



HAL
open science

Croissance, compaction et adhésion de plaques minces

Hadrien Bense

► **To cite this version:**

Hadrien Bense. Croissance, compaction et adhésion de plaques minces. Physique [physics]. Université Sorbonne Paris Cité, 2017. Français. NNT : 2017USPCC228 . tel-02133639

HAL Id: tel-02133639

<https://theses.hal.science/tel-02133639v1>

Submitted on 19 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS CITÉ
PRÉPARÉE À L'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT**

Spécialité : Physique

École doctorale : « Physique en Île-de-France » 564

réalisée

au Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes

présentée par

Hadrien BENSE

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS CITÉ

Sujet de la thèse :

Croissance, compaction et adhésion de plaques minces

soutenue le 10 novembre 2017

devant le jury, présidé par Martine Ben Amar et composé de :

M.	Jean-Christophe GEMINARD (D.R.)	Rapporteur
M.	Corrado MAURINI (Prof.)	Rapporteur
M^{me}	Martine BEN AMAR (Prof.)	Examineur
M.	Cyprien GAY (C.R.)	Examineur
M.	Dominic VELLA (Prof.)	Examineur
M.	Emmanuel VILLERMAUX (Prof.)	Examineur
M.	José BICO (M.C.)	Directeur de thèse
M.	Benoît ROMAN (D.R.)	Directeur de thèse

Table des matières

Résumé	v
Introduction	vii
I Quelques bases de mécanique des plaques minces	1
I.1 Élasticité des matériaux et mécanique des milieux continus	2
I.1.1 Loi de Hooke	2
a) Approche 1D	2
b) Généralisation	3
c) Équilibre mécanique	5
I.1.2 Énergie élastique	5
I.2 Mécanique des poutres	6
I.2.1 Une version extensible de l' <i>Elastica</i> d'Euler	6
I.2.2 Flambage d'une barre	8
a) Seuil en loi d'échelle	8
b) Seuil du flambage d'Euler	9
I.2.3 Énergie élastique d'une barre	10
a) Expression en loi d'échelle	10
b) Critère de flambage : approche énergétique (loi d'échelle)	11
I.3 Plaques	11
I.3.1 D'une barre à une plaque	12
I.3.2 Équations de Föppl-Von-Kármán	13
a) Équations de Föppl-Von-Kármán axisymétriques	14
b) Équations de Föppl-Von-Kármán	17
I.3.3 Énergie élastique	18
II Instabilités mécaniques dans les polymères diélectriques	21
II.1 Introduction : changement de forme et polymères électroactifs	21
II.1.1 D'une forme plane à une forme tridimensionnelle	21
II.1.2 Les polymères électroactifs.	22
a) Différents types	22
b) Quelques applications (potentielles) des polymères diélectriques	26
II.2 Actionnement inhomogène : flambage d'une électrode circulaire	29
II.2.1 Une expérience typique	29
II.2.2 Actionnement des polymères diélectriques	31

a)	Électrode couvrant entièrement le polymère	31
b)	Actionnement non-homogène : cas 1D	34
II.2.3	système expérimental	40
II.2.4	Flambage sur l'eau	45
a)	Contraintes dans la membrane dans la configuration plane sous le seuil de flambement	46
b)	Instabilité sur l'eau : observations expérimentales	48
II.2.5	Interprétation en loi d'échelle	49
a)	Équations non linéaires pour l'état flambé et comparaisons avec les expériences	52
II.2.6	Flambage de membranes encastrées	57
a)	Montage expérimental et observations préliminaires	57
b)	Résultats numériques et expérimentaux	59
c)	Instabilité de flambage secondaire	67
II.2.7	Flambage d'un anneau	68
II.3	Croissance inhomogène et anisotrope	71
a)	Croissance différentielle	72
b)	Croissance anisotrope	77
II.4	Instabilités corona	79
a)	Effet corona	79
b)	Expérience	84
c)	Résultats (qualitatifs)	85
II.5	Conclusion	86
III Compaction de coques		89
III.1	Introduction	89
III.1.1	Des rides qui relaxent...	89
III.1.2	... pas toujours	91
III.2	Coques compactées	92
III.2.1	Dispositif expérimental	92
III.2.2	coques entières : résultats expérimentaux	93
a)	Observations générales	94
b)	Longueur d'onde	95
c)	Force de compaction	96
III.2.3	Modèle	97
a)	Approche 1D	97
b)	Contraintes dans la coque compactée	102
c)	De la bande à la coque	104
III.2.4	Comparaison avec les expériences	105
a)	Longueur d'onde	105
b)	Force verticale	105
III.2.5	Coques trouées	107
a)	Observations expérimentales	107
b)	Résultats	110
III.3	Compaction de formes complexes	113
III.3.1	Plaque bosselée	113

a)	Réalisation expérimentale	113
b)	Longueur d'onde de l'instabilité	113
c)	Modélisation	115
III.3.2	Sphère ouverte	119
III.4	conclusion	120
IV	Lentilles de contact	125
IV.1	Introduction	125
IV.1.1	Déformation d'un solide par un liquide : élasto-capillarité	125
IV.1.2	Expériences préliminaires	129
IV.2	Une sphère sur une sphère	129
IV.2.1	Taille maximale de collage : expériences	129
IV.2.2	Loi d'échelle pour le collage	131
IV.2.3	Taille maximale : calcul complet	132
IV.2.4	Retour aux expériences	134
IV.3	Au-delà de la taille critique	134
IV.3.1	Diagramme de configuration : Collage extérieur	135
a)	Calotte moins courbée que l'hémisphère : $L_{EC}\Delta C > 0$	135
b)	Calotte plus courbée que l'hémisphère : $L_{EC}\Delta C < 0$	137
IV.3.2	Collage interne	137
a)	Calotte moins courbée que l'hémisphère : $L_{EC}\Delta C > 0$	137
b)	Calotte plus courbée que l'hémisphère : $L_{EC}\Delta C < 0$	137
IV.4	Formation de cloques sur un substrat courbé	139
IV.4.1	Cloque unidimensionnelle	139
a)	Substrat plat	140
b)	Cloque sur un substrat courbé	142
IV.4.2	Retour sur le collage axisymétrique	143
IV.5	Conclusion	144
V	Conclusion	145
A	Calcul numérique des contraintes dans le plan d'une coque aplatie	149
B	Gotitas	151
C	Articles	153
	Bibliographie	169

Résumé

Mots clefs : Mécanique, structures élancées, flambage, instabilités, polymères électroactifs, capillarité, changement de formes

Cette thèse s'intéresse au rapport entre la forme et la géométrie d'un objet. Elle s'articule autour de 3 chapitres. Dans le premier, nous utilisons des "polymères électro-actifs", des systèmes capables de se déformer dans le plan lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique, pour mimer une sorte de croissance biologique. Nous avons regardé comment une croissance inhomogène pouvait déclencher une instabilité de flambage dans une plaque électro-active. Nous avons ensuite cherché à contrôler de manière locale la croissance, dans l'espoir d'obtenir des objets capables de changer de forme sur commande. Dans le deuxième chapitre, nous nous avons étudié un problème inverse : au lieu de chercher à donner une nouvelle forme naturelle à l'objet, nous le forçons à adopter une forme qui ne lui est pas naturelle. Nous avons aplati des coques élastiques hémisphériques. La transformation d'une sphère en plan n'étant pas isométrique, cette opération crée des contraintes dans l'objet. Il se produit alors une instabilité mécanique que nous avons étudiée. Enfin, nous nous sommes penchés sur le problème des "lentilles de contact" en nous demandant si l'on pouvait coller l'une sur l'autre deux portions de sphères ayant des courbures différentes. Ici encore, la différence de courbure de Gauss entre les deux surfaces conduit à des motifs d'instabilités dans la coque élastique.

Keywords : Mechanics, slender structures, buckling, instabilities, electroactive polymers, capillarity, shape changing

This thesis deals with the links between the geometry and the shape of an object. It is composed of three main chapters. In the first one, we use "electro-active polymers", systems that undergo planar expansion when submitted to an electric field, to mimic a kind of biological growth. We looked at how an inhomogeneous growth can trigger buckling instability in this electro-active plate. We then tried to control locally this growth, hoping to create objects that can change shape on command. In the second chapter, we studied the opposite problem : instead of giving it a new natural shape, we force the object in adopting a non natural shape. We squashed hemispherical elastic caps. Changing a sphere into a plane is not an isometrical transformation, this operation thus creates strains in the object. We studied the mechanical instability hence produced. Finally we focused on the "contact lens" problem by wondering if it is possible to stick two spherical caps having different curvature. Here again, the mismatch of Gaussian curvature leads to patterns of instability in the elastic shell.

Introduction

De la feuille sur laquelle est écrit ce texte, à la carrosserie de notre voiture en passant par les pétales de fleurs, les surfaces qui nous entourent prennent une multitude d'aspects différents, tant dans les formes que dans les propriétés mécaniques qu'elles présentent. Mais qu'est-ce qui, géométriquement, les distingue les unes des autres ? Voilà une question qui n'est pas si courante dans la vie de tous les jours. Notre quotidien regorge pourtant de situations qui pourraient nous conduire à y penser. Faisons par exemple preuve d'adresse et pelons une orange en une fois. Ou disons la moitié d'une orange, pour nous faciliter la tâche. Une fois le dernier coup de couteau donné, nous constaterons que la pelure garde sa forme sphérique. Et même plus : si nous écrasons cette demie-sphère, elle ne s'applatira qu'à la condition de se déchirer par endroits. Prenons maintenant une feuille de papier : nous pouvons l'enrouler sur elle-même pour former un cylindre ou un cône, qui, une fois la prise sur la feuille relâchée, redeviendront plats. Essayons maintenant de former une boule avec cette feuille : l'affaire se corse ! Nous aurons beau être aussi délicats que possible, au terme de la transformation, la feuille finira froissée. La boule de papier a alors un aspect intrigant : des plis localisés, très courbés, séparent des zones planes (voir photo .1). Dans ces deux observations, la forme sphérique se distingue des autres. Un plan, un cylindre et une sphère ont donc quelque chose de différent.



Fig. .1 *Si nous essayons de donner une forme sphérique à une feuille de papier, nous obtenons une boule de papier froissé. La feuille localise ainsi en quelques endroits (les plis) de grandes déformations, tandis que les zones entre deux plis restent à peu près planes. Il s'agit d'une conséquence du théorème de Gauss.*

Cette intuition est formalisée par le *Theorema Egregium* (théorème remarquable) de Gauss. Ce très beau résultat établit un lien entre la forme d'une surface et sa métrique, c'est à dire entre la façon dont elle est plongée dans l'espace 3D et les relations de longueur sur cette surface. Plus précisément, il stipule qu'il existe une grandeur, appelée courbure de Gauss, intrinsèque à la surface et liée à sa métrique. La courbure de Gauss est définie comme le produit des deux courbures principales de la surface. Par exemple, une sphère de rayon R présente une courbure de Gauss de R^{-2} (R^{-1} dans les deux directions), elle est nulle pour un plan, un cylindre de rayon R (R^{-1} dans une direction 0 dans l'autre) ou un cône, et négative pour une selle de cheval. Le *Theorema Egregium* nous apprend alors qu'il n'existe pas d'isométrie entre deux surfaces ayant des courbures de Gauss différentes. Changer de courbure de Gauss, et donc changer de forme ne peut donc se faire sans provoquer des compressions (ou extensions) locales. Les plis du papier froissés sont ainsi des singularités qui apparaissent pour absorber la majeure partie de la déformation, permettant au reste de la feuille (les zones entre deux plis), de rester plane et de conserver sa courbure de Gauss. Le lien entre courbure de Gauss et métrique n'est pas évident, mais nous pouvons nous en convaincre en imaginant l'expérience suivante : plantons un piquet au pôle Nord, et attachons-y une corde de longueur r à l'aide de laquelle nous dessinons des cercles à la surface de la Terre (que nous supposons sphérique). Si notre corde est courte devant le rayon de la Terre, le périmètre du cercle que nous dessinerons vaudra $p = 2\pi r$ (ligne noire sur le schéma .2). C'est notre expérience quotidienne lorsque, par exemple, nous traçons au compas un cercle sur une feuille plane. Si maintenant nous prenons une corde beaucoup plus longue nous constaterons que le périmètre du cercle dessiné au niveau de l'équateur (en rouge) est bien plus court que $2\pi r$. D'ailleurs, si la corde est suffisamment longue pour dépasser l'équateur, le périmètre du cercle se met à diminuer lorsque r augmente (en bleu). Pourtant, la corde est plus longue pour arriver dans l'hémisphère Sud que pour arriver jusqu'à l'équateur. La formule $\mathcal{P} = 2\pi r$ ne s'applique plus sur une surface courbée ! On peut en fait montrer que le périmètre d'un cercle de rayon r sur une surface de courbure de Gauss K s'écrit : $\mathcal{P} = 2\pi r \left(1 - \frac{K}{6} r^2 + \mathcal{O}(r^3) \right)$ (Audoly Pomeau [1]), d'où le lien intime entre courbure de Gauss et métrique.

C'est ce lien entre la métrique et la forme d'un objet que nous allons explorer au cours de cette thèse en nous intéressant au couplage entre la géométrie et l'élasticité des plaques réelles, c'est à dire aux conséquences physiques du théorème de Gauss sur ces objets réels. Nous commencerons donc par présenter dans le premier chapitre quelques bases de la mécanique des plaques minces. Deux types de déformations interviennent en mécanique : la flexion et l'extension. Cette dernière présente un coût énergétique élevé et est donc souvent dominante, donnant ainsi un rôle très important aux surfaces isométriques. Nous insisterons donc dans ce chapitre sur le lien entre la mécanique des plaques minces et le théorème de Gauss.

Nous verrons ensuite, dans le chapitre 2, comment modifier la métrique d'une surface permet d'en modifier sa forme. Pour cela, nous utiliserons des "polymères électroactifs". Il s'agit de plaques minces d'élastomère isolant, recouvertes d'électrodes déformables. Sous l'application d'une tension électrique, ce système subit une dilatation réversible. Nous interprétons cette dilatation comme un moyen de changer la métrique de la surface et nous faisons un parallèle avec la croissance biologique. En effet, les formes tridimensionnelles des feuilles et des fleurs sont liées à une croissance différentielle des cellules végétales. Pouvons-nous alors obtenir de telles formes en suscitant une croissance contrôlée du polymère électro-actif ? Nous explore-

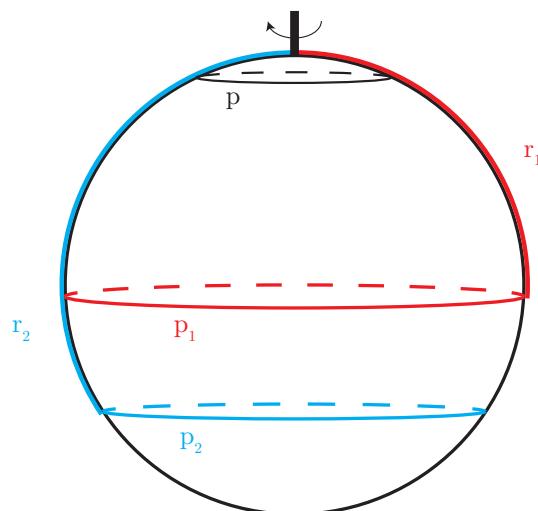


Fig. .2 Si r est assez petit devant R , le périmètre est proche de $2\pi r$ (cercle noir). Cette formule ne tient en revanche plus lorsque r est plus grand, en particulier : $r_1 < r_2$, pourtant $p_1 > p_2$.

rons ainsi plusieurs sortes de croissances inhomogènes. D'une dilatation locale et discontinue (une zone grandit, le reste non), à des dilatations différentielles ou anisotropes, nous étudierons les instabilités mécaniques résultantes de ces sollicitations.

Dans le troisième chapitre nous suivrons le processus inverse. Au lieu de changer la métrique de la surface pour modifier sa forme, nous forcerons mécaniquement le changement de forme et étudierons les conséquences sur l'état de contraintes dans le matériau. Nous aplatirons par exemple des calottes sphériques élastiques, générant ainsi des contraintes au sein de l'objet, lesquelles conduisent à l'apparitions de motifs de plis réguliers. Nous examinerons cette instabilité mécanique et tâcherons de dégager quelques principes permettant de généraliser cette étude à la compaction de surfaces de topographies variées.

Enfin, dans le quatrième chapitre nous nous intéresserons à des changements de forme dont le moteur sera cette fois la capillarité. Inspirés par le problème de la lentille de contact, nous nous focaliserons ainsi sur la question de l'adhésion d'une calotte élastique sur un hémisphère de rayon différent. Ici encore, la différence de courbure de Gauss entre les deux objets implique la naissance de contraintes lorsqu'ils sont forcés à adopter la même forme. Nous étudierons les conditions pour que l'adhésion entre ces deux surfaces soit totale, ainsi que les différents motifs d'instabilités apparaissant dans la transformation.

Chapitre I

Quelques bases de mécanique des plaques minces

De toute évidence, les constructeurs de l'antiquité n'ont pas attendu les développements de la mécanique moderne pour bâtir de formidables monuments. Les pyramides de Khéops, par exemple, ont été érigées il y a plus de 4500 ans, le Pont du Gard date du 1^{er} siècle et même la cathédrale de Paris, débutée beaucoup plus tardivement au XII^e siècle, sont de loin antérieurs aux premiers traités de mécanique. Galilée, un siècle après Léonard de Vinci, fut l'un des pionniers de la science mécanique. En 1638, alors qu'il est assigné à résidence par les autorités religieuses, le scientifique publie son discours sur deux nouvelles sciences dans lequel il s'intéresse à la résistance des matériaux. Il y développe les premières lois d'échelle sur la mécanique des structures. C'est toujours au XVII^e siècle que l'anglais Robert Hooke, expérimentateur génial, travaille sur les ressorts (" De potentia Resitutiva" 1678), et publie pour la première fois une discussion sur les propriétés élastiques des matériaux. Forts de ces connaissances, et avec le développement de nouveaux outils mathématiques (le calcul infinitésimal en particulier), les scientifiques deviennent capables de calculer les déformations des matériaux. Au début du XVIII^e siècle, Jacob Bernoulli détermine ainsi la déflexion d'une poutre élastique. Ces études d'objet unidimensionnels sont ensuite raffinées par Euler, qui se penche sur les grandes déflexions et donne son nom à l'instabilité de flambage d'une poutre. Pourtant, pendant une bonne partie du XVIII^e siècle, les calculs de mécanique sont si compliqués qu'ils en deviennent difficilement utilisables. Si les ingénieurs français tâchaient malgré tout d'appliquer leurs théories mathématiques à la construction de structures — qui finissaient régulièrement par s'écrouler — les ingénieurs anglais faisaient, de leur côté, preuve de pragmatisme en utilisant leurs connaissances pratiques et empiriques. Leurs édifices s'écroulaient aussi, mais moins souvent (voir Gordon [2]). C'est grâce aux travaux de Cauchy, qui lui vaudront le titre de baron, dans les années 1820 que la mécanique va devenir un outil utilisé des ingénieurs, notamment avec l'introduction des concepts de contraintes et de déformations. Cauchy et Poisson établissent ainsi les équations fondamentales de l'élasticité. Les équations unidimensionnelles, valables pour les poutres, sont alors bien connues. En revanche, le passage des équations 1D, aux équations 2D, pour une plaque, est loin d'être immédiat. En effet, malgré le travail de tous ces grands esprits, ce n'est que près d'un siècle plus tard que les premières équations qui incluent les effets de flexion et d'extension, modélisant les fortes déflexions des plaques seront établies : les équations de Föppl-Von-Karman

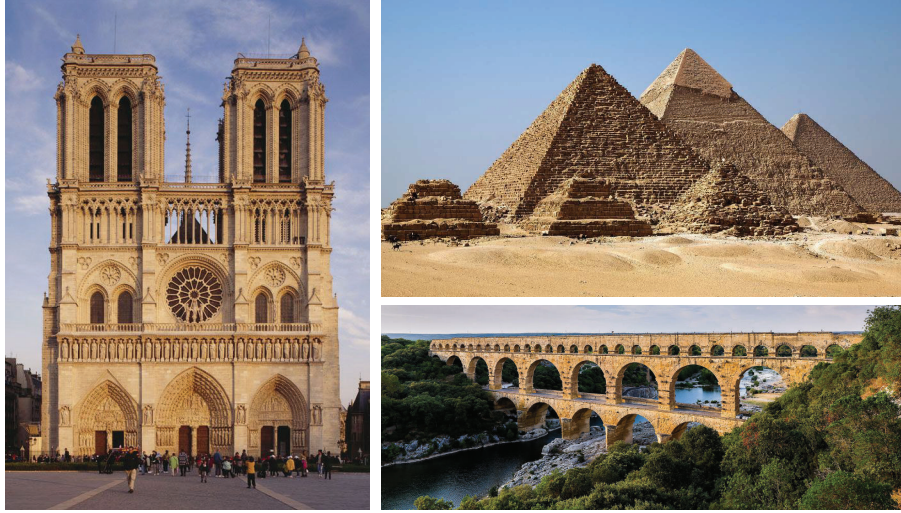


Fig. I.1 *Les maçons et les ingénieurs n'ont pas attendu de connaître les équations de Föppl Von-Kármán pour construire d'impressionnants monuments... Dont certains ne sont pas encore écroulés. Images tirées de <http://www.panoramadelart.com/notre-dame-de-paris>, <http://www.futura-sciences.com/planete/photos/egypte-decouverte-egypte-antique-995/homme-pyramide-kheops-6422/> et https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_Gard*

(1910). Le xx^e siècle verra alors fleurir les études de mécanique de plaques permettant le progrès des connaissances et nous assurant la solidité de nos bateaux, avions et autres ponts.

Nous donnerons, dans ce chapitre, quelques bases de la mécanique des structures élancées. Nous survolerons la mécanique des milieux continus. Nous nous intéresserons ensuite aux poutres, structures élancées 1D, avant de donner quelques notions de la mécanique des plaques.

I.1 Élasticité des matériaux et mécanique des milieux continus

Dans toute cette thèse, nous resterons dans le domaine élastique des matériaux que nous utiliserons : toutes les déformations que nous étudierons seront réversibles, la réponse du matériau est linéaire. On parle alors d'élasticité de Hooke.

I.1.1 Loi de Hooke

a) Approche 1D

La théorie de l'élasticité permet de modéliser la déformations des solides en réponse à une force. Il s'agit d'une théorie macroscopique dans laquelle le solide est considéré continu. Prenons un solide homogène parallélépipédique, de longueur L , de surface transverse S . Nous

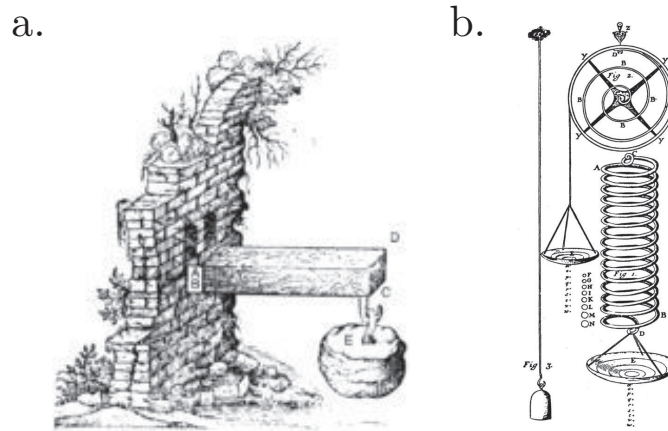


Fig. I.2 a.) Par des raisonnements en loi d'échelle, Galilée a pu établir des lois de résistance des matériaux, marquant le début de la science mécanique. b.) Robert Hooke, en travaillant sur les ressorts a posé les bases de la théorie élastique des matériaux.

tirons dessus avec une force F , de sorte que le solide a maintenant une longueur L' . Nous définissons l'étirement par $\Delta = L' - L$. Expérimentalement, si nous multiplions par deux la longueur de ce solide, et appliquons une même force F , l'étirement sera multiplié par deux. Si maintenant nous multiplions S par deux, il faudra doubler la force F pour étirer le solide de la même quantité Δ . Forts de cette heuristique, nous pouvons établir que la relation entre la force imposée à un solide et son élongation (ou sa compression) est de la forme :

$$F \sim S \frac{\Delta}{L} \quad (\text{I.1})$$

En introduisant $\sigma = F/S$ la **contrainte** et $e = \Delta/L$ la **déformation** l'équation (I.1) peut se réécrire :

$$\sigma = Ee$$

Le coefficient de proportionnalité E liant la contrainte à la déformation est appelé module d'Young. Mesurée en Pascal, cette grandeur quantifie la rigidité des matériaux. Typiquement de l'ordre de la centaine de GPa pour les métaux (200 GPa pour l'acier), il descend à quelques centaines de kPa pour le polyvinylsiloxane que nous utiliserons dans cette thèse, et peut même atteindre quelques dizaines de Pa pour certains gels très mous.

b) Généralisation

Cette première approche unidimensionnelle simple peut bien sûr être généralisée à trois dimensions au travers d'un formalisme tensoriel.

Tenseur des déformations.

Considérons un corps quelconque, dont chaque point est reperé par un vecteur \mathbf{x} (de composantes x_1, x_2, x_3). Ce corps est alors déformé de sorte que \mathbf{x} devient \mathbf{x}' . Définissons le vecteur déplacement par $\mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$. Remarquons ensuite qu'un élément de longueur $dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$ dans la configuration initiale devient $dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2} = \sqrt{(dx_1 + u_1)^2 + (dx_2 + u_2)^2 + (dx_3 + u_3)^2}$ dans la configuration déformée. Le développement de cette expression conduit à $dl'^2 = dl^2 + 2e_{ij}dx_i dx_j$ ¹, où e_{ij} est donné par :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\ell}{\partial x_i} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_j} \right) \quad (\text{I.2})$$

$(i, j) = 1, 2, 3$. e est appelé **tenseur des déformations**. Nous conservons les termes non-linéaires, en général ignorés dans le cas des faibles déformations ; nous verrons en effet qu'ils jouent un rôle dans la mécanique des plaques.

Le cas simple d'une extension uniaxiale $u_x = \Delta x/L$ nous permet d'en dégager le sens physique. En injectant ce terme dans (I.2), tous les autres étant nuls nous trouvons une déformation $e_{xx} = \Delta/L$, qui exprime bien le changement relatif de longueur dans la direction x du matériaux sous l'effet d'une extension.

Tenseur des contraintes.

À l'instar des déformations, nous pouvons introduire le tenseur des contraintes σ . Par définition, la composante σ_{ij} est la contrainte selon la direction i appliquée sur la face normale à la direction j . Dans le cas d'un solide élastique isotrope, la loi de Hooke lie les déformations aux contraintes par :

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \delta_{ij} \quad (\text{I.3})$$

E et ν , le module d'Young et le coefficient de Poisson, sont des constantes qui dépendent du matériau. δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Cette relation peut être inversée de manière à exprimer les contraintes en fonction des déformations :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(e_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) \delta_{ij} \right) \quad (\text{I.4})$$

Nous avons vu que le module d'Young caractérise la rigidité du matériau. Le coefficient de Poisson, quant à lui, caractérise la contraction du matériau perpendiculairement à la direction de l'effort appliqué. Pour l'illustrer, considérons une compression uniaxiale selon l'axe x ; elle induit une déformation $e_{xx} = \sigma_{xx}/E$. Mais les équations (I.3) nous montrent que cette contrainte suivant x provoque également des dilatations selon les axes y et z : $e_{yy} = e_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$. Le coefficient de Poisson varie entre 0 et 0.5. Les matériaux quasi-incompressibles, tels que les élastomères que nous utiliserons dans cette thèse, ont un coefficient de Poisson qui tend vers 0.5. Par exemple, dans le cas de la compression uniaxiale évoquée, cela signifie que le matériau se dilate de moitié dans les deux directions perpendiculaires à la compression. En d'autres termes, la compression se fait donc à volume constant.

1. Nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein : $a_i X_i = a_x X_x + a_y X_y + a_z X_z$.

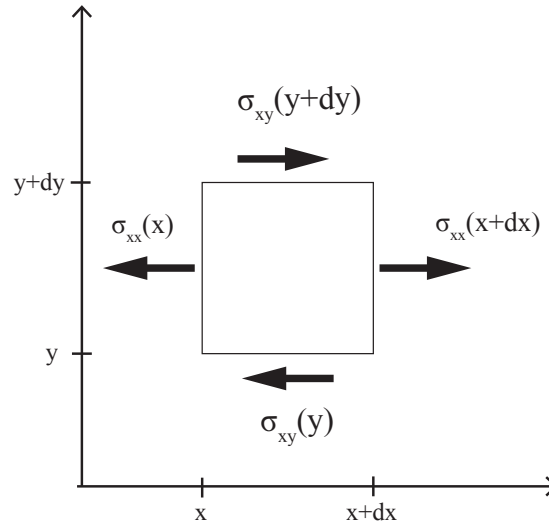


Fig. I.3 Équilibre mécanique sur un élément de surface à 2D

c) Équilibre mécanique

Maintenant que nous connaissons les relations constitutives d'un solide, intéressons-nous aux conditions d'équilibre mécanique. Commençons par un cas 2D simple : nous considérons un élément du matériau, d'aire $dx dy$ soumis à des contraintes dans le plan (voir schéma I.3). Le solide est à l'équilibre mécanique si :

$$\sigma_{xx}(x + dx)dy - \sigma_{xx}(x)dy + \sigma_{xy}(y + dy)dx - \sigma_{xy}(y)dx = 0$$

En développant au premier ordre cette condition, nous trouvons :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}(x)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(y)}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.5})$$

Cette equation (I.5) se généralise aisément à trois dimensions pour donner :

$$\text{div}(\sigma) = 0 \quad (\text{I.6})$$

L'équation (I.6) est très générale et caractérise l'équilibre d'un milieu continu. Elle apparaît en particulier en mécanique des fluides (Guyon, Hulin Petit [3])

I.1.2 Énergie élastique

Un solide élastique est similaire à un ressort : une force exercée sur un tel solide produit un déplacement qui lui est proportionnel. Par analogie, dans le cas d'une déformation uniaxiale, nous pouvons écrire que l'énergie élastique par unité de volume vaut :

$$\mathcal{E}_{el}^{uniax} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} e_{xx}$$

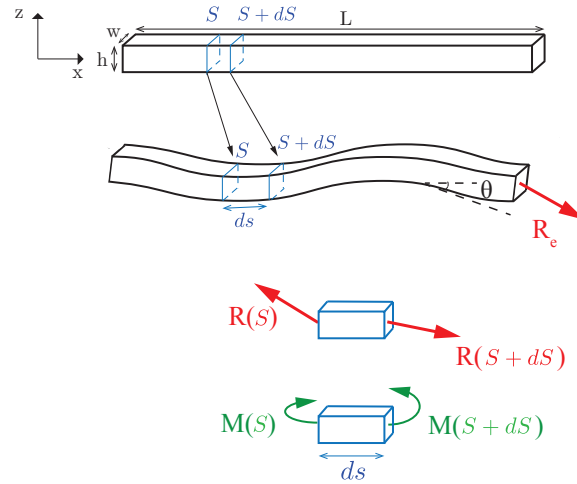


Fig. I.4 Pour trouver l'équation de l'Elastica, nous effectuons un bilan de forces et des moments sur un petit élément de la barre.

Dans le cas général, cette énergie volumique s'écrit :

$$\mathcal{E}_{el} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} \quad (\text{I.7})$$

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons essentiellement à des "structures élancées", c'est-à-dire des structures dont une des dimensions au moins est très petite devant les autres. Les poutres et les plaques en sont des exemples typiques. Ce contraste de dimensions entraîne des propriétés mécaniques particulières, très couplées à la géométrie, que nous allons à présent décrire.

I.2 Mécanique des poutres

Une poutre est l'exemple le plus simple de structure élancée pour laquelle la longueur L est grande devant les autres dimensions. Nous pourrions, pour décrire sa mécanique, utiliser les définitions (I.2) et l'équation (I.6), comme dans un milieu 3D. Il est en fait bien plus simple de travailler avec des quantités adaptées à l'élancement. Commençons donc par écrire l'équation d'équilibre d'une poutre. Cela nous permettra d'introduire la notion de flambage. Nous présenterons pour finir l'énergie élastique liée à la déformation d'une poutre en loi d'échelle.

I.2.1 Une version extensible de l'Elastica d'Euler

Le problème d'une tige droite, élastiquement flexible et inextensible soumise à une force de compression à son extrémité a été traité pour la première fois par Euler en 1744. Nous considérons ici le cas d'une tige **extensible** de longueur L , d'épaisseur h et de largeur w . Ce cas nous sera utile dans le chapitre 2 où les déformations d'extension sont essentielles. Les faces sont libres, dès lors, compte tenu de la finesse de la structure, les composantes

des contraintes selon z ne peuvent pas s'éloigner notablement de 0. Nous ferons donc l'approximation, classique pour les structures élancées, que $\sigma_{zz} = 0$. Nous supposons également $\sigma_{yy} = 0$.

Dans la configuration de référence, la barre est caractérisée par son abscisse curviligne S (paramétrisation normale). Une force R_e est appliquée à l'une de ses extrémités. Dans l'état déformé, l'abscisse curviligne est dénotée s . Nous choisissons de décrire l'état déformé à l'aide du paramètre S , qui n'est donc plus l'abscisse curviligne pour cet état, les coordonnées d'un point dans l'état déformé réfèrent donc à la position qu'il occupait avant déformation. Ainsi, deux points initialement distants de dS deviennent, après déformation, distants de ds , mais leurs coordonnées restent S et $S + dS$ respectivement (voir schéma I.4). dS et ds sont reliées *via* la déformation dans le plan e :

$$e(S) = \frac{ds}{dS}(S) - 1$$

La déformation est donc nulle si $ds = dS$.

Afin de déterminer l'équation d'équilibre, nous considérons un petit élément de longueur ds , reperé par une extrémité en S et l'autre en $S + dS$, sur lequel nous faisons un bilan des forces. Dans l'hypothèse où aucune force autre que R_e n'est appliquée à la barre, la condition d'équilibre des forces donne :

$$\frac{d\mathbf{R}(S)}{dS} = \mathbf{0} \text{ (i.e) } \mathbf{R}(S) = \text{cst} = \mathbf{R}_e$$

Nous examinons maintenant l'équilibre des moments sur ce même élément :

$$M(S + dS) - M(S) + \mathbf{t}ds \wedge \mathbf{R} = 0$$

Où \mathbf{t} est le vecteur tangent.

En rappelant que $ds = (1 + e)dS$, nous réécrivons cet équilibre :

$$\frac{dM}{dS} + (1 + e)(R_z \cos(\theta) - R_x \sin(\theta)) = 0 \quad (\text{I.8})$$

θ étant l'angle que fait la tangente à la barre par rapport à l'axe des x (voir figure I.5). Remarquons alors que donner une courbure $\frac{d\theta}{dS}$ à la barre se traduit géométriquement par une déformation dans l'épaisseur $e_{xx}(z) = z \frac{d\theta}{dS}$ (voir schéma I.4). Le moment M peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$M = \int_0^w \int_{-h/2}^{h/2} \sigma z dz dy = EI \frac{d\theta}{dS} \quad (\text{I.9})$$

Avec $I = w \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dy$ le moment quadratique, $I = w \frac{1}{12} h^3$ pour une barre de section rectangulaire.

En combinant alors les équations (I.8) et (I.9) nous trouvons :

$$EI \frac{d^2\theta}{dS^2} + (1 + e)(R_z \cos(\theta) - R_x \sin(\theta)) = 0 \quad (\text{I.10})$$

D'autre part, la relation de Hooke (I.3) donne l'étirement moyen des fibres :

$$whEe = \mathbf{Rt} = R_x \cos(\theta) + R_z \sin(\theta) = T \quad (\text{I.11})$$

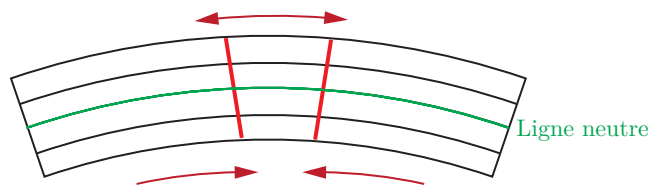


Fig. I.5 La flexion d'une barre crée une déformation d'étirement dans la partie supérieure à la ligne neutre, et de compression dans la partie inférieure.

L'équation (I.11) est la loi constitutive pour l'extension de la barre dans laquelle T est la composante axiale de la force appliquée sur la section de l'objet.

La plupart du temps la déformation est négligée : $1 + e \sim 1$ (la poutre est inextensible), l'équation alors obtenue se nomme *Elastica* et a été établie par Euler. Toutefois, au cours de cette thèse, nous aurons besoin de garder ce terme $1 + e$, tenant compte de l'extensibilité de la barre.

Étant données des conditions aux limites, souvent localisées aux deux extrémités de la poutre, cette équation se résout généralement par une méthode de tir. Cette équation nous permet également d'introduire un phénomène très important pour les structures élancées en général, et pour cette thèse en particulier : le flambage.

I.2.2 Flambage d'une barre

Considérons la situation dans laquelle une barre est encastrée au sol et s'élève verticalement. Nous la soumettons à une force F compressive au niveau de son extrémité libre. Tant que F ne dépasse pas une valeur critique, la colonne reste droite et ne subit qu'une compression axiale, cette situation est stable. Cependant, il existe une valeur seuil de F à partir de laquelle la forme droite devient instable. Au-delà de cette charge critique, la barre "flambe" : elle adopte une forme arquée. Nous supposons la barre inextensible.

a) Seuil en loi d'échelle

Une manière de déterminer le seuil de flambage consiste à déterminer la raideur de la barre par rapport à une déflexion axiale. Considérons pour cela la situation d'une barre encastrée à une extrémité, soumise à une force F verticale et à une force horizontale f au niveau de son extrémité libre (voir schéma I.6). f suscite une déflexion δ de la barre. Le moment exercé par les forces sur la barre s'écrit : $M \sim fL + F\delta$. Écrivons ensuite l'équation (I.9) qui lie le moment et la courbure en loi d'échelle : $M \sim EI \frac{\delta}{L^2}$. À l'équilibre, nous obtenons l'équation :

$$\frac{\delta}{L} \left(F - \frac{EI}{L^2} \right) = f \quad (\text{I.12})$$

Dans le sens horizontal, la barre peut donc être vue comme un ressort, dont la rigidité est donnée par l'expression $f = k\delta$. Ainsi, suivant le signe de $\left(-\frac{EI}{L^2} + F \right)$ la constante de raideur du ressort équivalent k peut être positive ou négative. Dans le cas d'une constante positive, soumise à une perturbation (la force f), la barre retrouve sa forme droite : l'équilibre est

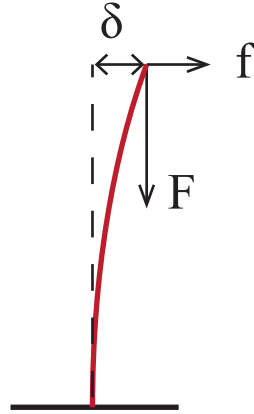


Fig. I.6 Sous l'effet d'une force F verticale, la barre peut subir un déplacement horizontal. On parle d'instabilité de flambage.

stable. En revanche, une constante de raideur négative signifie que la moindre perturbation est amplifiée : l'équilibre est instable. Le seuil de flambage est atteint lorsqu'une force f infiniment petite suffit à créer une déflexion δ non nulle. Ce seuil est donc obtenu lorsque la constante de raideur k s'annule. Cette condition dans l'équation (I.12) nous permet de trouver la force critique en loi d'échelle :

$$F_c \sim \frac{EI}{L^2} \quad (\text{I.13})$$

L'équation (I.13) peut également être exprimée en terme de contraintes de compression, en rappelant que $I \sim wh^3$, nous trouvons la contrainte compressive critique au seuil de flambage :

$$\sigma_c \sim E \frac{h^2}{L^2} \quad (\text{I.14})$$

Cette loi d'échelle (I.14) est conforme à notre intuition : plus une structure est élancée (plus le rapport h/L est petit), plus elle flambe facilement.

Nous vérifions également que la compression critique $e_c \sim h^2/L^2 \ll 1$. La compression e est donc très faible.

b) Seuil du flambage d'Euler

Déterminons le préfacteur de la loi d'échelle. Puisque e_c est très faible, nous négligeons la compression et nous considérons que la poutre est inextensible pour calculer exactement le seuil de flambage. Plaçons-nous au seuil de flambage, de sorte que $\theta \ll 1$ et $e \ll 1$, et linéarisons l'Elastica. Nous obtenons l'équation :

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + F\theta = 0 \quad (\text{I.15})$$

Avec les conditions aux limites : $\theta(0) = 0$ (encastrement), $\theta'(L) = 0$ (moment nul).

Une solution générale de (I.15) est : $\theta(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$ avec $k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$. Les

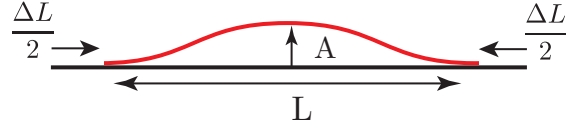


Fig. I.7 Cloque sur un substrat plat.

conditions aux limites imposent en outre que $A = 0$ et $kL = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Le premier mode instable (c'est-à-dire tel que $\theta(L) \neq 0$) est donc obtenu pour $n = 0$, il survient pour une force critique valant :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2} \quad (\text{I.16})$$

Suivant les conditions aux limites appliquées à la barre (nous avons ici une configuration encastree-libre), le préfacteur de cette force peut changer (Timoshenko & Gere [4]). La loi d'échelle est néanmoins générale aux structures élancées et nous la retrouverons dans les plaques.

L'équation (I.15) nous permet également de calculer la forme de la structure flambée. Dans le cas où les deux extrémités de la barre sont encastrees, en appelant y la déflexion de la barre (telle que $\frac{dy}{dx} = \theta$), alors : $y(\pm L/2) = y'(\pm L/2) = y'(0) = 0$, et la déflexion $y(x)$ de la barre vaut :

$$y(x) = \frac{A}{2}(1 + \cos(kx)) \quad (\text{I.17})$$

avec $k = (2n + 1)\pi \frac{2}{L}$.

Pour $n = 1$, nous trouvons la forme d'une cloque (voir schéma I.7), qui nous sera utile dans le chapitre 4.

I.2.3 Énergie élastique d'une barre

Nous serons régulièrement amenés au cours de cette thèse à raisonner en énergie. Nous allons ici écrire en loi d'échelle l'énergie élastique d'une barre. Nous verrons également que le critère de flambage peut être obtenu à partir de considérations énergétiques.

a) Expression en loi d'échelle

L'énergie élastique s'écrit (I.7) :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_S dx dy \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} e_{ij} dz) \quad (\text{I.18})$$

Deux modes de déformations limites peuvent être envisagés pour une structure élancée : la flexion et l'étirement (ou compression suivant le signe de la déformation).

Lors de l'étirement, toutes les fibres du matériau sont déformées de la même valeur. D'autre part, nous l'avons vu, compte tenu de la finesse, les contraintes sont nulles selon z . Ainsi, aucun terme de (I.18) ne dépend de z , son intégration le long de l'épaisseur fait donc simplement apparaître un terme en h , si bien que la contribution en étirement de l'énergie élastique par unité de surface s'écrit :

$$\mathcal{E}_{comp} \sim Eh(e_{moy})^2 \quad (\text{I.19})$$

Lors d'une déformation en flexion, en revanche, les points se trouvant au-dessus de la ligne neutre (la ligne centrale si le matériau est homogène) sont étirés, ceux en-dessous sont comprimés (voir schéma I.4). Si une courbure R^{-1} est donnée à la barre, une déformation dépendant de la position z apparaît donc : $e_{xx} = z/R$. Les déformations selon les autres axes étant nulles, l'intégration selon l'épaisseur de (I.18) fait apparaître un terme en h^3 , et conduit à une énergie de flexion par unité de surface :

$$\mathcal{E}_{flex} \sim Eh^3 \frac{1}{R^2} \quad (\text{I.20})$$

Ces lois d'échelles sont également valables dans le cas des plaques (nous le verrons dans la section suivante), aux préfacteurs près.

Il est important de remarquer que ces deux énergies varient différemment avec l'épaisseur. Cet aspect est crucial. En effet, dans la mesure où nous travaillons avec des structures minces, l'énergie de flexion est très souvent négligeable devant l'énergie d'extension, ce qui, à nouveau, est cohérent avec l'approche de l'Elastica qui suppose la barre inextensible.

b) Critère de flambage : approche énergétique (loi d'échelle)

Nous pouvons utiliser ces énergies pour retrouver le critère de flambage. Nous considérons toujours la situation d'une poutre encadrée à une extrémité, qui, sous l'effet d'une force verticale est enfoncée de x (voir figure I.8). En schématisant, la barre peut encaisser cette déformation soit en compression pure soit en flexion pure. Il se produit en réalité un mélange de ces deux effets.

Dans le cas de la compression pure, la déformation vaut $e = x/L$ et implique donc une énergie de compression $\mathcal{E}_{comp} \sim EhwL \left(\frac{x}{L}\right)^2$ (équation (I.19)).

Dans le cas d'une flexion pure, en appelant R le rayon de courbure imposé à la barre nous avons : $L = R\theta$, de sorte que $x = (L - R\sin(\theta)) \sim L\theta^2$. L'énergie de flexion s'écrit donc (équation (I.20)) : $\mathcal{E}_{flex} \sim Eh^3wL/R^2 \sim Eh^3w\theta^2/L \sim Eh^3wx/L^2$.

Ces deux énergies évoluent donc différemment avec x . Elles sont égales lorsque $x = x_c \sim h^2/L$, si bien que nous pouvons distinguer deux régions. Lorsque $x < x_c$ l'énergie de compression est plus faible que l'énergie de flexion : il est plus favorable pour la barre d'encaisser la déformation en se comprimant. En revanche, lorsque $x > x_c$ la situation s'inverse, il devient alors plus favorable d'encaisser la déformation en fléchissant : le seuil de flambage est atteint (voir figure I.8). Ce raisonnement en énergie nous permet de trouver à nouveau la déformation critique de flambage :

$$e_c \sim x_c/L \sim (h/L)^2$$

Notons également que nous n'avons pas supposé la barre inextensible dans ce paragraphe. Nous vérifions donc bien qu'en première approximation cette hypothèse ne modifie pas le seuil de flambage.

I.3 Plaques

Les plaques sont des structures élancées ayant une épaisseur h petite devant les deux autres dimensions. Nous considérerons ici une plaque plane dans l'état sans contrainte, pris

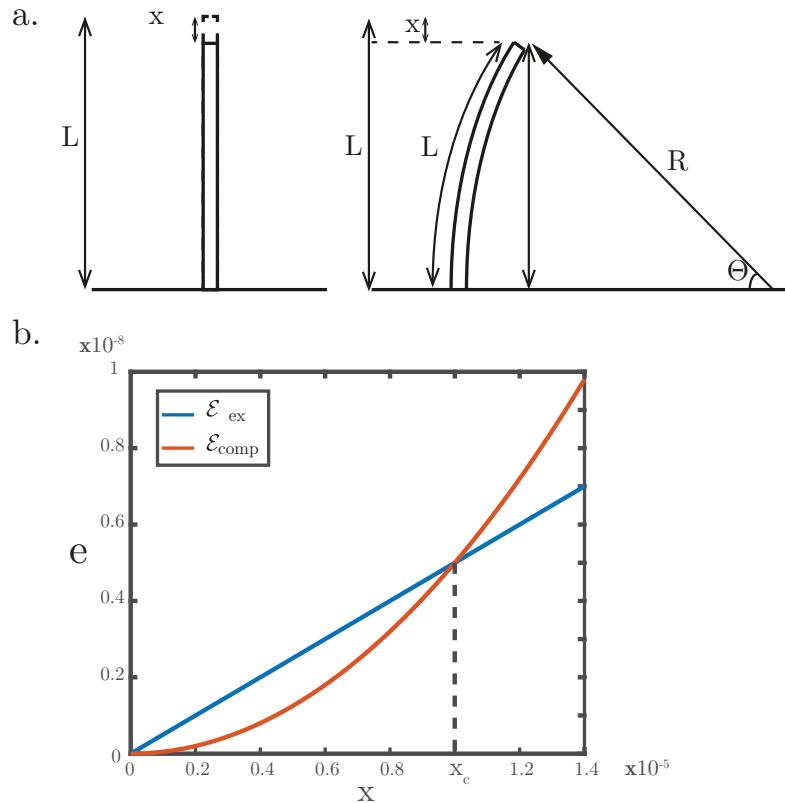


Fig. I.8 a.) Soumise à une force verticale l'écrasant de x , la barre peut encaisser la déformation en se comprimant ou en fléchissant. Ces deux modes de déformations présentent une énergie différente b.) Évolution de l'énergie de flexion (en bleu) et de compression (en orange) en fonction de x . Avant x_c la compression est plus favorable énergétiquement ; après $x_c \sim h^2/L$ la flexion devient plus favorable.

comme état naturel de référence. Nous commencerons par expliciter la différence entre une barre et une plaque. Nous exposerons ensuite les équations faiblement non-linéaires régissant la forme de ces objets. Pour finir, nous écrirons l'énergie élastique liée à leur déformation.

I.3.1 D'une barre à une plaque

Qu'est-ce qui distingue la flexion uniaxiale d'une plaque et la flexion d'une poutre ? À première vue, nous pourrions être tentés de n'y voir aucune différence. Cela serait une erreur. En effet, lorsque nous écrivons les équations d'équilibre d'une poutre, nous supposons que $\sigma_{yy} = 0$, ce qui fait apparaître une déformation $e_{yy} = -\nu e_{xx}$. Ainsi, pour une flexion telle que représentée en figure I.9, les fibres au-dessus de la fibre neutre sont raccourcies selon y ; celles en-dessous de la fibre neutre sont étirées selon y . Ce genre de déformation, appelée "antyclastique", conduit à des formes schématisées sur la figure I.9. Pour une poutre $w \sim h \ll L$, cette déformation n'est donc pas très prononcée. En revanche, pour une plaque, $w \gg h$ cette situation devient très coûteuse car l'objet devrait alors se courber dans deux directions. La

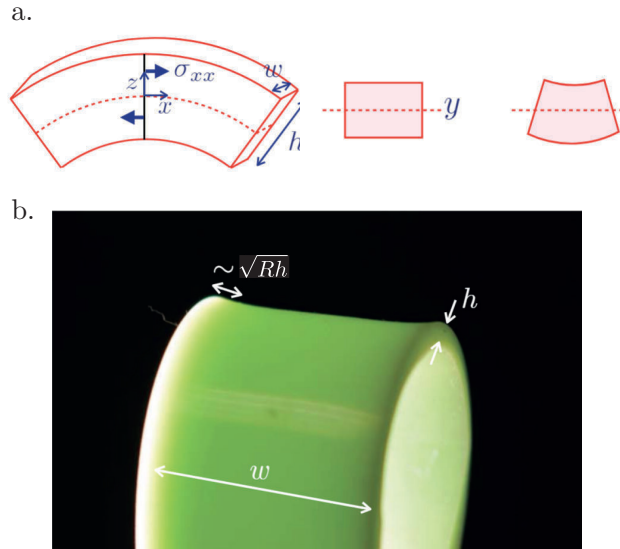


Fig. I.9 a.) Déformation anticlastique b.) Lorsque une plaque est très courbée, près des bords, il existe une petite zone déformée de manière anticlastique (sur une taille de l'ordre de \sqrt{Rh}).

plaque ne se courbe donc quasiment pas dans la direction transverse, ce qui se traduit par l'apparition d'une contrainte $\sigma_{yy} = \nu\sigma_{xx}$ de sorte que la déformation selon x vaut maintenant $e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu^2\sigma_{xx}) = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_{xx}$. Nous voyons donc apparaître un terme correctif $(1 - \nu^2)$. Finalement, L'*Elastica* décrit la flexion uniaxiale d'une poutre, à la condition de corriger le moment d'inertie : $I = w \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}$. L'annulation complète de e_{yy} n'est bien sûr pas complètement rigoureuse. Expérimentalement, si nous regardons d'assez près une plaque très courbée, nous pourrions discerner une zone déformée de manière anticlastique (voir photo I.9), qui s'étend sur une taille de l'ordre de la racine carré du produit de l'épaisseur de la plaque par le rayon de courbure imposé : \sqrt{Rh} [5, 6]. Il s'agit là d'effets de bords que nous négligerons.

I.3.2 Équations de Föppl-Von-Kármán

Les équations des plaques peuvent être vues comme une extension des équations de barres, à deux dimensions, il ne s'agit cependant pas d'une extension facile (d'où le siècle séparant l'*Elastica* des équations de plaque). Les difficultés viennent, entre autres, du lien entre la géométrie de la plaque et son énergie élastique.

Nous allons établir les équations de plaques dans le cas d'un problème axisymétrique simple afin d'en dégager le sens physique, et parce que ce sont celles que nous utiliserons dans la suite de la thèse. Cependant, nous donnerons ensuite leur forme générale afin d'insister sur le lien étroit entre la mécanique des plaques et géométrie.

Nous noterons w la déflexion, et u le déplacement dans le plan. Les indices (α, β) désigneront les coordonnées le long de la plaque non déformée. Ces équations nécessitent quelques hypothèses pour être établies :

- L'épaisseur h est petite devant les autres dimensions de la plaque,

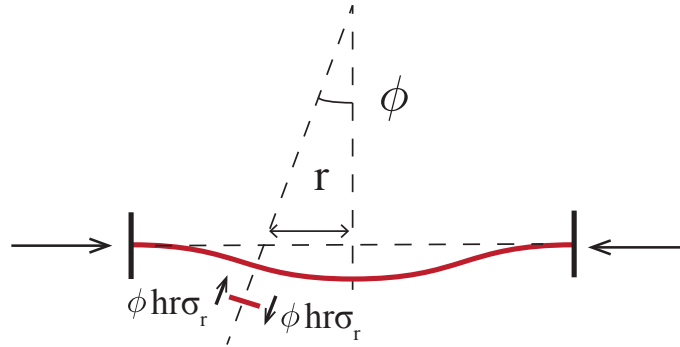


Fig. I.10 Forme d'équilibre d'une plaque défléchie. La déflexion de la plaque fait que les contraintes radiales exercent un effort tranchant $V = h\sigma_r\phi$.

- la courbure de la surface centrale est petite devant l'inverse de l'épaisseur : $|\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}| \ll 1/h$,
- les déformations ainsi que les pentes sont petites : $|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}| \ll 1$ et $|\frac{\partial w}{\partial x_\beta}| \ll 1$
- le carré de la pente $(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha})^2$ n'est pas nécessairement négligeable devant : $\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma}$.

a) Équations de Föppl-Von-Kármán axisymétriques

Considérons le cas d'une plaque circulaire soumise à des forces à ses bords. Notons w la déflexion et $\phi = -dw/dr$ l'angle entre l'axe de révolution et la normale à la plaque (voir schéma I.10). Commençons par établir l'équilibre des contraintes planaires dans ce cas axisymétrique. Pour cela nous considérons une tranche élémentaire de longueur dr et

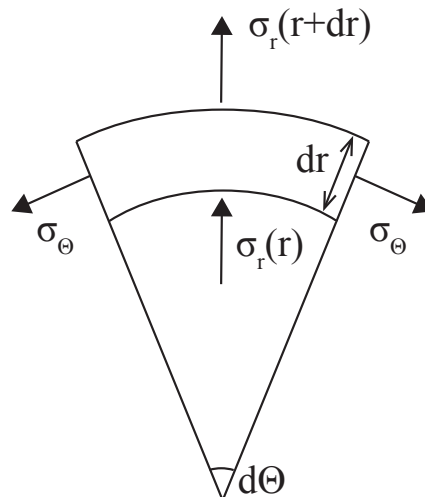


Fig. I.11 Équilibre dans le plan d'une plaque axisymétrique.

d'ouverture angulaire $d\theta$ (voir schéma I.11). En désignant par σ_r les contraintes radiales et σ_θ les contraintes azimuthales, l'équilibre des forces implique :

$$\sigma_r(r+dr)(r+dr)d\theta - \sigma_r(r)rd\theta = \sigma_\theta d\theta \quad (\text{I.21})$$

En développant au premier ordre (I.21), nous obtenons l'équation :

$$\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} = \sigma_\theta \quad (\text{I.22})$$

Cette équation, que l'on appelle souvent équation de Lamé, peut également s'écrire :

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \quad (\text{I.23})$$

Nous retrouvons en fait l'équation (I.6) dans le cas particulier d'un problème axisymétrique 2D. Nous serons amenés à utiliser à plusieurs reprises l'équation de Lamé (I.23) au cours de cette thèse.

Une deuxième équation est obtenue à partir de l'équilibre des moments. Ceux-ci sont proportionnels aux deux courbures principales et s'expriment (par unité de longueur) :

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\nu}{r_2} \right) \quad (\text{I.24})$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{I.25})$$

En appelant M_1 le moment par unité de longueur selon les sections des circonférences et M_2 selon les sections des diamètres (voir figure I.13). La courbure le long d'un diamètre de la plaque vaut : $1/r_1 = \frac{d\phi}{dr}$, il s'agit simplement de la courbure de la déflexion. La deuxième courbure est dans la direction perpendiculaire, le long de la circonférence : $1/r_2 = \sin(\phi)/r \sim \phi/r$. Les équations (I.24) et (I.25) se ré-écrivent alors :

$$M_1 = B \left(\frac{d\phi}{dr} + \nu \frac{\phi}{r} \right)$$

$$M_2 = B \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{d\phi}{dr} \right)$$

Avec $B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ le module de flexion, dans lequel nous retrouvons le terme correctif $(1-\nu^2)$ évoqué précédemment (au I.3.1).

En équilibrant ces deux moments avec ceux résultants des efforts tranchants V dans la plaque (voir schéma I.13), nous obtenons l'équation :

$$\frac{d(rM_1)}{dr} - M_2 + Vr = 0 \quad (\text{I.26})$$

Enfin, l'équilibre vertical de la contrainte intérieure sur le disque de rayon r (voir figure I.12), donne $2\pi r [V \cos(\phi) - h\sigma_r \sin(\phi)] = 0$. L'équilibre des moments (I.26) devient alors :

$$B \left(\phi'' + \frac{1}{r}\phi' - \frac{1}{r^2}\phi \right) = -h\sigma_r \phi \quad (\text{I.27})$$



Fig. I.12 Équilibre de la contrainte intérieure.

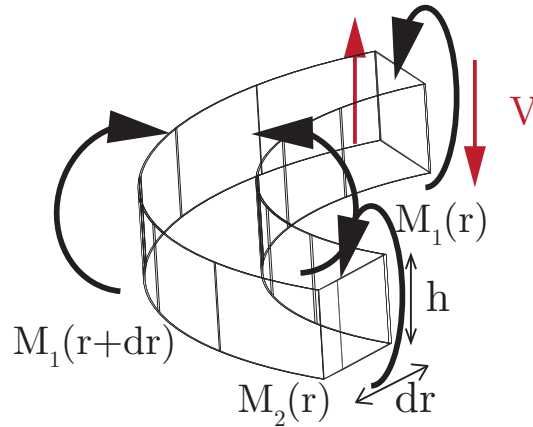


Fig. I.13 Équilibre des moments.

Il faut ensuite ajouter aux équations (I.27) et (I.23) les relations de Hooke (I.3) pour relier les contraintes aux déformations (et donc aux déplacements). Écrivons donc l'équation de Lamé (I.23) en fonction du déplacement radial u . Les déformations (I.2) dans ce cas axisymétrique et avec les hypothèses faites deviennent :

$$e_r = u' + \frac{1}{2}w'^2 \quad (\text{I.28})$$

$$e_\theta = u/r \quad (\text{I.29})$$

avec e_r la déformation radiale, e_θ la déformation orthoradiale. Nous négligeons les termes quadratiques des gradients de u que nous supposons petits devant les termes linéaires. Nous gardons en revanche le terme non-linéaire $\frac{1}{2}w'^2$ qui n'est pas *a priori* négligeable devant u' . Qualitativement, ce terme représente le fait qu'une déflexion de la plaque provoque un étirement radial (voir schéma I.14), il présente donc une importance cruciale dans les problèmes de plaques flambées. En injectant (I.28) et (I.29) dans la loi d'Hooke (I.4), et en se rappelant que $\phi = \frac{dw}{dr}$, nous pouvons réécrire l'équation (I.23) en fonction des déplacements :

$$ru'' + u' - \frac{u}{r} + \frac{(1-\nu)}{2}w'^2 + rw''w' = 0 \quad (\text{I.30})$$

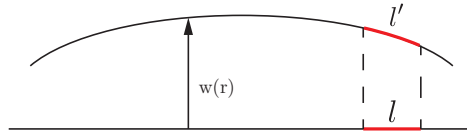


Fig. I.14 Le fait d'incliner localement la surface induit une déformation $e = \frac{l-l'}{l} \sim \frac{1}{2}w'^2$

Les équations (I.30) et (I.27) sont enfin complétées par des conditions aux limites imposées que nous n'explicitons pas ici.

b) Équations de Föppl-Von-Kármán

Dans le cas général, les équations de Föppl Von-Kármán s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \quad (\text{I.31})$$

$$B\Delta^2 w - h \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{I.32})$$

Auxquelles il faut ajouter les équations de Hooke (I.3) Elles ont été établies par Von Kármán, en combinant la théorie des membranes de Föppl (théorie dans laquelle l'énergie de flexion de la plaque est négligée, valable lorsque l'épaisseur tend vers 0) et la théorie de Kirchhoff pour la flexion des plaques. La première équation (I.31) est l'équilibre dans le plan, la seconde (I.32) représente l'équilibre dans la direction normale. Si des forces extérieures sont appliquées, de la forme $\rho\mathbf{g}$ par exemple, il faudra ajouter, à droite du signe égal, le terme $-\rho g_\alpha$ dans (I.31) et $-\rho g_z$ dans (I.32).

La deuxième équation de Föppl-Von Kármán est d'ordre 4, alors que nous avons trouvé une équation d'ordre 2 en ϕ (et donc 3 en w) dans le cas axisymétrique précédent (I.27). Ces deux équations sont en fait équivalentes : il suffit de multiplier (I.27) par r , et de la dériver avant de diviser à nouveau par r , alors, en tenant compte de (I.22), nous retrouvons l'équation (I.32), exprimée dans le cas axisymétrique.

Enfin, nous pouvons relever une correspondance entre l'Elastica (I.10) et l'équilibre dans la direction normale à la plaque (I.32). En effet, en exprimant l'Elastica en fonction de la déflexion w , avec $\theta = w'$, puis en la dérivant une fois de plus par rapport à x , nous trouvons également une équation différentielle linéaire du 4^e ordre, de structure analogue à la deuxième équation de Föppl-Von Kármán.

Ces équations peuvent également être écrites de façons extrêmement condensées à l'aide de la fonction d'Airy. Nous n'utiliserons pas ces équations. Elles soulignent toutefois l'importance de la courbure de Gauss dans les problèmes de plaques.

Dans l'hypothèse où les forces extérieures sont purement normales, il est en effet possible d'introduire la fonction d'Airy \mathcal{X} définie par :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial \beta \partial \alpha}$$

De sorte que les équations de Föppl-Von Kármán s'écrivent :

$$B\Delta^2 w - h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

$$\Delta^2 \mathcal{X} + E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right) = 0 \quad (\text{I.33})$$

L'équation (I.33) assure que le champ de contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ (calculé par \mathcal{X}) correspond bien à un champ de déplacement $u_{\alpha\beta}$. L'introduction de la fonction \mathcal{X} rend ces équations plus délicates à interpréter physiquement, notamment au niveau des conditions aux limites.

Cette écriture est toutefois intéressante car la courbure de Gauss y apparaît comme une source de contraintes dans la plaque. En effet, le terme non-linéaire, de l'équation (I.33) est en fait la courbure de Gauss. Ces équations montrent donc clairement que suivant le mode de déformation (isométrique ou non), les contraintes générées dans la plaque ne seront pas les mêmes. En ce sens, les équations de plaques peuvent être vues comme découlant du théorème de Gauss.

I.3.3 Énergie élastique

Quelle est l'énergie impliquée lors de la déformation d'une plaque ? Comme dans le cas des barres, l'énergie élastique d'une plaque est la somme d'une contribution due à la flexion et une contribution due à l'étirement de la ligne neutre.

Énergie de flexion

L'énergie élastique de flexion par unité d'aire E_{flex} peut s'exprimer en fonction des moments M_1 et M_2 et des courbures C_1 et C_2 dans les axes principaux.

$$E_{flex} = \frac{1}{2} (M_1 C_1 + M_2 C_2) = \frac{1}{2} B (C_1^2 + 2\nu C_1 C_2 + C_2^2) \quad (\text{I.34})$$

L'énergie totale est alors obtenue en intégrant (I.34) sur toute la surface de la plaque déformée.

$$\mathcal{E}_{flex} = \int \int \frac{1}{2} B (C_1^2 + 2\nu C_1 C_2 + C_2^2) dx dy \quad (\text{I.35})$$

Nous pouvons le réécrire :

$$\mathcal{E}_{flex} = \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12} \int \int \left(\frac{1}{2(1-\nu)} (C_1 + C_2)^2 + \frac{1}{2(1+\nu)} (C_1 - C_2)^2 \right) dx dy \quad (\text{I.36})$$

Cette expression nous sera utile dans le chapitre 4.

Énergie d'étirement

Comme nous l'avons souligné, nous ne gardons dans l'expression des déformations que les ordres linéaires des gradients de déformation et quadratiques en gradient de w dans l'expression de la déformation (I.2), conformément aux hypothèses faites pour établir les équations de Föppl-Von Kármán. Le changement de longueur dans la ligne neutre est donc donné par :

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \frac{\partial w}{\partial x_\beta} \right)$$

L'énergie d'étirement est alors l'intégrale sur le volume de la plaque du produit de cette déformation d'extension avec la contrainte qui lui est liée. Dans le cas d'une plaque homogène, dans la mesure où il n'y a pas de dépendance en l'épaisseur, l'intégration selon z fait apparaître un terme en h et l'énergie devient :

$$\mathcal{E}_{ext} = \frac{1}{2} \int \int_S h \sigma_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \quad (\text{I.37})$$

Avec $h \sigma_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu e_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) e_{\alpha\beta})$, qui est donc bien la contrainte liée à la déformation d'extension, en vertu des relations d'Hooke (I.4).

Nous retrouvons bien entendu des lois d'échelles similaires à celles obtenues pour les tiges. De ce fait, les mêmes remarques concernant le flambage s'appliquent aux plaques et la comparaison des énergies de flexion et de compression conduit, en loi d'échelle, au même seuil :

$$e_c \sim (h/L)^2$$

avec h l'épaisseur de la plaque et L son extension.

Nous allons retrouver cette loi d'échelle au cours du premier problème de flambage que nous allons étudier. Nous serons par ailleurs amenés à utiliser le cadre des équations de Föppl-Von Kármán pour calculer la forme des déflexions.

Chapitre II

Instabilités mécaniques dans les polymères diélectriques

II.1 Introduction : changement de forme et polymères électroactifs

II.1.1 D'une forme plane à une forme tridimensionnelle

Passer d'une forme plane à une forme tridimensionnelle non développable n'est pas une chose évidente. En effet, comme nous l'avons vu en introduction, une telle transformation implique de changer la métrique de la surface, c'est à dire localement modifier, de manière inhomogène, les distances entre les points. On pourrait dès lors s'attendre à ce que la nature abonde de formes initialement développables qui le restent au cours de leur croissance. De nombreux exemples (feuilles ou pétales) suggèrent cependant le contraire. Comment de telles formes sont-elles produites ?

La croissance inhomogène est l'une des stratégies fréquemment utilisées dans les tissus biologiques pour atteindre des formes tridimensionnelles [7]. Un exemple est donné par les pétales de lys. Mahadevan et Liang ont montré dans [8] que la forme ondulée de ces fleurs est due à une croissance différentielle : les bords du pétale croissent plus vite que son centre, créant ainsi un excès de longueur accommodé par ces belles ondulations (voir fig.II.1).

L'équipe d'Eran Sharon a vu dans cette croissance différentielle un moyen de créer des objets capables de changer de forme [9]. S'inspirant des stratégies végétales, ils ont utilisé un hydrogel - le N-isopropylacrylamide (NIPA) - qui, lorsqu'il est mis dans un bain d'eau dont la température dépasse les 33 ° C, rétrécit avec un coefficient dépendant de son degré de réticulation (voir figure II.2.a). En faisant varier spatialement le taux de réticulation du disque de polymère, ils obtiennent un hydrogel dont la contraction sera inhomogène. Ce contrôle local du facteur de rétractation leur permet d'imposer une nouvelle métrique au disque, qui adoptera donc une nouvelle forme minimisant son énergie élastique. Les deux surfaces avant et après contraction ne sont pas isométriques : le disque initial est plan, sa courbure de Gauss est nulle, tandis que l'objet final possède une courbure de Gauss non nulle, positive ou négative suivant le gradient de contraction imposé (voir figure II.2.b). Cette méthode de croissance différentielle permet d'obtenir, de façon réversible, des changements d'aspects complexes et contrôlés.

Ces systèmes possèdent néanmoins deux inconvénients majeurs limitant leurs applications éventuelles : leur lenteur (le processus étant diffusif, le changement de forme n'est pas ins-



Fig. II.1 *Fleur de lys. Les ondulations des bords des pétales sont dues à la croissance plus rapide des bords du pétale que de son centre. Cela crée un excès de longueur qui est absorbé par les ondulations.*

tantané), et leur molesse (sortis de l'eau ils s'affaissent sous leur propre poids). D'autres systèmes sont à l'étude, nous pouvons par exemple mentionner les polymères à base de cristaux liquides [10, 11] qui attirent beaucoup d'attention ce moment. La technique diffère du NIPA car dans ce cas, la croissance ne dépend pas du degré de réticulation. Ces polymères sont constitués de groupes de cristaux liquides connectés entre eux par des chaînes polymériques flexibles. Lorsqu'ils sont refroidis, ces systèmes passent d'un état isotrope à un état nématique. Ainsi, le chauffage en changeant l'alignement des mésogènes, génère une déformation globale de la matrice. La direction de déformation dépend donc de l'orientation locale du vecteur directeur : en le manipulant il devient alors possible d'obtenir des formes tridimensionnelles complexes. L'équipe de Timothy Ware a créé une plaque de polymère à cristaux liquides qui, après chauffage, devient une surface à pics (voir figure II.3.b). Mentionnons également le groupe d'Hillel Aharoni qui, dans l'optique de prescrire la courbure de Gauss de l'objet, a réussi à fabriquer des polymères à cristaux liquides initialement plans, qui une fois chauffés adoptent des formes courbées positivement ou négativement. Le processus reposant sur la diffusion de chaleur, l'actionnement de ces objets est relativement lent. La relaxation, en particulier, nécessite un refroidissement actif et peut prendre une dizaine de secondes.

