



HAL
open science

Modélisation du comportement thermo-viscoplastique des enrobés bitumineux

Pierre Gayte

► **To cite this version:**

Pierre Gayte. Modélisation du comportement thermo-viscoplastique des enrobés bitumineux. Génie civil. Université de Lyon, 2016. Français. NNT : 2016LYSET008 . tel-02134154

HAL Id: tel-02134154

<https://theses.hal.science/tel-02134154>

Submitted on 20 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2016LYSET008

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

Opérée au sein de l'

**Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat
Laboratoire Génie Civil et Bâtiment,
Laboratoire Tribologie et Dynamique des Systèmes,
UMR 5513 CNRS**

Ecole Doctorale N° 162

**MEGA (Mécanique – Energétique – Génie Civil –
Acoustique)**

Spécialité de doctorat : Génie Civil

Soutenue publiquement le 10/10/2016, par :

Pierre GAYTE

Modélisation du comportement thermo-viscoplastique des enrobés bitumineux

Devant le jury composé de :

PETIT Christophe	Université de Limoges	Rapporteur
PASTOR Manuel	Université Polytechnique de Madrid	Rapporteur
DUBUJET Philippe	ENISE	Examineur
BARTHELEMY Jean-François	Cerema	Examineur
DI BENEDETTO Hervé	ENTPE	Directeur de thèse
SAUZEAT Cédric	ENTPE	Directeur de thèse
GUIRAUD Hervé	Cerema	Invité

« Les Représentants du Peuple Français, constitués en Assemblée Nationale, considérant que l'ignorance, l'oubli ou le mépris des droits de l'Homme sont les seules causes des malheurs publics et de la corruption des Gouvernements, ont résolu d'exposer, dans une Déclaration solennelle, les droits naturels, inaliénables et sacrés de l'Homme, afin que cette Déclaration, constamment présente à tous les Membres du corps social, leur rappelle sans cesse leurs droits et leurs devoirs ; afin que les actes du pouvoir législatif, et ceux du pouvoir exécutif, pouvant être à chaque instant comparés avec le but de toute institution politique, en soient plus respectés ; afin que les réclamations des citoyens, fondées désormais sur des principes simples et incontestables, tournent toujours au maintien de la Constitution et au bonheur de tous.

En conséquence, l'Assemblée Nationale reconnaît et déclare, en présence et sous les auspices de l'Être suprême, les droits suivants de l'Homme et du Citoyen. »

Préambule de la Déclaration des Droits de l'Homme et du Citoyen de 1789.

Sommaire

SOMMAIRE	V
REMERCIEMENTS	XI
ABSTRACT	XV
RESUME	XVII
INTRODUCTION	1
1 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	5
1.1 GENERALITES SUR LES ENROBES BITUMINEUX	5
1.1.1 <i>Le bitume</i>	5
1.1.1.1 Origine et production	6
1.1.1.2 Composition chimique et structure	7
1.1.1.3 Classes de comportement des bitumes purs	8
1.1.2 <i>Les granulats</i>	9
1.1.3 <i>L'enrobé bitumineux</i>	11
1.2 GENERALITES SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES ENROBES BITUMINEUX	12
1.2.1 <i>Sollicitations des couches en enrobés bitumineux</i>	12
1.2.1.1 Effets du trafic	13
1.2.1.2 Effets du climat	13
1.2.2 <i>Domaines de comportement des enrobés bitumineux</i>	15
1.2.3 <i>Généralités sur les essais mécaniques de laboratoire et leur interprétation</i>	17
1.2.3.1 Classification selon le type d'interprétation	17
1.2.3.2 Classification selon les états de contrainte et de déformation	19
1.3 LOIS DE COMPORTEMENT DES MATERIAUX	20
1.3.1 <i>Le comportement élastique</i>	20
1.3.2 <i>Le comportement viscoélastique</i>	23
1.3.2.1 Définition	23
1.3.2.2 Principe de Boltzmann	24
1.3.2.3 Sollicitation en contrainte – Fonction de fluage	25

1.3.2.4	Sollicitation en déformation – Fonction de relaxation	27
1.3.2.5	Transformation de Laplace-Carson.....	28
1.3.2.6	Module complexe et coefficient de Poisson	29
1.3.2.7	Energie	30
1.3.2.8	Principe d'Equivalence Temps-Température (TTSP).....	31
1.3.2.9	Modélisation du comportement VEL – Modèles à spectres discrets.....	35
1.3.2.10	Modélisation du comportement VEL – Modèles à spectres continus.....	40
1.3.2.11	Modélisation du comportement VEL – Expressions analytiques non basées sur des modèles rhéologiques	45
1.3.3	Le comportement plastique	46
1.3.3.1	Définition	46
1.3.3.2	Expérience de traction simple - Généralisation des notions de plasticité.....	47
1.3.3.3	Surface de plasticité	49
1.3.3.4	Règle d'écoulement plastique	51
1.3.3.5	Quelques exemples de surface de charge appliquées aux enrobés bitumineux.....	54
1.3.3.6	Quelques exemples de modèles viscoplastiques	63
2	FORMULATION DE LA VERSION EPPI DU MODELE DBN	65
2.1	INTRODUCTION	65
2.2	FORMULATION TRIDIMENSIONNELLE DU MODELE DBN.....	65
2.2.1	<i>Cas 1D</i>	65
2.2.2	<i>Généralisation au cas 3D</i>	67
2.2.2.1	Equations constitutives du modèle	67
2.2.2.2	Version EPPI du modèle DBN.....	67
2.3	FORMULATION DES CORPS ELASTOPLASTIQUE (EP).....	68
2.3.1	<i>Dans le domaine VEL</i>	68
2.3.2	<i>Dans le domaine VP</i>	68
2.3.2.1	Equations générales	68
2.3.2.2	Surface de charge	69
2.3.2.3	Surface de potentiel plastique.....	75
2.4	FORMULATION DES CORPS VISQUEUX (V).....	77
2.4.1	<i>Comportement général</i>	77
2.4.2	<i>Dans le domaine VEL</i>	77
2.4.3	<i>Dans le domaine VP</i>	79
2.5	PROCEDURE DE CALIBRATION DU MODELE DBN _{EPPI}	82
2.5.1	<i>Résumé des paramètres du modèle</i>	82
2.5.2	<i>Dans le domaine VEL</i>	82
2.5.2.1	Calibration du modèle dans le cas uniaxial	84
2.5.2.2	Extension aux sollicitations 3D.....	88
2.5.3	<i>Dans le domaine VP</i>	90
2.5.3.1	Calibration des paramètres R_c et R_t	91
2.5.3.2	Calibration des paramètres I_p, i	91
2.5.3.3	Calibration des paramètres $I_{1c, i}$ et $I_{1t, i}$	92
2.5.3.4	Calibration du paramètre R_g	93
2.5.4	<i>Algorithme de calibration de la version EPPI du modèle DBN</i>	93
2.5.4.1	Dans le domaine VEL.....	93
2.5.4.2	Dans le domaine VP.....	96
3	IMPLEMENTATION DU MODELE DBN_{EPPI} DANS UN CODE DE CALCUL HOMOGENE	99

3.1	INTRODUCTION	99
3.2	MISE EN EQUATION.....	99
3.2.1	<i>Hypothèses</i>	99
3.2.2	<i>Mise en équation du problème</i>	100
3.2.3	<i>Détermination des incréments de contrainte et déformation au niveau d'un corps élémentaire</i> 101	
3.2.3.1	Comportement VEL.....	101
3.2.3.2	Comportement VP.....	102
3.2.4	<i>Détermination des incréments de contrainte et déformation totaux</i>	105
3.2.4.1	Comportement VEL.....	105
3.2.4.2	Comportement VP.....	106
3.3	ALGORITHME DE RESOLUTION.....	108
3.3.1	<i>Grandeurs du modèle DBN_{EPPi} déterminées pendant les modélisations</i>	109
3.3.2	<i>Détermination de la déformation résultante d'une contrainte imposée</i>	112
3.3.2.1	Initialisation	112
3.3.2.2	Incrémentation.....	112
3.3.3	<i>Détermination de la contrainte résultante d'une déformation imposée</i>	114
3.3.3.1	Initialisation	114
3.3.3.2	Incrémentation.....	115
3.3.4	<i>Résolution dans le cas d'une sollicitation mixte</i>	118
3.3.4.1	Initialisation	118
3.3.4.2	Incrémentation.....	120
3.3.5	<i>Convergence et sous-incrémentation</i>	123
3.3.5.1	Généralités.....	123
3.3.5.2	Procédure de vérification de la convergence des calculs et sous-incrémentation	123
3.3.6	<i>Fonctions communes aux 3 algorithmes de calcul</i>	126
3.4	DEVELOPPEMENT D'UN PROGRAMME AUTONOME DE MODELISATION D'ESSAI HOMOGENE.....	126
3.4.1	<i>Structure générale du programme</i>	126
3.4.2	<i>Calibration du modèle DBN</i>	127
3.4.2.1	Calibration du modèle DBN dans les domaines VEL et VP	127
3.4.2.2	Affichage des résultats.....	128
3.4.2.3	Exportation des résultats	129
3.4.3	<i>Sélection de la sollicitation</i>	129
3.4.4	<i>Enregistrement et exploitation des résultats</i>	130
4	PROCEDURES EXPERIMENTALES	131
4.1	MATERIAU TESTE ET FABRICATION DES EPROUVETTES	131
4.1.1	<i>Présentation de l'enrobé testé</i>	131
4.1.2	<i>Fabrication des éprouvettes</i>	132
4.1.3	<i>Pourcentage de vide des éprouvettes</i>	133
4.2	DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX	134
4.2.1	<i>Presse hydraulique</i>	134
4.2.2	<i>Enceinte thermique</i>	134
4.2.3	<i>Dispositifs de mesure</i>	135
4.3	MISE EN PLACE DES ESSAIS	138
4.3.1	<i>Collage et montage des éprouvettes</i>	138
4.3.2	<i>Mise en température</i>	139

4.4	ACQUISITION ET TRAITEMENT DES DONNEES.....	140
4.5	CAMPAGNE EXPERIMENTALE	140
4.6	ESSAIS DE MODULE COMPLEXE	141
4.6.1	<i>Principe de l'essai</i>	141
4.6.2	<i>Définition des paramètres mécaniques et procédure de traitement des essais</i>	143
4.6.3	<i>Résultats pour l'essai de module complexe</i>	146
4.7	ESSAIS CYCLIQUES DE TRACTION-COMPRESSION SIMPLE.....	153
4.7.1	<i>Principe de l'essai</i>	153
4.7.2	<i>Exemple de résultats pour la phase de traction à vitesse constante</i>	155
5	CARACTERISATION DU COMPORTEMENT VEL ET VP D'UN ENROBE BITUMINEUX : RESULTATS EXPERIMENTAUX ET ANALYSE.....	159
5.1	CAMPAGNE EXPERIMENTALE	159
5.1.1	<i>Plan de la campagne expérimentale pour les essais cycliques de traction-compression...</i>	159
5.1.2	<i>Nomenclature des éprouvettes testées</i>	160
5.2	ETAPE 1 : MESURE DU MODULE COMPLEXE A LA TEMPERATURE DE L'ESSAI.....	160
5.2.1	<i>Courbes isothermes - Module complexe E^*</i>	161
5.2.2	<i>Courbes isothermes - Coefficient de Poisson complexe ν^*</i>	163
5.2.3	<i>Courbes dans le plan Cole-Cole et dans l'espace de Black</i>	165
5.2.4	<i>Courbes maîtresses</i>	167
5.3	ETAPE 2 : ESSAIS DE TRACTION SIMPLE A VITESSE DE DEFORMATION CONSTANTE	171
5.3.1	<i>Résultats de la campagne expérimentale</i>	172
5.3.1.1	<i>Résultats pour un essai type (« 15 °C-0,1 % » - éprouvette C3-P2)</i>	172
5.3.1.2	<i>Résultats par température d'essai</i>	175
5.3.2	<i>Détermination de la contrainte maximale</i>	177
5.3.3	<i>Vérification du principe d'équivalence temps-température dans le domaine non-linéaire</i>	180
6	MODELISATION DU COMPORTEMENT DES ENROBES BITUMINEUX	185
6.1	REGIME STABILISE LORS DES ESSAIS DE MODULE COMPLEXE.....	185
6.1.1	<i>Calibration du modèle 2S2P1D</i>	185
6.1.2	<i>Résultats de la simulation du comportement VEL</i>	186
6.1.3	<i>Comparaison des résultats expérimentaux avec une campagne expérimentale précédente</i> 189	
6.2	EFFETS TRANSITOIRES LORS DES ESSAIS DE MODULE COMPLEXE	192
6.2.1	<i>Procédure expérimentale et matériau considéré</i>	193
6.2.2	<i>Calibration du modèle 2S2P1D et du modèle DBN à 40 éléments</i>	195
6.2.3	<i>Méthode d'analyse des signaux</i>	198
6.2.3.1	<i>Méthode et signaux utilisés</i>	198
6.2.3.2	<i>Analyse des signaux</i>	201
6.2.4	<i>Résultats et analyse</i>	201
6.2.4.1	<i>Régime stabilisé</i>	201
6.2.4.2	<i>Variations de la norme du module complexe au cours de l'essai</i>	205
6.2.4.3	<i>Variations de l'angle de phase au cours de l'essai</i>	207
6.2.4.4	<i>Etude de l'influence de la température</i>	210
6.2.5	<i>Conclusions</i>	211
6.3	CALCULS VEL DES ESSAIS DE TRACTION SIMPLE	213

6.4	SIMULATION DU COMPORTEMENT VP – ESSAIS CYCLIQUES DE TRACTION-COMPRESSION A VITESSE DE DEFORMATION CONSTANTE	216
6.4.1	<i>Calibration du modèle</i>	216
6.4.2	<i>Simulations</i>	219
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES		227
7	ANNEXES	231
7.1	INVARIANTS DE CONTRAINTE ET LEUR DERIVATION	231
7.1.1	<i>Contraintes principales et directions principales de contraintes</i>	231
7.1.2	<i>Invariants et représentation dans le plan des contraintes</i>	231
7.1.3	<i>Relations entre invariants de contrainte et contraintes principale</i>	233
7.1.4	<i>Dérivation des invariants de contraintes</i>	234
7.1.5	<i>Application au calcul des normales aux surfaces de plasticité et de potentiel plastique</i>	235
7.2	CODÉS DE CALCULS	236
7.2.1	<i>Chargement des paramètres du modèle DBN à partir de la feuille de calcul Excel®</i>	236
7.2.2	<i>Calibration du modèle DBN dans le domaine VEL</i>	236
7.2.3	<i>Calcul de la déformation résultante d'une contrainte imposée</i>	242
7.2.4	<i>Calcul de la contrainte résultante d'une déformation imposée</i>	252
7.2.5	<i>Calcul de la réponse sous sollicitation mixte</i>	262
7.2.6	<i>Fonctions communes aux 3 algorithmes de calcul</i>	274
7.2.6.1	Lecture des paramètres et des constantes de calibration dans le fichier Excel datas.xlsx	274
7.2.6.2	Calcul des invariants et des tenseurs déviatoriques	277
7.2.6.3	Produit scalaire, produit tensoriel et produit matriciel	277
7.2.6.4	Calcul de la norme des tenseurs d'ordre 2 et 4	278
7.2.6.5	Projection sur la surface de plasticité	279
7.2.6.6	Projection sur la surface de potentiel plastique	280
7.2.6.7	Calcul des vecteurs unitaires normaux et tangent à la surface de plasticité	280
7.2.6.8	Calcul du vecteur unitaire normal à la surface de potentiel plastique	281
7.2.6.9	Calcul de l'écart entre deux tenseurs d'ordre 2	282
7.2.6.10	Fonction de la surface de plasticité	282
7.2.6.11	Fonction de création des structures de données	283
7.3	RESULTATS EXPERIMENTAUX DES ESSAIS DE TRACTION SIMPLE	284
TABLE DES ILLUSTRATIONS		301
RÉFÉRENCES		313

Remerciements

Après un peu plus de trois ans de travail et à l'issue de la rédaction de ce mémoire, je suis assuré que la thèse est loin d'être un travail solitaire. Jamais je n'aurais pu réaliser ce travail sans le soutien et les conseils d'un grand nombre de personnes. Je suis heureux de pouvoir aujourd'hui vous remercier.

Je souhaite tout d'abord remercier mes directeurs de thèse Hervé DI BENEDETTO et Cédric SAUZEAT. En plus de leurs qualités scientifiques et pédagogiques, ils possèdent des qualités humaines qui m'ont aidé à progresser et à mener ce travail à bien. Tout au long de ce projet, j'ai apprécié leur confiance, leurs conseils, leur disponibilité, leur écoute et leur compréhension des problèmes. Je les remercie également pour leur soutien sans faille qu'ils m'ont témoigné pour réaliser cette thèse, avant même son commencement. Ce qu'ils m'ont transmis, va bien au-delà de simples compétences scientifiques.

Je tiens ensuite à exprimer ma gratitude à Philippe DUBUJET qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de thèse, ainsi que Christophe PETIT et Manuel PASTOR pour avoir accepté la lourde tâche d'être les rapporteurs de cette thèse. Mes remerciements vont aussi à Jean-François BARTHELEMY et Hervé GUIRAUD qui ont examiné ce travail et participé au jury.

Je souhaiterais remercier le Cerema qui m'a permis de réaliser cette thèse, en m'accordant une mise à disposition au LGCB-LTDS de l'ENTPE, et en particulier Hervé GUIRAUD qui m'a soutenu et aidé depuis 2011 dans ce projet. Je remercie Eric LE GUERN,

Georges TEMPEZ et Pascal ROSSIGNY pour m'avoir donné la chance de travailler sur ce projet de recherche et enfin Fabien PALHOL pour ses conseils.

Ces remerciements ne seraient pas complets si je ne m'adressais pas à l'ensemble des membres du LGCB-LTDS pour leur soutien et le très bon climat qui règne au sein de ce laboratoire où chaque jour, j'avais plaisir à venir travailler. Je tenais encore à remercier la Direction de la Recherche de l'ENTPE qui effectue un travail remarquable et en particulier Francette PIGNARD d'être la « maman des doctorants ».

Je remercie mes collègues, chercheurs, doctorants, post-doctorants et stagiaires, du LGCB et des autres laboratoires de l'école, et notamment les doctorants et post-doctorants de l'équipe « enrobés » pour leur aide et les bons moments passés ensemble, mais également mes collègues du bureau A107. J'adresse un clin d'œil aux joueurs de mots fléchés avec qui j'ai passé d'excellents moments lors des pauses café. Je suis heureux d'avoir pu m'investir dans l'association des docteurs et doctorants de l'ENTPE. Je lui souhaite bonne continuation dans toutes ses missions. Je crois que malgré les difficultés parfois rencontrées, son rôle est essentiel et doit perdurer. Merci à ceux qui s'investissent en ce sens.

Je souhaite également remercier mes anciens élèves, dont plus particulièrement les groupes 3B des promotions 61, 62 et 63 de l'ENTPE. Bien qu'en position d'enseignant, les moments passés avec eux ont été très formateurs et source de beaucoup de questionnements qui n'auront pas manqué d'enrichir mon parcours. Je leur souhaite bonne route !

J'ai une pensée pour mes amis proches, compagnons indéfectibles, présents dans tous les bons moments et toujours prêts pour aller « juste boire un verre » : Aliénor (Ali), Aude, Audrey, Aurélien, Benoit (la belette), Camille, Céliénie, Claire, Jacques-Christophe (Jack), Johan, Léah, Marine, Mélanie et Sébastien (Stéphane). Les moments passés avec vous comptent énormément.

Sans elle, l'aboutissement de ce travail n'aurait pas la même valeur et la même signification. Pauline, je te remercie pour ton soutien et ton amour, je t'aime. C'est également avec beaucoup d'émotion que je remercie toute ma famille, et plus spécialement, ma maman Valérie, mon frère Benjamin, et Lionel, pour le soutien et la confiance sans limite qu'ils m'ont témoignés tout au long de mes études. Enfin, je n'oublie pas mes grands-parents.

Encore un grand merci à tous, et à ceux que je n'ai pas cités, de m'avoir accompagné jusqu'à ce jour mémorable. Je suis très heureux de vous compter à mes côtés.

Je souhaite dédier cette thèse à ma maman. Par son amour, sa tendresse et son intelligence, elle n'a de cesse de m'accompagner toujours plus loin. Sa présence dans toutes les épreuves de la vie est un bien inestimable. Je suis fier et ému par la concrétisation de ce projet qui, en grande partie, est le sien.

Tout simplement, merci à toi.

Abstract

The thesis has been realized within the framework of a partnership between the Cerema (Center for Studies and Expertise on Risks, Environment, Mobility, and Urban and Country Planning) and the ENTPE (National School for Public State Works). This work deals with the study and the simulation of the behavior of bituminous mixtures, in the domains of small and large amplitudes of solicitations. These domains correspond to the viscoelastic and viscoplastic behavior.

First a bibliographical review on mechanical properties of the bituminous mixtures under small and large amplitudes of solicitations and a review of the several models describing the viscoelastic and viscoplastic behavior of bituminous mixtures is presented. This thesis is then composed of 5 main chapters.

The two first deals with the development of the DBN model and mainly with the introduction of its new version EPPI (Elastic Perfectly Plastic and Isotropic). This formulation aims at describing the viscoelastic and viscoplastic behaviors together in a unique formalism, but simple enough to be implemented in a finite elements calculation program. This version of the DBN model is then implemented in a homogeneous computation code so as to be able to simulate classical experimental test.

The two following chapter are devoted to the experimental campaign made during this research work. First a global description of the experimental procedures and test conditions is presented. Two kinds of tests are performed: complex modulus tests so as to characterize

the viscoelastic behavior and simple traction tests for viscoplastic behavior. Finally results and observations issued from this campaign are detailed and some conclusions can be drawn.

Finally the last chapter deals with the simulations performed thanks to the DBNEPPI model. These results aim at verifying the validity of the model introduced. Then a study about the transient effects during complex modulus tests on bituminous mixtures is detailed.

Résumé

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention entre le Cerema (Centre d'Etude et d'Expertise sur les Risques, l'Environnement, la Mobilité et l'Aménagement) et l'ENTPE (Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat). Ce travail concerne l'étude et la modélisation du comportement des enrobés bitumineux, dans les domaines des petites et grandes déformations, soit respectivement les comportements viscoélastique et viscoplastique.

Après une étude bibliographique portant sur les propriétés mécaniques des enrobés bitumineux en petites et grandes déformations et la présentation des modèles de comportement viscoélastique linéaire et viscoplastique, ce mémoire s'organise en cinq chapitres. Les deux premières parties concernent le développement du modèle DBN, et la description de la version introduite dans cette thèse : la version EPPI (Elastique Parfaitement Plastique Isotrope). Cette formulation tridimensionnelle vise à décrire les comportements viscoélastique et viscoplastique des enrobés bitumineux avec un formalisme unique, suffisamment simple pour être implémenté dans un code de calcul aux éléments finis. Le modèle est ensuite développé et implémenté dans un code de calcul homogène, permettant ainsi de réaliser des simulations d'essais expérimentaux classiques.

Les deux chapitres suivants traitent de la campagne expérimentale réalisée dans cette thèse. Il s'agit d'abord de décrire l'ensemble des procédures et conditions d'essais. Deux types d'essais sont réalisés : module complexe pour la caractérisation du comportement viscoélastique et traction simple pour la caractérisation du comportement viscoplastique. Ensuite, l'ensemble des résultats expérimentaux et observations issus de cette campagne sont présentés et permettent de dessiner quelques conclusions.

Enfin, le dernier chapitre traite des simulations réalisées à partir du modèle DBN_{EPPI} . Ces résultats permettent dans un premier temps de tester la validité du modèle (essais de module

complexe, essais cycliques de traction-compression simple). Enfin une étude des effets transitoires lors des essais de module complexe est présentée.

Introduction

Les matériaux bitumineux sont très largement utilisés dans le génie civil et plus particulièrement dans le domaine routier. Ils occupent maintenant une place importante car ils représentent la grande majorité des traitements de surface et des constructions de couches d'assise.

Pendant longtemps, leur rôle s'est réduit à l'imperméabilisation et à l'amélioration des qualités de surface de chaussées. Soumis à des sollicitations complexes (charges, trafics, climat) et en constante évolution, l'étude de leur comportement thermomécanique est devenue indispensable au cours des dernières décennies. En effet, certains défauts de performances de ces matériaux et de conception des chaussées ont conduit à reconsidérer nos méthodes de formulations des enrobés bitumineux et de dimensionnement de chaussées pour adopter les rendre plus rationnelles.

En France dans les années 70, une méthode dite semi-empirique a été développée pour répondre à ces problématiques. La démarche est basée sur l'observation de chaussées existantes et des modèles mécaniques de comportement des matériaux et des assises de chaussée (modèle multicouche de Burminster (1944) et comportement élastique). Un guide technique de conception et dimensionnement (Sétra LCPC 1994) et des catalogues de structures types (Sétra LCPC 1998) ont été élaborés afin de simplifier et rendre pratique le dimensionnement des structures de chaussée.

Les enjeux sont importants, tant au niveau économique, que écologique et sociétal, et concernent aussi bien le dimensionnement que l'entretien des chaussées (utilisation de couches plus minces, de matériaux plus performants et plus durables capables de résister de manière pérenne aux contraintes externes). Il est pour cela nécessaire d'avoir une meilleure connaissance des propriétés et du comportement thermomécanique des matériaux

bitumineux. L'approfondissement des études menées depuis plusieurs années doit permettre d'atteindre l'ensemble de ces objectifs.

Le mouvement de rationalisation des méthodes de formulations des enrobés bitumineux et de dimensionnement des chaussées conduit au développement de nombreux modèles rhéologiques et à l'utilisation de logiciels de calcul aux éléments finis.

Face à la complexité du comportement de ce type de matériaux, ces modèles sont souvent adaptés à la description d'une unique classe de comportement ou d'un seul type de sollicitation. Depuis plusieurs années, le modèle DBN (Di Benedetto-Neifar) tente de décrire avec un formalisme unique ces différents comportements. L'étude est menée avec l'objectif principal de proposer une nouvelle formulation du modèle DBN, capable de décrire, avec un formalisme unique, les comportements viscoélastique et viscoplastique. Le modèle est également étendu aux cas de sollicitations mécaniques tridimensionnelles afin qu'il soit à terme implémentable dans un logiciel de calcul aux éléments finis.

L'ensemble de ce projet s'inscrit dans le cadre d'une convention entre le Cerema (Centre d'Etude et d'Expertise sur les Risques, l'Environnement, la Mobilité et l'Aménagement) et l'ENTPE (Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat).

Les résultats de ces travaux sont présentés dans ce mémoire de thèse comporté de sept chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique sur la rhéologie et les propriétés thermomécaniques des enrobés bitumineux. Une revue des modèles rhéologiques pour les matériaux bitumineux est présentée. Elle concerne principalement les comportements viscoélastiques et viscoplastiques.

Le deuxième chapitre expose la version EPPI (Elastique Parfaitement Plastique Isotrope) du modèle DBN développée au cours de cette thèse. Il s'agit d'un modèle 3D au formalisme unique permettant de décrire les comportements des enrobés bitumineux observés en petites et grandes déformations (respectivement viscoélastiques et viscoplastiques). La procédure de calibration du modèle est également décrite.

Le troisième chapitre présente l'implémentation du modèle dans un code de calcul homogène, permettant de réaliser des modélisations sous sollicitations (mécaniques et thermiques) imposées mais quelconques. Ce chapitre décrit les algorithmes mis en œuvre pour assurer le calcul incrémental des réponses aux sollicitations tridimensionnelles imposées au matériau.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation des procédures expérimentales mises en œuvre lors des essais de module complexe et de traction simple réalisés pendant

cette thèse. Les campagnes expérimentales sont entièrement décrites, depuis le choix du matériau et la fabrication des éprouvettes, au dispositif expérimental utilisé, l'acquisition et le traitement des données.

Le cinquième chapitre est dédié à la présentation des deux campagnes expérimentales réalisées (essais de module complexe et de traction simple). Ces campagnes permettent de caractériser le matériau dans les domaines viscoélastique et viscoplastique.

Le sixième chapitre concerne les simulations réalisées à l'aide de la version EPPI du modèle DBN introduit dans cette thèse. Des modélisations des essais de module complexe et des essais de traction simple sont présentées, ainsi qu'une étude des effets transitoires observés lors des essais de module complexe.

Le septième et dernier chapitre rassemble les annexes dont notamment les détails des calculs, les codes de calculs développés sous Matlab© et l'ensemble des résultats expérimentaux des essais réalisés pendant cette thèse.

Enfin, les principaux résultats et les possibles évolutions des développements présentés dans ce mémoire sont repris dans une conclusion générale.

1 Etude bibliographique

Ce chapitre présente un résumé des connaissances acquises sur les propriétés des enrobés bitumineux afin d'établir le contexte général de cette thèse.

Après une brève présentation de l'enrobé bitumineux (origine, composition, fabrication), on introduit ses différents types de comportement. Le chapitre se concentre ensuite sur deux types de comportements, étudiés dans cette thèse : le comportement viscoélastique linéaire et le comportement viscoplastique.

1.1 Généralités sur les enrobés bitumineux

1.1.1 Le bitume

Les liants hydrocarbonés sont des substances chimiques principalement composés d'assemblages d'atome de carbone et d'hydrogène (Di Benedetto and Corté 2004). On distingue principalement trois types de liants hydrocarbonés parmi lesquels :

- Les **liants naturels** que l'on trouve en l'état dans la nature, le plus souvent associés à des matières minérales. On considère que ces liants sont utilisés par l'homme, dans le domaine du génie civil, au moins depuis le début de l'Antiquité (par les Sumériens, puis les Babyloniens dans la construction des jardins suspendus, mais également dans la vallée de l'Indus pour la construction de réservoirs d'eau).
- Les **goudrons** qui sont issus de la pyrogénéation (réaction consistant à porter un corps ou une substance à une température élevée), à l'abri de l'air, de matière d'origine végétale : houille, lignite, bois, etc. Dans le domaine routier, les goudrons sont principalement des produits de la houille.

- Les **bitumes**, produits en raffinerie à partir de la distillation fractionnée de certains pétroles bruts. En technique routière, les bitumes sont employés pour leurs propriétés agglomérantes et d'étanchéité.

Malgré la confusion fréquente entre goudrons et bitumes, les goudrons ne sont plus utilisés dans le domaine routier en raison de leur caractère cancérigène. En France, les liants hydrocarbonés employés sont presque systématiquement des bitumes, en partie pour des raisons économiques, mais également pour leur comportement et pour des considérations environnementales.

1.1.1.1 Origine et production

La distillation en raffinerie est le principal mode de fabrication des bitumes. Elle est réalisée dès lors que le pétrole brut lourd utilisé contient suffisamment de fractions lourdes pour produire du bitume. La distillation s'effectue en plusieurs étapes (Figure 1-1) :

- Une **distillation atmosphérique** qui permet de séparer les fractions légères du pétrole (essences, kérosène, gaz), des fractions lourdes. Cette opération est réalisée à une température de 300 à 350 °C.
- Une **distillation sous vide** des fractions lourdes pour produire fuels, huiles et bitumes réalisée à une température de 350 à 425 °C.

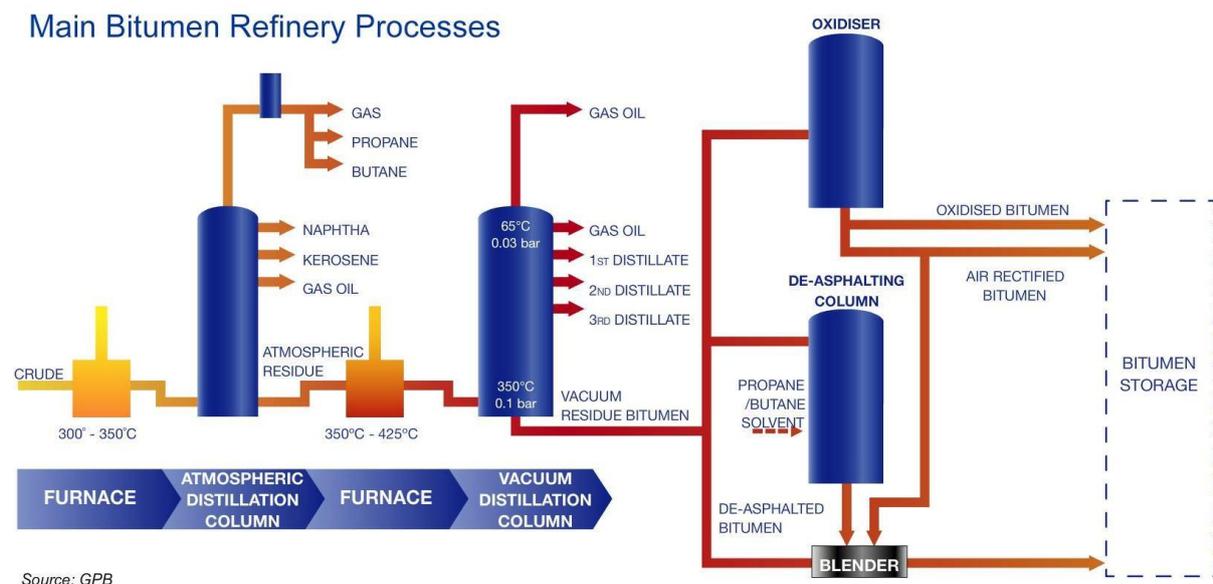


Figure 1-1 : Processus de raffinement du pétrole pour obtenir du bitume. (Eurobitume, Groupement Professionnel des Bitumes, 2005).

Outre la distillation, le bitume peut être obtenu par un traitement qui peut prendre plusieurs formes (oxydation, rectification à l'air, désaspaltage au solvant, etc.) afin de satisfaire aux différentes utilisations commerciales.

1.1.1.2 Composition chimique et structure

D'un point de vue purement chimique, les bitumes ont une composition dont les concentrations par éléments sont données dans le Tableau 1-1 (Di Benedetto and Corté 2004). Les molécules présentes dans le bitume sont nombreuses ce qui rend leur détermination exacte impossible. Classiquement, on regroupe les composés du bitume selon deux catégories : les **asphaltènes** et les **maltènes**. Parmi les maltènes, sont distingués les saturés, les aromatiques et les résines (*cf.* Figure 1-2). Les propriétés de chaque sous famille de composants du bitume sont données dans le Tableau 1-2.

Tableau 1-1 : Composition chimique des bitumes (Di Benedetto and Corté 2004).

Élément chimique	Concentration (% de masse)
Carbone	82-88
Hydrogène	8-11
Soufre	0-6
Oxygène	0-1,5
Azote	0-1

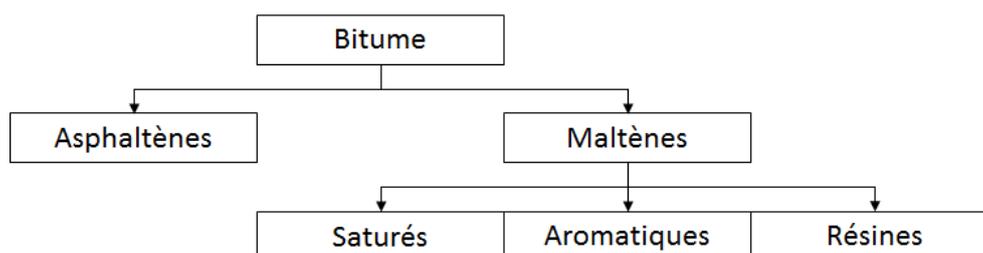


Figure 1-2 : Schéma de séparation chimique des constituants du bitume.

Les proportions de chaque sous-famille dépendent de nombreux facteurs parmi lesquels :

- L'origine du bitume,
- Le mode de fabrication du bitume,
- Le grade du bitume
- Son état de vieillissement, etc.

Tableau 1-2 : Principales propriétés des composants du bitume (Di Benedetto and Corté 2004).

<i>Sous famille</i>	<i>Concentration (% de masse du bitume)</i>	<i>Masse moléculaire (kg/mol)</i>	<i>Rapport H/C</i>	<i>Taille (nm)</i>
<i>Asphaltènes</i>	5-25%	1-100	1,1	5-30
<i>Saturés</i>	13-25%	0,5-50	1,3-1,4	1-5
<i>Aromatiques</i>	40-65%	0,2-2	-	-
<i>Résines</i>	5-20%	-	-	-

Les propriétés des bitumes sont fonction de sa composition chimique, bien qu'il soit difficile de la décrire précisément.

1.1.1.3 Classes de comportement des bitumes purs

L'étude de la rhéologie du liant permet de mieux cerner les propriétés de l'enrobé bitumineux (Olard 2003). Elle permet de comprendre l'influence des propriétés du liant sur celles de l'enrobé car lors de la formulation, c'est bien le choix du liant qui a l'influence la plus forte sur les propriétés rhéologiques de l'enrobé final.

On peut distinguer plusieurs domaines de comportement pour les liants bitumineux tels qu'ils sont représentés sur la Figure 1-3. Les frontières entre ces zones de comportement sont bien entendu fonction du liant considéré. On a :

- Les **domaines fragiles et ductiles**, à basses températures et jusqu'à des températures moyennes voire élevées, ils sont caractérisés par la résistance à la traction σ_p .
- La **rupture fragile** qui peut être caractérisée par la ténacité K_c et qui est d'autant plus faible (en termes de déformation imposée) que la température est basse.
- Le **comportement élastique linéaire**, à basse température et petites déformations, caractérisé par le module de Young E .
- Le **comportement viscoélastique linéaire**, pour des températures au-delà de la température de T_g et des petites déformations, caractérisé par le module complexe E^* .

- Le **comportement purement visqueux** (fluide Newtonien), à haute température (> 80 °C) et pour des déformations moyennes à grandes, caractérisé par la viscosité η .
- Le **domaine non linéaire**, pour des déformations de quelques pour cent.

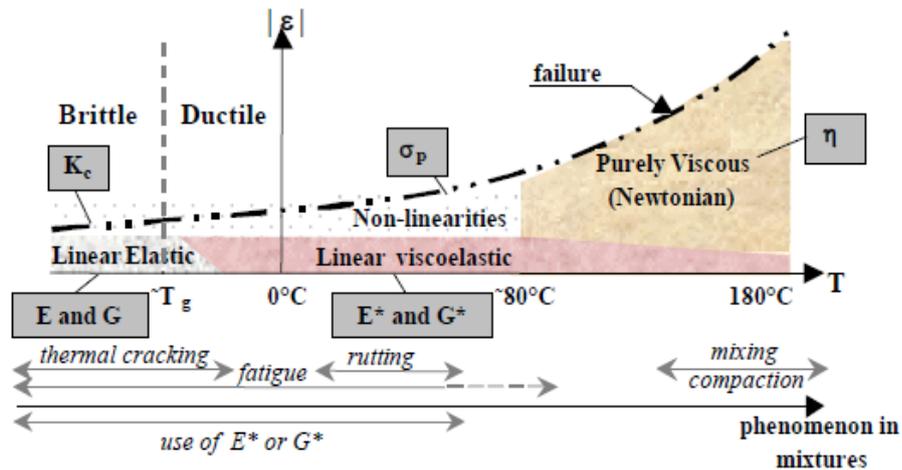


Figure 1-3 : Classes de comportement des bitumes en fonction de la déformation imposée et de la température (Olard 2003; Tran 2004).

1.1.2 Les granulats

Les granulats sont le principal constituant des enrobés bitumineux. Ils représentent environ 95 % de la masse totale et 80 à 85 % du volume total (Corté and Di Benedetto 2004). Le terme **granulat** regroupe l'ensemble des matériaux granulaires. Leur dimension varie de 0 à une dimension maximale D qui dépend du type d'enrobé bitumineux considéré (de quelques dizaines de mm au maximum). On distingue les granulats en fonction de leur dimension :

- Les **fines** (passant < à 63 μm , d'après la norme EN 13043:2003) : sont distinguées les fines naturelles (provenant du concassage des granulats), des fines ajoutées pendant la phase de mélange de l'enrobé.
- Les **sables** : dans le domaine des enrobés, ce sont généralement des sables concassés 0/2 ou 0/4 mm et souvent fillérisés à 18 % (cas 0/2 mm) ou de 10 à 14 % (cas 0/4 mm).
- Les **gravillons** constituent l'ossature du mélange hydrocarboné. Par conséquent, leur nature, angularité, forme conditionnent la stabilité du mélange et les caractéristiques de surface des couches de roulement. On parle de classe granulaire d/D en terme de dimension de tamis inférieure (d) et supérieure (D), exprimée en mm.

Les matériaux granulaires utilisés sont issus d'un mélange de ces trois catégories de granulats. La **courbe de granulométrie** du mélange est caractéristique du matériau final. Elle donne la répartition de chaque fraction de granulat.

Les granulats peuvent être issus de gisements (gravière, alluvions fluviales ou lacustres) ou d'extraction à partir d'une roche mère compacte (carrière). En fonction de son origine, le granulat présentera des propriétés géométriques différentes : aspect roulé (lorsqu'il est issu d'un gisement) et concassé (extraction). Il peut être utilisé comme matériau en vrac ou après transformation (concassage, tamisage, dépoussiérage, lavage, etc.). Il constitue alors une classe granulaire qui peut être utilisée seule ou au sein d'un mélange de plusieurs classes granulaires afin de constituer le squelette granulaire d'un mélange bitumineux.

Les propriétés physiques des granulats (forme, rugosité, etc.) sont en général non modifiables en raison des coûts économiques que cela pourrait engendrer. Il est donc impératif de prendre toutes les précautions nécessaires lors de l'extraction, du transport, du concassage et du lavage des granulats.

Pour être utilisé dans la composition des enrobés bitumineux, les granulats doivent présenter des caractéristiques spécifiques selon leur emploi et les performances attendues. Le choix d'un granulat est donc fonction :

- du type d'enrobé bitumineux (enrobé, béton bitumineux, enduit, etc.),
- de la position et la fonction de la couche de revêtement (fondation, base, liaison, surface ou roulement),
- du type de trafic (fort, moyen, faible, aucun trafic),
- des sollicitations (zones d'arrêts, fortes sinuosité du tracé, pentes, etc.),
- des effets du climat (chaud/tempéré/froid, présence d'eau, etc.).

Pour assurer à l'enrobé bitumineux final des bonnes performances mécaniques et de durabilité, les granulats doivent satisfaire certains critères, parmi lesquels :

- angularité,
- résistance aux chocs,
- résistance au gel/dégel,
- résistance à l'abrasion,
- compatibilité avec le liant.

1.1.3 L'enrobé bitumineux

Le terme enrobé hydrocarboné regroupe tout mélange de granulat et de liant hydrocarboné. Sont donc distingués les enrobés bitumineux, pour lesquels le liant hydrocarboné sera le bitume. Un enrobé bitumineux est donc défini comme un mélange de liant bitumineux (de 3 à 7 % en masse), de granulats et de fines (ou *filler*, passant à 63 μm).

Les granulats sont considérés comme le **squelette granulaire** du matériau alors que le bitume agit comme **liant**. La cohésion d'un enrobé bitumineux est assuré par le **mastic**, qui est le mélange du bitume avec la fraction la plus fine des granulats (les fines). Le dernier composant d'un enrobé bitumineux est l'air, contenu dans les vides non remplis par du bitume et restant entre les granulats. Ces vides sont souvent désignés par **vides d'air** et ont une influence non négligeable sur le comportement du matériau.

Lors de la conception d'un enrobé bitumineux, de nombreux paramètres peuvent ainsi être ajustés afin de répondre aux exigences de fabrication, de mise en œuvre, de durabilité, de sécurité des usagers de la route, de protection de l'environnement, etc. Sans être exhaustif, les principaux paramètres sont :

- la quantité et le type de liant, de granulats, d'additif(s),
- la courbe granulométrique des granulats,
- la teneur en vide,
- la méthode de fabrication (à chaud, tiède, froid, etc.).

En fonction des paramètres de conception du mélange, de la méthode de production et des propriétés finales du mélange, différents types d'enrobés bitumineux ont été définis :

- **Bétons Bitumineux (BB)**, utilisés pour les couches supérieures de chaussées, avec un taux de bitume élevé (5-6 %) et des bonnes performances ;
- **Graves Bitumes (GB)**, utilisés pour les couches inférieures de chaussées, avec un faible taux de bitume (3-5 %) ;
- **Enrobés à Module Elevé (EME)**, dont les caractéristiques du mélange sont proches de celles des BB ou GB mais avec des performances supérieures. Ils sont définis par la norme EN 13108-1 :2007 qui impose un module complexe $|E^*|$ à 15 °C, 10 Hz supérieur à 14 000 MPa et au minimum un paramètre de fatigue ε_6 de 130 μdef .

1.2 Généralités sur le comportement mécanique des enrobés bitumineux

Les structures de chaussée sont soumises à des sollicitations externes très diverses et la plupart du temps couplées : mécaniques, thermiques, chimiques, etc.

Dans cette section, les sollicitations auxquelles sont soumises les structures de chaussées, sont décrites et analysées. Elles nous permettent de définir les principales classes de comportements thermomécaniques des enrobés bitumineux. Dans le cadre de cette thèse, ce sont principalement les comportements viscoélastique linéaire (VEL) et viscoplastique (VP) qui sont détaillées.

1.2.1 Sollicitations des couches en enrobés bitumineux

Les structures de chaussée sont composées de plusieurs couches d'enrobés bitumineux. Elles sont modélisées par des systèmes multicouches (Corté and Di Benedetto 2004) dont les interfaces peuvent être supposées comme collées à parfaitement libres. Le calcul des contraintes et des déformations s'effectue la plupart du temps avec un modèle de comportement élastique, linéaire et isotrope qui prend en compte les valeurs de module d'Young et du coefficient de Poisson.

En raison des propriétés particulières apportées par le bitume, les enrobés bitumineux ont un comportement fortement dépendant de la vitesse de chargement et de la température. L'hypothèse d'un comportement élastique est donc dans la plupart des cas une approximation non justifiée qui ne permet de rendre compte que très partiellement du comportement réel des structures de chaussées. En particulier, les effets des non-linéarités, des irréversibilités, de la fatigue, etc. s'accumulent avec le nombre de cycles de sollicitations qui peut atteindre plusieurs millions pour certaines chaussées. De plus, le passage répété de véhicules est responsable de la création de microdégradations qui s'accumulent et entraînent à terme l'apparition de fissures voire la ruine du matériau. Les modèles élastiques ne permettent pas de prendre en compte ces phénomènes.

Avant d'aller plus loin, il est donc intéressant de décrire les principales sollicitations auxquelles sont soumises les couches d'enrobé dans les structures de chaussée, à savoir les contraintes imposées par le passage des véhicules (effet du trafic) et celles créées par les chargements climatiques (effets dus principalement aux variations de températures).

1.2.1.1 Effets du trafic

Sous l'effet du trafic, chaque couche de chaussée est soumise à des écrasements et des flexions. De plus, au passage des véhicules sur la chaussée, les couches en enrobés sont soumises à des efforts de traction et de compression longitudinaux.

Les différentes sollicitations observées dans les couches de la chaussée sous une route sont schématisées sur la Figure 1-4. On notera en particulier deux phénomènes :

- l'orniérage qui apparaît sous l'effet des compressions verticales répétées,
- la fatigue qui a pour origine les cycles de sollicitations en traction et compression dans le sens longitudinal.

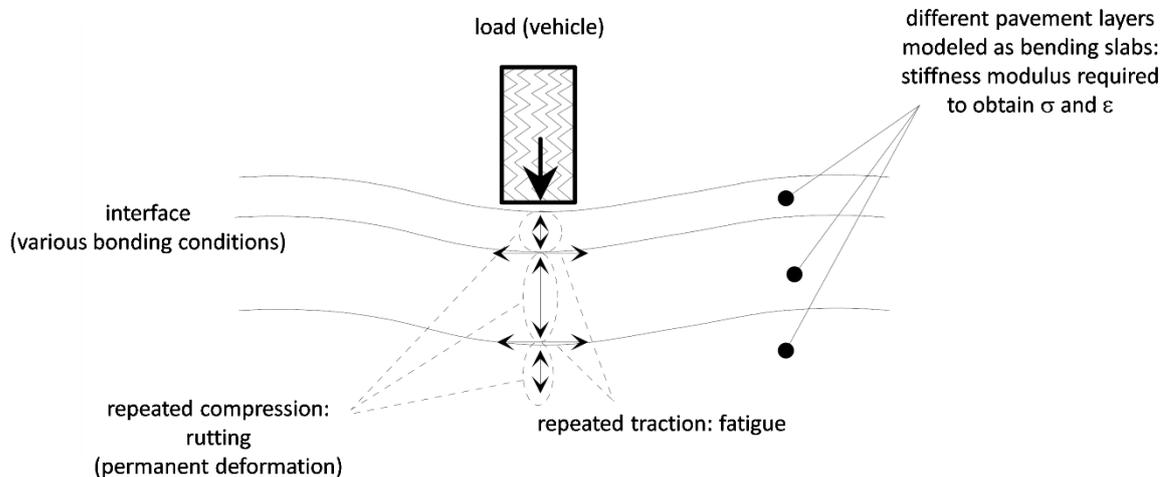


Figure 1-4 : Représentation des sollicitations induites par le trafic
(Di Benedetto and De La Roche 1998).

1.2.1.2 Effets du climat

Ces phénomènes et leurs conséquences (illustrés par la Figure 1-5) peuvent être traités par le choix d'une classe de bitume adapté aux conditions climatiques :

- A basse température, on privilégie un bitume résistant à la fissuration thermique (comportement fragile), c'est-à-dire un bitume de module plus faible (plus « mou » qui sera donc moins « cassant »).
- A haute température, on choisit un bitume résistant à l'orniérage (comportement plastique), de module plus élevé (plus « dur » donc capable de résister à des contraintes de trafic importantes).

Un bitume idéal sera donc un compromis entre sa stabilité (résistance à la déformation permanente) et sa flexibilité (aptitude à supporter les basses températures sans fissurations).

Pour supporter des écarts de températures importants, les différents groupes pétroliers ont développés des bitumes modifiés aux polymères, capable de couvrir des larges gammes de températures (de -30 °C à 60 °C).

Les effets de la température sont principalement de deux natures (Di Benedetto and De La Roche 1998). Outre le vieillissement du matériau, la température a deux effets principaux (cf. Figure 1-5):

- Le **changement de module du matériau**. Les matériaux bitumineux sont dits « thermosensibles », le comportement viscoélastique change selon la température considérée. Cela se traduit généralement par une dépendance du module d'Young vis-à-vis de la température et de la vitesse de chargement.
- La **création de contraintes et déformation** au sein du matériau en raison des dilatations et contractions thermiques observées lors des changements de température. Cet effet est néfaste à plusieurs titres. D'abord parce que les mouvements longitudinaux de la chaussée sont empêchés ce qui revient à la création de traction (lors d'un refroidissement) ou de compression (lors d'un échauffement) qui peuvent engendrer des fissures transversales. Enfin, dans le cas de structures semi-rigides, le retrait (thermique et/ou de prise) des couches traitées aux liants hydrauliques est empêché à la surface et peut provoquer l'ouverture de fissures capables de se propager dans la structure au fil des cycles thermiques.

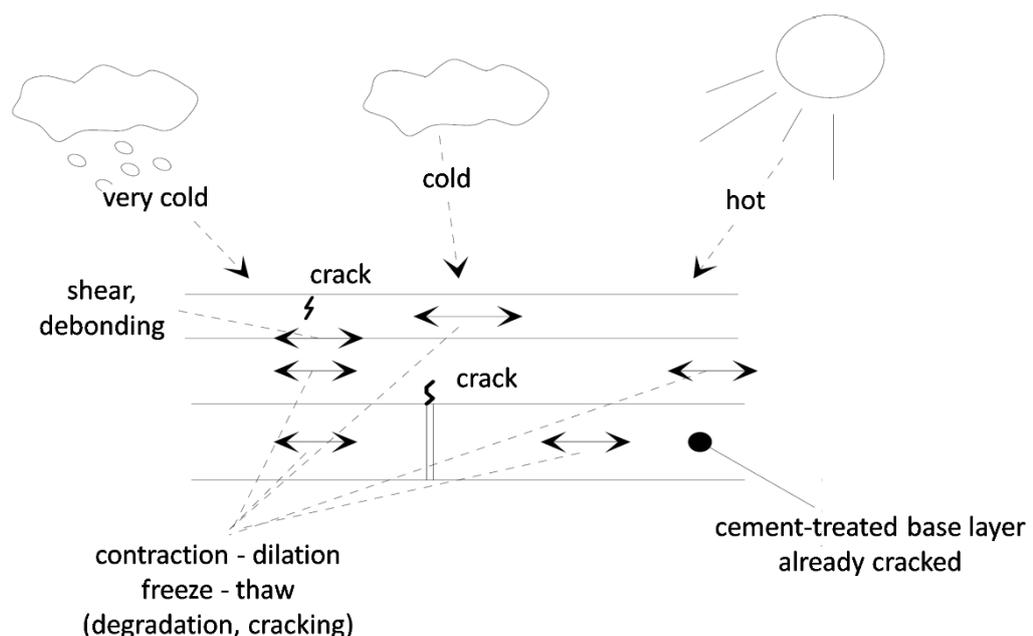


Figure 1-5 : Représentation des sollicitations induites par le climat (Di Benedetto and De La Roche 1998).

Si la température a un effet très important sur le comportement des enrobés bitumineux, d'autres phénomènes climatiques peuvent avoir un impact important. Sans les détailler ici, on citera entre autres : les effets de l'eau et en particulier du gel, les UV, etc.

1.2.2 Domaines de comportement des enrobés bitumineux

Les enrobés bitumineux ont un comportement complexe. Différentes classes de comportement sont néanmoins identifiables en considérant l'amplitude des déformations ($|\varepsilon|$) et le nombre de cycles (N) de sollicitations appliqués (cf. Figure 1-6) :

- **Comportement viscoélastique linéaire** : pour de faibles amplitudes de déformations ($< 100 \mu def$) et quelques centaines de cycles maximum.
- **Comportement non linéaire** : pour des amplitudes de déformation plus importantes (quelques pourcent) et à partir de quelques cycles de sollicitations.
- **Fatigue** : comportement observable pour des milliers de cycles de sollicitations de faible amplitude de déformation.
- **Orniérage** : observé lorsque des cycles déviatoires en contraintes sont appliqués à partir d'une contrainte nulle, des déformations irréversibles apparaissent pour des amplitudes de déformation « proches » de la rupture.

Seules les principales caractéristiques de ces types de comportement sont présentées dans cette étude bibliographique. On notera cependant que de nombreuses études traitent de ces différents sujets. Sans être exhaustif, on citera tels que le comportement viscoélastique (Airey et al. 2002; Airey et al. 2003a; Olard 2003; Airey et al. 2003b; Mangiafico et al. 2014; Pham et al. 2015a; Ramirez Cardona et al. 2015; Sauzeat and Di Benedetto 2015), l'influence de la température (Di Benedetto et al. 2008; Nguyen et al. 2009; Di Benedetto et al. 2010; Nguyen et al. 2012a; Nguyen et al. 2012c), les linéarités et non linéarités (Di Benedetto et al. 2004b; Suo and Wong 2009; Gauthier et al. 2010; Huang et al. 2011; Nguyen et al. 2014), les déformations permanentes (Dongmo-Engeland and Di Benedetto 2005; Bahuguna et al. 2006; Freire et al. 2006; Darabi et al. 2012), la fatigue (Baaj 2002; Di Benedetto et al. 2003; Di Benedetto et al. 2004a; Van Rompu et al. 2012; Nguyen et al. 2012b; Mangiafico 2014), le comportement à basse température (Tapsoba et al. 2012; Tapsoba 2012; Tapsoba et al. 2016), et l'anisotropie (Clec'h 2010; Zhang et al. 2011a; Di Benedetto et al. 2016).

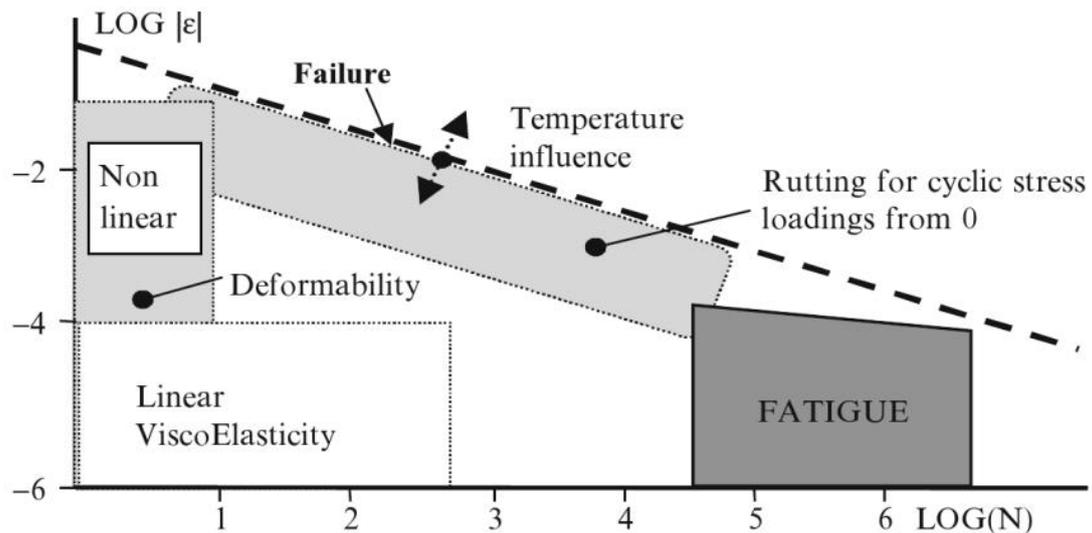


Figure 1-6 : Représentation des différentes classes de comportement des enrobés bitumineux en fonction de l'amplitude des déformations ε et du nombre de cycles N , à une température donnée (Di Benedetto 1990).

La Figure 1-6 fournit un ordre de grandeur des limites des différents domaines de comportement pour une température fixée. Ces frontières sont des ordres de grandeur qui peuvent varier sensiblement en fonction du type de matériau, de la température, de la direction du chemin de sollicitation (compression, traction, cisaillement, etc.) et des conditions de l'essai ou de la situation in-situ.

A partir de ces conditions, les quatre propriétés mécaniques des enrobés bitumineux utilisées dans le domaine routier sont (Olard 2003) :

- la **rigidité** et le **module** : caractéristique du comportement viscoélastique linéaire,
- le **comportement en fatigue**,
- le **comportement à l'orniérage** qui correspond à une accumulation de déformations permanentes,
- la **fissuration** et la **propagation des fissures** dans la structure de la chaussée, en particulier à basse température.

Dans le cas du dimensionnement des structures de chaussées, ce sont principalement ces quatre propriétés qui doivent être prises en compte (Di Benedetto and Corté 2004).

1.2.3 Généralités sur les essais mécaniques de laboratoire et leur interprétation

Pour déterminer les propriétés mécaniques et thermiques des enrobés bitumineux, on utilise des essais de laboratoire. Ces essais sont normalisés lorsqu'ils servent au dimensionnement des structures de chaussée. D'autres essais non normalisés ont également été développés (en particulier au LGCB-LTDS). Tous sont réalisés dans des conditions de sollicitations et de température bien définies, sur des éprouvettes de taille fixée, fabriquées en laboratoire ou prélevées sur site.

Bien que nombreux et divers, les essais de caractérisation des propriétés mécaniques et thermiques peuvent être classés de plusieurs manières. La première les classe en trois catégories liées à l'interprétation de l'essai (Bonnot 1973; Bonnot 1984). La seconde classification établit deux catégories : les essais homogènes et non homogènes (Di Benedetto 1990).

1.2.3.1 Classification selon le type d'interprétation

La classification des essais selon le type d'interprétation fait apparaître trois catégories d'essais : empirique, de simulation et de détermination.

Essais empiriques

Dans cette catégorie d'essais, le mode de sollicitations peut être très différent de celui existant dans l'ouvrage. Généralement, ils ne permettent donc pas de déterminer une propriété intrinsèque du matériau. Il s'agit principalement d'essais issus de l'expérience acquise sur le terrain. La relation entre propriété d'usage et résultats de l'essai ne peut être établie théoriquement. L'essai Marshall (norme NFP-98-251-2) est typiquement un essai empirique.

Ces essais ne peuvent être considérés comme valables que si la caractérisation obtenue reflète la réaction du matériau dans l'ouvrage sous l'effet de sollicitations réelles. Cependant, cela n'est que très rarement vérifié.

Essais de simulation

La représentativité des essais peut être améliorée en suivant cette première voie. Pour une propriété d'usage donnée, elle consiste à utiliser à une échelle réduite, des sollicitations les plus proches possibles de celles qui existent dans l'ouvrage considéré. Ainsi, pour la propriété d'usage de résistance à l'ornièrage d'une chaussée, on considère l'essai à l'ornièreur

(norme NFP 98-253-1). Il consiste à faire passer une roue chargée sur une plaque d'enrobé et à mesurer l'évolution de la profondeur de l'ornièrè.

Bien que plus représentatifs que les essais empiriques, ces essais demeurent relativement peu exploitables. D'une part, les sollicitations appliquées sont souvent complexes (dans l'application, les conditions aux limites, etc.). D'autre part, la complexité des lois d'échelle (passage du modèle à l'ouvrage), empêchent de prédire la réponse du matériau à des sollicitations réelles. Il faut enfin ajouter que ce type d'essai n'est plus prédictif dès lors que les conditions de réalisation de l'essai diffèrent des conditions de sollicitations réelles (température, chargement).

Le principal avantage de ces essais sur ceux empiriques est donc de permettre une classification des qualités du matériau en fonction de la propriété d'usage.

Essais de détermination

Les essais de détermination sont basés sur un tout autre objectif : assurer la représentativité des essais. Il ne s'agit plus de se rapprocher des sollicitations réelles, mais au contraire de choisir des sollicitations suffisamment simples qui permettent de déterminer les propriétés intrinsèques du matériau. De ces résultats, la propriété d'usage désirée peut être testée en utilisant une modélisation de la structure de l'ouvrage et l'utilisation de lois de comportement de l'enrobé.

Ces essais utilisent des sollicitations simples et parfaitement définies afin de déterminer les propriétés intrinsèques des matériaux, c'est-à-dire indépendamment des conditions d'essais. L'état de contrainte et de déformation du matériau est obtenu par la théorie de la mécanique des milieux continus. La solution est calculée par la résolution des équations du problème obtenues en associant :

- Les équations de conservations, générales pour tous les milieux,
- Les conditions aux limites du problème,
- Les lois de comportement, propres au corps étudié.

Ce dernier type d'essai est prometteur, dans le sens où ils permettent de déterminer les propriétés intrinsèques d'un matériau donné et à terme de développer des essais pratiques de formulation. Tous les efforts doivent être engagés pour le développement de ces essais.

1.2.3.2 Classification selon les états de contrainte et de déformation

Cette deuxième classification des essais mécaniques distingue deux catégories : les essais non homogènes et les essais homogènes.

Les essais non homogènes correspondent à des essais de structure, interprétés de manière totalement empirique ou déterminant une caractéristique de l'ouvrage grâce à l'utilisation de lois de similitude (modèle réduit). Pour les essais homogènes et contrairement aux essais non homogènes, l'état de contrainte et de déformation est le même en chaque point de l'éprouvette testée.

Les essais homogènes permettent de déterminer la loi de comportement du matériau sans hypothèse supplémentaire. Les essais non homogènes nécessitent l'introduction d'hypothèses et la réalisation de calculs (plus ou moins complexes) pour obtenir le comportement. La Figure 1-7 donne l'exemple de deux essais réalisés ainsi qu'une interprétation possible dans le cadre d'un comportement élastique linéaire isotrope.

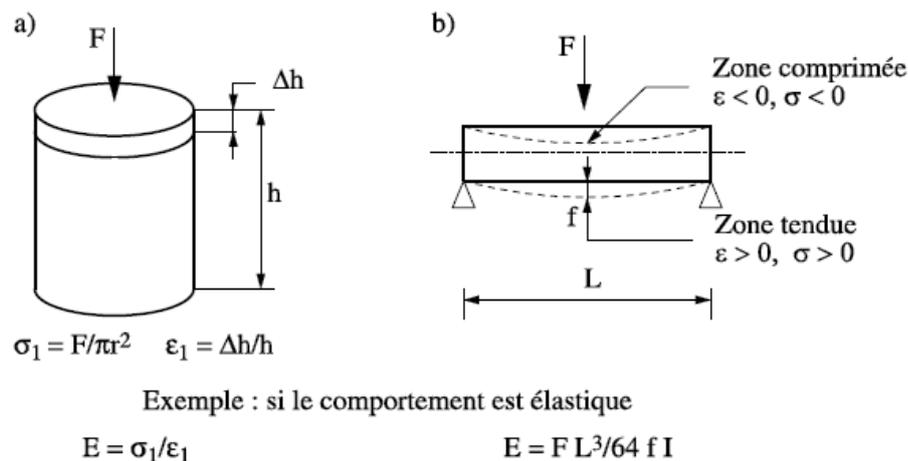


Figure 1-7 : Exemples d'essais, (a) Essai de traction/compression, homogène et (b) Essai de flexion de poutre, non homogène (Nguyen 2009).

Les types de comportements décrits par la Figure 1-6 peuvent tous être caractérisés par des essais homogènes ou non. Les caractéristiques sont cependant plus simplement quantifiables lorsque des essais homogènes sont considérés.

Dans tous les cas, ces remarques soulignent l'importance fondamentale de la qualité de réalisation et d'interprétation des essais, sans laquelle les véritables propriétés du matériau ne peuvent pas être déterminées avec précision, pertinence et représentativité. Les

conditions de réalisation (température, conditions d'encastrement, sollicitations, etc.) doivent être parfaitement connues.

1.3 Lois de comportement des matériaux

Les équations de la mécanique des milieux continus et les relations entre les différentes grandeurs sont incomplètes pour résoudre tous les problèmes du génie civil. A ces équations, il convient donc d'ajouter des équations spécifiques, caractérisant le matériau étudié : il s'agit des **équations de comportement**.

Ces équations permettent de caractériser le comportement d'un matériau soumis à des sollicitations extérieures (mécaniques, thermiques, etc.) : elles sont propres à ce matériau. La recherche de lois de comportement est la science de la déformation de la matière sous l'effet de sollicitations qui lui sont appliquées qui s'inscrit dans le domaine de la rhéologie. Il s'agit ici de caractériser de manière intrinsèque le matériau, indépendamment des conditions aux limites.

Il existe une grande diversité de lois de comportement parmi lesquelles l'élasticité, la viscosité et la plasticité, ainsi que leur combinaisons (viscoélasticité, viscoplasticité, élastoplasticité) qui sont présentées et étudiées dans cette section. A cela, on peut ajouter de nombreux autres effets (température, caractère fluide ou solide, vieillissement, aspects physico-chimiques, etc.). Seuls les effets de température sont également traités ici.

L'objectif est de rappeler les lois de comportement classiques afin d'être capable par la suite de les analyser et de les composer pour proposer un nouveau modèle de comportement des enrobés bitumineux.

1.3.1 Le comportement élastique

Un milieu continu est dit **élastique** lorsque l'état de contraintes n'est pas fonction de l'état de déformation antérieur. Ainsi seul l'état de déformation actuel permet de déterminer l'état de contrainte. L'histoire de déformation n'intervenant pas, la relation de comportement s'exprime à l'aide d'une fonction tensorielle C_{ij} telle que :

$$\sigma_{ij} = C_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (1.1)$$

Dans le cas d'un comportement élastique, les déformations élastiques sont des déformations réversibles, *ie.* le matériau retrouve sa forme et sa taille initiale quand les efforts

ne s'exercent plus. Les chemins de contraintes sont identiques en charge et en décharge (Figure 1-8).

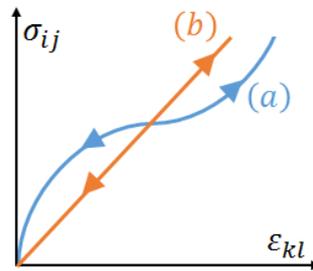


Figure 1-8 : Représentation de deux types de comportement élastique
(a) Elasticité non linéaire, (b) Elasticité linéaire.

On distingue l'**élasticité linéaire** qui s'observe généralement dans le cas des petites déformations. Dans ce cas, la relation entre état de contrainte et état de déformation est linéaire (Figure 1-8) et on a :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1.2)$$

Où C_{ijkl} est un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur de raideur. Son inverse est appelé tenseur d'élasticité (ou de souplesse), noté M_{ijkl} et est tel que :

$$\varepsilon_{ij} = M_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (1.3)$$

L'**isotropie** caractérise l'invariance des propriétés physiques d'un milieu en fonction de la direction. Dans le cas d'un comportement élastique isotrope, le tenseur de raideur doit être invariant par tout changement de base. On peut alors montrer que la seule forme possible pour ce tenseur est :

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (1.4)$$

Cela conduit à l'introduction de la loi de Hooke, valide dans le cas d'un comportement élastique, linéaire et isotrope :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (1.5)$$

Ou dans sa version en déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (1.6)$$

Où :

- μ et λ sont les coefficients de Lamé ,
- E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson.

Il est à noter que seules 2 constantes sont nécessaires pour décrire complètement le comportement élastique linéaire isotrope d'un matériau. Le Tableau 1-3 donne les relations entre les différents coefficients.

Tableau 1-3 : Relations entre les coefficients de Lamé, le module d'Young et le coefficient de Poisson.

$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$
$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$	$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$

Un matériau est dit **orthotrope** dans le cas où il possède 3 plans de symétrie orthogonaux. Dans le cas d'un comportement élastique orthotrope, on montre que le comportement élastique peut être défini par 9 coefficients. Classiquement on écrit la loi de comportement en utilisant la notation de Voigt :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & & & \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & & & \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & & & \\ & & & (0)_{3 \times 3} & & \\ & & & 1/2G_{23} & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1/2G_{13} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1/2G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Avec les conditions de symétrie des tenseurs des déformations et des contraintes (vérifiées en l'absence de densités surfaciques ou massiques de couple) :

$$\frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu_{12}}{E_2}$$

$$\frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3}$$

$$\frac{\nu_{32}}{E_2} = \frac{\nu_{23}}{E_3}$$

Ce qui ramène à 9, le nombre de coefficients nécessaires pour définir le comportement élastique linéaire orthotrope :

- 3 modules d'élasticité longitudinal E_1 , E_2 et E_3 ,
- 3 modules de cisaillement G_{12} , G_{13} et G_{23} ,
- 3 coefficients de Poisson ν_{12} , ν_{13} et ν_{23} ,

1.3.2 Le comportement viscoélastique

1.3.2.1 Définition

Les matériaux peuvent être classés en deux principales catégories (Di Benedetto and Yan 1994a) :

- Les matériaux *non visqueux* dont la réponse à une sollicitation est indépendante de la vitesse de sollicitations,
- Les matériaux *visqueux* dont la réponse à une sollicitation est dépendante de la vitesse de sollicitation.

La viscoélasticité est donc un type de comportement dépendant du temps. On dit alors qu'un matériau non vieillissant (dont les propriétés mécaniques ne sont pas altérées lors d'une sollicitation thermomécanique) a un comportement *viscoélastique* (par opposition à viscoplastique) si lors d'une expérience d'effacement (Mandel 1969 tel que cité par (Salençon 2009)), l'effacement des contraintes est total. Cette expérience est décrite dans la Figure 1-9. D'abord, le matériau, initialement au repos, est chargé en déformation imposée à partir du temps t_0 . La contrainte résultante augmente instantanément, comme dans le cas des matériaux élastiques. Ensuite, cette contrainte décroît sous l'effet du comportement visqueux. Au temps t_1 , la déformation est ramenée à son niveau initial ($\varepsilon = 0$). L'incrément de contrainte est égal et opposé à l'incrément qui avait eu lieu au temps t_0 . La contrainte dans le matériau est alors de signe opposé. Après le temps t_1 et tant que le niveau de déformation est

maintenu nul, la contrainte décroît progressivement. Le matériau sera qualifié de viscoélastique si on observe un effacement total des contraintes ($\sigma_\infty \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$).

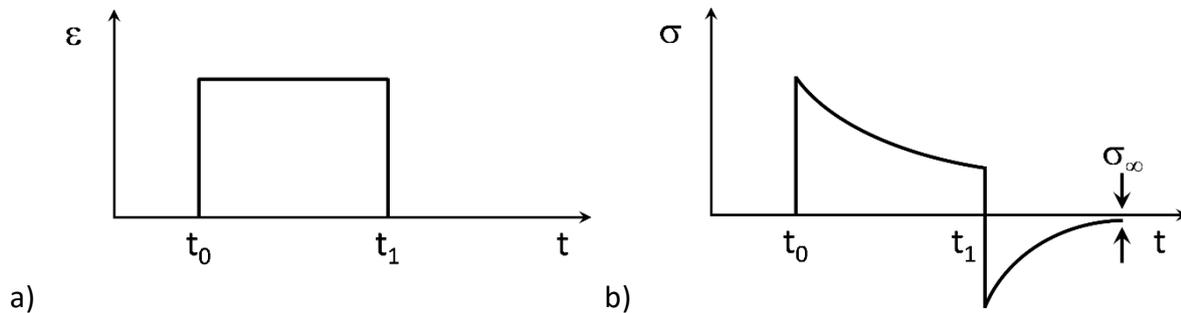


Figure 1-9 : Expérience d'effacement (a) Déformation imposée - (b) Contrainte résultante.

1.3.2.2 Principe de Boltzmann

On parlera de *comportement viscoélastique linéaire* (VEL) si le matériau vérifie le principe de Boltzmann (Boltzmann 1874). Dans ce cas-là, la réponse totale à une superposition de plusieurs sollicitations est égale à la superposition des réponses à chacune de ces sollicitations (Salençon 2009). Le Tableau 1-4 résume ce principe.

Tableau 1-4 : Principe de superposition de Boltzmann ($(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$).

Sollicitations		Réponses	
$\varepsilon_1(t)$	→	$\sigma_1(t)$	
$\varepsilon_2(t)$	→	$\sigma_2(t)$	
$\lambda\varepsilon_1(t) + \mu\varepsilon_2(t)$	→	$\lambda\sigma_1(t) + \mu\sigma_2(t)$	

Si un matériau a un comportement viscoélastique linéaire, alors les déformations sont directement proportionnelles aux contraintes (Lakes 2009).

1.3.2.3 Sollicitation en contrainte – Fonction de fluage

Le fluage est un phénomène physique observable par l'accroissement de la déformation d'un matériau en fonction du temps sous l'action d'une sollicitation en contrainte imposée constante. On détermine la fonction de fluage d'un matériau viscoélastique en imposant une contrainte σ_0 constante, à partir d'un instant t_0 , à température constante (cf. Figure 1-10) :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - t_0) \quad (1.8)$$

Où $H(t)$ est la fonction de Heaviside définie par :

$$\begin{cases} H(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ H(t) = 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

De sorte que :

$$\begin{cases} H(t - t_0) = 0 & \text{pour } t < t_0 \\ H(t - t_0) = 1 & \text{pour } t \geq t_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

La réponse en déformation du matériau est alors donnée par :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t, t_0) \quad (1.11)$$

Où $J(t, t_0)$ est la fonction de fluage du matériau au temps t pour une contrainte appliquée au temps t_0 .

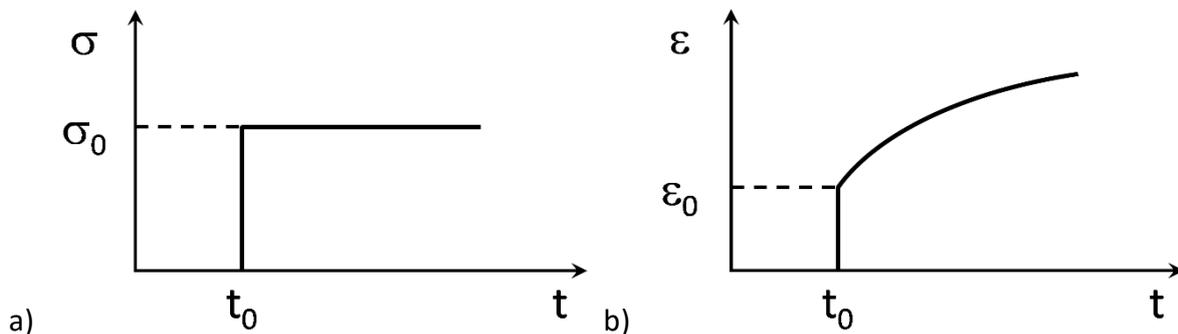


Figure 1-10 : Expérience de fluage pour un matériau viscoélastique (a) Contrainte imposée – (b) Déformation résultante.

Lorsque la contrainte imposée n'est pas constante, la notation incrémentale est utilisée. Pour une variation de la contrainte de $d\sigma(\tau)$ appliqué à l'instant τ , la variation de déformation correspondante $d\varepsilon(\tau)$ à l'instant t est de :

$$d\varepsilon(\tau) = d\sigma(\tau).J(\tau, t) \quad (1.12)$$

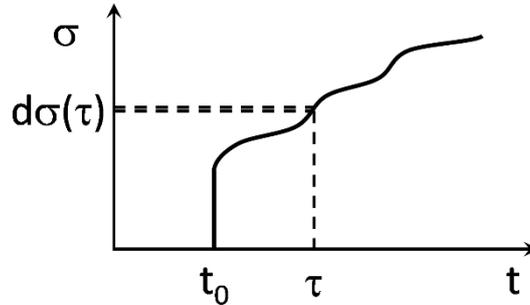


Figure 1-11 : Exemple de sollicitation en contrainte.

Dans le cas d'un matériau VEL et non vieillissant pour lequel on peut appliquer le Principe de Boltzmann, la réponse en déformation $\varepsilon(t)$ à une sollicitation en contrainte $\sigma(t)$ est égale à la somme des réponses individuelles à chaque variation élémentaire de contrainte, soit :

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t J(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (1.13)$$

Si la fonction de contrainte imposée $\sigma(t)$ est dérivable alors on peut réécrire l'équation (1.6) :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0)J(t - t_0) + \int_{t_0}^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (1.14)$$

Intégrée par parties, cette équation devient :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)J(0) + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial J}{\partial \tau}(t - \tau) d\tau \quad (1.15)$$

Où le premier terme représente la réponse instantanée tandis que l'intégrale correspond à la mémoire de l'historique de la sollicitation en contrainte (en d'autres termes, la dépendance en temps du comportement).

Pour un solide, la fonction de fluage tend vers une limite finie lorsque $t \rightarrow +\infty$. Pour un liquide, elle croit sans limite.

1.3.2.4 Sollicitation en déformation – Fonction de relaxation

La relaxation est un phénomène physique observable par la diminution de la contrainte d'un matériau en fonction du temps sous l'action d'une sollicitation en déformation imposée constante. On détermine la fonction de relaxation d'un matériau viscoélastique en imposant une déformation ε_0 constante, à partir d'un instant t_0 , à température constante (cf. Figure 1-12).

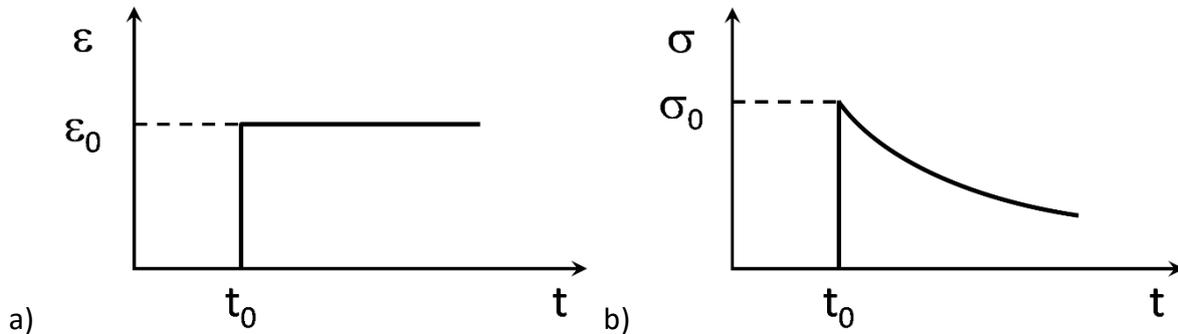


Figure 1-12 : Expérience de relaxation pour un matériau viscoélastique (a) Déformation imposée – (b) Contrainte résultante.

Lors d'un test de relaxation, une déformation constante ε_0 est imposée au matériau. La déformation $\varepsilon(t)$ est donc de la forme :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - t_0) \quad (1.16)$$

La réponse résultante de cette déformation imposée est donnée par :

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 R(t - t_0) \quad (1.17)$$

Où $R(t_0, t)$ est la fonction de relaxation du matériau au temps t pour un incrément de déformation ε_0 appliqué au temps t_0 .

Dans le cas d'une sollicitation en déformation non constante (cf. Figure 1-13), on peut utiliser la notation incrémentale, et en suivant la même approche que celle utilisée pour le fluage, la contrainte résultant s'exprime au temps t :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)R(0) + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) \frac{\partial R}{\partial \tau} (t - \tau) d\tau \quad (1.18)$$

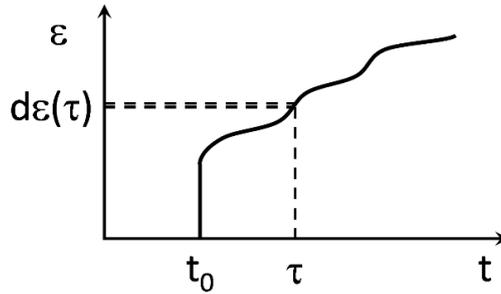


Figure 1-13 : Exemple de sollicitation en déformation.

1.3.2.5 Transformation de Laplace-Carson

La transformée de Carson fait correspondre à une fonction réelle $f(t)$, la fonction $\tilde{f}(p)$ définie par la relation :

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{+\infty} p e^{-pt} f(t) dt \quad (1.19)$$

Où p est un nombre complexe.

Les équations intégrales (1.18) et (1.19) qui décrivent le comportement VEL du matériau dans le domaine temporel étant difficiles à appliquer, la transformée de Carson permet de ramener ces équations de comportement aux relations multiplicatives suivantes :

$$\tilde{\varepsilon}(p) = \tilde{J}(p) \cdot \tilde{\sigma}(p) \quad (1.20)$$

$$\tilde{\sigma}(p) = \tilde{R}(p) \cdot \tilde{\varepsilon}(p) \quad (1.21)$$

Où $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}$, \tilde{J} et \tilde{R} sont respectivement, les transformées de Laplace-Carson de la déformation, contrainte, fonction de fluage et fonction de relaxation.

A partir des équations (1.18) et (1.19) qui décrivent le comportement VEL du matériau et par extension des équations de l'élasticité, les transformées de Laplace-Carson des fonctions de fluage et de relaxation vérifient :

$$\tilde{R}(p) \cdot \tilde{J}(p) = 1 \quad (1.22)$$

1.3.2.6 Module complexe et coefficient de Poisson

Lorsqu'on applique, à un matériau viscoélastique linéaire, une contrainte sinusoïdale $\sigma(t)$ d'amplitude σ_0 et de fréquence f de la forme :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t) \quad (1.23)$$

Avec $\omega = 2\pi f$, la déformation résultante $\varepsilon(t)$ en régime établi, est également sinusoïdale et décrite par :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.24)$$

Où φ , appelé angle de phase, est le retard de la déformation par rapport à la contrainte.

Ainsi, en posant :

$$\sigma^*(t) = \sigma_0 e^{j\omega t} \quad (1.25)$$

$$\varepsilon^*(t) = \varepsilon_0 e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (1.26)$$

On peut écrire :

$$\sigma(t) = \text{Im}[\sigma^*(t)] \quad (1.27)$$

$$\varepsilon(t) = \text{Im}[\varepsilon^*(t)] \quad (1.28)$$

Où Im désigne la partie imaginaire de la variable complexe.

On appelle alors module complexe et on note $E^*(\omega)$ la fonction définie par :

$$\tilde{R}(j\omega) = \frac{\sigma^*(t)}{\varepsilon^*(t)} = E^*(\omega) \quad (1.29)$$

Le module complexe E^* peut également s'exprimer sous la forme :

$$E^*(\omega) = \frac{\sigma_0 e^{j\omega t}}{\varepsilon_0 e^{j(\omega t - \varphi)}} = |E^*| e^{j\varphi} = E_1 + jE_2 \quad (1.30)$$

Où $|E^*|$ est la norme (ou module) du module complexe, parfois appelé module de rigidité (en anglais, *stiffness modulus*). φ est appelé angle de phase (ou angle de déphasage). E_1 est la partie réelle du module complexe, parfois appelé module d'élasticité dynamique. E_2 est la partie imaginaire du module complexe, parfois appelé module de perte.

1.3.2.7 Energie

Lors d'une sollicitation cyclique, la dissipation d'énergie par unité de volume correspond à l'aire de la surface fermée dans le plan contrainte-déformation et est égale à :

$$W_{\text{cycle}} = \oint \sigma d\varepsilon \quad (1.31)$$

Dans le cas où un matériau élastique (linéaire ou non) est soumis à une sollicitation cyclique, l'énergie accumulée lors du chargement est restituée intégralement lors du déchargement. L'énergie dissipée est donc nulle. En effet, les chemins de sollicitations en charge et en décharge sont confondus.

Pour un matériau viscoélastique (Figure 1-14), les courbes contraintes-déformations ne se superposent pas pendant les phases de chargement et de déchargement, elles forment une ellipse. En régime permanent, l'énergie dissipée lors d'un cycle est égale à :

$$W_{\text{cycle}} = \pi \varepsilon_0 \sigma_0 \sin \varphi \quad (1.32)$$

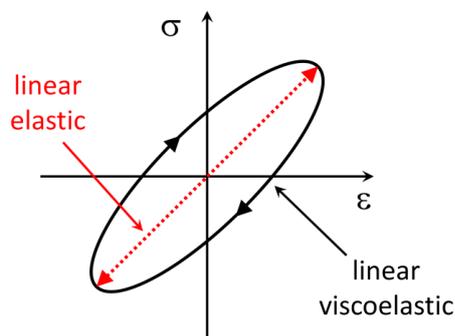


Figure 1-14 : Courbe $\sigma - \varepsilon$ pour un matériau élastique linéaire ou viscoélastique linéaire.

1.3.2.8 Principe d'Equivalence Temps-Température (TTSP)

Définition

Le module complexe dépend de la fréquence et de la température. De nombreux auteurs (Ferry 1980) ont observé que dans le cas de matériaux au comportement viscoélastique linéaire, le module complexe tracé dans les diagrammes de Cole-Cole ou de Black tend à former une courbe unique, indépendante de la température et de la fréquence. Ces matériaux sont alors qualifiés de « Thermorhéologiquement simple » (Corté and Di Benedetto 2004). Dans ce cas, l'influence de la température T et de la pulsation ω (ou de la fréquence f) sur le module complexe peut être réduite à un simple paramètre. On a alors :

$$E^*(\omega, T) = E^*(\omega \cdot g_1(T)) = E^*(g_2(\omega) \cdot T) \quad (1.33)$$

Cela peut permettre de trouver deux couples distincts de pulsation-température pour lesquels les modules complexes sont égaux :

$$E^*(\omega_1, T_1) = E^*(\omega_2, T_2) \quad (1.34)$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega_1 \cdot g_1(T_1) = \omega_2 \cdot g_1(T_2) \\ g_2(\omega_1) \cdot T_1 = g_2(\omega_2) \cdot T_2 \end{cases} \quad (1.35)$$

En raison de l'équivalence entre les effets de la fréquence (ou du temps de chargement dans le domaine temporel) et de la température, on appelle cette propriété des matériaux le « Principe de Superposition Temps-Température », PSTT (en anglais, *Time-Temperature Superposition Principle, TTSP*).

Modèles de représentation du coefficient de translation

Deux équations sont généralement utilisées pour représenter les variations du coefficient de translation en fonction de la température. La première est la loi d'Arrhenius (Arrhenius 1889) donnée par :

$$\log(a_{T_{ref}}(T)) = \frac{\delta H}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \quad (1.36)$$

Où R est la constante des gaz parfaits ($8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), δH est l'énergie d'activation du matériau.

La seconde loi est appelée l'équation de Williams-Landel-Ferry (WLF). Il s'agit d'une équation empirique de la forme (Williams et al. 1955) :

$$\log(a_{T_{ref}}(T)) = -\frac{C_1(T - T_{ref})}{C_2 + T - T_{ref}} \quad (1.37)$$

Où C_1 et C_2 sont des constantes du matériau fonction de la température de référence T_{ref} choisie.

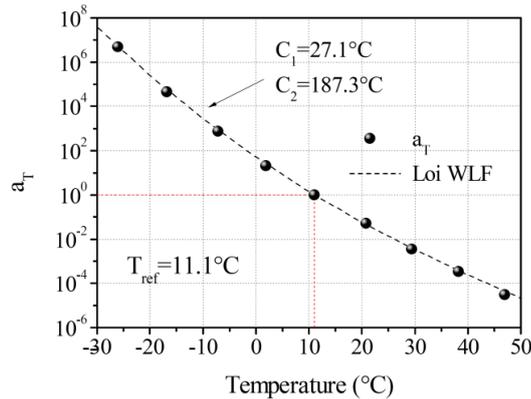


Figure 1-15 : Facteurs de translation et modélisation par l'équation WLF correspondante pour les essais de module complexe présenté Figure 1-16, obtenu pour l'enrobé bitumineux testé dans l'article (Nguyen et al. 2009).

Le PSTT appliqué aux enrobés bitumineux

Le PSTT permet d'utiliser les courbes isothermes du module complexe pour construire une courbe unique de norme du module complexe $|E^*|$ ou d'angle de phase ϕ_E , caractéristique du matériau, pour une température de référence T_{ref} choisie arbitrairement. Cette courbe est appelé courbe maîtresse (Figure 1-16).

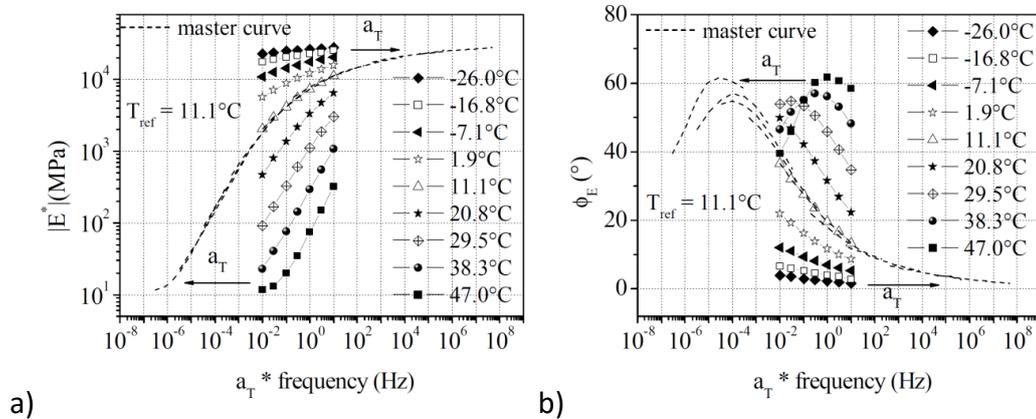


Figure 1-16 : Exemple de courbes maîtresses du module complexe (a, gauche) et de l'angle de phase (b, droite) pour le matériau bitumineux testé dans l'article (Nguyen et al. 2009).

En pratique, cela consiste à choisir une température de référence et à translater toutes les autres courbes isothermes suivant l'axe horizontal des fréquences afin de les superposer à celle de la température de référence afin d'obtenir une courbe unique. D'un point de vue mathématique, la translation est opérée en multipliant les fréquences des points translatsés par un coefficient $a_{T_{ref}}(T)$, appelé facteur de translation, fonction uniquement de la température de l'isotherme considérée :

$$E^*(\omega, T) = E^*(\omega a_{T_{ref}}(T), T_{ref}) \quad (1.38)$$

Lorsque l'on translate les courbes isothermes pour construire les courbes maîtresses, on appelle fréquence réduite la fréquence modifiée obtenue à partir des facteurs de translations.

Les facteurs de translation vérifient l'équation suivante :

$$a_{T_{ref}}(T) = \frac{g_1(T)}{g_1(T_{ref})} \quad (1.39)$$

Le PSTT est une propriété particulièrement intéressante d'un point de vue expérimental car les conditions de température et de fréquence disponibles en laboratoire sont restreintes. Avec une combinaison adaptée de ces deux paramètres, il est possible d'obtenir une très large gamme de fréquences réduites.

En utilisant la même procédure et les mêmes coefficients de translation que ceux de la norme $|E^*|$ du module complexe, des courbes maîtresses peuvent être obtenues pour l'angle de phase du module complexe φ_E , la norme $|v^*|$ et l'angle de phase φ_v du coefficient de Poisson. Le PSTT est valable dans le cas tridimensionnel (Di Benedetto et al. 2008; Nguyen et al. 2009; Nguyen et al. 2014).

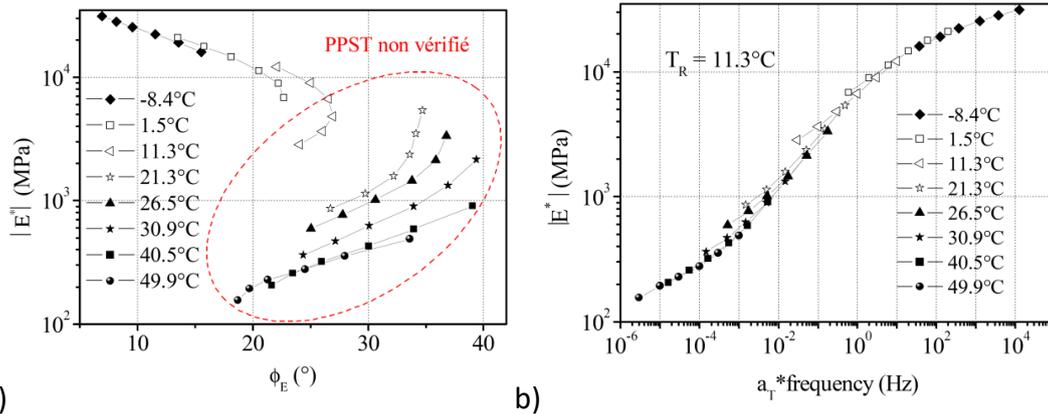


Figure 1-17 : Diagramme de Black (a, gauche) et courbe maîtresse du module complexe (b, droite) pour un enrobé bitumineux fabriqué à partir d'un liant modifié aux polymères (Nguyen 2011).

Dans certains cas, et en particulier pour les liants modifiés aux polymères, l'enrobé bitumineux peut ne pas vérifier le PSTT. La Figure 1-17 présente un exemple de courbes de module complexe pour un tel matériau (Nguyen 2011). On observe que l'on n'obtient pas une unique courbe dans le diagramme de Black. Cependant, il est néanmoins possible d'obtenir une courbe maîtresse en appliquant des coefficients de translation aux courbes isothermes de module complexe. Dans ce cas, le matériau ne peut pas être qualifié de thermorhéologiquement simple mais on dira qu'il vérifie le Principe de Superposition Temps-Température Partiel (PSTTP) (Olard 2003; Di Benedetto et al. 2004b; Olard et al. 2005).

1.3.2.9 Modélisation du comportement VEL – Modèles à spectres discrets

Les deux premiers modèles présentés sont utilisés pour décrire le comportement VEL sont très simples, il s'agit des modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt (Corté and Di Benedetto 2004).

Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell (Maxwell 1866; Maxwell 1868) est composé d'un ressort linéaire de rigidité E et d'un amortisseur linéaire de viscosité η assemblés en série (Figure 1-18).

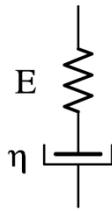


Figure 1-18 : Représentation analogique du modèle de Maxwell

Les fonctions de fluage $J(t)$ et de relaxation $R(t)$ du modèle sont données par :

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \quad (1.40)$$

$$R(t) = E \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \quad (1.41)$$

Où τ est le temps de relaxation donné par :

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (1.42)$$

Ici comme dans toute la suite, τ dépend de la température et vérifie le PSTT (Section 1.3.2.8) de telle façon que :

$$\tau(T) = \tau_0 a_T(T) \quad (1.43)$$

Où T est la température, τ_0 est la valeur de τ à la température de référence T_0 et $a_T(T)$ est le facteur de translation à la température T . La loi WLF peut être utilisée pour représenter les variations de a_T en fonction de la température.

Le module complexe de ce modèle est alors donné par :

$$E^*(\omega) = E \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{E\omega^2\eta^2 + jE^2\omega\eta}{E^2 + \omega^2\eta^2} \quad (1.44)$$

Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt (Thomson 1856; Thomson 1865; Meyer 1874; Meyer 1878; Voigt 1892) est composé d'un ressort linéaire de rigidité E et d'un amortisseur linéaire de viscosité η assemblés en parallèle (Figure 1-19).

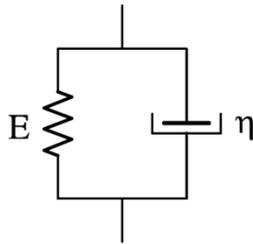


Figure 1-19 : Représentation analogique du modèle de Kelvin-Voigt.

