somme sur l , on obtient :

$$\sum_{t \in T} \sum_{l \in r} \alpha_{l,t} \leq \sum_{l \in r} V_l^c = V_r^c.$$

Et en utilisant l'égalité (4.4.5.64), on voit bien que \mathcal{S}' vérifie les contraintes (4.4.3.32).

Vérification des contraintes sur le passage de véhicules par des sites différents de leurs positions initiales

Pour les trains et les barges, le résultat est évident. On vérifie donc ces contraintes pour les camions.

- La vérification au niveau des plateformes

Soient $r \in S^{c,Ag}$ et $h \in H$

On pose

$$\mathcal{F}_{r,t}^+(h) = \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cap A^c, \\ (t+t_a) \in T}} y'_{a,r,t}.$$

Et

$$\mathcal{F}_{r,t}^-(h) = \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cap A^c, \\ (t-t_a) \in T}} y'_{a,r,t-t_a}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{r,t}^+(h) &= \sum_{\substack{h' \in H: \\ t+t_{h,h'} \in T}} y'_{(h,h'),r,t} \\ &+ \sum_{\substack{z \in Z: \\ t+t_{h,z} \in T}} y'_{(h,z),r,t} \end{aligned}$$

Et en utilisant les égalités (4.4.5.56) et (4.4.5.59), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{r,t}^+(h) &= \sum_{\substack{h' \in H: \\ t+t_{h,h'} \in T}} \sum_{l \in r} y_{(h,h'),l,t} \\ &+ \sum_{\substack{z \in Z: \\ t+t_{h,z} \in T}} \sum_{i \in z} \sum_{l \in r} y_{(h,i),l,t} \\ &= \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cup A^c: \\ t+t_a \in T}} \sum_{l \in r} y_{a,l,t}. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{r,t}^-(h) &= \sum_{\substack{h' \in H: \\ t-t_{(h',h)} \in T}} y'_{(h',h),r,t-t_{(h',h)}} \\ &+ \sum_{\substack{z \in Z: \\ t-t_{z,h} \in T}} y'_{(z,h),r,t-t_{(z,h)}}.\end{aligned}$$

Et en utilisant les égalités (4.4.5.56) et (4.4.5.58), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{r,t}^-(h) &= \sum_{\substack{h' \in H: \\ t-t_{(h',h)} \in T}} \sum_{l \in r} y_{(h',h),l,t-t_{(h',h)}} \\ &+ \sum_{\substack{z \in Z: \\ t-t_{z,h} \in T}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,h),r,t-t_{(z,h)}-\Delta(i,h)} \\ &= \sum_{\substack{h' \in H: \\ t-t_{(h',h)} \in T}} \sum_{l \in r} y_{(h',h),l,t-t_{(h',h)}} \\ &+ \sum_{z \in Z} \sum_{i \in z} \sum_{l \in r} y_{(i,h),r,t-t_{(i,h)}} \\ &= \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cup A^c: \\ t-t_a \in T}} \sum_{l \in r} y_{a,l,t-t_a}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{r,t}^+(h) - \mathcal{F}_{r,t}^-(h) &= \sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cup A^c: \\ t+t_a \in T}} \sum_{l \in r} y_{a,l,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cup A^c: \\ t-t_a \in T}} \sum_{l \in r} y_{a,l,t-t_a} \\ &= \sum_{l \in r} \left(\sum_{\substack{a \in \delta^+(h) \cup A^c: \\ t+t_a \in T}} y_{a,l,t} - \sum_{\substack{a \in \delta^-(h) \cup A^c: \\ t-t_a \in T}} y_{a,l,t-t_a} \right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

car \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.27) pour tout $l \in r$.

Donc, \mathcal{S}' satisfait bien les contraintes (4.4.3.34) au niveau des plateformes.

- La vérification au niveau des zones

Soit $r \in S^{c,Ag}$ et soit $z \in Z \setminus \{r\}$.

On pose

$$\mathcal{F}_{z,r,t}^+ = \sum_{\substack{a \in \delta^+(z): \\ t+t_a \in T}} y'_{a,r,t}.$$

Et

$$\mathcal{F}_{z,r,t}^- = \sum_{\substack{a \in \delta^-(z): \\ t-t_a \in T}} y'_{a,r,t-t_a}.$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

On exprime chaque terme en fonction des valeurs données par la solution \mathcal{S} .
 Pour $t + 1 \in T$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{z,r,t}^+ &= \sum_{\substack{h \in H: \\ t+t_{(z,h)} \in T}} y'_{(z,h),r,t} \\ &+ \sum_{\substack{z' \in Z \setminus \{z\}: \\ t+t_{(z,z')} \in T}} y'_{(z,z'),r,t} \\ &+ y'_{(z,z),r,t}. \end{aligned}$$

En utilisant les égalités (4.4.5.58), (4.4.5.60) et (4.4.5.61), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{z,r,t}^+ &= \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,h),l,t-\Delta_{(i,h)}} \\ &+ \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z'} y_{(i,j),l,t} \\ &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}+1}^t y_{(i,j),l,t'} \\ &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,j),l,t} \\ &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t'=t-\Delta_{(i,h)}+1: \\ \Delta_{(i,h)} > 0}}^t y_{(i,h),l,t'} \\ &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t'=t+1: \\ \Delta_{(i,h)} > 0}}^{t+\Delta_{(i,h)}} y_{(h,i),l,t'-t_{(h,i)}} \\ &+ \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{\substack{t'=t+1: \\ \Delta_{(i,j)} > 0}}^{t+\Delta_{(i,j)}} y_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}. \end{aligned}$$

Et en regroupant le premier terme avec le cinquième terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{z,r,t}^+ &= \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z'} y_{(i,j),l,t} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}+1}^t y_{(i,j),l,t'} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,j),l,t} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t-\Delta_{(i,h)}}^t y_{(i,h),l,t'} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t'=t+1: \\ \Delta_{(h,i)} > 0}}^{t+\Delta_{(h,i)}} y_{(h,i),l,t'-t_{(h,i)}} \\
 &+ \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{\substack{t'=t+1: \\ \Delta_{(i,j)} > 0}}^{t+\Delta_{(i,j)}} y_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}.
 \end{aligned} \tag{4.4.5.107}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{z,r,t}^- &= \sum_{\substack{h \in H: \\ t-t_{(h,z)} \in T}} y'_{(h,z),r,t-t_{(h,z)}} \\
 &+ \sum_{\substack{z' \in Z \setminus \{z\}: \\ t-t_{(z',z)} \in T}} y'_{(z',z),r,t-t_{(z',z)}} \\
 &+ y'_{(z,z),r,t-1}.
 \end{aligned}$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

Et en injectant les égalités (4.4.5.59), (4.4.5.60) et (4.4.5.61), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{z,r,t}^- &= \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y(h,i),l,t-t(h,z) \\
&+ \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} y(i,j),l,t-t(z',z) \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t(i,j)}^{t-1} y(i,j),l,t' \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y(i,i),l,t-1 \\
&+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t'=t-\Delta(i,h): \\ \Delta(i,h) > 0}}^{t-1} y(i,h),l,t' \\
&+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{\substack{t'=t: \\ \Delta(i,h) > 0}}^{t+\Delta(h,i)-1} y(h,i),l,t'-t(h,i) \\
&+ \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{\substack{t'=t: \\ \Delta(i,h) > 0}}^{t+\Delta(i,h)-1} y(i,j),l,t'-t(i,j).
\end{aligned}$$

Or, pour tout $h \in H$, pour tout $i \in z$, $t(h,z) = t(h,i) - \Delta(h,i)$. Et pour tout $z' \in Z \setminus \{z\}$, pour tout $i \in z'$ et pour tout $j \in z$, $t(z',z) = t(i,j) - \Delta(h,i)$

En regroupant, alors, le premier terme avec le sixième terme et le deuxième terme avec le septième terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{z,r,t}^- &= \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t(i,j)}^{t-1} y(i,j),l,t' \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y(i,i),l,t-1 \\
&+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t-\Delta(i,h)}^{t-1} y(i,h),l,t' \\
&+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t}^{t+\Delta(h,i)} y(h,i),l,t'-t(h,i) \\
&+ \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{t'=t}^{t+\Delta(i,h)} y(i,j),l,t'-t(i,j). \tag{4.4.5.108}
\end{aligned}$$

Alors, (4.4.5.107) moins (4.4.5.108) donne :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{z,r,t}^+ - \mathcal{F}_{z,r,t}^- &= \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z'} y_{(i,j),l,t} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}+1}^t y_{(i,j),l,t} \\
 &+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,j),l,t} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t-\Delta_{(i,h)}}^t y_{(i,h),l,t} \\
 &+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t+1}^{t+\Delta_{(h,i)}} y_{(h,i),l,t} \\
 &+ \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{\substack{t'=t+1: \\ \Delta_{(i,j)} > 0}}^{t+\Delta_{(i,j)}} y_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}} \\
 &- \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}}^{t-1} y_{(i,j),l,t'} \\
 &- \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,i),l,t-1} \\
 &- \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t-\Delta_{(i,h)}}^{t-1} y_{(i,h),l,t'} \\
 &- \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t}^{t+\Delta_{(h,i)}} y_{(h,i),l,t'-t_{(h,i)}} \\
 &- \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{t'=t}^{t+\Delta_{(i,h)}} y_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}.
 \end{aligned}$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

En simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{z,r,t}^+ - \mathcal{F}_{z,r,t}^- &= \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z'} y_{(i,j),l,t} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z \setminus \{i\}} \sum_{t'=t-t_{(i,j)}+1}^t y_{(i,j),l,t'} \\
&+ \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,j),l,t} \\
&+ \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t-\Delta_{(i,h)}}^t y_{(i,h),l,t'} \\
&- \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z \setminus \{i\}} y_{(i,j),l,t-t_{(i,j)}} \\
&- \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(i,i),l,t-1} \\
&- \sum_{h \in H} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(h,i),l,t-t_{(h,i)}} \\
&- \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} y_{(i,j),l,t-t_{(i,j)}}. \tag{4.4.5.109}
\end{aligned}$$

Or, la solution \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.27). Donc, pour tout $l \in r$, et pour tout $i \in z$,

$$\mathcal{F}_{i,l,t}^+ - \mathcal{F}_{i,l,t}^- = 0, \tag{4.4.5.110}$$

avec

$$\mathcal{F}_{i,l,t}^+ = \sum_{a \in \delta^+(i)} y_{a,l,t},$$

et

$$\mathcal{F}_{i,l,t}^- = \sum_{a \in \delta^-(i)} y_{a,l,t-t_a}.$$

Alors, en faisant les sommes $i \in z$ et $l \in r$ de l'égalité (4.4.5.110), et en injectant l'expression dans l'égalité (4.4.5.109), on voit que la solution \mathcal{S}' satisfait les contraintes (4.4.3.34).