Un autre type de système, lui aussi beaucoup moins mou que les hydrogels de NIPA, mais dont la réponse est en plus quasiment instantanée nous semble prometteur : il s'agit des polymères électroactifs. Commençons par présenter cette classe relativement nouvelle de matériau.

II.1.2 Les polymères électroactifs.

a) Différents types

D'un point de vue très général, un polymère électroactif est un polymère qui, sous l'effet d'une stimulation électrique (électrostatique, électromagnétique, thermo-électrique...), change de taille ou de forme. Les polymères électroactifs peuvent être répartis en deux grandes catégories en fonction du mode d'actionnement [12] :

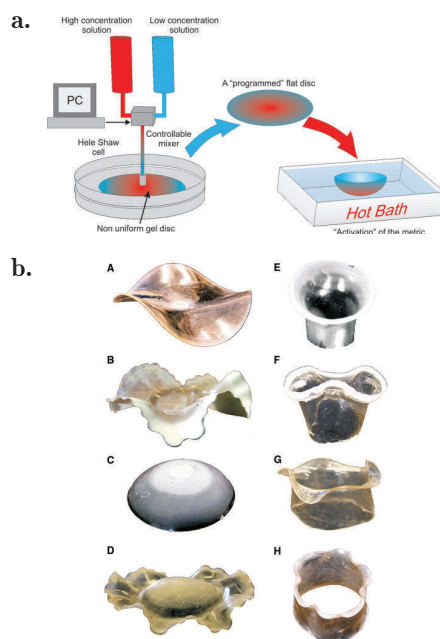


Fig. II.2 a.) Principe de l'expérience : en faisant varier spatialement le taux de réticulation de leur hydrogel, l'équipe d'Eran Sharon est capable de d'obtenir des objets dont la croissance (ou plutôt la rétraction) est différentielle une fois plongés dans un bain d'eau chaude. Ils peuvent ainsi prescrire la forme que le polymère, initialement plat, aura après rétraction. b.) Exemple des formes obtenues par cette méthode. On note des surfaces à courbure de Gauss positives et négatives [9].

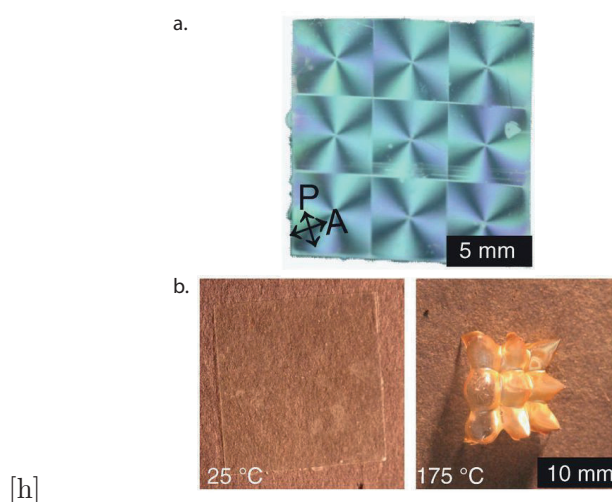


Fig. II.3 Exemple de forme obtenue avec des polymères à base de cristaux liquides. a.) Image aux polariseurs croisés d'un matériau présentant neuf défauts topologiques. L'orientation du directeur varie de manière azimutale autour de ces défauts. b.) Après chauffage, neuf cônes apparaissent dans le matériau. Ils disparaissent lors du refroidissement [10]

- ioniques, dont le moteur est la mobilité des ions qui le compose.
- électriques, dont le moteur est les interactions Coulombiennes.

Chacune de ces catégories est composée de nombreux types de polymères différents. Nous nous concentrons sur les polymères électroactifs électriques, pour lesquels nous pouvons à nouveau distinguer deux grandes classes suivant leur réponse au champ électrique.

Polymères électrostrictifs

Les polymères électrostrictifs sont des polymères possédant au sein de leur matrice des groupes polaires. Sous l'effet d'un champ électrique, ces domaines s'alignent, provoquant ainsi la déformation du matériau dans la direction du champ imposé (voir figure II.4). Ils se caractérisent, entre autres, par une déformation proportionnelle au champ électrique qui leur est appliqué. Différents types de polymères électrostrictifs existent suivant les groupes polaires utilisés. Parmi les plus classiques nous trouvons les polymères ferro-électriques (qui présentent l'inconvénient d'être hystérétiques [13, 14]) ; les polymères greffés électrostrictifs et les polymères à base de cristaux liquides (similaires à ceux mentionnés en début de chapitre, sauf que cette fois les groupes cristallins sont polarisés). Les polymères électrostrictifs peuvent atteindre des déformations de l'ordre de 5% à 10% de manière rapide et réversible et être utilisés comme actionneurs ou comme senseurs. Les champs électriques utilisés sont assez élevés : typiquement de l'ordre de $150V/\mu m$.

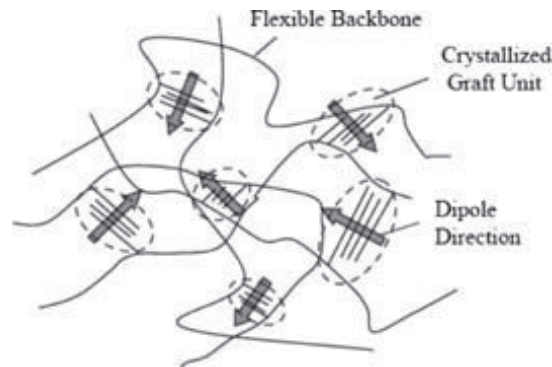


Fig. II.4 Principe de fonctionnement des polymères greffés électrostrictifs. Sous l'effet d'un champ électrique, les domaines cristallins polarisés s'alignent, provoquant la déformation du matériau. Ces domaines polaires servent également de points de réticulation aux chaînes amorphes. Schéma tiré de [15].

Polymères diélectriques

Leur principe de fonctionnement est plus simple puisqu'il s'agit d'un film de polymère isolant, compris entre deux électrodes déformables et solidaires du reste de la membrane : un condensateur mou. Lorsqu'un champ électrique est appliqué les électrodes se chargent. Les interactions coulombiennes entre les charges portées par les électrodes provoquent alors une compression dans l'épaisseur et un allongement dans le plan du film de polymère. L'élec-

trode subit donc une dilatation dans le plan qui dépend du voltage imposé. Il ne s'agit pas d'électrostriction car le polymère est ici complètement passif et, à la différence des systèmes précédents, la déformation varie ici comme le carré du champ électrique. Cette dépendance n'est d'ailleurs pas surprenante si l'on se souvient que la contrainte de Maxwell (la pression électrostatique s'exerçant sur un condensateur plan chargé à électrodes rigides) est elle aussi proportionnelle au carré du champ électrique. Nous aurons l'occasion d'y revenir en détail dans la suite. D'abord observée à la fin du XIX^e siècle par Röntgen, l'activation diélectrique a été redécouverte par Ronald Pelrine en 1998 [16]. Dans ces expériences pionnières, l'utilisation d'une simple feuille caoutchouc étirée permettaient d'atteindre des déformations de 30%. Les polymères diélectriques ont toutefois acquis bien plus de potentiel lorsque la même équipe découvrit, en 2000, que des déformations de plus de 150% (en aire) étaient possibles si, avant d'imposer une différence de potentiel, le polymère (bien choisi) était étiré mécaniquement [17]. Le VHB par exemple, adhésif de la compagnie 3M, l'un des polymères les plus utilisés pour ces systèmes, nécessite près de 300% de pré-étirement pour pouvoir atteindre ces déformations colossales. Pour comprendre l'effet du pré-étirement il nous faut déjà savoir qu'il y a principalement deux causes qui limitent l'amplitude d'actionnement. Si le polymère est trop rigide, le voltage pourra augmenter jusqu'à atteindre une valeur à laquelle les espèces chargées dans le polymère vont créer un chemin de conduction électrique : c'est le claquage électrique [18]. En revanche, si le polymère est plus déformable, il peut se produire une instabilité électro-mécanique appelée "instabilité de pull-in" qui limite l'actionnement. Elle résulte du fait que l'application d'un champ électrique sur le système provoque son amincissement. À voltage fixé, l'amincissement entraîne l'augmentation du champ électrique, amincissant donc encore plus la membrane... La situation est instable et peut donc mener jusqu'à atteindre le champ critique de claquage du diélectrique. La courbe de dépendance typique de la contrainte σ en fonction de la déformation λ pour un polymère déformable montre qu'entre un court régime linéaire et un régime de forte rigidification existe une zone dans laquelle une très faible augmentation de la contrainte conduit à une très forte augmentation de la déformation (figure II.5.a). C'est cette zone qui va être problématique. Ensuite, la relation entre la contrainte et le champ électrique imposé E (et donc le voltage V) étant connue $\sigma \sim E^2$, la relation voltage/déformation $V(\lambda)$ l'est aussi. Celle-ci n'est pas monotone (voir figure II.5.b), et c'est la cause de l'instabilité de pull-in. En effet, il existe une région instable dans laquelle le voltage diminue lorsque λ augmente. Une augmentation du voltage conduit donc à une augmentation très brutale de la déformation. Alors, suivant où les courbes de tension de claquage en fonction de la déformation $V_c(\lambda)$ (en rouge sur II.5.c) et voltage en fonction de la déformation $V(\lambda)$ (en bleu sur II.5.c) se coupent, l'instabilité peut conduire à la ruine du matériau. Le pré-étirement a pour effet de diminuer la valeur du voltage critique, ainsi que de décaler la courbe de déformation en fonction du voltage. L'idée est de trouver un polymère qui, une fois étiré, ait une réponse semblable à la courbe de droite de la figure II.5.c. Dans ce cas, les courbes $V(\lambda)$ et $V_c(\lambda)$ ne se croisent qu'après la phase de grande rigidification du polymère, qui survient elle même après la région instable. Ce type de polymère survit à l'instabilité de pull-in et permet d'obtenir de très grandes déformations sans claquage, la déformation obtenue n'est toutefois pas contrôlée sur toute la gamme de voltage [19, 20]. Cette instabilité est extrêmement importante pour le bon fonctionnement des polymères diélectriques. Elle limite en effet les déformations et est également l'une des principales causes de leur ruine. L'instabilité de pull-in se trouve donc au coeur de bon nombre d'études sur ces systèmes [21, 19, 22].

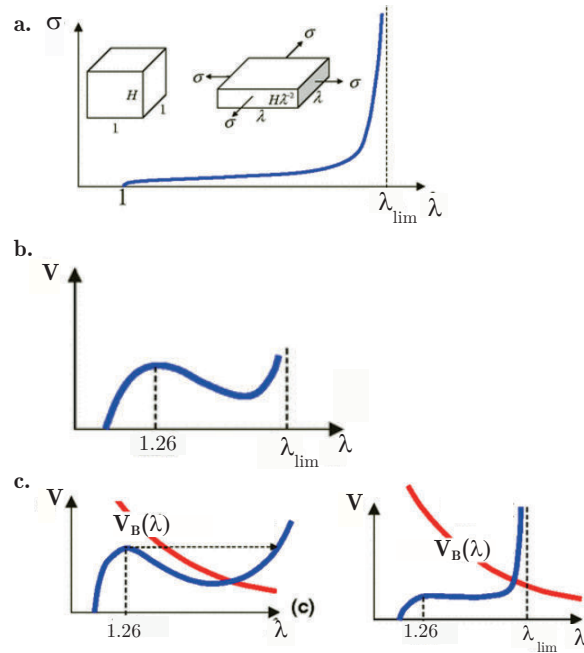


Fig. II.5 a.) Courbe contrainte étirement typique d'un polymère déformable. b.) Courbe voltage/étirement du VHB. Le point d'inflexion de la courbe implique qu'une instabilité électro-mécanique peut avoir lieu. c.) En rouge : voltage critique de claquage en fonction de l'étirement. En bleu voltage en fonction de la déformation. Sur le graphique de gauche : l'instabilité de pull-in amène le polymère à un étirement pour lequel le voltage appliqué dépasse le voltage critique : il claque. Courbe de droite : le polymère survit l'instabilité grâce à une forte rigidification. Tirée de [19].

Les polymères diélectriques sont des systèmes extrêmement simples à mettre en oeuvre : une fois des électrodes déformables déposées à la surface d'un élastomère isolant, l'application d'une différence de potentiel entraîne une déformation remarquable du système. Ces aspects les rendent attractifs pour d'éventuelles applications pratiques. Détaillons-en quelques-unes.

b) Quelques applications (potentielles) des polymères diélectriques

La capacité à produire des déformations jusqu'à cent fois supérieures à celles obtenues avec des technologies antérieures, types alliages à mémoire de forme, ou céramiques électroactives est l'un des aspects qui rend les polymères diélectriques si attrayants. Ajouté à cela un temps de réponse pouvant être très rapide (de l'ordre de la microseconde pour les plus rapides) ainsi qu'une certaine souplesse (par opposition à la rigidité des métaux) et le parallèle avec les muscles était fait. De nombreux groupes ont ainsi cherché à utiliser les polymères électroactifs et plus précisément les polymères diélectriques en tant que muscles artificiels, dans l'idée de créer des robots bio-inspirés. On parle de "soft robotics". Nous pouvons ainsi citer des robots inspirés des vers de terre [23], des poissons [24], une main artificielle capable de s'ouvrir et de se fermer [25] et même des muscles oculaires [26] (figure II.6). Néanmoins, les exosquelettes et autres robots calamars capables de se glisser n'importe où relèvent encore de la science-fiction. Plus proches d'applications quotidiennes nous pouvons penser à des

dispositifs dynamiques permettant d'afficher des textes en Braille [27] ou encore des lentilles à focales variables [28].

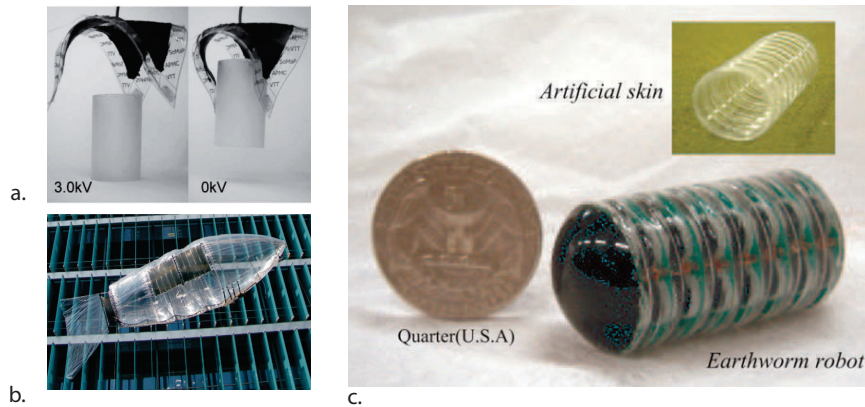


Fig. II.6 Quelques idées de "soft robots". a.) Main artificielle. Le polymère est pré-étiré puis placé sur un cadre flexible. Cette structure adopte alors une forme qui minimise son énergie élastique telle qu'on la voit sur la photo à 0V. Lorsqu'un champ électrique est appliqué à cette structure, le polymère se dilate, provoquant ainsi la fermeture de la main [25]. b.) Robot poisson. Les polymères électroactifs sont fixés à une structure gonflable, leur actionnement suscite un mouvement ondulatoire [24]. c.) Robot ver de terre composé de plusieurs cellules comprenant chacune six actionneurs. Soumis à un voltage, ces derniers flambent et poussent sur la cellule voisine créant ainsi un robot articulé capable de ramper comme un ver [23].

À l'instar des piézoélectriques, ces systèmes peuvent également être utilisés non pas pour générer un mouvement, mais pour le recevoir. En effet, si un champ électrique crée une déformation, déformer un polymère électroactif préalablement chargé modifie le champ électrique. Deux autres domaines d'applications intéressants sont ainsi les senseurs et les collecteurs d'énergie. Appuyer sur un polymère électroactif diminue la distance entre électrodes et augmente ainsi sa capacité. C'est le principe de base derrière l'utilisation de ces systèmes comme senseurs. Une idée particulièrement prometteuse dans le domaine de la robotique consiste à coupler la possibilité de sentir les déformations à celle de bouger. On crée alors une structure très proche d'un muscle réel : capable de mouvement et de proprioception. Des "peaux" robotiques sont ainsi en plein développement [29, 30], elles permettraient par exemple aux robots d'éviter d'éventuels obstacles sur leur chemin.

Le principe des collecteurs d'énergie est très proche. Lorsqu'un voltage constant est appliqué au système, une certaine quantité de charges Q y est stockée. Si on autorise alors le film à se contracter, la capacité C décroît ($C \sim S/h$ avec S la surface des électrodes, h la distance les séparant). La contraction du système implique la diminution de S et l'augmentation de

h). La quantité de charges restant constante (on suppose qu'il n'y a pas de fuite), le potentiel électrique augmente en conséquence. On convertit ainsi de l'énergie mécanique en énergie électrique (voir II.7). Voilà donc un moyen de récolter l'énergie de la houle grâce à des membranes électro-actives déformées par les vagues [31, 32], ou encore l'énergie de nos mouvements, *via* des patches collés sur nos articulations [33]. Bien entendu, le nombre d'ap-

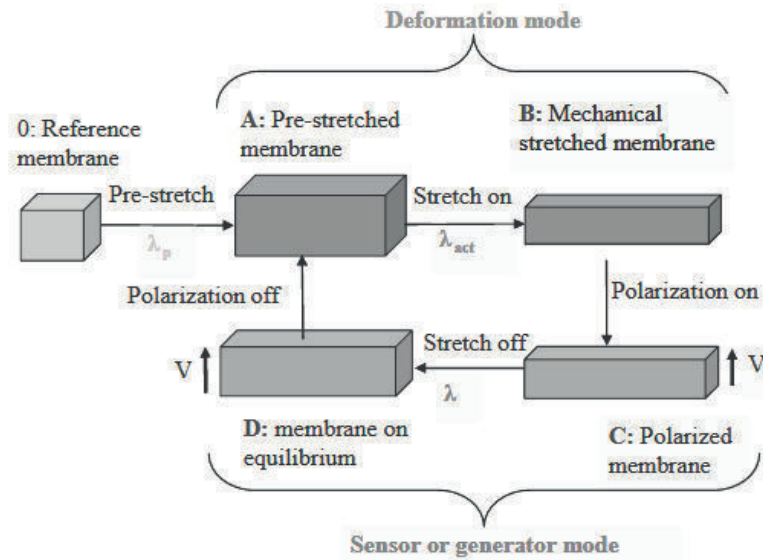


Fig. II.7 Utilisation des polymères en mode déformation ou générateur. Pour récolter de l'énergie il faut étirer mécaniquement le polymère (de A à B), puis lui appliquer une différence de potentiel (de B à C), l'étirement mécanique est ensuite relâché, la variation de capacité pendant cette phase produit de l'électricité, le polymère retrouve enfin son état initial lorsque le voltage est relaxé [33].

plications potentielles est bien plus élevé, nous pourrions citer les pompes microfluidiques, des réseaux à pas variables pour l'optique... Toutefois, tous ces objets fonctionnent à des voltages assez élevés - de quelques centaines à quelques milliers de volts, suivant l'épaisseur de la membrane - et même si la puissance requise est faible cet inconvénient s'avère assez handicapant. À ce jour, aucune de ces applications n'a été industrialisée.

Si quelques instabilités mécaniques de type flambage ont été observées dans ces polymères diélectriques, elles ne constituent que rarement le coeur des recherches dans ce domaine. Plusieurs études relèvent cependant une impressionnante instabilité conduisant à l'apparition de rides au niveau des électrodes (voir figure II.8.b). Elle est en général suivie par le claquage du matériau, d'où son importance. Suo attribue ces plis à l'instabilité de pull-in [20]. En effet, il peut se produire dans le polymère un phénomène semblable à une transition de phase (la courbe voltage/déformation II.5.b n'est pas monotone), qui conduit à l'apparition de zones plus fines que d'autres. Elles subissent alors un champ électrique plus important et donc s'affinent et se dilatent plus que les régions voisines épaisses. Elles se trouvent de plus en plus contraintes et finissent par rider. En général, peu après l'apparition des rides, un claquage se produit, dû à l'élévation du champ électrique dans les zones amincies. De nombreuses études se sont concentrées sur ce problème qui s'avère très riche. Ainsi, il sem-

blerait que le pré-étirement influe sur la forme de la transition de phase électro-mécanique. L'équipe de Jian Zhu [34] a remarqué que si le pré-étirement est faible, les rides se déplacent à la surface du polymère : l'instabilité devient dynamique ; ce qui n'est plus le cas lorsque le pré-étirement augmente. Des instabilités de flambage plus simples (sans notion de transition de phase) ont également été observées. Ainsi, dès les études de Ronald Pelrine de l'année 2000 [35, 17] des plis dans l'électrode ont été observés (figure II.8.a.). Néanmoins, ce flambage, dont l'origine est sans doute similaire à celui que nous étudierons, ne semble pas avoir intéressé les auteurs. Leur but était en effet d'obtenir les plus grandes déformations possibles. La direction du flambage vient très probablement du fait que le pré-étirement dans la membrane n'est pas parfaitement isotrope. Enfin, des rides dues à la géométrie de l'actionnement ont été observées dans quelques études [36]. La plupart du temps, néanmoins, les membranes étant fortement pré-étirées ces rides conduisent à une instabilité de pull-in et à la ruine du matériau. C'est en général sur cet aspect que l'étude se porte.

L'étude des instabilités mécaniques survenant dans les polymères diélectriques est un axe de recherche très peu développé à notre connaissance. En effet, le potentiel technologique que représentent ces systèmes fait que les recherches se sont essentiellement concentrées sur l'amélioration de leurs propriétés mécaniques et électriques, ainsi que sur leur mise en application. Cela a permis la naissance d'outils numériques et théoriques adaptés, mais finalement assez peu d'utilisation à des fins fondamentales. Or, dans les exemples précédents, les paramètres physiques des instabilités mécaniques (longueur d'onde, seuil d'apparition, et même ses causes) ne sont pas discutés. Il y a donc un travail à fournir afin de comprendre, et éventuellement d'utiliser ces instabilités mécaniques. C'est l'objectif de cette partie : déclencher et étudier différentes sortes d'instabilités mécaniques dans les polymères diélectriques . Notre point de vue sur ces systèmes est ainsi un peu différent de celui couramment adopté. Nous voyons l'étirement de la membrane sous l'effet du champ électrique comme une croissance (au sens biologique). Le polymère diélectrique va finalement être pour nous un outil permettant d'étudier des instabilités mécaniques suscitées par une croissance non homogène. Nous pourrions alors nous demander quelles sont les caractéristiques physiques de ces instabilités mécaniques ? Puis comment doit croître une membrane plane afin d'obtenir une forme tridimensionnelle donnée ? Et comment obtenir ce type d'actionnement avec ces systèmes ?

II.2 Actionnement inhomogène : flambage d'une électrode circulaire

II.2.1 Une expérience typique

Une expérience typique d'actionnement inhomogène consiste à prendre une membrane circulaire d'élastomère, d'une dizaine de centimètres de diamètre, encastrée dans un cadre rigide. En son centre est déposée une électrode de diamètre 1 cm, de sorte que seule la partie centrale du système est sensible au champ électrique, le reste de la membrane est complètement passif. L'électrode, faite de poudre de noire de carbone, est parfaitement solidaire du polymère, elle rend sa surface conductrice sans changer ses propriétés mécaniques. Le cadre est tenu horizontalement ou verticalement.

Imposons alors une différence de potentiel à cette structure : l'électrode croît. Au début la

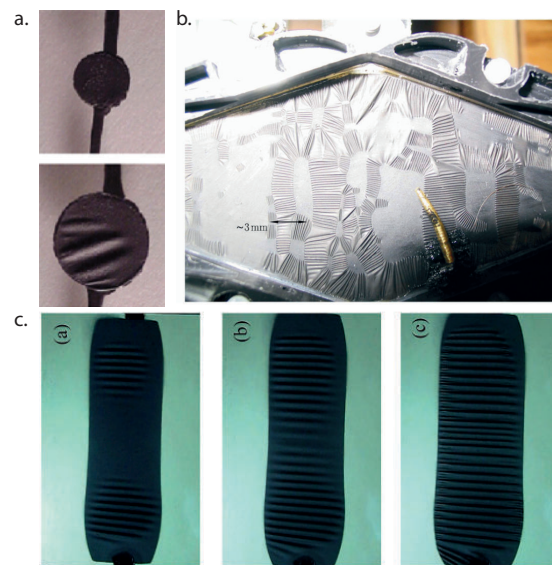


Fig. II.8 a.) Instabilité mécanique observée par Pelrine [35]. Une zone active croît dans une matrice passive : ce problème est similaire au nôtre, sauf que la membrane est ici fortement étirée. Malgré cette grande pré-tension, la zone active finit par flamber. L'irrégularité de la déflexion est sans doute due à une anisotropie de l'étirement. b.) Rides observées avant l'instabilité de pull-in [20]. Certaines zones sont ridées tandis que d'autres restent planes. À noter que ces motifs de rides peuvent être dynamiques [34]. En général, peu après l'apparition de ce motif, le polymère claque. c.) Rides observées dans une bande active encastrée dans une matrice passive [36]. Ce problème est très proche de ceux que nous examinerons plus loin.

membrane reste plane, mais lorsque le voltage devient suffisamment important, une bosse apparaît. La partie couverte par l'électrode sort du plan et forme un dôme axisymétrique (voir figure II.9, le flambage est mis en évidence par la déformation de la ligne rouge de la nappe laser, comme nous l'expliquerons plus loin).

Pour expliquer cette instabilité de flambage, il nous faut d'abord nous pencher sur l'effet

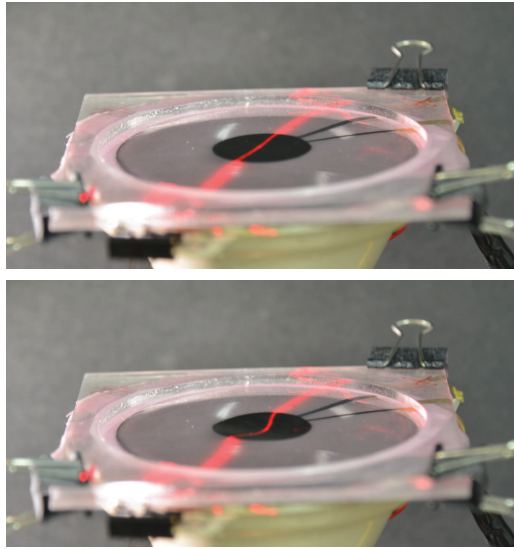


Fig. II.9 Une membrane circulaire est encastrée dans un cadre rigide et présente en son centre une électrode circulaire. Tant que le voltage ne dépasse pas une valeur seuil, la membrane reste plane (photo du haut). Dès ce seuil atteint, la zone couverte par l'électrode sort du plan et forme une bosse. La ligne rouge est une nappe laser projetée en incidence rasante sur le film : sa déflexion indique un mouvement hors du plan.

du champ électrique sur le polymère.

II.2.2 Actionnement des polymères diélectriques

a) Électrode couvrant entièrement le polymère

Considérons tout d'abord le cas plus simple dans lequel l'électrode soumise à un voltage V couvre entièrement une membrane d'épaisseur h , d'aire S . Un polymère électroactif est un condensateur mou. Le charger a alors deux conséquences qui concourent au même effet. Tout d'abord, en s'attirant, les charges de signes opposées génèrent une contrainte dans l'épaisseur du polymère qui conduit à son amincissement. Par effet Poisson, cet amincissement se traduit par une dilatation dans le plan des électrodes. Le deuxième effet résulte de la répulsion des charges de même signe sur chaque électrode. Là encore, l'effet est une expansion dans le plan des électrodes. C'est ce que nous illustrons sur la figure II.10.

Pour calculer l'effet du champ électrique nous pouvons reprendre le raisonnement de Pelrine [16] qui présente l'avantage d'être assez simple. Nous en donnerons toutefois une lecture un peu différente. Mentionnons également Zhigang Suo, qui a développé une approche thermodynamique, plus technique, permettant de calculer les contraintes dans différentes configu-

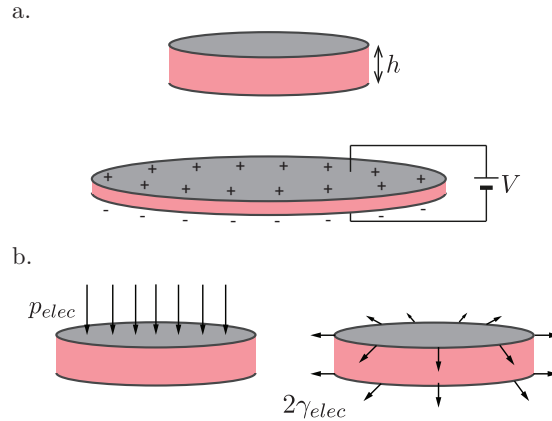


Fig. II.10 a.) Principe d'actionnement : l'application d'une différence de potentiel charge les électrodes. Les interactions Coulombiennes entre charges entraînent la dilatation dans le plan de la zone active. b.) Les interactions entre charges ont deux effets distincts (qui ont la même conséquence). À gauche, les charges plus et moins de part et d'autre de la membrane s'attirent, créant ainsi une contrainte compressive dans l'épaisseur, nous parlons de pression électrique p_0 . À droite les charges de mêmes signes sur une électrode se repoussent, créant une contrainte en tension dans le plan de l'électrode. L'énergie de cette interaction étant proportionnelle à la surface de l'électrode, nous faisons un parallèle avec la tension de surface et parlons de tension de surface (négative) électrique γ_{elec} .

ractions [20].

L'énergie électrique d'un condensateur plan isolé vaut $\frac{1}{2}CV^2$, avec C la capacité. Si maintenant le voltage est fixé par un générateur extérieur fournissant un travail QV , avec $Q = CV$ la charge, l'énergie électrique totale du système s'écrit alors :

$$U_{elec} = \frac{1}{2}CV^2 - QV = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r V^2 \frac{S}{h}$$

avec $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m la permittivité du vide, ε_r la constante diélectrique du polymère, S l'aire de l'électrode. Afin d'obtenir la contrainte s'appliquant dans l'épaisseur de la membrane nous dérivons cette énergie par rapport à l'épaisseur h (à S et V constants).

$$p_0 = \frac{1}{S} \frac{\partial U_{elec}}{\partial h} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \left(\frac{V}{h}\right)^2$$

Les charges induisent donc une pression électrostatique p_0 sur la membrane (schéma de gauche II.10.b). Toutefois, contrairement au condensateur à électrodes métalliques rigides, le système que nous considérons ici est déformable : ses électrodes sont souples. En dérivant l'énergie par rapport à la surface (à h et V constants) nous pouvons donc calculer les efforts s'exerçant dans le plan des électrodes. Il apparaît clairement dans l'expression : $U_{elec} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r V^2 \frac{S}{h}$ que l'énergie dépend de la surface S . Par définition $\frac{\partial U_{elec}}{\partial S} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r V^2 \frac{1}{h}$ est donc une tension de surface. Celle-ci étant négative, elle tend à accroître la surface, contrairement à la tension de surface "classique". Physiquement, la répulsion des charges de même signe est responsable de cette dilatation (schéma de droite II.10.b). Cet effet ne joue donc que sur les charges se trouvant aux extrémités de l'électrode : celles à qui il manque des voisines. Le

parallèle avec la tension de surface est ainsi direct. Afin d'éclaircir cette idée, nous pouvons évoquer un phénomène reposant également sur cet effet de répulsion de charges : l'électromouillage. Une goutte conductrice est déposée sur une surface isolante qui elle-même repose sur une surface métallique. Lorsqu'une différence de potentiel est imposée entre le métal et la goutte, le liquide s'étale (voir II.11). Cet effet est dû à la répulsion des charges de même signe, à l'instar de la tension de surface négative introduite avant. En fait, on peut même écrire que la tension de surface effective du liquide γ' une fois le voltage appliqué vaut $\gamma' = \gamma - \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{V^2}{h}$ [37]. Appliquer une différence de potentiel au liquide revient, d'une certaine manière, à diminuer sa tension de surface. De manière semblable dans les polymères

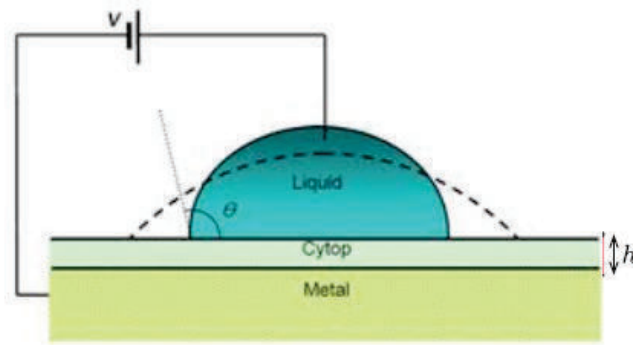


Fig. II.11 *Électromouillage : l'application d'une différence de potentiel entre la goutte et le substrat métallique provoque l'étalement de la goutte.*

diélectriques, nous avons :

$$2\gamma_{elec} = \frac{\partial U_{elec}}{\partial S} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{V^2}{h}$$

Le facteur 2 vient du fait qu'il y a deux surfaces chargées (par analogie avec la tension dans un film de savon). Ainsi, dans les polymères diélectriques coexistent un effet de pression électrostatique (observé en général dans les condensateurs rigides) et un effet de tension de surface négative (observé en général en électromouillage).

Quelles sont les conséquences de p_0 et γ_{elec} sur cette membrane ? Loin des bords, la tension de surface négative crée une contrainte biaxiale positive dans le plan (une tension mécanique) $\sigma_r = \sigma_\theta = -2\gamma_{elec}/h$. D'autre part, la pression électrostatique crée une contrainte compressive dans l'épaisseur de la membrane : $\sigma_z = -p_0$. Nous avons ainsi :

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\sigma_z = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{V}{h}\right)^2$$

Pour des déformations suffisamment faibles (nous ne dépassons jamais les 20% dans nos expériences), la loi de Hooke (I.3) s'applique et nous permet de calculer les déformations e :

$$e_r = e_\theta = \frac{-e_z}{1+2\nu} = \frac{1}{2E}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{V}{h}\right)^2$$

Avec ν le coefficient de Poisson de la membrane. Dans la plupart des études portant sur les polymères diélectriques, l'intérêt était porté sur les déformations et non sur l'état de

contraintes. Il est alors pertinent de noter que le même état de déformation est obtenu en imaginant que la plaque est comprimée dans son épaisseur par une pression $-\sigma_0$, sans effet de tension de surface, avec :

$$-\sigma_0 = \frac{1}{\nu} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \left(\frac{V}{h} \right)^2 = p_0 / \nu$$

σ_0 est bien sûr plus élevé que la pression électrostatique réelle. En particulier, dans le cas où $\nu \approx 1/2$ (le cas le plus fréquent des élastomères) nous voyons que la même distribution de déformation est obtenue en appliquant une pression électrostatique double et pas de tension de surface. Ajouter un état de pression hydrostatique à la membrane ne change pas son état de déformation, mais simplifie grandement le champ de contraintes dans cette situation, comme l'a remarqué Suo [20].

Cette vision selon laquelle un couplage électro-mécanique conduit à une pression électrostatique équivalente deux fois plus importante que celle s'exerçant sur un condensateur rigide est la plus répandue [16, 17]. Une grande partie des articles concernant les polymères diélectriques s'intéresse à des configurations dans lesquelles soit toute la membrane est couverte, soit seule la déformation importe (avec en plus de grandes pré-tensions appliquées à la membrane), cette approche permet de calculer facilement la déformation du système et est alors tout à fait légitime. Cependant, nous souhaitons étudier des problèmes de flambage déclenchés par un actionnement non-homogène. L'état de contrainte est donc une question cruciale pour nous, avec en particulier l'effet de la tension de surface négative sur le seuil de flambage. La tension mécanique va-t-elle empêcher le flambement ? Est-il possible de maintenir ce point de vue si la tension de surface n'est pas homogène ? En particulier, que se passe-t-il au niveau de la ligne de contact ?

Utilisons une approche variationnelle pour établir les équations modélisant notre système.

b) Actionnement non-homogène : cas 1D

Considérons une bande de longueur b , de largeur w et d'épaisseur h . Nous supposons la bande ne se déforme pas selon y , comme dans le cas d'une plaque, $e_{yy} = 0$ (nous pourrions également choisir une condition de bords libre $\sigma_{yy} = 0$ sans changer qualitativement les résultats). Voir figure II.12. e est la déformation le long de l'abscisse curviligne S , e_z la déformation dans l'épaisseur et θ la pente locale.

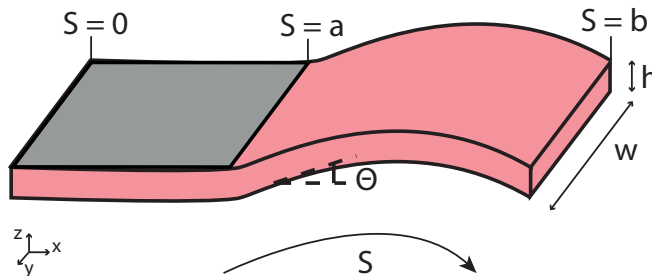


Fig. II.12 Une bande est partiellement recouverte d'une électrode.

La loi d'Hooke (I.3) s'écrit, avec $e_{yy} = 0$:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[e(1-\nu) + \nu e_z] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[e_z(1-\nu) + \nu e] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\nu[e_z + e]\end{aligned}\quad (\text{II.1})$$

L'énergie élastique d'étirement par unité de longueur dS s'écrit (éq. (I.37)) :

$$\frac{1}{2} \frac{Ehw}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e^2 + 2\nu e e_z + (1-\nu)e_z^2]$$

L'énergie de flexion par unité de longueur dS s'exprime quant à elle (éq. (I.35)) :

$$\frac{1}{2} \frac{Eh^3w}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d\theta}{dS} \right)^2$$

Nous nous limitons dans cette étude à l'ordre deux en flexion, nous négligeons donc les variations de h avec le voltage, $\frac{d\theta}{dS}$ étant déjà d'ordre 1.

Enfin, l'énergie électrique est celle d'un condensateur plan :

$$udS = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V^2}{h(1+e_z)} w(1+e_y)(1+e)dS$$

Nous tenons compte dans cette expression des changements de longueur. Avec l'hypothèse $e_y = 0$, l'énergie électrique par unité de longueur dans la zone active devient au premier ordre :

$$udS = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V^2}{h} w(1+e-e_z)dS$$

Nous considérons qu'une force \mathbf{R} est appliquée au niveau de l'extrémité $S = b$; ainsi qu'un moment en $S = 0$, d'où une énergie potentielle valant : $-(xR_x + yR_y)$ où $x = \int_0^b ds \cos \theta = \int_0^b dS(1+e) \cos \theta$ et $y = \int_0^b dS(1+e) \sin \theta$. D'autre part les électrodes couvrent la zone s'étendant de $0 < S < a$, avec $a < b$ (voir schéma II.12). Dans ces conditions, l'énergie totale vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{tot} &= \int_0^b \frac{1}{2} \frac{Ehw}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e^2 + 2\nu e e_z + (1-\nu)e_z^2] + \frac{1}{2} \frac{Eh^3w}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d\theta}{dS} \right)^2 dS \\ &+ \int_0^a udS - \int_0^b (1+e)(R_x \cos \theta + R_z \sin \theta) dS - M\theta(0)\end{aligned}$$

À l'équilibre l'énergie est extrémale, minimisons donc cette expression en fonction des différentes variables afin de déterminer les équations d'équilibre.

Minimisation par rapport à θ

La variation par rapport à θ conduit à :

$$\int_0^b \frac{Eh^3w}{12(1-\nu^2)} \theta' \delta\theta' dS + \int_0^b (1+e)(R_x \sin \theta - R_z \cos \theta) \delta\theta dS - M\delta\theta(0) = 0$$

qu'on intègre par parties :

$$\int_0^b -\frac{Eh^3w}{12(1-\nu^2)}\theta''\delta\theta dS + \int_0^b (1+e)(R_x \sin \theta - R_z \cos \theta)\delta\theta dS - M\delta\theta(0) + \frac{Eh^3w}{12(1-\nu^2)}[\theta'\delta\theta]_0^a = 0$$

Pour finalement obtenir :

$$\frac{Eh^3w}{12(1-\nu^2)}\theta'' + (1+e)(-R_x \sin \theta + R_z \cos \theta) = 0 \quad (\text{II.2})$$

Nous retrouvons donc l'équation (I.10), obtenue pour une barre élastique non active soumise à R_x et R_z . Il est intéressant de constater que le mode d'activation particulier ne modifie en rien l'équation donnant la forme d'équilibre de la plaque. D'autre part, bien que l'élastomère ne soit que partiellement recouvert par les électrodes, l'équation des moments est continue à l'interface.

Les bornes de l'intégration par parties donnent également

$$M(0) = \frac{Eh^3w}{12(1-\nu^2)}\theta'(0)$$

qui peut être généralisée en :

$$M = \frac{Eh^3w}{12(1-\nu^2)}\theta'$$

Nous retrouvons l'équation (I.9), qui est la relation constitutive habituelle en élasticité. Ici non plus, le mode d'actionnement électrostatique n'apparaît pas dans les équations.

Nous pouvons aussi étudier l'effet de la courbure du polymère dans cette dernière relation. La capacité d'un condensateur d'épaisseur h présentant un rayon de courbure R_1 tels que $h \ll R_1$ s'exprime :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{1+h/(2R_1)}{1-h/(2R_1)}\right)} \quad (\text{II.3})$$

En développant la fonction logarithme dans (II.3), puis en faisant le même calcul de minimisation, nous constatons que cette correction ajoute une rigidité en flexion dépendant du voltage. Nous obtenons ainsi :

$$M = \left(\frac{Eh^3w}{12(1-\nu^2)} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_rwhV^2}{12} \right) \theta'$$

Cette remarque est assez générale dans la mesure où par symétrie, les corrections liées à la courbure du condensateur seront proportionnelles à θ^2 . Elles auront donc toujours pour effet de modifier la rigidité de flexion. Pour un voltage de 5000 V, le maximum à notre disposition, s'exerçant sur une membrane de $150 \mu\text{m}$ nous trouvons $\frac{Eh^3w}{12(1-\nu^2)} \approx 10 \frac{\varepsilon_0\varepsilon_rwhV^2}{12}$. Au grand maximum, cet effet entraîne une modification de 10% du module de flexion apparent, nous le négligerons donc dans la suite.

Cette première étape du calcul nous a conduit à retrouver les équations établies dans le chapitre précédent. Le mode d'actionnement semble donc ne pas modifier les équations régissant le flambage.

Minimisation par rapport à e (équilibre des forces longitudinales)

On calcule la variation d'énergie par rapport à la variable e :

$$\int_0^b \left[\frac{Ehw}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e + \nu e_z) - (R_x \cos \theta + R_z \sin \theta) \right] \delta e dS + \int_0^a \frac{\partial u}{\partial e} \delta e dS = 0$$

Qui conduit à deux nouvelles relations, suivant qu'on est dans la zone passive :

$$\frac{Ehw}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e + \nu e_z] = (R_x \cos \theta + R_z \sin \theta) = T \quad (\text{II.4})$$

ou active :

$$\frac{Ehw}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e + \nu e_z] - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V^2}{h} w = (R_x \cos \theta + R_z \sin \theta) = T \quad (\text{II.5})$$

On reconnaît dans T l'expression de la force tangentielle. Ces deux équations (II.4),(II.5) expriment donc la relation habituelle contrainte-déformation produite par des forces tangentielles.

Ces relations sont à nouveau équivalentes à celle obtenue lorsque nous avons calculé l'*Elastica* (I.11), et nous pouvons les réécrire en utilisant les relations d'Young (II.1) :

$$\sigma_{xx} h w - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V^2}{h} w = T$$

Il existe donc un saut de contrainte σ_{xx} entre les zones active et passive; Nous avons en revanche vu dans le chapitre précédent (équation (I.11)) que la force tangentielle totale est continue. L'électrode agit donc comme une "peau" enveloppant le matériau dans laquelle existe une tension longitudinale $-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V^2}{h} w$. Cette tension étant proportionnelle à w , elle rappelle la tension de surface (avec simplement un signe moins). Notons par ailleurs que cette force n'a pas pour origine l'effet Poisson : prendre $\nu = 0$ ici donnerait le même genre de résultats. Cet effet est lié à la déformabilité des électrodes et à la répulsion des charges de mêmes signes.

Minimisation par rapport à e_z (équilibre des forces suivant z)

La variation d'énergie par rapport à e_z donne :

$$\int_0^b \frac{Ehw}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_z + \nu e] \delta e_z dS + \int_0^a \frac{\partial u}{\partial e_z} \delta e_z dS = 0$$

et donc :

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_z + \nu e] = -\frac{1}{wh} \frac{\partial u}{\partial e_z} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V^2}{h^2}$$

Dans la zone active. Que nous pouvons également écrire :

$$\sigma_{zz} = -p_0 \text{ avec } p_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V^2}{h^2} \quad (\text{II.6})$$

Avec $p_0 = 0$ dans la partie passive. Nous retrouvons donc l'expression de la pression électrostatique sur les faces d'un condensateur rigide (pression de Maxwell).

Pour finir, rassemblons tous ces résultats et interprétons la distribution des forces et des contraintes.

Distribution des contraintes et forces réelles

La bande est donc sous l'effet d'une pression électrostatique s'appliquant sur les faces des électrodes et d'un effet de peau qui modifie la relation force/contrainte le long des électrodes, comme nous l'avons vu dans paragraphe II.2.a). Nous pouvons maintenant expliciter les conditions de passages à la frontière de l'électrode.

L'équilibre de la plaque est donné par deux équations : l'équilibre des moments (II.2), trouvé en minimisant l'énergie par rapport à θ et similaire à l'*Elastica* calculée au chapitre précédent (I.10); et la relation force/contrainte (II.5), semblable à l'équation (I.11). Nous pouvons alors utiliser l'équation (II.6) pour relier la déformation le long de l'épaisseur e_z à la pression électrostatique :

$$e_z = -\frac{\nu}{1-\nu}e - p_0 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{Eh(1-\nu)}$$

et réinjecter e_z dans l'équation (II.5) pour trouver :

$$hw \left(\frac{1}{1-\nu^2} Ee - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V^2}{h^2} \left[\frac{1}{1-\nu} \right] \right) = T \quad (\text{II.7})$$

Avec $V = 0$ dans la zone passive.

Pour résoudre les problèmes de type flambage, d'instabilité ou d'équilibre de cette poutre partiellement active, il suffit donc de résoudre les équations (II.7) (loi de compressibilité) et (II.2) (*Elastica*). Il est remarquable que les contraintes en tensions créées par les charges se traduisent par un effet de "peau" qui n'a pas d'influence sur le flambage. Afin d'illustrer cet effet de peau, imaginons une membrane soumise à sa propre tension de surface (voir schéma II.13). Sous l'effet de cette force la barre est comprimée. Pourtant cette compression ne conduit pas au flambage car la flexion ne diminuant pas la surface de l'objet, elle ne permet donc pas de diminuer l'énergie du système. Dans ce cas aussi, l'effet de peau modifie l'état de contraintes de l'objet, sans pour autant influencer son flambage.

Nous pouvons maintenant manipuler ces expressions afin d'interpréter l'effet de l'actionnement électrique. Commençons par retrouver le point de vue de Pelrine.

Point de vue de Pelrine : pression double

Si nous considérons une bande uniquement sujette à une pression mécanique sur une partie des ses faces $\sigma_{zz} = -p_0$. Les relations d'Hooke conduisent à :

$$hw \left[\frac{1}{1-\nu^2} Ee - \frac{\nu}{1-\nu} p_0 \right] = T \quad (\text{II.8})$$

Constatons maintenant que la relation force/contrainte ((II.7)) contient un terme supplémentaire comparé à la simple pression mécanique ((II.8)) : il n'est donc pas dû à la pression

sur les faces du condensateur. La nature électrostatique des forces ajoute ainsi le terme $-\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V^2}{h^2} h w$ dans l'équation (II.7).

Nous pouvons donc réécrire l'équation (II.7) de la façon :

$$T = h w \left[\frac{1}{1 - \nu^2} E e - \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{p_0}{\nu} \right]$$

Formellement, tout se passe donc comme si une pression mécanique p_0/ν s'appliquait sur le système. Dans le cas d'un élastomère, $\nu = 0.5$, la pression est donc doublée comparée à celle s'exerçant sur un condensateur à électrodes rigides. Le point de vue de Pelrine s'étend donc dans la configuration où l'électrode ne couvre pas entièrement la membrane. Terminons cette

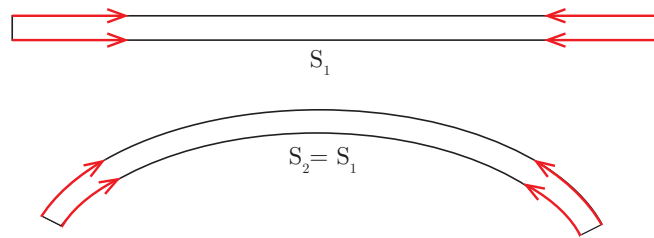


Fig. II.13 Une membrane subit sa propre tension de surface. Le flambage se faisant à surface constante ($S_1 = S_2$), il ne diminue pas l'énergie de surface du système ici. La tension de surface ne fait donc pas flamber cette membrane

partie avec un dernier point de vue, qui est celui que nous adopterons dans la suite de ce travail.

Un dernier point de vue : croissance équivalente

Si nous considérons une bande sujette uniquement à une dilatation dans le plan e_0 , les relations de Hooke mènent à :

$$\frac{E h w}{1 - \nu^2} (e - (1 + \nu) e_0) = T$$

Forme sous laquelle peut être écrite l'équation (II.7), avec une déformation de croissance :

$$e_0 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V^2}{E h^2}$$

qui définit un nouvel état de repos, en l'absence de force extérieure $T = 0$.

Dans ce point de vue nous utilisons les équations d'équilibre habituelles (I.10), (I.11), sans considérer de force électrostatique : il n'existe donc pas de différence de tension de surface ou de discontinuité d'aucune quantité à la frontière de l'électrode. En revanche les zones actives voient leurs longueurs au repos augmentées de e_0 : le matériau croît !

Cette déformation est liée à la contrainte électrostatique effective σ_0 via : $e_0 = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 = \frac{p_0}{E}$

Dans la suite, nous adopterons ce point de vue de croissance équivalente qui nous semble simple et pertinent dans le mesure où nous cherchons à déclencher des instabilités mécaniques.

Nous modéliserons ainsi le polymère diélectrique comme un système dont la longueur de la zone active augmente lorsqu'une différence de potentiel lui est appliqué. Nous n'aurons pas besoin de connaître la nature des forces créées par les interactions électrostatiques pour analyser le flambage, seule la valeur de la croissance sera nécessaire.

Nous définissons :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2E} \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{V}{h} \right)^2 \quad (\text{II.9})$$

que nous appellerons la "croissance électrostatique". Il s'agit de la déformation atteinte par une membrane active non contrainte (*i.e* en l'absence de chargement mécanique) sous l'effet d'un voltage V . C'est cette croissance électrostatique que nous utiliserons dans la suite du chapitre.

II.2.3 système expérimental

Polymère diélectrique

Nous utilisons des polymères diélectriques faits de Polyvinyle syloxane (PVS), un élastomère de module d'Young 250 kPa (mesuré par un test de traction standard). La membrane est obtenue en étalant le polymère encore liquide au spincoater. Son épaisseur est homogène et dépend de la vitesse de rotation de la machine, typiquement 15 secondes à une vitesse de 500 tours par minute conduisent à une épaisseur d'environ $150\mu\text{m}$. Les dimensions de la membrane sont fixées par une série de contraintes pesant sur le système que nous souhaitons utiliser. Nous souhaitons :

- (i) Des membranes manipulables à la main : typiquement une taille $l \sim 10\text{ cm}$.
- (ii) Des membranes qui flambent avant de claquer électriquement.
- (iii) Une déformation maximale, c'est-à-dire pouvoir travailler à 5kV, voltage maximum à notre disposition.
- (iv) Des membranes qui ne soient pas sensibles à leur propre poids.

Afin de dimensionner la membrane, nous traduisons ces contraintes en lois d'échelle. Pour le point (ii), nous avons vu dans le premier chapitre que la déformation typique de flambage d'Euler vaut $e_{flamb} \sim (h/l)^2$. Pour nous assurer que la membrane est capable de flamber avant de claquer, cette valeur doit être petite devant la déformation typique au moment du claquage. Prenons alors le champ critique de claquage de l'huile silicone $E_{claq} = 15\text{ kV/mm}$, qui est le champ maximum que peut supporter l'huile silicone avant qu'un arc électrique ne soit créée. La condition (ii) s'exprime ainsi : $e_{claq} > e_{flamb}$, d'où :

$$\epsilon_0 \epsilon_r E_{claq}^2 / E > (h/l)^2$$

Avec $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{F/m}$, $l \sim 10^{-1}\text{ m}$ et $E \sim 10^5\text{ Pa}$ on obtient la condition $(h/l)^2 < 0.02$ soit, en tenant compte de (i) $h \sim 0.02 \times 10^{-1} \times 10^{-1}\text{ m}$, c'est-à-dire h de l'ordre de la centaine de microns. Par ailleurs, pour cette épaisseur le voltage de claquage sera de l'ordre du kV, ce qui répond du même coup au point (iii).

Comment une telle structure résiste-t-elle à son propre poids ? Nous voulons que l'énergie de flexion soit grande devant l'énergie gravitaire, de sorte que le poids de la structure ne suffise pas à la faire flamber : $\frac{Eh^3}{R^2} l^2 \gg \rho g l^2 h \delta$ où ρ est la masse volumique du polymère, $\delta \sim l^2/R$

la déflexion. Dans le pire des cas, nous avons $R \sim l$, ce qui conduit à

$$\frac{E}{\rho g} \gg \frac{l^3}{h^2}$$

Soit $\frac{l^3}{h^2} \ll 10$ m, ce qui n'est pas vérifié ici. Réaliser des structures moins sensibles à la gravité exige des structures moins élancées : soit une taille plus petite, soit une épaisseur plus grande. Une membrane plus épaisse implique à son tour des tensions électriques plus grandes pour obtenir les mêmes déformations, ce qui n'est pas possible avec notre montage.

Lors de son stage au laboratoire, Bruno Secordel, a montré qu'une épaisseur de $150 \mu\text{m}$ est un bon compromis. À cette valeur, et si la membrane a été correctement réalisée (le moindre défaut : bulle d'air, poussière... rend la membrane nettement plus sensible au claquage), il est possible d'atteindre 5kV. Nous travaillerons autour de cette valeur en utilisant des membranes d'épaisseurs comprises entre 200 et $70 \mu\text{m}$ (soit une vitesse de rotation comprise entre 400 et 900 tours par minute pendant quinze secondes). La première série d'expériences que nous présenterons a été conduite avec une membrane reposant sur un bain d'eau. Nous avons remarqué que dans cette configuration, pour une raison inconnue, les membranes semblent plus sensibles au claquage. Nous avons donc favorisé des membranes plus épaisses (environ $200 \mu\text{m}$ d'épaisseur) que dans les autres expériences.

Les électrodes sont faites de noir de carbone. Il s'agit d'une poudre que nous déposons à la surface de la membrane avec un pinceau à travers un pochoir. La surface du polymère est ainsi rendue conductrice sans être rigidifiée. Nous peignons l'électrode de noir de carbone jusqu'à obtenir une couleur noire prononcée. À ce stade les électrodes ont une assez grande résistivité par unité d'épaisseur de l'électrode (que nous supposons constante), de l'ordre du $M\Omega$. Elle est proportionnelle à la longueur de l'électrode, et ne change pas significativement si nous appliquons plus de noir de carbone (sans agrandir la taille de l'électrode). L'adhésion des grains de carbone sur le PVS est remarquable. Il est même quasiment impossible d'effacer totalement l'électrode une fois déposée. Nous avons également vérifié que la conductivité est conservée lorsque la membrane est étirée, bien que nous observions une augmentation typique de 500% de la résistance pour un étirement de 40%. Une fois l'étirement relâché, la résistance reprend sa valeur initiale. Les quelques clichés pris au MEB d'une surface couverte étirée ou non nous montre une structure granuleuse, qui semble percoler, mais ne nous en apprend pas beaucoup plus sur les excellentes propriétés de conductivité de notre objet (Fig. II.14). Notons enfin qu'il est impossible expérimentalement de couvrir entièrement la membrane de noir de carbone. En effet, si les deux faces de la feuille de polymère sont peintes jusqu'à leurs extrémités, des effets de pointe conduisent à un claquage prématuré au bord de la membrane (voir schéma II.15). Systématiquement, une zone non peinte d'au moins quelques millimètres est donc laissée sur les bords de la membrane.

Caractérisation électrique

Nous cherchons ici à vérifier que le système est bien modélisable par un circuit RC dans lequel un condensateur (la membrane électro-active) est en série avec une résistance (due au noir de carbone), avec éventuellement une résistance de fuite en parallèle (voir Fig. II.16.a). Nous réalisons donc un circuit dans lequel une résistance $R = 100 \text{ k}\Omega$ est en série avec un

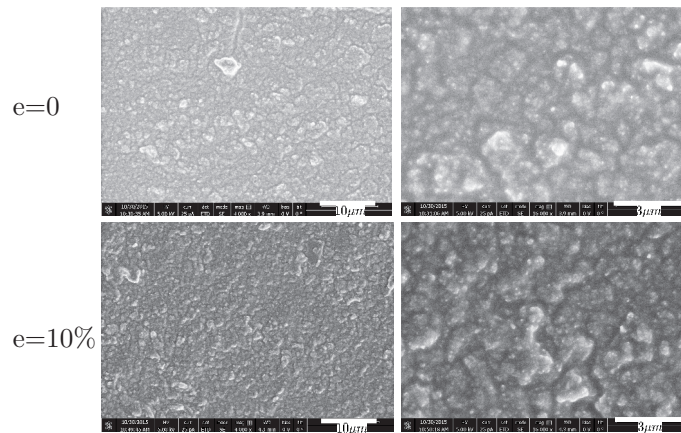


Fig. II.14 Clichés de Microscopie Électronique à Balayage (MEB) d'une surface de PVS recouverte d'une couche de noir de carbone. Ligne du haut : membrane non étirée. Ligne du bas : membrane étirée de quelques pourcents. On note une structure en grains. Il est en revanche impossible de distinguer le cas étiré de l'autre à partir de ces clichés.

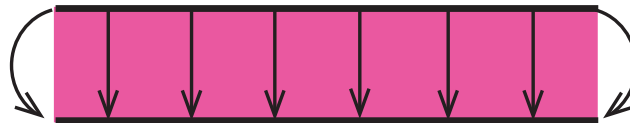


Fig. II.15 Lorsque l'électrode couvre entièrement la membrane, un claquage électrique se produit au niveau des bords du polymère.

polymère électroactif. Celle-ci fait $150 \mu\text{m}$ d'épaisseur, a une zone active circulaire dont nous ferons varier la taille et est encastrée dans un cadre circulaire de diamètre 10 cm. Nos premières observations expérimentales qualitatives semblent en bon accord avec la modélisation proposée : le polymère électroactif déphase le signal de $\frac{\pi}{2}$ à basse fréquence et rien à haute fréquence, typique d'un condensateur.

Plus spécifiquement nous soumettons ce système à un signal carré de période 3 s, d'amplitude U et nous mesurons la tension V aux bornes de la résistance R . Nous souhaitons également mesurer la capacité du polymère fortement déformé, c'est-à-dire soumis à un fort voltage. Il n'est cependant pas possible avec notre alimentation de moduler des amplitudes de l'ordre du kV comme nous le souhaiterions. Nous superposons donc un voltage continu de l'ordre du kilovolt au signal d'entrée U . Ainsi, nous soumettons le système à un signal carré, d'amplitude quelques centaines de volts autour d'une valeur moyenne de l'ordre du kilo volt.

Cette expérience nous permet d'obtenir deux informations. D'une part l'amplitude maximale du signal réponse nous donne accès à la résistance en série avec le condensateur R_{noir} . En effet, aux hautes fréquences le condensateur se comporte comme un fil et le montage devient celui de la figure II.16.b. (en omettant la résistance de fuite, très grande devant toutes les

autres). La résistance du noir de carbone vaut alors :

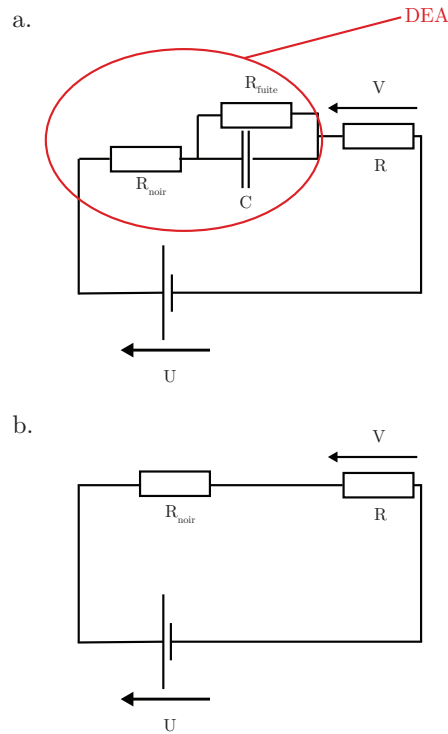


Fig. II.16 a.) Montage électrique expérimental. Le polymère diélectrique (*DEA Dielectric Electroactive Polymer*), modélisé par un condensateur en série avec une résistance, avec en parallèle une éventuelle résistance de fuite, est mis en série avec une résistance R connue. Nous mesurons le signal d'entrée et de sortie à l'aide d'un oscilloscope. b.) Circuit effectif à haute fréquence.

$$R_{noir} = R \left(\frac{U}{V} - 1 \right)$$

Cette première mesure nous permet de retrouver une résistance du noir de carbone comprise entre quelques centaines de $k\Omega$ et le $M\Omega$, conformément à nos expériences précédentes.

D'autre part, la décroissance exponentielle du signal est liée à la capacité du système, et le temps caractéristique de décroissance s'écrit :

$$\tau = \frac{1}{(R_{noir} + R)C}$$

La mesure de l'amplitude des signaux nous ayant donné R_{noir} , nous pouvons calculer la capacité du système. Nous menons cette expérience pour plusieurs tailles de zones actives et nous traçons la capacité mesurée en fonction de l'offset imposé. Le système se comporte donc comme un condensateur quel que soit le voltage imposé (dans la gamme testée), sa capacité augmente légèrement avec le voltage. Cet effet est attendu car la capacité s'exprime comme :

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{h}$$

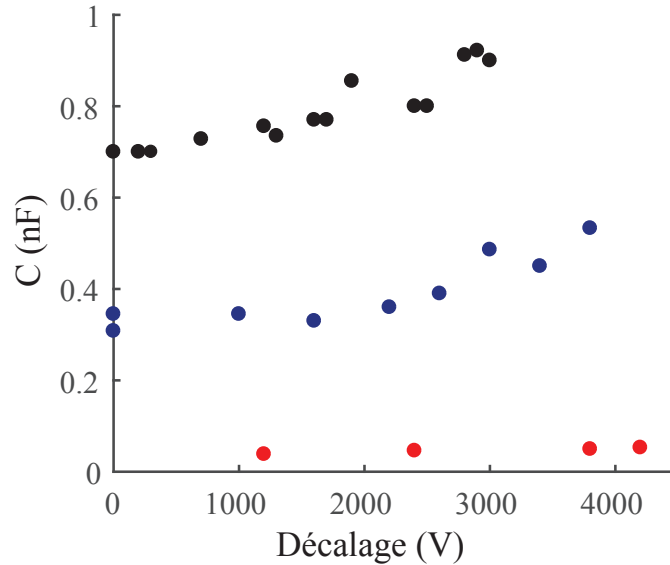


Fig. II.17 Capacité du système en fonction du décalage de la tension imposée. • : $a = 3.75 \text{ cm}$, • : $a = 2.5 \text{ cm}$, • : $a = 0.85 \text{ cm}$.

avec h qui diminue et S augmente lorsque V augmente. Nous constatons qu'elle augmente d'environ 40% lorsque le décalage atteint 4000 V (voir le graphique II.17) représentant la capacité mesurée en fonction du décalage en tension imposé). En utilisant les expériences de DIC (Digital Image Correlation) présentées dans la section suivante, un tel voltage correspond à une déformation dans l'épaisseur d'environ 7% (et donc d'environ 4% dans le plan). Le changement de longueur est donc responsable d'une variation d'environ 14% de la valeur de la capacité et n'est donc pas suffisante pour expliquer l'évolution de C . Afin de l'illustrer, nous traçons $C_{actuel} \frac{h_{ini}}{S_{ini}\epsilon_0}$ en fonction du décalage où $C_{actuel} = C(1 + 2|e_z|)$ tient compte de l'évolution de la surface et de l'épaisseur. e_z est calculé à partir de la valeur de la constante diélectrique trouvée dans la section suivante. Ce graphique nous permet d'accéder à l'évolution de la constante diélectrique avec le voltage (figure II.18). Nous observons que les courbes pour différentes tailles d'électrodes se superposent, confirmant le comportement de condensateur du polymère électroactif. Nous constatons également qu'en dépit de la prise en compte de la déformation, la constante diélectrique varie entre 2.1 et 3.2 avec la tension appliquée. Nous pouvons nous interroger sur la nature de cette variation : ϵ_r dépend-elle de e_r la déformation, ou du voltage V ? Ou dit autrement : le polymère est-il électrostrictif? Cette question est cruciale pour nous car si l'effet est électrostrictif, il est alors du même ordre de grandeur¹ que l'effet d'amincissement géométrique et modéliser le polymère par un condensateur est faux. S'il relève d'une dépendance au voltage, alors compte-tenu de la faible variation de ϵ_r cet effet pourra être oublié sans impact significatif sur les résultats attendus. Cette question a en fait déjà été soulevée dans des études précédentes qui ont montré que la

1. Un effet électrostrictif signifie que $\epsilon_r(e_z) \sim \epsilon_r^{moyen}(1 + \alpha e_z)$. Alors $C_{actuel} = C(1 + (2 + \alpha)|e_z|)$. En ordre de grandeur, nous avons vu que C augmente de 30% pour une déformation de 7%. Si l'effet électrostrictif était responsable de cette augmentation, cela impliquerait une valeur de $\alpha > 2$, et il serait aussi important que le mécanisme d'actuation. Cela n'est pas cohérent avec les expériences que nous présentons par la suite.

constante diélectrique de ce type d'élastomères ne dépendait pas de l'étirement qu'il subit dans le régime qui nous intéresse [38]. D'autre part, les mesures de déformations présentées dans la section suivante nous conduisent à une constante diélectrique d'une valeur semblable à celle trouvée par cette méthode. Si l'effet était électrostrictif, nous nous attendrions à trouver une valeur de ε_r plus grande que celle mesurée ici. L'effet n'est donc pas électrostrictif et nous considérerons donc ε_r constante.

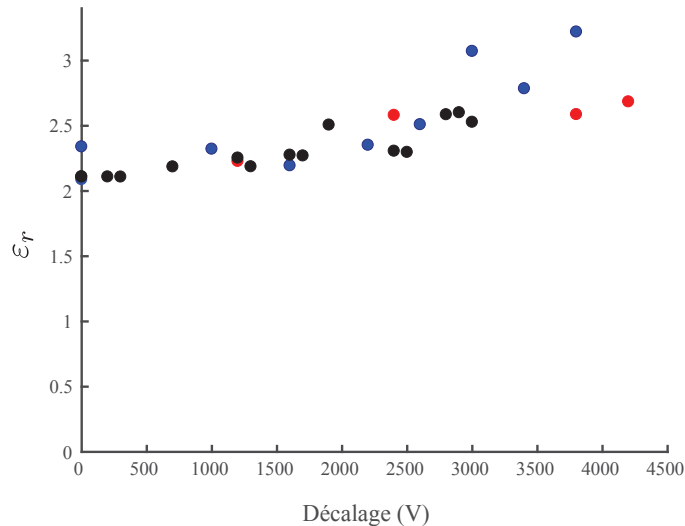


Fig. II.18 constante diélectrique en fonction du décalage de la tension imposée.

● : $a = 3.75$ cm, ● : $a = 2.5$ cm, ● : $a = 0.85$ cm.

Le système se comporte donc bien comme un condensateur déformable, de constante diélectrique $\varepsilon_r \approx 2.5$, en série avec une résistance de l'ordre du $M\Omega$ et ce dans toute la gamme d'utilisation.

II.2.4 Flambage sur l'eau

Nous savons maintenant décrire la réponse du polymère à une différence de potentiel, nous pouvons donc passer à l'étude d'instabilités mécaniques déclenchées par une croissance non homogène. La première que nous allons examiner est la plus simple que nous ayons pu concevoir. Commençons par présenter le dispositif illustré sur la figure II.19.

Dispositif expérimental

Notre système non uniformément activé consiste en une membrane circulaire de PVS de rayon b ($b \approx 5$ cm dans toutes les expériences de cette section) comportant en son centre une électrode circulaire de rayon a . Dans le premier problème qui va nous intéresser, la membrane flotte librement à la surface d'un bain d'eau savonneuse, les bords du polymère ne sont pas encastrés. Les molécules de tensio-actifs nous permettent de contrôler la tension de surface du liquide ($\gamma = 32\text{mN/m}$ où γ est la tension de surface), évitant ainsi d'éventuels problèmes de contamination de l'eau, et donc de répétabilité des expériences. Elles augmentent également

la conductivité de l'eau. Le contact électrique se fait *via* un fil métallique très fin (de rayon $10\ \mu\text{m}$) touchant le plus légèrement possible l'électrode. Le fil est connecté à une alimentation haute tension (Trek modèle 609 – E) reliée à un générateur, tandis que l'eau est connectée à la masse électrique et joue ainsi le rôle de seconde électrode. Une différence de potentiel V que nous ferons varier entre 200 V et 5 kV est imposée entre les deux électrodes. Toutes nos expériences, sont réalisées dans des conditions quasistatiques. Nous appliquons un voltage constant qui est augmenté de 100 V toutes les 30 s environ. À ces échelles de temps, le PVS a une réponse purement élastique. Le temps ne jouera donc aucun rôle dans nos expériences.

