



HAL
open science

Évitement de conflits aériens par une régulation subliminale en vitesse : modélisation & résolution via le contrôle optimal

Loïc Cellier

► To cite this version:

Loïc Cellier. Évitement de conflits aériens par une régulation subliminale en vitesse : modélisation & résolution via le contrôle optimal. Optimisation et contrôle [math.OC]. UPS Toulouse - Université Toulouse 3 Paul Sabatier, 2015. Français. NNT : . tel-02139581

HAL Id: tel-02139581

<https://theses.hal.science/tel-02139581v1>

Submitted on 24 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité : Mathématiques appliquées

Présentée et soutenue publiquement le 29 septembre 2015 par

Loïc CELLIER

**Évitement de conflits aériens par une régulation subliminale en vitesse :
modélisation & résolution via le contrôle optimal**

Composition de la commission d'examen

Sonia CAFIERI	Université de Toulouse & École Nationale de l'Aviation Civile	Codirectrice
Jean-Baptiste CAILLAU	Université Bourgogne Franche-Comté UBFC & CNRS / INRIA	Rapporteur
Émilio CARRIZOSA	Universidad de Sevilla - Instituto de Matemáticas (Espagne)	Rapporteur
Pierre MARÉCHAL	Université de Toulouse & UT3 Paul Sabatier	Président
Daniel MASSART	Université de Montpellier UM2 Faculté des sciences	Examineur
Frédéric MESSINE	Université de Toulouse & ÉNSÉEIHT - CNRS / INPT	Codirecteur
Marcel MONGEAU	Université de Toulouse & École Nationale de l'Aviation Civile	Invité

École doctorale et spécialité

MITT - Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées

Unité de recherche

MAIAA : Mathématiques Appliquées, Informatique et Automatique pour l'Aérien
École Nationale de l'Aviation Civile

Directeurs de thèse

Sonia CAFIERI et Frédéric MESSINE

Rapporteurs

Jean-Baptiste CAILLAU et Émilio CARRIZOSA

Numéro d'ordre : -

École Nationale de l'Aviation Civile
7 avenue Édouard Belin
31055 TOULOUSE Cedex 04
Bâtiment Ziegler
Laboratoire MAIAA
Mathématiques Appliquées, Informatique
et Automatique pour l'Aérien

Institut de Mathématiques de Toulouse
Unité Mixte de Recherche 5219
118 route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex 09
Bâtiments 1R1, 1R2 et 1R3

Université Toulouse 3 Paul Sabatier
École Doctorale 475
Mathématiques, Informatique et
Télécommunications de Toulouse
118 route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex 09
Bâtiment 1R1 - RDC



Photographie prise par l'auteur se promenant place du capitole.

À ma mère,

Remerciements

Après ces années passées, proche du canal du Midi, focalisé sur des questions entrelacées de mathématique, d'optimisation et de problèmes liés à la gestion du trafic aérien, je suis heureux de montrer ce cheminement et ces premiers pas en recherche grâce à vous.

Je souhaite remercier mes directeurs, [Sonia Cafieri](#) et [Frédéric Messine](#), lesquels ont su guider ce travail avec exigence et générosité, être à mon écoute et me faire partager leur enthousiasme pour leurs travaux de recherche. À [Sonia Cafieri](#), dont j'ai eu l'opportunité d'être le premier doctorant, et à [Frédéric Messine](#), dont le goût pour la musique est communicatif, qu'ils sachent que je leur suis reconnaissant de toute l'attention qu'ils m'ont consacrée.

Ma gratitude s'adresse tout particulièrement à mes rapporteurs, [Jean-Baptiste Caillaud](#) et [Emilio Carrizosa](#), pour le soin bienveillant qu'ils ont porté à ce travail, et pour le temps qu'ils ont concédé à l'élaboration de leur rapport. Je remercie également les autres membres de la commission d'examen qui me font l'honneur de leur présence et de leur écoute ; merci ainsi à [Pierre Maréchal](#), [Daniel Massart](#) et [Marcel Mongeau](#).

Mon regard redevable se porte sur mes différents établissements d'accueil, aux laboratoires associés, ainsi qu'aux équipes bienveillantes.

À l'École Nationale de l'Aviation Civile (ÉNAC), merci à son directeur [Marc Houalla](#). Au laboratoire Mathématiques Appliquées, Informatique et Automatique pour l'Aérien (MAIAA) merci à son directeur [Stéphane Puechmorel](#) et à son responsable d'équipe optimisation [Daniel Delahaye](#). Leur hospitalité m'a permis de bénéficier de matériel, d'un bureau et de l'aide dévouée de l'équipe support informatique ; merci notamment à [Nicolas Courtelle](#), [Gabriel Guillory](#), [Bruno Kriner](#), [Jean-Paul Imbert](#), [Luc Novales](#), [David Paquet](#), [Marc Quinton](#) et [Serge Roux](#). Merci à tous mes collègues du MAIAA, et plus particulièrement à ses doctorants et ses post-doctorants (passés et présents) ; merci à [Richard Alligier](#), [Nguyen Bang Giang](#), [Clément Bouttier](#), [Romaric Breil](#), [Supatcha Chaimatanan](#), [Nour El-houda Dougui](#), [Mohammad Ghasemi Hamed](#), [Brunilde Girardet](#), [Oscar Gonzalez Gallego](#), [Laureline Guys](#), [Cécile Ichard](#), [Clément Peyronne](#), [Olga Rodionova](#), [Marina Sergeeva](#), [Tambet Treimuth](#), [Charlie Vanaret](#), [Andrija Vidosavljevic](#), [Ning Wang](#), [Jun Zhou](#) et [Catya Zuniga](#). Merci au chef de département sciences et ingénierie de la navigation aérienne [Mathy Gonon](#), ainsi qu'à [Bruno Lamiscarre](#), [Estelle Malavolti](#), [Georges Mykoniatis](#), [Gilles Perbost](#) et [Patrick Senac](#). Merci également à [Sebastien Barjou](#), [Stéphane Catteau](#) et [Yann Leroy](#) pour m'avoir présenté le simulateur et la formation en contrôle aérien.

À l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UPS), merci à son président [Bertrand Monthubert](#), à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), merci à son directeur [Serge Cohen](#). À l'École Doctorale Mathématiques, Informatique et Télécommunications de Toulouse (EDMITT), merci notamment à [Martine Labruyère](#) et [Agnès Requis](#), et au directeur [Jean-Michel Roquejoffre](#), pour les encouragements et les conseils.

Aux membres du projet ANR Jeunes chercheurs Air Traffic Optimization via Mixed-Integer Computation (ATOMIC), - qui n'ont pas encore été cités, - merci ainsi à [Claudia D'Ambrosio](#), [Alexandre Gondran](#), [Riadh Omhenni](#) et [Ahmed Touhami](#), qui m'ont permis d'approfondir le déroulement d'un projet de recherche. À [David Rey](#), merci pour m'avoir fait bénéficier de son expérience et m'avoir invité au sein de l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR). À [Jérémy Omer](#), merci pour m'avoir dispensé ses conseils et m'avoir convié à l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA).

Au sein de l'UPS, à l'Institut Universitaire de Technologie (IUT) département Informatique et à son directeur [Max Chevalier](#), merci à l'équipe, notamment à [Jérôme Fahrenbach](#) et à [Emmanuel Paul](#) qui m'ont fait particulièrement confiance, et m'ont donné une expérience d'enseignement supplémentaire en m'attribuant des responsabilités de moniteur. Je remercie également pour les vacances à l'ÉNAC, [Catherine Mancel](#), en recherche opérationnelle, [Jean-Marc Vengut](#) et [Frédéric Planchon](#), en algorithmique et langage C.

À l'Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (IRIT), merci à son directeur [Michel Daydé](#), au Laboratoire Plasma et Conversion d'Énergie (LAPLACE) merci à son directeur [Christian Laurent](#), à l'École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique, d'Hydraulique et des Télécommunications (ÉNSÉÉIHT) merci à son directeur [Jean-François Rouchon](#), pour l'accueil (et les vacances en programmation MATLAB).

À l'Université de Perpignan Via Domitia (UPVD), qui m'a attribué un poste d'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (ATER), merci à son président [Fabrice Lorente](#), au Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier (LIRMM) merci à son directeur [Philippe Poignet](#), à l'équipe-projet Digits, Architecture et Logiciels Informatiques (DALI) merci à son directeur [Philippe Langlois](#), ainsi qu'à [Matthieu Martel](#) et [Sylvia Muñoz](#) pour mon installation, à l'IUT département Gestion, Logistique et Transport (GLT) merci à sa directrice [Sophie Masson](#), pour les conditions accordées et l'expérience supplémentaire acquise.

Aux nombreux professeurs que j'ai eu la chance de rencontrer à Montpellier, à Paris et notamment à l'Institut Henri Poincaré (IHP), à Toulouse, à Perpignan et ailleurs, pour leur investissement, leur caractère passionné et passionnant... Je vous remercie tellement, de m'avoir proposé les outils et les perspectives du domaine, et bien plus encore. Merci en particulier à [Hugo Akrouit](#), [Christian Artigues](#), [Pascal Azerad](#), [Éric Balandraud](#), [Christian Bès](#), [Jérôme Bolte](#), [J. Frédéric Bonnans](#), [Hassan Boualem](#), [Kathie Cameron](#), [Pierre Cardaliaguet](#), [Patrick L. Combettes](#), [Jean Michel Coron](#), [Jean-François Crouzet](#), [Michel Cuer](#), [Hervé Dicky](#), [Gilles Ducharme](#), [Sylvain Duquesne](#), [Jack Edmonds](#), [Jean Fonlupt](#), [Hélène Frankowska](#), [Stéphane Gaubert](#), [Xavier Goudou](#), [Nicolas Houy](#), [Jean-Baptiste Hiriart-Urruty](#), [Philippe Janssen](#), [Vincent Jost](#), [Guy Lafaille](#), [Jean-Bernard Lasserre](#), [Daniel Massart](#), [Laurent Mazliak](#), [Alberto Medina](#), [Ludovic Menneteau](#), [Philippe Michel](#), [Louise Nyssen](#), [Marco Panza](#), [Paul-Emile Paradan](#), [Alain Plagne](#), [Michel Pocchiola](#), [Pierre Pompidor](#), [Jean-Pierre Ponsard](#), [Jérôme Renault](#), [Aude Rondepierre](#), [Nicolas Saby](#), [Jean Saint-Pierre](#), [András Sebő](#), [Didier Smets](#), [Sylvain Sorin](#), [David Théret](#), [Lionel Thibault](#) et [Vladimir Verchinine](#). À ceux qui ont aussi attisé ma curiosité par leurs expériences, leurs styles, leurs exposés et parfois même par leurs conseils, par leurs énigmes et par leurs jeux... Merci en particulier à [Andrei A. Agrachev](#), [Luigi Ambrosio](#), [Claude Aslangul](#), [Hedy Attouch](#), [Alexandre d'Aspremont](#), [Dominique Bakry](#), [Michel Balinski](#), [Adrian Bondy](#), [Jean-Pierre Bourguignon](#), [Yann Brenier](#), [Xavier Bressaud](#), [Xavier Buff](#), [Pierre Cartier](#), [François Charles](#), [Jean-Yves Chemin](#), [Pierre Colmez](#), [Andrew R. Conn](#), [Alain Connes](#), [John H. Conway](#), [Jean-François Culus](#), [Jean-Paul Delahaye](#), [Persi Diaconis](#), [Ahmed Djebbar](#), [Gilles Dowek](#), [Stéphane Dugowson](#), [Nicole El Karoui](#), [Sylvain Ervedoza](#), [Maria J. Esteban](#), [Laureano F. Escudero](#), [Éric M. Feron](#), [Damien Gayet](#), [Étienne Ghys](#), [Philippe Guillaume](#), [Michel Habib](#), [Didier Henrion](#), [Douglas Hofstadter](#), [Laurence Honnorat](#), [Olivier Hudry](#), [Hiroshi Ishiguro](#), [Étienne Klein](#), [Stéphane Lamy](#), [Rida Laraki](#), [Nicolas Lerner](#), [Stéphane Le Viet](#), [Léo Liberti](#), [Giuseppe Longo](#), [Frédéric Meunier](#), [Laurent Miclo](#), [Hélène Milhem](#), [Yurii Nesterov](#), [Joseph Oesterlé](#), [Yann Ollivier](#), [Roger Penrose](#), [Sebastian Sager](#), [Jean Saint-Raymond](#), [Laure Saint-Raymond](#), [Francisco Santos](#), [Leila Schneps](#), [Jean-Pierre Serres](#), [Terence Tao](#), [Stéphane Thomassé](#), [Tadashi Tokieda](#), [Emmanuel Trélat](#), [Gilles Trombettoni](#), [Nicolas Trotignon](#), [Emmanuel Viennet](#), [Cédric Villani](#), [Luís N. Vicente](#), [Wendelin Werner](#), [Laurence Wolsey](#), [David Zmiaikou](#) et [Enrique Zuazua](#). Je ne peux malheureusement pas prétendre à l'exhaustivité ; je ne m'aventure (même) pas à mentionner les auteurs si nombreux dont les lectures m'ont marqué et enrichi, désolé.

Sensible à l'enseignement et aux activités de vulgarisation et médiation scientifique, j'espère à mon tour réussir à partager cette culture mathématique qui m'a été offerte. Merci encore aux membres du Comité International des Jeux Mathématiques (CIJM), en particulier à [Marie-José Pestel](#) et à [Mickaël Launay](#), de m'avoir si chaleureusement accueilli parmi eux ; merci également aux partenaires, merci notamment aux Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) et aux associations comme Animath et Math.en.Jean.

J'ai eu plaisir à suivre de nombreuses conférences, dont certaines en compagnie de doctorants et postdoctorants : [Zacharie Alès](#), [Yohann Benchetrit](#), [Nicolas Dupin](#), [Xavier Dupuis](#), [Philip Jameson Graber](#), [Francesco Ludovici](#), [Gaétan Marceau Caron](#), [Athena Picarelli](#), [Luigia Ripani](#), [Clément W. Royer](#), [Pauline Sarrabezolles](#) et [Romain Serra](#), merci pour leur enthousiasme.

À mes camarades de classe, poursuivant aussi dans la recherche - la plupart d'entre eux provenant du master de l'Université Paris 6 Pierre et Marie Curie (UPMC), - merci en particulier à [Pierre Aboulker](#), [Jean-Christophe Alais](#), [Romain Azais](#), [Olivier Beaude](#), [Benjamin Blum](#), [Benjamin Chen](#), [Jean-Baptiste Dumont](#), [Olivier Durand de Gevigney](#), [Alexandre Génadot](#), [Daniel Hoehener](#), [Vincent Leclère](#), [Miquel Oliu Barton](#), [Nikos Pnevmatikos](#), [Laurent Pfeiffer](#), [Zheng Qu](#) et [Cheng Wan](#).

Merci infiniment à [mes amis et proches](#), qui m'ont rendu un quotidien ensoleillé, qui m'ont fait sourire et grandir à leurs côtés, qui n'ont cessé de m'encourager ; je voudrais leur rappeler le plaisir que j'éprouve chaque fois que je les retrouve. Enfin, une pensée particulière à ma chérie [Esther Muriithi](#).

Résumé

À travers une approche de contrôle optimal, cette thèse de doctorat propose une étude des modèles et des techniques de résolution dans un domaine d'application propre à la gestion du trafic aérien. Motivés par la croissance des flux aériens d'une part, et les développements en théorie du contrôle optimal d'autre part, ces travaux portent sur l'analyse du problème d'évitement de conflits aériens. Cette étude permet le développement de nouvelles approches et algorithmes en vue d'aider les contrôleurs aériens dans leur tâche. Ainsi, dans le cadre du trafic aérien, afin de préserver des distances minimales de sécurité entre avions, lors de phases tactiques et de configurations des vols en-route, notre recherche se focalise sur une stratégie de régulation subliminale en vitesse (variations très réduites), pour assurer la séparation entre avions, tout en conservant leur trajectoire prédéfinie. D'une part, une méthode de résolution numérique en contrôle optimal telle que la méthode directe de tir, impliquant une discrétisation totale ou partielle du problème, transforme le problème initial en un problème en programmation non linéaire de grande taille. Ce type de méthodes peut générer des problèmes d'optimisation de grande taille numériquement difficiles à résoudre. Suivant le nombre de variables du problème, elles peuvent s'avérer trop coûteuse en termes de temps de calculs. D'autre part, les contraintes sur les variables d'états du problème posent des difficultés de résolution, par exemple, pour l'usage d'une méthode numérique indirecte de tir. Développant les informations caractéristiques des conflits aériens, une détection et une détermination a priori des zones de conflits permettent alors la décomposition du problème présenté de contrôle optimal en sous-problèmes plus aisés à résoudre. La résolution des sous-problèmes hors-zone peut être abordée en utilisant les conditions du principe du maximum de Pontryagin, ce qui en permet une résolution efficace. Une combinaison de méthodes numériques directes de tir et d'application des conditions du principe du maximum de Pontryagin est proposée, et des implémentations numériques valident ce type d'approche.



Mots-clefs

contrôle optimal,
principe du maximum de Pontryagin,
méthodes numériques de tir,
optimisation non linéaire,
recherche opérationnelle,
aide à la décision,
gestion du trafic aérien,
problème d'évitement de conflits aériens,
régulation en vitesse,
modélisation mathématique,
systèmes dynamiques.

English title**VELOCITY-BASED AIRCRAFT CONFLICT AVOIDANCE
THROUGH OPTIMAL CONTROL
MODEL AND SOLUTION APPROACHES****Abstract**

The purpose of this doctoral thesis is to study models and solution techniques based on optimal control approaches to address air traffic management problems. Motivated by the growth of air traffic volume, and by the advances in optimal control theory, this research works focus on analysing aircraft conflict avoidance problem. This study allows development of new approaches and algorithms to help air traffic controllers. In the framework of air traffic management, to ensure the minimum safety distances between aircraft, in tactical phases and en-route flight configurations, this thesis focusses on a subliminal velocity regulation strategy to perform the separation, while preserving the aircraft predefined trajectories. A numerical optimal control solution approach as the direct shooting method, wherein involves a total or partial discretization of the problem, transforms the initial problem into a large scale nonlinear programming problem. This kind of methods could generate large-size optimization problems which are numerically difficult to solve. Depending on the number of variables which involved, this approaches could be too expensive in terms of computation time. Moreover, the state-variables constraints of the problem lead to numerical difficulties, e.g., considering the indirect numerical shooting method. Tailored on aircraft conflict avoidance problems, a detection and a determination of a priori conflict zones allow the decomposition of the optimal control problem into sub-problems, easier to solve than the original one. Solving the off-zone sub-problems can be addressed using the Pontryagin maximum principle, which allows in this case directly the solution. A combination of direct numerical shooting method and application of conditions of Pontryagin's maximum principle is proposed, and numerical experiments validate this approach.

**Keywords**

optimal control,
Pontryagin maximum principle,
numerical shooting methods,
nonlinear optimization,
operations/operational research,
decision-support,
air traffic management,
aircraft conflict avoidance problem,
velocity regulation,
mathematical modelling,
dynamical systems.

Table des matières

	Page
Remerciements	3
Résumé (abstract)	7
Introduction	11
Liste des publications et présentations	15
1 Conflits aériens, optimisation et contrôle optimal	17
1.1 Gestion du trafic et évitement de conflits aériens	18
1.1.1 Filtres successifs de régulation du trafic aérien	19
1.1.2 Problème de conflits aériens et manœuvres d'évitement	20
1.1.3 Stratégie de régulation subliminale en vitesse	23
1.2 Du problème d'évitement au problème d'optimisation	27
1.2.1 Choix de modélisation	28
1.2.2 Modèles et méthodes de résolution	33
1.3 Contrôle optimal	37
1.3.1 Formalisation en termes de contrôle optimal	38
1.3.2 Principe du maximum de Pontryagin	41
1.3.3 Méthodes numériques de résolution en contrôle optimal	44
1.4 Conclusions	50
2 Formalisation du problème via le contrôle optimal	53
2.1 Modélisation du problème par le contrôle optimal	54
2.2 Détection et décomposition du problème en zones	57
2.2.1 Régulation subliminale et détection au pire cas	58
2.2.2 Décomposition : une interprétation spatiale	59
2.2.3 Décomposition : une interprétation temporelle	60
2.3 Combinaison de méthodes de résolution	62
2.3.1 Méthode du PMP en postzone	62
2.3.2 Méthode du PMP en prézone	67
2.3.3 Résolution du problème en « zone »	72
2.3.4 Combinaison des méthodes utilisant le PMP en postzone	75
2.3.5 Combinaison des méthodes utilisant le PMP en prézone	76
2.3.6 Complexité des formulations	78
2.4 Conclusions	80

3 Tests numériques	81
3.1 Exemples introductifs	82
3.1.1 Contraintes sur les vitesses	83
3.1.2 Conditions terminales en position	84
3.1.3 Étude numérique de discrétisations différentes en temps	86
3.1.4 Conflits potentiels en croisement	89
3.1.5 Phase tactique et temps d'anticipation limité	90
3.2 Génération d'instances et cadre expérimental	92
3.2.1 Indicateurs de complexité	92
3.2.2 Caractéristiques des configurations aériennes et instances	93
3.3 Résultats numériques pour les instances générées	95
3.3.1 Méthode du PMP en postzone	95
3.3.2 Méthode du PMP en postzone et partitionnement	102
3.3.3 Méthode du PMP en prézone	105
3.4 Conclusions	107
Conclusions	109
Bibliographie	113
Sigles et acronymes	120
Liste des figures	125
Liste des tableaux	127
Liste des algorithmes	129
Annexe A Motivations en gestion de trafic aérien	131
Annexe B Codes AMPL (fichiers .run, .dat et .mod)	135
Annexe C Instances pour le problème d'évitement de conflits aériens	147
Index	159

Introduction



« L'homme se découvre quand il se mesure avec l'objet. »
A. de Saint-Exupéry



Dans cette thèse, nous présentons des modèles et des combinaisons de méthodes numériques de résolution en contrôle optimal appliqués au problème d'évitement de conflits aériens par une régulation subliminale en vitesse.

L'importante croissance du trafic aérien interpelle, au niveau occidental, illustré en Figure 1, et au niveau mondial, illustré en Figure 2. Les récents rapports (par exemple, ACARE [1], EEC [82], CORDIS [64]) soulignent les besoins dus au nombre de vols toujours plus élevé. Il s'agit notamment du besoin de satisfaire la demande de circulation tout en maintenant et en garantissant les exigences de sécurité. Les motivations dans le cadre du contrôle du trafic aérien sont détaillées en Annexe A et Chapitre 1. En particulier, en gestion du trafic aérien (Air Traffic Management, ATM), deux projets internationaux, SESAR [81] et NEXTGEN (par exemple, Prévot et al. [138] et Hansman [97]), ont été mis en œuvre en faveur de nouveaux moyens notamment à travers le développement d'outils d'automatisation et d'aide à la décision.

Dans ce contexte de régulation du trafic, et de décongestion de ce dernier, un des enjeux majeurs est le problème d'évitement de conflits aériens, autrement dit le maintien de distances minimales de sécurité entre les avions. Afin de résoudre des conflits aériens potentiels, différentes manœuvres d'évitement existent, par changements en cap, en altitude, ou en vitesse. Sous l'impulsion des travaux de Villiers [166] en 2004 et l'influence du projet européen En-Route Air traffic Soft Management Ultimate System (ERASMUS) à partir de 2006 (par exemple, Gawinowski et al. [94], Drogoul et al. [75], Bonini et al. [28]), un récent point de vue se développe pour les changements en vitesse. Ces recherches mettent en avant l'intérêt d'une régulation « subliminale » dans le sens où de minimales variations en vitesse (de faibles amplitudes autour de la vitesse nominale respective à chaque avion) sont considérées. Notre approche se focalise sur l'évitement de conflits aériens par une régulation subliminale en vitesse.

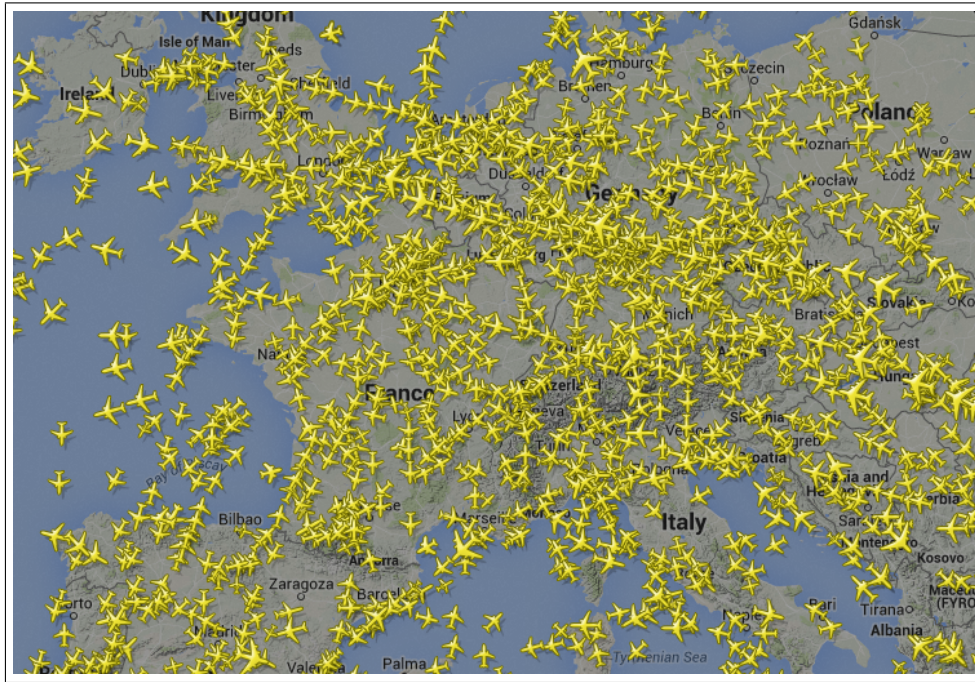


Figure 1 – Représentation du trafic aérien commercial civil au dessus de la France et de ses pays voisins, donnée « en quasi-temps réel » (grâce aux transmissions depuis le transpondeur ADS-B via des satellites), le vendredi 20 février 2015 (à 11h10), via Flightradar24 [86].