Vérification des contraintes liées aux capacités des véhicules et aux matières dangereuses

- Vérification des contraintes de respect de la capacité des véhicules
 Pour les trains et les barges, le résultat est évident. En utilisant le fait que \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.28), et en utilisant les égalités (4.4.5.46), on conclut que \mathcal{S}' satisfait les contraintes (4.4.3.35).

Vérifions, donc, la contrainte pour les camions.

Soient $r \in S^{c,Ag}$, $a \in A^{c,Ag}$ et $t \in T$ avec $t + t_a \in T$.

(a) Si $a \in A^{c,HH}$ ($a = (h, h')$ avec $h, h' \in H$)

On sait que \mathcal{S} vérifie les contraintes (3.3.3.29), alors pour tout $l \in r$,

$$\sum_{k \in K} q^{\theta^k} x_{a,l,t}^k \leq Q_c y_{a,l,t}.$$

Or,

$$\forall k \in K^{Ag}, \quad \{k' \in k\} \subseteq K.$$

Alors,

$$\bigcup_{k \in K^{Ag}} \{k' \in k\} \subseteq K.$$

Si on pose $K' = \bigcup_{k \in K^{Ag}} \{k' \in k\}$, on a l'inégalité suivante

$$\sum_{k \in K'} q^{\theta^k} x_{a,l,t}^k \leq \sum_{k \in K} q^{\theta^k} x_{a,l,t}^k \leq Q_c y_{a,l,t}.$$

Donc,

$$\sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} q^{\theta^k} x_{a,l,t}^{k'} \leq Q_c y_{a,l,t}.$$

En faisant la somme sur l , on obtient :

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} x_{a,l,t}^{k'} \leq Q_c \sum_{l \in r} y_{a,l,t}.$$

Et en utilisant les égalités (4.4.5.45) et (4.4.5.56), on obtient :

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} x'_{a,r,t}^k \leq Q_c y'_{a,r,t}.$$

Donc, \mathcal{S}' vérifie bien les contraintes (4.4.3.36).

(b) Si $a = (h, z)$ avec $h \in H$ et $z \in Z$

La solution \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.29), alors pour tout $l \in r$ et pour tout $i \in z$,

$$\sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} q^{\theta^k} x_{(h,i),l,t}^{k'} \leq \sum_{k \in K} q^{\theta^k} x_{(h,i),l,t}^k \leq Q_c y_{(h,i),l,t}.$$

Alors, en faisant les sommes sur $i \in z$ et $l \in r$, on obtient

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} x_{(h,i),l,t}^{k'} \leq Q_c \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} y_{(h,i),l,t}.$$

Et en utilisant les égalités (4.4.5.48) et (4.4.5.59), on voit bien que \mathcal{S}' vérifie les contraintes (4.4.3.36).

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

(c) Si $a = (z, h)$ avec $z \in Z$ et $h \in H$

On sait que \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.29). Alors, pour tout $l \in r$, pour tout $i \in z$,

$$\sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} q^{\theta^k} x_{(i,h),l,t-\Delta(i,h)}^{k'} \leq Q_c y_{(i,h),l,t-\Delta(i,h)}.$$

Et en faisant les sommes sur $l \in r$ et $i \in z$ et en utilisant les égalités (4.4.5.47) et (4.4.5.58), on obtient :

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} x_{(z,h),r,t}^{k'} \leq Q_c y'_{(z,h),r,t}.$$

Par suite, \mathcal{S}' vérifie les contraintes (4.4.3.36).

(d) Si $a = (z, z')$ avec $z \in Z$ et $z' \in Z \setminus \{z\}$

La solution \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.29). Donc, pour tout $l \in r$, pour tout $i \in z$ et pour tout $j \in z'$,

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{k' \in k} x_{(i,j),l,t}^{k'} \leq Q_c y_{(i,j),l,t}.$$

En faisant alors les sommes sur $l \in r$, $i \in z$ et $j \in z'$, et en utilisant les égalités (4.4.5.49) et (4.4.5.60), on montre que \mathcal{S}' satisfait les contraintes (4.4.3.36).

(e) Si $a = (z, z)$ avec $z \in Z$

On sait que \mathcal{S} satisfait les contraintes (3.3.3.29). Donc, nous pouvons en déduire les inégalités suivantes.

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{k' \in k} x_{(i,j),l,t'}^{k'} \leq Q_c y_{(i,j),l,t'}, \quad \forall (i, j) \in z \times z, \forall l \in r, \forall t' \in \llbracket t - t_{(i,j)} + 1, t \rrbracket.$$

Et en faisant la somme sur $(i, j) \in z \times z$, la somme sur $l \in r$ et la somme sur $t' \in \llbracket t - t_{(i,j)} + 1, t \rrbracket$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z} \sum_{t'=t-t_{i,j}+1}^t x_{(i,j),l,t'}^{k'} \leq Q_c \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z} \sum_{t'=t-t_{i,j}+1}^t y_{(i,j),l,t'}. \quad (4.4.5.111)$$

De plus, pour tout $l \in r$, pour tout $h \in H$, pour tout $i \in z$ tel que $\Delta(i, h) > 0$ et pour tout $t' \in \llbracket t - \Delta(i, h) + 1, t \rrbracket$,

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{k' \in k} x_{(i,h),l,t'}^{k'} \leq Q_c y_{(i,h),l,t'}.$$

Et en faisant la somme sur l , la somme sur h , la somme sur i et la somme sur t' , on obtient :

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{h \in H} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t-\Delta(i,h)+1}^t x_{(i,h),l,t'}^{k'} \leq Q_c \sum_{l \in r} \sum_{h \in H} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t-\Delta(i,h)+1}^t y_{(i,h),l,t'}. \quad (4.4.5.112)$$

Nous avons aussi, pour tout $l \in r$, pour tout $h \in H$, pour tout $i \in z$ tel que $\Delta_{(h,i)} > 0$ et pour tout $t' \in \llbracket t + 1, t + \Delta_{(h,i)} \rrbracket$,

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{k' \in k} x_{(h,i),l,t'-t_{(h,i)}}^{k'} \leq Q_c y_{(h,i),l,t'-t_{(h,i)}}.$$

En faisant la somme sur l , la somme sur h , la somme sur i et la somme sur t' , on obtient :

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{h \in H} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t+1}^{t+\Delta_{(h,i)}} x_{(h,i),l,t'-t_{(h,i)}}^{k'} \leq Q_c \sum_{l \in r} \sum_{h \in H} \sum_{i \in z} \sum_{t'=t+1}^{t+\Delta_{(h,i)}} y_{(h,i),l,t'-t_{(h,i)}}. \quad (4.4.5.113)$$

Enfin, pour tout $i \in S \setminus z$, pour tout $j \in z$, pour tout $l \in r$, et pour tout $t' \in \llbracket t + 1, t + \Delta_{(i,j)} \rrbracket$ tels que $\Delta_{(i,j)} > 0$,

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{k' \in k} x_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}^{k'} \leq Q_c y_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}.$$

Et en faisant les sommes sur $i \in S \setminus z$, $j \in z$, $l \in r$ et $t' \in \llbracket t + 1, t + \Delta_{(i,j)} \rrbracket$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} \sum_{k' \in k} \sum_{l \in r} \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{t'=t+1}^{t+\Delta_{(i,j)}} x_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}^{k'} \\ & \leq Q_c \sum_{l \in r} \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{i \in z'} \sum_{j \in z} \sum_{t'=t+1}^{t+\Delta_{(i,j)}} y_{(i,j),l,t'-t_{(i,j)}}. \end{aligned} \quad (4.4.5.114)$$

En faisant la somme des inégalités (4.4.5.111), (4.4.5.112), (4.4.5.113) et (4.4.5.114). Et en injectant l'égalité (4.4.5.55), on obtient :

$$\sum_{k \in K^{Ag}} q^{\theta^k} x_{(z,z),r,t}^k \leq Q_c y'_{(z,z),r,t}.$$

On peut donc en conclure que \mathcal{S}' satisfait les contraintes (4.4.3.36). Et pour les contraintes (4.4.3.38), la vérification est évidente.

Conclusion

Le vecteur \mathcal{S}' défini dans la section 4.5.1 est une solution du problème agrégé.

4.5.3 La comparaison des deux fonctions objectifs

Dans la section (4.5.1), nous avons défini un vecteur \mathcal{S}' à partir d'une solution réalisable \mathcal{S} arbitraire du problème initial. Nous avons, ensuite, démontré dans la section (4.5.2) que \mathcal{S}' définit bien une solution réalisable du problème agrégé. Nous allons démontrer dans cette section (4.5.3) le deuxième point du théorème (théorème 4.5.1). Pour ce faire, il suffit juste de démontrer que le coût engendré par la solution \mathcal{S}' (qui est définie dans la section 4.5.1) est inférieur à celui engendré par la solution \mathcal{S} du problème initial (choisie arbitrairement).