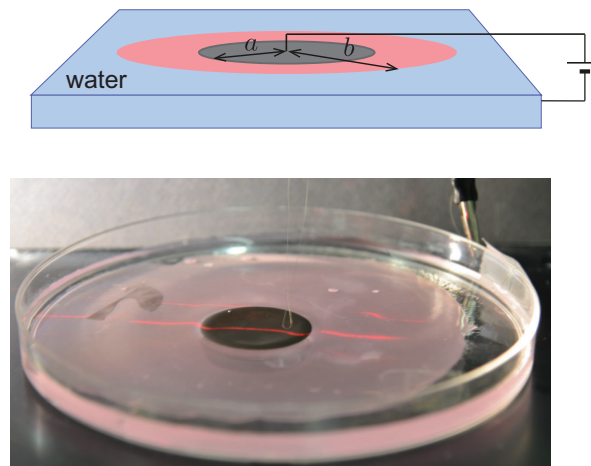


Fig. II.19 *Dispositif expérimental : une membrane circulaire de PVS de rayon b sur laquelle a a été peinte une électrode circulaire de rayon a ($a < b$) est posée sur un bain d'eau savonneuse. Un fil métallique relié à une alimentation haute tension touche l'électrode, tandis que l'eau est reliée à la masse.*

L'application d'un voltage provoque la dilatation de la zone centrale, tandis que le reste de la membrane reste passif. Ainsi, à mesure que le voltage augmente, la zone active se trouve de plus en plus contrainte par le reste du polymère. Pour un voltage suffisamment élevé, une instabilité de flambage se produit alors. Nous mesurons les déformations hors du plan grâce à une nappe laser en incidence rasante dirigée sur la zone active de la membrane. Les déflexions de la ligne laser sont photographiées d'au-dessus et sont directement proportionnelles au déplacement vertical de la membrane. Nous allons tâcher dans la suite de ce chapitre de déterminer les contraintes générées par cette croissance et voir comment elles permettent d'expliquer l'instabilité de flambage observée.

a) **Contraintes dans la membrane dans la configuration plane sous le seuil de flambement**

La membrane étant déposée à la surface de l'eau, elle est étirée par la tension de surface. La déformation ainsi induite est de l'ordre de $\gamma/Eh \approx 10^{-3}$ pour une membrane d'épaisseur $200\ \mu\text{m}$ dont les bords sont libres. D'après l'équation (II.9), le voltage équivalent à cette déformation est $(2\gamma h/\epsilon_0\epsilon_r)^{1/2} \sim 700\ \text{V}$. La tension de surface a ainsi un impact significatif. Cependant, nous nous concentrons dans cette partie sur le régime avant flambage. Dans

ces conditions, la mécanique de la membrane reste linéaire, les deux effets de tension de surface et d'électro-actionnement sont simplement additifs. Ainsi, si nous considérons l'état pré-étiré comme état de référence, nous pouvons oublier, pour un moment, les effets de la tension de surface sur les déformations et les contraintes². Nous supposons que le problème est axisymétrique et que la membrane ne subit que des déformations dans le plan. Nous sommes donc dans la configuration du problème de Lamé (I.22). L'équilibre mécanique de la membrane s'écrit donc :

$$\frac{\partial r \sigma_r}{\partial r} - \sigma_\theta = 0 \quad (\text{II.10})$$

où (r, θ) sont les coordonnées cylindriques, avec pour origine le centre de la membrane ; σ_r et σ_θ les contraintes radiale et azimuthale respectivement. Conformément à ce que nous avons vu dans la section précédente, l'application d'un voltage change la taille naturelle de l'électrode. Il existe donc une croissance d'origine électrostatique e_0 dans la zone active, de sorte que les relations d'Hooke s'écrivent :

$$\sigma_r = E^* ((e_r - e_0) + \nu(e_\theta - e_0)) \quad (\text{II.11})$$

$$\sigma_\theta = E^* ((e_\theta - e_0) + \nu(e_r - e_0)) \quad (\text{II.12})$$

Avec $E^* = E/(1 - \nu^2)$. e_0 suit l'équation (II.9) dans la zone active, et $e_0 = 0$ dans la zone passive. Dans le cas de déplacements radiaux plans, les déformations radiale et orthoradiale sont reliées au déplacement radial $u(r)$ par : $e_r = du/dr$ et $e_\theta = u/r$, respectivement. En injectant ces relations dans l'équation de Lamé (II.10) on obtient une équation différentielle valable séparément dans les régions actives et passives :

$$r^2 u'' + r u' - u = 0. \quad (\text{II.13})$$

où $'$ désigne la dérivée par rapport à r .

Les solutions de l'équation de Lamé [1, 4] sont de la forme $u(r) = \alpha r + \beta/r$. Les coefficients diffèrent dans la zone active "A" ($r < a$) et passive "P" ($a < r < b$) et doivent donc être déterminés en raccordant les différentes conditions aux limites.

Les conditions d'équilibre imposent que $u(r)$ et $\sigma_r(r)$ soient continus en $r = a$. u étant borné (et même nul) en 0 le terme en $1/r$ ne peut être présent dans la zone active : $\beta = 0$. Dans cette région, les contraintes et les déformations sont équibiaxiales ($e_r = e_\theta = \alpha$ lorsque $u = \alpha r$). Enfin, les bords étant libres, les contraintes s'annulent en $r = b$. Ces quatre conditions nous permettent de déterminer les constantes α, β dans les deux régions. Dans la zone active, on obtient ainsi :

$$u^A(r) = \frac{e_0}{2}(1 - \nu) \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) r$$

et donc

$$e_r^A = e_\theta^A = \frac{e_0}{2}(1 - \nu) \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) > 0 \quad (\text{II.14})$$

et

$$\sigma_r^A = \sigma_\theta^A = \nu \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) < 0 \quad (\text{II.15})$$

2. Cette additivité n'est plus vérifiée dès lors que la membrane flambe, c'est pourquoi dans la section suivante l'état de référence sera la membrane non déformée.

Où $\sigma_0 = -p_0/\nu = -Ee_0/\nu$, déjà défini. Les déformations sont donc des dilatations d'amplitudes inférieures à e_0 (une croissance libre) et les contraintes sont compressives. Physiquement, contraindre la déformation de la zone active par la zone passive résulte logiquement en un état compressif dans la zone en croissance.

L'état de la zone passive est donné par :

$$u^P(r) = e_0 \frac{a^2}{2} \left((1 - \nu) \frac{r}{b^2} + \frac{(1 + \nu)}{r} \right)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \sigma_r^P &= \nu \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) < 0 \\ \sigma_\theta^P &= -\nu \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) > 0 \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Dans la zone passive la contrainte radiale est donc compressive, tandis que la contrainte azimuthale est en tension ; ces deux contraintes diminuent à mesure que l'on s'éloigne de la zone active. Remarquons également que la contrainte azimuthale et la déformation radiale sont discontinues au passage $r = a$.

Calibrons maintenant la réponse électro-mécanique du polymère. Pour cela, nous saupoudrons du talc sur la membrane dans le montage expérimental décrit en II.2.4, de façon à obtenir des tâches aléatoires de taille caractéristique $50 \mu\text{m}$. Le talc est une solution pratique car il peut être enlevé facilement avec du ruban adhésif. Cela nous permet donc de procéder à une première expérience avec une électrode de rayon a , enlever le talc, déposer une nouvelle couche de noir de carbone sur un cercle de rayon supérieur etc... Nous pouvons ainsi, à membrane fixée, mesurer l'effet de changement de la taille de l'électrode. Cependant, sous l'effet du voltage les grains se chargent, pouvant ainsi provoquer l'éclatement d'aggrégats de talc, ou encore le déplacement de certains grains, ajoutant ainsi du bruit aux mesures. Pour chaque voltage nous prenons une photo avec une résolution d'environ $20 \mu\text{m}/\text{pixel}$. Nous restons à des voltages suffisamment faibles pour que la membrane ne flambe pas. Les données sont ensuite analysées avec le logiciel Correli [39] et nous permettent de remonter au déplacement en chaque point de la zone active. Ce dernier est bien axisymétrique et les déformations dans le plan e_r et e_θ sont égales dans la zone active ($r < a$). Afin de vérifier notre description théorique, nous traçons finalement e_r en fonction de la déformation théorique divisée par ε_r : $e_r^{theo}/\varepsilon_r = \frac{1}{8} \left(3 + \frac{a^2}{b^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_0}{E} \frac{V^2}{h^2} \right)$, avec $\nu = 1/2$ (figure II.20). Tant que les déformations sont faibles, les déformations expérimentales obtenues pour différentes valeurs de a et de h s'alignent sur une droite maîtresse, de pente $\varepsilon_r = 2.4 \pm 0.1$, en bon accord avec nos mesures électriques qui donnent un $\varepsilon_r \sim 2.5 \pm 0.5$.

Nous savons maintenant exprimer la déformation de la membrane en fonction du voltage, ou dit autrement, nous savons de relier la croissance "naturelle" de la zone active au voltage imposé. Utilisons maintenant cette croissance pour déclencher des instabilités mécaniques .

b) Instabilité sur l'eau : observations expérimentales

À mesure que le voltage augmente, la zone active grandit de plus en plus, en conflit avec la zone passive qui l'entoure, des contraintes radiales compressives apparaissent alors dans la

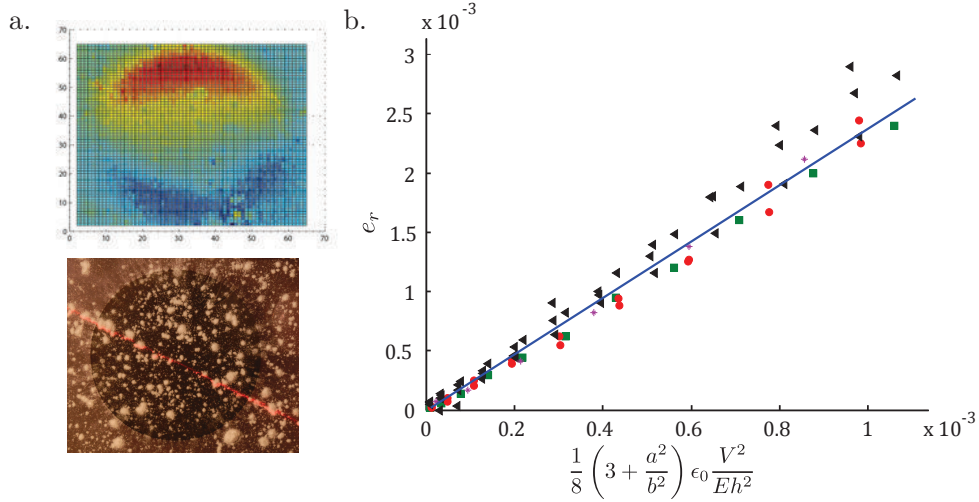


Fig. II.20 a.) Photo du haut : Résultat typique de DIC, photo du bas : électrode de rayon $a = 0.5 \text{ cm}$ saupoudrée de talc. b.) Déformation radiale en fonction de $\frac{1}{8} \left(3 + \frac{a^2}{b^2}\right) \left(\frac{\epsilon_0 V^2}{E h^2}\right)$ pour différentes épaisseurs : (*) $h = 150 \mu\text{m}$, (.) $h = 210 \mu\text{m}$, (■) $h = 250 \mu\text{m}$, (◄) $h = 260 \mu\text{m}$. $b = 5 \text{ cm}$, a est compris entre 0.5 et 3 cm . La pente correspond à la constante diélectrique du polymère ($\epsilon_r = 2.4$).

membrane. En conséquence, au-dessus d'un voltage seuil, la membrane subit une instabilité de flambage axisymétrique. Contrairement au flambage d'Euler classique (I.16) pour lequel une poutre comprimée se courbe sur toute sa longueur, nous observons ici que le flambage est localisé à l'intérieur de la zone active (voir figure II.21.a).

Lorsque le voltage augmente, le mode n'est pas modifié, seule son amplitude augmente (II.21.b). Toutefois, le mode instable dépend de la taille de la zone active.

II.2.5 Interprétation en loi d'échelle

Nous sommes face à un problème de flambage sur fondation (liquide dans le cas présent). Dans ce problème classique, la compétition entre la flexion de la structure et le rappel élastique ou gravitaire de la fondation conduit à une longueur caractéristique [40, 41]. Afin d'introduire cette longueur penchons-nous sur un problème unidimensionnel. Pour cela, considérons une bande flexible 1D de longueur L posée à la surface de l'eau (de masse volumique ρ) et compressons-la d'une quantité ΔL : le flambage fait apparaître des ondulations d'amplitude A , de longueur d'onde λ (figure II.22). La courbure typique de la bande flambée est

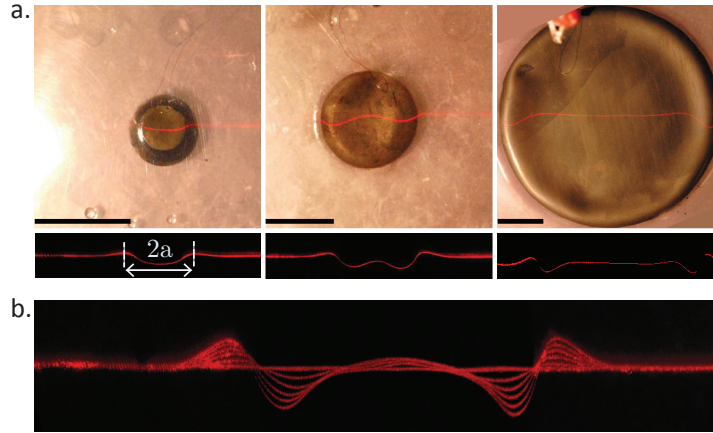


Fig. II.21 a) Différents profils flambés $V = 5 \text{ kV}$ et $h = 210 \mu\text{m}$, pour différents rayons de zone active (de droite à gauche : $a = 0.5 \text{ cm}$, $a = 1 \text{ cm}$, $a = 3 \text{ cm}$). La première ligne est une vue de dessus, la deuxième montre le profil de la membrane. Échelle : longueur élastogravitaire $\ell_{eg} = 2\pi \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho g} \right)^{1/4} \approx 1.4 \text{ cm}$. b) Superposition des profils laser obtenus en augmentant le voltage de 0 kV à 5 kV , $h = 210 \mu\text{m}$, $a = 1.5 \text{ cm}$. Bien que l'amplitude de l'instabilité augmente progressivement, le mode de flambage reste le même.

A/λ^2 . En loi d'échelle, l'énergie de flexion par unité de surface s'exprime donc :

$$U_b \sim Eh^3 \frac{A^2}{\lambda^4}$$

Cette énergie tend à minimiser la courbure de la bande et favorise de ce fait les grandes longueurs d'ondes.

L'énergie de gravité par unité de surface s'écrit quant à elle :

$$U_g \sim \rho g A^2$$

Or, la conservation de la longueur impose que : $\Delta L/L = e \sim (A/\lambda)^2$. Cette énergie favorise donc les petites longueurs d'onde. En effet, en flambant, la bande soulève de l'eau. Ainsi,

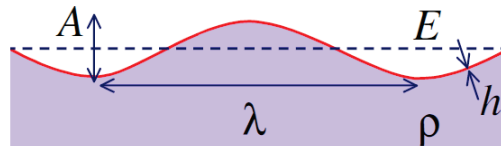


Fig. II.22 Une bande posée sur de l'eau est comprimée. Elle flambe en oscillant avec une longueur d'onde λ et une amplitude A . λ est dictée par un équilibre entre flexion et gravité.

afin de minimiser la pression hydrostatique de l'eau le terme $U_g \sim \rho g e \lambda^2$ favorise une forme dans laquelle peu d'eau est soulevée, donc de petites longueurs d'ondes.

L'équilibre entre énergies de flexion et de gravité permet finalement de trouver la longueur d'onde de ce phénomène :

$$\lambda \sim \left(\frac{Eh^3}{\rho g} \right)^{1/4}$$

Le calcul exact donne le préfacteur :

$$\lambda = \ell_{eg} = 2\pi \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho g} \right)^{1/4}$$

Nous appellerons ℓ_{eg} la longueur élastogravitaire [40, 41], que nous utiliserons largement dans la suite. Notons que dans le cas d'une bande comprimée flottant à la surface d'un liquide, la structure ondulée régulière devient rapidement instable : toute la déformation finit par se localiser en un pli unique [40].

Nous pouvons également calculer la déformation critique pour faire flamber cette bande. Le flambage se produit pour une déformation e_{1D}^c telle que les énergies de flexion et d'extension soient du même ordre $U_{ext} \sim U_b$, c'est-à-dire :

$$Ehe_{1D}^c{}^2 \sim Eh^3 \frac{e_{1D}^c}{\lambda^2}$$

Soit $e_{1D}^c \sim (h/\ell_{eg})^2$. Nous retrouvons la loi d'échelle établie pour le flambage d'Euler dans le chapitre précédent (I.14).

Dans la suite, nous utiliserons l'expression exacte [41] :

$$e_{1D}^c = \frac{2\pi^2}{3} (h/\ell_{eg})^2 \quad (\text{II.17})$$

La fondation liquide introduit donc une nouvelle longueur caractéristique dans le problème, dont la valeur, pour une membrane typique de $200 \mu\text{m}$, est $\ell_{eg} \approx 1.4 \text{ cm}$. Nous pouvons alors faire plusieurs observations :

- Si la zone active a un diamètre inférieur à ℓ_{eg} , alors toute la zone active sort du plan, formant une petite bosse. C'est le mode que l'on voit sur la photo à gauche de la figure II.21.a. En effet, la zone soumise à une forte compression étant plus petite que ℓ_{eg} , la flexion domine et dicte le mode.
- Si le diamètre de la zone active est de l'ordre ℓ_{eg} (voire légèrement plus grand) une oscillation apparaît. Nous sommes exactement dans l'équivalent axisymétrique du cas décrit juste au-dessus. C'est le cas de la photo du milieu de la figure II.21.a. Dans ce cas, une seule oscillation de longueur d'onde ℓ_{eg} s'installe .
- Si le diamètre de la zone active est nettement plus grand que ℓ_{eg} toute la flexion se localise au niveau de la limite entre zones active et passive, tandis que le reste de la membrane reste à peu près plat. Il s'agit du cas de la photo de droite sur la figure II.21.a. Qualitativement, si plusieurs oscillations s'établissent, comme le système doit rester axisymétrique, les ondulations devront être courbées dans deux directions.

L'amplitude de la déformation n'étant pas nulle cela réclame trop d'énergie au système qui choisit donc cette forme à la place. Nous discuterons de cela plus en détail dans la partie suivante.

- Enfin, comme dans les cas classiques de flambage sur fondation, le mode de flambage sélectionné ne change pas avec le voltage, seule l'amplitude augmente, comme le montre la figure II.21.b.

En utilisant une nappe laser (voir section II.2.4) nous mesurons le profil en fonction du voltage appliqué afin d'accéder au seuil de flambage (figure II.21.b), et ce pour différentes épaisseurs de membranes h et différentes tailles de zones actives a . Nous caractérisons la sollicitation par la croissance électrostatique e_0 (équation (II.9)), normalisée par la déformation seuil de flambage d'une bande 1D flottant sur de l'eau e_{1D} (équation (II.17)). Sur la figure II.23 (cercle) nous présentons l'amplitude maximale de la déflexion, au centre de l'électrode, en fonction de e_0/e_{1D} pour deux tailles d'électrodes. Nous observons clairement l'existence d'un seuil de flambage. Dans les deux graphiques nous voyons qu'en-deçà d'une valeur critique de e_0/e_{1D} (environ 1 pour $a = 6$ mm, environ 2 pour $a = 30$ mm) l'amplitude est nulle : il n'y a pas de déflexion. Notons également que l'amplitude n'augmente pas aussi vite que pour une bifurcation de fourche ("pitchfork") classique telle qu'attendue pour le flambage d'une membrane. Cette transition plus douce est sans doute due aux imperfections. Il est par exemple difficile d'imaginer que les charges restent strictement dans la zone couverte de noir de carbone, il existe très certainement une légère migration des charges en dehors de l'électrode. Le fil peut lui aussi perturber le flambage à cause d'un contact un peu trop intrusif. Malgré ces imperfections, nous pouvons estimer un voltage critique (c'est-à-dire une déformation d'actionnement critique dans le graphique) pour le seuil de flambage. Dans la section qui suit, nous développons les équations non-linéaires décrivant ce flambage électro-activé.

a) Équations non linéaires pour l'état flambé et comparaisons avec les expériences

Équations de Föppl-Von Kármán

Nous allons utiliser les équations faiblement non linéaires axisymétriques des plaques pour décrire le flambement et le post-flambement du système. Les déformations étant faibles, nous considérons le système comme une plaque d'épaisseur homogène. Nous suivons les hypothèses des équations de plaques de Föppl-Von Kármán : le déplacement hors du plan $w(r)$ est couplé aux déformations dans le plan [4]. La déformation radiale s'écrit alors $e_r = u' + w'^2/2$, tandis que $e_\theta = u/r$ est inchangée par rapport à la section II.2.4.a). Comme nous l'avons vu lors du chapitre précédent I.3, nous avons à résoudre un système de deux équations différentielles : l'équilibre dans le plan (équation(I.31)) et l'équilibre des moments dans la plaque (équation (I.32)) [42]. L'hypothèse d'axisymétrie simplifie les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial r \sigma_r}{\partial r} - \sigma_\theta = 0 \\ B \Delta^2 w = N_r w'' + N_\theta \frac{w'}{r} + q \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Avec $B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ la rigidité de flexion, $N_r = h\sigma_r$ et $N_\theta = h\sigma_\theta$ sont les forces par unité de longueur dans le plan. Le dernier terme $q = -\rho g w$ correspond à la pression hydrostatique.

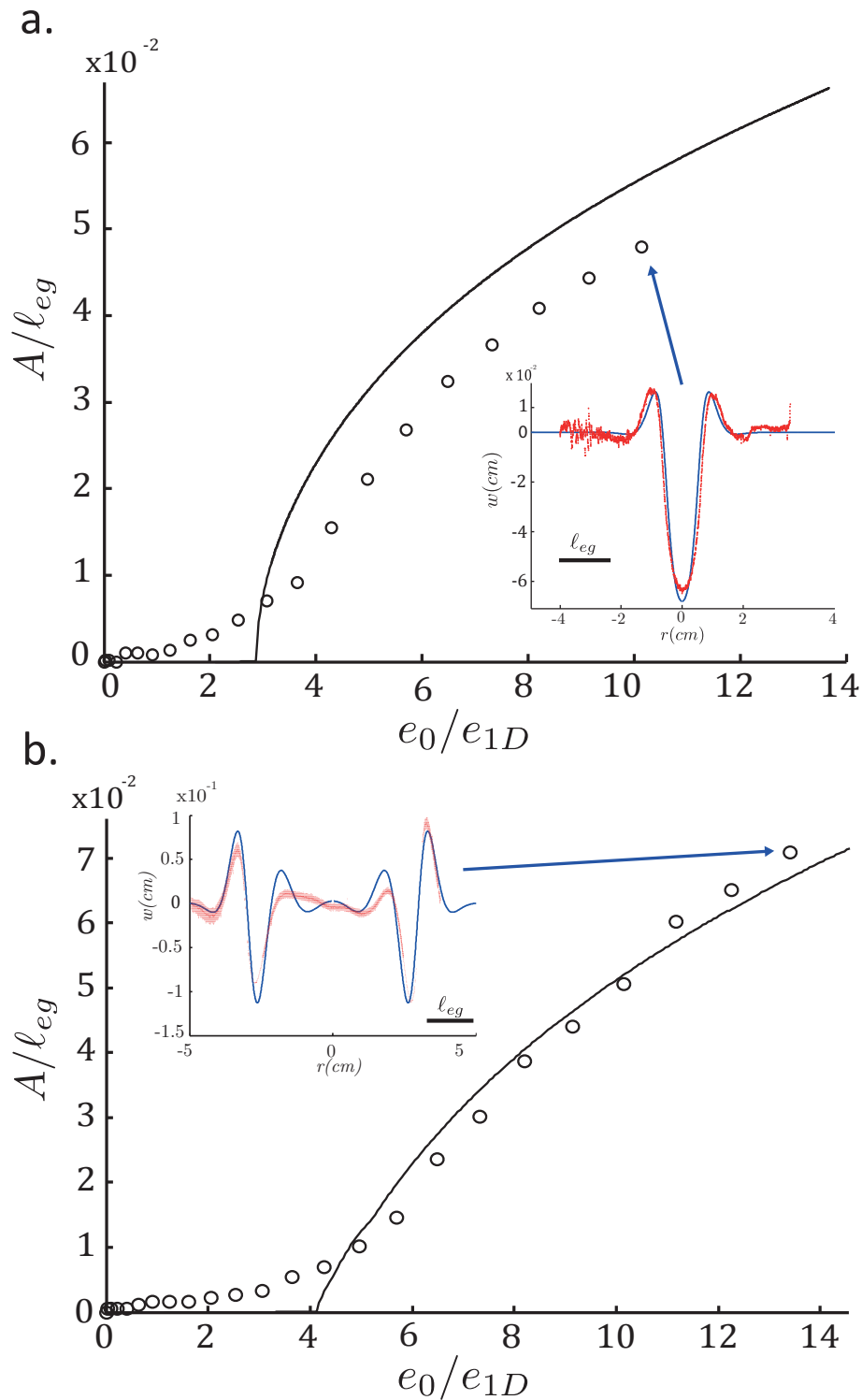


Fig. II.23 Amplitude maximale A de la déflexion, normalisée par l_{eg} , en fonction du voltage appliqué caractérisé par e_0/e_{1D} . Les résultats expérimentaux (cercles) sont comparés à l'intégration numérique des équations (II.21) et (II.22) (ligne continue) pour une membrane d'épaisseur $200 \mu\text{m}$. Aucun paramètre d'ajustement n'est utilisé. Insert : superposition des profils numériques (bleu) et expérimentaux (rouge) aux points indiqués par la flèche. a) $a = 6 \text{ mm}$. b) $a = 30 \text{ mm}$.

Nous résolvons ces équations en $u(r)$ et $w(r)$, comme dans le cas plan II.2.4.a). Nous réécrivons donc l'équation de Lamé en fonction du déplacement radial et hors du plan en utilisant les relations d'Hooke :

$$\sigma_r = E^* ((e_r - e_0) + \nu(e_\theta - e_0)) \quad (\text{II.19})$$

$$\sigma_\theta = E^* ((e_\theta - e_0) + \nu(e_r - e_0)) \quad (\text{II.20})$$

Avec comme dans la partie précédente, une croissance d'origine électrostatique $e_0 = \frac{1}{2E}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{V^2}{h^2}\right)$ (équation (II.9)) existe dans la zone active, elle est nulle dans la zone passive. Et le lien déformation/déplacement écrit au-dessus. Nous obtenons finalement le système d'équations suivant :

$$r^2u'' + ru' - u + \frac{1-\nu}{2}rw'^2 + r^2w'w'' = 0. \quad (\text{II.21})$$

$$B\Delta^2w = N_rw'' + N_\theta\frac{w'}{r} + q \quad (\text{II.22})$$

Il peut paraître étonnant que l'effet de l'actionnement électrique ne transparaisse pas explicitement dans ces équations. Il est en réalité caché dans les contraintes σ_r (II.19) et σ_θ (II.20), qui dépendent directement de e_0 . Pour résoudre ce système, il nous faut ajouter quatre autres conditions aux limites à celles déjà mentionnées. Par symétrie, nous avons $w'(0) = w'''(0) = 0$. La tension de surface a pour effet d'appliquer une contrainte planaire. Ainsi, au bord de la membrane, nous avons par continuité : $N_r(b) = \gamma$, et en l'absence de moment la courbure dans la direction radiale s'annule $w''(0) = 0$. Nous résolvons ce système d'équations différentielles couplées en utilisant la routine `bvp4c` Matlab.

Résultats

Des états flambés existent au-dessus d'un certain seuil en voltage. Les inserts de la figure II.23.a.b. représentent les profils calculés pour la plus grande valeur de e_0 atteinte expérimentalement : $V = 4000$ V, (*i.e.*) $e_0 = 1.7 \times 10^{-2}$ pour $a = 6$ mm et $V = 5000$ V, (*i.e.*) $e_0 = 2.7 \times 10^{-2}$ pour $a = 30$ mm. Ces profils sont calculés sans paramètre ajustable. Les deux profils sont adimensionnés par ℓ_{eg} et comparés avec les profils expérimentaux correspondants (en rouge). L'accord entre les expériences et les calculs numériques est assez bon. Le profil de la membrane ayant une grande zone active (insert de la figure II.23.b.) présente des oscillations très fortement amorties. Elles sont probablement suffisamment petites pour que de légères inhomogénéités de la membrane nous empêchent de les distinguer. Il est néanmoins remarquable que les simulations prédisent des modes ne présentant quasiment pas d'oscillations. Cela tend à confirmer que l'axisymétrie prévient l'apparition de plus de longueurs d'ondes.

Nous pouvons également déterminer l'amplitude maximale des profils calculés pour des voltages décroissants et les comparer à nos données expérimentales (figure II.23.a.b lignes continues). L'accord est à nouveau raisonnablement bon. Comme on peut s'y attendre, la transition vers l'état flambé est plus nette dans les résultats de simulation qu'expérimentalement. Nous n'avons tenu compte d'aucune imperfection dans les calculs.

Notre simulation capturant correctement la physique de ce problème, nous pouvons l'utiliser pour étudier numériquement comment le seuil de flambage dépend de la taille de la zone active. Cela nous permettra de regarder des cas difficilement atteignables expérimentalement.

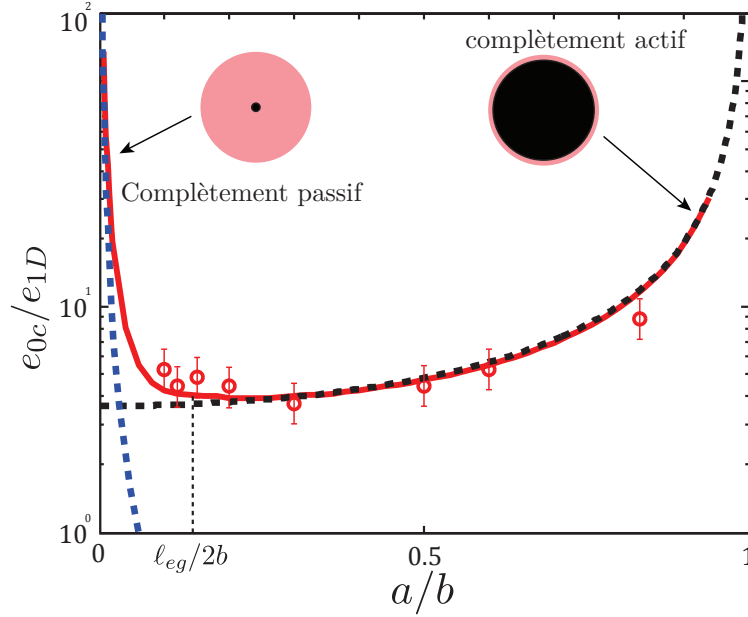


Fig. II.24 Déformation d'actionnement critique normalisée en fonction du rapport d'aspect pour le cas particulier $h = 210 \mu\text{m}$ et $b = 5 \text{ cm}$ (*i.e.*) $\ell_{eg}/2b = 0.14$ et $\gamma b^2/\rho \ell_{eg}^4 = 7.8$. Ligne rouge : résolution numérique des équations (II.19) à (II.22). Cercles : données expérimentales. Ligne bleue pointillée : fit avec la forme simplifiée (Eq. (II.23)) $f(x) = -0.3 \frac{(\ell_{eg}/b)^2}{e_{1D}} \frac{1}{x^2(x^2-1)} = -\frac{3.3 \times 10^{-3}}{x^2(x^2-1)}$ correspondant à la limite $2a \ll \ell_{eg}$ (*i.e.*) $a/b \ll 0.07$ pour notre système). Ligne noire pointillée : fit avec la forme simplifiée (Eq. (II.24)) $g(x) = \frac{3.61}{1-x^2}$ correspondant à la limite opposée $2a \gg \ell_{eg}$.

L'analyse dimensionnelle des équations (II.19) à (II.22) montre que la déformation d'actionnement critique normalisée e_{0c}/e_{1D} devrait dépendre du coefficient de Poisson ν et de deux paramètres sans dimension ($a/b, \ell_{eg}/b$) si l'on néglige la tension de surface. La tension induite par la capillarité conduit à l'augmentation du seuil et implique un nouveau paramètre sans dimension $\gamma b^2/\rho g \ell_{eg}^4$. Nous nous plaçons dans un cas proche de nos expériences, $h = 210 \mu\text{m}$ et $b = 5 \text{ cm}$, (*i.e.*) ($\ell_{eg}/2b = 0.14$ and $\gamma b^2/\rho \ell_{eg}^4 = 7.8$) et traçons le seuil prédit e_{0c}/e_{1D} en fonction du rapport d'aspect a/b (figure II.24). Il est important de noter que cette courbe n'est pas universelle, le changement d'un de ces deux paramètres sans dimension (c'est-à-dire changer l'épaisseur et/ou changer la tension de surface) décalent la courbe. Les régimes que nous identifions sont en revanche généraux. Deux régimes peuvent être remarqués suivant le rapport de la taille de la zone active a sur la longueur élasto-gravitaire ℓ_{eg} .

(i) Dans le cas où $2a \ll \ell_{eg}$, la membrane flambe sur une taille caractéristique a . En terme de loi d'échelle, on s'attend à ce que la contrainte critique de flambage varie comme $\sigma_c \sim -E \frac{h^2}{a^2}$ (flambage d'Euler classique) [43]. En utilisant l'expression de la contrainte avant flambage dans la zone active que nous avons calculée au-dessus, $\sigma_r = \frac{1}{2} E e_0 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)$, nous trouvons :

$$e_{0c} \sim \frac{h^2}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad \text{i.e.} \quad \frac{e_{0c}}{e_{1D}} \sim \left(\frac{\ell_{eg}}{b} \right)^2 \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad (\text{II.23})$$

Cette expression est tracée en pointillés bleus dans la figure II.24 avec un préfacteur correctif de 0.3 pour coller aux résultats numériques. Cette loi d'échelle capture donc correctement la divergence de la déformation critique lorsque la taille de la zone active tend vers zéro.

(ii) Dans le cas opposé $2a \gg \ell_{eg}$, le flambage se produit sur une taille typique ℓ_{eg} . La contrainte critique va donc varier comme $\sigma_c \sim -E \frac{h^2}{\ell_{eg}^2}$, conduisant à une déformation d'actionnement critique

$$\frac{e_{0c}}{e_{1D}} \sim \frac{1}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad (\text{II.24})$$

Cette relation est représentée dans la figure II.24, avec un préfacteur numérique de 3.6 pour coller aux résultats numériques. L'accord de cette loi d'échelle avec les résultats numériques est là encore très bon.

Comme on peut s'y attendre intuitivement, la déformation d'actionnement critique diverge dans les deux limites $a \rightarrow 0$ et $a \rightarrow b$, dans lesquelles le système est quasiment homogène. Dans la première limite, $a \rightarrow 0$, des contraintes plus importantes sont requises à mesure que les longueurs flambées diminuent et en même temps les contraintes radiales générées par la croissance sont de moins en moins importantes (éq. (II.15)), si bien que le seuil finit par diverger. À l'inverse, le flambage tend à disparaître lorsque le rôle contraignant de la zone passive s'affaiblit, pour $a \rightarrow b$.

Nous remarquons finalement que le seuil de flambage est pratiquement constant dans le domaine $\ell_{eg}/2 < a < 0.7b$ avec $e_c \simeq 0.5 e_{1D}$. Dans cette limite, les contraintes compressives dues à l'actionnement sont en effet de l'ordre de $\sigma_r \sim Ee_0$ (indépendent de a/b), et doivent atteindre $\sigma_c \sim (h/\ell_{eg})^2 \sim Ee_{1D}$ pour que la membrane flambe. Nos données expérimentales sont essentiellement dans ce régime (cercles dans la figure II.24). Notons tout de même que dans la mesure où notre transition est assez molle (voir figure II.23), déterminer le seuil de flambage est assez délicat. Les données expérimentales ne sont donc pas ajoutées au graphique pour une comparaison rigoureuse avec les valeurs de seuils calculées, mais plutôt pour constater que nous nous trouvons dans le régime où le seuil de flambage dépend peu de a .

L'étude de cette première instabilité est un cas modèle intéressant. Les ingrédients physiques conduisant au flambage peuvent être précisément quantifiés ce qui nous a permis de tester notre outil numérique ainsi que notre compréhension de l'effet électrostatique. Nous observons également que dans ces systèmes libres de forces extérieures, le flambage est essentiellement dû au caractère inhomogène de l'actionnement, et disparaît si la zone active devient trop petite ou trop grande devant la taille de la membrane.

Cependant, dans la plupart des applications il est impossible de laisser la membrane flotter à la surface d'un liquide. Dans la section qui suit nous nous intéressons au flambage d'une membrane encastrée, soumise à une distribution de voltage non homogène. Nous avons cherché à limiter la précontrainte au maximum. Nous évaluerons néanmoins comment une légère contrainte résiduelle peut modifier de manière significative le comportement mécanique de la membrane.

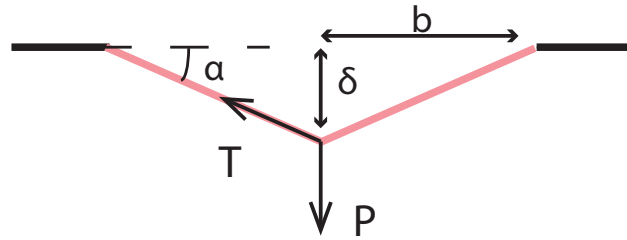


Fig. II.25 La membrane pend sous l'effet de son propre poids, elle fait un angle α avec l'horizontale. Cela induit une tension T et donc une déformation.

II.2.6 Flambage de membranes encastrées

a) Montage expérimental et observations préliminaires

Nous nous intéressons à une configuration proche de la précédente à la différence que le polymère est maintenant placé dans un cadre et dans l'air. Les membranes sont préparées suivant la même procédure que décrite précédemment. Des électrodes circulaires de rayon a en noir de carbone sont déposées de chaque côté de la surface. Nous relierons cette électrode à l'alimentation haute tension par le biais de traits de noir de carbone allant du bord de la membrane jusqu'à la zone active centrale. Ce trait n'est peint que d'un côté de la surface, il agit donc comme un fil. Un petit ruban de laiton, coincé dans le cadre et directement connecté au générateur, est ensuite mis en contact avec ce trait de carbone.

Manipuler un élastomère de $150 \mu\text{m}$ d'épaisseur s'avère être une opération délicate, surtout si l'on cherche à ne pas lui imposer de précontrainte en le montant sur un cadre. Afin de limiter ces éventuelles précontraintes, nous déposons un anneau de papier à dessin sur la couche de polymère spin-coatée encore liquide. Le polymère liquide pénètre le papier et une fois réticulé, adhère fortement au cadre flexible de papier. Cette membrane renforcée peut alors être pelée (délicatement !) de la surface sur laquelle elle a polymérisé, manipulée et encastrée sans ajouter trop de contraintes supplémentaires. La feuille de polymère est encastrée dans un cadre d'acrylique rigide avec une ouverture circulaire de rayon $b = 5 \text{ cm}$.

Le cadre étant tenu horizontalement, la membrane pend sous l'effet de son propre poids, induisant ainsi une contrainte en tension que nous pouvons estimer. Nous schématisons le problème sur la figure II.25. L'équilibre des forces impose que $T\alpha \sim P \sim mg$ avec T la tension dans le fil, α l'angle que fait la membrane avec l'horizontale, P son poids, $m = \rho_p b^2 h$ sa masse (ρ_p étant sa masse volumique). Par ailleurs, en appelant δ la déflexion maximale, la déformation de la membrane due à son propre poids s'écrit en loi d'échelle $\epsilon_{poids} \sim (\delta/b)^2 \sim \alpha^2$. Enfin, la relation force/déformation $\frac{T}{Ebh} \sim \epsilon_{poids}$ nous permet finalement d'écrire que $\epsilon_{poids} \sim (\rho_p g b / E)^{2/3} \sim 2.5 \times 10^{-2}$. Comme nous le verrons, cette déformation est grande comparée aux déformations de flambage typiques. Elle a donc tendance à fortement décaler les seuils. Afin de compenser cette tension additionnelle, nous imposons une petite surpression sous la membrane. À cet effet, le cadre est plaqué sur un entonnoir dont le diamètre est environ celui de la membrane (soit 10 cm). Il nous faut éviter les fuites sous la membrane qui la font vibrer. Nous adaptons la pression de façon à ce que la nappe laser projetée sur

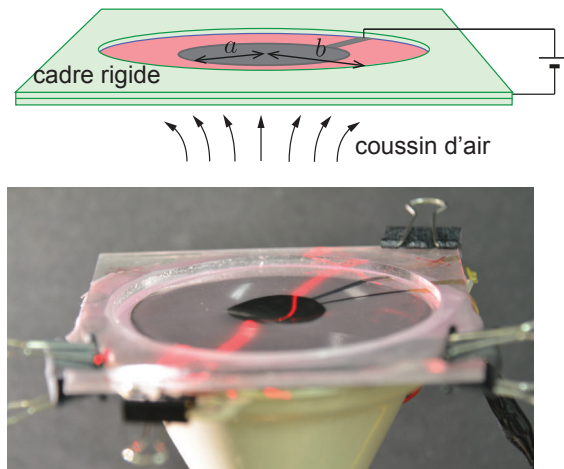


Fig. II.26 *Disque encastré dans un cadre rigide circulaire. Les électrodes sont disposées de chaque côté de la membrane. Un coussin d'air compense le poids de la membrane. Lorsque le voltage est suffisamment élevé, la partie active flambe (ligne laser défléchie sur la photo).*

le polymère diélectrique apparaisse uniformément plate. Cette configuration nous permet de limiter grandement l'impact du poids sur nos expériences. Elle est cependant assez difficile à réaliser. D'une part, la membrane étant légère, la pression à imposer doit être très faible et nécessite de fait un contrôle assez fin. De plus, le moindre courant d'air, ou vibration dans la salle peut faire vibrer le système. Enfin, l'intensité de la pression peut avoir tendance à chuter au cours d'une expérience, ce qui module la quantité de pré-tension imposée à la membrane. Malgré tous ces défauts, il s'agit tout de même de la meilleure configuration que nous avons trouvée pour étudier l'instabilité de flambage sans fondation. Une photo et un schéma de l'expérience se trouvent en figure II.26. Il est par ailleurs important de noter que la présence du cadre n'influe que très peu sur le flambage (dans la limite bien sûr où a est suffisamment petit devant b). Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, il s'agit bien de l'incompatibilité interne due à la croissance de la zone active qui génère l'instabilité. Si la membrane pouvait flotter librement dans l'air, le flambage devrait se produire également.

En guise de premières observations expérimentales, nous remarquons que les profils de flambage obtenus ont une forme de dôme axisymétrique localisé dans la région active. Cela n'a rien d'évident. Si nous faisons une analogie avec le flambage d'Euler, nous pourrions nous attendre à ce que toute la membrane sorte du plan. Nous allons développer ce point. Nous notons également que le seuil de flambage, bien que difficile à mesurer (voir figure II.30), semble diminuer lorsque la taille de la zone active augmente. Cette diminution semble en revanche moins nette que ce à quoi nous pourrions nous attendre, comme nous le verrons. Dans la partie suivante, nous allons comparer les profils observés avec ceux obtenus à l'aide des outils numériques validés dans la configuration de membrane flottante.

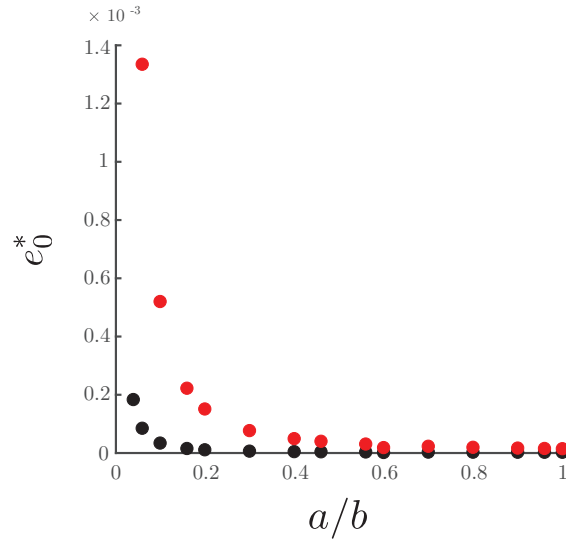


Fig. II.27 Déformation critique e_0^* (obtenue numériquement) en fonction de a/b à épaisseur h fixée. (●) $h = 50 \mu\text{m}$, (●) $h = 200 \mu\text{m}$.

b) Résultats numériques et expérimentaux

Équations linéaires : détermination du seuil de flambage numérique

Les équations régissant la forme de la membrane sont les mêmes que dans la configuration précédente. Simplement, en l'absence de pression hydrostatique, le terme q dans l'équation (II.22) disparaît. Les conditions aux limites sont aussi modifiées par l'encastrement de la membrane, et on a maintenant : $u(r = b) = w(r = b) = w'(r = b) = 0$. Nous pouvons commencer par réaliser une étude de stabilité linéaire en utilisant la version linéarisée de ces équations pour calculer la croissance électrostatique critique de flambage e_0^* . En effet, si ces dernières ne nous permettent pas de connaître la forme défléchie de la membrane pour des voltages élevés (comportement post-flambement), elles nous permettent en revanche de calculer le seuil de flambage bien plus rapidement que la routine `bvp4c` évoquée précédemment. Nous cherchons une solution de l'équation d'équilibre des moments :

$$\frac{B}{h} \Delta^2 w - \sigma_r w'' - \sigma_\theta \frac{1}{r} w' = 0 \quad (\text{II.25})$$

où les contraintes σ_r et σ_θ sont celles d'une membrane **plane** soumise à un actionnement, calculées dans la section II.2.4.a) (équations (II.15), (II.16)). Nous cherchons en effet une petite perturbation de cette solution plane avec les conditions aux limites écrites au-dessus. Dans l'hypothèse axisymétrique il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3 en w' qui peut être résolue à l'aide d'une méthode de tir.

Si l'on normalise les longueurs par a , l'analyse dimensionnelle de cette équation laisse apparaître deux nombres sans dimension : h^2/a^2 et a^2/b^2 . Nous résolvons donc l'équation (II.25) pour des valeurs de a/b allant de 0.01 à 1 et des valeurs de h comprises entre 50 et 500 μm . Traçons d'abord e_0^* en fonction de a/b (fig. II.27) pour h et b fixés. Le seuil diminue lorsque a augmente. Dans cette situation, une zone circulaire croît au sein du reste du matériau, il

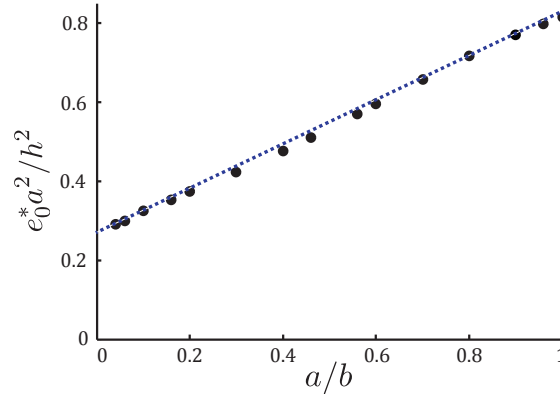


Fig. II.28 Prédiction numérique de la déformation critique de flambage $e_0^* a^2 / h^2$ en fonction du rapport d'aspect a/b , pour une plaque encastree en l'absence de gravité et de pré-tension. Les données sont bien représentées par une régression linéaire $e_0^* = \frac{h^2}{a^2} (0.27 + 0.56 \frac{a}{b})$. Pour $a = b$ nous retrouvons le résultat classique de Timoshenko $e_0^* \sim 0.83 \frac{h^2}{a^2}$ du flambage d'un disque encastree.

s'agit donc d'un type de problème semblable au flambage d'un disque comprimé. Ce flambage, qui correspond au cas $a/b = 1$ dans cette étude, a été traité par Timoshenko. Ce dernier a montré que la déformation au seuil de flambage d'un disque comprimé est proportionnelle à $(h/a)^2$ (elle s'écrit $e_0^* \simeq \frac{14.7}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2} \simeq 0.82 \frac{h^2}{a^2}$) [43]. Nous retrouvons ainsi la loi d'échelle de flambage obtenue dans le chapitre précédent (I.14). Notre problème diffère néanmoins de celui du flambage d'un disque complètement encastree, pour l'illustrer nous représentons sur la figure II.28 e_0^* normalisé par $(h/a)^2$ en fonction du rapport d'aspect a/b . Les seuils se rassemblent sur une droite maîtresse d'équation :

$$e_0^* = \frac{h^2}{a^2} (0.27 + 0.56 \frac{a}{b}) \quad (\text{II.26})$$

La déformation critique dans notre problème présente donc une correction tenant compte du rapport a/b par rapport au cas d'un disque entièrement encastree. Contrairement à l'intuition que l'on pourrait avoir, le flambage d'une plaque encastree de taille a (type Timoshenko) est plus difficile — la déformation critique est relativement plus grande — que le flambage d'un polymère diélectrique ayant une zone active de taille a incluse dans une membrane de taille b . Qualitativement, cela s'explique par le fait que dans le cas de notre système, le mode de flambage n'est pas strictement localisé dans la zone active et peut aussi impliquer une partie de la zone passive. La zone qui flambe est alors plus grande que la seule zone active, le seuil est donc logiquement plus bas que pour une membrane encastree de la taille de la zone active.

Un problème de précontraintes ?

Les seuils de flambage que nous observons expérimentalement sont de cinq à cent fois supérieurs à ceux prédits par les simulations numériques (voir figure II.30). Nous attribuons

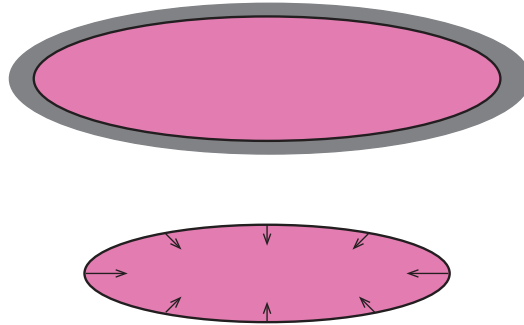


Fig. II.29 Lors de sa polymérisation sur un anneau en papier (image du haut), de légères précontraintes apparaissent dans la membrane. Nous découpons la membrane le long de cet anneau pour l'enlever (image du bas) : les contraintes sont relâchées et la membrane rétrécit. L'effet est exagéré sur ce schéma.

cette large différence à la présence de prétension induite lors de la polymérisation de la membrane. Il est en effet connu que les polymères de type silicone se rétractent très légèrement lors de leur polymérisation [44]. Nous estimons la valeur de cette déformation à l'aide d'une mesure de déformation par corrélation d'images (Digital Image Correlation DIC). Nous comparons pour cela une membrane initialement encastrée dans un cadre de papier à cette même membrane une fois le cadre enlevé (voir schéma II.29). La membrane est posée à la surface de l'eau pour cette expérience. En effet, nous cherchons à mesurer des déformations extrêmement faibles dans un objet très souple. Poser une telle membrane sur une surface solide, même talquée, ne peut se faire sans induire un peu de déformations (ou en tout cas nous n'avons pas réussi à ne pas en induire). Lorsque l'anneau de papier est ôté, la membrane se rétracte légèrement, et nous observons un pré-étirement e_p de l'ordre de 2×10^{-3} . Nous procédons à cette expérience plusieurs fois et observons à chaque fois une valeur de e_p comparable aux valeurs typiques prédites pour la déformation critique de flambage ($e_c^* \sim 10^{-3}$). Nous avons également testé qualitativement cette idée en revenant à une expérience de flambage sur l'eau, que nous savions maîtriser. Si la membrane posée sur l'eau est encastrée dans un anneau de papier, nous constatons que le seuil de flambage est nettement décalé par rapport à ce que nous attendons, affermissant ainsi notre hypothèse de l'influence des pré-contraintes dans le polymère. Il est toutefois impossible de se passer de cet anneau de papier³. Pour flamber, le système doit dès lors dépasser une contrainte liée à sa taille mais aussi aux précontraintes, lesquelles semblent varier suivant les expériences. Dans ces conditions il est assez difficile de donner un sens aux seuils de flambage mesurés qui ne sont pas très reproductibles d'une série d'expériences à l'autre. Nous ne chercherons donc pas à les comparer les uns aux autres en fonction de la taille de la zone active. Dans la partie suivante, Nous allons revenir aux équations faiblement non linéaires établies en II.2.4.a), en y incluant une pré-déformation d'extension e_p initiale, afin de mieux captu-

3. En effet, les pré-contraintes induites par la manipulation directe de la membrane sont si importantes qu'elles peuvent jouer sur la forme de la déflexion en lui donnant une direction préférentielle, voire même éliminer complètement l'instabilité (dans la gamme des voltages auxquels nous avons accès).

rer les caractéristiques expérimentales observées. Nous examinerons ensuite son rôle sur le flambage.

Comparaison des amplitudes et des formes des modes : Équations non linéaires

Tout comme dans notre étude des membranes flottantes, les profils flambés sont déduits de la déflexion de la nappe laser (voir les courbes rouges des inserts figure II.30). Comme on peut le voir sur la photo de la figure II.26, la déformation est très localisée dans la partie active. Nous traçons l'amplitude maximale de déflexion mesurée, normalisée par le rayon de l'électrode A/a en fonction de la déformation d'actionnement appliquée, normalisée par la valeur prédite par l'équation (II.26) (sans aucune pré-contrainte) e_0/e_0^* (cercles noirs sur la figure II.30). Les équations linéaires prédisent un flambage de toute la membrane, en désaccord avec nos observations expérimentales dans lesquelles seule la zone active sort du plan (Fig. II.26). Nous reprenons donc les équations faiblement non-linéaires détaillées en début de section. Afin d'obtenir une meilleure comparaison entre la résolution numérique des équations (II.21)-(II.22) et des données expérimentales, nous ajoutons une pré-déformation d'extension uniforme e_p sous la forme d'une condition aux limites $u_r(r = b) = be_p$. Pour chaque échantillon e_p est ajustée de manière à obtenir un bon accord entre les courbes A/a en fonction de e_0/e_0^* calculées et observées. Nous trouvons ainsi des valeurs de pré-déformations comprises entre 7×10^{-4} et 4×10^{-3} , ce qui est cohérent avec les valeurs obtenues par DIC. Sur la figure II.30 les courbes expérimentales (cercles) et numériques (traits pleins) d'amplitude en fonction de la déformation imposée se superposent relativement bien, même si, l'expérience étant très imparfaite, le début de la bifurcation n'est absolument pas capturé par la simulation. Nous pouvons de plus, à un voltage donné, superposer les profils calculés aux profils expérimentaux (voir inserts de la figure II.30). L'accord entre ces deux courbes est assez bon. Résoudre les équations faiblement non linéaires permet ainsi d'obtenir la localisation du flambage, ce qui n'était pas possible avec les équations linéarisées.

Il reste néanmoins un aspect peu convaincant : au sein d'une même série d'expériences, c'est-à-dire que pour une membrane montée sur un cadre, nous mesurons les seuils pour plusieurs tailles d'électrodes, la pré-déformation à rentrer dans le programme dépend de l'expérience. Nous pensons que cet effet est dû à l'imperfection du coussin d'air sous la membrane, compte tenu de la faiblesse des déformations considérées ici, le moindre décalage (des contraintes de tension dues au gonflage ou à la déflexion sous le poids de la membrane, par exemple) peut avoir un effet notable sur le résultat final.

Nous le voyons, une pré-déformation dans la membrane, même très faible, a un impact remarquable sur l'instabilité de flambage en décalant significativement le seuil de flambage. Nous verrons également que le mode de flambage est perturbé par cet effet de pré-déformation. Cela vient du fait que les déformations critiques de flambage sont elles-mêmes très faibles dans ce problème. Cet effet complexifie grandement nos expériences, il soulève néanmoins une question intéressante concernant l'importance de la pré-déformation sur le comportement de flambage ; question que nous pouvons aborder à l'aide des outils numériques que nous avons développés.

Flambage d'une membrane (faiblement) pré-étirée

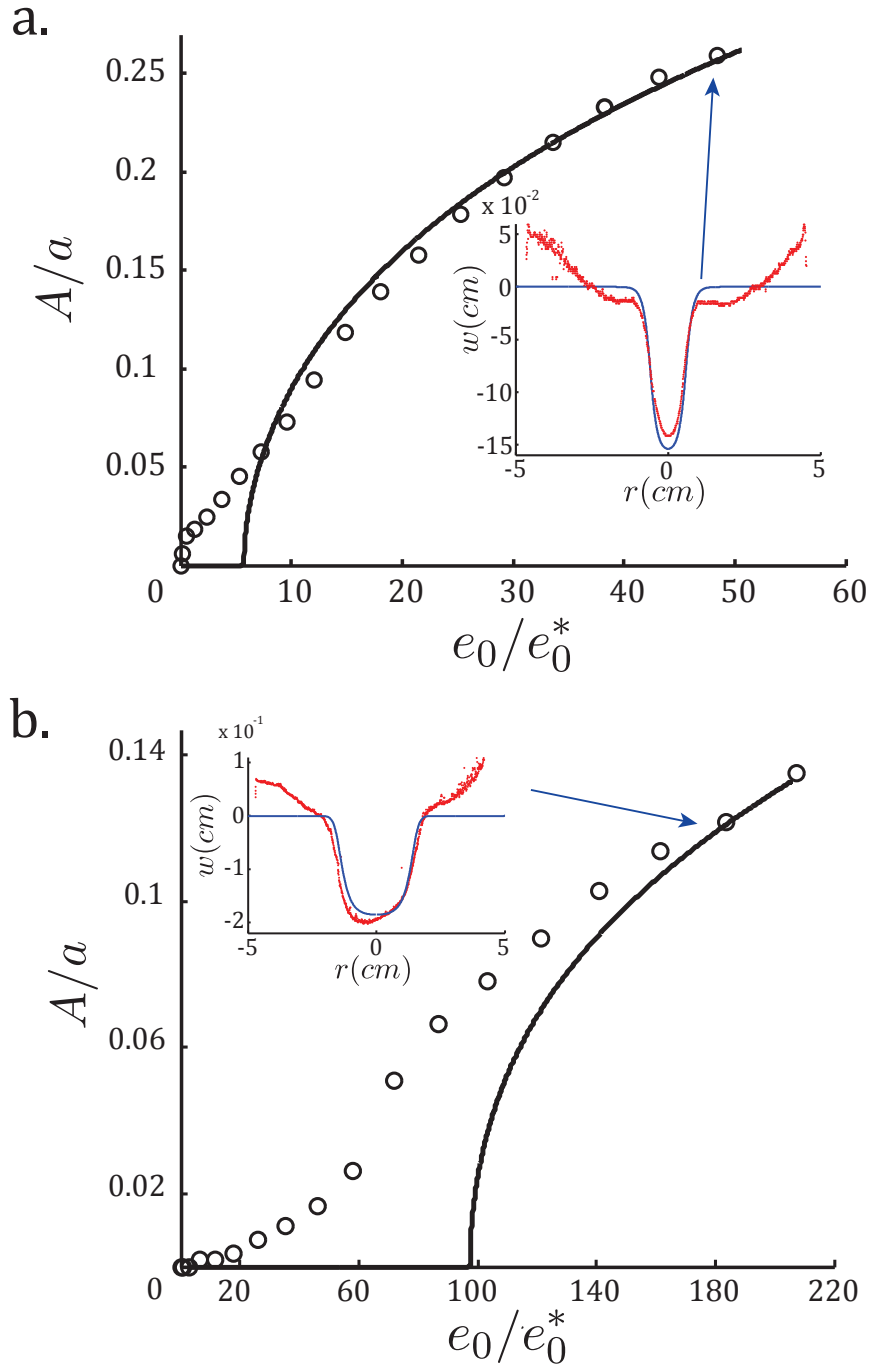


Fig. II.30 Cercles : amplitude de déflexion normalisée A/a en fonction de la déformation appliquée normalisée par la déformation critique prédite par l'équation II.26 e_0/e_0^* . Ligne continue : résolution numérique (Eqs. II.21-II.22). Insert : superposition des profils numériques (ligne bleue) et expérimentaux (points rouges) pour la déformation indiquée par la flèche. a) $h = 150 \mu\text{m}$, $a = 6 \text{ mm}$, $e_p = 0.0007$, $e_0^* = 2.11 \times 10^{-4}$ (insert $V = 3600 \text{ V}$, i.e. $e_0 = 0.03$). b) $h = 150 \mu\text{m}$, $a = 15 \text{ mm}$, $e_p = 0.004$, $e_0^* = 4.38 \times 10^{-4}$ (insert $V = 3400 \text{ V}$, i.e. $e_0 = 0.027$).

En l'absence de pré-déformation, la contrainte radiale dans la région active avant flambage est donnée par l'intégration des équations (II.10)–(II.13) :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu} \left[-e_0 \left(\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) + 1 \right) \right]$$

Ajouter une pré-déformation e_p décale donc la contrainte d'une quantité $\sigma_r^p = \frac{E}{1-\nu} e_p$ (avant le flambage, le problème est linéaire). Nous utilisons notre code `bvp4c` pour calculer l'actionnement critique et le traçons en fonction de $(h/a)^2$ pour différentes valeurs de pré-déformations et un rapport d'aspect fixé $a/b = 0.1$ (figure II.31.a). Sans pré-contrainte, e_0^* varie linéairement avec $(h/a)^2$ à (a/b) fixé, comme nous l'avons vu dans la figure II.28. Une première conséquence évidente de la pré-déformation est d'augmenter la valeur des seuils : il faut en effet surmonter la pré-tension avant d'espérer une instabilité de flambage. Afin de mieux comprendre la nature de ce décalage, nous pouvons compenser cet effet en décalant les courbes du graphique II.31.a de la déformation induite par e_p . Nous avons $\sigma_r = \frac{E}{1-\nu} \left[-e_0 \left(\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) + 1 \right) + e_p \right]$, soit $\sigma_r = -\frac{E}{\eta(1-\nu)} [e_0 - \eta e_p]$ où $\eta = \left(\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) + 1 \right)^{-1} \simeq$

3.9. Définissons alors une déformation effective $e = e_0 - \eta e_p$, choisie de telle sorte que lorsque $e = 0$, l'actionnement électrostatique compense juste la prétension initiale, de sorte que pour $e > 0$ la déformation induite par le voltage produit une contrainte négative dans la membrane. Nous traçons sur le graphique II.31.b la déformation effective critique au flambage : $e^* = e_0^* - \eta e_p$ en fonction de $(h/a)^2$ pour différentes valeurs de e_p comprises entre 10^{-4} et 2×10^{-2} . Notons que pour $h/a \rightarrow 0$ nous avons bien $e^* = 0$, car le flambage se produit dès l'apparition de contraintes compressives. Cependant, Les courbes ne se superposent pas sur une courbe maîtresse et la dépendance linéaire en $(h/a)^2$ observée dans la figure II.28 est perdue, et ce même pour des valeurs de e_p dix fois plus faibles que les valeurs expérimentales. L'effet du pré-étirement n'est pas simplement additif : il ne décale pas seulement le seuil de flambage linéairement. Cette non-additivité n'est pas évidente *a priori* et peut être expliquée par le fait que les contraintes induites par la croissance électrostatique ne sont pas équibiaxiales dans la partie passive de la membrane (voir les équations (II.16)). Ainsi, même dans cette situation où le problème est encore linéaire, la pré-déformation n'est pas compensée de la même façon dans les directions radiales et orthoradiales dans la partie passive. En particulier, dans cette partie, la contrainte azimuthale générée par la croissance est en tension et accentue donc l'effet de la prétension, contrairement à la contrainte radiale qui peut devenir compressive. C'est pourquoi, l'ajout d'une pré-déformation sur un système actionné de manière non homogène ne se traduit pas par un simple décalage du seuil de flambement. L'effet est modeste dans nos expériences. Néanmoins, les applications pratiques impliquent en général des membranes fortement pré-étirées [25, 45], et si nous n'avons pas étudié les domaines d'élasticité non-linéaire, plus cohérents avec les fortes pré-tensions appliquées dans les systèmes pratiques, nous mettons toutefois en lumière le fait que les conséquences du pré-étirement sur le seuil de flambage de ces membranes actives ne sont pas triviales.

Quel est l'impact de la prétension sur les formes obtenues ? Nous avons déjà fait remarquer qu'expérimentalement, nous observons que seule la partie active flambe (la déflexion s'étend légèrement dans la partie passive, mais le flambage est malgré tout très localisé). Cela n'est pas intuitif, si l'on fait le parallèle avec le flambage d'Euler par exemple, ou même avec le flambage d'un disque encastré [43] dans lesquels toute la structure est défléchie. Par ailleurs,

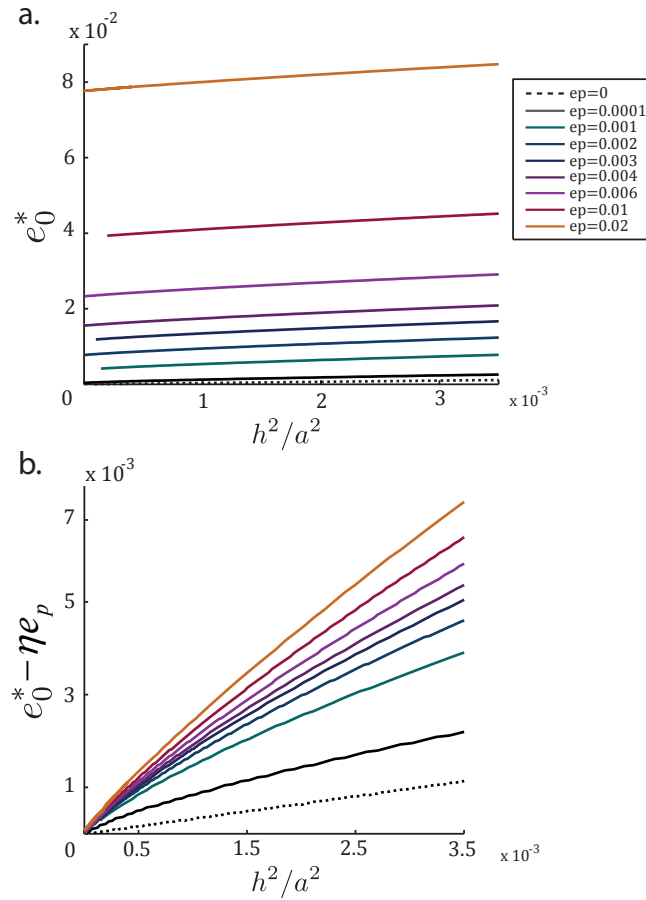


Fig. II.31 Étude numérique de l'effet de la pré-déformation sur le seuil de flambage. a) Seuil de flambage e_0^* en fonction de $(h/a)^2$ pour différentes valeurs de pré-déformations. Le rapport d'aspect a/b est fixé à 0.1 pour tous les cas. b) Évolution de la déformation effective $e_0^* - \eta e_p$ en fonction de $(h/a)^2$ pour différentes valeurs de pré-étirement. Pour $e_p = 0$ (pointillés) e_0^* varie linéairement avec $(h/a)^2$. Cette proportionnalité est en revanche perdue lorsque $e_p > 0$.

la résolution de l'équation linéaire, présentée dans la partie précédente, montre qu'au seuil de flambage, toute la membrane devrait sortir du plan. La localisation du flambage est donc un effet (faiblement) non linéaire. Seule la résolution des équations de Föppl Von Karmàn permet de le capturer. La figure II.32 illustre l'évolution du mode avec la croissance de la zone active. Pour des déformations proches du seuil, le flambage s'étend sur toute la membrane, mais à mesure que le voltage augmente, la déflexion tend à se localiser au niveau de la région active. Malgré tout, comment expliquer qu'expérimentalement nous ne voyions jamais de déflexion sur toute la membrane? Une raison possible est que nous n'avons pas une précision suffisante, autant sur le voltage que sur la mesure de la déflexion. Une deuxième raison met en lumière un autre effet de la pré-tension. En effet, si nous traçons les profils numériques aussi près du seuil que possible, avec et sans pré-tension et que nous comparons les deux, nous nous apercevons que la pré-déformation entraîne une localisation de l'instabilité dès son apparition (voir figure II.33), et ce même pour une pré-déformation de 0.0001. Cet effet

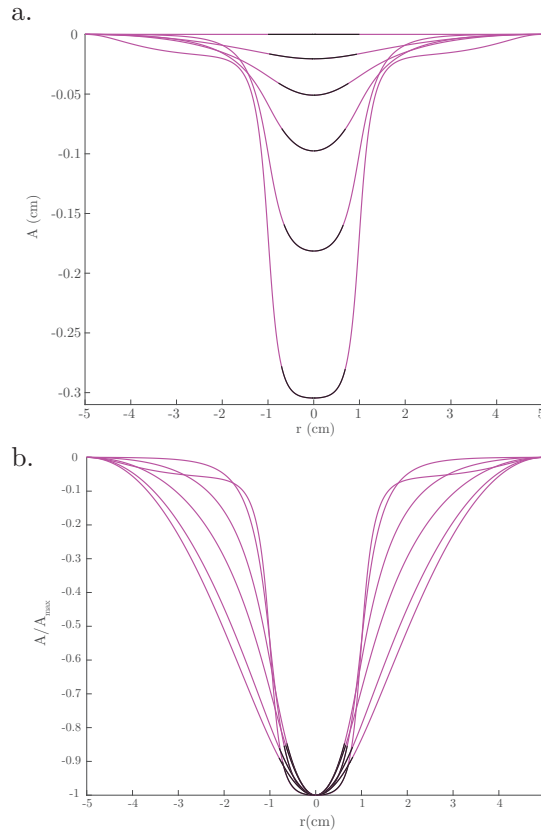


Fig. II.32 Profils numériques montrant l'évolution de la déflexion avec l'actionnement. $h = 150 \mu\text{m}$, $a = 1 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, la zone noire marque l'électrode. Valeurs d'actionnement (du plus plat au plus défléchi) : $e_0 = 8.0 \times 10^{-5}$, $e_0 = 1 \times 10^{-4}$, $e_0 = 4.7 \times 10^{-4}$, $e_0 = 1.9 \times 10^{-3}$, $e_0 = 4.7 \times 10^{-3}$. a) Amplitude de la déflexion en fonction de la position. b) Amplitude normalisée par l'amplitude maximale en fonction de la position.

est très certainement lié au fait que dans la partie passive, la contrainte azimuthale liée à l'actionnement est en tension et s'ajoute à la pré-tension initiale, comme nous l'avons vu plus haut. Elle s'oppose donc au flambage de cette région et la déflexion se localise alors dans la zone active. Pour des voltages élevés, le flambage sera en revanche toujours localisé dans la zone active.