Pour ce problème, nous mettons en œuvre des moyens de modélisation et de résolution relevant du contrôle optimal. Depuis l’impulsion donnée par Bernoulli (par exemple, Sussmann et Willems [155]), accompagnée par les travaux de ses contemporains, par exemple, Fermat, Leibniz et Newton (par exemple, Panza [132]), l’analyse, le calcul des variations et le contrôle optimal vont se développer. Plus tard, les contributions de Hamilton, puis de Pontryagin (par exemple, Pontryagin et al. [136]) seront également fondamentales. De nos jours, la théorie du contrôle permet, comme nous le détaillerons, de contrôler, d’optimiser et de guider des systèmes sur lesquels il est possible d’agir, d’avoir une action à travers un système de lois de commandes, ou encore de conduire un quelconque procédé vers un certain état final escompté en optimisant un critère. La modélisation sous forme de problèmes de contrôle optimal et la résolution en ses termes a une forte interaction (détaillée en sous-section 1.3.1) avec de nombreux domaines (par exemple, robotique, systèmes d’énergie, économie, aérospatial, médecine, ...). Nous décrirons par la suite les approches développant des méthodes en contrôle optimal pour les applications en gestion du trafic aérien et, plus particulièrement, dans le cadre du problème d’évitement de conflits aériens.

Notre démarche consiste à proposer une approche de modélisation et de résolution basée sur le contrôle optimal, pour le problème d’évitement de conflits aériens, à travers des manœuvres subliminales en vitesse (variations de faibles amplitudes autour de la vitesse nominale respective à chaque avion). En effet, notre formalisme résulte du raisonnement suivant. Le problème d’évitement peut être étudié suivant l’ensemble des avions considérés. Chacun des avions, en tant que protagoniste du problème, réalise un déplacement. Ce déplacement peut être appréhendé comme un système dynamique, qui est soumis à des commandes par exemples, aux actions des pilotes, subordonnées par les

directives des contrôleurs aériens. On peut ainsi identifier des variables de contrôles (i.e., les lois de commandes) pour agir sur le système dynamique, et pour contrôler celui-ci, d'un état initial (les données et configurations aériennes) vers un état final (les destinations escomptées des avions), en tenant compte d'un critère d'optimisation. Les variables d'états peuvent ainsi s'interpréter comme les vitesses et les positions des avions. Pour assurer la séparation entre les avions, par des modulations subliminales en vitesse, les contrôles peuvent être choisis comme les accélérations des avions. Les distances minimales de sécurité entre les avions peuvent être considérées comme des contraintes à satisfaire ; et le critère comme une fonction de coût quadratique pénalisant les accélérations, et ainsi toutes les modifications en vitesse des avions. C'est pourquoi, il apparaît naturel de formuler le problème d'évitement comme un problème de contrôle optimal.

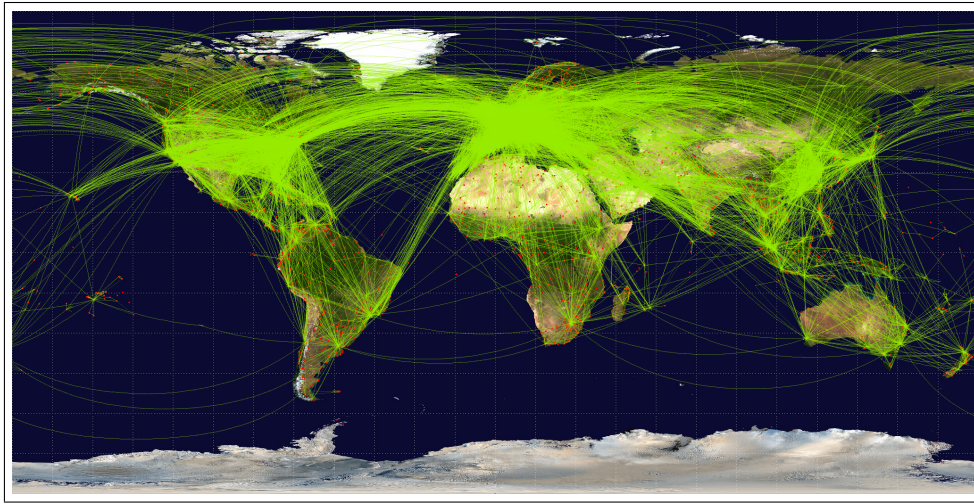


Figure 2 – Représentation des principales circulations aériennes civiles, réalisée par un collectif d'élèves ingénieurs suisses [154], proposant une visualisation du trafic aérien civil mondial sur une durée de 24h.

D'une part, une méthode de résolution numérique en contrôle optimal telle que la méthode directe de tir, impliquant une discrétisation totale ou partielle du problème, transforme le problème initial en un problème en programmation non linéaire de grande taille. Ce type de méthodes peut générer des problèmes d'optimisation de grande taille numériquement difficiles à résoudre. Suivant le nombre de variables du problème, elle peut s'avérer trop coûteuse en termes de temps de calculs. D'autre part, les contraintes sur les variables d'états du problème posent des difficultés de résolution, par exemple, pour l'usage d'une méthode numérique indirecte de tir ; cette dernière faisant appel à des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre avec le principe du maximum de Pontryagin (par exemple, Pontryagin et al. [136], Bryson et Ho [39], ou plus récemment Trélat [159] et Liberzon [118]).

Notre contribution porte sur la décomposition du problème de contrôle optimal, en développant les informations caractéristiques des conflits aériens, spécifiques aux conditions de séparation entre avions. Nous développons une détection au pire cas suivant les modulations en vitesse et la détermination a priori de zones de conflits permettant alors la décomposition du problème présenté de contrôle optimal en sous-problèmes plus aisés à résoudre. La résolution des sous-problèmes hors-zone peut être abordée en utilisant les conditions du principe du maximum de Pontryagin, ce qui en permet une résolution plus efficace. Ainsi, une combinaison de méthodes numériques directes de tir sur la zone et d'application des conditions du principe du maximum de Pontryagin en

dehors de la zone est proposée, et des implémentations, suivant différents environnements numériques pour des problèmes de grande taille en programmation non linéaire, sont développées et valident notre approche.

Cette thèse s'organise en trois chapitres de la manière suivante.

Dans le Chapitre 1, nous décrivons d'une part, le champ d'application de ce travail de thèse, avec le contrôle aérien et la régulation du trafic. D'autre part, nous présentons le champ théorique du contrôle optimal, dans lequel s'inscrit notre modélisation, en rappelant le principe du maximum de Pontryagin et quelques unes des techniques de résolution, plus particulièrement les méthodes numériques directes de tir. Nous définissons les conflits aériens et les manœuvres d'évitement. Nous montrons l'essor récent en faveur de l'usage d'une régulation subliminale en vitesse dans le problème d'évitement. Ces variations de faibles amplitudes peuvent être vues comme des contraintes ; deux régulations ont été exhibées durant le projet ERASMUS, faible ou forte, suivant la marge en vitesse retenue (par exemple, Drogoul et al. [75]). Nous considérons le cas le plus contraignant, propre à la régulation faible.

Le Chapitre 2 porte sur notre formalisation du problème d'évitement de conflits aériens en termes de contrôle optimal, et les méthodes de résolution associées. Chaque déplacement d'avion est modélisé par une dynamique newtonnienne, pour laquelle l'accélération est une commande. Les vitesses et positions sont considérées comme des états du système différentiel. Les états d'ordre deux (les positions), sont soumis aux conditions d'évitement vues comme des contraintes sur l'ensemble des paires d'avions. Le temps final est fixé et le critère est quadratique, pénalisant les variations en vitesse. En maintenant les trajectoires prédéfinies des avions, nous déterminons, au pire cas, des zones propres à l'ensemble considéré d'avions, à partir des conditions d'évitement, des caps et des intervalles de régulation fixés. Les définitions de zones (successivement « prézone », « zone » de rencontres potentielles, et enfin « postzone ») sont déterminantes dans notre approche. En effet, sous certaines hypothèses, les sous-problèmes sur les périodes prézone et postzone peuvent être traités indépendamment pour chaque avion et permettent d'obtenir des conditions nécessaires d'optimalité à travers l'application du principe du maximum de Pontryagin. Nous proposons alors une décomposition du problème initial en sous-problèmes de contrôle optimal (plus aisés à résoudre). Grâce à cette décomposition appropriée et aux reformulations obtenues, il nous est possible de proposer une combinaison de méthodes numériques de résolution.

Le Chapitre 3 porte sur les résultats numériques relatifs aux différentes approches, ainsi que sur la génération d'instances pour ce type de problème. La génération d'instances et le cadre expérimental sont explicités, avec les indicateurs utilisés pour la complexité des problèmes d'évitement. Différents environnements (MATLAB [123] et AMPL [87]) et différents solveurs, de type point-intérieur et de type SQP (respectivement, IPOPT [169] et SNOPT [95]), en programmation non linéaire pour les problèmes de grande taille, sont comparés. Les avantages de notre décomposition du problème et de notre combinaison de méthodes numériques (méthode directe de tir en zone et conditions du principe du maximum de Pontryagin en dehors de la zone) sont discutés.

Liste des publications et présentations

Les travaux de cette thèse ont donné lieu à différentes publications et présentations, indiquées comme suit.

Revue internationale (avec comité de lecture)

✍ L. Cellier, S. Cafieri et F. Messine. Combination of optimal control approaches for aircraft conflict avoidance via velocity regulation. (en cours)

Actes de conférences internationales (avec comité de lecture)

✍ L. Cellier S. Cafieri et F. Messine. Optimal control approaches for aircraft conflict avoidance using speed regulation : a numerical study, in Proceedings of ISIATM 2013, Interdisciplinary Science for Innovative Air Traffic Management, Toulouse, France, 2013. [54]

✍ L. Cellier, S. Cafieri et F. Messine. A decomposition-based optimal control approach for aircraft conflict avoidance performed by velocity regulation, in Proceedings of AT-ACCS 2013, Application and Theory of Automation in Command and Control Systems, pp. 129-131, Naples, Italie, 2013. [53]

✍ L. Cellier, S. Cafieri et F. Messine. Hybridizing direct and indirect optimal control approaches for aircraft conflict avoidance, in Proceedings of ADVCOMP 2012, Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences, pp. 42-45, Barcelone, Espagne, 2012. [50]

Actes de conférences nationales (avec comité de lecture)

✍ L. Cellier, S. Cafieri et F. Messine. Régulation en vitesse pour un problème d'évitement de conflit aérien : combinaison des résolutions directe et indirecte de contrôle optimal, in Proceedings of ROADEF 2014, Congrès Français de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Bordeaux, France, 2014. [55]

✍ L. Cellier, S. Cafieri et F. Messine. Combinaison de méthodes de contrôle optimal pour l'évitement de collision dans le trafic aérien, in Proceedings of ROADEF 2013, Congrès Français de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Troyes, France, 2013. [52]

✍ L. Cellier, S. Cafieri et F. Messine. Résolution de conflit aérien par contrôle optimal basé sur la régulation en vitesse, in Proceedings of ROADEF 2012, Congrès Français de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Angers, France, 2012. [51]

Présentations en conférences et séminaires (du travail de thèse)

- Séminaire des doctorants ÉNAC, École nationale de l'aviation civile (ÉNAC), Toulouse, France, 2015.
- 3D'14 DALI Doctoral Days, LIRMM-UPVD équipe-projet DALI, laboratoire Arago, Université Paris 6 Pierre et Marie Curie (UPMC), Banyuls-sur-Mer, France, 2014.
- International Friday, IUT-GLT, Université de Perpignan Via Domitia (UPVD), Perpignan, France, 2014.
- Séminaire des doctorants DocToMe, Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3), Toulouse, France, 2014.
- ROADEF 2014, Congrès Français de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Institut de mathématiques de Bordeaux (IMB), Université de Bordeaux, Bordeaux, France, 2014.
- ICCOPT 2013, International Conference on Continuous Optimization, University of Coimbra, Lisbonne, Portugal, 2013.
- Recent Advances on Optimization, (poster), Centre européen de recherche et de formation avancée en calcul scientifique (CERFACS), Toulouse, France, 2013.
- ISIATM 2013, 2nd International Conference on Interdisciplinary Science for Innovative Air Traffic Management, École nationale de l'aviation civile (ÉNAC), Toulouse, France, 2013.
- Soutenance mi-parcours, École doctorale mathématiques, informatique et télécommunications de Toulouse (EDMITT), Toulouse, France, 2013.
- ATACCS 2013, (poster), 3rd International Conference on Application and Theory of Automation in Command and Control Systems, Università degli Studi di Napoli 'Federico II' (UNINA), Naples, Italie, 2013.
- ROADEF 2013, Congrès Français de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Université de technologie de Troyes (UTT), Troyes, France, 2013.
- ADVCOMP 2012, 6th International conference on advanced engineering computing and applications in sciences, Barcelone, Espagne, 2012.
- Journée des doctorants ÉNSÉÉIHT, École nationale supérieure d'électrotechnique, d'électronique, d'informatique, d'hydraulique et des télécommunications (ÉNSÉÉIHT), Toulouse, France, 2012.
- Séminaire du laboratoire MAIAA, École nationale de l'aviation civile (ÉNAC), Toulouse, France, 2012.
- ROADEF 2012, Congrès Français de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Université d'Angers, Angers, France, 2012.

CHAPITRE 1

Conflits aériens, optimisation et contrôle optimal



« If I have seen further than others,
it is by standing upon the shoulders of giants. »

I. Newton



Contenu de ce chapitre

1.1	Gestion du trafic et évitement de conflits aériens	18
1.1.1	Filtres successifs de régulation du trafic aérien	19
1.1.2	Problème de conflits aériens et manœuvres d'évitement	20
1.1.3	Stratégie de régulation subliminale en vitesse	23
1.2	Du problème d'évitement au problème d'optimisation	27
1.2.1	Choix de modélisation	28
1.2.2	Modèles et méthodes de résolution	33
1.3	Contrôle optimal	37
1.3.1	Formalisation en termes de contrôle optimal	38
1.3.2	Principe du maximum de Pontryagin	41
1.3.3	Méthodes numériques de résolution en contrôle optimal	44
1.4	Conclusions	50

Dans ce chapitre, tout d'abord, nous décrivons le contexte de gestion du trafic aérien et les questions opérationnelles sous-jacentes. L'utilisation du réseau de routes aériennes est un système critique, qui nécessite différentes étapes, reportées en Section 1.1. Les filtres successifs, pour la régulation du trafic, sont alors discutés, avec la planification de trajectoires d'avions et les responsabilités des contrôleurs aériens. Cette introduction permet d'énoncer le contexte aérien, et en particulier, d'observer le problème d'évitement de conflits aériens, qui est le champs d'application de ce travail de thèse. Nous discutons ensuite les approches d'optimisation, à travers des modèles et des méthodes de résolution, en Section 1.2. Enfin, comme nous le présenterons dans le chapitre suivant, notre modèle s'inscrit dans le champ théorique du contrôle optimal. C'est pourquoi, pour notre approche, nous rappelons d'une part les ressources de modélisation en termes de contrôle optimal et d'autre part quelques unes des techniques numériques de résolution, et, plus particulièrement, les méthodes de tir, directes et indirectes, présentées en Section 1.3, que nous avons privilégiées.

1.1 Gestion du trafic et évitement de conflits aériens

Cette section illustre le champ d'application de ce travail de thèse, en explicitant le contexte du trafic aérien et, tout particulièrement, le problème d'évitement de conflits aériens. Elle permet ainsi d'appréhender les besoins et les motivations (détaillées en Annexe A) pour l'aide à la décision. Dans le sens où il s'agit de proposer, pour accompagner et aider les contrôleurs aériens dans leurs responsabilités, des outils informatiques, par exemple lesquels permettraient de vérifier et d'analyser des informations (par exemple, sur les vols d'un secteur), de sorte à faciliter voire optimiser la prise de décision.

Le contrôle aérien vise à structurer la circulation aérienne et à veiller au bon déroulement des vols. Des précisions historiques sur le contrôle de la circulation aérienne sont données dans Maignan [120], Bayen et Tomlin [12], et Jousse et al. [109], ces derniers décrivent notamment l'évolution durant six décennies des techniques et des moyens employés (en particulier, pour la transmission d'information, du morse à la souris). Au sein du contrôle aérien, nous nous concentrons sur le problème d'évitement de conflits aériens (qui sera défini formellement plus tard). L'observation et le maintien d'une distance minimale de sécurité entre les avions sont discutés ; la séparation entre les avions, cruciale, est étudiée. Les manœuvres élémentaires d'évitement, à disposition des contrôleurs aériens,

sont présentées. La thèse va développer un modèle mathématique et une approche de résolution, appropriée à un des moyens d'évitement : la régulation subliminale en vitesse (expliquée en sous-section 1.1.3).

Actuellement, la circulation présente sur le réseau aérien est placée sous la responsabilité d'équipes de contrôleurs aériens (détaillées en Annexe A). Pour réduire la charge de travail affectée à chaque contrôleur aérien, laquelle fragiliserait la sécurité du trafic aérien dont ils ont la tâche, les flux aériens sont soumis à différents filtres de régulation de manière à organiser le trafic.

1.1.1 Filtres successifs de régulation du trafic aérien

La gestion du trafic aérien (Air Traffic Management, ATM) est un système critique (dans le sens où, il s'agit d'un système dont une erreur ou une panne peut avoir des conséquences dramatiques). Nous décrivons dans l'ordre d'apparition – suivant la manière séquentielle imposée – les multiples étapes (filtres) qui composent cette chaîne de régulation, visant à fluidifier le trafic aérien en toute sécurité.

1.1.1.1 Premiers filtres de la chaîne de régulation

Avec les premiers filtres, nous décrivons la phase de planification de trajectoires d'avions et l'établissement d'un plan de vol pour chacun d'eux.

Stratégique. Actuellement, les compagnies aériennes soumettent environ un an à l'avance la mise en place d'un itinéraire en soumettant une feuille de route, appelée plan de vol, à un organisme international chargé de vérifier la faisabilité et l'allocation de créneaux horaires. Le critère (« cost index », par exemple, Roberson [146]) de la compagnie aérienne représente un compromis (confidentiel) entre la durée du vol et la consommation en carburant. Après vérification des conditions de vol (en particulier, des tranches horaires pour le décollage et pour l'atterrissage aux aéroports demandés), cet organisme valide. Cette organisation à long-terme est le premier filtre dont le but est de structurer, plus de 6 mois à l'avance, le trafic à grande échelle, i.e., aux niveaux nationaux et continentaux. Le trajet de l'avion est défini au moyen de balises et points de passage (waypoints). Lors de cette procédure, les trajectoires sont planifiées.

Pré-tactique. Tout en conservant les indications précédentes, par exemple, la tranche horaire allouée au décollage et les informations relatives au déroulement du vol, cette phase intervient au plus 48h avant le vol prévu. Cette organisation à court-terme (pré-régulation), bénéficie de données relativement précises (par exemple, pour les dernières 24h, météorologie, capacités des centres de contrôle en-route CRNA et données des semaines précédentes).

Pour ces deux filtres (stratégique et pré-tactique), l'organisme responsable en Europe est la Central Flow Management Unit (CFMU). Ces premiers filtres bénéficient d'un mode de résolution plus souple en termes de temps de calculs pour la résolution de problèmes induits (par la complexité des nombreuses trajectoires d'avions à mettre en place). À plus court terme, les deux prochains filtres présentés ci-après sont davantage sensibles aux questions de temps de calculs pour la résolution de problèmes de modifications éventuelles sur les plans de vols des avions.

1.1.1.2 Derniers filtres de la chaîne de régulation

Nous décrivons, depuis le décollage jusqu'à l'atterrissage à destination, les filtres de régulation dédiés aux vols effectifs des avions. La prise en compte d'informations et le suivi sur les déroulements des vols sont essentiels. En cas de modifications, ou de problèmes, concernant les plans de vols, un effort d'ajustements doit être réalisé promptement. La prise de décisions, dont les contrôleurs aériens ont la charge, est capitale.

Tactique. La phase tactique est considérée avoir lieu peu avant le décollage, de l'ordre d'une heure ou deux avant, mais également durant le vol lui-même en considérant les prochaines 30 minutes. La phase tactique vise à fixer dans des conditions de sécurité optimales les derniers paramètres du vol, à travers le plan de vol, notamment en précisant la trajectoire envisagée de l'avion avec les routes aériennes empruntées. Lors de cette phase, les plans de vols des avions sont affinés. Durant le vol, les informations du plan de vol, par exemple, comme les prochains points de passages et balises à rencontrer, le cap et la trajectoire de l'avion, ainsi que le niveau de vol et la vitesse nominale, sont communiqués pour les futurs secteurs aériens traversés. Malgré les efforts mis en œuvre, des possibilités de conflits aériens potentiels subsistent lors des vols effectifs. C'est au sein de cette période, durant les vols effectifs, que nous positionnons notre étude pour l'évitement de conflits aériens, juste avant l'intervention des contrôleurs aériens eux-mêmes, pour proposer un ensemble d'outils d'aide à la décision, de sorte à alléger leur charge de travail. En effet, la détection et, de plus, la résolution de conflits aériens potentiels ne sont pas automatisées. Pour palier à ce besoin grandissant, dû au développement croissant du trafic aérien, des travaux de recherche portent sur la modélisation et l'optimisation pour le problème d'évitement de conflits aériens. C'est dans cette phase de la chaîne de régulation que nous inscrivons le domaine d'application pour ces travaux de thèse.

Temps réel. C'est le filtre en bout de cette chaîne du contrôle de trafic aérien. Cette étape est caractérisée par les actions des contrôleurs aériens dans leur secteur respectif, décrite en Annexe A. Les conditions du contrôle effectif des contrôleurs (Air Traffic Control, ATC) et les manœuvres en temps réel sont rapportées dans la sous-section suivante.

Après avoir énoncé les différentes périodes de régulation du trafic, avant et durant un vol effectif, il convient d'explicitier le problème d'évitement de conflits aériens et les différentes manœuvres d'évitement de conflits aériens.

1.1.2 Problème de conflits aériens et manœuvres d'évitement

Dans le cadre de la gestion du trafic aérien, un des plus importants défis est celui de garantir la sécurité des vols en évitant les conflits entre avions. Il est question de maintenir une distance minimale de séparation entre les avions.

1.1.2.1 Conflits aériens et séparation entre avions

Pour une paire d'avions, on dit qu'ils sont **en conflit** si les distances horizontales et verticales entre eux sont inférieures à la distance minimale de séparation. Plus précisément, suivant l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (OACI) [107], les normes de séparation standards pour les avions de commerce en-route sont de 5 nautiques horizontalement et de 1000 pieds verticalement. Les unités de mesure considérées sont : 1 nautique (NM) = 1852 m, et 1 pied (ft) = 0.3048 m.

DÉFINITION 1.1. Un couple d'avions (i, j) est dit **en conflit** si :

$$\|x_i - x_j\| < 5 \text{ NM} \quad \text{et} \quad \|h_i - h_j\| < 1\,000 \text{ ft},$$

avec les notations, x pour leur position horizontale (en coordonnées cartésiennes) dans le plan, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et h pour leur altitude.

Les distances de séparation entre avions doivent être satisfaites pour tout instant t . Cela définit un volume de protection cylindrique centré sur chaque avion. Ce dernier étant séparé des autres avions si aucun autre avion ne pénètre dans son volume de protection, illustré en Figure 1.1.