Ce modèle a le même temps de relaxation τ que le modèle de Maxwell, à savoir :

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (1.45)$$

Les fonctions de fluage $J(t)$ et de relaxation $R(t)$ du modèle sont données par :

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (1.46)$$

$$R(t) = E + \eta\delta(t) = E(1 + \tau\delta(t)) \quad (1.47)$$

Où $\delta(t)$ est la fonction Dirac.

Le module complexe est alors donné par l'expression :

$$E^*(\omega) = E + j\omega\eta = E(1 + j\omega\tau) \quad (1.48)$$

Les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt ne sont pas capables de décrire correctement le comportement viscoélastique linéaire des enrobés bitumeux. Cependant, ils servent d'éléments de base à la construction de très nombreux modèles, à commencer par le suivant.

Modèle de Burgers

Le modèle de Burgers est composé de deux modèles de Maxwell en parallèle (Figure 1-20).

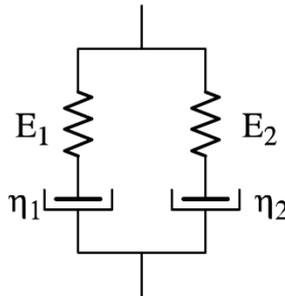


Figure 1-20 : Représentation analogique du modèle de Burgers.

Le spectre de relaxation de ce modèle est composé de deux valeurs distinctes de temps de relaxation τ_1 et τ_2 associées à chacun des éléments de Maxwell. Leur expression est donnée par :

$$\tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1} \quad (1.49)$$

$$\tau_2 = \frac{\eta_2}{E_2} \quad (1.50)$$

Le module complexe de ce modèle est égal à :

$$E^*(\omega) = \frac{E_1}{1 + (j\omega\tau_1)^{-1}} + \frac{E_2}{1 + (j\omega\tau_2)^{-1}} \quad (1.51)$$

Le modèle de Burgers ne peut pas décrire de manière satisfaisante le comportement viscoélastique linéaire des enrobés bitumineux. La réponse du matériau à une sollicitation

quelconque ne peut pas être décrite précisément sur tout l'ensemble du domaine de fréquence et de température.

D'autres combinaisons des modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt sont possibles en les assemblant en série ou en parallèle. Celles-ci sont présentées ci-dessous.

Modèle de Maxwell généralisé (ou séries de Prony)

Comme son nom l'indique, le modèle de Maxwell généralisé est un assemblage fini de n modèles de Maxwell en parallèle. Il est possible d'ajouter un ressort et/ou un amortisseur isolé en série (Figure 1-21).

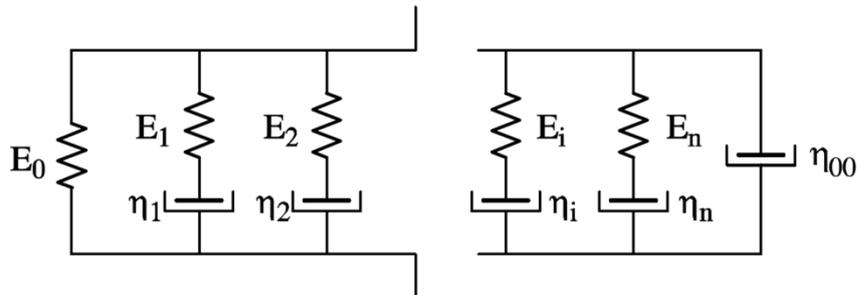


Figure 1-21 : Représentation analogique du modèle de Maxwell.

Par extension du modèle de Burgers, le spectre de relaxation de ce modèle est composé d'un ensemble de n temps de relaxation τ_i égaux à :

$$\tau_i = \frac{\eta_i}{E_i} \quad (1.52)$$

La fonction de relaxation $R(t)$ du modèle est donnée par :

$$R(t) = E_0 + \eta_{00}\delta(t) + \sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (1.53)$$

Le module complexe de ce modèle est alors égal :

$$E^*(\omega) = E_0 + j\omega\eta_{00} + \sum_{i=1}^n E_i \frac{j\omega\tau_i}{1 + j\omega\tau_i} \quad (1.54)$$

Dans le cas où le nombre d'éléments de Maxwell tend vers l'infini, le spectre de relaxation évolue vers une fonction continue $H(\tau)$ et la fonction de relaxation ainsi que le module complexe deviennent :

$$R(t) = E_0 + \eta_{00}\delta + \int_{\ln(\tau)=-\infty}^{\ln(\tau)=+\infty} H(\tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) d\ln(\tau) \quad (1.55)$$

$$E^*(\omega) = E_0 + j\omega\eta_{00} + \int_{\ln(\tau)=-\infty}^{\ln(\tau)=+\infty} H(\tau) \frac{j\omega\tau_i}{1 + j\omega\tau_i} d\ln(\tau) \quad (1.56)$$

Où $H(\tau)d\ln(\tau)$ peut être considéré comme le module correspondant au temps de relaxation τ dont le logarithme est compris entre $\ln(\tau)$ et $\ln(\tau) + d\ln(\tau)$.

Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé est obtenu par l'assemblage de modèle de Kelvin-Voigt en série, avec éventuellement un ressort et un amortisseur. Le spectre de relaxation est identique à celui du modèle de Maxwell généralisé.

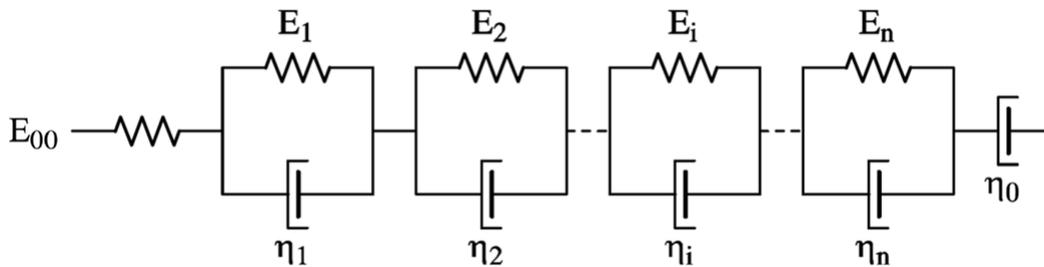


Figure 1-22 : Représentation analogique du modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

La fonction de fluage associée au modèle est donnée par :

$$J(t) = \frac{1}{E_{00}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right)\right) \quad (1.57)$$

Et le module complexe est :

$$E^*(\omega) = \frac{1}{E_{00}} + \frac{1}{j\omega\eta_{00}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i + j\omega\tau_i} \quad (1.58)$$

De la même manière que le modèle de Maxwell généralisé, ce modèle peut être étendu dans le cas d'un spectre continu représenté par une fonction $H(\tau)$.

Dans le domaine des petites déformations, la description du comportement des enrobés bitumineux nécessite des modèles à spectres continus. Ainsi les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt généralisés sont adaptés lorsque n tend vers l'infini. Cependant, si cela améliore la qualité de ces modèles, il convient de noter que leur complexité augmente avec n .

Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé sert de base au développement du modèle DBN (Di Benedetto-Neifar) qui est décrit et développé dans ce manuscrit de thèse.

1.3.2.10 Modélisation du comportement VEL – Modèles à spectres continus

Les modèles décrits dans cette section ont deux caractéristiques principales en commun :

- Leur spectre de relaxation est continu bien que composé d'un nombre fini d'éléments,
- Tous sont composés d'au moins un élément parabolique (Figure 1-23).

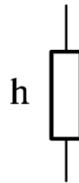


Figure 1-23 : Représentation analogique d'un élément parabolique.

Un élément parabolique (Huet 1963; Olard 2003) est un élément visqueux avec une fonction de fluage $J(t)$ parabolique de la forme :

$$J(t) = a \left(\frac{t}{\tau} \right)^h \quad (1.59)$$

Où a est une constante homogène à l'inverse de l'unité de la contrainte et h une constante adimensionnelle telle que $0 < h < 1$.

Le module complexe d'un élément parabolique est donné par :

$$E^*(\omega) = \frac{(j\omega\tau)^h}{a\Gamma(1+h)} \quad (1.60)$$

Où Γ est la fonction Gamma définie pour $Re(k) > 0$ par :

$$\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} x^{k-1} \exp(-x) dx \quad (1.61)$$

Une intégration par partie montre que :

$$\Gamma(k + 1) = k\Gamma(k) \quad (1.62)$$

Pour k entier, on a donc :

$$\Gamma(k) = k! \quad (1.63)$$

Modèle de Huet

Le modèle de Huet (Huet 1963; Huet 1992) est un modèle analogique composé de 3 éléments assemblés en série (Figure 1-24) : un ressort linéaire de rigidité E_0 et de deux éléments paraboliques dont les fonctions de fluage sont données par :

$$J_k(t) = a \left(\frac{t}{\tau}\right)^k \quad (1.64)$$

$$J_h(t) = b \left(\frac{t}{\tau}\right)^h \quad (1.65)$$

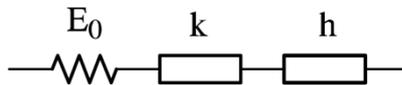


Figure 1-24 : Représentation analogique du modèle de Huet.

La fonction de fluage $J(t)$ du modèle de Huet est alors donnée par :

$$J(t) = \frac{1}{E_0} \left(1 + \delta \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^k}{\Gamma(1+k)} + \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^h}{\Gamma(1+h)} \right) \quad (1.66)$$

Le module complexe est donné par :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0}{1 + \delta(j\omega\tau)^{-k} + (j\omega\tau)^{-h}} \quad (1.67)$$

Où δ est une constante adimensionnelle.

Lorsque la température décroît et que la fréquence augmente, le module complexe tend asymptotiquement vers la valeur E_0 . En revanche, si la température croît et la fréquence décroît, il tend vers 0. Pour cette dernière raison, le modèle de Huet ne peut décrire convenablement le comportement viscoélastique des enrobés bitumineux. En effet, on observe une valeur minimale de module à cette limite, dû à la présence d'un squelette granulaire. Ce module limite observé à très hautes températures et basses fréquences est appelé module statique.

Modèle de Huet-Sayegh

Le modèle de Huet-Sayegh (Sayegh 1965; Pronk 2005) apporte une correction au principal problème du modèle de Huet (module statique nul), par l'ajout d'un ressort linéaire de rigidité E_{00} inférieure à E_0 en parallèle du modèle de Huet (Figure 1-25).

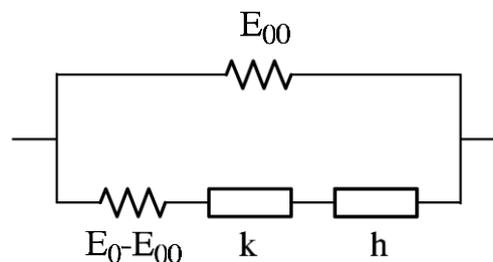


Figure 1-25 : Représentation analogique du modèle de Huet-Sayegh.

L'expression de la fonction de fluage de ce modèle n'est pas accessible mais le module complexe est donné par :

$$E^*(\omega) = E_{00} + \frac{E_0 - E_{00}}{1 + \delta(j\omega\tau)^{-k} + (j\omega\tau)^{-h}} \quad (1.68)$$

De cette équation, on déduit les valeurs asymptotiques du module complexe :

- Pour les hautes fréquences et basses températures, le module tend vers E_0
- Pour les basses fréquences et hautes températures, le module tend vers E_{00} appelé module statique.

Cependant, même avec cette correction, le modèle de Huet-Sayegh ne donne pas une description fidèle du comportement viscoélastique des enrobés bitumineux, en particulier à hautes températures et basses fréquences. Dans ce domaine, la réponse du bitume est purement visqueuse (Newtonien), et donc similaire à celle d'un amortisseur linéaire, alors que le modèle de Huet-Sayegh est caractérisé par un élément parabolique.

Modèle 2S1P1D

Le modèle 2S2P1D (Olard 2003; Olard and Di Benedetto 2003) apporte la correction nécessaire au modèle de Huet-Sayegh en ajoutant un amortisseur linéaire en série des éléments paraboliques (Figure 1-26). Ainsi, le comportement observé à hautes températures et basses fréquences pour les bitumes peut-être simulé correctement avec le même modèles que pour les enrobés bitumineux.

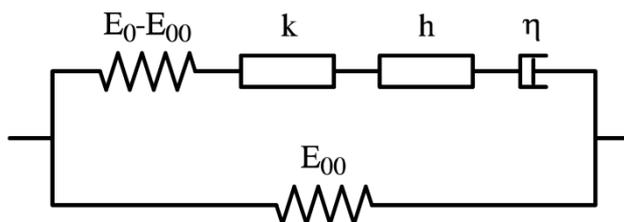


Figure 1-26 : Représentation analogique du modèle 2S2P1D.

Le module complexe de ce modèle est donné par :

$$E^*(\omega) = E_{00} + \frac{E_0 - E_{00}}{1 + \delta(j\omega\tau_E)^{-k} + (j\omega\tau_E)^{-h} + (j\omega\beta\tau_E)^{-1}} \quad (1.69)$$

Où β est un paramètre adimensionné donné par :

$$\eta = (E_0 - E_{00})\beta\tau_E \quad (1.70)$$

Ce modèle décrit de manière très satisfaisante le comportement viscoélastique des enrobés bitumineux. Bien que son spectre de relaxation soit continu, il ne dépend que de 7 constantes (E_{00} , E_0 , k , h , δ , τ_E , β) qui ont toutes une signification physique.

Ce modèle a été étendu au cas tridimensionnel (Di Benedetto et al. 2007a) en ajoutant seulement 3 paramètres ν_{00} , ν_0 et $\gamma_{E\nu}$, correspondant respectivement au coefficient de Poisson statique et vitreux et au rapport entre τ_E et τ_ν . Le coefficient de Poisson complexe est alors donné par :

$$\nu^*(\gamma_{E\nu}\omega) = \nu_{00} + (\nu_0 - \nu_{00}) \frac{E^*(\gamma_{E\nu}\omega) - E_{00}}{E_0 - E_{00}} \quad (1.71)$$

Il est important de souligner que seul les paramètres τ_E et τ_ν dépendent de la température (comme pour les modèles de Huet et de Huet-Sayegh) et qu'ils permettent

detenir compte du PSTT. Les paramètres C_1 et C_2 de l'équation de WLF peuvent alors être introduits pour modéliser la susceptibilité thermique du matériau. En particulier, l'évolution de τ_E et τ_ν en fonction de la température est donnée par :

$$a_T = \frac{\tau_E}{\tau_{E0}} = \frac{\tau_\nu}{\tau_{\nu0}} \quad (1.72)$$

Où τ_{E0} et $\tau_{\nu0}$ sont les temps caractéristiques à la température de référence T_{ref} et a_T est le facteur de translation fonction de la température.

En résumé, un total de 12 paramètres :

- $E_{00}, E_0, k, h, \delta, \tau_E, \beta$ pour le cas 1D,
- ν_{00}, ν_0 et $\gamma_{E\nu}$ pour le cas 3D, et
- C_1 et C_2 pour l'équation de WLF,

permettent de décrire et caractériser entièrement le comportement viscoélastique linéaire d'un enrobé bitumineux donné sur toute la gamme de fréquence et de température.

La Figure 1-27 illustre l'influence de 6 paramètres du modèle 2S2P1D sur la courbe de Cole-Cole d'un matériau bitumineux.

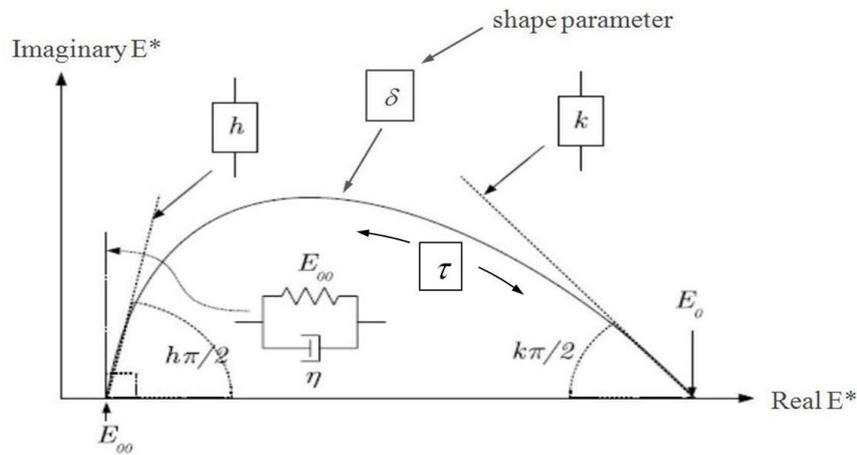


Figure 1-27 : Influence des paramètres du modèle 2S2P1D et leurs éléments associés sur la courbe Cole-Cole d'un matériau bitumineux (Olard 2003).

Les parties réelles et imaginaires du modèle 2S2P1D sont données par :

$$\text{Re}(E^*(\omega)) = E_{00} + \frac{E'_1}{DEN} \quad (1.73)$$

$$\text{Im}(E^*(\omega)) = \frac{E'_2}{DEN} \quad (1.74)$$

Où :

$$E_1'(\omega) = (E_0 - E_{00}) \left[1 + \delta(\omega\tau_E)^{-k} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + (\omega\tau_E)^{-h} \cos\left(\frac{h\pi}{2}\right) \right] \quad (1.75)$$

$$E_2'(\omega) = (E_0 - E_{00}) \left[\delta(\omega\tau_E)^{-k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + (\omega\tau_E)^{-h} \sin\left(\frac{h\pi}{2}\right) + (\omega\tau_E\beta)^{-1} \right] \quad (1.76)$$

$$\text{DEN}(\omega) = \left(\frac{E_1'}{E_0 - E_{00}} \right)^2 + \left(\frac{E_2'}{E_0 - E_{00}} \right)^2 \quad (1.77)$$

1.3.2.11 Modélisation du comportement VEL – Expressions analytiques non basées sur des modèles rhéologiques

Parmi les nombreux modèles proposés pour décrire le comportement VEL des enrobés bitumineux, certains ne sont pas basés sur des représentations analogiques. Leur formulation ne peut donc pas être résumée à l'aide des éléments de base tels que ressorts, amortisseurs, etc.

Modèle de Christensen et Anderson (CA)

Dans ce modèle (Christensen and Anderson 1992), le module complexe de cisaillement G^* et son angle de phase φ sont exprimés en fonction de la pulsation ω par :

$$|G^*(\omega)| = G_g \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^{\frac{\log 2}{R}} \right]^{-\frac{R}{\log 2}} \quad (1.78)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{90}{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^{\frac{\log 2}{R}}} \quad (1.79)$$

Où :

- G_g est le module vitreux,
- ω_c est appelé la fréquence de croisement, c'est-à-dire que $\tan \varphi = 1$ et que les parties réelles et imaginaires sont égales,
- R est le facteur de forme, également appelé l'indice rhéologique, égal à :

$$R = G_g - |G^*(\omega_c)| = \log 2 \frac{\log \frac{|G^*(\omega)|}{G_g}}{\log \left(1 - \frac{\varphi(\omega)}{90} \right)} \quad (1.80)$$

Ce modèle ne donne pas une description fidèle du comportement VEL pour des fréquences très élevées ou trop basses.

Modèle de Christensen, Anderson, Marasteanu (CAM)

Ce modèle est une variante du précédent qui tente de résoudre ses désavantages. Les modifications suivantes sont proposées (Anderson and Marasteanu 1999; Marasteanu 1999) :

$$|G^*(\omega)| = G_g \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^k \right]^{-\frac{m}{k}} \quad (1.81)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{90 m}{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^k} \quad (1.82)$$

Où k est une constante égale à :

$$k = \frac{\log 2}{R} \quad (1.83)$$

Et m un paramètre modifiant la manière dont le modèle converge vers ses asymptotes, c'est-à-dire le module vitreux à hautes fréquences et le comportement purement visqueux à basses fréquences. Le modèle CA correspond au modèle CAM pour $m = 1$. Cependant, ce modèle ne résoud pas tous les problèmes du modèle CA.

Une modification du modèle CAM valable pour les enrobés bitumineux a également été proposée (Huang and Zeng 2007) :

$$|G^*(\omega)| = G_0 + (G_g - G_0) \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^k \right]^{-\frac{m}{k}} \quad (1.84)$$

Où G_0 est le module statique. Dans le cas des bitumes, le module statique G_0 est égal à 0 et ce modèle n'est plus adapté à la description de leur comportement.

1.3.3 Le comportement plastique

1.3.3.1 Définition

La déformation plastique d'un matériau est en général associée à une déformation élastique ou viscoélastique (ce n'est pas le cas pour un comportement rigide plastique par exemple). Il s'appuie sur deux concepts fondamentaux :

- Le **critère de plasticité** ou **surface de plasticité** généralement notée F qui donne la limite entre le domaine purement élastique ou viscoélastique et le domaine élastoplastique ou viscoplastique. Cette notion généralise celle de seuil de

plasticité qui est mise en évidence dans les expériences de sollicitations uniaxiales,

- La **règle d'écoulement plastique**, qui définit la façon dont vont évoluer les déformations plastiques en fonction des sollicitations. Cette notion est associée à la définition d'une **surface de potentiel plastique** notée G qui va donner la direction d'évolution des déformations plastiques et à une **règle d'écoulement** qui donnera leur évolution en norme.

Lorsque les surfaces de plasticité et de potentiel plastique sont confondues, *ie.* $F = G$, on parle de **plasticité associée** ou **standard**, par opposition à la **plasticité non associée** ou **non standard**.

Avant de détailler ces notions, il est intéressant de s'attarder au cas des sollicitations uniaxiales.

1.3.3.2 Expérience de traction simple - Généralisation des notions de plasticité

Plasticité dans le cas 1D – Essai de traction simple

La Figure 1-28 présente une courbe typique de contrainte déformation observée lors d'une expérience de traction simple sur une éprouvette en acier (Salençon and Halphen 1980; Salençon and Halphen 1987). Sur cette illustration, on constate qu'il existe un seuil de contrainte noté σ_A tel qu'au-delà de cette limite, le comportement du matériau devient irréversible :

- Le chargement de O à A n'induit aucune déformation irréversible, en cas de déchargement, la déformation retourne à sa valeur initiale.
- Le chargement de A à B induit une déformation irréversible. En effet, en déchargeant à partir du point B, le chemin suivi n'est pas BAO mais BC. Il en résulte une déformation irréversible notée ε^p .
- A partir du point C, pour un nouveau chargement, le chemin suivi sera BC. Le comportement sera élastique entre C et B. Puis au-delà de B, le chemin reprend la courbe initiale et de nouvelles déformations irréversibles viennent s'accumuler aux premières.

Ainsi, σ_A est le **seuil de plasticité initial** et σ_B est le **seuil de plasticité actuel**, lié à l'état d'écrouissage défini par la déformation plastique ε^p , une ou des variables d'écrouissage, etc.

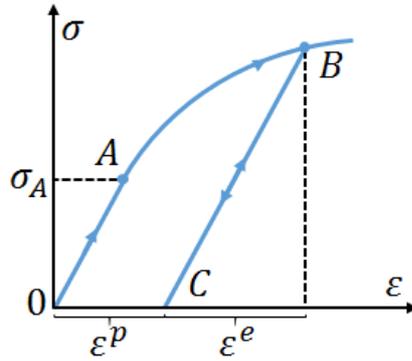


Figure 1-28 : Exemple de courbe $\sigma - \varepsilon$ lors d'un essai de traction simple (charge-décharge) pour un matériau au comportement plastique.

Dans la Figure 1-28, il apparaît que le seuil de plasticité actuel σ_A dépend de la déformation plastique ε^p . Cela correspond au cas des matériaux dits **écrouissables**. Dans le cas où σ_B est une fonction croissante de ε^p on parle d'**écrouissage positif**.

Ce phénomène n'est pas général pour le comportement plastique. Aussi il existe des matériaux pour lesquels le seuil de plasticité actuel n'est pas fonction de l'état d'écrouissage (Figure 1-29). Le matériau est dit **parfaitement plastique**. Dans ce cas, dès lors que la contrainte de seuil est atteinte, la possibilité d'allongement est infinie.

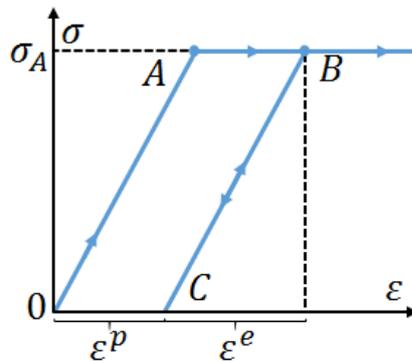


Figure 1-29 : Exemple de courbe $\sigma - \varepsilon$ lors d'un essai de traction simple (charge-décharge) pour un matériau au comportement élastique parfaitement plastique.

Sont ainsi distinguées les déformations plastiques et les déformations élastiques, la déformation totale étant définie comme la somme des deux :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^p + d\varepsilon^e \quad (1.85)$$

Plasticité dans le cas 3D

L'expérience 1D décrite précédemment n'est qu'un cas particulier des sollicitations applicables à un matériau. Dans le cas 3D, l'état de contrainte est défini par le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ (ses 6 composantes). Dans l'espace des contraintes, on définit alors un domaine initial dans lequel tout trajet de charge partant de l'état initial et restant dans ce domaine, se fait de manière élastique ou viscoélastique. Dans le cas du matériau écrouissable, le chargement peut dépasser la frontière de ce domaine initial. On observe alors l'apparition de déformations permanentes (à l'image des déformations ε^p dans le cas uniaxial), caractéristique du domaine plastique, et une modification de la frontière et donc du domaine initial (à l'image de la modification de la contrainte de seuil σ_B dans le cas uniaxial), caractéristique du phénomène d'écrouissage.

Dans le cas d'un matériau non écrouissable, *ie.* parfaitement plastique, le domaine d'élasticité est fixe. L'état de contrainte (σ_{ij}) ne peut pas sortir du domaine. Les déformations plastiques n'apparaissent donc que si (σ_{ij}) est sur la frontière et y demeure.

Les notions de surface de plasticité, définissant la frontière du domaine plastique et du domaine élastique/viscoélastique, et de règle d'écoulement plastique, définissant l'évolution des déformations plastiques, sont donc fondamentales pour décrire le comportement élastoplastique ou viscoplastique d'un matériau.

1.3.3.3 Surface de plasticité

La frontière entre les domaines (visco)élastique et (visco)plastique est en général définie par une fonction scalaire F de l'état de contrainte (σ_{ij}). F est appelé fonction de charge du matériau et est définie telle que :

- si l'état de contrainte est dans le domaine (visco)élastique,

$$F(\sigma_{ij}) < 0 \quad (1.86)$$

- si l'état de contrainte est sur la frontière entre les deux domaines,

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1.87)$$

- si l'état de contrainte est dans le domaine (visco)plastique,

$$F(\sigma_{ij}) > 0 \quad (1.88)$$

Dans le cas d'un matériau non écrouissable, la fonction de charge du matériau F n'est pas modifiée au cours de l'application des sollicitations : elle est constante dans le temps. Au

contraire, si le matériau est écouissable, le domaine de (visco)élasticité dépend de l'état d'écrouissage, qui est représenté par une ou plusieurs variable(s) k introduite(s) dans l'expression de la surface de charge, notée alors :

$$F(\sigma_{ij}, k) \quad (1.89)$$

L'état d'écrouissage défini par la (les) variable(s) k n'évolue que lorsqu'il y a évolution de la déformation plastique. Cette évolution est modélisée par différentes théories construites pour représenter le phénomène d'écrouissage. On distingue plusieurs types d'écrouissages :

- L'écrouissage isotrope qui est fonction d'un paramètre scalaire unique. Le domaine de (visco)élasticité se transforme par homothétie de centre O, au cours de l'écrouissage.
- L'écrouissage cinématique de Prager (1953) qui est alors fonction d'un paramètre tensoriel. Les frontières d'élasticité/viscoélasticité successives se déduisent de la frontière initiale par translation dans l'espace des contraintes (σ_{ij}).
- L'écrouissage mixte qui est alors fonction d'un paramètre scalaire et d'un paramètre tensoriel. Ce modèle est une combinaison des deux théories précédentes. La surface de charge se translate et se dilate uniformément dans toutes les directions.

Il existe un certain nombre d'autres modèles plus ou moins dérivés des 3 théories présentées précédemment et adaptées pour chacune à des matériaux spécifiques.

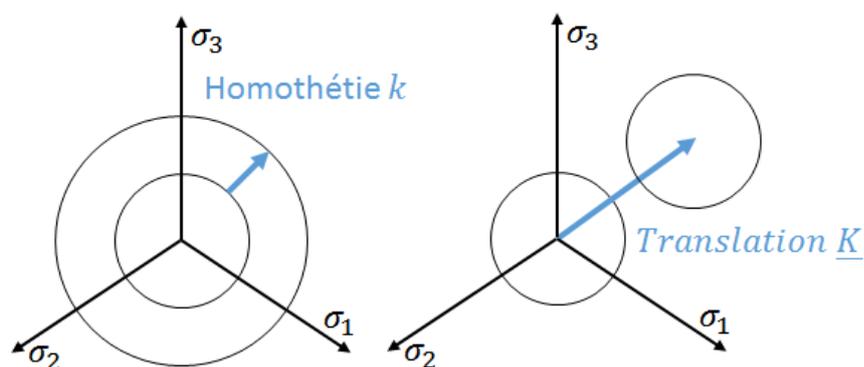


Figure 1-30 : Représentation de l'écrouissage isotrope (gauche) et cinématique (b) dans un plan déviatorique.

La surface de plasticité permet de déterminer le moment d'apparition des déformations plastiques. Il s'agit maintenant d'être capable de les calculer pour résoudre complètement un problème élastoplastique/viscoélastoplastique. La règle d'écoulement plastique permet cela.

1.3.3.4 Règle d'écoulement plastique

Dans cette section, l'objectif est de décrire le comportement pour un incrément $d\sigma_{ij}$ de contrainte, à partir d'un état de contrainte et d'écrouissage donné (σ_{ij}, k) .

Si $F(\sigma_{ij}, k) < 0$ alors l'état de contrainte (σ_{ij}) est à l'intérieur du domaine élastique/viscoplastique. La variation de déformation $d\varepsilon_{ij}$ est donc purement élastique/viscoélastique :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e \quad (1.90)$$

Si $F(\sigma_{ij}, k) = 0$ alors l'état de contrainte (σ_{ij}) est sur la frontière du domaine. Il convient alors de distinguer deux cas déterminés selon que le point matériel se trouve en chargement (apparition de déformations plastiques) ou en déchargement (pas d'apparition de déformation plastique. Deux possibilités :

- Chargement si :

$$\begin{aligned} F(\sigma_{ij}, k) &= dF(\sigma_{ij}, k) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} &> 0 \\ d\varepsilon_{ij} &= d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \end{aligned} \quad (1.91)$$

- Déchargement si :

$$\begin{aligned} F(\sigma_{ij}, k) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} &\leq 0 \\ d\varepsilon_{ij} &= d\varepsilon_{ij}^e \end{aligned} \quad (1.92)$$

La règle d'écoulement plastique a pour objet d'exprimer l'incrément de déformations plastiques $d\varepsilon_{ij}^p$ en fonction de l'état de contrainte (σ_{ij}) , de l'incrément $(d\sigma_{ij})$ et de l'état d'écrouissage k . Cette relation est donnée par :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.93)$$

Où λ est le **multiplicateur de plasticité** ou **multiplicateur plastique** et G le potentiel plastique qui peut être différent de la fonction de charge F . $\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}$ donne donc la direction des déformations plastiques. La relation de comportement n'est pas complète sans l'expression du multiplicateur de plasticité λ , donnant la vitesse de déformation plastique. Est alors introduit le module d'écrouissage $H(\sigma_{ij}, k)$:

$$H(\sigma_{ij}, k) d\lambda = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (1.94)$$

Cela permet de définir le multiplicateur plastique en considérant la condition de consistance ou de compatibilité de $F(\sigma_{ij}, k)$, qui impose que l'état de contrainte reste sur la surface de charge au cours du chargement $F(\sigma_{ij}, k) = 0$. Cela impose :

$$dF(\sigma_{ij}, k) = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (1.95)$$

Soit :

$$\frac{\partial F}{\partial k} dk = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = -H(\sigma_{ij}, k) d\lambda \quad (1.96)$$

Et par conséquent :

$$dF(\sigma_{ij}, k) = 0 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - H(\sigma_{ij}, k) d\lambda \quad (1.97)$$

L'expression du multiplicateur plastique est alors donnée par :

$$d\lambda = \frac{1}{H(\sigma_{ij}, k)} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (1.98)$$

Cela permet alors d'achever la détermination de l'incrément de déformation plastique sous un incrément de contrainte :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{H(\sigma_{ij}, k)} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \otimes \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right) d\sigma_{ij} \quad (1.99)$$

Dans le cas d'un chargement plastique avec écrouissage non nul, le multiplicateur plastique est alors déterminé entièrement par la loi de comportement, le module d'écrouissage H étant défini et non nul. Dans le cas d'un écrouissage nul, le module d'écrouissage H est nul, ce qui entraîne une indétermination dans l'équation (1.99). Il est alors nécessaire de définir une loi d'écoulement, le multiplicateur plastique étant indéterminé.

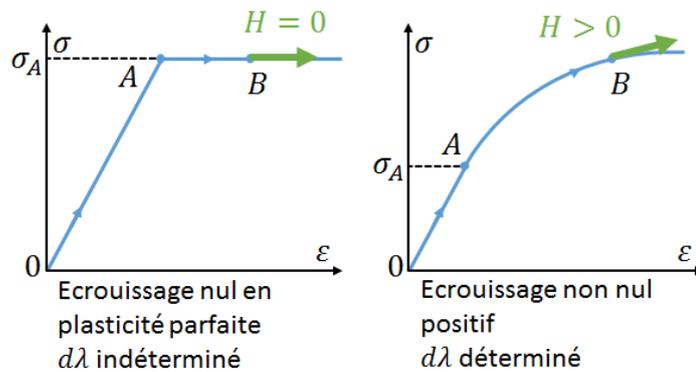


Figure 1-31 : Relation contrainte-déformation et module d'écrouissage H lors d'un chargement plastique (gauche) dans le cas d'un écrouissage non nul et (droite) d'un écrouissage nul.

Enfin, la fonction de charge F et la fonction de potentiel plastique G peuvent être identiques : $F = G$. Dans ce cas précis, on parle alors de **plasticité associée** ou **standard**.

Seul le cas de l'écrouissage positif est détaillé ici. Dans le cas de l'écrouissage négatif (adoucissement du matériau), l'incrément de contrainte $d\sigma_{ij}$ est négatif, tandis que le multiplicateur plastique est toujours positif $d\lambda$. Il se passe donc l'inverse du cas précédent : le nouveau point de charge rentre à l'intérieur du domaine d'élasticité.

L'écroûissage négatif pose des difficultés de modélisation. Il est nécessaire, pour un incrément de contrainte $d\sigma_{ij}$ rentrant dans le domaine (visco)élastique, de distinguer une décharge élastique d'une charge plastique. Cette absence d'unicité de la réponse à un incrément de sollicitation donné $d\sigma_{ij}$ nécessite de piloter en incréments de déformation $d\varepsilon_{ij}$.

1.3.3.5 Quelques exemples de surface de charge appliquées aux enrobés bitumineux

De très nombreux modèles de surface de charge ont été développés. Il s'agit dans cette section de présenter les principaux critères appliqués aux enrobés bitumineux.

Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de Mohr-Coulomb (Coulomb 1776; Mohr 1882; Mohr 1900) représente l'enveloppe linéaire obtenue par la relation entre la contrainte de cisaillement τ et la contrainte normale σ :

$$\tau - \sigma \tan(\phi) - C = 0 \quad (1.100)$$

Où C la cohésion du matériau et ϕ son angle de frottement interne.

Un plan déviatorique est un plan défini par $I_1 = \text{tr } \underline{\sigma} = a \in \mathbb{R}$. Dans un tel plan, le critère de Mohr-Coulomb est un hexagone irrégulier (Figure 1-32). On note également que la surface n'est pas dérivable en certains points particuliers.

Critère de Drucker-Prager

Le critère de Drucker-Prager corrige le problème de non dérivabilité en introduisant une surface de plasticité qui est de forme circulaire dans les plans déviatoriques (Figure 1-32). La surface de plasticité est donnée par l'équation (Drucker and Prager 1952) :

$$\sqrt{J_2} = A + BI_1 \quad (1.101)$$

Où $I_1 = \text{tr } \underline{\sigma}$ est le premier invariant du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$, $J_2 = \text{tr } \underline{s}^2$ est le second invariant du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ (définis dans l'Annexe 7.1), A et B sont des paramètres déterminés expérimentalement. Le tenseur \underline{s} est défini comme $\underline{s} = \underline{\sigma} - \frac{I_1}{3} \underline{\delta}$.

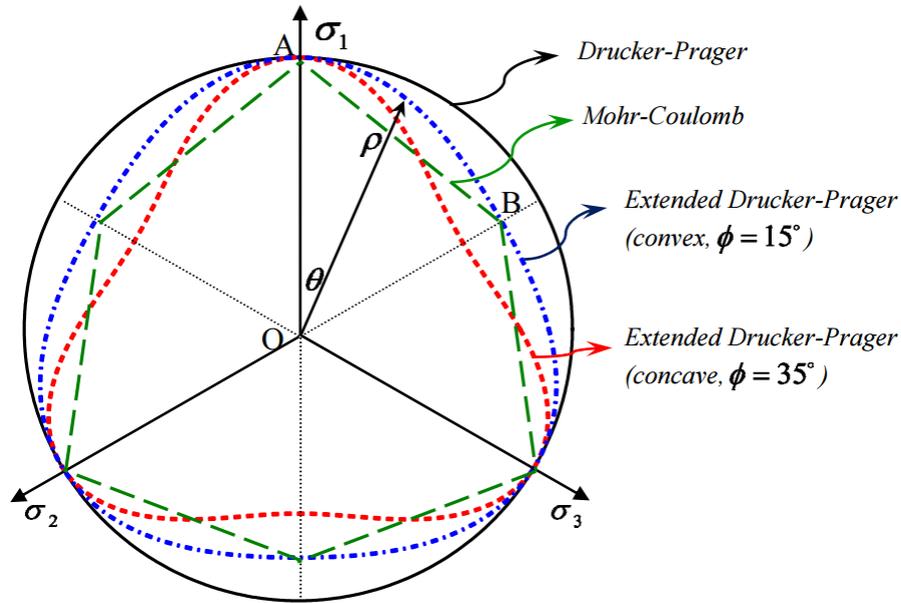


Figure 1-32 : Surfaces de plasticité normalisées de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Drucker-Prager généralisé et Di Benedetto et Yan dans le plan déviatorique (Zhang et al. 2013; Zhang et al. 2015).

La surface de plasticité du critère de Drucker-Prager est parfois considérée comme une version dérivée de celle de Mohr-Coulomb. On exprime alors les paramètres du critère de Drucker-Prager en fonction de ceux de Mohr-Coulomb. Dans les plans déviatoriques, on peut considérer plusieurs définitions (cf. Figure 1-33). Parmi elles, si le cercle est circonscrit à la surface de Mohr-Coulomb, on a :

$$\begin{cases} A = \frac{6C \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \\ B = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \end{cases} \quad (1.102)$$

Si le cercle est inscrit dans la surface de Mohr-Coulomb, on a :

$$\begin{cases} A = \frac{3C \cos \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}} \\ B = \frac{\sin \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}} \end{cases} \quad (1.103)$$

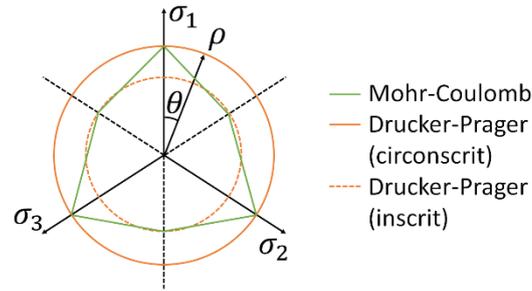


Figure 1-33 : Surface de plasticité de Mohr-Coulomb et surfaces de Drucker-Prager.

Bien que le modèle de Drucker-Prager résolve le problème de dérivabilité de la fonction de charge, il ne fait aucune distinction entre les comportements pour des sollicitations en traction et en compression (Figure 1-32). Cela est contraire au comportement réel des enrobés bitumineux (Di Benedetto and Yan 1994a; Zhang et al. 2011b).

Critère de Drucker Prager étendu

Le critère de Drucker-Prager étendu est donné par la relation (Argyris et al. 1974; Dessouky and Masad 2006; Saadeh et al. 2007) :

$$\sqrt{J_2}\rho(\theta, L_s) = A + BI_1 \quad (1.104)$$

Où :

$$\rho(\theta, L_s) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{L_s} + \left(1 - \frac{1}{L_s} \right) \cos(3\theta) \right] \quad (1.105)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\sqrt{6} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \right) \quad (1.106)$$

Avec $J_3 = 3 \det \underline{s}$, le troisième invariant du tenseur des contraintes. La fonction $\rho(\theta, L_s)$ détermine la forme de la surface de plasticité dans le plan déviatorique et θ est l'angle de Lode (Figure 1-34). A et B sont des paramètres déterminés expérimentalement. L_s est le facteur de forme, qui correspond au rapport entre la contrainte limite d'élasticité en compression simple et celle en traction simple. L_s peut être relié à l'angle de frottement interne du matériau par la relation suivante (Bardet 1990; Maiolino and Luong 2009) :

$$L_s = \frac{3 - \sin \phi}{3 + \sin \phi} \quad (1.107)$$

Le paramètre L_s varie entre 0,5 et 1 (ce qui correspondrait à un angle de frottement de 0 à 90°). Pour $L_s = 1$, le modèle de Drucker-Prager étendu coïncide avec le modèle de Drucker-

Prager. Pour $L_s < 1$, la contrainte limite d'élasticité en compression simple est supérieure à celle en traction simple. La surface de plasticité est convexe seulement pour $0,778 < L_s < 1$. Or plusieurs études (Fwa et al. 1997; Birgisson et al. 2003; Zhang et al. 2013) ont montré que le rapport entre la contrainte limite d'élasticité en compression simple et celle en traction simple était inférieur à 0,778, ce qui rend l'utilisation de ce critère problématique.

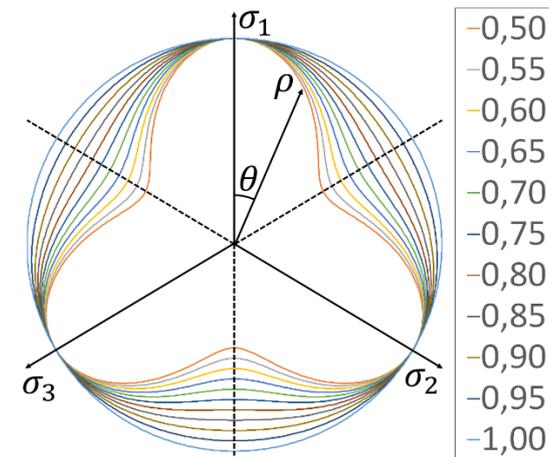


Figure 1-34 : Surfaces de plasticité normalisée du modèle de Drucker-Prager étendu en fonction de la valeur du paramètre de forme L_s (de l'intérieur vers l'extérieur 0,50 à 1 par pas de 0,05).

Critère de Matsuoka-Nakai

Le critère de Matsuoka-Nakai (Matsuoka and Nakai 1974; Matsuoka and Nakai 1985; Bahuguna et al. 2006) définit la surface de plasticité suivante :

$$I_1 I_2 + \alpha I_3 - Hk = 0 \quad (1.108)$$

Où $I_1 = \sigma_{ii}$, $I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ji}\sigma_{ij})$ et $I_3 = \det(\sigma_{ij})$ sont 3 invariants du tenseur des contraintes, H est un paramètre d'écrouissage isotrope et k la variable d'écrouissage isotrope. Matsuoka-Nakai est un modèle intéressant pour les matériaux sans cohésion et est par définition convexe et dérivable (Haythornthwaite 1985; Mortara 2008).

Critère de Di Benedetto et Yan

Après avoir analysé des essais de compression et d'extension triaxiales à différentes pressions de confinement, Di Benedetto et Yan (1994a) et Yan (1992) proposent de considérer un critère constitué de deux cônes (cf. Figure 1-35) dont les axes sont confondus avec la

première trisectrice et les sections sont des triangles équilatéraux. L'équation d'un cône ayant pour axe la première trisectrice et pour sommet le point (X_0, X_0, X_0) est :

$$X_I - X_0 = \frac{\tan \theta}{\sqrt{2}} (X_J + X_K - 2X_0) \quad (1.109)$$

Où X_I est l'indice de la composante qui a la valeur minimale et I, J, K sont différents et θ est l'angle défini dans la Figure 1-36.

En appliquant la définition proposée pour les deux cônes de contraintes maximales proposés, l'équation du critère est donnée par :

$$\sigma_I + \sigma_{oc} = \frac{\tan \theta_c}{\sqrt{2}} (\sigma_J + \sigma_K + 2\sigma_{oc}) \quad (1.110)$$

Et dans le cas où σ_I, σ_K et σ_J sont tous positifs ou nuls :

$$\sigma_I + \sigma_{ot} = \frac{\tan \theta_t}{\sqrt{2}} (\sigma_J + \sigma_K + 2\sigma_{ot}) \quad (1.111)$$

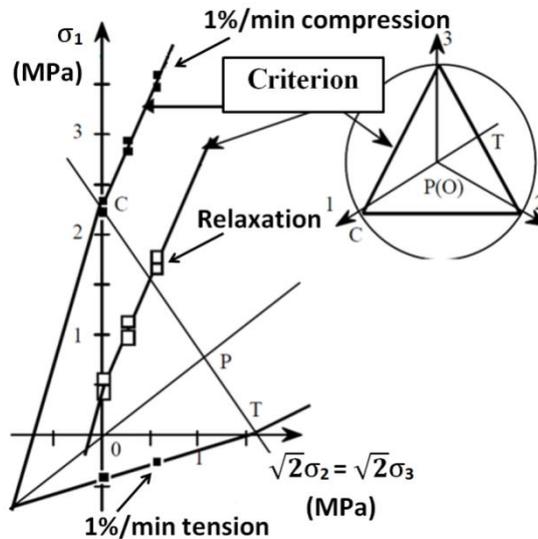


Figure 1-35 : Contrainte de rupture obtenue lors d'essais triaxiaux de compression et traction à la vitesse de 1%/min et valeurs de relaxation (données expérimentales), et critère de rupture proposé par Di Benedetto et Yan (Di Benedetto and Yan 1994a).

Si au moins l'un des σ_i est négatif. Les valeurs des angles θ_c et θ_t sont présentées dans la Figure 1-35. Elles sont indépendantes de la vitesse de sollicitation $\dot{\epsilon}$ et de la température. Les valeurs σ_{oc} et σ_{ot} caractérisent le sommet de chaque cône de coordonnées respectives $(-\sigma_{oc}, -\sigma_{oc}, -\sigma_{oc})$ et $(-\sigma_{ot}, -\sigma_{ot}, -\sigma_{ot})$. Elles varient avec la température et la vitesse de sollicitation. Les deux cônes (« traction » et « compression ») se coupent dans un plan déviatorique. La continuité de la surface de charge impose alors :

$$\sigma_{oc} \left(\frac{1}{\tan \theta_c} - \sqrt{2} \right) = \sigma_{ot} \left(\frac{1}{\tan \theta_t} - \sqrt{2} \right) \quad (1.112)$$

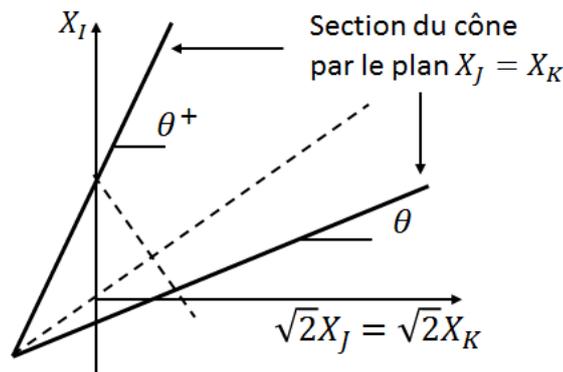


Figure 1-36 : Section du cône par un plan $X_J = X_K$.

Déterminés à partir des résultats expérimentaux présentés par (Di Benedetto and Yan 1994a), les valeurs des angles θ_c et θ_t sont données par :

$$\begin{cases} \tan \theta_c = 0,34 \\ \tan \theta_t = 0,28 \end{cases} \quad (1.113)$$

Le critère peut être complété en exprimant les variations de σ_{oc} (ou σ_{ot}) en fonction de la vitesse de déformation et de la température. Les équations proposées par Di Benedetto (1987) donnent la contrainte maximale σ_{Max} pour des essais triaxiaux en compression :

$$\sigma_{Max} = \beta(T) \ln \left(\frac{|\Delta|}{\sqrt{3}} + \delta(T) \right) + \gamma(T) + \sigma_2 \tan \theta_c \quad (1.114)$$

Où σ_2 est la pression de confinement, β , δ et γ sont des constantes fonctions uniquement de la température et $|\Delta|$ est la norme de la vitesse de déformation donnée par :

$$|\Delta| = \sqrt{\sum_{i=1}^9 \dot{\epsilon}_i^2} \quad (1.115)$$

Lorsque la pression de confinement est nulle, la contrainte maximale σ_{Max} prend une valeur remarquable reliée à σ_{oc} par :

$$\sigma_{oc} = \frac{\sigma_{Max}(\sigma_2 = 0)}{\sqrt{2} \tan \theta_c^+ - 1} \quad (1.116)$$

En résumé, ce modèle est donné par cinq constantes :

- Deux constantes θ_c et θ_t permettant de distinguer les comportements lorsque au moins l'une des facette est soumise à des efforts de traction ou non,
- Trois constantes β , δ et γ traduisant l'évolution du critère en fonction de la température et de la vitesse de déformation.

Di Benedetto (1987) propose également de prendre en compte la compacité de l'enrobé bitumineux, ce qui conduit à modifier les constantes β , δ et γ . Elles deviennent alors des fonctions de la température et de la compacité. Cinq constantes supplémentaires sont alors nécessaires.

Ce critère est fondé sur une campagne expérimentale performante ayant permis une description très précise de la surface de charge et de son évolution en fonction de la température, de la vitesse de sollicitation et éventuellement de la compacité des enrobés bitumineux. Cependant le critère proposé par Di Benedetto et Yan n'est pas constitué de fonctions dérivables et donc implémentables de manière relativement simple dans un code de calcul.

Critère de Drucker-Prager généralisé

Le critère de Drucker-Prager généralisé (Argyris et al. 1974; Maiolino 2005; Zhang et al. 2011c) résout le problème de non dérivabilité. Il ne prend en revanche pas en compte la différence de comportement observé par Di Benedetto et Yan entre un comportement purement en compression et lorsqu'au moins une facette est sollicitée en traction. Il est donné par :

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{J_2} \rho(\theta, L_s) - \frac{R}{\sqrt{6}} (I_1 - I_0) \quad (1.117)$$

Où I_1, J_2, θ sont les invariants du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ (définis dans l'Annexe 7.1), R est le rayon du cône et L_s est le facteur de forme du cône. I_0 est le facteur de translation du cône parallèlement à la première trissectrice de l'espace des contraintes principales (le sommet du cône se situe alors dans le plan $I_1 = I_0$) La fonction ρ est définie par :

$$\rho(\theta, L_s) = \mu \cos \left[\frac{1}{3} \arccos(\gamma \cos(3\theta)) \right] \quad (1.118)$$

Où les constantes μ et γ s'expriment à partir du facteur de forme L_s selon :

$$\mu = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\sqrt{1 - L_s + L_s^2}}{L_s}} \quad (1.119)$$

Et :

$$\gamma = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{(1 - L_s)L_s}{(1 - L_s + L_s^2)^{3/2}} \quad (1.120)$$

Il s'agit d'une fonction convexe, continue et dérivable.

On peut noter certaines valeurs particulières de la fonction ρ pour des angles θ remarquables. Ainsi :

$$\rho(\theta = 0, L_s) = 1 \quad (1.121)$$

Et :

$$\rho\left(\theta = \frac{\pi}{3}, L_s\right) = \frac{1}{L_s} \quad (1.122)$$

Une représentation de cette surface est donnée dans la Figure 1-37. L'ensemble des paramètres sont également représentés.

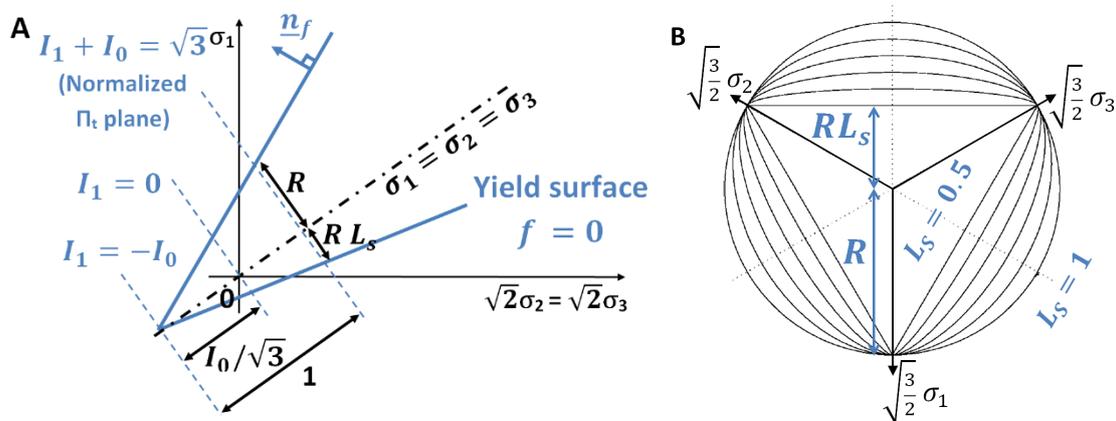


Figure 1-37 : Représentation de la surface de plasticité

(A) Section dans les axes $\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_2 = \sqrt{2}\sigma_3$

(B) Section par le plan normal à la première trissectrice donné par l'équation $I_1 + I_0 = \sqrt{3}$ dans les axes principaux (plan déviatorique normalisé).

Dans le plan déviatorique normalisé (*ie.* pour $I_1 = \sqrt{3} - I_0$), on peut définir les valeurs des paramètres R et L_s (cf. (B) Figure 1-37). Notons ces valeurs particulières, obtenue à $\theta = 0$:

$$R = \sqrt{2J_2} \quad (1.123)$$

Et, obtenue à $\theta = \pi$:

$$RL_s = \sqrt{2J_2} \quad (1.124)$$

Dans la suite et pour rappeler que la surface de charge est définie par les 3 paramètres R , L_s et I_0 l'équation de la surface de plasticité (2.15) sera écrite sous la forme :

$$f(R, L_s, I_0, \underline{\sigma}) = f(R, L_s, I_0, I_{1,p}, J_2, \theta) = \sqrt{J_2} \rho(\theta, L_s) - \frac{R}{\sqrt{6}} (I_1 - I_0) \quad (1.125)$$

Où I_1, J_2, θ sont les invariants du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$.

Ce critère est performant de part ces nombreux avantages : convexité, dérivabilité de la fonction de charge, formulation. Cependant, il ne prend pas en compte la différence de comportement, observée lors des expériences de tractions et compressions triaxiales réalisées par Di Benedetto et Yan (1994), en fonction du type de sollicitation.

En se basant sur les observations expérimentales de Di Benedetto et Yan (1994) et sur le critère de Drucker-Prager généralisé, un nouveau modèle est ainsi proposé dans cette thèse.

1.3.3.6 Quelques exemples de modèles viscoplastiques

Il s'agit dans cette section de présenter deux modèles viscoplastiques permettant d'exprimer la variation de déformation plastique. En viscoplasticité,

Modèle de Perzyna

Dans le modèle de Perzyna, l'évolution de l'incrément de déformation plastique est défini (Perzyna 1966; Perzyna 1971; Heeres et al. 2002) par :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\langle \phi(F) \rangle}{\eta} \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \quad (1.126)$$

Où η est le paramètre de viscosité, ϕ la fonction de seuil de contrainte qui est fonction de la surface de charge F . La direction des déformations plastiques est donnée par $\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}$. L'opérateur $\langle . \rangle$ est défini comme :

$$\langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} \phi(f) & \text{si } \phi(f) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \phi(f) < 0 \end{cases} \quad (1.127)$$

Cette expression permet de donner la forme du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\langle \phi(F) \rangle}{\eta} \quad (1.128)$$

D'après Simo (1989), la fonction ϕ doit vérifier les conditions suivantes :

- ϕ est continue sur $[0; +\infty[$,
- ϕ est convexe sur $[0; +\infty[$,
- $\phi(0) = 0$.

Le modèle tend à être indépendant de la vitesse de déformation lorsque $\eta \rightarrow 0$. Enfin, une expression de ϕ est employée régulièrement (Desai and Zhang 1987; Simo 1989; Sluys 1992; Wang et al. 1997) :

$$\phi(F) = \left(\frac{F}{\alpha}\right)^N \quad (1.129)$$

Où α est habituellement pris égal à la contrainte plastique initiale et N est un paramètre de calibration devant satisfaire $N \geq 1$ pour que la fonction ϕ soit convexe.

Modèle Duvaut-Lions

Le modèle de Duvaut-Lions (Duvaut and Lions 1970; Duvaut 1974) est équivalent au modèle de Perzyna mais diffère dans son expression :

$$\varepsilon^{vp} = \begin{cases} \frac{\underline{\sigma} - p_{\underline{\sigma}}}{\tau} & \text{si } F(\underline{\sigma}) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.130)$$

Où τ est le paramètre de viscosité, $p_{\underline{\sigma}}$ est la projection de l'état de contrainte $\underline{\sigma}$ sur la surface de charge.

2 Formulation de la version EPPI du modèle DBN

2.1 Introduction

Les travaux menés à l'ENTPE (Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat) ont conduit au développement du modèle DBN (Di Benedetto-Neifar). Son principal intérêt réside dans sa formulation qui permet de décrire, avec un formalisme unique, différents types de comportements observés sur les enrobés bitumineux (Neifar 1997; Neifar and Di Benedetto 2001; Di Benedetto et al. 2007b; Di Benedetto and Olard 2009). La représentation analogique 1D de la version EPPI (chaque corps a un comportement Elastique-Parfaitement Plastique-Isotrope) du modèle DBN est basée sur des éléments rhéologiques simples. Grâce à sa grande versatilité, ce modèle est capable de décrire une large gamme d'amplitude de sollicitations, de températures et de nombres de cycles de chargements.

Le but de cette section est d'introduire la version EPPI du modèle DBN, capable de décrire à la fois le comportement viscoélastique linéaire et le comportement dans le domaine non-linéaire pour des sollicitations 3D (Gayte et al. 2014; Gayte et al. 2016).

2.2 Formulation tridimensionnelle du modèle DBN

2.2.1 Cas 1D

La représentation analogique unidimensionnelle du modèle DBN (cf. Figure 2-1) est composée d'un ressort (de module E_0) et de n corps élémentaires, eux-mêmes constitués d'un corps élastoplastique (EP_i) en parallèle avec un amortisseur linéaire (V_i). Les lois de comportements de ces corps élémentaires peuvent être modifiées pour prendre en compte différents types de comportement. La Figure 2-2 présente les contraintes et déformations au niveau d'un corps élémentaire « i ».

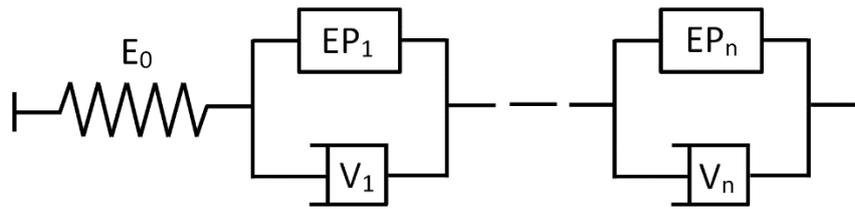


Figure 2-1 : Représentation analogique du modèle DBN.

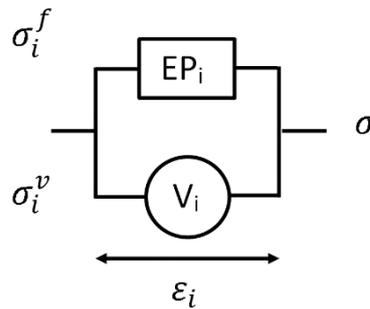


Figure 2-2 : Représentation schématique d'un corps élémentaire « i ».

Les équations générales du modèle sont relativement simples et sont données par :

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \quad (2.1)$$

$$\sigma = \sigma_i^f + \sigma_i^v \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (2.2)$$

Où ε et σ sont respectivement les déformation et contrainte du modèle et, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ε_i représente la déformation du corps élémentaire « i », σ_i^f la contrainte dite non-visqueuse du corps EP_i et σ_i^v la contrainte dite visqueuse du corps V_i .

2.2.2 Généralisation au cas 3D

2.2.2.1 Equations constitutives du modèle

Ce modèle est généralisable au cas 3D en remplaçant toutes les grandeurs scalaires par leur équivalent sous forme de tenseurs. En se basant sur sa structure générale représentée (Figure 2-1 et Figure 2-2), on peut exprimer les sollicitations appliquées au modèle, à savoir :

- La déformation totale $\underline{\varepsilon}$, égale à la somme des déformations de chacun des corps élémentaires $\underline{\varepsilon}_i$.
- La contrainte totale $\underline{\sigma}$, identique dans chaque corps élémentaire, décomposable pour chaque corps i considéré en la somme de la contrainte dite « non visqueuse » $\underline{\sigma}_i^f$ et la contrainte « visqueuse » $\underline{\sigma}_i^v$.

Les équations du modèle sont traduites du cas unidimensionnel :

$$\underline{\varepsilon} = \sum_{i=0}^n \underline{\varepsilon}_i \quad (2.3)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_i^f + \underline{\sigma}_i^v \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (2.4)$$

2.2.2.2 Version EPPI du modèle DBN

La formulation de la version EPPI du modèle DBN est introduite dans le cas 3D. La Figure 2-3 donne sa représentation analogique.

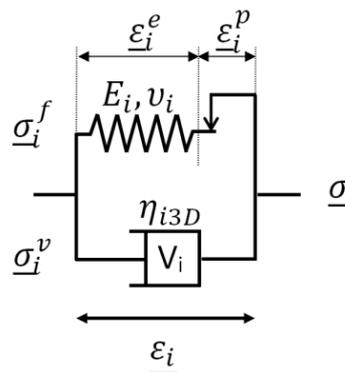


Figure 2-3 : Représentation analogique 3D de la version EPPI du modèle DBN dans le cas isotrope.

On notera que la déformation d'un corps élémentaire est désormais décomposée en une partie élastique $\underline{\varepsilon}_i^e$ et une partie plastique $\underline{\varepsilon}_i^p$ vérifiant la relation suivante :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{\varepsilon}_i^e + \underline{\varepsilon}_i^p \quad (2.5)$$

La constante η_{i3D} caractérise le corps visqueux (Vi) tandis que les constantes E_i et ν_i caractérisent la partie élastique du corps élastoplastique (EP_i) dans le cas isotrope. Leur définition est introduite dans les sections suivantes.

2.3 Formulation des corps élastoplastique (EP_i)

2.3.1 Dans le domaine VEL

Dans le domaine linéaire, la contrainte et la déformation d'un corps EP_i sont liées par le tenseur d'élasticité \underline{M}_i^e , dont les composantes sont notées M_{ijkl}^e , selon :

$$\varepsilon_{ij}^e = M_{ijkl}^e \sigma_{kl}^f \quad (2.6)$$

Soit en écriture tensorielle :

$$\underline{\varepsilon}_i^e = \underline{M}_i^e \underline{\sigma}_i^f \quad (2.7)$$

La partie élastique des corps EP_i est considérée comme étant isotrope. Le tenseur d'élasticité peut alors s'écrire en fonction du module d'Young E_i et du coefficient de Poisson ν_i :

$$M_{ijkl}^e = \frac{(1 + \nu_i)\delta_{mk}\delta_{jl} - \nu_i\delta_{kl}\delta_{mj}}{E_i} \quad (2.8)$$

2.3.2 Dans le domaine VP

2.3.2.1 Equations générales

La déformation $\underline{\varepsilon}_i$ d'un corps EP_i est égale à la somme des déformations élastique $\underline{\varepsilon}_i^e$ et plastique $\underline{\varepsilon}_i^p$ (cf. Figure 2-3) :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_i = \underline{\dot{\varepsilon}}_i^e + \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p = \underline{M}_i^{ep} \underline{\dot{\sigma}}_i^f \quad (2.9)$$

Ici, le symbole $(\dot{})$ exprime la dérivée matérielle temporelle. L'équation (2.9) peut être reformulée en considérant la structure élastoplastique. Ainsi dans le cas d'un chargement élastoplastique, il vient :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_i = \underline{\underline{M}}_i^{ep} \dot{\underline{\sigma}}_i^f = \underline{\underline{M}}_i^e \dot{\underline{\sigma}}_i^f + \underline{\underline{M}}_i^p \dot{\underline{\sigma}}_i^f = \underline{\dot{\varepsilon}}_i^e + \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p \quad (2.10)$$

Et dans le cas d'un déchargement :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_i = \underline{\underline{M}}_i^e \dot{\underline{\sigma}}_i^f \quad (2.11)$$

Où $\underline{\underline{M}}_i^{ep}$ et $\underline{\underline{M}}_i^p$ sont respectivement les tenseurs d'élasto-plasticité et de plasticité donnés par les relations :

$$\underline{\underline{M}}_i^{ep} = \underline{\underline{M}}_i^e + \underline{\underline{M}}_i^p \quad (2.12)$$

$$\underline{\underline{M}}_i^p = M_i^p (\underline{n}_f \otimes \underline{n}_g) \quad (2.13)$$

Ici \underline{n}_f et \underline{n}_g sont les vecteurs unitaires normaux respectivement à la surface de plasticité f et au potentiel plastique g . M_i^p est la norme du tenseur plastique $\underline{\underline{M}}_i^p$. Cette norme est infinie de part le choix d'un modèle parfaitement plastique. Dans ce cas, l'équation (2.9) peut être reformulée en exprimant $\underline{\dot{\varepsilon}}_i^p$ qui désigne la dérivée matérielle temporelle de la déformation plastique :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^p = \underline{\underline{M}}_i^p \dot{\underline{\sigma}}_i^f = \varepsilon_i^p \underline{n}_g \quad (2.14)$$

2.3.2.2 Surface de charge

Suivant le formalisme décrit précédemment, il convient de définir une surface de charge pour chacun des corps EP_i. Les équations des surfaces de charge du modèle DBN_{EPPI} sont basées sur le modèle de Drucker-Prager Généralisé. Celles-ci ont été adaptées pour prendre en compte la différence de comportement observé entre la traction et la compression, relevée par le critère de Di Benedetto et Yan afin de proposer une nouvelle surface de plasticité. Dans le cadre du modèle DBN_{EPPI}, les surfaces de plasticité ont été choisies afin d'obtenir une formulation suffisamment simple pour qu'elle puisse être intégrée dans un algorithme de calcul.

Résultats expérimentaux (Di Benedetto et Yan 1994)

Les essais expérimentaux réalisés par Di Benedetto et Yan (1994) ont été analysés pour étudier l'évolution de la contrainte maximale. Ces résultats sont présentés dans la section 1.3.3.5 (Figure 1-35). Les points expérimentaux représentent les contraintes maximales obtenues lors des essais, représentés dans les axes contraintes maximale σ_1 -contrainte radiale $\sqrt{2}\sigma_2$. Ces résultats montrent que les points représentant les contraintes maximales sont alignés si l'on considère les essais à une vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_1$ et une température T données. Les pentes des droites pour les essais en contraction et les essais en traction ont des valeurs différentes. Ces valeurs sont indépendantes des valeurs de vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_1$ et de température T . Seule la position de la droite change en fonction de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_1$ et de la température T , ce qui est dû au caractère visqueux du bitume.

Proposition d'un critère pour le modèle DBN EPPI

Pour définir le critère proposé, nous formulons les deux hypothèses suivantes :

- Le critère a une forme conique d'axe la première trissectrice de l'espace des contraintes principales. Il est divisé en deux parties : un premier cône dans le demi-espace $I_1(\underline{\sigma}_i^f) < I_{p,i}$ et un second dans le demi-espace $I_1(\underline{\sigma}_i^f) \geq I_{p,i}$.
- Le critère est isotrope. Cette hypothèse est vérifiée en première approximation d'après Di Benedetto et Yan (1994). Elle nécessiterait néanmoins de plus amples investigations car lors de leur mise en place, les enrobés bitumineux sont fortement compactés dans une direction verticale.

A ces deux hypothèses, nous ajoutons les conditions de convexité et de continuité de la surface de charge qui sont des nécessités physiques.

Afin de définir un critère qui vérifie l'ensemble de ces conditions, nous avons choisi de nous appuyer sur le critère de Drucker-Prager généralisé.

Surfaces de charge proposées pour le modèle DBN_{EPPI}

Une surface de charge est proposée (cf. Figure 2-4). Elle est donnée par la fonction $f_i(\underline{\sigma}_i^f) = 0$ avec :

$$f_i(\underline{\sigma}_i^f) = \begin{cases} f^t(R_t, L_{s,t}, I_{0t,i}, \underline{\sigma}_i^f) & \text{when } I_1(\underline{\sigma}_i^f) \leq I_{p,i} \\ f^c(R_c, L_{s,c}, I_{0c,i}, \underline{\sigma}_i^f) & \text{when } I_1(\underline{\sigma}_i^f) > I_{p,i} \end{cases} \quad (2.15)$$

Où les fonctions f^t et f^c sont données par l'équation (1.117) du modèle de Drucker-Prager généralisé :

$$f_i(\underline{\sigma}_i^f) = \begin{cases} f^t(R_t, L_{s,t}, I_{0t,i}, \underline{\sigma}_i^f) = \sqrt{J_2} \rho(\theta, L_{s,t}) - \frac{R_t}{\sqrt{6}} (I_1 - I_{0t,i}) \\ f^c(R_c, L_{s,c}, I_{0c,i}, \underline{\sigma}_i^f) = \sqrt{J_2} \rho(\theta, L_{s,c}) - \frac{R_c}{\sqrt{6}} (I_1 - I_{0c,i}) \end{cases} \quad (2.16)$$

Où les variables I_1, J_2 et θ sont fonction de $\underline{\sigma}_i^f$.

La fonction $f_i(\underline{\sigma}_i^f)$, proposée pour le modèle DBN_{EPP}, est donc constitué de deux parties :

- Une partie, dite de « traction » donné par la fonction f^t , de paramètres $R_t, L_{s,t}, I_{0t,i}$, donnant la frontière de plasticité pour une contrainte moyenne $I_1(\underline{\sigma}_i^f) \leq I_{1,p}$,
- Une partie, dite de « compression », donné par la fonction f^c , de paramètres $R_c, L_{s,c}, I_{0c,i}$ donnant la frontière de plasticité pour une contrainte moyenne $I_1 \geq I_{1,p}$.

Sans hypothèses supplémentaires, la surface de plasticité proposée est continue quelque soit $I_1 \in [-\infty; I_{1,p} [\cup] I_{1,p}; +\infty]$, du fait de la continuité de la surface du critère de Drucker-Prager généralisé. Afin de prolonger la continuité de cette surface dans le plan déviatorique $I_1 = I_{1,p}$ (cf. Figure 2-4), il est nécessaire d'ajouter la condition :

$$\forall \underline{\sigma}_i^f \text{ avec } I_1(\underline{\sigma}_i^f) = I_{1,p} \quad f^t(R_t, L_{s,t}, I_{0t,i}, \underline{\sigma}_i^f) = f^c(R_c, L_{s,c}, I_{0c,i}, \underline{\sigma}_i^f) \quad (2.17)$$

Pour remplir cette condition, il faut donc que :

$$\frac{R_c}{\sqrt{6}} (I_{1,p} - I_{0c,i}) - \frac{R_t}{\sqrt{6}} (I_{1,p} - I_{0t,i}) = \sqrt{J_2} [\rho(\theta, L_{s,c}) - \rho(\theta, L_{s,t})] \quad (2.18)$$

La condition de continuité dans le plan déviatorique $I_1 = I_{1,p}$ est donc vérifiée si le facteur de forme L_s est identique pour les deux cônes f_t et f_c , soit :

$$L_s = L_{s,t} = L_{s,c} \quad (2.19)$$

Et si la relation suivante est vérifiée :

$$R_c (I_{1,p} - I_{0c,i}) = R_t (I_{1,p} - I_{0t,i}) \quad (2.20)$$

Cette dernière condition peut être réécrite :

$$\frac{R_c}{R_t} = \frac{I_{1,p} - I_{0t,i}}{I_{1,p} - I_{0c,i}} \quad (2.21)$$

Les ouvertures des ne sont pas fonction de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_1$ et de la température T . Dans le plan déviatorique normalisé, c'est-à-dire lorsque $I_1 - I_{0t,i} = \sqrt{3}$ ou $I_1 - I_{0c,i} = \sqrt{3}$, la fonction de plasticité passe par ces valeurs remarquables en $\theta = 0$, à savoir :

$$\begin{cases} \sqrt{J_2}\rho(\theta, L_s) - \frac{R_t}{\sqrt{6}}(I_1 - I_{0t,i}) = \sqrt{2J_2} - \sqrt{2}R_t = 0 \\ \sqrt{J_2}\rho(\theta, L_s) - \frac{R_c}{\sqrt{6}}(I_1 - I_{0c,i}) = \sqrt{2J_2} - \sqrt{2}R_c = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Soit pour $\theta = 0$, $I_1 - I_{0t,i} = \sqrt{3}$ ou $I_1 - I_{0c,i} = \sqrt{3}$:

$$\begin{cases} R_t = \sqrt{J_2} \\ R_c = \sqrt{J_2} \end{cases} \quad (2.23)$$

Sur la Figure 2-4, une représentation schématique des paramètres R_c , R_t , I_{1t} , I_{1c} et L_s est proposée dans le plan $\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_2$.

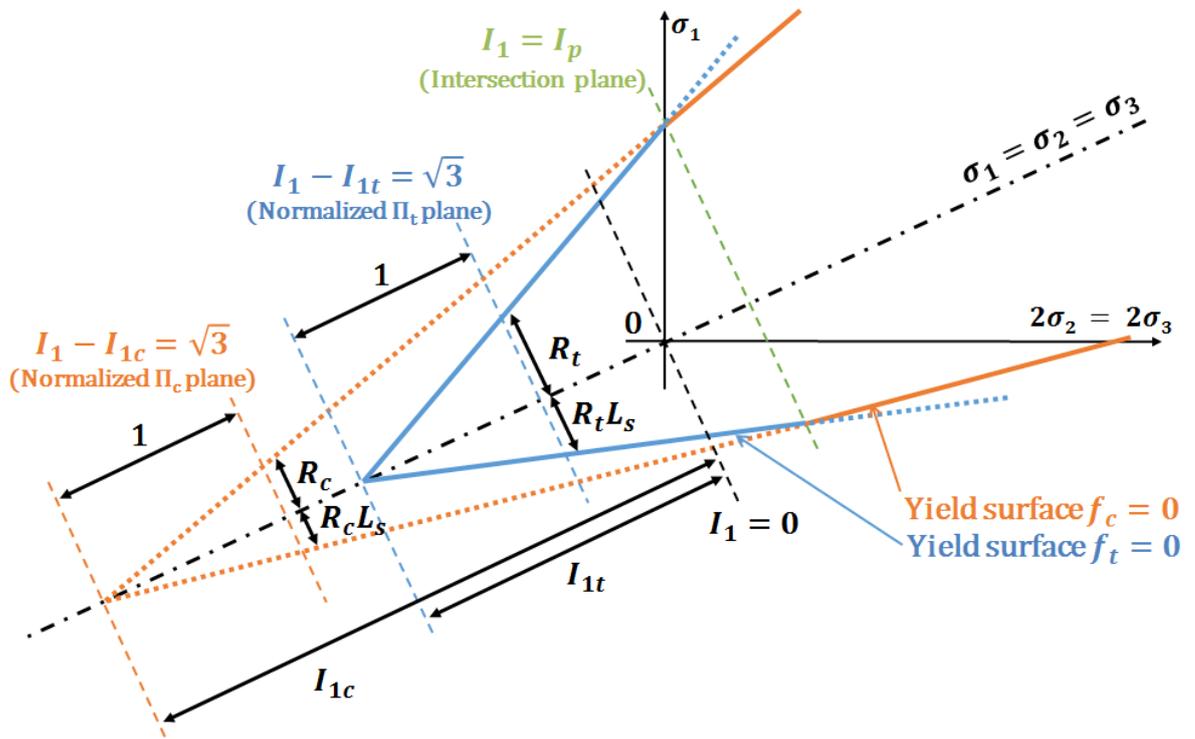


Figure 2-4 : Représentation de la surface de plasticité proposée pour le modèle DBN_{EPPi} .

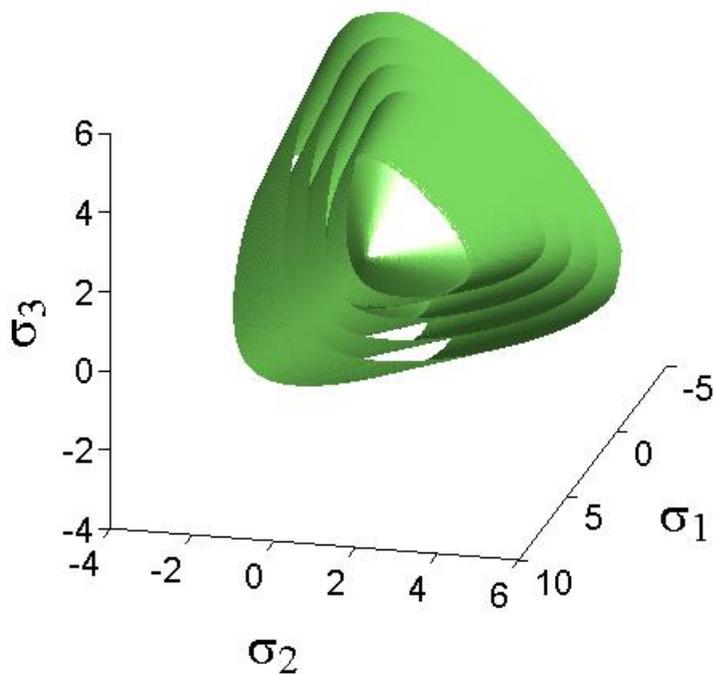


Figure 2-5 : Représentation de la surface de plasticité proposée dans le modèle DBN_{EPPi} , dans l'espace des contraintes principales.

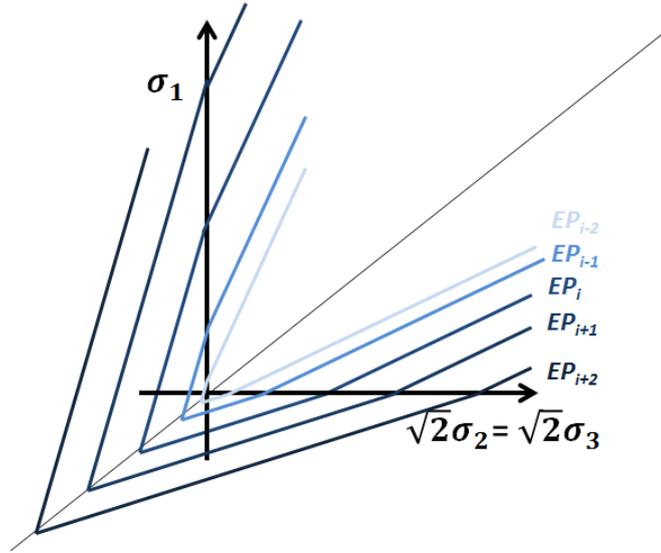


Figure 2-6 : Représentation des surfaces de plasticité proposées dans le modèle DBN_{EPP} (cas avec 5 corps élémentaires), dans l'espace des contraintes principales.

La Figure 2-5 donne la représentation de la surface de plasticité d'un corps du modèle DBN_{EPPi} dans l'espace des contraintes principales. La Figure 2-6 donne une représentation des surfaces de plasticité imbriquées de 5 corps du modèle DBN_{EPPi} dans le plan $\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_2$.

Calcul de la normale à la surface de plasticité du corps élémentaire « i » ($\underline{n}_{f,i}$)

Le calcul de la normale unitaire, notée $\underline{n}_{f,i}$, à la surface de plasticité du corps élémentaire EP_i, s'effectue en dérivant l'équation (2.16). Les calculs sont détaillés en annexe (cf. 7.1.5). On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\sigma}} (\underline{\sigma}_i^f) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{s} \rho(\theta, L_s) - \frac{R}{\sqrt{6}} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} \\ &+ \frac{\sqrt{2} \mu \gamma}{\sqrt{3} \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2(3\theta)}} \left(3 \frac{J_3}{J_2^2} \underline{s} + \underline{\delta} - \frac{2}{J_2} \underline{s}^2 \right) \sin \left[\frac{1}{3} \arccos(\gamma \cos(3\theta)) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Où $I_1, J_2, J_3, \underline{s}$ et θ sont les invariants du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}_i^f$.

Puis par définition :

$$\underline{n}_{f,i}(\underline{\sigma}_i^f) = \frac{\frac{\partial f_i}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}_i^f)}{\left\| \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}_i^f) \right\|} \quad (2.25)$$

2.3.2.3 Surface de potentiel plastique

Le potentiel plastique permet de déterminer la direction des déformations plastiques qui est donnée par le vecteur normal unitaire au potentiel plastique. Dans la version EPPI du modèle DBN introduite ici, il s'agit d'une plasticité non associée (les surfaces de plasticité et de potentiel plastique diffèrent). Une unique surface de potentiel plastique pour l'ensemble des corps EP_i est par ailleurs définie.

Surface de potentiel plastique proposée dans le modèle DBN_{EPPI}

L'équation de la surface de potentiel plastique dérive également des équations du modèle de Drucker-Prager Généralisé, définie par l'équation (1.117). On note alors :

$$g(\underline{\sigma}) = \sqrt{J_2} \rho(\theta, L_{sg}) - \frac{R_g}{\sqrt{6}} (I_1 - I_0) \quad (2.26)$$

On observe tout d'abord que la fonction g n'est pas indicée « i » car cette surface est choisie unique pour l'ensemble des corps élémentaires du modèle DBN_{EPPI}.

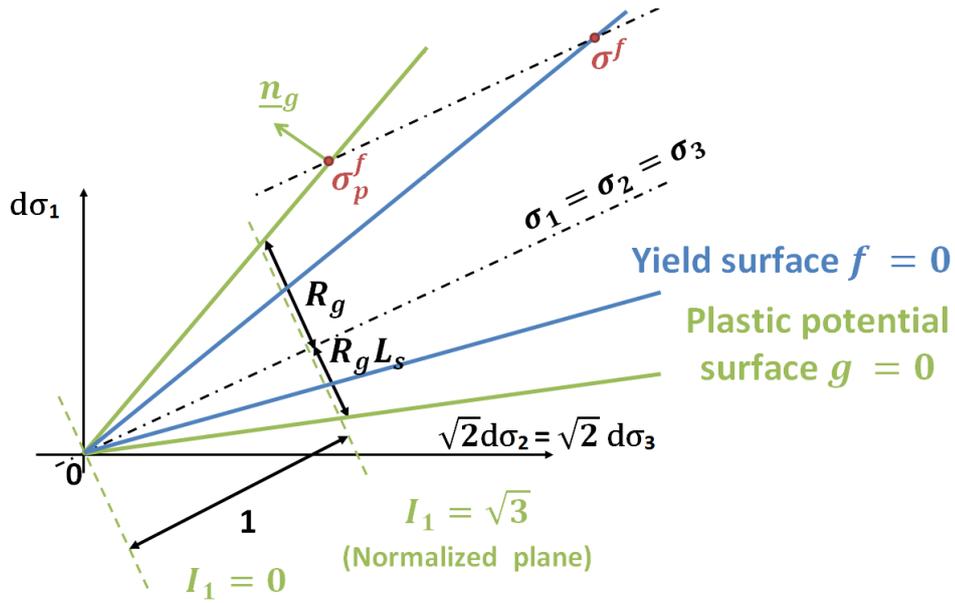


Figure 2-7 : Représentation de la surface de potentiel plastique g et de ses paramètres (R_g, L_s).

Calcul de la normale unitaire à la surface de potentiel plastique ($\underline{n}_{g,i}$)

La surface g étant définie, le calcul de la direction de déformation plastique s'effectue en deux étapes :

- Projection parallèlement à la première trissectrice ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) de la contrainte non visqueuse $\underline{\sigma}_i^f$. La projection est notée $\underline{\sigma}_{p,i}^f$.
- Calcul de la normale unitaire à la surface g de potentiel plastique, notée \underline{n}_g , au point de contrainte $\underline{\sigma}_{p,i}^f$

Le calcul de la normale unitaire, notée $\underline{n}_{g,i}$, à la surface de plasticité du corps élémentaire EP_i , s'effectue en dérivant l'équation (1.117). Les calculs sont détaillés en annexe (cf. 7.1.5).

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial \underline{\sigma}} (\underline{\sigma}_{p,i}^f) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{s} \rho(\theta, L_s) - \frac{R}{\sqrt{6}} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} \\ &+ \frac{\sqrt{2} \mu \gamma}{\sqrt{3} \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2(3\theta)}} \left(3 \frac{J_3}{J_2^2} \underline{s} + \frac{\underline{\delta}}{J_2} - \frac{2}{J_2} \underline{s}^2 \right) \sin \left[\frac{1}{3} \arccos(\gamma \cos(3\theta)) \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Où $I_1, J_2, J_3, \underline{s}$ et θ sont les invariants du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}_{p,i}^f$.

Puis par définition :

$$\underline{n}_{g,i}(\underline{\sigma}) = \frac{\frac{\partial g_i}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}_{p,i}^f)}{\left\| \frac{\partial g_i}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}_{p,i}^f) \right\|} \quad (2.28)$$

On remarque par ailleurs que, pour la surface de potentiel plastique, le paramètre I_0 peut être pris nul. En effet, seule la normale à la surface est recherchée, et la valeur de I_0 n'influe pas sur ce calcul.

2.4 Formulation des corps Visqueux (V)

2.4.1 Comportement général

Le comportement des corps de type V est donné par l'équation :

$$\dot{\epsilon}_{i_{mj}} = N_{i_{mjkl}}(T) \sigma_{i_{kl}}^v \quad (2.29)$$

Soit en écriture tensorielle :

$$\underline{\dot{\epsilon}}_i = \underline{\underline{N}}_i(T) \underline{\underline{\sigma}}_i^v \quad (2.30)$$

Où $\underline{\underline{N}}_i(T)$, de composantes $N_{i_{mjkl}}(T)$, est le tenseur rhéologique de viscosité, fonction de la température T . La thermo-susceptibilité des enrobés bitumineux est donc prise en compte dans le modèle. Il est rappelé que le Principe de Superposition Temps-Température (PSTT) est vérifié dans les domaines linéaire et non-linéaire. Ce tenseur dépend également de l'état des contraintes comme cela est expliqué dans les parties qui suivent.

2.4.2 Dans le domaine VEL

Cette section traite du comportement viscoélastique des corps V, c'est-à-dire lorsque $f(\underline{\sigma}_i^f) < 0$ ou $f(\underline{\sigma}_i^f) = 0$ sans déformations plastiques ($\langle \underline{\sigma}_i^f | \underline{n}_{f,i} \rangle \leq 0$). Une hypothèse basique formulée et interprétée par Di Benedetto (1987) permet de supposer que la dérivée matérielle temporelle du tenseur des contraintes « non visqueuses » ($\dot{\underline{\sigma}}_i^f$) est colinéaire et de même sens que le tenseur des contraintes « visqueuses » ($\underline{\sigma}_i^v$) (cf. Figure 2-8). Prenant en compte cette considération, on note ζ_i le ratio des normes des tenseurs $\underline{\underline{N}}_i$ (noté $\underline{\underline{N}}_i^e$ dans le

cas visco-élastique linéaire) et \underline{M}_i^e . Il apparaît donc que dans le domaine viscoélastique linéaire :

$$\underline{N}_i = \underline{N}_i^e = \zeta_i \underline{M}_i^e \quad (2.31)$$

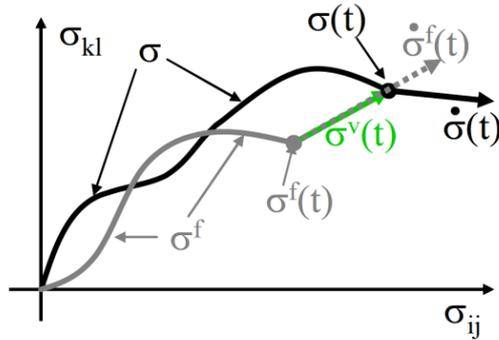


Figure 2-8 : Evolution des tenseurs des contraintes « non visqueuses » ($\underline{\sigma}^f$) et « visqueuses » ($\underline{\sigma}^v$) en l'absence de déformations plastiques (domaine visco-élastique linéaire).

Dans ce cas, seul un scalaire est nécessaire pour compléter la description du comportement des corps de type V. On introduit alors le paramètre $\eta_{i\ 3D}$:

$$\|\underline{N}_i^e\| = \frac{1}{\eta_{i\ 3D}} = \zeta_i \|\underline{M}_i^e\| \quad (2.32)$$

Où $\|\underline{A}\| = \sqrt{A_{ij}A_{ij}}$ est la norme du tenseur \underline{A} . Des équations (2.31) et (2.32) il vient :

$$\dot{\underline{\epsilon}}_i^e = \underline{N}_i^e \underline{\sigma}_i^v = \zeta_i \underline{M}_i^e \underline{\sigma}_i^v = \frac{\underline{M}_i^e \underline{\sigma}_i^v}{\eta_{i\ 3D} \|\underline{M}_i^e\|} \quad (2.33)$$

A partir d'un cas de chargement unidimensionnel (seule la composante σ_{11} est non nulle), on obtient :

$$\dot{\epsilon}_{11,i}^e = \frac{\sigma_{11i}^v}{\eta_{i\ 3D} E_i \|\underline{M}_i^e\|} = \frac{\sigma_{11i}^v}{\eta_i} \quad (2.34)$$

Où η_i est la viscosité 1D du corps "i".

Puis :

$$\eta_{i3D} = \frac{\eta_i}{E_i \|\underline{\underline{M}}_i^e\|} \quad (2.35)$$

Finalement, la constante ζ_i , qui permet de décrire l'ensemble du comportement des corps de type V, est donnée par la relation suivante :

$$\zeta_i = \frac{1}{\eta_{i3D} \|\underline{\underline{M}}_i^e\|} = \frac{E_i}{\eta_i} \quad (2.36)$$

Il est intéressant de faire remarquer que ces équations ne sont valables que sous l'hypothèse d'un comportement isotrope. Pour généraliser, dans le cas d'un comportement orthotrope, le scalaire ζ_i doit être remplacé par un tenseur $\underline{\underline{Z}}_i$, tel que :

$$\underline{\underline{N}}_i^e = \underline{\underline{Z}}_i \cdot \underline{\underline{M}}_i^e \quad (2.37)$$

Avec, en écriture de Voigt :

$$\underline{\underline{Z}}_i = \begin{bmatrix} Z_{i11} & 0 & 0 & & & \\ 0 & Z_{i22} & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & Z_{i33} & & & \\ & & & Z_{i23} & 0 & 0 \\ & (0) & & 0 & Z_{i13} & 0 \\ & & & 0 & 0 & Z_{i12} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

2.4.3 Dans le domaine VP

Puisque un comportement parfaitement plastique a été adopté pour chaque corps EP_i du modèle DBN_{EPPI}, il est nécessaire de définir le multiplicateur plastique pour déterminer intégralement les équations incrémentales.

Lorsque la contrainte « non-visqueuse » ($\underline{\underline{\sigma}}_i^f$) du corps EP_i atteint la surface de plasticité, ie. $f_i(\underline{\underline{\sigma}}_i^f) = 0$ et que des déformations plastiques ($\langle \underline{\underline{\sigma}}_i^p | \underline{\underline{n}}_{f,i} \rangle > 0$) sont créées, on dit que le corps se plastifie, ainsi il entre dans le domaine viscoplastique.

La version EPPI du modèle DBN introduit un comportement parfaitement plastique pour les corps de type EP. Lorsque la contrainte « non-visqueuse » ($\underline{\sigma}^f$) atteint la surface de plasticité, deux phénomènes complémentaires apparaissent :

- La contrainte « non-visqueuse » $\underline{\sigma}^f$ ne peut pas dépasser la surface (plasticité parfaite). Ainsi, la dérivée $\underline{\dot{\sigma}}^f$ est obligatoirement tangente à la surface de plasticité $f(\underline{\sigma}^f) = 0$. Autrement dit, $\underline{\dot{\sigma}}^f$ est seulement dirigée dans les directions orthogonales à la direction du vecteur \underline{n}_f (vecteur normal unitaire à la surface de plasticité) et ainsi on a $\langle \underline{\dot{\sigma}}^f | \underline{n}_f \rangle = 0$. Par conséquent, $\underline{\dot{\sigma}}^f$ et $\underline{\sigma}^v$ ne sont plus colinéaires lorsque la plasticité est activée. (cf. Figure 2-9).
- La dérivée matérielle temporelle de la déformation plastique $\underline{\dot{\epsilon}}_i^p$ est colinéaire au vecteur normal unitaire \underline{n}_g à la surface du potentiel plastique g . Sa norme est notée $\dot{\epsilon}_i^p$ et sa valeur est donnée par la règle présentée ci-après. Ainsi on peut noter $\underline{\dot{\epsilon}}_i^p = \dot{\epsilon}_i^p \underline{n}_g$.

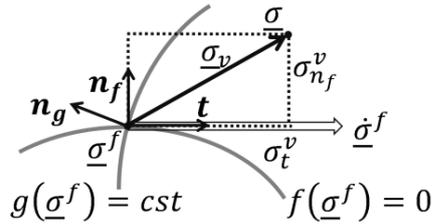


Figure 2-9 : Représentation des tenseurs des contraintes lorsque la surface de plasticité est atteinte, dans le cas d'une plasticité parfaite.

Il vient :

$$\underline{\dot{\epsilon}}_i = \underline{N}_i \underline{\sigma}_i^v = \underline{N}_i \left(\underline{\sigma}_{i\ n_f}^v + \underline{\sigma}_{i\ t}^v \right) = \underline{N}_i^p \underline{\sigma}_{i\ n_f}^v + \underline{N}_i^e \underline{\sigma}_{i\ t}^v \quad (2.39)$$

Où $\underline{\sigma}_{i\ n_f}^v$ et $\underline{\sigma}_{i\ t}^v$ sont respectivement la projection de $\underline{\sigma}_i^v$ selon le vecteur normal unitaire \underline{n}_f à la surface de plasticité et $\underline{\sigma}_{i\ t}^v = \underline{\sigma}_i^v - \underline{\sigma}_{i\ n_f}^v$. Le tenseur rhéologique \underline{N}_i^p est égal à $1/\eta_{i3D} (\underline{n}_g \otimes \underline{n}_g)$. De cette équation, on peut alors identifier les parties élastique et plastique :

$$\begin{cases} \underline{\dot{\epsilon}}_i^e = \underline{N}_i^e \underline{\sigma}_{i\ t}^v \\ \underline{\dot{\epsilon}}_i^p = \underline{N}_i^p \underline{\sigma}_{i\ n_f}^v \end{cases} \quad (2.40)$$

Et finalement, la norme de la dérivée matérielle temporelle des déformations plastiques est égale à :

$$\|\dot{\underline{\varepsilon}}_i^p\| = \|\underline{\underline{N}}_i^p\| \|\underline{\underline{\sigma}}_i^v\|_{n_f} \quad (2.41)$$

L'expression de la dérivée des déformations plastiques est donc donnée par :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_i^p = \|\underline{\underline{N}}_i^p\| \|\underline{\underline{\sigma}}_i^v\|_{n_f} \underline{\underline{n}}_g \quad (2.42)$$

2.5 Procédure de calibration du modèle DBN_{EPPI}

2.5.1 Résumé des paramètres du modèle

Le Tableau 2-1 présente l'ensemble des paramètres de la version EPPI modèle DBN et les constantes des modèles utilisés comme base à sa calibration.

Tableau 2-1 : Paramètres du modèle DBN_{EPPI} à calibrer et modèles et leurs constantes utilisés dans la calibration.