Nous avons présenté une instabilité due à un actionnement non homogène dans un dispositif plus proche de ce qui pourrait être utilisé pour des applications. L'expérience est néanmoins nettement plus délicate que celle du flambage sur l'eau, à cause de la présence de tension mécanique résiduelle. Cela nous a néanmoins conduit à étudier l'influence de cette pré-déformation sur le flambage

Pour terminer cette section, nous pouvons présenter une instabilité secondaire survenant dans cette même configuration.

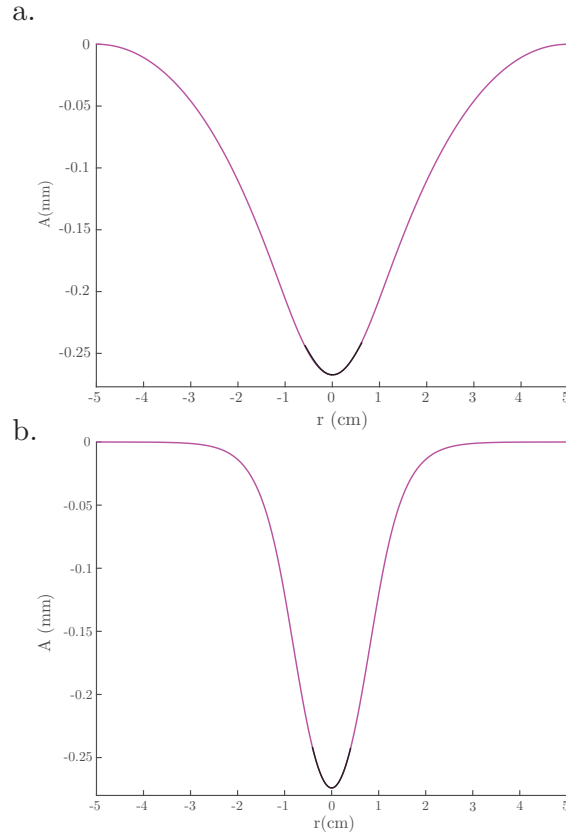


Fig. II.33 Profils numériques montrant l'importance de la pré-déformation sur la forme de la déflexion au seuil de flambage. $h = 150 \mu\text{m}$, $a = 1 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, la zone noire marque l'électrode. a) Sans prétension : le flambage n'est pas localisé ($e_0 = 2 \times 10^{-4}$). b) Pré-déformation $e_p = 0.0001$, le flambage est nettement plus localisé ($e_0 = 8 \times 10^{-4}$).

c) Instabilité de flambage secondaire

Jusqu'à présent, les instabilités de flambage que nous avons étudiées préservent l'axisymétrie. Cependant, au-delà d'un voltage critique, des rides radiales apparaissent à la frontière de la zone active (figure II.34), rompant ainsi l'axisymétrie. Dans le domaine de nos paramètres expérimentaux (V est limité à 5 kV), ces rides ne sont observées que pour des zones actives suffisamment grandes. Typiquement, nous ne les avons vues que pour des zones actives ayant un rayon $a > 1.5 \text{ cm}$ pour $h = 150 \mu\text{m}$ et des voltages supérieurs à 3500V. Pourvu que la pré-déformation dans la membrane soit assez homogène (et petite), la longueur d'onde est bien définie et ne semble pas évoluer significativement avec le voltage. Nous n'avons jamais été en mesure d'observer cette instabilité secondaire pour les membranes flottant sur l'eau. Nous supposons que cela tient au fait que nous n'arrivons pas à atteindre de voltage assez élevé dans ce montage. La pression hydrostatique de l'eau contribue peut-être aussi à stabiliser l'instabilité primaire.

Ce motif rappelle les rides observées dans un ballon de mylar gonflé [46], ou sur les bords d'une feuille très fine déposée sur la surface courbée d'une goutte d'eau [47]. Des rides si-

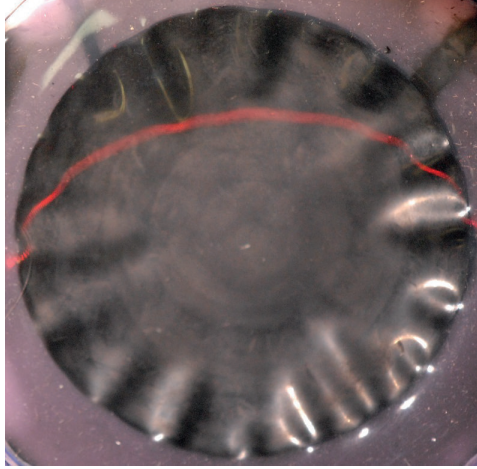


Fig. II.34 *Instabilité secondaire menant à des rides radiales près des bords de la zone active* ($a = 3 \text{ cm}$, $h = 150 \mu\text{m}$, $V = 5 \text{ kV}$).

milaires ont été observées dans des polymères diélectriques actionnés après avoir été gonflés comme des ballons de baudruche[48]. Ces rides résultent de contraintes induites par une croissance orthoradiale importante. Géométriquement, la frontière entre zone active et passive, présente, après croissance, un excès de périmètre par rapport au reste de la membrane, qui est accommodé grâce aux plis radiaux. Les calculs numériques de ces contraintes révèlent en effet la présence de contraintes orthoradiales compressives à la limite de la zone active, responsables de ces rides. La description du seuil de flambage ainsi que de la longueur d'onde de l'instabilité restent toutefois des questions ouvertes.

II.2.7 Flambage d'un anneau

Que se passe-t-il lorsque nous changeons la géométrie de l'électrode ? Nous nous sommes intéressés au cas d'électrodes annulaires, une autre géométrie relativement simple. Le système est similaire à celui décrit dans la section II.2.6. Nous considérons donc une membrane de PVS d'épaisseur h , encastrée dans un cadre rigide circulaire de rayon $b = 5 \text{ cm}$. Une électrode annulaire de rayon intérieur R_{int} et de rayon extérieur R_{ext} est peinte en son centre. Nous ne compensons pas le poids de la membrane. Comme dans les sections II.2.4 et II.2.6, à mesure que le voltage augmente, la zone active se trouve de plus en plus contrainte au sein du reste de la matrice, jusqu'au moment où une instabilité de flambage fait apparaître des ondulations radiales dans la zone active. Nous allons simplement nous poser la question de la longueur d'onde de ces ondulations. Les seuils étant difficiles d'accès expérimentalement, nous ne chercherons pas à les étudier. C'est d'ailleurs pourquoi nous ne compensons pas le poids de la membrane, ce dernier n'ayant visiblement pas d'influence sur la longueur d'onde de l'instabilité.

Expérimentalement, la longueur d'onde observée ne dépend pas du voltage. Nous définissons λ comme étant le nombre d'oscillations divisé par le périmètre du milieu de l'anneau : $p = 2\pi(R_{in} + w/2)$. Quels paramètres physiques déterminent la longueur d'onde λ ?

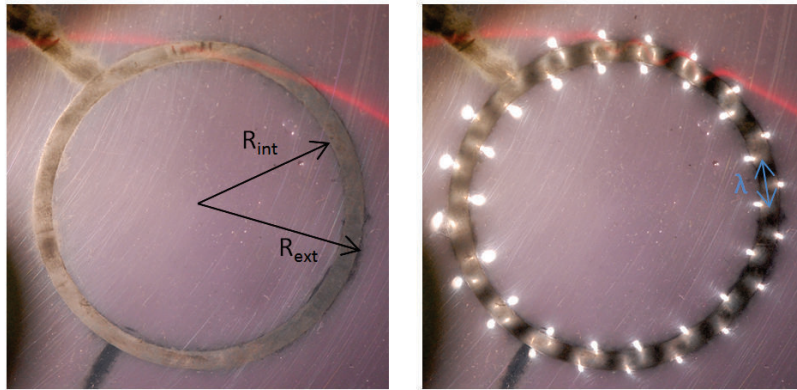


Fig. II.35 Flambage dans une électrode annulaire. Une membrane d'épaisseur $h = 150 \mu\text{m}$ est encastrée dans un cadre rigide. Une électrode annulaire est dessinée de chaque côté de la surface, de rayon interne $R_{int} = 4.2 \text{ cm}$, de rayon externe $R_{ext} = 5 \text{ cm}$. La déflexion de la nappe laser sur la photo de gauche indique une déformation initiale de la membrane, due à son poids. Une fois un voltage seuil dépassé, l'anneau flambe : on observe des oscillations de longueur d'onde λ dans la zone active (photo de droite, $V = 4 \text{ kV}$). Cette longueur d'onde est indépendante du voltage appliqué.

Il y a essentiellement trois longueurs dans le problème : les rayons intérieurs et extérieurs de l'anneau et l'épaisseur de la membrane. Une première série d'expériences à R_{int} et R_{ext} fixés pour différentes épaisseurs de membrane nous permet d'affirmer que λ ne dépend pas de h , en tout cas dans la gamme testée. L'épaisseur de la membrane ne semble avoir d'effet que sur le seuil d'apparition de l'instabilité, même si nous ne sommes pas en mesure de le quantifier de manière appropriée.

En revanche, la longueur d'onde de l'instabilité augmente avec la largeur $w = R_{ext} - R_{int}$ de l'anneau, comme nous pouvons le voir sur la figure II.36. Enfin, si nous menons l'expérience en changeant R_{ext} et R_{int} , mais en maintenant w fixé, nous constatons que la longueur d'onde reste inchangée. Il semble donc que le seul paramètre physique qui joue dans ce problème soit la largeur de l'anneau w .

Traçons λ en fonction de w pour toutes les expériences précédemment mentionnées, nous obtenons le graphique de la figure II.37 qui montre que la longueur d'onde est une fonction affine de la largeur de l'anneau : $\lambda = 0.6w + 5.5$, et ne dépend que de w . Dans le cas où l'anneau est suffisamment fin, une dépendance linéaire de λ en w est attendue. En effet, dans cette situation, notre système est similaire à une bande rectangulaire qui serait comprimée dans sa longueur et dans sa largeur simultanément. Cette analogie est intéressante car elle a été traitée par Yves Pomeau et Basile Audoly [1]. Les auteurs ont montré par une analyse de stabilité linéaire que la longueur d'onde du flambage était proportionnelle à la largeur de l'anneau. Nous pouvons même chercher à vérifier cette analogie en faisant la même expérience avec une bande de largeur w . Les quelques cas testés donnent une très bonne correspondance entre la longueur d'onde dans l'anneau et dans la bande. La dépendance que nous observons est cependant affine. Nous pensons que cela vient du fait que la largeur de l'anneau n'est pas négligeable devant le rayon extérieur ici. Une série d'expériences à mener pourrait donc consister à mesurer les longueurs d'onde dans des anneaux beaucoup plus fins (w plus pe-

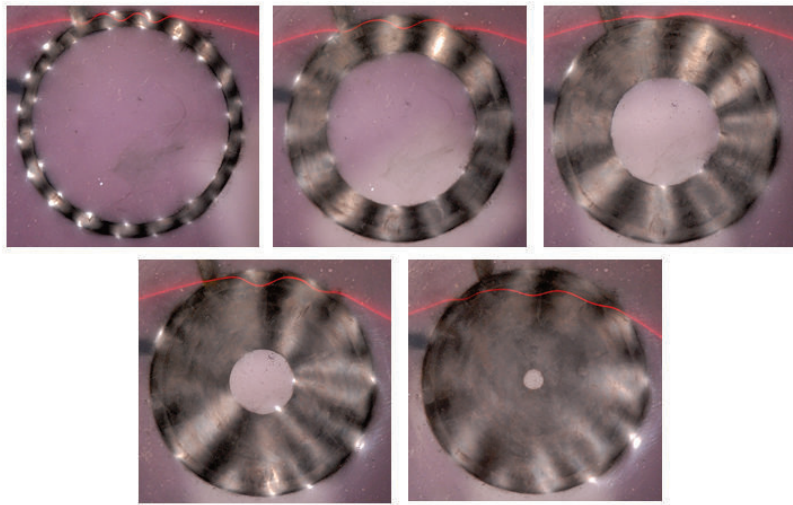


Fig. II.36 *Motifs de flambage pour différents anneaux. Toutes les membranes ont une épaisseur de $h = 150 \mu\text{m}$ et un rayon extérieur $R_{ext} = 2.5 \text{ cm}$. Les largeurs successives des anneaux sont de 3, 8, 12, 18 et 23 mm. La tension appliquée est de $V = 3 \text{ kV}$ dans les différents cas. La longueur d'onde λ semble augmenter linéairement avec w . Le cas $w = 23 \text{ mm}$ semble être limite entre le flambage d'un disque et d'un anneau : les rides ne s'étendent pas sur toute la longueur de la zone active.*

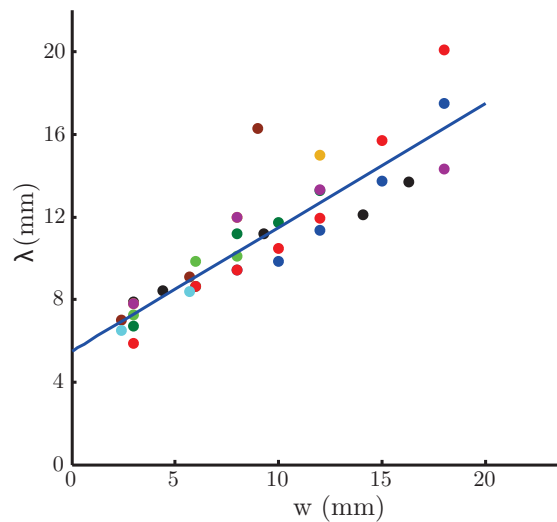


Fig. II.37 *Tracé de la longueur d'onde des oscillations λ (mesurée en prenant le périmètre du centre de l'anneau) en fonction de la largeur de l'anneau. Ligne bleue : régression linéaire d'équation : $y = 0.6x + 5.5$. Chaque couleur correspond à une série de mesure différente. Nous avons fait varier les rapports d'aspect et l'épaisseur de la membrane.*

tit) ou beaucoup plus grands (R_{ext} plus grand). Une autre question intéressante concerne la transition du flambage de l'anneau vers le cercle. En effet, la dernière photo de la figure II.35, dans laquelle l'anneau est "quasiment" un cercle ($R_{int} = 2\text{ mm}$) laisse voir des rides qui ne s'étendent pas jusqu'au centre de l'électrode. Dans tous les autres cas, les rides occupent tout l'espace actif. Cette dernière instabilité nous évoque donc plus l'instabilité secondaire mentionnée à la fin de la section précédente.

Nous avons donc pu déclencher des instabilités de flambage dans lesquelles un matériau en croissance flambe au sein de lui même. Les polymères diélectriques apparaissent ainsi comme des systèmes assez adaptés à l'étude des tels phénomènes, proches de croissance biologique. Nous pouvons pousser plus loin l'analogie biologique et chercher à voir comment nous pourrions obtenir une croissance inhomogène dont la distribution spatiale serait continue, ou encore une croissance anisotrope.

II.3 Croissance inhomogène et anisotrope

Au début de ce chapitre, nous avons fait un parallèle entre la croissance biologique et la "croissance électrostatique" des polymères diélectriques. Pourtant, jusqu'à présent nous n'avons rencontré qu'une croissance "binaire" : une partie croît, tandis que l'autre reste passive. Cela ne semble pas très naturel ! Nous avons également vu qu'une stratégie courante pour obtenir des formes tridimensionnelles dans la nature est d'utiliser une croissance anisotrope. Les tissus fibreux sont l'un des moyens utilisés par les plantes pour obtenir des changements de forme dépendants de l'hygrométrie, par exemple. Les fibres intégrées aux matrices biologiques se distinguent en général du reste du tissu par leur plus grande rigidité, mais aussi par un facteur de gonflement différent. Le gonflement d'une feuille de papier illustre élégamment cette idée [49]. Le papier calque est une plaque mince dans laquelle se trouvent des fibres alignées dans une direction. Coupons des bandes rectangulaires que nous plaçons à la surface de l'eau. L'eau imbibe la feuille et la fait gonfler : on a ainsi, au début de l'expérience, un effet bilame (seule une moitié de la feuille gonfle). Suivant l'orientation des fibres dans la feuille (c'est-à-dire, suivant comment nous avons orienté la feuille lors de la découpe des rectangles), le gonflement va avoir des directions différentes. En effet, les fibres n'ont pas tendance à gonfler avec l'eau : le gonflement se produit donc essentiellement perpendiculairement à l'axe des fibres. Ainsi, si les fibres sont orientées le long du grand axe du rectangle, l'effet bilame va faire que la feuille s'enroule comme une cigarette. Si les fibres sont orientées le long du petit axe du rectangle, l'enroulement a lieu perpendiculairement au premier. Enfin, si les fibres sont diagonales au grand axe, le papier va s'enrouler comme une hélice (voir photo II.38).

Nous souhaitons pouvoir prescrire la forme qu'adoptera le polymère diélectrique lors de l'application d'un champ électrique. À cette fin, nous allons essayer dans cette section de nous rapprocher d'une croissance inhomogène continuellement variable ou anisotrope. Comment contrôler le degré de croissance locale de notre objet ? Ces stratégies sont-elles suffisantes pour contrôler sa forme finale ?

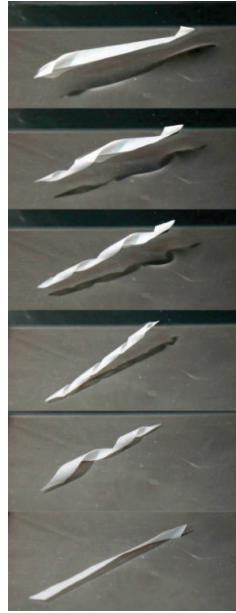


Fig. II.38 *Enroulement d'une feuille de papier calque déposée sur un bain d'eau. Les fibres sont ici orientées en diagonale par rapport au grand axe de la feuille. Image tirée de <http://www.amaco.org/webapp/website/website.html?id=102read=truepageId=493>.*

a) Croissance différentielle

Principe et réalisation expérimentale

Nous avons vu que la déformation radiale dans le polymère varie comme (éq. (II.9)) :

$$e \sim \frac{V^2}{h^2}$$

Dès lors, une solution pour contrôler la déformation locale est soit de contrôler l'épaisseur soit le voltage local. Jouer sur l'épaisseur locale du polymère nous semblait la solution la plus réalisable, nous nous sommes donc concentrés sur cette idée. Pour imposer un gradient de croissance, il faut une feuille ayant un gradient d'épaisseur. Techniquement, il n'est cependant pas si facile de réaliser des membranes de polymère qui soient à la fois fines et dont l'épaisseur varie de manière contrôlée. Pour contourner cette difficulté, nous nous sommes inspirés des travaux du groupe de Ryan Hayward [50]. L'idée est d'utiliser une technique dite de demi-teinte, couramment utilisée en imprimerie, qui consiste à discrétiser l'image à imprimer en un réseau de petits points. La densité de points permet alors de moduler l'intensité de la couleur. Cette méthode est donc intéressante car en utilisant seulement la couleur noire, il est possible d'obtenir une large palette de gris. On peut voir sur la figure II.39 une image réalisée en demie-teinte.

L'équipe de Hayward a ainsi adapté cette technique en réticulant localement (à l'aide d'un faisceau laser focalisé) un copolymère à base de NIPAm qui gonfle lorsqu'il est plongé dans l'eau ; son gonflement dépendant bien sûr de son degré de réticulation. Le contrôle précis du taux de réticulation local permet ainsi d'obtenir des feuilles de polymères dont le gonflement



Fig. II.39 Exemple d'une image en demi-teinte (halftone). La densité de points, permet de moduler l'intensité de la couleur. Plus la résolution d'impression est bonne, plus l'image semble continue. Image tirée de <http://nullprogram.com/blog/2011/10/13/>.

moyen varie spatialement. Le caractère discontinu des points réticulés rend cette technique assez facilement applicable : le polymère avec ses zones réticulées peut être obtenu en une étape, épargnant ainsi la superposition de plusieurs masques de lithographie, étapes qui peuvent s'avérer délicates.

Si les zones réticulées sont trop éloignées les unes des autres, le gonflement déclenche des instabilités de flambage locales. En revanche, si les points sont suffisamment proches les uns des autres (d'une distance de l'ordre de l'épaisseur de la feuille) alors la croissance peut être considérée comme continue. Dans ces conditions, la feuille, une fois plongée dans l'eau, gonfle d'un facteur dépendant de la densité de points réticulés. Il devient alors possible de relier le profil de réticulation à la métrique visée après gonflement, et donc à la courbure de Gauss de l'objet final. En contrôlant précisément les zones réticulées et leur taux de réticulation, l'équipe de chercheurs a réussi à fabriquer un polymère qui, une fois plongé dans l'eau, adopte la forme prévue (voir figure II.40). Grâce à une construction astucieuse, ils ont même obtenu une plaque se transformant en sphère fermée (et non en hémisphère). Comme dans les exemples précédents, ce dispositif est (lentement) réversible.

Nous décidons de moduler l'épaisseur de la membrane grâce à une technique de demi-teinte. L'idée est de texturer la surface du polymère diélectrique avec des piliers régulièrement espacés. Ainsi, les zones denses en piliers seront en moyenne plus épaisses que les zones pauvres en piliers, leur actionnement sera donc moins important. Nous illustrons cette idée sur la figure II.41 où l'on peut voir un schéma du principe et une photo de la surface texturée. Concrètement, nous souhaitons réaliser des piliers cylindriques dont la hauteur p , le rayon r et l'espacement centre à centre d sera de l'ordre de quelques dizaines de microns, à la surface d'une couche de polymère. La photolithographie se prête bien à l'obtention de telles surfaces. Nous dessinons des masques avec les motifs souhaités (que nous préciserons après), puis réalisons des galettes de silicium portant ce motif. La technique de lithographie consiste à étaler une résine photo-réticulable sur une galette de silicium, qui est ensuite insolée avec le motif voulu. Les zones éclairées réticulent, puis, lorsque la galette est plongée dans un bain de solvant de la résine, les parties non réticulées se décollent de la surface, tandis que les

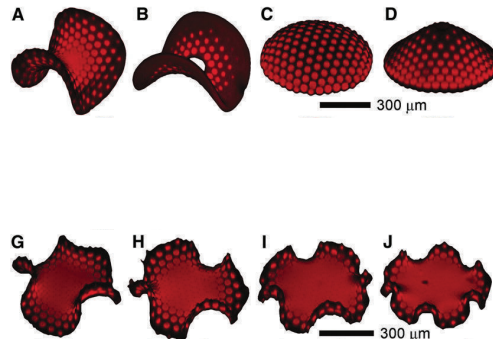


Fig. II.40 Forme adoptées par les membranes de NIPAM après avoir été plongées dans l'eau. Les points rouges clairs correspondent à des zones réticulées. L'équipe de Ryan Hayward a obtenu, de manière contrôlée, une grande diversité de formes, à courbures de Gauss positives ou négatives [50].

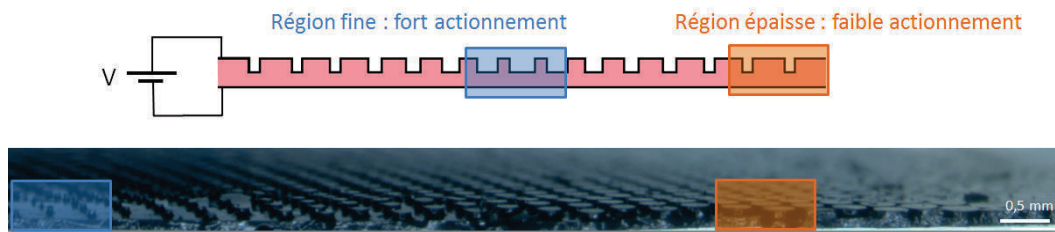


Fig. II.41 schéma illustrant le principe de demi-teinte sur nos polymères électroactifs. Nous texturons la surface de la membrane avec des piliers. Les zones présentant une forte densité de piliers seront localement plus épaisses que celles présentant une faible densité, et seront donc moins sensibles au voltage. La photo est une vue de profil de la membrane qui laisse voir une zone dense en piliers (orange) et une zone pauvre en piliers (bleue). Le paramètre pilotant la densité est le rayon des piliers, la distance centre à centre entre piliers voisins restant constante.

zones réticulés ne sont pas solvatées et y restent. On obtient finalement un moule du motif souhaité. Il ne nous reste plus qu'à spin-coater le PVS sur cette galette pour obtenir une membrane dont une surface est texturée (voir photo figure II.41).

Résultats préliminaires : rapport croissance/densité

Nous ne disposons malheureusement que de quelques résultats préliminaires (mais néanmoins encourageants). Nous les présentons afin d'illustrer cette méthode.

La première expérience à mener est de vérifier que l'actionnement dépend bien de la densité de piliers. À cette fin, nous réalisons des surfaces circulaires de rayon 1.5 cm couvertes d'un réseau hexagonal de piliers de rayon r et de distance bord à bord d . La densité de surface de piliers est donc égale à $\varphi = \frac{\pi r^2}{2\sqrt{3}(r+d/2)^2}$. Nous peignons ensuite une électrode circulaire de rayon 1 cm sur la face non texturée de la membrane. Nous laissons un anneau extérieur non couvert de noir de carbone afin d'éviter le claquage en circonférence (comme évoqué en

section II.2.4). Nous réalisons ensuite un moucheté de peinture sur cette surface. La peinture offre en effet une meilleure adhésion que le talc utilisé jusqu'ici, elle permet donc une plus grande précision des mesures. La membrane est ensuite déposée à la surface d'un bain d'eau savonneuse et nous reprenons le même dispositif expérimental que dans les expériences de la section II.2.4.

Nous avons réalisé des piliers de rayon $r = 50$ et $r = 100 \mu\text{m}$, des espacements entre piliers allant de $d = 0$ à $d = 300 \mu\text{m}$, et donc des densités comprises entre $\varphi = 0.91$ et $\varphi = 0.15$. Pour des questions de résolution, nous n'avons pas réussi à faire de surfaces dont la distance entre piliers est supérieure à 0 (les piliers se touchent : la densité vaut $\varphi = 0.91$) mais inférieure à $60 \mu\text{m}$. Enfin, les piliers ont une hauteur p d'environ $70 \mu\text{m}$. Nous devons donc fabriquer des membranes assez fines. En effet, pour espérer obtenir une déformation notable, les piliers et la membrane doivent avoir des tailles semblables. Toutes ces expériences ont ainsi été réalisées avec des membranes d'épaisseur comprises entre 60 et $80 \mu\text{m}$. Nous sommes finalement bien dans des conditions similaires à celles de [50], avec des espaces entre piliers inférieurs ou de l'ordre de l'épaisseur de la feuille de polymère.

Pour une surface donnée, nous mesurerons la déformation radiale e_r en fonction du carré du voltage appliqué V^2 . Nous vérifions déjà que la déformation est continue et homogène dans la zone active et qu'une relation linéaire relie ces deux grandeurs : $e_r = \alpha V^2$. Les piliers ne modifient donc pas le mécanisme d'actionnement et sont suffisamment proches pour que la croissance puisse être considérée comme moyennée. Nous pouvons ensuite nous intéresser à la pente α de la relation entre la déformation et le carré du voltage. Nous nous attendons à ce que α dépende de l'épaisseur de la membrane, du rapport de la taille de la zone active sur la zone passive, et de la densité de piliers φ . Nous fixons tous les premiers paramètres et ne faisons varier que φ . Pour les différentes surfaces testées nous traçons α en fonction de φ pour obtenir le graphique de la figure II.42. Le point à $\varphi = 0$ correspond à une surface non texturée, d'épaisseur égale à la surface sans pilier de la série correspondante.

Bien que bruités, ces résultats laissent tout de même entrevoir une tendance claire : α — donc la pente de la relation déformation/voltage — diminue lorsque la densité de piliers augmente. Autrement dit, l'actionnement des surfaces densément couvertes est moindre que celui d'une surface plus clairsemée. Comment la déformation dépend-elle de la densité de piliers ? Supposons que les déformations se moyennent, celles-ci sont assez faibles pour que l'élasticité reste linéaire ici. Sous l'effet du voltage, une zone non couverte subit une déformation : $e_r = \frac{1}{8} \left(3 + \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V^2}{E h^2}$ d'après l'équation (II.14). Un pilier, quant à lui a une épaisseur $h + p$ et se déforme donc de : $e_r = \frac{1}{8} \left(3 + \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V^2}{E (h+p)^2}$. Enfin, il y a une densité φ de piliers, la déformation moyenne vaut donc :

$$e_r = \frac{1}{8} \left(3 + \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V^2}{E} \left(\frac{\varphi}{(h+p)^2} + \frac{1-\varphi}{h^2} \right)$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$e_r = \frac{1}{8} \left(3 + \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V^2}{E h^2} \left(\frac{\varphi}{(1+\Psi)^2} + 1 - \varphi \right)$$

Avec $\Psi = p/h$ le rapport d'aspect des piliers.

Nous superposons alors pour chaque surface les tracés de $\alpha = f(\varphi)$ pour les valeurs expérimentales et théoriques : $\alpha = \frac{1}{8} \left(3 + \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{E h^2} \left(\frac{\varphi}{(1+\Psi)^2} + 1 - \varphi \right)$. Dans un souci de lisibilité, nous

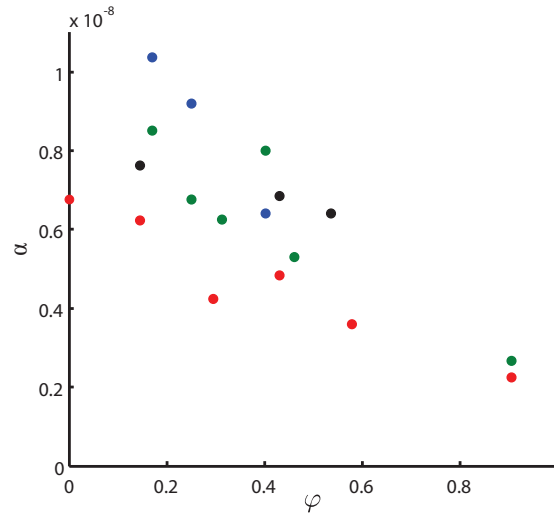


Fig. II.42 Données brutes : $\alpha = e_r/V^2$ en fonction de φ pour différentes surfaces : (●) $r = 100 \mu\text{m}$, $h = 60 \mu\text{m}$, $p = 70 \mu\text{m}$; (●) $r = 100 \mu\text{m}$, $h = 70 \mu\text{m}$, $p = 70 \mu\text{m}$; (●) $r = 50 \mu\text{m}$, $h = 60$, $p = 70 \mu\text{m}$; (●) $r = 50 \mu\text{m}$, $h = 70 \mu\text{m}$, $p = 70 \mu\text{m}$. α diminue lorsque φ augmente.

ne choisissons que les deux surfaces pour lesquelles nous avons le plus de données expérimentales, et en particulier les points extrémaux (figure II.43). L'accord est assez convaincant, et cette modélisation de la déformation semble donc sensée. Les légères différences peuvent sans doute être attribuées aux non homogénéités des surfaces.

La densité de piliers à la surface du polymère est donc reliée à l'amplitude de la déformation de cette zone. Nous disposons ainsi d'un moyen de contrôler localement la croissance, c'est-à-dire de prescrire la métrique de la feuille et ainsi sa forme. Nous nous proposons donc d'établir des gradients de piliers. Qualitativement, une densité de piliers décroissante avec le rayon (surface très couverte au centre, peu sur les bords) devrait conduire à une surface à courbure de Gauss positive (typiquement, une demie sphère si le gradient est bien choisi). En effet, à voltage fixé, un tel objet verrait sa dilatation diminuer à mesure que l'on s'éloigne de son centre. Il s'agit bien d'une façon d'obtenir une surface à courbure de Gauss positive. Au contraire, une surface dont la densité de piliers croît avec le rayon conduirait à une surface à courbure de Gauss négative (type selle de cheval). Nous n'avons pas réussi à obtenir de résultats vraiment satisfaisants. Ces membranes sont très fines, la gravité a donc un fort impact sur la forme qu'elles prennent, et nous n'avons malheureusement pas réussi à trouver un montage permettant d'observer clairement ces changements de formes. Néanmoins, une preuve de concept préliminaire consiste à faire flamber une telle membrane texturée sur un bain d'eau. L'actionnement électrostatique conduisant à un changement de métrique, le motif de flambage devrait différer de celui observé dans la section II.2.4. Sur la figure II.44.a nous présentons la photo d'une membrane texturée avec une densité de piliers croissante avec la distance au centre (voir schéma II.44.b). Le fait que les bords soient passifs (pour éviter les courts-circuits) accentue l'effet du gradient de croissance. Nous voyons apparaître des oscillations concentriques, de longueur d'onde ℓ_{eg} , et non une localisation du flambage

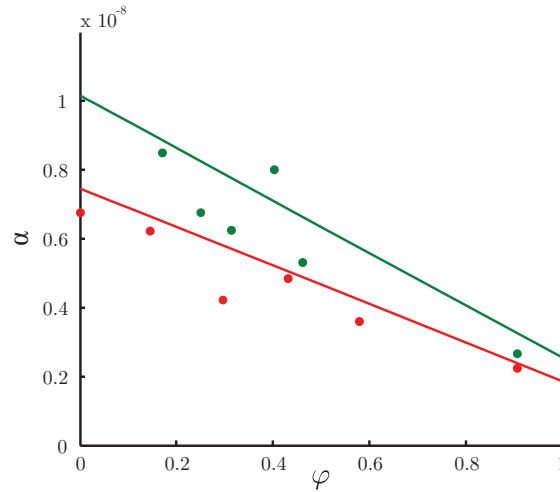


Fig. II.43 Données brutes : α en fonction de φ pour différentes surfaces : (●) $r = 100 \mu\text{m}$, $h = 70 \mu\text{m}$, $p = 70 \mu\text{m}$; (●) $r = 50 \mu\text{m}$, $h = 70 \mu\text{m}$, $p = 70 \mu\text{m}$. Lignes : $\alpha = \frac{1}{8}(3 + \frac{a^2}{b^2}) \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{E} \frac{1}{h^2} (\frac{\varphi}{(1+\Psi)^2} + 1 - \varphi)$, avec les tailles mesurées expérimentalement.

au niveau de la frontière entre zones active et passive comme dans le cas d'une membrane lisse. Ces oscillations sont révélatrices d'un changement de métrique de la surface. En effet, soumis à une différence de potentiel, cet objet adopte une nouvelle forme "naturelle" (dans le sens où elle ne présente pas de contraintes) hémisphérique (pour simplifier nous assimilerons ici la surface à courbure de Gauss positive à une portion de sphère). Seulement, la présence du bain d'eau limite les mouvements hors du plan. La portion de sphère est alors forcée à adopter une forme plane, générant ainsi des contraintes dans le matériau. Précisément, ces contraintes sont celles à appliquer pour transformer une sphère en plan. Ces contraintes, compressives radialement, conduisent naturellement à des oscillations concentriques. Nous aurons l'occasion de revenir sur un flambage très similaire dans le chapitre suivant. Nous pensons donc que l'observation d'un motif oscillant concentrique est révélateur d'un changement de métrique de la surface, et prouve l'existence d'une croissance inhomogène.

b) Croissance anisotrope

Nous employons une stratégie similaire pour susciter une croissance anisotrope en texturant la surface du polymère diélectrique de façon à introduire une anisotropie. À cette fin, nous réalisons des moules en photolithographie tels qu'une fois réticulé, le polymère présente à sa surface des lignes de largeur et de hauteur de quelques dizaines de microns, qui sont concentriques ou radiales. Ces lignes, plus épaisses que le reste de la membrane, ont un actionnement moindre que le reste de l'électrode. En orientant les lignes, nous pouvons alors donner une direction de croissance privilégiée au polymère. La surépaisseur ajoute en outre un effet de rigidification anisotrope.

Ainsi, une membrane avec fibres disposées en cercles concentriques à sa surface va avoir une croissance radiale plus prononcée que sa croissance azimuthale. Il s'agit là d'une croissance anisotrope conduisant à une surface ayant une courbure de Gauss positive. Au contraire, une

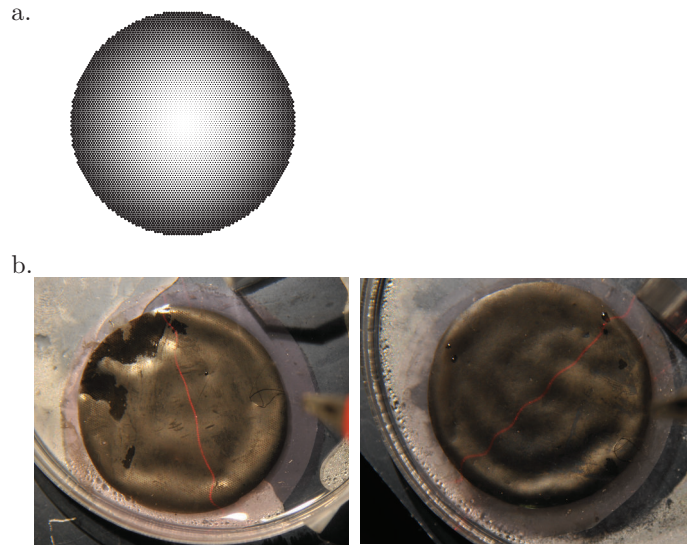


Fig. II.44 a.) Gradient de piliers utilisé : la densité augmente du centre vers la périphérie. b.) Deux exemples de membranes, réalisées avec des moules différents présentant des oscillations. La zone active a un diamètre de 2 cm, le rayon total est de 2.5 cm. La membrane de gauche fait environ 90 μm d'épaisseur, celle de droite 70 μm , les piliers 60 μm de hauteur. Le voltage imposé est supérieur à 2000 V dans les deux cas.

surface dont les fibres sont disposées radialement va présenter une croissance azimuthale plus prononcée que sa croissance radiale, conduisant à une surface à courbure de Gauss négative. Comme précédemment, nous menons l'expérience de flambage d'une membrane texturée sur l'eau, le motif de flambage nous renseigne alors sur le type de croissance suscitée par les textures. La figure II.45 présente les photos des deux types de modes observés. Tout d'abord, dans le cas des fibres disposées radialement II.45.a, nous observons un flambage différent de celui de la section II.2.4. On voit assez clairement des plis radiaux apparaître, qui n'étaient jamais présents dans les expériences précédentes. Les lignes radiales limitent la dilatation dans cette même direction, de sorte que la croissance azimuthale est plus importante. Cette membrane tend alors à se transformer en surface à courbure de Gauss négative, mais à nouveau l'eau limite les mouvements hors du plan. La surface devant rester plane, des contraintes azimuthales compressives apparaissent (les périmètres sont "trop longs"), qui sont relaxées par les plis radiaux. La photo II.45.b présente quant à elle le motif de flambage produit par les fibres concentriques. Nous retrouvons le même type de plis concentriques observés dans la figure II.44. La raison en est la même : les lignes limitant la croissance azimuthale, cette membrane tend à se transformer en portion de sphère (ou de cône) sous l'application d'un voltage. L'eau l'en empêche, et conduit au motif de plis concentriques. Notons que le motif semble plus net que dans le cas des piliers (II.44). L'effet de la croissance anisotrope est peut-être plus fort que celui des gradients de piliers grâce à l'effet de rigidification mécanique des fibres. En outre, les textures anisotropes sont probablement de meilleure qualité que les piliers. Il est en effet plus facile de réaliser en lithographie des motifs de lignes assez longues que des piliers ayant un rayon petit devant leur hauteur, qui en plus peuvent être densément

répartis.

Ainsi, en texturant la surface d'un polymère diélectrique, nous sommes capables de contrôler la croissance créée par le champ électrique. Nous avons pu montrer que la dilatation de la surface diminue avec la densité de piliers. En jouant avec la répartition des piliers, nous contrôlons donc la croissance locale de la membrane. Nous l'avons illustré en présentant des motifs de flambage différents de ceux observés dans le cas d'une zone active non texturée. Des textures anisotropes, de type fibres, nous ont également permis d'obtenir des motifs de flambage à plis radiaux, ou concentriques.

La texturation des surfaces présente également de nombreuses difficultés. Ainsi, la trop grande finesse des membranes nous empêche d'observer effectivement le changement de forme, nous obligeant à nous limiter pour le moment au flambage sur un bain d'eau. D'autre part, l'impossibilité de couvrir complètement la membrane avec l'électrode est également handicapante, dans la mesure où la zone passive du bord impactera nécessairement le schéma de croissance que nous cherchons à imposer. Enfin, la lithographie limite également les rapports d'aspects des textures que nous pouvons fabriquer. Malgré ces problèmes, nous pensons que cette méthode peut s'avérer prometteuse pour obtenir des formes tridimensionnelles à partir de surface initialement planes. Que ce soit pour des applications, ou pour des études plus fondamentales explorant le lien entre la géométrie et la forme d'un objet. Un important travail reste à fournir pour caractériser plus précisément cette méthode. À partir de quel moment est-ce que la croissance peut effectivement être vue comme moyennée ? Peut-on caractériser la croissance anisotrope par une DIC ? Comment observer le changement de forme tridimensionnelle de la membrane ?

II.4 Instabilités corona

Jusqu'à présent, les actionnements que nous avons étudiés étaient inhomogènes grâce au fait que l'électrode ne couvrait pas toute la membrane, ou encore que la surface du polymère était texturée. Toutefois, la zone active étant une électrode, le voltage imposé y était, lui, homogène.

Dans cette section nous allons charger électriquement les polymères diélectriques en déposant localement des charges par effet corona à la surface de la membrane. Nous allons voir que cette méthode déclenche une instabilité de flambage assez surprenante.

a) Effet corona

Le champ électrique au voisinage d'une pointe diverge mathématiquement. Ainsi, lorsque une pointe est amenée à un voltage suffisamment important, le champ électrique peut y devenir assez grand pour ioniser le milieu ambiant, créant ainsi un plasma autour d'elle (voir figure II.46). On parle de décharge corona lorsqu'un courant est produit entre deux électrodes amenées à un fort potentiel électrique et séparées par un fluide neutre. Les feux de Saint-Elme sont une manifestation naturelle de ce phénomène : en cas de temps orageux, la pointe métallique d'un mât, ou le piolet d'un alpiniste est chargée par l'air ambiant et se met à luire.

Cet effet est souvent redouté (dans les lignes à haute tension par exemple), il est néanmoins

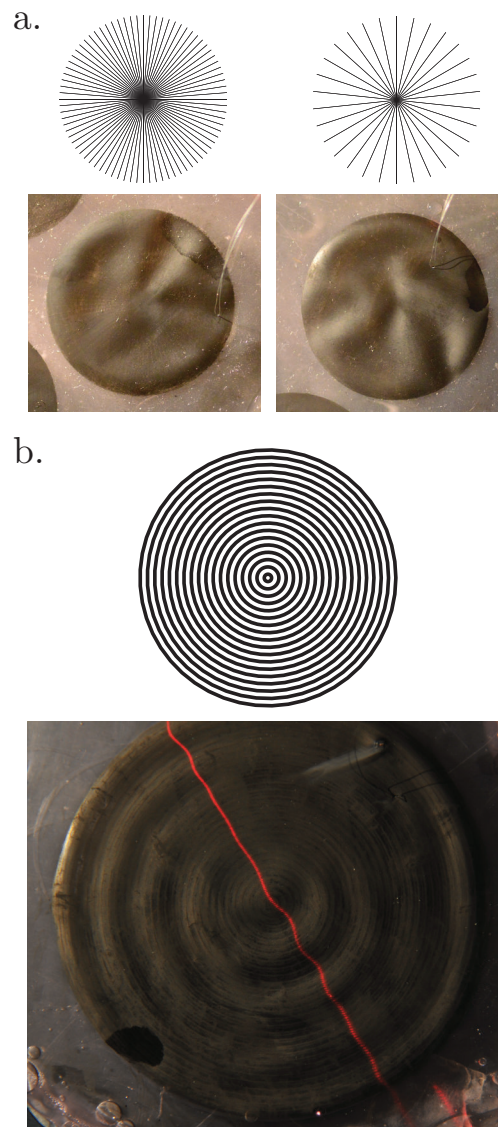


Fig. II.45 a.) Deux exemples de membranes anisotropes avec des "fibres" radiales. Le flambage conduit à des plis orthoradiaux. Les deux membranes ont la même épaisseur (une centaine de microns), mais l'écart entre les fibres diffère. Le diamètre de la zone active est d'environ 3 cm. Le voltage est supérieur à 2000 V. b.) Membrane anisotrope avec fibres concentriques. Le flambage donne naissance à des plis concentriques. La membrane a une épaisseur d'environ $70\ \mu\text{m}$, la zone active présente un diamètre d'environ 5 cm, le voltage est supérieur à 2000 V. Dans les deux cas, les "fibres" ont une épaisseur d'environ $60\ \mu\text{m}$.

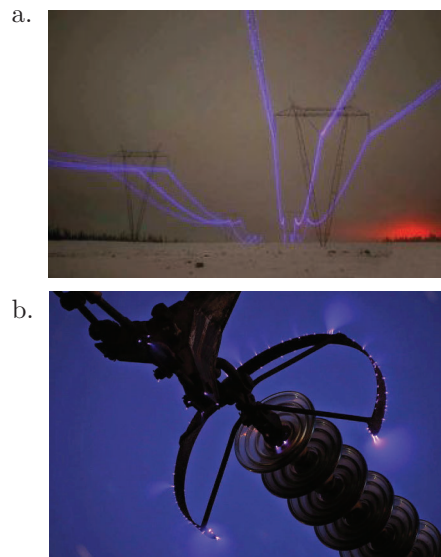


Fig. II.46 a.) Effet corona dans des lignes à haute tension (image tirée de <http://qi.epfl.ch/sondage/show/132/>). b.) Effet corona sur un éclateur (ligne haute tension à 500 kV). Un éclateur est un instrument permettant d'éviter les surtensions. Lorsque la tension devient trop importante un arc électrique se produit dans le gaz ambiant entre les deux électrodes de l'éclateur. L'une des deux électrodes se trouvant reliée à la terre, cela permet d'éliminer une éventuelle surtension. Photo tirée de Wikipédia.

utilisé dans quelques applications pratiques. Parmi les plus courantes, citons les photocopieurs à procédé xérophotographique. Dans ces machines, une surface photoconductrice est prise en sandwich entre un tambour relié à la masse et une pointe chargée à plus de 15kV. La surface photoconductrice est chargée négativement par effet corona. Cette dernière est ensuite éclairée sélectivement, les zones illuminées devenant conductrices, les charges en sont évacuées. Seuls les endroits où l'on souhaite déposer de l'encre restent chargés. Enfin, le toner amène des particules de graphite chargées positivement qui ne se fixent qu'au niveau des zones préalablement chargées. Il ne reste plus qu'à faire passer une feuille de papier, chargée négativement pour ramasser les grains de graphite et à la chauffer pour terminer l'impression (voir schéma II.47).

L'effet corona est également fréquemment utilisé dans l'industrie pour étaler une goutte de diélectrique en un film fin pour différentes applications : revêtement, refroidissement de surfaces, évaporation de films fins... Une goutte de diélectrique repose sur une surface conductrice reliée à la masse, tandis qu'une pointe amenée à un potentiel électrique élevé (au-dessus du seuil corona) est placée au-dessus [51], voir figure II.48. La goutte est chargée par effet corona, l'étalement repose alors sur la pression électrostatique créée par les interactions entre charges de part et d'autre du liquide diélectrique. Il s'agit en somme du même principe que celui des polymères diélectriques. Il est intéressant de remarquer que l'étalement du liquide dépend de l'espace entre l'aiguille et le diélectrique. En effet, le champ électrique est plus

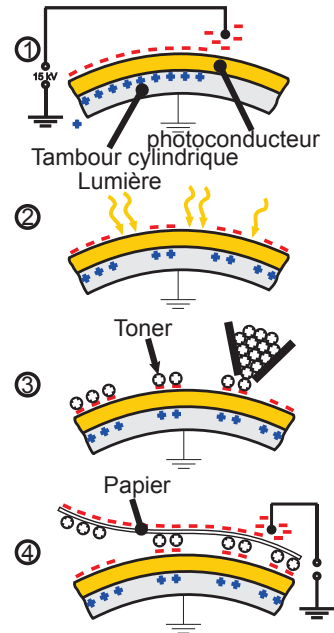


Fig. II.47 Les différentes étapes du procédé xérogaphique ("photocopie"). Illustration tirée de Wikipédia.

fort au niveau de la zone directement en regard de la pointe. Dès lors, les charges déposées à la surface du diélectrique y sont plus nombreuses que sur les zones éloignées de la pointe [52, 53]. Dans ces conditions, l'étalement du liquide n'est pas uniforme (figure II.49.b). Si en revanche l'aiguille est assez éloignée de la surface (plus de 6 cm dans l'étude réalisée par Mahmoudi [51]), la densité de charges est suffisamment régulière pour que l'étalement soit uniforme. Historiquement, c'est en les chargeant par effet corona que Röntgen a conçu les premiers polymères diélectriques, et c'est également cette méthode qu'a choisie l'équipe de Siegfried Bauer pour actionner ses polymères [54]. En déposant des charges "plus" d'un côté de la membrane (en orientant une pointe chargée en direction de cette surface) et des charges "moins" de l'autre (en orientant une pointe reliée à la masse de ce côté), on peut actionner le polymère (voir figure II.49.a). Le principe de fonctionnement est donc exactement le même que celui des polymères diélectriques classiques : les interactions coulombiennes entre les charges de part et d'autre de la membrane entraînent sa déformation. Cette méthode présente en outre l'avantage d'éviter l'instabilité de pull-in. En effet, ici la charge est imposée, ainsi, lorsque les électrodes se rapprochent, la quantité de charges ne changeant pas, il n'y a pas de rétroaction positive sur le système et donc pas d'emballement. Enfin, en utilisant une série de pointes chargées l'équipe de Bauer s'est prémunie d'effets de charges inhomogènes trop importants.

Nous avons également souhaité utiliser l'effet corona pour charger les polymères, mais toujours dans l'idée d'un actionnement non homogène. Cette méthode s'est révélée beaucoup plus délicate que prévue. Nous avons néanmoins pu observer une instabilité mécanique. Même si à ce jour nous n'avons pas de modèle permettant de l'expliquer, nous estimons intéressant

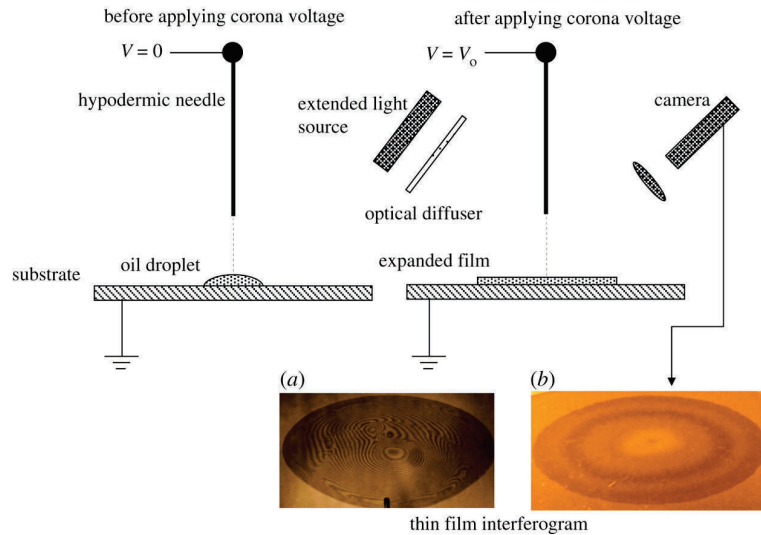


Fig. II.48 Étalement de gouttes de diélectrique par effet corona [51].

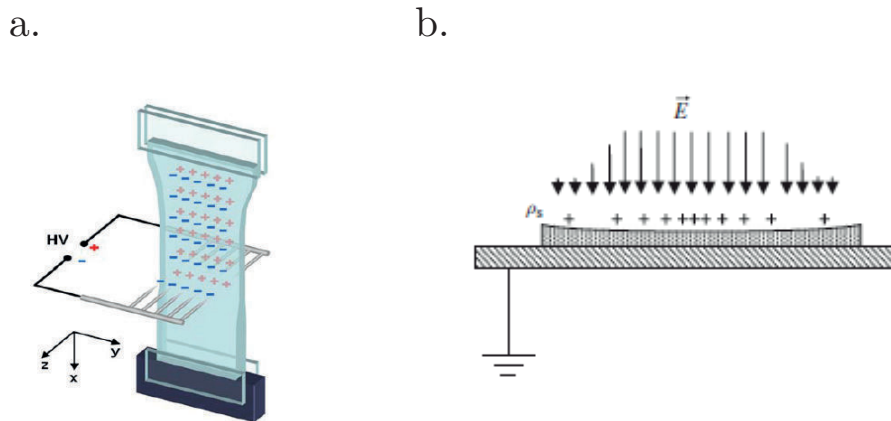


Fig. II.49 Méthode utilisée dans [54]. Le polymère est pré-étiré par un poids accroché à sa base. De part et d'autre de la membrane se trouvent des aiguilles reliées à une alimentation haute tension, de sorte que celles-ci ionisent l'air et "projettent" ainsi des charges sur la surface. L'équipe de Siegfried Bauer a ainsi pu observer des elongations de près de 20%. b.) Schéma illustrant la répartition des charges lors d'une décharge corona. La forte densité au centre du liquide comparée aux bords résulte en un étalement non uniforme [51].

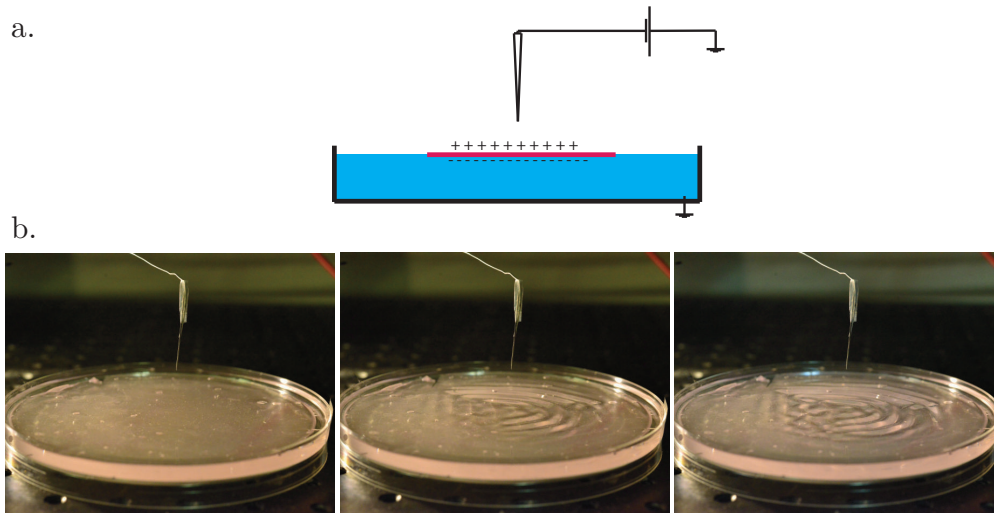


Fig. II.50 a.) Schéma de l'expérience. b.) Exemple d'instabilité pour une membrane d'épaisseur $h = 200 \mu\text{m}$ et $E = 250 \text{ kPa}$, l'épingle est distante de 1 cm. De gauche à droite : avant l'instabilité, la membrane est plane. L'instabilité se produit et des rides apparaissent, qui s'étendent lorsque le voltage augmente.

de la présenter.

b) Expérience

Une aiguille métallique (une aiguille à couture) reliée à une alimentation haute tension est placée quelques centimètres (entre 0.5 et 5 cm) au-dessus d'un bain d'eau. Une membrane circulaire de PVS, de rayon environ 5 cm, flotte librement à la surface du liquide qui est relié à la masse. L'expérience est schématisée sur la figure II.50.a. Lorsque le voltage appliqué à la pointe excède une valeur seuil, des motifs ridés apparaissent à la surface de la membrane. Ils peuvent présenter une certaine axisymétrie tant que le voltage reste suffisamment bas. Un exemple de cette instabilité est donné sur la figure II.50.b. Ces rides s'étendent sur une certaine distance, qui dépend de la distance entre la pointe et la membrane. Le motif n'est pas toujours statique (les ondulations peuvent se déplacer un peu au gré des décharges). Néanmoins, la distance entre chaque ondulation est bien définie avec une longueur d'onde λ et reste la même au cours d'une expérience. Les ondulations finissent par disparaître quelques dizaines de secondes après l'arrêt du générateur électrique. Cette expérience est intéressante, mais très difficile à étudier quantitativement. Nous sommes en effet incapables de mesurer précisément la quantité de charge déposée à la surface de la membrane, ainsi que la distance sur laquelle elles s'étaient. Nous nous limiterons donc à quelques remarques qualitatives et

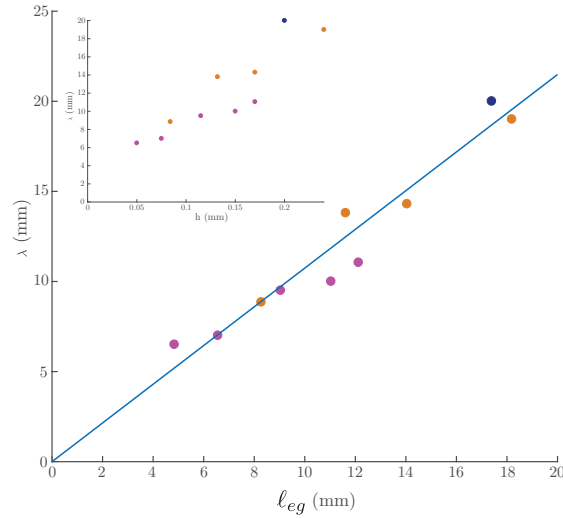


Fig. II.51 Longueur d'onde typique des oscillations en fonction de la longueur elastogravitaire ℓ_{eg} , pour différents modules d'Young et différentes épaisseurs de membrane ● $E = 250$ kPa, ● $E = 450$ kPa, ● $E = 650$ kPa. Insert : données brutes longueur d'onde en fonction de l'épaisseur de la membrane pour les différents modules d'Young.

proposerons un mécanisme à la lumière de ce que nous aurons appris.

c) Résultats (qualitatifs)

Nous mesurons la longueur d'onde typique λ du phénomène, pour différentes épaisseurs de membrane et différents modules d'Young. Une fois l'instabilité installée, sa morphologie générale ne semble pas dépendre du voltage (l'amplitude des oscillations augmente tout de même avec le voltage), ni de la distance entre l'aiguille et la membrane. Dans la gamme que nous avons testée, la distance aiguille/membrane semble plutôt influencer l'extension de la zone plissée. Nous traçons λ en fonction de l'épaisseur de la membrane (insert II.51) et λ en fonction de $\ell_{eg} = 2\pi\sqrt{B/\rho g}$ (figure II.51). Toutes les données se superposent alors sur une droite maîtresse de pente 1.07. Nous trouvons donc que la taille typique des ondulations est la longueur élastogravitaire. C'était en effet prévisible : même si le mécanisme en jeu n'est pas clair, nous regardons, une fois de plus, un problème de flambage sur un bain liquide. Nous nous attendons donc à ce que la taille typique de l'instabilité soit fixée par ℓ_{eg} . L'amplitude des oscillations est, quant à elle, vraisemblablement liée à la densité locale de charges électriques.

Cette effet est néanmoins surprenant au regard de l'instabilité décrite dans la section II.2.4. Le flambage observé avait en effet une forme bien différente : la zone active restait assez plate, toute la déflexion étant localisée aux frontières des électrodes. Les plis azimuthaux n'apparaissent que dans le cas des surfaces texturées, dans lesquelles la croissance est inhomogène ou anisotrope. Cette remarque nous conduit à mener une expérience comparative. Dessinons une électrode circulaire de noir de carbone au centre de la membrane, puis soumettons-la à une décharge corona et regardons les déformations. La zone recouverte par l'électrode ne se plisse quasiment pas et à tendance à flamber sous le même mode que dans la section II.2.4,

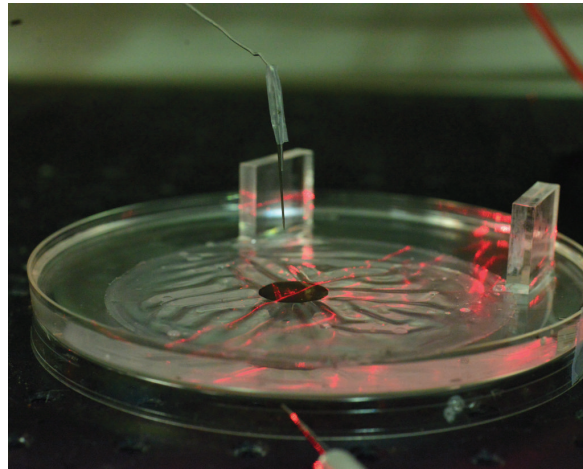


Fig. II.52 la membrane d'épaisseur $h = 100 \mu\text{m}$, $E = 250 \text{ kPa}$ est couverte de noir de carbone en son centre, l'épingle est distante de 1 cm. Comparée au reste de la surface, la zone conductrice n'est quasiment pas plissée.

contrairement au reste de la membrane (voir figure II.52). La couche conductrice assure un voltage (et donc une densité de charges) uniforme sur toute sa surface. Nous pensons que cette différence est révélatrice du mécanisme en jeu ici.

Comme expliqué au début de cette section, la répartition des charges déposées par effet corona n'est pas homogène. Ainsi la zone du polymère directement sous l'aiguille est plus chargée que les zones périphériques, et cet écart de charge s'accroît avec la distance au centre. La situation est telle qu'illustrée sur la figure II.49. De cette différence de charge résulte une différence de pression, et donc une différence d'actionnement. La pression électrostatique (et donc la déformation) est importante sous l'aiguille et va en diminuant lorsqu'on s'en éloigne. Nous sommes donc là encore face à une croissance inhomogène. En particulier le centre grandissant plus vite que les bords, cette croissance mène à une forme à courbure de Gauss positive (type sphère). Nous voyons donc que le problème est semblable à celui présenté en section II.3, ce qui explique aussi la similarité des motifs observés.

Un travail intéressant pour compléter ce début d'étude serait d'utiliser des sondes de Kelvin afin de cartographier précisément le potentiel de surface. De telles mesures nous permettraient par exemple de déterminer le seuil de flambage et d'étudier l'évolution des motifs avec la distance aiguille/surface. Nos expériences nous ont simplement permis de voir une dépendance de l'extension des motifs. Nous nous attendons à ce que, si la pointe est suffisamment éloignée, la répartition de charges soit assez homogène pour que le polymère subisse simplement une dilatation homogène.

II.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons utilisé les polymères diélectriques pour étudier différentes instabilités mécaniques. L'idée fondamentale derrière ce travail étant que l'augmentation de la surface par actionnement électrostatique peut être vue comme de la croissance.

Après avoir montré, dans un cas simplifié 1D, que cette analogie était légitime, nous nous sommes penchés sur différentes expériences illustrant comment une croissance inhomogène peut être responsable d'instabilités de flambage. Nous avons commencé par un cas très modèle, le plus simple que nous puissions imaginer. Une membrane de polymère flotte librement sur l'eau, avec en son centre une zone circulaire active, tandis que le reste est passif. Bien que les conditions aux limites soient libres, cette plaque flambe lorsque l'actionnement est suffisant, illustrant les contraintes internes qui naissent de la croissance inhomogène de cet objet. Les équations de plaques, modifiées pour tenir compte de la croissance, permettent d'expliquer de manière satisfaisante les observations expérimentales.

Nous sommes ensuite passés à une version aérienne de l'expérience. Cette dernière est nettement plus compliquée et l'interprétation des résultats y est plus délicate. Cette expérience a également été pour nous l'occasion d'examiner les effets d'une pré-tension mécanique sur le flambage. Nous avons ainsi montré qu'en dépit de sa faible valeur, la pré-tension peut avoir des effets remarquables sur le flambage, affectant le seuil, bien sûr, mais aussi le profil de la déflexion.

Enfin, nous avons étudié l'effet d'un simple changement de géométrie de l'électrode sur le mode de flambage. Une électrode annulaire flambe ainsi en formant des plis radiaux localisés dans la zone active. Cette instabilité n'est toutefois pas modélisée de manière satisfaisante et un travail reste à faire pour comprendre les seuils de flambage, ainsi que la dépendance de la longueur d'onde en la largeur de l'anneau.

L'interaction de plusieurs zones actives pourrait être une suite naturelle à ce travail. À partir de quelle distance des disques actifs déposés sur une même membrane interagissent-ils ? Le mode de flambage est-il perturbé ? Une autre idée intéressante serait de considérer des membranes de géométries différentes. Nous avons par exemple formé des bilames hémisphériques avec les polymères électroactifs (voir schéma II.53). Lorsque le voltage est suffisamment élevé, il se produit dans ces systèmes une instabilité de type "snap-through", telle qu'on pu l'étudier Douglas Holmes et Dominic Vella [55], au cours de laquelle la courbure de l'objet s'inverse brutalement.

Dans l'idée de nous rapprocher encore plus d'une croissance biologique nous avons ensuite conçu des systèmes dans lesquels la croissance elle-même (et non pas seulement l'actionnement) est inhomogène, ou anisotrope. Ce contrôle des distances locales est en fait un moyen de prescrire une métrique, et donc une forme à notre objet. L'objectif final est d'obtenir un système capable de prendre une forme sur commande. Nous avons opté pour une stratégie consistant à texturer la membrane du polymère. Une première méthode est basée sur l'élaboration d'une surface à piliers. En jouant sur leur densité, on modifie l'épaisseur locale du polymère et donc son actionnement. On obtient ainsi une croissance graduelle. La deuxième méthode consiste à déposer des lignes plus épaisses sur la membrane. La déformation étant alors plus faible le long de ces lignes, l'actionnement est ici anisotrope. En regardant les modes de flambages de ces membranes texturées, différents des membranes lisses, nous avons obtenu une preuve de concept pour ces deux stratégies. La différence de flambage est en effet révélatrice d'une croissance différentielle. Néanmoins, nous n'avons, à ce jour, pas été capables de démontrer des changements de forme nets à cause de difficultés expérimentales. Outre l'obtention de formes tridimensionnelles claires (sphères ou selles de

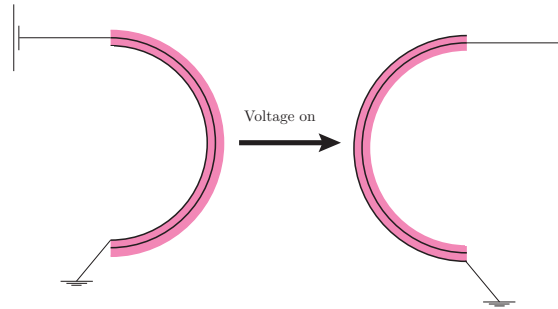


Fig. II.53 En déposant une couche de polymère par dessus l'électrode, nous pouvons fabriquer des bilames avec les polymères diélectriques. Seule la partie entre les deux électrodes se dilate sous l'effet d'un champ électrique, le reste garde sa longueur. Nous pouvons donc facilement jouer sur la forme du bilame, en particulier travailler avec des bilames hémisphériques, qui semblent présenter une instabilité de type *snap-through*.

cheval), un travail important de caractérisation de l'actionnement de ces surfaces reste à fournir.

Enfin, nous avons présenté un dernier mode d'actionnement, que nous considérons intéressant dans le cadre d'une recherche de croissance non homogène. Il consiste à charger le polymère en y déposant directement les charges par effet corona. Nous avons présenté une première instabilité sur l'eau, assez troublante car très différente de celle obtenue pour des membranes uniformément chargées. Bien que la longueur d'onde caractéristique soit élasto-gravitaire, les motifs de rides ne sont pas localisés lorsqu'ils sont induits par effet corona. Notre interprétation concernant l'origine de cette instabilité reste jusqu'à présent qualitative et mériterait d'être affirmée par des mesures de potentiel de surface. Nous pensons néanmoins que l'idée de déposer localement une quantité contrôlée de charges peut s'avérer assez riche.

Nous constatons, dans ces deux dernières expériences de flambage d'une membrane texturée et par effet corona, que des coques obtenues par une croissance électrostatique différentielle puis écrasées (par leur poids propre ou celui du liquide) produisent un motif de plissement complexe. Peut-on, en observant les motifs de plis, remonter à la forme naturelle de la coque ?⁴ Dans le chapitre suivant, nous nous proposons d'étudier une variante purement mécanique de cette expérience : quel motif de plis obtient-on lorsqu'une surface bombée est écrasée entre deux plaques ?

4. Il s'agit d'une question sur laquelle travaillent actuellement Octavio Albarrán et Lucas Goerhing, dans une expérience d'appâtissement de fines calottes sphériques posées sur un bain d'eau sous l'effet de la pression hydrostatique.

Chapitre III

Compaction de coques

III.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons vu que changer la forme d'une surface implique généralement de changer sa métrique. Il existe un lien entre les relations de longueurs au sein de l'objet et sa forme dans l'espace : en contrôlant la "croissance" d'une plaque nous sommes à même de contrôler la forme tridimensionnelle qu'elle adopte.

Mais que se passe-t-il maintenant, si au lieu de changer la métrique de notre objet par une dilatation électrique nous lui imposons mécaniquement une nouvelle forme ? Il s'agit, en quelque sorte, de la question inverse à celle du chapitre précédent.

III.1.1 Des rides qui relaxent...

Soumise à des contraintes compressives, une plaque mince tend à flamber. Nous allons ici nous intéresser à une situation dans laquelle les contraintes compressives sont induites par l'incompatibilité de deux surfaces au sens du *Theorema Egregium* de Gauss : forcer une feuille plane à adopter une forme hémisphérique.