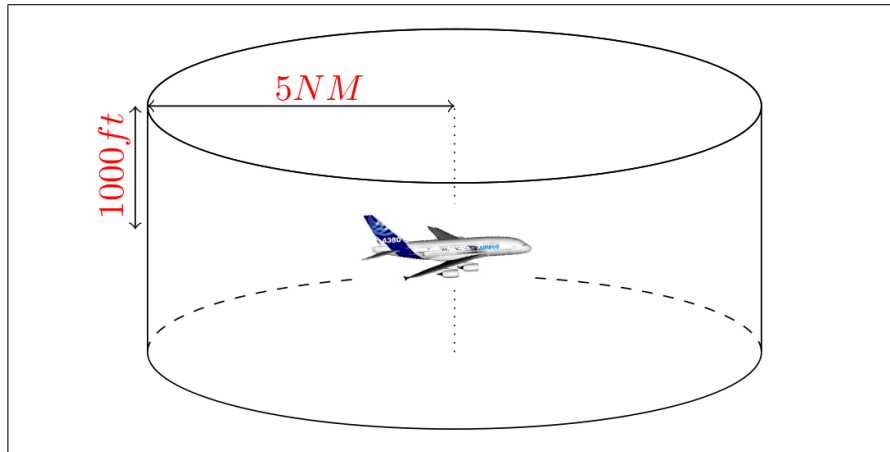


Figure 1.1 – Volume de protection standard pour l'aviation commerciale en-route. Les normes de séparation standards, définies par l'OACI [107], sont de 5 nautiques (NM) horizontalement et de 1000 pieds (ft) verticalement, lesquelles peuvent être considérées comme un volume de protection cylindrique centré sur chaque avion.

REMARQUE 1.2. La norme de séparation horizontale est nettement supérieure à la norme de séparation verticale. Ce constat s'explique en partie comme suit. Suivant les performances des avions et les préférences des compagnies, le trafic s'est développé en niveaux de vols (Flight Level, FL). Actuellement, une importante partie des trajets des avions s'effectue à altitude constante.

DÉFINITION 1.3. On dit qu'une paire d'avions est **en conflit potentiel** respectivement à une durée ΔT , si d'après les prédictions de trajectoire des deux avions, ceux-ci risquent d'être en conflit durant la durée ΔT .

REMARQUE 1.4. Les Définitions 1.1 et 1.3 donnent que le problème de l'évitement de conflits aériens est équivalent au problème de la résolution de conflits aériens potentiels sur une durée suffisamment grande. Dans cette thèse, nous employons davantage la première expression.

La détection et la résolution de conflits potentiels incombent aux contrôleurs aériens, dans le sens où, il n'y a pas encore d'outils d'automatisation, ni d'outils d'aide à la décision.

Il existe toutefois des systèmes embarqués pour d'autres situations (par exemple, comme le TCAS, pour palier au danger en situation d'urgence, expliquée en Annexe A). C'est précisément pour combler ce manque en termes d'aide à la décision pour les contrôleurs que de nombreuses recherches sur ces thématiques aériennes sont et ont été menées. Parmi les études de modélisation pour le problème d'évitement de conflits aériens de nombreuses hypothèses se distinguent. Les approches de modélisation peuvent être considérées à travers, en particulier, les types de manœuvres d'évitement observées.

1.1.2.2 Manœuvres élémentaires d'évitement

Une fois en vol en-route, l'avion est susceptible de changer de route, et cela sur ordre des contrôleurs, afin d'éviter des conflits aériens. Les contrôleurs peuvent ainsi altérer les trajectoires des avions. Des références au sujet des manœuvres élémentaires d'évitement de conflits aériens sont : Tuan et al. [162], Villiers [165], Colin de Verdière [63], et Zanni [172]. Pour décrire ces manœuvres, nous différencions trois grands types de changements.

Changement en vitesse. Les compagnies aériennes affectent aux avions, suivant les performances de vol et leurs préférences (cost index, par exemple, Roberson [146]), une vitesse qui sera privilégiée durant la phase en-route ; cette vitesse de croisière est appelée vitesse « nominale ». Une manœuvre consiste à changer légèrement (autour de leur vitesse nominale respective) la vitesse de l'avion, en décélérant ou en accélérant, de façon à assurer l'évitement de conflits aériens. L'accélération et les changements en vitesse sont bornés pour des raisons opérationnelles. Cette thèse se focalise en particulier sur une meilleure appréciation de ce moyen d'évitement, et sur le développement d'une approche appropriée. Nous proposons des méthodes pour la détection et la résolution de conflits potentiels, basées sur des variations en vitesse. Ce changement est détaillé en sous-section 1.1.3.

Changement en altitude. Il s'agit d'une déviation verticale, essentiellement considérée comme une affectation de niveaux de vols, alloués en fonction des caractéristiques des avions ; ou encore à l'abord des aéroports (au départ ou en approche) en établissant quelques paliers en phase de montée ou de descente. En cas d'urgence, ce moyen peut permettre d'éviter un risque de collision ; un avion peut ainsi changer radicalement son altitude comme dernier recours.

Changement en cap. Il s'agit d'une déviation latérale suivant des angles indiqués ; l'avion prend une autre direction sur le plan horizontal. C'est, de loin, la manœuvre la plus utilisée pour l'évitement de conflits aériens, avec les deux pratiques présentées en Figure 1.2.

REMARQUE 1.5. D'autres possibilités d'action peuvent être envisagées. Par exemples, une combinaison (utilisation combinée, coordonnée ou simultanée) de ces trois éléments de déviation de trajectoire ; ou, plus en amont, un retard au décollage (déjà parfois utilisé dans la pratique) peut aussi être un moyen pour limiter la congestion du trafic aérien, et/ou assurer l'évitement de conflits aériens.

Une action de séparation faisant appel à un changement en vitesse (encore extrêmement peu utilisé en pratique) a retenu notre attention comme une approche récente et originale, d'après les motifs que nous présentons comme suit.

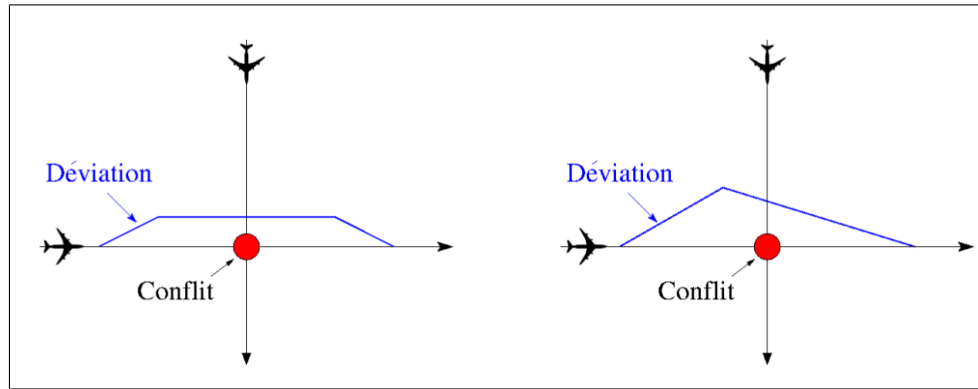


Figure 1.2 – Manœuvres d’évitement de conflits aériens par changement en cap : créneau (offset) et point-tournant (turning point). Les flèches en traits fins en noir représentent les trajectoires initialement prévues respectivement aux avions considérés. À l’intersection des routes aériennes, au point de croisement des trajectoires, un conflit potentiel est détecté, indiqué par un disque en rouge. La trajectoire déviée est effectuée ici par un seul des deux avions, dessinée en traits pleins en bleu clair, par un changement en cap. À gauche, dans le cas du créneau (offset), la trajectoire initialement prévue et la trajectoire déviée sur une route parallèle vont dessiner un trapèze. À droite, dans le cas du point-tournant (turning point), la trajectoire initialement prévue et la trajectoire déviée (déviation) passant par un point de détour vont dessiner un triangle. (source : Guys [96])

1.1.3 Stratégie de régulation subliminale en vitesse

Différentes vitesses en aéronautique existent ; nous considérons comme vitesse nominale (sauf mention contraire) la vitesse « indiquée » affichée à bord pour les pilotes. Dans toute la suite de cette thèse, nous nous focalisons sur la régulation en vitesse. Nous argumentons à présent sur le nouvel essor concernant ce moyen d’action pour l’évitement de conflits aériens.

Comme présentée, la régulation en vitesse figure parmi les possibilités de manœuvres d’évitement de conflits aériens. Pourtant, son utilisation dans la pratique, par les contrôleurs aériens, est jusqu’à présent rarissime (et négligée).

1.1.3.1 Régulation en vitesse, une approche négligée

En effet, les instructions (clearances) des contrôleurs aériens aux pilotes suivant des modulations en vitesse sont rarement utilisées. Par exemple, au début du siècle, Hering [99] note que l’usage des manœuvres en vitesse est nettement inférieur à 1% du total des manœuvres d’évitement utilisées en Europe pour les secteurs dits en-route. Plus récemment, Barjou et al. [9] confirme que cet usage est encore très peu utilisé. Quelques manœuvres d’évitement en termes de modulations en vitesse peuvent survenir pour affiner la résolution (après que la plus importante partie de la résolution a été effectuée en termes de manœuvres en cap ou en altitude), dans des situations telles que l’approche (aux abords des aéroports, peu avant l’atterrissage), ou encore dans le cadre de situations « en rattrapage » (trailing, i.e., lorsqu’un avion suit un autre). A contrario, les changements en cap (reroutements) sont largement utilisés. Quelques explications peuvent être apportées à ce premier constat.

1. Un verrou provient de la difficulté de mise en place de cette régulation en temps réel par les contrôleurs aériens.
 - (a) D’une part, il s’agit d’une raison visuelle spécifique, liée à la configuration planaire de leur écran de contrôle. Puisqu’« au sol », les trajectoires des vols

sont appréhendées comme les trajectoires projetées. Ainsi, les intersections de trajectoires subsistent (sur les écrans actuels), ce qui a tendance à charger et retenir l'attention et la vigilance des contrôleurs.

- (b) D'autre part, les directives éventuellement complexes, à fournir par les contrôleurs aux pilotes pour accomplir l'intégralité des manœuvres (sous l'hypothèse de l'humain au centre du système de contrôle).
2. D'autres réserves, a priori, concernant le changement en vitesse étaient du même ordre que celles qui entravent l'usage des variations en altitude, et sont les suivantes :
 - (a) les variations de consommation en carburant, supposées défavorables en cas de modifications subites et/ou importantes en vitesse ;
 - (b) l'impact sur le confort des passagers, supposé défavorable également en cas de modifications brusques et/ou importantes en vitesse.
 3. La formation des contrôleurs aériens, passée et actuelle, celle qui m'a été témoignée par les élèves contrôleurs et professeurs de l'ÉNAC, développe et privilégie les changements en cap (ou en altitude) pour la majeure partie de la résolution de conflits potentiels (par exemple, Barjou et al. [9]), faute de sensibilisation, d'interface (outils d'aide à la décision) et de validation éprouvée pour la régulation en vitesse.

Ces différents griefs justifiaient le manque d'intérêt pour l'usage de ce moyen d'évitement de conflits aériens. Le regard sur la régulation en vitesse a quelque peu changé, comme nous le discutons dans la suite, sous l'impulsion du rapport de l'Institut du Transport Aérien (ITA) en 2004 par Villiers [166] et, à partir de 2006, avec le projet européen ERASMUS.

1.1.3.2 Approche subliminale et originale en vitesse

En effet, les travaux de Villiers [166] proposent d'utiliser de très faibles variations de vitesse autour de la vitesse nominale respective à chaque avion. L'usage d'un contrôle « subliminal » est suscité dans le sens où les variations de vitesse ne seraient même pas perçues par les contrôleurs aériens et il en résulterait un trafic plus « chanceux » pour les contrôleurs aériens dans le sens où cette action résoudrait (à l'avance et automatiquement) certains des conflits aériens potentiels. Grâce à ce point de vue, réaliser de telles manœuvres à court-terme (durant la phase tactique de la chaîne de régulation du trafic) revient à demander de nouveaux outils d'aide à la décision, dans un contexte futuriste. Cette idée de faibles variations en vitesse a favorisé la (re)considération et l'étude de cette approche par les chercheurs et les professionnels du milieu opérationnel. Un des exemples les plus significatifs est fourni par une avancée menée à travers le projet européen ERASMUS.

Le projet ERASMUS a engagé, de mai 2006 à novembre 2008, de nouvelles pistes de recherche sur la gestion du trafic aérien, autour de manœuvres subliminales en vitesse, avec les deux lignes directrices suivantes.

1. Renforcer la capacité du réseau aérien (actuellement cette capacité globale est articulée autour des capacités respectives des secteurs), l'efficacité du service de gestion (à travers de nouvelles techniques et outils d'aide à la décision), et la sécurité essentielle fournie par les services de gestion de trafic aérien ;
2. Déployer une vision vers l'aide à la décision et l'automatisation dans la gestion du trafic aérien (ATM), avec en particulier, un transfert des responsabilités « du sol », rôle occupé par les humains depuis des centres de contrôle, « vers l'air », directement au sein des avions avec leurs systèmes embarqués.

Nous résumons les investigations menées par le projet européen ERASMUS (par exemple, Gawinowski et al. [94], Eurocontrol [79], Drogoul et al. [75] et Bonini et al. [28]). Les algorithmes utilisés au sein du projet ERASMUS détectaient les conflits potentiels d'une part, puis les résolvait d'autre part (par « cluster » d'avions, cf. remarque 2.1) d'abord, si possible, par de faibles ajustements en vitesse (sinon en cap ou en altitude). Le but principal n'était pas le développement de nouvelles méthodes numériques de résolution (celles utilisées étaient basées sur les algorithmes génétiques). L'enjeu du projet était plutôt de rendre compte du potentiel des manœuvres d'évitement en vitesse, et des possibilités d'intégration entre les algorithmes et les utilisateurs (contrôleurs) pour améliorer les capacités des secteurs aériens. Nous rappelons les résultats suivants. Trois séries de simulations en temps réel ont eu lieu : en novembre 2006, à Aix-en-Provence, avec 50 contrôleurs ; en avril 2007, à Toulouse, avec 10 contrôleurs ; en mai 2007, à Aix-en-Provence, avec 50 contrôleurs. Ces expériences tendent à montrer, d'une part, une bonne intégration et acceptation auprès des contrôleurs aériens :

1. les changements en vitesse, compris dans l'intervalle $[-6\%, +3\%]$ de variations autour des vitesses nominales, ne sont pas perçus par les contrôleurs aériens (par exemple, Averty et al. [7] traitent de la perception par les contrôleurs aériens de ces manœuvres de séparation) ;
2. une bonne cohabitation entre humain et machine (pour l'interface donnée) ;
3. une très bonne acceptation du concept de faibles variations de vitesse par les contrôleurs aériens ;

et, d'autre part, des résultats et performances appréciables auprès des contrôleurs aériens :

1. un sentiment d'une plus grande sécurité et d'un plus grand confort ;
2. une augmentation de la qualité de service (en étant plus proche du plan de vol, initialement désiré par les compagnies aériennes et validé par les fournisseurs de services de la navigation aérienne) ;
3. un gain de ressources cognitives (dans le sens de : raisonnement, résolution de problèmes, prise de décision, perception ou attention) (gain à étayer, encore à l'étude d'après les rapports techniques) ;
4. un gain de « capacité » (dans le sens de : intensité maximale du trafic, par exemple en nombre de vols dans le secteur considéré) (gain à étayer aussi, encore à l'étude d'après les rapports techniques).

Dans le cadre du projet européen ERASMUS, deux intervalles de régulation en vitesse ont pu également être mis en avant :

Régulation faible. Une marge en vitesse est proposée, allant de -6% à $+3\%$ autour de la vitesse nominale de chacun des avions. Les conclusions du projet ERASMUS, avec la collaboration d'une société spécialisée dans la construction de moteurs d'avions et équipement aéronautique, désignent cet intervalle comme le plus pertinent en respectant les conditions de vol et les performances mécaniques des avions. Pour un avion i , sa vitesse nominale v_i^0 et sa vitesse $v_i(t)$, pour chaque instant t compris dans la fenêtre de temps $[t_0, t_f]$, l'intervalle de fluctuation de sa vitesse est le suivant :

$$0,94 v_i^0 \leq v_i(t) \leq 1,03 v_i^0 . \quad (1.1)$$

Régulation forte. Une autre marge en vitesse est donnée, allant de -12% à $+6\%$ autour de la vitesse nominale pour chacun des avions. Avec les mêmes notations, pour chaque

instant t , l'intervalle de fluctuation de la vitesse correspond donc cette fois-ci à :

$$0,88 v_i^0 \leq v_i(t) \leq 1,06 v_i^0 . \quad (1.2)$$

De ces deux types de régulation, nous avons le plus souvent considéré dans cette thèse la régulation faible, plus stricte (i.e., plus contraignante autour des vitesses nominales respectives des avions) et plus fidèle aux plans de vol respectifs initiaux. Enfin, nous ne pouvons pas évoquer des variations de vitesse sans songer à leur impact en termes de consommation en carburant. L'apparition d'études, sur la consommation en carburant, en faveur de cette manœuvre d'évitement a appuyé une telle approche. Parmi les premiers à avoir étudié l'influence de changements en vitesse, Ehrmanntraut et Jelinek [83] proposent une comparaison entre les types de manœuvres d'évitement de conflits aériens. La régulation en vitesse est alors testée, avec un intervalle de régulation égal à $[-15\%, +15\%]$ autour des vitesses nominales, respectivement par rapport au changement en cap, et au changement en niveau de vol. Ils mettent en valeur les performances de manœuvres d'évitement en vitesse. Les ajustements en vitesse sur leurs simulations donnent les meilleures performances : en capacité (jusqu'à 75% de résolution de l'instance difficile de simulation de trafic pour 2025), en sécurité (pour résoudre les conflits potentiels ayant une faible distance entre avions, ou les clusters de grande taille), tout en ayant un effet positif en termes de performances économiques et environnementales. En 2009, Delgado et Prats [69] étudient l'influence de paramètres, en particulier, les variations en vitesse dans la consommation en carburant. Ils arrivent à la conclusion que, d'un point de vue économique, les variations en vitesse peuvent s'avérer « compétitives ».

Récemment encore, une estimation de la réduction potentielle de consommation en carburant au travers de stratégies d'optimisation, par changements en altitude ou en vitesse, est discutée dans Lovegren et Hansman [119]. Suivant les performances de chacun des 257 avions étudiés et suivant les données atmosphériques, les résultats montrent qu'une réduction de consommation carburant de 3,5% est possible uniquement par l'optimisation des paramètres en altitude et en vitesse. En effet, les auteurs relèvent que, contrairement aux déviations en cap, les paramètres de vitesse et d'altitude influencent considérablement les performances des avions et peuvent ainsi être exploités davantage en vue de réduire la consommation en carburant. Les tests montrent un plus grand potentiel d'amélioration à travers une régulation en vitesse (avec un gain possible de 2,4%) comparé à l'affection de niveaux de vol (avec un gain possible de 1,5%).

Une telle discussion concernant la consommation en carburant suivant la vitesse peut aussi être illustrée, en Figure 1.3, à travers le schéma issu du manuel BADA [80]. Cette figure offre une représentation des courbes de consommation en carburant (exprimée en $kg.NM^{-1}$) pour trois modèles d'avions (Boeing 737, Boeing MD80 et Boeing 757) suivant leur vitesse respective (exprimée en nœuds (kt), i.e., en $NM.h^{-1}$), au niveau de vol FL330. Nous pouvons observer que, pour ces modèles d'avions, la consommation minimale se trouve entre 450 kt et 500 kt , et que dans cet intervalle de vitesse la consommation en carburant varie très peu. Par exemple, la régulation faible (1.1) pour le Boeing 757 (à FL330), considéré à une vitesse nominale de 459 kt , donne l'intervalle de vitesse [431, 46; 472, 77]. Ainsi, sous ces conditions, le contrôle par régulation en vitesse apparaît prometteur et, dans un contexte futuriste, comme l'une des mesures pouvant être utilisée par les contrôleurs du trafic aérien afin de garantir les distances de sécurité entre avions.

Selon Rey [140], actuellement plus de 90% des conflits potentiels, à résoudre par les contrôleurs, proviennent de conflits de type croisement (i.e., en considérant des trajectoires d'avions qui sont rectilignes et sécantes). Ainsi, plus précisément, nous nous focalisons,

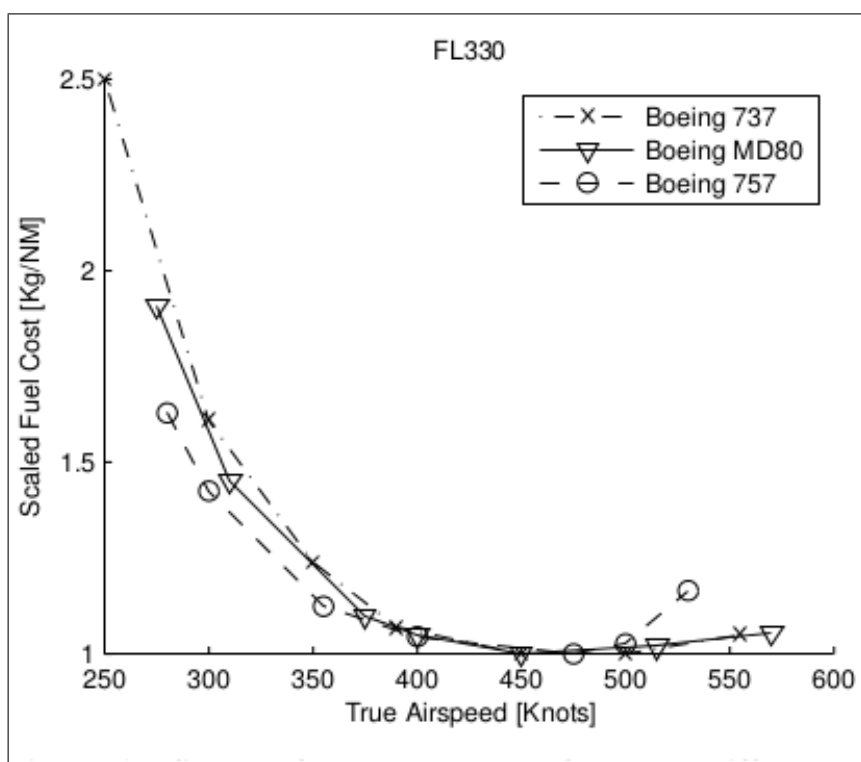


Figure 1.3 – Représentation des courbes de consommation en carburant (exprimée en $kg.NM^{-1}$) pour trois modèles d'avions (Boeing 737, Boeing MD80 et Boeing 757), d'après le manuel de référence aéronautique BADA [80].

dans toute la suite de cette thèse, dans la modélisation et la résolution du problème d'évitement de conflits aériens en croisement par la régulation subliminale en vitesse.

Dans la section suivante, nous présentons le problème d'évitement de conflits aériens vue comme un problème d'optimisation et des approches associées de modélisation et résolution. Nous nous attachons principalement à discuter les approches qui ont trait à la régulation en vitesse, à l'optimisation déterministe et au contrôle optimal.

1.2 Formulation du problème d'évitement en problème d'optimisation

Sans prétendre à l'exhaustivité, à présent, nous mettons en lumière quelques unes des préoccupations en ATM, suivant deux grandes catégories comme suit.

1. Sécurité et efficacité de la manœuvre de déviation, en termes de :
 - (a) garantie de séparation entre les avions ;
 - (b) rapidité de séparation (avion rapidement dévié, et rapidement remis sur sa route ; ou encore, remis à sa vitesse nominale) ;
 - (c) facilité de coordination (e.g, courte durée de la manœuvre, ordres (clearances) simples du point de vue du pilote de ligne et/ou du point de vue du contrôleur aérien) ;
 - (d) stabilité (i.e., robustesse) par rapport aux éventuelles incertitudes ;

2. Structure et propriétés de la nouvelle trajectoire (comparée à l'initiale), en termes de :
 - (a) qualité de service, i.e., en tachant de tenir compte du (de respecter au mieux le) plan de vol initial ;
 - (b) durée estimée du nouveau parcours en cas de changement en vitesse (qui peut s'interpréter, en cas de déviation en cap ou en altitude, comme la longueur estimée de la nouvelle trajectoire) ;
 - (c) confort des passagers ;
 - (d) régularité (par exemple, nombre de virages ou de directives à suivre) ;
 - (e) consommation estimée en carburant (plus faible ou plus élevée) ;
 - (f) équité, i.e., la modification demandée peut être vue comme une pénalisation répartie de manière « juste » entre les avions (ou encore, entre les compagnies aériennes) ;
 - (g) capacité de trafic aérien (réduite ou augmentée).

Reste à savoir comment assurer un évitement de conflits aériens, et, dans quelles mesures, retenir certaines caractéristiques comme pertinentes, il s'agit de la modélisation. Toutes les observations du point 1 (sécurité et efficacité) sont généralement prises en compte, ainsi le souhait consiste à trouver une solution qui minimise un compromis entre les différents coûts induits par les différentes possibilités de changements (soulignés dans le point 2 : structure et propriétés). Ces dépenses restent délicates à regrouper, et, parfois même, à quantifier ou à comparer, il s'agit de la difficulté d'établir un critère (i.e., une fonction objectif qui évalue la qualité de la solution).

En ce sens, ce travail s'inscrit dans le cadre de l'optimisation mathématique. Il est question de déterminer quels sont les comportements (processus) optimaux, éventuellement parmi une (possible) infinité de variantes dans les solutions admissibles (en particulier, permettant les évitements), suivant un critère choisi (indiquant l'optimalité des solutions).