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

L'inégalité sera donc vraie pour la solution optimale du problème initial et puis que le problème agrégé est un problème de minimisation nous aurons le deuxième point du théorème. Pour les deux problèmes, l'expression de la fonction objectif est composé de cinq types de coûts. Nous allons, donc, comparer chaque type de coût dans les deux fonctions objectifs.

Le coût de transport

Dans le problème initial, le coût de transport (donné par l'égalité (3.3.4.33)) est composé de deux termes.

- Le coût de transport fluvial-ferroviaire
Il est donné par :

$$\Phi^{trans.,1} = \sum_{k \in K} \sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} x_{a,v,t}^k \right).$$

Or, l'ensemble $K' \subseteq K$, avec :

$$K' = \bigcup_{k \in K^{Ag}} \{k' \in k\}.$$

Nous avons, donc

$$\sum_{k \in K'} \sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} x_{a,v,t}^k \right) \leq \Phi^{trans.,1}. \quad (4.4.5.115)$$

De plus,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in K'} x \sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} x_{a,v,t}^k \right) \\ &= \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} \sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^{k'}: \\ t+t_a \in T^{k'}}} \Phi_{a,\theta^{k'},t}^{var} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} x_{a,v,t}^{k'} \right). \end{aligned}$$

Or, les arcs fluviaux et ferroviaires sont identiques dans les deux problèmes. Et en utilisant l'extension de la définition des variables de flot (nulles en dehors de leurs fenêtres de traitements), nous avons :

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in K'} \sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} x_{a,v,t}^k \right) \\ &= \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} \sum_{k' \in k} x_{a,v,t}^{k'} \right). \end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'expression des variables de flot de conteneurs envoyé sur les arcs fluvio-ferroviaires (donnée par l'égalité (4.4.5.46)) , nous avons :

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in K^l} \sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} x_{a,v,t}^k \right) \\ &= \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} x_{a,v,t}^{k'} \right). \end{aligned}$$

Nous avons donc, d'après l'inégalité (4.4.5.115),

$$\sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{a \in A^t \cup A^b} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_a = m_v}} x_{a,v,t}^{k'} \right) \leq \Phi^{trans.,1}. \quad (4.4.5.116)$$

- Le coût de transport routier

Dans le problème initial, ce coût est donné par :

$$\begin{aligned} \Phi^{trans.,2} &= \sum_{k \in K} \sum_{a \in A^c} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{l \in S^c} x_{a,l,t}^k \right) \\ &\geq \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} \sum_{a \in A^c} \sum_{\substack{t \in T^{k'}: \\ t+t_a \in T^{k'}}} \Phi_{a,\theta^{k'},t}^{var} \left(\sum_{l \in S^c} x_{a,l,t}^{k'} \right). \end{aligned} \quad (4.4.5.117)$$

Pour des raisons de simplicité d'écriture, nous introduisons la notation suivante :

$$\Gamma^{trans} = \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} \sum_{a \in A^c} \sum_{\substack{t \in T^{k'}: \\ t+t_a \in T^{k'}}} \Phi_{a,\theta^{k'},t}^{var} \left(\sum_{l \in S^c} x_{a,l,t}^{k'} \right). \quad (4.4.5.118)$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

En décomposant Γ^{trans} suivant le type des extrémités arcs routiers, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{trans} &= \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} \sum_{h \in H} \sum_{h' \in H} \sum_{\substack{t \in T^{k'} \\ t+t_{(h,h')} \in T^{k'}}} \Phi_{(h,h'),\theta^{k'},t}^{var} \left(\sum_{l \in S^c} x_{(h,h'),l,t}^{k'} \right) \\
&+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} \sum_{h \in H} \sum_{i \in S} \sum_{\substack{t \in T^{k'} \\ t+t_{(h,i)} \in T^{k'}}} \Phi_{(h,i),\theta^{k'},t}^{var} \left(\sum_{l \in S^c} x_{(h,i),l,t}^{k'} \right) \\
&+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in S} \sum_{h \in H} \sum_{\substack{t \in T^{k'} \\ t+t_{(i,h)} \in T^{k'}}} \Phi_{(i,h),\theta^{k'},t}^{var} \left(\sum_{l \in S^c} x_{(i,h),l,t}^{k'} \right) \\
&+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \sum_{\substack{t \in T^{k'} \\ t+t_{(i,j)} \in T^{k'}}} \Phi_{(i,j),\theta^{k'},t}^{var} \left(\sum_{l \in S^c} x_{(i,j),l,t}^{k'} \right)
\end{aligned}$$

En utilisant alors l'extension des variables de flot, en séparant les sommes sur S en deux sommes (du fait que l'ensemble des sites S est partitionné en Z) et en séparant les sommes sur S^c en deux sommes (du fait que l'ensemble de positions initiales des camions S^c est partitionné en $S^{c,Ag}$), on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{trans} &= \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{h \in H} \sum_{h' \in H} \sum_{\substack{t \in T^k \\ t+t_{(h,h')} \in T^k}} \Phi_{(h,h'),\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} x_{(h,h'),l,t}^{k'} \right) \\
&+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{h \in H} \sum_{z \in Z} \sum_{\substack{t \in T^k \\ t+t_{(h,z)} \in T^k}} \sum_{i \in z} \underbrace{\Phi_{(h,i),\theta^k,t}^{var}}_{\geq \Phi_{(h,z),\theta^k,t}^{var}} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} x_{(h,i),l,t}^{k'} \right) \\
&+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{z \in Z} \sum_{h \in H} \sum_{\substack{t \in T^k \\ t+t_{(z,h)} \in T^k}} \sum_{i \in z} \underbrace{\Phi_{(i,h),\theta^k,t}^{var}}_{\geq \Phi_{(z,h),\theta^k,t}^{var}} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} x_{(i,h),l,t}^{k'} \right) \\
&+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{z \in Z} \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{\substack{t \in T^k \\ t+t_{(z,z')} \in T^k}} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z'} \underbrace{\Phi_{(i,j),\theta^k,t}^{var}}_{\geq \Phi_{(z,z'),\theta^k,t}^{var}} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} x_{(i,j),l,t}^{k'} \right) \\
&+ \underbrace{\sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{z \in Z} \sum_{\substack{t \in T^k \\ t+t_{(z,z')} \in T^k}} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z} \Phi_{(i,j),\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} x_{(i,j),l,t}^{k'} \right)}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{trans} &\geq \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{h \in H} \sum_{h' \in H} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_{(h,h')} \in T^k}} \Phi_{(h,h'),\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} x_{(h,h'),l,t}^{k'} \right) \\
 &+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{h \in H} \sum_{z \in Z} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_{(h,z)} \in T^k}} \Phi_{(h,z),\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{k' \in k} x_{(h,i),l,t}^{k'} \right) \\
 &+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{z \in Z} \sum_{h \in H} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_{(z,h)} \in T^k}} \Phi_{(z,h),\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} \sum_{i \in z} x_{(i,h),l,t-\Delta_{(i,h)}}^{k'} \right) \\
 &+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{z \in Z} \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_{(z,z')} \in T^k}} \Phi_{(z,z'),\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{i \in z} \sum_{j \in z'} x_{(i,j),l,t}^{k'} \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les définitions des variables de flot sur les arcs routiers pour le problème agrégé qui sont données par les égalités (4.4.5.45), (4.4.5.48), (4.4.5.47) et (4.4.5.60), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{trans} &\geq \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{h \in H} \sum_{h' \in H} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_{(h,h')} \in T^k}} \Phi_{(h,h'),\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} x_{(h,h'),r,t}^{k'} \right) \\
 &+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{h \in H} \sum_{z \in Z} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_{(h,z)} \in T^k}} \Phi_{(h,z),\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} x_{(h,z),r,t}^{k'} \right) \\
 &+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{z \in Z} \sum_{h \in H} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_{(z,h)} \in T^k}} \Phi_{(z,h),\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} x_{(z,h),r,t}^{k'} \right) \\
 &+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{z \in Z} \sum_{z' \in Z \setminus \{z\}} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_{(z,z')} \in T^k}} \Phi_{(z,z'),\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} x_{(z,z'),r,t}^{k'} \right).
 \end{aligned}$$

Et puisque le coût sur les arcs fictifs associés aux zones est supposé nul (d'après sa définition donné par l'égalité (4.4.1.4)), nous avons :

$$\Gamma^{trans} \geq \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{a \in A^{c,Ag}} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} x_{a,r,t}^{k'} \right).$$

Ainsi, d'après la définition (4.4.5.118) et l'inéquation (4.4.5.117), nous avons :

$$\sum_{k \in K} \sum_{a \in A^c} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{l \in S^c} x_{a,l,t}^k \right) \geq \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{a \in A^{c,Ag}} \sum_{\substack{t \in T^k: \\ t+t_a \in T^k}} \Phi_{a,\theta^k,t}^{var} \left(\sum_{r \in S^{c,Ag}} x_{a,r,t}^{k'} \right). \quad (4.4.5.119)$$

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

Finalement, d'après les inégalités (4.4.5.116) et (4.4.5.119), nous avons :

$$\Phi^{trans.} \geq \Phi_{Ag}^{trans.}, \quad (4.4.5.120)$$

où $\Phi^{trans.}$ est donné par l'égalité (3.3.4.33) qui représente le coût de transport des conteneurs dans l'objectif du problème initial et $\Phi_{Ag}^{trans.}$ est donné par l'égalité (4.4.4.40) qui représente le coût de transport des conteneurs pour le problème agrégé.