Dans les travaux menés à UMass par Menon et Davidovitch [47], une feuille élastique très fine (entre 50 et 140 μm d'épaisseur) est déposée sur une goutte. La tension de surface force le film à adopter la forme courbée de la goutte. Cette transformation n'étant pas isométrique, elle implique des changements de longueurs locaux au sein du film et donc l'apparition de contraintes. Plus précisément, adopter cette forme courbée crée dans la feuille une tension radiale et une compression orthoradiale. En diminuant le volume de la goutte, les auteurs sont capables d'augmenter sa courbure et donc l'incompatibilité entre les deux surfaces et finalement les contraintes suscitées dans la plaque élastique. Une première instabilité qui fait apparaître des rides radiales sur les bords de la plaque est déclenchée lorsque le rayon de la goutte est suffisamment petit (voir figure III.1.b). En continuant à vider la goutte, les chercheurs ont pu observer une instabilité secondaire des rides vers du froissement. Cette même équipe a récemment poussé l'expérience jusqu'à l'encapsulation de la goutte par la feuille, posant ainsi la question de la forme optimale pour renfermer le plus grand volume possible de liquide [56] (figure III.1.c). D'autres configurations mènent à ces motifs de plis, que ce soit en indentant une feuille flottant à la surface d'un liquide (mécaniquement [57], ou en déposant une goutte dessus [58] (voir fig III.1.a)), voire même dans des régimes dynamiques en laissant

tomber une goutte dessus (ces travaux sont menés actuellement par Dominic Vella à Oxford). Malgré les différences de dispositifs, toutes ces expériences utilisent des feuilles fines, voire ultra-fines (jusqu'à quelques dizaines de nanomètres d'épaisseur). Cela permet aux auteurs de supposer leur matériau inextensible : l'énergie de flexion est négligeable devant l'énergie d'extension. Ainsi, soumis à une compression, aussi petite soit-elle, le film fléchira plutôt que de se comprimer. Ces feuilles ultra-fines permettent aux chercheurs d'étudier des régimes jusque-là inexplorés dans lesquels le coût énergétique des rides et des plis est négligeable. En ce sens, leur analyse repose essentiellement sur la Tension Field Theory élaborée (entre autres) par Mansfield [42]. L'idée principale de ce modèle est que l'apparition de plis permet de relâcher toute la compression dans la plaque. Cette théorie a été établie dans le cas de plaques contraintes au niveau de leurs bords : ce sont des contraintes globales (voir figure III.2.a). Les problèmes exposés plus haut diffèrent en ce que la plaque est partout contrainte : adopter une géométrie qui lui est incompatible provoque des changements de longueurs locaux (et donc des contraintes locales). Mais cette différence sur la forme des contraintes imposées n'empêche pas d'employer avec succès l'idée que l'apparition des plis relâche la compression, ou de manière équivalente : que l'apparition des plis se fait à compression nulle. Cette idée d'annulation des contraintes dans les plaques minces flambées est largement répandue et est justifiée dans la plupart des cas. Pourtant il est des situations dans lesquelles elle ne s'applique pas.

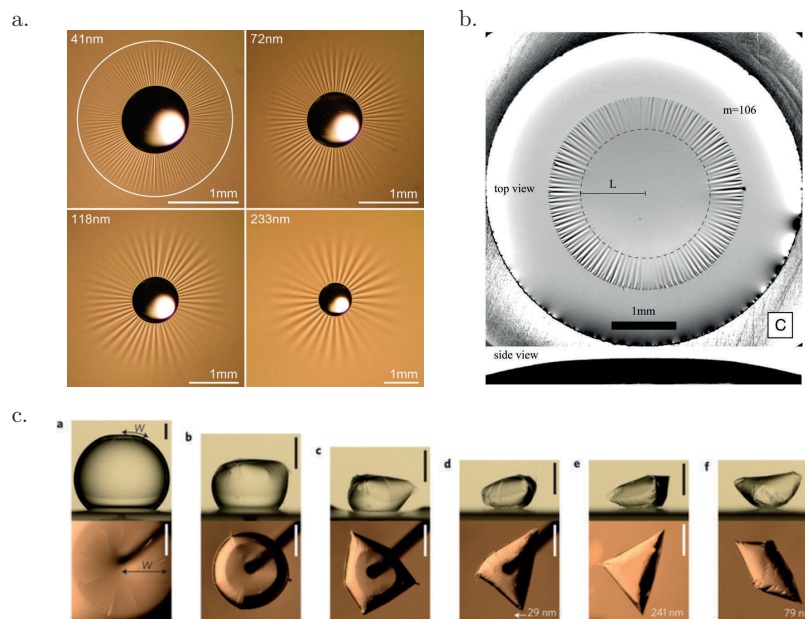


Fig. III.1 a.) *Flambage d'un film fin de polymère sur un bain liquide. La tension de surface exercée par la goutte déposée sur la surface libre comprime orthoradialement le film, qui flambe en oscillant et relâche ainsi la compression [58].* b.) *Un film mince est déposé à la surface d'une goutte. La différence de courbure de Gauss entre la goutte et le film crée des contraintes compressives dans cette dernière. Le flambage laisse apparaître des plis radiaux [47].* c.) *À mesure que l'on vide la goutte de la photo (b), la feuille enveloppe la goutte, et finit par l'encapsuler en prenant la forme d'une empanada [56].*

III.1.2 ... pas toujours

Une autre façon d'imposer à une feuille d'adopter une forme courbée est de la confiner entre deux sphères. C'est la méthode choisie par Jeremy Hure qui après avoir placé une plaque fine entre un moule et son contre-moule hémisphériques, la confine, jusqu'à atteindre un espacement entre les moules de l'ordre de l'épaisseur de la plaque [59]. Ce faisant, il force la feuille à changer sa courbure en tout point. Lorsque la compaction est suffisante, la plaque flambe. Conceptuellement, l'expérience semble donc très proche de celle menée à UMass [47]. Pourtant un phénomène surprenant est observé : d'abord isolés, les plis radiaux augmentent en nombre avec la compression jusqu'à atteindre un nombre fini (voir figure III.2.b). D'autre part, la force à appliquer pour comprimer la feuille n'est pas monotone : elle augmente avec la compaction, atteint un maximum puis décroît. Voilà deux observations inattendues sur lesquelles nous reviendrons au cours de ce chapitre. Nous pouvons d'ores et déjà signaler qu'elles sont signes que l'inextensibilité de la plaque n'est plus vérifiée. L'étude de ce problème a conduit au développement d'un modèle d'élasticité effective anisotrope qui rend compte de la présence des rides sur la réponse mécanique de la plaque. Celles-ci induisent un module d'Young effectif différent du module d'Young du matériau dans la direction perpendiculaire à leur orientation. C'est un modèle qui ne suppose pas l'annulation totale des contraintes compressives et complète donc la Tension Field theory.

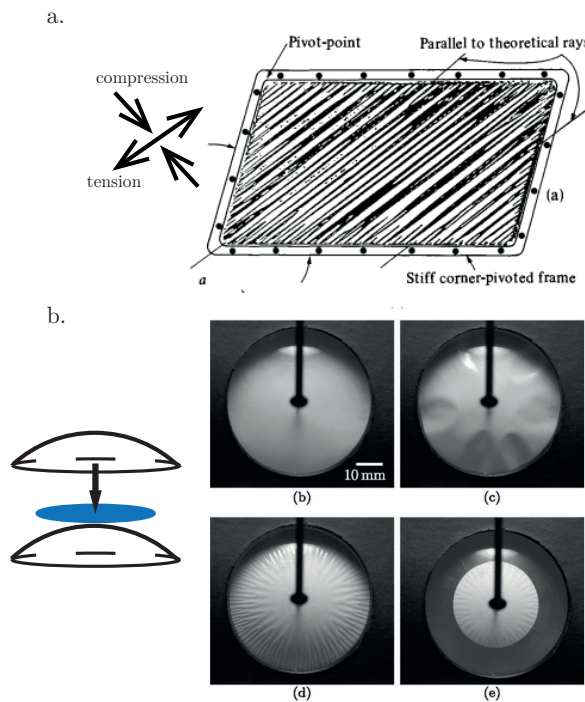


Fig. III.2 a.) Une plaque mince est encastrée dans un cadre qui est cisailé. Les contraintes compressives ainsi suscitées conduisent à des plis parallèles [42]. b.) Une plaque mince est comprimée entre deux sphères. On observe d'abord des plis isolés, le nombre de plis augmente ensuite avec la compaction, jusqu'à atteindre un nombre fini [59].

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à un prolongement naturel de ce dernier

problème en forçant mécaniquement une calotte sphérique élastique à adopter une forme plane. Nous avancerons un modèle permettant de rendre compte des différentes caractéristiques du phénomène observé, ainsi que de la force nécessaire pour écraser la coque. Nous nous intéresserons ensuite au rôle des conditions aux limites, et présenterons une situation dans laquelle rides radiales et azimuthales coexistent. Cela nous permettra d'élaborer un critère donnant l'orientation des plis, que nous tâcherons enfin d'appliquer à des situations plus complexes.

III.2 Coques compactées

Dans cette première partie, nous allons écraser des calottes sphériques de polymères, présentant différentes conditions aux limites. Nous expliquerons l'instabilité déclenchée (voir figure III.3.b) lors de cette opération et en dégagerons certaines caractéristiques.

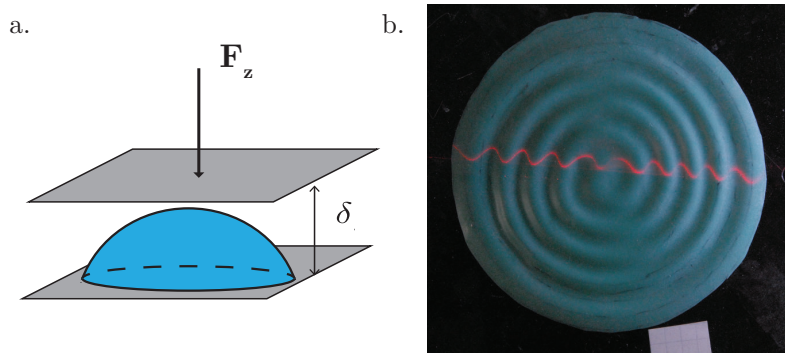


Fig. III.3 a.) Schéma de l'expérience d'écrasement. b.) Exemple de motif de plis observé.

III.2.1 Dispositif expérimental

Les coques de polymères sont faites de polyvinyle syloxane (PVS). Elles sont obtenues en versant le mélange de la base et du catalyseur encore liquide sur un hémisphère de polystyrène de rayon R . Curieusement, cette méthode extrêmement simple conduit à des couches d'épaisseur quasiment uniforme, comme cela a été récemment montré dans l'équipe de Pedro Reis [60]. L'épaisseur t est ainsi fixée par le rayon R du moule et le polymère. Une loi d'échelle éclaire cette dépendance : En régime stationnaire la gravité effective en r s'exerçant sur le liquide est égale à la dissipation visqueuse en ce même point :

$$\rho g \frac{r}{R} t \sim \mu_o \frac{v}{t}$$

où μ_o est la viscosité initiale du mélange de polymère, ρ sa densité, g l'accélération de la gravité (voir figure III.4). D'autre part, la vitesse caractéristique est donnée par : $v \sim r/\tau_c$, avec τ_c le temps de réticulation du polymère, de sorte que l'épaisseur vaut : $t \sim \sqrt{\frac{\mu_o R}{\rho g \tau_c}}$ [60]. L'épaisseur de la coque est donc indépendante de r et est déterminée par le rapport du temps de réticulation au temps caractéristique de drainage du polymère. S'il réticule vite devant le temps de drainage, la coque est épaisse ; si au contraire il draine beaucoup plus vite que ce qu'il réticule, la coque est très fine. Le temps de réticulation du PVS étant d'une vingtaine de minutes, l'épaisseur de la coque n'est pas très sensible au temps pris pour mélanger les deux liquides. Après réticulation, nous découpons le polymère suivant une latitude pour obtenir une coque de rayon de courbure R , de module d'Young E , d'épaisseur t et dont la base est de rayon a_o , (voir figure III.4). Nous ferons varier R entre 2.5 et 12.5 cm, et utiliserons des polymères de module d'Young compris entre 250 kPa et 1 MPa, de sorte que l'épaisseur variera entre 220 et 550 μm . Par ailleurs, le rayon a_o sera compris entre 2 et 8 cm. La coque est ensuite talquée, afin de limiter au maximum sa friction et son adhésion

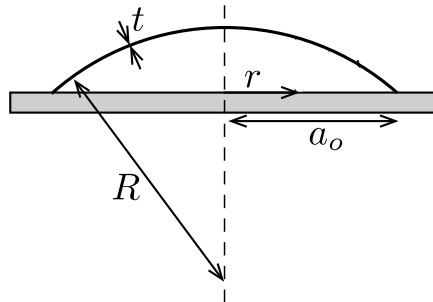


Fig. III.4 La coque, de profil $\xi(r)$ a une épaisseur t , sa base a un rayon a_o et son rayon de courbure est R .

au support horizontal sur lequel elle est placée. Celui-ci peut être déplacé verticalement, et nous permet d'écraser la calotte contre un plafond de verre. Le support montant est percé de petits trous pour éviter un effet ventouse. Nous mesurons l'écart entre les plaques δ à l'aide d'un palpeur micrométrique. L'observation se fait par le dessus.

Nous travaillons avec des coques peu profondes, c'est-à-dire telles que a_o soit petit devant le rayon de courbure R . En effet, lorsque $a_o \sim R$ l'écrasement de la coque conduit à un phénomène plus proche du froissement dans lequel les plis se touchent eux-mêmes, comme on peut le voir sur la figure III.5. Nous cherchons à éviter ce régime complexe qui est plus difficile à décrire. Enfin, toutes les expériences de ce chapitre sont réversibles : nous restons dans le domaine de élasticité linéaire.

III.2.2 coques entières : résultats expérimentaux

Commençons par présenter les principaux résultats. Les caractéristiques de l'instabilité sur laquelle nous allons nous pencher sont sa longueur d'onde et la force à appliquer pour écraser la coque.

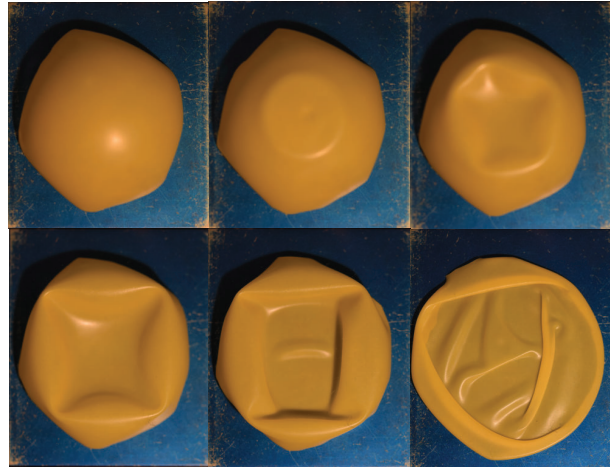


Fig. III.5 *Ecrasement d'une coque hémisphérique avec $R = a_0 = 3$ cm. La forme de l'instabilité est complètement différente de celle qui nous intéresse (voir III.6). Nous éviterons ce régime difficile à décrire.*

a) Observations générales

Confinons la calotte dans une cellule. Nous observons d'abord l'affaissement de la partie touchant la plaque de verre, puis à mesure que le confinement progresse, des plis azimuthaux concentriques et réguliers apparaissent.

Qualitativement l'apparition de plis azimuthaux ressemble fortement à celle des plis observés dans les polymères électroactifs à croissance anisotrope (section II.3), ou dans les polymères électroactifs soumis à une décharge corona (section II.4). Comment expliquer la formation de ces plis ? Nous avons vu en introduction que sur une sphère, le périmètre d'un cercle de rayon r est inférieur à $2\pi r$. Lorsque nous aplatissons une sphère nous pouvons donc soit conserver la longueur des périmètres et comprimer les rayons, soit garder les rayons constants et étirer les périmètres. Il se produit en réalité une combinaison de ces deux effets, mais comme nous nous intéressons au flambage, nous nous focalisons sur la compression. Le raccourcissement des rayons crée une compression radiale, qui provoque le flambage de la coque, l'amplitude de la déflexion étant par ailleurs limitée par la plaque de verre, l'instabilité conduit à un motif de plis orthoradiaux. En comparaison, l'application d'un champ électrique sur un polymère diélectrique texturé initialement plan permet de changer sa métrique, le poussant à adopter une forme courbée. À cause de la fondation liquide, son mouvement hors du plan est toutefois limité. Le polymère flambe donc en ondulant. Les deux expériences consistent donc, d'une certaine manière, à forcer une portion de sphère à prendre une forme plane. Une différence fondamentale vient toutefois du fait que dans le cas du flambage sur fondation (avec un polymère diélectrique ici) la longueur d'onde des oscillations est imposée par un équilibre entre flexion et gravité, tandis que dans l'écrasement de la coque l'amplitude de la déflexion est fixée par l'expérimentateur.

Expérimentalement, nous observons que le nombre de plis augmente avec la compaction

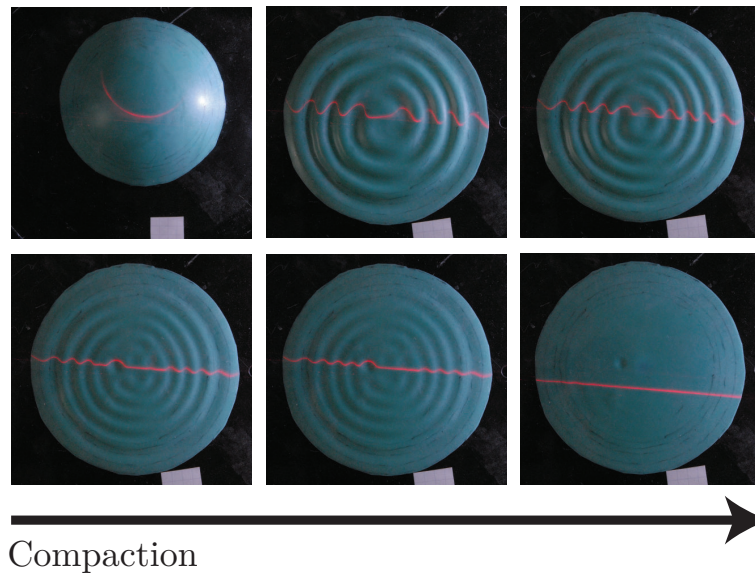


Fig. III.6 À mesure que la compaction augmente, le nombre de plis augmente jusqu'à saturer à une valeur finie (à partir de la photo de gauche, deuxième ligne). L'amplitude des ondulations diminue ensuite jusqu'à ce que la coque soit complètement aplatie. $R = 7 \text{ cm}$, $a_0 = 5 \text{ cm}$, $E = 750 \text{ kPa}$.

(photos du centre et de droite sur la première ligne de la figure III.6). La longueur d'onde λ de l'instabilité finit par se stabiliser lorsque l'espace entre les plaques devient suffisamment petit (photos de gauche et du centre sur la deuxième ligne de la figure III.6). Nous reviendrons plus tard sur la signification de "suffisamment petit" dans cette expérience. Une fois ce régime atteint, l'amplitude des oscillations décroît à longueur d'onde constante avec l'écrasement de la coque jusqu'à ce qu'elle soit entièrement aplatie (photo de droite deuxième ligne III.6). Notons enfin que les plis semblent se développer en spirale. Toutefois, nous nous intéresserons essentiellement au motif déjà établi, nous ne discuterons donc pas de ce point (qui pourrait néanmoins avoir une importance dans les mesures de force).

b) Longueur d'onde

Nous faisons varier le module d'Young E , la courbure R^{-1} , l'épaisseur t et le rayon de la base de nos coques a_0 , et pour chacune d'entre elles, nous mesurons la longueur d'onde λ du motif dans le régime où elle ne dépend plus de la compaction.

Une première chose à remarquer est que cette longueur d'onde dépend de la position. En regardant attentivement la figure III.7, nous voyons que λ augmente à mesure que l'on s'éloigne du centre de la coque. Qualitativement, la contrainte radiale devant être nulle aux bords (par continuité), elle décroît à mesure que l'on s'éloigne du centre. Nous le montrerons, une diminution de la compression mène à une augmentation de la longueur d'onde, qui, en théorie, tend vers l'infini sur les bords de la membrane. Une façon de le voir est d'imaginer que moins il y a de contrainte, moins il y a d'excès de longueur à accommoder et donc moins

besoin d'osciller. Notons aussi que le centre de la coque est souvent une zone assez bruitée dans laquelle la longueur d'onde n'est pas clairement définie.

Nous traçons sur la figure III.7.b la longueur d'onde en fonction de la position pour une coque. Elle augmente effectivement avec r , et dépend des différents paramètres physiques de la coque.

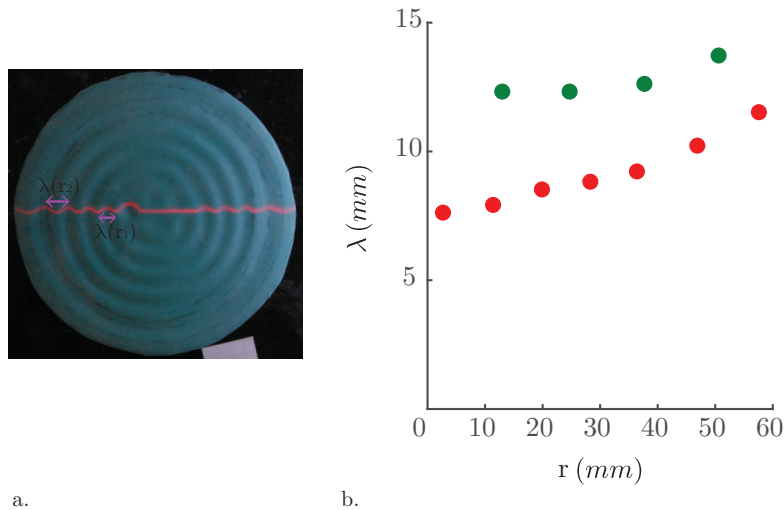


Fig. III.7 a.) La longueur d'onde évolue avec la position $\lambda(r_1) < \lambda(r_2)$ (avec $r_1 < r_2$). b.) Longueur d'onde mesurée en fonction de la position. (●) $E = 750$ kPa, $R = 3$ cm, $a_0 = 3$ cm et $t = 200$ μ m, (●) $E = 1$ MPa, $R = 12.5$ cm, $a_0 = 5.4$ cm et $t = 400$ μ m.

c) Force de compaction

Deux plaques de PVC parallèles montées sur une machine de traction nous servent à comprimer la coque tout en mesurant la force verticale F_z en fonction de l'écart entre les plaques δ . Bien qu'assez délicate, l'expérience révèle un comportement caractéristique : la force augmente graduellement (en valeur absolue) jusqu'à atteindre un maximum, puis décroît rapidement. Elle finit néanmoins par diverger lorsque nous comprimons la coque devenue plate dans son épaisseur. Des courbes typiques pour différentes coques sont présentées sur la figure III.8. Par convention, la force de compression est comptée négativement. La courbe noire (coque de rayon $R = 6$ cm, épaisseur $t = 260$ μ m, $a_0 = 4.7$ cm, $E = 1$ MPa) montre très nettement que l'augmentation de la force est discontinue : des sauts de force se produisent à chaque apparition de pli. Nous voyons également que la force ne revient pas tout à fait à zéro après le maximum et avant la divergence, très probablement à cause de problèmes d'alignement du montage. Il est toutefois clair que la force requise pour écraser la coque est de l'ordre du Newton (elle est beaucoup plus faible que dans l'expérience de Jeremy Hure qui a observé une force d'une centaine de Newtons, pour des plaques de module d'Young $E = 2.2$ GPa).

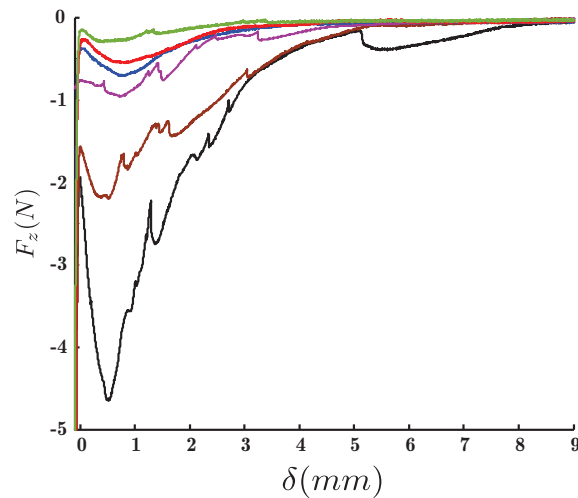


Fig. III.8 Force verticale F_z appliquée pour écraser la coque en fonction de la distance δ entre les plaques. les courbes noire, marron et bleue sont pour une coque de rayon $R = 6\text{cm}$, $E = 1\text{MPa}$ et respectivement $a_0 = 4.7$, $a_0 = 4.55$, $a_0 = 3.65\text{ cm}$, $t = 260\ \mu\text{m}$. La courbe mauve est obtenue pour une coque de rayon $R = 6\text{ cm}$, $E = 750\text{ kPa}$ et $a_0 = 4.25\text{ cm}$ $t = 250\ \mu\text{m}$. Les courbes rouge et verte sont obtenues pour une coque de rayon $R = 3\text{cm}$, $E = 750\text{ kPa}$, $a_0 = 2.35$ et $a_0 = 2.15\text{ cm}$, $t = 245\ \mu\text{m}$. La force part de 0 (avant que le contact ne soit fait), et augmente en valeur absolue avec des oscillations (apparition de plis). Elle atteint un maximum puis repasse par 0. Elle diverge ensuite lorsque la calotte est écrasée sur son épaisseur.

III.2.3 Modèle

Comment comprendre ces différentes caractéristiques? Nous nous appuyons ici sur le travail de Jeremy Hure [59] pour développer un modèle rendant compte des phénomènes précédemment exposés.

a) Approche 1D

Afin de simplifier notre problème, plaçons-nous dans un cas unidimensionnel semblable à notre expérience : une bande 1D comprimée le long de son grand axe, dont la déflexion est limitée par une plaque (voir schéma III.9). D'une certaine manière, nous considérons une bande extraite d'un diamètre de la coque aplatie, comme illustré figure III.10. Cette analyse 1D est reprise du travail de Jeremy Hure [59].

Commençons par le flambage d'Euler libre, base des développements à suivre.

Flambage d'Euler libre

Si nous comprimons progressivement une plaque de longueur λ par ses bords en imposant des déplacements axiaux $u_x(\pm\lambda/2) = \pm\Delta/2$, celle-ci commence par se déformer dans le plan. Au-delà d'une compression critique, la plaque flambe hors du plan, comme cela a été classiquement montré par Euler [43]. Sous l'hypothèse des faibles pentes, la déflexion de la

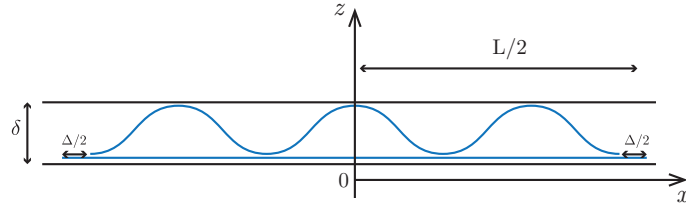


Fig. III.9 Une bande comprise entre deux plaques séparées de δ est comprimée uniaxialement. Sa déflexion est donc limitée et elle oscille avec une longueur d'onde λ .



Fig. III.10 Nous considérons une bande extraite le long d'un diamètre dans la coque aplatie, ici délimitée par les pointillés.

plaque vaut : $w(x) = \frac{A}{2}[1 + \cos(2\pi x/\lambda)]$ [1]. Elle a un module d'Young E , un coefficient de Poisson ν et une épaisseur t . La déflexion n'est **pas** contrainte pour le moment.

L'énergie totale de cette plaque est la somme des énergies de flexion et de compression :

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{flex} + \mathcal{E}_{comp}$$

L'énergie de flexion par unité de longueur est donnée par la relation :

$$\mathcal{E}_{flex} = \frac{B}{2} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{B\pi^4 A^2}{\lambda^3}$$

Où B est le module de flexion de la plaque : $B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$.

Pour calculer l'énergie de compression de la plaque nous faisons l'hypothèse d'une déformation transverse ϵ_{yy} nulle (déformation plane). Nous pourrions choisir une contrainte transverse nulle (contrainte plane) sans changer qualitativement les résultats. Dans ces conditions, la loi d'Hooke se traduit par : $\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_{xx}$. D'autre part, l'invariance selon l'axe y du problème exprimée dans l'équilibre mécanique conduit à : $\partial_x \sigma_{xx} = 0$. σ_{xx} et ϵ_{xx} sont donc

constants.

Sous l'hypothèse d'une déformation transverse nulle, l'énergie de compression vaut :

$$\mathcal{E}_{comp} = \frac{1}{2} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} \, dx = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_{xx}^2 \, dx$$

Cette énergie se calcule facilement en utilisant le fait que ϵ_{xx} est en fait constant, et est égal à sa valeur moyenne de sorte que :

$$\epsilon_{xx} = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx = \left(\frac{\pi^2 A^2}{4\lambda^2} - \frac{\Delta}{\lambda} \right)$$

Cela conduit à une énergie de compression par unité de longueur :

$$\mathcal{E}_{comp} = \frac{C}{2} \left(\frac{\pi^2 A^2}{4\lambda^2} - \frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \lambda$$

Où $C = \frac{Et}{1-\nu^2}$ est le module d'extension de la plaque.

Finalement l'énergie totale par unité de longueur s'exprime donc :

$$\mathcal{E}_{tot} = \frac{B\pi^4 A^2}{\lambda^3} + \frac{C}{2} \left(\frac{\pi^2 A^2}{4\lambda^2} - \frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \lambda \quad (\text{III.1})$$

Minimiser cette énergie par rapport à A permet de retrouver le seuil de flambement d'une plaque mince :

$$\frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dA} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\Delta^c}{\lambda} = \frac{\pi^2 h^2}{3\lambda^2}$$

Δ^c est le déplacement critique (Δ^c/λ la déformation critique) à appliquer pour qu'une plaque de longueur λ ait un mouvement hors du plan.

Flambage confiné

Nous considérons maintenant une plaque rectangulaire de longueur L dont les extrémités sont soumises à des déplacements axiaux $u_x(\pm L/2) = \pm \Delta/2$ (tels que $\Delta > \Delta^c$), et dont l'amplitude A de déflexion est limitée par deux plaques rigides distantes de δ , si bien que : $A + t = \delta$ (voir schéma III.9). Nous nous retrouvons donc dans une situation proche de celle étudiée par Benoît Roman et Alain Pocheau, dans laquelle le flambage conduit à l'apparition d'une succession de plis [61]. Dans la limite où la plaque est inextensible les auteurs ont montré que le nombre de plis augmente avec le confinement. Ainsi, le nombre de plis n est géométriquement multiplié par deux lorsque δ est divisé par deux. Le fait d'atteindre une saturation du nombre de plis dans notre problème axisymétrique est donc inattendu. L'extension de cette étude au cas $\delta \sim t$, réalisée par Hure *et.al.*, conduit à une situation bien différente, comme nous allons le voir [59].

Nous pouvons adapter l'énergie élastique calculée dans le cas du flambage simple (III.1) à ce cas de flambage multiple. La bande ondulée peut être vue comme l'assemblée de n plis de longueur $\lambda = L/n$, chacun comprimé de $\Delta_{eff} = \Delta/n$. Nous supposons ces plis identiques et sinusoïdaux. Il s'agit là d'une approximation : ces plis sont en réalité écrasés, et présentent

donc des zones planes. Ce sont ces dernières qui flambent lorsque la compaction est suffisante tandis que le reste se réorganise s'il n'y a pas trop de frottements.

Considérer la bande ondulée comme l'assemblée de n plis conduit à écrire l'énergie élastique (III.1) de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_{tot} = \left[n^4 \frac{B\pi^4 A^2}{L^4} + \frac{C}{2} \left(\frac{n^2 \pi^2 A^2}{4L^2} - \frac{\Delta}{L} \right)^2 \right] L \quad (\text{III.2})$$

Minimiser cette expression par rapport à n , à taux de compression Δ/L et amplitude A fixés donne le nombre de plis :

$$n^2 = \frac{12(\Delta/L)L^2}{3\pi^2 A^2 + 8\pi^2 t^2} \quad (\text{III.3})$$

La limite $A \gg h$, étudiée par Benoît Roman, conduit à un nombre de plis qui semble diverger en $1/A$ lorsque l'amplitude A diminue [61, 62].

$$n_{inex} = \frac{2}{\pi} \frac{L}{A} \sqrt{\frac{\Delta}{L}} \quad (\text{III.4})$$

Le nombre de plis augmente avec l'écrasement, sans saturer. La limite $\delta \sim t$, correspondant

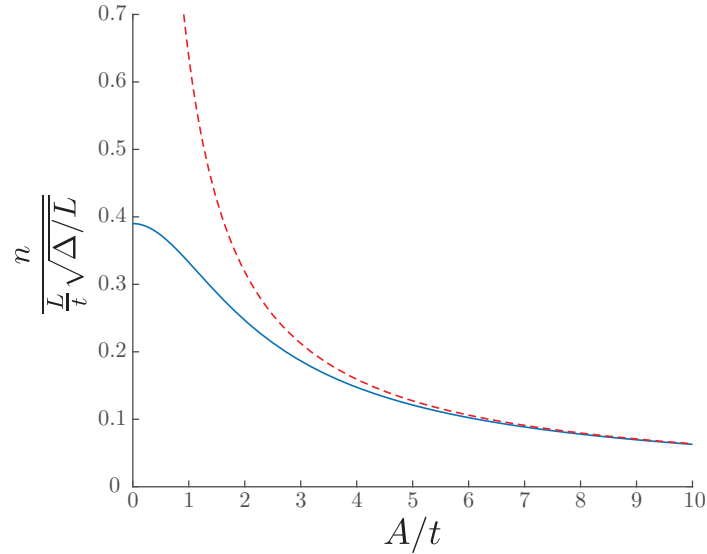


Fig. III.11 Evolution du nombre de plis en fonction de l'amplitude adimensionnée. Les traits pleins correspondent à l'équation (III.3), ceux en pointillés à l'approximation inextensible (équation (III.4)). Cette approximation n'est clairement plus valable pour des valeurs de $A/h < 5$.

à notre situation de fort écrasement, prise dans l'expression (III.3) conduit à :

$$n_{max} \approx 0.39 \frac{L}{t} \sqrt{\frac{\Delta}{L}} \quad (\text{III.5})$$

Le nombre de plis ne dépend alors plus de l'écart entre les plaques : dans ce régime la longueur d'onde sature. La limite inextensible (III.4) ainsi que l'expression complète de n (III.3) sont tracées sur le graphique III.11. Il apparaît bien que l'hypothèse d'inextensibilité ne tient plus pour des valeurs de $A/h < 5$.

Fondamentalement, la différence entre les expressions (III.4) et (III.5) vient du fait que dans la limite $A \gg h$ nous négligeons le premier terme, lié à l'énergie de flexion, dans l'expression (III.2). L'équation (III.4) donne donc le nombre de plis dans la limite où la plaque est inextensible. La saturation du nombre de plis survient alors parce que l'énergie de flexion finit par ne plus être négligeable. Dans ces conditions, la plaque accomode la déformation en se comprimant plutôt qu'en créant de nouveaux plis. En effet, en loi d'échelle si la bande est inextensible, alors $A^2/\lambda^2 \sim \epsilon$, d'où $\lambda^2 \sim A^2/\epsilon$ (où $\epsilon = \Delta/L$). Dès lors, l'hypothèse d'inextensibilité impliquant : $\mathcal{E}_{comp} \gg \mathcal{E}_{flex}$ soit $Et\epsilon^2 \gg Et^3(A/\lambda^2)^2$, elle impose donc que : $\epsilon^2 \gg \epsilon^2 t^2/A^2$, soit finalement $A \gg t$. Ainsi, lorsque $A \sim t$, l'inextensibilité n'est plus vérifiée et le flambage n'a plus lieu de se poursuivre, et ce indépendamment de $\epsilon = \Delta/L$: le nombre de plis sature. On en déduit qu'à ce moment là, $\lambda \sim A/\sqrt{\epsilon} \sim \frac{t}{\sqrt{\Delta/L}}$, ce qui conduit finalement à $n_{max} = L/\lambda \sim \frac{L}{t} \sqrt{\frac{\Delta}{L}}$. Nous retrouvons donc bien en loi d'échelle l'expression (III.5).

Forces nécessaires pour comprimer la plaque

Intéressons-nous enfin à la force par unité de largeur à appliquer sur la bande pour l'écraser complètement. Dérivons pour cela l'énergie trouvée en (III.2) par rapport à Δ (force horizontale) ou A (force verticale) en y injectant le nombre de plis calculé en (III.3). Il vient :

$$f_x = \frac{d\mathcal{E}_{tot}}{d\Delta} = \frac{\Delta/L}{1 + 3\alpha^2/8} C \quad (\text{III.6})$$

$$f_z = \frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dA} = \frac{24\alpha(L/t)(\Delta/L)^2}{9\alpha^4 + 48\alpha^2 + 64} C$$

où $\alpha = A/t$ est l'amplitude adimensionnée. $f_z(\alpha)$ passe ainsi par un maximum :

$$f_z^{max} = 0.2EL \frac{(\Delta/L)^2}{1 - \nu^2} \quad (\text{III.7})$$

pour $\alpha = 0.94$. Cette force ne dépend pas de l'épaisseur de la plaque.

À nouveau, retrouvons ce résultat à l'aide d'une loi d'échelle. Dans le cas qui nous intéresse $A \sim \delta \sim t$, l'énergie de flexion s'écrit $\mathcal{E}_{flex} \sim Et^3(\delta/\lambda^2)^2 L$. Par ailleurs $\epsilon \sim (\delta/\lambda)^2$. Ainsi $\mathcal{E}_{flex} \sim E \frac{t^3}{\delta^2} L \epsilon^2$. En remarquant enfin que l'énergie de flexion correspond au travail de la force nécessaire à confiner la plaque (nous avons vu que pour $A \sim \delta \sim t$, les énergies de flexion et d'extension sont du même ordre) : $\mathcal{E}_{flex} \sim f_z \delta$, nous obtenons :

$$f_z \sim E \frac{t^3}{\delta^3} L \epsilon^2 \sim EL \epsilon^2 \sim EL(\Delta/L)^2 \quad (\text{III.8})$$

Nous proposons une deuxième façon de trouver cette loi d'échelle, elle aussi éclairante car elle fait intervenir les forces plutôt que les énergies. Dans la situation de la figure III.12 le déplacement axial Δ vient de l'application d'une force par unité de longueur $f_x \sim E \frac{\Delta}{L} t$ qui est transmise le long de la bande (flèches rouges sur le schéma III.12). La pente des plis étant

d'ordre A/λ , la composante verticale vaut donc $f \sim f_x A/\lambda$. Alors, pour écraser ces n plis, il faut appliquer une force verticale (par unité de largeur) sur la plaque du haut qui compense la composante verticale retransmise par chacune des ondulations, d'où $f_z \sim n f \sim n E \frac{\Delta}{L} t \frac{A}{\lambda}$. En réinjectant l'expression trouvée pour n (équation (III.5)) et comme $\epsilon \sim (A/\lambda)^2$, il vient à nouveau que :

$$f_z^{max} \sim E(\Delta/L)^2 L$$

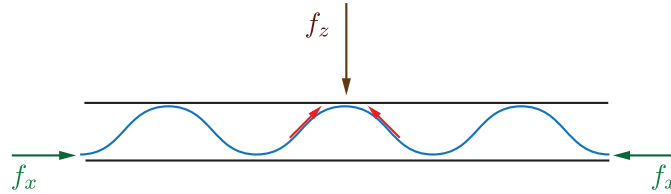


Fig. III.12 La force axiale f_x appliquée sur les bords de la bande est retransmise avec une composante verticale par les ondulations. Pour écraser la coque il faut alors vaincre cette force.

L'étude du cas unidimensionnel nous a permis de mettre en évidence un régime de flambage tout à fait particulier qui apparaît lorsque le confinement est de l'ordre de l'épaisseur. Dans ce régime, pour lequel on ne peut plus supposer la plaque inextensible, le nombre de plis sature avec la compression, et la force de compression atteint un maximum indépendant de l'épaisseur de la coque. L'hypothèse d'inextensibilité ne tenant plus, la Tension Field Theory [42] ne s'applique plus et les contraintes compressives ne sont pas complètement relaxées par les plis. Au contraire, les contraintes sont assez proches dans ces états très comprimés plissés de celles obtenues pour une amplitude nulle (un écrasement total), comme on peut le voir grâce à l'équation (III.6) : $f_x \sim C \frac{\Delta}{L}$. Ce constat nous pousse à calculer les contraintes planaires régnant dans la membrane lorsqu'elle est aplatie. Nous verrons ensuite comment adapter les résultats 1D au cas axisymétrique.

b) Contraintes dans la coque compactée

Calculons les contraintes dans le matériau lorsque la coque est quasiment écrasée (l'amplitude des rides tend vers zéro). Dans la limite $t \ll a_0 \ll R$, le profil initial de la coque peut s'écrire $\xi(r) = (a_0^2 - r^2)/2R$. L'aplatissement de la coque peut être décomposé en un déplacement horizontal $u(r)$ et un déplacement vertical $w(r)$. Dans la limite des faibles pentes, $|\xi'| \ll 1$ (coques peu profondes), le champ de déformation axisymétrique s'écrit¹ :

$$\epsilon_r(r) = \frac{du}{dr} - \frac{1}{2} \xi'^2(r), \quad (\text{III.9})$$

$$\epsilon_\theta(r) = \frac{u}{r}, \quad (\text{III.10})$$

1. L'expression des déformations diffère de celle habituellement trouvée pour une coque (voir par exemple [63]). Cela vient de la différence de paramétrisation de la déflexion. La déflexion est souvent mesurée perpendiculairement à la surface courbée, ici nous la mesurons perpendiculairement à la surface plane. L'expression des déplacements dans le plan est modifiée, le champs de contraintes ne l'est pas.

où ϵ_r et ϵ_θ sont les déformations radiale et azimuthale, respectivement. Il est à noter que contrairement à la déformation écrite dans la section précédente sur le flambage d'Euler, le terme $\frac{1}{2}\xi'^2(r)$ apparaît ici avec un signe moins. Cela vient du fait que nous **écrasons** la coque alors que précédemment nous **défléchissions** une bande plane. Si nous écrasons verticalement la coque (le déplacement u est nul), nous provoquons alors une déformation radiale de compression $\epsilon_r = -\frac{1}{2}\xi'^2(r)$, et aucune déformation azimuthale (voir schéma III.13). C'est pourquoi à la déformation induite par le déplacement u s'ajoute un terme de déformation compressive. L'équilibre des contraintes dans le plan est donné par l'équation de Lamé [4] :

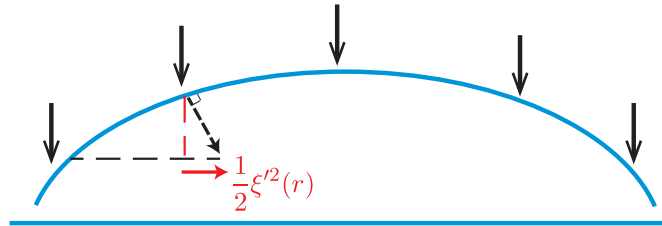


Fig. III.13 Lorsque une surface courbée est aplatie, la pente de l'objet occasionne une déformation compressive. Au terme de déformation dans le plan $\frac{du}{dr}$ se soustrait donc le terme $\frac{1}{2}\xi'^2(r)$ (équation (III.9)).

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \quad (\text{III.11})$$

Avec σ_r et σ_θ les contraintes radiale et azimuthale.

La symétrie du problème impose que cette configuration plate soit un état d'équilibre (instable). La contrainte verticale σ_z est donc nulle dans cette situation. Nous restons par ailleurs dans le domaine d'élasticité linéaire, les relations de Hooke s'écrivent alors :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta), \quad (\text{III.12})$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_r) \quad (\text{III.13})$$

En combinant les équations (III.9), (III.10), (III.11), (III.12) et (III.13) nous obtenons une équation différentielle linéaire du deuxième ordre pour le déplacement :

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = \xi'\xi'' + \frac{1-\nu}{2} \frac{\xi'^2}{r} \quad (\text{III.14})$$

Valable pour n'importe quel profil axisymétrique $\xi(r)$ (dans la limite des faibles pentes $|\xi'| \ll 1$).

Dans le cas particulier d'une portion de sphère, cette équation admet une solution analytique :

$$u(r) = \frac{A}{r} + Br + \frac{3-\nu}{16} \frac{r^3}{R^2}$$

où A et B sont les constantes d'intégration déterminées à partir des conditions aux limites. En particulier, nous avons ici $u(0) = 0$ (par symétrie) et $\sigma_r(a_0) = 0$ (par continuité, les bords de la coque étant libres), ce qui conduit à : $A = 0$ et $B = -(1 - \nu)a_0^2/16R^2$. Finalement, le champ de contraintes dans la coque écrasée vaut :

$$\sigma_r = E \frac{r^2 - a_0^2}{16R^2}, \quad (\text{III.15})$$

$$\sigma_\theta = E \frac{3r^2 - a_0^2}{16R^2} \quad (\text{III.16})$$

L'allure des contraintes pour un cas particulier est tracée en figure III.14. La composante radiale de la contrainte, σ_r , est compressive dans toute la membrane, contrairement à la composante azimuthale qui ne l'est que dans la partie centrale ($\sigma_\theta < 0$ pour $r < a_0/\sqrt{3}$). En outre, σ_r est plus compressive que σ_θ .

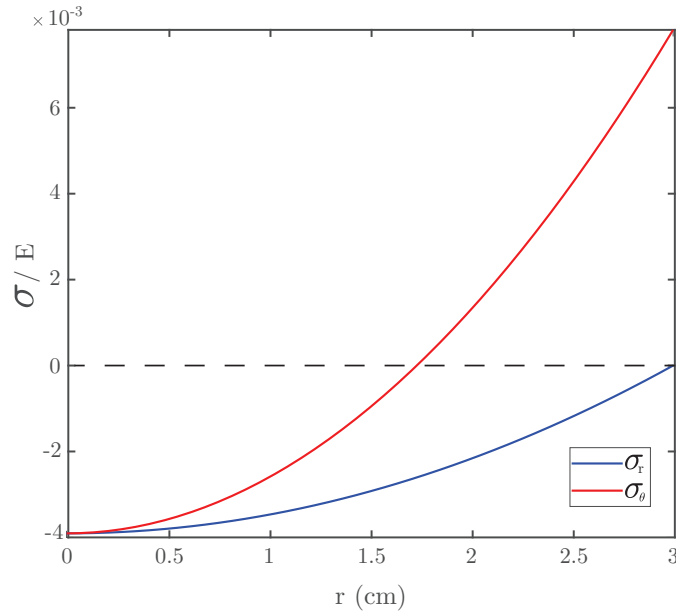


Fig. III.14 Contraintes radiale, équation (III.15) (bleu) et azimuthale, équation (III.16) (rouge) normalisées par le module d'Young. Cas $a_0 = 3$ cm, $R = 12$ cm.

Nous sommes donc capables de calculer les contraintes planaires créées par l'aplatissement de la coque. Nous allons maintenant combiner ce résultat avec l'approche 1D pour analyser nos résultats expérimentaux.

c) De la bande à la coque

L'analyse 1D montre que $\lambda \sim L/n_{max} = t/\sqrt{\frac{L}{\Delta}} \sim t/\sqrt{\epsilon} \sim t\sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\sigma}}$ dans l'hypothèse d'une contrainte transverse nulle (équation (III.5)), où σ est la contrainte générée par le déplacement imposé aux bords de la bande. L'équivalent axisymétrique de cette contrainte est

donc la contrainte **compressive** générée par l'écrasement de la coque, soit dans ce problème σ_r . Nous supposons que les plis suivent les champs de contraintes, le flambage étant en effet déclenché par une contrainte trop compressive. Nous nous intéressons à la situation dans laquelle la coque est presque complètement écrasée, l'expression de σ_r calculée en (III.15) décrit donc *a priori* bien les contraintes dans la calotte dans cette situation, c'est elle que nous utiliserons dans l'expression de la longueur d'onde.

Nous procéderons de manière absolument similaire pour la force : l'idée générale est finalement de remplacer la contrainte uniaxiale imposée le long de la bande par l'opérateur dans l'expérience 1D par la contrainte compressive planaire générée par l'écrasement dans l'expérience 2D. Ce ne sera qu'une approximation : la contrainte azimuthale en 2D n'est en effet pas forcément identique à la contrainte dans la largeur de la bande 1D.

III.2.4 Comparaison avec les expériences

Analysons nos résultats expérimentaux à la lumière de ce modèle.

a) Longueur d'onde

Nous exprimons dans les expressions de la longueur d'onde en 1D (III.5) $\lambda \sim t \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\sigma}}$ la contrainte radiale calculée en III.15 $\sigma_r = E \frac{r^2 - a_0^2}{16R^2}$ pour obtenir :

$$\lambda \approx \frac{t}{0.39} \left(\frac{E}{(1-\nu^2)|\sigma_r|} \right)^{1/2} \sim \frac{tR}{\sqrt{(1-\nu^2)(a_0^2 - r^2)}} \quad (\text{III.17})$$

Traçons donc la longueur d'onde mesurée $\lambda(r)$ en fonction de $\frac{tR}{((1-\nu^2)(a_0^2 - r^2))^{1/2}}$ pour les différentes coques. On voit sur la figure III.15 que tous les points, initialement éclatés (graphique III.7 et insert), s'alignent maintenant sur une droite de pente 19.4. Nous attendions une pente d'environ 10.3, un peu plus petite que celle observée expérimentalement. Ce décalage peut avoir diverses origines : la présence d'une légère friction entre la membrane et les plaques qui l'écrasent, mais aussi au fait que dans ce cas axisymétrique, les plis présentent une courbure dans la direction orthoradiale qui n'est pas prise en compte dans nos calculs. Ce dernier effet est *a priori* d'autant plus petit que l'amplitude des plis est faible.

Notons toutefois que le fait que la pente expérimentale soit légèrement supérieure à la pente prédite est cohérent avec le fait que nous calculons une longueur d'onde minimale. Le modèle capture donc de manière satisfaisante la longueur d'onde de l'instabilité.

b) Force verticale

Adaptons la loi d'échelle établie plus haut : $f_z \sim E(\Delta/L)^2 L$ (III.8). À l'instar de la longueur d'onde Δ/L , la déformation compressive que subit la bande, doit être remplacée par $\frac{(1-\nu^2)\sigma_r}{E}$. Par ailleurs, notre dispositif ne nous permet pas de mesurer la force localement. Nous allons donc utiliser la valeur typique de la contrainte : $\sigma_r/E \sim a_0^2/16R^2$ (équation (III.15)). Ensuite l'équivalent de L , la longueur de la bande dans (III.8), est $2a_0$. Enfin nous multiplions f_z par la taille caractéristique de la coque $2a_0$ afin d'accéder à la force F_z , de

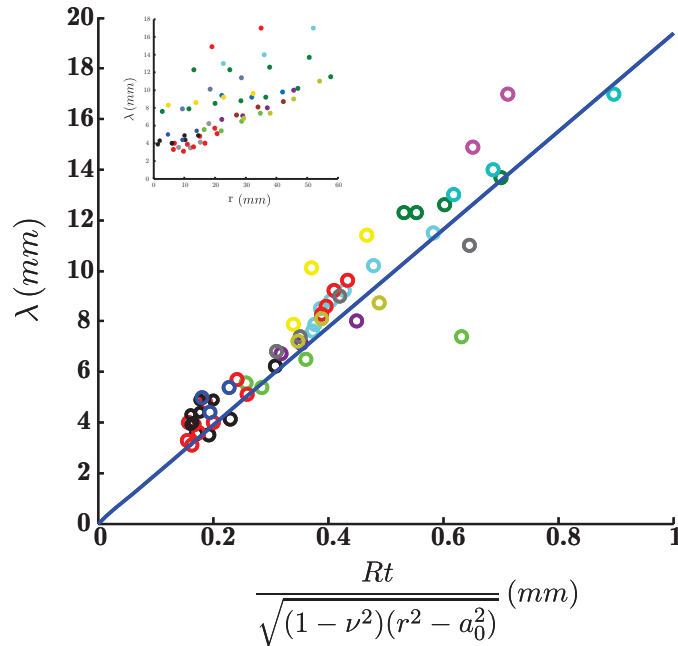


Fig. III.15 Longueur d'onde $\lambda(r)$ mesurée en fonction de $\frac{tR}{((1-\nu^2)(a_0^2-r^2))^{1/2}}$ (voir équation (III.17)) pour différentes coques de modules d'Young 1 MPa et 750 kPa, R compris entre 2.5 et 12.5 cm, a_0 compris entre 2 et 8 cm et t compris entre 220 et 550 μm . La pente de la droite vaut 19.4. Insert : données brutes des longueurs d'onde en fonction de r pour les différentes coques.

sorte que :

$$F_z^{max} \sim Ea_0^6/R^4$$

Utilisons cette loi d'échelle pour renormaliser les courbes du graphique III.8. Nous normalisons également l'écart entre les plaques par l'épaisseur de la coque. Nous obtenons ainsi la figure III.16, dans laquelle les courbes se superposent raisonnablement bien. L'accord n'est pas parfait, sans doute à cause de problèmes d'alignement et d'établissement du zéro de la machine. Nous pouvons enfin illustrer un peu plus notre loi d'échelle en traçant la force verticale maximale mesurée F_z en fonction de sa prédiction Ea_0^6/R^4 (Fig. III.17). Les données s'alignent sur une droite maîtresse de pente 5.7×10^{-3} . Notons qu'en reprenant l'expression de f_z (éq. (III.7)), nous nous attendrions à un préfacteur de l'ordre de 2.3×10^{-3} . L'accord avec nos données expérimentales est donc raisonnablement bon.

Nous comprenons donc relativement bien le cas idéal d'une calotte sphérique : nous sommes capables de prédire la longueur d'onde des plis qui apparaissent, ainsi que la force nécessaire pour écraser la coque. Que se passe-t-il maintenant si nous changeons les conditions aux limites ?

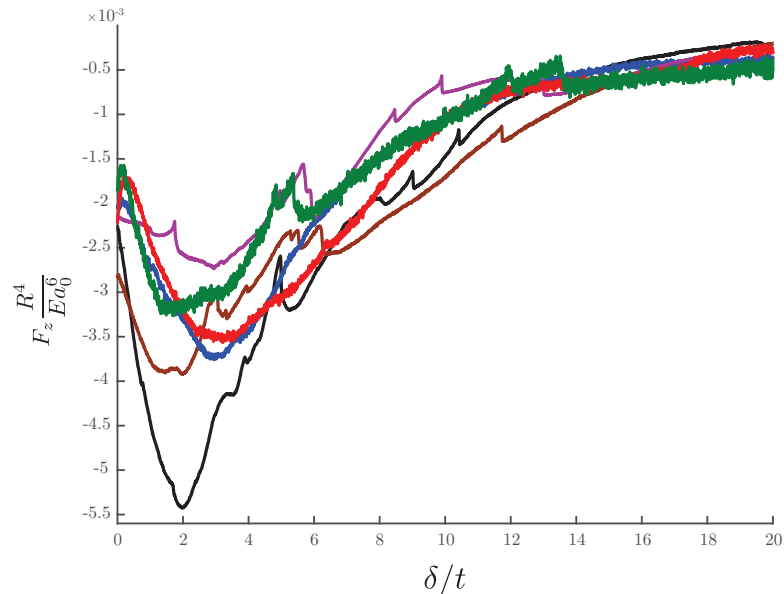


Fig. III.16 Force verticale appliquée pour écraser la coque normalisée par Ea_0^6/R^4 en fonction de la distance entre les plaques normalisée par l'épaisseur t de la coque. Les courbes noire, marron et bleue sont pour une coque de rayon $R = 6\text{cm}$, $E = 1\text{MPa}$ et respectivement $a_0 = 4.7$, $a_0 = 4.55$, $a_0 = 3.65\text{cm}$, $t = 260\text{ }\mu\text{m}$. La courbe mauve est obtenue pour une coque de rayon $R = 6\text{cm}$, $E = 750\text{ kPa}$ et $a_0 = 4.25\text{ cm}$, $t = 250\text{ }\mu\text{m}$. Les courbes rouge et verte sont obtenues pour une coque de rayon $R = 3\text{cm}$, $E = 750\text{ kPa}$, $a_0 = 2.35$ et $a_0 = 2.15\text{ cm}$, $t = 245\text{ }\mu\text{m}$.

III.2.5 Coques trouées

Afin de régulariser la zone centrale de la coque dans laquelle l'orientation des plis est moins claire qu'ailleurs (voir III.6 ou III.10 par exemple), nous découpons une ouverture circulaire de rayon a_i au niveau du pôle de la coque à l'aide d'un emporte-pièce. Nous écrasons ensuite cette portion de sphère de la même façon que dans la partie III.2.2. Nous rencontrons alors une situation curieuse dans laquelle deux régions bien distinctes apparaissent. Près du trou, sur une zone circulaire de rayon w existent des plis radiaux (délimitée par le cercle noir sur la figure III.18), remplacés plus loin par les plis orthoradiaux que nous avons étudiés juste avant. Pouvons-nous expliquer l'existence de ces deux zones et certaines de leurs caractéristiques? En particulier qu'est-ce qui fixe l'orientation des plis, la taille w sur laquelle ils s'étendent et leur nombre d'onde? Nous nous intéresserons toujours à la limite où l'amplitude des oscillations est de l'ordre de l'épaisseur de la coque.

a) Observations expérimentales

Nous remarquons tout d'abord que la taille w augmente avec la taille du trou a_i . Cela apparaît très clairement sur la figure III.19 dans laquelle, pour une même coque, nous avons petit à petit augmenté la taille du trou. En deçà d'une certaine taille a_i , les plis radiaux

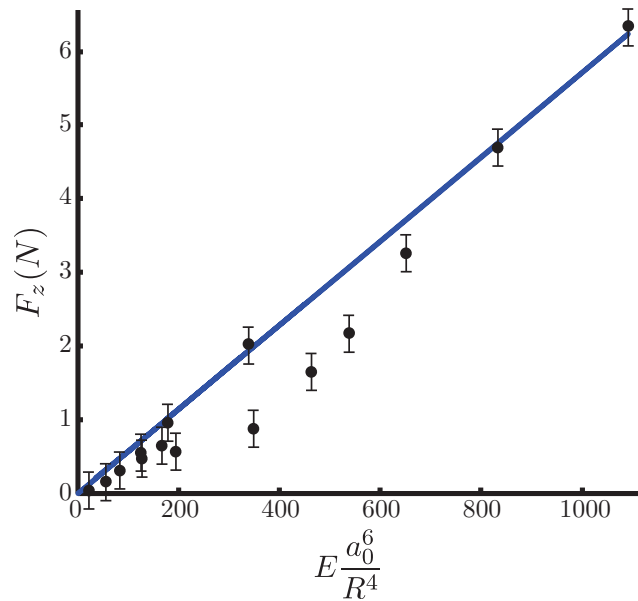


Fig. III.17 Force verticale maximale mesurée en fonction de la loi d'échelle pour cette même force Ea_0^6/R^4 (points). La ligne bleue est la régression linéaire à partir des données : $F_z^{max} \sim 0.0057Ea_0^6/R^4$.

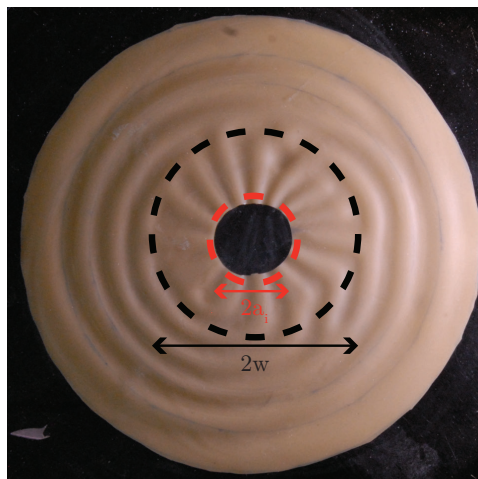


Fig. III.18 Coque trouée écrasée. $R = 6$ cm, $a_i = 1$ cm, $a_0 = 5.5$ cm, $E = 750$ kPa. Dans une première région de rayon w , délimitée par le cercle en pointillé noir existent des plis radiaux, tandis que plus loin nous retrouvons les plis orthoradiaux étudiés en III.2.2.



Fig. III.19 La taille sur laquelle s'étendent les plis radiaux w croît nettement avec le rayon de l'ouverture centrale a_i .

ne sont pas clairement définis (voire sont inexistantes si le trou est vraiment trop réduit). Ils peuvent également envahir l'intégralité de la coque et ne plus laisser de place aux plis orthoradiaux lorsque a_i devient trop grand. Dans le régime des forts confinements, w ne dépend pas de l'écrasement. Il existe une petite région de transition dans laquelle l'orientation des plis est mal définie. Cette zone indistincte, dont la taille est de l'ordre d'une longueur d'onde, est toutefois petite comparée à w dès que le trou est assez grand. La zone de plis radiaux est toujours à peu près circulaire. Les imperfections sont sans doute dues à l'ouverture qui n'est pas parfaitement circulaire, elle non plus. Il est malgré tout possible de définir et mesurer de manière satisfaisante le rayon w de la région plissée radialement. La figure III.20 montre, pour différentes coques, l'évolution de w avec a_i . Nous voyons que w est centimétrique et croît nettement avec a_i une fois que le trou est assez grand pour que les plis radiaux apparaissent.

Les plis radiaux partent perpendiculairement à l'ouverture (voir figure III.19) mais deviennent parallèles aux bords extérieurs de la calotte : il ne s'agit donc pas ici d'un ancrage préférentiel des plis perpendiculairement au bord libre central.

Enfin, le nombre de plis radiaux n'évolue pas dans toute la zone centrale, c'est pourquoi nous nous intéresserons à leur nombre d'onde plutôt qu'à leur longueur d'onde. Leur nombre évolue faiblement avec le confinement : à mesure que les plaques se rapprochent, nous pouvons observer la création d'un ou deux plis supplémentaires. Le nombre de plis sature pour les forts confinements, régime dans lequel nous travaillons.

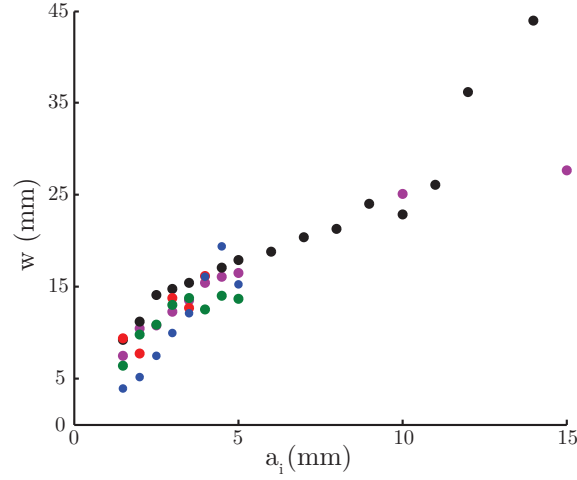


Fig. III.20 Rayon de la zone de plis radiaux en fonction du rayon du trou pour une coque trouée écrasée. (●) $R = 6$ cm, $a_0 = 4.6$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 390$ μ m. (●) $R = 5$ cm, $a_0 = 3.6$ cm, $E = 1$ MPa, $t = 450$ μ m. (●) $R = 5$ cm, $a_0 = 4.2$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 380$ μ m. (●) $R = 5$ cm, $a_0 = 4.4$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 360$ μ m. (●) $R = 6$ cm, $a_0 = 5.5$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 420$ μ m.

b) Résultats

Pourquoi de tels plis apparaissent-ils? Qualitativement, enlever de la matière au centre de la coque autorise le mouvement des bords intérieurs, en particulier la contraction de leur périmètre. De manière plus quantitative, nous avons vu précédemment que la zone centrale était soumise à des contraintes compressives radiales et azimuthales telles que $\sigma_r < \sigma_\theta < 0$. Que change l'ouverture centrale dans l'état de contraintes planaires?

Nous procédons exactement au même calcul que dans la partie III.2.3 en remplaçant simplement la condition $u(0) = 0$ par $\sigma_r(a_i) = 0$ (condition de bord libre). La résolution de l'équation (III.14) conduit alors à de nouvelles constantes d'intégration : $A = -(1 + \nu)a_0^2 a_i^2 / 16R^2$ et $B = -(1 - \nu)(a_0^2 + a_i^2) / 16R^2$. D'où :

$$\sigma_r = E \frac{a_o^2}{16R^2} \left[\frac{(a_i/a_o)^2}{(r/a_o)^2} + (r/a_o)^2 - 1 - (a_i/a_o)^2 \right] \quad (\text{III.18})$$

$$\sigma_\theta = E \frac{a_o^2}{16R^2} \left[-\frac{(a_i/a_o)^2}{(r/a_o)^2} + 3(r/a_o)^2 - 1 - (a_i/a_o)^2 \right] \quad (\text{III.19})$$

Traçons alors σ_r et σ_θ , calculées en (III.18) et (III.19), en fonction de r pour une coque donnée (figure III.21). σ_θ est négative au centre et devient positive au-delà d'un rayon donné, tandis que σ_r est négative partout. Toutefois, comme $\sigma_r(a_i) = 0$, il existe une région centrale dans laquelle la contrainte azimuthale est plus compressive que la contrainte radiale. La situation est donc différente du cas précédent pour laquelle la contrainte radiale était partout plus compressive que la contrainte azimuthale. Ce point nous incite à penser que l'orientation des plis est déterminée par l'orientation de la contrainte la plus compressive.

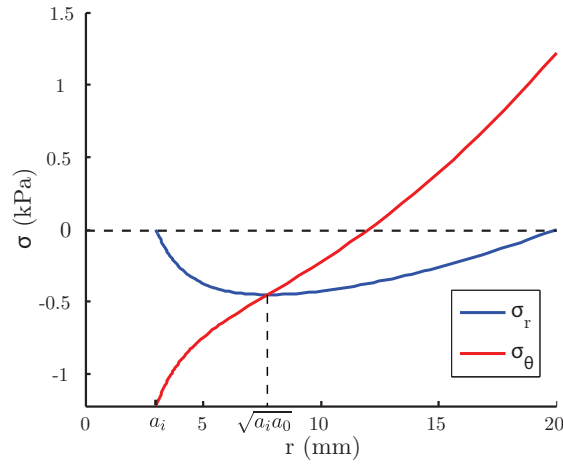


Fig. III.21 Contraintes radiales σ_r et azimuthales σ_θ calculées pour une coque de rayon $R = 10$ cm, $a_0 = 2$ cm, $a_i = 0.3$ cm et $E = 750$ kPa. Pour $r < \sqrt{a_i a_0}$ on a $\sigma_\theta < \sigma_r < 0$.

La taille w doit alors correspondre au changement de direction de la contrainte la plus compressive, soit à la position telle que $\sigma_\theta(w) = \sigma_r(w) < 0$. En utilisant les expressions (III.18) et (III.19), il vient : $w = \sqrt{a_i a_0}$. Nous traçons la taille de plis radiaux w en fonction de $\sqrt{a_i a_0}$ sur la figure III.22. Tous les points s'alignent sur une droite maîtresse de pente 1.07.

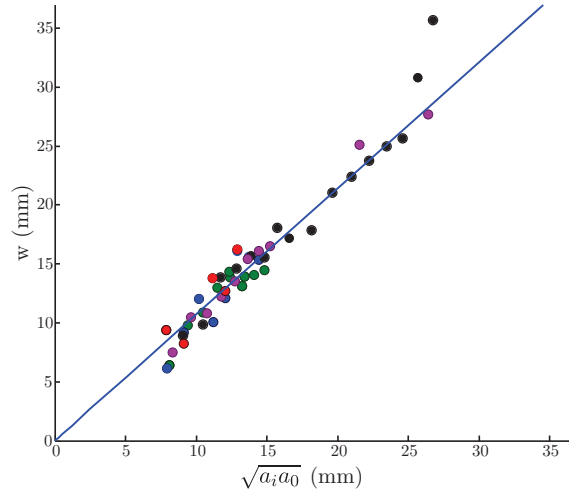


Fig. III.22 Taille de la zone avec plis radiaux w en fonction de $\sqrt{a_i a_0}$.

(●) $R = 6$ cm, $a_0 = 4.6$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 390$ μ m. (●) $R = 5$ cm, $a_0 = 3.6$ cm, $E = 1$ MPa, $t = 450$ μ m. (●) $R = 5$ cm, $a_0 = 4.2$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 380$ μ m. (●) $R = 5$ cm, $a_0 = 4.4$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 360$ μ m. (●) $R = 6$ cm, $a_0 = 5.5$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 420$ μ m. La pente de la droite vaut 1.07.

La contrainte la plus compressive impose donc bien la direction des plis. D'une manière plus générale, ce résultat est intéressant car il nous indique que pour déterminer l'orientation des plis dans une plaque mince, il suffit d'être capable de calculer les contraintes d'un état plan

(élasticité en contraintes planes). L'orientation des contraintes les plus compressives donne alors l'orientation des plis.

Appliquons maintenant le modèle précédemment établi pour calculer le nombre de plis radiaux. Nous avons vu, dans le cas 1D, que $n_{max} \sim \frac{L}{t} \sqrt{\frac{\Delta}{L}}$ (III.5). Nous venons de montrer que dans cette expérience, la contrainte planaire qui provoque l'instabilité est σ_θ . L'équivalent de $\sqrt{\frac{\Delta}{L}}$ est donc $\sqrt{\frac{\sigma_\theta(r)}{E}}$, tandis que L devient $2\pi r$. Nous devrions donc avoir un nombre de plis qui varie avec la position, ce qui n'est pas le cas expérimentalement. Nous attribuons ce point au coût énergétique associé à la séparation d'un pli en deux, comme cela a été montré précédemment dans l'équipe dans le cas de rideaux suspendus, plissés à un bord et libres à l'autre [64]. Cette opération nécessite en effet de cisailer la plaque le long des plis. Le système étant peu étendu (w vaut quelques fois la longueur d'onde), il est intuitivement plus favorable de garder un nombre d'onde constant. Le nombre de plis est alors sans doute déterminé par la valeur de la contrainte compressive la plus forte. Nous décidons donc d'appliquer la formule adaptée (III.5) en $r = a_i$ (là où σ_θ est la plus négative, voir figure III.21 et équation (III.19)). Nous obtenons :

$$n_{max} \sim 0.39 \frac{2\pi a_i}{t} \sqrt{\frac{\sigma_\theta(a_i)}{E}} \sim 0.87 \frac{a_i a_0}{Rt} \sqrt{(a_i/a_0)^2 - 1}$$

Traçons donc le nombre de plis expérimentaux en fonction de $\frac{a_i a_0}{Rt} \sqrt{(a_i/a_0)^2 - 1}$ (figure III.23). Les données s'alignent sur une droite maîtresse de pente 0.80, l'accord est donc excellent.