Dans cette section, nous discutons quelques unes des caractéristiques propres à la modélisation en termes d'optimisation pour le problème d'évitement de conflits aériens, en particulier, la séparation, le nombre d'avions et le partage d'information. Nous parcourons la littérature, et plus spécifiquement les publications qui traitent ce problème à travers la théorie du contrôle optimal (et des méthodes numériques de résolution) et ceux à travers la régulation en vitesse. Nous évoquons d'autres approches d'optimisation et méthodes numériques de résolution.

1.2.1 Choix de modélisation

Dans cette thèse, nous avons privilégié des approches de modélisation et de résolution propres au domaine de l'optimisation (plus précisément, nous nous plaçons au sein du contrôle optimal, détaillé dans la prochaine section). À présent, nous introduisons, ou rappelons, quelques unes des premières notions spécifiques au domaine de l'« optimisation ». Dans cette thèse, l'optimisation dite discrète ne sera pas développée (cf. Wolsey [171] pour une introduction), au contraire, nous nous concentrons sur l'optimisation dite continue et le contrôle optimal (cf. Hiriart-Urruty [101, 102] pour une introduction). Il est convenu, pour rendre compte et formuler un problème d'optimisation, de considérer trois types d'information (le plus souvent à définir dans cet ordre) :

1. Un ensemble de variables de décision représentant les inconnues à déterminer, par exemples :

- (a) Les variables de commandes dans Maurer et al. [124] correspondent aux déviations latérales (en cap), et pour chaque avion, la variable de décision continue est le contrôle u dans $[-1, 1]$ (avec $u \stackrel{\text{def}}{=} -1$ signifiant un virage à droite, et $u \stackrel{\text{def}}{=} 1$ signifiant un virage à gauche).
 - (b) Pour notre modèle, détaillé au chapitre suivant, nous considérons les accélérations des avions comme variables de commande.
2. Un ensemble de contraintes représentant des conditions à satisfaire, s'appliquant sur certaines (i.e., un sous-ensemble) des variables mentionnées. Ces contraintes peuvent être vues sous forme d'égalités ou d'inégalités, par exemples :
- (a) Les équations de la dynamique sont souvent considérées, lors de la résolution des ODE correspondantes via un intégrateur numérique, comme des contraintes d'égalités.
 - (b) Pour notre modèle, détaillé au chapitre suivant, nous avons des contraintes, en particulier, sous forme d'inégalités pour les bornes sur les accélérations et les vitesses, et des contraintes sur les positions représentant les conditions de séparation entre avions.
3. Un critère, une fonction objectif dépendante de certaines variables à optimiser. En effet, le critère permet d'associer une valeur numérique (réelle) pour chaque choix de variables admissibles (pour chaque comportement possible), afin de pouvoir comparer entre elles les variables qui satisfont les contraintes ; par exemples :
- (a) Pour une étude à deux avions, le critère retenu par Maurer et al. [124] correspond à maximiser la distance de séparation finale entre les deux participants (« terminal miss distance »), laquelle est définie comme la distance minimale observée entre les avions au cours de la manœuvre d'évitement.
 - (b) Dans le modèle de Rey [140], le critère revient à minimiser les risques de conflits aériens.
 - (c) Pour notre modèle, détaillé au chapitre suivant, nous posons un critère quadratique dépendant des accélérations, et pénalisant indirectement ainsi les variations de vitesses autour des vitesses nominales des avions.

Le problème d'évitement de conflits aériens est particulièrement lié à la question de séparation entre avions. En effet, d'après la Définition 1.1, il suffit que les distances entre avions soient supérieures aux normes de séparation indiquées. Ces normes de séparation ont évolué au fil du temps - les distances standards imposées ont diminué - grâce aux meilleures conditions de navigation aérienne ; en particulier, ceci est dû à des prévisions plus précises de trajectoires, et à l'amélioration des moyens de communication.

1.2.1.1 Séparation : critère ou contrainte du système

Après la seconde guerre mondiale, le trafic aérien s'est inexorablement accru et des organisations internationales ont établi des règles de circulation. En près de 50 ans, la norme de séparation horizontale est passée de 20 NM à 5 NM actuellement (même si, en pratique, les contrôleurs aériens séparent les avions en considérant une distance plutôt de l'ordre de 8 NM), d'après Jousse et al. [109].

Dans la littérature, nous retrouvons les deux types classiques d'approches d'optimisation pour tenir compte de la séparation.

1. Certains auteurs placent cette information dans le critère, et vont ainsi pénaliser dans la fonction objectif les trop faibles distances entre avions. Par exemple, Maurer et al. [124] adopte une modélisation en contrôle optimal dont le critère est de maximiser l'écartement entre les deux mobiles coplanaires (avions ou bateaux). Afin de réduire la tâche des contrôleurs aériens, certaines approches choisissent de minimiser la somme des durées des conflits aériens potentiels ; ou également, la somme des « charges » de conflits aériens potentiels, définie dans Rey et al. [142]. Véla et al. [163] minimisent le nombre de manœuvres restant a priori à effectuer pour le contrôleur aérien. Ce type d'approches contourne le risque que le problème d'optimisation considéré soit trop contraint voire sans solution admissible. Ces approches permettent, dans certaines mesures, de proposer une aide à la décision pour les contrôleurs aériens, mais ne garantissent pas la résolution proprement dite de tous les conflits potentiels.
2. D'autres auteurs décident de faire apparaître cette condition comme un ensemble de contraintes qui doivent impérativement être satisfaites. La séparation considérée comme une contrainte est étudiée dans, par exemple, Chaloulos et al. [59], Pallottino et al. [131], et Cafieri [42]. Dans ce cas, si les approches passent par la résolution d'un problème de PNL, la condition de séparation entre avions apparaît difficile à gérer, à cause du nombre important de contraintes associées. En effet, le nombre de contraintes représentant la séparation croît de manière quadratique par rapport au nombre d'avions dans le problème d'optimisation. La solution obtenue garantit la résolution de conflits potentiels. Notre approche pour aborder le problème d'évitement de conflits aériens la représente aussi comme un ensemble de contraintes à satisfaire.

Nous nous plaçons dans une configuration planaire puisque les vols en-route sont à leur altitude de croisière (fixée). L'expression de la séparation entre les avions (d'un ensemble I) peut être vue comme une contrainte, avec la norme euclidienne, de la forme suivante :

$$\|x_i(t) - x_j(t)\| \geq D \quad \forall i < j, (i, j) \in I^2, \forall t \in [t_0, t_f],$$

dans laquelle, pour les deux avions considérés (i et j), les notations x_i et x_j représentent leurs positions horizontales respectives (en coordonnées cartésiennes) dans le plan, D la norme de séparation (horizontale) entre les avions (correspondant à 5NM), et t le paramètre temporel qui varie dans une période donnée (d'un instant initial t_0 à un instant final t_f).

L'application qui à un temps (t) associe la distance entre deux avions est quadratique concave, c'est pourquoi la séparation vue comme une contrainte va poser des difficultés dans le cadre de la résolution (numérique) du problème d'optimisation (modélisant l'évitement de conflits aériens).

Viennent s'ajouter les questions relatives aux problèmes de grande taille (i.e., taille très souvent liée au nombre d'avions n). En effet, le nombre d'avions considérés influence fortement le type d'approches, de modélisation et de résolution, comme nous le discuterons dans la suite.

1.2.1.2 Nombre d'avions considérés

Le nombre d'avions considérés est un des éléments déterminants dans ce type d'études sur la gestion du trafic aérien. Nous pouvons ainsi distinguer des travaux concernant

L'évitement de conflits aériens suivant différentes tailles de l'ensemble considéré d'avions.

1. Exactement 2 avions ; l'étude d'une paire d'avions a un intérêt particulier dans le sens où elle peut permettre une meilleure connaissance de la structure de la solution optimale ; par exemple, en termes de conditions nécessaires et/ou suffisantes sur l'optimalité des solutions, par exemple, comme Soler et al. [152] et Bicchi et Pallottino [23]. Dans Maurer et al. [124], les auteurs étudient les contrôles singuliers (cf. Définition 1.19) dans le cas d'évitement par changement de caps à deux avions avec des vitesses nominales différentes. Ils montrent que les contrôles optimaux ne peuvent pas être singuliers tous les deux (simultanément) et que l'unique contrôle singulier possible est le contrôle nul. (en considérant les avions à vitesse constante, en proposant une approche coopérative décentralisée, les auteurs proposent des conditions nécessaires d'optimalité sur les trajectoires) ;
2. De 3 à 8 avions (type d'étude ne dépassant qu'exceptionnellement 10 avions) (par exemple, Peyronne [134], Omer et Farges [129], et, Pallottino et al. [131], jusqu'à 12 avions) ; ce type d'études peut permettre de résoudre des ensembles d'avions en conflits potentiels à petite échelle ; i.e., à l'échelle d'un secteur aérien (en-route) sur une courte période de temps (par exemple, une durée correspondant à 1h) ;

D'autres approches, relevant de problèmes proches (par exemple, la planification de trajectoires sans conflit), proposent l'étude d'un nombre plus élevé d'avions.

1. De l'ordre du millier d'avions ; l'étude n'est plus en phase tactique ; l'étude peut permettre de résoudre des ensembles d'avions en conflits potentiels à moyenne échelle ; i.e., à l'échelle nationale sur une période de temps d'une journée (par exemple, Rey [140], par horizon glissant, en considérant des périodes de temps successives) ;
2. De l'ordre de la dizaine de milliers d'avions ; l'étude n'est plus en phase tactique ; l'étude peut permettre de résoudre des ensembles d'avions en conflits potentiels à grande échelle ; i.e., à l'échelle continentale sur une période de temps d'une journée (par exemple, en planification de trajectoires avec Chaimatanan [57]) ;
3. D'intersections de flux ; les approches de résolution visent à être insensibles au nombre d'avions (par exemple, Vela et al. [163], Frazzoli et al. [89]) ;

En 1996, Bertsimas et Stock-Patterson [18] sont parmi les premiers à discuter les flux de trafic et les capacités des secteurs dans l'espace aérien nord-américain, avec pour fonction objectif de minimiser le retard global. Le modèle fait appel à la Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE), et la formulation donnée est montrée appartenir à la classe des problèmes « NP-difficiles »¹.

REMARQUE 1.6. La planification de trajectoires sans conflit aérien potentiel s'avère être un problème proche de l'évitement de conflits aériens ; dans le sens où pour le premier cas, il s'agit de la génération de telles trajectoires, et dans le second cas, les trajectoires pré-définies demandent à être modifiées, en adoptant des stratégies comme le changement en cap ou le changement en vitesse.

Avec un nombre important d'avions en jeu, les questions relatives à la coordination des avions et à l'harmonisation du trafic aérien se posent naturellement. Durant leurs phases respectives de vol en-route, quels sont les moyens de communication entre avions ?

1. Des références au sujet de la théorie de la complexité sont Garey et Johnson [93], Papadimitriou [133] et Arora et Barak [5]

Les décisions prises par les avions proviennent-elles de leur propre initiative ou d'un intermédiaire commun? Ces réponses conditionnent en partie le cadre des études sur le problème d'évitement de conflits aériens. À présent, nous évoquons les deux grandes familles de résolution, suivant le partage d'information, comme suit.

1.2.1.3 Résolution décentralisée ou centralisée

Actuellement, comme mentionnés précédemment, les organismes de la navigation aérienne centralisent les plans de vols, en appliquant différents filtres de régulation pour harmoniser le trafic et, en dernier lieu, les contrôleurs aériens coordonnent les vols. Toutefois dans la littérature, nous pouvons retrouver deux familles d'approches de résolution distinctes comme suit.

Résolution centralisée. Les compagnies aériennes sollicitent, à l'avance, suivant les caractéristiques de l'avion et leurs préférences (notamment, cost index, par exemple, Roberson [146], et trajectoire de référence : « business trajectory »), un plan de vol ; et, les possibilités de la demande sont vérifiées par des organismes (le plus souvent internationaux) chargés de l'espace aérien en question, avec le souci d'un label d'économie globale, et de coordination du trafic. Notre approche dans cette thèse est centralisée.

Résolution décentralisée. Ce type de résolution se rencontre à travers des projets variés, par exemple, Free Flight (expliqué dans, par exemple, Krozel et al. [111] et Paielli et Erzberger [130]). La notion de résolution décentralisée repose sur l'hypothèse appelée trajectoire définie par l'utilisateur indépendamment des routes aériennes (« user defined trajectory »), développée depuis le milieu des années 1990 (par exemple, Tomlin et al. [158] et Tomlin et al. [157]). Les approches décentralisées peuvent être :

1. coopératives, par exemple, Wangermann et Stengel [170], dans le cadre d'optimisation distribuée (Distributed Artificial Intelligence, DAI), présentent un modèle en théorie des jeux, avec un principe de négociation entre agents (avions).
2. non-coopératives, par exemple, Carbone et al. [48] pour deux avions.

L'approche décentralisée demande une ré-organisation complète du système actuel de gestion de la navigation aérienne, avec une remise en cause du réseau de routes aériennes, des seteurs aériens et du rôle des contrôleurs aériens (humains). Elle admet encore des limites. D'une part, les routes aériennes actuelles sont les fruits de besoins et de volontés des services de navigation aérienne et des compagnies aériennes ; ainsi les constructions passées de routes aériennes (du réseau actuel) ont été accomplies au regard de différentes dépenses. D'autre part, l'augmentation de la capacité par la construction de nouvelles routes aériennes et aéroports est « complexe », à cause des dépenses économiques, des limitations d'espace aérien et des régulations environnementales, par exemple, Barnhart et al. [11].

Suivant ces deux résolutions, l'une centralisée avec une information commune (globale), l'autre décentralisée avec une information individualisée (locale), un autre questionnement survient avec la notion d'équité ; quel est le mode de résolution le plus juste (par exemple, pour les avions considérés, ou pour les compagnies aériennes) ? Les questions d'équité concernant la gestion du trafic aérien sont discutées, notamment à partir des années 2000, par exemple, Serali et al. [151] et, plus récemment, dans Barnhart et al. [11], et Rey et al. [141] spécifiquement pour l'évitement de conflits aériens. Dans notre modèle

présenté au prochain chapitre, un aspect d'équité entre avions est pris en compte, d'une part comme la résolution de conflits potentiels est simultanée (sans ordre de passage, sans séquençement), et d'autre part, grâce au critère est quadratique, en s'appliquant sur l'ensemble des avions, la variance des déviations (pénalisations relatives aux avions) est faible.

1.2.2 Modèles et méthodes de résolution

Comme notre approche, pour la modélisation et la résolution du problème d'évitement de conflits aériens, relève à la fois du contrôle optimal et à la fois de la régulation en vitesse, nous accordons une attention particulière aux approches développées dans ces cadres respectifs. Nous discutons ensuite d'autres méthodes (numériques) de résolution pour le problème d'évitement de conflits aériens.

1.2.2.1 Conflits aériens et contrôle optimal

Une des premières applications du contrôle optimal dans les questions impliquant le trafic aérien est apparue, en 1962, dans Bryson et Denham [37] où il est question de modéliser et résoudre un problème de décollage en temps minimal pour une trajectoire fixée d'avion. Un an plus tard, Bryson et al. [38], abordent le problème de planification de trajectoire avec des contraintes d'inégalité et proposent des conditions nécessaires pour les équations extrémales (équations liées au principe du maximum de Pontryagin, présenté en Théorème 1.15). Nous détaillons dans la section 1.3 les termes spécifiques à la théorie du contrôle optimal et les méthodes numériques de résolution.

Les approches et modèles d'optimisation continue tiennent compte pour l'étude d'un vol en-route d'un système dynamique et privilégient le plus souvent le modèle de type point-masse (reporté dans le manuel BADA [80], avec trois degrés de liberté, et signalé en Figure 1.4). La représentation des vecteurs forces est faite selon la dynamique newtonienne : mg le poids, T la poussée (thrust) et les composantes aérodynamiques, D la traînée (drag), et L la portance (lift), pour les référentiels considérés.

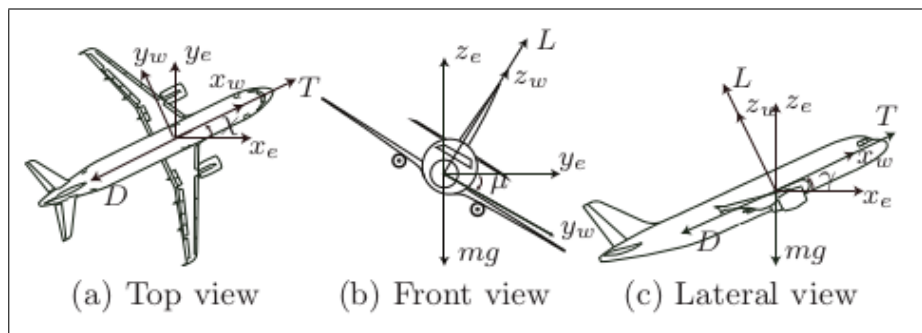


Figure 1.4 – Représentation du modèle point-masse avec les trois degrés de liberté du manuel de référence aéronautique BADA [80], image issue de Olivares et al. [128]. Trois angles de vues : (a) vue du dessus, (b) vue de face et (c) vue de profil.

À la fin du siècle dernier, la plupart des approches de modélisation et de résolution à travers l'optimisation continue, et, plus particulièrement, à travers le contrôle optimal suivent un mode de résolution décentralisée, avec les directives du projet Free Flight (par exemple, Krozel et al. [111] et Paielli et Erzberger [130]).

Tomlin et al. [158] modélisent le problème d'évitement de conflits aériens (en utilisant le changement en cap et le changement en vitesse) comme un système hybride, avec une dynamique non linéaire (sur chaque état discret). Le cadre retenu pour le problème est la théorie des jeux dynamiques non coopératifs à somme nulle. Pour une situation à deux avions, les auteurs supposent l'existence d'un point selle (point d'équilibre du jeu), et chacun des avions adopte une stratégie optimale au pire cas (ainsi, l'incertitude sur l'information -action de l'autre avion- est considérée comme une perturbation). L'approche fait alors appel à la résolution d'équations de Hamilton-Jacobi-Isaacs pour le calcul d'ensembles atteignables (une solution analytique est donnée en termes de sous-ensembles atteignables d'« états » sûrs, i.e., d'états respectant les conditions de séparation entre avions). Deux exemples d'évitements à deux avions sont proposés.

Au sein de la théorie du contrôle optimal, des méthodes reposent sur le principe de programmation dynamique de Bellman [13], et l'étude d'équations Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) (des références au sujet des équations HJB sont, par exemple, Barles [10] et Bardi et Capuzzo-Dolcetta [8]), même si ce type d'approche n'est pas développé dans cette thèse.

En considérant une information décentralisée entre les avions, Bicchi et Pallottino [23], proposent un modèle basé sur les changements en cap (considérant la vitesse constante) et décrivent des conditions nécessaires d'optimalité pour la planification de trajectoires optimales le long de points de passage (balises) donné(e)s. Clements et Ingalls [62] proposent un évitement de conflit à deux avions, avec différents critères de type temps minimum, dont ces derniers les conduisent à étudier des problèmes avec un contrôle optimal singulier. Plus récemment, afin d'étudier la structure de la solution optimale sous-jacente, Tarnopolskaya et al. [156] proposent une synthèse analytique de contrôle optimal pour l'évitement de collision entre deux véhicules coplanaires (exemples indiqués : deux avions ou deux bateaux). Les vitesses linéaires sont identiques pour les deux mobiles tandis que les capacités de changement en cap sont différentes. Les manœuvres d'évitement considérées s'effectuent par changement de cap (le contrôle u dans $[-1, 1]$, avec -1 et 1 pour des virages à gauche et à droite respectivement). Dans ce cas, la solution avec stratégie de type « bang-bang » (cf. Définition 1.19) ne s'avère pas toujours optimale ; dans le sens où elle ne satisfait pas toujours les conditions nécessaires d'optimalité au temps final sous certaines conditions. Ces conditions font appel à l'angle de croisement entre les trajectoires et du ratio entre les vitesses linéaires des avions.

Certaines approches considèrent en premier lieu une modélisation en contrôle optimal et se ramènent, pour la résolution, à étudier un problème de programmation non linéaire (mixte parfois), comme nous le discutons dans la suite. Par exemple, de manière apparentée (dans le sens de la précédente remarque 1.6), en 2013, Olivares et al. [128] et Bonami et al. [26], commençant par des modèles de contrôle optimal mixte (multi-phases) pour la planification de trajectoires (afin de trouver une séquence optimale de points de passage ou balises), appliquent une méthode numérique directe de collocation (définie en sous-section 1.3.3) Gauss-Lobatto de degré 5, reformulent et gèrent le problème comme un problème de programmation non linéaire en variables continues et entières (MINLP).

1.2.2.2 Conflits aériens et régulation en vitesse

Parmi les premiers auteurs à proposer une étude à deux avions considérant une modélisation avec des vitesses linéaires, Friedman [90] détermine l'instant optimal pour effectuer le changement en vitesse. Il obtient un résultat analytique qui dépend de l'angle de croisement entre les trajectoires pré-définies et du rapport entre les vitesses nominales des avions. De plus, l'auteur discute, pour ce type de configuration aérienne, de deux

indicateurs de la sévérité (intensity) des conflits potentiels détectés (nous y reviendrons lors de la génération d'instances, en sous-section 3.2.2).

Une importante partie des approches de ces dernières années, à propos de l'évitement de conflits aériens par une régulation en vitesse, concerne un domaine en plein essor, celui de la programmation mixte en variables décisionnelles continues et entières. Parmi les premiers auteurs à appliquer la programmation mixte dans un problème d'évitement de conflits aériens (par la régulation en vitesse), Pallottino et al. [131] proposent un modèle linéaire. Ce travail s'inscrit dans le domaine de la programmation linéaire mixte en variables continues et entières (Mixed Integer Linear Programming, MILP), basé sur une construction géométrique avec le vecteur vitesse relative pour détecter un conflit aérien potentiel, illustrée en Figure 1.5. Les auteurs arrivent à obtenir des solutions, via CPLEX [106], avec des temps de calculs relativement faibles (quelques secondes), pour des problèmes d'évitement avec un nombre d'avions élevé (de jusqu'à 17 avions avec 16 conflits potentiels détectés).

REMARQUE 1.7. L'approche de Pallottino et al. [131] montre l'importance non plus seulement du rapport entre les vitesses nominales (dû, notamment, à Friedman [90]) mais, plus généralement, du vecteur de la vitesse relative (pour chaque couple d'avions) dans la résolution de conflits potentiels mais aussi dans la détection de ces derniers.

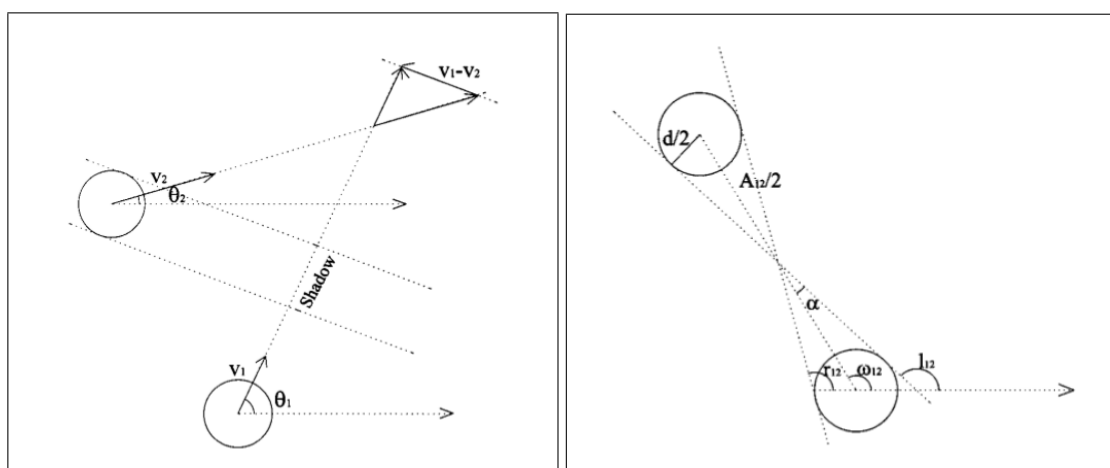


Figure 1.5 – À gauche, la représentation de la construction géométrique pour les contraintes d'évitement de conflit dans le cas de trajectoires en croisement pour le problème VC de Pallottino et al. [131]. Dans ce cas, l'avion 1 n'intersecte pas l'ombre générée par l'avion 2, en observant le vecteur de vitesse relative, ainsi un conflit ne peut pas avoir lieu entre ces deux avions. À droite, les deux droites sécantes sont tangentes aux disques de sécurité de rayon $d/2$ pour les deux avions à distance $A_{12}/2$. À l'aide de ces deux constructions géométriques, Pallottino et al. proposent une modélisation du problème d'évitement de conflit par la programmation linéaire mixte, en variables décisionnelles continues et entières (type MILP).