Le coût de stockage

Pour le problème initial, le coût total de stockage est donné par l'égalité (3.3.4.34).

$$\begin{aligned} \Phi^{stock.} &= \sum_{k \in K} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{stk} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t}^k - z_{h,v,t}^k) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t}^k - z_{h,l,t}^k) \right) \\ &\geq \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{k' \in k} \sum_{t \in T^{k'}} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^{k'}, t}^{stk} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t}^{k'} - z_{h,v,t}^{k'}) + \sum_{l \in S^c} (u_{h,l,t}^{k'} - z_{h,l,t}^{k'}) \right). \end{aligned}$$

En utilisant alors l'extension de la définition des variables de flot transitant dans la plateforme multimodale (nulles en dehors de des fenêtres de traitement des demandes) et en utilisant aussi le fait que l'ensemble des positions initiales des camions pour le problème initial S^c est partitionné en $S^{c, Ag}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi^{stock.} &\geq \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{stk} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \left(\sum_{k' \in k} u_{h,v,t}^{k'} - \sum_{k' \in k} z_{h,v,t}^{k'} \right) \right) \\ &+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{stk} \left(\sum_{r \in S^{c, Ag}} \left(\sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} u_{h,l,t}^{k'} - \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} z_{h,l,t}^{k'} \right) \right). \end{aligned}$$

Alors, en utilisant la définition des variables de flot déchargé des trains et des barges pour être stocké dans les plateformes (donnée par l'égalité 4.4.5.68), la définition des variables de flot chargé sur les trains et les barges depuis le stock des plateformes (donnée par l'égalité (4.4.5.70)), la définition des variables de flot déchargé des camions pour être stocké dans les plateformes (donnée par l'égalité (4.4.5.67)) et la définition des variables de flot chargé sur les camions depuis le stock des plateformes (donnée par l'égalité (4.4.5.69)) pour le problème agrégé, on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi^{stock.} &\geq \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{stk} \left(\sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} (u_{h,v,t}^k - z_{h,v,t}^k) \right) \\ &+ \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{stk} \left(\sum_{r \in S^{c, Ag}} (u_{h,r,t}^k - z_{h,r,t}^k) \right). \end{aligned}$$

Nous avons donc finalement :

$$\Phi^{stock.} \geq \Phi_{Ag}^{stock.} \quad (4.4.5.121)$$

Le coût de manutention

Dans le problème initial, le coût total de manutention $\Phi^{man.}$ est donné par l'expression (3.3.4.35). Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \Phi^{man.} = & \sum_{k \in K} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \left(u_{h,v,t}^k + z_{h,v,t}^k + \sum_{\substack{v' \in V \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,v,v',t}^k + \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^k \right) \\ & + \sum_{k \in K} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \sum_{l \in S^c} \left(u_{h,l,t}^k + z_{h,l,t}^k + \sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^k + \sum_{\substack{v' \in V: \\ m_{v'} \in M_h}} q_{h,l,v',t}^k \right). \end{aligned}$$

Or, l'ensemble $K' = \bigcup_{k \in K^{Ag}} \{k' \in k\} \subseteq K$ et l'ensemble des positions initiales des camions S^c est partitionné en $S^{c, Ag}$. En utilisant alors l'extension de la définition des variables de flot transitant dans les plateformes multimodales, nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi^{man.} \geq & \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{k' \in k} u_{h,v,t}^{k'} \\ & + \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{k' \in k} z_{h,v,t}^{k'} \\ & + \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{\substack{v' \in V \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} \sum_{k' \in k} q_{h,v,v',t}^{k'} \\ & + \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \sum_{r \in S^{c, Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} q_{h,v,l,t}^{k'} \\ & + \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \sum_{r \in S^{c, Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} u_{h,l,t}^{k'} \\ & + \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \sum_{r \in S^{c, Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} z_{h,l,t}^{k'} \\ & + \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \sum_{r \in S^{c, Ag}} \sum_{r' \in S^{c, Ag} \setminus \{r\}} \sum_{l \in r} \sum_{l' \in r'} \sum_{k' \in k} q_{h,l,l',t}^{k'} \\ & + \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \underbrace{\sum_{r \in S^{c, Ag}} \sum_{l \in r} \sum_{l' \in r} \sum_{k' \in k} q_{h,l,l',t}^{k'}}_{= 0, \text{ d'après H2}} \\ & + \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h, \theta^k, t}^{man} \sum_{r \in S^{c, Ag}} \sum_{\substack{v' \in V: \\ m_{v'} \in M_h}} \sum_{l \in r} \sum_{k' \in k} q_{h,l,v',t}^{k'}. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant respectivement la définition des variables du flot déchargé des trains et des barges pour être stocké dans les plateformes (donnée par l'égalité (4.4.5.68)), la définition des

4.5. CONSTRUCTION D'UNE BORNE DUALE AU PROBLÈME INITIAL

variables de flot chargé sur les trains et les barges depuis le stock des plateformes (donnée par l'égalité (4.4.5.70)), la définition des variables de flot transféré dans les plateformes multimodales entre les trains et les barges (donné par l'égalité (4.4.5.71)), la définition des variables de flot transféré depuis les trains et les barges vers les camions (donnée par l'égalité (4.4.5.73)), la définition des variables de flot déchargé des camions pour être stocké dans les plateformes (donnée par l'égalité (4.4.5.67)), la définition des variables de flot chargé sur les camions depuis le stock des plateformes (donnée par l'égalité (4.4.5.69)), la définition des variables de flot transféré entre les camions dans les plateformes (donnée par l'égalité (4.4.5.74)) et la définition des variables de flot transféré dans les plateformes depuis les camions vers les trains et les barges (donnée par l'égalité (4.4.5.72)), nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi^{man.} \geq & \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h,\theta^k,t}^{man.} \sum_{\substack{v \in V^t \cup V^b: \\ m_v \in M_h}} \left(u'_{h,v,t}{}^k + z'_{h,v,t}{}^k + \sum_{\substack{v' \in V \setminus \{v\}: \\ m_{v'} \in M_h}} q'_{h,v,v',t}{}^k + \sum_{r \in S^{c,Ag}} q'_{h,v,r,t}{}^k \right) \\ & + \sum_{k \in K^{Ag}} \sum_{t \in T^k} \sum_{h \in H} \Phi_{h,\theta^k,t}^{man.} \sum_{r \in S^{c,Ag}} \left(u'_{h,r,t}{}^k + z'_{h,r,t}{}^k + \sum_{r' \in S^{c,Ag} \setminus \{r\}} q'_{h,r,r',t}{}^k + \sum_{\substack{v' \in V: \\ m_{v'} \in M_h}} q'_{h,r,v,t}{}^k \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que

$$\Phi^{man.} \geq \Phi_{Ag}^{man.}. \quad (4.4.5.122)$$

Le coût de déplacement des véhicules

Similairement à ce qu'on a fait pour le coût de transport, on montre que

$$\Phi^{d.v.} \geq \Phi_{Ag}^{d.v.}. \quad (4.4.5.123)$$

Le coût d'activation des véhicules

Ce coût est donné pour le problème initial par l'expression (3.3.4.37). Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \Phi^{ac.veh.} &= \sum_{v \in V^t \cup V^b} \sum_{t \in T} \Phi_v \alpha_{v,t} + \sum_{l \in S^c} \sum_{t \in T} \Phi_c \alpha_{l,t} \\ &= \sum_{v \in V^t \cup V^b} \sum_{t \in T} \Phi_v \alpha_{v,t} + \sum_{r \in S^{c,Ag}} \sum_{t \in T} \Phi_c \sum_{l \in r} \alpha_{l,t}. \end{aligned}$$

En injectant alors la définition des variables d'activation des camions dans le problème agrégé (donnée par l'égalité (4.4.5.64)), on obtient :

$$\Phi^{ac.veh.} = \Phi_{Ag}^{ac.veh.} \geq \Phi_{Ag}^{ac.veh.}. \quad (4.4.5.124)$$

Nous pouvons alors conclure, en faisant la somme des inégalités (4.4.5.120), (4.4.5.121), (4.4.5.122), (4.4.5.123) et (4.4.5.124) que la fonction objectif du problème agrégé est inférieure à celle du problème initial. \square

4.6 Construction d'une borne primale

Dans la section précédente, nous avons construit une borne duale du PGFCVRM à partir du modèle agrégé. En-effet, il a été montré que toute solution réalisable du modèle initial induit une solution réalisable du modèle agrégé de coût inférieur, en particulier c'est vrai pour la solution optimale et puisque le problème agrégé est un problème de minimisation, la solution optimale du problème agrégé est inférieure ou égale à la solution optimale du problème initial. Nous pouvons donc en déduire que toute borne duale du problème agrégé est une borne duale aussi pour le problème initial.

Cependant, toute solution réalisable du problème agrégé n'est pas une solution réalisable du problème initial. Nous allons présenter dans cette section une technique d'obtention d'une solution réalisable au problème initial à partir d'une solution du modèle agrégé, ainsi nous aurons une borne primale (borne supérieure de la valeur optimale du problème initial).

Pour une instance initiale donnée, supposons que nous avons la solution du problème agrégé correspondant. À partir de cette solution nous allons rajouter des égalités au modèle initial qui rendent le problème plus facile à résoudre et par conséquent la solution obtenue constitue une solution réalisable à notre problème initial.

À partir de la solution du problème agrégé, si nous fixons les décisions liées aux trains, aux barges et au réseau routiers entre les plateformes multimodales, nous aurons les égalités suivantes.