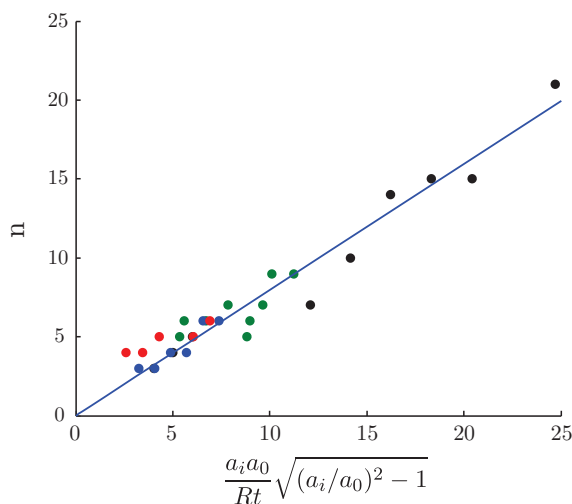


Fig. III.23 Nombre de plis expérimentaux en fonction de $n_{max} \sim \frac{a_i a_0}{Rt} \sqrt{(a_i/a_0)^2 - 1}$. (●) $R = 5$ cm, $a_0 = 3.6$ cm, $E = 1$ MPa, $t = 450$ μ m. (●) $R = 5$ cm, $a_0 = 4$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 460$ μ m. (●) $R = 5$ cm, $a_0 = 4$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 360$ μ m. (●) $R = 6$ cm, $a_0 = 5.5$ cm, $E = 750$ kPa, $t = 420$ μ m. La régression linéaire est de pente 0.8.

Ces coques écrasées, au-delà de leur aspect esthétique, peuvent donc se révéler assez riches et démontrent des instabilités étonnantes. Le modèle développé, finalement assez peu

complexe bien qu'inhabituel (l'hypothèse standard pour les structures élancées est que les contraintes compressives sont annulées par le flambement) capture de manière satisfaisante les caractéristiques de l'instabilité.

D'autre part, la compression d'une coque trouée donne lieu à une situation qui n'est pas intuitive dans laquelle deux directions d'instabilité sont choisies en même temps dans un système qui n'est soumis qu'à une seule sollicitation. En plus de cet aspect, ce problème nous permet de comprendre et d'illustrer que pour déterminer l'orientation d'un motif de plis il faut trouver la composante la plus compressive du champ de contraintes planes. Nous pouvons, pour terminer ce chapitre, tester ces critères sur d'autres systèmes, plus complexes : une plaque bosselée, ou encore des coques déchirées.

III.3 Compaction de formes complexes

III.3.1 Plaque bosselée

Considérons une plaque bosselée. Il s'agit à nouveau d'un objet plan contenant localement des zones dont la courbure de Gauss n'est pas nulle. Nous allons étudier l'instabilité se produisant lorsque cet objet est écrasé.

a) Réalisation expérimentale

Le système le plus simple consiste en une plaque présentant une bosse en son centre. Plusieurs méthodes s'offrent à nous pour fabriquer cet objet. La première consiste à indenter plastiquement une fine feuille de polymère en y déposant une sphère métallique chaude. Nous avons utilisé du Mylar et du polypropylène. En variant la température et la taille de la sphère métallique nous varions la forme de la bosse. Bien que simple, cette méthode est néanmoins assez peu satisfaisante car nous contrôlons mal la forme de la bosse (voir figure III.24).

Dans la deuxième méthode, nous utilisons une feuille de PVS sur laquelle nous déposons une goutte de white spirit. Cela a pour effet de faire gonfler localement le polymère créant ainsi une bosse bien plus localisée qu'avec l'embossage par sphère chaude. Nous préférons donc cette méthode. Le gonflement du polymère n'étant que de quelques pourcents (nous déposons très peu de white spirit), nous négligerons le changement d'épaisseur de la plaque. Lorsque nous écrasons cette surface, des plis apparaissent à l'intérieur et s'étendent à l'extérieur de la bosse (voir figure III.24). L'orientation des plis dans la zone de la bosse (quand il y en a) peut être assez compliquée. En revanche, en dehors de cette bosse, le motif est relativement régulier et concentrique. Son axisymétrie dépend de l'axisymétrie de la bosse initiale. Nous nous pencherons sur les plis extérieurs à la bosse, toujours dans la limite d'une compression de l'ordre de l'épaisseur de la plaque.

b) Longueur d'onde de l'instabilité

Nous appellerons A l'amplitude de la bosse, R son rayon de courbure (lorsque nous supposons que la bosse est une portion de sphère), a_0 le rayon de sa base, et h l'épaisseur de la plaque (voir schéma III.25). L'amplitude de la bosse est mesurée à l'aide d'une nappe laser projetée avec une incidence rasante sur la plaque, les longueurs d'onde sont simplement comptées sur les photos.

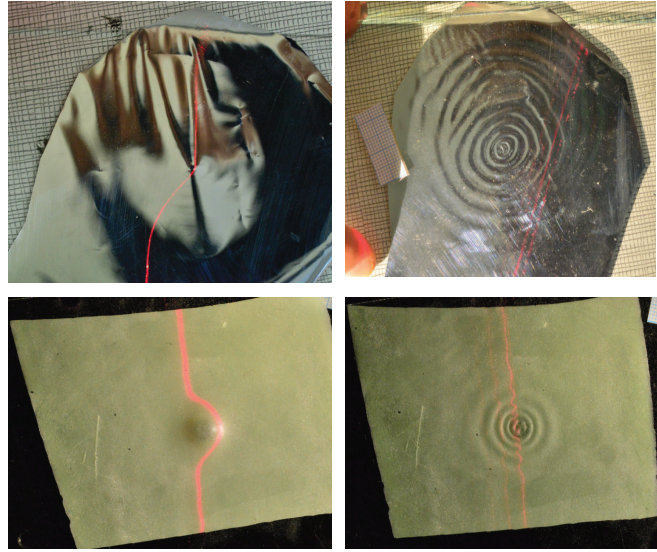


Fig. III.24 Une feuille bosselée (à gauche) est écrasée, donnant naissance à un motif de plis réguliers (à droite). Ligne du haut : feuille en mylar embossée à l'aide d'une sphère chauffée. Ligne du bas : feuille de PVS après gonflement par une goutte de white spirit. La ligne laser est projetée avec une incidence rasante et permet de mesurer le profil de la bosse. Si celui de la plaque de PVS est assez net, celui de la plaque de mylar est clairement plus délicat. Qu'appelle-t-on dans ce cas l'amplitude de la bosse ? la taille de sa base ?

La figure III.24 montre que la longueur d'onde dépend de la position. Nous mesurons donc

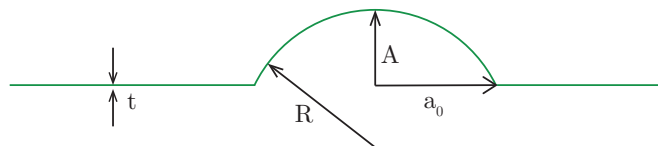


Fig. III.25 La bosse présente une amplitude A , sa base est de rayon a_0 et la plaque a une épaisseur t . Si nous supposons que la bosse est une portion de cercle, nous appelons R son rayon de courbure. Nous discuterons plus loin de la forme réelle de la bosse, en particulier ce schéma ne rend pas compte du raccordement entre la bosse et la zone plane.

λ en fonction de la distance au centre r , pour différentes tailles de bosses et différentes épaisseurs de plaques de PVS. Les résultats sont tracés sur la figure III.26. La longueur d'onde croît linéairement avec la distance au centre. Il est en revanche délicat de discuter de sa dépendance en l'amplitude A et l'épaisseur t , celles-ci ayant peu varié sur les expériences. Le même type de résultat est obtenu avec des plaques de mylar ou de polypropylène. Ce comportement est en fait général comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

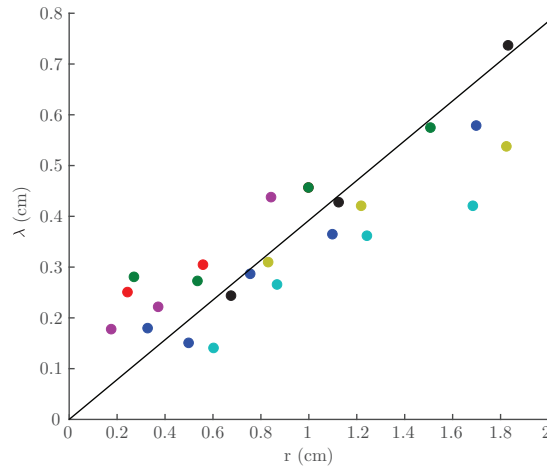


Fig. III.26 Longueur d'onde des plis en fonctions de la distance au centre pour plusieurs bosses et plusieurs épaisseurs de plaque. La ligne est un guide pour l'oeil montrant la variation linéaire pour les points noirs. (●) $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 860\ \mu\text{m}$, (●) $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 800\ \mu\text{m}$, (●) $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 773\ \mu\text{m}$, (●) $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 700\ \mu\text{m}$, (●) $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 700\ \mu\text{m}$, (●) $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 780\ \mu\text{m}$, (●) $E = 1\text{MPa}$, $t = 120\ \mu\text{m}$, $A = 880\ \mu\text{m}$, (●) $E = 750\ \text{kPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 700\ \mu\text{m}$.

c) Modélisation

Nous allons ici adapter les calculs développés pour les calottes sphériques au cas de la plaque bosselée.

Une variation linéaire attendue

Commençons par montrer que la variation linéaire de la longueur d'onde est générale dans ce type de problème. En effet, les contraintes planaires sont toujours déterminées en résolvant l'équation de Lamé (III.14), le changement de géométrie ne modifie rien à cela. Or, nous avons vu que les solutions étaient du type $u(r) = Ar + B/r$. Deux domaines existent dans ce problème, celui déformé (la bosse), où l'on doit ajouter une solution particulière qui dépend de la forme de départ ; et le reste de la feuille. Quelle que soit la forme que l'on écrasera, les bords de la feuille étant libres, et éloignés (la feuille est grande devant la taille de la bosse) la condition aux limites sera l'annulation de la contrainte radiale, donc $A = 0$. De plus, dans la région extérieure à la bosse, la solution particulière est nulle. En conséquence, en dehors de la bosse la contrainte radiale décroît en $1/r^2$. Enfin, le modèle 1D prédit des longueurs d'onde proportionnelles à $1/\sqrt{\sigma}$, c'est-à-dire proportionnelles à r . Ce raisonnement ne dépend pas de la forme écrasée, mais suppose seulement qu'elle soit axisymétrique.

Nous pouvons maintenant résoudre les équations de manière plus précise. Nous devons donc spécifier la forme de la bosse afin de calculer les contraintes planaires. Commençons avec le cas le plus simple, schématisé sur la figure III.25 : une portion de sphère encastrée dans une plaque infinie. Le passage direct d'une zone courbée à une zone plane n'est pas physique. Ce

cas présente néanmoins l'avantage d'être simple à résoudre, tout en dégagant les principales lois d'échelle du problème.

Sphère encastrée

Le profil de cette surface (figure III.25) s'écrit :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{a_0^2 - r^2}{2R} \quad \text{si } |r| < a \\ \xi &= 0 \quad \text{sinon}\end{aligned}$$

Nous procédons exactement de la même façon que dans les sections précédentes et déterminons le déplacement radial $u(r)$ en résolvant l'équation de Lamé :

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = \xi' \xi'' + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\xi'^2}{r}$$

avec les conditions aux limites : $u(0) = 0$, $\sigma(\infty) = 0$ et la continuité du déplacement et de la contrainte radiale en a_0 . Cela conduit aux contraintes radiales :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{16R^2} (r^2 - 2a_0^2) \quad \text{si } |r| < a \\ \sigma_r &= -\frac{E}{16R^2} \frac{a^4}{r^2} \quad \text{sinon}\end{aligned}$$

et azimuthales :

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{E}{16R^2} (3r^2 - 2a_0^2) \quad \text{si } |r| < a \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{16R^2} \frac{a^4}{r^2} \quad \text{sinon}\end{aligned}$$

Nous traçons sur la figure III.27 les contraintes pour un cas donné. σ_r est donc toujours compressive tandis que σ_θ est d'abord compressive (mais moins que σ_r), puis en tension en dehors de la bosse. C'est donc bien σ_r qui est responsable de l'orientation des plis dans cette plaque. Par ailleurs, nous trouvons effectivement une dépendance en $1/r^2$ en dehors de la bosse. Dès lors, en introduisant dans l'expression de λ (équation (III.5)) la valeur des contraintes radiales ainsi trouvées, il vient, hors de la bosse :

$$\lambda \approx \frac{t}{0.33} \left(\frac{E}{(1 - \nu^2) |\sigma_r|} \right)^{1/2} \approx \frac{tR}{a_0^2 \sqrt{(1 - \nu^2)}} r$$

Enfin, en remarquant que $a_0^2 \sim RA$, où A est l'amplitude de la bosse nous pouvons réécrire λ :

$$\lambda \approx \frac{t}{A \sqrt{(1 - \nu^2)}} r \quad (\text{III.26})$$

Ainsi, seule l'amplitude A de la bosse influence la longueur d'onde de l'instabilité. Curieusement, cette loi d'échelle ne dépend pas de l'extension laterale de la bosse a_0 .

Nous pouvons retrouver ce résultat en loi d'échelle en remarquant que la contrainte radiale

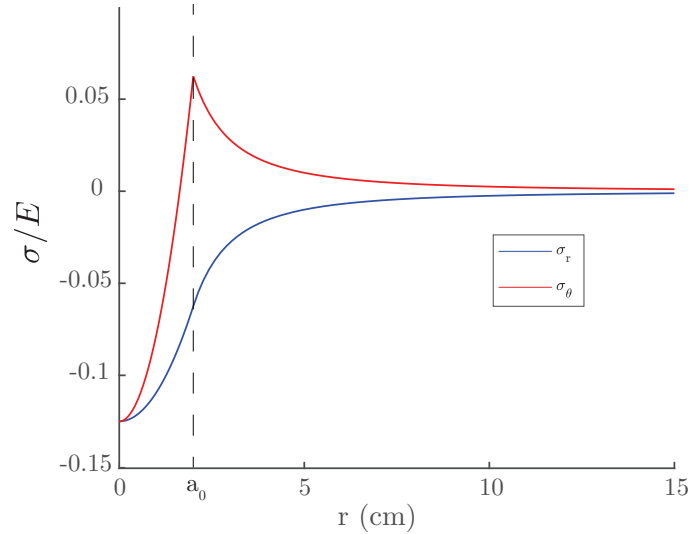


Fig. III.27 Contraintes planaires dans la plaque lorsque qu'une bosse telle que III.25, avec $a_0 = 2$ cm, $R = 2$ cm est écrasée. σ_r est toujours plus compressive que σ_θ .

s'écrit $\sigma_r = \frac{a_0^2}{r^2} \sigma_r(a_0)$. De plus $|\sigma_r(a_0)| \sim E(A/a_0)^2$, si bien que $\sigma_r \sim E \frac{A^2}{r^2}$, d'où finalement $\lambda \sim t \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \sim t \frac{r}{A}$.

Résolution numérique : profil gaussien

Nous pouvons également résoudre numériquement l'équation différentielle (III.14), nous autorisant ainsi à considérer n'importe quelle géométrie axisymétrique pour la bosse. Nous choisissons de le faire pour un profil gaussien, plus proche des formes réelles que le profil précédent (voir figure III.28.a.) .

Comparons d'abord les résultats pour une bosse sphérique et une bosse gaussienne similaires. Les deux profils ont la même amplitude A , $2a_0$ correspond au diamètre de la base pour la bosse sphérique, et la largeur à 5% de A pour le profil gaussien (voir figure III.28). Nous superposons sur la figure III.28 les contraintes radiales et orthoradiales obtenues lors de la résolution de l'équation (III.14). Les deux champs ont des allures semblables : les contraintes radiales sont toujours les plus compressives, tandis que les contraintes azimuthales changent de signe. Hors de la bosse, les valeurs des contraintes sont proches. À l'intérieur de la bosse, nous voyons que les contraintes sont plus compressives pour le profil gaussien que pour le sphérique. Il lisse également la variation abrupte de σ_θ rencontrée avec le profil sphérique. La similitude de résultats entre profils gaussien et sphérique nous conduit à tester numériquement la loi d'échelle donnant la longueur d'onde (III.26). Nous faisons donc varier la largeur du profil gaussien, sans changer son amplitude, d'après ce que nous avons vu, cela ne devrait pas changer la contrainte radiale en dehors de la bosse (équation (III.25)). La figure III.29.b représente les contraintes radiales et azimuthales ainsi obtenues. Nous voyons que si à l'intérieur de la bosse les contraintes diffèrent, elles deviennent très proches dès que l'on en sort. Cela confirme donc notre loi d'échelle et le résultat que les contraintes (et donc la longueur d'onde) dans la partie extérieure ne dépendent que de l'amplitude de la bosse, pas

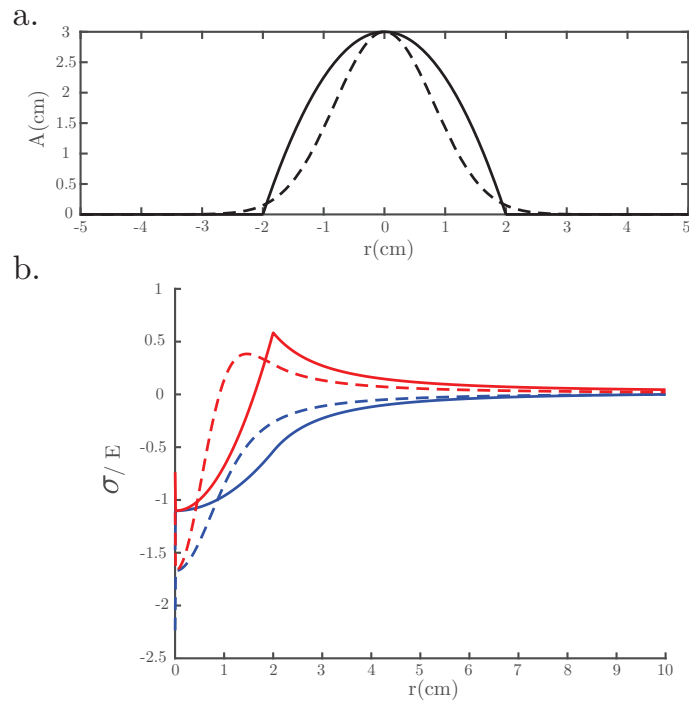


Fig. III.28 a.) Trait plein : profil sphérique, pointillé : profil gaussien. b.) Contraintes radiales (bleu) et orthoradiales (rouge) obtenues lors de l'écrasement des formes en (a), la forme du trait (plein ou pointillé) correspond au profil écrasé.

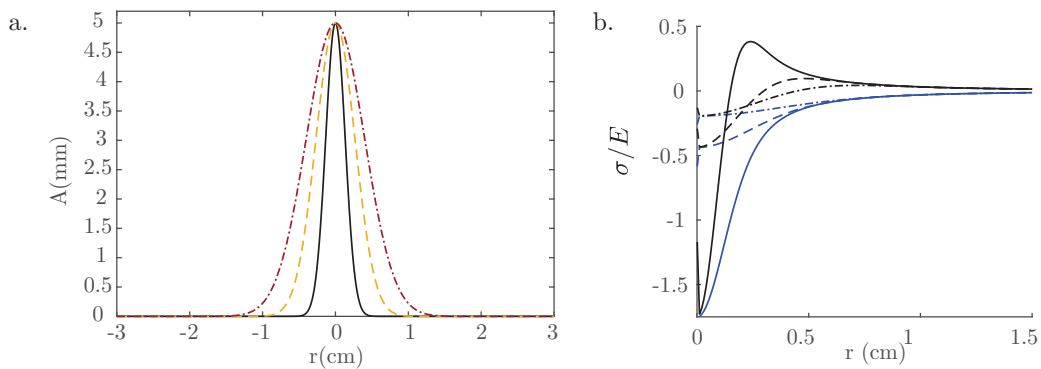


Fig. III.29 a.) Forme des bosses que nous "écrasons numériquement" : 3 gaussiennes d'amplitude maximale 5 mm, et de largeur 5, 10 et 15 mm. b.) Contraintes planaires obtenues lors de l'écrasement d'une feuille de 10 cm contenant l'une des gaussiennes de la figure a.). En bleu : contrainte radiale, en rouge azimuthale. La forme du trait correspond aux gaussiennes de la figure (a).

de sa largeur.

Retour aux expériences

Nous prévoyons donc une évolution de la longueur d'onde hors de la bosse de la forme :

$$\lambda \sim \frac{t}{A}r$$

Retraçons donc les données de la figure III.26 en multipliant λ par A/t . Nous obtenons le graphique III.30 dans lequel les points s'alignent sur une droite de pente 1.9. La loi

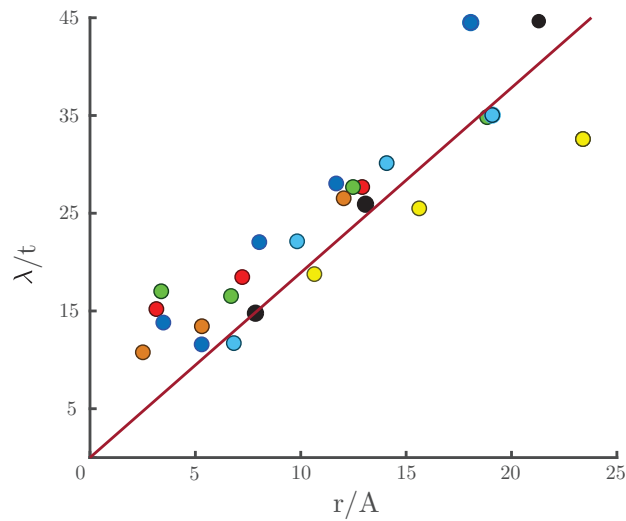


Fig. III.30 Test de la loi d'échelle (III.26) ● $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 860\ \mu\text{m}$, ● $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 800\ \mu\text{m}$, ● $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 773\ \mu\text{m}$, ● $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 700\ \mu\text{m}$, ● $E = 1\text{MPa}$, $t = 165\ \mu\text{m}$, $A = 780\ \mu\text{m}$, ● $E = 1\text{MPa}$, $t = 120\ \mu\text{m}$, $A = 880\ \mu\text{m}$, ● $E = 750\ \text{kPa}$, $t = 130\ \mu\text{m}$, $A = 940\ \mu\text{m}$, Régression linéaire de pente 1.9.

d'échelle n'est en effet valide que dans la zone extérieure à la bosse. Nos expériences semblent donc suivre cette loi d'échelle. Toutefois, il serait intéressant de l'affermir en formant des bosses contrôlées dont la taille diffère notablement de celles que nous avons ici, la mise à l'échelle serait alors beaucoup plus convaincante.

III.3.2 Sphère ouverte

Découpons la coque le long d'un rayon. Cette ouverture permet-elle à la calotte d'accommoder la déformation sans avoir à flamber ? L'expérience laisse apparaître un réseau de plis qui partent perpendiculairement à l'ouverture et finissent par rejoindre les plis azimuthaux qui nous sont maintenant familiers (voir photo III.31.b) Cette situation n'étant plus axisymétrique, la résoudre analytiquement est nettement plus compliqué que dans les cas précédents. Nous pouvons en revanche coupler notre approche à des techniques numériques. Nous avons en effet appris que l'orientation des

plis est déterminée par la contrainte la plus compressive régnant dans la coque écrasée. Dès lors, en calculant par une méthode d'éléments finis les contraintes planaires dans cet objet écrasé, nous pourrions en déduire les motifs de plis. C'est ce que nous avons cherché à faire pour cet exemple. Nous calculons les contraintes au sein de la coque écrasée présentant une ouverture radiale à l'aide du code PDEtool de Matlab. Pour ce faire, nous dessinons un maillage circulaire ouvert selon un rayon, qui représente la coque écrasée. Nous résolvons les équations d'équilibre mécanique dans le plan. Les codes de résolution numérique standards (tel que celui que nous utilisons par exemple) traitent les équations :

$$\operatorname{div}(\sigma) = f \quad (\text{III.27})$$

Où f est la densité volumique de force extérieure.

Dans notre cas, la pente initiale de la structure écrasée intervient également en modifiant la loi de Hooke. Nous proposons une astuce, détaillée en annexe (A), qui consiste à intégrer la contribution de la pente au champ de contraintes comme une force volumique pour le calcul numérique. Les conditions aux limites doivent, elles aussi, être astucieusement choisies de manière à conserver des conditions de bords libres.

Une fois les équations (III.27) résolues, nous cherchons localement la contrainte la plus négative, et traçons les lignes de champs perpendiculaires à cette contrainte pour obtenir la figure III.31.a. Ces lignes de champs semblent en bon accord qualitatif avec les plis observés expérimentalement. Bien sûr, des efforts restent à fournir pour mieux caractériser l'accord apparent, néanmoins nous démontrons ici la validité de notre méthode, ainsi que son éventuelle utilité. Pour connaître l'orientation des plis, il suffit de connaître les contraintes planaires dans la coque, ce qui ne représente pas un calcul très lourd.

III.4 conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les motifs de plissement produits lors de l'aplatissement d'une coque élastique hémisphérique. De l'incompatibilité géométrique entre un plan et une sphère naît un champ de contraintes dans la coque, qui conduit à des plis azimuthaux. Nous avons vu que lorsque la compaction est de l'ordre de l'épaisseur de la coque, l'énergie de flexion n'est plus négligeable devant l'énergie d'extension, situation qui est relativement inhabituelle dans les plaques minces. Cet effet a pour conséquence une saturation de la longueur d'onde pour les confinements importants. Nous avons abordé ce problème en nous inspirant des précédents travaux de Jérémy Hure [59]. Il s'agit d'extrapoler les résultats obtenus pour une bande unidimensionnelle comprimée axialement et confinée. Ce cas idéal permet de déterminer la longueur d'onde des plis en fonction de la distribution des contraintes dans une plaque complètement écrasée. Cette approche nous a ainsi permis d'écrire des lois d'échelle décrivant de manière satisfaisante la longueur d'onde et la force de compression de ces coques. Nous nous sommes ensuite penchés sur une situation dans laquelle plis radiaux et orthoradiaux coexistent au sein du même système. Cette configuration est obtenue lorsque la coque présente une ouverture circulaire. Nous avons pu appliquer avec succès le modèle établi afin de décrire l'extension des plis radiaux, ainsi que leur nombre

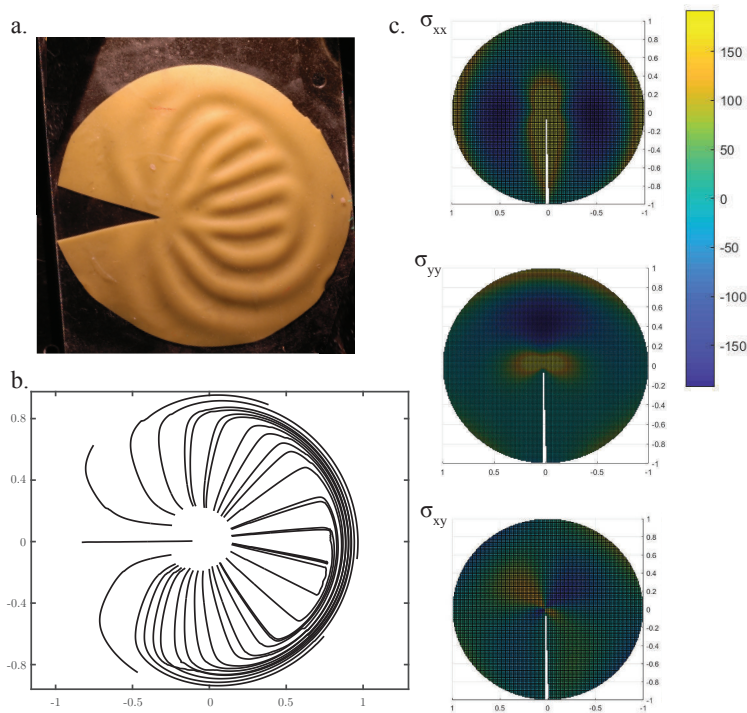


Fig. III.31 a.) Résultat de la résolution numérique de l'équation (III.27), les lignes suivent une direction perpendiculaire à la contrainte la plus compressive. b.) Coque présentant une ouverture radiale après écrasement. Les plis sont qualitativement en accord avec les lignes dessinées au-dessus. c.) Répartition des contraintes dans la coque.

d'onde. Cette expérience nous permet de comprendre que l'orientation des plis est déterminée par la contrainte la plus compressive dans le matériau.

Nous nous sommes enfin intéressés à des situations plus complexes, pour lesquelles nous disposons de moins de résultats. Elles nous permettent néanmoins de vérifier la validité de nos arguments, et d'envisager de futurs développements. Nous avons ainsi écrasé des plaques bosselées, pour lesquelles l'instabilité conduit à des plis azimuthaux s'étendant au-delà de la bosse. Nous avons écrit une loi d'échelle, reposant toujours sur le même modèle, donnant l'évolution de la longueur d'onde en fonction de la position. Une augmentation linéaire de la longueur d'onde avec l'éloignement au centre est un trait général dans ce type de situation. Des expériences complémentaires permettraient néanmoins de confirmer cette tendance dans le cas de profils plus variés. Il reste par ailleurs un certain nombre de questions en suspens. Par exemple, nous n'avons pas d'argument donnant l'extension des plis hors de la bosse. Certes, la contrainte compressive décroît avec l'éloignement, mais en parallèle la longueur d'onde augmente (donc le seuil de flambage diminue). Pourquoi les ondulations n'occupent-elles pas toute la feuille? Si nous disposions de meilleurs moyens d'observations, serions-nous capables de voir les plis s'étendre plus loin que ce que nous croyons? Une autre ques-

tion naturelle concerne l'interaction entre plusieurs bosses, et les motifs de plis que nous pourrions ainsi obtenir. Enfin, nous pourrions faire l'expérience inverse, où au lieu d'écraser une feuille bosselée, nous embosserions une feuille plane (voir photo III.33). Cette expérience conduit à l'apparition de plis radiaux. Elle rappelle la configuration étudiée par Géminard *et. al* dans laquelle une membrane plate est tirée à l'intérieur d'un trou circulaire [65]. Néanmoins, la présence du confinement modifie considérablement la répartition des plis, et nous devrions sans doute pouvoir appliquer le même type d'arguments.

Nous avons cherché à montrer l'utilité de notre méthode pour la détermination de

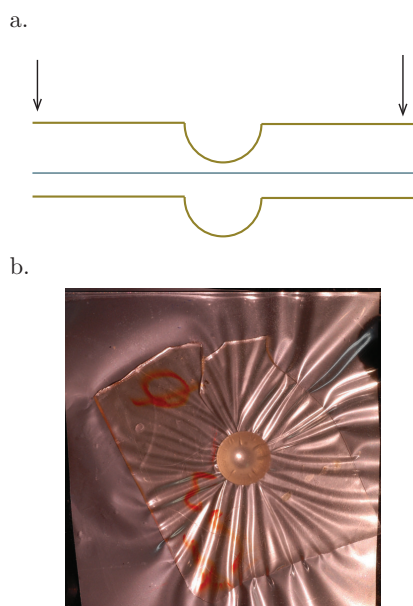


Fig. III.32 *Embossage de plaque a.) Schéma de l'expérience : une plaque est embossée entre un moule et son contre-moule. b.) Expérience : des plis radiaux apparaissent. Peut-on déterminer le nombre d'onde ? L'extension des plis ?*

l'orientation des motifs de plis dans des situations plus complexes. En effet, la seule chose dont nous avons besoin est le champ de contraintes planaires. Ce dernier peut s'obtenir par des méthodes numériques. En regardant alors les valeurs les plus compressives, nous sommes capables de déterminer la géométrie du motif apparaissant. Ces dernières expériences mériteraient également un développement plus approfondi, notamment sur l'aspect numérique, et sa comparaison avec les résultats. Les plis observés suggèrent des lignes de champ dans un problème d'électrostatique. Nos collègues Michael Moshe, Hillel Aharoni et Eran Sharon travaillent actuellement sur cette analogie en lien également avec les défauts dans les cristaux liquides.

Enfin, en plus de leur intérêt scientifique, ces expériences présentent également un caractère esthétique indéniable. Les oeuvres de Dominique Peysson de la série "point singulier" mettent ainsi magnifiquement en scène les motifs de plis que nous avons étudiés.



Fig. III.33 *"Point singulier"* de Dominique Peysson (papier de soie).

Nous allons maintenant nous intéresser à un autre problème dans lequel les contraintes naissent d'une incompatibilité géométrique entre deux objets. Nous allons toutefois y introduire un autre ingrédient : la tension de surface.

Chapitre IV

Lentilles de contact

Avec Maïka Saint-Jean et Marie Tani

Continuons d'examiner les liens entre la géométrie d'un objet et sa forme. Dans le chapitre précédent nous avons étudié les motifs de plis apparaissant lorsqu'une sphère est forcée à adopter une forme plane. Le problème qui va nous intéresser ici, repose lui aussi sur les conséquences du changement de courbure de Gauss d'une calotte sphérique, à la différence près qu'il sera suscité cette fois par de l'adhésion capillaire. Comment est-ce que deux surfaces ayant des courbures de Gauss positives mais différentes peuvent adhérer l'une sur l'autre ? Les porteurs de lentilles de contact sont confrontés à ce problème quotidiennement. Comment une lentille de contact peut-elle tenir en place correctement si sa courbure diffère légèrement de celle de l'oeil qu'elle doit corriger ? Curieusement les lentilles de contact souples ne sont disponibles que pour des calibres discrets autour d'un rayon de courbure de 8.6 mm. Cette question doit donc nécessairement se poser vue la diversité des physiologies humaines. Dans quelle mesure une lentille de rigidité donnée peut-elle s'accomoder à son oeil ?

IV.1 Introduction

IV.1.1 Déformation d'un solide par un liquide : élasto-capillarité

Dans le cas d'une lentille de contact, l'adhésion est due aux forces capillaires exercées par le liquide lacrymal. Mais la tension de surface peut-elle déformer notablement un solide ? Si nous posons une goutte d'eau sur un substrat solide, la composante verticale de la tension de surface tend à pincer le substrat vers la goutte au niveau de la ligne de contact (figure IV.1). La déflexion typique engendrée est d'ordre γ/E , avec γ la tension de surface du liquide ($\gamma = 72 \text{ mN/m}$ pour l'eau) et E le module d'Young du matériau. Une goutte d'eau déposée sur un élastomère tel que le polyvinylsyloxane utilisé dans cette thèse conduit à une déformation de l'ordre de $72 \times 10^{-3} / 250 \times 10^3 \approx 3 \times 10^{-7} \text{ m}$, très difficile à mesurer expérimentalement. Il est impossible d'augmenter de plusieurs ordres de grandeur la valeur de la tension de surface, une solution pour accroître l'effet de la capillarité sur un solide est donc de

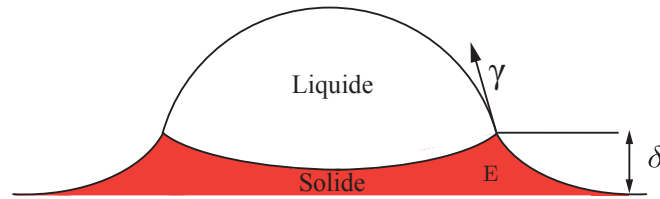


Fig. IV.1 La tension de surface de la goutte provoque une déformation du solide d'ordre $\delta \sim \gamma/E$.

diminuer son module d'Young. L'utilisation de gels extrêmement mous (de module de cisaillement de quelques dizaines de Pa) a ainsi permis l'étude de l'effet des forces capillaires sur les solides. La déformation d'un solide élastique par la ligne triple d'une goutte, par exemple, s'avère un problème étonnamment complexe. Une première mesure expérimentale de cette déformation n'a été produite qu'en 2011, par l'équipe d'Eric Dufresnes à Yale [66]. Ces mesures d'une goutte statique déposée sur un gel mou ont ouvert la voie à de nouvelles expériences en dynamique. La même équipe s'est ainsi penchée sur la durotaxie : en modulant la rigidité locale d'une surface plane, les chercheurs sont capables de provoquer et de contrôler le déplacement des gouttes posées dessus [67] (voir figure IV.2.a). L'équipe de Jacco Snoeijer à Twente [68] a également observé et expliqué un effet dynamique particulier : l'effet Cheerios inverse. L'effet Cheerios, du nom de la marque de céréales, est une interaction attractive entre des particules solides flottant à la surface d'un bain liquide. Ce phénomène, étudié par Dominic Vella et L. Mahadevan [69], est dû à la déformation de l'interface liquide par les particules. Dans le travail de Snoeijer, les rôles sont inversés : une goutte liquide est déposée sur un solide mou. Le rapport γ/E étant de l'ordre de $170 \mu\text{m}$ la tension de surface des gouttes déforme notablement le solide. Deux gouttes interagissent alors *via* ces déformations. Suivant l'épaisseur du substrat, les interactions peuvent être attractives ou répulsives (voir figure IV.2.b).

Plutôt que de modifier les propriétés physiques de l'objet pour rendre les déformations capillaires visibles, il est possible de jouer sur sa géométrie. Les structures élancées, par exemple, ont une rigidité en flexion très faible, si bien que la tension de surface peut éventuellement créer une force suffisante pour les déformer. Considérons une plaque de longueur L , de largeur w et épaisseur h , et un cylindre de rayon ρ . Le cylindre est recouvert d'un liquide de tension de surface γ , mouillant les deux objets. À quelle condition la capillarité permet-elle la flexion de la plaque de sorte qu'elle adhère au cylindre ? Il y a ici une compétition entre l'énergie capillaire, qui favorise l'adhésion, et l'énergie élastique (de flexion), qui s'y oppose. En terme d'énergie, envelopper le cylindre avec la plaque conduit à un gain d'énergie $2\gamma wL$. En contrepartie, donner une courbure $1/\rho$ à la plaque induit un coût d'énergie élastique $BwL/2\rho^2$, où B est le module de flexion de la plaque. L'enrobage spontané sera alors possible si le gain en énergie d'adhésion est supérieur au coût de la déformation élastique, c'est-à-dire si $2\gamma wL > BwL/2\rho^2$, soit si $\rho > \frac{1}{2}\sqrt{B/\gamma}$. Une longueur caractéristique, la

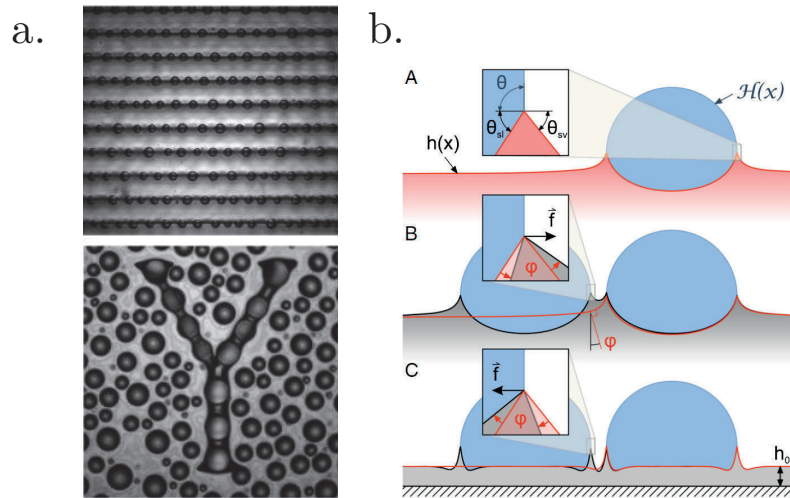


Fig. IV.2 a.) Durotaxie : la rigidité du substrat varie spatialement ce qui provoque le mouvement des gouttes déposées dessus. Suivant la texturation du substrat, différents motifs peuvent être obtenus. Photos tirées de [67]. b.) Une goutte liquide déforme le gel sur lequel elle est déposée. Le profil dépend de l'épaisseur du gel. Lorsque deux gouttes sont déposées côte-à-côte sur le gel, elles interagissent via ces déformations, de manière attractive ou répulsive. Schéma tiré de [68].

longueur élasto-capillaire L_{EC} , comparant la rigidité de flexion à l'adhésion apparaît alors naturellement :

$$L_{EC} = \sqrt{\frac{B}{\gamma}}$$

Lorsque une structure est grande devant L_{EC} , la tension de surface (ou toute autre énergie d'adhésion considérée dans la définition de L_{EC}) pourra la fléchir significativement. L'expérience des "poils mouillés", menée par José Bico et Benoît Roman, illustre élégamment ce concept [70]. Il s'agit d'étudier la montée capillaire d'un liquide entre deux lames flexibles fixées à un bord (voir schéma IV.3.a). À mesure que le liquide monte par capillarité entre les deux lames, celles-ci se trouvent de plus en plus courbées. Lorsque le coût en énergie de flexion devient plus grand que le gain d'énergie capillaire, la progression cesse. La structure hiérarchique des "poils mouillés" est finalement obtenue en assemblant successivement des mèches de plus en plus grandes (voir figure IV.3.b).

Un autre ingrédient peut être ajouté à ces idées : la courbure de Gauss. Au lieu de coller par capillarité une feuille sur un cylindre, Jeremy Hure a cherché à faire adhérer une feuille et une sphère, introduisant ainsi une différence de courbure de Gauss entre les deux objets à mettre en contact [71]. L'expérience consiste à déposer sur un hémisphère de polystyrène mouillé d'éthanol une feuille de polypropylène. L'éthanol mouille ces deux matériaux. La question est alors de savoir si la feuille peut recouvrir la sphère. Si la feuille a la taille d'un confetti, alors la coller sur une grosse boule

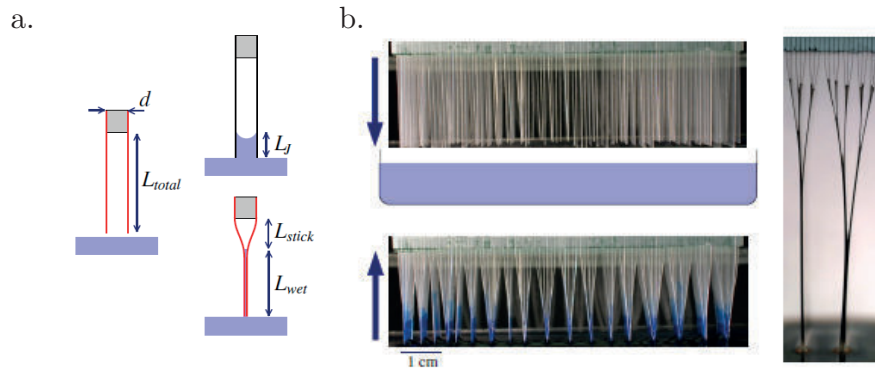


Fig. IV.3 a.) Montée capillaire entre deux lames flexibles. b.) Structure hiérarchique obtenue lors du retrait d'une brosse de lames souples d'un bain de liquide mouillant [70].

de Noël ne posera aucun problème. En revanche, lorsque la feuille est suffisamment grande, elle ne peut adhérer totalement à la sphère et délamine en certains endroits, faisant apparaître des motifs oscillants ramifiés (voir photo IV.4). La largeur typique de la zone d'adhésion dépend des caractéristiques de la feuille, du rayon de la sphère et du liquide employé. Cette instabilité est une conséquence du théorème de Gauss : pour épouser la forme sphérique, la feuille de polymère doit être localement étirée ou comprimée. L'énergie élastique occasionnée par une telle transformation doit être comparée à l'énergie d'adhésion et conduit ainsi à une taille caractéristique (différente de L_{EC}) qui est la taille maximale que l'on peut coller sur une sphère.

Dans ce chapitre, nous allons chercher à étendre ce problème en nous intéressant au collage par capillarité d'une calotte sphérique sur un hémisphère de rayon différent.

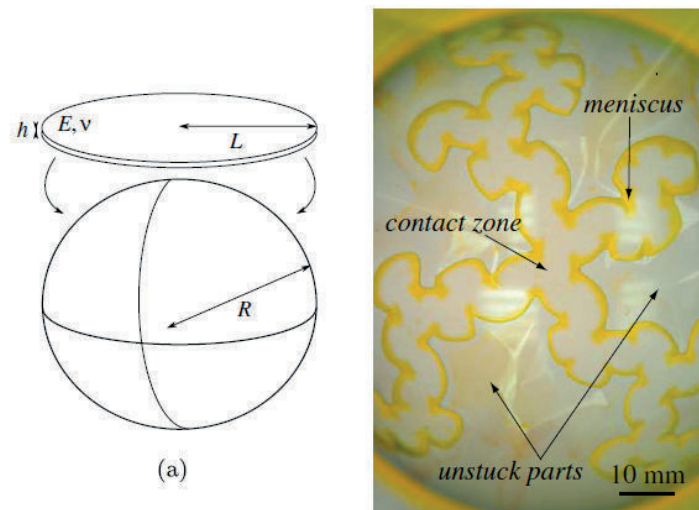


Fig. IV.4 Enroulage d'une boule par une feuille. Lorsque la feuille dépasse une certaine taille, l'adhésion totale n'est plus possible et des motifs ramifiés apparaissent [71].

Quelle taille maximale de coque pouvons nous coller sur une sphère donnée en fonction de la différence entre leurs rayons ? Quels sont les motifs observés et quels mécanismes les gouvernent ? Nous tâcherons de répondre à ces questions.

IV.1.2 Expériences préliminaires

Intéressons-nous à l'adhésion d'une calotte sphérique élastique de PVS, de rayon ρ , sur un hémisphère solide, adhésif et de rayon R , avec $R \neq \rho$ (voir schéma figure IV.5.a). L'hémisphère solide, en polystyrène, est recouvert d'éthanol (de tension de surface $\gamma = 22 \text{ mN/m}$, et mouillant ces deux matériaux) dans lequel du bleu de méthylène est dissout afin de faciliter l'observation. Les zones de contact apparaissent donc bleu clair, tandis que les bords ont une couleur bleue foncée à cause du ménisque. Selon la taille de la calotte et la différence de rayons, différents motifs peuvent être observés. Lorsque la coque est suffisamment petite, elle adhère totalement à l'hémisphère (photos de gauche sur les deux lignes de la figure IV.5.b). Lorsque la coque est plus grande, en revanche, des motifs ramifiés apparaissent. Ceux-ci présentent des morphologies très différentes suivant que la calotte est collée à l'extérieur ou à l'intérieur de l'hémisphère (première et deuxième ligne respectivement de la figure IV.5.b.) et suivant que $R > \rho$ (deuxième photo dans chaque colonne) ou $R < \rho$ (troisième photo).

Nous commencerons ce chapitre en discutant la taille maximale d'adhésion de la coque en fonction des différences de rayon et nous établirons une loi qui généralise les travaux de Hure [71]. Nous présenterons ensuite un diagramme de configurations complet des formes observées, prenant en compte les effets relatifs de la flexion et de l'extension par rapport à l'adhésion, et tâcherons d'en donner quelques interprétations. Enfin, nous nous pencherons sur les effets de flexion et leur influence sur la taille maximale d'adhésion.

IV.2 Une sphère sur une sphère

Nous observons expérimentalement que pour une différence de courbure donnée, il existe une taille critique de calotte sphérique en dessous de laquelle l'adhésion est parfaite. Quels sont les paramètres physiques qui dictent cette taille ?

IV.2.1 Taille maximale de collage : expériences

L'expérience consiste à déposer une calotte sphérique élastique de rayon de courbure ρ sur un hémisphère de rayon R mouillé d'éthanol. L'épaisseur h de la coque varie entre 200 et 800 μm , son module d'Young E entre 1 MPa et 750 kPa, et $2.5 \text{ cm} < R, \rho < 10 \text{ cm}$. Nous diminuons a , le rayon de la base de la coque, jusqu'à ce que l'adhésion avec la sphère soit totale. Cette taille, que nous appellerons a_{max} , correspond à la taille maximale d'adhésion pour les paramètres (t, R, ρ, E) . a_{max} est mesuré à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère (voir schéma IV.6), avec une incertitude que nous estimons à 2 mm, liée à l'ambiguïté dans la détermination du seuil de délamination. Nous faisons

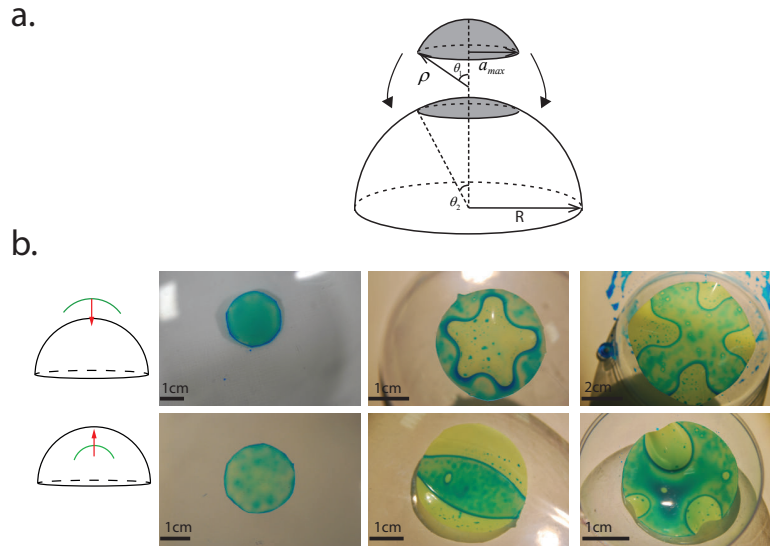


Fig. IV.5 a.) Schéma de l'expérience. b.) Exemples (non exhaustifs) de motifs de collage. Ligne du haut : la coque est déposée à l'extérieur de l'hémisphère solide. Ligne du bas : la coque est déposée à l'intérieur de l'hémisphère solide. De gauche à droite : adhésion totale, cas $R > \rho$, cas $R < \rho$.

varier tous les paramètres et reportons les résultats dans le graphique IV.7 en fonction du rapport des rayons. Les tailles maximales à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère sont similaires pour la plupart des points.

a_{max} commence par augmenter avec R/ρ : plus R/ρ est proche de 1, moins l'incompatibilité entre les deux surfaces est grande, d'où l'augmentation de a_{max} . Pour $R/\rho = 1$ les deux surfaces sont compatibles, il n'y a donc pas de problème d'adhésion et a_{max} tend à diverger. Enfin a_{max} diminue à mesure que la calotte devient plate par rapport à la sphère, et semble atteindre une valeur constante pour les grands R/ρ .

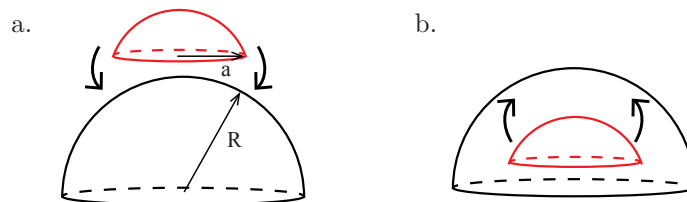


Fig. IV.6 La calotte est déposée à l'extérieur et à l'intérieur de l'hémisphère.

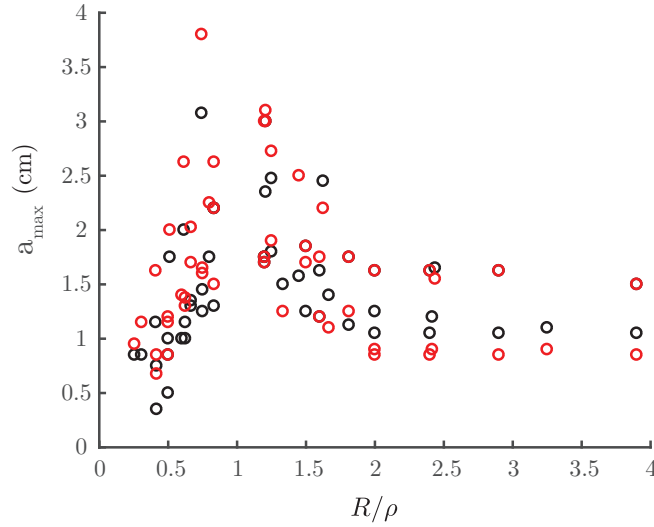


Fig. IV.7 Taille maximale de collage en fonction de R/ρ . Les données noires correspondent à un collage à l'extérieur de la sphère, les rouges à un collage à l'intérieur. Des calottes de modules d'Young $E = 750$ kPa et 1 MPa ont été collées ; leur épaisseur varie entre $200 \mu\text{m}$ et $800 \mu\text{m}$, suivant leur rayon. Le rayon R varie entre 2.5 cm et 10 cm, $\gamma = 22$ mN/m.

IV.2.2 Loi d'échelle pour le collage

En comparant les différentes énergies en jeu, déterminons une loi d'échelle pour la taille maximale d'adhésion. L'énergie capillaire est le moteur de l'adhésion. Elle est proportionnelle à γa^2 . D'autre part, l'énergie élastique, somme des énergies de flexion et d'extension, s'oppose au changement de courbure (l'énergie de flexion s'oppose au changement de courbure moyenne, l'énergie d'extension au changement de courbure de Gauss), et s'oppose donc au collage. L'énergie de flexion s'écrit : $E_{flex} \sim B \Delta C^2 a^2$, avec $\Delta C = (1/R - 1/\rho)$ la différence de courbure entre la sphère et la coque [72]. Nous supposons ici l'énergie de flexion négligeable devant l'énergie d'adhésion. Cette hypothèse se traduit par $\Delta C L_{EC} \ll 1$, qui est vérifié expérimentalement puisque $1/(\Delta C L_{EC}) > 30$ pour tous les cas testés. a_{max} est donc fixé par une compétition entre l'énergie d'étirement et l'énergie capillaire. En loi d'échelle, l'énergie d'extension s'exprime : $\mathcal{E}_{ex} \sim E h \epsilon^2 a^2$. Il nous reste donc à déterminer la déformation typique ϵ induite par le collage d'une calotte de rayon ρ et de base a sur une sphère de rayon R , telles que $\rho < R$. Cette transformation induit en effet une extension orthoradiale. Pour l'estimer en loi d'échelle, supposons que les rayons gardent leurs longueurs, tandis que les périmètres sont étirés. Soient θ_1 et θ_2 les angles des latitudes avant et après collage, respectivement (voir schéma IV.8). Alors, les rayons des bases s'écrivent $\rho \sin(\theta_1)$ et $R \sin(\theta_2)$, respectivement. La conservation de la longueur des rayons impose que $\rho \theta_1 = R \theta_2$. Nous pouvons donc écrire la déformation orthoradiale :

$$\epsilon \sim \frac{R \sin \theta_2 - \rho \sin \theta_1}{\rho \sin \theta_1} \sim \left(\frac{R^2}{\rho^2} - 1 \right) \frac{a^2}{R^2}$$

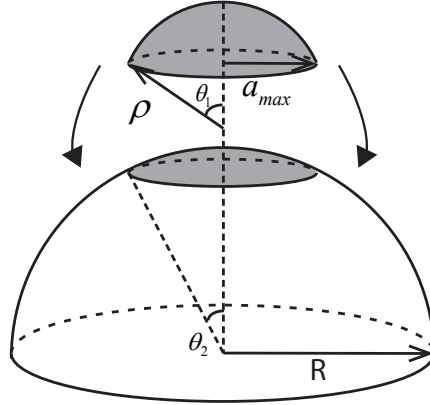


Fig. IV.8 Une calotte élastique sphérique de rayon ρ est déposée sur une sphère rigide, mouillée d'éthanol, de rayon R avec $\rho < R$.

Finalement, $a = a_{max}$ lorsque l'énergie d'adhésion : γa_{max}^2 est égale à l'énergie d'extension : $Eh\epsilon^2 a_{max}^2$, ce qui conduit à :

$$a_{max} \sim R \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{\rho^2} - 1}}$$

Une estimation réalisée avec l'hypothèse limite opposée (extension orthoradiale nulle et compression radiale) conduirait à la même loi d'échelle. D'autre part, si nous nous plaçons dans la situation inverse, $\rho > R$, le même calcul conduit à :

$$a_{max} \sim R \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{\rho^2}}}$$

Si bien que l'expression générale de a_{max} peut se mettre sous la forme :

$$a_{max} \sim R \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{R^2}{\rho^2} - 1 \right|}} \quad (\text{IV.1})$$

Dans la limite où $\rho \rightarrow \infty$, nous retrouvons logiquement la loi d'échelle obtenue par Hure *et al.* pour une feuille déposée sur une boule [59].

IV.2.3 Taille maximale : calcul complet

Calculons l'énergie du collage d'une calotte sur un hémisphère. Commençons avec l'énergie élastique liée à la déformation d'une coque de rayon ρ , de base a et d'épaisseur h , que l'on colle sur un hémisphère de rayon R présentant une énergie d'adhésion par unité de surface γ . Supposons $\rho < R$. À l'équilibre, l'énergie élastique est constituée d'un premier terme lié à la flexion et d'un autre lié à l'extension :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_f + \mathcal{E}_{ex}$$

Dans la limite où a est petit devant R et devant ρ , nous approximations les profils sphériques par des paraboles : $w(r) \sim -r^2/2R$ et $\xi(r) \sim -r^2/2\rho$. L'énergie de flexion vaut :

$$\mathcal{E}_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right)^2 \pi a^2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \Delta C^2 \pi a^2$$

Cette expression est obtenue à partir de l'équation (I.36).

Pour calculer l'énergie d'extension, nous devons connaître les déformations dans le plan du disque. Il s'agit une fois de plus d'un problème de Lamé. Les déformations radiales et azimuthales sont liées au déplacement radial u et aux deux profils par :

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}w'^2 - \frac{1}{2}\xi'^2 = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2}r^2 \Delta \mathcal{K} \\ \epsilon_\theta &= u/r \end{aligned}$$

Avec $\Delta \mathcal{K} = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}$ est la différence de courbure de Gauss.

En écrivant ensuite l'équilibre mécanique dans le plan (I.23) :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}$$

(III.11), couplé aux relations d'Hooke (I.3), nous obtenons l'équation différentielle :

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = (3-\nu) \frac{1}{2} r \Delta \mathcal{K}$$

Avec les conditions aux limites : $u(0) = 0$ (par symétrie), $\sigma_r(a) = 0$ (nous négligeons la tension exercée par la tension de surface), la solution de cette équation est :

$$u(r) = \frac{1}{16} \left(-(1-\nu)ra^2 + (3-\nu)r^3 \right) \Delta \mathcal{K}$$

Les déformations radiales valent donc :

$$\epsilon_r = \left(-(1-\nu)a^2 + (1-3\nu)r^2 \right) \frac{\Delta \mathcal{K}}{16}$$

Et les contraintes radiales :

$$\sigma_r = E \left(r^2 - a^2 \right) \frac{\Delta \mathcal{K}}{16}$$

Les contraintes et les déformations radiales sont compressives.

L'énergie d'extension vaut alors :

$$\mathcal{E}_{ex} = \int_0^a 2\pi r \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} dr = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^a 2\pi r (\epsilon_r^2 + 2\nu\epsilon_r\epsilon_\theta + \epsilon_\theta^2) dr$$

Pour finalement obtenir l'énergie élastique totale :

$$\mathcal{E}_{tot} = \frac{\pi}{128} Eha^6 \Delta \mathcal{K}^2 + \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \Delta C^2 \pi a^2 - 2\gamma\pi a^2 \quad (\text{IV.2})$$

Nous minimisons ensuite l'énergie (IV.2) par rapport à a afin de trouver la taille critique de collage :

$$a_{max} = \left(\frac{\gamma}{Eh} \frac{1}{\Delta\mathcal{K}^2} \right)^{1/4} \left(256 - 128(1 + \nu)(L_{EC}\Delta C)^2 \right)^{1/4}$$

Choisir $\rho > R$ conduit au même résultat, que nous pouvons réécrire dans le cas général :

$$a_{max} = R \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{R^2}{\rho^2} - 1 \right|}} \left(256 - 128(1 + \nu)(L_{EC}\Delta C)^2 \right)^{1/4} \quad (\text{IV.3})$$

Dans nos expériences le terme $L_{EC}\Delta C$ est petit. Nous pouvons donc négliger $128(1 + \nu)(L_{EC}\Delta C)^2$ dans l'expression de a_{max} (IV.3), ce qui nous conduit à :

$$a_{max} \approx 4R \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{R^2}{\rho^2} - 1 \right|}}$$

Nous retrouvons donc bien la loi d'échelle (IV.1) dans le cas où $L_{EC}\Delta C \ll 1$.

Ce résultat peut également être obtenu par une méthode variationnelle, comme l'ont fait Majidi *et al.* dans le cas d'un plan adhérent sur une sphère [73].

Notons enfin que cette expression généralise celle obtenue par Hure *et. al* dans [71].

IV.2.4 Retour aux expériences

Nous reprenons les données de la figure IV.7, et nous normalisons a_{max} par $R \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4}$ (loi d'échelle (IV.1)). Les données se superposent et suivent une loi $y = 3.5/\sqrt{(|1 - x^2|)}$, en bon accord avec nos prédictions (voir figure IV.9) ; la légère différence de préfacteur peut être liée à des effets de friction résiduelle. Nous comprenons donc le critère de collage total. Intéressons-nous maintenant à ce qu'il se passe lorsque l'on essaie de coller des coques plus grandes que a_{max} .

IV.3 Au-delà de la taille critique

Comme nous pouvons le voir sur la figure IV.5, les calottes plus grandes que a_{max} présentent des motifs d'adhésion divers et complexes. Trois types d'énergie sont en jeu dans ce problème, nous pouvons donc imaginer que les différentes configurations seront décrites par au moins deux nombres adimensionnés. Un choix possible est la paire a/a_{max} , et $1/(\Delta CL_{EC})$, avec $a_{max} = 3.5R \left(\frac{\gamma}{Eh} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{R^2}{\rho^2} - 1 \right|}}$, conformément à nos expériences. Le rapport a/a_{max} compare l'étirement à la capillarité, tandis que $1/(\Delta CL_{EC})$ compare la flexion à la capillarité. Remarquons que, comme $\Delta C = 1/R - 1/\rho$, $1/(\Delta CL_{EC})$ peut être positif ou négatif suivant les valeurs de R et ρ .

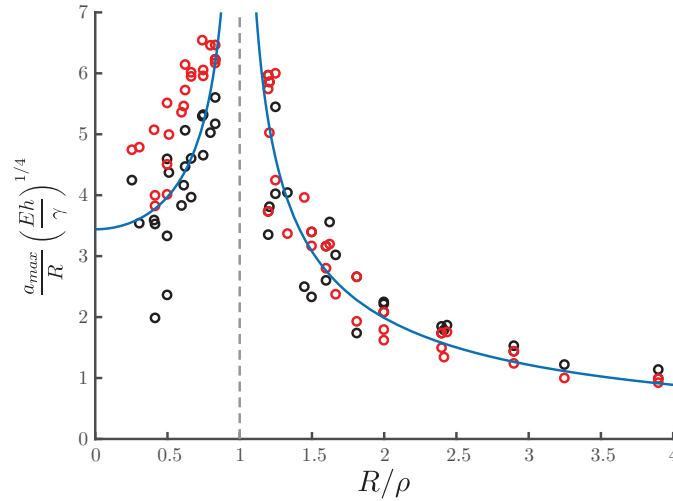


Fig. IV.9 $a_{max}/R \left(\frac{\gamma}{Eh}\right)^{1/4}$ en fonction de R/ρ . Les données sont bien modélisées par une fonction : $y = 3.5/\sqrt{|1-x^2|}$. Les points rouges sont pour un collage intérieur, les points noirs un collage extérieur.

IV.3.1 Diagramme de configuration : Collage extérieur

Nous reportons sur le diagramme de phase IV.10 les différents motifs instables observés lorsque la coque élastique est déposée à l'extérieur de l'hémisphère. Pour $a < a_{max}$ le contact entre la calotte élastique et l'hémisphère rigide est total quelle que soit la valeur de $1/(\Delta CL_{EC})$ (cas 1). Pour les autres motifs, nous distinguons deux régions suivant la différence de courbure entre la coque et l'hémisphère.

a) Calotte moins courbée que l'hémisphère : $L_{EC}\Delta C > 0$

Pour une calotte moins courbée que l'hémisphère adhésive, partons de $a = a_{max}$. La calotte est alors entièrement en contact avec la sphère. Augmenter a/a_{max} conduit donc à un décollement partiel. Nous observons trois cas de figure en fonction de la rigidité en flexion relative de la calotte, $1/(L_{EC}\Delta C)$.

Pour les fortes valeurs de $1/(L_{EC}\Delta C)$, nous observons un décollement des bords la calotte, conduisant à des motifs de collage branchés (motif 2). La taille de la partie centrale est approximativement donnée par a_{max} . Le motif de collage évolue vers une bande rectiligne lorsque la rigidité en flexion de la calotte augmente (valeur plus faible de $1/(L_{EC}\Delta C)$). La calotte a ainsi fléchi le long de cette bande (motif 3), dont la largeur reste de l'ordre de a_{max} . Enfin, si la diminution de $1/(L_{EC}\Delta C)$ se poursuit, la rigidité de la coque devient trop importante et l'adhésion ne se fait plus que selon un disque (motif 4).

Comment déterminer le passage d'un motif à un autre? En se courbant le long de la sphère, la calotte augmente son aire de contact. L'énergie d'adhésion est alors

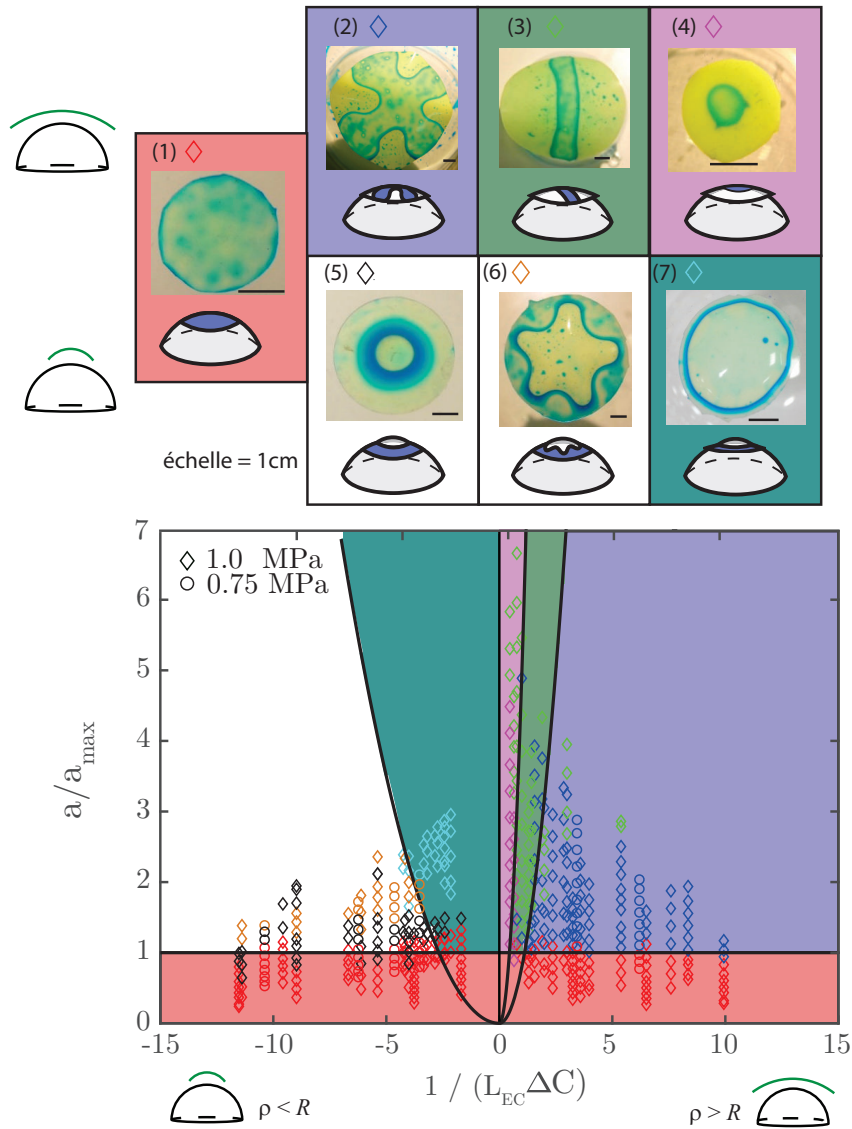


Fig. IV.10 Diagramme de configurations pour une calotte collée à l'extérieur d'une sphère rigide. Les symboles correspondent aux configurations illustrées regroupées en différentes zones de couleur. Les frontières entre les régions sont discutées dans le texte.

de l'ordre de $\gamma a_{max} a$. Le coût de cette flexion est cependant de l'ordre de $B\Delta C^2 a^2$. L'équilibre entre ces deux énergies conduit à une transition de la forme en disque (motif 4) vers la bande (motif 3) pour $a/a_{max} = c_1/(L_{EC}\Delta C)^2$. Ce critère décrit correctement les données expérimentales en prenant $c_1 = 5 \pm 1$.

La transition entre les motifs 2 et 3 correspond à un degré de liberté supplémentaire pour la courbure. Nous attendons donc une transition décrite par la même loi d'échelle avec un préfacteur c_2 inférieur à c_1 . Nous estimons expérimentalement $c_2 = 0.8 \pm 0.2$.

b) Calotte plus courbée que l'hémisphère : $L_{EC}\Delta C < 0$

Dans le cas où $\rho < R$, lorsque a devient plus grand que a_{max} la zone centrale de la calotte se décolle et une petite bulle d'air apparaît (motif 5). Suivant la valeur de a et de $1/(\Delta C L_{EC})$, la zone de contact est d'ordre a_{max} (motif 5) ou alors n'a lieu que le long d'un ménisque (motif 7). Ce dernier cas n'implique donc pas d'énergie d'étirement, la calotte n'ayant qu'un contact linéique avec l'hémisphère, le passage du motif 5 au motif 7 advient donc lorsque l'énergie de flexion devient du même ordre que l'énergie capillaire. La frontière marquant ces deux régions est donc à nouveau : $a/a_{max} \sim 1/(L_{EC}\Delta C)^2$ avec un préfacteur de 0.14 ± 0.1 . Dans certains cas, le dôme circulaire laisse place à une forme d'étoile (motif 6). Ces formes d'étoiles ne sont obtenues que pour $1/(L_{EC}\Delta C) < -1$. Suivant la valeur de a , l'étoile peut avoir entre 3 et 8 branches.