Omer et Farges [129] étudient un évitement de conflits aériens par changements en cap et en vitesse (avec accélérations constantes). Le problème de contrôle initial est transformé par une méthode numérique directe (expliquée en sous-section 1.3.3) en problème de PNL. Pour chaque paire d'avions, une variable binaire représente le choix pour un avion de passer à droite ou à gauche de l'avion qu'il va rencontrer. Le problème alors de type MINLP se ramène à un problème MILP par une linéarisation obtenue via une approximation du volume de séparation, un disque -dans le cas du modèle à altitude constante-

en un polygone, en particulier, hexagone et octogone (technique de linéarisation aussi utilisée précédemment dans l’approche MILP de Richards et How [144]).

Vela et al. [164] modélisent l’évitement de conflits aériens, par changements en altitude et en vitesse, en un problème de MILP dont le critère est basé sur la consommation en carburant. L’approche est basée sur des points de passages/d’arrivée (Real Time of Arrival, RTA) et des solutions sont obtenues pour un trafic important, en moins de 10 minutes, via le solveur CPLEX [106]. Alonso-Ayuso et al. [3] font usage de la construction géométrique de Pallottino et al. [131] et proposent une extension (dans le sens où davantage de configurations aériennes peuvent être prises en compte) modélisant l’évitement de conflits aériens par manœuvres de changement en vitesse. Rey et al. [142, 143] développent un modèle de MILP pour la minimisation de la charge (une mesure similaire à la somme des durées) de conflits aériens potentiels aux moyens de régulation en vitesse. Les auteurs montrent notamment que, pour leur approche, la régulation en vitesse peut être utilisée pour un nombre important d’avions, par exemple, dans le cadre d’une journée de trafic en-route européen, en considérant des fenêtres de temps successives (par horizon glissant), testée avec un simulateur de trafic aérien. Plus récemment, des modèles de régulation en vitesse faisant appel aux techniques de programmation non linéaire mixte en variables décisionnelles continues et entières (Mixed Integer NonLinear Programming, MINLP)² ont été proposés ; par exemple, Cafieri et Durand [43]. Les auteurs minimisent un critère de la forme : $\sum_{i \in I} (1 - q_i)^2 \Delta_{t,i}^2$ pénalisant un produit de deux carrés : le carré du changement en vitesse où q_i est dans $[0, 94; 1, 03]$ respectif à chaque avion i (représentant le pourcentage de variations en vitesse autour de la vitesse nominale, suivant le projet ERASMUS) et le carré de sa durée, dans le sens où, $\Delta_{t,i}$ correspond à la différence entre l’instant de fin et de début de manœuvre en vitesse. Dans cette approche, les instants de début et de fin de manœuvre pour chaque paire d’avions donnent six configurations temporelles différentes, qui sont prises en compte par une variable binaire. Pour chaque paire d’avions, il y a donc en particulier, une contrainte sur six variables binaires. La résolution globale du modèle, avec le solveur COUENNE [14], jusqu’à six avions ayant le maximum de conflits potentiels (problème en cercle, décrit en sous-section 3.2.2) est obtenue. Dans la littérature, nous avons constaté qu’une partie importante des approches d’optimisation, pour la modélisation et/ou la résolution, du problème d’évitement de conflits aériens par régulation en vitesse, s’est fortement développée avec les récentes avancées en MILP, et très récemment avec des techniques en Mixed-Integer Optimal Control (MIOC) et MINLP. Nous présentons enfin un aperçu des approches d’optimisation différentes (i.e., différentes par rapport au contrôle optimal et aux techniques en MILP et MINLP) qui peuvent être rencontrées le problème d’évitement de conflits aériens.

1.2.2.3 Approches d’optimisation différentes

Parmi les principales approches d’optimisation qui n’ont pas encore été citées concernant la gestion du trafic aérien et, plus spécifiquement, le problème d’évitement de conflits aériens, nous pouvons citer :

- « Les algorithmes évolutionnaires ». Delahaye et Puechmorel [68] présentent un panorama de l’étude de la gestion du trafic aérien sur les deux dernières décennies, notamment avec les travaux menés par les équipes de recherche du site toulousain de l’ÉNAC. On y trouve les techniques et l’usage d’algorithmes évolutionnaires dans le contexte aérien, concernant la gestion du trafic à l’échelle européenne pour le problème de planification de trajectoires sans conflit, par exemple,

2. Un panorama de 2012 sur les méthodes en MINLP non-convexe est proposé par Burer et Letchford [41].

Chaimatanan et al. [58] et concernant la gestion du trafic transatlantique, par exemple, Rodionova et al. [147]. Delahaye [66] et Durand [78] sont parmi les premiers à appliquer des techniques d'algorithmes génétiques en gestion du trafic aérien, respectivement pour la sectorisation et l'évitement de conflits aériens. Ces approches ne tiennent pas compte d'information sur les propriétés de la fonction objectif ou des propriétés du domaine admissible des solutions.

- « L'optimisation sans dérivées ». Récemment, par exemple, Peyronne [134] met en œuvre des algorithmes génétiques et des techniques d'optimisation sans dérivées (Derivative Free Optimization, DFO) pour l'évitement de conflits aériens ; les trajectoires étant caractérisées comme des « courbes splines » (en réduisant ainsi le nombre de variables des problèmes en PNL).
- « La programmation semi-définie ». La mise en œuvre de la Programmation Semi-Définie (PSD) est développée dans Bilimoria [24] avec des manœuvres en changements en cap, et dans Frazzoli et al. [88] concernant la gestion d'évitement de conflits aériens pour deux flots/flux d'avions (par exemple, dans l'étude d'une intersection de deux routes aériennes).
- « Les modèles multi-agents ». D'autres approches, du point de vue d'une résolution décentralisée, dans une situation où les mobiles (les avions) sont indépendants (i.e., avec chacun leur information propre et locale), sont basés sur techniques en « systèmes multi-agents », par exemple, Tomlin et al. [158], et Rong et al. [149].
- « La théorie des graphes ». Par exemple, récemment Prot et al. [139] proposent d'étudier un maillage hexagonal de routes aériennes comme un graphe orienté, en considérant une résolution de type décentralisée ; ou encore, Lehouillier et al. [116] se ramènent à un problème de cliques maximales dans un graphe, en considérant pour sommets des manœuvres discrètes en cap et où ces dernières sont reliées entre elles par des arêtes si elles ne génèrent pas de conflit. Les auteurs proposent ainsi une formulation MILP, et résolvent des problèmes d'évitements jusqu'à 20 avions (en moins de 20 secondes) avec le solveur CPLEX [106].

Nous nous intéressons, dans cette thèse, à une approche de contrôle optimal déterministe afin de modéliser et de résoudre le problème d'évitement de conflits aériens. Dans la section suivante, nous rappelons les outils mathématiques spécifiques au contrôle optimal que nous utiliserons dans cette thèse.

1.3 Contrôle optimal

Nous donnons ici un aperçu du champ théorique privilégié pour cette étude : le contrôle optimal. Plus précisément, nous consacrons cette section aux problèmes de contrôle optimal déterministe avec des équations différentielles ordinaires, à ses moyens de modélisation et méthodes numériques de résolution.

Tout d'abord, précisons le terme « contrôle ». La contrôlabilité correspond à l'étude d'un système dynamique contrôlé et revient à vérifier l'existence de solutions, à savoir si un tel système peut atteindre un ensemble d'états-cibles suivant ses possibilités de contrôle. Mentionnons, par exemple, la contrôlabilité étudiée dans le cadre du transfert orbital (orbit transfert), par exemple, Bonnard et al. [36], ou, dans le cadre d'une application en biologie, Alouges et al. [4] concernant les capacités d'auto-propulsion de micro-nageurs.

De plus, dans le domaine du contrôle optimal, le qualificatif « optimal » nous oriente vers la branche mathématique de l'optimisation. En effet, la contrôlabilité est le plus

souvent déjà réalisée ou, plus modestement, admise. Les conditions de contrôlabilité satisfaites, il s'agit non plus de savoir si nous pouvons atteindre la cible (l'existence de solutions), mais davantage de savoir comment l'atteindre à moindre coût, et ainsi de déterminer quels sont les comportements (processus) optimaux, suivant un critère choisi (optimalité des solutions). Ainsi, parmi une (possible) infinité de solutions admissibles, il apparaît souvent que certaines solutions sont privilégiées. Ces dernières sont dites solutions optimales, comme elles conduisent à l'optimisation d'un critère.

Nous présentons ainsi le formalisme et la modélisation avec la multitude des champs d'application dans lesquels on peut les retrouver. Nous discutons ensuite un des théorèmes clefs : le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) et quelques méthodes numériques de résolution.

1.3.1 Formalisation en termes de contrôle optimal

Pour ne citer que quelques exemples (classiques), les problèmes de contrôle optimal donnent un cadre et des pistes de résolution pour les questions suivantes.

1. En robotique, par exemple, Mombaur et al. [125], dans les systèmes de mouvements biologiques, par exemple, en minimisant le nombre de fonctions élémentaires nécessaires (appelées primitives en robotique) dans la reproduction d'un mouvement, par exemple, Li [117], pour contrôler un bras articulé lors d'une opération chirurgicale, et autres applications en médecine ;
2. En systèmes de communication, interface avec le traitement de l'image, notamment pour le problème de contraste, par exemple, Cots [65] ;
3. En électricité et électronique, par exemple pour l'étude d'un véhicule électrique, par exemple, Sager et al. [150] ;
4. En systèmes d'énergie, pour la gestion de barrages hydroélectriques ou de centrales nucléaires, par exemple, Pfeiffer [135] ;
5. En médecine, pour gérer des opérations au laser, en définissant la quantité, la durée et l'emplacement des émissions, dans le but de rétablir la courbure d'un œil pour un patient atteint de myopie ; ou encore, pour modéliser des processus de diffusion et traitements en anti-angiogènes, par exemple, Ledzewicz et Schättler [115], et Dupuis [77] ;
6. En économie, minimiser une dépense ou maximiser un gain, via une modélisation de différents agents avec leurs intérêts respectifs, interface avec la théorie des jeux, par exemple, Laraki et al. [112], Fudenberg et Tirole [92], et, plus précisément, les jeux différentiels, par exemple, Cardaliaguet [49] ;
7. En mécanique spatiale et aérospatial (par exemple, Trélat [160]), pour permettre un déplacement de satellite (transfert orbital), par exemple, Caillau et al. [46], Caillau [44], gérer un atterrissage sur une planète, avec une consommation minimale en carburant ; veiller à réduire l'accumulation de chaleur, en minimisant la chaleur due aux frottements pour une navette spatiale lors d'une traversée de l'atmosphère appelée rentrée atmosphérique (atmospheric re-entry), par exemple, Bonnard et al. [36].

Nous décrivons davantage les approches développant des méthodes en contrôle optimal pour les applications en aéronautique dans la sous-section 1.2.1.

En contrôle optimal, nous distinguons deux variables vectorielles : une variable de contrôle u , pour indiquer les décisions prises, et une variable x , pour indiquer l'état du système au fil du temps. Le modèle de contrôle standard (\mathcal{P}_c) pour un système contrôlé est

composé de deux éléments essentiels : le système dynamique contrôlé (auquel s'ajoutent souvent des contraintes) et la fonctionnelle (définissant le critère d'optimisation) :

$$(\mathcal{P}_c) \left\{ \begin{array}{ll} \min_{u,x} \mathcal{J}(u(t), x(t)), & \text{(fonctionnelle correspondant au coût à minimiser)} \\ \text{sous les contraintes} & \\ \dot{x}(t) = f(u(t), x(t), t), & \text{(système dynamique contrôlé : équations d'états)} \\ x(t_0) = x^{t_0}, \quad x(t_f) \in C_f, & \text{(conditions initiales et terminales, sur les états)} \\ g(u(t), x(t), t) \leq 0. & \text{(contraintes éventuelles sur le contrôle et/ou l'état)} \end{array} \right.$$

où l'état (noté x) est de dimension n , le contrôle (noté u) de dimension m , et C_f représente l'ensemble des états finaux, comme conditions terminales.

1.3.1.1 Système dynamique contrôlé et contraintes

Tout d'abord, nous nous donnons un système dynamique, autrement dit, un système différentiel. Ce système dynamique admet, de plus, des conditions initiales, comme le problème de Cauchy. Il peut être complété avec des conditions terminales. Il s'agit pour un mobile (objet en mouvement, par exemple un avion) d'atteindre un ensemble cible. Enfin ce problème différentiel va admettre une particularité, en effet, c'est un système contrôlé, pour lequel nous nous intéressons à une variable vectorielle de contrôle (souvent notée u)³.

DÉFINITION 1.8. Pour des fonctions données $g_{t_f}, g_x, g_{u,x}, g_u$ qui sont lisses (i.e., qui satisfont certaines conditions de régularité), citons, comme suit, différents types de contraintes sur le système contrôlé.

Les contraintes sur l'état final du système. (dans la littérature, on retrouve souvent le terme conditions terminales, ou final-state constraints)

$$g_{t_f}(x(t_f)) \leq 0.$$

Les contraintes pures sur l'état du système. (contraintes pures, pure state constraints ou path constraints)

$$g_x(x(t)) \leq 0 \text{ pour tout } t \text{ dans } [t_0, t_f].$$

Les contraintes mixtes état-contrôle du système. (contraintes mixtes, ou mixed constraints)

$$g_{u,x}(u(t), x(t)) \leq 0 \text{ pour presque tout } t \text{ dans } [t_0, t_f].$$

Les contraintes sur le contrôle du système. (contraintes sur le contrôle, ou control constraints)

$$g_u(u(t)) \leq 0 \text{ pour presque tout } t \text{ dans } [t_0, t_f].$$

Définissons à présent les différents types de contraintes (cf. Définition 1.8) qui peuvent être rencontrés dans la modélisation (et la résolution) d'un problème de contrôle optimal. Concernant les contraintes pures sur l'état, qui vont faire partie de nos préoccupations dans la suite de cette thèse, commençons par les remarques suivantes.

Les systèmes dynamiques qui peuvent être écrits sous la forme : $x(t)^{(k)} = f(u(t), x(t))$ sont des systèmes contrôlés par leurs $k^{\text{ième}}$ dérivées par rapport au temps. Les contraintes pures sur les variables d'états contrôlées par leurs $k^{\text{ième}}$ dérivées (par rapport au temps)

3. Notation u provenant du mot prononcé « upravlenie » signifiant commande en Russe.

sont appelées contraintes pures d'ordre k . Dans le chapitre suivant, nous considérerons, pour notre modèle et les approches de résolution, des contraintes pures d'ordres 1 et 2. En effet, notre système dynamique contrôlé admet l'accélération comme commande, et les variables d'état sont les vitesses et les positions. Elles sont soumises à certaines contraintes, dites pures, respectivement d'ordre 1 et d'ordre 2. Nous y reviendrons dans l'exposé de notre modèle et de nos approches de résolution lors du prochain chapitre.

1.3.1.2 Modélisation d'une fonctionnelle

Les critères parmi les plus fréquemment choisis sont le temps minimal (minimiser le temps de transfert d'un état vers un autre état), la consommation minimale (en carburant), ou encore satisfaire certaines propriétés de régularité (pour les trajectoires solutions). Du critère choisi, dépend la forme des trajectoires optimales. Pour des valeurs initiales données (t_0, x^{t_0}) , les comportements et les trajectoires suivies sont ainsi déduits du contrôle u .

DÉFINITION 1.9. La fonctionnelle, **fonction objectif**, $\mathcal{J} : U \rightarrow \mathbb{R}$, est une application d'un espace de fonctions (i.e., ensemble de contrôles admissibles) à valeurs dans \mathbb{R} , définie par :

$$\mathcal{J}(u(t), x(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_f} L(u(t), x(t), t) dt + \psi(t_f, x^{t_f}),$$

les applications L et ψ , sont respectivement appelées le **coût courant** et le **coût terminal**.

Le temps t_f correspond à l'instant final qui peut être soit libre, soit fixé ; et l'état du système noté $x^{t_f} \stackrel{\text{def}}{=} x(t_f)$ est l'état terminal qui peut lui aussi être soit libre, soit fixé. Plus précisément, donnons la définition.

DÉFINITION 1.10. Un problème de contrôle est à **temps final fixé** si l'instant de fin, noté t_f , est connu et fixé dans l'étude. Inversement, nous dirons qu'un problème de contrôle est à **temps final libre**, si l'instant de fin, noté t_f , est inconnu et fait partie des variables de décision à déterminer.

DÉFINITION 1.11. Suivant la fonctionnelle considérée dans le problème de contrôle optimal, la représentation du problème de minimisation est dite :

de Lagrange, avec la fonction ψ triviale, comme suit,

$$\mathcal{J}(u(t), x(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_f} L(u(t), x(t), t) dt,$$

de Mayer, avec la fonction L triviale, comme suit,

$$\mathcal{J}(u(t), x(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(t_f, x^{t_f}),$$

de Bolza, avec les fonctions ψ et L non triviales, comme suit,

$$\mathcal{J}(u(t), x(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_f} L(u(t), x(t), t) dt + \psi(t_f, x^{t_f}).$$

REMARQUE 1.12. Naïvement, la formulation de Bolza semble plus générale ; pourtant les trois formulations (de Lagrange, de Mayer et de Bolza) sont équivalentes (cf., Trélat [159]).

DÉFINITION 1.13. Un problème de contrôle est **autonome** lorsque la fonction objectif n'est pas dépendante explicitement du temps. Plus précisément, pour un problème autonome, la fonction objectif ne dépend pas directement de la variable de temps t (bien que le système contrôlé évolue dans le temps avec une certaine dynamique qui dépend du temps). Si ce n'est pas le cas, le problème est non-autonome.

Ainsi, la résolution d'un problème de contrôle optimal, comme (\mathcal{P}_c) , peut être comprise comme : trouver un contrôle $u(\cdot)$ qui minimise $\mathcal{J}(u(\cdot), x(\cdot))$ sur l'ensemble des contrôles admissibles.

DÉFINITION 1.14. Un problème de contrôle est **en boucle ouverte** s'il passe par la résolution d'équations d'états, une fois et une seule. Le plus souvent, cette approche fait appel au Principe du Maximum de Pontryagin (PMP). Autrement, s'il passe par la résolution d'équations d'états puis d'une loi de commande, dans un processus itératif, le problème de contrôle est **en boucle fermée**. Le plus souvent, cette approche est réalisée à travers la programmation dynamique et la résolution d'équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

1.3.2 Principe du maximum de Pontryagin

Une des clefs de voûte du domaine contrôle optimale est l'étude du théorème appelé Principe du Maximum de Pontryagin (PMP), qui, en particulier, fournit des conditions nécessaires d'optimalité. Nous rappelons ici quelques points importants et fondamentaux.

1.3.2.1 Principe du maximum sans contrainte

Le PMP garantit que, sous certaines hypothèses, une fonction optimale pour minimiser un coût existe et sera trouvée par construction d'une fonctionnelle, « le hamiltonien » (à maximiser). Mais plus encore cette fonction solution (extrémale) satisfera des équations différentielles impliquant les variables d'états et les variables d'« états adjoints » (que nous allons introduire), nous parlerons alors d'un système d'« équations extrémales ». Davantage de précisions techniques se retrouvent dans les ouvrages de Pontryagin et al. [136] et de Bryson et Ho [39], plus récemment, par exemple, Trélat [159] et Liberzon [118].

Nous introduisons le scalaire réel z_0 associée à la variable x^0 de la fonction coût, définie par : $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}(u(t), x(t)) \left(\stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_f} L(u(t), x(t)) dt \right)$ pour un problème de contrôle optimal sous forme de Lagrange).

Soit un problème de contrôle optimal, sans contrainte, sous forme de Lagrange, avec la dynamique $\dot{x}(t) = f(u(t), x(t), t)$ pour tout $t \in [t_0, t_f]$. Grosso modo, le PMP énonce que toute trajectoire minimisante $x(\cdot)$, dans le sens où elle minimise le critère d'optimisation $\mathcal{J}(u(\cdot), x(\cdot))$, est la projection d'une extrémale $(x(\cdot), z(\cdot), z_0, u(\cdot))$ solution des équations

extrémales, pour presque tout t dans $[t_0, t_f]$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial z}(x(t), z(t), z_0, u(t)), \\ \dot{z}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), z(t), z_0, u(t)), \end{cases}$$

et que le contrôle optimal $u(\cdot)$ maximise le hamiltonien H , où H est défini pour tout t dans $[t_0, t_f]$ par :

$$H((x(t), z(t), z_0, u(t))) \stackrel{\text{def}}{=} (z(t) \mid f(x(t), u(t))) + z_0 L(t, x(t), u(t)).$$

Dans le cas d'un problème de minimisation avec une extrémale normale (définie ci-dessous), le scalaire z_0 est considéré strictement négatif pour la maximisation du hamiltonien H . Dans ce cas, sans perte de généralité, on normalise et on pose : $z_0 = -1$.

Le théorème suivant énonce les conditions du PMP (ou théorème de Pontryagin-Boltyanski) pour le problème de contrôle autonome sans contrainte avec extrémités fixées.

THÉORÈME 1.15. Soit un problème de contrôle optimal autonome, sans contrainte et avec extrémités fixées. Soit $u^* : [t_0, t_f] \rightarrow U$ un contrôle optimal (dans le sens global, i.e., solutions optimales globales) et soit $x^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la trajectoire optimale d'états correspondante.

Alors il existe une application $z : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et une constante z_0 satisfaisant :

$$(z(t), z_0) \neq (0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}}) \quad \text{pour tout } t \text{ dans } [t_0, t_f],$$

et ayant les trois propriétés suivantes.

1. Le hamiltonien $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par :

$$H(x(t), z(t), z_0, u(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (z(t) \mid f(x(t), u(t))) + z_0 L(x(t), u(t)).$$

et, les fonctions x^* et u^* satisfont les équations extrémales suivantes, pour presque tout t dans $[t_0, t_f]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial z}(x^*(t), z(t), z_0, u^*(t)), \\ \dot{z}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), z(t), z_0, u^*(t)), \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites $x^*(t_0) = x^{t_0}$ et $x^*(t_f) = x^{t_f}$,

2. Pour chaque t fixé, la fonction $u \mapsto H(x^*(t), z(t), z_0, u(t))$ a un maximum en $u = u^*$, en d'autres termes, l'inégalité :

$$H(x^*(t), z(t), z_0, u^*(t)) \geq H(x(t), z(t), z_0, u(t))$$

est vérifiée pour tout t dans $[t_0, t_f]$ et pour tout u dans l'ensemble admissible U_{ad} .

3. La quantité $H(x^*(t), z(t), z_0, u^*(t))$ est constante pour tout t dans $[t_0, t_f]$.

DÉFINITION 1.16. Une **extrémale** : $t \mapsto (x(t), z(t), z_0, u(t))$ solution des équations extrémales présentées en Théorème 1.15 est dite **anormale** si $z_0 = 0$, et **normale** dans le cas contraire. De plus, une extrémale est dite **singulière** si $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, par exemple, Bonnard et Chyba [35]; l'extrémale est dite **régulière** autrement.

À présent, comme rappelé dans Trélat et Zuazua [161], cette hypothèse à propos de l'extrémale normale est automatiquement satisfaite sous de faibles conditions pour de nombreuses classes de problèmes en contrôle optimal (par exemple, Chitour et al. [60], Rifford et Trélat [145]), ou sous des hypothèses appropriées concernant la contrôlabilité (par exemple, Bettioli et Frankowska [19], Vinter [167]).

En appliquant le PMP (pour davantage de détails théoriques, cf. Pontryagin et al. [136], Bryson et Ho [39] ou Trélat [159]), nous souhaitons maximiser le hamiltonien (pour minimiser notre problème de contrôle optimal). Tout au long de la thèse, nous ne considérons pas le cas anormal et, ainsi, nous normalisons le scalaire z_0 associé à la fonction coût x^o comme suit : $z_0 = -1$.

Comme nous verrons plus en détails, en Section 2.3, pour les méthodes de résolution (et leur démonstration) nous ferons appel aux conditions du PMP sans contrainte sur les états (dans les « zones », à savoir en « prézone » et en « postzone », que nous définirons, où les avions ne peuvent pas être en conflits).

Il existe des variantes, plus élaborées, de ce théorème ; notamment pour prendre en compte différentes contraintes (sur les contrôles et/ou sur les états). Un aperçu de la gestion des contraintes sur les états pour l'énoncé des conditions du PMP fait l'objet de la partie suivante.

1.3.2.2 Principe du maximum avec contraintes

Historiquement, on situe les premiers travaux au début des années 1960. Par exemple, Berkovitz [17] réduit le problème de contrôle optimal avec contraintes sur les variables d'états en problème de contrôle optimal avec une formulation de Bolza, sans contrainte sur les variables d'états, et applique la théorie associée. Dreyfus [74] considère un problème en contrôle optimal avec une formulation de Mayer, et traite du problème variationnel restreint aux contraintes d'inégalités.

Jacobson et al. [108] donnent des conditions nécessaires d'optimalité, issues de celles de Denham et Bryson [70] pour des problèmes de contrôle optimal avec des contraintes d'inégalités sur les variables d'états ; enfin, un panorama est donné dans Hartl et al. [98].