	Parameters	Number of parameters of the DBN_{EPPI} model	Calibration based on	Constants of the model (whatever the value of n)
Domaine VEL	Module d'Young E_i	$n+1$	Modèle 2S2P1D	9 constantes ($E_{00}, E_0, \nu_{00}, \nu_0, \delta, \beta, \tau, k, h$)
	Coefficient de Poisson ν_i	$n+1$		
	Viscosité η_i	n		
	Facteur a_T	2	Equation WLF	2 constantes (C_1 et C_2)
Domaine VP	Ouverture R_c^+	1	Critère viscoplastique de Di Benedetto (Nguyen 2010)	4 constantes ($\beta, d, \dot{\epsilon}_0, \gamma$)
	Ouverture R_t^+	1		
	Plan déviatorique $I_{p,i}$	n		
	Sommet $I_{1c,i}$	n		
		Sommet $I_{1t,i}$	n	Critère de Di Benedetto et Yan (1994)
Potentiel plastique	Ouverture R_g	1	Critère de Di Benedetto et Yan (1994)	1 constante (ν_c)
Total		6n+7		18

2.5.2 Dans le domaine VEL

La formulation du modèle DBN est présentée dans la section 2.2.2. Il s'agit dans cette section de présenter la procédure de calibration du modèle dans le domaine VEL des petites déformations. La calibration consiste à déterminer les :

- $n + 1$ valeurs E_i ,

- n valeurs η_i
- 2 valeurs ν_0 et ν_i (les coefficients de Poisson de tous les corps élémentaires sont pris égaux, soit $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \nu_i = \nu_j$).

Toutes les constantes du modèles DBN sont optimisées sur l'ensemble du domaine fréquentiel, à partir des résultats obtenus par le modèle 2S2P1D (cf. Figure 2-10).

Le modèle 2S2P1D étant calibré, les 11 constantes de ce modèle permettent d'obtenir tous les paramètres du modèle DBN, quel que soit le nombre n de corps élémentaires choisi, en utilisant la procédure d'optimisation détaillée dans la suite.

Pour cela, on cherche à minimiser l'équation (2.43) en calibrant les constantes E_i et η_i sur l'ensemble du spectre de fréquence.

$$\forall \omega \quad E_{2S2P1D}^*(\omega) = E_{DBN}^*(\omega) \quad (2.43)$$

On en déduit l'équation suivante, qui permet de lier les 7 constantes du modèle 2S2P1D dans le cas monodimensionnel, aux $2n + 1$ paramètres du modèle DBN :

$$\begin{aligned} E_{00} + \frac{E_0 - E_{00}}{1 + \delta(j\omega\tau(T))^{-k} + (j\omega\tau(T))^{-h} + (j\omega\beta\tau(T))^{-1}} \\ = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i + j\omega\eta_i(T)} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.44)$$

On rappelle que E_{00} , E_0 , δ , k , h , β et τ sont les 7 constantes du modèle 2S2P1D, présenté dans la section 1.3.2.9. En prenant l'inverse des termes, l'équation (2.44) est transposée en l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re}(E_{2S2P1D}^*(\omega))}{|E_{2S2P1D}^*(\omega)|^2} - j \frac{\operatorname{Im}(E_{2S2P1D}^*(\omega))}{|E_{2S2P1D}^*(\omega)|^2} \\ = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{(E_i)^2 + (\omega\eta_i(T))^2} - j \sum_{i=1}^n \frac{\omega\eta_i(T)}{(E_i)^2 + (\omega\eta_i(T))^2} \end{aligned} \quad (2.45)$$

L'expression (2.45) est une égalité entre deux nombres complexes, par identification, on obtient l'égalité des parties réelle d'une part et imaginaire d'autre part.

2.5.2.1 Calibration du modèle dans le cas uniaxial

Dans le domaine linéaire, le modèle DBN_{EPPi} (plus généralement, le modèle DBN) est équivalent à un assemblage en série de corps de Kelvin-Voigt. Les corps EP_i sont équivalents à des ressorts de module E_i et de coefficient de Poisson ν_i . Les corps Vi sont équivalents à des amortisseurs de viscosité η_i . L'ensemble de ces paramètres sont définis dans la section 2.2.2.

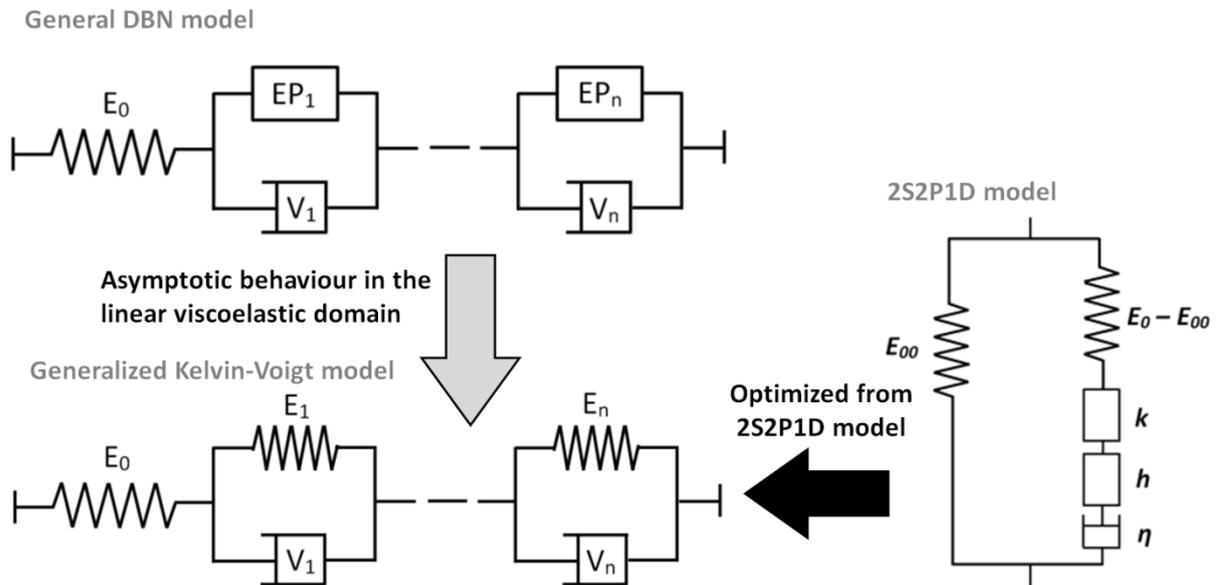


Figure 2-10 : Représentation générale du modèle DBN et de sa formulation dans le domaine viscoélastique linéaire.

L'expression du module complexe de ce modèle dans le domaine VEL est donnée par l'équation :

$$E_{DBN}^*(\omega, T) = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i + j\omega\eta_i(T)} \right)^{-1} \quad (2.46)$$

Où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation (f est la fréquence de sollicitation), T est la température, n est le nombre d'éléments du modèle, E_i le module du ressort de l'élément i et η_i la viscosité de l'élément i . Rappelons également que le nombre n est choisi arbitrairement, il représente le nombre de corps de Kelvin-Voigt en série. Plus n est grand, plus le modèle peut se rapprocher des données expérimentales, tout en augmentant également sa complexité.

On rappelle également l'expression du module complexe d'un corps élémentaire i :

$$E_i^* = E_i + i\omega\eta_i = E_i(1 + \omega\tau_i) \quad (2.47)$$

Le corps élémentaire i est alors caractérisé par la constante de temps $\tau_i = \eta_i/E_i$. Cette constante permet de définir deux principaux comportements (cf. Figure 2-11 et Figure 2-12) :

- Si on applique à un corps élémentaire i , une sollicitation $f = \frac{\omega}{2\pi}$ inférieure à τ_i alors son comportement est proche de celui d'un ressort seul de rigidité E_i , soit :

$$\omega \ll \frac{1}{\tau_i} \rightarrow E_i^* \sim E_i \quad (2.48)$$

- Si on applique à un corps élémentaire i , une sollicitation $f = \frac{\omega}{2\pi}$ supérieure à τ_i alors il se comporte comme un amortisseur seul de viscosité η_i :

$$\omega \gg \frac{1}{\tau_i} \rightarrow E_i^* \sim j\omega\eta_i \quad (2.49)$$

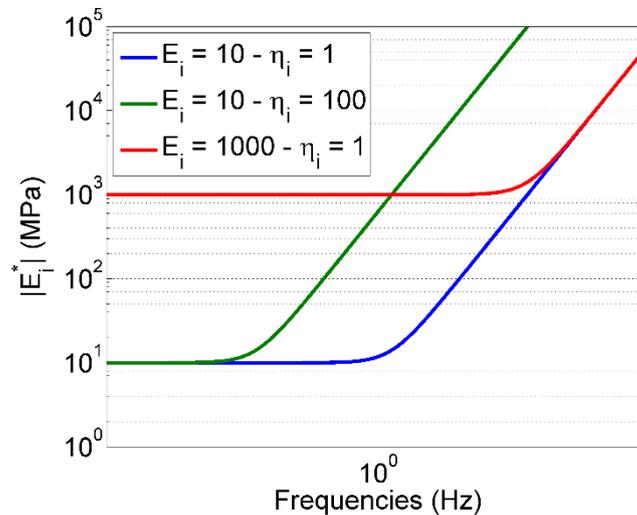


Figure 2-11 : Evolution de la norme du module complexe d'un corps élémentaire i en fonction de la fréquence et évolution en fonction des paramètres E_i et η_i .

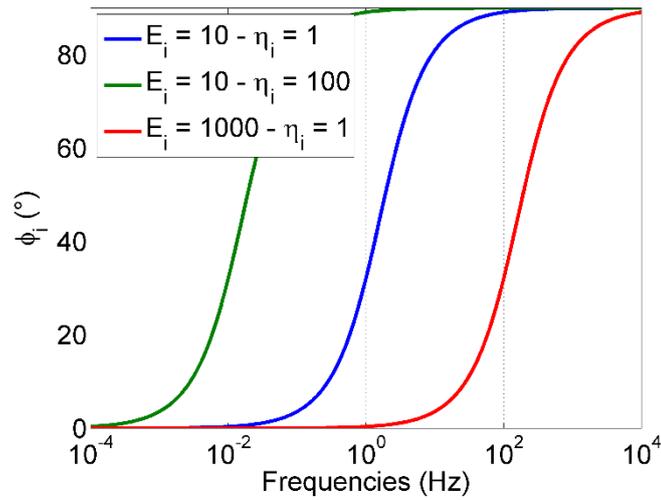


Figure 2-12 : Evolution de l'angle de phase du module complexe d'un corps élémentaire i en fonction de la fréquence et évolution en fonction des paramètres E_i et η_i .

Ainsi, la calibration consiste tout d'abord à fixer un intervalle d'étude fréquentiel $[f_{00}, f_0]$ (fréquences équivalentes) choisi selon la nature des données expérimentales. L'intervalle est alors découpé en n sous-intervalles $[f_i, f_{i+1}]$ de même amplitude :

$$\frac{f_i}{f_{i+1}} = k \in \mathbb{R} \quad (2.50)$$

Les temps caractéristiques τ_i des n corps élémentaires sont répartis de manière uniforme sur l'échelle logarithmique du temps en fonction des fréquences f_i précédemment définies :

$$\tau_i = \frac{1}{2\pi f_i} \quad (2.51)$$

Pour déterminer ensuite les valeurs de E_i et η_i , on procède par itération :

- Le corps « 0 » est composé d'un seul ressort E_0 qui correspond au module infini du matériau (c'est-à-dire lorsque la fréquence de sollicitation tend vers l'infini). Sa valeur correspond donc à la valeur de la constante E_0 du modèle 2S2P1D qui est supposée connue.

$$E_0^{DBN} = E_0^{2S2P1D} \quad (2.52)$$

- Pour calculer les paramètres E_1 et η_1 , on se place à la fréquence caractéristique du corps 1, soit $f = f_1 = 1/2\pi\tau_1$. On a alors :

$$f \gg f_i \text{ pour } i \geq 2 \text{ soit } \omega \gg 1/\tau_i \quad (2.53)$$

Pour les corps élémentaires i tels que $i \geq 2$, le module complexe est très supérieur, en norme, aux modules complexes des autres corps « 0 » et « 1 ». Il est donc possible de les remplacer par des barres de rigidité infinie. On approxime alors le modèle DBN à 2 éléments (cf. Figure 2-13), ce qui nous conduit à supposer que :

$$E_{DBN}^*(f_1) = \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(\frac{1}{1 + i\omega\tau_1} \right) \right]^{-1} \quad (2.54)$$

Ce module est équivalent au module 2S2P1D $E_{2S2P1D}^*(f)$. Seule la constante E_1 est une inconnue de l'égalité :

$$E_{DBN}^*(f_1) = \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(\frac{1}{1 + i\omega\tau_1} \right) \right]^{-1} = E_{2S2P1D}^*(f_1) \quad (2.55)$$

La résolution de cette équation conduit donc à déterminer la valeur du paramètre E_1 , comme étant la moyenne des deux solutions obtenues en résolvant l'égalité des parties réelle et imaginaire. La valeur de η_i est quant à elle déterminée à partir de l'équation (2.47).

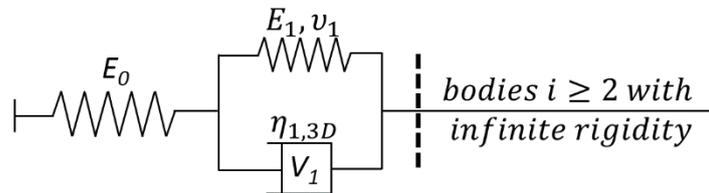


Figure 2-13 : Approximation du modèle DBN pour une fréquence $f = f_1 = 1/2\pi\tau_1 \gg f_i$ avec $i \geq 2$.

- Pour calculer les paramètres E_2 et η_2 , on réitère la même méthodologie. On se place à la fréquence caractéristique du corps 2, soit $f = f_2 = 1/2\pi\tau_2$. Le modèle DBN est équivalent aux corps élémentaires « 0 », « 1 » et « 2 » en série à cette fréquence, comme indiqué dans la Figure 2-14.

L'égalité des modules du modèle DBN simplifié à la fréquence f_2 et du modèle 2S2P1D permet de déterminer le paramètre E_2 puis les paramètres η_2 à partir de l'équation (2.46).

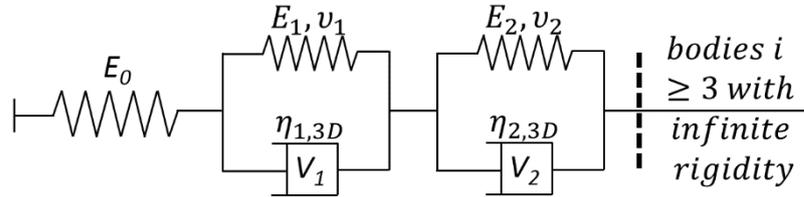


Figure 2-14 : Approximation du modèle DBN pour une fréquence $f = f_2 = 1/2\pi\tau_2 \gg f_i$ avec $i \geq 3$.

- On peut alors poursuivre ces itérations de manière analogue pour toutes les fréquences caractéristiques. Pour chaque itération, seul le paramètre E_i , module complexe du corps élémentaire considéré, est inconnu et peut être déterminé en supposant que le module équivalent DBN est égal au module du modèle 2S2P1D.
- Pour la dernière itération $i = n$, le module E_n est déterminé par les équations constitutives du modèle et par égalité du module du modèle DBN avec celui du modèle 2S2P1D, soit :

$$E_n = \left(\frac{1}{E_0^{2S1P1D}} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{E_i} \right)^{-1} \quad (2.56)$$

En suivant cette procédure, on peut alors calibrer l'ensemble des paramètres E_i et η_i du modèle DBN. Reste maintenant à décrire la procédure pour la calibration des paramètres ν_i .

2.5.2.2 Extension aux sollicitations 3D

Dans le cas 3D, il faut ajouter aux paramètres E_i et η_i , les paramètres ν_i , correspondants aux coefficients de Poisson des corps EP_i.

Dans le cas d'un essai de module complexe, une contrainte en traction et/ou compression est appliquée dans la direction 1. On note alors \vec{e}_1 le vecteur directeur normalisé dans la

direction 1. Considérons alors le repère orthonormé $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, les déformations dans les directions 1 et 2 (ou 3) sont alors données par :

$$\varepsilon_1^*(\omega) = \sum_{i=0}^n \varepsilon_{1,i}^*(\omega) \quad (2.57)$$

$$\varepsilon_2^*(\omega) = \sum_{i=0}^n \varepsilon_{2,i}^*(\omega) \quad (2.58)$$

Sous l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie des enrobés bitumineux dans le domaine linéaire, le coefficient de Poisson complexe ν^* lie les déformations ε_1^* et ε_2^* du modèle par la relation :

$$\varepsilon_2^* = -\nu^* \varepsilon_1^* \quad (2.59)$$

Dans le cas tridimensionnel, on affecte une constante ν_0 au ressort E_0 et une constante ν_i aux ressorts E_i (avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$). Les déformations et contraintes dans chacun des corps élémentaires sont alors liées par :

$$\sigma_{1,i}^* = E_i \varepsilon_{1,i}^* \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_{2,i}^* = -\nu_i \varepsilon_{1,i}^* \quad (2.61)$$

On en déduit le coefficient de Poisson complexe ν^* du modèle, en fonction des paramètres du modèle :

$$\begin{aligned} \nu^*(\omega) &= -\frac{\varepsilon_2^*(\omega)}{\varepsilon_1^*(\omega)} = -\frac{\sum_{i=0}^n \nu_i \varepsilon_{1,i}^*}{\sum_{i=0}^n \varepsilon_{1,i}^*} = -\frac{\sum_{i=0}^n \frac{\nu_i}{E_i^*}}{\frac{1}{E^*}} \\ &= -\frac{\frac{\nu_0}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{E_i + j\omega\eta_i(T)}}{\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i + j\omega\eta_i(T)}} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Pour déterminer les valeurs des coefficients de Poisson, on procède alors de la manière suivante :

- Le paramètre ν_0 , coefficient de Poisson du corps « 0 » constitué d'un seul ressort correspond au coefficient de Poisson du matériau soumis à une sollicitation de fréquence infini. Cela correspond au coefficient de Poisson ν_0 du modèle 2S2P1D, on a alors :

$$\nu_0^{DBN} = \nu_0^{2S2P1D} \quad (2.63)$$

- Les paramètres ν_i pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont supposés tous constants et égaux. Leur valeur est déterminée à la fréquence de sollicitation $f = 0$. En reprenant l'équation (2.62), prise en $\omega = 2\pi f = 0$, on obtient :

$$\nu^*(0) = -\frac{\frac{\nu_0}{E_0} + \nu_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i}}{\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i}} \quad (2.64)$$

Soit à partir de l'expression du module complexe (2.46) :

$$\nu_i = \frac{\nu^*(0)E_0 + \nu_0 E^*(0)}{E^*(0) + E_0} \quad (2.65)$$

A partir du module complexe du modèle 2S2P1D, on obtient les coefficients de Poisson ν_i des corps élémentaires i pour $i \geq 1$:

$$\nu_i = \frac{\nu_0 E_{00} + \nu_{00} E_0}{E_{00} + E_0} \quad (2.66)$$

2.5.3 Dans le domaine VP

Il s'agit dans cette section de détailler la procédure de calibration du modèle DBN_{EPP1} dans le domaine viscoplastique. La calibration consiste à déterminer :

- les valeurs des ouvertures des cônes R_c et R_t ,
- les n valeurs des plans déviatoriques $I_{p,i}$,
- les $2n$ valeurs de sommets des cônes $I_{1c,i}$ et $I_{1t,i}$.

Ces paramètres sont déterminés par un processus d'optimisation à partir du critère viscoplastique de Di Benedetto (1987) et du critère de contrainte maximale de Di Benedetto et Yan (1994).

2.5.3.1 Calibration des paramètres R_c et R_t

D'après la définition du critère de contrainte maximale de Di Benedetto et Yan, les valeurs des pentes des cônes sont déterminées expérimentalement par des essais de traction/compression triaxiaux. D'après la section 1.3.3.5, les paramètres $\tan \theta_t$ et $\tan \theta_c$ permettent de définir les pentes de chacun des cônes. D'après la définition des surfaces de plasticité et des considérations géométriques, les ouvertures sont alors données par :

$$R_t = \frac{1}{L_s} \frac{1 - \sqrt{2} \tan \theta_t}{\sqrt{2} + \tan \theta_t} \quad (2.67)$$

Et :

$$R_c = \frac{1}{L_s} \frac{1 - \sqrt{2} \tan \theta_c}{\sqrt{2} + \tan \theta_c} \quad (2.68)$$

2.5.3.2 Calibration des paramètres $I_{p,i}$

Il s'agit de déterminer la limite entre le comportement observé lorsque toutes les contraintes principales sont positives (compression) et lorsque au moins une contrainte principale est négative (et subit donc un effort de traction). Cette limite est définie par un plan déviatorique variant pour chaque vitesse de sollicitation ou température. Di Benedetto et Yan (1994) ont observé que ce plan passe par le point de contrainte maximale en compression lorsque la pression de confinement est nulle. La position de ce point est fonction de la température T et de la vitesse de sollicitation en déformation $\dot{\epsilon}$. On note σ_{max} la valeur de la contrainte maximale dans ces conditions, ce qui signifie que :

$$I_{p,i} = \sigma_{max}(\sigma_2 = 0, T, \dot{\epsilon}) \quad (2.69)$$

Ainsi d'après les équations du critère de Di Benedetto, les valeurs du paramètre $I_{p,i}$ de la version EPPI du modèle DBN sont déterminées afin d'obtenir une courbe seuil-vitesse de déformation proche de celle du critère de Di Benedetto (1987) donné par :

$$\ln(\dot{\epsilon}(\sigma_{max}, T) + \delta) = \frac{1}{\beta} \max \quad (2.70)$$

Pour la version EPPI du modèle DBN, la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{DBN}(\sigma_p, T) = \sum_{i=1}^n \dot{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\min(0, \sigma_p - I_{p,i})}{\eta_i(T)} \quad (2.71)$$

Pour déterminer les valeurs $I_{p,i}$ avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la courbe analytique donnée par le critère de Di Benedetto est approchée par une suite de segments. Le seuil $I_{p,1}$ est calculé à partir de l'égalité (2.72) qui donne sa valeur par résolution de l'équation (2.73).

$$\dot{\varepsilon}(I_{p,1}) = 0 \quad (2.72)$$

Soit :

$$\ln(\delta) = \frac{1}{\beta} \left(I_{p,1} + \gamma + \frac{\xi}{I_{p,1}} \right) \quad (2.73)$$

Ainsi $I_{p,1}$ prend la valeur :

$$I_{p,1} = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4(\beta \ln(\delta) - \xi)}}{2} \quad (2.74)$$

De proche en proche, on obtient ensuite la valeur de l'ensemble des seuils $I_{p,j}$ par :

$$\dot{\varepsilon}(I_{p,j}) = \sum_{i=1}^j \frac{I_{p,i} - I_{p,j}}{\eta_i} \quad (2.75)$$

2.5.3.3 Calibration des paramètres $I_{1c,i}$ et $I_{1t,i}$

Ces paramètres permettent de définir la position du sommet des cônes des surfaces de plasticité en traction et en compression. Cette position est fonction de la température et de la vitesse de déformation. Leur valeur est donnée par des considérations géométriques pour chaque corps EP_i, soit :

$$I_{1t,i} = I_{p,i} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R_t} \right) \quad (2.76)$$

Et :

$$I_{1c,i} = I_{p,i} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R_c} \right) \quad (2.77)$$

2.5.3.4 Calibration du paramètre R_g

La calibration des paramètres R_g et $L_{s,g}$ donne la caractérisation de la surface de potentiel plastique. Comme présenté précédemment, cette courbe est unique pour la version EPPI du modèle DBN. Ces paramètres sont définis à partir des coefficients de Poisson plastiques en traction ν_t et en compression ν_c , par :

$$R_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\nu_c - 1}{\nu_c + 1} \quad (2.78)$$

Et :

$$L_{s,g} = \frac{1}{\sqrt{2}R_g} \frac{1 - 2\nu_t}{\nu_t + 1} \quad (2.79)$$

2.5.4 Algorithme de calibration de la version EPPI du modèle DBN

L'algorithme est implémenté dans un code Matlab® consultable en Annexe 7.2.1. et dans le programme présenté dans le chapitre 3.

2.5.4.1 Dans le domaine VEL

La section 2.5.2 détaille la résolution complète permettant de calculer les paramètres VEL de la version EPPI du modèle DBN à partir du modèle 2S2P1D. L'objectif de cette partie est de donner un rapide aperçu de l'algorithme de résolution de ce problème. Le Tableau 2-2 donne les constantes connues et les paramètres choisis par l'utilisateur et utilisés dans la procédure de calibration. Le Tableau 2-3 présente l'algorithme de résolution conduisant à la détermination des paramètres du modèle DBN.

Tableau 2-2 : Constantes utilisées dans la calibration du domaine VEL de la version EPPI du modèle DBN et paramètres imposés par l'utilisateur

Constantes du modèle 2S2P1D	$E_0, E_{00}, \nu_0, \nu_{00}, k, h, \delta, \beta, \tau$
Paramètres imposés par l'utilisateur	n : nombre de corps élémentaires du modèle DBN f_{min} : borne inférieure de l'intervalle de fréquence

f_{man} : borne supérieure de l'intervalle de fréquence

Tableau 2-3 : Algorithme de calcul des paramètres du domaine VEL de la version EPPI du modèle DBN à partir des constantes et paramètres définis dans le Tableau 2-2.

Itération $i = 0$:

$$E_0 = E_0^{2S2P1D}$$

$$v_0 = v_0^{2S2P1D}$$

Itération $i = k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$:

$$E'_k = \left[\left(\frac{\operatorname{Re}(E_{2S2P1D}^*(\omega_k))}{|E_{2S2P1D}^*(\omega_k)|} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1 + \omega_k^2 \tau_i^2} \right) (1 + \omega_k^2 \tau_k^2) \right]^{-1}$$

$$E''_k = \left[\left(\frac{\operatorname{Im}(E_{2S2P1D}^*(\omega_k))}{|E_{2S2P1D}^*(\omega_k)|} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\omega_k \tau_i}{1 + \omega_k^2 \tau_i^2} \right) (1 + \omega_k^2 \tau_k^2) \right]^{-1}$$

$$E_k = \text{moyenne}(E'_k, E''_k)$$

$$\eta_k = E_k \tau_k$$

$$v_k = \frac{v_{00} E_0 - v_0 E_{00}}{E_0 - E_{00}}$$

Itération $i = n$:

$$E_n = \left(\frac{1}{E_{00}^{2S1P1D}} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{E_i} \right)^{-1}$$

$$v_n = \frac{v_{00} E_0 - v_0 E_{00}}{E_0 - E_{00}}$$

2.5.4.2 Dans le domaine VP

Dans la section 2.5.3, nous avons vu en détail les relations qui permettent de calculer les paramètres VP de la version EPPI du modèle DBN. Dans cette partie, l'algorithme de résolution de ce problème est explicité (Tableau 2-5). Le Tableau 2-4 donne les constantes connues et les paramètres choisis par l'utilisateur et utilisés dans la procédure de calibration.

Tableau 2-4 : Constantes utilisées dans la calibration du domaine VP de la version EPPI du modèle DBN et paramètres imposés par l'utilisateur.

Constantes du critère de fluage viscoplastique de Di Benedetto (1994)	$\beta, \alpha, \gamma, \sigma_0$
Constantes du modèle de surface de plasticité de Di Benedetto et Yan (1994)	$\tan \theta_c, \tan \theta_t$
Coefficients de Poisson plastique en compression et en traction	ν_c, ν_t
Paramètres de la version EPPI du modèle DBN dans le domaine VEL	$(E_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $(\nu_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $(\eta_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$
Paramètres imposés par l'utilisateur (ces paramètres sont identiques à ceux choisis pour la calibration du domaine VEL)	n : nombre de corps élémentaires du modèle DBN f_{min} : borne inférieure de l'intervalle de fréquence f_{max} : borne supérieure de l'intervalle de fréquence

Tableau 2-5 : Algorithme de calcul des paramètres du domaine VP de la version EPPI du modèle DBN à partir des constantes et paramètres définis dans le Tableau 2-4.

Itération $i = 1$:

Ouverture des cônes :

$$R_t = \frac{1}{L_s} \frac{1 - \sqrt{2} \tan \theta_t}{\sqrt{2} + \tan \theta_t}$$

$$R_c = \frac{1}{L_s} \frac{1 - \sqrt{2} \tan \theta_c}{\sqrt{2} + \tan \theta_c}$$

Plan déviatorique du corps 1 :

$$I_{p,1} = \sigma_0 \left[\beta \ln \left(\frac{\delta}{\varepsilon_0} \right) + \gamma \right]$$

Sommets des cônes du corps 1 :

$$I_{1t,1} = I_{p,1} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R_t^+} \right)$$

$$I_{1c,1} = I_{p,1} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R_c^+} \right)$$

Paramètres du potentiel plastique :

$$R_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\nu_c - 1}{\nu_c + 1}$$

$$L_{s,g} = \frac{1}{\sqrt{2} R_g} \frac{1 - 2\nu_t}{\nu_t + 1}$$

Itérations $i = k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

Plan déviatorique du corps i :

$$\dot{\varepsilon}(I_{p,k}) = \sum_{j=1}^k \frac{I_{p,k} - I_{p,j}}{\eta_j}$$

Sommets des cônes du corps i :

$$I_{1t,k} = I_{p,k} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R_t^+} \right)$$

$$I_{1c,k} = I_{p,k} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R_c^+} \right)$$

3 Implémentation du modèle DBN_{EPPI} dans un code de calcul homogène

3.1 Introduction

Alors que le chapitre 2 décrit la version EPPI du modèle DBN ainsi que sa procédure de calibration, il s'agit ici de présenter l'implémentation de ce modèle dans un code de calcul homogène permettant de réaliser des modélisations sous sollicitations (mécaniques et thermiques) imposées mais quelconques.

La première section est consacrée à la formulation des hypothèses et à la mise en équation du modèle sous forme incrémentale permettant une résolution des équations générales par incréments de temps successifs. Puis, sont introduits l'ensemble des algorithmes de simulation pour chaque type de sollicitation (déformation, contrainte et mixte). Enfin, un programme avec interface graphique, développé sous Matlab®, est présenté. Il permet entre autres de réaliser la calibration du modèle, des simulations numériques et d'enregistrer et d'exploiter les résultats.

3.2 Mise en équation

3.2.1 Hypothèses

Dans le but d'être capable de déterminer la réponse d'un matériau à une sollicitation quelconque, il convient de résoudre les équations du modèle. Pour cela, une méthode itérative consistant à résoudre le problème par incréments de temps successifs est adoptée. Il s'agit donc de résoudre l'ensemble des équations du problème sur un intervalle de temps $[t; t + dt]$, connaissant l'ensemble des variables et paramètres d'état au temps t .

La première hypothèse (I) suppose que la contrainte varie linéairement entre t et $t + dt$, soit :

$$\forall \tau \in [t; t + dt] \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}(\tau) = \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^6 \quad (3.1)$$

La seconde hypothèse (II) concerne les vecteurs unitaires normaux aux surfaces de plasticité et de potentiel plastique, que l'on considère comme constants entre t et $t + dt$, à savoir :

$$\forall i \in [1, n] \quad \forall \tau \in [t, t + dt] \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{n}_{f,i}(\tau) = \frac{\frac{\partial f_i}{\partial \underline{\sigma}}(\tau)}{\left\| \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\sigma}}(\tau) \right\|} = \underline{n}_{f,i}(t) \\ \underline{n}_{g,i}(\tau) = \frac{\frac{\partial g_i}{\partial \underline{\sigma}}(\tau)}{\left\| \frac{\partial g_i}{\partial \underline{\sigma}}(\tau) \right\|} = \underline{n}_{g,i}(t) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Conséquence directe de cette seconde hypothèse, le vecteur tangent à la surface de plasticité est également constant :

$$\forall i \in [1, n] \quad \forall \tau \in [t, t + dt] \quad \underline{t}_{f,i}(\tau) = \underline{t}_{f,i}(t) \quad (3.3)$$

Sous ces hypothèses, il est alors possible de résoudre les équations du problème.

3.2.2 Mise en équation du problème

Rappelons les équations générales (2.3) et (2.4) du modèle avec les notations introduites dans le chapitre 2, valables quel que soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\varepsilon} = \sum_{i=0}^n \underline{\varepsilon}_i \quad (2.3)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_i^f + \underline{\sigma}_i^v \quad \forall i \in [1, n] \quad (2.4)$$

Rappelons également les équations de comportements des corps élémentaires élastoplastiques (EP) et visqueux (V) dans le domaine VEL, valables pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\varepsilon}_i^e = \underline{M}_i^e \underline{\sigma}_i^f \quad (3.4)$$

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^e = \underline{N}_i \underline{\sigma}_i^v \quad (3.5)$$

A partir de ces mêmes équations (cf. équations (3.4) et (3.5)), les déformations au niveau d'un corps élémentaires dans le cas VP (cf. Figure 2-3), pour tout $t \in \mathbb{R}$, sont données par :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_i = \underline{\dot{\varepsilon}}_i^e + \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p = \underline{M}_i^e \langle \underline{\dot{\sigma}}_i^f | \underline{t}_{f,i} \rangle \underline{t}_{f,i} + \frac{\| \underline{N}_i \| \underline{\sigma}_i^v(t) \cdot \underline{n}_{f,i}}{\| \underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i} \|} \underline{n}_{g,i} \quad (3.6)$$

Notons que le corps 0 est purement élastique. Son comportement est donc régi par l'équation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \underline{\varepsilon}_0^e(t) = \underline{M}_0^e \underline{\sigma}(t) \quad (3.7)$$

3.2.3 Détermination des incréments de contrainte et déformation au niveau d'un corps élémentaire

3.2.3.1 Comportement VEL

On se propose dans cette section de résoudre les équations dans le cas d'un chargement pour lequel le matériau reste dans le domaine VEL. Il convient d'abord de résoudre les équations pour déterminer les paramètres au niveau d'un corps élémentaire. Des équations (3.4) et (3.5), on déduit l'équation différentielle suivante, définie au temps $\tau \in [t; t + dt]$:

$$\underline{\dot{\sigma}}_i^f(\tau) = \zeta_i \underline{\sigma}_i^v(\tau) = \zeta_i \left(\underline{\sigma}(\tau) - \underline{\sigma}_i^f(\tau) \right) \quad (3.8)$$

Soit, en dérivant l'expression par rapport au temps :

$$\zeta_i \underline{\dot{\sigma}}_i^f(\tau) + \underline{\ddot{\sigma}}_i^f(\tau) = \zeta_i \underline{\dot{\sigma}}(\tau) \quad (3.9)$$

D'après l'hypothèse (I), on obtient alors :

$$\underline{\dot{\sigma}}_i^f(\tau) = \underline{A}_i^f \exp(-\zeta_i \tau) + \underline{\dot{\sigma}}(\tau) \quad (3.10)$$

Où \underline{A}_i^f est un tenseur d'ordre 6 constant par rapport à τ . D'après les conditions initiales au début de l'incrément de temps, on peut alors écrire :

$$\underline{\dot{\sigma}}_i^f(\tau) = \left(\underline{\dot{\sigma}}_i^f(t) - \underline{\dot{\sigma}}(t) \right) \exp(-\zeta_i(\tau - t)) + \underline{\dot{\sigma}}(\tau) \quad (3.11)$$

Prise en $\tau = t + dt$, on obtient l'expression de la contrainte non-visqueuse du corps i au temps $t + dt$, à savoir :

$$\underline{\dot{\sigma}}_i^f(t + dt) = \underline{\dot{\sigma}}_i^f(t) \exp(-\zeta_i dt) + \underline{\dot{\sigma}}(t)(1 - \exp(-\zeta_i dt)) \quad (3.12)$$

En reprenant l'équation (3.12) et en l'intégrant sur l'intervalle $[t; t + dt]$, on obtient la variation de contrainte non-visqueuse du corps i entre les temps t et $t + dt$:

$$\underline{d\sigma}_i^f = \int_t^{t+dt} \underline{\dot{\sigma}}_i^f(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

Puis :

$$\underline{d\sigma}_i^f = \underline{\dot{\sigma}}_i^f(t) dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} + \underline{\dot{\sigma}}(t) dt \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right) \quad (3.14)$$

On calcule alors l'incrément de déformation du corps i entre les temps t et $t + dt$:

$$\underline{d\varepsilon}_i^e = \underline{M}_i^e \underline{d\sigma}_i^f \quad (3.15)$$

3.2.3.2 Comportement VP

Dans le cas d'un comportement VP (*ie.* lorsque l'incrément de contrainte ou de déformation conduit à un comportement VP), il est nécessaire de distinguer les déformations élastiques et plastiques. Concernant la partie élastique, la méthode de résolution est identique à celle présentée dans la section précédente pour le cas VEL.

Partie élastique

Dans le cas VP, étant donné le choix d'une plasticité parfaite, la condition suivante doit être respectée pour tout temps t :

$$\langle \underline{\dot{\sigma}}_i^f(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle = 0 \quad (3.16)$$

D'après l'hypothèse (II), les vecteurs unitaires $\underline{n}_{f,i}(t)$ et $\underline{t}_{f,i}(t)$ sont considérés comme constants sur tout l'intervalle de temps $[t; t + dt]$. Ainsi, les équations (3.8) à (3.15) restent valides en projection sur le vecteur unitaire $\underline{t}_{f,i}(t)$. Les projections selon $\underline{n}_{f,i}(t)$ sont alors nulles et les tenseurs de contrainte et leur dérivée s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \forall \tau \in [t; t + dt] \\ & \left\{ \begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}}_i^f(\tau) &= \langle \dot{\underline{\sigma}}_i^f(\tau) | \underline{t}_{f,i}(\tau) \rangle \cdot \underline{t}_{f,i}(\tau) = \langle \dot{\underline{\sigma}}_i^f(\tau) | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle \cdot \underline{t}_{f,i}(t) \\ d\underline{\sigma}_i^f &= \langle d\underline{\sigma}_i^f | \underline{t}_{f,i}(\tau) \rangle \cdot \underline{t}_{f,i}(\tau) = \langle d\underline{\sigma}_i^f | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle \cdot \underline{t}_{f,i}(t) \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.17)$$

La résolution de ces équations donne $\forall \tau \in [t; t + dt]$:

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\underline{\sigma}}_i^f(\tau) | \underline{t}_{f,i}(\tau) \rangle \\ &= \langle \dot{\underline{\sigma}}_i^f(t) | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle \exp(-\zeta_i dt) \\ &+ \langle \dot{\underline{\sigma}}(t) | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle (1 - \exp(-\zeta_i dt)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Et :

$$\begin{aligned} \langle d\underline{\sigma}_i^f | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle &= \langle \dot{\underline{\sigma}}_i^f(t) | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \\ &+ \langle \dot{\underline{\sigma}}(t) | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle dt \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

On calcule alors l'incrément de déformation du corps i entre les temps t et $t + dt$:

$$d\underline{\varepsilon}_i^e = \langle d\underline{\sigma}_i^f | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle \underline{M}_i^e \underline{t}_{f,i}(t) \quad (3.20)$$

Partie plastique

On se propose maintenant de déterminer l'expression des déformations plastiques en partant de l'expression :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^p = \frac{\|\underline{N}_i\|}{\|\underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i}\|} \langle \underline{\sigma}_i^v(t) | \underline{n}_{f,i} \rangle \cdot \underline{n}_{g,i} \quad (3.21)$$

Dans le cas VP et pour respecter la condition donnée par l'équation (3.16), on a :

$$\langle \underline{\dot{\sigma}}_i^v(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle = \langle \underline{\dot{\sigma}}_i(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle \quad (3.22)$$

En utilisant l'hypothèse (I), on peut donc écrire :

$$\underline{\sigma}_i^v(\tau) = \underline{\sigma}_i^v(t) + (\tau - t) \langle \underline{\dot{\sigma}}_i^v(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle \cdot \underline{n}_{f,i}(t) \quad (3.23)$$

En reprenant ainsi l'expression des déformations plastique donnée par l'équation (2.14), on obtient que $\forall \tau \in [t; t + dt]$:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(\tau) &= \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(t) + \frac{\|\underline{N}_i\|}{\|\underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i}\|} (\tau - t) \langle \underline{\dot{\sigma}}_i^v(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle \cdot \underline{n}_{g,i}(t) \\ &= \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(t) + \frac{\|\underline{N}_i\|}{\|\underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i}\|} (\tau - t) \langle \underline{\dot{\sigma}}_i(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle \cdot \underline{n}_{g,i}(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Prise en $\tau = t + dt$, on obtient la dérivée des déformations plastiques au temps $t + dt$, à savoir :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(t + dt) = \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(t) + \frac{\|\underline{N}_i\|}{\|\underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i}\|} dt \langle \underline{\dot{\sigma}}_i(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle \cdot \underline{n}_{g,i}(t) \quad (3.25)$$

En intégrant l'équation (3.24), on obtient l'incrément de déformation plastique entre le temps t et $t + dt$:

$$\underline{d\varepsilon}_i^p = \int_0^{+\infty} \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

Puis :

$$\underline{d\varepsilon}_i^p = \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(t) dt + \frac{\|\underline{N}_i\|}{\|\underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i}\|} \int_0^{+\infty} (\tau - t) d\tau \langle \underline{\dot{\sigma}}_i(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle \cdot \underline{n}_{g,i}(t) \quad (3.27)$$

Soit finalement :

$$\underline{d\varepsilon}_i^p = \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(t) dt + \frac{\|\underline{N}_i\|}{\|\underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i}\|} \langle \underline{\dot{\sigma}}_i(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle \frac{dt^2}{2} \underline{n}_{g,i}(t) \quad (3.28)$$

Si on regroupe les équations (3.20) et (3.28) pour obtenir l'incrément de déformation total du corps élémentaire i entre le temps t et $t + dt$:

$$\begin{aligned}
\underline{d\varepsilon}_i &= \underline{d\varepsilon}_i^e + \underline{d\varepsilon}_i^p \\
&= \langle \underline{d\sigma}_i^f | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle \underline{M}_i^e \underline{t}_{f,i}(t) + \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(t) dt \\
&\quad + \frac{\| \underline{N}_i \|}{\| \underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i} \|} \langle \underline{\dot{\sigma}}_i(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle \frac{dt^2}{2} \underline{n}_{g,i}(t) \\
&= \left[\langle \underline{\dot{\sigma}}_i^f(t) | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right. \\
&\quad \left. + \langle \underline{\dot{\sigma}}(t) | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle dt \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right) \right] \underline{M}_i^e \underline{t}_{f,i}(t) \\
&\quad + \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(t) dt + \frac{\| \underline{N}_i \|}{\| \underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i} \|} \langle \underline{\dot{\sigma}}(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle \frac{dt^2}{2} \underline{n}_{g,i}(t)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

3.2.4 Détermination des incréments de contrainte et déformation totaux

Dans cette section, on s'intéresse maintenant à la contrainte et à la déformation totale. Pour cela, il faut combiner les équations déterminées pour chaque corps élémentaire i avec les équations générales du modèle.

3.2.4.1 Comportement VEL

Dans le cas d'un comportement VEL, les équations (2.3) et (3.4) donnent :

$$\underline{d\varepsilon} = \sum_{i=0}^n \underline{d\varepsilon}_i = \sum_{i=0}^n \underline{d\varepsilon}_i^e = \sum_{i=0}^n \underline{M}_i^e \underline{d\sigma}_i^f \tag{3.30}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\underline{d\varepsilon} &= \sum_{i=0}^n \underline{M}_i^e \left[\underline{\dot{\sigma}}_i^f(t) dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right. \\
&\quad \left. + \underline{\dot{\sigma}}(t) dt \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right) \right] \\
&= \sum_{i=0}^n \underline{\dot{\varepsilon}}_i^e(t) dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} + \underline{M}_i^e \underline{d\sigma} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \underline{d\varepsilon} &= \sum_{i=0}^n \underline{\dot{\varepsilon}}_i^e(t) dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n \underline{M}_i^e \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right) \right\} \underline{d\sigma} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Enfin :

$$\underline{d\sigma} = \underline{S}^{e-1} (\underline{d\varepsilon} - \underline{\Sigma}^e(t)) \quad (3.33)$$

Avec :

$$\underline{S}^e = \sum_{i=0}^n \underline{M}_i^e \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right) \quad (3.34)$$

$$\underline{\Sigma}^e(t) = \sum_{i=0}^n \underline{\dot{\varepsilon}}_i^e(t) dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \quad (3.35)$$

3.2.4.2 Comportement VP

Dans le cas d'un comportement VEL, les équations (2.3) et (3.4) donnent :

$$\underline{d\varepsilon} = \sum_{i=0}^n \underline{d\varepsilon}_i = \sum_{i=0}^n \underline{d\varepsilon}_i^e + \underline{d\varepsilon}_i^p = \sum_{i=0}^n \underline{M}_i^e \underline{d\sigma}_i^f + \underline{d\varepsilon}_i^p \quad (3.36)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{d\varepsilon} &= \sum_{i=0}^n \underline{M}_i^e \left[\langle \dot{\underline{\sigma}}_i^f(t) | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle \cdot \underline{t}_{f,i}(t) dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right. \\ &\quad \left. + \langle \dot{\underline{\sigma}}_i(t) | \underline{t}_{f,i}(t) \rangle \cdot \underline{t}_{f,i}(t) dt \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right) \right] \\ &\quad + \underline{\dot{\varepsilon}}_i^p(t) dt + \frac{\| \underline{N}_i \|}{\| \underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i} \|} \langle \dot{\underline{\sigma}}_i(t) | \underline{n}_{f,i}(t) \rangle \frac{dt^2}{2} \underline{n}_{g,i}(t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\underline{d\varepsilon} = & \sum_{i=0}^n \underline{\underline{M}}_i^e \left(\underline{t}_{f,i}(t) \otimes \underline{t}_{f,i}(t) \right) \dot{\underline{\varepsilon}}_i^f(t) dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \\
& + \underline{\underline{M}}_i^e \left(\underline{t}_{f,i}(t) \otimes \underline{t}_{f,i}(t) \right) \underline{d\sigma} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right) \\
& + \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p(t) dt + \frac{\|\underline{\underline{N}}_i\|}{\|\underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i}\|} \frac{dt}{2} \left(\underline{n}_{g,i}(t) \otimes \underline{n}_{f,i}(t) \right) \underline{d\sigma}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\underline{d\varepsilon} - \sum_{i=0}^n \underline{\underline{M}}_i^e \left(\underline{t}_{f,i}(t) \otimes \underline{t}_{f,i}(t) \right) \dot{\underline{\varepsilon}}_i^f(t) dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} + \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p(t) dt \\
= \left[\sum_{i=0}^n \underline{\underline{M}}_i^e \left(\underline{t}_{f,i}(t) \otimes \underline{t}_{f,i}(t) \right) \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right) \right. \\
\left. + \frac{\|\underline{\underline{N}}_i\|}{\|\underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i}\|} \frac{dt}{2} \left(\underline{n}_{g,i}(t) \otimes \underline{n}_{f,i}(t) \right) \right] \underline{d\sigma}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\underline{\underline{S}}^{ep} \underline{d\sigma} = (\underline{d\varepsilon} - \underline{\underline{\Sigma}}^{ep}(t)) \tag{3.39}$$

Avec $\underline{\underline{S}}^{ep}$ un tenseur d'ordre 4 et $\underline{\underline{\Sigma}}^{ep}(t)$ un tenseur d'ordre 2 tels que :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{S}}^{ep} = & \sum_{i=0}^n \underline{\underline{M}}_i^e \left(\underline{t}_{f,i}(t) \otimes \underline{t}_{f,i}(t) \right) \left(1 - \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} \right) \\
& + \frac{\|\underline{\underline{N}}_i\|}{\|\underline{n}_{f,i} \otimes \underline{n}_{g,i}\|} \frac{dt}{2} \left(\underline{n}_{g,i}(t) \otimes \underline{n}_{f,i}(t) \right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{ep}(t) = \sum_{i=1}^n \underline{\underline{M}}_i^e \left(\underline{\underline{t}}_{f,i}(t) \otimes \underline{\underline{t}}_{f,i}(t) \right) \underline{\underline{\dot{g}}}_i^f(t) dt \frac{1 - \exp(-\zeta_i dt)}{\zeta_i dt} + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_i^p(t) dt \quad (3.41)$$

3.3 Algorithme de résolution

Cette partie porte sur l'implémentation du modèle dans un code de calcul par incrémentation. Après avoir présenté les grandeurs caractéristiques du modèle qui doivent être actualisées à chaque incrémentation, sont détaillés les algorithmes des différents codes de calcul développés, avec pour chacun :

- L'initialisation des grandeurs,
- Le processus d'actualisation des paramètres pour un incrément de temps donné,

Enfin, le processus de sous-incrémentation, identique dans tous les codes de calcul et permettant de vérifier la convergence des calculs, est développé et détaillé.

L'ensemble des algorithmes présentés dans cette section ont été implémentés sous Matlab®. Les codes de calcul complets sont consultables en Annexe 7.2.

Pour faciliter la compréhension des algorithmes, la Figure 3-1 présente l'ensemble des symboles utilisés dans les algorithmes ainsi que leur définition.

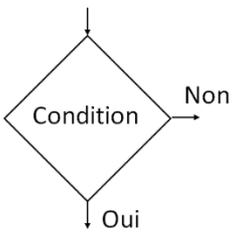
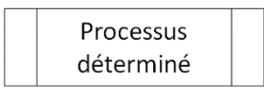
Symbole	Action
	Entrée ou sortie dans l'algorithme, précise les variables d'entrée ou de sortie
	Partie exécutive : préparation du traitement, traitement algorithmique ou édition des résultats
	Traitement conditionnel
	Sous programme déjà défini

Figure 3-1 : Définition des symboles utilisés dans les algorigrammes.

3.3.1 Grandeurs du modèle DBN_{EPPi} déterminées pendant les modélisations

Le modèle DBN fait intervenir un nombre important de grandeurs. Le Tableau 3-1 résume l'ensemble des grandeurs variables, avec leur dimension, leur nom dans le code de calcul et leur unité. Elles doivent être toutes définies pour chaque incrément de temps. Le Tableau 3-2 regroupe quant à lui l'ensemble des grandeurs constantes du modèle, avec leur dimension, leur nom dans le code de calcul et leur unité.

Les grandeurs portant l'index i sont définies pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ où n est le nombre de corps élémentaires du modèle DBN.

Ces grandeurs sont ainsi déterminées par incréments successives, en fonction du type de sollicitations appliquées. Dans toute la suite de ce chapitre, la température $T(t)$ est supposée connue à tout instant $t \geq 0$. Les 3 paragraphes suivants décrivent les algorithmes de résolution en fonction des 3 types de sollicitations envisagées :

- contrainte $\underline{\sigma}$ imposée,
- déformation $\underline{\varepsilon}$ imposée,
- déformation ε_{ii} imposée suivant un axe et contrainte imposée suivant les 5 autres axes $(\sigma_{jk})_{(j,k) \neq (i,i)}$.

Tableau 3-1 : Liste des grandeurs variables du modèle DBN_{EPPI}.

Grandeur	Dimension	Nom de la variable	Unité
Déformation du corps 0 $\underline{\varepsilon}_0$	6x1	<i>strain0</i>	<i>m/m</i>
Contrainte non visqueuse du corps <i>i</i> $\underline{\sigma}_i^f$	6x1	<i>stress_f</i>	<i>MPa</i>
Dérivée de la contrainte non visqueuse du corps <i>i</i> $\underline{\dot{\sigma}}_i^f$	6x1	<i>dstressdt_f</i>	<i>MPa.s⁻¹</i>
Déformation élastique du corps <i>i</i> $\underline{\varepsilon}_i^e$	6x1	<i>strain_e</i>	<i>m/m</i>
Dérivée de la déformation élastique du corps <i>i</i> $\underline{\dot{\varepsilon}}_i^e$	6x1	<i>dstraindt_e</i>	<i>m/m.s⁻¹</i>
Déformation plastique du corps <i>i</i> $\underline{\varepsilon}_i^p$	6x1	<i>strain_p</i>	<i>m/m</i>
Dérivée de la déformation plastique du corps <i>i</i> $\underline{\dot{\varepsilon}}_i^p$	6x1	<i>dstraindt_p</i>	<i>m/m.s⁻¹</i>
Type de comportement du corps <i>i</i> (VEL ou VP)	1x1	<i>isVEL(i)</i>	<i>booléen</i>
Vecteur unitaire normal à la surface de plasticité du corps <i>i</i> $\underline{n}_{f,i}$	6x1	<i>nf</i>	-
Vecteur unitaire tangentiel à la surface de plasticité du corps <i>i</i> $\underline{t}_{f,i}$	6x1	<i>tf</i>	-
Vecteur unitaire normal à la surface de potentiel plastique du corps <i>i</i> $\underline{n}_{g,i}$	6x1	<i>ng</i>	-
Contrainte totale $\underline{\sigma}$	6x1	<i>stress</i>	<i>MPa</i>
Déformation élastique totale $\underline{\varepsilon}^e$	6x1	<i>total_strain_e</i>	<i>m/m</i>
Déformation plastique totale $\underline{\varepsilon}^p$	6x1	<i>total_strain_p</i>	<i>m/m</i>
Déformation totale $\underline{\varepsilon}$	6x1	<i>total_strain</i>	<i>m/m</i>
Température T	1x1	<i>TEMP</i>	<i>°C</i>

Tableau 3-2 : Liste des grandeurs constantes du modèle DBN_{EPPI} .

Grandeur	Dimension	Nom de la variable	Unité
Nombre de corps élémentaires du modèle DBN	1	$n_DBN_elements$	-
Temps de calcul final	1	$TMAX$	S
Incrément de calcul définit par l'utilisateur dt	1	dt	S
Temps de calcul courant T	1	T	S
Incrément de calcul courant DT	1	DT	S
Modules E_i des corps EP_i	$n_DBN_elements \times 1$	E_DBN	MPa
Coefficients de Poisson ν_i des corps EP_i	1	ν_DBN	-
Viscosités η_i des corps V_i	$n_DBN_elements \times 1$	n_DBN	MPa.s
Module E_0 du corps 0	1	$E0_DBN$	MPa
Coefficient de Poisson ν_0 du corps 0	1	$V0_DBN$	-
Matrice d'élasticité $\underline{\underline{M}}_i^e$ du corps i	$n_DBN_elements \times (6 \times 6)$	M_elast	
Matrice d'élasticité $\underline{\underline{M}}_0^e$ du corps 0	6×6	M_elast0	
Constante WLF n°1	1	$C1$	-
Constante WLF n°2	1	$C2$	°C
Température de référence	1	$TREF$	°C
Sommets des surfaces de plasticité des cones traction	$n_DBN_elements \times 1$	$l1t$	MPa
Sommets des surfaces de plasticité des cones compression	$n_DBN_elements \times 1$	$l1c$	MPa
Plan d'intersection des cones	$n_DBN_elements \times 1$	lp	MPa
Facteur de forme des surfaces de plasticité	$n_DBN_elements \times 1$	Ls	-
Facteur de forme des surfaces de potentiel plastique	$n_DBN_elements \times 1$	Lsg	-

Ouvertures des cones traction	$n_DBN_elements \times 1$	Rt	MPa
Ouvertures des cones compression	$n_DBN_elements \times 1$	Rc	MPa
Ouvertures du cone des surfaces de potential plastique	$n_DBN_elements \times 1$	Rg	MPa

3.3.2 Détermination de la déformation résultante d'une contrainte imposée

L'algorithme détaillé dans cette partie permet de déterminer la réponse en déformation $\underline{\varepsilon}$ à une sollicitation en contrainte $\underline{\sigma}$ du matériau. Le tenseur $\underline{\sigma}(t)$ est donc supposée connu.

3.3.2.1 Initialisation

La procédure d'initialisation permet de déterminer la valeur de l'ensemble des paramètres du modèle DBN_{EPP} au temps $t = 0$, connaissant $\underline{\sigma}(0)$ et $T(0)$. Le Tableau 3-3 résume l'ensemble de ces valeurs, basées sur les équations constitutives du modèle.

3.3.2.2 Incrémentation

L'algorithme d'incrémentaion a pour arguments :

- le temps T correspondant au début de l'incrément,
- le pas de temps DT correspondant à l'incrément de temps de calcul,
- les paramètres du modèle (éventuellement actualisé au temps T),
- l'ensemble des grandeurs du modèle décrites dans le *Tableau 3-1* au temps T .

Et il renvoie :

- l'ensemble des grandeurs du modèle décrites dans le *Tableau 3-1* au temps $T + DT$.

Ici, comme dans toute la suite, on utilise des lettres majuscules (T, DT) pour désigner les temps auxquels s'effectue le calcul. Les lettre minuscules (t, dt) désigne quant à eux les paramètres imposés par l'utilisateur. On a $T = t$ et $DT = dt$ dans les cas où l'algorithme de calcul n'a pas recours à des sous-incrémentaions.

Tableau 3-3 : Valeur initiale des paramètres du modèle DBN_{EPP1}
dans le cas d'une sollicitation en contrainte.

Grandeur	Valeur initiale
$\underline{\varepsilon}_0$	$\underline{M}_0^e \underline{\sigma}(0)$
$\underline{\sigma}_i^f$	$\underline{0}$
$\underline{\dot{\sigma}}_i^f$	$\underline{M}_i^e \underline{\sigma}(0)$
$\underline{\varepsilon}_i^e$	$\underline{0}$
$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^e$	$\underline{N}_i \underline{\sigma}(0)$
$\underline{\varepsilon}_i^p$	$\underline{0}$
$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^p$	$\underline{0}$
$isVEL(t)$	1
$\underline{n}_{f,i}$	$\underline{0}$
$\underline{t}_{f,i}$	$\underline{0}$
$\underline{n}_{g,i}$	$\underline{0}$
$\underline{\sigma}$	$\underline{\sigma}(0)$
$\underline{\varepsilon}^e$	$\underline{M}_0^e \underline{\sigma}(0)$
$\underline{\varepsilon}^p$	$\underline{0}$
$\underline{\varepsilon}$	$\underline{M}_0^e \underline{\sigma}(0)$

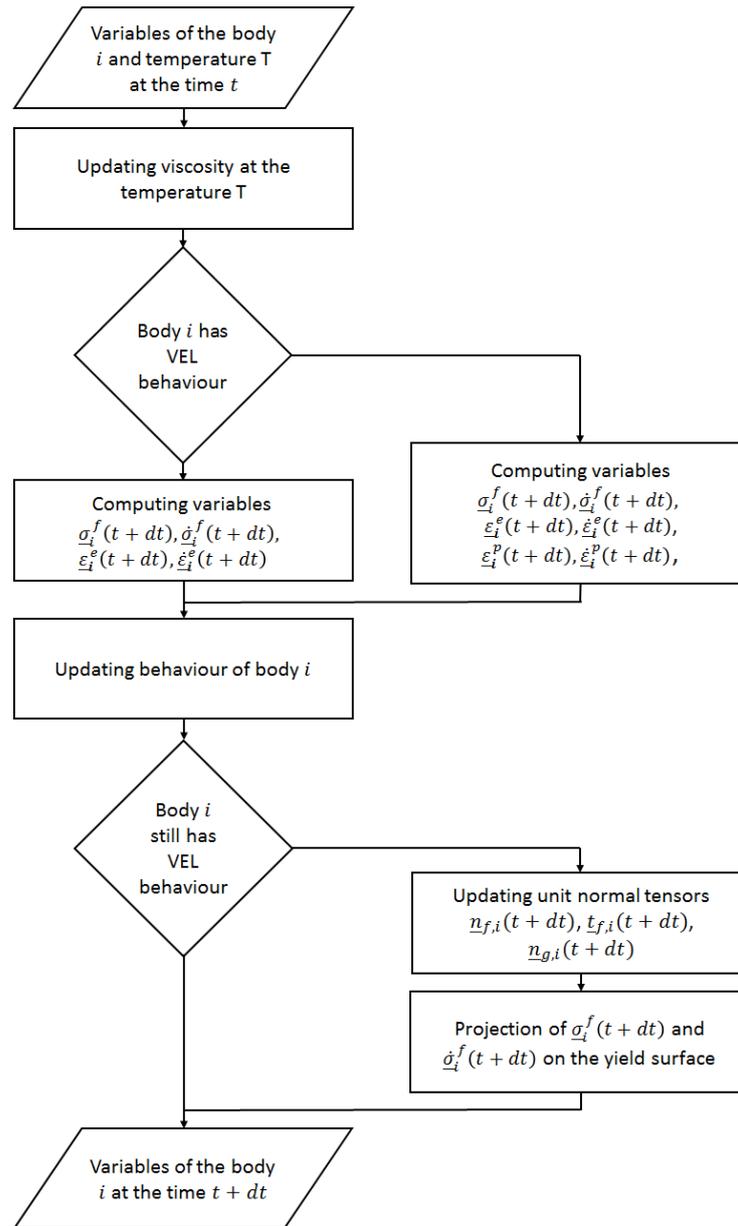


Figure 3-2 : Algorithme de détermination de l'incrément de déformation résultant d'un incrément de contrainte.

3.3.3 Détermination de la contrainte résultante d'une déformation imposée

L'algorithme détaillé dans cette partie permet de déterminer la réponse en contrainte $\underline{\sigma}$ à une sollicitation en déformation $\underline{\varepsilon}$ du matériau. Le tenseur $\underline{\varepsilon}(t)$ est donc supposé connu.

3.3.3.1 Initialisation

La procédure d'initialisation permet de déterminer la valeur de l'ensemble des paramètres du modèle DBN_{EPPi} au temps $t = 0$, connaissant $\underline{\varepsilon}(0)$ et $T(0)$. Le Tableau 3-4 résume l'ensemble de ces valeurs, basées sur les équations constitutives du modèle.

Tableau 3-4 : Valeur initiale des paramètres du modèle DBN_{EPP} dans le cas d'une sollicitation en déformation.

Grandeur	Valeur initiale
$\underline{\varepsilon}_0$	$\underline{\varepsilon}(0)$
$\underline{\sigma}_i^f$	$\underline{0}$
$\underline{\dot{\sigma}}_i^f$	$\underline{M}_i^e \left(\underline{M}_0^e \right)^{-1} \underline{\varepsilon}(0)$
$\underline{\varepsilon}_i^e$	$\underline{0}$
$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^e$	$\underline{N}_i \left(\underline{M}_0^e \right)^{-1} \underline{\varepsilon}(0)$
$\underline{\varepsilon}_i^p$	$\underline{0}$
$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^p$	$\underline{0}$
$isVEL(i)$	1
$\underline{n}_{f,i}$	$\underline{0}$
$\underline{t}_{f,i}$	$\underline{0}$
$\underline{n}_{g,i}$	$\underline{0}$
$\underline{\sigma}$	$\left(\underline{M}_0^e \right)^{-1} \underline{\varepsilon}(0)$
$\underline{\varepsilon}^e$	$\underline{\varepsilon}(0)$
$\underline{\varepsilon}^p$	$\underline{0}$
$\underline{\varepsilon}$	$\underline{\varepsilon}(0)$

3.3.3.2 Incrémentation

L'algorithme d'incrémentation a pour arguments :

- le temps T correspondant au début de l'incrément,
- le pas de temps DT correspondant à l'incrément de temps de calcul,
- les paramètres du modèle pour tous les corps i (éventuellement actualisé au temps T),
- l'ensemble des grandeurs du modèle, pour tous les corps i , décrites dans le *Tableau 3-1* au temps T .

Et il renvoie :

- l'ensemble des grandeurs du modèle décrites dans le *Tableau 3-1* au temps $T + DT$ pour tous les corps i .

L'algorithme est détaillé dans la Figure 3-3.

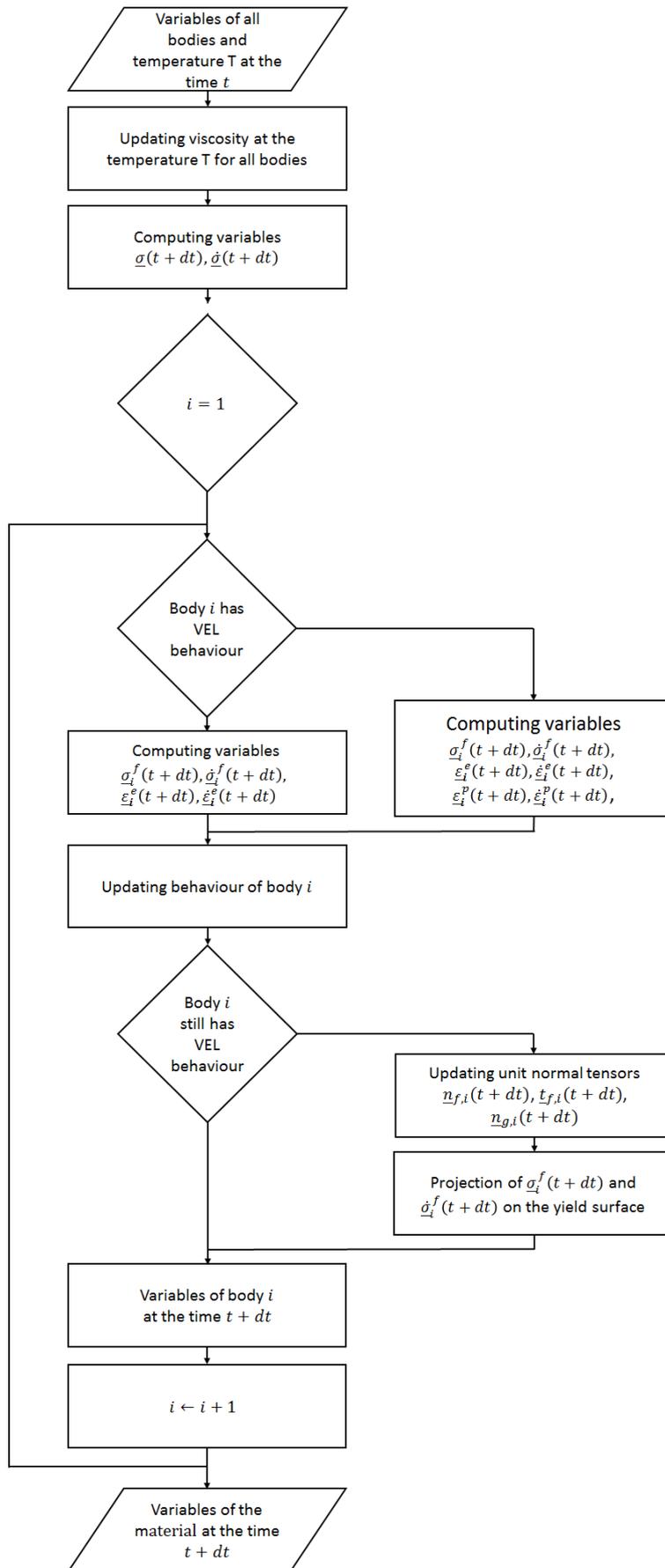


Figure 3-3 :
 Algorithme de
 détermination de
 l'incrément de
 contrainte
 résultante d'un
 incrément de
 déformation.

3.3.4 Résolution dans le cas d'une sollicitation mixte

Il s'agit ici de décrire l'algorithme dans le cas d'un chargement uni-axial en déformation avec sollicitations en contrainte dans les autres directions.

L'algorithme détaillé dans cette partie permet de déterminer la réponse du matériau en contrainte suivant l'axe $k \in \{1; 2; 3\}$ et en déformation suivant les autres directions à une sollicitation en déformation suivant l'axe $k \in \{1; 2; 3\}$ et en contrainte suivant les autres directions. La sollicitation, en déformation suivant l'axe $k \in \{1; 2; 3\}$ et en contrainte suivant les autres directions, est supposée connue pour tout $t \geq 0$ et donnée par les fonctions notées :

$$\begin{cases} \varepsilon_{kk}(t) \\ \sigma_{lm}(t) \text{ avec } (l, m) \neq (k, k) \end{cases} \quad (3.42)$$

L'algorithme de calcul de la réponse en déformation à une contrainte donnée est ici réutilisé. Pour définir clairement la procédure de calcul, la fonction associée à cet algorithme (définie dans la section 3.3.2) sera notée \mathcal{F} . La réponse en déformation $\underline{\varepsilon}(t)$ au temps t , à une sollicitation en contrainte $\underline{\sigma}(\tau)$ pour $\tau \in [0; t]$ sera alors notée :

$$\underline{\varepsilon}(t) = \mathcal{F}(\underline{\sigma}(\tau), t) \quad (3.43)$$

3.3.4.1 Initialisation

La procédure d'initialisation permet de déterminer la valeur de l'ensemble des paramètres du modèle DBN_{EPPI} au temps $t = 0$, connaissant $\varepsilon_{kk}(0)$, $\sigma_{lm}(0)$ avec $(l, m) \neq (k, k)$ et $T(0)$. Il s'agit donc dans un premier temps de déterminer les composantes complémentaires des tenseurs des contraintes et des déformations, à savoir les $\varepsilon_{lm}(0)$ avec $(l, m) \neq (k, k)$ et la valeur $\sigma_{kk}(0)$. Au temps 0, les relations classiques d'élasticité linéaire isotrope appliquées au ressort de rigidité E_0 et de coefficient de Poisson ν_0 donnent (tous les autres corps étant à déformation nulle à $t = 0$, du fait de la présence d'un amortisseur en parallèle du corps EP_i) :

$$\varepsilon_{kk}(0) = \frac{1 + \nu_0}{E_0} \sigma_{kk}(0) - \frac{\nu_0}{E_0} \sum_{j=1}^3 \sigma_{jj}(0) \quad (3.44)$$

Soit :

$$\sigma_{kk}(0) = E_0 \varepsilon_{kk}(0) - \nu_0 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^3 \sigma_{jj}(0) \quad (3.45)$$

Ainsi le tenseur $\underline{\sigma}$ est entièrement déterminé et le tenseur des déformations $\underline{\varepsilon}$ est donné par :

$$\underline{\varepsilon}(0) = \frac{1 + \nu_0}{E_0} \underline{\sigma}(0) - \frac{\nu_0}{E_0} \text{tr}(\underline{\sigma}(0)) \quad (3.46)$$

Pour les autres grandeurs du modèle, leur calcul est similaire à ceux effectués dans le cadre d'une sollicitation purement en contrainte ou en déformation. Le Tableau 3-5 résume l'ensemble de ces valeurs, basées sur les équations constitutives du modèle.

Tableau 3-5 : Valeur initiale des paramètres du modèle DBN_{EPPI} dans le cas d'une sollicitation mixte.

Grandeur	Valeur initiale
$\underline{\varepsilon}_0$	$\underline{\varepsilon}(0)$
$\underline{\sigma}_i^f$	$\underline{0}$
$\underline{\dot{\sigma}}_i^f$	$\underline{M}_i^e \left(\underline{M}_0^e \right)^{-1} \underline{\varepsilon}(0)$
$\underline{\varepsilon}_i^e$	$\underline{0}$
$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^e$	$\underline{M}_i^e \left(\underline{M}_0^e \right)^{-1} \underline{\varepsilon}(0)$
$\underline{\varepsilon}_i^p$	$\underline{0}$
$\underline{\dot{\varepsilon}}_i^p$	$\underline{0}$
$isVEL(i)$	1
$\underline{n}_{f,i}$	$\underline{0}$
$\underline{t}_{f,i}$	$\underline{0}$
$\underline{n}_{g,i}$	$\underline{0}$
$\underline{\varepsilon}^e$	$\underline{\varepsilon}(0)$
$\underline{\varepsilon}^p$	$\underline{0}$

3.3.4.2 Incrémentation

La procédure d'incrémentation permet de déterminer la réponse en contrainte suivant l'axe $k \in \{1; 2; 3\}$ et en déformation suivant les autres directions. La sollicitation, en déformation suivant l'axe $k \in \{1; 2; 3\}$ et en contrainte suivant les autres directions, est supposée connue pour tout $t \geq 0$ et donnée par les fonctions notées :

$$\begin{cases} \varepsilon_{kk}(t) \\ \sigma_{lm}(t) \text{ avec } (l, m) \neq (k, k) \end{cases} \quad (3.47)$$

L'algorithme d'incrémentation a pour arguments :

- Le temps T correspondant au début de l'incrément,
- Le pas de temps DT correspondant à l'incrément de temps de calcul,
- Les paramètres du modèle pour tous les corps i (éventuellement actualisé au temps T),
- L'ensemble des grandeurs du modèle, pour tous des corps i , décrites dans le *Tableau 3-1* au temps T .

Et il renvoie :

- L'ensemble des grandeurs du modèle décrites dans le *Tableau 3-1* au temps $T + DT$ pour tous les corps i , avec en particulier la composante $\sigma_{kk}(T)$ du tenseur des contraintes et les composantes $\varepsilon_{lm}(t)$ avec $(l, m) \neq (k, k)$.

L'incrémentation intègre une récurrence sur la fonction \mathcal{F} permettant de converger vers les valeurs de composantes recherchées. En effet, les composantes $\varepsilon_{lm}(t)$ avec $(l, m) \neq (k, k)$ du tenseur des déformations et la composante $\sigma_{kk}(T)$ du tenseur des contraintes sont déterminées en appliquant la méthode de la sécante de manière récursive, jusqu'à la convergence. Pour cela, deux suites sont définies, l'une sur les valeurs de la composante $\sigma_{kk}(T + DT)$ dont la limite est recherchée :

$$\left(\sigma_{kk}^j(T + DT) \right)_{j \in \mathbb{N}} \quad (3.48)$$

Et une seconde sur les valeurs de la composante $\varepsilon_{kk}(T + DT)$:

$$\left(\varepsilon_{kk}^j(T + DT) \right)_{j \in \mathbb{N}} \quad (3.49)$$

La méthode de la sécante est une méthode dérivée de celle de Newton qui permet de déterminer la racine d'une fonction d'une variable réelle. La relation de récurrence est donnée par :

$$\sigma_{kk}^{j+1}(T + DT) = \sigma_{kk}^j(T + DT) + \frac{\sigma_{kk}^j(T + DT) - \sigma_{kk}^{j-1}(T + DT)}{\varepsilon_{kk}^j(T + DT) - \varepsilon_{kk}^{j-1}(T + DT)} [\varepsilon_{kk}(T + DT) - \varepsilon_{kk}^j(T + DT)] \quad (3.50)$$

Il convient alors de définir un critère de convergence pour lequel la récurrence s'arrête. Ce critère est donné par :

$$| \varepsilon_{kk}^j(T + DT) - \varepsilon_{kk}(T + DT) | \leq \varepsilon^{lim} \quad (3.51)$$

Où ε^{lim} est l'erreur maximale tolérée entre la déformation imposée $\varepsilon_{kk}(T + DT)$ et la déformation calculée $\varepsilon_{kk}^j(T + DT)$ en considérant une contrainte égale à $\sigma_{kk}^j(T + DT)$.

Lorsque ce critère est atteint pour $j = N \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque $| \varepsilon_{kk}^N(T + DT) - \varepsilon_{kk}(T + DT) | \leq \varepsilon^{lim}$, sont alors déterminées :

- la composante $\sigma_{kk}(T + DT)$ du tenseur des contraintes qui prend la valeur $\sigma_{kk}^N(T + DT)$,
- les composantes $\varepsilon_{lm}(T + TD)$ avec $(l, m) \neq (k, k)$ qui prennent les valeurs respectives $\varepsilon_{lm}^N(T + TD)$ correspondant aux composantes du tenseur des déformations calculé à partir d'une sollicitation en contrainte donnée par $\sigma_{kk}(T + DT)$,
- Toutes les grandeurs du modèle au temps $T + DT$, calculées à partir d'une sollicitation en contrainte donnée par $\sigma_{kk}(T + DT)$.

L'algorithme ainsi décrit est détaillé dans la Figure 3-4.

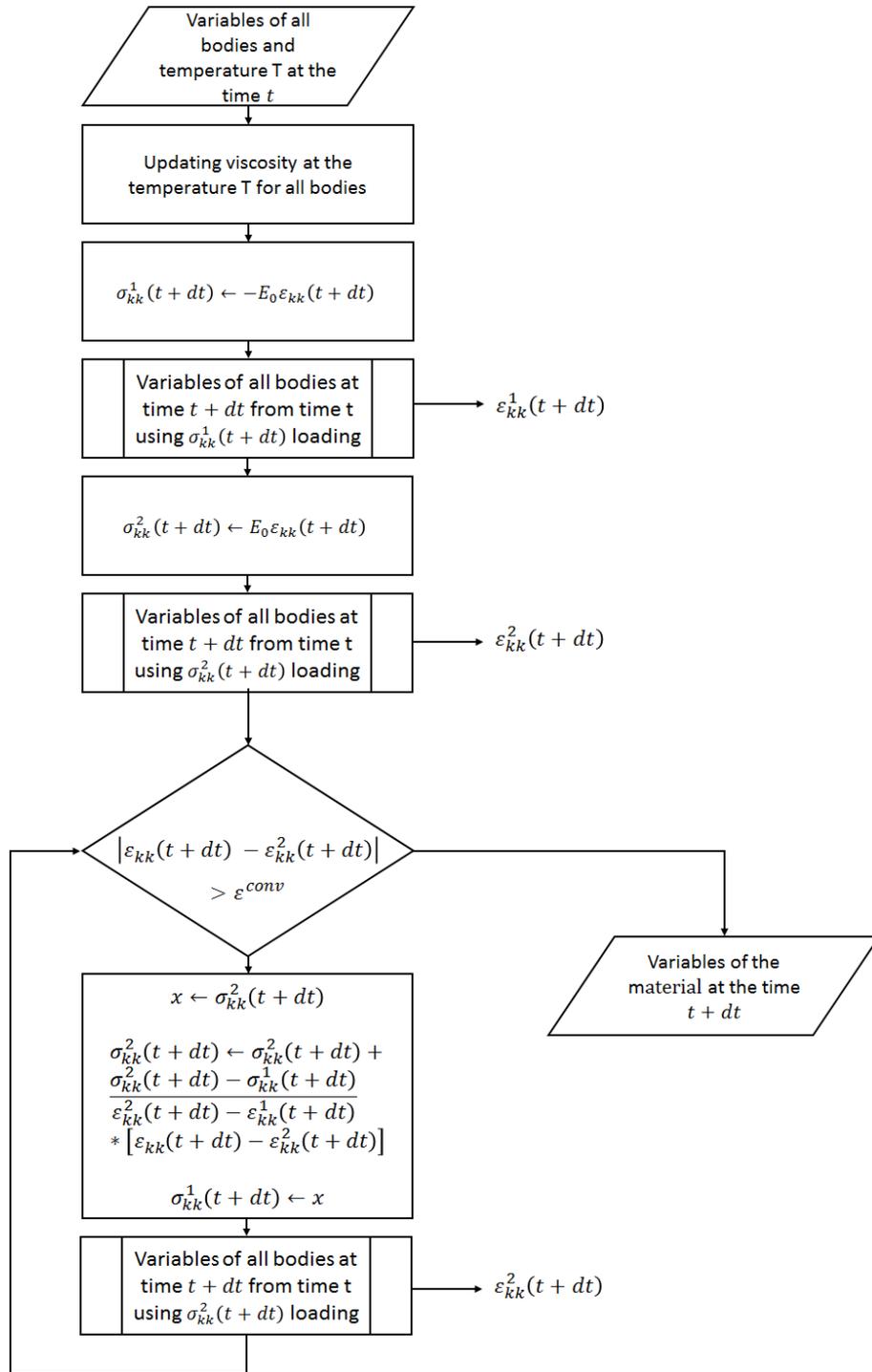


Figure 3-4 : Algorithme de détermination de la réponse à une sollicitation mixte

3.3.5 Convergence et sous-incrémentation

3.3.5.1 Généralités

Les différents sous-algorithmes, permettant de déterminer les variables du modèle sous différentes sollicitations (contrainte, déformation, mixte), étant désormais connus, il convient de définir un critère de convergence permettant d'assurer la convergence des calculs vers la solution recherchée. La convergence des calculs est principalement dépendante de l'incrément de temps DT choisi. Ainsi plus cet incrément sera important au regard de la vitesse de variation des différentes grandeurs et des sollicitations, plus l'écart entre la simulation et la solution sera important. Une procédure de sous-incrémentation permet de s'assurer que les calculs des sous-algorithmes donnent des résultats proches de la solution. Cette procédure permet :

- D'une part de vérifier la convergence des calculs vers la solution recherchée
- D'autre part de sous-incrémenter, c'est-à-dire de relancer les calculs à partir d'incrément de temps plus petits afin de converger vers la solution réelle.

3.3.5.2 Procédure de vérification de la convergence des calculs et sous-incrémentation

Soit $\underline{s}(t)$ la sollicitation imposée au matériau. Cette sollicitation peut être de plusieurs natures : contrainte, déformation ou mixte. Soit $\underline{r}(t)$ la réponse du matériau à la sollicitation $\underline{s}(t)$. Cette réponse peut également être de natures différentes en fonction de la sollicitation. Soit t un temps fixé quelconque et dt un incrément de temps, les paramètres du modèle et ses grandeurs sont supposées connues au temps t .

L'objectif est donc, connaissant $\underline{s}(t)$ et $\underline{s}(t + dt)$ en sollicitation et $\underline{r}(t)$ en réponse, de déterminer $\underline{r}(t + dt)$.

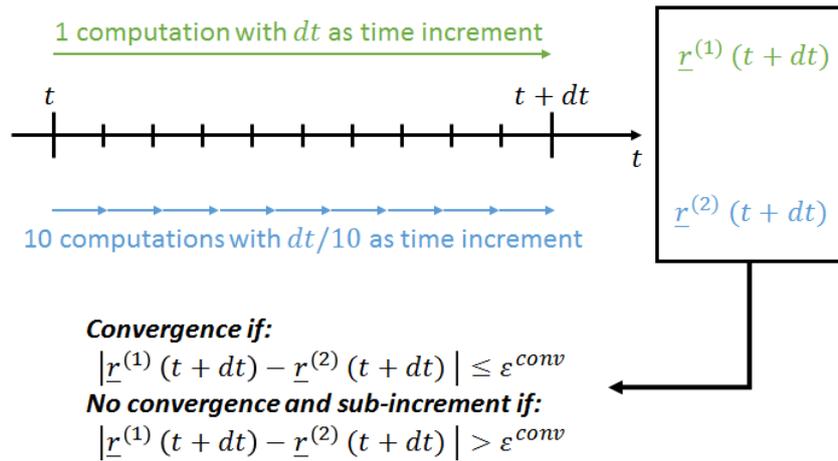


Figure 3-5 : Représentation du processus de vérification de convergence et de sous-incrémentation.

Afin de valider la convergence, pour chaque calcul de réponse à une sollicitation donnée, la vérification suivante est faite (cf. Figure 3-5) :

- **Etape 1**
Calcul de $\underline{r}^{(1)}(t + dt)$ en utilisant 1 incrémentation de pas de temps dt
- **Etape 2**
Calcul de $\underline{r}^{(2)}(t + dt)$ en utilisant 10 incrémentations de pas de temps $\frac{dt}{10}$
- **Etape 3**
Comparaison des solutions $\underline{r}^{(1)}(t + dt)$ et $\underline{r}^{(2)}(t + dt)$ en fonction d'un critère de convergence ε^{conv} :

$$|\underline{r}^{(1)}(t + dt) - \underline{r}^{(2)}(t + dt)| \leq \varepsilon^{conv} \quad (3.52)$$

Si à l'issue de ce processus le critère de convergence est respecté, la solution $\underline{r}(t + dt)$ est supposée égale à $\underline{r}^{(2)}(t + dt)$. Dans le cas contraire, le processus est relancé avec un pas de temps égal à $\frac{dt}{10}$ et une éventuelle nouvelle sous-incrémentation dans le cas d'une non-convergence. La Figure 3-6 présente ce processus sous la forme d'un algorithme.

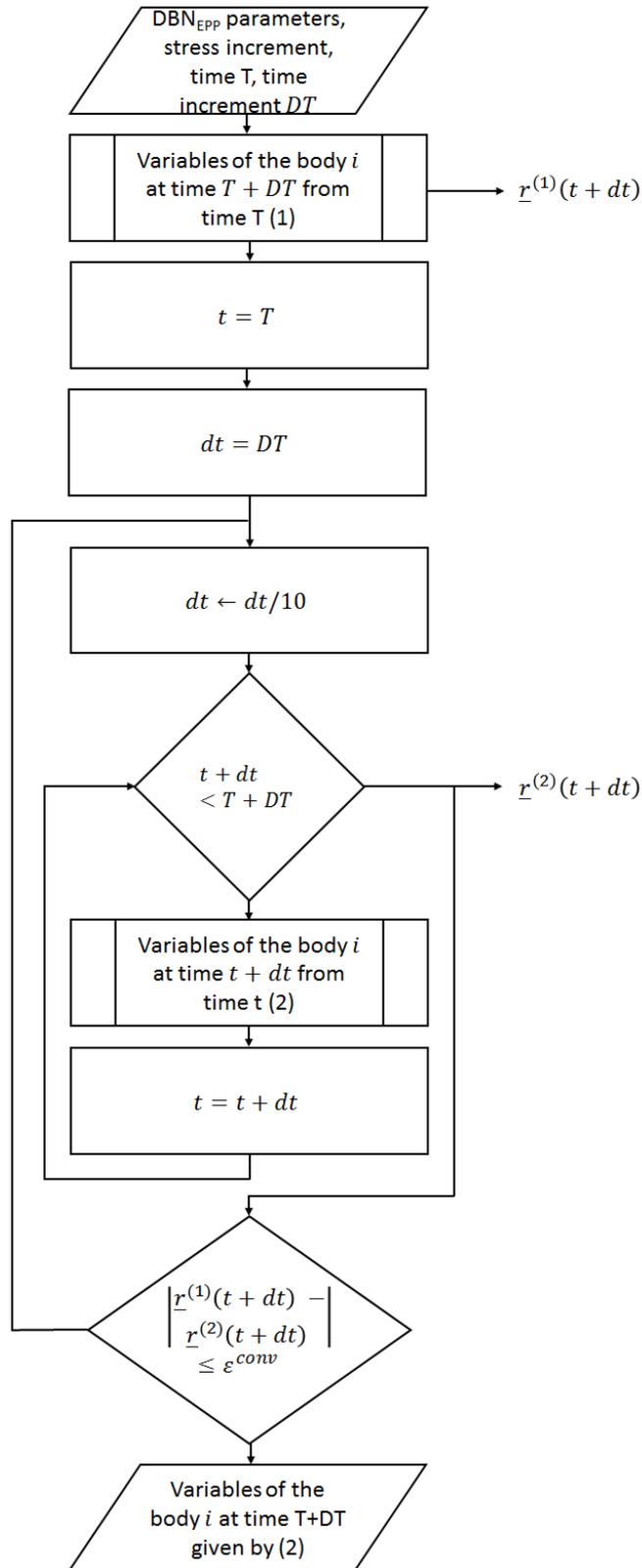


Figure 3-6 : Algorithme de détermination de l'incrément de déformation résultant d'un incrément de contrainte avec critère de convergence et sous-incrémentation.

3.3.6 Fonctions communes aux 3 algorithmes de calcul

Un certain nombre de fonctions secondaires ont été développées et intégrées aux codes de calculs présentés précédemment. La description, l'algorithme et le code Matlab® de chacun de ces fonctions sont détaillés dans l'Annexe 7.2.6.

- Calcul des invariants et des tenseurs déviatoriques
- Produit scalaire, produit tensoriel et produit matriciel
- Calcul de la norme des tenseurs d'ordre 2 et 4
- Projection d'un tenseur d'ordre 2 sur la surface de plasticité
- Projection d'un tenseur d'ordre 2 sur la surface de potentiel plastique
- Calcul des vecteurs unitaires normaux et tangent à la surface de plasticité
- Calcul du vecteur unitaire normal à la surface de potentiel plastique
- Calcul de l'écart entre deux tenseurs d'ordre 2
- Fonctions annexes pour la création, l'enregistrement et l'exploitation des données

3.4 Développement d'un programme autonome de modélisation d'essai homogène

Le programme présenté dans cette section a été développé sous Matlab®. Les codes sont disponibles en Annexe 7.2.

3.4.1 Structure générale du programme

Le programme se décompose en 3 volets principaux (cf. Figure 3-7) :

- **Calibration** qui permet de calibrer le modèle DBN_{EPP} dans les domaines viscoélastique et viscoplastique à partir des modèles 2S2P1D et du modèle de fluage viscoplastique de Di Benedetto. Il offre en outre la possibilité de choisir le nombre de corps du modèle $DBNEPP$ et l'intervalle de fréquence de calibration. Les données sont exportables dans un fichier Excel®. Il est également possible de représenter les grandeurs caractéristiques des différents modèles afin de comparer les calibrations et d'exporter tous les graphiques dans des fichiers image.
- **Modélisation** dans lequel l'utilisateur peut choisir le type de sollicitation ainsi que sa forme. Les paramètres de modélisation (incrément de temps, temps total de modélisation, critère de convergence) sont également modifiables.

- **Exploitation des résultats** qui permet de représenter les différentes grandeurs du modèle en fonction du temps et d'exporter les résultats sous Excel® ou sous forme de fichier image.



Figure 3-7 : Structure générale du programme de calibration et de modélisation utilisant la version EPPI du modèle DBN.

Il est également possible de naviguer entre les différents volets afin de pouvoir modifier la calibration ou la sollicitation en fonction du besoin de l'utilisateur. Les sections qui suivent présentent et détaillent les fonctionnalités de chacun des volets.

3.4.2 Calibration du modèle DBN

3.4.2.1 Calibration du modèle DBN dans les domaines VEL et VP

Après le lancement du programme, le premier volet s'affiche à l'écran (cf. Figure 3-8). Il s'agit du volet de calibration du modèle. Dans la catégorie « Calibration and parameters of the modeling », l'utilisateur peut alors renseigner l'ensemble des paramètres nécessaires à la calibration. Le bouton « Calibrate EPPI version of the DBN model » permet de lancer la calibration du modèle. La procédure de calibration suit celle détaillée dans la section 2.5.4.

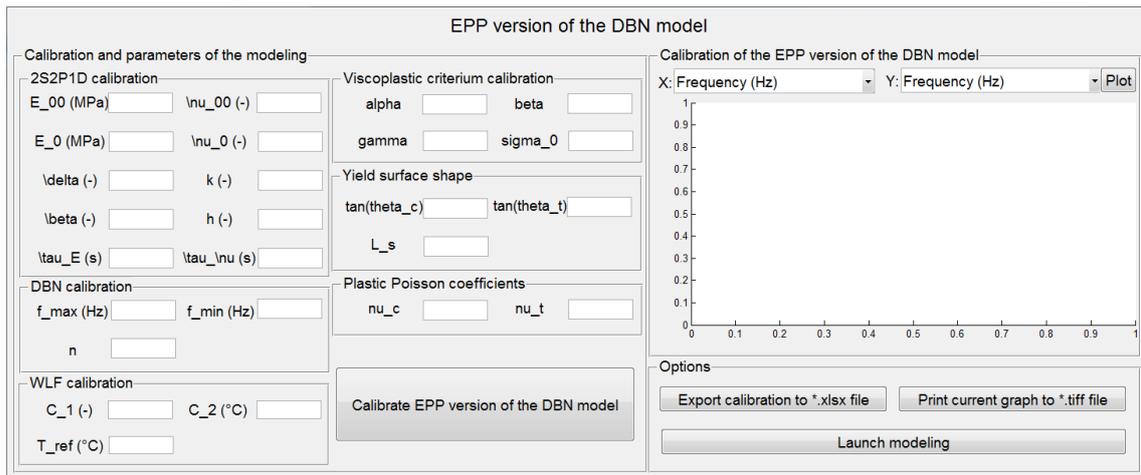


Figure 3-8 : Volet de sélection de la calibration de la version EPPI du modèle DBN.

3.4.2.2 Affichage des résultats

Dans la catégorie « Calibration of the EPPI model of the DBN model », l'utilisateur a accès à l'ensemble des représentations classiques concernant les grandeurs caractéristiques du modèle, à partir des données suivantes :

- Fréquence (Hz)
- Norme du module complexe (MPa)
- Angle de phase du module complexe (°)
- Partie réelle du module complexe (MPa)
- Partie imaginaire du module complexe (MPa)
- Norme du coefficient de Poisson complexe (-)
- Angle de phase du coefficient de Poisson complexe (°)
- Partie réelle du coefficient de Poisson complexe (-)
- Partie imaginaire du coefficient de Poisson complexe (-)
- Vitesse de déformation ($\mu\text{def/s}$)
- Contrainte maximale (MPa)

En sélectionnant les données pour chacun des axes X et Y, l'utilisateur peut alors représenter n'importe quelle variable en fonction d'une autre. Pour tous les graphes, les données sont affichées pour la version EPPI du modèle DBN et le modèle ayant permis sa calibration.

3.4.2.3 Exportation des résultats

Dans un fichier Excel®

Les résultats de la calibration de la version EPPI du modèle DBN sont exportables dans un fichier Excel® en cliquant sur le bouton « Export calibration to *.xlsx file » du panneau « Options ». L'ensemble des données ayant servies à la calibration, ainsi que les paramètres du modèle sont alors sauvegardés dans un classeur dans le dossier d'installation du programme.

Dans un fichier image

Les graphes tracés à l'aide de l'outil graphique peuvent être exportés sous un format image (*.tiff) en cliquant sur le bouton « Print current graph to *.tiff file » du panneau « Option ». L'image est sauvegardée dans le dossier d'installation du programme sous le nom générique « FIG-*'Nom de la série des X' above 'Nom de la série des Y'.tiff* ».

3.4.3 Sélection de la sollicitation

Dans ce volet (*cf.* Figure 3-9), l'utilisateur choisit d'abord les paramètres temporels de la modélisation (incrément de temps, durée et critère de convergence) dans le panneau « Modeling parameters », puis le type de sollicitation (contrainte, déformation ou mixte) dans le panneau « Type of loading ».

Dans le panneau « Loading », l'utilisateur est invité à définir les sollicitations mécaniques selon les 6 axes. Il peut au choix :

- utiliser des données importées à partir d'un classeur excel (un classeur vierge peut en outre être édité afin que les données respectent le format demandé),
- ou, définir des fonctions pour chaque axe de sollicitation.

Il est en outre nécessaire de définir la température.

Dans le programme, les unités des différentes grandeurs sont : *MPa* pour les contraintes, *def = m/m* pour les déformations et *°C* pour les températures.

Lorsque toutes les données ont été saisies, l'utilisateur a deux options : l'enregistrement des données pour une utilisation ultérieure via le bouton « Save all parameters » et/ou le lancement du calcul des simulations via le bouton « Launch modelisation ». Il est en outre possible de retourner au volet de calibration.

Modeling with EPP version of the DBN model

Modeling parameters

dt (s)

Duration (s)

Convergence criterium

Type of loading

Stress

Strain

Mixed loading (1D strain)

Loading

Data from a*.xlsx file

Filename

Choose loading functions

Loading functions

11	<input type="text"/>	23	<input type="text"/>
22	<input type="text"/>	13	<input type="text"/>
33	<input type="text"/>	12	<input type="text"/>

Temperature function

Temperature (°C)

Figure 3-9 : Volet de sélection des sollicitations thermomécaniques.

3.4.4 Enregistrement et exploitation des résultats

Dès que les calculs sont terminés, un nouveau volet s'affiche, permettant l'enregistrement et l'exploitation des résultats (cf. Figure 3-10).

Plusieurs options sont offertes à l'utilisateur :

- Enregistrement des variables du modèle (globales ou au niveau d'un corps) dans un classeur Excel©,
- Traçage et enregistrement d'un graphe présentant les variables du modèle (globales ou au niveau d'un corps).

Results of the modeling using EPP version of the DBN model

Save data

Plot data

X:

Y:

Figure 3-10 : Volet d'enregistrement et d'exploitation des résultats.

4 Procédures expérimentales

Dans ce chapitre, les procédures expérimentales mises en œuvre lors des essais de module complexe et cycliques de traction-compression réalisés pendant cette thèse sont présentées. On détaille donc ici l'ensemble des campagnes expérimentales depuis le choix du matériau et la fabrication des éprouvettes, les dispositifs expérimentaux utilisés, l'acquisition et le traitement des données expérimentales, jusqu'au déroulement des campagnes d'essais. Les résultats expérimentaux sont présentés dans le chapitre 5.

4.1 Matériau testé et fabrication des éprouvettes

4.1.1 Présentation de l'enrobé testé

Au cours des campagnes expérimentales présentées dans ce manuscrit, un seul enrobé bitumineux a été testé. Il est issu d'une précédente campagne expérimentale développée par Pham (2015a et 2015b). Il s'agit d'un enrobé tiède avec 30 % en masse de RAP (Recycled Asphalt Pavement) et 0,4 % d'additif ETIMA (en masse total du poids de bitume). Cela correspond à un enrobé de type Grave Bitume de classe 3 (GB3) de granulométrie 0/14 tel qu'il est défini dans la norme NF P 98-082. La Figure 4-1 présente la courbe granulométrique ainsi que les squelettes granulaires visé et recomposé. Pour ce type de matériau, le pourcentage de vide doit être inférieur à 10 % (norme NF EN 13108-1). Lors de la fabrication, le pourcentage de vide ainsi visé était de 7,3 %.