4.6.1 Égalités induites par les variables associées aux trains et aux barges

Pour toute demande $k \in K^{Ag}$, pour tout arc $a \in A^t \cup A^b$, pour tout $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout $t \in T^k$, avec $m_a = m_v$, on rajoute l'égalité suivante :

$$\sum_{k' \in k} x_{a,v,t}^{k'} = x'_{a,v,t}, \quad (4.4.6.125)$$

et pour tout arc $a \in V^t \cup V^b$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$, pour tout instant $t \in T$, avec $m_a = m_v$ et $t + t_a \in T$, on rajoute la contrainte :

$$y_{a,v,t} = y'_{a,v,t}. \quad (4.4.6.126)$$

On fixe aussi les variables d'activation et de libération des trains et des barges. Nous avons ainsi, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout instant $t \in T$, on pose :

$$\alpha_{v,t} = \alpha'_{v,t}, \quad \text{et} \quad \beta_{v,t} = \beta'_{v,t}, \quad (4.4.6.127)$$

et pour toute catégorie dangereuse $\theta \in \Theta^{MD}$, on pose :

$$\gamma_{v,t}^\theta = \gamma'_{v,t}^\theta. \quad (4.4.6.128)$$

4.6.2 Égalités induites par les variables associées aux camions

Pour tout arc $a \in A^{c,HH}$, pour toute demande agrégée $k \in K^{Ag}$ et pour tout instant $t \in T^k$, on rajoute l'égalité :

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in S^c} x_{a,l,t}^{k'} = \sum_{r \in S^c, Ag} x_{a,r,t}^{k'} \quad (4.4.6.129)$$

Et pour les variables d'activation des camions sur les arcs, nous rajoutons les égalités suivantes : pour tout arc $a \in A^{c,HH}$, et pour tout instant $t \in T$,

$$\sum_{l \in S^c} y_{a,l,t} = \sum_{r \in S^c, Ag} y'_{a,r,t} \quad (4.4.6.130)$$

4.6.3 Égalités induites par les variables de flot transitant dans les plateformes multimodales

Pour toute demande agrégée $k \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, pour tout véhicule $v \in V^t \cup V^b$ et pour tout instant $t \in T^k$, avec $m_v \in M_h$, on rajoute l'égalité :

$$\sum_{k' \in k} u_{h,v,t}^{k'} = u_{h,v,t}^{k'} \quad (4.4.6.131)$$

et

$$\sum_{k' \in k} z_{h,v,t}^{k'} = z_{h,v,t}^{k'} \quad (4.4.6.132)$$

Et pour les camions, nous pouvons rajouter les égalités suivantes.

Pour toute demande $k' \in K^{Ag}$, pour toute plateforme $h \in H$, et pour tout instant $t \in T^k$, on pose

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in S^c} u_{h,l,t}^{k'} = \sum_{r \in S^c, Ag} u_{h,r,t}^{k'} \quad (4.4.6.133)$$

et

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in S^c} z_{h,l,t}^{k'} = \sum_{r \in S^c, Ag} z_{h,r,t}^{k'} \quad (4.4.6.134)$$

Finalement, pour les variables de flot transféré entre les trains, les barges et les camions dans les plateformes multimodales, nous pouvons rajouter les égalités suivantes :

$\forall k \in K^{Ag}, \forall h \in H, \forall v, v' \in V^t \cup V^b, \forall t \in T^k$, avec $v \neq v'$ et $m_v, m_{v'} \in M_h$,

$$\sum_{k' \in k} q_{h,v,v',t}^{k'} = q_{h,v,v',t}^{k'} \quad (4.4.6.135)$$

$\forall k \in K^{Ag}, \forall h \in H, \forall v \in V^t \cup V^b, \forall t \in T^k$, tels que $m_v \in M_h$,

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in S^c} q_{h,v,l,t}^{k'} = \sum_{r \in S^c, Ag} q_{h,v,r,t}^{k'} \quad (4.4.6.136)$$

et

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in S^c} q_{h,l,v,t}^{k'} = \sum_{r \in S^c, Ag} q_{h,r,v,t}^{k'} \quad (4.4.6.137)$$

Finalement, nous pouvons aussi rajouter l'égalité suivante :

$$\forall k \in K^{Ag}, \forall h \in H, \forall t \in T^k, \quad (4.4.6.138)$$

$$\sum_{k' \in k} \sum_{l \in S^c} \sum_{l' \in S^c \setminus \{l\}} q_{h,l,l',t}^{k'} = \sum_{r \in S^c, Ag} \sum_{r' \in S^c, Ag \setminus \{r\}} q_{h,r,r',t}^{k'}$$

Notons bien que si on rajoute l'ensemble des égalités (4.4.6.125), (4.4.6.126), (4.4.6.127), (4.4.6.128), (4.4.6.129), (4.4.6.130), (4.4.6.131), (4.4.6.132), (4.4.6.133), (4.4.6.134), (4.4.6.135), (4.4.6.136), (4.4.6.137) et (4.4.6.138), nous pouvons perdre la réalisabilité pour le problème initial, même si on suppose que nous avons suffisamment de camions. En effet, nous pouvons retomber sur des situations où une quantité de flot d'une demande initial k arrive dans un train ou une barge v à une plateforme h à un instant t , avec

$$t_{max}^k - t < t_{(h,D^k)},$$

où D^k est le site destination de la demande k ; bien que le scénario était réalisable dans le problème agrégé si la destination de cette demande est une zone z^{D^k} avec :

$$t_{(h,z^{D^k})} \leq t_{max}^k - t < t_{(h,D^k)}, \quad (\Delta_{(h,D^k)} > 0).$$

Ce qui représente une violation du respect de la fenêtre de traitement de cette demande en arrivant plus tard. Le même scénario est possible aussi au niveau de l'origine de cette demande.

En revanche, en supposant que nous avons suffisamment de camions pour transporter tous les conteneurs, en rajoutant uniquement les égalités (4.4.6.125), (4.4.6.126) et (4.4.6.127), on est certain d'avoir une solution réalisable au problème initial et donc l'obtention d'une borne primale.

4.7 Proposition d'une solution pour le problème de zonage

Dans la construction du réseau agrégé, nous avons considéré que les sites représentant les nœuds du réseau initial routier sont répartis dans des zones industrielles données. En revanche nous pouvons définir un problème d'optimisation pour définir une meilleure répartition de ces sommets et permettant de satisfaire l'hypothèse 2.

Nous pouvons transformer le graphe orienté qui représente le réseau routier initial (présenté dans la section 3.1.4) en un graphe non orienté simple. Les informations utiles sur les arcs sont uniquement les coûts fixes et ceux variables associés à ces arcs. On note ainsi

$$G_0 = (S_0, A_0),$$

avec :

- $S_0 = S \setminus H$ l'ensemble de sites uni-modaux,
- et A_0 est un ensemble d'arêtes construites à partir de l'ensemble des arcs $A^c \setminus A_f^c$ (ensemble des arcs routiers non fictifs du réseau initial) de la manière suivante.

Pour toute instance initiale, on définit le paramètre suivant :

$$\Phi = \min_{(h,\theta,t) \in H \times T \times \Theta} \Phi_{h,\theta,t},$$

qui représente le coût minimal de manutention pour les plateformes multimodales. Et pour tout $\{i, j\} \in S$ (avec $i \neq j$), on note :

$$\Phi_{\{i,j\}} = \max_{t \in T} \{ \Phi_{(i,j),t}^{fix}, \Phi_{(j,i),t}^{fix} \}.$$

Nous définissons ainsi une structure de connectivité pour le problème de partitionnement :

$$\{i, j\} \in A_0 \text{ ssi } \{(i, j) \in A^c \setminus A_f^c : \Phi_{\{i,j\}} \leq \Phi\}.$$

Ainsi, pour tout $i, j \in S$, si $\{i, j\} \in A_0$, alors il est plus cher de transférer un conteneur d'un camion à un autre dans une plateforme multimodale que le déplacement d'un camion vide entre les sites i et j .

En considérant le graphe G_0 , défini dans la sous section précédente, on note \bar{G}_0 le graphe complémentaire de G_0 . Alors, le problème de zonage n'est autre que le problème de coloration du graphe \bar{G}_0 . En effet, en associant une zone à chaque couleur, la structure de connectivité qu'on vient de définir, justifie l'hypothèse 2.

4.8 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons des résultats numériques afin de tester l'apport du modèle agrégé et des bornes qui en sont déduites. Nous avons construit dans le chapitre précédent des instances pour tester le modèle initial ; sauf qu'elles ne satisfont pas les hypothèses H1 et H2. Nous allons alors, construire des nouvelles instances qui satisfont ces hypothèses (le déplacement d'un camion dans une zone industrielle coûte moins cher que le coût de manutention au niveau des plateformes multimodales).

4.8.1 Génération et présentation des instances

Instance Ag1

Cette instance est de petite taille et sert principalement à tester l'apport des méthodes proposées dans ce chapitre et elle est générée aléatoirement. Le tableau suivant donne les grandeurs qui définissent la taille de l'instance.

$ S $	$ H $	$ Z $	$ S^c $	$ A^c $	$ A^t $	$ A^b $	$ D $	$ \Theta^{MD} $	$ \Theta $	$ T $	N_{S^c}	$ V^t $	$ V^b $	Φ^c	Q_c
6	2	2	3	36	4	4	8	0	3	20	600	2	2	200	2

Remarquons que par rapport au types des instances présentées dans la section 3.5.1 du chapitre précédent, nous avons une nouvelle grandeur $|Z|$ qui représente le nombre de zones industrielles. Nous avons donc, pour cette instance, deux zones dont chacune contient deux sites uni-modaux. Les autres types de grandeurs sont présentés dans la section 3.5.1.

Instance Ag2 (Application à l'Axe Seine)

Supposons que nous avons 10 demandes à livrer dans 48 heures dont les origines et destinations sont réparties dans 5 zones industrielles.