De nos jours, les conditions du PMP pour des problèmes avec contraintes restent difficiles, et ne sont pas développées dans le cadre de cette thèse. Les recherches sont toujours actives, par exemple, Bonnans et Hermant [31] offrent un cadre théorique aux méthodes de tir (discutées en 1.3.3.2), dans le cas de hamiltoniens fortement convexes. Plus récemment, Hoehener [104] propose une approche variationnelle pour des conditions nécessaires d'optimalité du second-ordre pour des problèmes de contrôle optimal avec des contraintes pures sur les états.

Indiquons à présent un exemple, d'après Hermant [100], de conditions du PMP pour des problèmes avec contraintes sur les états. Les problèmes de contrôle optimal autonomes

avec contraintes sur les variables d'états peuvent se formuler comme suit :

$$(\mathcal{P}_{ce}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{u,x} \mathcal{J}(u(t), x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t)) dt, \\ \text{sous les contraintes} \\ \dot{x}(t) = f(u(t), x(t)) \text{ pour tout } t \text{ dans }]t_0, t_f[, \\ x(t_0) = x^{t_0}, \\ g(x(t)) \leq 0 \text{ pour tout } t \text{ dans } [t_0, t_f]. \end{array} \right.$$

THÉORÈME 1.17. Soit un problème de contrôle optimal (P_{ce}) . Soit (u, x) une solution optimale de (P_{ce}) , qui satisfait la condition de qualification^a (par exemple, Hermant [100]). Alors il existe une application z dans $BV([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n^*})$, une constante z_0 satisfaisant :

$$(z(t), z_0) \neq (0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}}) \text{ pour tout } t \text{ dans } [t_0, t_f],$$

et $d\eta$ dans $\mathcal{M}([t_0, t_f])$, tels que, pour presque tout t dans $[t_0, t_f]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(u(t), x(t)), \quad x(t_0) = x^{t_0}, \quad g(x(t)) \leq 0, \\ \dot{z}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), z(t), z_0, u(t)) - d\eta(t) \frac{\partial g}{\partial x}(x(t)), \\ \int_{t_0}^{t_f} g(x(t)) d\eta(t) &= 0, \quad d\eta(t) \geq 0, \end{aligned}$$

et u maximise le hamiltonien H , défini par :

$$H(x(t), z_0, z(t), u(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (z(t) \mid f(x(t), u(t))) + z_0 L(x(t), u(t)).$$

a. Il existe w dans U_{ad} tel que $\frac{\partial g}{\partial x}(x(t)) p_{w-u}(t) < 0$ pour tout t tel que $g(x(t)) = 0$, où p_{w-u} est solution de l'équation d'état linéarisée $\dot{p}_{w-u}(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(t), x(t))(w(t) - u(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), x(t)) p_{w-u}(t)$ pour t dans $[t_0, t_f]$, et $p_{w-u}(t_0) = 0$.

REMARQUE 1.18. (Trélat [159]) Une différence fondamentale avec le principe du maximum de Pontryagin sans contrainte correspond au fait, qu'avec la présence de contraintes sur l'état, le vecteur d'états-adjoints peut être discontinu. C'est pourquoi, on rajoute alors des conditions de saut, ou de jonction.

L'usage du PMP avec contraintes sur l'états peut être évité éventuellement par une méthode numérique de pénalisation. On modifie alors le problème de contrôle optimal en pondérant la contrainte sur l'état de manière à la forcer à être vérifiée (cf. Trélat [159] pp.100, proposition 7.2.2.).

En compléments des énoncés présentés et de ce cadre analytique, nous rappelons des algorithmes et méthodes numériques de résolution. Spécifiquement conçu pour les problèmes de contrôle optimal, nous allons présenter l'un des plus connus, l'algorithme de tir et quelques méthodes numériques de résolution, et plus spécifiquement les méthodes de tir, directes et indirectes.

1.3.3 Méthodes numériques de résolution en contrôle optimal

De nombreuses méthodes numériques en contrôle optimal se sont développées ces dernières décennies. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous présentons trois principaux

types d'approches.

1. Des méthodes déterministes locales (par exemple, Trélat [159]) ; ce premier ensemble de méthodes va être développé dans la suite de cette thèse. Nous précisons ainsi comment elles peuvent se distinguer en deux sous-ensembles.
 - (a) Méthodes « directes » (cf. 1.3.3.1). En faisant appel à une « discrétisation » totale ou partielle du problème de contrôle optimal (dans le sens où, la discrétisation/le découpage permet de transformer le problème continu en un problème discret, avec un nombre fini de variables), elles traduisent en partie le problème initial en problème de programmation non linéaire (de grande taille).
 - (b) Méthodes « indirectes » (cf. 1.3.3.2). Ainsi, on retrouve, parmi les plus connues, les méthodes « de tir » (par exemple, Bonnans [29]). En « boucle ouverte », les méthodes indirectes de tir (simple ou multiple) utilisent les conditions du PMP, afin de déterminer les contrôles (u) en fonction des états (x) et des états adjoints (z), et de se ramener à la résolution d'un système algébro-différentiel. Ce dernier système va être transformé en un problème non linéaire de dimension finie, dans lequel il faut déterminer les états adjoints initiaux ($z(t_0)$) permettant d'obtenir (de retrouver) les états finaux ($x(t_f)$).
2. Des méthodes « en commande prédictive » (Model Predictive Control, MPC), par exemple, Camacho et Bordons [47] et Bemporad [15]. Elles sont utilisées « en boucle fermée » et permettent de résoudre les systèmes d'équations considérés à partir d'observations (« retours ») sur les états. Ces méthodes ne sont pas développées dans le cadre de cette thèse.
3. Des méthodes « globales » basées sur les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), par exemple, Barles [10] et Bardi et Capuzzo-Dolcetta [8]. Ces méthodes ne sont pas développées dans le cadre de cette thèse.

Nous détaillons les méthodes numériques déterministes locales que nous avons privilégiées pour cette thèse. D'une part, comme nous allons l'observer, les méthodes directes permettent, à travers une discrétisation totale ou partielle du problème, une prise en compte des contraintes sur les variables d'états et une résolution efficace dans la mesure où le nombre de variables (du problème généré de PNL) n'est pas trop important. En effet, notre modélisation du problème d'évitement (au chapitre suivant) se traduit par un problème de contrôle optimal avec contraintes sur les états. D'autre part, grâce à notre décomposition en zones, du problème initial en sous-problème de contrôle optimal (plus aisés à résoudre), nous utiliserons les conditions du PMP sans contrainte (cf. Théorème 1.15) pour les sous-problèmes (hors-zone) sans contrainte sur les variables d'états.

1.3.3.1 Méthodes numériques directes

Nous décrivons ici une classe d'approches numériques pour la résolution de problèmes de contrôle optimal appelée : méthodes directes. Des références à ce sujet sont les ouvrages de Bock et Plitt [25], Stoer et Bulirsch [153], et, plus récemment, ceux de Bonnans et Launay [32], Betts [20,21,22], et Laurent-Varin et al. [113]. Ce type d'approche fait appel à une discrétisation du temps, et par conséquent considère des discrétisations à la fois des variables-commandes et des variables-états. Le système dynamique en temps continu dans lequel sont liés les variables-commandes et les variables-états est alors transformé. Les équations aux dérivées partielles (EDP), ou plus simplement, équations différentielles ordinaires (ODE), linéaires ou non-linéaires, sont traitées par des

approximations, via des intégrateurs numériques (NUM), par exemple, soit h un pas de discrétisation de temps, Euler $O(h)$, Heun $O(h^2)$, ou Runge-Kutta RK4 $O(h^4)$ (RK4 étant une famille de formules du type Runge-Kutta, par exemple, Dormand et Prince [72]). Ainsi, le système dynamique initial se traduit par un système de « contraintes d'égalités ». Parmi les méthodes numériques directes, nous citons trois familles (par exemple, Hiriart-Urruty et Rondepierre [103]) : méthodes « directes de tir », méthodes « semi-directes », méthodes « de collocation ». Et nous décrivons en détails les méthodes directe de tir, qui seront utilisées au chapitre suivant. L'idée directrice consiste à commencer par discrétiser le contrôle (noté u) et/ou l'état (noté x) afin de transformer le problème de contrôle optimal initial en un problème de programmation non linéaire (PNL) en dimension finie mais potentiellement de grande taille.

Pour la présentation de ces méthodes, nous considérons un problème de contrôle optimal mis sous la forme de Lagrange, à savoir :

$$(P) \begin{cases} \min_{x,u} \mathcal{J}(u(t), x(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_f} L(u(t), x(t), t) dt \\ \text{sous les contraintes} \\ \dot{x}(t) = f(u(t), x(t), t), \quad (\text{système dynamique contrôlé : équations d'états}) \\ x(t_0) = x^{t_0}, \quad x(t_f) = x^{t_f}. \quad (\text{conditions initiales et terminales, sur les états}) \end{cases}$$

Le temps final (noté t_f) est supposé fixé. Les états initiaux et finaux, x^{t_0} et x^{t_f} , sont fixés. Les applications $f(\cdot)$ et $L(\cdot)$ sont données.

Concernant les méthodes numériques directes au sens strict, les méthodes directes de tir simple (discrétisation totale), on discrétise à la fois en état et en contrôle. Soit une subdivision, $t_0 < t_1 < \dots < t_{m_Z-1} = t_f$, de l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$. Le principe général s'articule de la façon suivante.

1. Définir une paramétrisation du contrôle sur chaque intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$, de sorte en général que le contrôle u soit polynomial par morceaux :

$$u(t) = U^{(l)}, \quad \text{pour tout } t \text{ dans } [t_l, t_{l+1}[.$$

2. Choisir un intégrateur numérique (noté NUM_x) d'intégration de la dynamique, pour approcher les équations d'états qui étaient représentées à travers $f(\cdot)$. Ainsi, l'intégrateur numérique (de type Euler, ou Runge-Kutta par exemples) est considéré pour résoudre les systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) mis en jeu :

$$\tilde{x}(t_{l+1}) = x^{(l+1)} \stackrel{\text{def}}{=} x^{(l)} + \text{NUM}_x(U^{(l)}),$$

Par exemple, le schéma d'Euler explicite (précision d'ordre 1) s'écrit :

$$\tilde{x}(t_{l+1}) = x^{(l+1)} \stackrel{\text{def}}{=} x^{(l)} + h_l \tilde{f}(t_l, x^{(l)}, U^{(l)}),$$

en considérant $\tilde{f}(\cdot)$ une approximation de la fonction $f(\cdot)$, $\tilde{x}(\cdot)$ une approximation de l'état $x(\cdot)$, et un pas de discrétisation du temps : $h_l \stackrel{\text{def}}{=} t_{l+1} - t_l$. Ou encore, la méthode des trapèzes (précision d'ordre 2) s'écrit :

$$\tilde{x}(t_{l+1}) = x^{(l+1)} \stackrel{\text{def}}{=} x^{(l)} + \frac{h_l}{2} \left(\tilde{f}(t_l, x^{(l)}, U^{(l)}) + \tilde{f}(t_{l+1}, x^{(l+1)}, U_{(l+1)}) \right).$$

3. Discrétiser le problème de commande optimale (P) pour obtenir un problème en

PNL avec contraintes de la forme :

$$\begin{cases} \min_{x,U} \quad \tilde{J}(U, x), \\ \text{sous les contraintes} \\ \quad x_{l+1} = x_l + \text{NUM}_x(U^{(l)}), \quad l = 0, \dots, m_Z - 2, \\ \quad x^{(0)} = x^{t_0}, \quad x^{(m_Z-1)} = x^{t_f}, \quad (\text{conditions initiales et finales, sur les états}) \end{cases}$$

avec le coût $\tilde{J}(\cdot)$ correspondant à une approximation de $\mathcal{J}(\cdot)$.

Dans le chapitre suivant, nous mettons en œuvre une méthode directe de tir. Nous utiliserons deux pas de discrétisation de temps : un pas de temps pour le contrôle U (avec l dans $\{0, \dots, m_Z - 1\}$) et un pas de temps (plus petit que le précédent) pour la mise à jour des états (v et x) et la satisfaction des contraintes sur les états (avec k dans $\{0, \dots, N_Z - 1\}$). Nous noterons le lien entre les deux entiers m_Z et N_Z comme le ratio ρ dans \mathbb{N}^* vérifiant la relation : $m_Z = \frac{N_Z}{\rho}$.

Les méthodes semi-directes reposent sur une discrétisation partielle du problème, en contrôle et/ou en état, en définissant une paramétrisation du contrôle sur chaque intervalle de temps $[t_l, t_{l+1}[$, puis en choisissant un intégrateur numérique pour la résolution des EDO, et enfin en discrétisant le problème de contrôle optimal en problème de PNL.

Concernant les méthodes de collocation, le principe général est le suivant. On suppose une représentation spécifique de l'état, « polynomiale » en particulier ; puis, on force la satisfaction des équations de la dynamique (dans le sens où le système dynamique contrôlé est vérifié) en un nombre fini d'instants aux conditions de collocation. Ces instants intermédiaires dans $[t_l, t_{l+1}[$, appelés instants de quadrature, subdivisent $[t_l, t_{l+1}[$ en $k - 1$ périodes, et sont utilisés par le schéma numérique d'intégration de la dynamique. On obtient des trajectoires d'état polynomial par morceaux qui convergent vers la dynamique du système contrôlé, aux points de collocation. La discrétisation du problème en contrôle optimal est ensuite réalisée et génère également un problème de PNL.

La démarche des méthodes numériques conduit à résoudre un problème en programmation non linéaire (potentiellement grand). Les méthodes directes admettent des erreurs d'approximation dues à la discrétisation du temps. En effet, la discrétisation est vue comme un découpage du problème continu pour se ramener à un problème discret, avec un nombre fini de variables. Ce découpage peut être homogène ou non (par exemple, distance régulière ou non entre les points de la discrétisation), ce découpage peut être défini à partir d'une grille. Certains auteurs ont développé des approches de grille adaptative, et proposent des procédures de raffinements de grille pour minimiser l'erreur de la solution (par exemple, Bérend et al. [16]).

Comme nous l'expliquons au chapitre suivant, notre approche de résolution est une combinaison de méthodes numériques de contrôle optimal. En particulier, pour une partie (la « zone »), elle fait appel à une méthode directe de tir, laquelle implique une discrétisation totale ou partielle du problème, et transforme le problème initial en problème de programmation non linéaire de grande taille. De nombreux ouvrages traitent de la résolution de problèmes en programmation non linéaire, comme : Nocedal et Wright [127], Bonnans et al. [30], Wächter [168] et Chachuat [56]. Des solveurs de problèmes en contrôle optimal sont basés sur la méthode directe, comme, par exemple, le solveur BOCOP, Bonnans et al. [33].

Les méthodes directes ne demandent pas de connaissance a priori sur le problème. Par exemple, elles ne nécessitent pas de connaissance concernant la structure de la commande (solution optimale). Nous entendons par le terme structure, la décomposition en arcs de

la commande, autrement dit, si la commande se compose d'arcs singuliers et/ou d'arcs réguliers (cf. Définition 1.19). Cette connaissance de la structure sera demandée dans les méthodes numériques indirectes.

1.3.3.2 Méthodes numériques indirectes

Généralement les méthodes numériques indirectes demandent des connaissances a priori sur la structure de la solution optimale recherchée. La structure d'une solution optimale correspond à un seul arc, ou plus généralement, à une succession d'arcs, définis ci-dessous.

DÉFINITION 1.19. Soit H le hamiltonien du problème de contrôle optimal considéré. Soit $x(\cdot)$ l'état, $z(\cdot)$ l'état adjoint et $u(\cdot)$ le contrôle du système. Un arc extrémal $(x(t), u, z(t))$ est dit **singulier** si la dérivée $\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u, z(t))$ par rapport au temps s'annule sur un intervalle de temps non trivial, i.e.,

$$\exists t_1 < t_2, \forall t \in]t_1, t_2[, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u, z(t)) \right) = 0.$$

Dans le cas contraire l'arc est dit **régulier**.

Lorsque la contrainte de contrôle est saturée, on parle d'arc **bang**. Parfois la commande de solution optimale correspond à une succession de commande qui sature une des contraintes, par exemple, arcs bang-bang. Lorsque la contrainte de l'état est saturée, on parle d'arc frontière.

Les méthodes indirectes font appel aux conditions du PMP, et la résolution est dite en boucle ouverte, puisqu'elles ne bénéficient pas de d'observation (« retour ») sur les états du système.

Une des principales méthodes indirectes est la méthode de tir. L'algorithme de tir fait la liaison entre les variables états et états-adjoints (introduits avec les conditions du PMP) depuis un temps de départ vers les valeurs cibles correspondantes pour un temps d'arrivée ; pour un panorama récent, par exemple, Bonnans [29]. En effet, connaissant la dynamique du système contrôlé, nous souhaitons déterminer les paramètres initiaux (variables d'états et co-états) qui permettent de satisfaire les conditions terminales de notre problème de contrôle optimal.

Plus précisément, la méthode numérique indirecte de tir simple demande l'emploi préalable des conditions du PMP. Soit $x(\cdot)$ l'état, $z(\cdot)$ le co-état, et $u(\cdot)$ le contrôle d'un problème de contrôle optimal (P). En appliquant le PMP, $u(\cdot)$ dépend de $x(\cdot)$ et $z(\cdot)$, i.e., $u(t) = u(x(t), z(t))$ localement. Nous obtenons que les extrémales $(x(\cdot), z(\cdot), u(\cdot))$ sont solutions, pour tout t dans $[t_0, t_f]$, du problème suivant :

$$(BVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial z}(x(t), z(t), u(t)), & x(t_0) = x^{t_0}, \quad x(t_f) = x^{t_f}, \\ \dot{z}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), z(t), u(t)), & z(t_0) = z^{t_0}, \end{cases}$$

où le contrôle optimal $u(\cdot)$ maximise le hamiltonien H .

Le système d'équations correspondant au problème (BVP) est connu sous le nom de problème aux deux bouts (« Boundary Value Problem »). On procède ensuite à une intégration numérique des EDO. Le problème (BVP) se transforme en système linéaire de petite taille (le nombre de variables correspond à deux fois le nombre de variables d'états).

La méthode de tir consiste à déterminer z^{t_0} tel que l'équation $x(t_f) = x^{t_f}$ soit vérifiée. Les valeurs z^{t_0} sont appelées les zéros de la fonction de tir, et la méthode de Newton est généralement utilisée pour les trouver. La méthode de Newton pose quelques difficultés pour la résolution numérique, en particulier, puisqu'elle est sensible aux points de départ.

D'autres méthodes indirectes faisant appel aux conditions du PMP, existent, par exemples, des méthodes homotopiques, par exemple, récemment les travaux de Cots [65], et des méthodes simpliciales et/ou continuation différentielle, par exemple, Allgower et Georg [2], et, plus récemment, Martinon [122]. Ces méthodes ne sont pas développées dans le cadre de cette thèse.

Nous avons observé dans les méthodes directes une démarche de résolution, des problèmes de contrôle optimal, en deux étapes :

1. une discrétisation du problème tout d'abord, avec un intégrateur numérique pour les EDO, qui traduit le problème de contrôle initial en un problème de PNL ;
2. une dualisation du problème ensuite, faisant appel aux conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour la résolution du problème en PNL (puis appel à la méthode de Newton).

Tandis que la démarche de résolution dans les méthodes indirectes, des problèmes de contrôle optimal, s'effectue dans un ordre contraire (à celui des méthodes directes), i.e. :

1. une dualisation du problème tout d'abord, avec les conditions du PMP, qui traduisent le problème de contrôle initial en problème aux deux bouts (*BVP*) ;
2. une discrétisation ensuite du problème (*BVP*), avec un intégrateur numérique pour les EDO, qui traduit le problème (*BVP*) en un problème de PNL, puis appel à la méthode de Newton (cf. la méthode indirecte de tir présentée ci-dessous).

Afin de synthétiser, les avantages et inconvénients des méthodes de tir abordées, nous nous appuyons sur le Tableau 1.1, d'après Trélat [159]. Ainsi dans ce bilan figurent les caractéristiques des méthodes directes et indirectes. Nous soulignons d'une part, les difficultés de mise en œuvre de la méthode indirecte de tir (en particulier, en nécessitant la connaissance a priori de la structure de la solution optimale, et en étant extrêmement sensible au point de départ pour l'initialisation de la méthode), d'autre part, les principales difficultés des méthodes directes de tir liés à la taille des problèmes générés en PNL.

MÉTHODES DIRECTES	MÉTHODES INDIRECTES
mise en œuvre simple, sans connaissance a priori	connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale
peu sensibles au choix de la condition initiale	très sensibles au choix de la condition initiale
facilité de la prise en compte de contraintes sur l'état	difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état
contrôles (globalement) optimaux en boucle fermée	contrôles (localement) optimaux en boucle ouverte
précision numérique basse ou moyenne	très grande précision numérique
efficaces en basse dimension	efficaces en toute dimension
gourmandise en mémoire	calculs parallélisables
problème des minima locaux	petit domaine de convergence

Tableau 1.1 – Récapitulatif des caractéristiques (points forts et points faibles) des méthodes numériques locales : directes et indirectes. (source : Trélat [159])

REMARQUE 1.20. Certaines méthodes numériques essaient de tirer partie des avantages des deux types de méthodes (directe et indirecte), il s’agit des méthodes hybrides (par exemple, Rondepierre [148]). L’idée notamment est d’initialiser une méthode indirecte de tir par le résultat d’une méthode directe de tir.

Des solveurs de problèmes en contrôle optimal sont basés sur des méthodes indirectes ; par exemple, c’est le cas du solveur COTCOT, par exemple, Bonnard et al. [34] (son extension récente, le solveur HAMPATH, par exemple, Caillaud et al. [45], est un couplage de méthodes indirectes avec « suivi de chemin »).

Les travaux de Bulirsch et al. [40] proposent de combiner, séquentiellement, méthodes directes et indirectes, pour obtenir les multiplicateurs de Lagrange du problème en programmation non linéaire sous-jacent et estimer variables de co-états.

Récemment, Trélat et Zuazua [161] présentent une approche indirecte « turnpike property », qui semble moins sensible au point de départ que la méthode indirecte de tir. Le principe général est de considérer la structure de la solution optimale en trois phases : une phase transitoire, suivie d’une phase stationnaire, et se terminant par une phase transitoire. Par analogie avec le trafic routier, en tenant compte d’un critère en temps minimal et d’une distance à parcourir suffisamment grande, la phase stationnaire peut être vue comme emprunter une autoroute/une voie rapide. Il s’agit ainsi de déterminer non pas un point de départ pour le début de la phase transitoire, mais plutôt d’estimer un point appartenant à la phase stationnaire, laquelle correspond à la majeure partie (en termes de temps) des valeurs prises par la solution optimale.

1.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons proposé, d’une part, une présentation du champ d’application de cette thèse, ainsi dans le contexte du trafic aérien, nous avons décrit en particulier le problème d’évitement de conflits, par une régulation « subliminale » en vitesse, et, d’autre part, une présentation du champ théorique, ainsi dans le cadre de la modélisation mathématique, de l’optimisation et du contrôle, nous avons précisé les méthodes numériques de résolution en contrôle optimal que nous allons privilégier. Ainsi, nous rappelons quelques uns des points saillants mentionnés, comme suit.

D’une part, nous avons observé que, malgré les filtres de la chaîne de régulation, une part importante et cruciale des problèmes de gestion du trafic est prise en charge par les contrôleurs aériens. Afin de les soutenir dans leur responsabilité, des outils d’aide à la décision sont opportuns, en particulier pour les problèmes de détection et de résolution de conflits aériens potentiels. De plus, les approches par régulation subliminale en vitesse constituent une démarche récente et originale, à la fois en offrant de nouvelles perspectives pour la résolution des problèmes d’évitement, en phase tactique, pour faire bénéficier les contrôleurs humains d’un trafic aérien chanceux, et, à la fois, en se montrant compétitives du point de vue économique et environnemental, notamment pour la réduction de consommation en carburant. Actuellement, concernant la régulation en vitesse, une importante partie des approches se développent dans le cadre d’une modélisation en problème de programmation mixte. Les hypothèses pour les formulations de type MILP sont souvent : un changement spontané en vitesse (solutions des vitesses constantes par morceaux), ou une approximation linéaire de la contrainte de séparation entre avions. Suivant les récents développements en MINLP, des approches ont été proposées pour les

problèmes d'évitement ; ce type d'approches permet une grande généralité pour la modélisation (avec la prise en compte de variables discrètes), mais la résolution numérique de ces problèmes s'avère difficile.

D'autre part, le contrôle optimal et les méthodes numériques développées ces dernières décennies ont déjà montré leur efficacité et leur fécondité, pour la modélisation et la résolution, à travers de nombreux champs applicatifs. La modélisation du problème en termes d'optimisation continue a particulièrement retenu notre attention pour décrire le déplacement (à travers un système dynamique contrôlé) pour chaque avion dans le problème d'évitement de conflits aériens. Les méthodes du contrôle optimal pour les problèmes d'évitement de conflits aériens en phase tactique ont davantage été étudiées dans un mode de résolution décentralisée, coopérative voire noncoopérative, où chaque avion a une information qui lui est propre, ou pour des manœuvres d'évitement par déviation de trajectoires en cap ou en altitude. Nous considérons une approche tenant compte davantage du système de gestion de contrôle aérien actuel, avec une résolution centralisée, en bénéficiant ainsi d'une information commune sur l'ensemble des avions considérés. Notre approche vise à traiter, en bénéficiant des méthodes de modélisation et de résolution (analytique et numérique) du contrôle optimal, le problème d'évitement de conflits aériens par régulation subliminale.