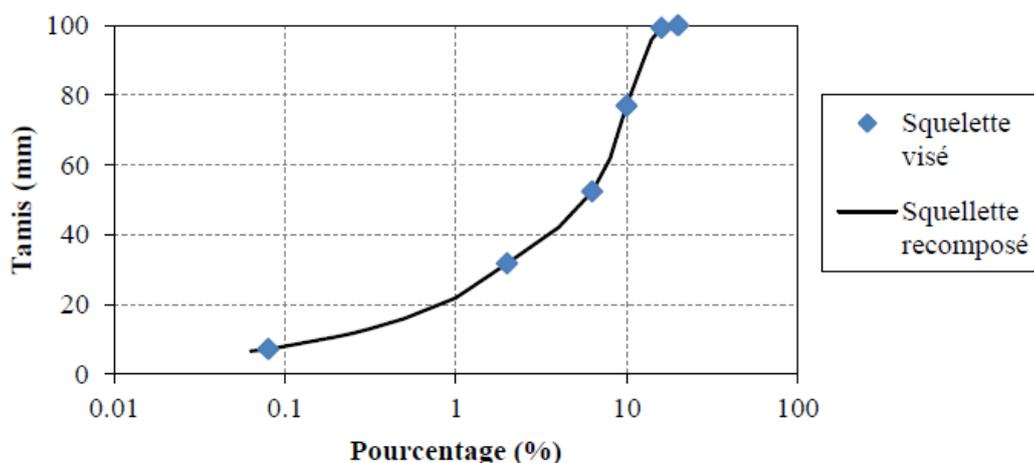


Figure 4-1 : Courbe granulométrique : squelettes visé et recomposé (Pham et al. 2015a).

4.1.2 Fabrication des éprouvettes

Pour l'enrobé testé, quatre plaques ont été fabriquées au compacteur à pneu type LPC suivant la norme NF EN 12697-33+A (cf. Figure 4-2). Les dimensions de chaque plaque sont de 600 mm de longueur, 400 mm de largeur et 120 mm de hauteur. Deux catégories d'éprouvettes sont carottées et découpées dans les plaques en fonction du type d'essai réalisé :

- les éprouvettes de type C dont la hauteur et le diamètre sont respectivement d'environ 140 mm et 75 mm, utilisées pour les essais de module complexe et de traction simple dans cette thèse,
- les éprouvettes de type B dont la hauteur et le diamètre sont respectivement d'environ 225 mm et 60 mm, non utilisées dans le cadre de cette thèse et donc omises par la suite.

La Figure 4-3 présente le plan de découpe des éprouvettes ainsi que les axes I, II et III liés aux directions de compactage de la plaque, à savoir I la direction de roulement, II la direction verticale de la charge du compactage et III la direction transversale au roulement de la roue de compactage.



Figure 4-2 : Table de compactage à pneu type LPC.

Huit éprouvettes de type C sont fabriquées dans chaque plaque. Chaque éprouvette est numérotée en fonction de sa position dans la plaque (de C1 à C8). Pour compléter cette nomenclature, le numéro de plaque est ajouté à la suite du numéro d'éprouvette (P1 ou P4). Ainsi, l'éprouvette C1-P1 est carottée dans la plaque 1 et à la position 1 (cf. Figure 4-3).

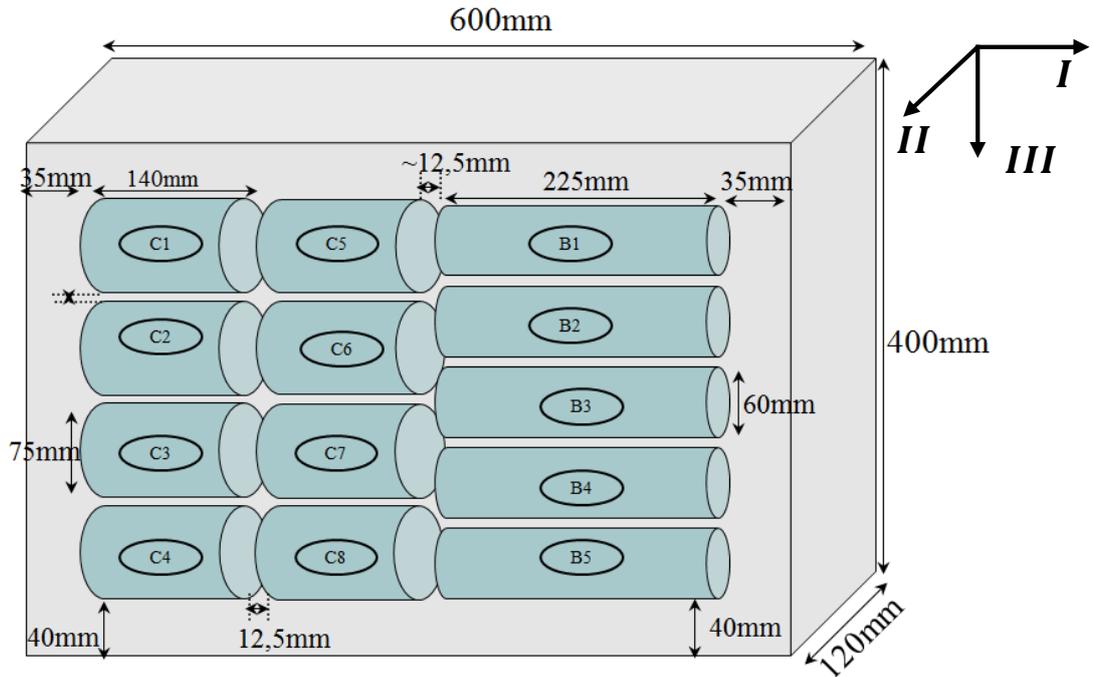


Figure 4-3 : Plan de carottage des éprouvettes de type B et C.

4.1.3 Pourcentage de vide des éprouvettes

Après sciage et carottage, le pourcentage de vide de chaque éprouvette est déterminé par la méthode géométrique :

$$\%vides = 1 - \frac{MVA}{MVR} \quad (4.1)$$

Où MVA désigne la masse volumique apparente et MVR la masse volumique réelle. Le pourcentage de vides moyen par plaque (calculé à partir des pourcentages de vides de chaque éprouvette) est donné dans la Figure 4-4, sachant que la valeur ciblée était de 7,3 %.

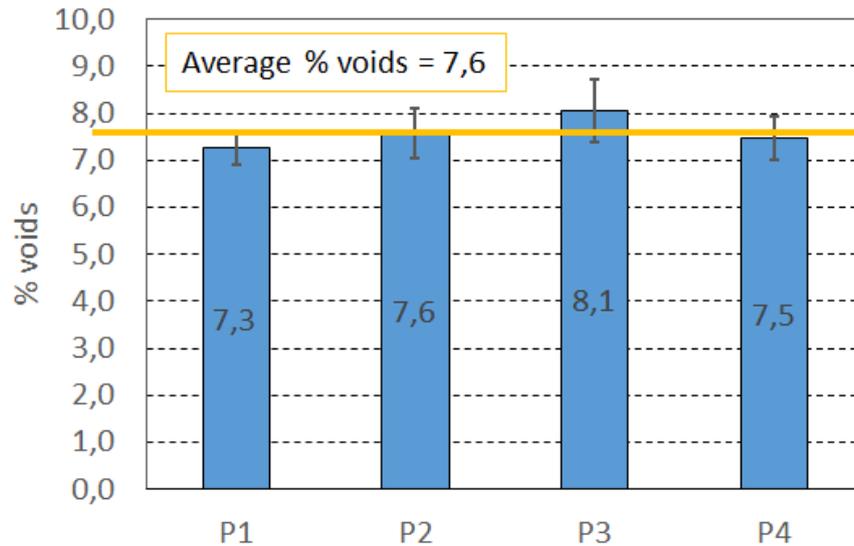


Figure 4-4 : Pourcentages de vides moyens des éprouvettes pour chaque plaque de matériaux.

4.2 Dispositifs expérimentaux

4.2.1 Presse hydraulique

La presse hydraulique utilisée pendant cette thèse est une Instron® 8874. Elle est équipée d'un capteur de force Dynacell®. Pour les essais réalisés au cours de cette thèse, la presse a été utilisée uniquement pour imposer des sollicitations en déformation dont le pilotage est assurée par des capteurs externes (extensomètres) et en contrainte à l'aide du capteur de force intégré. Afin d'obtenir des signaux de bonne qualité, les paramètres d'asservissements du canal de pilotage sont optimisés (P.I.D.R. : Proportionnel – Intégrale – Dérivée – Retard). Ces paramètres n'ont pas été modifiés au cours de la campagne expérimentale.

4.2.2 Enceinte thermique

L'enceinte thermique utilisée pour contrôler la température au cours de l'essai a été fabriquée par l'entreprise BIA Climatic®. Deux compresseurs permettent d'atteindre des températures très basses. La plage de températures atteignables s'étend de -40 °C à +150 °C avec une incertitude de $\pm 0,3$ °C. La température dans l'enceinte est contrôlée par une sonde PT100, indépendante des sondes utilisées pour mesurer la température des éprouvettes. Un système de ventilation permet d'homogénéiser la température dans l'enceinte et au sein de l'éprouvette. Le temps de mise en température des éprouvettes testées est de minimum 3h (cette durée peut varier en fonction des dimensions des éprouvettes).

4.2.3 Dispositifs de mesure

Mesure de la force

La force est mesurée par le capteur de force Dynacell® de la presse, dont la charge maximale est de ± 25 kN avec une précision de 25 N, soit $\pm 0,1$ % de son étendue de mesure. Cette mesure permet de déterminer la contrainte verticale σ de l'échantillon à partir du diamètre D de l'éprouvette et de la force axiale F appliquée :

$$\sigma = \frac{F}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} \quad (4.2)$$

Mesure de la déformation axiale

La déformation axiale est mesurée à l'aide de 3 extensomètres placés à 120° autour de l'échantillon. Ils sont fixés à l'éprouvette au moyen de couteaux et de ressorts. Les couteaux sont collés sur l'éprouvette (cf. Figure 4-5) à l'aide d'une colle extra forte. La longueur L de chaque extensomètre est de 72,5 mm avec un intervalle de mesure de ± 1 mm (soit environ $\pm 13\,500 \mu\text{def}$) et une précision de $0,5 \mu\text{m}$ (soit environ $6,9 \mu\text{def}$). La déformation axiale de chaque extensomètre $i \in \{1,2,3\}$ est obtenue par :

$$\varepsilon_{ax,i} = \frac{\Delta L_{ax,i}}{L} \quad (4.3)$$

Où $\Delta L_{ax,i}$ est le déplacement mesurée par l'extensomètre i .

La déformation axiale ε est alors calculée comme étant la moyenne des mesures de déformation de chacun des extensomètres, soit :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{ax,1} + \varepsilon_{ax,2} + \varepsilon_{ax,3}}{3} \quad (4.4)$$

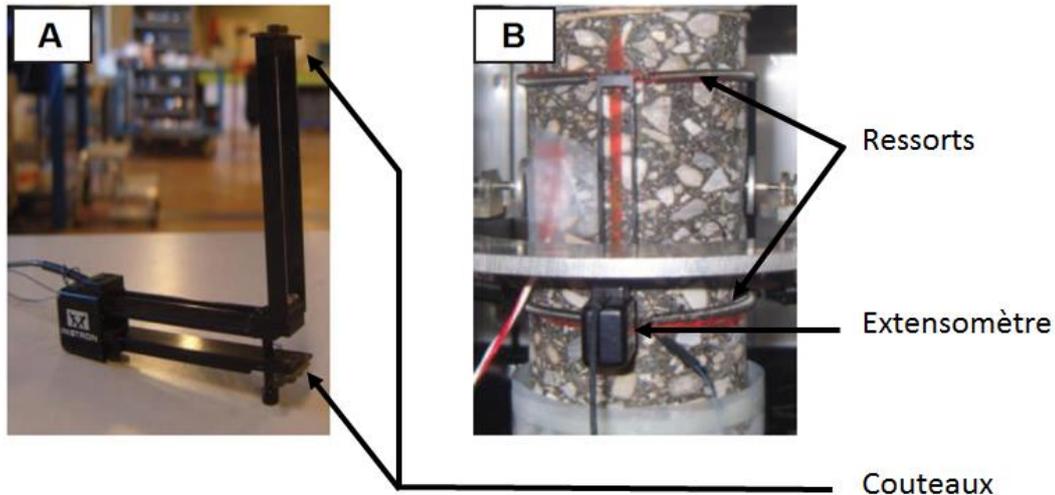


Figure 4-5 : A –Extensomètre pour la mesure de la déformation axiale et B - Montage de l'extensomètre sur une éprouvette.

Mesure de la déformation radiale

La déformation radiale est obtenue grâce à deux capteurs sans contact (cf. Figure 4-6). Ce type de capteurs fonctionne selon le principe de Foucault. Une bobine présente à l'intérieur du capteur est parcourue par un courant alternatif de haute fréquence qui engendre un courant de Foucault. Une cible, collée à la surface de l'éprouvette et constitué d'une feuille d'aluminium, perturbe ce champ magnétique. L'amplitude du courant est ainsi reliée à la distance entre la cible et le capteur. Cette variation d'amplitude est démodulée, linéarisée et amplifiée par un conditionneur. Ce dernier fournit alors une mesure de tension directement proportionnelle à la distance entre le capteur et la cible. L'étalonnage des capteurs sans contact permet alors de déterminer la relation entre distance et tension.



Figure 4-6 : Capteur sans contact sur son support avec cible en aluminium collée à la surface de l'éprouvette.

Au cours de nos essais, deux capteurs sans contact diamétralement opposés sont utilisées pour mesurer la déformation radiale de l'éprouvette (cf. Figure 4-7). Les capteurs sans contacts utilisés ont une plage de mesure de 500 μm et une résolution de 0,05 μm . Chaque

capteur mesure un déplacement radial $\Delta l_{rad,i}$ avec $i \in \{1,2\}$ qui permet ensuite de déterminer la déformation radiale ε_{rad} de l'éprouvette :

$$\varepsilon_{rad} = \frac{\Delta l_{rad,1} + \Delta l_{rad,2}}{D} \quad (4.5)$$

Le système de fixation des capteurs sans contact comprend 3 tiges et 3 anneaux. Seul l'anneau supérieur est fixé au casque par trois vis placées à 120°. Les deux autres anneaux sont maintenus à l'aide des 3 tiges, ce qui permet une rotation du système pendant les essais. Les capteurs sans contact sont fixés diamétralement opposés sur l'anneau central comme indiqué sur la Figure 4-7. Cet anneau peut être déplacé verticalement afin que les capteurs visent le milieu de l'éprouvette. L'anneau situé en bas a un rôle de raidisseur du système.

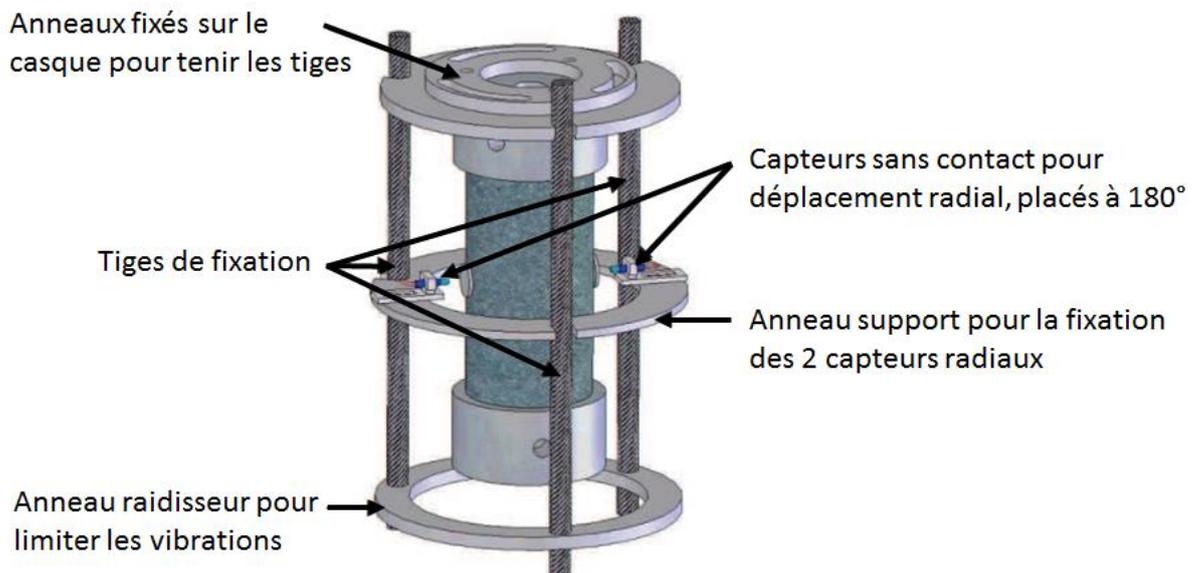


Figure 4-7 : Système de fixation des capteurs sans contact (Tapsoba 2012).

Mesure de la température

La température est contrôlée grâce à une enceinte thermique dans lequel l'essai est réalisé. Pendant les essais, la température des éprouvettes est mesurée à l'aide d'une sonde de température de type PT100 collée à leur surface (cf. Figure 4-8). Ce type de capteur a une précision de 0,1 °C.



Figure 4-8 : Sonde de température.

La température mesurée par ce capteur peut être différente de la température de consigne imposée par l'enceinte thermique car celle-ci dispose d'un système de contrôle de la température complètement indépendant.

Echantillonnage des mesures

La fréquence d'échantillonnage est choisie telle qu'un minimum de 250 points par cycles de sollicitation sinusoïdale soit enregistré. Pour les essais non cycliques tel que les essais de traction ou compression simple la fréquence d'échantillonnage est fixée telle que l'amplitude de variation de la déformation entre deux points soit au maximum de 1 μ def.

4.3 Mise en place des essais

La mise en place des essais suit plusieurs étapes, depuis la fabrication des éprouvettes jusqu'à leur collage et leur conditionnement en température avant de les solliciter mécaniquement.

4.3.1 Collage et montage des éprouvettes

Le collage des éprouvettes est une étape essentielle qui se doit d'être réalisée avec précision sans quoi l'hypothèse d'homogénéité de l'essai peut être remise en cause. De plus un décollement pendant l'essai rend impossible l'exploitation des données recueillies.

La colle utilisée est un adhésif époxyde bicomposant pâteux de marque Araldite® 2012. Sa densité est d'environ 1,18 et sa durée d'utilisation est de 5 à 8 minutes pour 100 g à 25 °C. Il est conseillé une épaisseur de 0,05 à 0,10 mm d'adhésif pour obtenir une résistance optimale. Selon les informations du fabricant, à 23 °C (qui est la température ambiante dans le laboratoire lors des opérations de collage), le temps de durcissement pour obtenir une résistance au cisaillement supérieure à 1 MPa est de 20 minutes et de 60 minutes pour 10 MPa.

Deux casques sont nécessaires. Ceux-ci sont collés à l'éprouvette pour les essais réalisés pendant cette thèse (module complexe et traction simple) comme illustré par la Figure 4-7. La procédure de collage et de montage de l'éprouvette sur la presse se décompose en 3 étapes :

- 1^e étape : Le premier est collé à l'éprouvette à l'aide d'un dispositif qui assure un bon centrage de l'éprouvette par rapport au casque et un bon alignement de l'axe de l'éprouvette avec celui du casque. 30 minutes sont nécessaires au séchage de la colle.
- 2^e étape : L'éprouvette est vissée sur l'axe supérieur de la presse et le second casque est mis en place sur l'axe inférieur de la presse. Avant cette étape, le système de fixation des capteurs sans contact aura dû être mis en place sur le premier casque collé.
- 3^e étape : Le second casque est collé directement sur la presse. Une compression d'environ 0,02 kN est appliquée pendant le collage. Après cette étape, la colle est gardée à température ambiante pendant une durée de 2 h minimum afin d'assurer la bonne prise de l'ensemble.

A la suite du collage, il est possible d'instrumenter l'éprouvette avec les différents capteurs présentés dans la section précédente.

4.3.2 Mise en température

Après le collage de l'éprouvette et la mise en place des systèmes de mesures, l'enceinte thermique est fermée et mise en marche. Tous les essais sont réalisés à température contrôlée car les enrobés bitumineux ont un comportement fortement dépendant de celle-ci. Il est par conséquent fondamental que les essais soient débutés lorsque la température est homogène et stabilisée.

Il a été montré dans des thèses précédentes (Nguyen 2011; Tapsoba 2012; Pham 2014) que le temps de mise en température doit être de 4 h minimum pour les essais de module complexe (éprouvettes de 75 mm de diamètre). Ce temps doit être adapté en fonction des dimensions des éprouvettes.

Pendant toute la période de mise en température, la compression de 0,02 kN, appliquée après le collage du second casque, est maintenue à ce niveau afin d'éviter toute traction dans l'éprouvette qui risquerait de l'endommager.

4.4 Acquisition et traitement des données

L'acquisition des données s'effectue avec le logiciel WaveMatrix® qui permet également de piloter la presse. L'acquisition et le pilotage de la presse sont entièrement personnalisables et automatiques (fréquence d'acquisition, nombre de cycles, temps entre les cycles, modes de pilotage, etc.).

Le système d'acquisition et le logiciel WaveMatrix® permettent l'enregistrement des données suivantes :

- **Temps total**, temps depuis le début de l'essai ;
- **Temps de cycle**, temps depuis le début du cycle ;
- **Numéro de cycle**, numéro du cycle appliqué ;
- **Déplacement du piston de la presse** ;
- **Angle de rotation du piston**, nul pour nos essais ;
- **Force axiale exercée sur l'éprouvette**, permettant de déterminer la contrainte axiale dans l'éprouvette selon l'équation (4.2) ;
- **Couple axial exercé sur l'éprouvette**, nul pour nos essais ;
- **Déformation axiale des trois extensomètres**, calculée selon l'équation (4.4) ;
- **Moyenne des trois extensomètres**, qui sert également de voie de pilotage lors du contrôle en déformation de la presse, et calculée avec l'équation (4.4). Elle permet de déterminer la déformation axiale ;
- **Déplacement radial**, qui permet de déterminer la déformation radiale de l'éprouvette avec l'équation (4.5) ;
- **Température de surface de l'éprouvette**.

4.5 Campagne expérimentale

La campagne expérimentale se compose de deux types d'essais. Le premier est un essai de module complexe dont la procédure est décrite dans la section 4.6. Au cours de cette thèse seul un essai de module complexe est réalisé. Les résultats de cet essai permettent de déterminer l'ensemble des courbes maîtresses du matériau testé, mais également d'établir des comparaisons avec les essais de module complexe réalisés sur le même matériau lors de campagnes précédentes (Pham et al. 2015a; Pham et al. 2015b).

Le second type d'essai est l'essai cyclique de traction compression simple, décrit dans la section 4.7. Cet essai permet de déterminer les propriétés viscoélastiques et viscoplastiques du matériau testé.

Le Tableau 4-1 présente l'ensemble des essais réalisés au cours de cette thèse ainsi que le nom de l'éprouvette testée au cours des différents essais.

Tableau 4-1 : Essais réalisés au cours de cette thèse.

Type d'essai	Température	Vitesse de déformation (%/min)	Eprouvette testée
Essai de module complexe	-20 °C à 45 °C	-	C2-P2
Essai cyclique de traction compression simple	0 °C	0,00473	C5-P4
		0,1	C4-P3
		1	C4-P2
	15 °C	0,01	C8-P1
		0,1	C3-P2
		1	C1-P3
	30 °C	0,01	C7-P2
		0,1	C2-P1
		0,97	C7-P3

4.6 Essais de module complexe

4.6.1 Principe de l'essai

Dans ce type d'essai, une éprouvette cylindrique est chargée axialement. La réponse en déformation et/ou en contrainte est mesurée pendant l'essai. Cet essai est considéré comme homogène, c'est-à-dire que l'état des contraintes et des déformations est considéré comme uniforme sur toute l'éprouvette (en réalité, cette hypothèse est vérifiée au centre et non à proximité des bords supérieurs et inférieurs collées). Grâce à cette seule hypothèse, les paramètres et propriétés mécaniques du matériau sont directement accessibles.

Les éprouvettes utilisées sont cylindriques, d'un diamètre d'environ 75 mm et d'une hauteur d'environ 150 mm. Elles sont fabriquées puis collées en suivant les procédures décrites dans les sections 4.1.2 et 4.3.1 respectivement.

Les essais de module complexe sont conduits sur des plages de température de -25 °C à +45 °C. La sollicitation est sinusoïdale, de fréquence variant entre 0,03 Hz et 10 Hz. Le pilotage

de ce type d'essai s'effectue sur la moyenne des trois extensomètres avec une amplitude de 50 μdef (soit 3,75 μm pour le déplacement mesuré par les extensomètres). Cette amplitude permet de s'assurer que le matériau demeure dans son domaine de viscoélasticité linéaire (Airey et al. 2003a; Nguyen et al. 2014). Le nombre de cycles appliqués pour chaque fréquence est indiqué dans le Tableau 4-2, tandis que la Figure 4-9 présente la chronologie de l'essai de module complexe :

- 4 heures de mise en température après chaque changement ;
- 5 minutes de repos entre chaque changement de fréquence.

Tableau 4-2 : Nombre de cycles appliqués pour chaque fréquence.

Fréquence (Hz)	Nombre de cycles appliqués
0,03	8
0,1	12
0,3	16
1	30
3	40
10	50

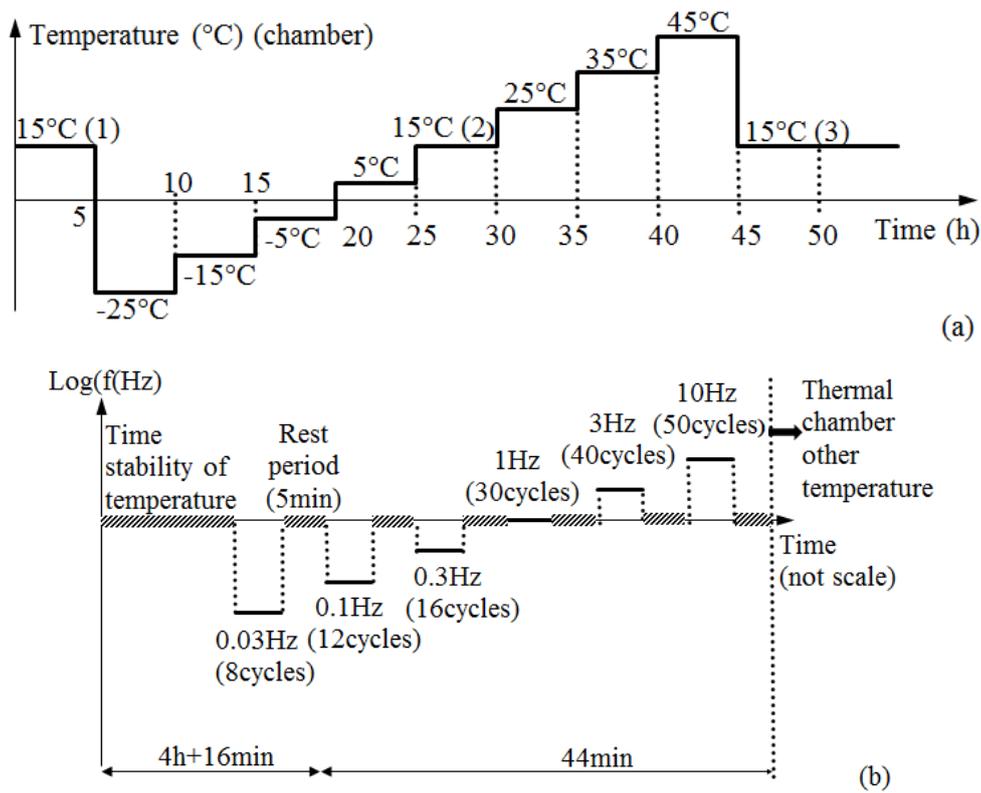


Figure 4-9 : Chronologie de l'essai de module complexe - (a) Chronologie des températures testées et (b) Chronologie des fréquences testées à chaque température.

L'amplitude choisie (50 μ def), le faible nombre de cycles appliqués et les temps de repos entre chaque période de sollicitation permettent de considérer le comportement des enrobés bitumineux comme viscoélastique linéaire.

4.6.2 Définition des paramètres mécaniques et procédure de traitement des essais

A partir de la mesure des contraintes et déformations dans l'éprouvette pendant l'essai de module complexe, on détermine les paramètres suivants pour chaque paire de cycles de mesure (*ie.* pour les cycles k et $k + 1$ avec $k \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$ où N est le nombre total de cycle appliqué). Les paramètres sont déterminés à partir des données expérimentales par une optimisation par la méthode des moindres carrés. Cette analyse est répétée pour chaque couple fréquence-température :

- **Contrainte axiale**

$$\sigma_{ax,\{k;k+1\}} = \sigma_{Aax,\{k;k+1\}} \sin(\omega t + \varphi_{\sigma_{ax,\{k;k+1\}}}) + \sigma_{0ax,\{k;k+1\}} \quad (4.6)$$

Où $\sigma_{Aax,\{k;k+1\}}$, $\sigma_{0ax,\{k;k+1\}}$ et $\varphi_{\sigma_{ax,\{k;k+1\}}}$ sont respectivement l'amplitude, la valeur moyenne et l'angle de phase de la contrainte axiale au cours des cycles k et $k + 1$.

▪ **Déformation axiale**

$$\varepsilon_{ax,\{k;k+1\}} = \varepsilon_{Aax,\{k;k+1\}} \sin(\omega t + \varphi_{\varepsilon_{ax,\{k;k+1\}}}) + \varepsilon_{0ax,\{k;k+1\}} \quad (4.7)$$

Où $\varepsilon_{Aax,\{i;i+1\}}$, $\varepsilon_{0ax,\{i;i+1\}}$ et $\varphi_{\varepsilon_{ax,\{i;i+1\}}}$ sont respectivement l'amplitude, la valeur moyenne et l'angle de phase de la déformation axiale au cours des cycles k et $k + 1$.

▪ **Déformation radiale**

$$\varepsilon_{rad,\{k;k+1\}} = \varepsilon_{Arad,\{k;k+1\}} \sin(\omega t + \varphi_{\varepsilon_{rad,\{k;k+1\}}}) + \varepsilon_{0rad,\{k;k+1\}} \quad (4.8)$$

Où $\varepsilon_{Arad,\{i;i+1\}}$, $\varepsilon_{0rad,\{i;i+1\}}$ et $\varphi_{\varepsilon_{rad,\{i;i+1\}}}$ sont respectivement l'amplitude, la valeur moyenne et l'angle de phase de la déformation radiale au cours des cycles k et $k + 1$.

La Figure 4-10 représente un exemple de signaux expérimentaux issu d'un essai de module complexe sur une éprouvette, sur laquelle sont représentés la contrainte axiale $\sigma_{ax,\{k;k+1\}}$ et les déformations axiale $\varepsilon_{ax,\{k;k+1\}}$ et radiale $\varepsilon_{rad,\{k;k+1\}}$.

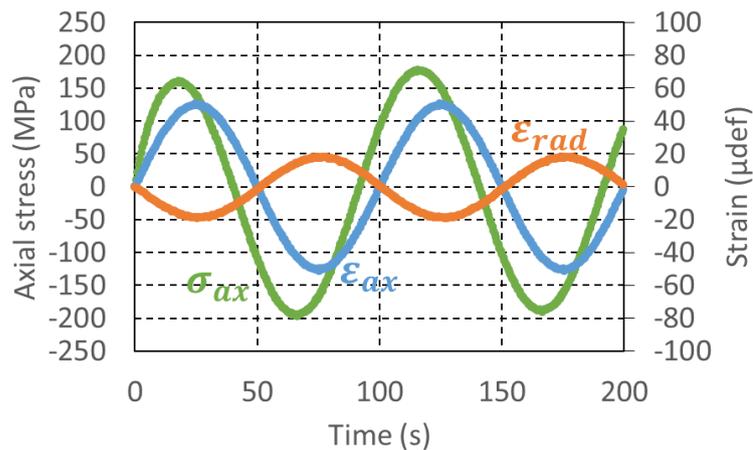


Figure 4-10 : Contrainte axiale, déformations axiale et radiale enregistrées au cours de l'essai de module complexe sur l'éprouvette C3-P3 à $T = 15$ °C et $f = 0,01$ Hz au cours des cycles 1 et 2.

A partir des paramètres de ces signaux, il est possible de calculer les caractéristiques mécaniques en supposant un comportement linéaire :

- **Module complexe E^***

Pour chaque paire de cycles $\{k; k + 1\}$, le module complexe peut être défini par deux jeux de paramètres, à savoir sa norme $|E^*|$ et son angle de phase φ_E ou ses parties réelle E_1 et imaginaire E_2 via les équations :

$$|E^*|_{\{k;k+1\}} = \frac{\sigma_{Aax,\{k;k+1\}}}{\varepsilon_{Aax,\{k;k+1\}}} \quad (4.9)$$

$$\varphi_{E\{k;k+1\}} = \varphi_{\sigma_{ax,\{k;k+1\}}} - \varphi_{\varepsilon_{ax,\{k;k+1\}}} \quad (4.10)$$

Puis :

$$E_{1\{k;k+1\}} = |E^*|_{\{k;k+1\}} \cos(\varphi_{E\{k;k+1\}}) \quad (4.11)$$

$$E_{2\{k;k+1\}} = |E^*|_{\{k;k+1\}} \sin(\varphi_{E\{k;k+1\}}) \quad (4.12)$$

- **Coefficient de Poisson complexe ν^***

Pour chaque paire de cycles $\{k; k + 1\}$, le coefficient de Poisson complexe peut être défini par sa norme $|\nu^*|$ et son angle de phase φ_ν ou ses parties réelle ν_1 et imaginaire ν_2 :

$$|\nu^*|_{\{k;k+1\}} = \frac{\varepsilon_{Arad,\{k;k+1\}}}{\varepsilon_{Aax,\{k;k+1\}}} \quad (4.13)$$

$$\varphi_{\nu\{k;k+1\}} = \pi - (\varphi_{\varepsilon_{ax,\{k;k+1\}}} - \varphi_{\varepsilon_{rad,\{k;k+1\}}}) \quad (4.14)$$

Puis :

$$\nu_{1\{k;k+1\}} = |\nu^*|_{\{k;k+1\}} \cos(\varphi_{\nu\{k;k+1\}}) \quad (4.15)$$

$$\nu_{2\{k;k+1\}} = |\nu^*|_{\{k;k+1\}} \sin(\varphi_{\nu\{k;k+1\}}) \quad (4.16)$$

L'ensemble de ces paramètres sont déterminés pour chaque couple de fréquence-température et pour chaque paire de cycles $\{k; k + 1\}$. Pour des raisons évidentes de simplification, l'indice $\{k; k + 1\}$ n'est plus mentionné dans la suite de ce manuscrit bien que tous les paramètres soient fonction du cycle étudié. Le Tableau 4-3 présente l'ensemble des paramètres calculé pour chaque couple de fréquence-température et pour chaque paire de cycles $\{k; k + 1\}$.

Tableau 4-3 : Récapitulatif des paramètres calculés lors de l'exploitation des résultats de l'essai de module complexe

Paramètres	Symbole
Norme du module complexe	$ E^* $
Angle de phase du module complexe	φ_E
Partie réelle du module complexe	E_1
Partie imaginaire du module complexe	E_2
Norme du coefficient de Poisson	$ \nu^* $
Angle de phase du coefficient de Poisson	φ_ν
Partie réelle du coefficient de Poisson	ν_1
Partie imaginaire du coefficient de Poisson	ν_2
Amplitude du signal en contrainte	σ_{Aax}
Valeur moyenne de la contrainte	σ_{0ax}
Angle de phase du signal en contrainte	$\varphi_{\sigma_{ax}}$
Amplitude du signal de déformation axiale	ε_{Aax}
Valeur moyenne de la déformation axiale	ε_{0ax}
Angle de phase du signal de déformation axiale	$\varphi_{\varepsilon_{ax}}$
Amplitude du signal de déformation radiale	ε_{Arad}
Valeur moyenne de la déformation radiale	ε_{0rad}
Angle de phase du signal de déformation radiale	$\varphi_{\varepsilon_{rad}}$
Fréquence du signal de sollicitation	$f = \frac{2\pi}{\omega}$
Température de surface de l'éprouvette	T

4.6.3 Résultats pour l'essai de module complexe

Dans cette section, sont présentés l'ensemble des résultats d'un essai de module complexe sur l'éprouvette C2-P2 (cf. section 4.1.2 et section 5.1.1), que nous avons réalisé. Ces résultats permettent d'étudier l'influence des paramètres de l'essai (fréquence et température) sur les mesures des différents paramètres présentés dans le Tableau 4-3, à savoir en particulier le module complexe E^* et le coefficient de Poisson ν^* .

Il s'agit du seul essai de module complexe réalisé dans cette thèse. Cet essai sert de référence par la suite lors des essais cycliques de traction-compression.

Courbes isothermes et isochrones

Les courbes isothermes (respectivement isochrones) permettent d'analyser l'influence de la température (respectivement de la fréquence de sollicitation) sur les caractéristiques mécaniques du matériau. Les Figure 4-11, Figure 4-12, Figure 4-13 et Figure 4-14 présentent les résultats de l'essai de module complexe réalisés sur l'éprouvette C2-P2, en terme de norme et d'angle de phase du module complexe $|E^*|$ et du coefficient de Poisson $|\nu^*|$.

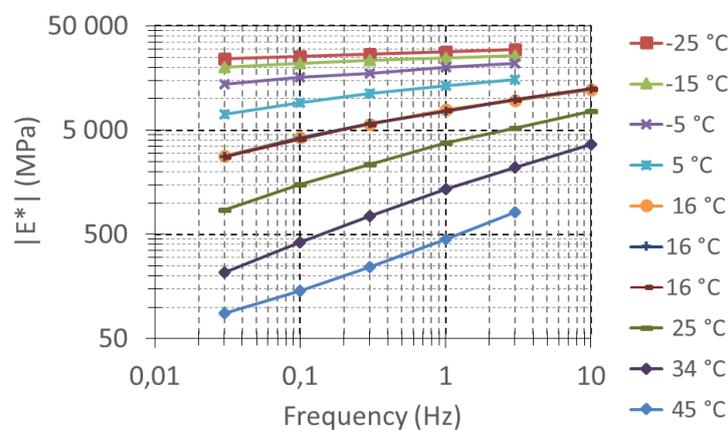


Figure 4-11 : Valeurs expérimentales de la norme du module complexe en fonction de la fréquence (essai C2-P2).

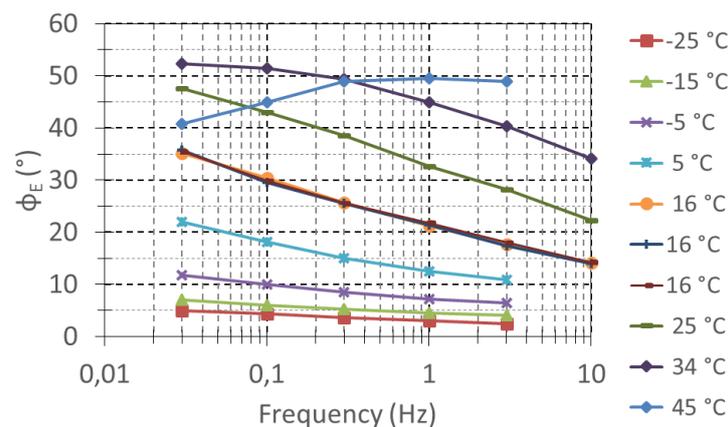


Figure 4-12 : Valeurs expérimentales de l'angle de phase du module complexe en fonction de la fréquence (essai C2-P2).

Dans ces essais, la norme du module complexe $|E^*|$ varie de 60 à 10000 MPa environ, l'angle de phase du module complexe ϕ_E entre 0 et 50° et la norme du coefficient de Poisson $|\nu^*|$ de 0,18 à 0,36 ce qui démontre leur grande variabilité en fonction de la fréquence et de la température. En revanche, l'angle de phase du coefficient de Poisson ϕ_ν varie peu dans un intervalle très restreint de -4° à 0° environ.

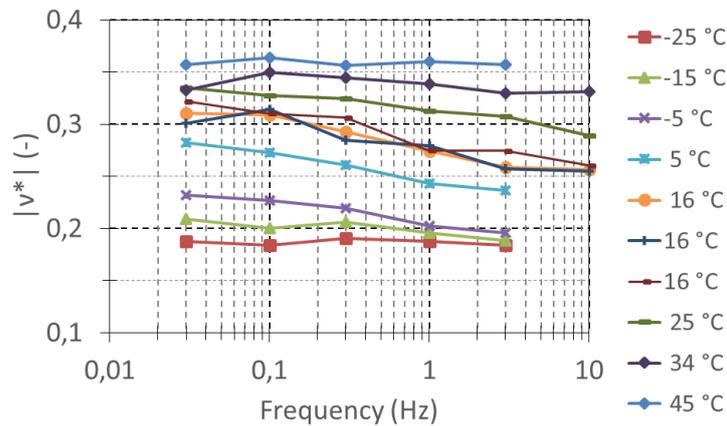


Figure 4-13 : Valeurs expérimentales de la norme du coefficient de Poisson complexe en fonction de la fréquence (essai C2-P2).

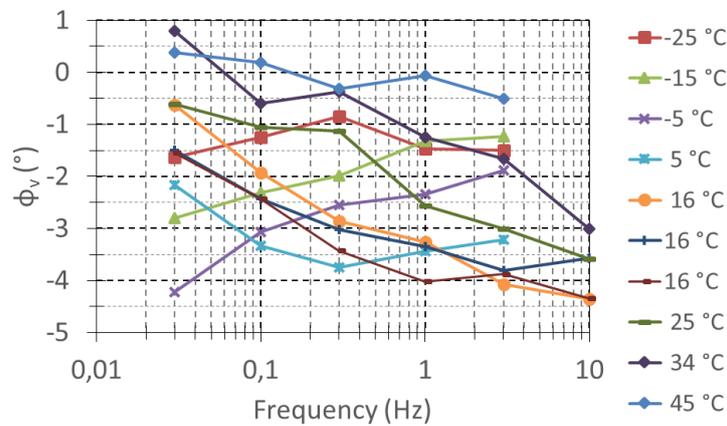


Figure 4-14 : Valeurs expérimentales de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe en fonction de la fréquence (essai C2-P2).

Courbes dans le plan Cole-Cole et de Black

Ces mêmes résultats sont maintenant présentés dans le plan de Cole-Cole (partie imaginaire en fonction de la partie réelle) et dans l'espace de Black (norme en fonction de l'angle de phase). Ces deux représentations sont classiques pour le module complexe, et plus rares pour le coefficient de Poisson (souvent supposé constant). Elles montrent l'existence d'une courbe unique ce qui permet de valider le Principe de Superposition Temps-Température (PSTT) dans le domaine de comportement VEL de l'enrobé. Les Figure 4-15 et Figure 4-16 présentent ces résultats dans le cas du module complexe $|E^*|$.

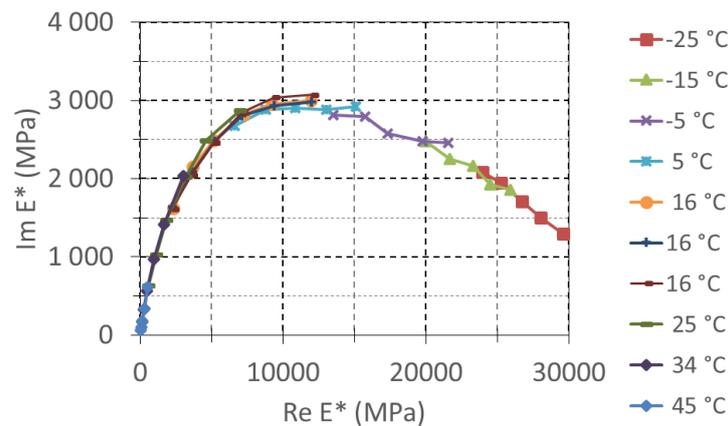


Figure 4-15 : Représentation du module complexe $|E^*|$ dans le plan de Cole-Cole (essai C2-P2).

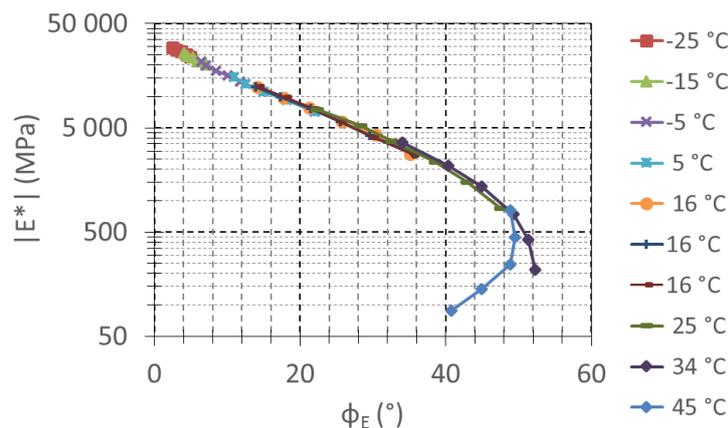


Figure 4-16 : Représentation du module complexe $|E^*|$ dans l'espace de Black (essai C2-P2).

De nombreuses études confirment ce principe (De La Roche 1996, Di Benedetto et al. 2004b). De récentes études menées au laboratoire LGCB-LTDS ont également montrées que ce principe pouvait s'étendre au cas tridimensionnel. La représentation du coefficient de Poisson (*cf.* Figure 4-17 et Figure 4-18) permet de confirmer l'existence d'une courbe unique et donc le PSTT dans le cas 3D.

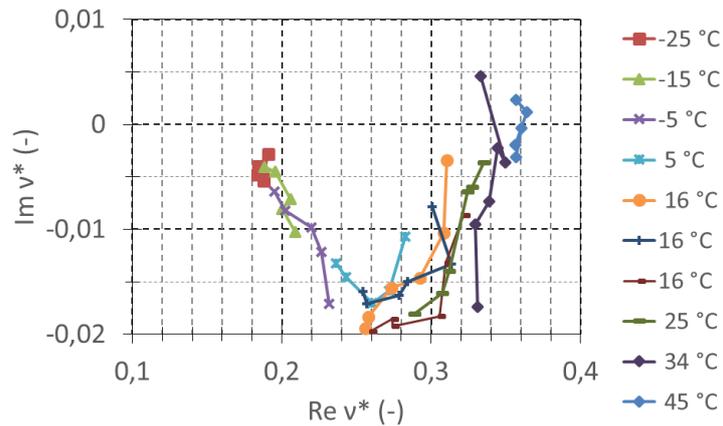


Figure 4-17 : Représentation du coefficient de Poisson $|\nu^*|$ dans le plan de Cole-Cole (essai C2-P2).

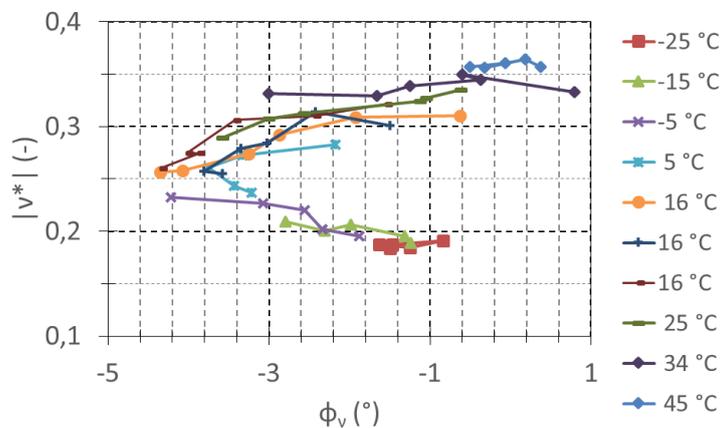


Figure 4-18 : Représentation du coefficient de Poisson $|\nu^*|$ dans l'espace de Black (essai C2-P2).

Construction des courbes maîtresses

Le respect du PSTT (validé par l'existence de courbes uniques dans le plan de Cole-Cole et dans l'espace de Black) permet la construction de courbes uniques de la norme et de l'angle de phase du module complexe et du coefficient de Poisson complexe en fonction de la fréquence. Ces courbes maîtresses sont déterminées par l'utilisation de la propriété d'équivalence temps (ou fréquence)-température. Comme expliqué dans la section 1.3.2.8, une température de référence T_{ref} est fixée. Les isothermes sont alors translatées parallèlement à l'axe des fréquences afin d'obtenir une courbe unique par superposition. Cela revient à multiplier par un coefficient (Figure 4-19), noté a_T , la fréquence réelle afin d'obtenir une nouvelle fréquence dite réduite. Le principal avantage de cette méthode réside dans sa capacité à fournir des valeurs de modules et de coefficients de Poisson complexes inaccessibles par l'expérimentation. Lorsque le matériau possède la propriété d'équivalence temps-température, le module complexe du matériau peut être caractérisé par l'équation (4.17). Un même module complexe E^* peut être obtenu à différents couples de températures et de fréquences.

$$E^*(\omega, T) = E^*(\omega a_T, T_{ref}) \text{ avec } a_{T_{ref}} = 1 \text{ et } a_T = f(T)/f(T_{ref}) \quad (4.17)$$

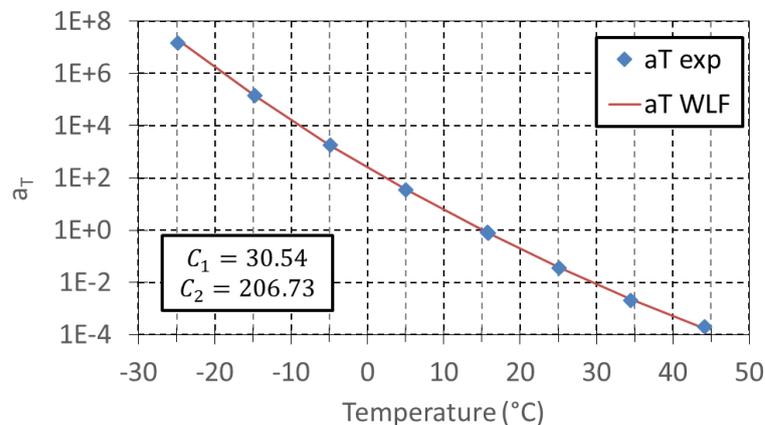


Figure 4-19 : Courbe des coefficients de translation a_T , expérimentaux et obtenus par la loi de WLF (essais C2-P2)

Le matériau testé (éprouvette C2-P2) respecte le PSTT comme observé précédemment. La température de référence choisie est de 16,3 °C. Les Figure 4-20, Figure 4-21, Figure 4-22 et Figure 4-23 présentent les courbes maîtresses des différentes grandeurs en fonction de la fréquence réduite.

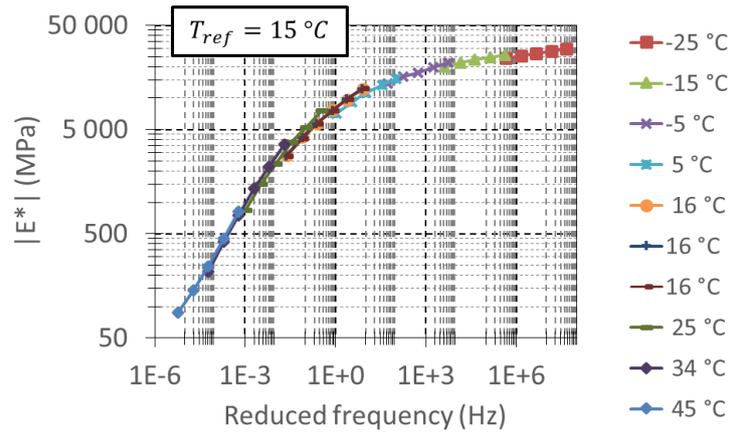


Figure 4-20 : Courbe maîtresse de la norme du module complexe $|E^*|$ en fonction de la fréquence réduite à la température de référence $T_{ref} = 16,3\text{ °C}$ (essai C2-P2).

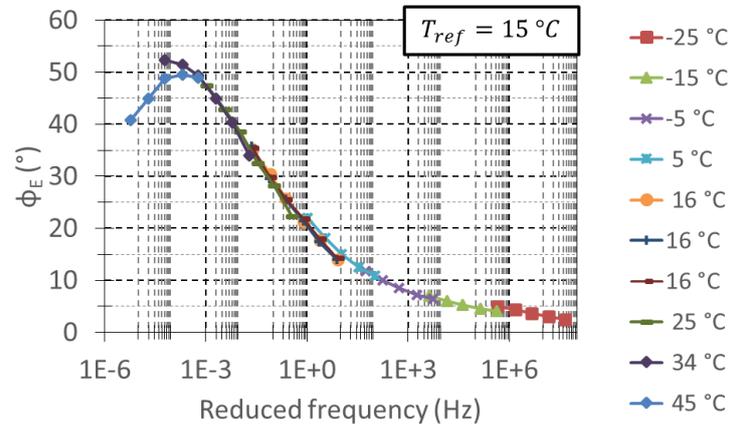


Figure 4-21 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du module complexe ϕ_E en fonction de la fréquence réduite à la température de référence $T_{ref} = 16,3\text{ °C}$ (essai C2-P2).

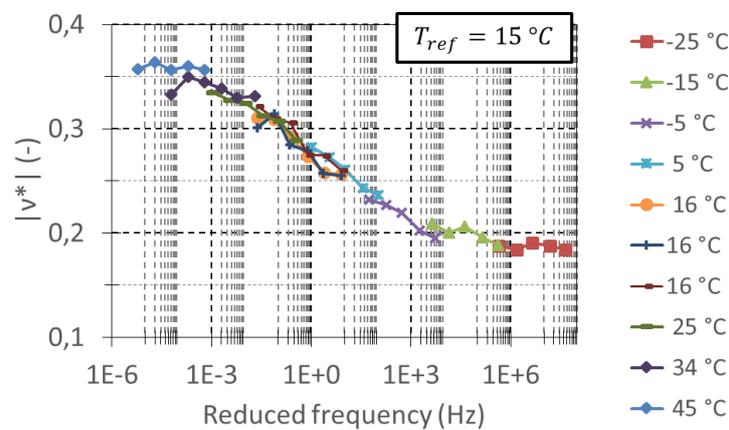


Figure 4-22 : Courbe maîtresse de la norme du coefficient de Poisson complexe $|\nu^*|$ en fonction de la fréquence réduite à la température de référence $T_{ref} = 16,3\text{ °C}$ (essai C2-P2).

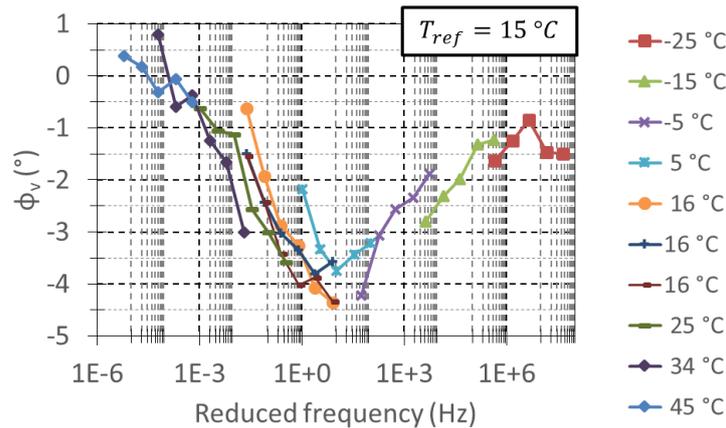


Figure 4-23 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe ϕ_v en fonction de la fréquence réduite à la température de référence $T_{ref} = 16,3\text{ °C}$ (essai C2-P2).

4.7 Essais cycliques de traction-compression simple

4.7.1 Principe de l'essai

Dans ce type d'essai, une éprouvette cylindrique (identique à celles utilisées pour l'essai de module complexe) est chargée axialement en déformation. La déformation radiale ainsi que la contrainte axiale sont mesurées pendant l'essai. Les éprouvettes utilisées sont cylindriques, d'un diamètre d'environ 75 mm et d'une hauteur d'environ 150 mm. Elles sont fabriquées puis collées en suivant les procédures décrites dans les sections 4.1.2 et 4.3.1 respectivement.

Les essais de traction ou compression simple sont conduits à des températures de 0 °C, 15 °C et 30 °C. La sollicitation est réalisée à vitesse de déformation constante. Les vitesses pratiquées sont de 0,01 %/min, 0,1 %/min et 1 %/min. Le pilotage de l'essai s'effectue sur la moyenne des trois extensomètres.

Un essai est réalisé pour chaque couple de vitesse de déformation-température comme illustré dans la Figure 4-24. Pour les couples de vitesse de déformation-température de (30 °C ; 1 %/min) et (0 °C ; 0,01 %/min), la vitesse de déformation est adaptée dans le but de vérifier la validité du PSTT dans le domaine viscoplastique. Ainsi, comme illustré par la Figure 4-24, les vitesses de sollicitation pour ces essais sont respectivement égales à 0,97 %/min et 0,00473 %/min pour satisfaire au PSTT (Di Benedetto et al. 2008; Di Benedetto et al. 2010).

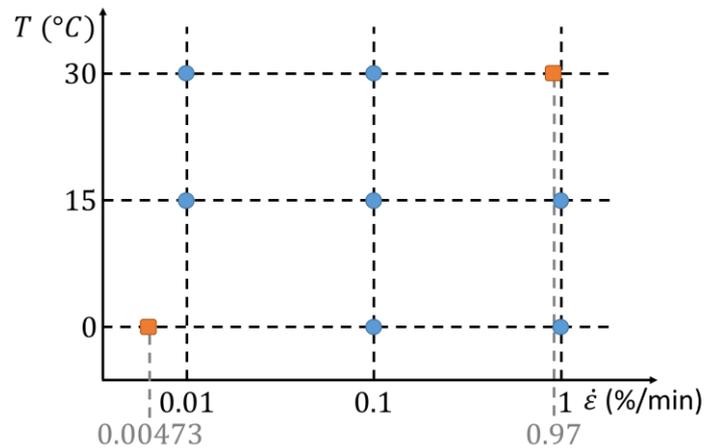


Figure 4-24 : Programme expérimental.

Les Figure 4-25 et Figure 4-26 présentent la chronologie de l'essai de traction ou compression simple réalisé dans le cadre de cette thèse. L'essai est composé de deux étapes principales. La première est composée d'un essai de module complexe partiel (1 température et 7 fréquences) afin de caractériser le comportement VEL de chaque éprouvette (cf. Figure 4-25). La seconde étape est celle de l'essai de traction-compression simple à proprement parlé qui se compose de (cf. Figure 4-26) :

- Une rampe à vitesse de déformation constante $\dot{\epsilon}$ entre $0 \mu def$ et $0,1 \% = 1000 \mu def$,
- Une rampe à vitesse de déformation constante $\dot{\epsilon}$ entre $0,1 \% = 1000 \mu def$ et $0 \mu def$,
- Une rampe à vitesse de déformation constante $\dot{\epsilon}$ entre $0 \mu def$ et $0,8 \% = 8000 \mu def$,
- Un palier de déformation à $8000 \mu def$ maintenu pendant 4h,
- Une rampe à vitesse de déformation constante $\dot{\epsilon}$ à partir de $0,8 \% = 8000 \mu def$ et jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

Cet essai est donc un essai destructif car il conduit à la rupture en traction de l'éprouvette. Il est important de noter que sous certaines conditions de température et de vitesse de déformation, les éprouvettes ont connu une rupture avant $8000 \mu def$.

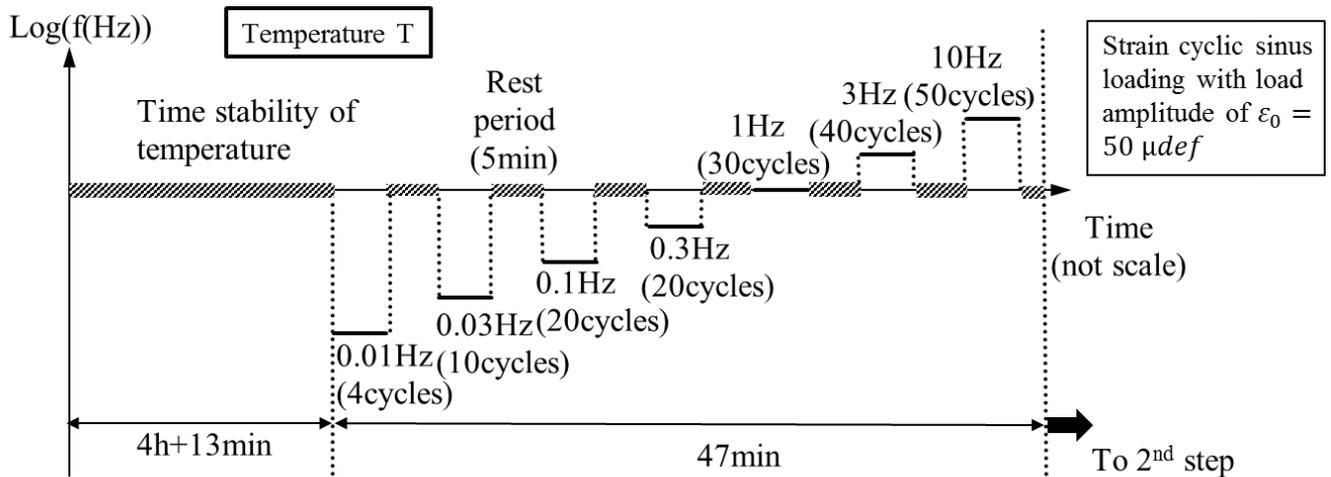


Figure 4-25 : Chronologie de la première étape de l'essai
 Sollicitations cycliques pour des fréquences de 0,01 Hz à 10 Hz, à température fixée
 (3 températures possibles : 0 °C ; 15 °C ; 30 °C).

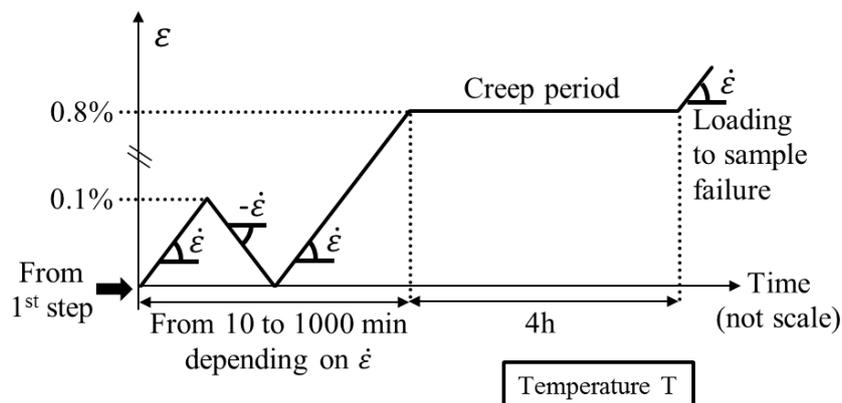


Figure 4-26 : Chronologie de la deuxième étape – Traction simple à vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ constante (3 vitesses : 0,01 %/min ; 0,1 %/min ; 1 %/min), suivie d'un déchargement et d'un chargement à même vitesse, puis par une période de fluage et un chargement jusqu'à rupture de l'éprouvette, à la température choisie pour l'étape 1.

4.7.2 Exemple de résultats pour la phase de traction à vitesse constante

Seule la seconde étape de l'essai (cf. Figure 4-26) est détaillée dans cette partie. La première étape (cf. Figure 4-25) correspond à un essai de module complexe et est donc traitée comme telle et comme expliqué dans la section 4.6.2.

Dans cette section, sont présentés les résultats d'un essai de traction simple sur l'éprouvette C2-P1 (cf. section 4.1.2). Ces différentes représentations seront utilisées pour étudier l'influence de la température et de la vitesse de déformation sur le comportement viscoplastique de l'enrobé testé.

Courbe de déformation

La Figure 4-27 présente un exemple de courbes de déformations enregistrées pendant un essai de traction simple. La déformation axiale étant imposée, elle respecte la consigne fixée (traction jusqu'à 1000 μdef , retour à 0 μdef et traction jusqu'à 8000 μdef , suivi d'une période de fluage de 4h).

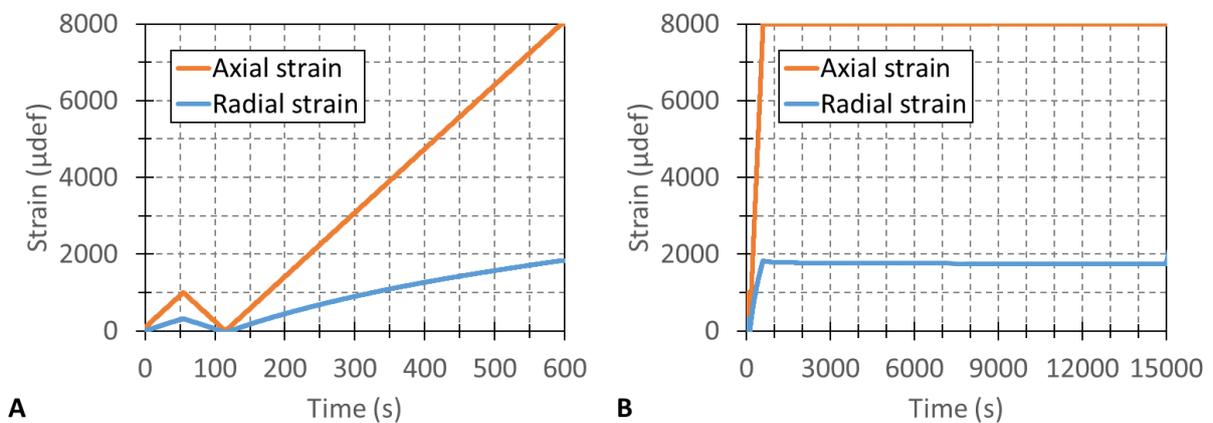


Figure 4-27 : Déformation axiale et radiale pendant l'essai de traction simple sur l'éprouvette C2-P1, réalisé à 30 °C et 0,1 %/min - (A) pendant la phase de traction pure (B) pendant les phases de traction pure et de fluage.

Courbe de contrainte

La Figure 4-28 présente un exemple de courbe de contrainte axiale enregistrée pendant un essai de traction simple. En particulier, la contrainte atteint une valeur maximale (contrainte maximale) fonction de la température et de la vitesse de déformation. L'évolution de ce paramètre est étudiée dans le chapitre 5.

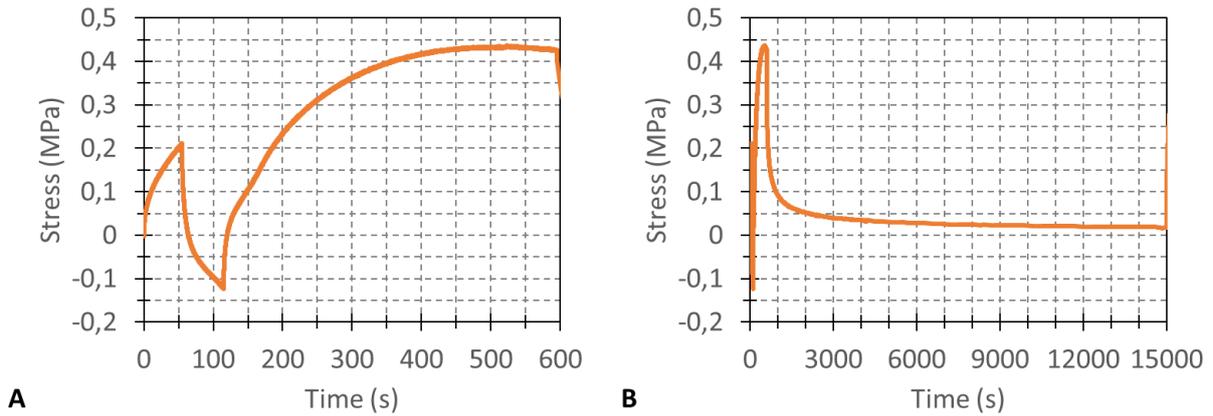


Figure 4-28 : Contrainte axiale pendant l'essai de traction simple sur l'éprouvette C2-P1, réalisé à 30 °C et 0,1 %/min – (A) pendant la phase de traction pure (B) pendant les phases de traction pure et de fluage.

Courbe de contrainte-déformation

La Figure 4-29 présente un exemple de courbe de contrainte-déformation axiales. Cette représentation est classique. Elle rend compte du comportement de l'enrobé testé. Elle permet également de déterminer la contrainte maximale.

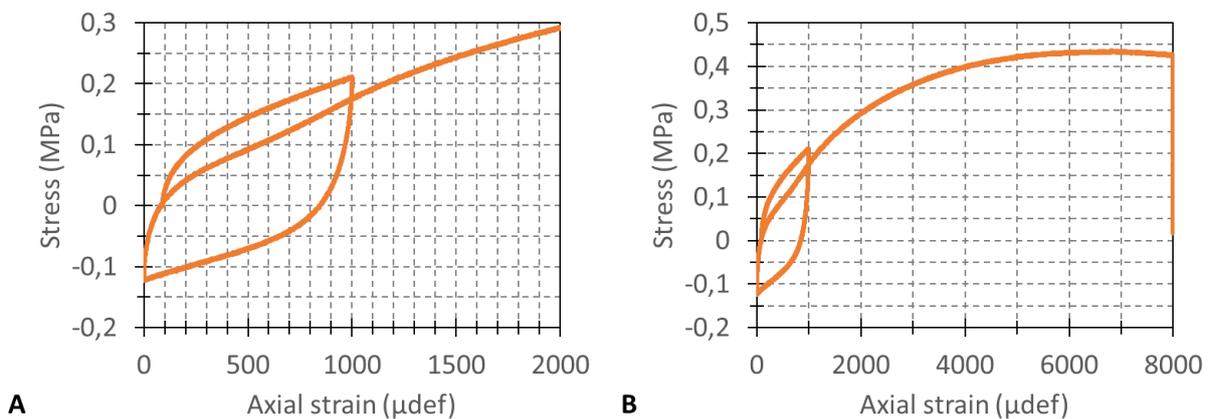


Figure 4-29 : Courbe de contrainte-déformation axiales pendant l'essai de traction simple sur l'éprouvette C2-P1, réalisé à 30 °C et 0,1 %/min - (A) pendant la phase de traction pure (B) pendant les phases de traction pure et de fluage.

5 Caractérisation du comportement VEL et VP d'un enrobé bitumineux : résultats expérimentaux et analyse

Dans ce chapitre, les deux campagnes expérimentales effectuées dans le cadre de cette thèse sont présentées et analysées. La première concerne la caractérisation du comportement VEL dans le domaine des petites déformations à l'aide de l'essai de module complexe et des mesures de module complexe et de coefficient de Poisson. La seconde concerne la caractérisation du comportement dans le domaine des grandes déformations avec les essais cycliques de traction compression simple. Un seul matériau a été utilisé. Il s'agit du matériau présenté (fabrication, composition, nomenclature) dans la section 4.1 du chapitre Procédures expérimentales.

5.1 Campagne expérimentale

5.1.1 Plan de la campagne expérimentale pour les essais cycliques de traction-compression

La campagne expérimentale est composée de 9 essais (*cf.* Figure 5-1). Chaque essai se déroule à une température T donnée (les 3 températures testées dans cette campagne sont $0\text{ }^{\circ}\text{C}$; $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $30\text{ }^{\circ}\text{C}$). Ils se composent de deux phases distinctes :

- Phase 1 : mesure de module complexe à la température T et aux fréquences $0,01\text{ Hz}$; $0,03\text{ Hz}$; $0,1\text{ Hz}$; $0,3\text{ Hz}$; 1 Hz ; 3 Hz ; 10 Hz , dont la procédure expérimentale est décrite dans la section 4.5.
- Phase 2 : traction simple avec cycle de charge/décharge et rechargement à la température T et à la vitesse de déformation constante $\dot{\epsilon}$ (les 3 vitesses testées dans cette campagne sont $0,01\text{ \%/min}$; $0,1\text{ \%/min}$ et 1 \%/min), dont la procédure expérimentale est décrite dans la section 4.7.

On réalise donc 9 essais caractérisés par une température T et une vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$. Dans la suite de ce chapitre, que ce soit pour la phase 1 ou 2, lorsqu'il sera question de

l'essai T- $\dot{\epsilon}$, cela fera référence à l'essai réalisé à la température T (phase 1 et 2) et à la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ (phase 2).

Dans la suite, on considère d'abord les mesures de modules complexes (phase 1) puis les essais de traction simple pour la présentation des résultats et l'analyse.

5.1.2 Nomenclature des éprouvettes testées

Le Tableau 5-1 présente l'ensemble des caractéristiques des éprouvettes testées lors de la campagne expérimentale menée pendant cette thèse. Il précise également la nomenclature des éprouvettes testées.

Tableau 5-1 : Nomenclature et caractéristiques des éprouvettes testées

Température visée	Vitesse de déformation (%/min)	Eprouvette testée	Dimensions (mm)		Pourcentage de vides (%)
			Hauteur	Diamètre	
0 °C	0,00473 ¹	C5-P4	140,6	75,3	7,6
	0,1	C4-P3	139,5	74,0	7,5
	1	C4-P2	140,5	75,1	7,2
15 °C	0,01	C8-P1	140,9	74,0	7,8
	0,1	C3-P2	140,7	74,0	7,4
	1	C1-P3	140,3	74,0	7,1
30 °C	0,01	C7-P2	140,4	75,1	7,2
	0,1	C2-P1	139,2	74,0	7,6
	0,97 ²	C7-P3	139,4	75,3	6,8

5.2 Etape 1 : Mesure du module complexe à la température de l'essai

Etant donné le plan de la campagne expérimentale, pour chaque température d'essai (0 °C ; 15 °C ; 30 °C), 3 mesures de module complexe sont réalisés (cf. Figure 5-1), permettant entre autre une analyse de la répétabilité de ces essais.

¹ Essai réalisé à la vitesse de 0,00473%/min au lieu de 0,01%/min pour satisfaire au PSTT.

² Essai réalisé à la vitesse de 0,97%/min au lieu de 1%/min pour satisfaire au PSTT.

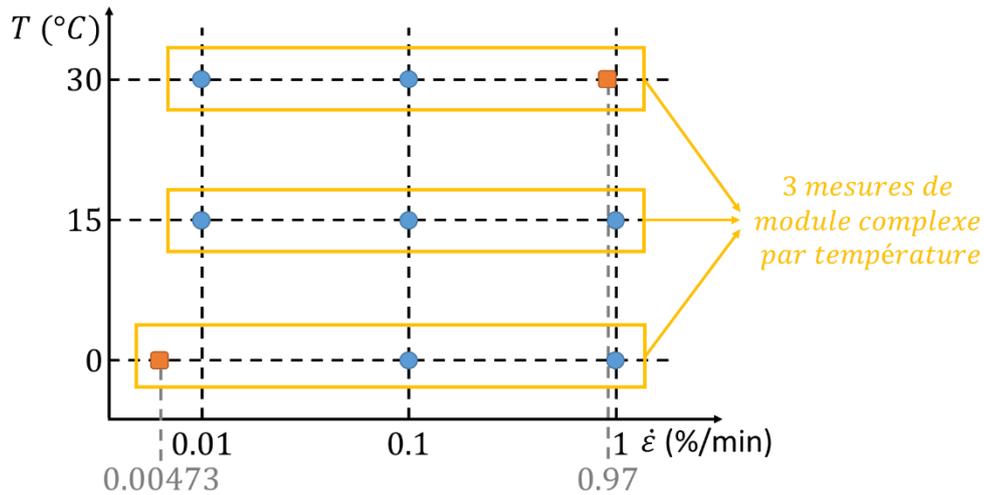


Figure 5-1 : Plan de la campagne des essais cycliques de traction-compression.

Dans la suite de cette section, les résultats des essais expérimentaux sont étudiés. La moyenne et l'écart type des différentes séries de mesures du module complexe (norme et angle de phase du module complexe et du coefficient de Poisson) sont analysés. La dispersion des mesures est quant à elle quantifiée par le coefficient de variation pour les normes du module complexe et du coefficient de Poisson, et par l'écart-type en ce qui concerne les mesures d'angle de phase. Le coefficient de variation est calculé comme le rapport de la moyenne sur l'écart type.

5.2.1 Courbes isothermes - Module complexe E^*

Les Figure 5-2 et Figure 5-3 présentent respectivement la norme et l'angle de phase du module complexe E^* en fonction de la fréquence et de la température. Ces courbes isothermes montrent que les mesures de module complexe sont très répétables. Les écarts de module observés aux mêmes isothermes sont faibles (cf. Tableau 5-2) :

- Dispersion inférieure à 8,4 % sur l'ensemble des valeurs de norme de module complexe et une dispersion moyenne de 4,7 %,
- Dispersion inférieure à 1,48° sur l'ensemble des valeurs d'angle de phase du module complexe et une dispersion moyenne de 0,68°.

Ces écarts peuvent être expliqués par des incertitudes entre la température réelle et la température visée. Enfin, une légère dispersion des propriétés entre éprouvettes est inévitable. A la vue des résultats, cette dispersion reste faible pour la norme de E^* .

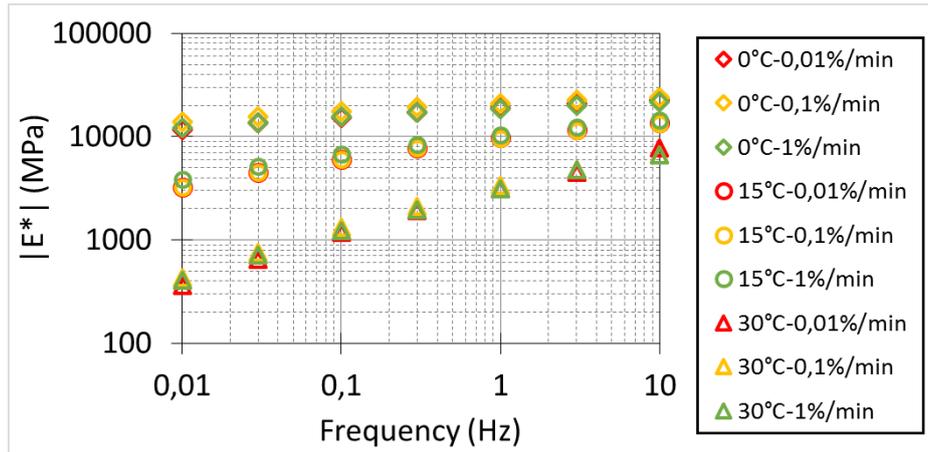


Figure 5-2 : Norme du module complexe $|E^*|$ en fonction de la fréquence et de la température (3 essais par température).

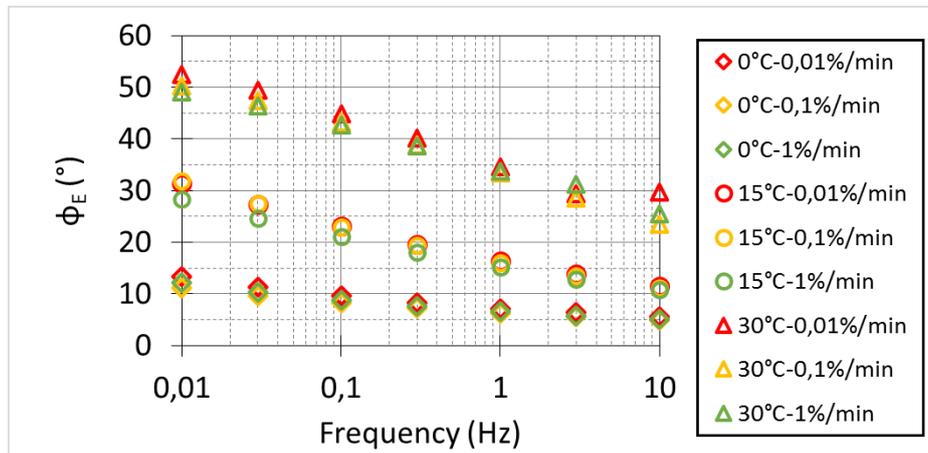


Figure 5-3 : Angle de phase du module complexe ϕ_E en fonction de la fréquence et de la température (3 essais par température).

Tableau 5-2 : Moyenne et écart type des séries de norme et d'angle de phase du module complexe E^* et pourcentage de dispersion.

Température	f (Hz)	Moyenne $ E^* $ (MPa)	Ecart type $ E^* $ (MPa)	Coefficient de variation	Moyenne ϕ_E (°)	Ecart type ϕ_E (°)
0 °C	0,01	12553,06	886,10	7,1 %	12,20	0,79
	0,03	14277,95	881,91	6,2 %	10,45	0,63
	0,1	16150,28	905,30	5,6 %	8,89	0,49
	0,3	17787,36	915,41	5,1 %	7,72	0,40
	1	19524,70	933,16	4,8 %	6,70	0,32
	3	21039,62	952,45	4,5 %	5,91	0,27
	10	22625,09	972,96	4,3 %	5,13	0,23
15 °C	0,01	3438,59	287,51	8,4 %	30,52	1,48
	0,03	4697,27	305,79	6,5 %	26,51	1,21
	0,1	6320,85	315,29	5,0 %	22,39	0,86
	0,3	7972,69	321,14	4,0 %	19,01	0,63
	1	9924,99	328,46	3,3 %	15,82	0,44
	3	11773,18	337,55	2,9 %	13,38	0,32
	10	13807,52	348,54	2,5 %	11,19	0,22
30 °C	0,01	399,86	27,35	6,8 %	50,61	1,21
	0,03	703,24	37,86	5,4 %	47,75	1,15
	0,1	1249,41	54,85	4,4 %	43,60	0,89
	0,3	2005,47	78,78	3,9 %	39,19	0,65
	1	3185,32	107,71	3,4 %	33,92	0,40
	3	4681,58	133,21	2,8 %	29,68	0,98
	10	6559,95	153,58	2,3 %	24,35	0,72

5.2.2 Courbes isothermes - Coefficient de Poisson complexe ν^*

Les Figure 5-4 et Figure 5-5 présentent respectivement la norme et l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe ν^* en fonction de la fréquence et de la température. Ces courbes isothermes montrent que les mesures de coefficient de Poisson complexe ne sont pas parfaitement répétables.

Dans le détail, on constate que les écarts de norme de coefficient de Poisson observés aux mêmes isothermes sont relativement faibles sauf pour la série « 15 °C-0.01 %/min » qui donne des résultats très éloignés des essais similaires. Si l'on écarte cette série d'essai dont la dispersion est d'environ 20 %, les écarts constatés sont donc assez faibles (cf. Tableau 5-3). La dispersion est alors de 6,8 % sur l'ensemble des valeurs de norme de coefficient de Poisson complexe et on obtient une dispersion moyenne de 3,4 %.

En ce qui concerne la mesure de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe, les résultats sont également satisfaisants sauf pour l'essai « 15 °C-0,1%/min ».

On en conclut donc que, contrairement au module complexe E^* , les essais de module complexe n'ont pas permis de déterminer avec suffisamment de précision les valeurs du coefficient de Poisson complexe ν^* en fonction de la température et de la fréquence.

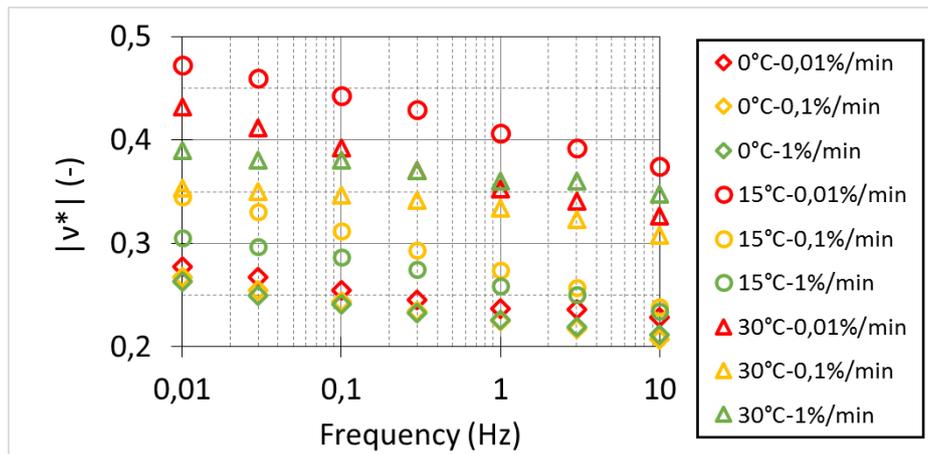


Figure 5-4 : Norme du coefficient de Poisson complexe $|\nu^*|$ en fonction de la fréquence et de la température (3 essais par température).

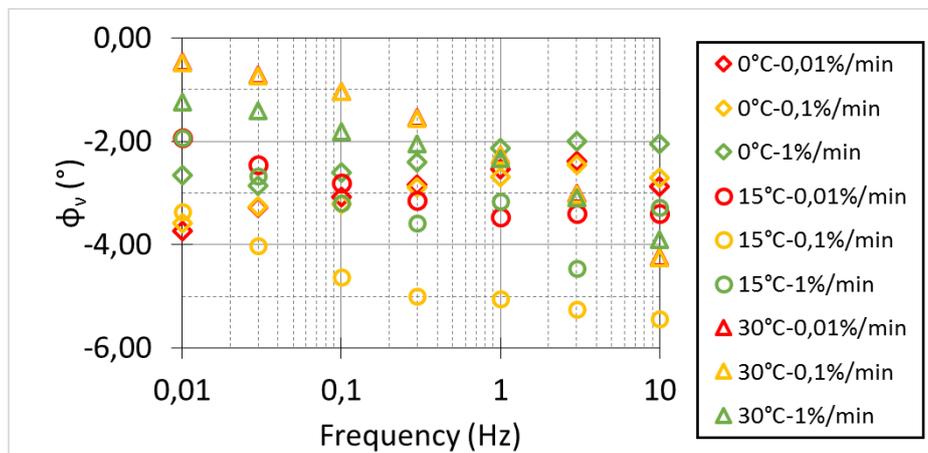


Figure 5-5 : Angle de phase du coefficient de Poisson complexe ϕ_ν en fonction de la fréquence et de la température (3 essais par température).

Ces écarts peuvent être expliqués par plusieurs incertitudes :

- Comme dans le cas du module complexe, on retrouve les incertitudes liées à la température.
- A ces incertitudes, s'ajoutent celles liées à la mesure des déformations radiales. Les capteurs de déplacement sans contact ont une taille de l'ordre du millimètre.

En fonction de la zone ciblée sur l'éprouvette (granulat ou mastic), la réponse de ces capteurs pourrait être différente et donc influencer les mesures. Des essais complémentaires pourraient être menés pour tenter de déterminer l'influence de la zone ciblée. D'autre part, l'amplitude des déplacements mesurés par les capteurs sans contact est très faible ;

Tableau 5-3 : Moyenne et écart type des séries de norme et d'angle de phase du coefficient de Poisson complexe ν^* et pourcentage de dispersion.

Température	f (Hz)	Moyenne $ \nu^* $ (-)	Ecart type $ \nu^* $ (-)	Coefficient de variation	Moyenne ϕ_ν (°)	Ecart type ϕ_ν (°)
0 °C	0,01	0,27	0,01	2,1 %	-3,32	0,45
	0,03	0,26	0,01	2,5 %	-3,13	1,21
	0,1	0,25	0,01	2,2 %	-2,97	0,86
	0,3	0,24	0,01	2,2 %	-2,71	0,63
	1	0,23	0,01	2,2 %	-2,45	0,44
	3	0,22	0,00	2,2 %	-2,28	0,32
	10	0,21	0,01	3,0 %	-2,54	0,22
15 °C	0,01	0,37	0,07	17,5 %	-2,41	0,64
	0,03	0,36	0,06	17,8 %	-3,05	0,65
	0,1	0,35	0,06	18,3 %	-3,54	0,72
	0,3	0,33	0,06	19,4 %	-3,90	0,72
	1	0,31	0,06	19,8 %	-3,88	0,77
	3	0,30	0,06	20,5 %	-4,37	0,65
	10	0,28	0,06	21,7 %	-4,04	0,93
30 °C	0,01	0,39	0,03	6,8 %	-0,73	0,34
	0,03	0,38	0,02	5,5 %	-0,95	0,30
	0,1	0,37	0,02	4,7 %	-1,29	0,34
	0,3	0,36	0,01	3,5 %	-1,71	0,22
	1	0,35	0,01	2,9 %	-2,29	0,03
	3	0,34	0,01	3,7 %	-3,05	0,03
	10	0,33	0,01	4,2 %	-4,13	0,15

5.2.3 Courbes dans le plan Cole-Cole et dans l'espace de Black

Les courbes du module complexe E^* dans l'espace de Black et dans le plan Cole-Cole sont données aux Figure 5-6 et Figure 5-7. Les données des 9 mesures de module complexe réalisées lors de la phase 1 des essais cycliques de traction-compression et celles de l'essai de module complexe réalisé sur l'éprouvette C2-P2 sont représentées. Les résultats détaillés de

l'essai de module complexe sur l'éprouvette C2-P2 sont présentés dans la section 4.6. Une courbe unique est obtenue dans ces deux représentations.

Cela permet de conclure que le matériau testé vérifie le Principe d'Equivalence Temps-Température. Ainsi à une température de référence fixée, il est possible de tracer une courbe unique de $|E^*|$ ou ϕ_E par translation des isothermes.

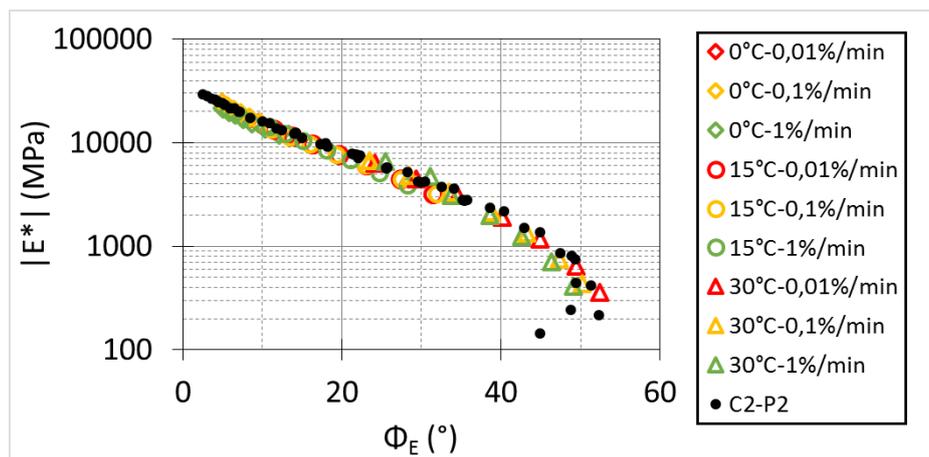


Figure 5-6 : Superposition des résultats de mesure du module complexe E^* dans l'espace de Black pour les 9 essais cycliques de T/C et l'essai de module complexe sur l'éprouvette C2-P2.

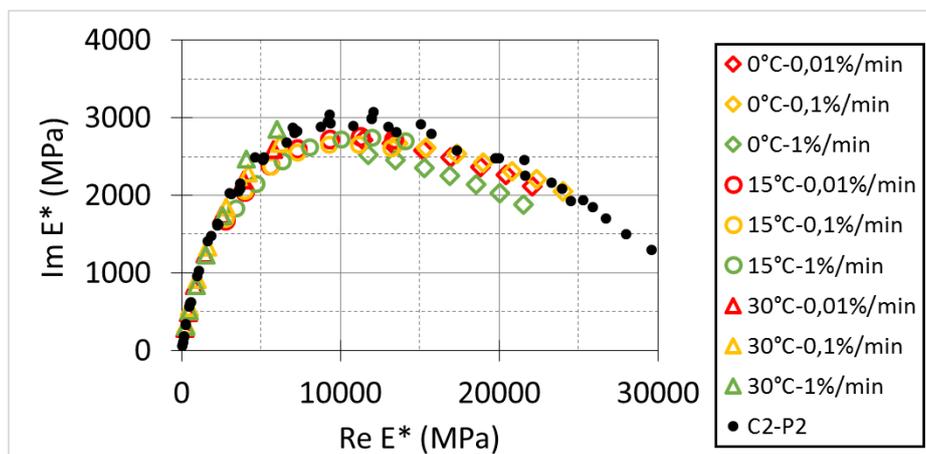


Figure 5-7 : Superposition des résultats de mesure du module complexe E^* dans le plan Cole-Cole pour les 9 essais cycliques de T/C et l'essai de module complexe sur l'éprouvette C2-P2.

Les courbes du coefficient de Poisson complexe ν^* dans l'espace de Black et dans le plan Cole-Cole sont présentées aux Figure 5-8 et Figure 5-9. En ce qui concerne les résultats obtenus pour le coefficient de Poisson complexe ν^* , on n'obtient pas une courbe unique. Cela

est lié aux problèmes de répétabilité des mesures du coefficient de Poisson complexe (essais « 15 °C-0,01%/min » et « 15 °C-0,1%/min »), observée lors de cette campagne expérimentale.

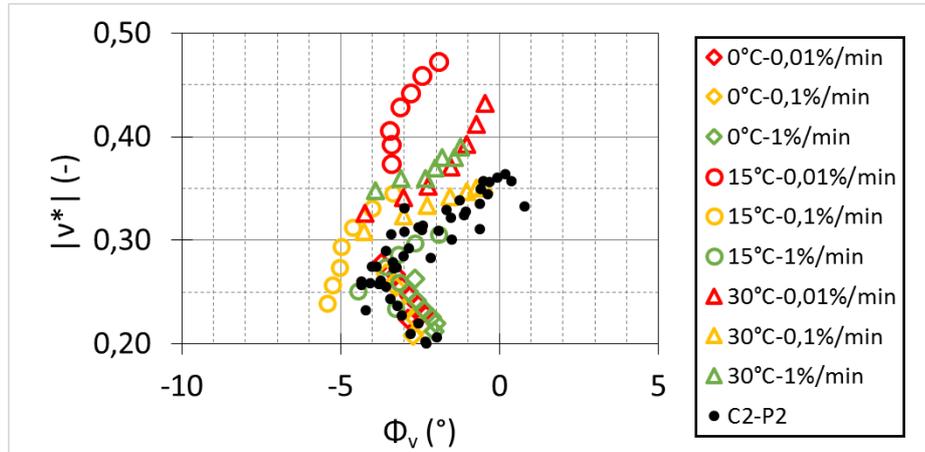


Figure 5-8 : Superposition des résultats du coefficient de Poisson complexe v^* dans l'espace de Black pour les 9 essais réalisés et l'essai de module complexe C2-P2.

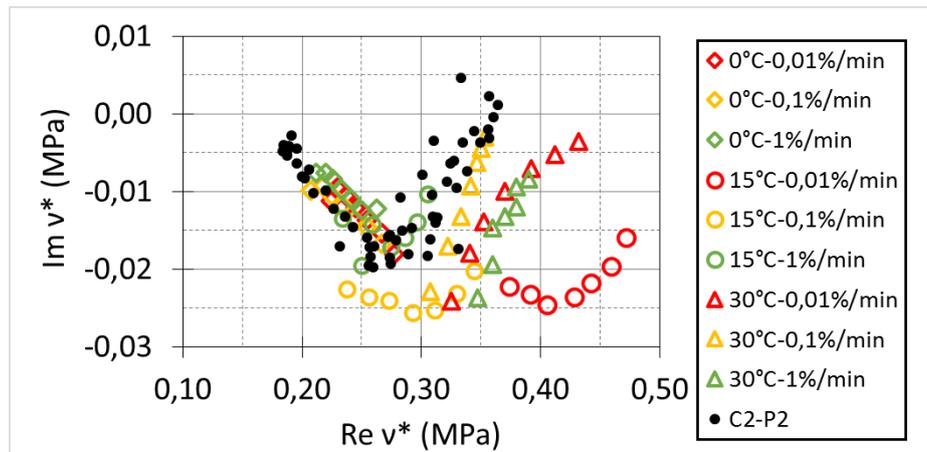


Figure 5-9 : Superposition des résultats du coefficient de Poisson complexe v^* dans le plan Cole-Cole pour les 9 essais réalisés et l'essai de module complexe C2-P2.

5.2.4 Courbes maîtresses

Pour rappel, la propriété d'équivalence temps-température ou fréquence-température permet de construire une courbe unique (courbe maîtresse) pour une température de référence T_{ref} choisie arbitrairement. Cette courbe est obtenue par translation parallèle à l'axe des fréquences de chaque isotherme. La courbe maîtresse de la norme du module complexe permet d'obtenir des valeurs de module pour des fréquences inaccessibles par

l'expérimentation. Le coefficient de translation de l'isotherme T par rapport à l'isotherme de référence T_{ref} est noté a_T .

La Figure 5-10 présente les coefficients de translation a_T déterminés suite aux essais cycliques de traction-compression. Ceux-ci sont comparés aux coefficients obtenus lors de l'essai de module complexe sur l'éprouvette C2-P2 (présenté section 4.6.3). On remarque que les coefficients obtenus sont identiques. Ce résultat était attendu car il s'agit dans les deux essais du même matériau. Les valeurs des paramètres de l'équation WLF sont données dans le Tableau 5-4.