IV.3.2 Collage interne

Reprenons la même étude lorsque la coque est collée à l'intérieur de l'hémisphère, les résultats sont présentés en figure IV.11. Tout comme dans le cas précédent, des motifs d'instabilités apparaissent lorsque a dépasse a_{max} . Séparons à nouveau la description suivant le signe de ΔC .

a) Calotte moins courbée que l'hémisphère : $L_{EC}\Delta C > 0$

Pour une coque moins courbée que l'hémisphère $\rho > R$, augmentons a/a_{max} en partant de $a = a_{max}$. Pour de petites valeurs de $1/L_{EC}\Delta C$, l'adhésion totale n'est plus possible et la capillarité n'est pas assez forte pour fléchir suffisamment la coque. Le contact ne se fait plus que sur les bords de la coque, tandis que la zone centrale ne touche plus la sphère rigide. Une bulle se positionne alors au sommet de la calotte (un trou de diamètre de l'ordre de 0.5 mm a été percé au centre de la calotte afin d'éviter d'éventuels effets ventouse) (cas III). Depuis cette zone, en augmentant a , ou $1/L_{EC}\Delta C$ nous atteignons le cas II, motif pour lequel la coque et la sphère ont de grandes zones de contact, mais qui présente des cloques. Il est à noter que la géométrie de ce contact est très différente du cas (2) pour le collage extérieur.

b) Calotte plus courbée que l'hémisphère : $L_{EC}\Delta C < 0$

Lorsque $\rho < R$, la calotte décolle par l'un de ses côtés lorsque $a > a_{max}$ (cas (IV)), jusqu'à adhérer seulement suivant une bande centrale séparant deux zones décollées.

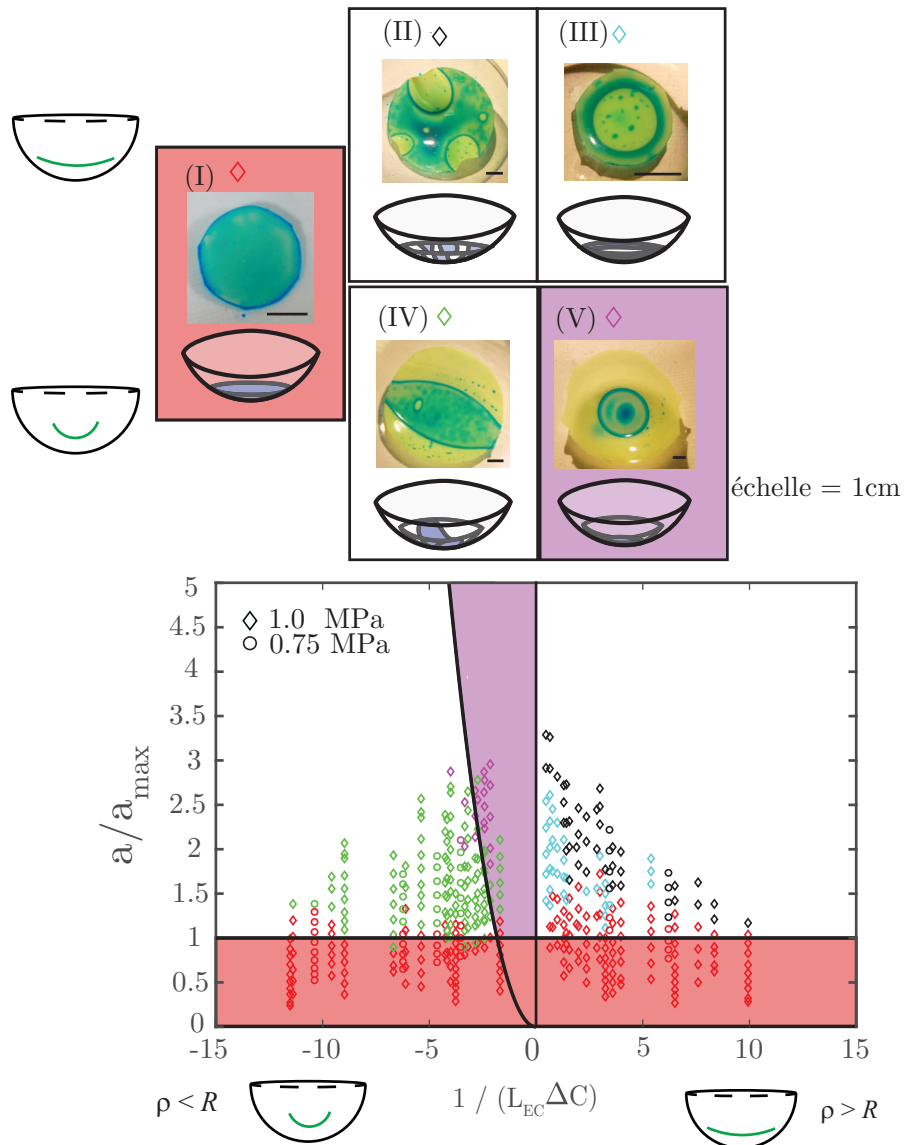


Fig. IV.11 Diagramme de configurations pour une calotte collée à l'intérieur d'une sphère rigide. Les symboles correspondent aux configurations illustrées regroupées en différentes zones de couleur. Les frontières entre ces régions sont discutées dans le texte.

Pour de plus grands a et $1/(L_{EC}\Delta C)$, quand la capillarité n'est pas suffisante pour étirer ou fléchir la coque, l'adhésion ne se produit plus que suivant une petite zone centrale circulaire (cas V). La transition entre les cas IV et V survient lorsque les énergies de flexion et d'adhésion deviennent du même ordre : $\gamma a_{max}a \sim B\Delta C^2 a^2$, conduisant une fois de plus à la loi d'échelle : $a/a_{max} \sim (1/L_{EC}\Delta C)^2$, qui, avec un préfacteur de 0.3 s'accorde bien à nos résultats.

Pour conclure, a/a_{max} et $1/\Delta CL_{EC}$ semblent être les bons paramètres, qui nous permettent de classer les différents motifs observés sur un diagramme de configuration complet. Notre approche demeure néanmoins très expérimentale et les transitions sont parfois décrites de manière qualitative. Nous espérons cependant que notre travail stimulera des études numériques du problème, plus à même de développer des critères quantitatifs. Pour terminer ce chapitre, penchons nous sur les effets de flexion.

IV.4 Formation de cloques sur un substrat courbé

Nous avons vu que les motifs partiellement collés différaient suivant que nous nous trouvions à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère. D'autre part, si la taille maximale de collage est la même dans la plupart des cas examinés, nous observons expérimentalement que la différence de a_{max} entre l'intérieur et l'extérieur devient plus prononcée à mesure que l'épaisseur de l'objet collant sur l'hémisphère augmente (que ce soit un disque, comme dans l'expérience de Hure *et al.* [71], ou une coque). Nous représentons dans la figure IV.12, dans le cas d'un plan adhérent sur un hémisphère de rayon R , la taille maximale d'adhésion interne et externe en fonction de la loi d'échelle $R(\frac{\gamma}{Eh})^{1/4}$ ((IV.1) adaptée à la situation d'un plan). Si pour les plus grandes valeurs de $R(\frac{\gamma}{Eh})^{1/4}$ la différence entre intérieur et extérieur est minime, elle semble augmenter lorsque $R(\frac{\gamma}{Eh})^{1/4}$ diminue. De façon similaire pour les coques, la différence entre intérieur et extérieur est d'autant plus prononcée que l'épaisseur de la coque est grande. Pourtant, pour une surface hémisphérique, la valeur de la courbure de Gauss ne dépend pas du fait que nous soyons "à l'intérieur" ou "à l'extérieur" de la sphère. Comment alors expliquer cette distinction ? Une piste possible est la formation de cloques. En effet l'adhésion partielle d'une feuille à l'extérieur ou à l'intérieur d'une coque met en jeu l'apparition de cloques orthoradiales qui brisent l'axisymétrie. La forme de ces cloques semble dépendre du signe de la courbure moyenne de la surface, ce qui pourrait entraîner des critères de décollement différents. Nous nous proposons donc d'étudier l'influence de la courbure du substrat dans un cas unidimensionnel simple : celui d'une cloque apparaissant sur une bande flexible comprimée.

IV.4.1 Cloque unidimensionnelle

L'expérience consiste à coller une bande de polypropylène de longueur $L > L_{EC}$ à l'intérieur, ou à l'extérieur d'un cylindre de rayon R mouillé d'éthanol. La bande est ensuite soumise à un déplacement axial de $\frac{\Delta L}{2}$ à chaque extrémité (voir schéma IV.13.a). La cloque ainsi créée a une forme qui dépend du côté du cylindre où elle se

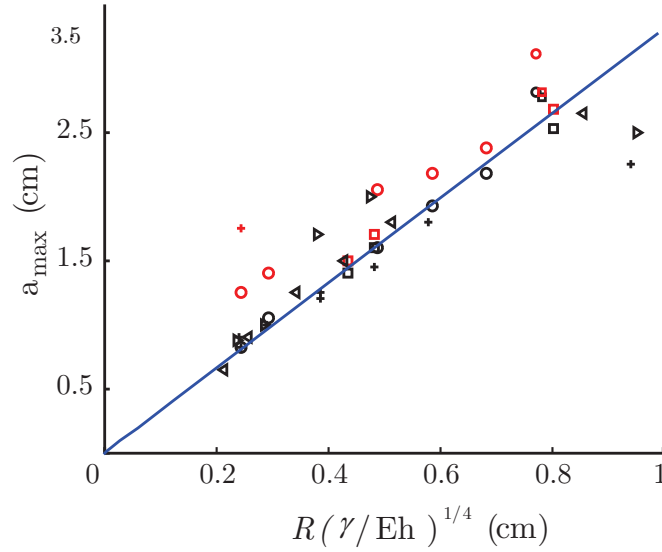


Fig. IV.12 a_{max} en fonction de $R(\gamma/Eh)$ dans le cas où l'objet collé sur l'hémisphère est plan (expérience de Hure et al. [71]). En rouge collage à l'intérieur de la sphère, noir à l'extérieur. Lorsque la plaque devient plus épaisse ($R(\frac{\gamma}{Eh})^{1/4}$ petit) la différence entre ces deux situations s'accroît.

trouve, comme on peut le voir sur la photo de la figure IV.13.b. Avant d'étudier l'effet de la courbure, commençons par traiter le cas d'une cloque 1D sur un substrat plat.

a) Substrat plat

Nous considérons pour commencer une bande de longueur L et d'épaisseur h , collée sur un substrat plat par la tension de surface de l'éthanol et soumise à ses extrémités à un déplacement axial $u_x(\pm L/2) = \pm \Delta/2$. Soit $w(x)$ sa déflexion. Nous supposons le problème invariant dans la direction y de la largeur de la bande, ainsi que l'absence de déformation dans cette direction : $\epsilon_{yy} = 0$. La déflexion de la languette suit l'équation de l'*Elastica*, et nous avons vu dans le premier chapitre I que la forme de la cloque s'écrivait (éq (I.17)) :

$$w(x) = \frac{A}{2} (1 + \cos(kx))$$

avec $k = 3\pi \frac{2}{L}$.

La cloque est donc de forme sinusoïdale. Cependant, si Δ est imposé, deux longueurs A et L caractérisent la cloque. La conservation des longueurs relie géométriquement A et L , qui sont différentes pour des tailles de cloques différentes. Il reste donc un degré de liberté à déterminer pour fermer le problème. Il est par exemple clair sur les photos de la figure IV.13 qu'il existe un saut de courbure au point de décollement. L'amplitude de ce dernier dépend d'un équilibre entre capillarité et flexion que nous décrivons à présent.

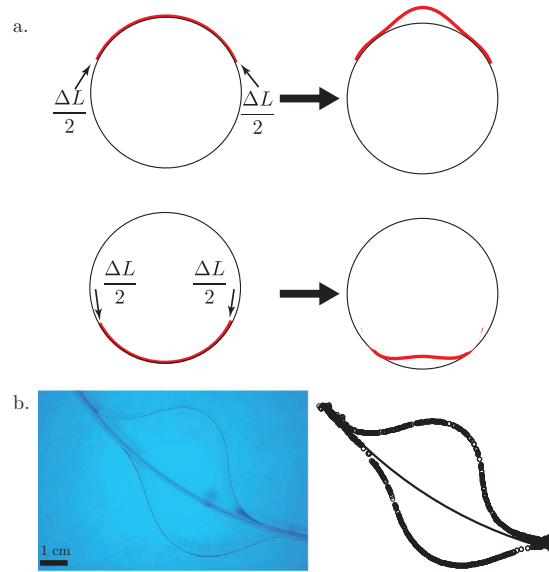


Fig. IV.13 a.) Schéma de l'expérience : une cloque est formée à l'intérieur ou à l'extérieur d'un cylindre. b.) Différence d'apparence suivant que la cloque est à l'intérieur ou à l'extérieur du cylindre (photo et profil extrait).

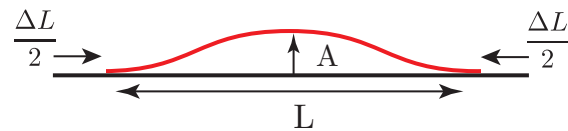


Fig. IV.14 Cloque sur un substrat plat.

Saut de courbure en loi d'échelle

Le ménisque exerce un couple sur la languette qui a ainsi pour effet de la courber. Nous allons estimer cette courbure, nous ne considérons pas la bande en entier (comme cela a été fait pour déterminer la forme de la cloque), nous "zoomons" sur la partie au niveau du ménisque. Un simple calcul en loi d'échelle nous permet d'estimer le saut de courbure $1/\rho$ en examinant le ménisque capillaire au point de décollement. Supposons que l'adhésion de la bande, de largeur W , sur le substrat mette en jeu un ménisque de longueur ℓ et une hauteur $t \sim \ell^2/\rho$ (figure IV.15). La pression de Laplace à l'intérieur du ménisque est donnée en loi d'échelle par $p \sim \gamma/t$. Cette pression exerce sur la bande un moment d'ordre : $M \sim p \times \ell \times \ell \times W \sim \gamma\rho W$ qui, curieusement, est indépendant de la taille du ménisque (qui peut être aussi petit qu'on le désire). L'équilibre avec le rappel élastique $M \sim W \frac{B}{\rho}$ conduit ainsi à : $\frac{1}{\rho} \sim \sqrt{B/\rho} \sim 1/L_{EC}$

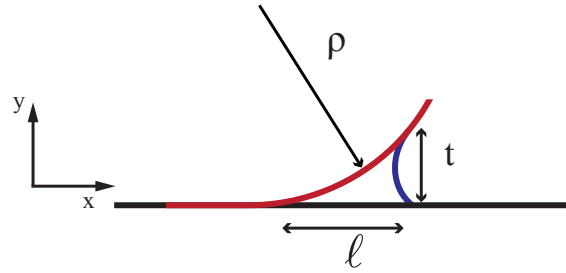


Fig. IV.15 La pression de Laplace au niveau du ménisque exerce un couple sur la bande, lui donnant ainsi une courbure.

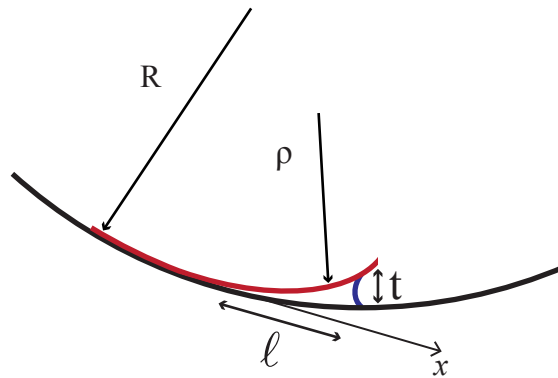


Fig. IV.16 Cloque sur un substrat courbé

b) Cloque sur un substrat courbé

Saut de courbure : calcul complet

Nous pouvons déterminer le saut de courbure à partir de l'équation de l'*Elastica*. Dans la mesure où nous nous focalisons sur la zone où la bande commence tout juste à décoller (au niveau du ménisque), la force de compression exercée aux extrémités crée un moment négligeable comparé à celui due à la pression de Laplace. L'*Elastica* linéarisée (I.10) s'écrit donc ici :

$$Bw^{(3)} + R = 0 \quad (\text{IV.4})$$

L'équilibre mécanique lie la force R à la pression de Laplace p :

$$\frac{dR}{dS} = p$$

Les conditions aux limites sur le substrat courbé s'écrivent : $w(0) = w'(0) = 0$, $w''(0) = 1/R$. L'intégration de l'*Elastica* linéarisée (IV.4) conduit donc à :

$$Bw + p \left(\frac{x^4}{24} - \ell \frac{x^3}{6} \right) = \frac{B}{2R} x^2 \quad (\text{IV.5})$$

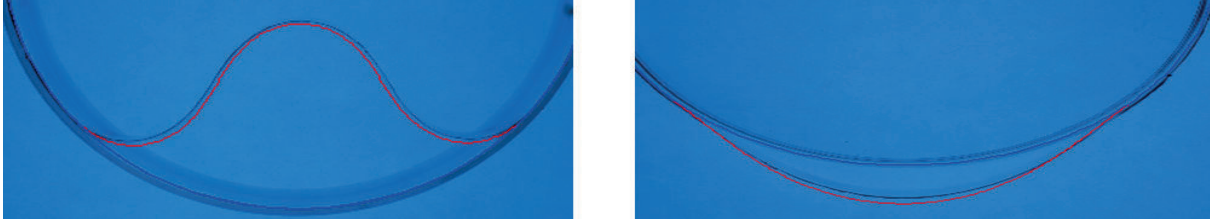


Fig. IV.17 En rouge, les résultats de la résolution de l'*Elastica* avec les sauts de courbure comme conditions aux limites. Les profils numériques se superposent bien aux profils expérimentaux.

Nous déterminons une expression de la pression de Laplace en utilisant le fait que $p = \frac{2\gamma}{t}$, avec $t = w(\ell) - \frac{\ell^2}{2R}$ (voir schéma IV.16) :

$$p = \frac{4}{\ell^2} \sqrt{B\gamma} \quad (\text{IV.6})$$

Finalement, nous écrivons w'' en ℓ en exprimant la pression (IV.6) dans l'équation (IV.5) pour obtenir :

$$w''(\ell) = \frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{R} + 2\sqrt{\frac{\gamma}{B}} \right) \quad (\text{IV.7})$$

Nous pouvons finalement réécrire (IV.7) de façon à faire apparaître le saut de courbure :

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = 2\sqrt{\frac{\gamma}{B}} \quad (\text{IV.8})$$

Cette dernière équation (IV.8) nous montre que la courbure de décollement de la cloque dépend de la courbure du substrat. Nous observons ainsi des languettes plus courbées lorsqu'elles sont à l'intérieur de la courbure qu'à l'extérieur. Cette différence au niveau du "décolage" de la cloque est très visible sur les photos de la figure IV.13.

Nous mettons donc en lumière une différence entre une cloque formée à l'intérieur et à l'extérieur d'un substrat courbé. Afin de vérifier que ce saut de courbure est bien le paramètre à prendre en compte pour expliquer la différence de morphologie entre les deux cloques, nous résolvons numériquement l'*Elastica* en tenant compte de ces conditions aux limites. Nous comparons ensuite les profils numériques (en rouge sur figure IV.17) avec les profils expérimentaux. L'accord est très bon, ce qui laisse penser que le saut de courbure est un paramètre crucial expliquant la différence de forme.

IV.4.2 Retour sur le collage axisymétrique

Nous pouvons maintenant avancer une explication qualitative à la différence de taille maximale d'adhésion observée dans la figure IV.12). L'expression de a_{max} que nous avons adaptée du travail de Hure *et al.* est basée sur une minimisation d'énergie qui ne prend pas en compte la manière dont le disque se décolle. Expérimentalement,

lorsque le disque délamine, la formation de cloques radiales périphériques entraîne une perte de l'axisymétrie. De telles cloques mettent en jeu une énergie de courbure différente selon que le disque est posé à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère. Si l'énergie de courbure est complètement négligeable ($R/L_{EC} \ll 1$), cette différence est, elle aussi, négligeable. Néanmoins, lorsque l'effet de la courbure commence à se faire sentir, créer une cloque à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère n'est pas équivalent, ce qui peut expliquer le petit décalage de taille a_{max} observé. Nos expériences restent néanmoins dominées par un équilibre entre adhésion capillaire et extension.

IV.5 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre l'adhésion d'une calotte sphérique déformable sur un hémisphère adhésif de rayon différent. La taille maximale de calotte que l'on peut coller est fixée par un équilibre entre l'énergie d'extension et d'adhésion. La loi d'échelle que nous avons déterminée généralise les travaux précédents menés dans l'équipe concernant l'adhésion d'un plan sur un hémisphère. Nous avons ensuite exposé un diagramme de configurations plus riche qu'initialement attendu, et avancé quelques explications quant aux différentes formes observées. Des études numériques permettant de retrouver ces formes et leurs frontières pourraient compléter ce diagramme. Nous avons également éclairé la différence d'adhésion suivant que l'objet est collé à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère. Le saut de courbure, au moment du décollement de la cloque est probablement le principal responsable de cette différence, effet qui se fait sentir lorsque l'énergie de flexion n'est plus négligeable devant l'énergie d'adhésion. Quelques données expérimentales reliant la forme de la cloque (son amplitude, son extension) en fonction du rayon de courbure seraient intéressantes. Sans doute plus crucial, un travail de simulation numérique nous permettrait de valider notre argument concernant la différence de la taille maximale d'adhésion.

Une extension intéressante de ce problème consisterait enfin à considérer un solide mou que la lentille pourrait déformer en se collant à sa surface. Une telle configuration serait en effet plus proche de situations physiologiques (des lentilles de contact, mais aussi des pansements pour les parties courbées du corps.).

Chapitre V

Conclusion

Nous avons étudié dans cette thèse les conséquences physiques d'un changement de forme dans une plaque mince. Tout au long de ce travail, nous nous sommes interrogés sur les liens existants entre la forme tridimensionnelle d'une plaque mince et sa métrique. Le *Theorema Egregium* de Gauss nous apprend en effet que forme et métrique sont intimement liées *via* la courbure de Gauss. Changer la courbure de Gauss d'une surface ne peut se faire sans modifier localement les longueurs de cette surface. Réciproquement, changer la courbure de Gauss d'une surface n'est possible qu'en modifiant la métrique de cette surface.

Le premier chapitre a été pour nous l'occasion de modifier directement la métrique de la surface. Nous avons pour cela utilisé des polymères diélectriques, un système qui sous l'effet d'un important champ électrique est capable de se dilater dans le plan. Cette déformation nous évoque une croissance au sens biologique. Nous avons étudié les effets d'une croissance inhomogène dans une plaque mince. Nous avons commencé par une situation modèle dans laquelle seule une partie circulaire centrale croît, ce qui conduit à une incompatibilité de longueurs avec le reste de la membrane, et engendre ainsi une instabilité de flambage. Nous avons également proposé des méthodes de texturation de surface, ou de dépôt direct de charges permettant de contrôler plus finement cette croissance. À terme, ces méthodes pourraient permettre un véritable contrôle de la métrique prescrite, et donc de la forme tridimensionnelle que la surface adopte. Nous pourrions alors imaginer pouvoir changer en temps réel et instantanément la forme de l'objet, ouvrant ainsi de nouvelles possibilités dans le domaine de la soft robotics. Bien que le principe de texturation de la surface semble fonctionner, nous n'avons pas réussi à démontrer de changement de formes tridimensionnelles. Nous sommes essentiellement limités par la faiblesses des déformations atteintes, ainsi que par le manque de rigidité du matériau qui le rend très sensible à la gravité. Plusieurs solutions peuvent être envisagées afin de contourner ces difficultés. La première consiste à élaborer des matériaux comportant plusieurs couches de polymères diélectriques superposées. Ce procédé permet d'atteindre de plus grandes déformations sans augmenter le voltage appliqué. Il présente en outre l'avantage d'augmenter l'épaisseur de la plaque, augmentant ainsi sa rigidité en flexion. La fabrication de ces matériaux à multi-couches est néanmoins assez délicate et nous n'avons pas réussi à obtenir un polymère satisfai-

sant par cette voie. Une deuxième solution, que nous explorons actuellement, consiste à changer de polymère. En effet, il a été récemment montré par Duduta *et. al.* que des polymères à base d'acrylates pouvaient atteindre de grandes déformations sans pré-étirement [74]. Une membrane de $100\ \mu\text{m}$ soumise à $4000\ \text{V}$ pourrait par exemple dépasser les 100% de déformation dans le plan. Dans les mêmes conditions une membrane de PVS se dilate d'environ 7%. En outre, le module d'Young du polymère peut être ajusté en variant la quantité de réticulant utilisé lors de la polymérisation. Réussir à synthétiser de tels matériaux pourrait donc être une étape cruciale pour l'obtention de formes tridimensionnelles complexes avec les polymères diélectriques.

Dans le deuxième chapitre, nous avons pris le chemin inverse : au lieu de d'altérer la métrique de la surface, nous avons modifié sa forme même, créant ainsi des contraintes au sein du matériau. Nous avons ainsi aplati des coques hémisphériques et observé l'apparition de motifs réguliers de plis orthoradiaux. Le nombre de plis augmente avec la compression, mais de manière surprenante, la longueur d'onde de ce motif sature lorsque la compression devient suffisamment importante. Curieusement, la force de compaction passe par un maximum qui ne dépend pas de l'épaisseur de la coque. Nous avons proposé un modèle reposant sur le calcul des contraintes régnant dans la coque complètement écrasée qui nous a permis de capturer les caractéristiques physiques (longueur d'onde et force nécessaire à la compaction) des motifs de plis, et ce dans les différentes situations considérées : coque complète, trouée ou découpée, et plaque bosselée.

Nous avons, pour finir, considéré l'adhésion capillaire de calottes sphériques sur un hémisphère de rayon différent. Cette problématique est inspirée des lentilles de contact souples dont la pointure quasiment universelle doit pouvoir s'adapter à des yeux de courbures variées. Ici encore, du fait de la différence de courbure de Gauss, l'adhésion ne peut se faire sans induire des déformations en extension. La comparaison des énergies d'adhésion capillaire et de déformation d'extension permet de prédire la taille maximale de calotte pouvant adhérer sur un hémisphère pour une différence de courbure donnée. Lorsque la calotte dépasse cette taille, elle délamine localement, et des motifs complexes d'adhésion apparaissent alors. Nous avons établi un diagramme de configurations de ces différents motifs. Nous nous sommes enfin penchés sur la conséquence des effets de flexion sur la taille maximale d'adhésion et avons mis en lumière l'importance du saut de courbure au moment du décollement de la zone délamée.

Dans toutes ces expériences, les contraintes sont générées par des incompatibilités géométriques et suscitent des changements de formes. En effet, il est courant pour les structures élancées de relaxer les contraintes compressives par du flambage. Nous avons ainsi vu que ces instabilités peuvent faire apparaître des dômes, des motifs de plis ou encore des cloques dans les plaques minces.

Mais le flambage n'est pas l'unique mode de réponse non-linéaire à des contraintes. Les déformations plastiques par exemple permettent, elles aussi d'accomoder de grandes déformations engendrées par la géométrie. L'emboutissage est très utilisé pour obtenir des formes tridimensionnelles, et l'apparition de plis peut être un véritable problème industriel. Nous n'avons pas étudié ce genre de réponse, toutes les plaques utilisées

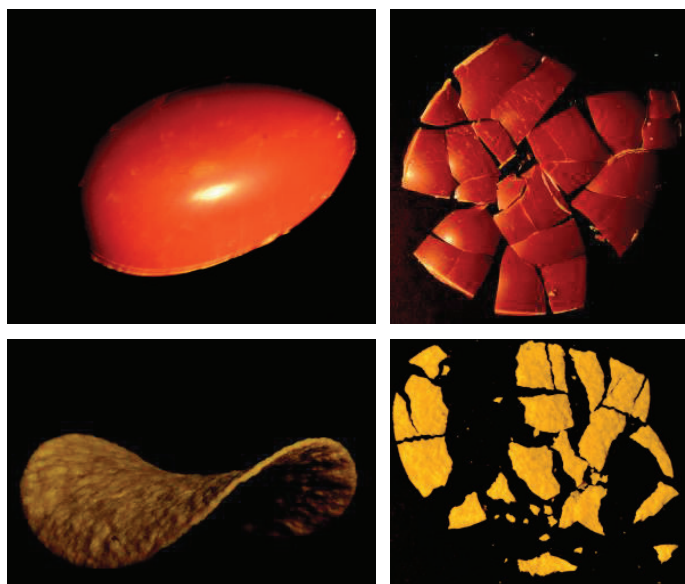


Fig. V.1 Deux exemples d'objets fragiles et ayant une courbure de Gauss non nulle (positive pour l'oeuf en chocolat ou négative pour la chips). Lorsqu'ils sont écrasés, ils se brisent. Le motif de fracture peut-il nous apprendre quelque chose sur la forme initiale de l'objet ?

étaient parfaitement élastiques dans les domaines de déformations considérés.

Une autre réponse possible pour les matériaux fragiles est de relaxer les contraintes en propageant une ou plusieurs fissures. Un prolongement intéressant de ce travail pourrait ainsi consister à utiliser des plaques fragiles. La croissance inhomogène d'une plaque peut-elle conduire à sa fracture ? Comment se brise une coque fragile que l'on écraserait ? Les contraintes induites par l'adhésion d'une calotte sur un hémisphère de rayon différent peuvent-elles propager une fracture dans le matériau (ou dit autrement : nos lentilles peuvent-elles se casser sur nos yeux) ? Que nous apprend le motif de fracture sur la forme initiale de l'objet ? Toute cette gamme de problèmes liant la géométrie de l'objet à la façon dont il se fragmente reste à aborder.

Annexe A

Calcul numérique des contraintes dans le plan d'une coque aplatie

Le code numérique de Matlab PDEtool que nous utilisons résout une équation du type :

$$\text{div}(\sigma) = f$$

dans laquelle σ est le champ de contraintes, et f les forces de volume. Or, comme nous l'avons vu, la pente initiale de la coque que l'on force à devenir plane est responsable de l'apparition de contraintes dans le matériau. En effet, la projection d'une surface $w(x, y)$ sur le un plan conduit aux déformations :

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= u_x - \frac{1}{2}w_x^2 \\ \epsilon_{yy} &= v_y - \frac{1}{2}w_y^2 \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_y + v_x) - \frac{1}{2}w_x w_y\end{aligned}$$

u et v sont les déplacements selon x et y respectivement. w est connu ici, $w(x, y)$ donne la forme initiale de la coque. L'indice du déplacement désigne la variable selon laquelle le déplacement est dérivé.

Ces déformations sont ensuite reliées aux contraintes par la loi de Hooke (I.3). Nous pouvons alors écrire ces dernières comme la somme d'une contribution planaire σ^{2D} et d'une contribution de la pente de l'objet σ^p . Par exemple, pour σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) = \frac{E}{1-\nu^2} (u_x + \nu v_y) - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{2} (w_x^2 + \nu w_y^2) = \sigma_{xx}^{2D} + \sigma_{xx}^p$$

σ_{yy} et σ_{xy} s'obtiennent de façon similaire.

Expérimentalement, aucune force volumique n'est appliquée à notre système, et l'équilibre mécanique est donné par $\text{div}(\sigma) = 0$. L'équation résolue par PDEtool, en revanche est : $\text{div}(\sigma^{2D}) = f$. L'astuce que nous employons pour résoudre numériquement cette équation consiste finalement à faire passer dans les forces volumiques f les contraintes

générées par l'aplatissement de la pente initiale : $f = -div(\sigma^p)$. Les forces volumiques fictives que nous imposons numériquement sont donc :

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} (w_x w_{xx} + \nu w_y w_{xy}) - \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} (w_x w_{yy} + w_y w_{xy}) \\ f_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} (w_y w_{yy} + \nu w_x w_{xy}) - \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} (w_y w_{xx} + w_x w_{xy}) \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont, elles aussi, modifiées. Expérimentalement, les bords sont libres : $\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Cette condition se traduit numériquement par l'ajout d'une traction de sorte qu'aux bords $\sigma^{2D} \cdot \mathbf{n} = -\sigma^P \cdot \mathbf{n}$.

La résolution de ce problème plan σ^{2D} , très simple et directement implémentée dans le module PDEtool de Matlab, nous permet de déduire les contraintes dans la coque écrasée $\sigma = \sigma^{2D} + \sigma^p$.

Annexe B

Gotitas

Les vendredis soir au Mecawet sont régulièrement consacrés à des expériences amusantes. Il n'est pas si fréquent que ces expériences acquièrent un qualificatif plus élogieux que celui d'"amusant", et si d'aventure cela se produit, elles finissent souvent par se prolonger à d'autres moments que le seul vendredi soir.

Les "gotitas" entrent des cette catégorie d'expériences du vendredi soir ne se cantonnant pas à cette seule soirée. C'est ainsi que nous avons pu mener, avec Ludovic Keiser, également en thèse dans l'équipe, et sous la direction de José Bico et d'Etienne Reysat, une étude sur un intrigant phénomène d'étalement de mélange binaire eau/alcool avec éjections de gouttelettes. Ce phénomène a initialement été soufflé aux oreilles de l'équipe il y a une dizaine d'années par Gustavo Gutierrez, chercheur vénézuélien alors en visite au laboratoire. Ce dernier avait constaté qu'une goutte de colorant alimentaire complété avec de l'alcool déposé sur un bain d'huile alimentaire s'étalait spontanément, puis se mettait à éjecter des myriades de gouttelettes, avant de se rétracter. Il n'en fallait pas plus pour nous intéresser !

Ce projet a essentiellement été porté par Ludovic, peut-être en trouverons-nous trace dans son manuscrit de thèse ? Auquel cas le lecteur intéressé pourra s'y référer. Nous reproduisons néanmoins l'article sur cet élégant phénomène.

Annexe C

Articles



Marangoni Bursting: Evaporation-Induced Emulsification of Binary Mixtures on a Liquid Layer

L. Keiser,^{1,2} H. Bense,¹ P. Colinet,³ J. Bico,^{1,†} and E. Reyssat^{1,*}

¹Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes (PMMH), CNRS, ESPCI Paris, PSL Research University, 10 rue Vauquelin, 75005 Paris, France and Sorbonne Universités, Université Paris Diderot

²Total S.A., Pôle d'Études et de Recherche de Lacq, BP47, 64170 Lacq, France

³Université Libre de Bruxelles, TIPs (Transfers, Interfaces and Processes), CP 165/67, Avenue F. D. Roosevelt 50, B-1050 Brussels, Belgium

(Received 24 November 2016; published 17 February 2017)

Adjusting the wetting properties of water through the addition of a miscible liquid is commonly used in a wide variety of industrial processes involving interfaces. We investigate experimentally the evolution of a drop of water and volatile alcohol deposited on a bath of oil: The drop spreads and spontaneously fragments into a myriad of minute droplets whose size strongly depends on the initial concentration of alcohol. Marangoni flows induced by the evaporation of alcohol play a key role in the overall phenomenon. The intricate coupling of hydrodynamics, wetting, and evaporation is well captured by analytical scaling laws. Our scenario is confirmed by experiments involving other combinations of liquids that also lead to this fascinating phenomenon.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.074504

The fate of a droplet deposited on a substrate is of crucial importance for numerous applications ranging from coating processes to inkjet printing or phytosanitary treatments. Equilibrium values of surface tension classically dictate the wetting and wicking properties of liquids [1]. However, evaporation can also induce complex flows as illustrated by seminal works on coffee stains [2–8]. Evaporation causes variations in the temperature or the composition of liquids. Both effects result into local variations of the surface tension, which can in turn induce surface flows referred to as “Marangoni flows” after the pioneering work of Marangoni in the 1870s [9]. Besides explaining the self-propulsion of particles [10] or some insects [11] at the surface of water, Marangoni stresses can be used to manipulate droplets at small scales [12–16]. They also significantly affect the shape [17–19] and spreading dynamics of droplets [20–23] and often lead to intriguing fingering instabilities [24–30]. A popular and festive manifestation of these instabilities is the formation of “tears” along the walls of a glass of wine [31,32]. While the evaporation-induced flows of liquids lying on a solid substrate have been extensively studied, the evolution of an evaporating liquid on a nonmiscible fluid layer has only recently received attention [33,34].

In the present study, we focus on the instability observed when a two-component drop of water and volatile alcohol is deposited on a bath of sunflower oil. The drop temporarily spreads and spontaneously breaks up into thousands of tiny droplets [Fig. 1(a)]. We demonstrate experimentally how this spreading and fragmentation instability result from the interplay of a wetting transition at the contact line and solutal Marangoni effects, both induced by the fast evaporation of alcohol.

A millimetric drop of a mixture composed of water and isopropyl alcohol (IPA) is gently deposited on a centimeter-thick layer of sunflower oil. Provided the initial mass fraction ϕ_0 of IPA in the drop is sufficiently high, the drop spreads and reaches a nearly steady centimetric radius within a few seconds [Fig. 1(a) and Supplemental Movies 1–4 [35]]. The system, sketched in Fig. 1(b), is, however, not at rest as revealed by the myriad of submillimetric droplets continuously released from the periphery of the mother drop. The time evolution of the radius of the drop $R(t)$ [defined in Figs. 1(a) and 1(b)] is plotted in Fig. 1(c) for various experimental conditions. Once the drop has reached its maximal radius R_{\max} , its border starts to recede while keeping ejecting droplets. The phenomenon ends after a time t_{exp} , once the initial drop has been totally fragmented.

The initial concentration of IPA ϕ_0 is a key parameter in this experiment. Indeed, we observe the instability only if ϕ_0 is above a critical value $\phi_c = 0.35 \pm 0.02$. For $\phi_0 < \phi_c$, a quasisteady drop simply sits at the surface of the oil and progressively decreases in size as the alcohol evaporates. The remaining water evaporates on a much longer time scale of tens of minutes. To interpret the onset of instability, we measured the interfacial tensions γ_{oa} , γ_{ma} , and γ_{mo} of the respective oil-air, mixture-air, and mixture-oil interfaces. Figure 2 shows the variations of these interfacial tensions with ϕ_0 . The drop is expected to spread on oil for positive values of the spreading parameter $S = \gamma_{\text{oa}} - \gamma_{\text{ma}} - \gamma_{\text{mo}}$ [1]. This criterion is found to coincide with the onset of the instability, which is confirmed by additional experiments using ethanol-water mixtures (see Sec. II in Supplemental Material [35]). A necessary condition to observe the instability is therefore that the initial mixture completely wets the supporting oil bath.

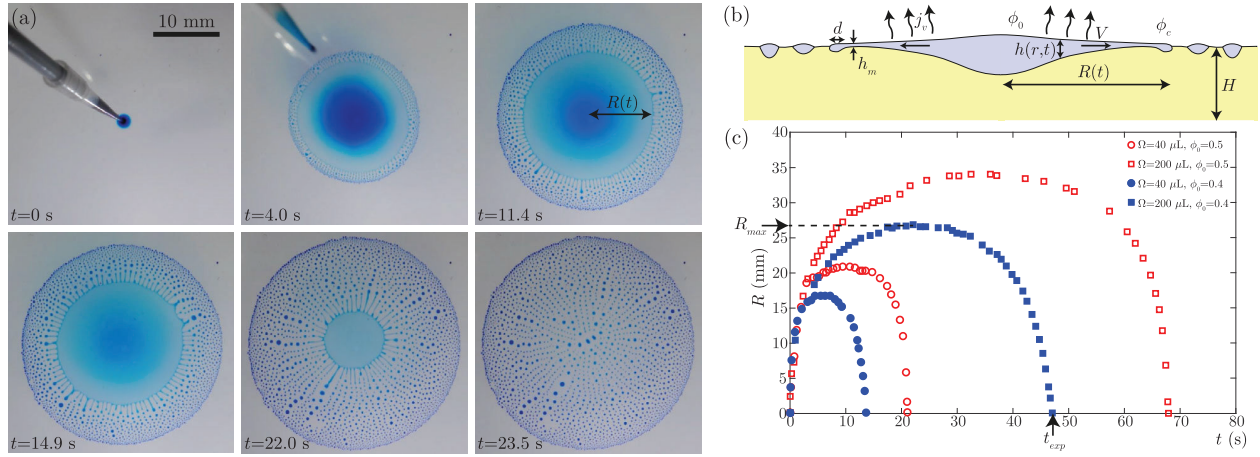


FIG. 1. (a) Image sequence of a drop of a mixture of isopropyl alcohol (IPA) with water spreading and fragmenting on a bath of sunflower oil. The initial IPA mass fraction is $\phi_0 = 0.4$, and the volume of the drop is $\Omega_0 = 100 \mu\text{L}$. Methyl blue dye has been added to improve the optical contrast. (b) Sketch of the experiment. The drop of water and alcohol mixture (light gray) spreads over a bath of oil of centimetric depth H . The thickness of the drop $h(r, t)$ depends on time t and on the distance r from the center of the drop. We define the drop radius $R(t)$, the minimal drop thickness h_m , the apparent width d of the peripheral rim, the characteristic velocity V of the flow, and the alcohol fractions ϕ_0 at the center and ϕ_c at the boundary of the drop. j_v is the volume of alcohol evaporated from the drop per unit time and surface area. (c) Evolution of R as a function of time for various initial IPA fractions ϕ_0 and volumes Ω_0 . The maximal spreading radius R_{max} and total experiment time t_{exp} can be defined on each data set.

When $S > 0$, the drop spreads and reveals a time-dependent thickness profile $h(r, t)$ that we measure using interferometry. We shine white or monochromatic (mercury green, wavelength $\lambda_{Hg} = 546.1 \text{ nm}$) light with quasnormal incidence from above and observe the reflected fringes of equal thickness. White light patterns provide the absolute thickness h_m of the thinnest parts of the film through a comparison of the interference colors with a Michel-Lévy chart (see Fig. 2 in Supplemental Material, Sec. III [35]). We use this information as a calibration to explore thicker regions whose profiles are inferred from monochromatic

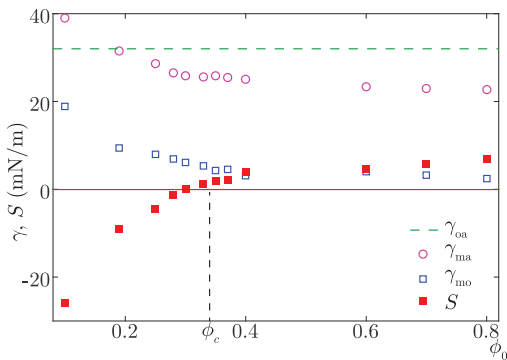


FIG. 2. Measured interfacial tensions: oil-air ($\gamma_{\text{oa}} \approx 32 \text{ mN/m}$, dashed line), mixture-air (γ_{ma} , open circle), and mixture-oil (γ_{mo} , open square) as a function of the initial IPA mass fraction ϕ_0 . The spreading parameter $S = \gamma_{\text{oa}} - \gamma_{\text{ma}} - \gamma_{\text{mo}}$ (filled square) of the mixture on the oil becomes positive for $\phi > \phi_c \approx 0.35$, the critical IPA fraction above which we observe spontaneous drop spreading and fragmentation [see Fig. 1(a) in Supplemental Material for the plot corresponding to ethanol-water mixtures [35]].

interferences. Figure 3(a) shows the time-dependent thickness profiles of a binary drop of IPA mass fraction $\phi_0 = 0.6$ and volume $\Omega_0 = 5 \mu\text{L}$, plotted in the semilog scale. The thickness of the central part of the drop is typically $10 \mu\text{m}$, in a circular region of centimetric radius. h decreases progressively toward the periphery and reaches a minimal value h_m a few millimeters away from the drop boundary. h_m is nearly constant during an experiment and is a function of ϕ_0 : h_m increases from 70 nm to $1.5 \mu\text{m}$ as ϕ_0 decreases from 0.8 to 0.4 [see Fig. 2(c) in Supplemental Material [35]]. The outermost part of the drop is a rim which does not exhibit interference fringes due to its strong thickness gradients. The width d of that rim is also a function of ϕ_0 and increases from 30 to $300 \mu\text{m}$ as ϕ_0 decreases from 0.8 to 0.4 .

At such small thicknesses, the drop is strongly affected by the evaporation of alcohol, which modifies its local composition. During the spreading of the drop, isopropyl alcohol evaporates much faster than water. Even if evaporation were spatially uniform, the evaporation depletes preferentially the IPA content in the thinnest parts of the drops located near the edge. Evaporation may be even more pronounced at the periphery of the drop as in the case of “coffee rings,” which amplifies this effect [2–5]. As a consequence, the spreading parameter progressively decreases toward the edge of the drop, which hinders its spreading and eventually leads to its dewetting. We estimate the evaporation rate by monitoring the weight of a Petri dish filled with mixtures of water and IPA (see Sec. IV in Supplemental Material [35]). The evaporation rates are of the order of $10^{-4} \text{ kg/m}^2/\text{s}$, which corresponds to a liquid volume rate of $j_v \approx 100 \text{ nm/s}$. With a minimal

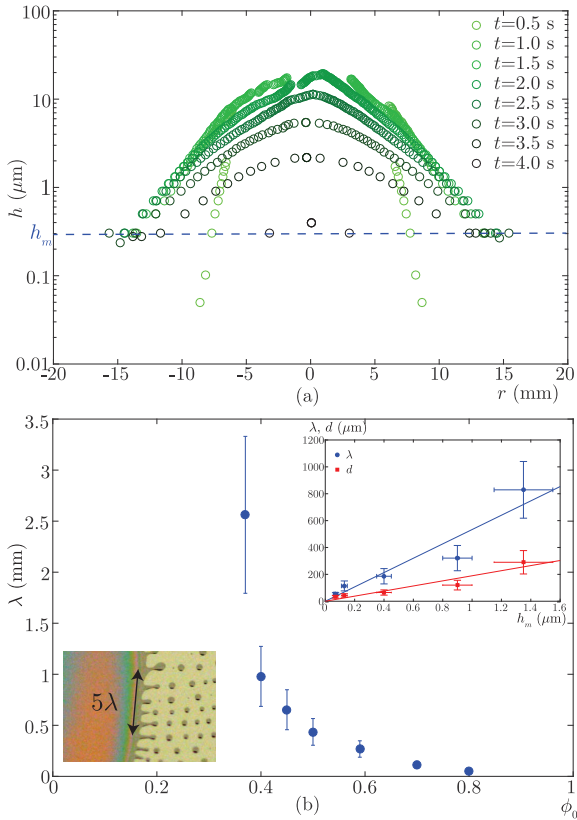


FIG. 3. (a) Thickness profiles $h(r)$ of a drop of volume $\Omega_0 = 5 \mu\text{L}$ and IPA fraction $\phi_0 = 0.6$ at successive times in the experiment. The typical thickness is $10 \mu\text{m}$, with a thick central region surrounded by a submicron annular base. The dashed line indicates the minimal thickness h_m of the drop close to its periphery. For this experiment, $h_m \approx 300 \text{ nm}$. (b) The wavelength λ of the observed instability seems to diverge for $\phi_0 = \phi_c$ and strongly decreases with increasing ϕ_0 , concomitantly with the radius of ejected droplets. The inset plot displays the variation of λ and the apparent rim diameter d with the minimal thickness of the film h_m . The lines of equation $\lambda = 533h_m$ and $d = 190h_m$ are linear fits to the data.

thickness h_m of a few hundreds of nanometers, most of the alcohol evaporates from the thinnest part of the film within a few seconds. The combination of this estimate with the observation of a finite spreading radius suggests that the composition of the mixture near the edge is close to ϕ_c .

The spatial variations in IPA content result in increasing interfacial tensions toward the edge of the drop. These gradients induce Marangoni tangential stresses at both mixture-air and mixture-oil interfaces, which drive radial flows from the center to the periphery of the drop. As described in Supplemental Material (see Sec. V [35]), we followed the trajectories of chalk particles deposited on the surface of the mixture drop and estimated velocities of the surface flow $V \sim 1 \text{ cm/s}$. We also used $20 \mu\text{m}$ diameter polystyrene beads to track the flow in the bath of oil. The characteristic velocity in the bath is comparable to the

surface velocity. The observed shear across the thickness of the oil layer indicates that viscous dissipation mainly occurs in the supporting bath.

As a partial conclusion, evaporation imposes dewetting at the edge of the drop and induces an outward Marangoni flow. The combination of these two effects results in the formation of a thicker rim at the periphery of the drop, which becomes unstable. The physical mechanism underlying our experiment is reminiscent of the solutal Marangoni convection observed when a solution of soluble surfactant is continuously injected at the surface of a bath of water [37,38].

Besides dictating the threshold for the overall process, the initial alcohol concentration ϕ_0 also influences the fragmentation mechanism. The drop is bounded by a circular rim which destabilizes into small droplets through a process reminiscent of the classical Plateau-Rayleigh instability of liquid cylinders [1] or other moving contact line instabilities [39,40]. Both the wavelength of the instability λ and the size of the resulting droplets strongly depend on ϕ_0 . As a typical variation, λ decays from 2.5 mm to $50 \mu\text{m}$ as ϕ_0 increases from 0.37 to 0.8, as plotted in Fig. 3(b). We also observe that λ and the characteristic width d of the rim are roughly proportional to the minimal thickness of the film h_m [see the inset in Fig. 3(b)]. The average apparent diameter of the ejected droplets follows the same trend and typically ranges from a few microns to a fraction of a millimeter. This self-emulsification phenomenon thus enables producing droplets whose volume spans about 6 orders of magnitude. Depending on ϕ_0 , the fragmentation of a millimetric drop into micron-size fragments may produce up to about 10^7 microdroplets within typically 1 min. The fragmentation mechanism is modified for high concentrations in IPA. For $\phi_0 > 0.7$, holes spontaneously nucleate in several places in the thin film and are advected toward the periphery. Tiny droplets are also released, and the outer boundary of the mother drop appears corrugated (see Supplemental Material, Sec. VI and Movie 4 [35]).

Having presented the main experimental features, we now describe the physical mechanisms at play. Plotting R/R_{max} versus t/t_{exp} for different experiments, we observe that all $R-t$ data sets collapse on a single master curve [Fig. 4(a)]. The apparent self-similarity of the spreading dynamics encourages us to describe the problem in terms of scaling laws, and we here propose to derive the characteristic radius and time scale involved in the phenomenon. As the center of the drop is thick, we assume that the volume fraction of alcohol in this region remains equal to ϕ_0 . In the vicinity of the edge, the composition of the thin film drops to ϕ_c due to evaporation. The slow evaporation of water is neglected as well as the difference in densities between pure liquids and the mixture.

Our estimate of the flow field suggests that most of the viscous dissipation occurs in the oil layer. More quantitatively, we expect the drop to undergo a plug flow if the condition $\eta_o/H \ll \eta_{\text{mix}}/h$ is fulfilled, where η_o and η_{mix} are

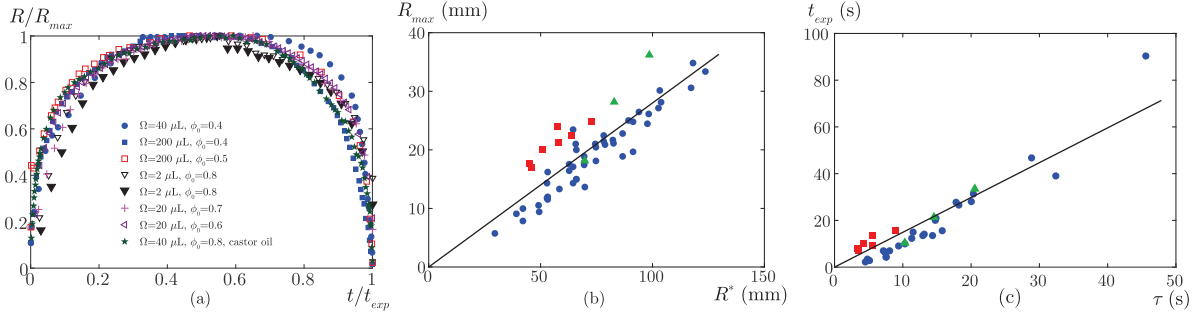


FIG. 4. (a) Normalized plots R/R_{\max} versus t/t_{exp} . Data obtained with drops of different Ω_0 and ϕ_0 and nature of oil (castor oil is about 10 times more viscous than sunflower oil) collapse on a single master curve. (b) Measured spreading radius R_{\max} and (c) duration of the experiment t_{exp} , respectively, as a function of the characteristic radius R^* and time scale τ as predicted by Eqs. (1) and (2). The experimental parameters span the range $0.4 < \phi_0 < 0.8$, $1 \text{ mm} < H < 20 \text{ mm}$, $2 \text{ mm}^3 < \Omega_0 < 500 \text{ mm}^3$. Blue dots (circle) correspond to IPA-water mixtures in a still atmosphere ($j_v = 115 \text{ nm/s}$). Experiments represented by red squares (square) have been performed under a moderate wind ($450 \text{ nm/s} < j_v < 1240 \text{ nm/s}$). Green triangles (triangle) correspond to ethanol-water mixtures in a still atmosphere ($j_v = 130 \text{ nm/s}$). Black lines are linear fits to the data: $R_{\max} = 0.28R^*$ and $t_{\text{exp}} = 1.5\tau$.

the respective viscosities of the oil and of the mixture. In our experiments, $H \sim 5 \text{ mm}$, $h \lesssim 10 \mu\text{m}$, $\eta_o \approx 55 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, and $0.9 < \eta_{\text{mix}} < 2.3 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, which leads to $\eta_o h / \eta_{\text{mix}} H < 0.1$. The spreading drop may thus be viewed as a single interface with an effective tension γ accounting for the contribution of both interfaces: $\gamma = \gamma_{\text{mo}} + \gamma_{\text{ma}}$. γ varies from γ_0 corresponding to the alcohol concentration ϕ_0 at the center of the drop to γ_c at the periphery where the alcohol fraction is ϕ_c . The resulting gradient in surface tension driving the flow is thus of the order of $\Delta\gamma/R^*$, where $\Delta\gamma = \gamma_c - \gamma_0$ and R^* is the characteristic radius of the drop. The flow in the oil develops close to the upper surface from a boundary layer of thickness $\delta(t) \sim \sqrt{\nu t}$, where $\nu \approx 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ is the kinematic viscosity of the oil. For $H \sim 5 \text{ mm}$, δ reaches H within less than a second, so that the flow is developed across the whole oil layer during most of the experiment: The viscous stress in the oil is thus of the order of $\eta_o V/H$. Balancing tangential stresses at the interface, we deduce the Marangoni-induced flow velocity $V \sim \Delta\gamma H / \eta_o R^*$. The convection of the liquid from the center to the edge defines the time scale of the experiment as $\tau \sim R^*/V$. During this time, a quantity $(\phi_0 \Omega_0 - \phi_c \Omega_f) \sim j_v R^{*2} \tau$ of alcohol evaporates, where Ω_0 and Ω_f correspond to the initial and final volume of the drop, respectively. Volume conservation of water imposes $(1 - \phi_0)\Omega_0 = (1 - \phi_c)\Omega_f$. Combining these relations, we deduce both R^* and τ :

$$R^* \sim \left(\frac{(\phi_0 - \phi_c) \Delta\gamma H \Omega_0}{(1 - \phi_c) \eta_o j_v} \right)^{1/4}, \quad (1)$$

$$\tau \sim \left(\frac{(\phi_0 - \phi_c) \eta_o \Omega_0}{(1 - \phi_c) \Delta\gamma H j_v} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

We measured the maximum spreading radius R_{\max} and the duration t_{exp} of the experiment for different values of the

physical parameters. The agreement with scaling predictions is very good as represented in Figs. 4(b) and 4(c). We obtain $R_{\max} = 0.28(\pm 0.02)R^*$ and $t_{\text{exp}} = 1.5(\pm 0.15)\tau$. Our model thus captures the essential physical mechanisms at play in the phenomenon.

In conclusion, we have shown how a binary mixture of water and alcohol destabilizes as it spreads on a bath of oil. The instability is observed for alcohol concentrations that would lead to a complete spreading of the drop in the absence of evaporation. However, the evaporation of alcohol modifies the wetting properties of the mixture in the vicinity of the spreading front, which quickly stops its progression. Nevertheless, the front does not immediately recede as in classical dewetting [1]. The gradient of alcohol concentration induced by evaporation generates a strong Marangoni flow from the center of the drop to its periphery. This flow feeds an unstable rim that periodically emits tiny droplets whose size is set by the width of the rim. In contrast with other Marangoni instabilities on solid substrates [24–32], the presence of a thick lubricating layer of oil favors high flow velocities and conveys the emitted droplets away. Decreasing the thickness of the oil layer hinders the spreading and the release of droplets. The phenomenon is not observed for $H \lesssim 0.5 \text{ mm}$. This instability is not limited to the particular case of drops of alcohol-water mixtures deposited on vegetable oils. The same features are obtained with mixtures of perfluorinated ether (methoxy-nonafluorobutane) and perfluorodecalin deposited on a bath of silicone oil (Supplemental Material, Sec. II [35]).

Although our scaling law analysis successfully predicts the spreading radius and the experimental time scale, our global approach does not describe other details of the experiments. For instance, the self-similar shape of the $R(t)$ curve is not captured by this minimal model. Similarly, rescaling the thickness profiles $h(r, t)$ by the maximal thickness of the drop $h_{\max}(t)$ does not lead to a universal

plot (see Supplemental Material, Sec. VII [35]). As in many previous studies on dewetting or bursting films [34,41,42], the formation of the rim and its destabilization into droplets are not yet fully understood. A more refined description accounting for inhomogeneous thickness profiles and velocity fields is challenging but beyond the scope of the present work. We hope that our experimental study will stimulate further theoretical and numerical developments coupling hydrodynamics, Marangoni stresses, wetting, and evaporation. The fragmentation mechanism presented in our study may finally pave the way for practical applications. In a few seconds, two-dimensional assemblies of up to millions of droplets are indeed produced spontaneously, and their volume can be tuned by adjusting the concentration or evaporation rate of the volatile phase.

We are very grateful to Gustavo Gutierrez from Universidad Simon Bolivar, Venezuela, who generously introduced us to this beautiful phenomenon. We warmly thank Guillaume Durey and Hoon Kwon from the Lutetium Project [43] for their support in realizing the Supplemental Movies. We thank Alexey Rednikov and Sam Dehaeck for stimulating discussions and Arthur Meyre for his experimental help. P.C. acknowledges financial support of the Fonds de la Recherche Scientifique—FNRS. This work was partly funded by the Interuniversity Attraction Poles Program (IAP 7/38 MicroMAST) initiated by the Belgian Science Policy Office.

*etienne.reyssat@espci.fr

†jose.bico@espci.fr

- [1] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré, *Capillarity and Wetting Phenomena* (Springer, New York, 2004), ISBN 978-1-4419-1833-8.
- [2] R. D. Deegan, O. Bakajin, T. F. Dupont, G. Huber, S. R. Nagel, and T. A. Witten, *Nature (London)* **389**, 827 (1997).
- [3] Y. O. Popov, *Phys. Rev. E* **71**, 036313 (2005).
- [4] J. Park and J. Moon, *Langmuir* **22**, 3506 (2006).
- [5] H. Kim, F. Boulogne, E. Um, I. Jacobi, E. Button, and H. A. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 124501 (2016).
- [6] P. Jiang, J. F. Bertone, K. S. Hwang, and V. L. Colvin, *Chem. Mater.* **11**, 2132 (1999).
- [7] E. Rabani, D. R. Reichman, P. L. Geissler, and L. E. Brus, *Nature (London)* **426**, 271 (2003).
- [8] M. Schnall-Levin, E. Lauga, and M. P. Brenner, *Langmuir* **22**, 4547 (2006).
- [9] L. E. Scriven and C. V. Sternling, *Nature (London)* **187**, 186 (1960).
- [10] S. Nakata, Y. Iguchi, S. Ose, M. Kuboyama, T. Ishii, and K. Yoshikawa, *Langmuir* **13**, 4454 (1997).
- [11] J. W. Bush and D. L. Hu, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **38**, 339 (2006).
- [12] F. Domingues Dos Santos and T. Ondarçuhu, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2972 (1995).
- [13] K. Ichimura, *Science* **288**, 1624 (2000).
- [14] S. Daniel, M. K. Chaudhury, and J. C. Chen, *Science* **291**, 633 (2001).
- [15] M. L. Cordero, D. R. Burnham, C. N. Baroud, and D. McGloin, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 034107 (2008).
- [16] N. J. Cira, A. Benusiglio, and M. Prakash, *Nature (London)* **519**, 446 (2015).
- [17] H. Hu and R. G. Larson, *Langmuir* **21**, 3972 (2005).
- [18] W. D. Ristenpart, P. G. Kim, C. Domingues, J. Wan, and H. A. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 234502 (2007).
- [19] Y. Tsoumpas, S. Dehaeck, A. Rednikov, and P. Colinet, *Langmuir* **31**, 13334 (2015).
- [20] F. Brochard, *Langmuir* **5**, 432 (1989).
- [21] P. Carles and A. M. Cazabat, in *Surfactants and Macromolecules: Self-Assembly at Interfaces and in Bulk* (Steinkopff, Darmstadt, 1990), Vol. 82, pp. 76–81.
- [22] M. Santiago-Rosanne, M. Vignes-Adler, and M. G. Velarde, *J. Colloid Interface Sci.* **234**, 375 (2001).
- [23] E. Saiz and A. P. Tomsia, *Nat. Mater.* **3**, 903 (2004).
- [24] S. M. Troian, X. L. Wu, and S. A. Safran, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1496 (1989).
- [25] A. B. Afsar-Siddiqui, P. F. Luckham, and O. K. Matar, *Langmuir* **19**, 703 (2003).
- [26] A. Hamraoui, M. Cachile, C. Poulard, and A. Cazabat, *Colloid Surf. A* **250**, 215 (2004).
- [27] E. Sultan, A. Boudaoud, and M. Ben Amar, *J. Fluid Mech.* **543**, 183 (2005).
- [28] Y. Gotkis, I. Ivanov, N. Murisic, and L. Kondic, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 186101 (2006).
- [29] C. M. Bates, F. Stevens, S. C. Langford, and J. T. Dickinson, *Langmuir* **24**, 7193 (2008).
- [30] R. V. Craster and O. K. Matar, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1131 (2009).
- [31] J. B. Fournier and A. M. Cazabat, *Europhys. Lett.* **20**, 517 (1992).
- [32] A. E. Hosoi and J. W. M. Bush, *J. Fluid Mech.* **442**, 217 (2001).
- [33] H. Gelderblom, H. A. Stone, and J. H. Snoeijer, *Phys. Fluids* **25**, 102102 (2013).
- [34] D. Yamamoto, C. Nakajima, A. Shioi, M. P. Krafft, and K. Yoshikawa, *Nat. Commun.* **6**, 7189 (2015).
- [35] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.118.074504> for additional data with different systems, interferometry analysis of the thickness of the spreading film, measurements of the evaporation rates, estimates of the velocity fields and local observations of the unstable rim, which includes Refs. [16,36].
- [36] D. Vella and L. Mahadevan, *Am. J. Phys.* **73**, 817 (2005).
- [37] M. Roché, Z. Li, I. M. Griffiths, S. Le Roux, I. Cantat, A. Saint-Jalmes, and H. A. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 208302 (2014).
- [38] S. Le Roux, M. Roché, I. Cantat, and A. Saint-Jalmes, *Phys. Rev. E* **93**, 013107 (2016).
- [39] A. L. Bertozzi and M. P. Brenner, *Phys. Fluids* **9**, 530 (1997).
- [40] D. Takagi and H. E. Huppert, *J. Fluid Mech.* **647**, 221 (2010).
- [41] É. Reyssat and D. Quéré, *Europhys. Lett.* **76**, 236 (2006).
- [42] H. Aryafar and H. P. Kavehpour, *Phys. Rev. E* **78**, 037302 (2008).
- [43] <https://www.lutetium.paris/en/>.



Cite this: *Soft Matter*, 2017, **13**, 2876

Received 19th January 2017,
Accepted 23rd March 2017

DOI: 10.1039/c7sm00131b

rsc.li/soft-matter-journal

Buckling of elastomer sheets under non-uniform electro-actuation

Hadrien Bense, * Miguel Trejo, Etienne Reysat, José Bico and Benoît Roman

Dielectric elastomer sheets undergo in-plane expansion when stimulated by a transverse electric field. We study experimentally how dielectric plates subjected to a non-uniform voltage distribution undergo buckling instabilities. Two different configurations involving circular plates are investigated: plates freely floating on a bath of water, and plates clamped on a frame. We describe theoretically the out-of-plane deformation of the plates within the framework of weakly non-linear plate equations. This study constitutes a first step of a route to control the 3D activation of dielectric elastomers.

1 Introduction

Dielectric actuation was discovered in the 1880s by W. Röntgen,¹ but practical studies have started flourishing only recently after the seminal work from Pelrine *et al.*² In dielectric actuation, the opposing sides of a sheet of elastomer are coated with compliant electrodes. Applying a high voltage V to this soft capacitor tends both to compress the membrane across its thickness and to stretch its surface (Fig. 1). In contrast with piezoelectric ceramics, dielectric elastomers can undergo very high strains of up to 500%,³ which have inspired numerous potential applications ranging from bioinspired actuators^{4,5} to soft grippers,^{6,7} bearing-free motors⁸ or energy harvesting systems.^{9,10} However, dielectric elastomers are prone to electromechanical instabilities when high electric fields are applied. Thinning down the membrane indeed results in higher electric fields (for a fixed applied voltage) which amplifies the actuation and eventually leads to a “pull-in” instability and electrical breakdown.^{11,12} A common solution to avoid this destructive instability consists in strongly prestretching the membrane (up to 300%, depending on the elastomer used). Due to the non-linear elastic properties, the polymer stiffens when prestretched, which prevents the pull-in instability. Other types of instabilities are nevertheless common. Impressive shape bifurcations can for instance be observed in pressurised membranes.^{13–16} Harnessing buckling instabilities is moreover a key for many potential applications such as dynamic surface patterning,^{17,18} flow regulation in micro-fluidic devices,¹⁹ tuning of variable focal lenses²⁰ or haptic displays (*e.g.* Braille screens).^{21,22}

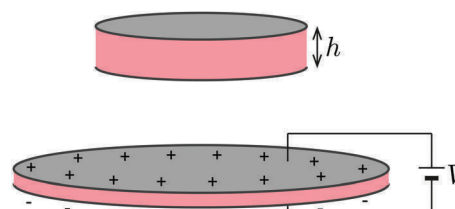


Fig. 1 Principle of dielectric actuation. A membrane of the dielectric elastomer (polyvinylsiloxane) is coated with conductive powder (carbon black) on both sides. As an electric field is applied to the membrane, the attraction between opposite charges on both sides and the repulsion of charges of the same sign on each side both tend to squeeze and stretch the membrane.

In the present study, we propose to investigate how a non-uniform spatial distribution of the applied voltage induces different out-of-plane buckling patterns. In contrast to most studies, buckling is here not due to the clamped edges of the polymer, but only to the inhomogeneous actuation of the membrane. Our experiments are inspired by recent works on the non-uniform growth of plant leaves or material swelling that leads to complex 3D shapes.^{23–25} The present study thus constitutes a first step towards 3D electrical morphing. Spectacular strains are generally obtained by applying strong mechanical tension prior to actuation. However, since such prestrains would hinder the formation of 3D shapes we do not apply any significant pre-stretch to the membrane.

We focus on model axisymmetric configurations where active circular domains are surrounded by passive materials with well-defined boundary conditions. Actuation is therefore non-homogeneous as one region is subjected to voltage while the rest of the membrane is not. In the first configuration, the membrane floats freely at the surface of a bath of water that plays the role of the counter-electrode (Fig. 2a).

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes (PMMH), CNRS, ESPCI Paris, PSL Research University, Sorbonne Université, Univ. Paris Diderot, Paris, France. E-mail: hadrien.bense@espci.fr

Paper

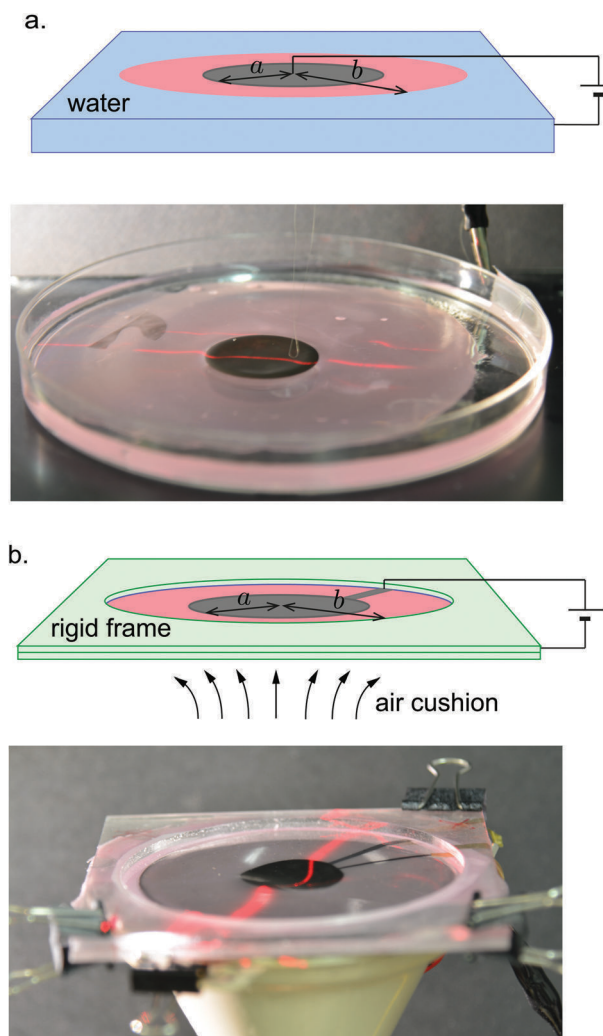


Fig. 2 Experimental configurations explored in this study. In both situations, the deflection of the membrane is monitored through the deviation of a laser sheet in oblique incidence. The black disk of radius a corresponds to the conductive part at the center of the pink membrane of radius b . (a) Disk floating on water. A single patch is coated on the upper side of the membrane and is connected to the generator. Water plays the role of the counter electrode and is connected to the ground. Surfactant molecules are added to the water to impose a fixed surface tension (of 30 mN m^{-1}) and increase the electric conductivity of the solution. (b) Disk clamped on a circular rigid frame. Conductive domains are symmetrically coated on both sides of the membrane. Air is gently blown from underneath to compensate for the weight of the membrane.

Nevertheless out-of-plane displacements of the membrane are limited by hydrostatic pressure. Using the analytical and numerical tools developed for this configuration, we investigate a second system where the membrane is clamped in a circular horizontal frame, the sagging effect of gravity being suppressed by applying a pressure Δp below the membrane (Fig. 2b). In contrast with most previous studies performed on thin pre-stretched DEAs that rely on nonlinear elasticity, we will use the weakly non-linear equations of thin elastic plates to investigate the buckled morphologies obtained with these configurations.