CHAPITRE 4. MODÈLE AGRÉGÉ ET BORNES (PRIMALE ET DUALE)

- Une zone au Havre et ses alentours qui contient 3 sites uni-modaux dont 2 représentent des positions initiales pour les camions (123 camions dans le premier et 116 dans le second).
- Une zone à Rouen et ses alentours qui contient deux sites dont l'un d'entre eux est une position initiale de 119 camions.
- Deux zones en Île-de-France dont la première contient trois sites uni-modaux et la deuxième contient quatre. La première zone contient une position initiale de 124 camions et la seconde contient une position initiale de 118 camions (rappelons que tous ces chiffres sont générés aléatoirement en l'absence de données réelles).
- Et une zone à Caen qui contient un seul site uni-modal.

La répartition des sites dans les zones industrielles est présenté dans la figure 4.8.1.

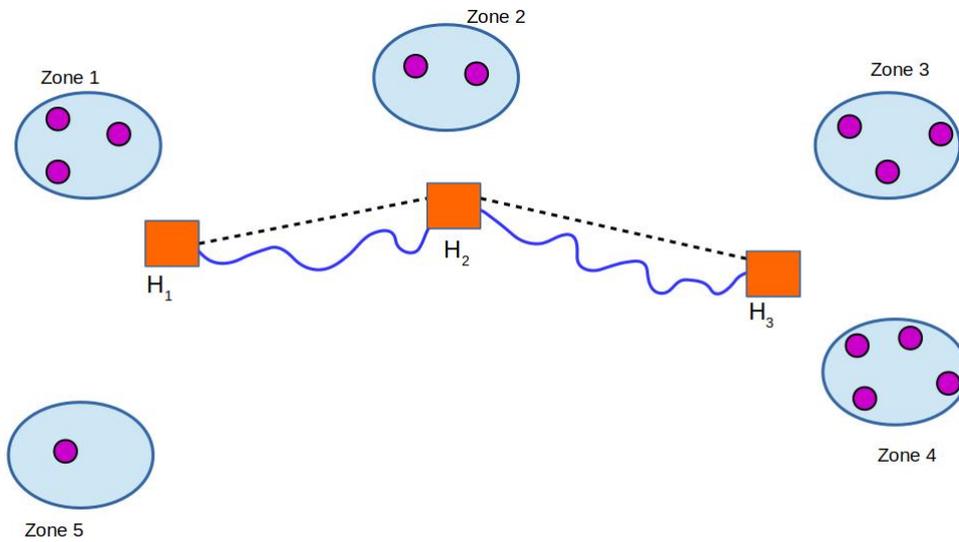


FIGURE 4.8.1 – Répartition des sites dans les zones industrielles pour l'instance Ag 2

Nous avons aussi trois plateformes multimodales connectées aux trois modes de transport. La taille de l'instance est donnée par le tableau suivant :

$ S $	$ H $	$ Z $	$ S^c $	$ A^c $	$ A^t $	$ A^b $	$ D $	$ \Theta $	$ T $	N_{S^c}	$ V^t $	$ V^b $	Φ^c	Q_c
16	3	5	5	256	7	7	10	3	48	600	2	2	200	2

Les quantités des demandes ainsi que leurs origines, leurs destinations, leurs fenêtres de traitement et leurs catégories sont données par le tableau suivant :

demande	indiceOrig	indiceDest	t_{min}	t_{max}	catégorie	quantité	q
d_1	s_1	s_2	2	20	1	31	1
d_2	s_2	s_{13}	5	24	2	145	1.4
d_3	s_3	s_8	4	40	3	152	2
d_4	s_5	s_{11}	7	46	1	69	1
d_5	s_6	s_3	10	39	2	118	1.4
d_6	s_9	s_4	12	40	3	147	2
d_7	s_{10}	s_5	8	45	1	99	1
d_8	s_{11}	s_5	10	42	2	88	1.4
d_9	s_{12}	s_4	7	32	3	88	2
d_{10}	s_{12}	s_5	10	42	1	35	1

Instance Ag3 (Application à l'Axe Seine)

Nous gardons la même structure de l'instance précédente en rajoutant une zone industrielle de plus, deux demandes de plus et neuf sites uni-modaux de plus.

- Une zone au Havre et ses alentours qui contient 4 sites uni-modaux dont 2 représentent des positions initiales pour les camions (205 camions dans le premier et 193 dans le second).
- Une zone à Rouen et ses alentours qui contient trois sites dont l'un d'entre eux est une position initiale de 197 camions.
- Trois zones en Île-de-France dont la première contient cinq sites uni-modaux, la deuxième contient trois et la troisième contient quatre. La première zone contient une position initiale de 202 camions, la troisième contient une position initiale de 203 camions.
- Et une zone à Caen qui contient un trois sites uni-modaux.

Nous avons les mêmes plateformes multimodales présentées dans l'instance précédente. La taille de l'instance est donnée par le tableau suivant :

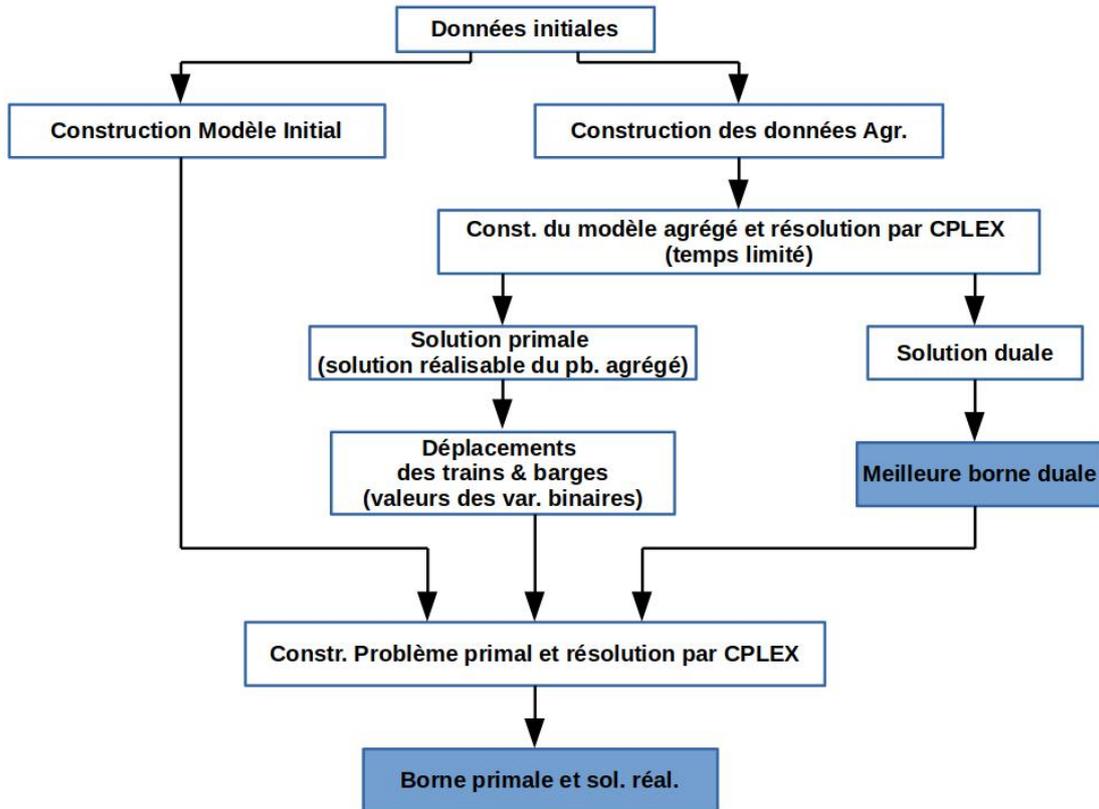
$ S $	$ H $	$ Z $	$ S^c $	$ A^c $	$ A^t $	$ A^b $	$ D $	$ \Theta $	$ T $	N_{Sc}	$ V^t $	$ V^b $	Φ^c	Q_c
25	3	6	5	625	7	7	12	3	48	1000	2	2	200	2

Les quantités des demandes ainsi que leurs origines, leurs destinations, leurs fenêtres de traitement et leurs catégories sont données par le tableau suivant :

demande	indiceOrig	indiceDest	t_{min}	t_{max}	catégorie	quantité	q
d_1	s_1	s_2	2	20	1	25	1
d_2	s_2	s_{14}	5	24	2	73	1.4
d_3	s_3	s_8	4	40	3	59	2
d_4	s_5	s_{17}	7	46	1	74	1
d_5	s_6	s_{19}	10	39	1	77	1
d_6	s_9	s_4	12	40	3	133	2
d_7	s_{10}	s_5	8	45	3	120	2
d_8	s_{11}	s_5	10	42	2	158	1.4
d_9	s_{12}	s_7	7	32	2	168	1.4
d_{10}	s_{16}	s_{21}	10	42	1	112	1
d_{11}	s_{19}	s_{22}	5	40	1	150	1
d_{12}	s_{20}	s_3	8	38	2	20	1.4

4.8.2 Résultats numériques

Nous désignons par modèle initial le modèle présenté dans le chapitre 3, le modèle agrégé celui présenté dans les quatre premières sections du chapitre 4, le modèle primal par le modèle initial avec le rajout de la meilleure borne duale du problème agrégé et la fixation des variables binaires donnée par les égalités (4.4.6.125), (4.4.6.126) et (4.4.6.127). À l'aide de ce problème primal, nous allons avoir des solutions de notre problème initial dont on évaluera la qualité. Ainsi, L'approche bi-niveaux pour la résolution des grandes instances est donnée par le schéma suivant.



Instance Ag1

Pour cette instance (qui est juste une instance test), nous présentons les résultats pour les deux modèles : initial et agrégé. Elle est de petite taille et on arrive à la résoudre d'une manière efficace avec seulement le modèle initial. L'approche de résolution ne sera pas testée sur cette instance. Le but est de voir juste le pourcentage de réduction du problème pour une instance simple.