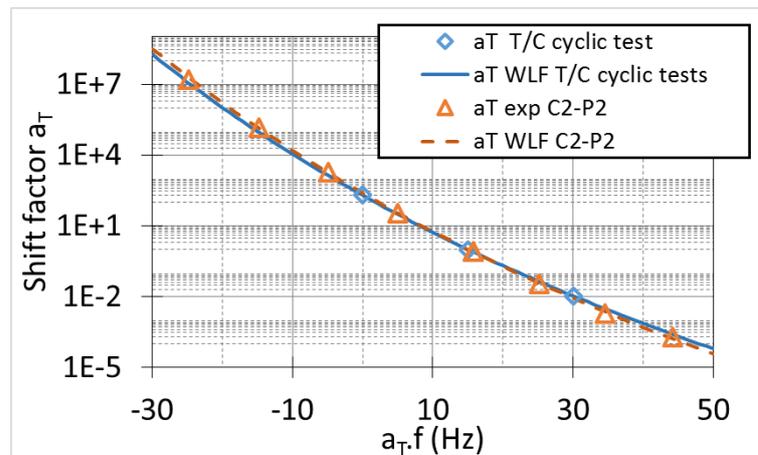


Figure 5-10 : Courbe des coefficients de translation a_T , expérimentaux et par la loi de WLF, obtenus lors de l'essai C2-P2 et lors des essais cycliques de traction-compression.

Tableau 5-4 : Valeurs des coefficients de l'équation WLF pour les deux types d'essais réalisés (pour $T_{ref} = 15^\circ\text{C}$)

	Essais cycliques de traction-compression	Essai de module complexe sur l'éprouvette C2-P2
C_1	27,89	30,54
C_2	197,22	206,73

Les Figure 5-11 et Figure 5-12 présentent les courbes maîtresse de la norme et de l'angle de phase du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15^\circ\text{C}$. Les deux courbes sont obtenues en utilisant les mêmes coefficients de translation a_T .

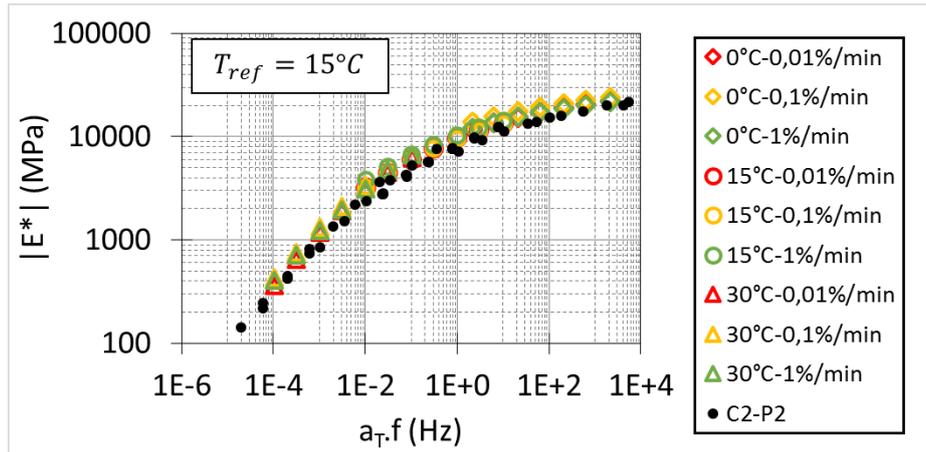


Figure 5-11 : Courbe maîtresse de la norme du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15^\circ C$.

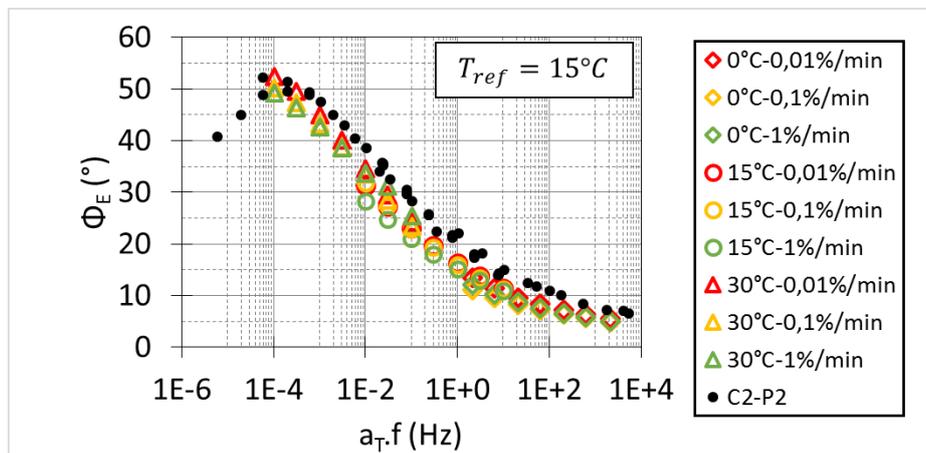


Figure 5-12 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15^\circ C$.

Les Figure 5-13 et Figure 5-14 présentent les courbes maîtresse de la norme et de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe ν^* à la température de référence $T_{ref} = 15^\circ C$. Pour construire ces courbes, on utilise les mêmes coefficients de translation a_T que ceux utilisés pour les courbes maîtresses du module complexe.

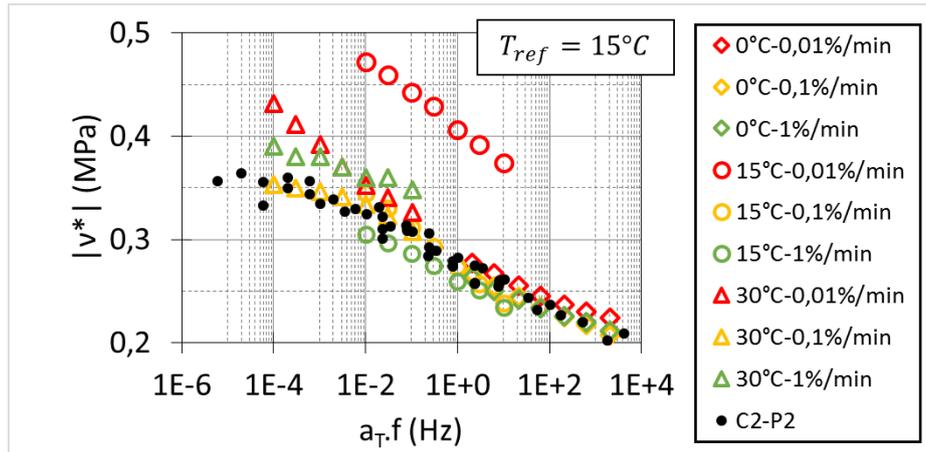


Figure 5-13 : Courbe maîtresse de la norme du coefficient de Poisson complexe ν^* à la température de référence $T_{ref} = 15^\circ\text{C}$.

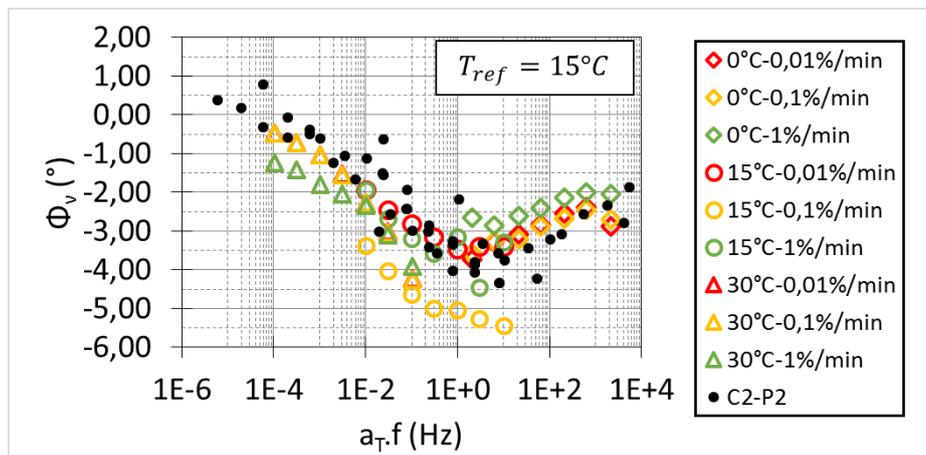


Figure 5-14 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe ν^* à la température de référence $T_{ref} = 15^\circ\text{C}$.

Pour ce qui concerne le coefficient de Poisson complexe, la dispersion des résultats expérimentaux obtenus ne permet pas de construire parfaitement une courbe unique.

5.3 Etape 2 : Essais de traction simple à vitesse de déformation constante

Etant donné le plan de la campagne expérimentale, 9 essais de traction simple sont réalisés pour différents couples de température-vitesse de déformation axiale (températures : 0 °C ; 15 °C ; 30 °C et vitesses de déformation 0,01 %/min ; 0,1 %/min ; 1 %/min).

Parmi ces essais, deux ont été réalisés à des vitesses de déformations axiales différentes de celles prévues dans le plan de campagne. Pour ces essais, les vitesses de déformations axiales ont été choisies de façon à vérifier le principe d'équivalence température. Ainsi :

- L'essai « 30 °C-1 %/min » est réalisé à une vitesse de déformation de 0,9735 %/min. Il est donc a priori équivalent par le principe d'équivalence temps-température à l'essai « 15 °C-0,01 %/min ».
- L'essai « 0 °C-0,01 %/min » est réalisé à une vitesse de déformation de 0,00473 %/min. Il est donc a priori équivalent par le principe d'équivalence temps-température à l'essai « 15 °C-1 %/min ».

Ces vitesses de déformations axiales sont déterminées par l'application du principe d'équivalence temps-température en supposant la variation des coefficients de translation dans le domaine viscoplastique identique à leur variation dans le domaine viscoélastique, telles que :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(30^{\circ}C) = \frac{a_T(15^{\circ}C)}{a_T(30^{\circ}C)} * 0,01\%/min \\ \dot{\varepsilon}(0^{\circ}C) = \frac{a_T(15^{\circ}C)}{a_T(0^{\circ}C)} * 1\%/min \end{cases} \quad (5.1)$$

Avec les coefficients de translation déterminés expérimentalement :

$$\begin{aligned} a_T(15^{\circ}C) &= 1 \\ a_T(30^{\circ}C) &= 0,0103 \\ a_T(0^{\circ}C) &= 211,30 \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.3.1 Résultats de la campagne expérimentale

5.3.1.1 Résultats pour un essai type (« 15 °C-0,1 % » - éprouvette C3-P2)

Dans cette section, un essai type est présenté et analysé. L'ensemble des résultats pour chacun des 9 couples de température-vitesse de déformation axiale sont donnés en Annexe 7.3.

La Figure 5-15 présente les résultats expérimentaux enregistrés pendant l'essai de traction simple à la température de 15 °C et à la vitesse de déformation axiale de 0,1 %/min sur l'éprouvette C3-P2. Les données sont :

- La déformation axiale sur laquelle est piloté l'essai,
- La contrainte axiale,
- La déformation radiale,
- La déformation volumique.

Dans l'ensemble des résultats présentés dans la suite, l'extension est comptée négativement et la compression positivement. Chaque essai est conduit jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

La Figure 5-16 présente les résultats expérimentaux enregistrés pendant l'essai de traction simple à la température de 15 °C et à la vitesse de déformation axiale de 0,1 %/min lors du premier cycle de chargement et de déchargement (soit pendant 120 s pour cet essai, réalisé à la vitesse de 0,1 %/min). Il s'agit donc des mêmes résultats que ceux de la Figure 5-15 mais ne concernent que le premier cycle de traction-compression à vitesse de déformation constante.

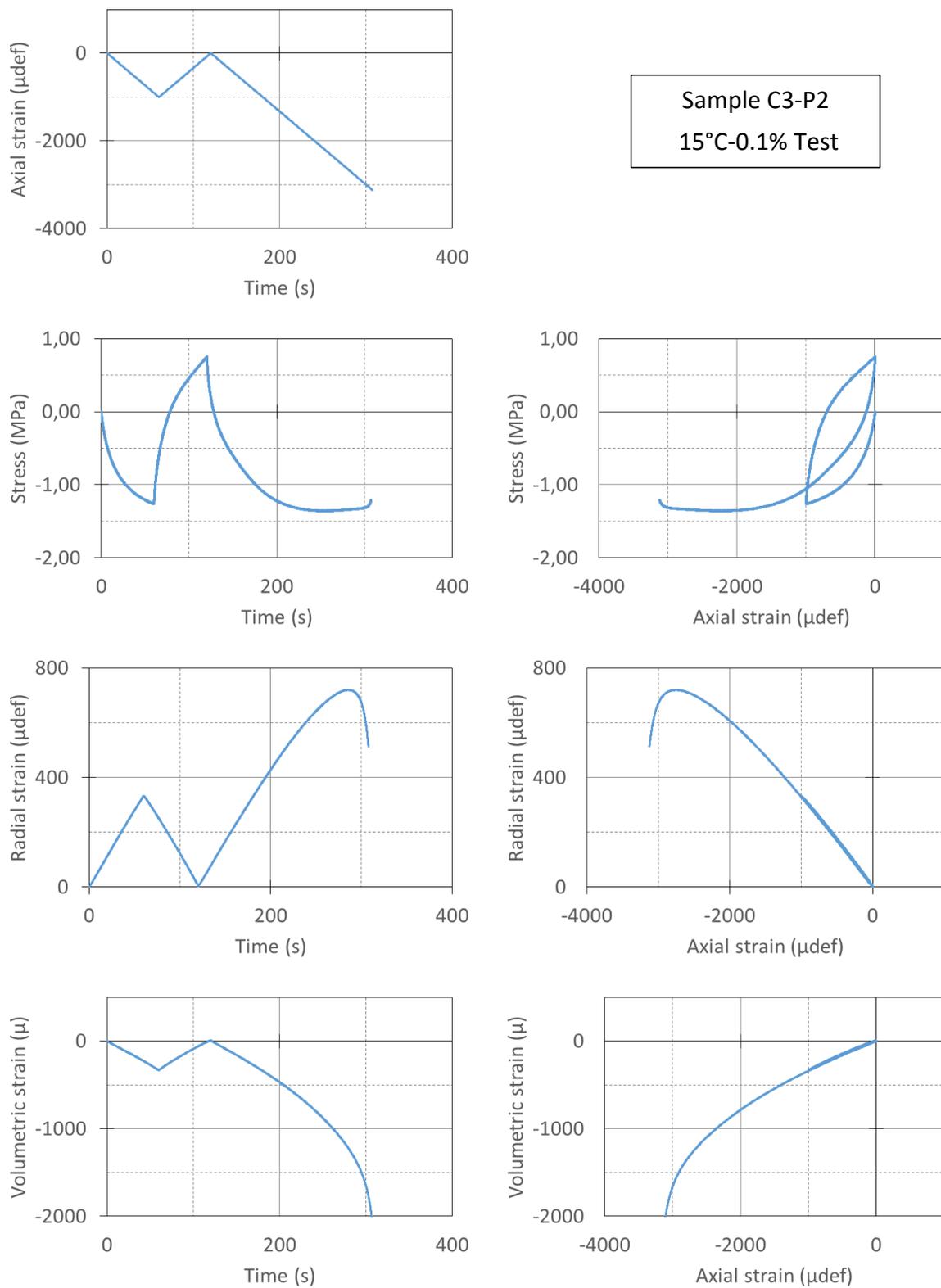


Figure 5-15 : Résultats expérimentaux issus de l'essai réalisé à la température de 15 °C pour une vitesse de déformation axiale de 0,1 %/min.

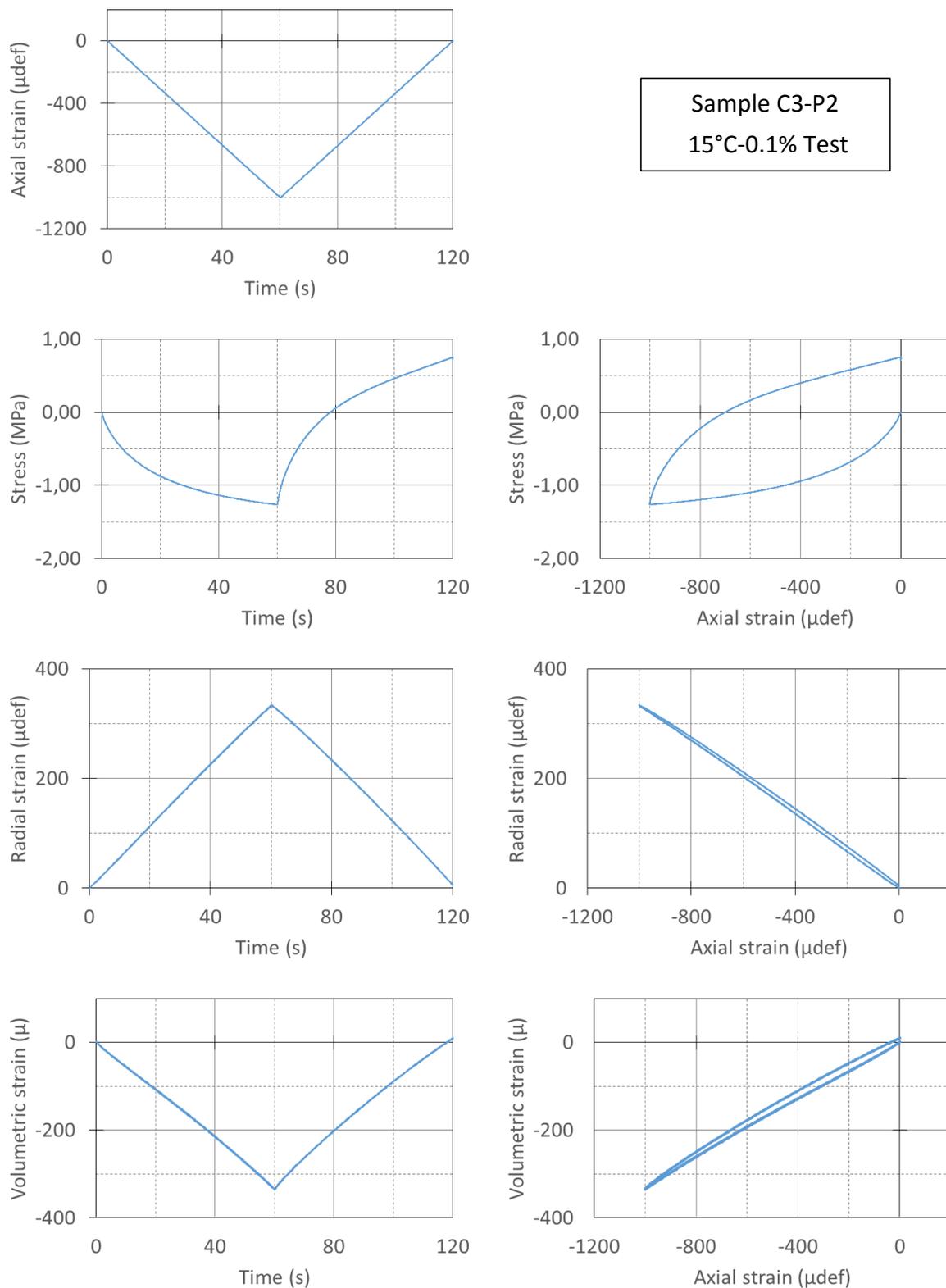


Figure 5-16 : Résultats expérimentaux issus de l'essai réalisé à la température de 15 °C pour une vitesse de déformation axiale de 0,1 %/min lors du premier cycle de chargement et déchargement.

Les données enregistrées lors des essais réalisés à 15 °C et 30 °C sont exploitables. En revanche, des difficultés de collage ont été rencontrées lors des essais à 0 °C. Les éprouvettes des essais 0 °C-1 %/min et 0 °C-0.00497 %/min se sont décollées lors de la première phase de chargement tandis que l'éprouvette de l'essai 0 °C-0,1 %/min a connu une rupture partielle lors de cette même phase. Dans la suite, ce sont donc principalement les résultats des essais réalisés à 15 °C et 30 °C qui sont présentés.

5.3.1.2 Résultats par température d'essai

Dans cette section, sont regroupés les résultats des essais de traction simple par température d'essai.

Les Figure 5-17 et Figure 5-18 présentent respectivement les résultats expérimentaux pour les essais réalisés à 15 °C et 30 °C. Sur chacune des figures, sont représentées, à gauche les données de l'essai dans son intégralité et, à droite les données des essais au cours du premier cycle de chargement-déchargement.

Les observations directes des résultats de ces essais pour des déformations inférieures à 500 μ def permettent de vérifier qu'à une température donnée :

- La contrainte axiale est une fonction croissante de la vitesse de déformation,
- La déformation radiale est une fonction décroissante de la vitesse de déformation,
- La déformation volumique est une fonction croissante (en valeur absolue) de la vitesse de déformation.

De plus comme attendu, on observe que l'augmentation de la température à vitesse identique diminue la contrainte axiale dans l'éprouvette, le module du matériau diminuant. Enfin, les coefficients de Poisson sont décroissants avec l'augmentation de la vitesse de déformation axiale et l'augmentation de la température.

Si l'on observe maintenant le comportement pour des plus grandes déformations (> 1000 μ def), on constate que la courbe contrainte-déformation passe par un maximum. Plus la vitesse de déformation axiale est importante, plus la valeur de ce maximum est importante. À la contrainte, l'augmentation de la température entraîne une diminution de la contrainte maximale atteinte. Au-delà de ce maximum, on observe une diminution de la contrainte au sein de l'éprouvette, malgré l'augmentation de la déformation axiale. A ces températures, on peut raisonnable supposer qu'il s'agit d'une rupture plutôt ductile. Globalement, on observe que les contraintes maximales sont croissantes avec la diminution de la température et

l'augmentation de la vitesse de sollicitation. L'intervalle des valeurs de contraintes maximales varie de 0,13 MPa pour l'essai « 30 °C-0,01 % », à 3,96 MPa pour l'essai « 0 °C-0,1 %/min ». On peut penser que l'essai « 0 °C-1 %/min » aurait conduit à une contrainte maximale encore supérieure, mais les résultats ne sont pas disponibles à cause d'une rupture prématurée de la colle.

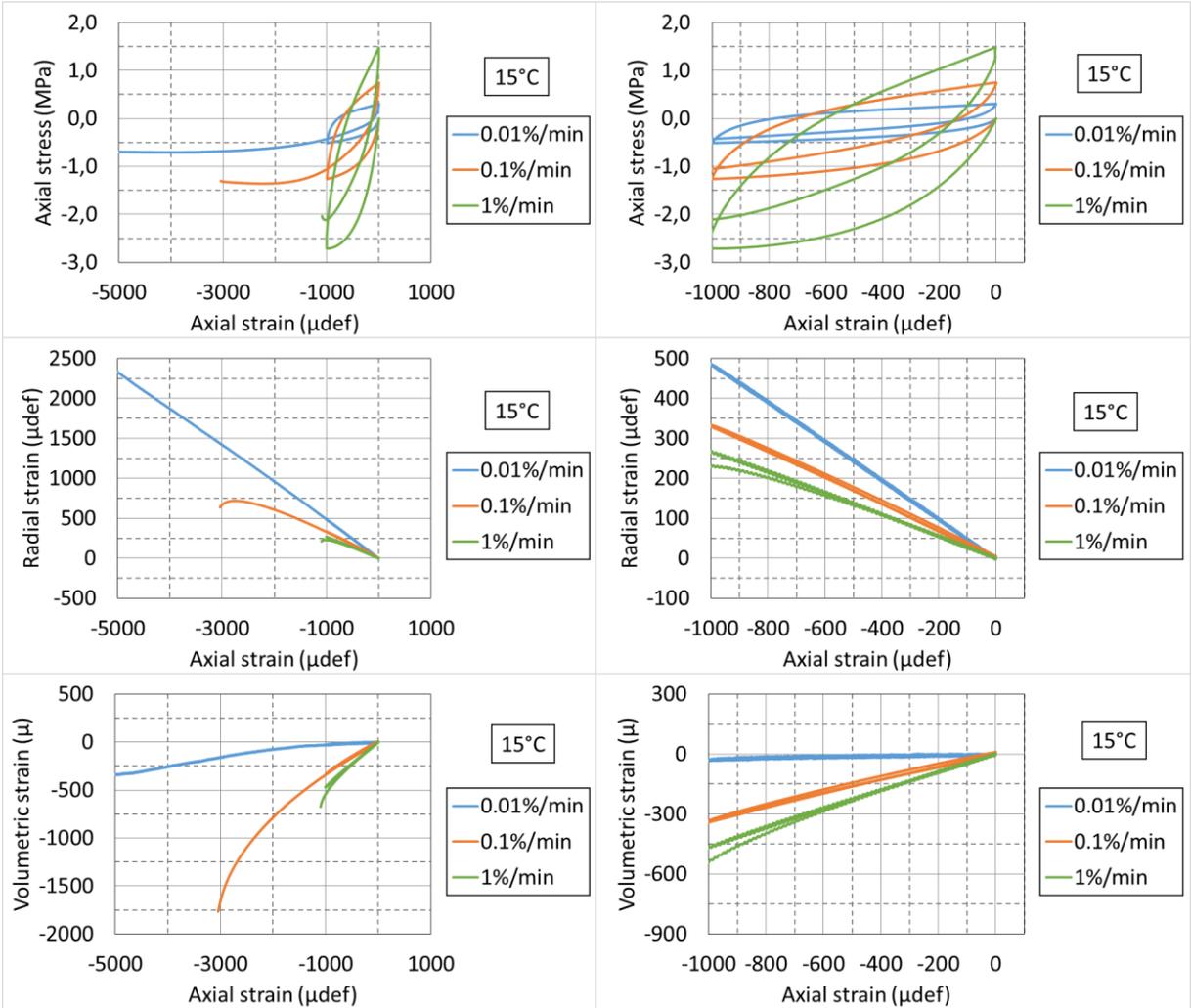


Figure 5-17 : Résultats expérimentaux issus des essais réalisés à la température de 15 °C pour des vitesses de déformation axiale de 0,01 %/min ; 0,1 %/min ; 1 %/min. A gauche totalité de l'essai et à droite premier cycle de chargement-déchargement.

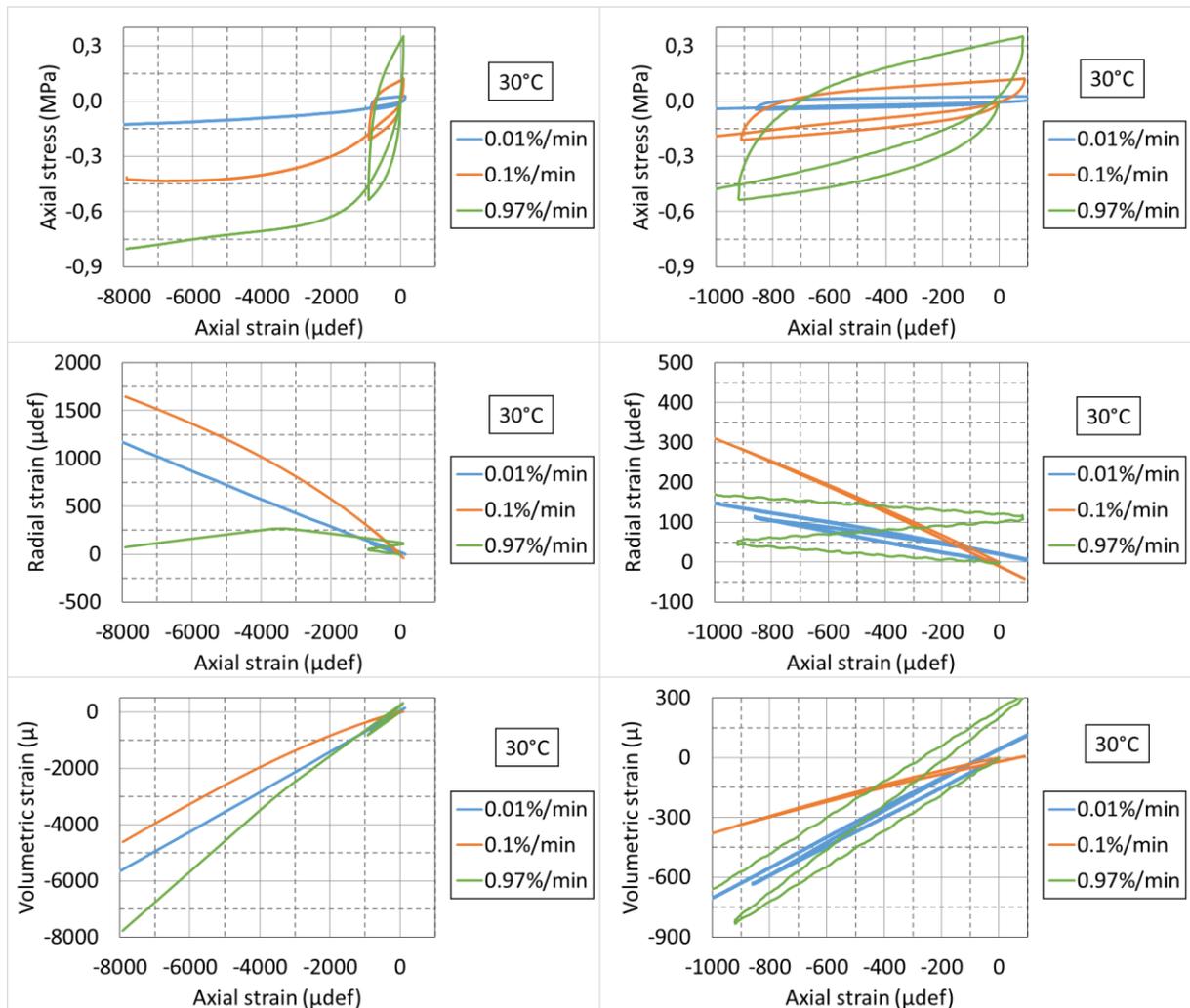


Figure 5-18 : Résultats expérimentaux issus des essais réalisés à la température de 30 °C pour des vitesses de déformation axiale de 0,01 %/min ; 0,1 %/min ; 0,97 %/min. A gauche totalité de l'essai et à droite premier cycle de chargement-déchargement.

On notera enfin que lors de l'essai « 30 °C-0,97 %/min », les données des déformations radiales ne sont pas exploitables à cause d'un problème expérimental avec les capteurs sans contact. Elles ont donc écartées des analyses futures.

5.3.2 Détermination de la contrainte maximale

Si l'on observe maintenant les courbes contrainte-temps des Figure 5-17 et Figure 5-18, on constate que la contrainte atteint généralement un maximum au cours de l'essai de traction simple, avant de diminuer jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Le Tableau 5-5 présente un résumé des ruptures observées (ductile, fragile, rupture de la colle). Pour rappel,

l'ensemble des courbes contrainte-déformation des essais réalisés dans cette thèse sont consultables en Annexe 7.3.

Tableau 5-5 : Type de rupture observée pour chaque essai.

Essai	Eprouvette	Type de rupture
0 °C-0,00473 %	C5-P4	Rupture de la colle
0 °C-0,1 %	C4-P3	Rupture fragile de l'éprouvette
0 °C-1 %	C4-P2	Rupture de la colle
15 °C-0,01 %	C8-P1	Rupture ductile
15 °C-0,1 %	C3-P2	Rupture ductile
15 °C-1 %	C1-P3	Rupture ductile
30 °C-0,01 %	C7-P2	Rupture ductile
30 °C-0,1 %	C2-P1	Rupture ductile
30 °C-0,97 %	C7-P3	Rupture ductile

La contrainte maximale est fonction de la température T de l'essai et de la vitesse de déformation axiale $\dot{\epsilon}$. L'ensemble des valeurs de contrainte maximale atteintes pendant la campagne expérimentale est donnée dans le Tableau 5-6.

Considérons la vitesse dite équivalente $\dot{\epsilon}^{eq}$ obtenue par translation à l'aide des coefficients de translation a_T obtenu dans le domaine VEL. Elle est obtenue par l'équation suivante :

$$\dot{\epsilon}^{eq}(T, \dot{\epsilon}) = \frac{\dot{\epsilon}}{a_T(T)} \quad (5.3)$$

Où $\dot{\epsilon}$ est la vitesse de déformation axiale et T est la température, de l'essai considéré.

Le Tableau 5-6 présente l'ensemble des valeurs de force et contrainte maximale obtenues en fonction de la température et de la vitesse de sollicitation de l'essai et de la vitesse équivalente. On remarque que dans le cas des essais réalisés à 0 °C, on ne dispose pas des résultats aux vitesses de déformation axiale 0,0047 %/min et 1 %/min car les essais ont connus des ruptures prématurées dans la colle (cf. section précédente).

Tableau 5-6 : Contrainte maximale en fonction de la température et de la vitesse de déformation axiale - Résultats expérimentaux des essais de traction simple.

Température (°C)	Vitesse de déformation (%/min)	aT (-)	Vitesse de déformation équivalente (%/min)	Vitesse de déformation équivalente (def/s)	Force maximale (kN)	Contrainte maximale (MPa)
0	0,0047	3,19E+02	1,5E+00	2,5E-04	-	-
0	0,1	3,19E+02	3,2E+01	5,3E-03	17,04	3,96
0	1	3,19E+02	3,2E+02	5,3E-02	-	-
15	0,01	1,50E+00	1,5E-02	2,5E-06	3,04	0,71
15	0,1	1,50E+00	1,5E-01	2,5E-05	5,85	1,36
15	1	1,50E+00	1,5E+00	2,5E-04	11,67	2,71
30	0,01	1,52E-02	1,5E-04	2,5E-08	0,58	0,13
30	0,1	1,52E-02	1,5E-03	2,5E-07	1,88	0,44
30	0,9735	1,52E-02	1,5E-02	2,5E-06	3,46	0,80

La Figure 5-19 présente la contrainte maximale (abscisse) en fonction de la vitesse équivalente $\dot{\varepsilon}^{eq}$ pour chaque gamme de température testée. On remarque que les points expérimentaux forment une courbe unique. Cette observation a déjà été montrée dans Di Benedetto (1987).

Le modèle de Di Benedetto et Yan permet de modéliser la courbe vitesse équivalente-contrainte maximale. L'équation (2.70) donne la relation (Nguyen 2010) entre la vitesse équivalente $\dot{\varepsilon}$ et la contrainte maximale σ_p , à la température T :

$$\ln(\dot{\varepsilon}(\sigma_p, T) + \delta) = \frac{1}{\beta} \left(\sigma_p + \gamma + \frac{\xi}{\sigma_p} \right) \quad (2.70)$$

Où δ , β , γ , ξ sont des paramètres du modèle.

La calibration du modèle permet de déterminer la valeur des paramètres δ , β , γ , ξ du modèle. Celles-ci sont indiquées dans le Tableau 5-7. La courbe obtenue par le modèle de Di Benedetto et Yan est représentée sur la Figure 5-19.

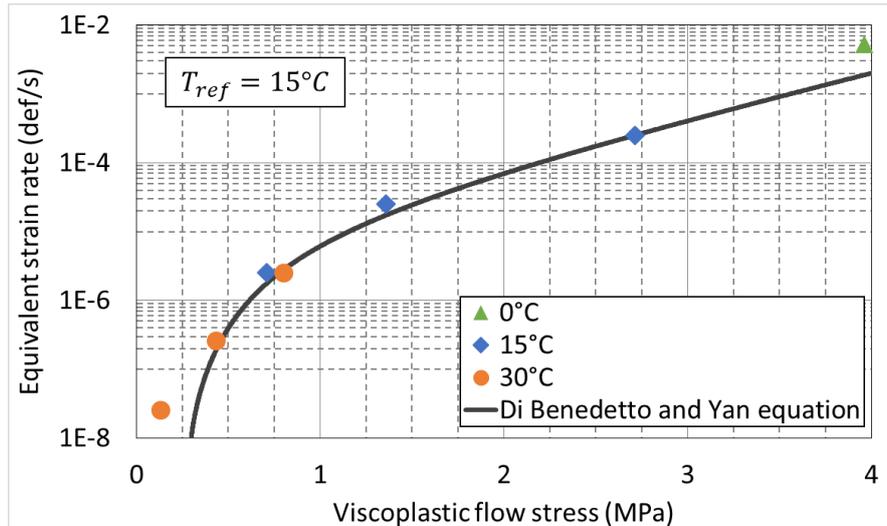


Figure 5-19 : Contrainte maximale σ_p lors des essais de traction simple en fonction de la vitesse de déformation axiale équivalente $\dot{\epsilon}$ calculée à la température de 15 °C.

Tableau 5-7 : Valeurs des constantes du modèle de fluage viscoplastique de Di Benedetto et Yan (Nguyen 2010) pour le matériau testé pendant la campagne expérimentale.

$\dot{\epsilon}_0$ (-)	5,00E-03
ξ (MPa ²)	-1,40E+00
γ (MPa)	-8,00E+00
β (MPa)	7,00E-01
δ (-)	1,00E-08

5.3.3 Vérification du principe d'équivalence temps-température dans le domaine non-linéaire

Des études ont déjà été menées pour vérifier la validité du principe de superposition temps-température dans le domaine non linéaire (Di Benedetto et al. 2008; Di Benedetto et al. 2010), il s'agit ici d'étudier les essais réalisés au cours de ce travail, basés sur cette propriété.

Comme expliqué en introduction de cette section, deux essais ont été réalisés à des vitesses de déformations axiales adaptées pour permettre de vérifier la validité du principe de superposition temps-température dans le domaine des grandes déformations. Pour ces essais, les vitesses de déformations axiales ont été choisies de façon à vérifier le principe d'équivalence température. Il s'agit des essais :

- « 30 °C-1 %/min » réalisé à une vitesse de déformation de 0,9735 %/min, et
- « 0 °C-0,01 %/min » réalisé à une vitesse de déformation de 0,00473 %/min.

Ces vitesses sont calculées par l'utilisation du principe d'équivalence Temps-Température à partir des coefficients de translation obtenus dans le domaine VEL, ce qui donne :

$$\dot{\varepsilon}^{eq}(T, \dot{\varepsilon}) = \dot{\varepsilon} \cdot a_T(T) \quad (5.4)$$

Les Figure 5-21 à Figure 5-22 présentent les résultats de ces essais en fonction du temps équivalent t^{eq} et de la vitesse de déformation équivalente $\dot{\varepsilon}^{eq}$, obtenus à partir des équations :

$$t^{eq}(T, \dot{\varepsilon}) = \frac{t}{a_T(T)} \quad (5.5)$$

Comme indiqué dans la section 5.1, les coefficients de translation aux températures utilisées ont pour valeur :

$$\begin{aligned} a_T(15^\circ C) &= 1 \\ a_T(30^\circ C) &= 0,0103 \\ a_T(0^\circ C) &= 211,30 \end{aligned} \quad (5.6)$$

La Figure 5-20 présente la comparaison entre les résultats des essais 30 °C-0,9735 %/min et 15 °C-0,01 %/min au cours de l'essai de traction simple dans son intégralité. La Figure 5-21 présente les résultats du même essai au cours du cycle de chargement-déchargement.

On observe que les courbes sont bien superposées pendant tout l'essai, ce qui tend à confirmer la validité du Principe d'Equivalence Temps-Température dans le domaine viscoplastique.

Dans le détail, on observe un petit décalage de la courbe de l'essai 30 °C-0,9735 %/min au début de l'essai. Cela est lié à un défaut de tarage des extensomètres au début de la phase 2. En effet, lors du dépouillement des résultats on a constaté un décalage de -81 μ def environ.

C'est bien cet écart qui est retrouvé à la fin de la première traction jusqu'à 1000 μdef , celle-ci se stoppant à 919 μdef .

De plus à la fin de l'essai, on observe que les deux courbes ne sont plus superposées, on peut réellement supposer que cela est lié à la rupture de l'éprouvette. En effet, ayant dépassé la contrainte maximale, l'éprouvette est proche de la rupture.

Concernant maintenant les courbes de déformations radiales, on n'observe aucune superposition des courbes. Cependant comme relevé lors des essais de module complexe, la mesure des déformations radiales n'a pas une reproductibilité suffisante. On peut donc penser que ces observations sont plutôt liées à la dispersion des propriétés des éprouvettes.

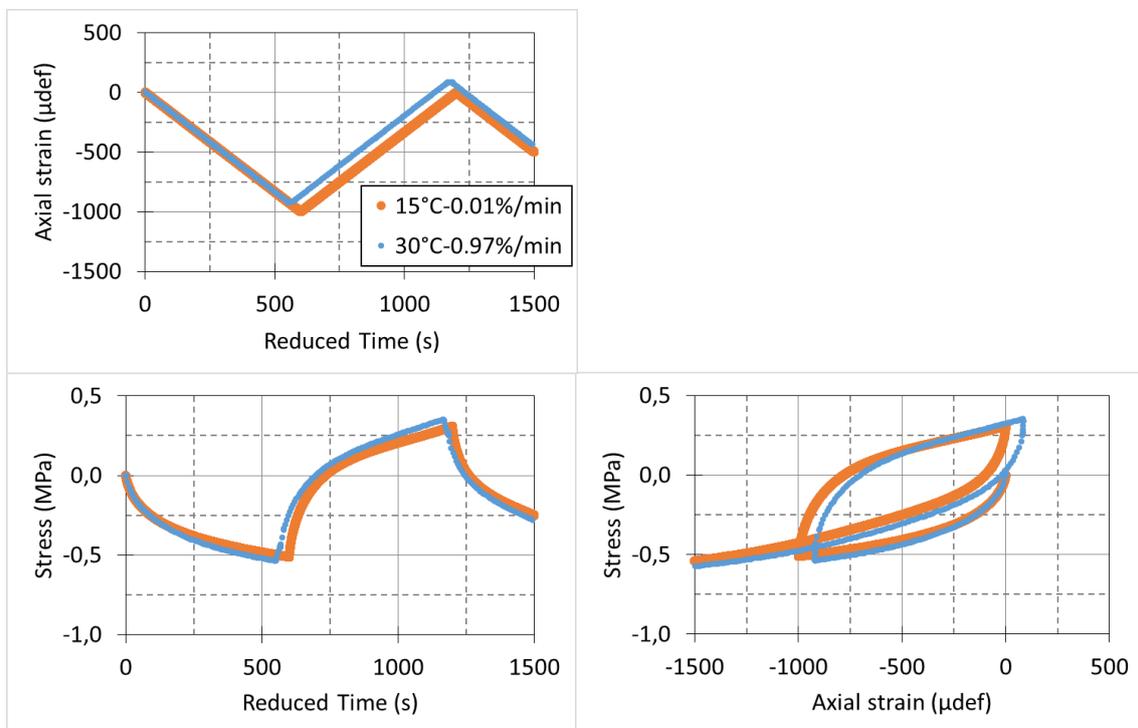


Figure 5-20 : Résultats des essais de traction simple 15 °C-0,01 %/min et 30 °C-0,97 %/min en fonction du temps équivalent et de la déformation axiale pendant le cycle de chargement-déchargement.

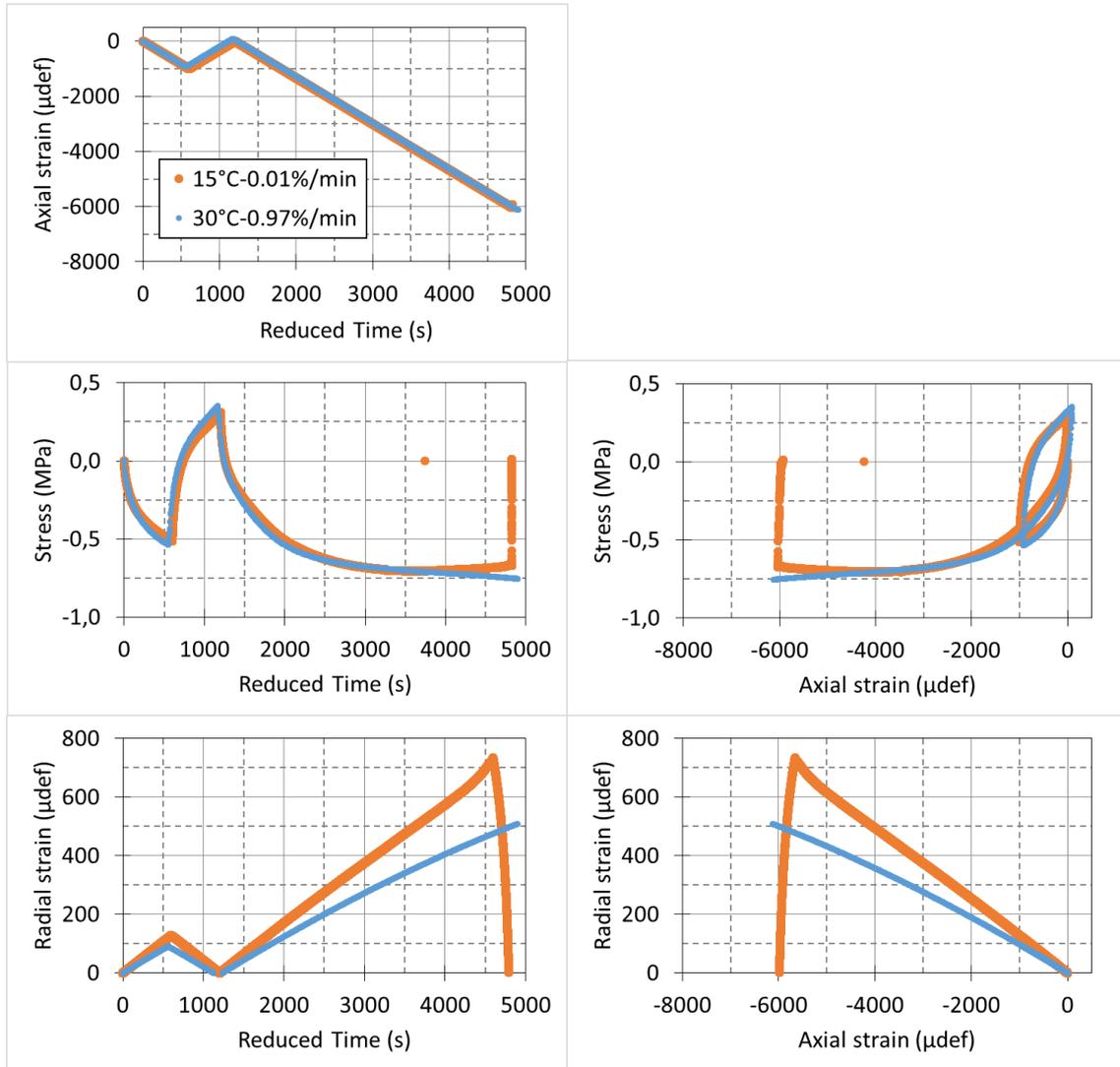


Figure 5-21 : Résultats des essais de traction simple 15 °C-0,01 %/min et 30 °C-0,97 %/min en fonction du temps équivalent et de la déformation axiale.

La Figure 5-22 présente la comparaison entre les résultats des essais 0 °C-0,00473 %/min et 15 °C-1 %/min au cours de l'essai de traction simple dans son intégralité. Etant donné la rupture prématurée de l'éprouvette de l'essai à 0 °C, il n'est pas possible de proposer une observation complète. On peut tout de même observer qu'au moins sur la première partie de l'essai, les résultats obtenus tendent à confirmer les conclusions des essais précédents.

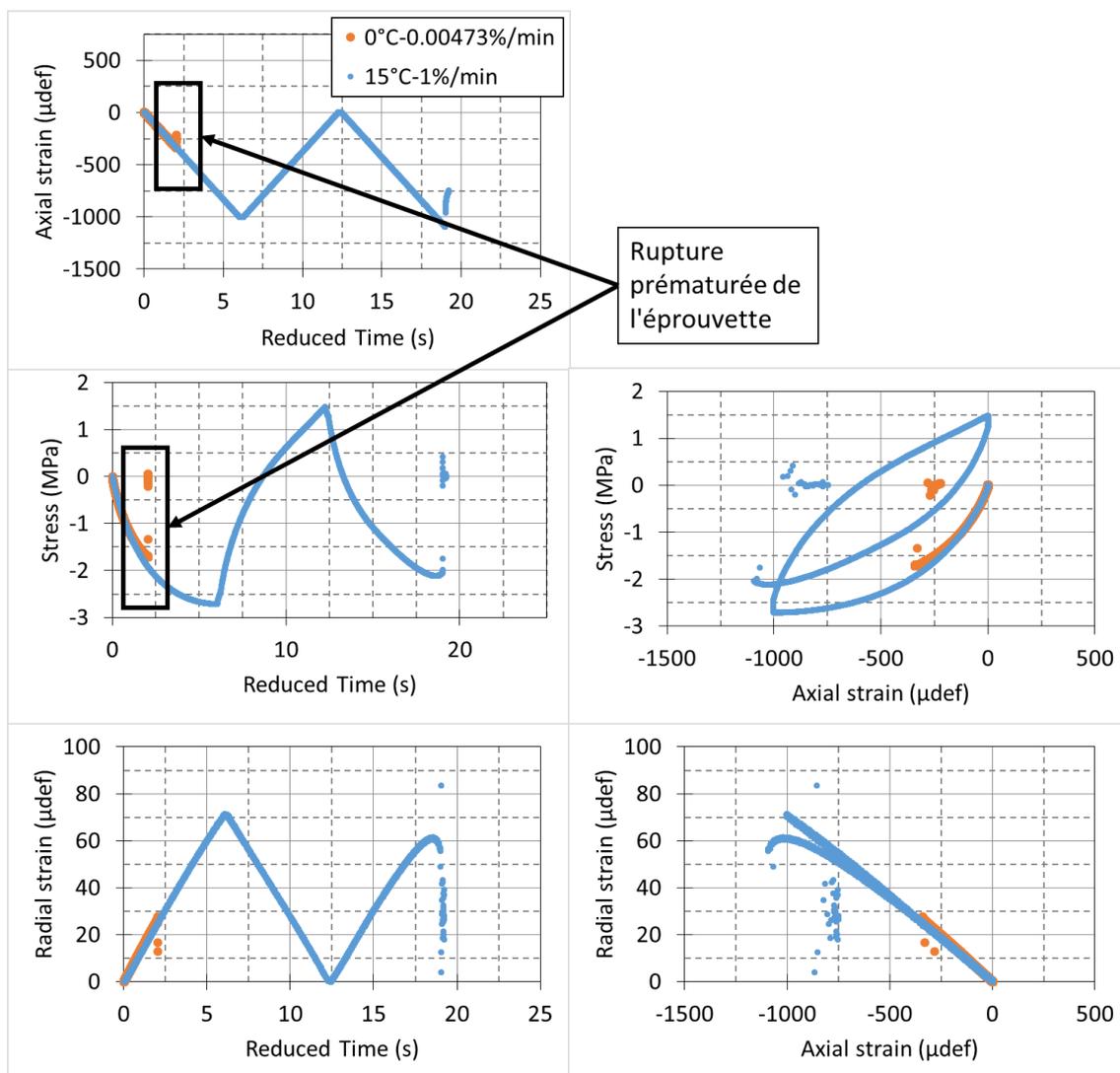


Figure 5-22 : Résultats des essais de traction simple 15 °C-1%/min et 0 °C-0,00473%/min en fonction du temps équivalent et de la déformation axiale.

Pour conclure sur cette section, les essais menés lors de cette campagne montrent que le Principe d'Equivalence Temps-Température dans le domaine des « grandes » déformations (comportement viscoplastique des enrobés bitumineux) semble valable. Cela confirme des observations réalisées aux cours de précédentes campagnes expérimentales au LGCB-LTDS de l'ENTPE (Di Benedetto et al. 2010; Nguyen et al. 2014).

Cette campagne expérimentale souligne la nécessité de poursuivre les investigations dans ce domaine et de réaliser d'avantage d'essais expérimentaux afin de répéter ces résultats. Il serait également intéressant d'envisager d'autres matériaux et d'autres types de sollicitations.

6 Modélisation du comportement des enrobés bitumineux

Il s'agit dans ce chapitre de présenter les résultats de simulations réalisées à l'aide du modèle DBN dans les domaines VEL et VP introduits dans cette thèse.

6.1 Régime stabilisé lors des essais de module complexe

6.1.1 Calibration du modèle 2S2P1D

Le modèle 2S2P1D permet de simuler le comportement viscoélastique linéaire des enrobés bitumineux. Il est présenté dans la section 1.3.2.10. Il est utilisé dans cette thèse pour simuler le comportement VEL du matériau testé. Les résultats des essais de module complexe sont approchés par le modèle en utilisant la procédure de calibration présentée dans ce paragraphe. Elle consiste à déterminer les paramètres du modèle 2S2P1D, E_{00} , E_0 , k , h , δ , β , τ_E , ν_{00} , ν_0 et τ_ν à une température de référence T_{ref} donnée, afin d'approcher les données expérimentales. Les paramètres τ_E et τ_ν sont les seuls à varier en fonction de la température et permettent de prendre en compte ses effets.

La procédure est la suivante :

- **E_0 est déterminé dans le plan Cole-Cole** (Figure 5-7)
Sa valeur correspond à la limite atteinte par le module lorsque la fréquence tend vers l'infini. Cette limite est réelle (angle de phase nul) ; c'est-à-dire que le matériau tend vers un comportement purement élastique.
- **E_{00} est déterminé dans le domaine des basses fréquences**
Sa valeur correspond à la limite atteinte par le module lorsque la fréquence tend vers 0. Cette limite est réelle et strictement positive pour les enrobés bitumineux ; c'est-à-dire que le matériau tend vers un comportement purement élastique. (Dans le cas des bitumes, on remarque que cette valeur est nulle, l'amortisseur linéaire joue alors un rôle prépondérant et le comportement du matériau tend vers celui d'un matériau visqueux pur (ou newtonien) lorsque la fréquence tend vers 0).

- **Les constantes k, h, δ relatives aux corps à fluage parabolique sont déterminées dans le plan Cole-Cole (Figure 5-7)**
 Leur valeur a un effet sur la forme de la courbe comme indiqué sur la Figure 1-27. k est la pente à basse température et h celle à haute température. δ est un facteur de forme qui influence le maximum de la courbe.
- **Le paramètre β est déterminé à partir de la courbe maîtresse de la norme du module complexe $|E^*|$ (Figure 5-11)**
 La pente de la courbe maîtresse tend vers 1 lorsque la température tend vers 0. Le paramètre β permet de fixer la fréquence à partir de laquelle cette pente va converger vers 1. Ainsi plus β sera faible, plus la pente du module tendra rapidement vers 1 lorsque la fréquence tend vers 0. Le paramètre β est en outre relié à la viscosité η de l'amortisseur linéaire du modèle.
- **Les paramètres ν_{00} et ν_0 sont déterminés à partir de la courbe maîtresse de la norme du coefficient de Poisson complexe $|\nu^*|$ (Figure 5-13)**
 La détermination de ces deux constantes se fait aisément car leur valeur est à la limite du coefficient de Poisson complexe lorsque la fréquence tend vers 0 (pour ν_{00}) et vers l'infini (pour ν_0).
- **Le paramètre τ_ν est déterminé à partir de la courbe maîtresse de la norme du coefficient de Poisson complexe $|\nu^*|$ (Figure 5-13)**
 Ce paramètre est déterminé par translation de la courbe maîtresse parallèlement à l'axe des fréquences équivalentes.

6.1.2 Résultats de la simulation du comportement VEL

Les simulations avec le modèle 2S2P1D du module complexe et du coefficient de Poisson complexe des courbes maîtresses du matériau testé sont présentées dans les Figure 6-1 à Figure 6-4. Les résultats expérimentaux sont issus de la campagne expérimentale réalisée au cours de cette thèse et présentée dans le chapitre 0.

Ces simulations permettent de souligner les bonnes performances du modèle pour simuler le comportement viscoélastique des enrobés bitumineux. Dans le détail, on note que :

- Cette simulation est très bonne pour la norme du module complexe, sur toute la gamme de température et/ou de fréquence.
- Pour l'angle de phase du module complexe, elle est également très bonne sur toute la plage testée expérimentalement. Pour les fréquences équivalentes

inférieures à 10^{-4} Hz, il n'est cependant pas possible de conclure en raison de l'amplitude trop faible de températures testées pendant la campagne expérimentale.

- Pour la norme du coefficient de Poisson complexe, si l'on exclut les résultats expérimentaux de l'essai « 15 °C-0,01 %/min » pour laquelle des problèmes de mesures avaient été identifiés, le modèle fournit des bons résultats.
- Enfin pour l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe, le modèle fournit également des résultats acceptables malgré la forte dispersion des mesures expérimentales.

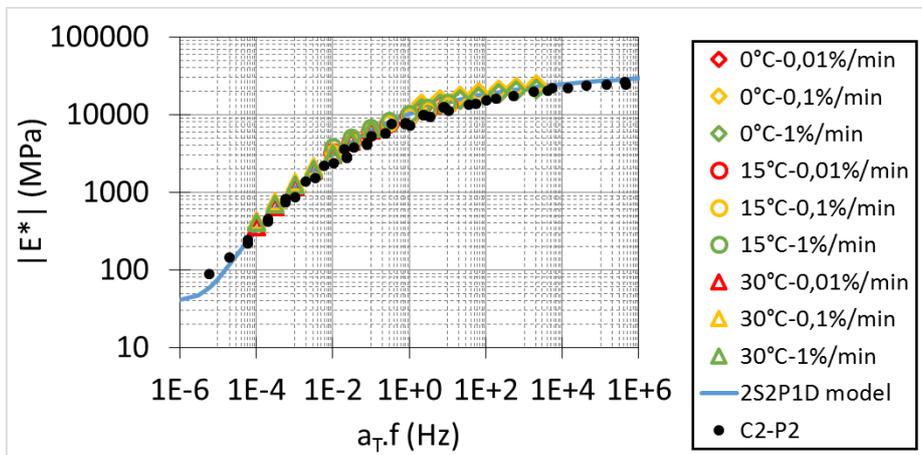


Figure 6-1 : Courbe maîtresse de la norme du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15$ °C. Résultats expérimentaux et simulations avec le modèle 2S2P1D.

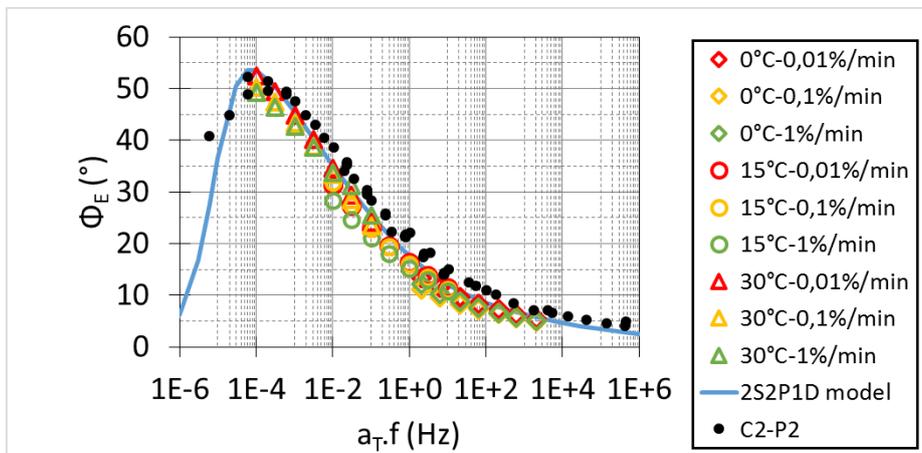


Figure 6-2 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ °C}$. Résultats expérimentaux et simulations avec le modèle 2S2P1D.

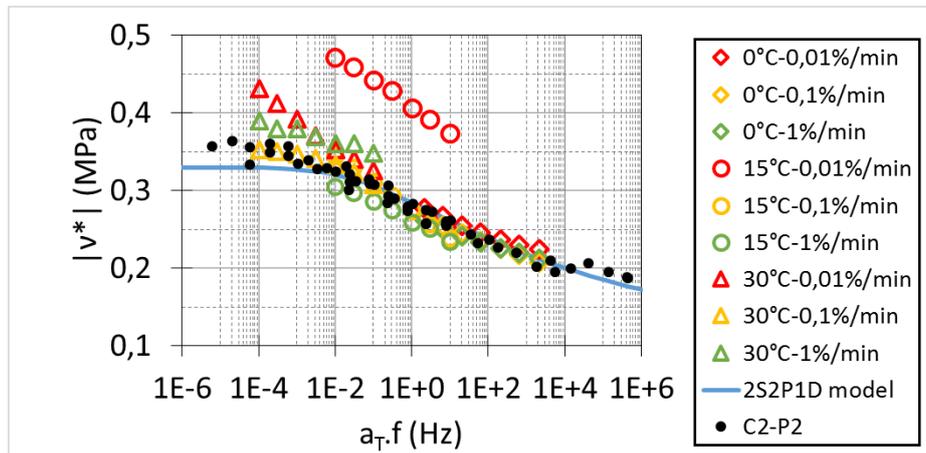


Figure 6-3 : Courbe maîtresse de la norme du coefficient de Poisson complexe v^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ °C}$. Résultats expérimentaux et simulations avec le modèle 2S2P1D.

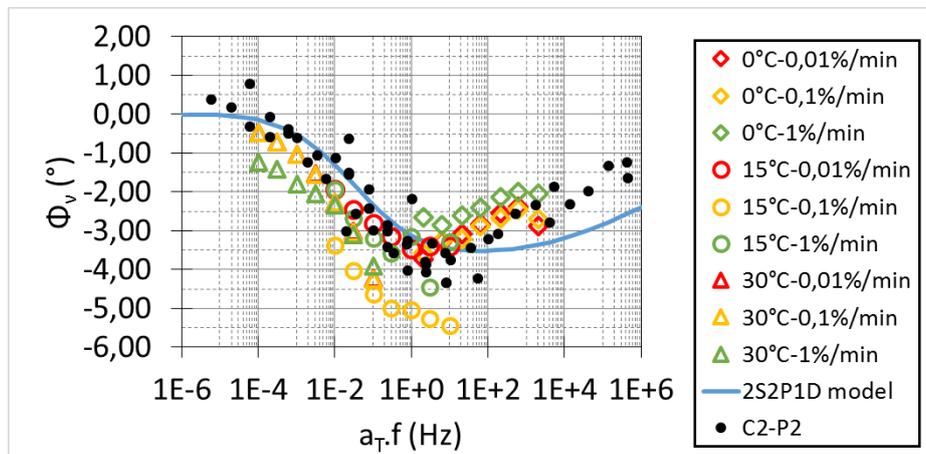


Figure 6-4 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe v^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ °C}$. Résultats expérimentaux et simulations avec le modèle 2S2P1D.

Les paramètres du modèle 2S2P1D sont donnés dans le Tableau 6-1 pour le matériau testé lors de cette campagne expérimentale.

Tableau 6-1 : Constantes du modèle 2S2P1D pour le matériau testé dans cette thèse à la température de référence $T_{ref} = 15^{\circ}\text{C}$.

E_{00} (MPa)	E_0 (MPa)	k (-)	h (-)	δ (-)	τ_E (s)	β (-)	ν_{00} (-)	ν_0 (-)	τ_ν (s)
40	34500	0,165	0,51	2,1	0,232	100	0,33	0,14	0,232

6.1.3 Comparaison des résultats expérimentaux avec une campagne expérimentale précédente

Il s'agit dans cette section de comparer les résultats expérimentaux obtenus lors de ce travail avec une campagne expérimentale précédente menée en mars 2013 sur le même matériau (Pham et al. 2015b).

Tableau 6-2 : Constantes du modèle 2S2P1D à la température de référence $T_{ref} = 15^{\circ}\text{C}$ pour le matériau testé (A) dans cette thèse et (B) lors d'une campagne expérimentale précédente (Pham et al. 2015b)

	E_{00} (MPa)	E_0 (MPa)	k (-)	h (-)	δ (-)	τ_E (s)	β (-)	ν_{00} (-)	ν_0 (-)	τ_ν (s)
A	40	34500	0,165	0,51	2,1	0,232	100	0,33	0,14	0,232
B						0,1				

Les Figure 6-5 et Figure 6-6 présentent les courbes maîtresse de la norme et de l'angle de phase du module complexe obtenues à partir :

- Des résultats expérimentaux de l'essai de module complexe sur l'éprouvette C2-P2,
- Des résultats expérimentaux issus de la phase 1 des essais cycliques de traction-compression aux températures de 0°C ; 15°C et 30°C ,
- Des résultats expérimentaux de la campagne de 2013 (Pham et al. 2015b) à différentes températures (entre $-19,3^{\circ}\text{C}$ et $42,4^{\circ}\text{C}$),
- De la simulation à l'aide du modèle 2S2P1D calibré sur les résultats expérimentaux de la campagne précédente (cf. Tableau 6-2),
- De la simulation à l'aide du modèle 2S2P1D calibré sur les résultats expérimentaux de la campagne menée pendant cette thèse (cf. Tableau 6-1).

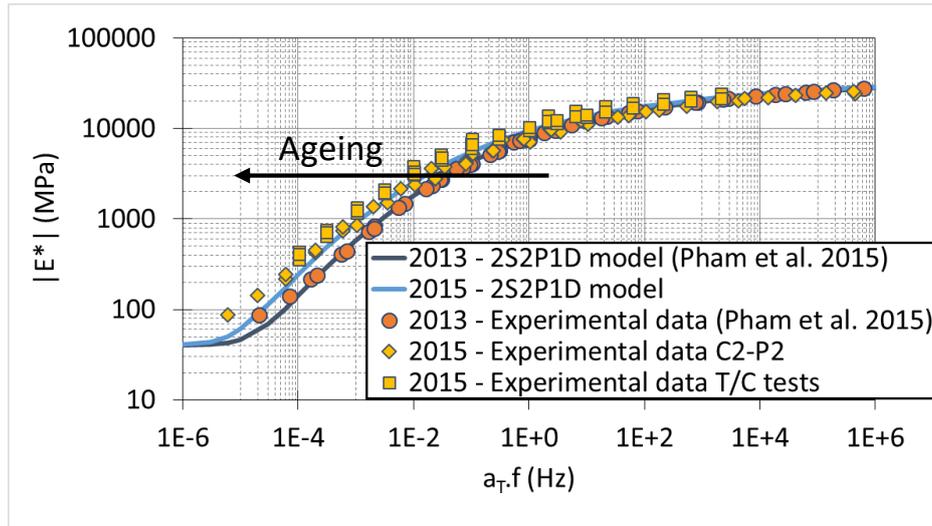


Figure 6-5 : Courbe maîtresse de la norme du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ }^\circ\text{C}$, pour deux campagnes expérimentales (celle réalisée pendant cette thèse et celle de (Pham et al. 2015b)), résultats expérimentaux et modèles 2S2P1D.

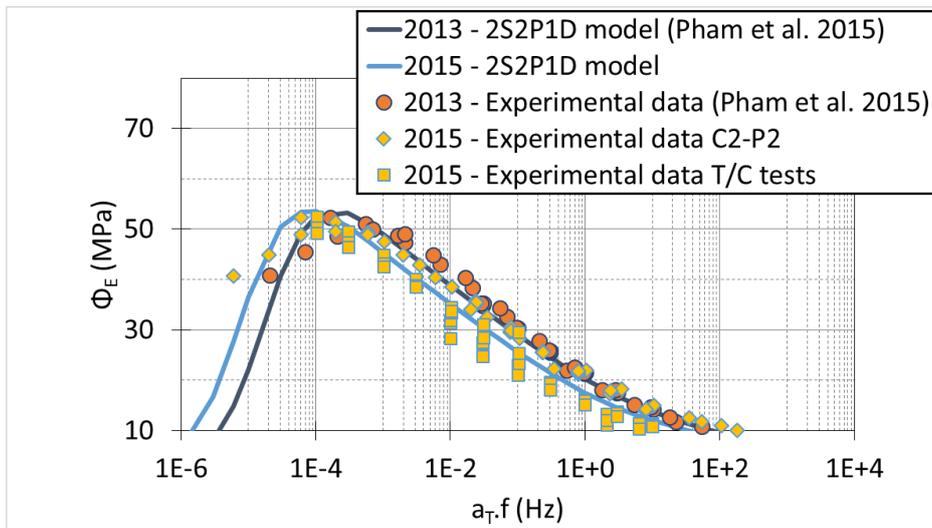


Figure 6-6 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ }^\circ\text{C}$, pour deux campagnes expérimentales (celle réalisée pendant cette thèse et celle de (Pham et al. 2015b)), résultats expérimentaux et modèles 2S2P1D.

On observe que les paramètres du modèle 2S2P1D indépendants de la température sont tous identiques pour les deux campagnes. Ainsi, on note que seul le paramètre τ (fonction de la température) diffère entre les deux campagnes. Cet écart est équivalent à une variation de

température de $-4\text{ }^{\circ}\text{C}$ entre la campagne expérimentale précédente et celle menée pendant cette thèse. L'hypothèse envisagée pour expliquer cet écart est un vieillissement de l'enrobé bitumineux testé. Les éprouvettes utilisées lors de la campagne expérimentale menée pendant cette thèse ont été fabriquées en 2013 lors de la première campagne. Or on observe ici une rigidification des éprouvettes, la norme du module étant systématiquement plus élevée à une fréquence donnée. Ce phénomène peut donc être expliqué par le vieillissement du bitume.

Les Figure 6-7 et Figure 6-8 donnent les représentations des résultats expérimentaux et des modèles 2S2P1D dans le plan Cole-Cole et celui de Black. Ces courbes sont indépendantes de la température et ainsi du paramètre τ . On observe que les courbes des modèles 2S2P1D des deux campagnes sont parfaitement superposées. On observe également que les résultats expérimentaux des deux campagnes forment une courbe unique dans ces deux représentations. Cela confirme les observations précédentes.

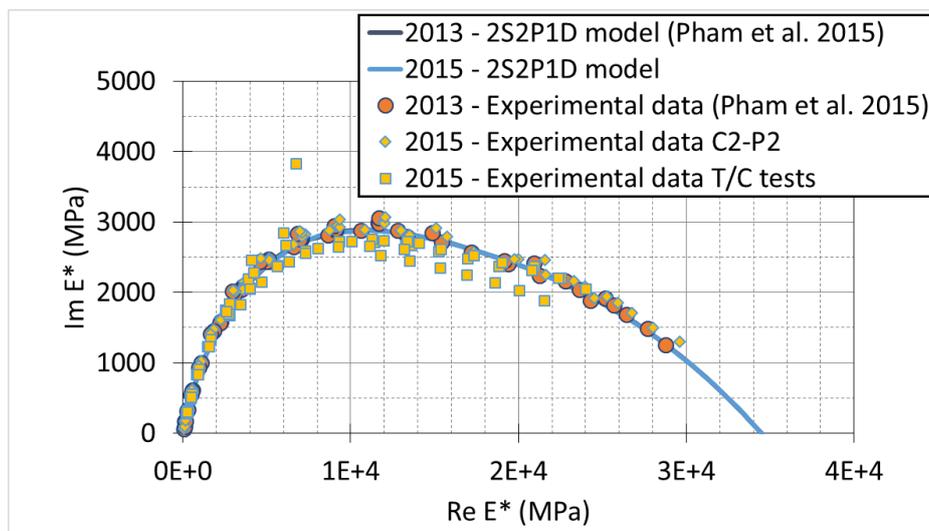


Figure 6-7 : Résultats du module complexe E^* dans le plan Cole-Cole pour les deux campagnes expérimentales (celle réalisée pendant cette thèse et (Pham et al. 2015b)), résultats expérimentaux et modèles 2S2P1D.

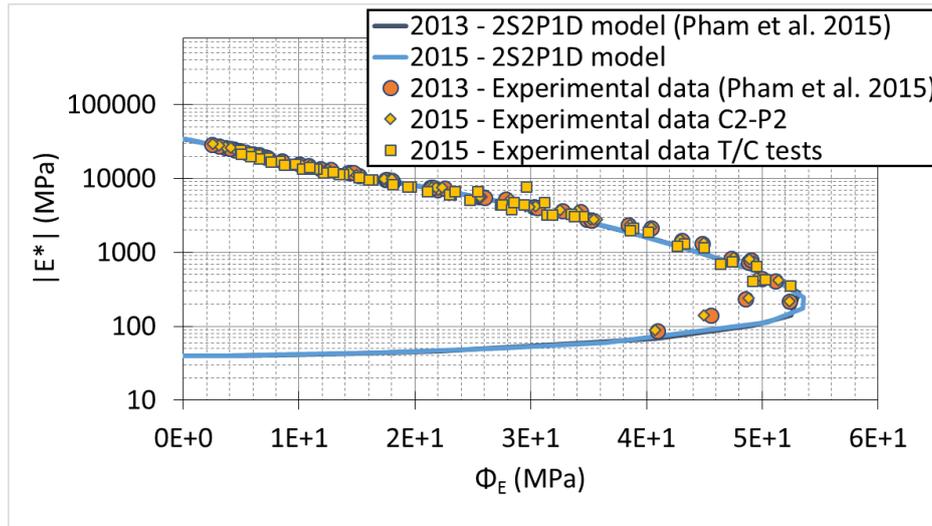


Figure 6-8 : Résultats du module complexe E^* dans l'espace de Black pour les deux campagnes expérimentales (celle réalisée pendant cette thèse et (Pham et al. 2015b)), résultats expérimentaux et modèles 2S2P1D.

6.2 Effets transitoires lors des essais de module complexe

Cette section a fait l'objet d'une publication (Gayte et al. 2015).

Les effets transitoires des essais de module complexe sont ici analysés à partir d'une campagne d'essais détaillée dans (Nguyen et al. 2014; Gayte et al. 2015). Ils sont observés au début des essais, pendant les tous premiers cycles. Pendant cette période, le signal de réponse à une sollicitation sinusoïdale n'est pas parfaitement sinusoïdal conformément à un matériau au comportement viscoélastique linéaire. Ainsi, l'analyse classique des essais de module complexe peut conduire à des valeurs erronées de norme et d'angle de phase, l'analyse étant basée sur l'hypothèse de signaux sinusoïdaux. Ce sont ces erreurs qui sont analysées et quantifiées dans cette partie.

Après une brève présentation des essais de module complexe et du matériau utilisé dans cette campagne, la méthode d'analyse développée pour étudier les effets transitoires est détaillée. Enfin, les tests expérimentaux et les simulations réalisés pour différentes fréquences et températures permettent d'analyser ces effets et de dessiner des conclusions.

6.2.1 Procédure expérimentale et matériau considéré

La procédure expérimentale utilisée dans cette campagne d'essais de module complexe est détaillée dans l'article (Nguyen et al. 2014). Les principaux aspects de ce type d'essais sont rappelés dans la section 4.6.

L'enrobé bitumineux testé durant cette campagne expérimentale est issu du projet de recherche international RILEM « Cracking in Asphalt Pavement (TC-CAP) ». Il a été fourni par l'Université de l'Illinois à Urbana-Champaign.

Il s'agit d'un enrobé bitumineux composé de 5,9 % (de la masse des granulats) d'un bitume de classe PG64-22. L'indice des vides des éprouvettes testées était de 8,3 %. Le type des agrégats et la courbe granulométrique sont données dans le Tableau 6-3 et la Figure 6-9.

Tableau 6-3 : Agrégats de l'enrobé bitumineux

Type de granulat	CM16 Dolomite	FM20 Dolomite broyée	FM02 Sable naturel	Filler
Pourcentage en masse (%)	65,3	23	10,5	1,2

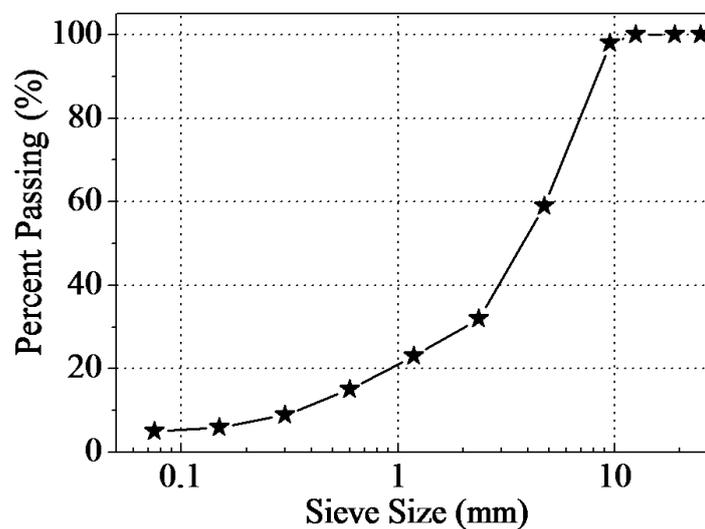


Figure 6-9 : Courbe granulométrique des agrégats de l'enrobé bitumineux (Nguyen et al. 2014).

Les simulations présentées dans cette section sont basées sur les données expérimentales de Nguyen (2014). Pour d'avantage de détails à propos de cette campagne

expérimentale, les lecteurs sont invités à se référer à cet article. Seules les informations principales sont rappelées ici.

Pendant cette campagne expérimentale, une procédure d'essai de module complexe avancée a permis d'obtenir déformations axiale et radiales et, contrainte axiale. Les éprouvettes ont été sollicitées à 7 fréquences et 9 températures différentes, à savoir :

- Fréquences (Hz) : 0,01 ; 0,03 ; 0,1 ; 0,3 ; 1 ; 3 ; 10.
- Température (°C) : -26 ; -16,8 ; -7,1 ; 1,9 ; 11,1 ; 20,8 ; 29,5 ; 38,3 ; 47.

Le nombre de cycles réalisés dépend de la fréquence comme indiqué dans le Tableau 6-4.

Tableau 6-4 : Nombre de cycles appliqués à chaque fréquence

f (Hz)	0,01	0,03	0,1	0,3	1	3	10	Total
Nombre de cycles appliqués	4	10	20	20	30	40	50	174

Le nombre de cycles appliqués pour chaque fréquence étant faible (inférieur à 50) et un temps de repos étant respecté entre chaque séquence, on peut alors supposer que les problèmes d'échauffement dus à la dissipation visqueuse peuvent être négligés (Di Benedetto et al. 2011; Gabet et al. 2011; Perraton et al. 2011; Nguyen et al. 2012b).

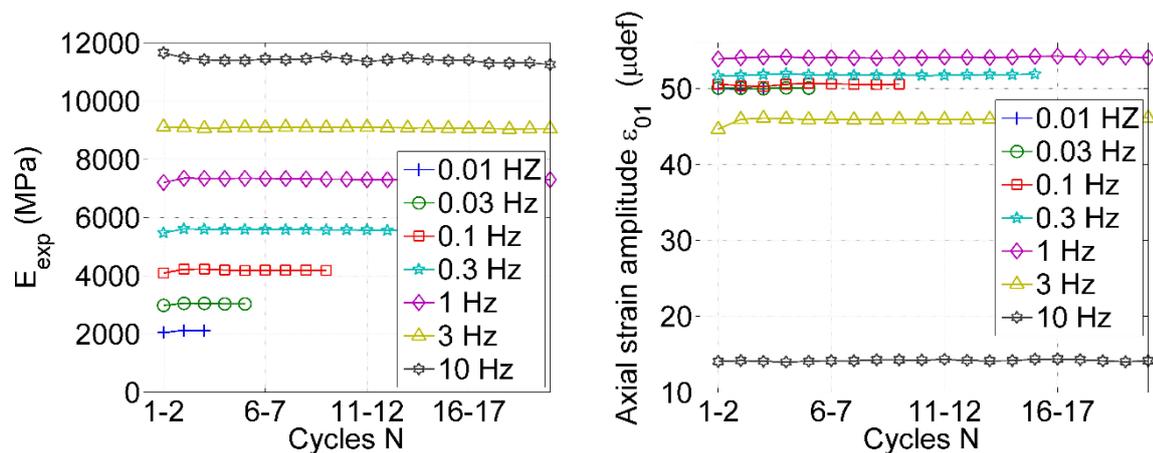


Figure 6-10 : Norme du module complexe (gauche) et amplitude des déformations axiales (droite) obtenues pendant la campagne expérimentale en fonction du nombre de cycles N appliqués et de la fréquence f .

La Figure 6-10 présente l'évolution de la norme du module complexe (E_{exp}) et de l'amplitude des déformations axiales imposées, au cours de l'essai pour l'ensemble de la gamme de fréquence testée.

6.2.2 Calibration du modèle 2S2P1D et du modèle DBN à 40 éléments

A partir des données expérimentales de la campagne d'essais détaillée dans (Nguyen et al. 2014), il a été possible de calibrer l'équation WLF et du modèle 2S2P1D (introduits dans les sections 1.3.2.8 et 1.3.2.9). Les résultats de la calibration du modèle 2S2P1D et de l'équation WLF sont donnés dans les Tableau 6-5 et Tableau 6-6.

Tableau 6-5 : Constantes du modèle 2S2P1D à la température de référence $T_{ref} = 11,1\text{ }^{\circ}\text{C}$.

E_{00} (MPa)	E_0 (MPa)	k	h	δ	τ (s)	β	ν_0	ν_{00}
16	3100	0,16	0,54	2,3	0,27	150	0,38	0,21

Tableau 6-6 : Constantes de l'équation WLF.

C_1 (-)	C_2 ($^{\circ}\text{C}$)	T_{ref} ($^{\circ}\text{C}$)
33,3	223,4	11,1

Afin de pouvoir simuler les essais de module complexe, et à partir de la calibration du modèle 2S2P1D, on peut calibrer la partie asymptotique linéaire (domaine VEL) du modèle DBN (cf. section 2.5.4.1), à savoir les constantes E_i et η_i dans le cas 1D. 40 corps élémentaires ont été choisis afin d'obtenir une approximation de qualité. L'erreur relative entre les modèles 2S2P1D et DBN est ainsi inférieure à 5 % en norme du module complexe et du coefficient de Poisson sur tout le spectre de fréquences. Les résultats de cette calibration à la température de référence de $T_{ref} = 11,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ sont donnés dans le Tableau 6-7.

Tableau 6-7 : Calibration du modèle DBN à 40 éléments (Kelvin-Voigt généralisé avec 40 corps élémentaires) à la température de référence $T_{ref} = 11,1\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Corps	Module E_i (MPa)	Viscosité η_i (MPa.s)	Corps	Module E_i (MPa)	Viscosité η_i (MPa.s)
0	3,10E+04		21	4,29E+04	3,05E+03
1	2,95E+06	2,09E-08	22	2,60E+04	8,26E+03
2	4,33E+06	1,38E-07	23	1,46E+04	2,07E+04
3	3,09E+06	4,38E-07	24	7,63E+03	4,83E+04
4	3,78E+06	2,40E-06	25	3,76E+03	1,06E+05
5	3,45E+06	9,75E-06	26	1,77E+03	2,23E+05
6	2,41E+06	3,04E-05	27	7,88E+02	4,45E+05
7	2,08E+06	1,17E-04	28	3,14E+02	7,91E+05
8	1,52E+06	3,84E-04	29	9,48E+01	1,07E+06
9	1,26E+06	1,42E-03	30	2,98E+01	1,50E+06
10	9,53E+05	4,80E-03	31	6,70E+01	1,51E+07
11	7,74E+05	1,74E-02	32	5,44E+02	5,46E+08
12	5,93E+05	5,96E-02	33	6,99E+02	3,14E+09
13	4,75E+05	2,13E-01	34	8,50E+02	1,70E+10
14	3,66E+05	7,34E-01	35	1,02E+03	9,14E+10
15	2,89E+05	2,59E+00	36	1,22E+03	4,90E+11
16	2,22E+05	8,87E+00	37	1,47E+03	2,62E+12
17	1,71E+05	3,06E+01	38	1,76E+03	1,40E+13
18	1,28E+05	1,02E+02	39	2,11E+03	7,51E+13
19	9,39E+04	3,34E+02	40	2,52E+03	4,02E+14
20	6,53E+04	1,04E+03			

Enfin, la Figure 6-11 donne la représentation des différentes grandeurs caractéristiques du module complexe E^* . On observe que les modèles 2S2P1D et DBN dans le domaine VEL sont confondus sur toute la gamme de fréquence. La Figure 6-12 donne, quant à elle, les coefficients de translation en fonction de la température et la calibration de l'équation WLF.

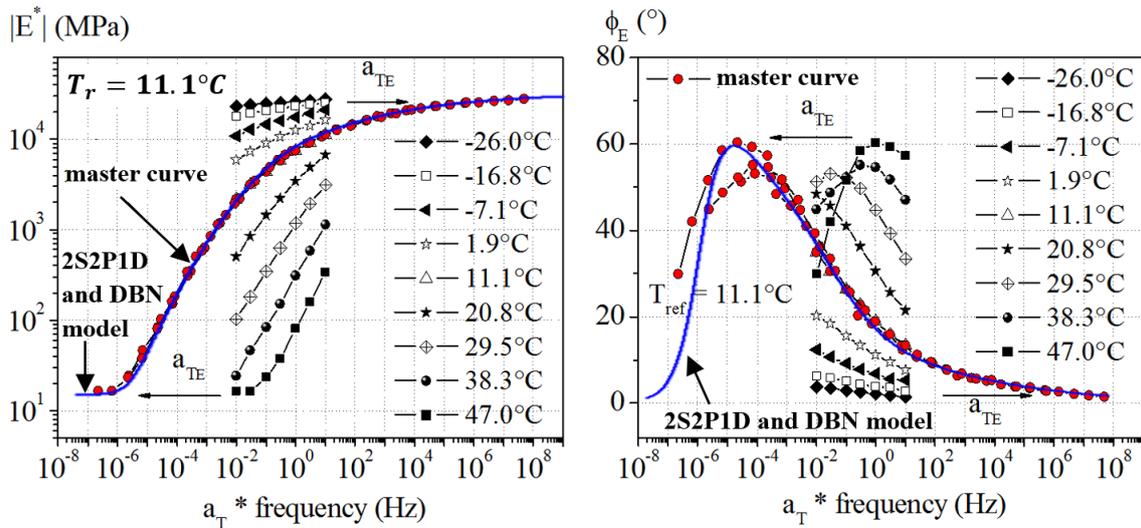


Figure 6-11 : Isothermes de module complexe E^* et courbes maîtresses à la température de référence $T = 11,1^\circ\text{C}$ - (Gauche) Norme de E^* - (Droite) Angle de phase de E^* et courbes maitresse des modèles 2S2P1D et DBN (Nguyen et al. 2014).

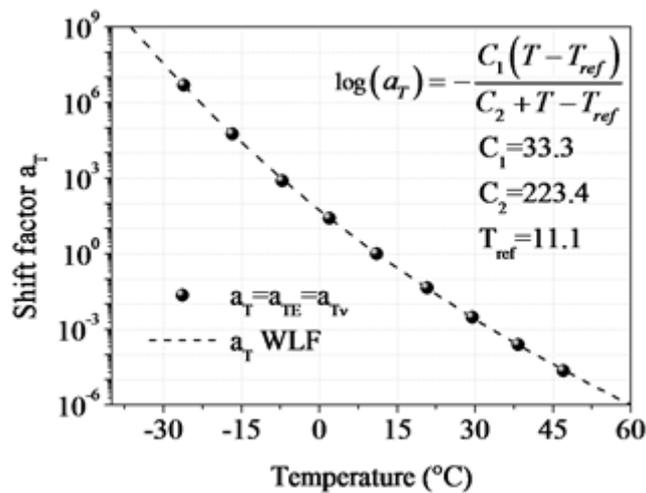


Figure 6-12 : Coefficient de translation a_T et approximation avec l'équation de WLF (Nguyen et al. 2014).

6.2.3 Méthode d'analyse des signaux

6.2.3.1 Méthode et signaux utilisés

Cinq modules complexes sont utilisés au cours de l'analyse.

Le premier est le module complexe expérimental (E_{exp}^*), déterminé à partir des essais réalisés au cours de la campagne expérimentale présentée précédemment. Pour cela, on utilise les signaux enregistrés par la presse hydraulique au cours des essais (contrainte σ_{exp} et déformation ε_{exp} axiales). Ces données permettent de définir le module expérimental E_{exp}^* , fonction du nombre de cycles N appliqués.

Deux modules issus de modèles de comportement (présentés dans la section 1.3.2) sont utilisés. Il s'agit des modules du modèle 2S2P1D (E_{2S2P1D}^*) décrit par l'équation (1.67) et du modèle DBN (E_{DBN}^*), obtenu à partir de l'équation (2.46). Ces modules sont théoriques.

Le quatrième module utilisé pour l'analyse des effets transitoires lors des essais de module complexe est le module modélisé. Pour le déterminer, la contrainte σ_{mod} est calculée sur la base d'une sollicitation en déformation égale à la déformation expérimentale ε_{exp} , en utilisant la version linéaire du modèle DBN calibré avec 40 éléments (code de calcul présenté dans le chapitre 3). Dans ce calcul, la déformation expérimentale ε_{exp} est approximée par une fonction linéaire entre chaque point de donnée (cf. Figure 6-14). Le module issu de ce calcul, appelé module modélisé (E_{mod}^*), est fonction du nombre de cycle N appliqué, calculé à partir du signal expérimental de déformation et du signal simulé en contrainte.

Le dernier module est déterminé à partir d'une déformation théorique ε_{th} donnée par la fonction $\varepsilon_{th}(t) = \varepsilon_{th,0} \sin(2\pi ft)$. Il s'agit d'un signal sinusoïdal parfait où $\varepsilon_{th,0}$ est l'amplitude du signal (pris égal à 50 μdef dans cette étude) et f est la fréquence (de 0,01 à 10 Hz). La contrainte théorique σ_{th} calculée à partir de la déformation théorique ε_{th} en utilisant la version linéaire du modèle DBN (Kelvin-Voigt généralisé avec 40 corps élémentaires). On calcule alors le module théorique (E_{th}^*), fonction du nombre de cycle N appliqué, calculé à partir des signaux théoriques en déformation et contrainte.

Ainsi, à partir des données expérimentales et simulées, 5 modules complexes différents sont calculés à partir des différents signaux en déformation (signaux d'entrée) et en contrainte

(signaux de sortie). La méthode de calcul de ces différents modules est schématisée par la Figure 6-13.

Des exemples de ces signaux sont présentés dans la Figure 6-14 (2 premiers cycles, à la fréquence 0,01 Hz, à la température de référence $T_r = 11,1\text{ }^\circ\text{C}$ correspondant à la température de l'essai).

Les simulations sont réalisées en utilisant l'implémentation du modèle DBN dans le code Matlab© (présentée chapitre 3). Les résultats des simulations (signaux modélisés et théoriques) sont analysés en suivant la même procédure que celle suivie pour les données expérimentales. A partir des résultats expérimentaux et de modélisation, la méthode d'analyse nous permet donc de définir 5 modules complexes différents :

- Expérimental (E_{exp}^*), fonction du nombre de cycle N appliqué, calculé à partir des signaux expérimentaux de déformation et contrainte,
- Modélisé (E_{mod}^*), fonction du nombre de cycle N appliqué, calculé à partir du signal expérimental de déformation et du signal simulé en contrainte,
- Théorique (E_{th}^*), fonction du nombre de cycle N appliqué, calculé à partir des signaux théoriques en déformation et contrainte,
- 2S2P1D (E_{2S2P1D}^*), obtenu à partir de l'équation (1.67)
- DBN (E_{DBN}^*), obtenu à partir de l'équation (2.46)

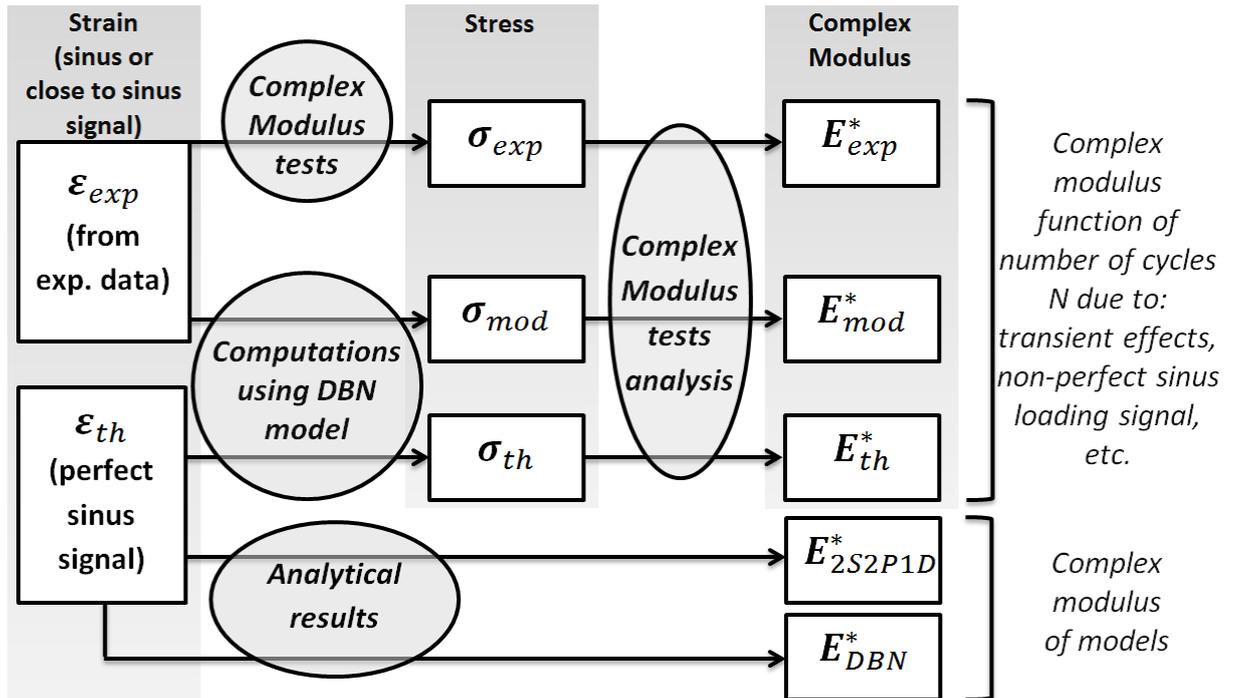


Figure 6-13 : Représentation schématique de la méthode d'analyse des signaux.

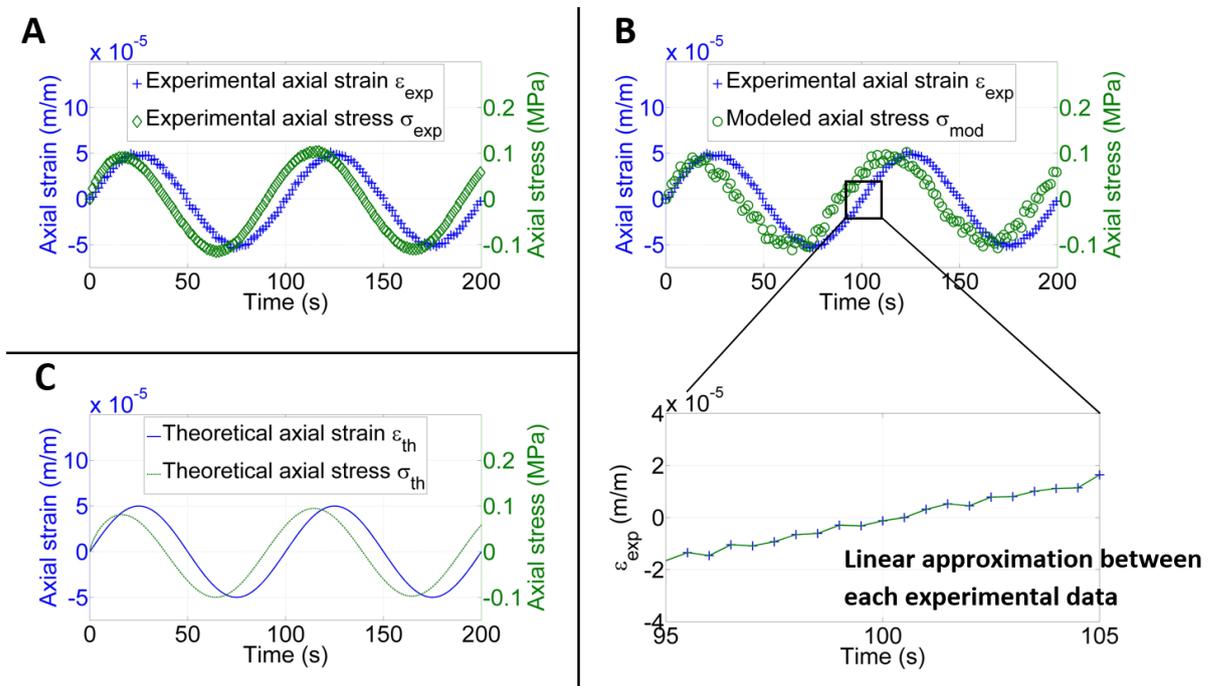


Figure 6-14 : Approximation des données expérimentales en déformation et contrainte par une fonction sinusoïdale, durant les 1^{er} et 2^e cycles de chargement (données expérimentales à la fréquence $f = 0,01$ Hz et $T = 11,1$ °C).

6.2.3.2 Analyse des signaux

Tous les signaux (en déformation et en contrainte, enregistrés pendant les essais de module complexe ou simulés à partir du modèle DBN) sont analysés suivant la même méthode développée au laboratoire LGCB-LTDS. Elle consiste à approximer deux périodes du signal par une fonction sinusoïdale en utilisant la méthode des moindres carrés, puis à calculer le module E^* et l'angle de phase ϕ_E pendant ces deux cycles. Elle est répétée pour chaque couple de deux cycles successifs. Un exemple d'analyse de signal est présentée Figure 6-15.

Sur toutes les figures qui suivent, les cycles sont indexés par « $i - i+1$ », ce qui signifie que le résultat correspond à l'analyse des cycles i et $i + 1$.