Ainsi, nous développons, dans le chapitre suivant, la formalisation du problème, et nous détaillons les combinaisons de méthodes numériques qui nous ont parues appropriées pour ce problème à travers les décompositions proposées.

CHAPITRE 2

Formalisation du problème via le contrôle optimal : décomposition en zones et combinaison de méthodes



« Il n'y a rien qui se passe dans le monde
sans qu'on observe le sens du maximum ou du minimum. »

L. Euler



Contenu de ce chapitre

2.1	Modélisation du problème par le contrôle optimal	54
2.2	Détection et décomposition du problème en zones	57
2.2.1	Régulation subliminale et détection au pire cas	58
2.2.2	Décomposition : une interprétation spatiale	59
2.2.3	Décomposition : une interprétation temporelle	60
2.3	Combinaison de méthodes de résolution	62
2.3.1	Méthode du PMP en postzone	62
2.3.2	Méthode du PMP en prézone	67
2.3.3	Résolution du problème en « zone »	72
2.3.4	Combinaison des méthodes utilisant le PMP en postzone	75
2.3.5	Combinaison des méthodes utilisant le PMP en prézone	76
2.3.6	Complexité des formulations	78
2.4	Conclusions	80

Ce chapitre porte sur notre formalisation du problème d'évitement de conflits aériens en termes de contrôle optimal, et les méthodes de résolution associées. La formalisation, décrite en Section 2.1, est basée sur une régulation subliminale en vitesse. Les variables de commandes sont les accélérations des avions. Le système contrôlé, composé d'équations différentielles ordinaires, suit alors les lois de la dynamique newtonienne, et permet de déduire les états : vitesses et positions. Nous proposons, en Section 2.2, une décomposition du problème en sous-problèmes de la manière suivante. En tenant en compte des conditions de séparation entre avions (suivant si elles doivent être vérifiées ou si elles peuvent être relâchées), nous identifions des « zones » (spécifiques au problème de l'évitement de conflits aériens en vitesse). Grâce à cette décomposition, il nous est possible d'appliquer différentes méthodes numériques de résolution, méthodes locales de tir. Nous proposons alors plusieurs combinaisons de méthodes numériques, en Section 2.3, sous l'hypothèse d'existence de solutions admissibles pour notre problème. Nous précisons les résultats obtenus avec les conditions d'application du PMP, qui nous fournissent des conditions nécessaires d'optimalité. Nous proposons également un algorithme de détection et de détermination de sous-ensembles d'avions « en rencontres potentielles ». Nous appliquons sur certaines « zones », sans contrainte sur les variables d'états (vitesses ou positions), des conditions d'optimalité basées sur le principe du maximum de Pontryagin, présentée en Théorème 1.15. Quand la séparation doit être considérée comme contrainte, nous appliquons une méthode numérique directe de tir. Ainsi, nous étudions la résolution des différents problèmes de contrôle optimal suivant les zones définies par la décomposition, et nous discutons la complexité des problèmes associés de programmation non linéaire.

2.1 Modélisation du problème d'évitement de conflits aériens par le contrôle optimal

Chacun des avions réalise un déplacement qui peut être appréhendé comme un système dynamique. Ce système dynamique est soumis à des commandes, par exemples, aux actions des pilotes (subordonnées par les directives des contrôleurs aériens). Il s'agit des variables de contrôles (i.e., les commandes) pour agir sur le système dynamique, et pour contrôler celui-ci, d'un état initial (les données et configurations des avions) vers un

état final (les destinations escomptées des avions), en tenant compte d'un critère d'optimisation. Les variables d'états peuvent ainsi s'interpréter comme les vitesses et les positions des avions. Pour assurer la séparation entre les avions par des modulations subliminales en vitesse, les contrôles peuvent être choisis comme les accélérations des avions. Les distances minimales de sécurité entre les avions peuvent être considérées comme des contraintes à satisfaire ; et le critère comme une fonction de coût pénalisant les modifications en vitesse des avions. C'est pourquoi, il apparaît naturel de modéliser le problème d'évitement comme un problème de contrôle optimal.

La suite de cette section est consacrée à la présentation d'un tel modèle de contrôle optimal. Notre modèle est basé sur des variations en vitesse, en utilisant l'accélération comme commande et en gardant les trajectoires d'avions inchangées. Dans le modèle (\mathcal{P}), nous notons $x_i(\cdot)$ et $v_i(\cdot)$ les variables d'états représentant respectivement les positions et les vitesses d'un avion i dans $I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$, où n correspond au nombre d'avions. L'accélération $u_i(\cdot)$, propre à chaque avion i , est alors la commande sur le système. Les avions sont considérés durant leur vol en-route et supposés être à la même altitude, dans une configuration planaire où tous les avions sont assignés à un même niveau de vol. Pour chaque avion i , la vitesse ($v_i(\cdot)$) et l'accélération ($u_i(\cdot)$) sont bornées ; i.e., appartenant aux intervalles $[\underline{v}_i, \bar{v}_i]$ et $[\underline{u}_i, \bar{u}_i]$ respectivement. Nous considérons les avions en phase tactique, et plus précisément nous nous focalisons sur la résolution problème d'évitement de conflits aériens étant donné un secteur aérien et une fenêtre de temps $[t_0, t_f]$. Le temps final (t_f) de manœuvres est fixé et identique pour tous les avions. Soit t le temps compris dans l'intervalle $[t_0, t_f]$, D la distance de séparation minimale standard demandée pour chaque paire d'avions et d_i la direction (le cap) du $i^{\text{ième}}$ avion. La condition $x_i(t_f)$ « libre » (pour tout avion i) signifie que nous n'imposons pas de contraintes terminales sur les positions finales des avions (une discussion est proposée en sous-section 3.1.2). Le modèle mathématique est le suivant :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \min_u \sum_{i \in I} \int_{t_0}^{t_f} u_i^2(t) dt, \\ \text{sous les contraintes} \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \quad \forall t \in [t_0, t_f], \forall i \in I, \\ \dot{x}_i(t) = v_i(t) d_i \quad \forall t \in [t_0, t_f], \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq u_i(t) \leq \bar{u}_i \quad \forall t \in [t_0, t_f], \forall i \in I, \\ \underline{v}_i \leq v_i(t) \leq \bar{v}_i \quad \forall t \in [t_0, t_f], \forall i \in I, \\ x_i(t_0) = x_i^{t_0}, \quad v_i(t_0) = v_i^{t_0} \quad \forall i \in I, \\ x_i(t_f) \text{ libre}, \quad v_i(t_f) = v_i^{t_f} \quad \forall i \in I, \\ \|x_i(t) - x_j(t)\|^2 \geq D^2 \quad \forall t \in [t_0, t_f], \forall i < j, (i, j) \in I^2. \end{array} \right.$$

Nous détaillons, dans la suite, les hypothèses de l'étude, le système dynamique contrôlé, les contraintes inhérentes au problème, les conditions initiales et terminales, ainsi que le critère d'optimisation.

L'application de contrôle $u(\cdot)$ appartient à l'espace fonctionnel U_{ad} ; et nous définissons l'ensemble de toutes les fonctions de contrôles admissibles par :

$$U_{ad} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i \in I} U_{ad}^i \quad \text{où } U_{ad}^i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{fonctions essentiellement bornées : } [t_0, t_f] \longrightarrow [\underline{u}_i, \bar{u}_i] \right\}. \quad (2.1)$$

Cet ensemble de contrôles admissibles correspond donc à l'ensemble des fonctions qui sont essentiellement bornées, définies sur l'intervalle $[t_0, t_f]$, et qui retournent des valeurs dans $[\underline{u}_i, \overline{u}_i]$. L'accélération apparaît, d'une part, dans le critère ; et, toute accélération entraîne une pénalisation (en effet, plus l'accélération est de grande amplitude, plus la pénalisation croît, de manière quadratique). L'accélération apparaît, d'autre part, au niveau des contraintes, d'après le manuel de référence en bases de données aéronautiques BADA [80] (l'accélération, sauf mention contraire, est bornée par 4000 NM.h^{-2}).

La question de réalisabilité (faisabilité) d'un problème de contrôle est largement étudiée en théorie du contrôle, et représente une étude importante, à part entière. Dans le contexte aérien, la question de réalisabilité du problème est rarement étudiée ; et certains auteurs préfèrent représenter l'évitement dans le plan comme une pénalisation au critère et non comme des contraintes d'inégalité (par exemple, Maurer et al. [124] considèrent une maximisation de la « proximité entre avions », Rey et al. [143] considèrent une minimisation de la « charge de conflits potentiels »). La réalisabilité de notre problème (\mathcal{P}) a été modestement admise, et nous procédons plutôt à un travail porté sur l'optimisation. Nous n'avons pas déterminé des conditions (nécessaires et/ou suffisantes) permettant de caractériser l'existence de solution admissible d'un tel problème. En effet, les contraintes de boîte sur les accélérations ou vitesses, ainsi que la grandeur D , peuvent être impliquées dans le manque de solution admissible ; de même, les directions des avions (à caps fixés) peuvent intervenir dans ce manque (par exemple, cas de deux avions en face-à-face). Dans cette application, nous n'avons observé aucun arc bang, autrement dit, dans ce contexte aérien, les contraintes opérationnelles sur l'accélération sont très laches, et n'ont pas été saturées pour ce problème. A contrario, les contraintes de boîte sur les vitesses sont très importantes dans notre approche à travers une régulation subliminale en vitesse, et nous observerons des arcs frontière.

Les conditions terminales de notre problème se justifient de la manière suivante. D'une part, nous laissons libre la condition sur les positions finales, en effet, puisque nous nous focalisons sur une régulation en vitesse uniquement, nous conservons les trajectoires prédéfinies, ainsi les avions peuvent être en retard ou en avance par rapport aux positions finales initialement prévues. Dans ce dernier cas, dans le contexte aérien, il peut apparaître dépréciable de forcer un avion à décélérer pour perdre une quelconque avance. D'autre part, nous fixons à un retour aux vitesses nominales la condition sur les vitesses finales ; dans la mesure où nous considérons une régulation subliminale en vitesse, nous souhaitons particulièrement savoir comment après une quelconque déviation, suite à un évitement, s'effectue un retour aux vitesses nominales. Enfin, suite à un évitement, il se peut que les contraintes de boîte sur la vitesse soient actives, nous ne souhaitons pas, bien que la régulation faible n'autorise que de faibles variations autour de la vitesse nominale, que la vitesse reste sur l'une de ses bornes durant une période de temps potentiellement grande.

La vitesse de chaque avion est au moins une fois continûment différentiable ; plus précisément, la vitesse est considérée comme une application de classe C^1 . Dans le système dynamique contrôlé, notons que les équations d'états basées sur les lois de la dynamique newtonienne, sont toutes linéaires par rapport aux variables d'états. Le système d'Équations Différentielles Ordinaires (ODE) linéaires peut être vu comme le système de contrôle (décrit en sous-section 1.3.1.1) avec les vecteurs d'états : vitesses ($v(\cdot)$) et positions ($x(\cdot)$). Le temps final (t_f) est fixé.

Concernant les contraintes inhérentes au problème, d'une part, nous prenons en compte des bornes sur les vitesses et les accélérations, d'autre part, la condition cruciale de

séparation, vue comme une contrainte : elle garantit l'évitement de conflits aériens pour une distance horizontale de sécurité, notée D (celle-ci, sauf mention contraire, est fixée à 5NM, comme la norme horizontale fournie par l'OACI [107]). Les difficultés principales de résolution du problème (\mathcal{P}) proviennent des bornes sur les variables d'états v_i , il s'agit d'un intervalle très restreint autour de la vitesse nominale pour des manœuvres subliminales, et des contraintes d'inégalité (nombreuses) dues à la condition de séparation.

Ainsi, notre modèle laisse libres les variables d'états concernant les positions finales respectives aux avions (cette condition est discutée aux moyens d'exemples numériques au début du chapitre suivant). Les conditions terminales peuvent être interprétées comme le retour aux vitesses nominales (vitesses de croisière) propres aux avions.

Notre modèle de contrôle optimal, d'évitement de conflits aériens en vitesse, tient compte des conditions suivantes :

1. aucune hypothèse n'est faite sur l'instant de début de manœuvre de chaque avion ;
2. aucune coordination n'est imposée ni préconisée (par exemple, aucun ordre de passage, aucun séquençement) entre les avions ;
3. la vitesse est subliminale, dans le sens où, elle vérifie la condition (1.1) ;
4. les variations en vitesse sont contrôlées (en particulier avec la condition (2.1)), et il n'y a pas d'hypothèse considérant des changements instantanés en vitesse.

Concernant la stratégie de manœuvres d'évitement de conflits aériens, nous interprétons le terme subliminal d'une part en considérant des pénalisations quadratiques dues à toute variation en vitesse (pour une commande accélération non nulle) ; et d'autre part, en considérant des contraintes de régulation faible (1.1) qui encadrent l'intervalle de vitesse (autour de la vitesse nominale propre à chaque avion). Ce critère prend en compte la pénalisation de chaque avion et, de ce fait, vise à l'« équité » entre avions, en réduisant la dispersion des manœuvres d'évitement (i.e., les variations en vitesse sont réparties sur l'ensemble des avions, et la variance des pénalisations respectives aux avions est réduite). Parmi les vitesses utilisées en aviation civile, nous en rappelons deux :

1. la « vitesse sol », vue par les contrôleurs aériens (affichée à l'écran RADAR) ;
2. la « vitesse indiquée », vue par les pilotes de ligne (affichée à bord de l'avion) ;

Le critère concernant les accélérations est considéré pour les vitesses indiquées. En effet, chercher à garder stable un avion à sa vitesse indiquée revient à limiter une dépense en carburant. Remarquons que le problème (\mathcal{P}) a, dans cette représentation, une fonction objectif strictement convexe par rapport au contrôle, et (au moins) deux fois continûment différentiable. Comme le temps final t_f est connu, le problème (\mathcal{P}) peut être vu (comme observé en sous-section 1.3.1.2) comme un problème de Lagrange avec un temps terminal fixé, et des contraintes sur les variables d'états.

Dans les prochaines sections, nous proposons une décomposition du problème original, basée sur la régulation en vitesse, en différents sous-problèmes (en introduisant la définition de zones) ensuite nous pouvons appliquer, suivant les spécificités des sous-problèmes, des méthodes numériques de contrôle optimal et ainsi nous proposons une combinaison d'approches.

2.2 Détection et décomposition du problème en zones

Dans cette section, nous proposons une détection au pire cas de situations en trafic aérien en-route pour lesquelles il pourrait survenir des risques de conflits aériens pour une configuration donnée.

2.2.1 Régulation subliminale et détection au pire cas

Les manœuvres de régulation en vitesse sont intéressantes pour la résolution du problème d'évitement de conflits aériens, comme conclus des investigations menées dans le cadre du projet européen ERASMUS [28] (reportées en sous-section 1.1.3.2). Deux intervalles de régulation en vitesse ont été identifiés. Une régulation dite faible (1.1) autorise une marge allant de -6% à $+3\%$ autour de la vitesse nominale des avions, et l'autre dite forte (1.2) qui autorise une marge allant de -12% à $+6\%$ autour de la vitesse nominale des avions.

Les définitions de tels intervalles de régulation en vitesse peuvent être vues comme des contraintes d'ordre un sur les états de vitesses des avions concernés. Les contraintes sur les états posent généralement des difficultés dans le cadre de la résolution analytique de ce type de problème en contrôle optimal.

Dans la suite, en bénéficiant de l'information suivant les intervalles de régulation en vitesse, le but est de mettre en place une décomposition du problème en sous-problèmes plus aisés à résoudre. Grâce à la détection au pire cas et à la décomposition en zones que nous proposons, des combinaisons de méthodes numériques de résolution sont possibles, et font l'objet de cette thèse. En effet, les conditions de séparation entre avions se traduisent par des contraintes d'inégalité (le plus souvent) nombreuses. Pour réduire la difficulté de résolution du problème, en réduisant le nombre de telles contraintes (de séparation), la détermination et la détection de sous-ensembles d'avions sont importantes.

REMARQUE 2.1. Le plus souvent dans la littérature (par exemple, Durand [78]), le terme « cluster » d'avions est utilisé pour désigner un sous-ensemble d'avions défini de la façon suivante. Un cluster d'avions correspond à une composante connexe du graphe non orienté^a en considérant comme sommets les avions et comme application la relation binaire associant « vrai » pour des paires d'avions en conflits potentiels.

a. Des références en théorie des graphes sont, par exemple, Diestel [71], Bondy et Murty [27].

Nous préférons définir et utiliser des sous-ensembles d'avions qui s'articulent autour de la notion de « rencontres potentielles » spécifiques à la régulation en vitesse, décrite en Définition 2.2.

DÉFINITION 2.2. Une « rencontre potentielle » entre deux avions correspond à l'existence d'un conflit potentiel (décrit en Définition 1.3) entre ces deux avions pour des variations données en vitesse, dépendant ainsi des intervalles de régulation en vitesse relatifs aux avions. L'ensemble des rencontres potentielles (\mathcal{R}_p) est un sous-ensemble des paires d'avions (avec I l'ensemble des avions), qui peut être représenté avec le formalisme :

$$\mathcal{R}_p \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} (i, j) \in I^2 \text{ tel que } i < j, \\ \exists v_i(\cdot) : [t_0, t_f] \longrightarrow [\underline{v}_i, \bar{v}_i], \\ \exists v_j(\cdot) : [t_0, t_f] \longrightarrow [\underline{v}_j, \bar{v}_j] \text{ et} \\ \exists t \in]t_0, t_f[\quad \|x_i(t) - x_j(t)\|^2 < D^2. \end{array} \right\}.$$

Des exemples de la décomposition en sous-ensembles d'avions en rencontres potentielles sont détaillés en sous-Section 3.3.2.

REMARQUE 2.3. Soit l'ensemble des conflits potentiels (C_p), suivant le terme de cluster, un sous-ensemble des paires d'avions, pour lequel les vitesses sont fixées. La définition de l'ensemble (C_p) est donc indépendante des bornes de vitesses, contrairement à la Définition 2.2. L'ensemble des conflits potentiels (C_p) est inclus au sens large dans l'ensemble des rencontres potentielles (\mathcal{R}_p).

$$C_p \subseteq \mathcal{R}_p$$

Tout au long de l'étude, sauf mention contraire, nous considérons l'ensemble (\mathcal{R}_p) pour notre travail.

Cette définition de rencontres potentielles nous est particulièrement utile dans notre approche de résolution, ne faisant intervenir que des variations en vitesse. L'ensemble total des paires d'avions $\{(i, j) \in I^2 \text{ tel que } i < j\}$ a une taille de l'ordre du carré du nombre d'avions. Concernant l'évitement de conflits aériens par une régulation en vitesse, à partir du modèle de contrôle optimal (\mathcal{P}), pour résoudre exactement ce problème pour l'ensemble total des avions (I), il est suffisant de résoudre le problème sur l'ensemble (\mathcal{R}_p).

Selon Rey [140], actuellement plus de 90% des conflits potentiels, à résoudre par les contrôleurs, proviennent de conflits de type croisement (i.e., en considérant des trajectoires d'avions qui sont rectilignes et sécantes). Ainsi, nous considérons des conflits potentiels en croisement. Étant données des trajectoires d'avions prédites, nous pouvons observer les intersections des trajectoires et identifier des régions spatiales dans lesquelles les contraintes de séparation doivent être vérifiées et d'autres où on peut ne pas imposer de telles contraintes. Une fois que ces régions ont été localisées, nous pouvons tirer partie de l'information de ces intersections pour ainsi produire une stratégie de résolution dont le but est de réduire la difficulté du problème.

2.2.2 Décomposition du problème : une interprétation spatiale

D'un point de vue spatial, comme dessiné en Figure 2.1, nous considérons deux points de la trajectoire par avion (un point d'entrée et un point de sortie) pour chaque paire d'avions (i, j), dont les trajectoires sont en croisement.

1. Soit $x_{\text{entrée}}^{ij}$ le premier point (par ordre chronologique, suivant le sens de déplacement) de la trajectoire de l'avion i pour lequel la distance entre ce point et un autre point quelconque de la trajectoire de l'avion j correspond à la norme de séparation.
2. Réciproquement, par projections, nous notons x_{sortie}^{ij} le dernier point (par ordre chronologique, suivant le sens de déplacement) de l'avion i pour lequel la distance entre ce point et un autre point quelconque de la trajectoire de l'avion j correspond à la norme de séparation.

Pour cette paire d'avions (i, j), dont les trajectoires sont en croisement, nous avons défini les points d'entrée et de sortie de zone pour la trajectoire de l'avion i . De manière similaire, pour la trajectoire de l'avion j , nous pouvons définir le point $x_{\text{entrée}}^{ji}$ pour l'entrée dans la zone, et respectivement x_{sortie}^{ji} pour la sortie de la zone.

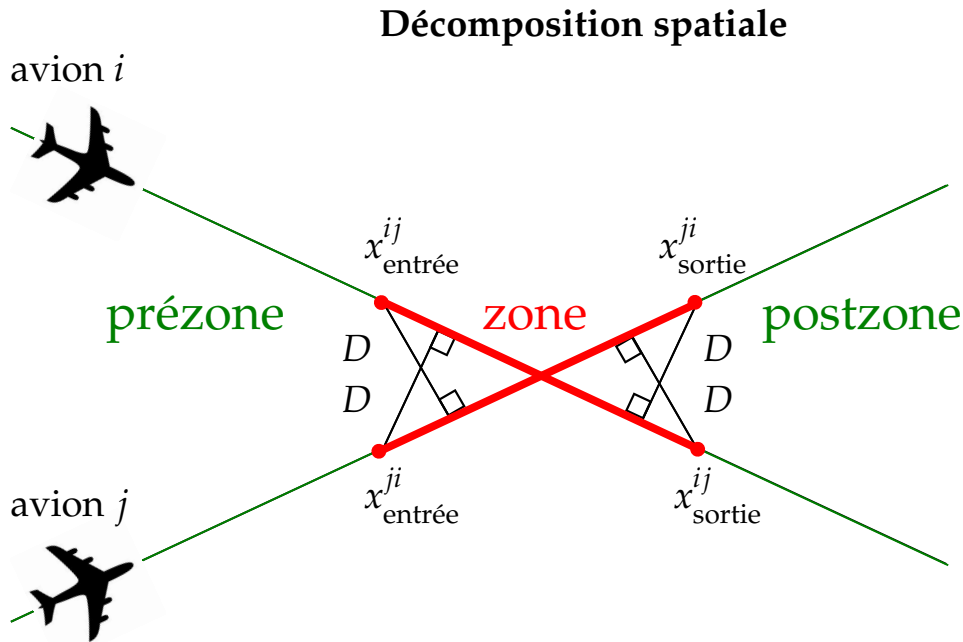


Figure 2.1 – Décomposition d’un problème d’évitement de conflit à deux avions : une interprétation spatiale.

Ainsi, en tenant compte de l’ensemble des avions ($I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$), nous définissons pour chaque avion i :

1. le point d’entrée en zone $x_{\text{entrée}}^i$ comme le premier point, en tenant compte de l’ordre chronologique, de l’ensemble des points d’entrée : $\{x_{\text{entrée}}^{ij}\}_{(i,j) \in I^2}$;
2. le point de sortie de zone x_{sortie}^i le dernier point, en tenant compte de l’ordre chronologique, de l’ensemble des points de sortie : $\{x_{\text{sortie}}^{ij}\}_{(i,j) \in I^2}$.

Ainsi, pour chaque avion, il y a trois zones. En effet, la trajectoire rectiligne de chaque avion est partitionnée en trois segments de droite (respectivement, prézone, zone et postzone, du point de vue spatial). De même, la fenêtre totale de temps étudiée peut être partitionnée, comme suit, en trois périodes (respectivement, prézone, zone et postzone, du point de vue temporel).

2.2.3 Décomposition du problème : une interprétation temporelle

La même décomposition peut être étudiée du point de vue temporel, comme représenté en Figure 2.2, en utilisant les intervalles de régulation en vitesse et en identifiant deux instants (de la fenêtre de temps considérée) par avion. Il s’agit des instants pour atteindre les points de sa trajectoire, points d’entrée et points de sortie, de la zone en termes d’espace définie ci-dessus. Un instant d’entrée au plus tôt et un instant de sortie au plus tard sont définis pour chaque avion, comme suit :

1. Soit $t_{1_min}^i$ le minimum des instants (le plus tôt) de l’avion i (en utilisant les bornes supérieures de vitesse) pour atteindre le premier point de sa trajectoire $x_{\text{entrée}}^{ij}$ (avec un autre avion j).
2. Soit $t_{2_max}^i$ le maximum des instants (le plus tard) de l’avion i (en utilisant les bornes inférieures de vitesse) pour atteindre le dernier point de sa trajectoire x_{sortie}^{ij} (avec un autre avion j).