- **Modèle initial**

Après la réduction de CPLEX, nous avons pour cette instance 4615 contraintes, 14420 variables entières et 350 variables binaires. Après les 2000 secondes, le solveur n'arrive pas à résoudre exactement cette instance. Il s'arrête avec un gap de 0.06% avec 839163 nœuds exploités dans l'arbre de branchement et 5682,82 MB de mémoire utilisée. La valeur de l'objectif pour la meilleure solution obtenue est 225313.

- **Modèle agrégé**

Dans le problème agrégé, nous avons 2692 contraintes (soit une réduction de 41%), 7645

(soit une réduction de 47%) variables entières et 350 variables binaires. Une solution à l'optimum est obtenu au bout de 3,88 secondes avec 10497 nœuds exploités dans l'arbre de branchement et 3,31 MB de mémoire utilisée. La valeur de l'objectif à l'optimum est 101239.

Instance Ag2

Les résultats sont présentés pour les différents modèles. Pour cette instance, le temps de résolution est limité à 1500 secondes pour les deux modèles agrégé et primal et à 1600 secondes (environ 27 minutes) pour le modèle initial.

- **Modèle initial**

Après la réduction de CPLEX, nous avons pour cette instance 88666 contraintes, 389535 variables entières et 1374 variables binaires. Pour résoudre la relaxation linéaire du problème, le solveur a besoin de 901,35 secondes. Après les 1600 secondes (limitation du temps), le solveur n'arrive pas à résoudre exactement cette instance. Il s'arrête avec un gap de 49,35% sans aucun nœud exploité dans l'arbre de branchement. La valeur de l'objectif pour la meilleure solution obtenue est 683689€.

Et si nous limitons le temps à 3000 secondes (environ 50 minutes) au lieu de 1600, la meilleure valeur de l'objectif est 391268€ avec un gap de 11%, 13 nœuds exploités dans l'arbre de branchement et 0,01 MB de mémoire utilisé.

Si nous exigeons que le flot de conteneurs emprunte le réseau routier uniquement, la valeur de l'objectif est 485201€ (avec un gap de 0,37% seulement).

- **Modèle agrégé**

Dans le problème agrégé, nous avons 27960 contraintes (soit une réduction de 68,46%), 102537 variables entières (soit une réduction de 73,67%) et 1345 variables binaires. La solution de la relaxation linéaire est obtenue au bout de 53,32 secondes. Au bout de 500 secondes, une solution à l'optimum n'est toujours pas obtenue. En revanche le gap de la meilleure solution obtenue vaut 7,58% avec 116 nœuds exploités dans l'arbre de branchement et 6,56 MB de mémoire utilisée. La valeur de l'objectif pour la meilleure solution est 336575€. Ainsi, La meilleure borne duale obtenue est 311076€.

- **Modèle primal**

Le problème primal compte 82166 contraintes, 344242 variables entières et 0 variables binaires. Une solution de la relaxation linéaire est obtenue au bout de 721,41 secondes. Au bout de 1000 secondes, la meilleure valeur de l'objectif du problème primal pour cette instance est 369584€ (le gap avec la meilleure borne duale obtenue à partir du modèle agrégé est de 23,13%) avec 88 nœuds exploités dans l'arbre de branchement et 3,08 MB de mémoire utilisée.

En conclusion, pour cette instance, avec l'approche bi-niveau nous arrivons à résoudre cette instance en 1500 secondes avec un objectif qui vaut 369584€ et un gap réel (gap calculé entre la valeur de l'objectif de la solution du modèle primal et la meilleure borne duale donné par le modèle initial) égale à 5,77%. Alors que même dans 3000 secondes, la solution donné par le modèle initial est toujours de mauvaise qualité (l'objectif est égale à 391268€ et le gap est égale à 11%).

Instance Ag3

Pour cette instance, nous ne limitons pas le temps de calcul.

- **Modèle initial**
Après la réduction de CPLEX, nous avons pour cette instance 186911 contraintes, 998720 variables entières et 1362 variables binaires. La solution de la relaxation linéaire du problème n'est obtenue qu'au bout de 8639 secondes (environ 2 heures et 23 minutes). En revanche, après 20 heures de calculs, le gap est toujours supérieure à 34%. Et la meilleure valeur de l'objectif est 674609€.
- **Modèle agrégé**
Nous avons 34612 contraintes (soit une réduction de 81,48%), 134382 variables entières (soit une réduction de 86.54%) et 1331 variable binaire. Une solution de la relaxation linéaire est obtenu en 105 secondes. Au bout de 500 secondes, une solution à l'optimum n'est toujours pas obtenue. En revanche le gap de la meilleure solution obtenue vaut 13.41% (qui est toujours une solution multimodale) avec 48 nœuds exploités dans l'arbre de branchement et 8,68 MB de mémoire utilisée. La valeur de l'objectif pour la meilleure solution est 446981€. Ainsi, La meilleure borne duale obtenue est 387040€.
- **Modèle primal**
Le problème primal compte 179039 contraintes, 942470 variables entières et 0 variables binaires. Une solution de la relaxation linéaire est obtenue au bout de 7037 secondes (environ 2 heures). Au bout de 9334 secondes, CPLEX arrive à trouver 42 solutions dont la meilleure valeur de l'objectif est 481109€ (le gap avec la meilleure borne duale obtenue à partir du modèle agrégé est de 19,5%) avec 30 nœuds exploités dans l'arbre de branchement et 7,34 MB de mémoire utilisée.

En conclusion, pour cette instance, avec l'approche bi-niveau nous arrivons à résoudre cette instance en 2 heures et 43 minutes avec un objectif qui vaut 481109€ et un gap réel (gap calculé entre la valeur de l'objectif de la solution du modèle primal et la meilleure borne duale donné par le modèle initial) égale à 7.48%. Alors que même dans plus de 20 heures, la solution donné par le modèle initial est toujours de mauvaise qualité (l'objectif est égale à 674609€ et le gap est égale à 34%).

D'après la résolution de ces instances (Ag 2 et Ag 3), nous remarquons bien que pour les instances de taille importante, il est plus avantageux (en terme du rapport temps de calcul/qualité de la solution) de passer par le modèle agrégé et l'heuristique donnée par la problème primal (ou l'approche bi-niveau présentée dans ce chapitre) que de résoudre le modèle initial proposé dans le chapitre précédent.

4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons, tout d'abord, construit un modèle mathématique agrégé qui s'intéresse au problème au niveau macroscopique. Nous avons démontré le théorème 4.5.1 qui nous a permis d'obtenir une borne duale de notre problème initial. Nous avons ensuite proposé une méthode de construction d'une borne primale à partir d'une solution du problème agrégé et du modèle initial. Ensuite, nous avons réalisé des test numériques sur des instances générées aléatoirement afin de tester les méthodes de résolution proposées. Nous avons ainsi comparé les trois modèles mathématiques (modèle initial qui est présenté dans le chapitre 3, modèle agrégé qui est présenté au début de ce chapitre et modèle primal qui n'est autre que le modèle initial avec le rajout de la borne duale et des fixations des variables binaires données par les égalités (4.4.6.125), (4.4.6.126) et (4.4.6.127)). Pour les instances de petites tailles, nous pouvons nous

contenter de la résolution du modèle initial. Par contre, pour les instances de taille importante (Instance Ag2 et Instance Ag3), nous remarquons la difficulté de ce modèle initial à trouver des solutions optimales d'où la nécessité du modèle agrégé qui nous a permis de réduire la taille du problème et le résoudre d'une manière efficace. Les résultats numériques prouvent l'efficacité de notre modèle agrégé et l'avantage de la résolution du problème primal.

CHAPITRE 5

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous avons effectué tout d'abord un état de l'art sur le transport de marchandises conteneurisées. Nous pouvons conclure de cette étude bibliographique que l'aspect multimodal du transport de conteneurs n'a pas été pris en considération dans la plupart des cas sur un niveau de décision opérationnel. En effet, le niveau décisionnel de toutes les études que nous avons rencontrées se limite au mode routier bien que certaines d'entre elles intègrent l'aspect multimodal du transport tout en considérant que les horaires et trajets des véhicules (autres que les camions) sont prédéfinis. De plus, sur le niveau opérationnel, les modèles mathématiques existants, n'arrivent à traiter d'une manière exacte qu'un nombre assez restreint de conteneurs. Ceci est dû, non seulement à la complexité du problème au niveau opérationnel, mais aussi au fait que dans la plupart des modèles, nous rencontrons des variables binaires associées aux conteneurs (qui peuvent avoir plusieurs types selon les cas). Ce qui fait exploser les dimensions des polyèdres définissant les ensembles de solutions.

Nous avons, ensuite, proposé un modèle mathématique réaliste qui prend en considération les différents aspects liés au transport et au stockage des conteneurs. L'objectif de notre modèle est de minimiser le coût global de transport de conteneurs (coût de transport, de stockage et de manutention) tout en assurant une gestion optimale (en terme de coût) de l'ensemble de véhicules (camions, trains et barges). Nous avons considéré, dans ce modèle, plusieurs contraintes. Tout d'abord, nous devons satisfaire les demandes entre les sites (origines et destination des demandes) et pour chaque demande, nous devons respecter une fenêtre de temps pour la prise en charge et une fenêtre de temps pour la livraison. Nous respectons aussi la capacité des arcs en nombre de véhicules qui dépend du temps (la circulation peut être limitée ou même arrêtée sur certains arcs). De plus, au niveau des plateformes multimodales, nous avons une capacité de stockage et une productivité limitée. On considère aussi des contraintes supplémentaires dues à l'incompatibilité entre marchandises exigées par la réglementation en vigueur. Ce modèle peut montrer aux transporteurs le gain potentiel en se partageant les ressources fluviales et ferroviaires. Il peut être utilisé par les décideurs pour choisir l'acheminement des marchandises à travers les différentes plateformes.