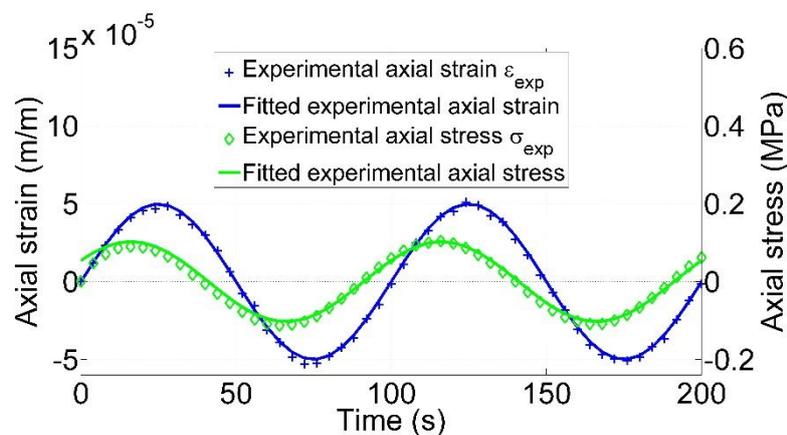


Figure 6-15 : Approximation des signaux expérimentaux (en déformation et en contrainte) par une fonction sinusoïdale pour les 1^{er} et 2^e cycles (données expérimentales à la fréquence $f = 0,01$ Hz et à la température $T = 11,1$ °C).

Il est important de noter que sauf mention contraire, toutes les simulations présentées dans la section 6.2 sont réalisées à la température de référence ($T_r = 11,1$ °C).

6.2.4 Résultats et analyse

6.2.4.1 Régime stabilisé

Les résultats expérimentaux et les simulations présentées dans cette section se concentrent sur l'étude du régime stabilisé de la réponse viscoélastique à des sollicitations sinusoïdales. Durant les essais de module complexe, on observe d'abord une phase de

transition durant laquelle l'amplitude de la contrainte axiale résultante de la déformation axiale appliquée n'est pas constante. Elle se stabilise ensuite au bout de quelques cycles. On étudie donc la phase stabilisée.

On analyse ici la norme et l'angle de phase du module complexe durant les deux derniers cycles de sollicitation des essais de module complexe. Ces deux derniers cycles dépendent de la fréquence de sollicitation et sont indiqués dans les Tableau 6-8 et Tableau 6-9. A partir des données expérimentales et modélisées, le module complexe E^* (en norme $E = |E^*|$ et en angle de phase ϕ_E) est obtenu en fonction du nombre de cycles N appliqués. Les Tableau 6-8 et Tableau 6-9 présentent respectivement les valeurs de ces paramètres pendant les deux derniers cycles analysés.

Tableau 6-8 : Valeurs de la norme du module complexe pendant les deux derniers cycles analysés à $T_r = 11,1$ °C.

	Deux derniers cycles	$E_{exp,final}$ (MPa)	E_{2S2P1D} (MPa)	$E_{mod,final}$ (MPa)	$E_{th,final}$ (MPa)	E_{DBN} (MPa)
0,01 Hz	3-4	2106,0	2231,5	1907,6	1928,6	1928,7
0,03 Hz	5-6	3033,1	3369,1	2971,5	2970,0	2970,4
0,1 Hz	9-10	4184,2	4920,9	4433,1	4445,7	4445,1
0,3 Hz	14-15	5543,9	6524,0	6030,6	6040,2	6026,5
1 Hz	29-30	7285,3	8369,0	7936,2	7805,6	7884,1
3 Hz	39-40	9101,4	10058,1	9693,5	9531,8	9590,4
10 Hz	49-50	11377,2	11872,3	12080,7	10790,0	11422,6

Tableau 6-9 : Valeurs de l'angle de phase du module complexe pendant les deux derniers cycles analysés à $T_r = 11,1$ °C.

	Deux derniers cycles	$\phi_{exp,final}$ (°)	ϕ_{2S2P1D} (°)	$\phi_{mod,final}$ (°)	$\phi_{th,final}$ (°)	ϕ_{DBN} (°)
0,01 Hz	3-4	35,8	36,1	37,1	37,9	37,9
0,03 Hz	5-6	32,0	31,2	33,1	33,1	33,1
0,1 Hz	9-10	27,6	25,8	27,3	27,5	27,5
0,3 Hz	14-15	23,8	21,3	22,7	22,8	22,7
1 Hz	29-30	19,8	17,1	18,5	18,1	18,3
3 Hz	39-40	16,7	14,1	15,3	15,0	15,1
10 Hz	49-50	14,1	11,6	13,0	11,6	12,3

Pour comparer ces séries de données entre elles, nous utilisons deux indicateurs. Nous avons réalisé régressions linéaires passant par 0 entre chaque série deux à deux. De l'équation de cette régression linéaire du type $Y = pX$, on en déduit notre premier indicateur permettant de comparer les séries, à savoir la pente p . Le deuxième indicateur utilisé est le coefficient de corrélation de Pearson r . Pour deux séries discrètes X et Y , ce coefficient est égal à :

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (6.1)$$

Où $Cov(X, Y)$ est la covariance des séries X et Y égale à la moyenne des produits des écarts à la moyenne et, σ_X et σ_Y sont respectivement leur écart-type.

Le premier indicateur (pente p) permet de vérifier, lorsque sa valeur est proche de 1, que les séries comparées sont proches en valeurs. Le second indicateur permet de caractériser la dispersion des séries entre elles.

Les Tableau 6-10 et Tableau 6-11 donnent respectivement les pentes des interpolations linéaires et les coefficients de corrélation entre les séries de normes et d'angles de phase des modules complexes expérimentaux et simulés. Ces résultats montrent que les données, modélisées par les modèles DBN et 2S2P1D et expérimentales, sont très proches. L'analyse détaillée des résultats de chaque couple de séries de données permet de démontrer la validité de :

- L'optimisation du modèle 2S2P1D sur les données expérimentales (comparaison de $E_{exp,final}$ et E_{2S2P1D} et, $\varphi_{exp,final}$ et φ_{2S2P1D}) ;
- Le processus de modélisation par le modèle DBN (comparaison de $E_{th,final}$, $E_{mod,final}$ et $E_{exp,final}$ et, $\varphi_{th,final}$, $\varphi_{mod,final}$ et $\varphi_{exp,final}$) ;
- La précision des calculs effectués avec le code de calcul homogène (comparaison de $E_{th,final}$ et E_{DBN} et, $\varphi_{th,final}$ et φ_{DBN}) ;
- La forme du signal commandé puis exécuté par la presse (comparaison de $E_{th,final}$ et $E_{mod,final}$ et, $\varphi_{th,final}$ et $\varphi_{mod,final}$) ;

Tableau 6-10 : Pente (p) de l'interpolaire linéaire $Y = pX$ entre les séries de normes et d'angles de phase des modules complexes expérimentaux et modélisés.

		X				
		$E_{exp,final}$ (MPa)	E_{2S2P1D} (MPa)	$E_{mod,final}$ (MPa)	$E_{th,final}$ (MPa)	E_{DBN} (MPa)
Y	$E_{exp,final}$ (MPa)	1	0,9089	0,938	0,984	0,962
	E_{2S2P1D} (MPa)	1,098	1	1,031	1,083	1,058
	$E_{mod,final}$ (MPa)	1,065	0,9684	1	0,988	1,025
	$E_{th,final}$ (MPa)	1,013	0,923	0,951	1	0,976
	E_{DBN} (MPa)	1,038	0,945	0,975	1,023	1

		X				
		$\varphi_{exp,final}$ (°)	φ_{2S2P1D} (°)	$\varphi_{mod,final}$ (°)	$\varphi_{th,final}$ (°)	φ_{DBN} (°)
Y	$\varphi_{exp,final}$ (°)	1	1,057	1,005	1,000	0,998
	φ_{2S2P1D} (°)	0,942	1	1,002	0,946	0,943
	$\varphi_{mod,final}$ (°)	0,995	1,055	1	0,997	0,995
	$\varphi_{th,final}$ (°)	0,996	1,057	0,948	1	0,997
	φ_{DBN} (°)	0,999	1,060	1,003	1,003	1

Tableau 6-11 : Coefficients de corrélation de Pearson entre les séries de normes et d'angles de phase des modules complexes expérimentaux et modélisés.

		X				
		$E_{exp,final}$ (MPa)	E_{2S2P1D} (MPa)	$E_{mod,final}$ (MPa)	$E_{th,final}$ (MPa)	E_{DBN} (MPa)
Y	$E_{exp,final}$ (MPa)	1	0,9958	0,9991	0,9923	0,9969
	E_{2S2P1D} (MPa)	0,9958	1	0,9985	0,9991	0,9999
	$E_{mod,final}$ (MPa)	0,9991	0,9985	1	0,9958	0,9991
	$E_{th,final}$ (MPa)	0,9923	0,9991	0,9958	1	0,9988
	E_{DBN} (MPa)	0,9969	0,9999	0,9991	0,9988	1

		X				
		$\varphi_{exp,final}$ (°)	φ_{2S2P1D} (°)	$\varphi_{mod,final}$ (°)	$\varphi_{th,final}$ (°)	φ_{DBN} (°)
Y	$\varphi_{exp,final}$ (°)	1	0,9986	0,9381	0,9996	0,9992
	φ_{2S2P1D} (°)	0,9986	1	0,9308	0,9995	0,9999
	$\varphi_{mod,final}$ (°)	0,9381	0,9308	1	0,9346	0,9338
	$\varphi_{th,final}$ (°)	0,9996	0,9995	0,9346	1	0,9998
	φ_{DBN} (°)	0,9992	0,9999	0,9338	0,9998	1

6.2.4.2 Variations de la norme du module complexe au cours de l'essai

Toutes les simulations présentées dans cette partie sont réalisées à la température de référence ($T_r = 11,1 \text{ °C}$), et pour des fréquences variant entre 0,01 et 10 Hz.

La Figure 6-16 présente l'évolution du rapport $(E_{exp} - E_{exp,final})/E_{exp,final}$ en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués. Il est rappelé que l'analyse des signaux se fait par l'approximation de deux périodes par une fonction sinusoïdale. Pour l'ensemble de la gamme de fréquence testée, la norme du module complexe E_{exp} croît d'abord pendant les deux premiers cycles puis tend à décroître de manière générale. Pour les fréquences en dessous de 3 Hz, cette différence relative se situe à moins de 1 % après les cycles 4-5. A 10 Hz, on peut observer des variations plus importantes de la norme du module complexe. Cela peut être expliqué par des imprécisions du système d'asservissement de la presse à cette fréquence, qui conduisent donc à des résultats de moins bonne qualité.

La Figure 6-17 présente le rapport $(E_{mod} - E_{mod,final})/E_{mod,final}$ en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués. Cela caractérise l'évolution de la norme du module complexe simulé avec un comportement purement viscoélastique linéaire, en utilisant les données expérimentales en déformations comme signal d'entrée. Ces simulations confirment que le module complexe croît d'abord pendant les 2 premiers cycles avant de décroître vers une valeur asymptotique. Ce phénomène est donc lié aux propriétés viscoélastiques du matériau et à la méthode d'analyse des cycles. La valeur de la norme du module complexe devient constante à partir des cycles 4-5.

Ainsi, les effets transitoires dus aux propriétés viscoélastiques des matériaux bitumineux ont un effet sur la mesure du module complexe uniquement pendant les 3 premiers cycles de sollicitations. Après cette période transitoire, la norme du module complexe peut être mesurée avec une bonne précision ($> 0,2 \%$).

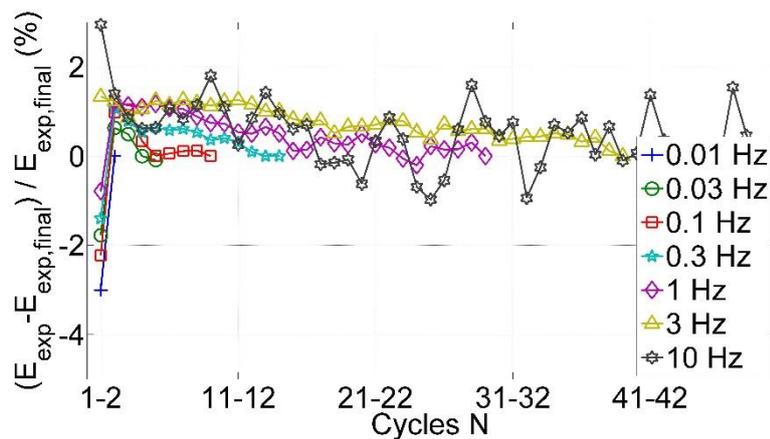


Figure 6-16 : Différence relative entre les normes du module complexe expérimental E_{exp} et du module complexe expérimental final $E_{exp,final}$ (cf. Tableau 6-8) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1\text{ }^{\circ}\text{C}$)

En comparant les résultats expérimentaux (Figure 6-16) et les résultats des simulations utilisant un modèle purement viscoélastique linéaire (Figure 6-17), on peut observer que le module décroît pendant les essais (d'environ 1 % pour de faibles nombre de cycles de sollicitations), alors que le module est constant à partir des cycles 4-5 avec une simulation linéaire viscoélastique. Cela confirme l'existence de phénomènes supplémentaires influençant la mesure du module complexe et la nécessité de limiter le nombre de cycles lors de ces mesures. Ces phénomènes sont probablement liés à des effets de non-linéarités (Nguyen et al. 2014), de thixotropie, etc. (Di Benedetto et al. 2011).

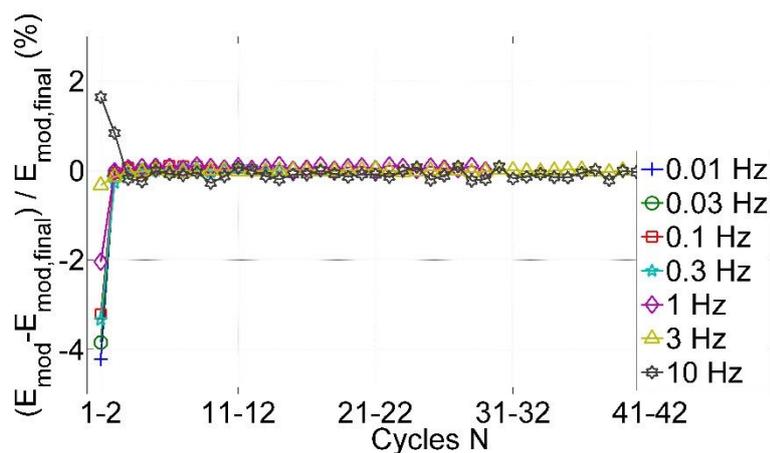


Figure 6-17 : Différence relative entre les normes du module complexe modélisé E_{mod} et du module complexe modélisé final $E_{mod,final}$ (cf. Tableau 6-8) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1\text{ }^{\circ}\text{C}$)

La Figure 6-18 introduit la variation du rapport $(E_{th} - E_{th,final})/E_{th,final}$ en fonction du nombre N de cycles de sollicitations appliquées. Ces simulations sont calculées à partir de fonctions sinusoïdales parfaites (signaux théoriques). Les signaux (d'entrée et de sortie) sont analysés en suivant la même méthode que celle développée pour l'analyse des signaux expérimentaux. Ces résultats confirment qu'à partir des cycles 4-5, la valeur finale du module complexe peut être considérée comme atteinte avec une erreur inférieure à 0,1 %.

La comparaison des Figure 6-17 et Figure 6-18 permettent d'estimer la qualité des signaux enregistrés pendant les essais expérimentaux. En effet, seule la sollicitation axiale en déformation (enregistrée pendant l'essai pour E_{mod} et parfaitement sinusoïdale pour E_{th}) est modifiée entre ces deux simulations. A partir de ces figures, on peut observer une différence inférieure à 0,5 % entre les deux résultats dans tout le domaine de fréquence. Cela démontre la bonne qualité des essais et de la procédure expérimentale (analyse des données comprise) développé au laboratoire LGCB-LTDS.

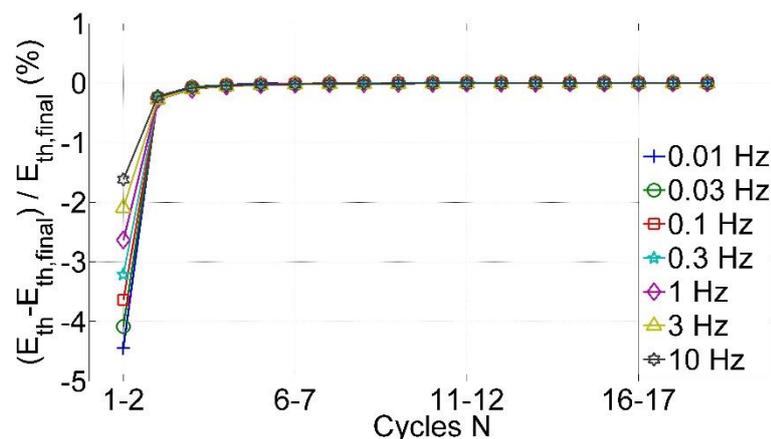


Figure 6-18 : Différence relative entre les normes du module complexe théorique E_{th} et du module complexe théorique final $E_{th,final}$ (cf. Tableau 6-8) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1\text{ °C}$)

6.2.4.3 Variations de l'angle de phase au cours de l'essai

L'analyse des variations des angles de phase des modules complexe amène aux mêmes conclusions que les précédentes.

Dans tous les cas, la valeur finale de l'angle de phase est atteinte au bout de 4-5 cycles. A 10 Hz, la différence est d'environ 1° tandis qu'elle est inférieure à $0,4^\circ$ pour les fréquences plus basses. Cela s'explique une fois de plus par les imprécisions du système d'asservissement

de la presse, qui devient moins précis à hautes fréquences. Dans ce cas-là, il semblerait que le dispositif expérimental atteigne ses limites de précisions.

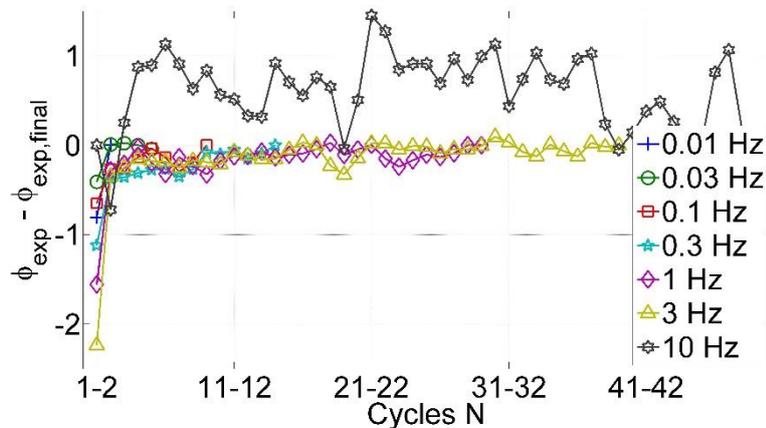


Figure 6-19 : Différence relative entre les angles de phase du module complexe expérimental ϕ_{exp} et du module complexe expérimental final $\phi_{exp,final}$ (cf. Tableau 6-9) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11.1\text{ }^{\circ}\text{C}$)

On observe que l'angle de phase a tendance à croître au cours des cycles de sollicitations (Figure 6-19). Ce phénomène n'a pas de lien avec les propriétés viscoélastiques du matériau car ces variations ne sont pas observables dans les simulations VEL (Figure 6-20 et Figure 6-21). Dans ces simulations, l'angle de phase atteint sa valeur asymptotique à partir des cycles 4-5, comme cela avait été observé pour la norme du module complexe.

La comparaison des Figure 6-20 et Figure 6-21 permet également de conclure quant à la qualité des signaux obtenus lors des essais de module complexe. On observe que le dispositif permet de mesurer les angles de phase avec une précision de l'ordre de $0,4^{\circ}$.

Les effets transitoires dus au comportement viscoélastique des enrobés bitumineux sont visibles uniquement durant les 5 premiers cycles. Après cette période de transition, l'angle de phase peut être mesuré avec une bonne précision ($< 0,4^{\circ}$). Finalement, les résultats expérimentaux et des simulations permettent de confirmer que la procédure expérimentale développée au laboratoire LGCB-LTDS est de bonne qualité.

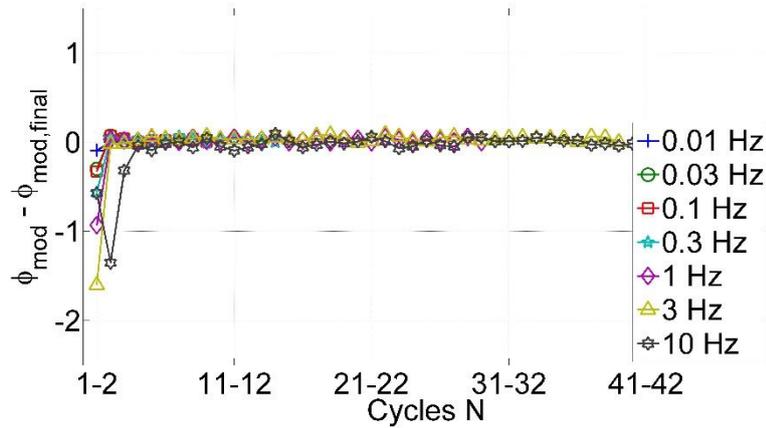


Figure 6-20 : Différence relative entre les angles de phase du module complexe modélisé ϕ_{mod} et du module complexe modélisé final $\phi_{mod,final}$ (cf. Tableau 6-9) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1\text{ }^{\circ}\text{C}$)

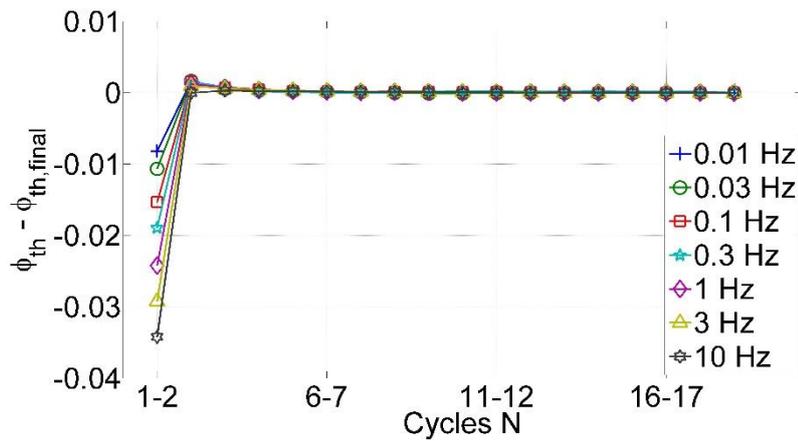


Figure 6-21 : Différence relative entre les angles de phase du module complexe théorique ϕ_{th} et du module complexe théorique final $\phi_{th,final}$ (cf. Tableau 6-9) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1\text{ }^{\circ}\text{C}$)

6.2.4.4 Etude de l'influence de la température

Alors que les sections précédentes ont permis d'étudier l'influence de la fréquence de sollicitation sur les effets transitoires et la qualité des mesures, l'influence de la température est traitée ici.

Les données théoriques présentées sont issues de simulations réalisées à différentes températures (de -20 à 50 °C) et une fréquence (1 Hz). Le principe d'équivalence temps-température est pris en compte à l'aide de l'équation WLF, calibrée pour le matériau (cf. section 6.2.2). Le Tableau 6-12 présente les valeurs de norme et d'angle de phase du module complexe en fonction de la température T , à la fréquence 1 Hz, simulées à partir des signaux théoriques (fonctions sinusoïdales parfaites). La Figure 6-22 présente l'évolution du rapport $(E_{th} - E_{th,final})/E_{th,final}$ en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués, tandis que la Figure 6-23 présente l'évolution de la différence $\Phi_{th} - \Phi_{th,final}$ en fonction de N .

Les conclusions que l'on peut formuler à partir de ces résultats sont identiques à celles postulées dans les sections précédentes où la température était fixée à 11,1 °C. Cela était attendu car le modèle respecte le principe d'équivalence Temps-Température. Les conclusions ainsi formulés dans les sections précédentes peuvent donc s'étendre aux autres températures.

Tableau 6-12 : Valeurs de norme et d'angle de phase de module complexe (pendant les deux derniers cycles analysés, cf. Tableau 6-4) en fonction de la température, à la fréquence 1 Hz.

	-20 °C	-10 °C	0 °C	11,1 °C	30 °C	50 °C
$E_{th,final}$ (MPa)	27989,9	19260,5	13948,0	7805,6	1035,3	49,5
$\Phi_{th,final}$ (°)	3,9	5,8	9,6	18,1	43,2	45,3

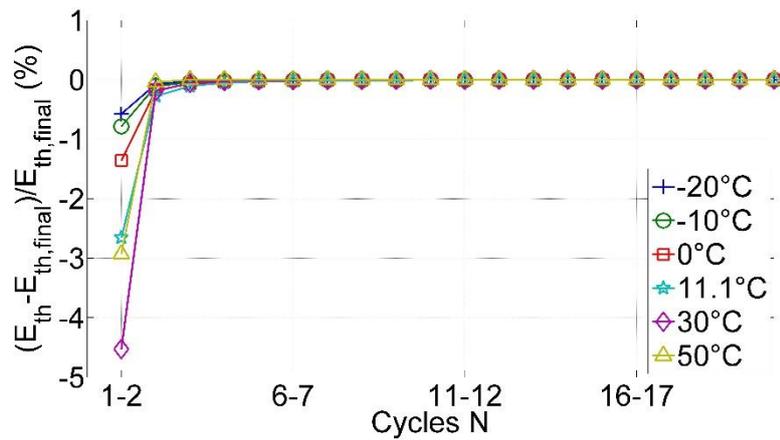


Figure 6-22 : Différence relative entre les normes du module complexe théorique E_{th} et du module complexe théorique final $E_{th,final}$ (cf. Tableau 6-8) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (à la fréquence $f = 1$ Hz, pour des température entre -20 et 50 °C).

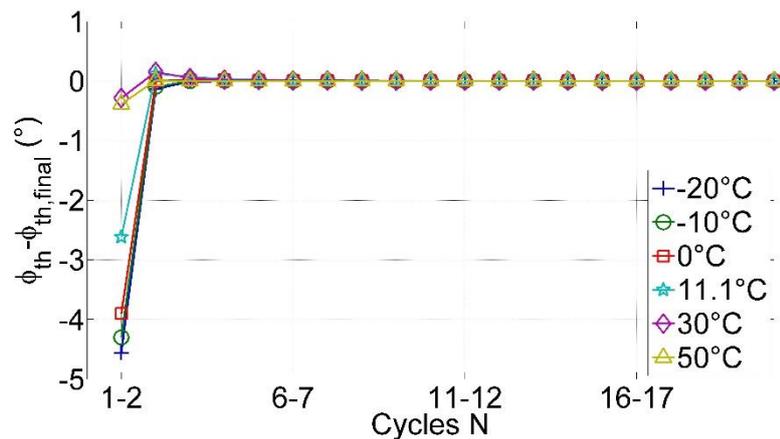


Figure 6-23 : Différence relative entre les angles de phase du module complexe théorique ϕ_{th} et du module complexe théorique final $\phi_{th,final}$ (cf. Tableau 6-9) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (à la fréquence $f = 1$ Hz, pour des température entre -20 et 50 °C).

6.2.5 Conclusions

Les effets transitoires observés pendant les essais de module complexe sur les enrobés bitumineux (dans le domaine des petites déformations) ont été étudiés. Cela a été permis grâce à l'utilisation :

- D'essais de module complexe avancés réalisés au laboratoire LGCB-LTDS de l'ENTPE (Nguyen et al. 2014),

- Du code de calcul implémenté dans le logiciel Matlab© et développé au cours de cette thèse, utilisant le modèle DBN développé au laboratoire LGCB-LTDS.

A partir des résultats détaillés dans les sections précédentes, les conclusions suivantes peuvent être dressées :

- Le modèle DBN (qui correspond dans le domaine des petites déformations à un modèle de Kelvin-Voigt généralisé) peut simuler de manière très correcte le comportement des enrobés bitumineux dans une large gamme de température et de fréquence, dans le domaine VEL (amplitude de déformation inférieure à 60 μ def).
- Cinq modules ont été considérés dans l'étude, à savoir : E_{exp}^* , E_{mod}^* , E_{th}^* , E_{2S2P1D}^* , E_{DBN}^* (Figure 6-13). Ils donnent tous des résultats proches après la période transitoire, c'est-à-dire pour un nombre de cycles suffisamment élevé.
- Les modules E_{exp}^* , E_{mod}^* , E_{th}^* (qui prennent en compte la sollicitation depuis le début de l'essai) présentent des périodes transitoires non négligeables et très similaires pour des nombres de cycles de sollicitations faibles (< 4-5 cycles). Si l'analyse des essais de module complexe se limite aux 2 premiers cycles, les erreurs de mesures peuvent atteindre 5 % en module et 3° en angle de phase.
- Si la sollicitation appliquée est parfaitement sinusoïdale, les effets transitoires deviennent négligeables à partir du 5^e cycle (erreur inférieure à 0,05 % en module et 0,0005° en angle de phase) pour toutes les fréquences et températures.
- Si les effets transitoires dus au comportement VEL du matériau sont soustraits, il est possible de quantifier les autres effets, qui peuvent être des non-linéarités, de la thixotropie, la qualité du signal, des effets locaux de température. Les résultats montrent que ces effets sont limités et ont un impact relativement faible sur les mesures de module complexe car ils représentent moins de 0,5 % en norme du module complexe et 0,2° en angle de phase.
- Les résultats expérimentaux montrent que la norme (respectivement l'angle de phase) du module complexe décroît (respectivement croît) au cours des cycles de chargement. Ces phénomènes ne peuvent pas s'expliquer par le comportement linéaire du matériau et des études complémentaires pour en trouver les causes sont nécessaires.
- D'un point de vue pratique, les résultats confirment que les 3 ou 4 premiers cycles ne doivent pas être pris en considération dans l'analyse du module complexe car

ils sont sujets aux effets transitoires. D'autre part, le nombre de cycles appliqués doit rester le plus faible possible pour éviter les effets biaisants.

6.3 Calculs VEL des essais de traction simple

Il s'agit dans cette section de simuler des essais de traction simple dans le cadre d'un comportement viscoélastique linéaire. Pour cela, le matériau considéré est celui testé et pour lequel les modèles 2S2P1D et DBN ont été calibré au cours de cette thèse. Les paramètres du modèle 2S2P1D associé à ce matériau sont connus et donnés dans le Tableau 6-1. Les paramètres du modèle DBN avec 40 corps, présentés dans la section 6.1, sont ceux utilisés ici également.

On simule ici un essai de traction simple. Les sollicitations imposées sont donc les suivantes :

- Vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ constante dans la direction 1, et
- Contraintes nulles dans les autres directions.

Grâce au code homogène développé au cours de cette thèse, il est alors possible de déterminer à chaque instant les grandeurs caractéristiques du matériau (contraintes et déformations dans toutes les directions).

On appelle coefficient de Poisson sécant le coefficient de Poisson calculé à chaque instant comme l'opposé du rapport de la déformation radiale sur la déformation axiale. La Figure 6-24 présente la variation du coefficient de Poisson sécant au cours de différents essais, réalisés tous à la même vitesse de déformation ($\dot{\epsilon} = 100 \mu\text{def}/\text{min}$), pour des températures d'essais variant de $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $+40\text{ }^{\circ}\text{C}$.

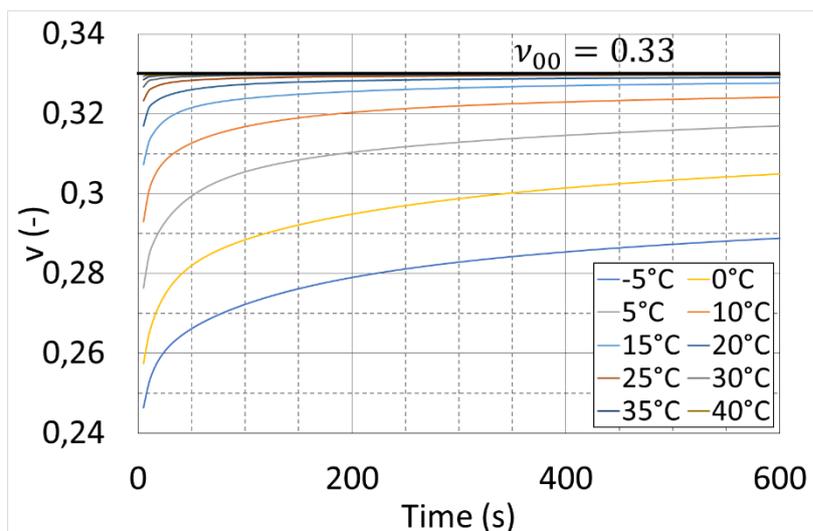


Figure 6-24 : Simulations VEL des variations des coefficients de Poisson sécants en fonction du temps au cours d'un essai de traction simple à vitesse de déformation constante ($\dot{\epsilon} = 100 \mu\text{def}/\text{min}$), à différentes températures (-5 °C à 40 °C).

On observe que le coefficient de Poisson sécant est croissant au cours de l'essai et que quelle que soit la température de l'essai, celui-ci tend vers une valeur asymptotique identique, égale à $\nu_{00} = 0,33$. Plus la température est basse, plus la vitesse de convergence du coefficient de Poisson sécant vers sa valeur asymptotique est lente.

L'observation des Figure 6-25 et Figure 6-26 permet de comparer les variations des déformations axiales et radiales pour le même type d'essai. Sur la première des figures, la déformation axiale est augmentée jusqu'à 1 000 μdef , et jusqu'à 100 000 μdef sur la seconde figure.

On observe que les coefficients de Poisson sécants sont quasiment constant pour ce qui concerne l'essai à 30 °C-0,01 %/min et égal à la valeur limite de $\nu_{00} = 0,33$. En revanche, pour l'essai à 0 °C-1 %/min, on observe que le coefficient de Poisson est inférieur et qu'il tend progressivement vers cette valeur limite de ν_{00} . Enfin on note que dans la gamme des essais cycliques de traction compression réalisés au cours de cette thèse, les coefficients de Poisson évoluent dans une gamme de valeur proche de $\nu_{00} = 0,33$.

L'ensemble de ces observations s'expliquent par le comportement purement viscoélastique simulé du matériau. Quelle que soit la sollicitation, la pente initiale de la courbe déformation axiale-déformation radiale est égale à ν_0 puis tend vers ν_{00} au cours de l'essai.

La vitesse de convergence est bien une fonction croissante de la température et décroissante de la vitesse de déformation imposée au matériau.

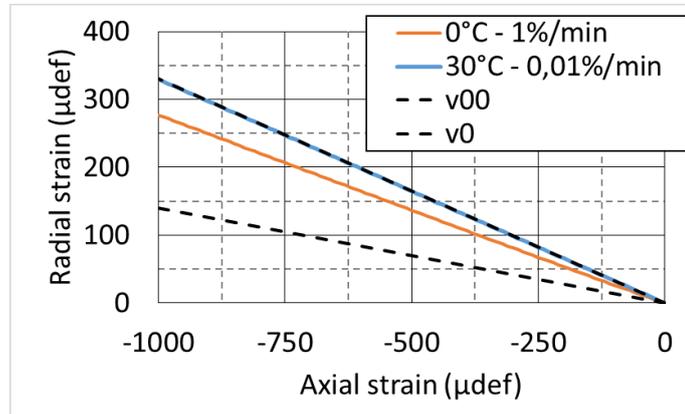


Figure 6-25 : Simulation VEL des variations de la déformation radiale en fonction de la déformation axiale au cours d'un essai de traction simple à vitesse de déformation constante. Deux essais représentés : 0 °C-1 %/min et 30 °C-0,01 %/min, entre 0 et 1 000 μdef en déformation axiale.

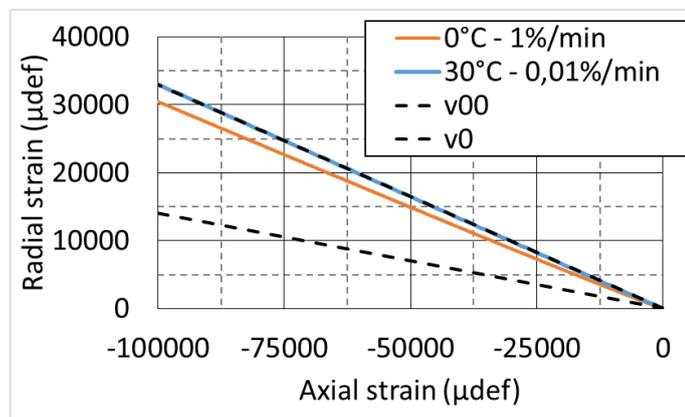


Figure 6-26 : Simulation VEL des variations de la déformation radiale en fonction de la déformation axiale au cours d'un essai de traction simple à vitesse de déformation constante. Deux essais représentés : 0 °C-1 %/min et 30 °C-0,01 %/min, entre 0 et 100 000 μdef en déformation axiale.

6.4 Simulation du comportement VP – Essais cycliques de traction-compression à vitesse de déformation constante

Dans cette section, on simule les essais de traction simple réalisés lors de la campagne expérimentale présentée dans le chapitre 5, à l'aide de la version EPPI du modèle DBN.

6.4.1 Calibration du modèle

Pour rappel, il est question dans cette section du matériau étudié dans cette thèse et dont les paramètres du modèle 2S2P1D sont donnés dans le Tableau 6-1 rappelé ci-dessous.

Tableau 6-1 : Constantes du modèle 2S2P1D pour le matériau testé dans cette thèse à la température de référence $T_{ref} = 15^{\circ}C$.

Campagne expérimentale 2015 :

E_{00} (MPa)	E_0 (MPa)	k (-)	h (-)	δ (-)	τ_E (s)	β (-)	ν_{00} (-)	ν_0 (-)	τ_v (s)
40	34500	0,165	0,51	2,1	0,232	100	0,33	0,14	0,232

La calibration du modèle DBN dans les domaines VEL et VP est réalisée en suivant la procédure détaillée dans la section 2.5.4.1. Le Tableau 6-13 et la Figure 6-27 donnent les valeurs des paramètres et leur répartition en fonction de leur temps caractéristique.

Tableau 6-13 : Paramètres du modèle DBN (Kelvin-Voigt généralisé avec 20 corps élémentaires, à la température de référence $T_r = 15^\circ\text{C}$), calibré pour le matériau testé au cours de cette thèse (cf. section 6.1).

Corps	Module E_j (MPa)	Coef. De Poisson ν_j	Module G_j (MPa)	Viscosité η_j (MPa.s)	Temps caract. (s)	I_p (MPa)
EPO	4,1E+04	1,4E-01	3,5E+04			
VEP1	2,4E+06	3,3E-01	1,8E+06	6,8E-07	2,8E-13	5,3E+01
VEP2	1,7E+06	3,3E-01	1,3E+06	8,8E-06	5,0E-12	4,8E+01
VEP3	1,2E+06	3,3E-01	9,0E+05	1,1E-04	8,9E-11	4,4E+01
VEP4	8,6E+05	3,3E-01	6,4E+05	1,4E-03	1,6E-09	3,8E+01
VEP5	5,5E+05	3,3E-01	4,1E+05	1,6E-02	2,8E-08	3,5E+01
VEP6	3,4E+05	3,3E-01	2,5E+05	1,7E-01	5,0E-07	3,1E+01
VEP7	2,1E+05	3,3E-01	1,5E+05	1,8E+00	8,9E-06	2,7E+01
VEP8	1,2E+05	3,3E-01	8,9E+04	1,9E+01	1,6E-04	2,3E+01
VEP9	6,5E+04	3,3E-01	4,8E+04	1,8E+02	2,8E-03	1,9E+01
VEP10	3,0E+04	3,3E-01	2,2E+04	1,5E+03	5,0E-02	1,6E+01
VEP11	1,1E+04	3,3E-01	8,0E+03	9,7E+03	8,9E-01	1,2E+01
VEP12	3,1E+03	3,3E-01	2,3E+03	5,0E+04	1,6E+01	6,0E+00
VEP13	7,4E+02	3,3E-01	5,4E+02	2,1E+05	2,8E+02	3,4E+00
VEP14	8,8E+01	3,3E-01	6,5E+01	4,4E+05	5,0E+03	1,7E+00
VEP15	1,3E+02	3,3E-01	9,3E+01	1,1E+07	8,9E+04	8,5E-01
VEP16	1,4E+03	3,3E-01	1,0E+03	2,2E+09	1,6E+06	4,4E-01
VEP17	6,5E+03	3,3E-01	4,8E+03	1,8E+11	2,8E+07	2,9E-01
VEP18	3,0E+04	3,3E-01	2,2E+04	1,5E+13	5,0E+08	2,2E-01
VEP19	1,4E+05	3,3E-01	1,0E+05	1,3E+15	8,9E+09	1,8E-01
VEP20	3,4E+02	3,3E-01	2,5E+02	5,4E+13	1,6E+11	1,6E-01

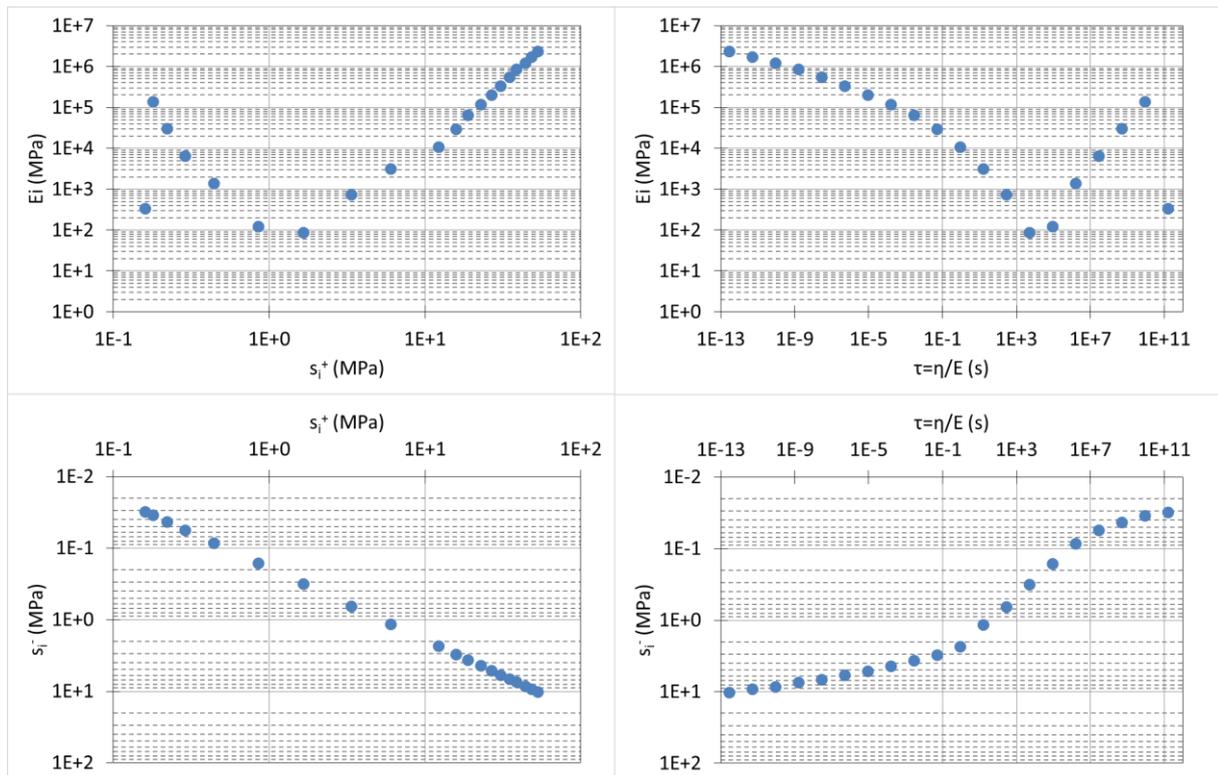


Figure 6-27 : Résultats de la procédure de calibration des paramètres de la version EPPI du modèle DBN.

Nous avons déjà observé que dans certains cas, les mesures de ν^* étaient erronées. Compte tenu des écarts de mesure des coefficients de Poisson pour chaque éprouvette, les paramètres ν_0 et ν_{00} ont été corrigés pour correspondre aux valeurs mesurées expérimentalement, plutôt qu'aux valeurs simulées par le modèle 2S2P1D qui sont par définition éloignées des valeurs mesurées.

Le Tableau 6-14 présente les valeurs retenues pour les paramètres ν_0 et ν_{00} , pour les essais « 15 °C-0,01 %/min », « 15 °C-1 %/min » et « 30 °C-0,01 %/min ». Ces valeurs remplacent les valeurs présentées dans le Tableau 6-1 dans les simulations présentées ci-après.

Tableau 6-14 : Valeurs des paramètres ν_0 et ν_{00} dans les simulations des essais « 15 °C-0,01 %/min » et « 15 °C-0,1 %/min ».

Essais	ν_0	ν_{00}
15 °C-0,01 %/min	0,14	0,45
15 °C-1 %/min	0,14	0,28
30 °C-0,01 %/min	0,13	0,14

6.4.2 Simulations

Les simulations sont réalisées pour les essais à 15 °C et 30 °C. Les essais à 0 °C n'ont pas été simulés à cause des problèmes rencontrés lors de la campagne expérimentale (cf. 5.3.1, rupture prématurée des éprouvettes ou de la colle, etc.).

Les Figure 6-28 à Figure 6-33 présentent les résultats des simulations réalisées (2 températures et 3 vitesses de déformation axiale) avec pour chaque essai deux simulations : l'une avec la partie asymptotique linéaire du modèle DBN et l'autre avec la version EPPI du modèle DBN introduit dans cette thèse. Pour chaque essai, les courbes présentées sont :

- Contrainte axiale-Temps et Contrainte axiale-Déformation axiale,
- Déformation radiale-Temps et Déformation radiale-Déformation axiale,
- Déformation volumique-Temps et Déformation volumique-Déformation axiale.

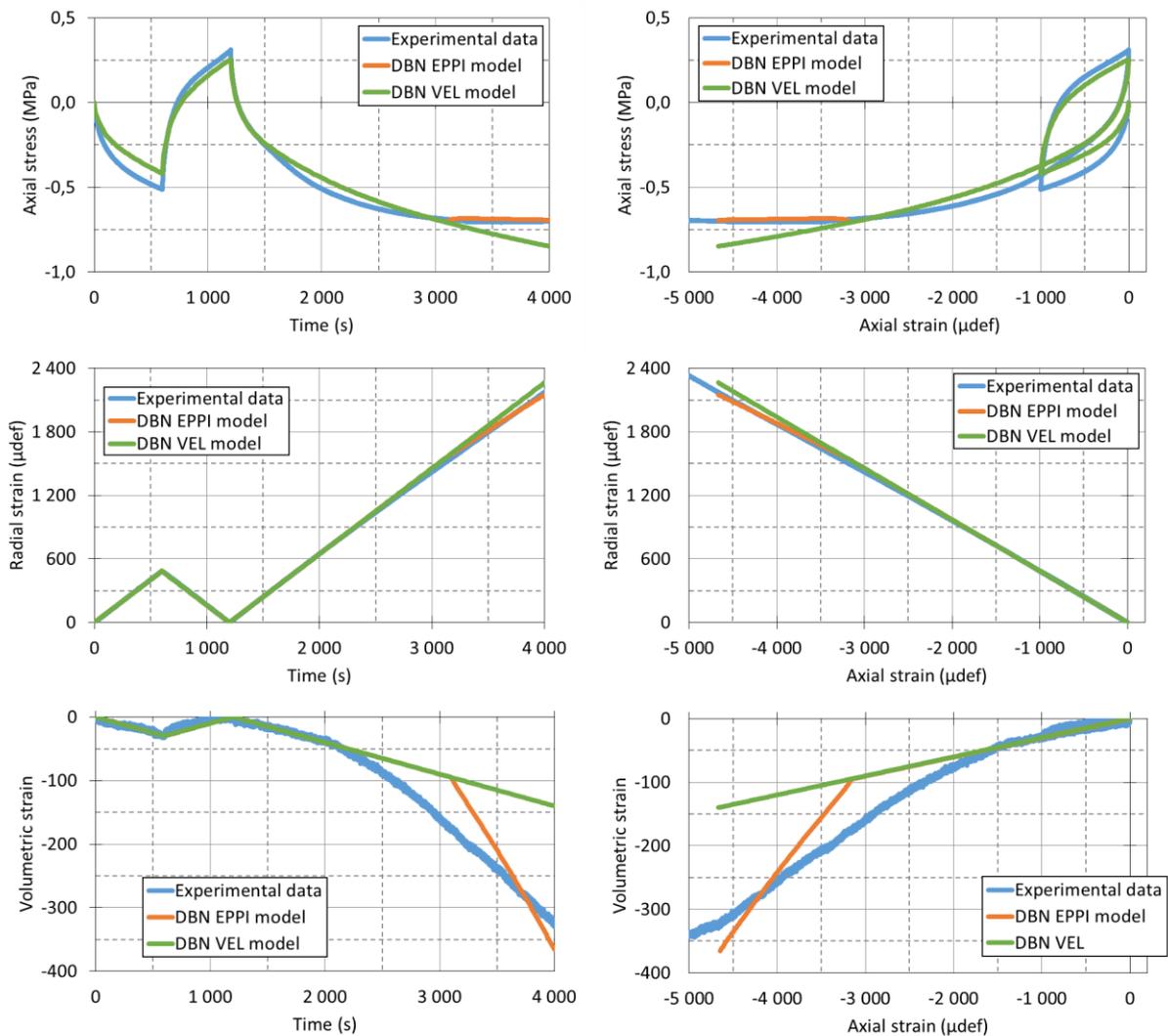


Figure 6-28 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN EPPI de l'essai $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ - $0,01\text{ \%}/\text{min}$.

On observe pour l'ensemble des essais que le modèle DBN VEL (partie asymptotique linéaire du modèle DBN) ne permet pas de simuler correctement l'intégralité des essais de traction simple. Comme on pouvait le supposer, la contrainte axiale est très largement surévaluée dès que le matériau entre en plasticité. Au contraire, la version EPPI du modèle DBN simule correctement le comportement VP du matériau. Au-delà d'une déformation axiale donnée (dépendante de la température et de la vitesse de sollicitation), la contrainte atteint un seuil. Ce seuil (également fonction de la température et de la vitesse de sollicitation) est globalement assez proche de ceux observés lors de la campagne expérimentale.

Concernant les déformations radiales, on observe également que celles-ci sont surévaluées lorsqu'elles sont simulées par le modèle DBN VEL, tandis que la version EPPI du

modèle DBN simule plutôt correctement les déformations radiales résultantes de la sollicitation appliquée.

Cette observation reste évidemment valable pour les résultats des simulations de la déformation volumique.

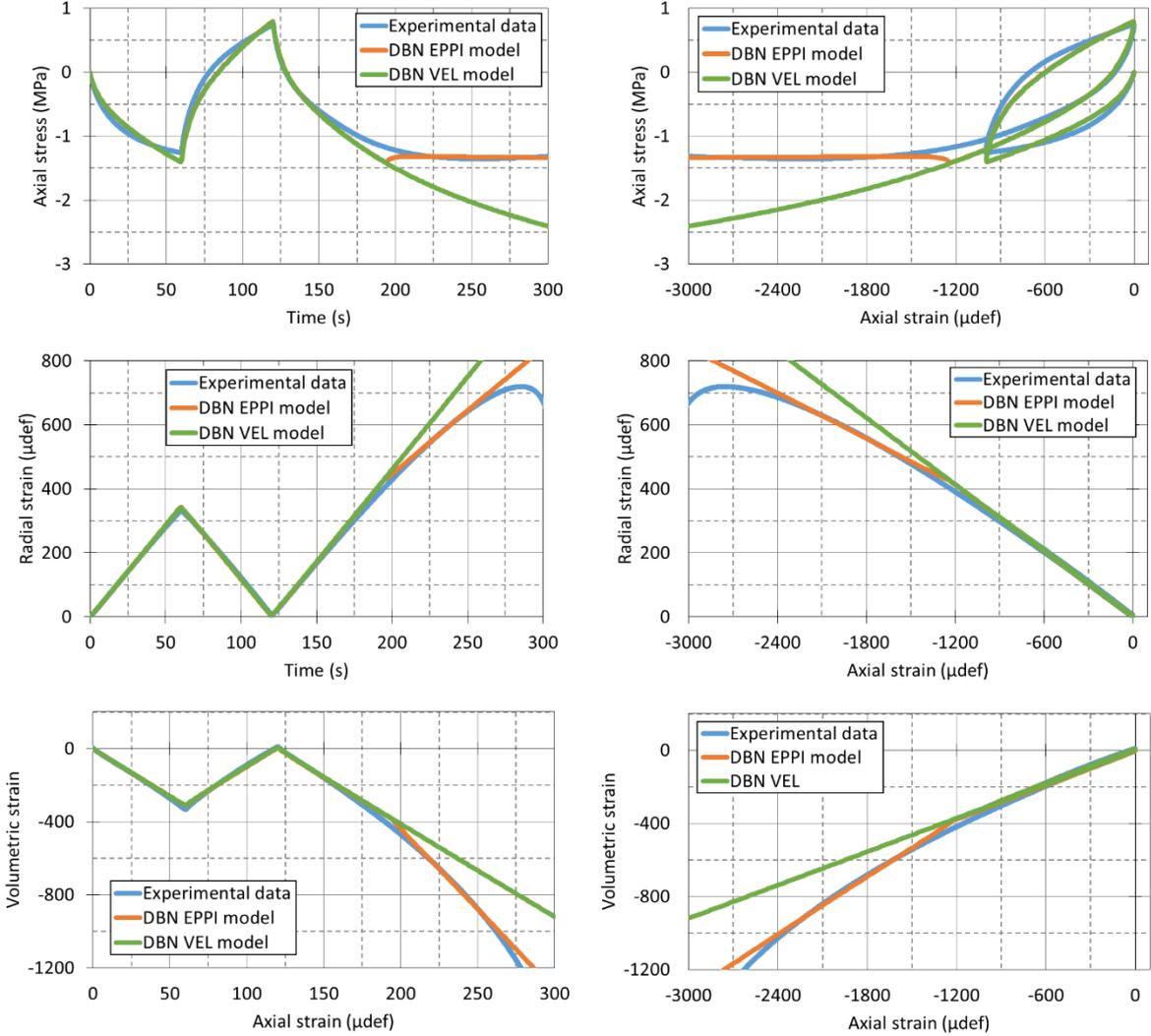


Figure 6-29 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN_{EPPI} de l'essai $15\text{ }^{\circ}\text{C}-0,1\text{ } \%/ \text{min}$.

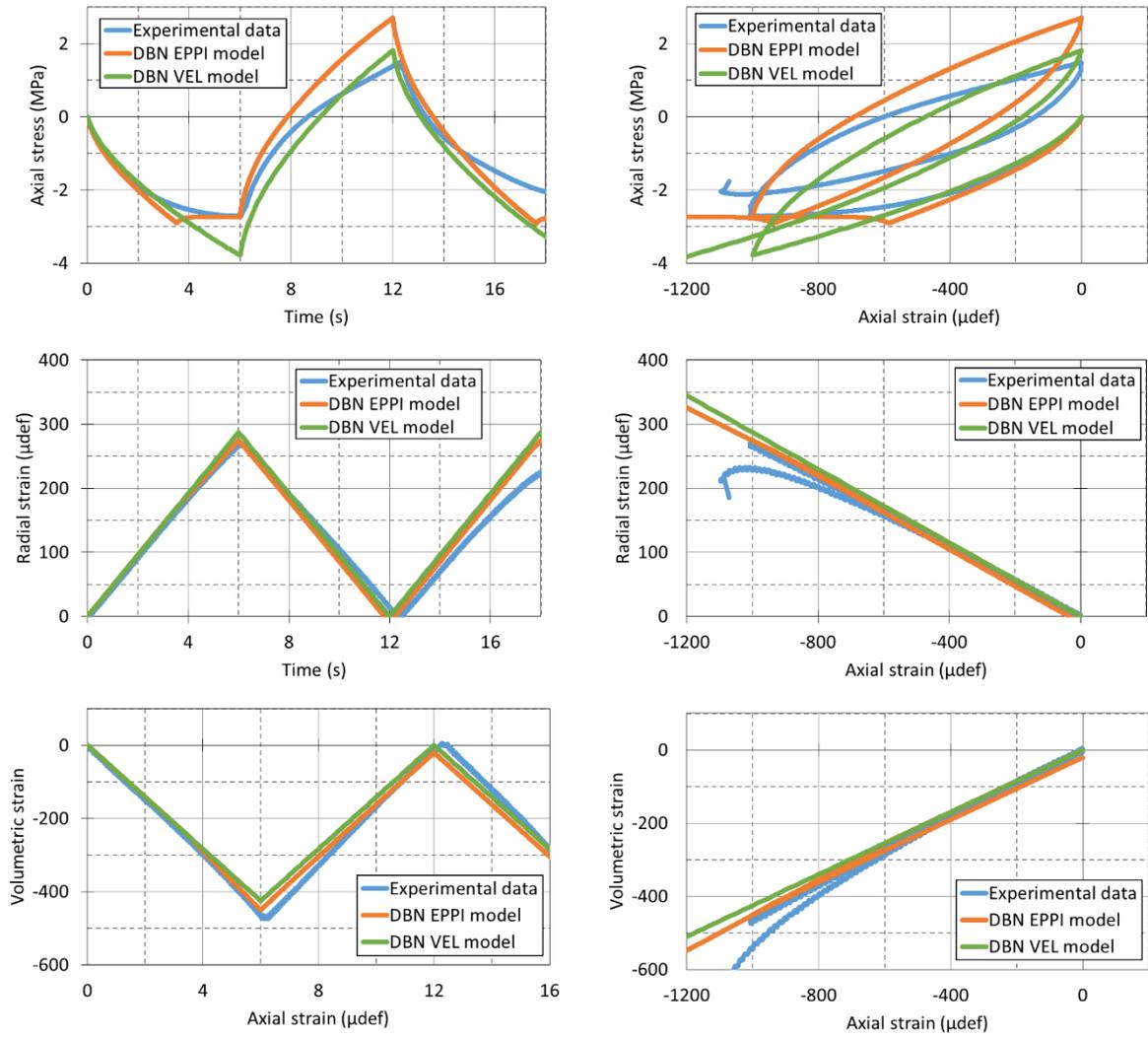


Figure 6-30 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN_{EPPI} de l'essai 15 °C-1 %/min.

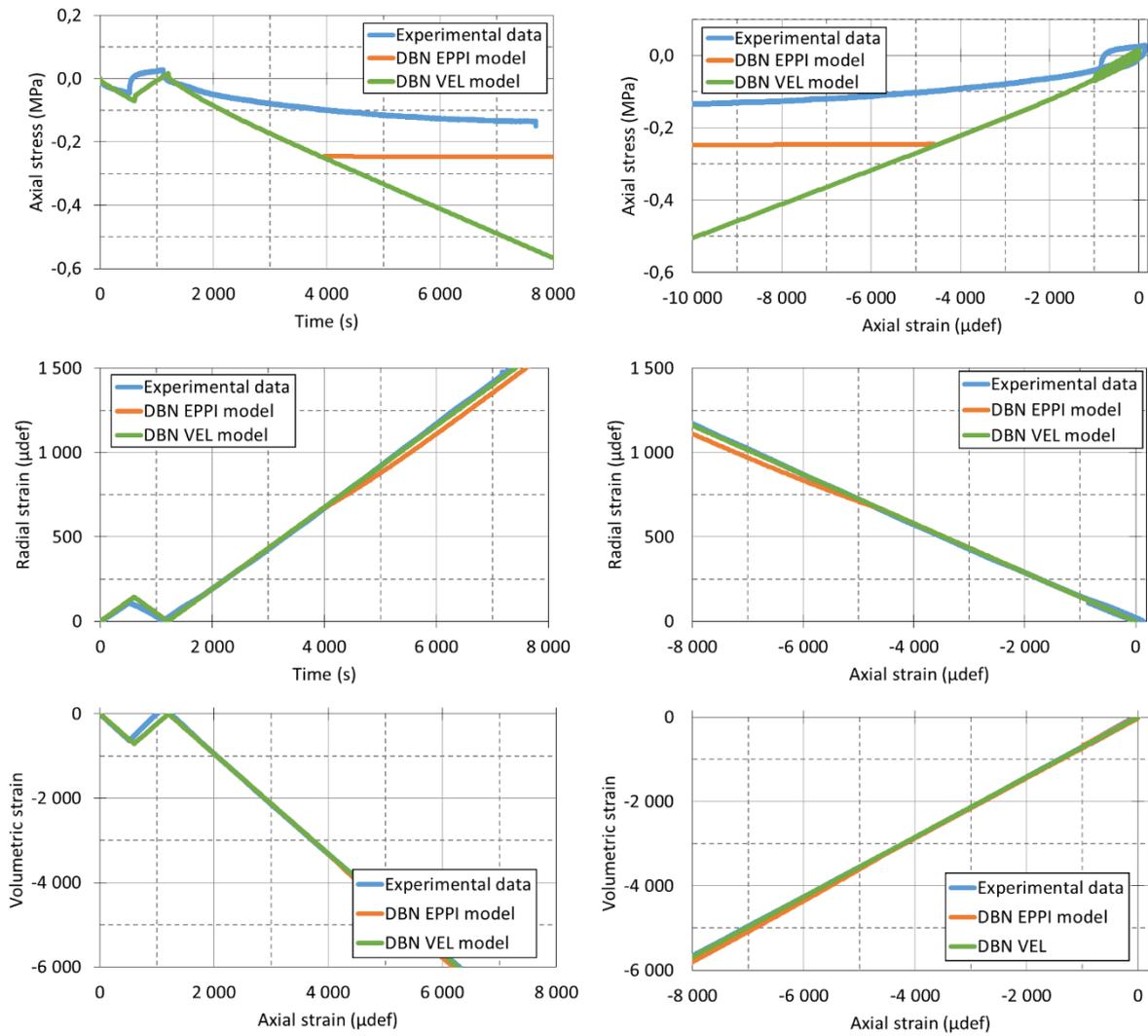


Figure 6-31 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN_{EPPI} de l'essai $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ - $0,01\text{ \%}/\text{min}$.

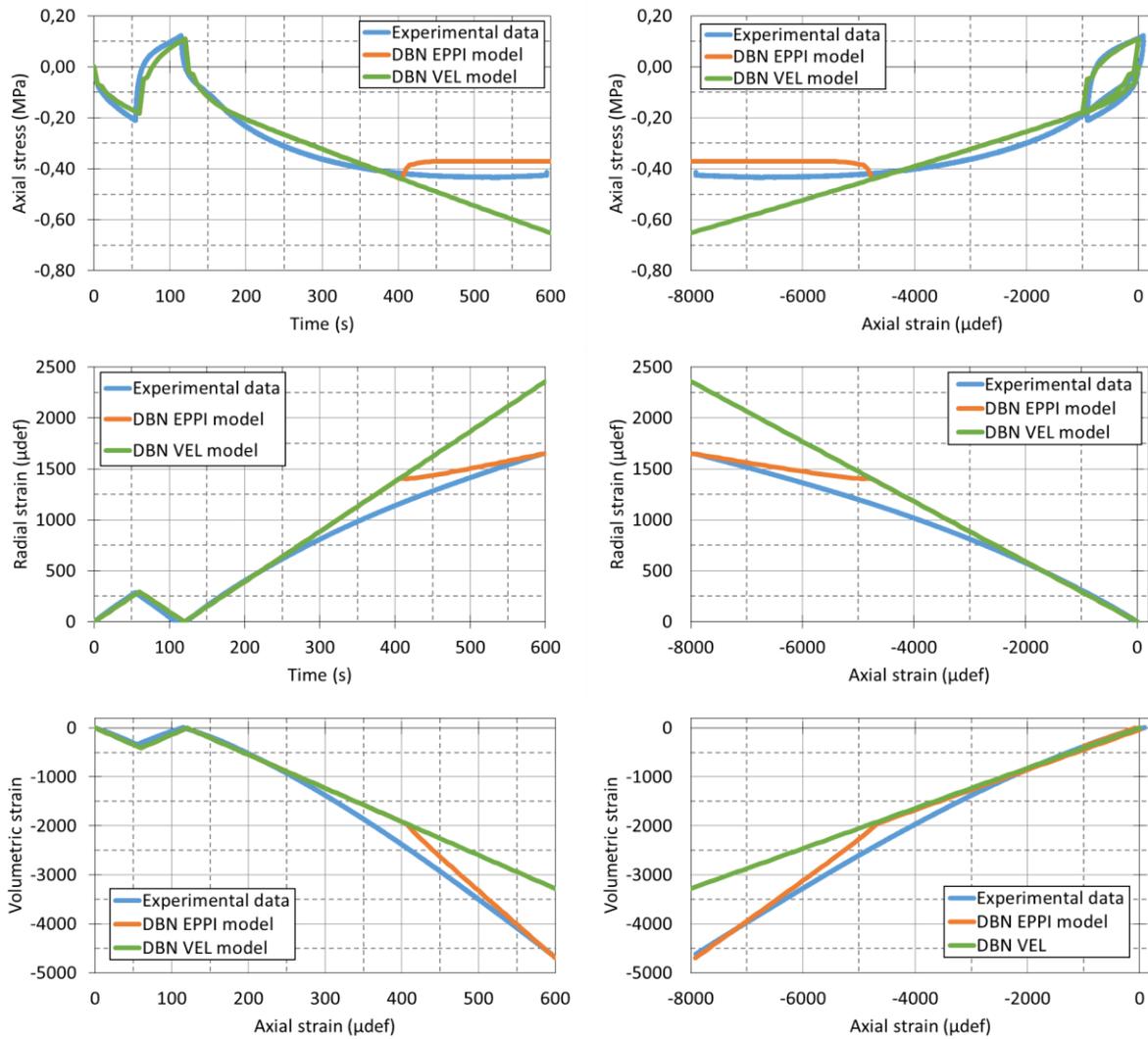


Figure 6-32 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN_{EPPi} de l'essai 30 °C-0,1 %/min.

Pour l'essai 30 °C-0,97 %/min (Figure 6-33), les données expérimentales de déformations radiales ne sont pas exploitables mais ont été néanmoins simulées.

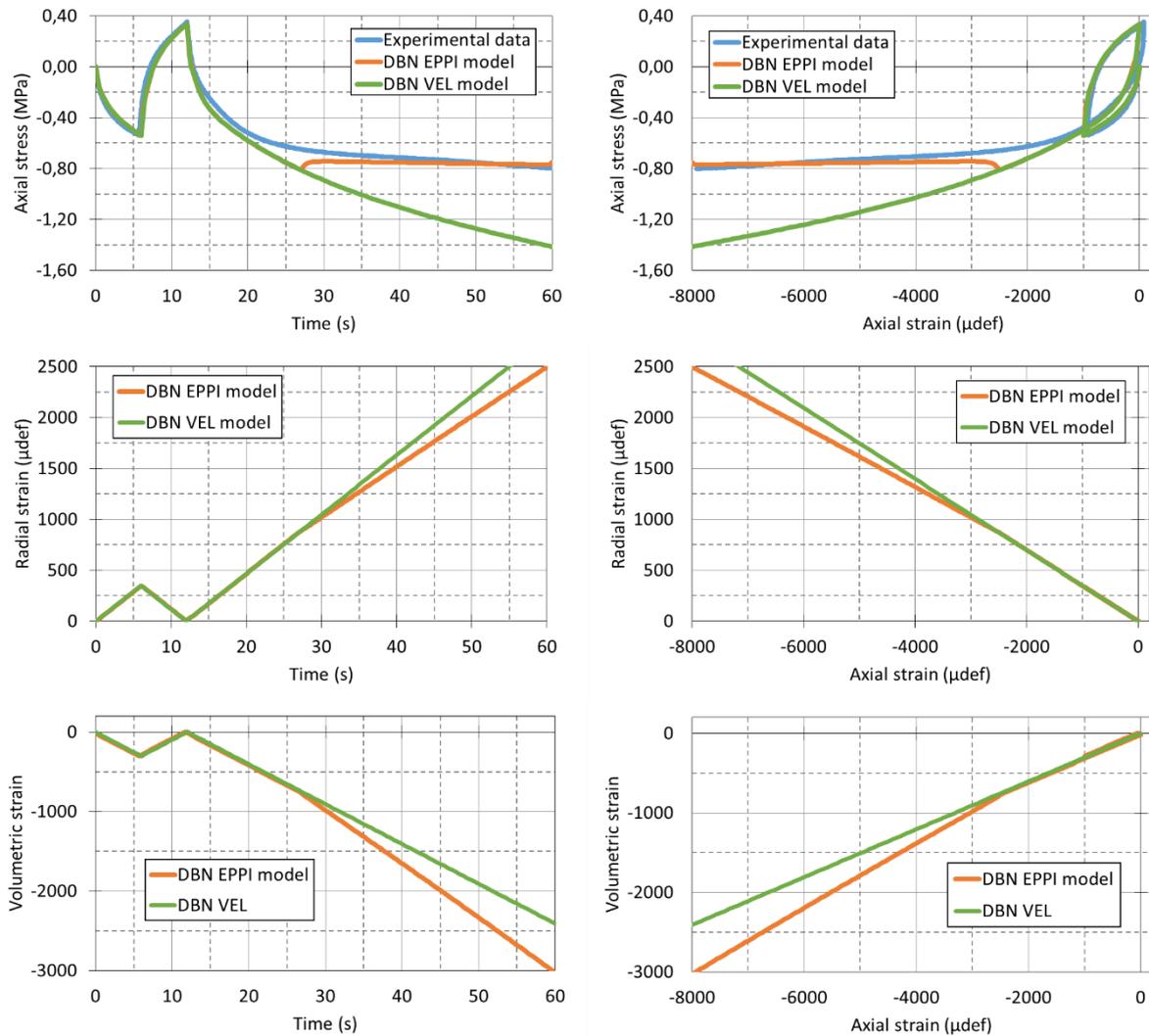


Figure 6-33 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN_{EPPi} de l'essai $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ - $0,97\text{ } \%/min$.

On peut dès lors tirer quelques conclusions concernant la version EPPi du modèle DBN et son utilisation :

- La procédure de calibration permet de déterminer l'ensemble des paramètres du modèle, quel que soit le nombre de corps choisis. Une fois fixés, ces paramètres demeurent inchangés pour toute la gamme de température et de vitesse de sollicitation testée ;
- La version EPPi du modèle DBN permet de simuler correctement les essais de traction simple réalisés sur les enrobés bitumineux. Contrairement à un modèle VEL (tel que la partie asymptotique linéaire du modèle DBN), il permet de donner une évaluation réaliste des contraintes et des déformations résultantes de la sollicitation imposée.

Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse a permis proposer une nouvelle formulation du modèle DBN, capable de décrire avec un formalisme unique les comportements viscoélastique linéaire et viscoplastique des enrobés bitumineux. Il a été conduite dans le cadre d'une convention entre le Cerema (Centre d'Etude et d'Expertise sur les Risques, l'Environnement, la Mobilité et l'Aménagement) et l'ENTPE (Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat).

Pour cela, le travail a été conduit en 3 étapes principales :

1. Développement de la version EPPI (Elastique Parfaitement Plastique Isotrope) du modèle DBN (Di Benedetto-Neifar)

A partir de l'étude des modèles existants, une nouvelle version du modèle DBN viscoélastoplastique a été proposée. Ce modèle permet de décrire différents types de comportements tridimensionnels des enrobés bitumineux avec un formalisme unique, à l'aide de corps élémentaires ElastoPlastique (EP) et Visqueux (V). Pour la version EPPI, les corps EP sont considérés élastoplastiques parfaits. Elle permet de prendre en compte les comportements dans les domaines de petites et grandes déformations. Il s'agit d'une formulation tridimensionnelle du modèle DBN. Une procédure de calibration à partir d'essais expérimentaux classique a également été mise au point.

Pour permettre son utilisation, ce modèle a été implémenté dans un code de calcul homogène. Ces développements, réalisés sous Matlab®, permettent de décrire la réponse à une sollicitation tridimensionnelle en contrainte ou en déformation.

2. Campagne expérimentale de caractérisation du comportement des enrobés bitumineux en petites et grandes déformations

Au cours de cette thèse, une campagne expérimentale composée de deux types d'essais a été réalisée. Tout d'abord des essais de module complexe ont permis de déterminer les propriétés viscoélastiques du matériau testé. Puis des essais de traction simple ont permis de compléter la description du comportement viscoplastique.

3. Calibration à partir des essais expérimentaux et simulations à l'aide de la version EPPI du modèle DBN

A partir de la campagne expérimentale, la version EPPI du modèle DBN, proposée dans cette thèse, a été calibrée. Les essais expérimentaux ont alors été simulés pour permettre de réaliser des comparaisons. De plus une étude des effets transitoires lors des essais de module complexe ont permis de compléter les simulations présentées et de proposer des pistes d'exploitation du modèle.

Les différents résultats exposés au cours de ce mémoire de thèse permettent de souligner les conclusions suivantes.

Concernant le modèle développé :

- La version EPPI du modèle DBN permet avec un formalisme unique de décrire les comportements viscoélastique et viscoplastique des enrobés bitumineux ;
- Son implémentation dans un code de calcul homogène permet de déterminer de manière relativement performante la réponse à des sollicitations tridimensionnelles en contrainte et en déformation ;
- La calibration du modèle est réalisée par optimisation des paramètres du modèle à partir du modèle 2S2P1D qui est un modèle viscoélastique linéaire à spectre continu et du modèle de fluage viscoplastique de Di Benedetto et Yan. La procédure de calibration développée est performante et trouve un intérêt en vue de l'implémentation future dans des codes de calculs aux éléments finis ;
- Le modèle DBN_{EPPI} est ainsi un outil de prédiction du comportement viscoélastique et viscoplastique tridimensionnel d'un enrobé bitumeux, les simulations réalisées à partir des essais de la campagne expérimentale ont permis de mettre en évidence que la procédure de calibration et les procédures de calcul sont fiables. Son implémentation dans un code de calcul homogène a montré l'intérêt d'un tel outil : possibilité de simuler certains essais de laboratoire (essais de module complexe et

de traction simple en particulier), possibilité d'analyse des essais de laboratoire (étude des effets transitoires par exemple), capacité du modèle à s'adapter en fonction de la précision requise, etc.

- Le modèle DBN_{EPP1} est donc prometteur et laisse entrevoir de nombreuses perspectives à l'avenir telles que son introduction dans des codes de calculs aux éléments finis, son amélioration par la prise en compte de la fatigue, des ruptures fragiles, etc.
- Les simulations des essais de module complexe (et dans une autre mesure, l'étude des effets transitoires des essais de module complexe), montrent que le modèle DBN_{EPP1} est très performant dans la modélisation du comportement viscoélastique des enrobés bitumineux. La capacité du modèle à s'adapter, en fonction de la précision recherchée et donc du nombre de corps choisis, est un atout pour une future implémentation dans un code de calcul aux éléments finis.
- Les simulations des essais de traction simple, comparées aux résultats des essais expérimentaux, montrent que le modèle est performant dans la modélisation du comportement viscoplastique des enrobés bitumineux. Ces résultats sont obtenus avec un nombre relativement limité de paramètres, mais simulent très correctement le comportement en grandes déformations pour toute une gamme de température et de sollicitations.

Concernant les résultats expérimentaux :

- Le comportement tridimensionnel des enrobés bitumineux a été caractérisé dans les domaines de petites et grandes déformations (viscoélasticité linéaire et viscoplasticité) grâce à des séries d'essais de module complexe et de traction simple ;
- Les résultats expérimentaux soulignent que la répétabilité et la reproductibilité des essais tridimensionnels de module complexe sur éprouvette cylindrique sont très satisfaisantes ;
- Les résultats confirment la validité du Principe d'Equivalence Temps-Température (PSTT) dans le domaine viscoélastique. On remarque également que les coefficients de translation a_T sont identiques pour les courbes maîtresses du module complexe ($|E^*|$ et ϕ_E) et pour celles du coefficient de Poisson complexe ($|\nu^*|$ et ϕ_ν) ;
- Les résultats permettent de confirmer également la validité du PSTT étendu au domaine des grandes déformations (comportement viscoplastique). On a ainsi des coefficients de translation a_T uniques quelle que soit l'amplitude des sollicitations.

Ainsi, la version EPPI du modèle DBN permet de décrire avec un formalisme unique les comportements des enrobés bitumineux dans les domaines de petites et grandes déformations. La calibration de ce modèle est réalisée à partir des résultats d'essais expérimentaux classiques et il permet de simuler plutôt correctement le comportement viscoélastoplastique des enrobés bitumineux. Sa formulation permet d'envisager son implémentation dans des codes de calculs aux éléments finis.

Les résultats obtenus nous encouragent à poursuivre les recherches sur le modèle DBN et plus globalement sur le comportement des enrobés bitumineux. Pour compléter, les points suivants mériteraient d'être considérés :

- Des essais complémentaires en termes de vitesse de sollicitations et de température pour les essais de traction simples présentés dans cette thèse. Cela permettrait très certainement de confirmer les résultats présentés dans ce mémoire ;
- Des essais complémentaires sur d'autres types d'enrobés bitumineux afin de tester les capacités d'adaptation du modèle, en particulier pour des mélanges avec bitumes modifiés ;
- L'utilisation du modèle DBN_{EPPI} pour d'autres types de sollicitations tridimensionnelles et, à terme, son implémentation dans un logiciel de calcul aux éléments finis pour étendre les possibilités de modélisation aux structures de chaussées ;
- La prise en compte dans une future version du modèle DBN des phénomènes de fatigue, de rupture fragile, etc.

7 Annexes

7.1 Invariants de contrainte et leur dérivation

7.1.1 Contraintes principales et directions principales de contraintes

Le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ est diagonalisable de part sa symétrie. Ainsi quelque soit l'état de contrainte considéré, il existe un repère orthonormé $(0, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$ dans lequel la matrice représentative de $\underline{\sigma}$ est diagonale :

$$\underline{\sigma}_{(0, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Ce repère est appelé **repère des contraintes principales** ou repère principal de contrainte. Les directions propres \vec{j}_1, \vec{j}_2 et \vec{j}_3 sont les **directions principales de contrainte**. Les valeurs propres associées σ_1, σ_2 et σ_3 sont appelées **contraintes principales**.

7.1.2 Invariants et représentation dans le plan des contraintes

Quatre invariants de contraintes scalaires sont introduits ici. Ils sont couramment utilisés dans les lois de comportement, en particulier dans la définition des critères de limite élastique. Ils sont définis par :

$$I_1 = \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma} = \sigma_m \quad (7.2)$$

$$J_2 = \text{tr } \underline{s}^2 = \text{tr}(\underline{\sigma} - \sigma_m \underline{\delta})^2 \quad (7.3)$$

$$J_3 = \text{tr } \underline{s}^3 = \text{tr}(\underline{\sigma} - \sigma_m \underline{\delta})^3 = 3 \det \underline{s} \quad (7.4)$$

Où σ_m est appelé contrainte moyenne et \underline{s} est appelé déviateur des contraintes.

Pour illustrer la signification physique des invariants scalaires I_1, J_2 et J_3 , il convient de se placer dans le système $(O\sigma_1, O\sigma_2, O\sigma_3)$ d'axes orthonormés direct d'origine O de \mathbb{R}^3 associé aux contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 . Dans ce système (cf. Figure 7-1), l'état de contrainte \underline{s} correspond à un point de coordonnées $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. On note également Δ la trisectrice, de direction le vecteur unitaire \vec{k} défini par :

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

On note H la projection orthogonale de M sur Δ , soit :

$$\overrightarrow{OH} = \langle \vec{k} | \overrightarrow{OM} \rangle \cdot \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} \underline{s} \cdot \vec{k} = \sqrt{3} I_1 \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

On obtient ainsi :

$$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_1 \\ I_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

C'est-à-dire :

$$\|\overrightarrow{HM}\| = \sqrt{s_i s_i} = \sqrt{\text{tr} s^2} = \sqrt{J_2} \quad (7.8)$$

On appelle alors plan déviatorique passant par M et noté (Π) , le plan orthogonal à Δ en H . On note également (cf. Figure 7-1) \vec{k}_1, \vec{k}_2 et \vec{k}_3 les vecteurs unitaires associés aux projections orthogonales sur le plan (Π) les axes orthonormés du système $(O\sigma_1, O\sigma_2, O\sigma_3)$ lié aux contraintes principales.

On introduit l'**angle de Lode** noté θ , l'angle orienté que font entre eux dans ce plan les vecteurs \vec{k}_1 et \overrightarrow{HM} . On a alors :

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{HM} \cdot \vec{k}_1}{\|\overrightarrow{HM}\|} \quad (7.9)$$

Puis en utilisant les propriétés des tenseurs, on arrive aux relations suivantes :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}s_1}{\sqrt{J_2}} \quad (7.10)$$

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{6}J_3}{J_2^{3/2}} \quad (7.11)$$

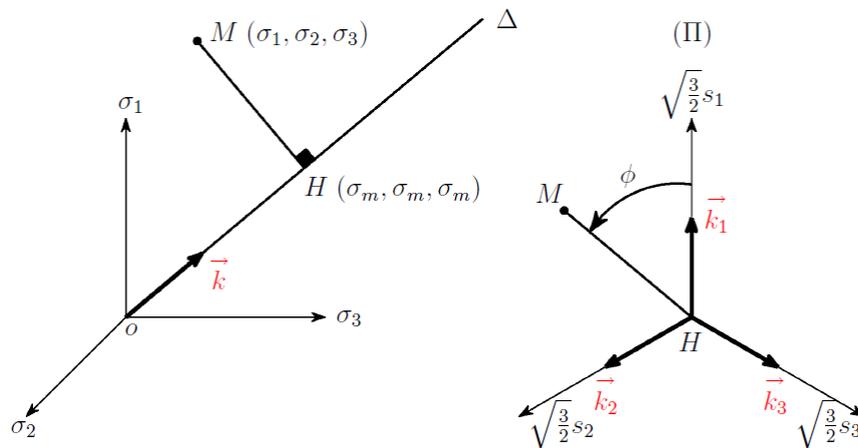


Figure 7-1 : Représentation des invariants de contraintes dans le repère orthonormé associé aux contraintes principales (Royis 2005).

7.1.3 Relations entre invariants de contrainte et contraintes principale

Invariants de contrainte en fonction des contraintes principales

$$I_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (7.12)$$

$$J_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{3} \quad (7.13)$$

$$J_3 = \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \frac{2}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^3 \quad (7.14)$$

Contraintes principales en fonction des invariants de contraintes

$$\sigma_1 = 2\sqrt{\frac{J_2}{3}} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + I_1 \quad (7.15)$$

$$\sigma_2 = 2 \sqrt{\frac{J_2}{3}} \sin(\theta) + I_1 \quad (7.16)$$

$$\sigma_3 = 2 \sqrt{\frac{J_2}{3}} \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + I_1 \quad (7.17)$$

7.1.4 Dérivation des invariants de contraintes

Dérivation du premier invariant de contrainte

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \quad (7.18)$$

Soit en écriture tensorielle :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\delta} \quad (7.19)$$

Dérivation du second invariant de contrainte

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = 2s_{ij} \quad (7.20)$$

Soit en écriture tensorielle :

$$\frac{\partial J_2}{\partial \underline{\sigma}} = 2\underline{s} \quad (7.21)$$

Dérivation du troisième invariant de contrainte

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = 2s_{ik}s_{kj} - J_2\delta_{ij} \quad (7.22)$$

Soit en écriture tensorielle :

$$\frac{\partial J_3}{\partial \underline{\sigma}} = 2\underline{s}^2 - J_2\underline{\delta} \quad (7.23)$$

Dérivation de l'angle de Lode

$$\frac{\partial \cos 3\theta}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left(\frac{\sqrt{6}J_3}{J_2^{3/2}} \right) = \frac{\sqrt{6}}{J_2^{3/2}} \left(2\underline{s}^2 - 3\frac{J_3}{J_2}\underline{s} - J_2\underline{\delta} \right) \quad (7.24)$$

7.1.5 Application au calcul des normales aux surfaces de plasticité et de potentiel plastique

Pour rappel, la fonction de surface de plasticité est donnée par l'équation (1.117) :

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{J_2} \rho(\theta, L_s) - \frac{R}{\sqrt{6}} (I_1 - I_0) \quad (?)$$

$$\rho(\theta, L_s) = \mu \cos \left[\frac{1}{3} \arccos(\gamma \cos(3\theta)) \right] \quad (?)$$

Dérivée de la fonction $f(\underline{\sigma})$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) = \frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial \underline{\sigma}} \rho(\theta, L_s) + \sqrt{J_2} \frac{\partial \rho(\theta, L_s)}{\partial \underline{\sigma}} - \frac{R}{\sqrt{6}} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} \quad (7.25)$$

Soit :

$$\frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial \underline{\sigma}} \rho(\theta, L_s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{s} \rho(\theta, L_s) \quad (7.26)$$

Et :

$$\begin{aligned} & \sqrt{J_2} \frac{\partial \rho(\theta, L_s)}{\partial \underline{\sigma}} \\ &= -\sqrt{J_2} \mu \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left(\frac{1}{3} \arccos(\gamma \cos(3\theta)) \right) \sin \left[\frac{1}{3} \arccos(\gamma \cos(3\theta)) \right] \\ &= \frac{\sqrt{J_2} \mu \gamma}{3\sqrt{1-\gamma^2 \cos^2(3\theta)}} \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} (\cos(3\theta)) \sin \left[\frac{1}{3} \arccos(\gamma \cos(3\theta)) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{J_2} \mu \gamma}{3\sqrt{1-\gamma^2 \cos^2(3\theta)}} \frac{\sqrt{6}}{J_2^{\frac{3}{2}}} \left(2\underline{s}^2 - 3\frac{J_3}{J_2} \underline{s} \right. \\ & \quad \left. - J_2 \underline{\delta} \right) \sin \left[\frac{1}{3} \arccos(\gamma \cos(3\theta)) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2} \mu \gamma}{\sqrt{3}\sqrt{1-\gamma^2 \cos^2(3\theta)}} \left(3\frac{J_3}{J_2^2} \underline{s} + \underline{\delta} - \frac{2}{J_2} \underline{s}^2 \right) \sin \left[\frac{1}{3} \arccos(\gamma \cos(3\theta)) \right] \end{aligned} \quad (7.27)$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{s} \rho(\theta, L_s) - \frac{R}{\sqrt{6}} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} \quad (7.28)$$

$$+ \frac{\sqrt{2} \mu \gamma}{\sqrt{3} \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2(3\theta)}} \left(3 \frac{J_3}{J_2^2} \underline{s} + \underline{\delta} - \frac{2}{J_2} \underline{s}^2 \right) \sin \left[\frac{1}{3} \arccos(\gamma \cos(3\theta)) \right]$$

7.2 Codes de calculs

L'ensemble des codes de calcul sont développés sous Matlab®.

7.2.1 Chargement des paramètres du modèle DBN à partir de la feuille de calcul Excel©

load_data.m

```
%Import datas from the file "datas.xlsx"

%Ask calibrations to user
disp('1/4 - Reading DBN calibration');
ini_DBN_calibration;
disp('2/4 - Reading WLF calibration');
ini_WLF_calibration;

%Ask time parameters to user
disp('3/4 - Reading time parameters');
ini_time_parameters;

%Build matrix, vectors and parameters from datas given by user
disp('4/4 - Creating datas');
ini_DBN_parameters;

%Save datas in files
save('%DBN.mat', 'n_DBN_elements', 'E0_DBN', 'E_DBN', 'v0_DBN', 'v_DBN', 'n_DBN', ...
    'G0_DBN', 'G_DBN', 'M_elast0', 'M_elast', 'M_elast0_inv', 'M_elast_inv', ...
    'Rc', 'Rt', 'Rg', 'Ls', 'Lsg', 'I1c', 'I1t', 'Ip');
save('%WLF.mat', 'C1', 'C2', 'TREF');
save('%time_param.mat', 'TMAX', 'C2', 'DT', 'crit_conv');

disp(' ');
disp('Parameters loaded and saved');
disp(' ');
```

7.2.2 Calibration du modèle DBN dans le domaine VEL

run.m

```
%Calibration of the asymptotic linear part of the DBN model
%from 2S2P1D calibration in the VEL domain

clear all
clc
format long
```

```

%2S2P1D parameters
E00=100;
E0=5000;
k=0.2;
h=0.4;
delta=1.5;
tau=0.1;
beta=200;
v00=0.45;
v0=0.15;

%Calibration parameters
fmin=1.5*10^(-10);
fmax=10^14;
n_bodies=40;

%Initialization of parameters
df=10^(log10(fmax/fmin)/n_bodies);
freq=zeros(n_bodies,1);
char_time=zeros(n_bodies,1);
E0_DBN=E0;
E_DBN=zeros(n_bodies,1);
n0_DBN=0;
n_DBN=zeros(n_bodies,1);
v0_DBN=v0;
v_DBN=zeros(n_bodies,1);

%Frequencies and characteristic times
freq(1)=fmax/df;
char_time(1)=1/(2*pi*freq(1));
for i=2:n_bodies
    freq(i)=freq(i-1)/df;
    char_time(i)=1/(2*pi*freq(i));
end

%Computing DBN parameters
if E00==0
    n0_DBN=E0*beta*tau;
    for j=1:n_bodies
        Re(j,1)=Re_E_2S2P1D(freq(j),E00,E0,delta,tau,k,h,beta);
        Im(j,1)=Im_E_2S2P1D(freq(j),E00,E0,delta,tau,k,h,beta);
        Mod(j,1)=sqrt(Re(j,1)^2+Im(j,1)^2);
        S1(j,1)=Sum1(j,E0_DBN,E_DBN,freq,char_time);
        S2(j,1)=Sum2(j,E_DBN,freq,char_time);
        E1(j,1)=(2*(Re(j,1)/Mod(j,1)^2-S1(j,1)))^(-1);
        E2(j,1)=(2*(Im(j,1)/Mod(j,1)^2-S2(j,1)))^(-1);

        E_DBN(j)=sqrt((E1(j,1)^2+E2(j,1)^2)/2);
        n_DBN(j)=char_time(j)*E_DBN(j);
    end
else
    for j=1:n_bodies-1
        Re(j,1)=Re_E_2S2P1D(freq(j),E00,E0,delta,tau,k,h,beta);
        Im(j,1)=Im_E_2S2P1D(freq(j),E00,E0,delta,tau,k,h,beta);
        Mod(j,1)=sqrt(Re(j,1)^2+Im(j,1)^2);
        S1(j,1)=Sum1(j,E0_DBN,E_DBN,freq,char_time);
        S2(j,1)=Sum2(j,E_DBN,freq,char_time);
    end
end

```

```

E1(j,1)=(2*(Re(j,1)/Mod(j,1)^2-S1(j,1)))^(-1);
E2(j,1)=(2*(Im(j,1)/Mod(j,1)^2-S2(j,1)))^(-1);

E_DBN(j)=sqrt((E1(j)^2+E2(j)^2)/2);
n_DBN(j)=char_time(j)*E_DBN(j);
end

E_DBN(n_bodies)=1/E00;
for i=1:n_bodies-1
    E_DBN(n_bodies)=E_DBN(n_bodies)-1/E_DBN(i);
end
E_DBN(n_bodies)=(E_DBN(n_bodies))^(-1);
n_DBN(n_bodies)=char_time(n_bodies)*E_DBN(n_bodies);

end

for j=1:n_bodies
    v_DBN(j)=v00*E0/(E0-E00)-v0*E00/(E0-E00);
end

%Compiling datas for plotting
freq_plot(1,1)=fmin;
df_plot=1.01;
j=1;
while freq_plot(j)<=fmax

Re_E_2S2P1D_plot(j,1)=Re_E_2S2P1D(freq_plot(j,1),E00,E0,delta,tau,k,h,bet
a);

Im_E_2S2P1D_plot(j,1)=Im_E_2S2P1D(freq_plot(j,1),E00,E0,delta,tau,k,h,bet
a);

Mod_E_2S2P1D_plot(j,1)=sqrt(Re_E_2S2P1D_plot(j,1)^2+Im_E_2S2P1D_plot(j,1)
^2);

Phi_E_2S2P1D_plot(j,1)=180/pi*atan(Im_E_2S2P1D_plot(j,1)/Re_E_2S2P1D_plot
(j,1));

Re_v_2S2P1D_plot(j,1)=Re_E_2S2P1D(freq_plot(j,1),v00,v0,delta,tau,k,h,bet
a);

Im_v_2S2P1D_plot(j,1)=Im_E_2S2P1D(freq_plot(j,1),v00,v0,delta,tau,k,h,bet
a);

Mod_v_2S2P1D_plot(j,1)=sqrt(Re_v_2S2P1D_plot(j,1)^2+Im_v_2S2P1D_plot(j,1)
^2);

Phi_v_2S2P1D_plot(j,1)=180/pi*atan(Im_v_2S2P1D_plot(j,1)/Re_v_2S2P1D_plot
(j,1));

[Re_E_DBN_plot(j,1),Im_E_DBN_plot(j,1)]=...
    ReIm_E_DBN(freq_plot(j,1),n_bodies,E0_DBN,E_DBN,n0_DBN,n_DBN);
Mod_E_DBN_plot(j,1)=sqrt(Re_E_DBN_plot(j,1)^2+Im_E_DBN_plot(j,1)^2);

Phi_E_DBN_plot(j,1)=180/pi*atan(Im_E_DBN_plot(j,1)/Re_E_DBN_plot(j,1));

```

```

[Re_v_DBN_plot(j,1),Im_v_DBN_plot(j,1)]=...

ReIm_v_DBN(freq_plot(j,1),n_bodies,v00,E0_DBN,E_DBN,v0_DBN,v_DBN,n0_DBN,n
_DBN);
Mod_v_DBN_plot(j,1)=sqrt(Re_v_DBN_plot(j,1)^2+Im_v_DBN_plot(j,1)^2);
Phi_v_DBN_plot(j,1)=180/pi*atan(Im_v_DBN_plot(j,1)/Re_v_DBN_plot(j,1));

freq_plot(j+1,1)=freq_plot(j,1)*df_plot;
j=j+1;
end

freq_plot=freq_plot(1:(j-1),1);

subplot(231)
plot(Re_E_2S2P1D_plot,Im_E_2S2P1D_plot,Re_E_DBN_plot,Im_E_DBN_plot)
legend('2S2P1D','DBN','Location','Best')
grid
xlabel('Re(E^*) (MPa)')
ylabel('Im(E^*) (MPa)')

subplot(232)
semilogx(freq_plot,Mod_E_2S2P1D_plot,freq_plot,Mod_E_DBN_plot)
legend('2S2P1D','DBN','Location','Best')
grid
xlabel('aT.frequency (Hz)')
ylabel('|E^*| (MPa)')

subplot(233)
semilogx(freq_plot,Mod_v_2S2P1D_plot,freq_plot,Mod_v_DBN_plot)
legend('2S2P1D','DBN','Location','Best')
grid
xlabel('aT.frequency (Hz)')
ylabel('|nu^*| (MPa)')

subplot(234)
semilogy(Phi_E_2S2P1D_plot,Mod_E_2S2P1D_plot,Phi_E_DBN_plot,Mod_E_DBN_plo
t)
legend('2S2P1D','DBN','Location','Best')
grid
xlabel('\phi(E^*) (°)')
ylabel('|E^*| (MPa)')

subplot(235)
semilogx(freq_plot,Phi_E_2S2P1D_plot,freq_plot,Phi_E_DBN_plot)
legend('2S2P1D','DBN','Location','Best')
grid
xlabel('aT.frequency (Hz)')
ylabel('\phi(E^*) (°)')

subplot(236)
semilogx(freq_plot,Phi_v_2S2P1D_plot,freq_plot,Phi_v_DBN_plot)
legend('2S2P1D','DBN','Location','Best')
grid
xlabel('aT.frequency (Hz)')
ylabel('\phi(nu^*) (°)')

```

Sum1.m

```
function [ S ] = Sum1( k,E0_DBN,E_DBN,freq,char_time )
%Sum1 function

S=1/E0_DBN;

for i=1:k-1
    S=S+1/(E_DBN(i)*(1+(2*pi*freq(k)*char_time(i))^2));
end

end
```

Sum2.m

```
function [ S ] = Sum2( k,E_DBN,freq,char_time )
%Sum2 function

S=0;

for i=1:k-1

S=S+2*pi*freq(k)*char_time(i)/(E_DBN(i)*(1+(2*pi*freq(k)*char_time(i))^2)
);
end

end
```

Re_E_2S2P1D.m

```
function [ Y ] = Re_E_2S2P1D( f,E00,E0,delta,tau,k,h,beta )

E1p=(E0-E00)*(1+delta*(2*pi*f*tau)^(-k)*cos(k*pi/2)+(2*pi*f*tau)^(-
h)*cos(h*pi/2));
E2p=(E0-E00)*(delta*(2*pi*f*tau)^(-k)*sin(k*pi/2)+(2*pi*f*tau)^(-
h)*sin(h*pi/2)+(2*pi*f*tau*beta)^(-1));

DEN=(E1p/(E0-E00))^2+(E2p/(E0-E00))^2;

Y=E00+E1p/DEN;

end
```

Im_E_2S2P1D.m

```
function [ Y ] = Im_E_2S2P1D( f,E00,E0,delta,tau,k,h,beta )

E1p=(E0-E00)*(1+delta*(2*pi*f*tau)^(-k)*cos(k*pi/2)+(2*pi*f*tau)^(-
h)*cos(h*pi/2));
E2p=(E0-E00)*(delta*(2*pi*f*tau)^(-k)*sin(k*pi/2)+(2*pi*f*tau)^(-
h)*sin(h*pi/2)+(2*pi*f*tau*beta)^(-1));

DEN=(E1p/(E0-E00))^2+(E2p/(E0-E00))^2;
```

```
Y=E2p/DEN;
```

```
end
```

ReIm_E_DBN.m

```
function [Re,Im] = ReIm_E_DBN(f,n_bodies,E0_DBN,E_DBN,n0_DBN,n_DBN )
```

```
DBNa=1/E0_DBN;
```

```
for i=1:n_bodies
```

```
    DBNa=DBNa+E_DBN(i)/(E_DBN(i)^2+(2*pi*f*n_DBN(i))^2);
```

```
end
```

```
if n0_DBN==0
```

```
    DBNb=0;
```

```
else
```

```
    DBNb=1/(2*pi*f*n0_DBN);
```

```
end
```

```
for i=1:n_bodies
```

```
    DBNb=DBNb+2*pi*f*n_DBN(i)/(E_DBN(i)^2+(2*pi*f*n_DBN(i))^2);
```

```
end
```

```
Re=DBNa/(DBNa^2+DBNb^2);
```

```
Im=DBNb/(DBNa^2+DBNb^2);
```

```
end
```

ReIm_v_DBN.m

```
function [ Re,Im ] =
```

```
ReIm_v_DBN(f,n_bodies,v00,E0_DBN,E_DBN,v0_DBN,v_DBN,n0_DBN,n_DBN )
```

```
DBNa=1/E0_DBN;
```

```
for i=1:n_bodies
```

```
    DBNa=DBNa+E_DBN(i)/(E_DBN(i)^2+(2*pi*f*n_DBN(i))^2);
```

```
end
```

```
if n0_DBN==0
```

```
    DBNb=0;
```

```
else
```

```
    DBNb=1/(2*pi*f*n0_DBN);
```

```
end
```

```
for i=1:n_bodies
```

```
    DBNb=DBNb+2*pi*f*n_DBN(i)/(E_DBN(i)^2+(2*pi*f*n_DBN(i))^2);
```

```
end
```

```
DBNc=v0_DBN/E0_DBN;
```

```
for i=1:n_bodies
```

```
    DBNc=DBNc+v_DBN(i)*E_DBN(i)/(E_DBN(i)^2+(2*pi*f*n_DBN(i))^2);
```

```
end
```

```
if n0_DBN==0
```

```
    DBNd=0;
```

```
else
```

```

        DBNd=v00/(2*pi*f*n0_DBN);
end
for i=1:n_bodies
    DBNd=DBNd+v_DBN(i)*2*pi*f*n_DBN(i)/(E_DBN(i)^2+(2*pi*f*n_DBN(i))^2);
end

Re=(DBNa*DBNc+DBNb*DBNd)/(DBNa^2+DBNb^2);
Im=(DBNb*DBNc-DBNa*DBNd)/(DBNa^2+DBNb^2);

end

```

7.2.3 Calcul de la déformation résultante d'une contrainte imposée

Le choix des sollicitations thermo-mécaniques s'effectue dans les fichiers sollicitations.m (mécanique) et temperature.m (thermique).