2 Spontaneous buckling of free floating plates

2.1 Dielectric membranes

The dielectric membranes used in the experiments are made of polyvinyl siloxane elastomers (Elite Double 8 from Zhermack). They are obtained by spin-coating a 4 ml mix of equal quantities of the “catalyst” and “base” liquids on a flat wafer of radius $b = 5 \text{ cm}$. Using a spinning rate of 300 to 600 rpm for 15 s provides membranes of thickness h ranging from 100 to $300 \mu\text{m}$. The Young’s modulus of the polymer, $E = 250 \pm 15 \text{ kPa}$, is estimated with a standard tensile test on a strip. Carbon black powder is manually deposited on the surface of the cured polymer with a brush through a circular stencil of radius a . The part covered with carbon black is referred to as the active part, whereas the remaining uncovered part of the membrane is designated as the passive part. The powder is applied until the black colour of the patch saturates. This coating is electrically conductive and its surface resistivity of a few hundred $\text{k}\Omega$ does not increase significantly upon additional applications of powder. Carbon black particles strongly adhere to the polymer so that the electrode preserves sufficient conductivity when stretched although we observe an increase of the resistivity of 500% for a typical strain of 40%. Nevertheless the resistivity recovers its initial value when the strain is released. The relative dielectric permittivity ϵ_r of PVS is accessed through a classical electrical measurement of the capacitance of a membrane coated with carbon black on both sides, leading to $\epsilon_r = 2.5 \pm 0.6$.

2.2 Experimental setup

Once carbon black powder has been applied on the upper face, the membrane is gently deposited at the surface of a bath of soapy water where it floats freely. The surface tension of pure water is 72 mN m^{-1} but easily drops as low as 50 mN m^{-1} due to various pollutants. We deliberately add surfactants to impose a low but controlled surface tension $\gamma \simeq 30 \text{ mN m}^{-1}$ and enhance the electric conductivity of water. The voltage is imposed through a thin metallic wire (of radius of $10 \mu\text{m}$) contacting lightly the circular electrode. The wire is connected to a high voltage amplifier (Trek model 609 – E) driven by a signal generator, while water is connected to the electrical ground and thus plays the role of a second compliant electrode. Indeed the charged carbon black electrode attracts opposite charges until the elastomer–water interface is equivalently charged. Voltages applied to the system typically range from 200 V to 5 kV. To measure out-of-plane deformations of the membrane, we use a laser sheet directed on the active part of the membrane with an oblique incidence. The deflections of the laser line are recorded using a camera placed above the setup and are directly proportional to the local vertical displacements of the membrane (Fig. 4). Note that all experiments (including the one of Section 4) are quasistatic. The applied voltage is increased with steps of 100 V for every 30 s, approximately. On these time scales, the response of PVS is purely elastic. Therefore we do not expect time to play any role in our experiments.

2.3 Electro-mechanical coupling

Applying an electric voltage V across the membrane results into two complementary effects: charges of the same sign exert an in-plane repulsion, whereas opposite charges attract each other through the thickness of the layer. Both contributions can be derived from energy considerations. The electrostatic energy of a capacitor is $\frac{1}{2}CV^2$, where C is the capacity. When the voltage V is fixed, an external generator provides an electrical work QV , where $Q = CV$ is the charge. The total electric energy under fixed voltage therefore reads for a planar capacitor:

$$\mathcal{U}_{\text{elec}} = \frac{1}{2}CV^2 - QV = -\frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r V^2 \frac{S}{h}$$

where $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ is the vacuum permittivity and S the area of the electrode. Differentiating $\mathcal{U}_{\text{elec}}$ with respect to h (keeping S and V constant) shows that the charged electrodes apply a compressive pressure:

$$p_{\text{elec}} = \frac{1}{S} \frac{\partial \mathcal{U}_{\text{elec}}}{\partial h} = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r \left(\frac{V}{h}\right)^2$$

Similarly, differentiating $\mathcal{U}_{\text{elec}}$ with respect to S (keeping h and V constant) results in a term equivalent to a negative surface tension:

$$2\gamma_{\text{elec}} = \frac{\partial \mathcal{U}_{\text{elec}}}{\partial S} = -\frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r \frac{V^2}{h}$$

where the factor 2 accounts for the two coated interfaces when we extend the analogy with the tension in a soap film. Although the effect of surface tension is generally neglected in solid mechanics, capillarity may deform very soft objects as demonstrated in flourishing recent studies.^{26,27}

What are the consequences of p_{elec} and γ_{elec} on a free membrane completely covered by an electrode (such as in Fig. 1)? Far from the edge, the effective negative surface tension results in a positive equibiaxial planar stress $\sigma_r = \sigma_\theta = -2\gamma_{\text{elec}}/h$. Besides, the electrical pressure leads to a compressive stress through the thickness, hence $\sigma_z = -p_{\text{elec}}$. The stresses in the membrane are therefore given by:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\sigma_z = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r \left(\frac{V}{h}\right)^2$$

For low enough deformations (in our experiment they are always less than 20%), linear Hooke's law applies and leads to the strain distribution:

$$e_r = e_\theta = \frac{-e_z}{1+2\nu} = \frac{1}{2E}\epsilon_0\epsilon_r \left(\frac{V}{h}\right)^2$$

where ν is the Poisson ratio of the material that constitutes the membrane.

The relevant terms of the strain tensor in setting the mechanics of a thin plate are limited to in-plane components ($e_r, e_\theta, e_{r\theta}$). The same in-plane strains are obtained when the plate is squeezed by a pressure $-\sigma_0$ and no surface tension, with

$$-\sigma_0 = \frac{1}{\nu} \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{2} \left(\frac{V}{h}\right)^2 \quad (1)$$

This equivalent pressure $-\sigma_0 = p_{\text{elec}}/\nu$ is larger than the actual electrostatic pressure. In the particular case of elastomers, the value of ν is close to 1/2, and the whole strain distribution (including in this particular case the thickness strain e_z) is then correctly reproduced by assuming that the electrostatic pressure is doubled and that there is no effect of surface tension. This simplifying picture is used in most studies of dielectric actuation.^{2,11,28} In this article, we study the case presented in Fig. 2a, where the electrodes (disk with radius a) do not cover entirely the elastic membrane (disk with radius $b \geq a$), and we show how this configuration can lead to buckling even if the boundaries of the membrane are free. In this more general problem, electrostatic forces can still be replaced by an equivalent pressure on the covering electrodes, even in non-planar solutions, as we demonstrate in another article²⁹ using variational methods.

In the following,

$$e_0 = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 = \frac{1}{2E}\epsilon_0\epsilon_r \left(\frac{V}{h}\right)^2 \quad (2)$$

will be called the "actuation strain" which is the strain that an unconstrained piece of active membrane would achieve in the absence of external mechanical loading. Note finally that e_0 can be generalized to other types of deformations such as thermal expansion, swelling or even biological growth.

2.4 Membrane stresses in the flat configuration: below the buckling threshold

Using the equivalent pressure derived above, we now estimate the strain distribution in the freely floating membrane illustrated in Fig. 2a. As the membrane is deposited at the surface of water, surface tension forces tend to stretch it. The corresponding induced strain is γ/Eh , where γ is the surface tension of water ($\gamma \simeq 30 \text{ mN m}^{-1}$, due to the presence of a surfactant in water), and is on the order of 10^{-3} . For a 200 μm thick membrane with free edges, an equivalent strain would be obtained when applying a voltage $(2\gamma h/\epsilon_0\epsilon_r)^{1/2} \sim 700 \text{ V}$. The actual impact of surface tension is therefore significant. However, the mechanics of the membrane remain linear before buckling. If we consider this slightly prestretched state as a reference for the membrane, we should discard the effect of surface tension when we derive the stresses and strains induced by the electric field. In this linear regime, both effects are simply additive. Additivity nevertheless fails as the membrane buckles. In Section 3 the reference state is the unstrained membrane, and the effect of surface tension is taken into account. We assume that the problem remains axisymmetric and that the membrane only undergoes in-plane deformations. Mechanical equilibrium reads:

$$\frac{\partial r\sigma_r}{\partial r} - \sigma_\theta = 0 \quad (3)$$

We note $u(r)$ the radial displacement. We impose the effective pressure $-\sigma_0$ according to eqn (1) in the active domain. Using

$E^* = E/(1 - \nu^2)$, Hooke's relation can be expressed as:

$$\sigma_r = E^*(e_r + \nu e_\theta) + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_z \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = E^*(\nu e_r + e_\theta) + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_z, \quad (5)$$

and includes $\sigma_z = \sigma_0$ in the active domain, and $\sigma_z = 0$ in the passive zone. In the case of radial in-plane displacements, the radial and orthoradial strains are related to the radial displacement $u(r)$: $e_r = du/dr$ and $e_\theta = u/r$, respectively. Inserting these strains into eqn (3) leads to the differential equation, valid separately in both active and passive regions:

$$r^2 u'' + ru' - u = 0. \quad (6)$$

where the symbol $'$ stands for the derivative with respect to r . Solutions of Lamé's equations^{30,31} are of the form $u(r) = \alpha r + \beta/r$, where the coefficients can be different in the active "A" ($r < a$) and passive "P" ($a < r < b$) zones and should be determined by matching the different boundary conditions.

We enforce the continuity of $u(r)$ and of $\sigma_r(r)$ (equilibrium condition) at the boundary $r = a$. The $1/r$ term should not be present in the active zone because of its divergence for $r = 0$. As a result, stresses and strains are equibiaxial in this region ($e_r = e_\theta = \alpha$ when $u = \alpha r$). Finally, this stress induced by activation vanishes at $r = b$ in the case of a freely floating membrane. Using these four conditions, we determine the corresponding constants α , β in both regions. We obtain in the active region the following displacement, strains and stresses:

$$u^A(r) = \frac{e_0}{2}(1 - \nu) \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) r$$

leading to

$$e_r^A = e_\theta^A = \frac{e_0}{2}(1 - \nu) \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) > 0$$

and

$$\sigma_r^A = \sigma_\theta^A = \nu \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) < 0$$

In this area, strains are extensional, but lower than e_0 , and stresses are compressive. Indeed, constraining the deformation of the active zone by a passive one logically results into compressive stresses. Similarly, the state of the passive zone is given by:

$$u^P(r) = e_0 \frac{a^2}{2} \left((1 - \nu) \frac{r}{b^2} + \frac{(1 + \nu)}{r} \right)$$

so that:

$$\sigma_r^P = \nu \frac{\sigma_0 a^2}{2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) < 0$$

$$\sigma_\theta^P = -\nu \frac{\sigma_0 a^2}{2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) > 0$$

In this passive region, the radial stress is compressive, whereas the orthoradial stress is tensile, both stresses decaying away

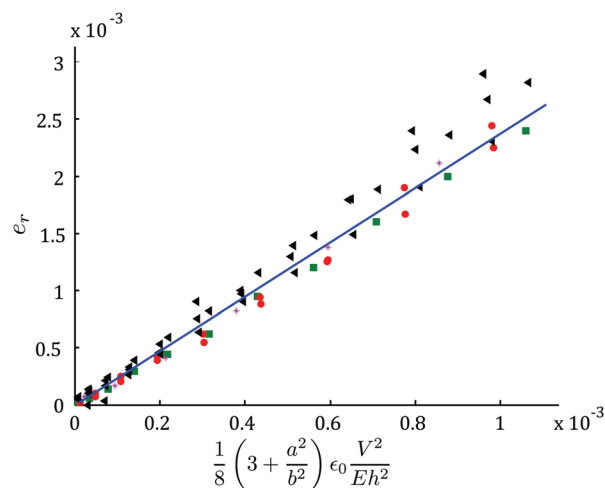


Fig. 3 Radial strain in the active zone as a function of $\frac{1}{8} \left(3 + \frac{a^2}{b^2} \right) \left(\frac{\epsilon_0 V^2}{E h^2} \right)$ for different thicknesses: (\ast) $h = 150 \mu\text{m}$, (\bullet) $h = 210 \mu\text{m}$, (\blacksquare) $h = 250 \mu\text{m}$, (\blacktriangleleft) $h = 260 \mu\text{m}$. The slope corresponds to the relative dielectric constant of the polymer ($\epsilon_r = 2.4$).

from the active patch (note the strong discontinuity in orthoradial stress and in radial strain at the boundary $r = a$).

A calibration of the electromechanical response of the membranes requires a precise estimation of the strain field, which is carried out through Digital Image Correlation (DIC). Talc powder is lightly sputtered on the surface of the membrane in order to obtain random spots of typical size $50 \mu\text{m}$. Pictures of the membrane are taken using a digital camera with a resolution of $20 \mu\text{m}$ per pixel. We use Correli DIC software³² to obtain the deformations $e_r = e_\theta$ of the membrane in the active zone ($r/a < 1$). In order to validate the theoretical description, we finally plot e_r as a function of the theoretical strain divided by $\epsilon_r: e_r^{\text{theo}}/\epsilon_r = \frac{1}{8} \left(3 + \frac{a^2}{b^2} \right) \left(\frac{\epsilon_0 V^2}{E h^2} \right)$, for $\nu = 1/2$. Within low enough strains, the experimental strains obtained for several values of a and h collapse on a straight line of slope $\epsilon_r = 2.4 \pm 0.1$, which confirms our electrical measurements (see Fig. 3). However, it is visible that collapse starts to deteriorate for higher strains. This scatter might be due to some non-linear effect (including the buckling of the membrane), or to a systematic error on the measurement. In the following section, we describe the buckling threshold and the deflection of the membrane.

3 Out of plane buckling

3.1 Experimental observations

As the applied voltage is increased, the active part tends to expand, in conflict with the external passive zone so that radial compressive stresses build up along the whole membrane. As a consequence, the membrane undergoes an axisymmetric buckling instability above a critical applied voltage. In contrast with classical Euler buckling where a compressed beam is bent along its whole length, we observe that buckling is localized inside the active zone in the vicinity of its boundary (Fig. 4a). We also observe that the global mode of the instability depends on the size of the active zone.

Rising the voltage beyond the buckling threshold induces an increase of the amplitude but does not modify this mode (Fig. 4b).

The deflection of the membrane is limited by its bending rigidity and also by the hydrostatic pressure of the underneath water. As in other systems involving compressed floating sheets, we expect buckling modes to be dictated by a competition between bending stiffness and gravity.^{33,34} Balancing both effects

leads to an elastogravity length scale, $\ell_{eg} = 2\pi \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho g} \right)^{1/4}$,

which sets the wavelength of the incipient buckling mode of a long 1D strip floating on water. For a typical membrane of thickness $h = 200 \mu\text{m}$, we obtain $\ell_{eg} \approx 1.4 \text{ cm}$. In Fig. 4a, we use ℓ_{eg} as a scale bar. We observe that the buckling pattern is localized and the width of the corresponding annulus is comparable with this length scale for $a \gg \ell_{eg}$. Conversely, the deformation involves the whole diameter of the active zone for lower values of a . To assess the onset of the buckling threshold and its evolution, we monitor the profile as a function of the applied voltage (Fig. 4b). We characterize this actuation by the actuation strain e_0 (see eqn (2)) that we compare with the critical compressive strain leading to the buckling of a long 1D strip lying on

water, $e_{1D} = \left(\frac{\rho gh(1-\nu^2)}{3E} \right)^{1/2} = \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{h}{\ell_{eg}} \right)^2$. Results are displayed as dots in Fig. 5.

The evolution of the amplitude is not as sharp as in the case of a classical pitchfork transition that we would expect for the buckling of the membrane. We interpret this smoother transition as a consequence of imperfections, due for instance to a slight deformation of the membrane caused by its contact with the wire and to the possible migration of charges outside the active region. A critical applied voltage (*i.e.* a critical actuation strain in the graph) for the buckling threshold can nevertheless be estimated. In the following section we develop the non-linear equations describing this electro-activated buckling.

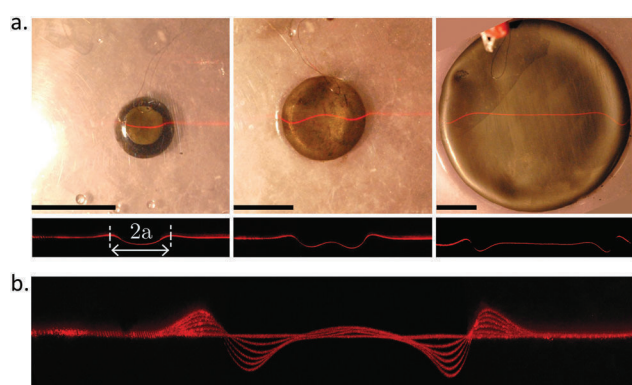


Fig. 4 (a) Different buckling profiles at $V = 5 \text{ kV}$ and $h = 210 \mu\text{m}$, for different radii of the active zone (from left to right: $a = 0.5 \text{ cm}$, $a = 1 \text{ cm}$, $a = 3 \text{ cm}$). The upper row is a picture of the membrane taken from above, while the lower one highlights the profile of the membrane. Scale bar: elastogravity length scale $\ell_{eg} = 2\pi \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho g} \right)^{1/4} \approx 1.4 \text{ cm}$. (b) Superposition of laser profiles obtained for increasing applied voltage (from 0 kV to 5 kV, $h = 210 \mu\text{m}$, $a = 1.5 \text{ cm}$). While the amplitude of the instability increases progressively, the global buckling mode remains the same.

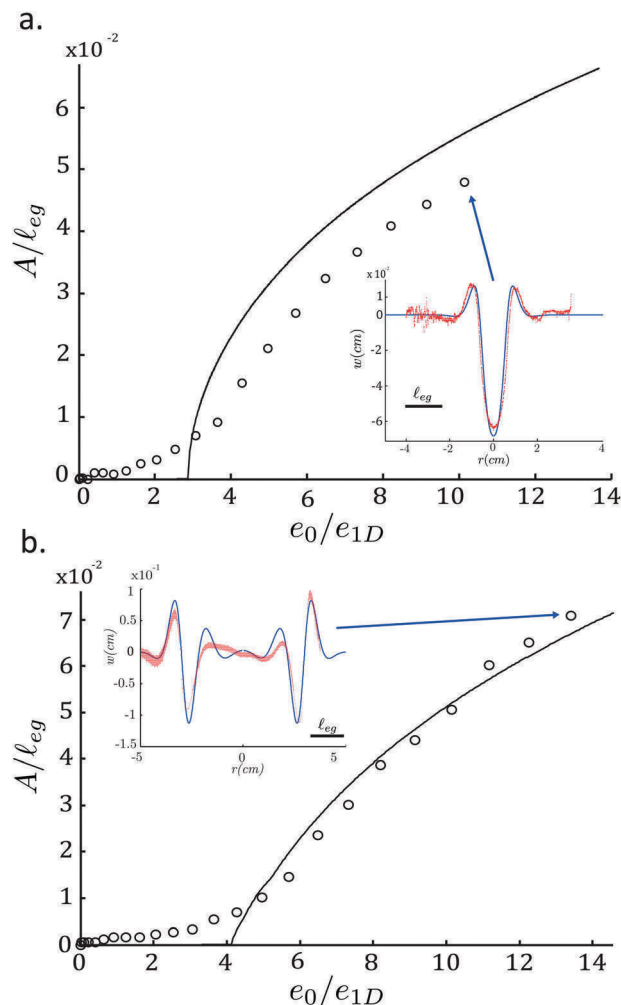


Fig. 5 Maximal amplitude A of the deflection normalized by ℓ_{eg} as a function of the applied voltage characterised by e_0/e_{1D} . Experimental data (circles) are compared to numerical integration of eqn (7) and (8) (continuous line) for a membrane of thickness $200 \mu\text{m}$. We did not use any fitting parameter. Inset: Superposition of numerical (blue) and experimental (red) profiles at the point indicated by the arrow. (a) $a = 6 \text{ mm}$, (b) $a = 30 \text{ mm}$.

3.2 Non-linear equations for the buckled state

We now describe the buckling and post-buckling evolution of the system, using axisymmetric weakly non-linear plate equations. Because strains remain low in our experiments, we will consider the whole system as a plate with a uniform thickness. We also follow the assumption of Föppl-Von Kármán plate equations which considers that out-of-plane displacement $w(r)$ is coupled to in-plane strains.³⁰ We first write the equilibrium of membrane stresses in the frame of reference of the plate, assuming that the slope is small ($w' \ll 1$). The radial strain now reads $e_r = u' + w'^2/2$, while $e_\theta = u/r$ remains unchanged. Using Hooke's relations (eqn (4) and (5)), in-plane equilibrium in eqn (3) now leads to:

$$r^2 u'' + ru' - u + \frac{1-\nu}{2} r w'^2 + r^2 w' w'' = 0. \quad (7)$$

which is valid separately in the active and in the passive zone. The second equation accounts for the torque balance of the plate, which in this axisymmetric case reads:³⁵

$$D\Delta^2 w = N_r w'' + N_\theta \frac{w'}{r} + q \quad (8)$$

where $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ is the flexural rigidity, and $N_r = h\sigma_r$ and $N_\theta = h\sigma_\theta$ are the in-plane forces per unit length, which contain the electrical actuation, since they derive from eqn (4) and (5). The last term $q = -\rho g w$ corresponds to the hydrostatic pressure of the lifted water. In addition to the boundary conditions mentioned in the previous section, 4 other conditions have to be implemented to solve the non-linear coupled differential eqn (7) and (8).³⁴ Symmetry imposes $w'(0) = w''(0) = 0$. The effect of surface tension is taken into account through in-plane stresses applied as boundary conditions. At the edge of the membrane, the radial tension balances the surface tension of water $N_r(b) = \gamma$ and in the absence of momentum the curvature along the radial direction vanishes, $w''(0) = 0$. We solve these coupled system equations using the `bvp4c` routine from Matlab.

3.3 Numerical results versus experiments

For high enough loads, out-of-plane equilibrium profiles of the membrane are obtained. We represent in the inset of Fig. 5 the profiles calculated (without any adjustable parameter) for the highest values of e_0 achieved experimentally: $V = 4000$ V, *i.e.* $e_0 = 1.7 \times 10^{-2}$ for $a = 6$ mm and $V = 5000$ V, *i.e.* $e_0 = 2.7 \times 10^{-2}$ for $a = 30$ mm. Both profiles are non-dimensionalized by ℓ_{eg} and compared with the corresponding experimental profiles (in red). The agreement between experiments and numerical calculations is fairly good although the small oscillations predicted for the wider active zone are not perfectly observed in the experiment. We interpret this minor discrepancy as a consequence of slight inhomogeneities of the membrane. We determine the maximum amplitude of the calculated profile for decreasing loads and compare it to the experimental data (Fig. 5). Although the numerical estimation reasonably matches the experimental data, the predicted transition to the out-of-plane state is sharper than the experimental one as we would expect for a perfect bifurcation instability.

Since our model captures correctly the physics of the problem, we now use it to determine how the buckling threshold depends on the size of the active region. Dimensional analysis of eqn (4)–(8) shows that the normalized critical actuation strain e_{0c}/e_{1D} should be a function of Poisson's ratio ν and the two non-dimensional parameters $(a/b, \ell_{eg}/b)$ if the surface tension of water is neglected. The additional traction induced to the membrane by capillarity tends to increase the threshold and involves an extra non-dimensional parameter $\gamma b^2/\rho g \ell_{eg}^4$. We represent in Fig. 6 the prediction of the threshold e_{0c}/e_{1D} as a function of the aspect ratio a/b for a particular case relevant for our experiments corresponding to $h = 210$ μm and $b = 5$ cm, *i.e.* $(\ell_{eg}/2b = 0.14$ and $\gamma b^2/\rho g \ell_{eg}^4 = 7.8)$. Note that this plot is not universal and is shifted for different values of the two non-dimensional parameters.

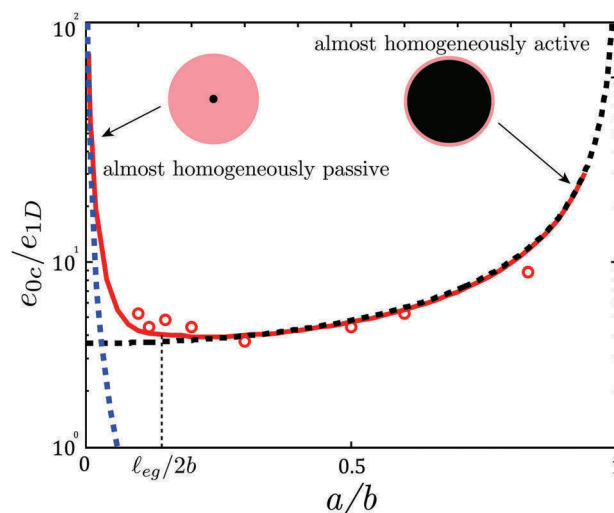


Fig. 6 Normalized critical buckling (actuation strain as a function of the aspect ratio) for the particular case $h = 210$ μm and $b = 5$ cm (*i.e.* $\ell_{eg}/2b = 0.14$ and $\gamma b^2/\rho g \ell_{eg}^4 = 7.8$). Red line: numerical resolution of eqn (4)–(8). Circles: experimental data. Blue dotted line: fit with the simplified form (eqn (9)) $f(x) = \frac{3.3 \times 10^{-3}}{x^2(x^2-1)}$ corresponding to the limit $2a \ll \ell_{eg}$ (*i.e.* $a/b \ll 0.07$ for our system). Black dotted line: fit with the simplified form (eqn (10)) $g(x) = \frac{3.62}{1-x^2}$ corresponding to the opposite limit $2a \gg \ell_{eg}$.

Two regimes may be identified as the diameter of the active zone is compared with ℓ_{eg} .

(i) In the case $2a \ll \ell_{eg}$, the membrane buckles along a length scale a . In terms of orders of magnitude, the critical stress is expected to scale as $\sigma_c \sim -E \frac{h^2}{a^2}$ as in classical Euler buckling.³⁶ If we use the stress computed for the active region before buckling, $\sigma_r = \frac{1}{2} E e_0 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)$, we deduce:

$$e_{0c} \sim \frac{h^2}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad \text{i.e.} \quad \frac{e_{0c}}{e_{1D}} \sim \left(\frac{\ell_{eg}}{b} \right)^2 \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad (9)$$

This expression is represented by the blue dashed line in Fig. 6 with a fitting prefactor to match the numerical results. This simplified scaling law thus correctly captures the divergence of critical active strain for buckling as the size of the active zone vanishes.

(ii) In the opposite case $2a \gg \ell_{eg}$, buckling occurs on a typical size ℓ_{eg} . The critical stress is now expected to scale as $\sigma_c \sim -E \frac{h^2}{\ell_{eg}^2}$, which leads for the critical actuation strain:

$$\frac{e_{0c}}{e_{1D}} \sim \frac{1}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad (10)$$

This relation is plotted as a black dashed line in Fig. 6 with a numerical prefactor fitted to the numerics. The matching with the numerically computed threshold is very good. As intuitively expected, the critical actuation strain diverges in both limits

$a \rightarrow 0$ and $a \rightarrow b$, where the system is almost homogeneous. In the first limit, stronger stresses are required as smaller buckling lengths are considered. Conversely, buckling tends to be suppressed as the constraining role of the passive zone gets relatively weaker. We note finally that the buckling threshold is nearly constant in the range $\ell_{eg}/2 < a < 0.7b$, $e_c \simeq 0.5e_{1D}$. In this limit, the compressive stresses due to activation are indeed on the order of $\sigma_r \sim Ee_0$ (independently of a/b), and have to match the critical buckling stress $\sigma_c \sim Ee_{1D}$. Our experimental data lie mostly in this regime (circles in Fig. 6). They are in fair agreement with these predictions without any adjustable parameter.

4 Buckling of clamped plates

The previous floating free configuration is interesting as a model case since the different physical ingredients leading to the buckling instability can be precisely quantified. However, most practical applications involve a membrane held on a frame. In this section, we study the buckling of a clamped membrane, subjected to a non homogeneous voltage distribution. In contrast with many studies from the literature conducted with highly prestretched membranes,^{2,37} we tried to limit prestress as much as possible. We will nevertheless evaluate how slight residual stresses may modify significantly the mechanical behaviour of the membrane.

4.1 Experimental set-up and preliminary observations

The membranes are prepared following the same procedure as in the previous configuration. Opposite conductive patches of radius a are now coated on each side of the membrane. In order to limit possible strains due to the manipulation of the membrane during the framing step, we lay an annulus cut in thick paper on the spin-coated layer before curing. The liquid polymer penetrates the paper, which enhances the adhesion of the cured membrane on the flexible paper frame. The reinforced membrane can then be peeled and manipulated without inducing additional strain. The polymeric sheet is finally clamped in a rigid acrylic frame with a circular opening of radius $b = 5$ cm and held horizontally. The membrane would tend to sag over its own weight leading to an induced strain on the order of $(\rho_p g R/E)^{2/3} \sim 2.5 \times 10^{-2}$, where ρ_p is the density of the polymer. This strain is large compared with the typical buckling strain, as we will see. Therefore, in order to compensate for this additional tension, we gently blow air from underneath. The pressure of this air cushion is tuned until the profile of the membrane monitored with the laser sheet appears uniformly flat (Fig. 2b). First experimental observations show that buckling occurs beyond a critical voltage that decreases as wider active domains are considered. We also observe that the buckled profiles obtained with this configuration take the axisymmetric shape of a dome localised in the active region. In the following section we compare the observed profiles with the theoretical framework adapted from the previous free floating configuration.

4.2 Theoretical buckling in the clamped membranes

The equations dictating the shape of the membrane are the same as in the previous configuration. In the absence of hydrostatic pressure, the q term in eqn (8) now vanishes. Clamping the membrane in a frame also modifies the boundary conditions: $u(r = b) = w(r = b) = w'(r = b) = 0$. Using these equations, we calculate the critical buckling actuation strain e_{0c} for values of a/b ranging from 0.01 to 1. This last case corresponds to the classical derivation from Timoshenko:³⁶ $e_{0c} \simeq \frac{14.7}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2} \simeq 0.82 \frac{h^2}{a^2}$. We thus represent in Fig. 7 the value of e_{0c} normalized by $(h/a)^2$ as a function of a/b . The data from the numerics are well represented by an empirical relation:

$$e_{0c} = \frac{h^2}{a^2} \left(0.27 + 0.56 \frac{a}{b} \right) \quad (11)$$

Counter-intuitively, buckling is relatively easier for a small patch than for a wider one. Indeed, out of plane deformation is not strictly bound to the active zone and can also involve part of the passive one, leading to a lower buckling threshold.

The buckling actuation strain measured in our experiments is however 5 to 100 times higher than expected from these numerical calculations (Fig. 8). We interpret this significant shift as due to the prestrain induced during the curing stage.³⁸ We estimate this strain through DIC by comparing a membrane initially clamped to a paper frame and then released. We evidence a prestrain e_p on the order of 2×10^{-3} , which is large in comparison with typical values predicted for the buckling strain ($e_{0c} \sim 10^{-3}$). As a conclusion, although the paper frame limits additional non-uniform prestrains due to the manipulation of the membrane, a uniform prestrain is still present in the samples. In the following section, we therefore include an initial extensional prestrain e_p in the calculation to better capture the features experimentally observed.

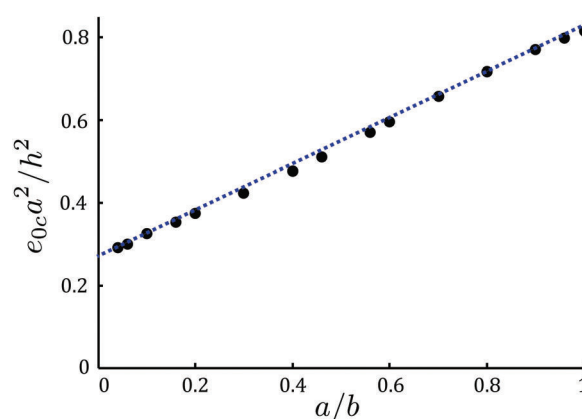


Fig. 7 Numerical prediction of the normalized critical buckling strain $e_{0c} a^2 / h^2$ as a function of the aspect ratio a/b , for a clamped plate, in the absence of gravity or prestrain. The data are well fitted by a linear regression: $e_{0c} = \frac{h^2}{a^2} \left(0.27 + 0.56 \frac{a}{b} \right)$. For $a = b$, we recover Timoshenko's classical result $e_{0c} \sim 0.83 \frac{h^2}{a^2}$ for the buckling of a clamped disk.

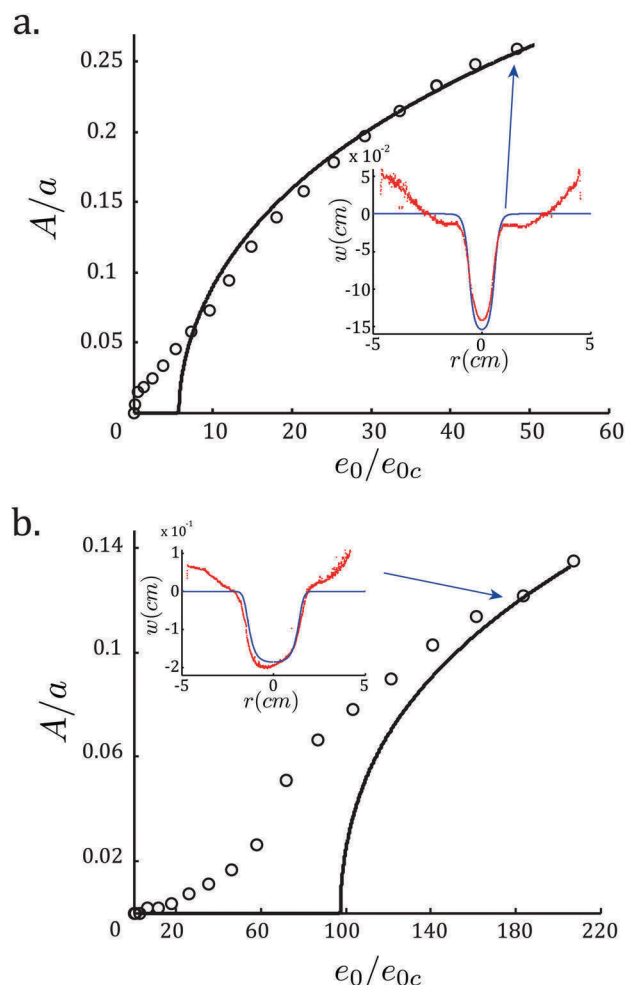


Fig. 8 Circles: normalized amplitude of the deflection A/a as a function of the applied strain normalized by the value predicted by eqn (11) e_0/e_{0c} . Continuous line: numerical resolution (eqn (7)–(8)). Inset: Superposition of numerical (blue line) and experimental profiles (red dots) for the point indicated by the arrow. (a) $h = 150 \mu\text{m}$, $a = 6 \text{ mm}$, $e_p = 0.0007$, $e_c = 2.11 \times 10^{-4}$ (inset $V = 3600 \text{ V}$, i.e. $e_0 = 0.03$). (b) $h = 150 \mu\text{m}$, $a = 15 \text{ mm}$, $e_p = 0.004$, $e_c = 4.38 \times 10^{-4}$ (inset $V = 3400 \text{ V}$, i.e. $e_0 = 0.027$).

4.3 Comparison of the amplitude and the mode shape

As in the previous floating configuration, the profiles of the membranes are deduced from the deflection of the laser line (insets in Fig. 8). Membranes are mainly deformed in the active region, although residual sagging is also present in the passive part. We also plot the normalized amplitude of the deflection A/a as a function of the applied strain normalized by the predicted value corresponding to eqn (11) (without any prestrain). The bifurcation is quite imperfect and extrapolated thresholds are 5 to 100 times larger than expected. In order to provide a better comparison between the numerical resolution of eqn (7) and (8) and the experimental data, we added a uniform prestrain e_p , which results in a boundary condition $N_r(r=b) = \frac{Eh}{1-\nu}e_p$. For each sample e_p is tuned to obtain a good match between the calculated and observed profiles.

The fitting prestrain values range from 7×10^{-4} to 4×10^{-3} , which is in agreement with the values obtained through DIC.

The comparison between experiments and numerical calculations shows us the important impact of prestrain on the buckling behaviour of the membrane that we study in more detail in the following section.

4.4 Buckling in a prestretched membrane

In the absence of prestrain, the radial stress in the active region is given, before buckling, by the integration of eqn (3)–(6)

(in-plane deformation): $\sigma_r = \frac{E}{1-\nu} \left[-e_0 \left(\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) + 1 \right) \right]$.

Adding a prestrain e_p shifts the stress by the quantity

$\sigma_r^p = \frac{E}{1-\nu} e_p$. We plot in Fig. 9 the critical actuation strain e_{0c}

as a function of $(h/a)^2$ for different values of the prestrain and a fixed aspect ratio $a/b = 0.1$. Without prestrain e_{0c} varies linearly with $(h/a)^2$ for a fixed value of a/b as commented in Fig. 7. One obvious consequence of the prestrain is to shift the critical load to higher values as expected from the shift in stresses. For a better comparison, we define an effective strain $e = e_0 - \eta e_p$,

with $\eta = \left(\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) + 1 \right)^{-1} \simeq 3.9$, which accounts for the prestrain. Hence, when $e > 0$ the voltage induced strain is

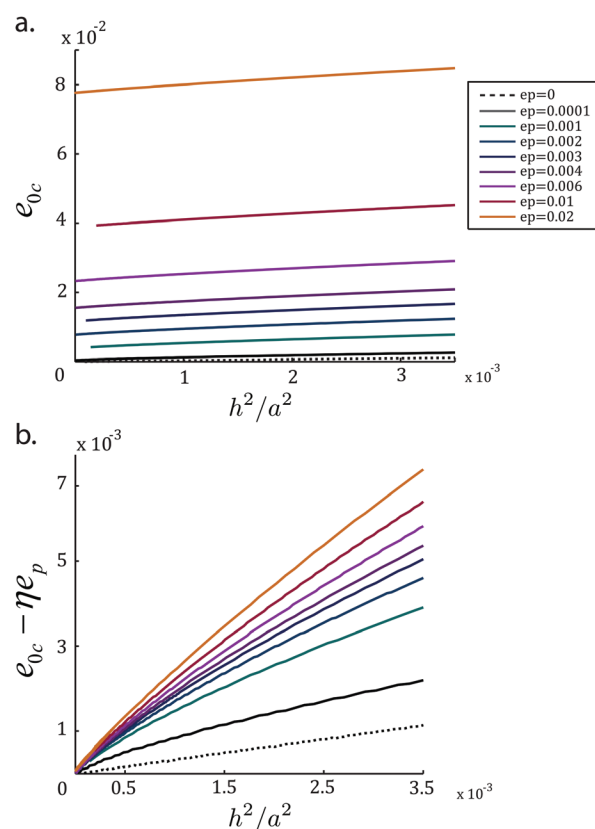


Fig. 9 Numerical study of the effect of the prestrain on the buckling threshold. (a) Buckling threshold e_{0c} as a function of $(h/a)^2$ for different values of the prestrain. The aspect ratio a/b is arbitrary set to 0.1 for all cases. (b) Evolution of the effective strain $e_c - \eta e_p$ as a function of $(h/a)^2$ for various values of the prestrain. For $e_p = 0$ (dashed line) e_c varies linearly with $(h/a)^2$. However this proportionality is lost when $e_p > 0$.

compressive enough to compensate for the initial prestrain. The plots of effective strain at buckling as a function of h^2/a^2 do not collapse on a same master curve and the linear dependence with $(h/a)^2$ is lost. The effect of prestrain is therefore not simply additive. Indeed, the stresses induced by the electrostatic loading are not equi-biaxial in the passive part of the membrane, and therefore do not simply compensate the prestress. This effect is modest in the present case, however practical applications can involve highly prestretched membranes to avoid pull-in instabilities. Although exploring the non-linear elastic domain is beyond the scope of the current work, we highlighted the fact that the consequences of prestrain in activated membranes are non-trivial.

4.5 Secondary buckling bifurcation

So far, our experiments were restricted to the limit of small slopes $w' \ll 1$, *i.e.* to moderate applied loads. Although non-linear buckling instabilities were observed, axisymmetry was maintained in the observed patterns. An interesting secondary instability is however observed in the last case of membranes held on a rigid frame. Beyond a second critical voltage, azimuthal wrinkles appear at the border of the active zone (Fig. 10). Within the range of our experimental parameters (V is limited to 5 kV), these wrinkles are only observed for sufficiently large active patches (typically $a > 1.5$ cm for $h = 150$ μm). Provided that the prestrain in the membrane is sufficiently homogeneous (and low), their wavelength is well-defined and does not evolve significantly with the applied voltage. We did not observe the secondary instability with the membrane floating on water, presumably because we were not able to reach higher voltages with our setup. The observed pattern is very reminiscent of the wrinkles observed when inflating a mylar balloon³⁹ or at the edges of a very thin sheet deposited at the curved surface of a droplet of water.⁴⁰ Similar wrinkles have been reported in dielectric polymers as the

load is released after a very high deformation.¹⁴ Such wrinkles are the consequence of compressive orthoradial stresses. Numerical calculations of the azimuthal stress σ_θ indeed show the presence of high compressive stress at the edges of the active zone. Nevertheless the description of the buckling threshold and the value of the observed wavelength still remain open questions.

5 Concluding remarks

We have shown in this study how a non-uniform voltage distribution can trigger buckling instabilities in free floating, or clamped dielectric elastomeric sheets. In the first configuration, the interplay between hydrostatics and the bending stiffness of the membrane provides a length scale to the problem. If the diameter of the active zone is large in comparison with this elastogravity length, the buckling is localized in the vicinity of the border of the active zone. The typical width of the wrinkles is then set by the elastogravity length. In the opposite situation, a dimple is formed at the center of the buckled active zone. We find that the instability is favored (lower threshold) when actuation is truly heterogeneous: almost fully active or fully passive configuration is less prone to buckling (see Fig. 6).

In the second configuration the membrane is clamped in a frame. In the absence of gravity, the relevant length scale becomes the size of the system and more specifically, the diameter of the active zone. A first bifurcation then leads to the out-of-plane buckling of the active zone into an axisymmetric dome. For higher voltages, we observe a secondary instability: azimuthal wrinkles appear at the border of the active zone and grow as the voltage is further increased. In both configurations, buckling mechanics can be captured by solving the Föppl-Von Kármán equations in which the electrical effect is rendered through an “actuation” strain proportional to the square of the applied voltage. We validated this numerical approach with a fair comparison with our experimental results. Using this tool, we could study in detail the effect of a small prestrain in the buckling behaviour of the membranes. However, further work will probably be necessary to extend our study to the very large prestrain applied in many studies.

We believe that our results constitute a first step towards the use of dielectric elastomers as model systems to study mechanical instabilities triggered by non-uniform in-plane actuation. Applying a voltage modifies the metrics of the dielectric membrane in the same manner as thermal expansion, swelling or biological growth would. In terms of applications, such actuators could be used to obtain 3D shapes through electro-mechanical instabilities.

Acknowledgements

This work was partially funded by the Interuniversity Attraction Poles Programme (IAP 7/38 MicroMAST) initiated by the Belgian Science Policy Office and the French ANR SMARt.

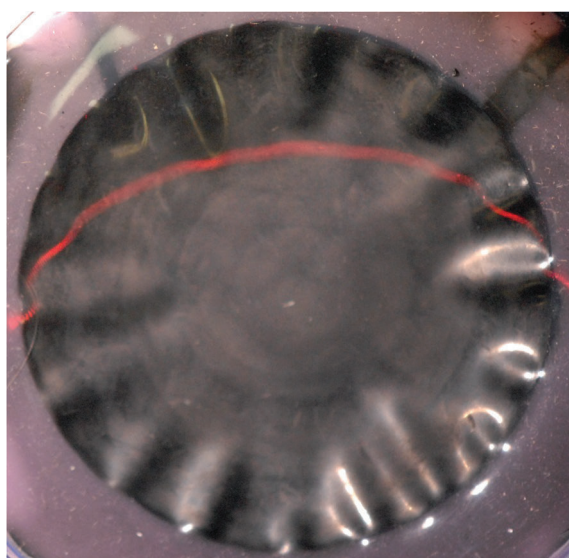


Fig. 10 Secondary instability leading to regular azimuthal wrinkles near the edges of the active region ($a = 3$ cm, $h = 150$ μm , $V = 5$ kV).

We thank Bruno Sécordel for his initial experiments with dielectric membranes that lead to this study.

References

- 1 C. Keplinger, M. Kaltenbrunner, N. Arnold and S. Bauer, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2010, **107**, 4505–4510.
- 2 R. Pelrine, R. Kornbluh, Q. Pei and J. Joseph, *Science*, 2000, **287**, 836–839.
- 3 J. Huang, T. Li, C. Chiang Foo, J. Zhu, D. R. Clarke and Z. Suo, *Appl. Phys. Lett.*, 2012, **100**, 041911.
- 4 F. Carpi and D. D. Rossi, *Bioinspiration Biomimetics*, 2007, **2**, S50–S63.
- 5 F. Carpi, G. Frediani, S. Turco and D. De Rossi, *Adv. Funct. Mater.*, 2011, **21**, 4152–4158.
- 6 O. A. Araromi, I. Gavrilovich, J. Shintake, S. Rosset, M. Richard, V. Gass and H. R. Shea, *ASME Transactions on Mechatronics*, 2015, **20**, 438–446.
- 7 J. Shintake, S. Rosset, B. Schubert, D. Floreano and H. Shea, *Adv. Mater.*, 2016, **28**, 231–238.
- 8 B. M. O'Brien, E. P. Calius, T. Inamura, S. Q. Xie and I. A. Anderson, *Appl. Phys. A: Mater. Sci. Process.*, 2010, **100**, 385–389.
- 9 C. Foo, S. J. A. Koh, C. Keplinger, R. Kaltseis, S. Bauer and Z. Suo, *J. Appl. Phys.*, 2012, **111**, 094107.
- 10 J. Huang, S. Shian, Z. Suo and D. R. Clarke, *Adv. Funct. Mater.*, 2013, **23**, 5056–5061.
- 11 Z. Suo, *Acta Mech. Solida Sin.*, 2010, **23**, 549–578.
- 12 J. Zhu, M. Kollosche, T. Lu, G. Kofod and Z. Suo, *Soft Matter*, 2012, **8**, 8840–8846.
- 13 C. Keplinger, T. Li, R. Baumgartner, Z. Suo and S. Bauer, *Soft Matter*, 2012, **8**, 285–288.
- 14 G. Mao, X. Huang, M. Diab, T. Li, S. Qu and W. Yang, *Soft Matter*, 2015, **11**, 6569–6575.
- 15 X. Liang and S. Cai, *J. Appl. Mech.*, 2015, **82**, 101002.
- 16 H. Zhao, J. Zhao, J.-W. Zha, Z.-F. Zhang, D.-R. Wang and Z.-M. Dang, *J. Adv. Phys.*, 2013, **2**, 13–19.
- 17 Q. Wang and X. Zhao, *Phys. Rev. E: Stat., Nonlinear, Soft Matter Phys.*, 2013, **88**, 042403.
- 18 X. Zhao and Q. Wang, *Appl. Phys. Rev.*, 2014, **1**, 021304.
- 19 B. Tavakol, M. Bozlar, C. Punckt, G. Froehlicher, H. A. Stone, I. A. Aksay and D. P. Holmes, *Soft Matter*, 2014, **10**, 4789–4794.
- 20 S.-i. Son, D. Pugal, T. Hwang, H. R. Choi, J. C. Koo, Y. Lee, K. Kim and J.-D. Nam, *Appl. Opt.*, 2012, **51**, 2987–2996.
- 21 P. Chakraborti, H. K. Toprakci, P. Yang, N. Di Spigna, P. Franzon and T. Ghosh, *Sens. Actuators, A*, 2012, **179**, 151–157.
- 22 S. Vishniakou, B. W. Lewis, X. Niu, A. Kargar, K. Sun, M. Kalajian, N. Park, M. Yang, Y. Jing, P. Brochu, Z. Sun, C. Li, T. Nguyen, Q. Pei and D. Wang, *Sci. Rep.*, 2013, **3**, 2521.
- 23 J. Dervaux and M. Ben Amar, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **101**, 068101.
- 24 Z. L. Wu, M. Moshe, J. Greener, H. Therien-Aubin, Z. Nie, E. Sharon and E. Kumacheva, *Nat. Commun.*, 2013, **4**, 1586.
- 25 J. Kim, J. A. Hanna, M. Byun, C. D. Santangelo and R. C. Hayward, *Science*, 2012, **335**, 1201–1205.
- 26 E. R. Jerison, Y. Xu, L. A. Wilen and E. R. Dufresne, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **106**, 186103.
- 27 S. Karpitschka, A. Pandey, L. A. Lubbers, J. H. Weijss, L. Botto, S. Das, B. Andreotti and J. H. Snoeijer, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2016, **113**, 7403–7407.
- 28 P. Ronald, K. Roy and J. Jose, *Sens. Actuators, A*, 1998, **64**, 77–85.
- 29 H. Bense, B. Roman, J. Bico and B. Andreotti, in prep., 2017.
- 30 S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, 2nd edn, 1959.
- 31 B. Audoly and Y. Pomeau, *Elasticity and Geometry: From hair curls to the non-linear response of shells*, OUP Oxford, 2010.
- 32 <http://www.correli-stc.com/>.
- 33 L. Pocivavsek, R. Dellsy, A. Kern, S. Johnson, B. Lin, K. Y. C. Lee and E. Cerda, *Science*, 2008, **320**, 912–916.
- 34 M. Piñeirua, N. Tanaka, B. Roman and J. Bico, *Soft Matter*, 2013, **9**, 10985–10992.
- 35 E. H. Mansfield, *The bending and stretching of plates*, Cambridge university press, 1989.
- 36 S. Timoshenko and J. Gere, *Theory of elastic stability*, Dover, 2nd edn, 1961.
- 37 S. Bauer, S. Bauer-Gogonea, I. Graz, M. Kaltenbrunner, C. Keplinger and R. Schwödiauer, *Adv. Mater.*, 2014, **26**, 149–162.
- 38 Y. Xia and G. M. Whitesides, *Annu. Rev. Mater. Sci.*, 1998, **28**, 550–575.
- 39 W. H. Paulsen, *The American Mathematical Monthly*, 1994, **101**, 953–958.
- 40 H. King, R. D. Schroll, B. Davidovitch and N. Menon, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2012, **109**, 9716–9720.

Bibliographie

- [1] B. AUDOLY & Y. POMEAU; *Elasticity and Geometry : From hair curls to the non-linear response of shells* (OUP Oxford) (2010). viii, 47, 69, 98
- [2] J. GORDON; *Structures : Or Why Things Don't Fall Down* (Da Capo Press) (2009); ISBN 9780786730353. <https://books.google.fr/books?id=8p5xgPPJIRYC>. 1
- [3] E. GUYON, J. HULIN & L. PETIT; *Hydrodynamique physique; Savoirs actuels* (EDP Sciences) (2001); ISBN 9782868835024. <https://books.google.fr/books?id=ma8Me9pe1-MC>. 5
- [4] S. TIMOSHENKO & S. WOINOWSKY-KRIEGER; *Theory of plates and shells; 2^e édition* (McGraw-Hill) (1959). 10, 47, 52, 103
- [5] A. ARZA, R. SCHROLL & E. CERDA; «Near and far from the threshold analysis of rectangular elastic plates»; *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **46** (2013). ISSN 1751-8113. 13
- [6] R. POMEROY; «The effect of anticlastic bending on the curvature of beams»; *International Journal of Solids and Structures* **6**, p. 277–285 (1970). 13
- [7] J. DERVAUX & M. BEN AMAR; «Morphogenesis of Growing Soft Tissues»; *Phys. Rev. Lett.* **101**, p. 068101 (2008). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.068101>. 21
- [8] H. LIANG & L. MAHADEVAN; «Growth, geometry, and mechanics of a blooming lily»; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **108**, p. 5516–5521 (2011). <http://www.pnas.org/content/108/14/5516.abstract>; <http://www.pnas.org/content/108/14/5516.full.pdf>. 21
- [9] Y. KLEIN, E. EFRATI & E. SHARON; «Shaping of Elastic Sheets by Prescription of Non-Euclidean Metrics»; *Science* **315**, p. 1116–1120 (2007). ISSN 0036-8075. <http://science.sciencemag.org/content/315/5815/1116>; <http://science.sciencemag.org/content/315/5815/1116.full.pdf>. 21, 23
- [10] T. H. WARE, M. E. MCCONNEY, J. J. WIE, V. P. TONDIGLIA & T. J. WHITE; «Voxelated liquid crystal elastomers»; *Science* **347**, p. 982–984 (2015). ISSN 0036-8075. <http://science.sciencemag.org/content/347/6225/982>; <http://science.sciencemag.org/content/347/6225/982.full.pdf>. 22, 23
- [11] A. O'HALLORAN, F. O'MALLEY & P. MCHUGH; «A review on dielectric elastomer actuators, technology, applications, and challenges»; *Journal of Applied*

- Physics **104**, p. 071 101 (2008). <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.2981642>; <http://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.2981642>. 22
- [12] B.-C. YOSEPH; *Electroactive polymer (EAP) actuators as artificial muscles : reality, potential and challenges*; SPIE Press monograph; PM136; 2^e édition (SPIE press) (2004); ISBN 9780819481122. 22
- [13] X. QIAN, S. WU, E. FURMAN, Q. ZHANG & J. SU; «Ferroelectric polymers as multifunctional electroactive materials : recent advances, potential, and challenges»; *MRS Communications* **5**, p. 115–129 (2015). 24
- [14] Q. M. ZHANG, V. BHARTI & X. ZHAO; «Giant Electrostriction and Relaxor Ferroelectric Behavior in Electron-Irradiated Poly(vinylidene fluoride-trifluoroethylene) Copolymer»; *Science* **280**, p. 2101–2104 (1998). ISSN 0036-8075. <http://science.sciencemag.org/content/280/5372/2101>; <http://science.sciencemag.org/content/280/5372/2101.full.pdf>. 24
- [15] *Composition and annealing effects on the response of electrostrictive graft elastomers*; tome 5051 (2003). <http://dx.doi.org/10.1117/12.484404>. 24
- [16] P. RONALD, K. ROY & J. JOSE; «Electrostriction of polymer dielectrics with compliant electrodes as a means of actuation»; *Sensors and Actuators A* **64**, p. 77–85 (1998). 25, 31, 34
- [17] R. PELRINE, R. KORNBLUH, Q. PEI & J. JOSEPH; «High-Speed Electrically Actuated Elastomers with Strain Greater Than 100%»; *Science* **287**, p. 836 – 839 (2000). ISSN 0036-8075. <http://www.sciencemag.org/content/287/5454/836.full.html>. 25, 29, 34
- [18] B. TONY & B. DAVID; *Electrical properties of polymers*; 2^e édition (Cambridge university press) (2005); ISBN 13 978-0-521-55219-6. 25
- [19] X. ZHAO & Z. SUO; «Theory of Dielectric Elastomers Capable of Giant Deformation of Actuation»; *Phys. Rev. Lett.* **104**, p. 178 302 (2010). <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.178302>. 25, 26
- [20] Z. SUO; «Theory of dielectric elastomers»; *Acta Mechanica Solida Sinica* **23**, p. 549 – 578 (2010). ISSN 0894-9166. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0894916611600049>. 25, 28, 30, 32, 34
- [21] B. LI, H. CHEN, J. QIANG, S. HU, Z. ZHU & Y. WANG; «Effect of mechanical pre-stretch on the stabilization of dielectric elastomer actuation»; *Journal of Physics D : Applied Physics* **44**, p. 155 301 (2011)<http://stacks.iop.org/0022-3727/44/i=15/a=155301>. 25
- [22] D. D. TOMMASI, G. PUGLISI, G. SACCOMANDI & G. ZURLO; «Pull-in and wrinkling instabilities of electroactive dielectric actuators»; *Journal of Physics D : Applied Physics* **43**, p. 325 501 (2010)<http://stacks.iop.org/0022-3727/43/i=32/a=325501>. 25
- [23] K. JUNG, J. C. KOO, J. DO NAM, Y. K. LEE & H. R. CHOI; «Artificial annelid robot driven by soft actuators»; *Bioinspiration Biomimetics* **2**, p. S42 (2007)<http://stacks.iop.org/1748-3190/2/i=2/a=S05>. 26, 27

- [24] C. JORDI, S. MICHEL & E. FINK ; «Fish-like propulsion of an airship with planar membrane dielectric elastomer actuators» ; *Bioinspiration Biomimetics* **5**, p. 026 007 (2010)<http://stacks.iop.org/1748-3190/5/i=2/a=026007>. 26, 27
- [25] G. KOFOD, M. PAAJANEN & S. BAUER ; «Self-organized minimum-energy structures for dielectric elastomer actuators» ; *Applied Physics A* **85**, p. 141–143 (2006). ISSN 1432-0630. <http://dx.doi.org/10.1007/s00339-006-3680-3>. 26, 27, 64
- [26] F. CARPI & D. D. ROSSI ; «Bioinspired actuation of the eyeballs of an android robotic face : concept and preliminary investigations» ; *Bioinspiration Biomimetics* **2**, p. S50 (2007)<http://stacks.iop.org/1748-3190/2/i=2/a=S06>. 26
- [27] P. CHAKRABORTI, H. K. TOPRAKCI, P. YANG, N. D. SPIGNA, P. FRANZON & T. GHOSH ; «A compact dielectric elastomer tubular actuator for refreshable Braille displays» ; *Sensors and Actuators A: Physical* **179**, p. 151 – 157 (2012). ISSN 0924-4247. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924424712000908>. 27
- [28] C. KEPLINGER, J.-Y. SUN, C. C. FOO, P. ROTHEMUND, G. M. WHITESIDES & Z. SUO ; «Stretchable, Transparent, Ionic Conductors» ; *Science* **341**, p. 984–987 (2013). ISSN 0036-8075. <http://science.sciencemag.org/content/341/6149/984> ; <http://science.sciencemag.org/content/341/6149/984.full.pdf>. 27
- [29] P. MAIOLINO, F. GALANTINI, F. MASTROGIOVANNI, G. GALLONE, G. CANNATA & F. CARPI ; «Soft dielectrics for capacitive sensing in robot skins : Performance of different elastomer types» ; *Sensors and Actuators A: Physical* **226**, p. 37 – 47 (2015). ISSN 0924-4247. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924424715000679>. 27
- [30] Z. JI, H. ZHU, H. LIU, N. LIU, T. CHEN, Z. YANG & L. SUN ; «The Design and Characterization of a Flexible Tactile Sensing Array for Robot Skin» ; *Sensors* **16** (2016). ISSN 1424-8220. <http://www.mdpi.com/1424-8220/16/12/2001>. 27
- [31] *From boots to buoys : promises and challenges of dielectric elastomer energy harvesting* ; tome 7976 (2011). <http://dx.doi.org/10.1117/12.882367>. 28
- [32] *Oscillating-water-column wave-energy-converter based on dielectric elastomer generator* ; tome 8687 (2013). <http://dx.doi.org/10.1117/12.2012016>. 28
- [33] *Dielectric polymer : scavenging energy from human motion* ; tome 6927 (2008). <http://dx.doi.org/10.1117/12.776879>. 28
- [34] H. GODABA, Z.-Q. ZHANG, U. GUPTA, C. CHIANG FOO & J. ZHU ; «Dynamic pattern of wrinkles in a dielectric elastomer» ; *Soft Matter* p. – (2017). <http://dx.doi.org/10.1039/C7SM00198C>. 29, 30
- [35] R. PELRINE, R. KORNBLUH & G. KOFOD ; «High-Strain Actuator Materials Based on Dielectric Elastomers» ; *Advanced Materials* **12**, p. 1223–1225 (2000). ISSN 1521-4095. [http://dx.doi.org/10.1002/1521-4095\(200008\)12:16<1223::AID-ADMA1223>3.0.CO;2-2](http://dx.doi.org/10.1002/1521-4095(200008)12:16<1223::AID-ADMA1223>3.0.CO;2-2). 29, 30
- [36] X. LIU, B. LI, H. CHEN, S. JIA & J. ZHOU ; «Voltage-induced wrinkling behavior of dielectric elastomer» ; *Journal of Applied Polymer Science* **133**, p. n/a–n/a (2016). ISSN 1097-4628. <http://dx.doi.org/10.1002/app.43258>. 29, 30

- [37] G. LIPPMANN; *Relations entre les phenomenes electriques et capillaires*; Thèse de doctorat; Faculté des sciences de Paris (1875). 33
- [38] G. KOFOD, P. SOMMER-LARSEN, R. KORNBLUH & R. PELRINE; «Actuation Response of Polyacrylate Dielectric Elastomers»; *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **14**, p. 787–793 (2003). <http://dx.doi.org/10.1177/104538903039260>; <http://dx.doi.org/10.1177/104538903039260>. 45
- [39] «<http://www.correli-stc.com/>»; . 48
- [40] L. POCIVAVSEK, R. DELLSY, A. KERN, S. JOHNSON, B. LIN, K. Y. C. LEE & E. CERDA; «Stress and Fold Localization in Thin Elastic Membranes»; *Science* **320**, p. 912–916 (2008). ISSN 0036-8075. <http://science.sciencemag.org/content/320/5878/912>; <http://science.sciencemag.org/content/320/5878/912.full.pdf>. 49, 51
- [41] M. PIÑEIRUA, N. TANAKA, B. ROMAN & J. BICO; «Capillary buckling of a floating annulus»; *Soft Matter* **9**, p. 10985–10992 (2013). 49, 51
- [42] E. H. MANSFIELD; *The bending and stretching of plates* (Cambridge university press) (1989). 52, 90, 91, 102
- [43] S. TIMOSHENKO & J. GERE; *Theory of elastic stability*; 2^e édition (Dover) (1961). 55, 60, 64, 97
- [44] Y. XIA & G. M. WHITESIDES; «Soft Lithography»; *Annual Review of Materials Science* **28**, p. 550–575 (1998). 61
- [45] F. CARPI, G. FREDIANI, S. TURCO & D. DE ROSSI; «Bioinspired Tunable Lens with Muscle-Like Electroactive Elastomers»; *Advanced Functional Materials* **21**, p. 4152–4158 (2011). ISSN 1616-3028. <http://dx.doi.org/10.1002/adfm.201101253>. 64
- [46] W. H. PAULSEN; «What Is the Shape of a Mylar Balloon?»; *The American Mathematical Monthly* **101**, p. 953–958 (1994)ISSN 00029890, 19300972. <http://www.jstor.org/stable/2975161>. 67
- [47] H. KING, R. D. SCHROLL, B. DAVIDOVITCH & N. MENON; «Elastic sheet on a liquid drop reveals wrinkling and crumpling as distinct symmetry-breaking instabilities»; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **109**, p. 9716–9720 (2012). <http://www.pnas.org/content/109/25/9716.abstract>; <http://www.pnas.org/content/109/25/9716.full.pdf>. 67, 89, 90, 91
- [48] G. MAO, X. HUANG, M. DIAB, T. LI, S. QU & W. YANG; «Nucleation and propagation of voltage-driven wrinkles in an inflated dielectric elastomer balloon»; *Soft Matter* **11**, p. 6569–6575 (2015). ISSN 1744-683X. <http://xlink.rsc.org/?DOI=C5SM01102G>. 68
- [49] REYSSAT, E. & MAHADEVAN, L.; «How wet paper curls»; *EPL* **93**, p. 54001 (2011). <https://doi.org/10.1209/0295-5075/93/54001>. 71
- [50] J. KIM, J. A. HANNA, M. BYUN, C. D. SANTANGELO & R. C. HAYWARD; «Designing Responsive Buckled Surfaces by Halftone Gel Lithography»; *Science* **335**, p. 1201–1205 (2012). ISSN 0036-8075. <http://science.sciencemag.org/content/335/6073/1201>;

- <http://science.sciencemag.org/content/335/6073/1201.full.pdf>. 72, 74, 75
- [51] S. R. MAHMOUDI, K. ADAMIAK & G. S. P. CASTLE; «Spreading of a dielectric droplet through an interfacial electric pressure»; *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **467**, p. 3257–3271 (2011). ISSN 1364-5021. <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/467/2135/3257>; <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/467/2135/3257.full.pdf>. 81, 82, 83
- [52] E. WARBURG; «Ueber die Spitzenentladung»; *Annalen der Physik* **303**, p. 69–83 (1899). ISSN 1521-3889. <http://dx.doi.org/10.1002/andp.18993030104>. 82
- [53] J. E. JONES; «A theoretical explanation of the laws of Warburg and Sigmond»; *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **453**, p. 1033–1052 (1997). ISSN 1364-5021. <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/453/1960/1033>; <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/453/1960/1033.full.pdf>. 82
- [54] C. KEPLINGER, M. KALTENBRUNNER, N. ARNOLD & S. BAUER; «Röntgen's electrode-free elastomer actuators without electromechanical pull-in instability»; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **107**, p. 4505–4510 (2010). <http://www.pnas.org/content/107/10/4505.abstract>; <http://www.pnas.org/content/107/10/4505.full.pdf>. 82, 83
- [55] A. PANDEY, D. E. MOULTON, D. VELLA & D. P. HOLMES; «Dynamics of snapping beams and jumping poppers»; *EPL (Europhysics Letters)* **105**, p. 24001 (2014) <http://stacks.iop.org/0295-5075/105/i=2/a=24001>. 87
- [56] J. D. PAULSEN, V. DEMERY, C. D. SANTANGELO, T. P. RUSSELL, B. DAVIDOVITCH & N. MENON; «Optimal wrapping of liquid droplets with ultrathin sheets»; *Nat Mater* **14**, p. 1206–1209 (2015) ISSN 1476-1122. <http://dx.doi.org/10.1038/nmat4397>; letter. 89, 90
- [57] D. VELLA, J. HUANG, N. MENON, T. P. RUSSELL & B. DAVIDOVITCH; «Indentation of Ultrathin Elastic Films and the Emergence of Asymptotic Isometry»; *Phys. Rev. Lett.* **114**, p. 014301 (2015). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.014301>. 89
- [58] J. HUANG, M. JUSZKIEWICZ, W. H. DE JEU, E. CERDA, T. EMRICK, N. MENON & T. P. RUSSELL; «Capillary Wrinkling of Floating Thin Polymer Films»; *Science* **317**, p. 650–653 (2007). ISSN 0036-8075. <http://science.sciencemag.org/content/317/5838/650>; <http://science.sciencemag.org/content/317/5838/650.full.pdf>. 89, 90
- [59] J. HURE, B. ROMAN & J. BICO; «Stamping and wrinkling of elastic sheets»; *Phys. Rev. Lett.* **109**, p. 054302 (2012). 91, 97, 99, 120, 132
- [60] A. LEE, P. BRUN, J. MARTHELOT, G. BALESTRA, F. GALLAIRE & P. M. REIS; «Fabrication of slender elastic shells by the coating of curved surfaces»; *Nature Communications* **7** (2016). 92, 93

- [61] B. ROMAN & A. POCHEAU ; «Buckling cascade of thin plates : Forms, constraints and similarity» ; EPL (Europhysics Letters) **46**, p. 602 (1999)<http://stacks.iop.org/0295-5075/46/i=5/a=602>. 99, 100
- [62] B. ROMAN & A. POCHEAU ; «Postbuckling of bilaterally constrained rectangular thin plates» ; Journal of the Mechanics and Physics of Solids **50**, p. 2379–2401 (2002). 100
- [63] E. VENTSEL & T. KRAUTHAMMER ; *Thin Plates and Shells : Theory : Analysis, and Applications* (CRC Press) (2001) ; ISBN 9780203908723. <https://books.google.fr/books?id=nvny90yqg0YC>. 102
- [64] H. VANDEPARRE, M. PIÑEIRUA, F. BRAU, B. ROMAN, J. BICO, C. GAY, W. BAO, C. N. LAU, P. M. REIS & P. DAMMAN ; «Wrinkling Hierarchy in Constrained Thin Sheets from Suspended Graphene to Curtains» ; *Phys. Rev. Lett.* **106**, p. 224 301 (2011). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.224301>. 112
- [65] GÉMINARD, J.-C., BERNAL, R. & MELO, F. ; «Wrinkle formations in axisymmetrically stretched membranes» ; *Eur. Phys. J. E* **15**, p. 117–126 (2004). <https://doi.org/10.1140/epje/i2004-10041-1>. 122
- [66] E. R. JERISON, Y. XU, L. A. WILEN & E. R. DUFRESNE ; «Deformation of an Elastic Substrate by a Three-Phase Contact Line» ; *Phys. Rev. Lett.* **106**, p. 186 103 (2011). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.186103>. 126
- [67] R. W. STYLE, Y. CHE, S. J. PARK, B. M. WEON, J. H. JE, C. HYLAND, G. K. GERMAN, M. P. POWER, L. A. WILEN, J. S. WETTLAUFER & E. R. DUFRESNE ; «Patterning droplets with durotaxis» ; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **110**, p. 12 541–12 544 (2013). <http://www.pnas.org/content/110/31/12541.abstract> ; <http://www.pnas.org/content/110/31/12541.full.pdf>. 126, 127
- [68] S. KARPITSCHKA, A. PANDEY, L. A. LUBBERS, J. H. WEIJS, L. BOTTO, S. DAS, B. ANDREOTTI & J. H. SNOEIJER ; «Liquid drops attract or repel by the inverted Cheerios effect» ; *Proceedings of the National Academy of Sciences* **113**, p. 7403–7407 (2016). <http://www.pnas.org/content/113/27/7403.abstract> ; <http://www.pnas.org/content/113/27/7403.full.pdf>. 126, 127
- [69] D. VELLA & L. MAHADEVAN ; «The “Cheerios effect”» ; *American Journal of Physics* **73**, p. 817–825 (2005). <http://dx.doi.org/10.1119/1.1898523> ; <http://dx.doi.org/10.1119/1.1898523>. 126
- [70] J. BICO, B. ROMAN, L. MOULIN & A. BOUDAUD ; «Adhesion : Elastocapillary coalescence in wet hair» ; *Nature* **432**, p. 690–690 (2004). ISSN 0028-0836. <http://dx.doi.org/10.1038/432690a>. 127, 128
- [71] J. HURE, B. ROMAN & J. BICO ; «Wrapping an Adhesive Sphere with an Elastic Sheet» ; *Phys. Rev. Lett.* **106**, p. 174 301 (2011). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.174301>. 127, 128, 129, 134, 139, 140
- [72] C. R. CALLADINE ; «The Theory of Thin Shell Structures 1888–1988» ; *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Power and Process Engi-*

- neering **202**, p. 141–149 (1988). http://dx.doi.org/10.1243/PIME_PROC_1988_202_020_02; http://dx.doi.org/10.1243/PIME_PROC_1988_202_020_02. 131
- [73] C. MAJIDI & R. S. FEARING; «Adhesion of an elastic plate to a sphere»; *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **464**, p. 1309–1317 (2008). ISSN 1364-5021. <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/464/2093/1309>; <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/464/2093/1309.full.pdf>. 134
- [74] M. DUDUTA, R. J. WOOD & D. R. CLARKE; «Multilayer Dielectric Elastomers for Fast, Programmable Actuation without Prestretch»; *Advanced Materials* **28**, p. 8058–8063 (2016). ISSN 1521-4095. <http://dx.doi.org/10.1002/adma.201601842>. 146