Dans le modèle mathématique initial, nous avons considéré que le réseau routier est complet et que le nombre de camions est de l'ordre de grandeur du nombre de conteneurs à transporter. Nous nous sommes intéressés aussi à l'application de notre modèle sur l'axe Seine. Nous parlons donc, de l'hypothèse que l'ensemble des sites est partitionné dans des zones industrielles, malgré que le problème de zonage de nos instances pourra être traité dans un niveau d'étude tactique ou même stratégique. Nous nous sommes alors, intéressés au problème au niveau macroscopique (contracter le réseau départ en un réseau moins dense et alléger par conséquent la taille du problème en allégeant le nombre de demandes à traiter en condensant la répartition des camions). Nous avons donc construit un modèle mathématique agrégé qui prend en considération les principales spécificités du problème et nous avons montré certains liens entre les deux modèles mathématiques (toute solution du problème initial, induit une solution du problème agrégé ; et la fonction objectif du problème agrégé est inférieure à celle du problème initial). À l'aide donc de ce problème agrégé, on obtient une borne duale de notre problème. On a construit également une borne primale de notre problème à partir de ce même modèle agrégé. Pour les instances de petites tailles, nous pouvons nous contenter de la résolution du modèle initial. Par contre, pour les instances de taille importante, nous remarquons la difficulté de ce modèle initial à trouver des solutions optimales d'où la nécessité du modèle agrégé qui nous a permis de réduire la taille du problème et le résoudre d'une manière efficace. Les résultats numériques prouvent l'efficacité de notre modèle agrégé et l'avantage de la résolution du problème primal (défini par le modèle initial et la technique de fixation de variables binaires à leurs valeurs obtenues en résolvant le problème agrégé).

Nous donnons, en perspectives, quelques directions pour la poursuite de nos recherches. Une première étape serait une résolution des instances réelles de grande taille. Et s'il y a une nécessité, réduire encore la taille du problème primal qui permet l'obtention de la borne supérieure de notre modèle de base. En effet, nous avons fixé les variables liées au flot de véhicules sur le réseau fluvio-ferroviaires, et si nous arrivons à fixer aussi les variables de flot de conteneurs transportés dans ces véhicules (à l'aide des égalités proposées dans la section 4.6), le problème deviendra encore plus facile. La difficulté se pose surtout à la formulation d'une nouvelle hypothèse justifiable sur les fenêtres de traitement des demandes sans perdre de solutions intéressantes du problème agrégé. Il sera aussi intéressant d'intégrer l'aspect environnemental (soit dans l'objectif en rajoutant au coût fixe d'utilisation des arcs routiers un coût environnemental, soit à l'aide de contraintes limitant la distance totale parcourue par les camion).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Wen Fei Wang, Won Young Yun. Scheduling for inland container truck and train transportation. *Int. J. Production Economics*, (june 2013), volume 143, issue 2 pages 349–356.
- [2] Bock, Stefan. Real-time control of freight forwarder transportation networks by integrating multimodal transport chains, *European Journal of Operational Research*, (february 2010), volume 200, issue 3, pages 733-746.
- [3] Zhang, Ruiyou and Yun, Won Young and Moon, Il Kyeong. Modeling and optimization of a container drayage problem with resource constraints, *International Journal of Production Economics*, (september 2011), volume 133, issue 1, pages 351-359.
- [4] Tsung-Sheng Chang. Best routes selection in international intermodal networks, *Computers and Operations Research* (september 2008), volume 35, issue 9, pages 2877-2891.
- [5] Caris, A. and Janssens, G.K. A local search heuristic for the pre- and end-haulage of intermodal container terminals, *Computers & Operations Research*, (October 2009), volume 36, issue 10, pages 2763-2772.
- [6] Julia Funke, Herbert Kopfer. A model for a multi-size inland container transportation problem. *Transportation Research Part E 89 : Logistic and Transportation review*, (May 2016), volume 89, pages 70–85.
- [7] Moccia, Luigi and Ropke, Stefan and Valentini, Maria Pia. Modeling and solving a multi-modal routing problem with flexible-time and schedules services, *Networks* (2011), 57(1), pages 53-68.
- [8] Hong Chen, Kevin Cullinane, Nan Liu. Developing a model for measuring the resilience of a port-hinterland container transportation network. *Transportation Research Part E 97 : Logistic and Transportation review*, (January 2017), volume 97, pages 282–301.
- [9] Akio Imaia, Koichi Shintanib, Stratos Papadimitriouc. Multi-port vs. Hub-and-Spoke port calls by containerships. *Transportation Research Part E : Logistic and Transportation review*, (September 2009), issue 5, volume 45, pages 740–757.
- [10] Nossack, Jenny and Pesch, Erwin. A truck scheduling problem arising in intermodal container transportation, *European Journal of Operational Research*, (November 2013), volume 230, issue 3, pages 666-680.
- [11] Ferrari, Paolo. The dynamics of modal split for freight transport, *Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review*, (October 2014), volume 70, 163-176.

- [12] E. Kozan and P. Preston. Genetic algorithms to schedule container transfers at multimodal terminals, *International Transactions in Operational Research*, (May 1999), volume 6, issue 3, pages 311-329.
- [13] Crainic Teodor, Dejax Pierre. Le transport terrestre multimodal des conteneurs maritimes : une démarche de planification, *Centre de recherche sur les transports (Montréal, Québec)* 1991.
- [14] Omar Dib, Marie-Ange Manier, and Alexandre Caminada. Memetic algorithm for computing shortest paths in multimodal transportation networks. *Transportation Research Procedia*, (2015), volume 20, pages 745-755.
- [15] Erhan Kozan. Container Transfer Logistics at Multimodal Container Terminals, *School of Mathematical Sciences, Queensland University of Technology*, 2003.
- [16] Issmail Elhallaoui, Guy Desaulniers, Abdelmoutalib Metrane, François Soumis. Bi-dynamic constraint aggregation and subproblem reduction, *Computers & Operations Research*, (May 2008), volume 35, issue 5, pages 1713 – 1724.
- [17] Pascal Benchimol, Guy Desaulniers, Jacques Desrosiers. Stabilized dynamic constraint aggregation for solving set partitioning problems *European Journal of Operational Research*, (December 2012), volume 223, issue 2, pages 360–371.
- [18] Koichi Shintania, Rob Koningsb, Akio Imaic. The impact of foldable containers on container fleet management costs in hinterland transport, *Transportation Research Part E 46 : Logistic and Transportation review*, (September 2010), volume 46, issue 5, pages 750–763.
- [19] Ruiyou Zhang, Won Young Yun, Herbert Kopfer. Heuristic-based truck scheduling for inland container transportation, *OR spectrum*, (January 2010), volume 32, no 3, p. 787-808.
- [20] Zhi-Hua Hu. A container multimodal transportation scheduling approach based on immune affinity model for emergency relief. *Expert Systems with Applications*, (March 2011), volume 38, issue 3, pages 2632–2639.
- [21] Jean-François Cordeau, Federico Pasin, Marius M. Solomon. An integrated model for logistics network design. *Annals of Operational Research*, (2006), volume 144, no 1, p. 59-82.
- [22] B.S. Boardman, E.M. Malstrom, D.P. Butler and M.H. Cole. Computer assisted routing of intermodal shipments *Computers & Industrial Engineering*, (October 1997), Volume 33, Issues 1–2, Pages 311-314.
- [23] Frank Southworth, Bruce E. Peterson Intermodal and international freight network modeling *Transportation Research*, (2000), Volume 8, Issues 1–6, Pages 147-166.
- [24] Yulong Zhao Intermodal and international freight network modeling *Thèse de doctorat*, Université de Nantes (2017).
- [25] Projet-Devport <http://www.projet-devport.fr/>
- [26] <http://www.haropa-solutions.com/>
- [27] https://fr.wikiversity.org/wiki/Approche_géostratégique_des_espaces_maritimes_d'aujourd'hui/Routes_commerciales.

Résumé

Le but de ce travail est l'étude du problème de gestion de flot de conteneurs et de véhicules dans un réseau multimodal. Nous proposons une formulation du problème sous forme d'un modèle mathématique réaliste qui prend en considération les différents aspects liés au transport et au stockage des conteneurs et dont l'objectif est de minimiser le coût global de transport. Pour la résolution des grandes instances une approche de résolution bi-niveaux est proposée. Dans un premier niveau nous construisons un modèle agrégé plus facile à résoudre pour en extraire les décisions liées aux déplacements des trains et des barges ainsi qu'une borne duale de notre problème de base. Ces informations sont utilisées dans un deuxième niveau pour avoir des solutions de bonne qualité de notre problème par rapport aux solutions données par CPLEX en résolvant directement le modèle de base. Des résultats numériques sur des instances générées aléatoirement sont présentés et ils prouvent l'intérêt de l'approche de résolution proposée dans cette thèse.

Mots clés : transport des conteneurs, transport multimodal, multi-flots, gestion des plateformes multimodales, routage de véhicules, gestion de flot, agrégation

Abstract

The aim of this work is the study of the problem of managing the flow of containers and vehicles in a multimodal network. We propose a formulation of the problem under the form of a realistic mathematical model that takes into account the different aspects related to container transport and storage and whose objective is to minimize the overall cost of transport. For large-scale resolution, a two-level resolution approach is proposed. In a first level we build an aggregated model easier to solve to extract the decisions related to the movements of trains and barges as well as a dual terminal of our basic problem. This information is used in a second level to have good quality solutions of our problem compared to the solutions given by CPLEX by directly solving the basic model. Numerical results on randomly generated instances are presented and prove the value of the proposed resolution approach.

Key Words : container transport, multimodal transport, multi-flow, multimodal platform management, vehicle dynamics, flow management, aggregation