Ce programme s'initialise avec la fonction run.m qui se compose de deux principaux scripts :

- initialisation.m qui permet d'initialiser le programme, de calibrer le modèle et de créer les fichiers d'enregistrement,
- main_program.m qui effectue les calculs et enregistre les résultats dans les fichiers précédemment créés.

L'ensemble des fonctions nécessaires à l'exécution de ce programme est donné ci-dessous.

Choix des sollicitations mécaniques et thermiques

```

sollicitations.m
%Function sigma(t) gives the imposed strain chosen by user at the time t

function [ Y ] = sollicitations(t)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%PLEASE FILL THE 6 FUNCTIONS HERE
%Constant pi=3.14159.... must be written with small letters
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

f11=10*sin(2*pi*0.01*t);
f22=0;
f33=0;
f23=0;
f13=0;
f12=0;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%% DO NOT MODIFY THE FILE AFTER THIS LINE
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
Y=[f11;f22;f33;f23;f13;f12];

end

```

temperature.m

```

%Function temperature(t) gives the imposed temperature chosen by user at
the time t

function [ T ] = temperature(t)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%PLEASE FILL THE T FUNCTION HERE
%Examples: T=20;
%           T=2*t;
%           T=20+5*sin(0.1*t);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

T=0.01*t+2*sin(2*pi*0.1*t);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%DO NOT MODIFY THE FILE AFTER THIS LINE
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

end

```

Fonctions principales

run.m

```

%Determine strains from stresses and temperature variations using EPPI
%version of the DBN model
%
%-----
--
%Created           : 23/01/2013
%Last modified    : 12/12/2016
%Program conceptor : Pierre GAYTE
%Postal address   : ENTPE - Rue Maurice Audin - 69518 Vaulx en Velin -
France
%Contact          : pierre.gayte@cerema.fr // pierre.gayte@gmail.com

```

```

%-----
--
%If you are experiencing issues please contact the program conceptor
%Free use BUT don't copy this program without permission please

clear all;                %clear all variables
clc;                      %clear command windows
format long              %set display format to long (10 digits)
clf;                     %clear plots
set(0, 'RecursionLimit',1000) %set the recursion limit to 1000

%Initialisations
initialisation;

%Computations
tic;
main_program;
disp(' ');
toc;

```

initialisation.m

```

%initialisation.m
%Informations and warnings
disp('Datas have to be loaded before (using load_datas.m)');

%Load calibratoin data and parameters
load('%DBN.mat', 'n_DBN_elements', 'E0_DBN', 'E_DBN', 'v0_DBN', 'v_DBN', 'n_DBN', ...
', ...
'G0_DBN', 'G_DBN', 'M_elast0', 'M_elast', 'M_elast0_inv', 'M_elast_inv', ...
'Rc', 'Rt', 'Rg', 'Ls', 'Lsg', 'I1c', 'I1t', 'Ip');
load('%WLF.mat', 'C1', 'C2', 'TREF');
load('%time_param.mat', 'TMAX', 'C2', 'DT', 'crit_conv');

%Create matrix where datas are saved
ini_create_datas;

```

main_program.m

```

%main_program.m

%Informations for users
disp(' ');
disp('Beginning the process... ');
percent=0:1:100;
indexP=1;
n_percent=0;
max_error=0;

%Initialisation for time = 0
total_strain_e{1}=strain0{1}(1:6,1);
total_strain_p{1}=[0;0;0;0;0;0];
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    total_strain_e{1}=total_strain_e{1}+strain_e{1}(1:6,i_DBN);
    total_strain_p{1}=total_strain_p{1}+strain_p{1}(1:6,i_DBN);
end

```

```

total_strain{1}=total_strain_e{1}+total_strain_p{1};

%Computations
for kT=2:kTMAX
    %Informations about calculations
    if 100*kT/(kTMAX+1)>=percent(indexP)
        fprintf( repmat( '\b', 1, n_percent) );
        fprintf( '%s', ['Progress ... ', num2str( percent( indexP) ), '%'] );
        n_percent=numel( ['Progress ... ', num2str( percent( indexP) ), '%'] );
        indexP=indexP+1;
    end

    %Initialisation
    strain0{kT}(1:6,1)=M_elast0*sollicitations((kT-1)*DT);
    total_strain_e{kT}(1:6,1)=strain0{kT}(1:6,1);
    total_strain_p{kT}(1:6,1)=zeros(6,1);

    for i_DBN=1:n_DBN_elements
        %Computations to find values at time kT (= t)
        [strain_e{kT}(1:6,i_DBN), ...
         dstraindt_e{kT}(1:6,i_DBN), ...
         strain_p{kT}(1:6,i_DBN), ...
         dstraindt_p{kT}(1:6,i_DBN), ...
         stress_f{kT}(1:6,i_DBN), ...
         dstressdt_f{kT}(1:6,i_DBN), ...
         isVEL{kT}(1,i_DBN), ...
         nf{kT}(1:6,i_DBN), ...
         tf{kT}(1:6,i_DBN), ...
         ng{kT}(1:6,i_DBN), ...
         max_error(kT)]=...
         ...
         increment((kT-1)*DT,DT,E_DBN(i_DBN,1), ...
         n_DBN(i_DBN,1),M_elast{i_DBN},Rt(i_DBN),Rc(i_DBN),Ls(i_DBN), ...
         Ilt(i_DBN),Ilc(i_DBN),Ip(i_DBN),Rg(i_DBN),Lsg(i_DBN),crit_conv,...
         strain_e{kT-1}(1:6,i_DBN), ...
         dstraindt_e{kT-1}(1:6,i_DBN), ...
         strain_p{kT-1}(1:6,i_DBN), ...
         dstraindt_p{kT-1}(1:6,i_DBN), ...
         stress_f{kT-1}(1:6,i_DBN), ...
         dstressdt_f{kT-1}(1:6,i_DBN), ...
         isVEL{kT-1}(1,i_DBN), ...
         nf{kT-1}(1:6,i_DBN), ...
         tf{kT-1}(1:6,i_DBN), ...
         ng{kT-1}(1:6,i_DBN), ...
         max_error(kT-1));

         total_strain_e{kT}(1:6,1)=total_strain_e{kT}(1:6,1)+...
             strain_e{kT}(1:6,i_DBN);
         total_strain_p{kT}(1:6,1)=total_strain_p{kT}(1:6,1)+...
             strain_p{kT}(1:6,i_DBN);
    end

    total_strain{kT}(1:6,1)=total_strain_e{kT}(1:6,1)+...
        total_strain_p{kT}(1:6,1);
end
end

```

```

disp(' ')
disp(' ')
disp(['Maximum error = ', num2str(10^6*max(max_error)), ' udef']);

clear indexP i_DBN percent;

```

Fonctions secondaires

ini_create_datas.m

```

%create_datas.m
%Create variables where datas and results of the calibrations are saved
%and do the initialisation of datas

global TREF C1 C2;

%Time and frequency parameters
kTMAX=floor(TMAX/DT+1);

%%
%%Strains
strain0=fcn_create_arrays(kTMAX,6,1);
strain0{1}(1:6,1)=M_elast0*sollicitations(0);

total_strain=fcn_create_arrays(kTMAX,6,1);
total_strain_e=fcn_create_arrays(kTMAX,6,1);
total_strain_p=fcn_create_arrays(kTMAX,6,1);

total_strain{1}(1:6,1)=strain0{1}(1:6,1);
total_strain_e{1}(1:6,1)=strain0{1}(1:6,1);

%%
%%Stress
stress=fcn_create_arrays(kTMAX,6,1);
stress{1}(1:6,1)=sollicitations(0);

dstressdt=fcn_create_arrays(kTMAX,6,1);
dstressdt{1}(1:6,1)=(sollicitations(DT)-sollicitations(0))/DT;

%%
%%Stresses and strains in each body
%Elastic strains
strain_e=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);
dstraindt_e=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);

TEMP=temperature(0);
niT_DBN=zeros(n_DBN_elements,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    niT_DBN(i_DBN,1)=n_DBN(i_DBN,1)*10^(-C1*(TEMP-TREF)/(C2+TEMP-TREF));
%Viscosity at t=0 (TEMP at t=0) for body i

    dstraindt_e{1}(1:6,i_DBN)=E_DBN(i_DBN,1)/niT_DBN(i_DBN,1)*...
        M_elast{i_DBN}*stress{1}(1:6,1);
end

```

```

%%Non viscous stresses
stress_f=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);

dstressdt_f=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    dstressdt_f{1}(1:6,i_DBN)=E_DBN(i_DBN,1)/niT_DBN(i_DBN,1)*...
        stress{1}(1:6,1);
end

%%Plastic strains
strain_p=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);
dstraindt_p=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);

%%
%%Unit normal vector
%%nf and ng vectors
nf=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);
tf=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);
ng=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);

%%
%%Bodies behaviour (BB)
%%BB(i_DBN)=1 when elastic and 0 when plastic
isVEL=fcn_create_arrays(kTMAX,1,n_DBN_elements);
isVEL{1}(1,1:n_DBN_elements)=ones(1,n_DBN_elements);

clear niT_DBN TEMP i_DBN

%%
%%Max error
max_error=zeros(kTMAX);

```

increment.m

```

function [new_strain_e,new_dstraindt_e,...
    new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
    new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng,new_max_error] ...
= increment(t,dt,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng,max_error)

%Function increment gives strains, speed of strains variation and non
%viscous stresses in each body at the time t+dt from datas at the time t
%using a dichotomy of the time interval when calculations do not converge

%Computing parameters at the time t+dt using :
% 1) dt increment
dstress=sollicitations(t+dt)-sollicitations(t);
[new_strain_e1,~,new_strain_p1,~,~,~,~,~,~,~]=...
    increment_stress(t,dt,E_DBN,n_DBN,...
    M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
    strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
    dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng,dstress);

% 2) sub increment (10-chotimie)
[new_strain_e,new_dstraindt_e,...

```

```

new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng ]=...
increment_sub(t,dt,...
E_DBN,n_DBN,M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng);

%Calculate error and recording max error
error_e=fcn_error(new_strain_e1,new_strain_e);
error_p=fcn_error(new_strain_p1,new_strain_p);

if max_error<error_e||max_error<error_p
    new_max_error=max(error_e,error_p);
else
    new_max_error=max_error;
end
verif_conv=(error_e<crit_conv)&&(error_p<crit_conv);

if ~verif_conv||dt>n_DBN/E_DBN %2nd condition to avoid non-cv cases
[d1,e1,f1,g1,h1,i1,j1,k1,l1,m1,n1]=...
    increment(t,dt/4,E_DBN,n_DBN,...
    M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
    strain_e,dstraindt_e,strain_p,dstraindt_p,...
    stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng,max_error);

[d2,e2,f2,g2,h2,i2,j2,k2,l2,m2,n2]=...
    increment(t+dt/4,dt/4,E_DBN,n_DBN,...
    M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
    d1,e1,f1,g1,h1,i1,j1,k1,l1,m1,n1);

[d3,e3,f3,g3,h3,i3,j3,k3,l3,m3,n3]=...
    increment(t+dt/2,dt/4,E_DBN,n_DBN,...
    M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
    d2,e2,f2,g2,h2,i2,j2,k2,l2,m2,n2);

[new_strain_e,new_dstraindt_e,...
    new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
    new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng,new_max_error]=...
    increment(t+3*dt/4,dt/4,E_DBN,n_DBN,...
    M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
    d3,e3,f3,g3,h3,i3,j3,k3,l3,m3,n3);

end

```

increment_sub.m

```

function [new_strain_e,new_dstraindt_e,...
    new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
    new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng ] = increment_sub(t,dt,...
    E_DBN,n_DBN,M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
    strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
    dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng)

dstress=sollicitations(t+dt/10)-sollicitations(t);
[d1,e1,f1,g1,h1,i1,j1,k1,l1,m1]=...
    increment_stress(t,dt/10,E_DBN,n_DBN,...

```

```

M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
dstraindt_p,stress_f,dstressedt_f,isVEL,nf,tf,ng,dstress);

dstress=sollicitations(t+2*dt/10)-sollicitations(t+dt/10);
[d2,e2,f2,g2,h2,i2,j2,k2,l2,m2]=...
increment_stress(t+1*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
d1,e1,f1,g1,h1,i1,j1,k1,l1,m1,dstress);

dstress=sollicitations(t+3*dt/10)-sollicitations(t+2*dt/10);
[d3,e3,f3,g3,h3,i3,j3,k3,l3,m3]=...
increment_stress(t+2*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
d2,e2,f2,g2,h2,i2,j2,k2,l2,m2,dstress);

dstress=sollicitations(t+4*dt/10)-sollicitations(t+3*dt/10);
[d4,e4,f4,g4,h4,i4,j4,k4,l4,m4]=...
increment_stress(t+3*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
d3,e3,f3,g3,h3,i3,j3,k3,l3,m3,dstress);

dstress=sollicitations(t+5*dt/10)-sollicitations(t+4*dt/10);
[d5,e5,f5,g5,h5,i5,j5,k5,l5,m5]=...
increment_stress(t+4*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
d4,e4,f4,g4,h4,i4,j4,k4,l4,m4,dstress);

dstress=sollicitations(t+6*dt/10)-sollicitations(t+5*dt/10);
[d6,e6,f6,g6,h6,i6,j6,k6,l6,m6]=...
increment_stress(t+5*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
d5,e5,f5,g5,h5,i5,j5,k5,l5,m5,dstress);

dstress=sollicitations(t+7*dt/10)-sollicitations(t+6*dt/10);
[d7,e7,f7,g7,h7,i7,j7,k7,l7,m7]=...
increment_stress(t+6*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
d6,e6,f6,g6,h6,i6,j6,k6,l6,m6,dstress);

dstress=sollicitations(t+8*dt/10)-sollicitations(t+7*dt/10);
[d8,e8,f8,g8,h8,i8,j8,k8,l8,m8]=...
increment_stress(t+7*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
d7,e7,f7,g7,h7,i7,j7,k7,l7,m7,dstress);

dstress=sollicitations(t+9*dt/10)-sollicitations(t+8*dt/10);
[d9,e9,f9,g9,h9,i9,j9,k9,l9,m9]=...
increment_stress(t+8*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
d8,e8,f8,g8,h8,i8,j8,k8,l8,m8,dstress);

dstress=sollicitations(t+10*dt/10)-sollicitations(t+9*dt/10);
[new_strain_e,new_dstraindt_e,...
new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressedt_f,...
new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng]=...
increment_stress(t+9*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...

```

```
d9,e9,f9,g9,h9,i9,j9,k9,l9,m9,dstress);
```

```
end
```

increment_stress.m

```
%Function that gives strains, speed of strains variation and non  
%viscous stresses in each body at the time t+dt from datas at the time t
```

```
function [new_strain_e,...  
    new_dstraindt_e,new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,...  
    new_dstressdt_f,new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng]=...  
    increment_stress(t,dt,E_DBN,n_DBN,...  
    M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...  
    strain_e,dstraindt_e,strain_p,...  
    dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng,dstress)
```

```
global TREF C1 C2;
```

```
%%  
%%Creating parameters at the time t+dt  
new_stress=zeros(6,1);  
new_dstressdt=zeros(6,1);  
new_dstressdt_f=zeros(6,1);  
new_stress_f=zeros(6,1);  
new_isVEL=zeros(1,1);  
new_dstraindt_e=zeros(6,1);  
new_strain_e=zeros(6,1);  
new_dstraindt_p=zeros(6,1);  
new_strain_p=zeros(6,1);  
new_nf=zeros(6,1);  
new_tf=zeros(6,1);  
new_ng=zeros(6,1);  
new_total_strain=zeros(6,1);
```

```
%%  
%%Updating parameters of the model at the time t  
%Viscosity of the body i at t  
n_DBN_T=n_DBN*10^(-C1*(temperature(t)-TREF)/(C2+temperature(t)-TREF));  
ksi=E_DBN/n_DBN_T;  
expon=exp(-ksi*dt);
```

```
%%  
%%Computing parameters at time t+dt
```

```
%Stress_f and Strain_e and strain_p and their derivatives  
if isVEL||fcn_norm_T4(fcn_prod_tensorial(ng,nf))==0  
    new_stress_f=stress_f+...  
        (sollicitations(t+2*dt)-sollicitations(t+dt))*(1-(1-expon)/...  
        (ksi*dt))+dstressdt_f*dt*(1-expon)/(ksi*dt);  
    new_dstressdt_f=dstressdt_f*expon+...  
        (sollicitations(t+2*dt)-sollicitations(t+dt))/dt*(1-expon);  
    new_dstraindt_e=M_elast*new_dstressdt_f;  
    new_strain_e=M_elast*new_stress_f;  
    new_strain_p=strain_p;
```

```

else
    new_stress_f=stress_f+...
        fcn_prod_scalar((sollicitations(t+2*dt)-
sollicitations(t+dt)),tf)*tf*...
        (1-(1-expon)/(ksi*dt))+...
        fcn_prod_scalar(dstressdt_f,tf)*tf*dt*(1-expon)/(ksi*dt);
    new_dstressdt_f=fcn_prod_scalar(dstressdt_f,tf)*tf*expon+...
        fcn_prod_scalar((sollicitations(t+2*dt)-
sollicitations(t+dt)),tf)/dt*tf*(1-expon);
    new_dstraindt_e=M_elast*new_dstressdt_f;
    new_strain_e=M_elast*new_stress_f;
    new_dstraindt_p=dstraindt_p+...

ksi*fcn_norm_T4(M_elast)/fcn_norm_T4(fcn_prod_tensorial(ng,nf))*...
    fcn_prod_tensorial(ng,nf)*dstress;
    new_strain_p=strain_p+dstraindt_p*dt+ksi*fcn_norm_T4(M_elast)/...

fcn_norm_T4(fcn_prod_tensorial(ng,nf))*fcn_prod_tensorial(ng,nf)*dstress*
dt/2;
end

%Body behaviour
a=fd(Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,new_stress_f);
b=fd(Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,sollicitations(t+dt));

if isnan(a)
    a=(-10^9);
end
if isnan(b)
    b=(-10^9);
end

new_isVEL=(a<=0) || (b<=0);

%Projection of stress_f on the yield surface f=0
if ~new_isVEL&&~isVEL

new_stress_f=fcn_proj_ys(new_stress_f,nf,crit_conv,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip);
new_dstressdt_f=fcn_proj_ys(new_dstressdt_f,nf,crit_conv,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc
,Ip);
end

%Unit normal vectors
if new_isVEL
    new_nf=zeros(6,1);
    new_tf=zeros(6,1);
    new_ng=zeros(6,1);
else
    [new_nf,new_tf]=fcn_nf_tf(new_stress_f,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip);
    new_ng=fcn_ng(new_stress_f,Rg,Lsg,crit_conv);
end

%In case of VEL => VP or VP => VEL
if isVEL&&~new_isVEL
    new_dstraindt_p=ksi*fcn_norm_T4(M_elast)/...
        fcn_norm_T4(fcn_prod_tensorial(new_ng,new_nf))*...

```

```

        fcn_prod_tensorial(new_ng,new_nf)*(sollicitations(t+dt)-
new_stress_f);
elseif ~isVEL&&new_isVEL
    new_strain_p=strain_p;
    new_dstraindt_p=[0;0;0;0;0;0];
end
end
end

```

7.2.4 Calcul de la contrainte résultante d'une déformation imposée

Le choix des sollicitations thermo-mécaniques s'effectue dans les fichiers sollicitations.m (mécanique) et temperature.m (thermique).

Ce programme s'initialise avec la fonction run.m qui se compose de deux principaux scripts :

- initialisation.m qui permet d'initialiser le programme, de calibrer le modèle et de créer les fichiers d'enregistrement,
- main_program.m qui effectue les calculs et enregistre les résultats dans les fichiers précédemment créés.

L'ensemble des fonctions nécessaires à l'exécution de ce programme est donné ci-dessous.

Choix des sollicitations mécaniques et thermiques

```

sollicitations.m
%Function sigma(t) gives the imposed strain chosen by user at the time t

function [ Y ] = sollicitations(t)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%PLEASE FILL THE 6 FUNCTIONS HERE
%Constant pi=3.14159.... must be written with small letters
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

f11=10*10^-6*sin(2*pi*0.01*t);
f22=0;
f33=0;
f23=0;
f13=0;
f12=0;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%% DO NOT MODIFY THE FILE AFTER THIS LINE
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
Y=[f11;f22;f33;f23;f13;f12];

end

```

temperature.m

```

%Function temperature(t) gives the imposed temperature chosen by user at
the time t

function [ T ] = temperature(t)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%PLEASE FILL THE T FUNCTION HERE
%Examples: T=20;
%          T=2*t;
%          T=20+5*sin(0.1*t);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

T=0.01*t+2*sin(2*pi*0.1*t);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%DO NOT MODIFY THE FILE AFTER THIS LINE
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

end

```

Fonctions principales

run.m

```

%Determine strains from stresses and temperature variations using EPPI
%version of the DBN model
%
%-----
--
%Created          : 23/01/2013
%Last modified    : 12/12/2016
%Program conceptor : Pierre GAYTE
%Postal address   : ENTPE - Rue Maurice Audin - 69518 Vaulx en Velin -
France
%Contact          : pierre.gayte@cerema.fr // pierre.gayte@gmail.com
%-----
--

```

```

%If you are experiencing issues please contact the program concepor
%Free use BUT don't copy this program without permission please

clear all; %clear all variables
clc; %clear command windows
format long %set display format to long (10 digits)
clf; %clear plots
set(0, 'RecursionLimit',1000) %set the recursion limit to 1000

%Initialisations
initialisation;

%Computations
tic;
main_program;
disp(' ');
toc;

```

initialisation.m

```

%initialisation.m
%Informations and warnings
disp('Datas have to be loaded before (using load_datas.m)');

%Load calibratoin data and parameters
load('%DBN.mat', 'n_DBN_elements', 'E0_DBN', 'E_DBN', 'v0_DBN', 'v_DBN', 'n_DBN', ...
'G0_DBN', 'G_DBN', 'M_elast0', 'M_elast', 'M_elast0_inv', 'M_elast_inv', ...
'Rc', 'Rt', 'Rg', 'Ls', 'Lsg', 'I1c', 'I1t', 'Ip');
load('%WLF.mat', 'C1', 'C2', 'TREF');
load('%time_param.mat', 'TMAX', 'C2', 'DT', 'crit_conv');

%Create matrix where datas are saved
ini_create_datas;

```

main_program.m

```

%main_program.m

%Informations for users
disp(' ');
disp('Beginning the process... ');
percent=0:1:96;
indexP=1;
n_percent=0;
max_error=0;

%Computations
for kT=2:kTMAX+1
    %Informations about calculations
    if 100*kT/(kTMAX+1)>=percent(indexP)
        fprintf(repmat('\b',1,n_percent));
        fprintf('%s', ['Progress ... ', num2str(percent(indexP)), '%']);
        n_percent=numel(['Progress ... ', num2str(percent(indexP)), '%']);
        indexP=indexP+1;
    end
end

```

```

%Computations for EP0 body
%strain0{kT}=matrixVectorProduct(M_elast0,sollicitations((kT-1)*DT));

%Computations to find values at time kT (= t)
[stress{kT}(1:6,1),...
 dstressdt{kT}(1:6,1),...
 total_strain{kT}(1:6,1),...
 strain_e{kT}(1:6,1:n_DBN_elements),...
 dstraingt_e{kT}(1:6,1:n_DBN_elements),...
 strain_p{kT}(1:6,1:n_DBN_elements),...
 dstraingt_p{kT}(1:6,1:n_DBN_elements),...
 stress_f{kT}(1:6,1:n_DBN_elements),...
 dstressdt_f{kT}(1:6,1:n_DBN_elements),...
 isVEL{kT}(1,1:n_DBN_elements),...
 nf{kT}(1:6,1:n_DBN_elements),...
 tf{kT}(1:6,1:n_DBN_elements),...
 ng{kT}(1:6,1:n_DBN_elements),...
 max_error(kT)]=...
...
increment(n_DBN_elements,(kT-1)*DT,DT,E_DBN,n_DBN,M_elast0,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
stress{kT-1}(1:6,1),...
dstressdt{kT-1}(1:6,1),...
total_strain{kT-1}(1:6,1),...
strain_e{kT-1}(1:6,1:n_DBN_elements),...
dstraingt_e{kT-1}(1:6,1:n_DBN_elements),...
strain_p{kT-1}(1:6,1:n_DBN_elements),...
dstraingt_p{kT-1}(1:6,1:n_DBN_elements),...
stress_f{kT-1}(1:6,1:n_DBN_elements),...
dstressdt_f{kT-1}(1:6,1:n_DBN_elements),...
isVEL{kT-1}(1,1:n_DBN_elements),...
nf{kT-1}(1:6,1:n_DBN_elements),...
tf{kT-1}(1:6,1:n_DBN_elements),...
ng{kT-1}(1:6,1:n_DBN_elements),...
max_error(kT-1));

strain0{kT}(1:6,1)=M_elast0*stress{kT}(1:6,1);
total_strain_e{kT}(1:6,1)=strain0{kT}(1:6,1);

for i_DBN=1:n_DBN_elements
total_strain_e{kT}(1:6,1)=total_strain_e{kT}(1:6,1)+...
strain_e{kT}(1:6,i_DBN);
total_strain_p{kT}(1:6,1)=total_strain_p{kT}(1:6,1)+...
strain_p{kT}(1:6,i_DBN);
end
end

disp(' ')
disp(' ')
disp(['Maximum error = ',num2str(10^6*max(max_error)), ' udef']);

clear indexP i_DBN percent;

```

Fonctions secondaires

ini_create_datas.m

```
%create_datas.m
%Create variables where datas and results of the calibrations are saved
%and do the initialisation of datas

global TREF C1 C2;

%Time and frequency parameters
kTMAX=floor(TMAX/DT+1);

%%
%%Strains
strain0=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,1);
strain0{1}(1:6,1)=sollicitations(0);

total_strain=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,1);
total_strain_e=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,1);
total_strain_p=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,1);

total_strain_e{1}=strain0{1}(1:6,1);
total_strain_p{1}=[0;0;0;0;0;0];
total_strain{1}=strain0{1}(1:6,1);

%%
%%Stress
stress=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,1);
stress{1}(1:6,1)=M_elast0_inv*strain0{1}(1:6,1);

%%
%%Stresses and strains in each body
%Elastic strains
strain_e=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,n_DBN_elements);
dstraindt_e=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,n_DBN_elements);

TEMP=temperature(0);
niT_DBN=zeros(n_DBN_elements,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    niT_DBN(i_DBN,1)=n_DBN(i_DBN,1)*10^(-C1*(TEMP-TREF)/(C2+TEMP-TREF));
%Viscosity at t=0 (TEMP at t=0) for body i

    dstraindt_e{1}(1:6,i_DBN)=E_DBN(i_DBN)/niT_DBN(i_DBN,1)*...
        M_elast{i_DBN}*stress{1}(1:6,1);
end

%Non viscous stresses
stress_f=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,n_DBN_elements);
dstressdt_f=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,n_DBN_elements);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    dstressdt_f{1}(1:6,i_DBN)=E_DBN(i_DBN)/niT_DBN(i_DBN,1)*...
        stress{1}(1:6,1);
end

%Plastic strains
strain_p=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);
dstraindt_p=fcn_create_arrays(kTMAX,6,n_DBN_elements);
```

```

%%
%%Time derivative of stress
dstressdt=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,1);
dstressdt{1}(1:6,1)=(sollicitations(DT)-sollicitations(0))/DT;

for i_DBN=1:n_DBN_elements
    dstressdt{1}(1:6,1)=dstressdt{1}(1:6,1)-dstraindt_e{1}(1:6,i_DBN);
end
dstressdt{1}(1:6,1)=M_elast0_inv*dstressdt{1}(1:6,1);

%%
%%Unit normal vector
%nf and ng vectors
nf=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,n_DBN_elements);
tf=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,n_DBN_elements);
ng=fcn_create_arrays(kTMAX+1,6,n_DBN_elements);

%%
%%Bodies behaviour (BB)
%BB(i_DBN)=1 when elastic and 0 when plastic
isVEL=fcn_create_arrays(kTMAX+1,1,n_DBN_elements);
isVEL{1}(1,1:n_DBN_elements)=ones(1,n_DBN_elements);

clear niT_DBN TEMP i_DBN

%%
%%Max error
max_error=zeros(kTMAX+1);

```

increment.m

```

function
[new_stress,new_dstressdt,new_total_strain,new_strain_e,new_dstraindt_e,.
..
    new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
    new_BB,new_nf,new_tf,new_ng,new_max_error] ...
= increment(n_DBN_elements,t,dt,E_DBN,n_DBN,M_elast0,...
M_elast,Rt,Rc,ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
stress,dstressdt,total_strain,strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
dstraindt_p, stress_f, dstressdt_f, isVEL,nf,tf,ng,max_error)

%Function increment gives strains, speed of strains variation and non
%viscous stresses in each body at the time t+dt from datas at the time t
%using a dichotomy of the time interval when calculations do not converge

%Computing parameters at the time t+dt using :
% 1) dt increment
dstrain=sollicitations(t+dt)-sollicitations(t);
[new_stress,new_dstressdt,new_total_strain,new_strain_e,new_dstraindt_e,.
..
    new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
    new_BB,new_nf,new_tf,new_ng]=...
increment_strain(n_DBN_elements,t,dt,E_DBN,n_DBN,M_elast0,...
M_elast,Rt,Rc,ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
stress,dstressdt,total_strain,strain_e,dstraindt_e,strain_p,...

```

```

        dstraindt_p, stress_f, dstressdt_f, isVEL, nf, tf, ng, dstrain);

%Calculate error and recording max error
current_error=fcn_error(sollicitations(t+dt),new_total_strain);

if max_error<current_error
    new_max_error=current_error;
else
    new_max_error=max_error;
end
%disp(max_error)
%disp(current_error)
verif_conv=(current_error<crit_conv);

%Subincrementation
if (~verif_conv)&&(dt>=10^-4) %2nd condition to avoid non-cv cases

    [a1,b1,c1,d1,e1,f1,g1,h1,i1,j1,k1,l1,m1,n1]=...
        increment(n_DBN_elements,t,dt/4,E_DBN,n_DBN,M_elast0,...
            M_elast,Rt,Rc,Ls,I1t,I1c,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...

stress,dstressdt,total_strain,strain_e,dstraindt_e,strain_p,dstraindt_p,..
..
    stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng,max_error);

    [a2,b2,c2,d2,e2,f2,g2,h2,i2,j2,k2,l2,m2,n2]=...
        increment(n_DBN_elements,t+dt/4,dt/4,E_DBN,n_DBN,M_elast0,...
            M_elast,Rt,Rc,Ls,I1t,I1c,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
            a1,b1,c1,d1,e1,f1,g1,h1,i1,j1,k1,l1,m1,n1);

    [a3,b3,c3,d3,e3,f3,g3,h3,i3,j3,k3,l3,m3,n3]=...
        increment(n_DBN_elements,t+dt/2,dt/4,E_DBN,n_DBN,M_elast0,...
            M_elast,Rt,Rc,Ls,I1t,I1c,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
            a2,b2,c2,d2,e2,f2,g2,h2,i2,j2,k2,l2,m2,n2);

[new_stress,new_dstressdt,new_total_strain,new_strain_e,new_dstraindt_e,..
..
    new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
    new_BB,new_nf,new_tf,new_ng,new_max_error]=...
    increment(n_DBN_elements,t+3*dt/4,dt/4,E_DBN,n_DBN,M_elast0,...
        M_elast,Rt,Rc,Ls,I1t,I1c,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
        a3,b3,c3,d3,e3,f3,g3,h3,i3,j3,k3,l3,m3,n3);

end

```

increment_strain.m

```

%Function elastic_increment gives strains, speed of strains variation and
non
%viscous stresses in each body at the time t+dt from datas at the time t

function [new_stress,new_dstressdt,new_total_strain,new_strain_e,...
    new_dstraindt_e,new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,...
    new_dstressdt_f,new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng]=...
    increment_strain(n_DBN_elements,t,dt,E_DBN,n_DBN,M_elast0,...
        M_elast,Rt,Rc,Ls,I1t,I1c,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...

```

```

stress,dstressdt,total_strain,strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng,dstrain)

global TREF C1 C2;

%%
%%Updating parameters of the model at the time t
%%Viscosity of the body i at t
n_DBN_T=n_DBN*10^(-C1*(temperature(t)-TREF)/(C2+temperature(t)-TREF));
ksi=zeros(1,n_DBN_elements);
expon=zeros(1,n_DBN_elements);

%Create parameters
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    ksi(1,i_DBN)=E_DBN(i_DBN)/n_DBN_T(i_DBN);
    expon(1,i_DBN)=exp(-ksi(i_DBN)*dt);
end

%%
%%Computing stress and its derivative at time t+dt
S=M_elast0;
XI=zeros(6,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements

    ng_x_nf=fcn_prod_tensorial(ng(1:6,i_DBN),nf(1:6,i_DBN));

    if isVEL(1,i_DBN)||fcn_norm_T4(ng_x_nf)==0
        S=S+M_elast{1,i_DBN}*(1-(1-expon(1,i_DBN))/(ksi(1,i_DBN)*dt));
        XI=XI+dstraindt_e(1:6,i_DBN)*dt*(1-
expon(1,i_DBN))/(ksi(i_DBN)*dt);

    else
        tf_x_tf=fcn_prod_tensorial(tf(1:6,i_DBN),tf(1:6,i_DBN));

        S=S+M_elast{1,i_DBN}*tf_x_tf*...
            (1-(1-expon(1,i_DBN))/(ksi(1,i_DBN)*dt))+...
            ksi(1,i_DBN)*fcn_norm_T4(M_elast{1,i_DBN})/...
            fcn_norm_T4(ng_x_nf)*ng_x_nf*dt/2;

        XI=XI+M_elast{1,i_DBN}*tf_x_tf*...
            dstressdt_f(1:6,i_DBN)*dt*(1-
expon(1,i_DBN))/(ksi(i_DBN)*dt)+...
            dstraindt_p(1:6,i_DBN)*dt;
    end
end

dstress=S^(-1)*(dstrain-XI);
new_stress=stress+dstress;
new_dstressdt=dstress/dt;

%%
%%Updating parameters at the time t+dt
new_dstressdt_f=zeros(6,n_DBN_elements);
new_stress_f=zeros(6,n_DBN_elements);
new_isVEL=zeros(1,n_DBN_elements);
new_dstraindt_e=zeros(6,n_DBN_elements);
new_strain_e=zeros(6,n_DBN_elements);

```

```

new_dstraindt_p=zeros(6,n_DBN_elements);
new_strain_p=zeros(6,n_DBN_elements);
new_nf=zeros(6,n_DBN_elements);
new_tf=zeros(6,n_DBN_elements);
new_ng=zeros(6,n_DBN_elements);

for i_DBN=1:1:n_DBN_elements

    %Stress f
    if
isVEL(1,i_DBN)||fcn_norm_T4(fcn_prod_tensorial(ng(1:6,i_DBN),nf(1:6,i_DBN
)))==0
        new_dstressdt_f(1:6,i_DBN)=...
            dstressdt_f(1:6,i_DBN)*expon(1,i_DBN)+...
            new_dstressdt(1:6,1)*(1-expon(1,i_DBN));

        new_stress_f(1:6,i_DBN)=stress_f(1:6,i_DBN)+...
            dstressdt_f(1:6,i_DBN)*...
            dt*(1-expon(1,i_DBN))/(ksi(1,i_DBN)*dt)+...
            new_dstressdt(1:6,1)*...
            dt*(1-(1-expon(1,i_DBN))/(ksi(1,i_DBN)*dt));

new_dstraindt_e(1:6,i_DBN)=M_elast{i_DBN}*new_dstressdt_f(1:6,i_DBN);

        new_strain_e(1:6,i_DBN)=M_elast{i_DBN}*new_stress_f(1:6,i_DBN);

        new_strain_p(1:6,i_DBN)=strain_p(1:6,i_DBN);

    else
        new_dstressdt_f(1:6,i_DBN)=...
            fcn_prod_scalar(dstressdt_f(1:6,i_DBN),tf(1:6,i_DBN))*...
            tf(1:6,i_DBN)*expon(1,i_DBN)+...
            fcn_prod_scalar(new_dstressdt(1:6,1),tf(1:6,i_DBN))*...
            tf(1:6,i_DBN)*(1-expon(1,i_DBN));

        new_stress_f(1:6,i_DBN)=stress_f(1:6,i_DBN)+...
            fcn_prod_scalar(dstressdt_f(1:6,i_DBN),tf(1:6,i_DBN))*tf(1:6,i_DBN)*...
            dt*(1-expon(1,i_DBN))/(ksi(1,i_DBN)*dt)+...
            fcn_prod_scalar(new_dstressdt(1:6,1),tf(1:6,i_DBN))*tf(1:6,i_DBN)*...
            dt*(1-(1-expon(1,i_DBN))/(ksi(1,i_DBN)*dt));

new_dstraindt_e(1:6,i_DBN)=M_elast{i_DBN}*new_dstressdt_f(1:6,i_DBN);

        new_strain_e(1:6,i_DBN)=M_elast{i_DBN}*new_stress_f(1:6,i_DBN);

        new_dstraindt_p(1:6,i_DBN)=dstraindt_p(1:6,i_DBN)+...
            ksi(1,i_DBN)*fcn_norm_T4(M_elast{i_DBN})/...
            fcn_norm_T4(fcn_prod_tensorial(ng(1:6,i_DBN),nf(1:6,i_DBN)))*...
            fcn_prod_tensorial(ng(1:6,i_DBN),nf(1:6,i_DBN))*dstressdt*dt;

        new_strain_p(1:6,i_DBN)=strain_p(1:6,i_DBN)+...
            dstraindt_p(1:6,i_DBN)*dt+...

```

```

        ksi(1,i_DBN)*fcnorm_T4(M_elast{i_DBN})/...

fcnorm_T4(fcnprod_tensorial(ng(1:6,i_DBN),nf(1:6,i_DBN)))*...

fcnprod_tensorial(ng(1:6,i_DBN),nf(1:6,i_DBN))*dstressdt*(dt^2)/2;
end

%Body behaviour

a=fd(Rt(i_DBN),Rc(i_DBN),Ls(i_DBN),Ilt(i_DBN),Ilc(i_DBN),Ip(i_DBN),...
    new_stress_f(1:6,i_DBN));

b=fd(Rt(i_DBN),Rc(i_DBN),Ls(i_DBN),Ilt(i_DBN),Ilc(i_DBN),Ip(i_DBN),...
    new_stress);

if isnan(a)
    a=(-10^9);
end
if isnan(b)
    b=(-10^9);
end

new_isVEL(1,i_DBN)=(a<=0)||(b<=0);

%Projection of stress_f on the yield surface f=0
if ~new_isVEL(1,i_DBN)&&~isVEL(1,i_DBN)
    new_stress_f(1:6,i_DBN)=...

fcnproj_ys(new_stress_f(1:6,i_DBN),nf(1:6,i_DBN),crit_conv,Rt(i_DBN),...
    Rc(i_DBN),Ls(i_DBN),Ilt(i_DBN),Ilc(i_DBN),Ip(i_DBN));

    new_dstressdt_f(1:6,i_DBN)=...

fcnproj_ys(new_dstressdt_f(1:6,i_DBN),nf(1:6,i_DBN),crit_conv,Rt(i_DBN),
...
    Rc(i_DBN),Ls(i_DBN),Ilt(i_DBN),Ilc(i_DBN),Ip(i_DBN));
end

%Unit normal vectors
if new_isVEL(1,i_DBN)
    new_nf(1:6,i_DBN)=zeros(6,1);
    new_tf(1:6,i_DBN)=zeros(6,1);
    new_ng(1:6,i_DBN)=zeros(6,1);
else
    [new_nf(1:6,i_DBN),new_tf(1:6,i_DBN)]=...
        fcn_nf_tf(new_stress_f(1:6,i_DBN),Rt(i_DBN),Rc(i_DBN),...
            Ls(i_DBN),Ilt(i_DBN),Ilc(i_DBN),Ip(i_DBN));

new_ng(1:6,i_DBN)=fcn_ng(new_stress_f(1:6,i_DBN),Rg(i_DBN),Lsg(i_DBN),crit_conv);
end

%In case of VEL => VP or VP => VEL
if isVEL(1,i_DBN)&&~new_isVEL(1,i_DBN)
    new_dstraindt_p(1:6,i_DBN)=ksi(1,i_DBN)*...
        fcnorm_T4(M_elast{i_DBN})/...

```

```

fcu_norm_T4(fcu_prod_tensorial(new_ng(1:6,i_DBN),new_nf(1:6,i_DBN))*...
            fcu_prod_tensorial(new_ng(1:6,i_DBN),new_nf(1:6,i_DBN))*...
            (new_stress-new_stress_f(1:6,i_DBN));
elseif ~isVEL(1,i_DBN)&&new_isVEL(1,i_DBN)
    new_strain_p(1:6,i_DBN)=strain_p(1:6,i_DBN);
    new_dstraindt_p(1:6,i_DBN)=[0;0;0;0;0;0];
end

end

%%
%%Total strain

new_total_strain(1:6,1)=M_elast0*new_stress(1:6,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    new_total_strain(1:6,1)=new_total_strain(1:6,1)+...
        new_strain_e(1:6,i_DBN)+new_strain_p(1:6,i_DBN);
end

```

7.2.5 Calcul de la réponse sous sollicitation mixte

Le choix des sollicitations thermo-mécaniques s'effectue dans les fichiers sollicitation_user.m (mécanique) et temperature.m (thermique). La fonction sollicitations.m donne la sollicitation testée au cours des différentes étapes de convergence vers la solution recherchée.

Ce programme s'initialise avec la fonction run.m qui se compose de deux principaux scripts :

- initialisation.m qui permet d'initialiser le programme, de calibrer le modèle et de créer les fichiers d'enregistrement,
- main_program.m qui effectue les calculs et enregistre les résultats dans les fichiers précédemment créés.

L'ensemble des fonctions nécessaires à l'exécution de ce programme est donné ci-dessous.

Choix des sollicitations mécaniques et thermiques

sollicitations_user.m

```

function [ Y ] = sollicitations_user(t)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
```

```

%PLEASE FILL THE 6 FUNCTIONS HERE
%Constant pi=3.14159.... must be written with small letters
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

%Strain loading on axis 1
f11=100*10^(-6)*sin(2*pi*0.1*t);

%Stress loading on other axis
f22=0;
f33=0;
f23=0;
f13=0;
f12=0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DO NOT MODIFY THE FILE AFTER THIS LINE
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

Y=[f11;f22;f33;f23;f13;f12];

end

```

temperature.m

```

%Function temperature(t) gives the imposed temperature chosen by user at
the time t

function [ T ] = temperature(t)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%PLEASE FILL THE T FUNCTION HERE
%Examples: T=20;
%           T=2*t;
%           T=20+5*sin(0.1*t);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

T=0.01*t+2*sin(2*pi*0.1*t);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%DO NOT MODIFY THE FILE AFTER THIS LINE
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

end

```

solicitations.m

```

%Function sigma(t) gives the imposed strain chosen by user at the time t

function [ Y ] = sollicitations(t)

%Gives the stress sollicitation at the time t+dt
% sollicitations at the time t are known!

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%PLEASE FILL THE 6 FUNCTIONS HERE
%Constant pi=3.14159.... must be written with small letters
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

global total_stress time
i=2;
if t>time(numel(time))
    Y=total_stress{numel(time)}(1:6,1);
else
    while t>time(i);
        i=i+1;
    end
    Y=total_stress{i-1}(1:6,1)+(total_stress{i}(1:6,1)-total_stress{i-
1}(1:6,1))/...
        (time(i)-time(i-1))*(t-time(i-1));
end
if Y(1,1)==0&&t>0
    disp(i)
    disp(total_stress{i-1}(1:6,1))
    disp(total_stress{i}(1:6,1))
    error('sollicitation nulle')
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DO NOT MODIFY THE FILE AFTER THIS LINE
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

end

```

Fonctions principales

run.m

```

%Determine strains from stresses and temperature variations using EPPI
%version of the DBN model
%
%-----
--
%Created          : 23/01/2013
%Last modified    : 12/12/2016
%Program conceptor : Pierre GAYTE

```

```

%Postal address      : ENTPE - Rue Maurice Audin - 69518 Vaulx en Velin -
France
%Contact             : pierre.gayte@cerema.fr // pierre.gayte@gmail.com
%-----
--
%If you are experiencing issues please contact the program conceptor
%Free use BUT don't copy this program without permission please

clear all;                %clear all variables
clc;                      %clear command windows
format long              %set display format to long (10 digits)
clf;                     %clear plots
set(0,'RecursionLimit',1000) %set the recursion limit to 1000

%Initialisations
initialisation;

%Computations
tic;
main_program;
disp(' ');
toc;

```

initialisation.m

```

%initialisation.m
%Informations and warnings
disp('Datas have to be loaded before (using load_datas.m)');

%Load calibratoin data and parameters
load('%DBN.mat','n_DBN_elements','E0_DBN','E_DBN','v0_DBN','v_DBN','n_DBN
',...

'G0_DBN','G_DBN','M_elast0','M_elast','M_elast0_inv','M_elast_inv',...
'Rc','Rt','Rg','Ls','Lsg','I1c','I1t','Ip');
load('%WLF.mat','C1','C2','TREF');
load('%time_param.mat','TMAX','C2','DT','crit_conv');

%Create matrix where datas are saved
ini_create_datas;

```

main_program.m

```

%main_program.m
%This script is the hearth of the program as it makes all operations to
%gives the response of the studied material to sollicitations chosen by
user

clear stress11 dstress11
global total_stress
%stress11 is the 1st component of the stress tensor at the time t+dt

%Informations for users
disp(' ');
disp('Beginning the process... ');
percent=0:1:100;
indexP=1;

```

```

n_percent=0;
max_error=0;

%Initialisation for time = 0
total_strain_e{1}=strain0{1}(1:6,1);
total_strain_p{1}=[0;0;0;0;0;0];
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    total_strain_e{1}=total_strain_e{1}+strain_e{1}(1:6,i_DBN);
    total_strain_p{1}=total_strain_p{1}+strain_p{1}(1:6,i_DBN);
end
total_strain{1}=total_strain_e{1}+total_strain_p{1};

%Computations
for kT=2:kTMAX
    %Informations about calculations
    if 100*kT/(kTMAX+1)>=percent(indexP)
        fprintf(repmat('\b',1,n_percent));
        fprintf('%s', ['Progress ... ', num2str(percent(indexP)), '%']);
        n_percent=numel(['Progress ... ', num2str(percent(indexP)), '%']);
        indexP=indexP+1;
    end

    %Initialisation
    temp_var1=sollicitations_user((kT-2)*DT);
    temp_var2=sollicitations_user((kT-1)*DT);
    dstrain11=temp_var2(1,1)-temp_var1(1,1);
    clear temp_var1 temp_var2

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % 1)dstress11_1=-E0_DBN(1)*dstrain11
    dstress11_1=-E0_DBN(1)*dstrain11;
    total_stress{kT}(1,1)=total_stress{kT-1}(1,1)+dstress11_1;

    strain0{kT}(1:6,1)=M_elast0*total_stress{kT};
    total_strain_e{kT}(1:6,1)=strain0{kT}(1:6,1);
    total_strain_p{kT}(1:6,1)=zeros(6,1);

    for i_DBN=1:n_DBN_elements

[strain_e{kT}(1:6,i_DBN),~,strain_p{kT}(1:6,i_DBN),~,~,~,~,~,~,~,~]=...
    ...
        increment((kT-2)*DT,DT,E_DBN(i_DBN,1),...
n_DBN(i_DBN,1),M_elast{i_DBN},Rt(i_DBN),Rc(i_DBN),Ls(i_DBN),...
Ilt(i_DBN),Ilc(i_DBN),Ip(i_DBN),Rg(i_DBN),Lsg(i_DBN),crit_conv,...
        strain_e{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        dstraindt_e{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        strain_p{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        dstraindt_p{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        stress_f{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        dstressdt_f{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        isVEL{kT-1}(1,i_DBN),...
        nf{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        tf{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        ng{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        max_error(kT-1));

```

```

        total_strain_e{kT}(1:6,1)=total_strain_e{kT}(1:6,1)+...
            strain_e{kT}(1:6,i_DBN);
        total_strain_p{kT}(1:6,1)=total_strain_p{kT}(1:6,1)+...
            strain_p{kT}(1:6,i_DBN);
    end

    total_strain{kT}(1:6,1)=total_strain_e{kT}(1:6,1)+...
        total_strain_p{kT}(1:6,1);
    dstrain11_1=total_strain{kT}(1,1)-total_strain{kT-1}(1,1);
    %disp(dstrain11_1)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % 2)dstress11_2=E0*dstrain11
    dstress11_2=E0_DBN(1)*dstrain11;
    if dstrain11==0
        dstress11_2=1;
    end

    total_stress{kT}(1,1)=total_stress{kT-1}(1,1)+dstress11_2;

    strain0{kT}(1:6,1)=M_elast0*total_stress{kT};
    total_strain_e{kT}(1:6,1)=strain0{kT}(1:6,1);
    total_strain_p{kT}(1:6,1)=zeros(6,1);

    for i_DBN=1:n_DBN_elements
        [strain_e{kT}(1:6,i_DBN),...
            dstraindt_e{kT}(1:6,i_DBN),...
            strain_p{kT}(1:6,i_DBN),...
            dstraindt_p{kT}(1:6,i_DBN),...
            stress_f{kT}(1:6,i_DBN),...
            dstressdt_f{kT}(1:6,i_DBN),...
            isVEL{kT}(1,i_DBN),...
            nf{kT}(1:6,i_DBN),...
            tf{kT}(1:6,i_DBN),...
            ng{kT}(1:6,i_DBN),...
            max_error(kT)]=...
            ...
            increment((kT-2)*DT,DT,E_DBN(i_DBN,1),...
n_DBN(i_DBN,1),M_elast{i_DBN},Rt(i_DBN),Rc(i_DBN),Ls(i_DBN),...
Ilt(i_DBN),Ilc(i_DBN),Ip(i_DBN),Rg(i_DBN),Lsg(i_DBN),crit_conv,...
        strain_e{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        dstraindt_e{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        strain_p{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        dstraindt_p{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        stress_f{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        dstressdt_f{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        isVEL{kT-1}(1,i_DBN),...
        nf{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        tf{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        ng{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        max_error(kT-1));

        total_strain_e{kT}(1:6,1)=total_strain_e{kT}(1:6,1)+...
            strain_e{kT}(1:6,i_DBN);

```

```

        total_strain_p{kT}(1:6,1)=total_strain_p{kT}(1:6,1)+...
            strain_p{kT}(1:6,i_DBN);
    end

    total_strain{kT}(1:6,1)=total_strain_e{kT}(1:6,1)+...
        total_strain_p{kT}(1:6,1);
    dstrain11_2=total_strain{kT}(1,1)-total_strain{kT-1}(1,1);
    %disp(dstrain11_2)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 3)dsigmall=linarisation des deux précédents
while abs(dstress11_2-dstress11_1)>crit_conv^2
    %Updating increment of stress to converge to strain11 imposed by
    %user
    if dstrain11_2~=dstrain11_1
        new_dstress11=dstress11_2+(dstress11_2-dstress11_1)/...
            (dstrain11_2-dstrain11_1)*(dstrain11-dstrain11_2);
    else
        if dstress11_1==dstress11_2
            dstress11_1=0;
        end
        new_dstress11=(dstress11_2+dstress11_1)/2;
    end

    dstress11_1=dstress11_2;
    dstress11_2=new_dstress11;
    clear new_dstress11
    total_stress{kT}(1,1)=total_stress{kT-1}(1,1)+dstress11_2;

    strain0{kT}(1:6,1)=M_elast0*total_stress{kT};
    total_strain_e{kT}(1:6,1)=strain0{kT}(1:6,1);
    total_strain_p{kT}(1:6,1)=zeros(6,1);

    for i_DBN=1:n_DBN_elements
        [strain_e{kT}(1:6,i_DBN),...
            dstraindt_e{kT}(1:6,i_DBN),...
            strain_p{kT}(1:6,i_DBN),...
            dstraindt_p{kT}(1:6,i_DBN),...
            stress_f{kT}(1:6,i_DBN),...
            dstressdt_f{kT}(1:6,i_DBN),...
            isVEL{kT}(1,i_DBN),...
            nf{kT}(1:6,i_DBN),...
            tf{kT}(1:6,i_DBN),...
            ng{kT}(1:6,i_DBN),...
            max_error(kT)]=...
            ...
            increment((kT-2)*DT,DT,E_DBN(i_DBN,1),...
n_DBN(i_DBN,1),M_elast{i_DBN},Rt(i_DBN),Rc(i_DBN),Ls(i_DBN),...
Ilt(i_DBN),Ilc(i_DBN),Ip(i_DBN),Rg(i_DBN),Lsg(i_DBN),crit_conv,...
            strain_e{kT-1}(1:6,i_DBN),...
            dstraindt_e{kT-1}(1:6,i_DBN),...
            strain_p{kT-1}(1:6,i_DBN),...
            dstraindt_p{kT-1}(1:6,i_DBN),...
            stress_f{kT-1}(1:6,i_DBN),...
            dstressdt_f{kT-1}(1:6,i_DBN),...

```

```

        isVEL{kT-1}(1,i_DBN),...
        nf{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        tf{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        ng{kT-1}(1:6,i_DBN),...
        max_error(kT-1));

        total_strain_e{kT}(1:6,1)=total_strain_e{kT}(1:6,1)+...
        strain_e{kT}(1:6,i_DBN);
        total_strain_p{kT}(1:6,1)=total_strain_p{kT}(1:6,1)+...
        strain_p{kT}(1:6,i_DBN);
    end

    total_strain{kT}(1:6,1)=total_strain_e{kT}(1:6,1)+...
    total_strain_p{kT}(1:6,1);

    dstrain11_1=dstrain11_2;
    dstrain11_2=total_strain{kT}(1,1)-total_strain{kT-1}(1,1);
    %disp(dstrain11_2)
    %disp(abs(dstrain11-dstrain11_2))

end

end

disp(' ')
disp(' ')
disp(['Maximum error = ',num2str(10^6*max(max_error)),' udef']);

clear indexP i_DBN percent;

```

Fonctions secondaires

increment.m

```

function [new_strain_e,new_dstraindt_e,...
    new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
    new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng,new_max_error] ...
= increment(t,dt,E_DBN,n_DBN,...
    M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
    strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
    dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng,max_error)

%Function increment gives strains, speed of strains variation and non
%viscous stresses in each body at the time t+dt from datas at the time t
%using a dichotomy of the time interval when calculations do not converge

%Computing parameters at the time t+dt using :
% 1) dt increment
dstress=sollicitations(t+dt)-sollicitations(t);
[new_strain_el,~,new_strain_pl,~,~,~,~,~,~,~]=...
    increment_stress(t,dt,E_DBN,n_DBN,...
    M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
    strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
    dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng,dstress);

% 2) sub increment (10-chotimie)

```

```

[new_strain_e,new_dstraindt_e,...
 new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
 new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng ]=...
increment_sub(t,dt,...
 E_DBN,n_DBN,M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
 strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
 dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng);

%Calculate error and recording max error
error_e=fcn_error(new_strain_e1,new_strain_e);
error_p=fcn_error(new_strain_p1,new_strain_p);

if max_error<error_e||max_error<error_p
 new_max_error=max(error_e,error_p);
else
 new_max_error=max_error;
end
verif_conv=(error_e<crit_conv)&&(error_p<crit_conv);

if ~verif_conv%||dt>n_DBN/E_DBN %2nd condition to avoid non-cv cases
 [d1,e1,f1,g1,h1,i1,j1,k1,l1,m1,n1]=...
 increment(t,dt/4,E_DBN,n_DBN,...
 M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
 strain_e,dstraindt_e,strain_p,dstraindt_p,...
 stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng,max_error);

 [d2,e2,f2,g2,h2,i2,j2,k2,l2,m2,n2]=...
 increment(t+dt/4,dt/4,E_DBN,n_DBN,...
 M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
 d1,e1,f1,g1,h1,i1,j1,k1,l1,m1,n1);

 [d3,e3,f3,g3,h3,i3,j3,k3,l3,m3,n3]=...
 increment(t+dt/2,dt/4,E_DBN,n_DBN,...
 M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
 d2,e2,f2,g2,h2,i2,j2,k2,l2,m2,n2);

[new_strain_e,new_dstraindt_e,...
 new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
 new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng,new_max_error]=...
 increment(t+3*dt/4,dt/4,E_DBN,n_DBN,...
 M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
 d3,e3,f3,g3,h3,i3,j3,k3,l3,m3,n3);

end

```

increment_sub.m

```

function [new_strain_e,new_dstraindt_e,...
 new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
 new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng ] = increment_sub(t,dt,...
 E_DBN,n_DBN,M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
 strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
 dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng)
%INCREMENT_SUB Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here

```

```

dstress=sollicitations (t+dt/10)-sollicitations (t);
[d1,e1,f1,g1,h1,i1,j1,k1,l1,m1]=...
  increment_stress (t,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
  M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
  strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
  dstraindt_p,stress_f,dstressedt_f,isVEL,nf,tf,ng,dstress);

dstress=sollicitations (t+2*dt/10)-sollicitations (t+dt/10);
[d2,e2,f2,g2,h2,i2,j2,k2,l2,m2]=...
  increment_stress (t+1*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
  M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
  d1,e1,f1,g1,h1,i1,j1,k1,l1,m1,dstress);

dstress=sollicitations (t+3*dt/10)-sollicitations (t+2*dt/10);
[d3,e3,f3,g3,h3,i3,j3,k3,l3,m3]=...
  increment_stress (t+2*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
  M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
  d2,e2,f2,g2,h2,i2,j2,k2,l2,m2,dstress);

dstress=sollicitations (t+4*dt/10)-sollicitations (t+3*dt/10);
[d4,e4,f4,g4,h4,i4,j4,k4,l4,m4]=...
  increment_stress (t+3*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
  M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
  d3,e3,f3,g3,h3,i3,j3,k3,l3,m3,dstress);

dstress=sollicitations (t+5*dt/10)-sollicitations (t+4*dt/10);
[d5,e5,f5,g5,h5,i5,j5,k5,l5,m5]=...
  increment_stress (t+4*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
  M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
  d4,e4,f4,g4,h4,i4,j4,k4,l4,m4,dstress);

dstress=sollicitations (t+6*dt/10)-sollicitations (t+5*dt/10);
[d6,e6,f6,g6,h6,i6,j6,k6,l6,m6]=...
  increment_stress (t+5*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
  M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
  d5,e5,f5,g5,h5,i5,j5,k5,l5,m5,dstress);

dstress=sollicitations (t+7*dt/10)-sollicitations (t+6*dt/10);
[d7,e7,f7,g7,h7,i7,j7,k7,l7,m7]=...
  increment_stress (t+6*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
  M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
  d6,e6,f6,g6,h6,i6,j6,k6,l6,m6,dstress);

dstress=sollicitations (t+8*dt/10)-sollicitations (t+7*dt/10);
[d8,e8,f8,g8,h8,i8,j8,k8,l8,m8]=...
  increment_stress (t+7*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
  M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
  d7,e7,f7,g7,h7,i7,j7,k7,l7,m7,dstress);

dstress=sollicitations (t+9*dt/10)-sollicitations (t+8*dt/10);
[d9,e9,f9,g9,h9,i9,j9,k9,l9,m9]=...
  increment_stress (t+8*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
  M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
  d8,e8,f8,g8,h8,i8,j8,k8,l8,m8,dstress);

```

```

dstress=sollicitations(t+10*dt/10)-sollicitations(t+9*dt/10);
[new_strain_e,new_dstraindt_e,...
 new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,new_dstressdt_f,...
 new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng]=...
increment_stress(t+9*dt/10,dt/10,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
d9,e9,f9,g9,h9,i9,j9,k9,l9,m9,dstress);

end

```

increment_stress.m

```

%Function elastic_increment gives strains, speed of strains variation and
non
%viscous stresses in each body at the time t+dt from datas at the time t

function [new_strain_e,...
 new_dstraindt_e,new_strain_p,new_dstraindt_p,new_stress_f,...
 new_dstressdt_f,new_isVEL,new_nf,new_tf,new_ng]=...
increment_stress(t,dt,E_DBN,n_DBN,...
M_elast,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,Rg,Lsg,crit_conv,...
strain_e,dstraindt_e,strain_p,...
dstraindt_p,stress_f,dstressdt_f,isVEL,nf,tf,ng,dstress)

global TREF C1 C2;

%%
%%Creating parameters at the time t+dt
new_stress=zeros(6,1);
new_dstressdt=zeros(6,1);
new_dstressdt_f=zeros(6,1);
new_stress_f=zeros(6,1);
new_isVEL=zeros(1,1);
new_dstraindt_e=zeros(6,1);
new_strain_e=zeros(6,1);
new_dstraindt_p=zeros(6,1);
new_strain_p=zeros(6,1);
new_nf=zeros(6,1);
new_tf=zeros(6,1);
new_ng=zeros(6,1);
new_total_strain=zeros(6,1);

%%
%%Updating parameters of the model at the time t
%Viscosity of the body i at t
n_DBN_T=n_DBN*10^(-C1*(temperature(t)-TREF)/(C2+temperature(t)-TREF));
ksi=E_DBN/n_DBN_T;
expon=exp(-ksi*dt);

%%
%%Computing parameters at time t+dt

%Stress_f and Strain_e and strain_p and their derivatives
if isVEL||fcn_norm_T4(fcn_prod_tensorial(ng,nf))==0
 new_stress_f=stress_f+...

```

```

        (sollicitations(t+dt)-sollicitations(t))*(1-(1-expon)/...
        (ksi*dt))+dstressdt_f*dt*(1-expon)/(ksi*dt);
new_dstressdt_f=dstressdt_f*expon+...
        (sollicitations(t+dt)-sollicitations(t))/dt*(1-expon);
new_dstraindt_e=M_elast*new_dstressdt_f;
new_strain_e=M_elast*new_stress_f;
new_strain_p=strain_p;
else
    new_stress_f=stress_f+...
        fcn_prod_scalar((sollicitations(t+dt)-
sollicitations(t)),tf)*tf*...
        (1-(1-expon)/(ksi*dt))+...
        fcn_prod_scalar(dstressdt_f,tf)*tf*dt*(1-expon)/(ksi*dt);
    new_dstressdt_f=fcn_prod_scalar(dstressdt_f,tf)*tf*expon+...
        fcn_prod_scalar((sollicitations(t+dt)-
sollicitations(t)),tf)/dt*tf*(1-expon);
    new_dstraindt_e=M_elast*new_dstressdt_f;
    new_strain_e=M_elast*new_stress_f;
    new_dstraindt_p=dstraindt_p+...

ksi*fcn_norm_T4(M_elast)/fcn_norm_T4(fcn_prod_tensorial(ng,nf))*...
    fcn_prod_tensorial(ng,nf)*dstress;
    new_strain_p=strain_p+dstraindt_p*dt+ksi*fcn_norm_T4(M_elast)/...

fcn_norm_T4(fcn_prod_tensorial(ng,nf))*fcn_prod_tensorial(ng,nf)*dstress*
dt/2;
end

%Body behaviour
a=fd(Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,new_stress_f);
b=fd(Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip,sollicitations(t+dt));

if isnan(a)
    a=(-10^9);
end
if isnan(b)
    b=(-10^9);
end

new_isVEL=(a<=0)|| (b<=0);

%Projection of stress_f on the yield surface f=0
if ~new_isVEL&&~isVEL

new_stress_f=fcn_proj_ys(new_stress_f,nf,crit_conv,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip);

new_dstressdt_f=fcn_proj_ys(new_dstressdt_f,nf,crit_conv,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc
,Ip);
end

%Unit normal vectors
if new_isVEL
    new_nf=zeros(6,1);
    new_tf=zeros(6,1);
    new_ng=zeros(6,1);
else
    [new_nf,new_tf]=fcn_nf_tf(new_stress_f,Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip);
    new_ng=fcn_ng(new_stress_f,Rg,Lsg,crit_conv);
end

```

```

end

%In case of VEL => VP or VP => VEL
if isVEL&&~new_isVEL
    new_dstraindt_p=ksi*fcn_norm_T4(M_elast)/...
        fcn_norm_T4(fcn_prod_tensorial(new_ng,new_nf))*...
        fcn_prod_tensorial(new_ng,new_nf)*(sollicitations(t+dt)-
new_stress_f);
elseif ~isVEL&&new_isVEL
    new_strain_p=strain_p;
    new_dstraindt_p=[0;0;0;0;0;0];
end

end

```

7.2.6 Fonctions communes aux 3 algorithmes de calcul

Dans cette section, les fonctions communes à tous les codes de calcul développés sont présentées.

7.2.6.1 Lecture des paramètres et des constantes de calibration dans le fichier Excel *datas.xlsx*

ini_time_parameters.m

```

%Load time parameters from the file "datas.xlsx"

DT=xlsread('datas.xlsx','datas','L14:L14');
TMAX=xlsread('datas.xlsx','datas','L15:L15');
crit_conv=xlsread('datas.xlsx','datas','L16:L16');

```

ini_DBN_parameters.m

```

%DBN_parameters.m
%Build matrix, vectors and parameters of the DBN model needed to operate
%calculations

%Elasticity matrix (for each DBN elements)
%EP0
M_elast0=zeros(6,6);
M_elast0(1,1)=1/E0_DBN(1);
M_elast0(2,2)=1/E0_DBN(1);
M_elast0(3,3)=1/E0_DBN(1);
M_elast0(1,2)=-v0_DBN(1)/E0_DBN(1);
M_elast0(2,1)=-v0_DBN(1)/E0_DBN(1);
M_elast0(1,3)=-v0_DBN(1)/E0_DBN(1);
M_elast0(3,1)=-v0_DBN(1)/E0_DBN(1);
M_elast0(2,3)=-v0_DBN(1)/E0_DBN(1);
M_elast0(3,2)=-v0_DBN(1)/E0_DBN(1);
M_elast0(4,4)=1/G0_DBN(1);
M_elast0(5,5)=1/G0_DBN(1);
M_elast0(6,6)=1/G0_DBN(1);

```

```

%Epi
M_elast=fcn_create_arrays(n_DBN_elements,6,6);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    M_elast{i_DBN}(1,1)=1/E_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(2,2)=1/E_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(3,3)=1/E_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(1,2)=-v_DBN(i_DBN,1)/E_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(2,1)=-v_DBN(i_DBN,1)/E_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(1,3)=-v_DBN(i_DBN,1)/E_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(3,1)=-v_DBN(i_DBN,1)/E_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(2,3)=-v_DBN(i_DBN,1)/E_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(3,2)=-v_DBN(i_DBN,1)/E_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(4,4)=1/G_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(5,5)=1/G_DBN(i_DBN,1);
    M_elast{i_DBN}(6,6)=1/G_DBN(i_DBN,1);
end

%Inverse of elasticity matrix
%EPO
M_elast0_inv=M_elast0^(-1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    M_elast_inv{i_DBN}=(M_elast{i_DBN})^(-1);
end

%Ipi
Ip=zeros(n_DBN_elements,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    Ip(i_DBN,1)=sMAX_DBN(i_DBN,1);
end

%Lsi
Ls=0.55*ones(n_DBN_elements,1);

%Rti
Rt=zeros(n_DBN_elements,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    Rt(i_DBN,1)=1/Ls(i_DBN,1)*(1-
sqrt(2)*tantetaT_DBN(i_DBN,1))/(sqrt(2)+tantetaT_DBN(i_DBN,1));
end

%Rci
Rc=zeros(n_DBN_elements,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    Rc(i_DBN,1)=1/Ls(i_DBN,1)*(1-
sqrt(2)*tantetaC_DBN(i_DBN,1))/(sqrt(2)+tantetaC_DBN(i_DBN,1));
end

%Rgi
Rg=zeros(n_DBN_elements,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    Rg(i_DBN,1)=1/sqrt(2)*(2*vc_DBN(i_DBN,1)-1)/(vc_DBN(i_DBN,1)+1);
end

%Lsgi
Lsg=zeros(n_DBN_elements,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements

```

```

    Lsg(i_DBN,1)=1/Rg(i_DBN,1)*1/sqrt(2)*(1-
2*vt_DBN(i_DBN,1))/(vt_DBN(i_DBN,1)+1);
end

%Ilt
Ilt=zeros(n_DBN_elements,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    Ilt(i_DBN,1)=sMAX_DBN(i_DBN,1)*(1-sqrt(2)/Rt(i_DBN,1));
end

%Ilc
Ilc=zeros(n_DBN_elements,1);
for i_DBN=1:n_DBN_elements
    Ilc(i_DBN,1)=sMAX_DBN(i_DBN,1)*(1-sqrt(2)/Rc(i_DBN,1));
end

clear i_DBN alpha delta v12 v21 v13 v31 v23 v32 sMAX_DBN sMIN_DBN vt_DBN
vc_DBN

```

ini_DBN_calibration.m

```

%DBN_calibration.m
%Load DBN calibration from the file "datas.xlsx"

global n_DBN_elements

%Number of DBN elements
n_DBN_elements=xlsread('datas.xlsx','C14:C14');

%Modulus Ei (MPa)
E0_DBN=xlsread('datas.xlsx','B21:B21');
E_DBN=xlsread('datas.xlsx','datas',strcat('B22:B',num2str(n_DBN_elements+
21)));

%Poisson coefficients vi (dimensionless)
v0_DBN=xlsread('datas.xlsx','C21:C21');
v_DBN=xlsread('datas.xlsx','datas',strcat('C22:C',num2str(n_DBN_elements+
21)));

%Shear modulus Gi (MPa)
G0_DBN=xlsread('datas.xlsx','D21:D21');
G_DBN=xlsread('datas.xlsx','datas',strcat('D22:D',num2str(n_DBN_elements+
21)));

%Viscosities ni (MPa.s)
n_DBN=xlsread('datas.xlsx','datas',strcat('E22:E',num2str(n_DBN_elements+
21)));

%Seuil supérieur splusi (MPa)
sMAX_DBN=xlsread('datas.xlsx','datas',strcat('G22:G',num2str(n_DBN_elemen
ts+21)));

%Seuil inférieur smoinsi (MPa)
sMIN_DBN=xlsread('datas.xlsx','datas',strcat('H22:H',num2str(n_DBN_elemen
ts+21)));

%Tangente de l'angle tetaC

```

```

tantetaC_DBN=xlsread('datas.xlsx','datas',strcat('I22:I',num2str(n_DBN_elements+21)));

%Tangente de l'angle tetaT
tantetaT_DBN=xlsread('datas.xlsx','datas',strcat('J22:J',num2str(n_DBN_elements+21)));

%Poisson coefficient during compression in the palstic domain
vc_DBN=xlsread('datas.xlsx','datas',strcat('K22:K',num2str(n_DBN_elements+21)));

%Poisson coefficient during tension in the palstic domain
vt_DBN=xlsread('datas.xlsx','datas',strcat('L22:L',num2str(n_DBN_elements+21)));

```

ini_WLF_calibration.m

```

%Load WLF calibration from the file "datas.xlsx"

global TREF C1 C2;

TREF=xlsread('datas.xlsx','datas','G14:G14');
C1=xlsread('datas.xlsx','datas','G15:G15');
C2=xlsread('datas.xlsx','datas','G16:G16');

```

7.2.6.2 Calcul des invariants et des tenseurs déviatoriques

fcn_invariants.m

```

function [ I1,J2,J3,s,s2,s3 ] = fcn_invariants(sigma)
%Gives the value of the yield function function fd from its parameters
%%Here sigma is given as
(sigma11,sigma22,sigma33,sigma12,sigma13,sigma23)

%Find the 3 invariants of the stress tensor sigma
I1=sigma(1,1)+sigma(2,1)+sigma(3,1);

s=sigma-I1/3*[1;1;1;0;0;0];
s2=fcn_prod_matrix(s,s);
s3=fcn_prod_matrix(s2,s);
J2=s2(1,1)+s2(2,1)+s2(3,1);
J3=s3(1,1)+s3(2,1)+s3(3,1);

```

7.2.6.3 Produit scalaire, produit tensoriel et produit matriciel

fcn_prod_scalar.m

```

function [ ps ] = fcn_prod_scalar( tensor1,tensor2 )

ps=0;
for i=1:3

```

```

    ps=ps+tensor1(i,1)*tensor2(i,1);
end
for i=4:6
    ps=ps+2*tensor1(i,1)*tensor2(i,1);
end
end

```

fcn_prod_tensorial.m

```

function [ l ] = fcn_prod_tensorial( n,m )

l=zeros(6,6);
for i=1:6
    for j=1:6
        l(i,j)=n(i)*m(j);
    end
end

end

```

fcn_prod_matrix.m

```

function [ A ] = fcn_prod_matrix( B,C )
%MATRIXPRODUCT gives A = B*C when A,B,C are symmetric tensors written
under
%the Voigt convention

A(1,1)=B(1,1)*C(1,1)+B(6,1)*C(6,1)+B(5,1)*C(5,1);
A(2,1)=B(2,1)*C(2,1)+B(6,1)*C(6,1)+B(4,1)*C(4,1);
A(3,1)=B(3,1)*C(3,1)+B(4,1)*C(4,1)+B(5,1)*C(5,1);
A(4,1)=B(5,1)*C(6,1)+B(4,1)*C(5,1)+B(3,1)*C(4,1);
A(5,1)=B(5,1)*C(1,1)+B(4,1)*C(6,1)+B(3,1)*C(5,1);
A(6,1)=B(6,1)*C(1,1)+B(2,1)*C(6,1)+B(4,1)*C(5,1);

end

```

7.2.6.4 Calcul de la norme des tenseurs d'ordre 2 et 4

fcn_norm_T2.m

```

function [ norm ] = fcn_norm_T2( vector )

norm=0;
for k=1:3
    norm=norm+(vector(k,1))^2;
end
for k=4:5
    norm=norm+2*(vector(k,1))^2;
end

norm=sqrt(norm);
end

```

fcn_norm_T4.m

```

function [ value ] = fd(Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip, stress_f)
%Gives the value of the yield function function fd from its parameters
%%Here sigma is given as
(sigma11,sigma22,sigma33,sigma12,sigma13,sigma23)

%Calculations
[I1,J2,J3]=fcn_invariants(stress_f);

if I1<=Ip
    R=Rt;
    I1_summit=Ilt;
else
    R=Rc;
    I1_summit=Ilc;
end

cos3theta=sqrt(6)*J3/J2^1.5;
mu=sqrt(2)*sqrt(1-Ls+Ls^2)/sqrt(3)/Ls;
gamma=-3*sqrt(3)/2*(1-Ls)*Ls/(1-Ls+Ls^2)^1.5;
rho=mu*cos(1/3*acos(gamma*cos3theta));

value=sqrt(J2)*rho-R/sqrt(6)*(I1-I1_summit);

end

```

7.2.6.5 Projection sur la surface de plasticité

fcn_proj_ys.m

```

function [ stress_ys ] = fcn_proj_ys(
stress,nf,crit_conv,Rti,Rci,Lsi,Ilti,Iltci,Ipi )

h_lambda=-10^(-2);
lambda=0;
ys_value=abs(fd(Rti,Rci,Lsi,Ilti,Iltci,Ipi, stress));
c=0;

while (ys_value>crit_conv)&&(c<=1000)
    lambda=lambda+h_lambda;

    new_ys_value=abs(fd(Rti,Rci,Lsi,Ilti,Iltci,Ipi, stress+lambda*nf));

    if new_ys_value>ys_value
        h_lambda=-h_lambda/10;
    end

    c=c+1;
    ys_value=new_ys_value;
end

stress_ys=stress+lambda*nf;

end

```

7.2.6.6 Projection sur la surface de potentiel plastique

fcn_proj_pp.m

```
function [ value ] = fd(Rt,Rc,Ls,Ilt,Ilc,Ip, stress_f)
%Gives the value of the yield function function fd from its parameters
%%Here sigma is given as
(sigma11,sigma22,sigma33,sigma12,sigma13,sigma23)

%Calculations
[I1,J2,J3]=fcn_invariants(stress_f);

if I1<=Ip
    R=Rt;
    I1_summit=Ilt;
else
    R=Rc;
    I1_summit=Ilc;
end

cos3theta=sqrt(6)*J3/J2^1.5;
mu=sqrt(2)*sqrt(1-Ls+Ls^2)/sqrt(3)/Ls;
gamma=-3*sqrt(3)/2*(1-Ls)*Ls/(1-Ls+Ls^2)^1.5;
rho=mu*cos(1/3*acos(gamma*cos3theta));

value=sqrt(J2)*rho-R/sqrt(6)*(I1-I1_summit);

end
```

7.2.6.7 Calcul des vecteurs unitaires normaux et tangent à la surface de plasticité

fcn_nf_tf.m

```
function [ nf,tf ] = fcn_nf_tf ( stress_f,Rti,Rci,Lsi,Ilti,Ilti,Ilti,Ilti,Ilti,Ilti )
delta=[1;1;1;0;0;0];

%%Calculating tensor nf
%ON WHICH CURVE IS stress_f ?
[I1,J2,J3,s,s2,~]=fcn_invariants(stress_f);
if I1<(Ipi-0.00097331798)
    R=Rti;
    I1_summit=Ilti;
else
    R=Rci;
    I1_summit=Ilti;
end

cos3theta=sqrt(6)*J3/J2^1.5;

mu=sqrt(2)*sqrt(1-Lsi+Lsi^2)/sqrt(3)/Lsi;
gamma=-3*sqrt(3)/2*(1-Lsi)*Lsi/(1-Lsi+Lsi^2)^1.5;
rho=mu*cos(1/3*acos(gamma*cos3theta));

nf=rho/sqrt(J2)*s+sqrt(6)*mu*gamma/(3*J2*sqrt(1-gamma^2*cos3theta^2))*...
```

```

        sin(1/3*acos(gamma*cos3theta))*(3*s2-3*J3/J2*s-J2*delta)-
R/sqrt(6)*delta;

%norm of nf
norm_nf=0;
for i=1:3
    norm_nf=norm_nf+nf(i,1)^2;
end
for i=4:6
    norm_nf=norm_nf+2*nf(i,1)^2;
end
norm_nf=sqrt(norm_nf);

%finally nf
nf=nf/norm_nf;

%%Calculatinf tensor tf
tf=stress_f-fcn_prod_scalar(stress_f,nf)*nf;

%norm of tf
norm_tf=0;
for i=1:3
    norm_tf=norm_tf+tf(i,1)^2;
end
for i=4:6
    norm_tf=norm_tf+2*tf(i,1)^2;
end
norm_tf=sqrt(norm_tf);

%finally tf
tf=tf/norm_tf;

clear i j norm_nf trace I s s2

end

```

7.2.6.8 Calcul du vecteur unitaire normal à la surface de potentiel plastique

fcn_ng.m

```

function [ ng ] = fcn_ng( stress_f,Rgi,Lsgi,crit_conv )

%%Calculating tensor ng
%Trace de sigma_g (projeté de sigma_f sur la surface potentiel plastique)
stress_g=fcn_proj_pp(stress_f,Rgi,Lsgi,crit_conv);
[~,J2,J3,s,s2,~]=fcn_invariants(stress_g);
delta=[1;1;1;0;0;0];

%ng (not normalized)
cos3theta=sqrt(6)*J3/J2^1.5;

mu=sqrt(2)*sqrt(1-Lsgi+Lsgi^2)/sqrt(3)/Lsgi;
gamma=-3*sqrt(3)/2*(1-Lsgi)*Lsgi/(1-Lsgi+Lsgi^2)^1.5;

```

```

rho=mu*cos(1/3*acos(gamma*cos3theta));

ng=rho/sqrt(J2)*s+sqrt(6)*mu*gamma/(3*J2*sqrt(1-gamma^2*cos3theta^2))*...
    sin(1/3*acos(gamma*cos3theta))*(3*s2-3*J3/J2*s-J2*delta)-
Rgi/sqrt(6)*delta;

%norm of ng
norm_ng=0;
for i=1:3
    norm_ng=norm_ng+ng(i,1)^2;
end
for i=4:6
    norm_ng=norm_ng+2*ng(i,1)^2;
end
norm_ng=sqrt(norm_ng);

%Finally ng
ng=ng/norm_ng;

clear i j norm_ng trace I s s2 I1 J2 I1g

end

```

7.2.6.9 Calcul de l'écart entre deux tenseurs d'ordre 2

fcn_error.m

```

function [ error ] = fcn_error( vector1,vector2 )
%calc_error : this function give the error between the two vector
(vector1
%and vector2) using the norm ||A||=sqrt(Tr(tA.A))

error=0;

for k=1:3
    error=error+(vector1(k,1)-vector2(k,1))^2;
end
for k=4:5
    error=error+2*(vector1(k,1)-vector2(k,1))^2;
end

error=sqrt(error);

```

7.2.6.10 Fonction de la surface de plasticité

fd.m

```

function [ value ] = fd(Rt,Rc,Ls,I1t,I1c,Ip,stress_f)
%Gives the value of the yield function function fd from its parameters
%%Here sigma is given as
(sigma11,sigma22,sigma33,sigma12,sigma13,sigma23)

```

```

%Calculations
[I1,J2,J3]=fcn_invariants(stress_f);

if I1<=Ip
    R=Rt;
    I1_summit=I1t;
else
    R=Rc;
    I1_summit=I1c;
end

cos3theta=sqrt(6)*J3/J2^1.5;
mu=sqrt(2)*sqrt(1-Ls+Ls^2)/sqrt(3)/Ls;
gamma=-3*sqrt(3)/2*(1-Ls)*Ls/(1-Ls+Ls^2)^1.5;
rho=mu*cos(1/3*acos(gamma*cos3theta));

value=sqrt(J2)*rho-R/sqrt(6)*(I1-I1_summit);

end

```

7.2.6.11 Fonction de création des structures de données

fcn_create_arrays.m

```

%Function that creates a list of nArrays (arrayLineSize,arrayColumnSize)
matrix

function list = fcn_create_arrays(nArrays,arrayLineSize,arrayColumnSize)
    list = cell(1, nArrays);
    for i = 1 : nArrays
        list{i} = zeros(arrayLineSize,arrayColumnSize);
    end
end

```

7.3 Résultats expérimentaux des essais de traction simple

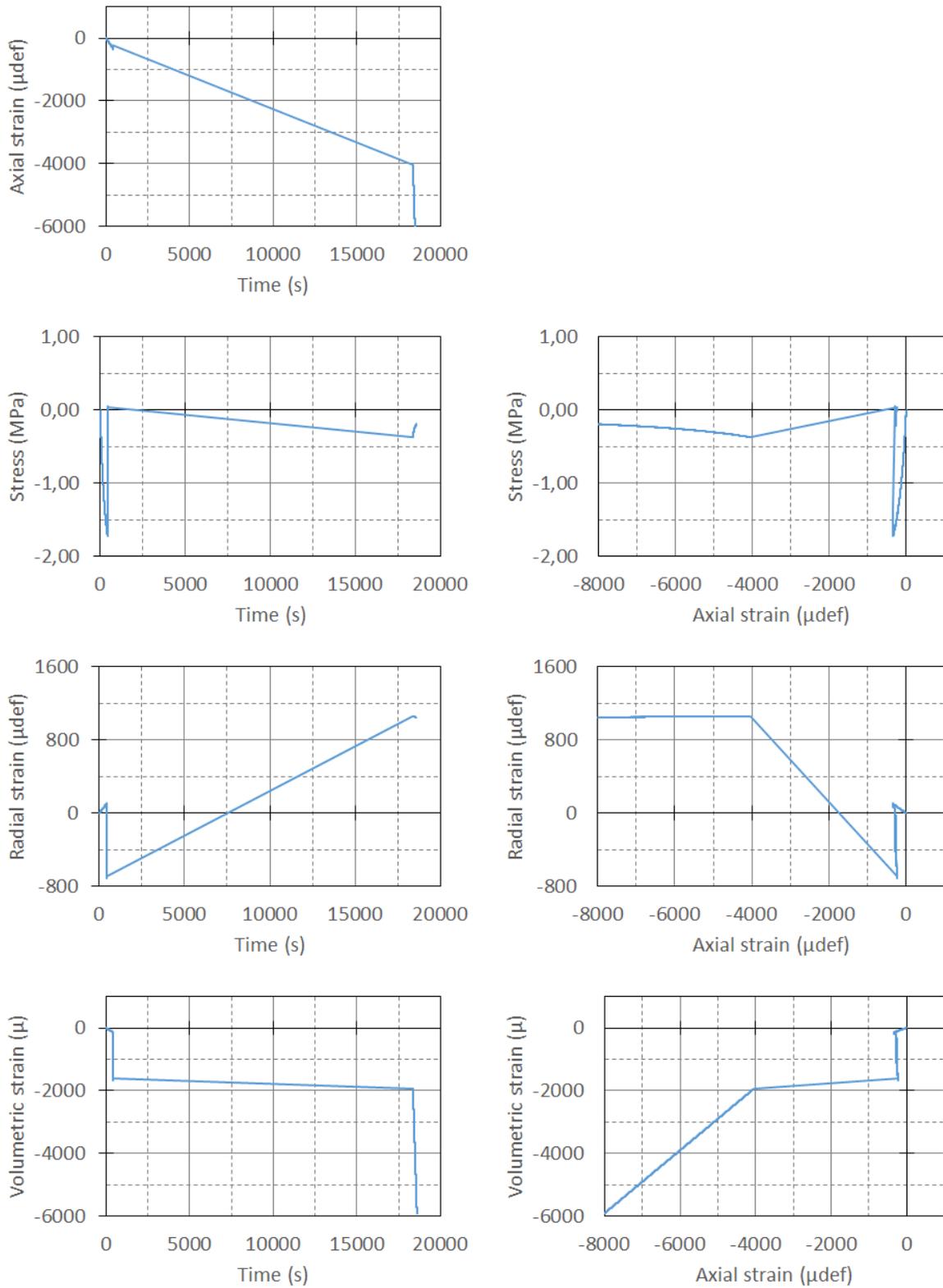


Figure 7-2 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 0 °C-0.00497%/min.

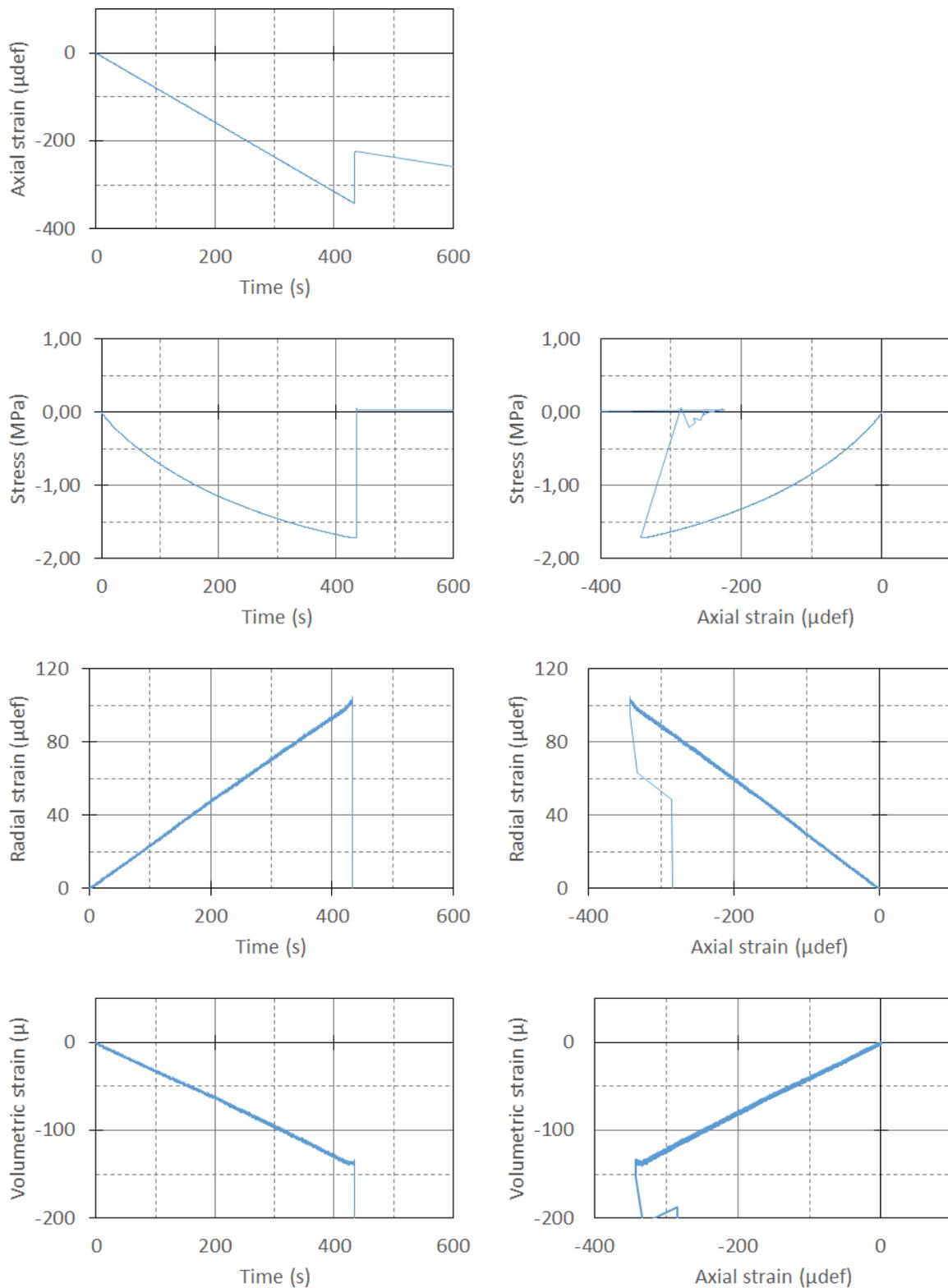


Figure 7-3 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 0 °C-0.00497%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.

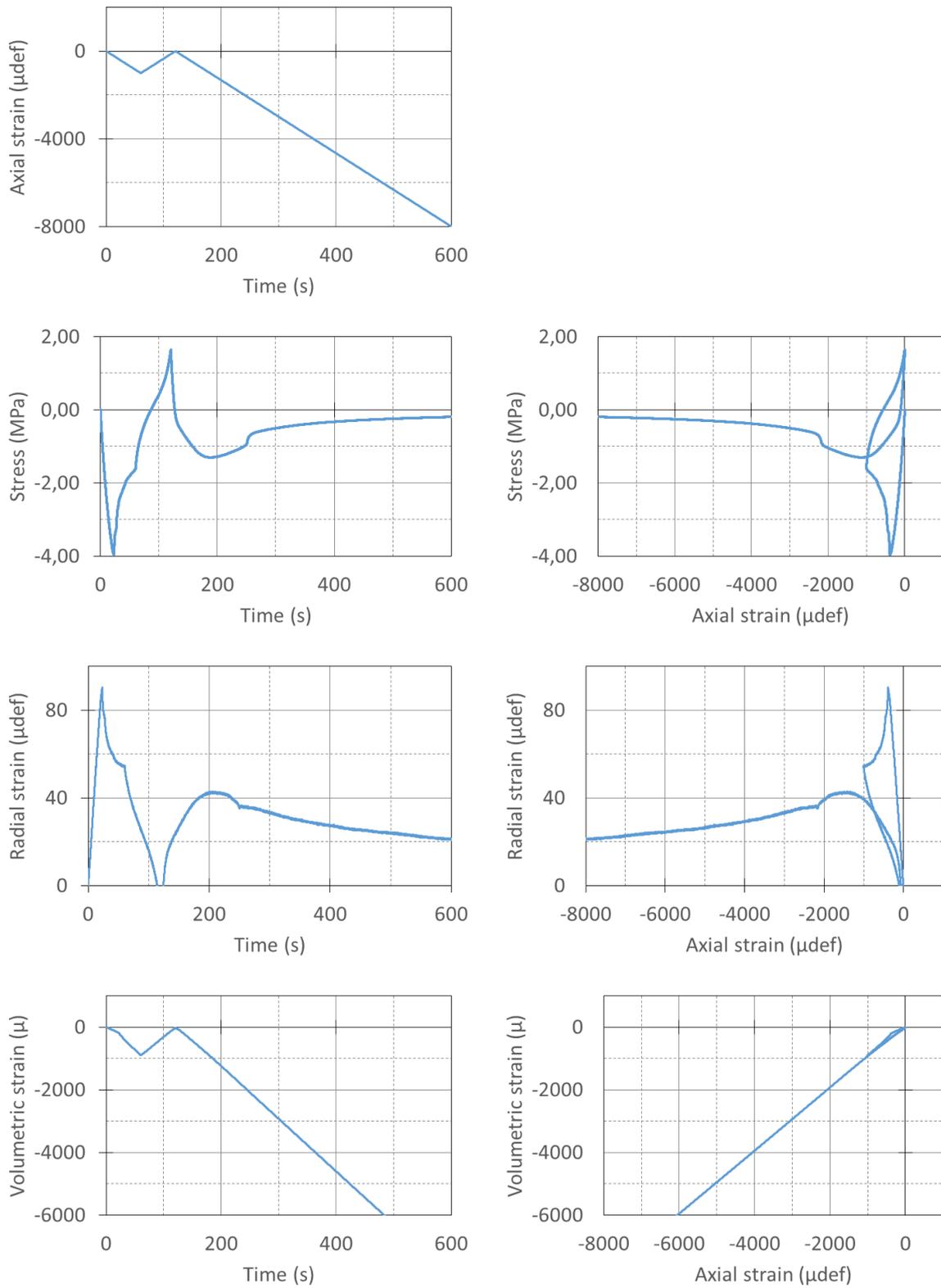


Figure 7-4 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 0 °C-0.1%/min.

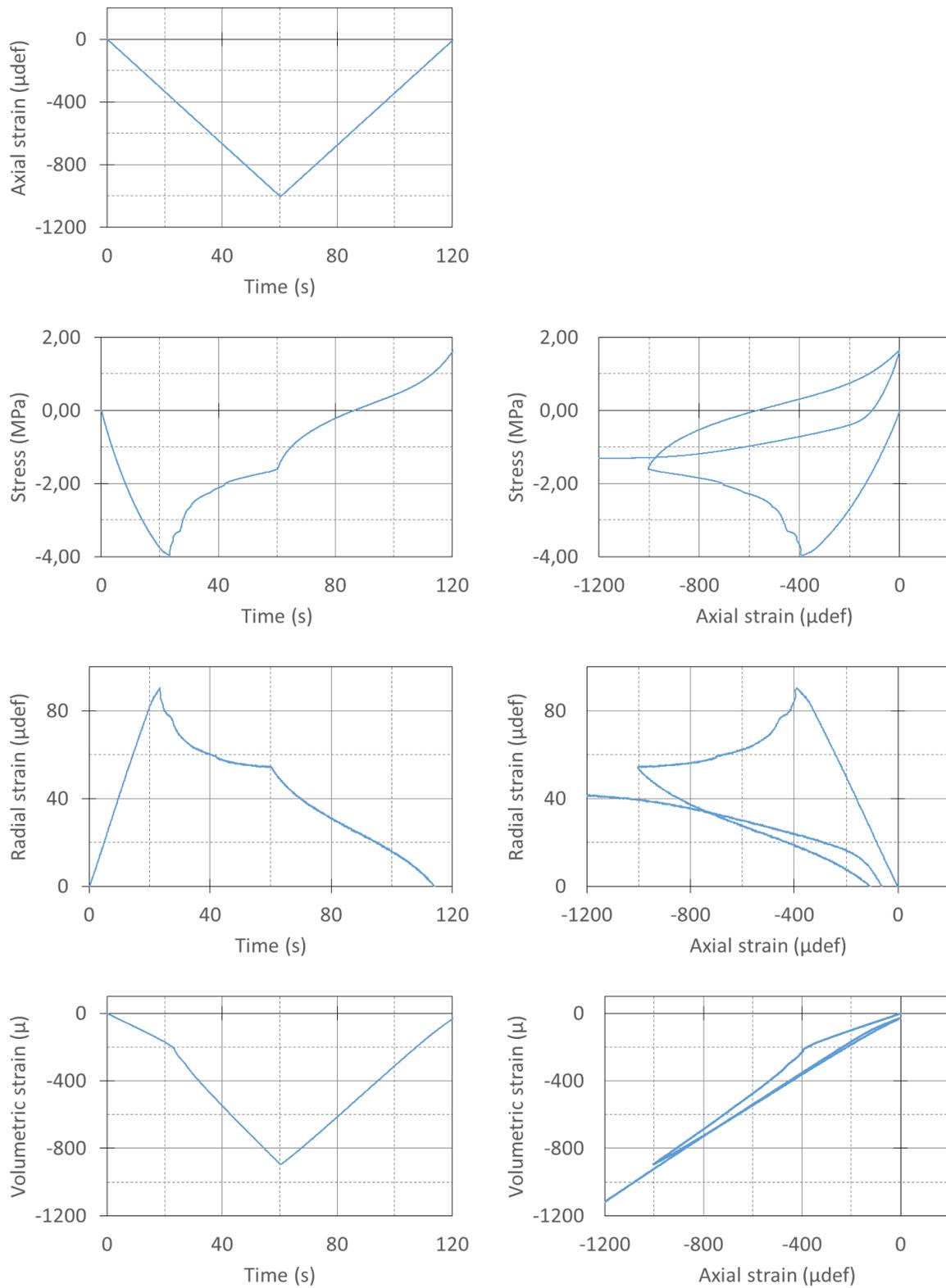


Figure 7-5 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 0 °C-0.1%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.

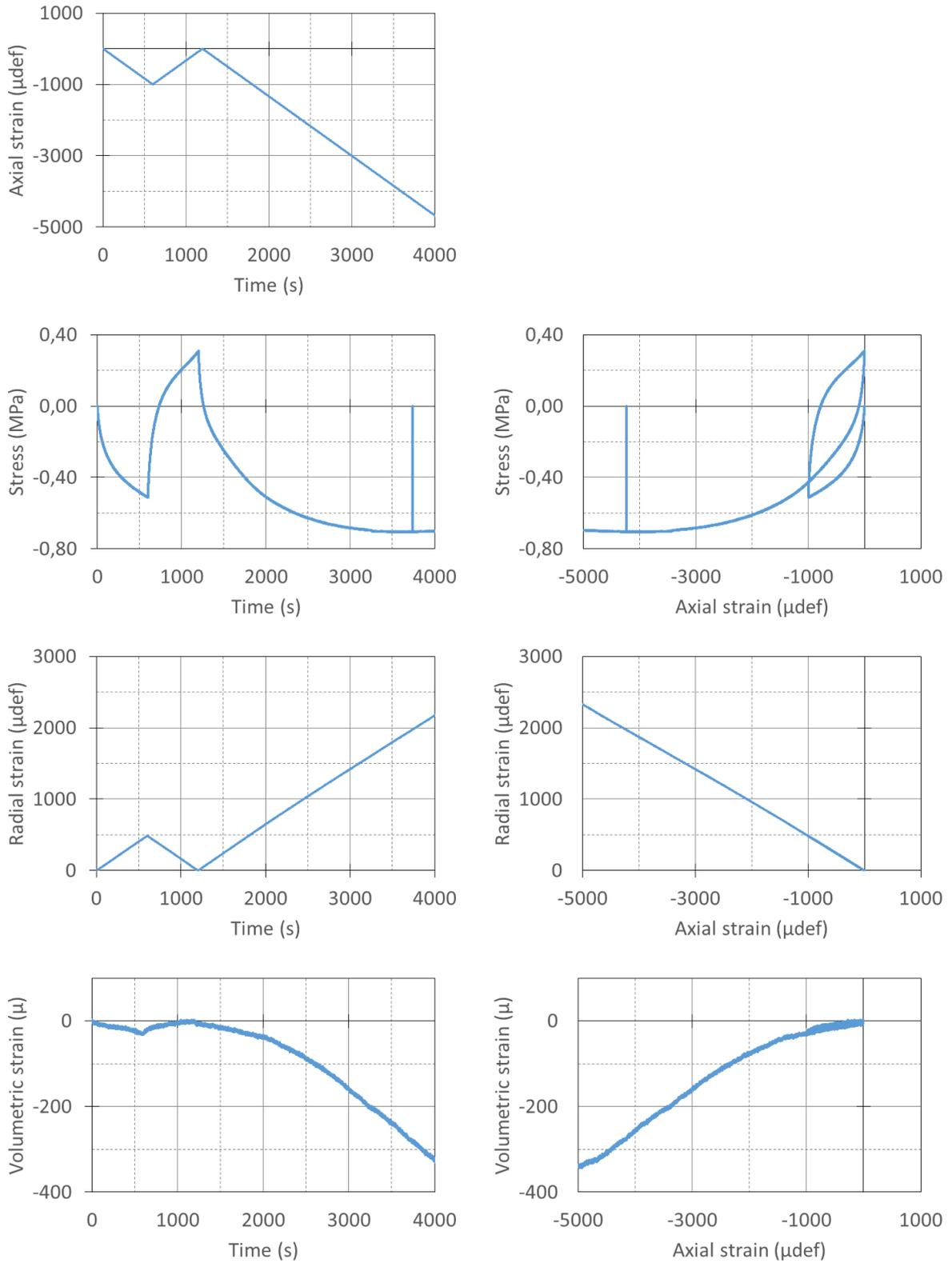


Figure 7-6 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-0,01%/min.

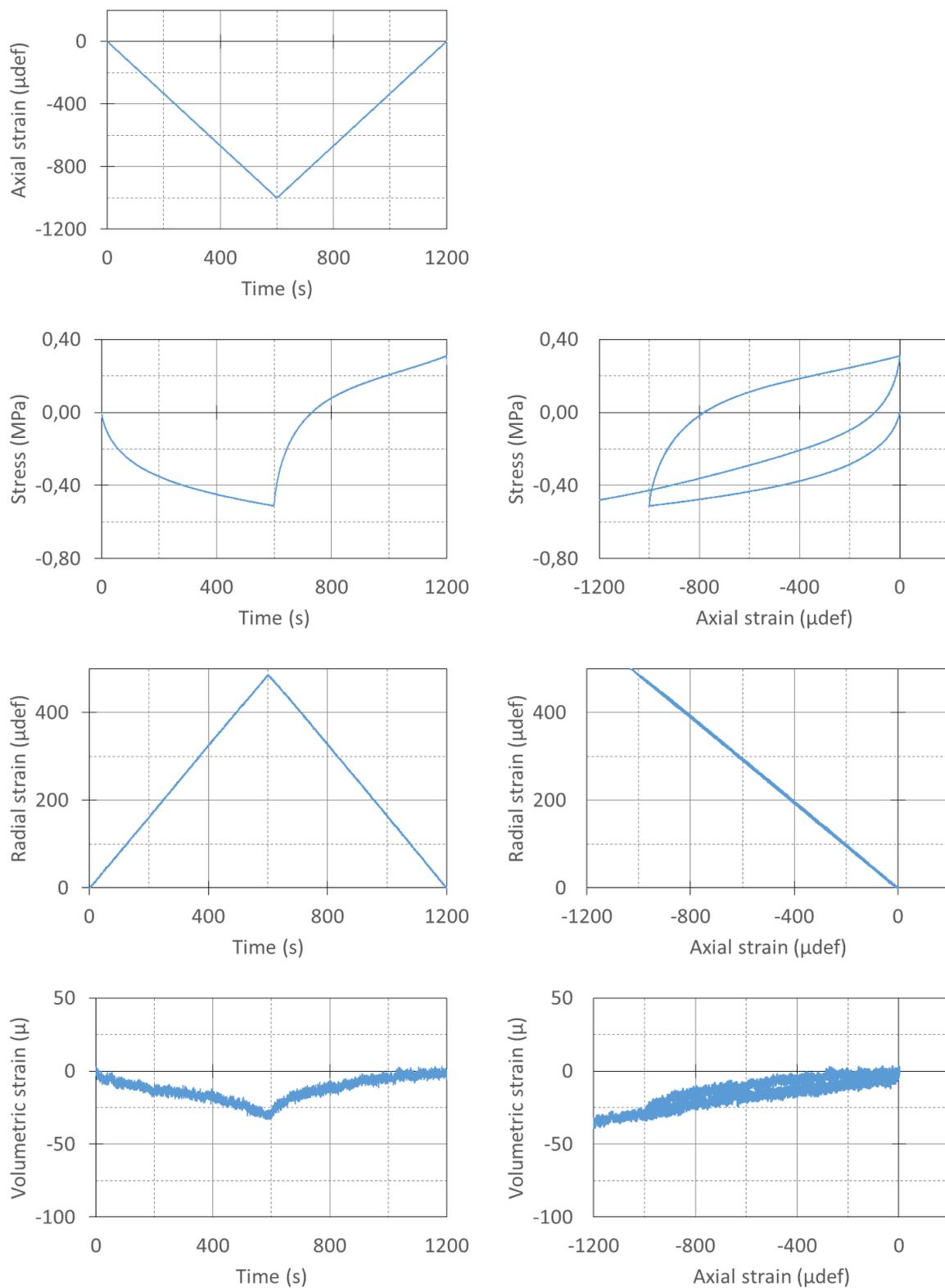


Figure 7-7 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-0,01%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.

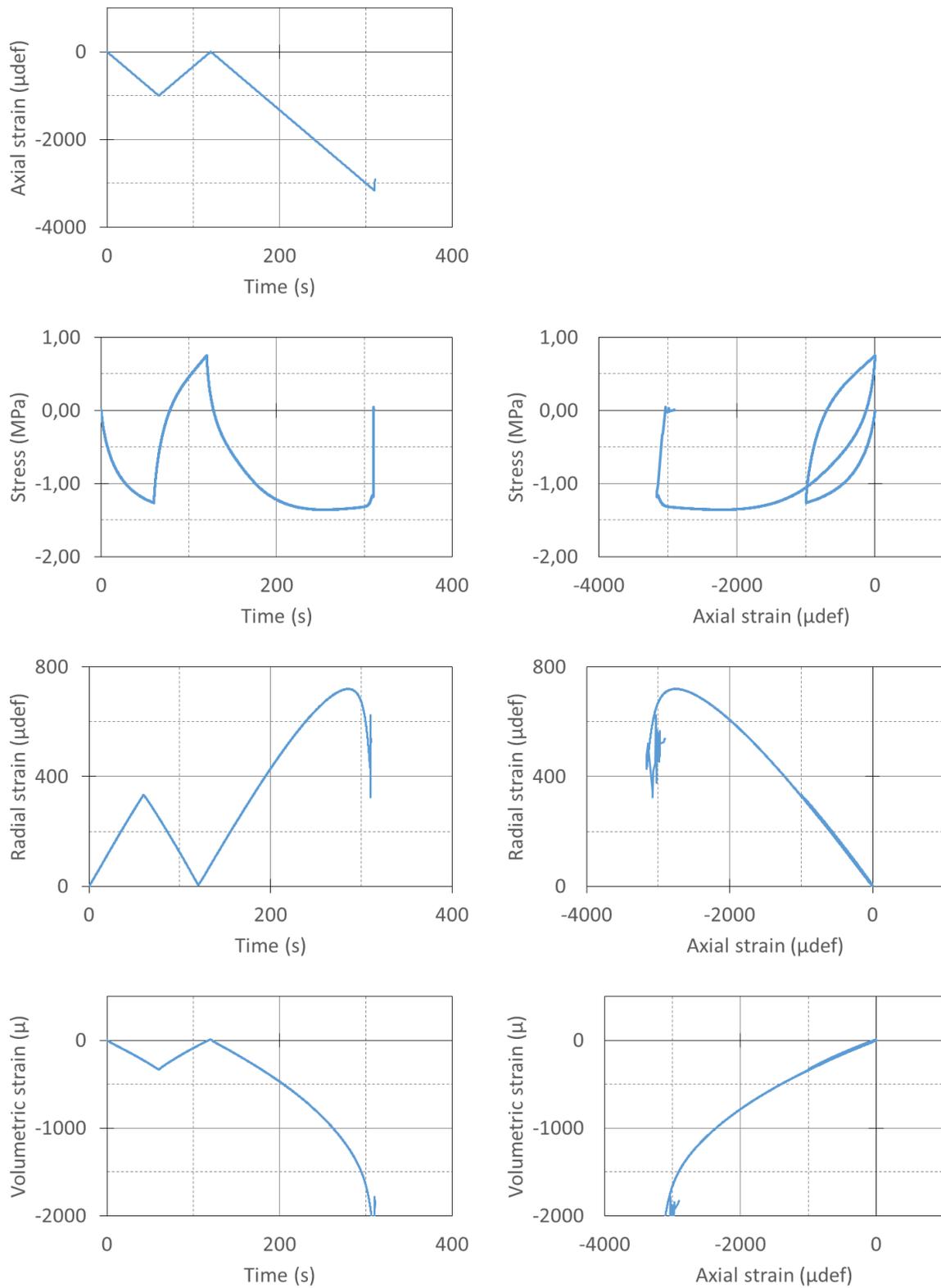


Figure 7-8 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-0,1%/min.

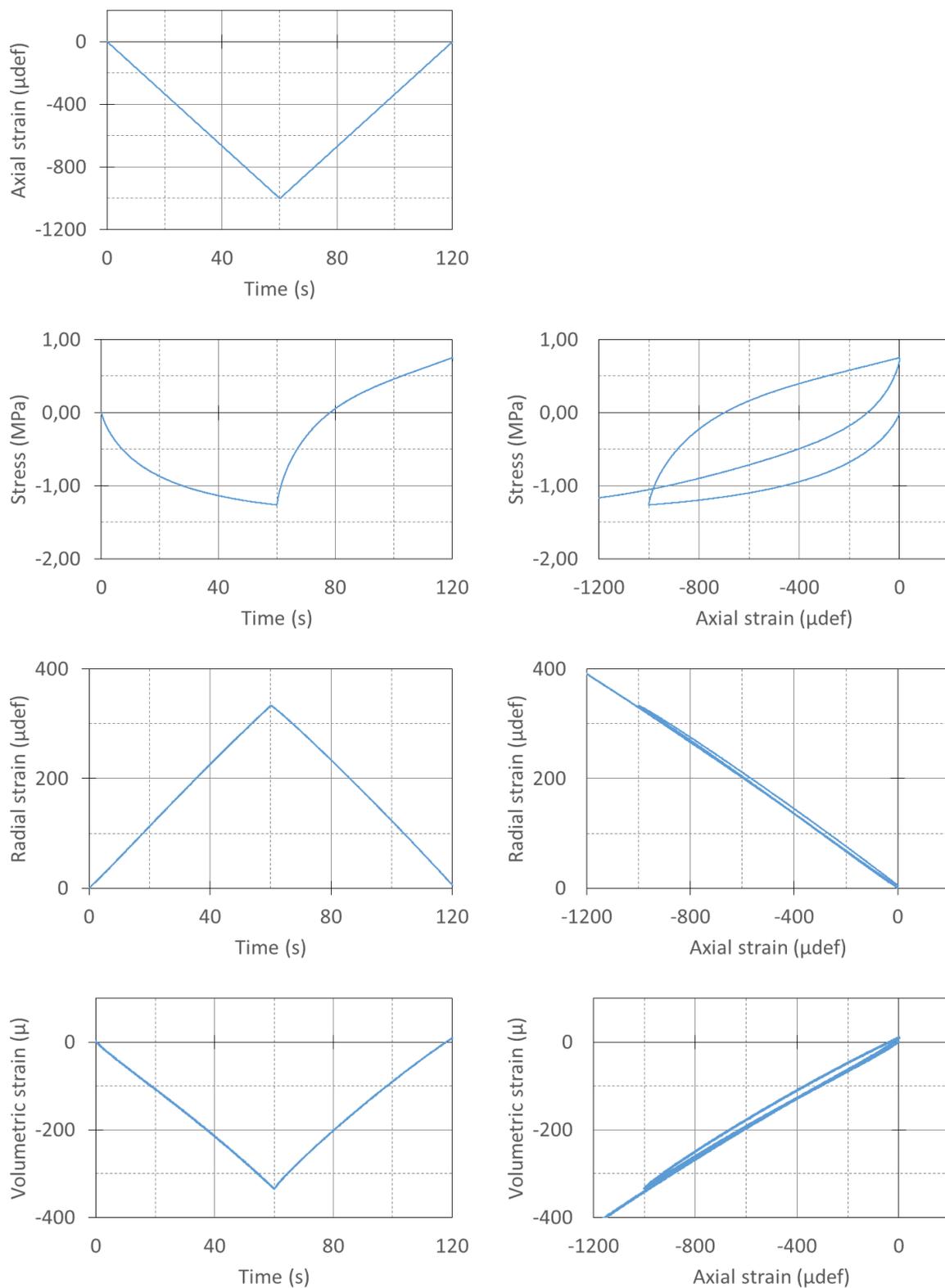


Figure 7-9 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-0,1%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.

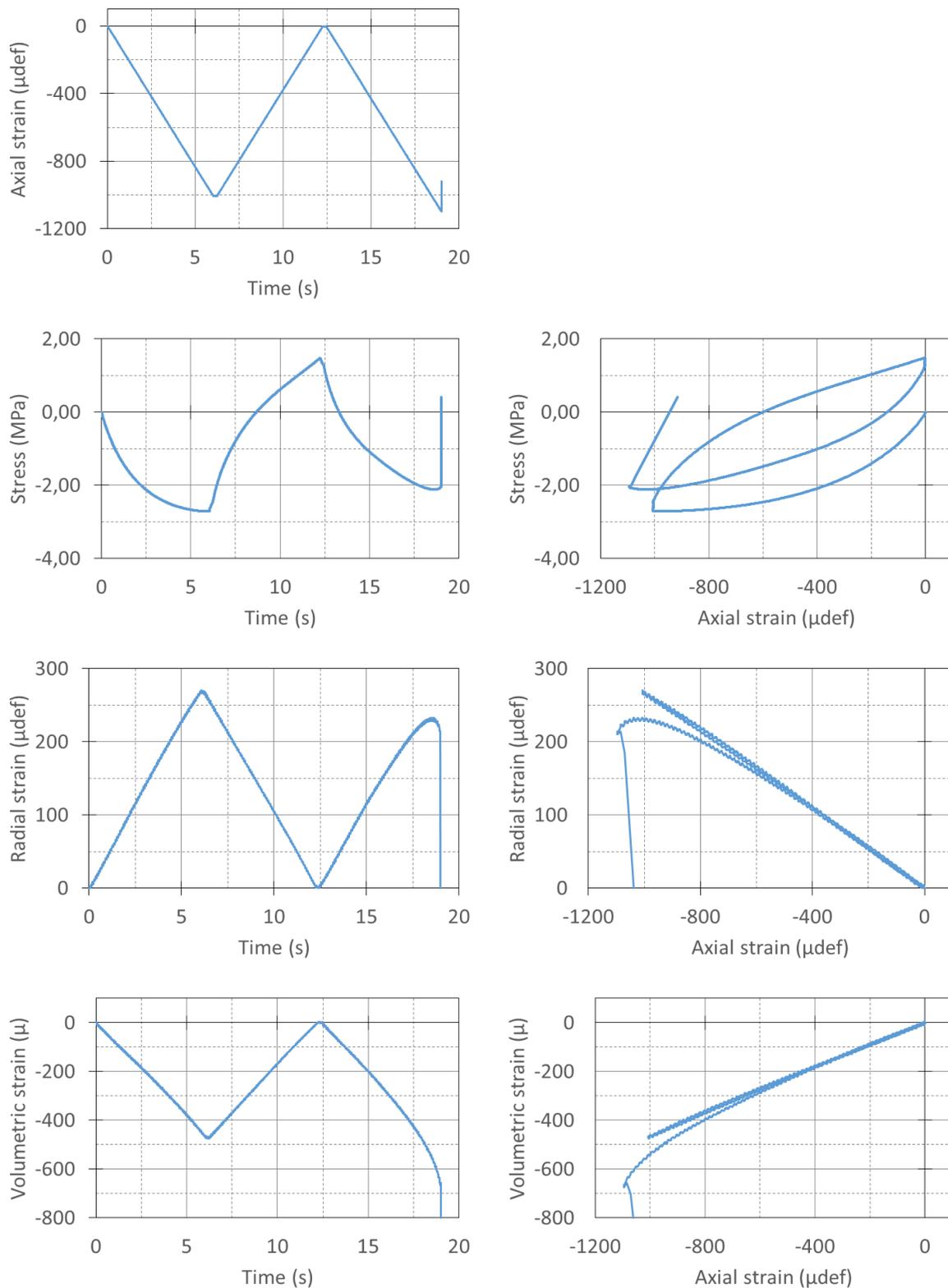


Figure 7-10 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-1%/min.

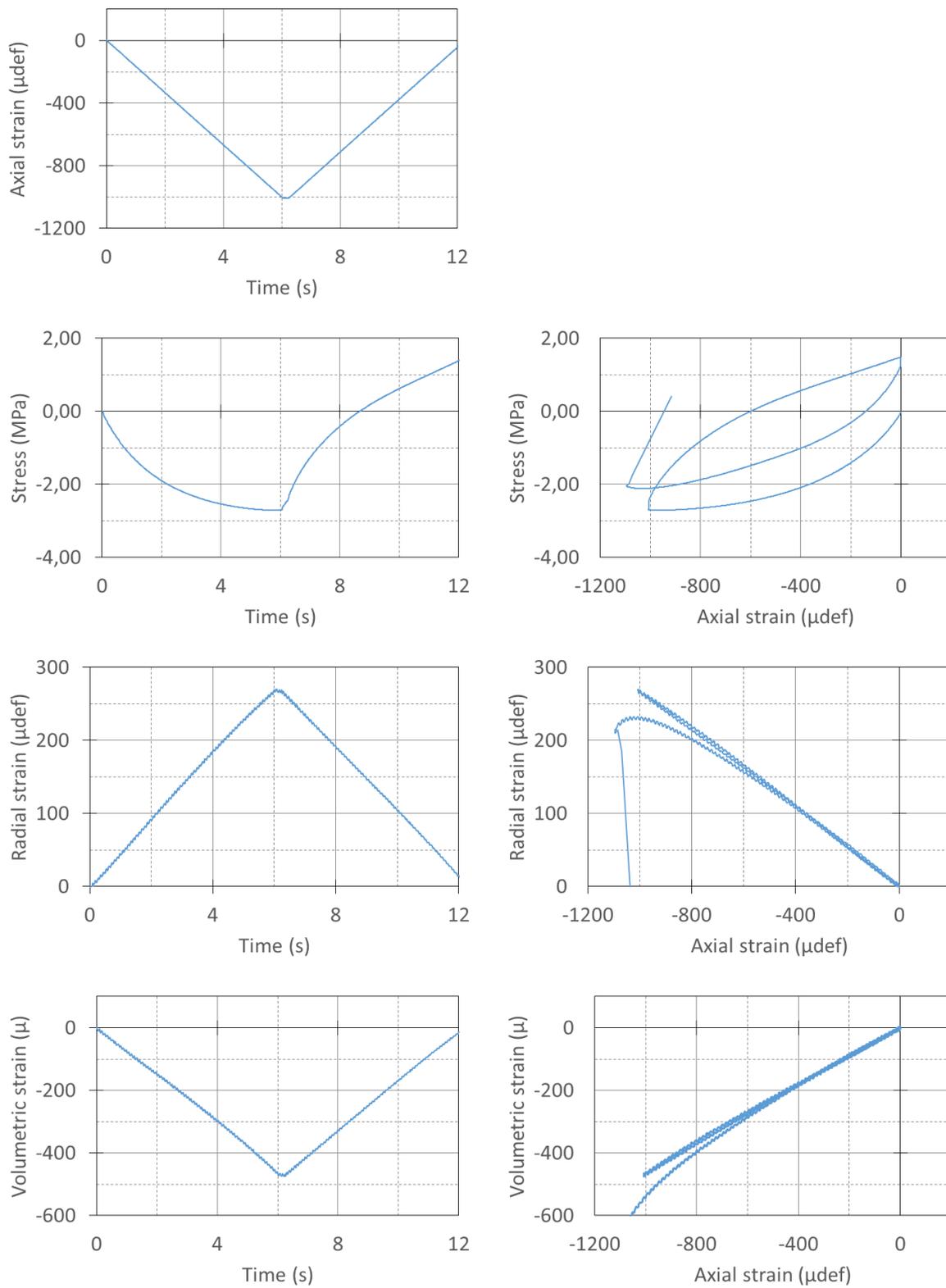


Figure 7-11 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-1%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.

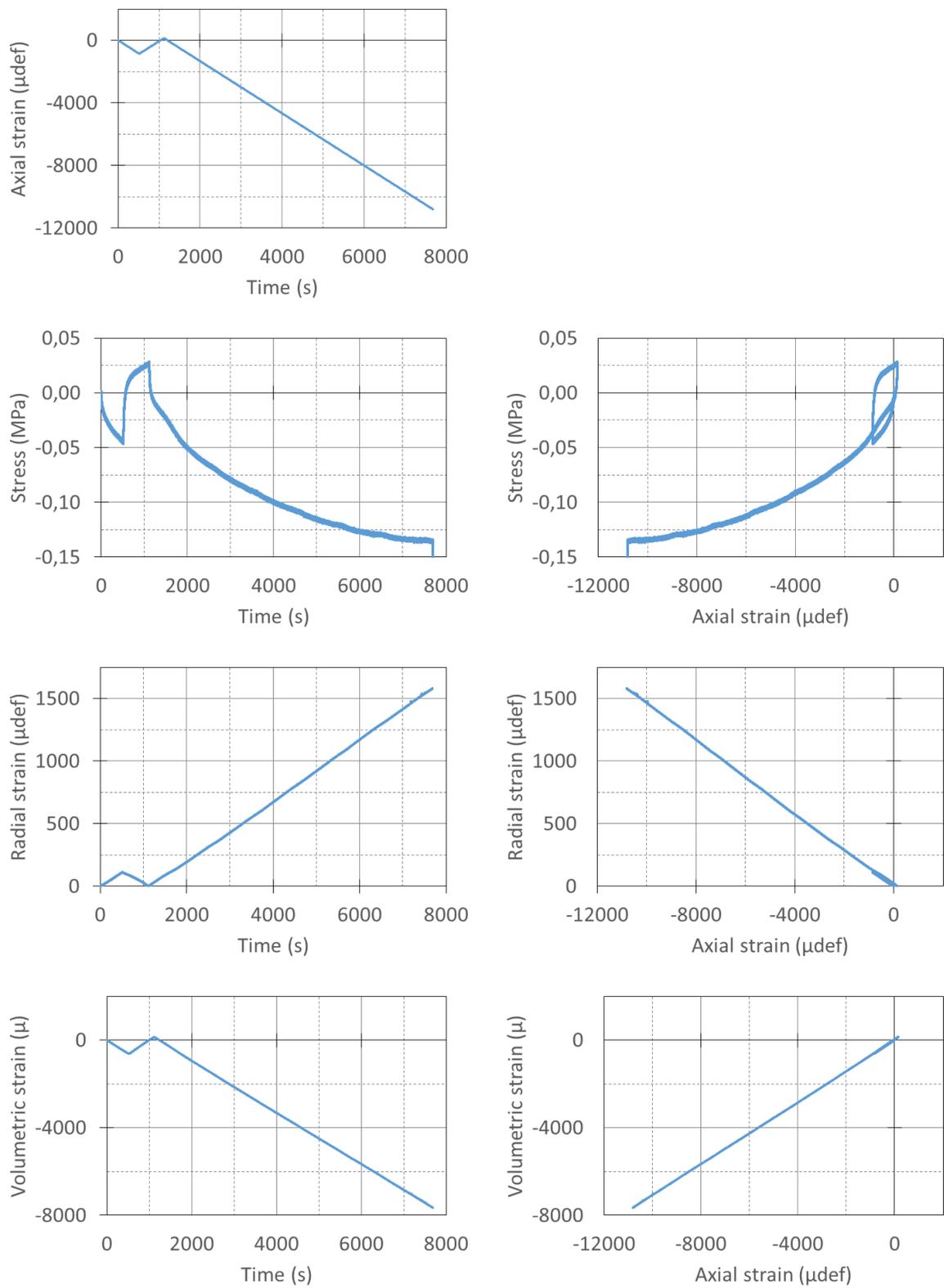


Figure 7-12 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,01%/min.

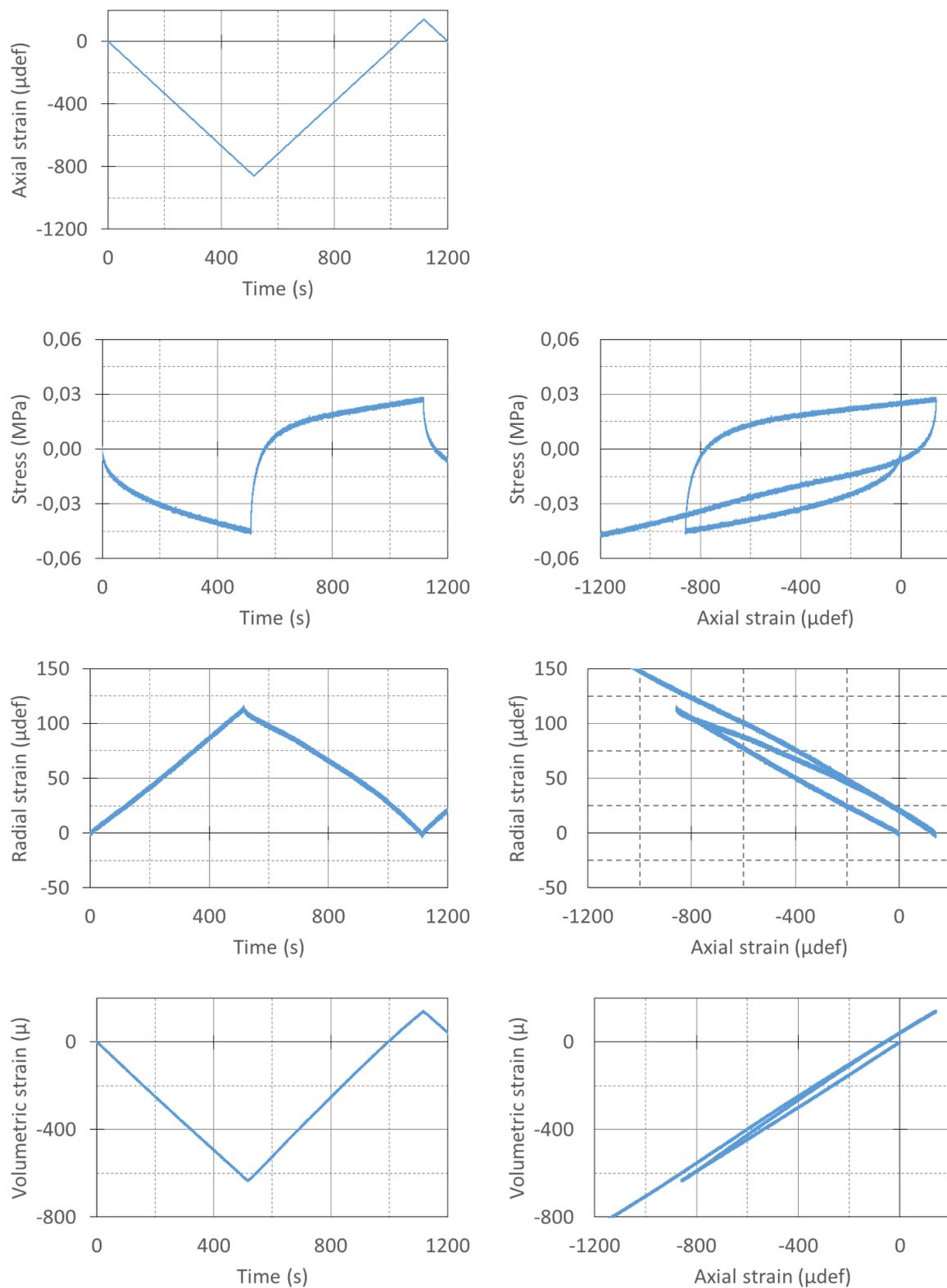


Figure 7-13 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,01%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.

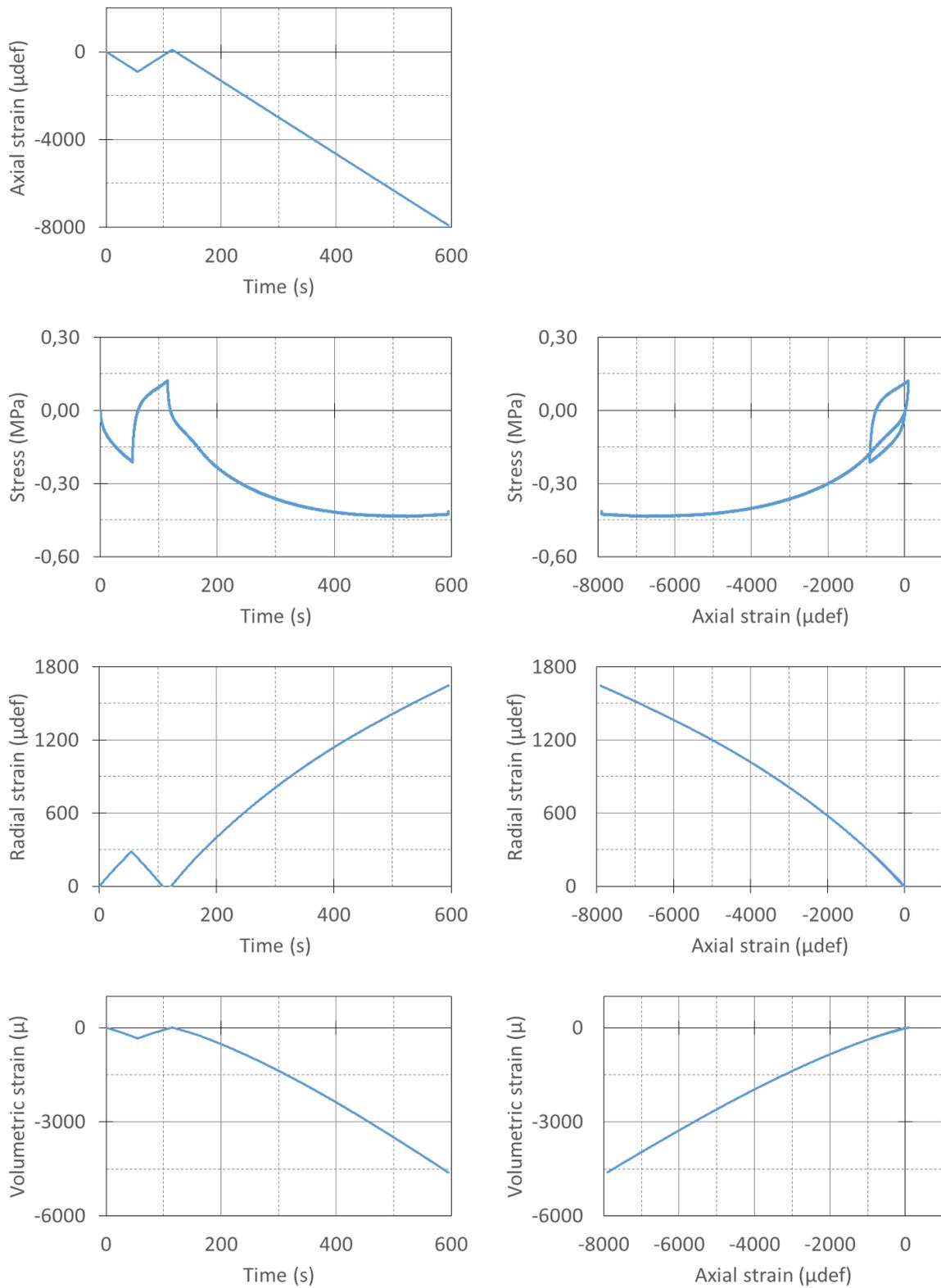


Figure 7-14 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,1%/min.

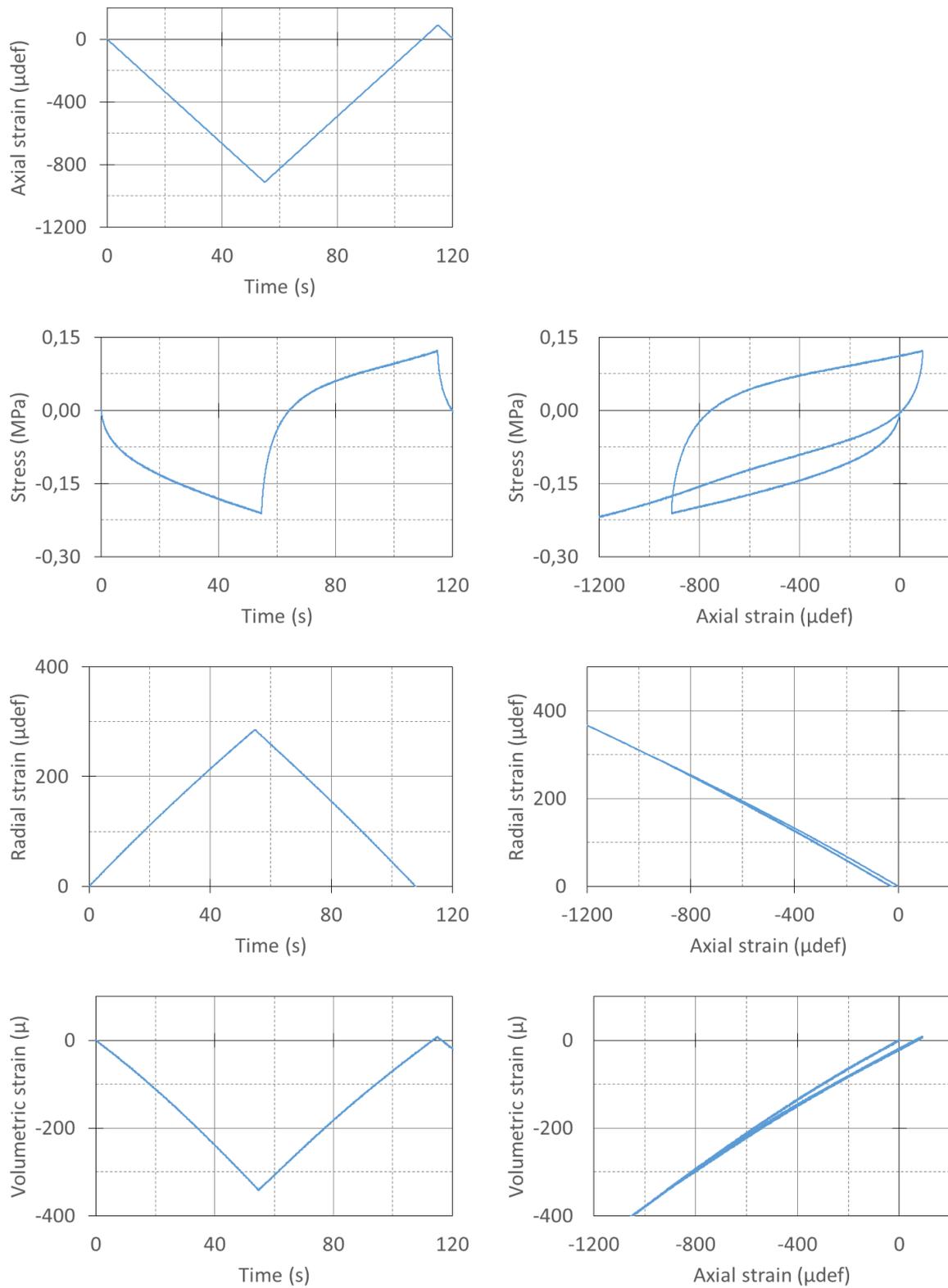


Figure 7-15 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,1%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.

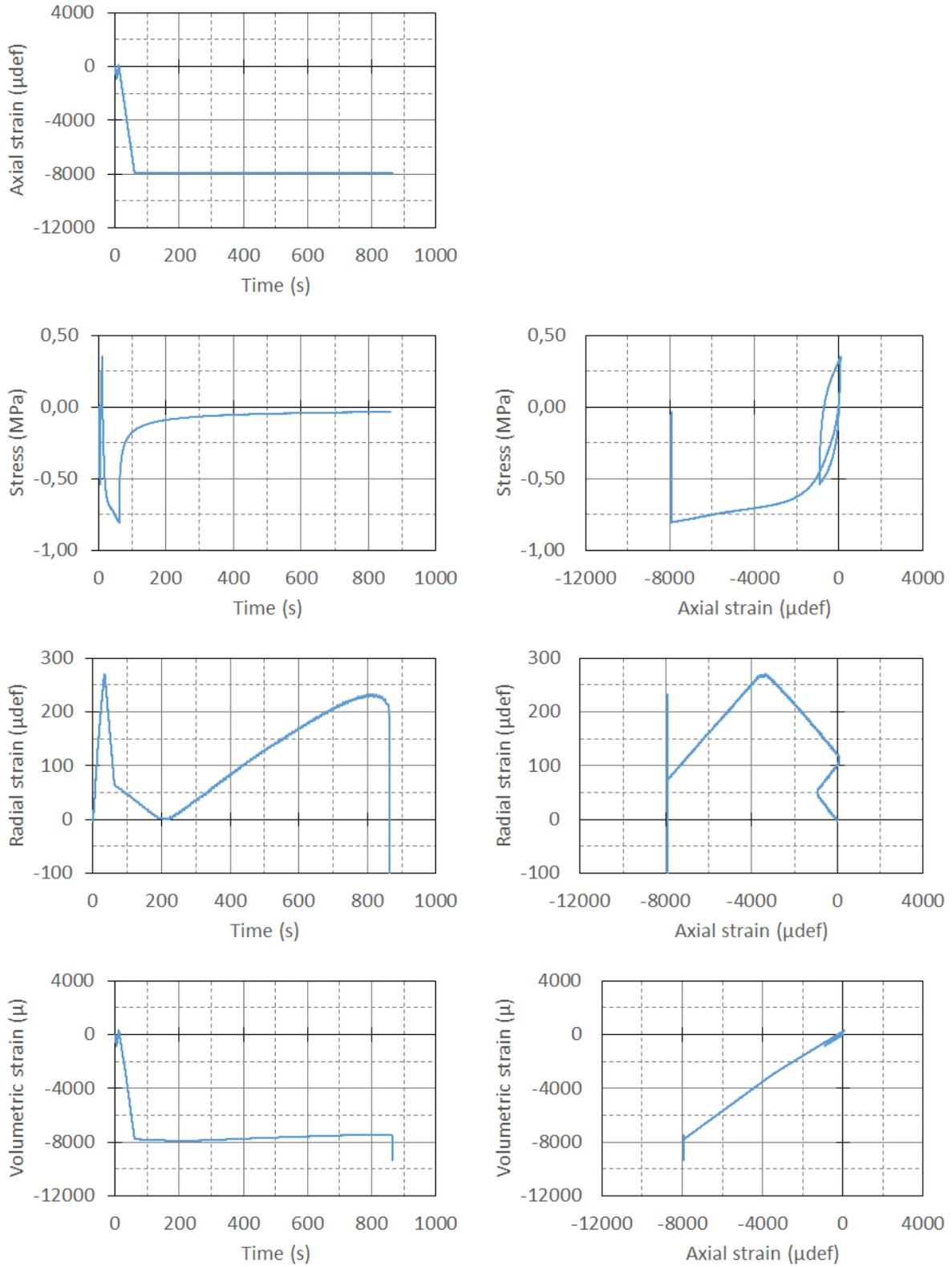


Figure 7-16 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,9735%/min.

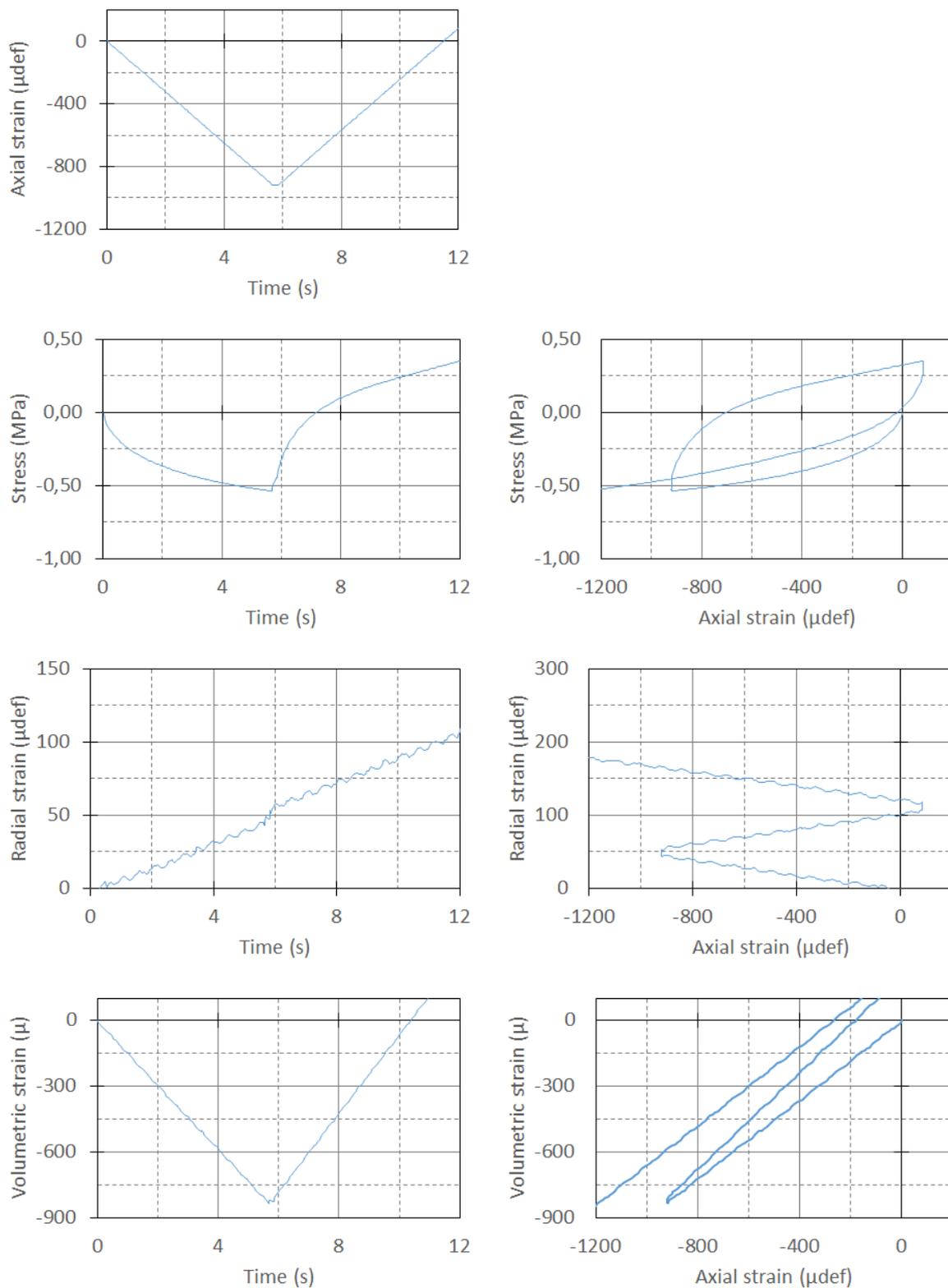


Figure 7-17 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,9735%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.

Table des illustrations

Figure 1-1 : Processus de raffinement du pétrole pour obtenir du bitume. (Eurobitume, Groupement Professionnel des Bitumes, 2005).	6
Figure 1-2 : Schéma de séparation chimique des constituants du bitume.	7
Figure 1-3 : Classes de comportement des bitumes en fonction de la déformation imposée et de la température (Olard 2003; Tran 2004).....	9
Figure 1-4 : Représentation des sollicitations induites par le trafic (Di Benedetto and De La Roche 1998).	13
Figure 1-5 : Représentation des sollicitations induites par le climat (Di Benedetto and De La Roche 1998).	14
Figure 1-6 : Représentation des différentes classes de comportement des enrobés bitumineux en fonction de l'amplitude des déformations ε et du nombre de cycles N, à une température donnée (Di Benedetto 1990).	16
Figure 1-7 : Exemples d'essais, (a) Essai de traction/compression, homogène et (b) Essai de flexion de poutre, non homogène (Nguyen 2009).....	19
Figure 1-8 : Représentation de deux types de comportement élastique (a) Elasticité non linéaire, (b) Elasticité linéaire.	21
Figure 1-9 : Expérience d'effacement (a) Déformation imposée - (b) Contrainte résultante.	24
Figure 1-10 : Expérience de fluage pour un matériau viscoélastique (a) Contrainte imposée – (b) Déformation résultante.....	25
Figure 1-11 : Exemple de sollicitation en contrainte.	26

Figure 1-12 : Expérience de relaxation pour un matériau viscoélastique (a) Déformation imposée – (b) Contrainte résultante.	27
Figure 1-13 : Exemple de sollicitation en déformation.	28
Figure 1-14 : Courbe $\sigma - \varepsilon$ pour un matériau élastique linéaire ou viscoélastique linéaire.	30
Figure 1-15 : Facteurs de translation et modélisation par l'équation WLF correspondante pour les essais de module complexe présenté Figure 1-16, obtenu pour l'enrobé bitumineux testé dans l'article (Nguyen et al. 2009).	32
Figure 1-16 : Exemple de courbes maîtresses du module complexe (a, gauche) et de l'angle de phase (b, droite) pour le matériau bitumineux testé dans l'article (Nguyen et al. 2009).	32
Figure 1-17 : Diagramme de Black (a, gauche) et courbe maîtresse du module complexe (b, droite) pour un enrobé bitumineux fabriqué à partir d'un liant modifié aux polymères (Nguyen 2011).	34
Figure 1-18 : Représentation analogique du modèle de Maxwell	35
Figure 1-19 : Représentation analogique du modèle de Kelvin-Voigt.	36
Figure 1-20 : Représentation analogique du modèle de Burgers.	37
Figure 1-21 : Représentation analogique du modèle de maxwell.	38
Figure 1-22 : Représentation analogique du modèle de Kelvin-Voigt généralisé.	39
Figure 1-23 : Représentation analogique d'un élément parabolique.	40
Figure 1-24 : Représentation analogique du modèle de Huet.	41
Figure 1-25 : Représentation analogique du modèle de Huet-Sayegh.	42
Figure 1-26 : Représentation analogique du modèle 2S2P1D.	43
Figure 1-27 : Influence des paramètres du modèle 2S2P1D et leurs éléments associés sur la courbe Cole-Cole d'un matériau bitumineux (Olard 2003).	44
Figure 1-28 : Exemple de courbe $\sigma - \varepsilon$ lors d'un essai de traction simple (charge-décharge) pour un matériau au comportement plastique.	48
Figure 1-29 : Exemple de courbe $\sigma - \varepsilon$ lors d'un essai de traction simple (charge-décharge) pour un matériau au comportement élastique parfaitement plastique.	48
Figure 1-30 : Représentation de l'écoulement isotrope (gauche) et cinématique (b) dans un plan déviatorique.	50
Figure 1-31 : Relation contrainte-déformation et module d'écrouissage H lors d'un chargement plastique (gauche) dans le cas d'un écoulement non nul et (droite) d'un écoulement nul.	53

Figure 1-32 : Surfaces de plasticité normalisées de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Drucker-Prager généralisé et Di Benedetto et Yan dans le plan déviatorique (Zhang et al. 2013; Zhang et al. 2015).....	55
Figure 1-33 : Surface de plasticité de Mohr-Coulomb et surfaces de Drucker-Prager. ...	56
Figure 1-34 : Surfaces de plasticité normalisée du modèle de Drucker-Prager étendu en fonction de la valeur du paramètre de forme Ls (de l'intérieur vers l'extérieur 0,50 à 1 par pas de 0,05).....	57
Figure 1-35 : Contrainte de rupture obtenue lors d'essais triaxiaux de compression et traction à la vitesse de 1%/min et valeurs de relaxation (données expérimentales), et critère de rupture proposé par Di Benedetto et Yan (Di Benedetto and Yan 1994a).	58
Figure 1-36 : Section du cône par un plan $XJ = XK$	59
Figure 1-37 : Représentation de la surface de plasticité (A) Section dans les axes $\sigma_1 - 2\sigma_2 = 2\sigma_3$ (B) Section par le plan normal à la première trissectrice donné par l'équation $I1 + I0 = 3$ dans les axes principaux (plan déviatorique normalisé).....	62
Figure 2-1 : Représentation analogique du modèle DBN.....	66
Figure 2-2 : Représentation schématique d'un corps élémentaire « i ».....	66
Figure 2-3 : Représentation analogique 3D de la version EPPI du modèle DBN dans le cas isotrope.	67
Figure 2-4 : Représentation de la surface de plasticité proposée pour le modèle DBN_{EPPI}	73
Figure 2-5 : Représentation de la surface de plasticité proposée dans le modèle DBN_{EPPI} , dans l'espace des contraintes principales.....	73
Figure 2-6 : Représentation des surfaces de plasticité proposées dans le modèle DBN_{EPP} (cas avec 5 corps élémentaires), dans l'espace des contraintes principales.	74
Figure 2-7 : Représentation de la surface de potentiel plastique g et de ses paramètres (Rg, Ls).	76
Figure 2-8 : Evolution des tenseurs des contraintes « non visqueuses » (σ_f) et « visqueuses » (σ_v) en l'absence de déformations plastiques (domaine visco-élastique linéaire).....	78
Figure 2-9 : Représentation des tenseurs des contraintes lorsque la surface de plasticité est atteinte, dans le cas d'une plasticité parfaite.	80
Figure 2-10 : Représentation générale du modèle DBN et de sa formulation dans le domaine viscoélastique linéaire.....	84
Figure 2-11 : Evolution de la norme du module complexe d'un corps élémentaire i en fonction de la fréquence et évolution en fonction des paramètres Ei et ηi	85

Figure 2-12 : Evolution de l'angle de phase du module complexe d'un corps élémentaire i en fonction de la fréquence et évolution en fonction des paramètres Ei et ηi .	86
Figure 2-13 : Approximation du modèle DBN pour une fréquence $f = f1 = 1/2\pi\tau1 \gg fi$ avec $i \geq 2$.	87
Figure 2-14 : Approximation du modèle DBN pour une fréquence $f = f2 = 1/2\pi\tau2 \gg fi$ avec $i \geq 3$.	88
Figure 3-1 : Définition des symboles utilisés dans les algorigrammes.	109
Figure 3-2 : Algorithme de détermination de l'incrément de déformation résultant d'un incrément de contrainte.	114
Figure 3-3 : Algorithme de détermination de l'incrément de contrainte résultante d'un incrément de deformation.	117
Figure 3-4 : Algorithme de détermination de la réponse à une sollicitation mixte	122
Figure 3-5 : Représentation du processus de vérification de convergence et de sous-incrémentation.	124
Figure 3-6 : Algorithme de détermination de l'incrément de déformation résultant d'un incrément de contrainte avec critère de convergence et sous-incrémentation.	125
Figure 3-7 : Structure générale du programme de calibration et de modélisation utilisant la version EPPI du modèle DBN.	127
Figure 3-8 : Volet de sélection de la calibration de la version EPPI du modèle DBN.	128
Figure 3-9 : Volet de sélection des sollicitations thermomécaniques.	130
Figure 3-10 : Volet d'enregistrement et d'exploitation des résultats.	130
Figure 4-1 : Courbe granulométrique : squelettes visé et recomposé (Pham et al. 2015a).	131
Figure 4-2 : Table de compactage à pneu type LPC.	132
Figure 4-3 : Plan de carottage des éprouvettes de type B et C.	133
Figure 4-4 : Pourcentages de vides moyens des éprouvettes pour chaque plaque de matériaux.	134
Figure 4-5 : A –Extensomètre pour la mesure de la déformation axiale et B - Montage de l'extensomètre sur une éprouvette.	136
Figure 4-6 : Capteur sans contact sur son support avec cible en aluminium collée à la surface de l'éprouvette	136
Figure 4-7 : Système de fixation des capteurs sans contact (Tapsoba 2012).	137
Figure 4-8 : Sonde de température	138
Figure 4-9 : Chronologie de l'essai de module complexe - (a) Chronologie des températures testées et (b) Chronologie des fréquences testées à chaque température.	143

Figure 4-10 : Contrainte axiale, déformations axiale et radiale enregistrées au cours de l'essai de module complexe sur l'éprouvette C3-P3 à $T = 15\text{ °C}$ et $f = 0,01\text{ Hz}$ au cours des cycles 1 et 2.	144
Figure 4-11 : Valeurs expérimentales de la norme du module complexe en fonction de la fréquence (essai C2-P2).....	147
Figure 4-12 : Valeurs expérimentales de l'angle de phase du module complexe en fonction de la fréquence (essai C2-P2).	147
Figure 4-13 : Valeurs expérimentales de la norme du coefficient de Poisson complexe en fonction de la fréquence (essai C2-P2).	148
Figure 4-14 : Valeurs expérimentales de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe en fonction de la fréquence (essai C2-P2).....	148
Figure 4-15 : Représentation du module complexe E^* dans le plan de Cole-Cole (essai C2-P2).	149
Figure 4-16 : Représentation du module complexe E^* dans l'espace de Black (essai C2-P2).....	149
Figure 4-17 : Représentation du coefficient de Poisson ν^* dans le plan de Cole-Cole (essai C2-P2).	150
Figure 4-18 : Représentation du coefficient de Poisson ν^* dans l'espace de Black (essai C2-P2).	150
Figure 4-19 : Courbe des coefficients de translation aT , expérimentaux et obtenus par la loi de WLF (essais C2-P2).....	151
Figure 4-20 : Courbe maîtresse de la norme du module complexe E^* en fonction de la fréquence réduite à la température de référence $T_{ref} = 16,3\text{ °C}$ (essai C2-P2).....	152
Figure 4-21 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du module complexe ϕE en fonction de la fréquence réduite à la température de référence $T_{ref} = 16,3\text{ °C}$ (essai C2-P2).	152
Figure 4-22 : Courbe maîtresse de la norme du coefficient de Poisson complexe ν^* en fonction de la fréquence réduite à la température de référence $T_{ref} = 16,3\text{ °C}$ (essai C2-P2).	152
Figure 4-23 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe $\phi\nu$ en fonction de la fréquence réduite à la température de référence $T_{ref} = 16,3\text{ °C}$ (essai C2-P2).	153
Figure 4-24 : Programme expérimental.....	154
Figure 4-25 : Chronologie de la première étape de l'essai Sollicitations cycliques pour des fréquences de 0,01 Hz à 10 Hz, à température fixée (3 températures possibles : 0 °C ; 15 °C ; 30 °C).	155

Figure 4-26 : Chronologie de la deuxième étape – Traction simple à vitesse de déformation ε constante (3 vitesses : 0,01 %/min ; 0,1 %/min ; 1 %/min), suivie d'un déchargement et d'un chargement à même vitesse, puis par une période de fluage et un chargement jusqu'à rupture de l'éprouvette, à la température choisie pour l'étape 1.	155
Figure 4-27 : Déformation axiale et radiale pendant l'essai de traction simple sur l'éprouvette C2-P1, réalisé à 30 °C et 0,1 %/min - (A) pendant la phase de traction pure (B) pendant les phases de traction pure et de fluage.	156
Figure 4-28 : Contrainte axiale pendant l'essai de traction simple sur l'éprouvette C2-P1, réalisé à 30 °C et 0,1 %/min – (A) pendant la phase de traction pure (B) pendant les phases de traction pure et de fluage.	157
Figure 4-29 : Courbe de contrainte-déformation axiales pendant l'essai de traction simple sur l'éprouvette C2-P1, réalisé à 30 °C et 0,1 %/min - (A) pendant la phase de traction pure (B) pendant les phases de traction pure et de fluage.	157
Figure 5-1 : Plan de la campagne des essais cycliques de traction-compression.	161
Figure 5-2 : Norme du module complexe E^* en fonction de la fréquence et de la température (3 essais par température).	162
Figure 5-3 : Angle de phase du module complexe ϕE en fonction de la fréquence et de la température (3 essais par température).	162
Figure 5-4 : Norme du coefficient de Poisson complexe ν^* en fonction de la fréquence et de la température (3 essais par température).	164
Figure 5-5 : Angle de phase du coefficient de Poisson complexe $\phi \nu$ en fonction de la fréquence et de la température (3 essais par température).	164
Figure 5-6 : Superposition des résultats de mesure du module complexe E^* dans l'espace de Black pour les 9 essais cycliques de T/C et l'essai de module complexe sur l'éprouvette C2-P2.	166
Figure 5-7 : Superposition des résultats de mesure du module complexe E^* dans le plan Cole-Cole pour les 9 essais cycliques de T/C et l'essai de module complexe sur l'éprouvette C2-P2.	166
Figure 5-8 : Superposition des résultats du coefficient de Poisson complexe ν^* dans l'espace de Black pour les 9 essais réalisés et l'essai de module complexe C2-P2.	167
Figure 5-9 : Superposition des résultats du coefficient de Poisson complexe ν^* dans le plan Cole-Cole pour les 9 essais réalisés et l'essai de module complexe C2-P2.	167
Figure 5-10 : Courbe des coefficients de translation aT , expérimentaux et par la loi de WLF, obtenus lors de l'essai C2-P2 et lors des essais cycliques de traction-compression.	168

Figure 5-11 : Courbe maîtresse de la norme du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ °C}$	169
Figure 5-12 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ °C}$	169
Figure 5-13 : Courbe maîtresse de la norme du coefficient de Poisson complexe ν^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ °C}$	170
Figure 5-14 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe ν^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ °C}$	170
Figure 5-15 : Résultats expérimentaux issus de l'essai réalisé à la température de 15 °C pour une vitesse de déformation axiale de $0,1\text{ \%/min}$	173
Figure 5-16 : Résultats expérimentaux issus de l'essai réalisé à la température de 15 °C pour une vitesse de déformation axiale de $0,1\text{ \%/min}$ lors du premier cycle de chargement et déchargement.....	174
Figure 5-17 : Résultats expérimentaux issus des essais réalisés à la température de 15 °C pour des vitesses de déformation axiale de $0,01\text{ \%/min}$; $0,1\text{ \%/min}$; 1 \%/min . A gauche totalité de l'essai et à droite premier cycle de chargement-déchargement.....	176
Figure 5-18 : Résultats expérimentaux issus des essais réalisés à la température de 30 °C pour des vitesses de déformation axiale de $0,01\text{ \%/min}$; $0,1\text{ \%/min}$; $0,97\text{ \%/min}$. A gauche totalité de l'essai et à droite premier cycle de chargement-déchargement.....	177
Figure 5-19 : Contrainte maximale σ_p lors des essais de traction simple en fonction de la vitesse de déformation axiale équivalente ε calculée à la température de 15 °C	180
Figure 5-20 : Résultats des essais de traction simple 15 °C - $0,01\text{ \%/min}$ et 30 °C - $0,97\text{ \%/min}$ en fonction du temps équivalent et de la déformation axiale pendant le cycle de chargement-déchargement.....	182
Figure 5-21 : Résultats des essais de traction simple 15 °C - $0,01\text{ \%/min}$ et 30 °C - $0,97\text{ \%/min}$ en fonction du temps équivalent et de la déformation axiale.....	183
Figure 5-22 : Résultats des essais de traction simple 15 °C - 1 \%/min et 0 °C - $0,00473\text{ \%/min}$ en fonction du temps équivalent et de la déformation axiale.....	184
Figure 6-1 : Courbe maîtresse de la norme du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ °C}$. Résultats expérimentaux et simulations avec le modèle 2S2P1D.....	187
Figure 6-2 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ °C}$. Résultats expérimentaux et simulations avec le modèle 2S2P1D.....	188

Figure 6-3 : Courbe maîtresse de la norme du coefficient de Poisson complexe ν^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ }^\circ\text{C}$. Résultats expérimentaux et simulations avec le modèle 2S2P1D.....	188
Figure 6-4 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe ν^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ }^\circ\text{C}$. Résultats expérimentaux et simulations avec le modèle 2S2P1D.....	188
Figure 6-5 : Courbe maîtresse de la norme du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ }^\circ\text{C}$, pour deux campagnes expérimentales (celle réalisée pendant cette thèse et celle de (Pham et al. 2015b)), résultats expérimentaux et modèles 2S2P1D.....	190
Figure 6-6 : Courbe maîtresse de l'angle de phase du module complexe E^* à la température de référence $T_{ref} = 15\text{ }^\circ\text{C}$, pour deux campagnes expérimentales (celle réalisée pendant cette thèse et celle de (Pham et al. 2015b)), résultats expérimentaux et modèles 2S2P1D.....	190
Figure 6-7 : Résultats du module complexe E^* dans le plan Cole-Cole pour les deux campagnes expérimentales (celle réalisée pendant cette thèse et (Pham et al. 2015b)), résultats expérimentaux et modèles 2S2P1D.	191
Figure 6-8 : Résultats du module complexe E^* dans l'espace de Black pour les deux campagnes expérimentales (celle réalisée pendant cette thèse et (Pham et al. 2015b)), résultats expérimentaux et modèles 2S2P1D.	192
Figure 6-9 : Courbe granulométrique des agrégats de l'enrobé bitumineux (Nguyen et al. 2014).....	193
Figure 6-10 : Norme du module complexe (gauche) et amplitude des déformations axiales (droite) obtenues pendant la campagne expérimentale en fonction du nombre de cycles N appliqués et de la fréquence f	194
Figure 6-11 : Isothermes de module complexe E^* et courbes maîtresses à la température de référence $T = 11,1\text{ }^\circ\text{C}$ - (Gauche) Norme de E^* - (Droite) Angle de phase de E^* et courbes maîtresse des modèles 2S2P1D et DBN (Nguyen et al. 2014).	197
Figure 6-12 : Coefficient de translation aT et approximation avec l'équation de WLF (Nguyen et al. 2014).	197
Figure 6-13 : Représentation schématique de la méthode d'analyse des signaux.	200
Figure 6-14 : Approximation des données expérimentales en déformation et contrainte par une fonction sinusoïdale, durant les 1 ^{er} et 2 ^e cycles de chargement (données expérimentales à la fréquence $f = 0,01\text{ Hz}$ et $T = 11,1\text{ }^\circ\text{C}$).....	200

Figure 6-15 : Approximation des signaux expérimentaux (en déformation et en contrainte) par une fonction sinusoïdale pour les 1^{er} et 2^e cycles (données expérimentales à la fréquence $f = 0,01 \text{ Hz}$ et à la température $T = 11,1 \text{ °C}$). 201

Figure 6-16 : Différence relative entre les normes du module complexe expérimental E_{exp} et du module complexe expérimental final $E_{exp, final}$ (cf. Tableau 6-8) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1 \text{ °C}$) 206

Figure 6-17 : Différence relative entre les normes du module complexe modélisé E_{mod} et du module complexe modélisé final $E_{mod, final}$ (cf. Tableau 6-8) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1 \text{ °C}$).... 206

Figure 6-18 : Différence relative entre les normes du module complexe théorique E_{th} et du module complexe théorique final $E_{th, final}$ (cf. Tableau 6-8) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1 \text{ °C}$)..... 207

Figure 6-19 : Différence relative entre les angles de phase du module complexe expérimental ϕ_{exp} et du module complexe expérimental final $\phi_{exp, final}$ (cf. Tableau 6-9) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1 \text{ °C}$)..... 208

Figure 6-20 : Différence relative entre les angles de phase du module complexe modélisé ϕ_{mod} et du module complexe modélisé final $\phi_{mod, final}$ (cf. Tableau 6-9) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1 \text{ °C}$) 209

Figure 6-21 : Différence relative entre les angles de phase du module complexe théorique ϕ_{th} et du module complexe théorique final $\phi_{th, final}$ (cf. Tableau 6-9) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (fréquences entre 0,01 et 10 Hz, à $T = 11,1 \text{ °C}$)... 209

Figure 6-22 : Différence relative entre les normes du module complexe théorique E_{th} et du module complexe théorique final $E_{th, final}$ (cf. Tableau 6-8) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (à la fréquence $f = 1 \text{ Hz}$, pour des température entre -20 et 50 °C). 211

Figure 6-23 : Différence relative entre les angles de phase du module complexe théorique ϕ_{th} et du module complexe théorique final $\phi_{th, final}$ (cf. Tableau 6-9) en fonction du nombre de cycles N de sollicitations appliqués (à la fréquence $f = 1 \text{ Hz}$, pour des température entre -20 et 50 °C). 211

Figure 6-24 : Simulations VEL des variations des coefficients de Poisson sécants en fonction du temps au cours d'un essai de traction simple à vitesse de déformation constante ($\dot{\epsilon} = 100 \mu\text{def}/\text{min}$), à différentes températures (-5 °C à 40 °C). 214

Figure 6-25 : Simulation VEL des variations de la déformation radiale en fonction de la déformation axiale au cours d'un essai de traction simple à vitesse de déformation constante. Deux essais représentés : 0 °C-1 %/min et 30 °C-0,01 %/min, entre 0 et 1 000 μ def en déformation axiale.	215
Figure 6-26 : Simulation VEL des variations de la déformation radiale en fonction de la déformation axiale au cours d'un essai de traction simple à vitesse de déformation constante. Deux essais représentés : 0 °C-1 %/min et 30 °C-0,01 %/min, entre 0 et 100 000 μ def en déformation axiale.	215
Figure 6-27 : Résultats de la procédure de calibration des paramètres de la version EPPI du modèle DBN.	218
Figure 6-28 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN EPPI de l'essai 15 °C-0,01 %/min.....	220
Figure 6-29 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN _{EPPI} de l'essai 15 °C-0,1 %/min.	221
Figure 6-30 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN _{EPPI} de l'essai 15 °C-1 %/min.	222
Figure 6-31 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN _{EPPI} de l'essai 30 °C-0,01 %/min.	223
Figure 6-32 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN _{EPPI} de l'essai 30 °C-0,1 %/min.	224
Figure 6-33 : Résultats expérimentaux et simulation avec le modèle DBN VEL et le modèle DBN _{EPPI} de l'essai 30 °C-0,97 %/min.	225
Figure 7-1 : Représentation des invariants de contraintes dans le repère orthonormé associé aux contraintes principales (Royis 2005).	233
Figure 7-2 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 0 °C-0.00497%/min.	284
Figure 7-3 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 0 °C-0.00497%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.	285
Figure 7-4 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 0 °C-0.1%/min.....	286
Figure 7-5 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 0 °C-0.1%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.	287
Figure 7-6 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-0,01%/min....	288
Figure 7-7 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-0,01%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.	289
Figure 7-8 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-0,1%/min.....	290

Figure 7-9 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-0,1%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.	291
Figure 7-10 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-1%/min.....	292
Figure 7-11 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 15 °C-1%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.	293
Figure 7-12 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,01%/min..	294
Figure 7-13 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,01%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.	295
Figure 7-14 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,1%/min....	296
Figure 7-15 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,1%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.	297
Figure 7-16 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,9735%/min.	298
Figure 7-17 : Courbes expérimentales de l'essai de traction simple 30 °C-0,9735%/min lors du premier cycle de chargement-déchargement.	299

Références

1. Airey GD, Rahimzadeh B, Collop AC (2002) Linear viscoelastic limits of bituminous binders (with discussion). *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists* 71:89–115.
2. Airey GD, Rahimzadeh B, Collop AC (2003a) Viscoelastic linearity limits for bituminous materials. *Materials and Structures* 36:643–647. doi: 10.1007/BF02479495
3. Airey GD, Rahimzadeh B, Collop AC (2003b) Linear viscoelastic performance of asphaltic materials. *Road materials and pavement design* 4:269–292. doi: 10.1080/14680629.2003.9689949
4. Anderson D, Marasteanu M (1999) Physical hardening of asphalt binders relative to their glass transition temperatures. *Transportation research record: journal of the transportation research board* 1661:27–34. doi: 10.3141/1661-05
5. Argyris JH, Faust G, Szimmat J, et al (1974) Recent developments in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels. *Nuclear Engineering and Design* 28:42–75.
6. Arrhenius S (1889) Über die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Inversion von Rohrzucker durch Säuren [On the reaction velocity of the inversion of cane sugar by acids]. *Zeitschrift für physikalische Chemie* 4:226–248.
7. Baaj H (2002) Comportement à la fatigue des matériaux granulaires traités aux liants hydrocarbonés. PhD thesis, University of Lyon
8. Bahuguna S, Panoskaltsis VP, Papoulia KD (2006) Identification and modeling of permanent deformations of asphalt concrete. *Journal of engineering mechanics* 132:231–239. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2006)132:3(231)
9. Bardet J (1990) Lode dependences for isotropic pressure-sensitive elastoplastic materials. *Journal of applied mechanics* 57:498–506.
10. Birgisson B, Soranakom C, Napier J, Roque R (2003) Simulation of fracture initiation in hot-mix asphalt mixtures. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 1849:183–190. doi: 10.3141/1849-20
11. Boltzmann L (1874) Zur Theorie der Elastischen Nachwirkungen, *Sitzungsber* [On the theory of the elastic aftereffect]. *Kaiserlich Akad Wissen Math Naturwissen* 70:275–306.

12. Bonnot J (1973) La détermination des propriétés des matériaux en vue du dimensionnement des chaussées. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées* 63:73–82.
13. Bonnot J (1984) Essais mécaniques pratiques de formulation et de contrôle des enrobés bitumineux - Rapport général. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées* 132:79–90.
14. Burmister DM, Palmer LA, Barber ES, Middlebrooks TA (1944) The theory of stress and displacements in layered systems and applications to the design of airport runways. In: *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the Highway Research Board Held at Edgewater Beach Hotel, Chicago, Illinois November 27-30, 1943*. pp 126–148
15. Christensen DW, Anderson DA (1992) Interpretation of dynamic mechanical test data for paving grade asphalt cements (with discussion). *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists* 61:67–116.
16. Clec'h P (2010) Comportement des enrobés bitumineux sous sollicitation multidirectionnelle. PhD thesis, Univ. of Lyon-ENTPE
17. Corté J-F, Di Benedetto H (2004) Matériaux routiers bitumineux: Description et propriétés des constituants; 2, Constitution et propriétés thermomécaniques des mélanges. Hermès science publications
18. Coulomb CA (1776) Essai sur une application des règles de maximis & minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. Paris : De l'Imprimerie Royale
19. Darabi MK, Al-Rub RKA, Masad EA, et al (2012) A modified viscoplastic model to predict the permanent deformation of asphaltic materials under cyclic-compression loading at high temperatures. *International Journal of Plasticity* 35:100–134.
20. Desai CS, Zhang D (1987) Viscoplastic model for geologic materials with generalized flow rule. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 11:603–620.
21. Dessouky SH, Masad EA (2006) The development of a microstructural-based continuum model for hot mix asphalt. R. Lytton Symposium on Mechanics of Flexible Pavements, Baton Rouge, Louisiana, United States, pp 44–52
22. Di Benedetto H (1990) Nouvelle approche du comportement des enrobés bitumineux: résultats expérimentaux et formulation rhéologique. RILEM, Mechanical tests for bituminous mixes, Budapest 387–401.
23. Di Benedetto H (1987) Modélisation du comportement des géomatériaux, application aux enrobés bitumineux et aux bitumes. PhD thesis, Université Grenoble 1
24. Di Benedetto H, Corté J-F (2004) Matériaux routiers bitumineux: Constitution et propriétés thermomécaniques des mélanges. Hermès science publications
25. Di Benedetto H, Delaporte B, Sauzéat C (2007a) Three-dimensional linear behavior of bituminous materials: experiments and modeling. *International Journal of Geomechanics* 7:149–157. doi: 10.1061/(ASCE)1532-3641(2007)7:2(149)
26. Di Benedetto H, De La Roche C (1998) State of the art on stiffness modulus and fatigue of bituminous mixtures. Bituminous binders and mixtures: state of the art and interlaboratory tests on mechanical behaviour and mix design", E&FN Spon, Ed L Francken 137–180.

27. Di Benedetto H, de La Roche C, Baaj H, et al (2003) Fatigue of bituminous mixtures: different approaches and RILEM group contribution. In: Sixth International RILEM Symposium on Performance Testing and Evaluation of Bituminous Materials. M. N. Partl, pp 15–38
28. Di Benedetto H, De La Roche C, Baaj H, et al (2004a) Fatigue of bituminous mixtures. *Materials and Structures* 37:202–216.
29. Di Benedetto H, Mondher N, Sauzéat C, Olard F (2007b) Three-dimensional thermo-viscoplastic behaviour of bituminous materials: the DBN model. *Road Materials and Pavement Design* 8:285–315.
30. Di Benedetto H, Nguyen H, Pouget S, Sauzéat C (2008) Time–temperature superposition principle for bituminous mixtures: three dimensional approach and extension in the non-linear domain. In: *Proceedings of International conference on transportation infrastructure (ICTI)*. Beijing, pp 178–188
31. Di Benedetto H, Nguyen QT, Sauzéat C (2011) Nonlinearity, heating, fatigue and thixotropy during cyclic loading of asphalt mixtures. *Road Materials and Pavement Design* 12:129–158.
32. Di Benedetto H, Olard F (2009) Law for the thermo-visco-elasto-plastic behaviour of asphalt concrete. *Modelling of asphalt concrete*. Ed. Kim YR 245–265.
33. Di Benedetto H, Olard F, Sauzéat C, Delaporte B (2004b) Linear viscoelastic behaviour of bituminous materials: from binders to mixes. *Road Materials and Pavement Design* 5:163–202.
34. Di Benedetto H, Sauzeat C, Bilodeau K, Buannic M, Mangiafico S, Nguyen QT, Van Rompu J (2010) General overview of the time–temperature superposition principle validity for materials containing bituminous binder. *International Journal of Roads and Airports* 1:35–52.
35. Di Benedetto H, Sauzeat C, Clec'h P (2016) Anisotropy of bituminous mixture in the linear viscoelastic domain. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. doi: 10.1007/s11043-016-9305-0
36. Di Benedetto H, Yan X (1994a) Comportement mécanique des enrobés bitumineux et modélisation de la contrainte maximale. *Materials and structures* 27:539–547.
37. Dongmo-Engeland B, Di Benedetto H (2005) A contribution to the modeling of permanent deformations of bituminous mixes. In: *Proceedings of the BCRA conference*. Trondheim, Norway,
38. Drucker DC, Prager W (1952) Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Quarterly of Applied Mathematics* 10:157–165.
39. Duvaut G (1974) Problèmes dynamiques en élasto-plasticité et plasticité parfaite avec conditions de frottement à la frontière. *New Variational Techniques in Mathematical Physics*. C.I.M.E. Ed. Cremonese Roma.
40. Duvaut G, Lions JL (1970) Ecoulement d'un fluide rigide viscoplastique incompressible. *Comptes-rendus de l'académie des sciences de Paris* 270:58–61.
41. Ferry JD (1980) *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley & Sons
42. Freire A, Antunes M, de Picado-Santos L (2006) Characterization of bituminous mixtures for numerical modeling of permanent deformations. *Road materials and pavement design* 7:87–102.
43. Fwa T, Tan S, Low B (1997) Relating triaxial test properties of asphalt mixtures to mix parameters determined by marshall stability test. *Journal of testing and evaluation* 25:471–478.
44. Gabet T, Di Benedetto H, Perraton D, et al (2011) French wheel tracking round robin test on a polymer modified bitumen mixture. *Materials and structures* 44:1031–1046.

45. Gauthier G, Bodin D, Chailleux E, Gallet T (2010) Non linearity in bituminous materials during cyclic tests. *Road Materials and Pavement Design* 11:379–410.
46. Gayte P, Di Benedetto H, Sauzéat C (2014) Three dimensional behaviour of bituminous mixtures in the linear viscoelastic and viscoplastic domains: the DBN model. In: Kim YR (ed) *Proceedings of ISAP conference*. Taylor & Francis Group, Raleigh, North Carolina, United States,
47. Gayte P, Di Benedetto H, Sauzeat C (2016) Visco-plastic behavior of bituminous mixtures: experiments and modeling. In: *Proceedings of 8th RILEM International Conference on Mechanisms of Cracking and Debonding in Pavements*. Editors: Chabot, A., Buttlar, W.G., Dave, E.V., Petit, C., Tebaldi, G., Nantes, France,
48. Gayte P, Di Benedetto H, Sauzéat C, Nguyen Q (2015) Influence of transient effects for analysis of complex modulus tests on bituminous mixtures. *Road Materials and Pavement Design*. doi: 10.1080/14680629.2015.1067246
49. Haythornthwaite R (1985) A family of smooth yield surfaces. *Mechanics research communications* 12:87–91.
50. Heeres OM, Suiker AS, de Borst R (2002) A comparison between the Perzyna viscoplastic model and the consistency viscoplastic model. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 21:1–12.
51. Huang C-W, Abu Al-Rub RK, Masad EA, et al (2011) Numerical implementation and validation of a nonlinear viscoelastic and viscoplastic model for asphalt mixes. *International Journal of Pavement Engineering* 12:433–447.
52. Huang S-C, Zeng M (2007) Characterization of aging effect on rheological properties of asphalt-filler systems. *International Journal of Pavement Engineering* 8:213–223. doi: 10.1080/10298430601135477
53. Huet C (1963) Étude par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés [Study of the viscoelastic behavior of bituminous mixes by method of impedance]. PhD thesis, Faculte des Sciences de Paris
54. Huet C (1992) Minimum theorems for viscoelasticity. *European journal of mechanics and Physics of Solids* 11:653–684.
55. Lakes R (2009) *Viscoelastic materials*. Cambridge University Press, New York, NY
56. Maiolino S (2005) Proposition of a general yield function in geomechanics. *Comptes Rendus Mecanique* 333:279–284.
57. Maiolino S, Luong MP (2009) Measuring discrepancies between coulomb and other geotechnical criteria: Drucker–Prager and Matsuoka–Nakai. In: *Proceedings of 7th Euromech solid mechanics conference*. Lisbon, Portugal, pp 09–07
58. Mangiafico S (2014) Linear viscoelastic properties and fatigue of bituminous mixtures produced with Reclaimed Asphalt Pavement and corresponding binder blends. PhD thesis, University of Lyon
59. Mangiafico S, Di Benedetto H, Sauzéat C, et al (2014) New method to obtain viscoelastic properties of bitumen blends from pure and reclaimed asphalt pavement binder constituents. *Road materials and pavement design* 15:312–329.
60. Marasteanu MO (1999) Inter-conversions of the linear viscoelastic functions used for the rheological characterization of asphalt binders. PhD thesis, Pennsylvania State University

61. Matsuoka H, Nakai T (1974) Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. In: Proceedings of JSCE, No 232. pp 59–70
62. Matsuoka H, Nakai T (1985) Relationship among Tresca, Mises, Mohr-Coulomb and Matsuoka-Nakai failure criteria. *Soils and Foundations* 25:123–128.
63. Maxwell JC (1866) On the Dynamical Theory of Gases. *Proceedings of the Royal Society of London* 15:167–171.
64. Maxwell JC (1868) XV. On the dynamical theory of gases. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 35:129–145.
65. Meyer O (1874) Theorie der elastischen Nachwirkung [Theory of the elastic aftereffect]. *Annalen der Physik* 227:108–119.
66. Meyer OE (1878) Ueber die elastische Nachwirkung [Concerning the elastic aftereffect]. *Annalen der Physik* 240:249–267.
67. Mohr O (1882) Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Korperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre. *Der Civilingenieur* 28:113–156.
68. Mohr O (1900) Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* 46:1572–1577.
69. Mortara G (2008) A new yield and failure criterion for geomaterials. *Géotechnique* 58:125–132.
70. Neifar M (1997) Comportement thermomécanique des enrobés bitumineux: expérimentation et modélisation. PhD thesis, INSA de Lyon
71. Neifar M, Di Benedetto H (2001) Thermo-viscoplastic law for bituminous mixes. *Road Materials and Pavement Design* 2:71–95.
72. Nguyen HM (2010) Comportement cyclique et déformations permanentes des enrobés bitumineux. PhD thesis, Univ. of Lyon-ENTPE
73. Nguyen HM, Pouget S, Di Benedetto H, Sauzéat C (2009) Time-temperature superposition principle for bituminous mixtures. *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 13:1095–1107.
74. Nguyen ML (2009) Etude de la fissuration et de la fatigue des enrobés bitumineux. PhD thesis, Univ. of Lyon-ENTPE
75. Nguyen QT (2011) Comportement thermomécanique des enrobés bitumineux sous sollicitations cycliques dans les domaines linéaire et non-linéaire. PhD thesis, Univ. of Lyon-ENTPE
76. Nguyen QT, Di Benedetto H, Sauzéat C (2012a) Determination of thermal properties of asphalt mixtures as another output from cyclic tension-compression test. *Road Materials and Pavement Design* 13:85–103. doi: 10.1080/14680629.2011.644082
77. Nguyen QT, Di Benedetto H, Sauzéat C (2014) Linear and nonlinear viscoelastic behaviour of bituminous mixtures. *Materials and Structures* 48:2339–2351. doi: 10.1617/s11527-014-5
78. Nguyen QT, Di Benedetto H, Sauzéat C (2012b) Fatigue cracking in bituminous mixture using four point bending test. In: *Proceedings of 7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements*. Springer, pp 665–674

79. Nguyen QT, Di Benedetto H, Sauzéat C, Tapsoba N (2012c) Time temperature superposition principle validation for bituminous mixes in the linear and nonlinear domains. *Journal of Materials in Civil Engineering* 25:1181–1188.
80. Olard F (2003) Comportement thermomécanique des enrobés bitumineux à basses températures. Relations entre les propriétés du liant et de l'enrobé. PhD thesis, University of Lyon
81. Olard F, Di Benedetto H (2003) General "2S2P1D" model and relation between the linear viscoelastic behaviours of bituminous binders and mixes. *Road Materials and Pavement Design* 4:185–224. doi: 10.1080/14680629.2003.9689946
82. Olard F, Di Benedetto H, Dony A, Vaniscote J-C (2005) Properties of bituminous mixtures at low temperatures and relations with binder characteristics. *Materials and structures* 38:121–126.
83. Perraton D, Di Benedetto H, Sauzéat C, et al (2011) Rutting of bituminous mixtures: wheel tracking tests campaign analysis. *Materials and structures* 44:969–986.
84. Perzyna P (1966) Fundamental Problems in Viscoplasticity. *Advances in applied mechanics* 9:243.
85. Perzyna P (1971) Thermodynamic theory of viscoplasticity. *Advances in applied mechanics* 11:313–354.
86. Pham NH (2014) Etude thermomécanique avancée de différents types d'enrobés recyclés tièdes avec additifs. PhD thesis, University of Lyon
87. Pham NH, Sauzéat C, Di Benedetto H, et al (2015a) Analysis and modeling of 3D complex modulus tests on hot and warm bituminous mixtures. *Mechanics of Time-Dependent Materials* 19:1–20. doi: 10.1007/s11043-015-9258-8
88. Pham NH, Sauzéat C, Di Benedetto H, et al (2015b) Reclaimed asphalt pavement and additives' influence on 3D linear behaviour of warm mix asphalts. *Road Materials and Pavement Design* 6:569–591.
89. Prager W (1953) On the use of singular yield conditions and associated flow rules. DTIC Document
90. Pronk A (2005) The Huet-Sayegh Model: A Simple and Excellent Rheological Model for Master Curves of Asphaltic Mixes. *Asphalt Concrete* 73–82. doi: 10.1061/40825(185)8
91. Ramirez Cardona D, Pouget S, Di Benedetto H, Olard F (2015) Viscoelastic Behaviour Characterization of a Gap-graded Asphalt Mixture with SBS Polymer Modified Bitumen. *Materials Research* 18:373–381. doi: 10.1590/1516-1439.332214
92. Royis P (2005) Mécanique des milieux continus. Presses Univ. de Lyon
93. Saadeh S, Masad E, Little D (2007) Characterization of asphalt mix response under repeated loading using anisotropic nonlinear viscoelastic-viscoplastic model. *Journal of Materials in Civil Engineering* 19:912–924.
94. Salençon J (2009) Viscoélasticité pour le calcul des structures. Editions Ecole Polytechnique
95. Salençon J, Halphen B (1980) Cours de calcul des structures anélastiques.
96. Salençon J, Halphen B (1987) Elasto-Plasticité.
97. Sauzeat C, Di Benedetto H (2015) Tridimensional linear viscoelastic behavior of bituminous materials. *Advances in Asphalt Materials: Road and Pavement Construction* 59–85. doi: 10.1016/B978-0-08-100269-8.00003-9

98. Sayegh G (1965) Variations des modules de quelques bitumes purs et enrobés bitumineux [Modulus variations of some pure bitumens and bituminous mixtures].
99. Sétra LCPC (1994) Conception et Dimensionnement des Structures de Chaussée : Guide Technique. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées et Service d'Études Techniques des Routes et Autoroutes, Ministère de l'Équipement, des Transports et du Tourisme, Paris
100. Sétra LCPC (1998) Catalogue des Structures Types de Chaussées Neuves. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées et Service d'Études Techniques des Routes et Autoroutes, Ministère de l'Équipement, des Transports et du Tourisme, Paris
101. Simo JC (1989) Strain softening and dissipation: a unification of approaches. In: *Cracking and damage: strain localization and size effect*. Editors Mazars J. and Bazant Z.P. London, pp 440–461
102. Sluys LJ (1992) Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids. PhD thesis, TU Delft, Delft University of Technology
103. Suo Z, Wong WG (2009) Nonlinear properties analysis on rutting behaviour of bituminous materials with different air void contents. *Construction and Building materials* 23:3492–3498.
104. Tapsoba N (2012) Comportement des enrobés bitumineux à base de matériaux recyclés et-ou fabriqués à température réduite. PhD thesis, Univ. of Lyon-ENTPE
105. Tapsoba N, Sauzéat C, Di Benedetto H, et al (2012) Low-temperature cracking of recycled asphalt mixtures. In: *Proceedings of 7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements*. Springer, pp 1261–1270
106. Tapsoba N, Sauzéat C, Di Benedetto H, et al (2016) 3D analysis and modelling of Thermal Stress Restrained Specimen Tests (TSRST) on Asphalt Mixes with RAP and Shingles. *Journal of Transportation Engineering* 120:393–402. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2016.05.092
107. Thomson W (1865) On the elasticity and viscosity of metals. *Proceedings of the Royal Society of London* 14:289–297.
108. Thomson W (1856) Elements of a mathematical theory of elasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 146:481–498.
109. Tran QD (2004) Modèle simplifié pour les chaussées fissurées multicouches. PhD thesis, ENPC
110. Van Rompu J, Di Benedetto H, Buannic M, et al (2012) New fatigue test on bituminous binders: Experimental results and modeling. *Construction and Building Materials* 37:197–208.
111. Voigt W (1892) Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle. *Annalen der Physik* 283:671–693.
112. Wang WM, Sluys LJ, De Borst R (1997) Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40:3839–3864.
113. Williams ML, Landel RF, Ferry JD (1955) The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical society* 77:3701–3707.
114. Yan X (1992) Comportement mécanique des enrobés au bitume et au bitume-polymère(styrelf 13). Utilisation de l'essai triaxial de révolution. PhD thesis, INSA de Lyon

115. Zhang Y, Bernhardt M, Biscontin G, et al (2015) A generalized Drucker–Prager viscoplastic yield surface model for asphalt concrete. *Materials and Structures* 48:3585–3602. doi: 10.1617/s11527-014-0425-1
116. Zhang Y, Luo R, Lytton RL (2011a) Anisotropic viscoelastic properties of undamaged asphalt mixtures. *Journal of Transportation Engineering* 138:75–89. doi: 10.1061/(ASCE)TE.1943-5436.0000302
117. Zhang Y, Luo R, Lytton RL (2013) Characterization of viscoplastic yielding of asphalt concrete. *Construction and Building Materials* 47:671–679.
118. Zhang Y, Luo R, Lytton RL (2011b) Anisotropic viscoelastic properties of undamaged asphalt mixtures. *Journal of Transportation Engineering* 138:75–89.
119. Zhang Y, Luo R, Lytton RL (2011c) Characterizing permanent deformation and fracture of asphalt mixtures by using compressive dynamic modulus tests. *Journal of Materials in Civil Engineering* 24:898–906.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'ECOLE NATIONALE DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ETAT

NOM : GAYTE

DATE de SOUTENANCE : 10/10/16

Prénoms : Pierre Jean Florent

TITRE : Modélisation du comportement thermo-viscoplastique des enrobés bitumineux

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2016LYSET008

Ecole doctorale : ED MEGA

Spécialité : Génie Civil

Cote B.I.U. - /

et bis

CLASSE :

RESUME :

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention entre le Cerema (Centre d'Etude et d'Expertise sur les Risques, l'Environnement, la Mobilité et l'Aménagement) et l'ENTPE (Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat). Ce travail concerne l'étude et la modélisation du comportement des enrobés bitumineux, dans les domaines des petites et grandes déformations, soit respectivement les comportements viscoélastique et viscoplastique.

Après une étude bibliographique portant sur les propriétés mécaniques des enrobés bitumineux en petites et grandes déformations et la présentation des modèles de comportement viscoélastique linéaire et viscoplastique, ce mémoire s'organise en cinq chapitres. Les deux premières parties concernent le développement du modèle DBN, et la description de la version introduite dans cette thèse : la version EPPI (Elastique Parfaitement Plastique Isotrope). Cette formulation tridimensionnelle vise à décrire les comportements viscoélastique et viscoplastique des enrobés bitumineux avec un formalisme unique, suffisamment simple pour être implémenter dans un code de calcul aux éléments finis. Le modèle est ensuite développé et implémenté dans un code de calcul homogène, permettant ainsi de réaliser des simulations d'essais expérimentaux classiques.

Les deux chapitres suivants traitent de la campagne expérimentale réalisée dans cette thèse. Il s'agit d'abord de décrire l'ensemble des procédures et conditions d'essais. Deux types d'essais sont réalisés : module complexe pour la caractérisation du comportement viscoélastique et traction simple pour la caractérisation du comportement viscoplastique. Ensuite, l'ensemble des résultats expérimentaux et observations issus de cette campagne sont présentés et permettent de dessiner quelques conclusions.

Enfin, le dernier chapitre traite des simulations réalisées à partir du modèle DBNEPPI. Ces résultats permettent dans un premier temps de tester la validité du modèle (essais de module complexe, essais cycliques de traction-compression). Enfin une étude des effets transitoires lors des essais de module complexe est présentée.

MOTS-CLES : comportement des enrobés bitumineux, modèle DBN (Di Benedetto-Neifar), viscoélasticité, viscoplasticité, modélisation

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes, Laboratoire Génie Civil Bâtiment de l'Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat

Directeur de thèse: Hervé DI BENEDETTO et Cédric SAUZEAT

Président de jury :

Composition du jury :

Christophe PETIT

Manuel PASTOR

Jean-François BARTHELEMY

Hervé DI BENEDETTO

Cédric SAUZEAT

Hervé GUIRAUD