Remarquons que pour prévenir et détecter au pire cas des risques de conflits potentiels, au moins deux avions doivent être en mesure d'être proches l'un de l'autre, sur une période de temps donnée. La zone peut être vide, dans ce cas, il n'y a pas de conflits potentiels à résoudre. Nous définissons donc la zone en termes de temps, suivant les « rencontres potentielles » entre avions. Par ailleurs, la zone (en termes de temps) peut être vide.

Décomposition temporelle

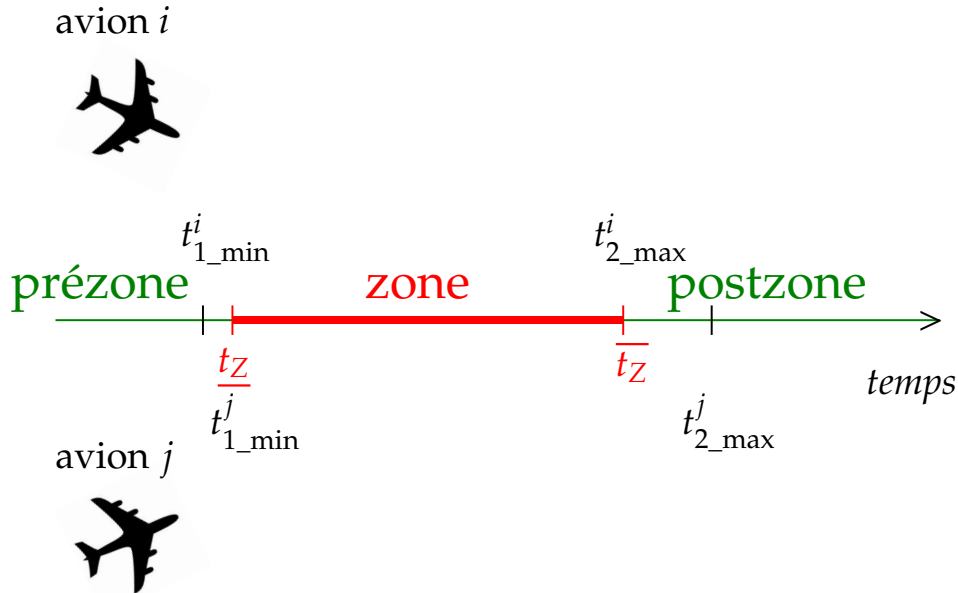


Figure 2.2 – Décomposition d'un problème d'évitement de conflit à deux avions : une interprétation temporelle.

Ainsi, pour l'ensemble des avions ($I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$), nous définissons :

1. l'instant d'entrée en zone \underline{t}_Z comme le deuxième instant, en tenant compte de l'ordre chronologique, de l'ensemble des instants d'entrée au plus tôt : $\{t_{1_min}^i\}_{i \in I}$;
2. l'instant de sortie de zone \overline{t}_Z le pénultième instant, en tenant compte de l'ordre chronologique, de l'ensemble des instants de sortie au plus tard : $\{t_{2_max}^i\}_{i \in I}$.

Plus précisément, donnons nous la définition suivante.

DÉFINITION 2.4. Soit \underline{t}_Z l'instant d'entrée en zone :

$$\underline{t}_Z \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_{m_1}\}} t_{1_min}^i, \text{ tel que } i_{m_1} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{argmin}_{i \in \{1, \dots, n\}} t_{1_min}^i.$$

Et de manière similaire, nous avons aussi la définition.

DÉFINITION 2.5. Soit \overline{t}_Z l'instant de sortie de zone :

$$\overline{t}_Z \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_{m_2}\}} t_{2_max}^i, \text{ tel que } i_{m_2} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{argmax}_{i \in \{1, \dots, n\}} t_{2_max}^i.$$

DÉFINITION 2.6. Du point de vue temporel, la **zone** est définie de manière unique pour tous les n avions, et elle correspond à $[\underline{t}_Z, \overline{t}_Z]$. La **prézone** correspond à $[t_0, \underline{t}_Z]$; et la **postzone** correspond à $[\overline{t}_Z, t_f]$.

Cette définition de zone et le point de vue temporel sont des éléments clefs de notre approche puisqu'ils vont nous permettre de décomposer le problème de contrôle optimal en sous-problèmes plus aisés à résoudre, en particulier en découpant la fenêtre totale de temps étudiée en trois périodes. Nous nous limitons à satisfaire la contrainte de séparation au sein de la zone pour garantir la séparation sur l'ensemble de la fenêtre de temps.

La partition de la fenêtre de temps en trois périodes permet de considérer les conditions de séparation (pour l'ensemble des avions considérés) de manière différente suivant les zones. Nous imposons les contraintes de séparation uniquement en zone. En effet, la zone correspond à la région dans laquelle les contraintes de séparation doivent être vérifiées pour les paires d'avions, la prézone est la région précédente où la violation de la contrainte de séparation entre avions ne peut pas avoir lieu; et la postzone est la région restant pour laquelle tous les conflits potentiels ont été résolus et pour laquelle les avions sont déjà séparés, en train de poursuivre leur route.

2.3 Combinaison de méthodes de résolution

Nous bénéficions de cette décomposition en considérant le problème initial (\mathcal{P}) comme trois sous-problèmes de contrôle optimal respectifs aux périodes différentes de temps : prézone, zone et postzone, et nous supprimons les contraintes de séparation pour les sous-problèmes relatifs à la prézone et à la postzone.

Nous nous intéressons, à présent, à la résolution de chacun des sous-problèmes définis suivant les « zones ». En particulier, nous présentons l'application des conditions du principe du maximum de Pontryagin pour les sous-problèmes relatifs à la postzone et à la prézone, comme ces problèmes n'admettent pas de contraintes de séparation entre avions, ils pourront être résolus analytiquement. Nous présentons pour le sous-problème relatif à la zone l'application la méthode numérique directe de tir.

2.3.1 Méthode du PMP en postzone

Dans cette section, nous nous focaliserons sur la postzone. Du point de vue temporel, la postzone correspond à la période $[\overline{t}_Z, t_f]$. À l'instant \overline{t}_Z , tous les conflits aériens potentiels ont été résolus. La nécessité de vérifier les conditions de séparation entre avions n'a plus lieu d'être. Sans les contraintes de séparation (lesquelles sont des contraintes sur les variables d'états d'ordre deux), nous pouvons appliquer les conditions du PMP sans contrainte sur les variables d'états (d'après le Théorème 1.15) (cf. Pontryagin et al. [136] ou Bryson et Ho [39]), lequel nous permet d'obtenir une solution analytique. Les contraintes portant sur la vitesse et sur l'accélération seront vérifiées a posteriori.

HYPOTHÈSE 2.7. On suppose que les contraintes de bornes sur le contrôle ou sur l'état ne sont pas activées. L'extrémale optimale est supposée normale.

Ainsi, pour chaque avion i , le sous-problème de contrôle optimal (\mathcal{P}_i) peut être résolu indépendamment. En éliminant les contraintes sur les variables d'états (d'ordre un :

bornes sur la vitesse, et d'ordre deux : contraintes d'évitement dans le plan) pour chaque avion i , nous avons à résoudre le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_i) \left\{ \begin{array}{l} \min_{u_i} \int_{\bar{t}_Z}^{t_f} u_i^2(t) dt, \\ \text{sous les contraintes} \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \quad \forall t \in [\bar{t}_Z, t_f], \\ \dot{x}_i(t) = v_i(t) d_i \quad \forall t \in [\bar{t}_Z, t_f], \\ x_i(\bar{t}_Z) = x_i^{\bar{t}_Z}, \quad v_i(\bar{t}_Z) = v_i^{\bar{t}_Z}, \\ x_i(t_f) \text{ libre}, \quad v_i(t_f) = v_i^{t_f}. \end{array} \right.$$

D'après le théorème de Filippov (par exemple, Filippov [85]), il y a existence de solution pour le problème (\mathcal{P}_i) . Le problème de minimisation (\mathcal{P}_i) admet au moins une solution optimale $(x_i^*(\cdot), v_i^*(\cdot), u_i^*(\cdot))$. Donnons nous, comme suit, la formulation du problème (\mathcal{P}_{Z1}) .

$$(\mathcal{P}_{Z1}) \left\{ \begin{array}{l} \min_u \sum_{i \in I} \left(\int_{t_0}^{\bar{t}_Z} u_i^2(t) dt + \frac{(v_i^f - v_i(\bar{t}_Z))^2}{t_f - \bar{t}_Z} \right), \\ \text{sous les contraintes} \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \dot{x}_i(t) = v_i(t) d_i \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq u_i(t) \leq \bar{u}_i \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{v}_i \leq v_i(t) \leq \bar{v}_i \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq \frac{v_i^f - v_i(\bar{t}_Z)}{t_f - \bar{t}_Z} \leq \bar{u}_i \quad \forall i \in I, \\ x_i(t_0) = x_i^0, \quad v_i(t_0) = v_i^0 \quad \forall i \in I, \\ x_i(t_f) \text{ libre}, \quad v_i(t_f) = v_i^{t_f} \quad \forall i \in I, \\ \|x_i(t) - x_j(t)\|^2 \geq D^2 \quad \forall t \in [t_0, t_f], \forall i < j, (i, j) \in I^2. \end{array} \right.$$

Nous rappelons l'hypothèse suivant laquelle les avions sont supposés à même altitude (dans une configuration planaire, pour un même niveau de vol).

Soit $u^*(\cdot)$ dans U_{ad} un contrôle (accélération) optimal (dans le sens global) et soit $v^*(\cdot) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x^*(\cdot) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ les états optimaux correspondants (vitesse et position respectivement), au sein de (\mathcal{P}) .

PROPOSITION 2.8. Sous les conditions de l'hypothèse 2.7, le problème (\mathcal{P}_{Z1}) est une approximation de (\mathcal{P}) .

Démonstration.

Considérons la solution du problème (\mathcal{P}) . Nous allons montrer que la commande optimale est constante en postzone.

Tout d'abord, nous remplaçons le coût intégral en introduisant n variables d'états supplémentaires, respectivement à chaque avion i . Ces variables d'états, notées $x_i^0(t)$,

doivent, pour tout t dans $]\bar{t}_Z, t_f]$, satisfaire la relation :

$$\frac{\partial x_i^o(t)}{\partial t} = u_i^2(t),$$

avec la condition aux limites : $x_i^o(\bar{t}_Z) = 0$. Par conséquent, pour tout t dans $]\bar{t}_Z, t_f]$, nous avons l'égalité suivante :

$$x_i^o(t) = \int_{\bar{t}_Z}^{t_f} u_i^2(t) dt.$$

Nous introduisons le scalaire réel $z_{0,i}$ associée à la fonction coût, définie avec $x_i^o(t)$, et les variables d'états adjoints $z_{1,i}(t), z_{2,i}(t)$, où $z_{1,i}(t), z_{2,i}(t)$, sont associés à $x_i(t)$, et $v_i(t)$ respectivement.

Pour tout $(x_i, v_i, z_{1,i}, z_{2,i}, z_{0,i}, u_i)$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le hamiltonien H_i du système est donné par :

$$H_i(x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)) = z_{1,i}(t)v_i(t)d_i + z_{2,i}(t)u_i(t) + z_{0,i}u_i^2(t). \quad (2.2)$$

Les équations extrémales, pour presque tout t dans $[t_0, t_f]$, sont :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \frac{\partial H_i}{\partial z_{1,i}}(x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)), \\ \dot{v}_i(t) &= \frac{\partial H_i}{\partial z_{2,i}}(x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)), \\ \dot{z}_{1,i}(t) &= -\frac{\partial H_i}{\partial x_i}(x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)), \\ \dot{z}_{2,i}(t) &= -\frac{\partial H_i}{\partial v_i}(x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)), \\ \text{et} \quad &\frac{\partial H_i}{\partial u_i}(x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)) = 0. \end{aligned}$$

Le vecteur adjoint $(z_{1,i}(\cdot), z_{2,i}(\cdot), z_{0,i})$ peut être interprété comme un multiplicateur de Lagrange du problème de contrôle optimal (\mathcal{P}_{Z1}) vu comme un problème d'optimisation sous contraintes (par exemple, Trélat [159]).

D'après l'hypothèse 2.7, la solution optimale, $(x_i(\cdot), v_i(\cdot), z_{1,i}(\cdot), z_{2,i}(\cdot), z_{0,i}, u_i(\cdot))$, du problème (\mathcal{P}_{Z1}) est une extrémale normale (cf. section 1.3). Dans ce cas, le vecteur adjoint est normalisé, sans perte de généralité, de la façon suivante : $z_{0,i} = -1$.

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_i^*(\cdot) &= \operatorname{argmax}_{u_i(\cdot) \in U_{ad}^i} H_i(x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)) \\ &= \begin{cases} \bar{u}_i & \text{si } \frac{z_{2,i}(t)}{2} \text{ strictement supérieur à } \bar{u}_i, \\ \frac{z_{2,i}(t)}{2} & \text{si } \frac{z_{2,i}(t)}{2} \text{ dans l'intervalle } [\underline{u}_i, \bar{u}_i], \\ \underline{u}_i & \text{si } \frac{z_{2,i}(t)}{2} \text{ strictement inférieur à } \underline{u}_i. \end{cases} \end{aligned}$$

En fait, nous prenons la commande optimale :

$$u_i^*(t) = \frac{z_{2,i}(t)}{2},$$

et nous vérifierons (cf., remarque 2.9) que les contraintes de bornes sont satisfaites dans la formulation du problème d'optimisation (\mathcal{P}_{Z1}).

En résolvant le système d'équations différentielles composés par les équations d'états et d'états adjoints, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= v_i(t)d_i, \\ \dot{v}_i(t) &= \frac{z_{2,i}(t)}{2}, \\ \dot{z}_{1,i}(t) &= 0_{\mathbb{R}^2}, \\ \dot{z}_{2,i}(t) &= -z_{1,i}(t)d_i. \end{cases}$$

En introduisant les constantes réelles A_i, B_i, C_i, D_i, E_i et F_i (dans le système ci-dessous, nous distinguons les composantes cartésiennes du cap d_i , en d_i^X et d_i^Y), nous obtenons :

$$(S_i) \begin{cases} u_i(t) = -\frac{A_i d_i^X + B_i d_i^Y}{2}t + \frac{C_i}{2}, \\ v_i(t) = -\frac{A_i d_i^X + B_i d_i^Y}{4}t^2 + \frac{C_i}{2}t + D_i, \\ x_i^X(t) = -\frac{A_i (d_i^X)^2 + B_i d_i^X d_i^Y}{12}t^3 + \frac{C_i}{4}d_i^X t^2 + D_i d_i^X t + E_i, \\ x_i^Y(t) = -\frac{A_i d_i^X d_i^Y + B_i (d_i^Y)^2}{12}t^3 + \frac{C_i}{4}d_i^Y t^2 + D_i d_i^Y t + F_i, \\ z_{1,i}(t) = (A_i, B_i), \\ z_{2,i}(t) = -(A_i d_i^X + B_i d_i^Y)t + C_i. \end{cases}$$

D'après les conditions terminales sur les états de positions ($x_i(t_f)$ est libre), le PMP implique que les variables d'états adjoints associées sont nulles, i.e., les conditions de transversalité suivantes :

$$z_{1,i}(t_f) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Ceci donne que les constantes réelles A_i et B_i sont toutes deux égales à zéro. La commande optimale u_i pour ce problème correspond à la commande constante.

Cette accélération optimale dépend seulement des vitesses de sortie de zone et de condition terminale ($\overline{v}_i^{t_Z}$ et $\overline{v}_i^{t_f}$) et des extrémités de la période de temps : postzone (allant de $\overline{t_Z}$ à t_f). Plus précisément, nous obtenons les solutions suivantes pour presque tout

temps t dans $[\bar{t}_Z, t_f]$:

$$\begin{cases} u_i(t) = \frac{v_i^{t_f} - v_i^{\bar{t}_Z}}{t_f - \bar{t}_Z}, \\ v_i(t) = \frac{v_i^{t_f} - v_i^{\bar{t}_Z}}{t_f - \bar{t}_Z}(t - t_f) + v_i^{t_f}, \\ x_i(t) = \frac{v_i^{t_f} - v_i^{\bar{t}_Z}}{t_f - \bar{t}_Z} d_i \frac{t^2}{2} + \left(v_i^{t_f} - \frac{v_i^{t_f} - v_i^{\bar{t}_Z}}{t_f - \bar{t}_Z} t_f \right) d_i t \\ \quad - \left(\frac{v_i^{t_f} - v_i^{\bar{t}_Z}}{t_f - \bar{t}_Z} (\bar{t}_Z - t_f) + v_i^{t_f} \right) d_i \bar{t}_Z + x_i^{\bar{t}_Z}. \end{cases}$$

Cela nous conduit au problème d'optimisation sous une nouvelle formulation (\mathcal{P}_{Z1}). Les variables de vitesse et d'accélération satisfont les contraintes, ainsi la solution est également la solution du problème contraint (\mathcal{P}).

REMARQUE 2.9. Pour chaque avion i , la solution optimale en accélération est constante en postzone, et cette constante est comprise dans l'intervalle $[u_i, \bar{u}_i]$. De plus, pour chaque avion, la vitesse en fin de zone (i.e., à l'instant \bar{t}_Z), notée $v_i^{\bar{t}_Z}$, satisfait aussi les contraintes de boîte, de même la vitesse de fin de fenêtre de temps, notée $v_i^{t_f}$, va correspondre à la vitesse nominale, notée v_i^0 , d'après les conditions terminales ; en particulier, cette vitesse nominale satisfait les contraintes de boîte. Ainsi, les solutions en vitesse étant affines, la vitesse optimale satisfait les contraintes de boîte tout au long de la postzone. Les contraintes sur le contrôle et l'état sont effectivement inactives en postzone, comme énoncé dans l'hypothèse 2.7.

$$\left(\mathcal{P}_{Z1} \right) \begin{cases} \min_u \sum_{i \in I} \left(\int_{t_0}^{\bar{t}_Z} u_i^2(t) dt + \frac{(v_i^f - v_i(\bar{t}_Z))^2}{t_f - \bar{t}_Z} \right), \\ \text{sous les contraintes} \\ \begin{aligned} \dot{v}_i(t) &= u_i(t) & \forall t \in [t_0, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \dot{x}_i(t) &= v_i(t) d_i & \forall t \in [t_0, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{u}_i &\leq u_i(t) \leq \bar{u}_i & \forall t \in [t_0, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{v}_i &\leq v_i(t) \leq \bar{v}_i & \forall t \in [t_0, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{u}_i &\leq \frac{v_i^f - v_i(\bar{t}_Z)}{t_f - \bar{t}_Z} \leq \bar{u}_i & \forall i \in I, \\ x_i(t_0) &= x_i^0, \quad v_i(t_0) = v_i^0 & \forall i \in I, \\ x_i(t_f) &\text{ libre, } v_i(t_f) = v_i^{t_f} & \forall i \in I, \\ \|x_i(t) - x_j(t)\|^2 &\geq D^2 & \forall t \in [t_0, t_f], \forall i < j, (i, j) \in I^2. \end{aligned} \end{cases}$$

□

2.3.2 Méthode du PMP en prézone

Dans cette section, nous nous focalisons sur la prézone. D'un point de vue temporel, la prézone correspond à la période $[t_0, t_Z]$ durant laquelle les avions sont suffisamment distants les uns des autres, dans le sens où, aucun conflit aérien ne peut avoir lieu. La nécessité de vérifier les conditions de séparation n'existe pas, et, comme pour la postzone, nous pouvons relâcher les contraintes de séparation. Ceci élimine les contraintes d'ordre deux sur les états (les positions).

Dans le contexte de la prézone, la fenêtre de temps correspond à $[t_0, t_Z]$. Pour chaque avion i , soit (\mathcal{P}'_i) la formulation du problème suivant :

$$(\mathcal{P}'_i) \left\{ \begin{array}{l} \min_{u_i} \int_{t_0}^{t_Z} u_i^2(t) dt, \\ \text{sous les contraintes} \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \quad \forall t \in [t_0, t_Z], \\ \dot{x}_i(t) = v_i(t) d_i \quad \forall t \in [t_0, t_Z], \\ x_i(t_0) = x_i^{t_0}, \quad v_i(t_0) = v_i^{t_0}, \\ x_i(t_Z) = x_i^{t_Z}, \quad v_i(t_Z) = v_i^{t_Z}. \end{array} \right.$$

Nous appliquons les conditions du PMP sur la prézone, comme nous l'avons appliqué sur la postzone. Mais il y a des différences entre ces deux zones, aussi bien du point de vue temporel ou spatial que du point de vue du modèle mathématique. En fait, sur la prézone, les avions commencent leurs manoeuvres respectives de séparation. Comme notre modèle utilise uniquement un petit intervalle de vitesse, cela révèle l'importance des contraintes de vitesse en prézone. Ainsi, les contraintes de vitesse subsistent sur $[t_0, t_Z]$, représentant les contraintes sur l'états d'ordre un (cf. sous-section 3.1.1).

Afin de palier à la difficulté concernant les contraintes sur la vitesse, nous introduisons, pour chaque avion i , une variable t_i^c dans $]0, t_Z]$. En tenant compte de notre modèle basé sur une fonction pénalisant l'accélération, nous considérons au plus deux périodes temporelles au sein de la prézone, un intervalle de temps $[t_0, t_i^c[$ pour lequel aucune des contraintes de vitesse n'est active, et un second intervalle de temps $[t_i^c, t_Z]$ pour lequel une des contraintes de vitesse est active (ce dernier intervalle peut être vide). De plus, l'observation de tests numériques (réalisés uniquement avec une méthode numérique directe de tir, discutés au chapitre suivant) nous mène à l'hypothèse suivante sur la structure de la solution, en permettant pour la recherche de solution de réduire l'espace des contrôles admissibles.

HYPOTHÈSE 2.10. En considérant que, pour chaque avion i , il existe au plus un instant t_i^c dans $]0, t_Z]$, on suppose que la structure de la solution est constituée d'un arc non-contraint en contrôle ou en vitesse (sur la période $[t_0, t_i^c]$) suivi d'un arc frontière (saturation d'une contrainte en vitesse sur la période $[t_i^c, t_Z]$). L'extrémale optimale est supposée normale.

Le rôle de l'instant t^c consiste à décomposer le sous-problème relatif à la période de prézone en deux nouveaux sous-problèmes de contrôle optimal. Dans le premier sous-problème, les conditions du principe du maximum de Pontryagin, sans contrainte sur les variables d'états, vont pouvoir être appliquées pour déterminer la commande optimale. Dans le second sous-problème, la contrainte de vitesse est saturée et la commande optimale est nulle (sur $[t^c, t_Z]$). Ainsi cet instant t^c peut être vu comme le premier instant de saturation de la contrainte de vitesse respective à chaque avion.

REMARQUE 2.11. L'hypothèse 2.10 est cruciale pour notre approche de résolution en pré-zone. Pour chaque avion i , nous pouvons à présent relâcher la contrainte de vitesse sur $[t_0, t_i^c]$ et nous pouvons appliquer le PMP (sans contrainte sur les variables d'états et de contrôle). En fait, sur $[t_0, t_i^c]$, pour chaque avion i , la solution optimale est définie par $u_i^*(t) = A_i''t + B_i''$ pour certaines constantes réelles A_i'' et B_i'' à trouver.

Définissons, pour chaque avion i , les termes suivants A_i'' et B_i'' qui dépendent non-linéairement du temps spécifique t_i^c . Ainsi, pour toute composante strictement positive de la direction d_i^\diamond de d_i (avec la notation \diamond qui correspond à X si $d_i^X \neq 0$, et Y autrement), nous posons :

$$A_i'' \stackrel{\text{def}}{=} -12 \left(\frac{x_i^{\diamond t_i^c} - x_i^{\diamond t_0}}{d_i^\diamond(t_i^c)^3} - \frac{v_i^{t_i^c} - v_i^{t_0}}{2(t_i^c)^2} \right) \quad \text{et} \quad B_i'' \stackrel{\text{def}}{=} 6 \left(\frac{x_i^{\diamond t_i^c} - x_i^{\diamond t_0}}{d_i^\diamond(t_i^c)^2} \right) - 2 \left(\frac{v_i^{t_i^c} - 2v_i^{t_0}}{t_i^c} \right).$$

Définissons, pour chaque avion i , les conditions de jonction sur les vitesses et positions, à l'instant \underline{t}_Z .

$$\begin{cases} v_i(\underline{t}_Z) &= \frac{1}{2}A_i''(t_i^c)^2 + B_i''t_i^c + v_i^0, \\ x_i(\underline{t}_Z) &= \frac{1}{6}A_i''d_i(t_i^c)^3 + B_i''d_i(t_i^c)^2 + v_i^0d_i(\underline{t}_Z - t_i^c). \end{cases}$$

Soit (\mathcal{P}_{Z2}) le problème suivant.

$$(\mathcal{P}_{Z2}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{u, A'', B'', t^c} \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{3}A_i''^2(t_i^c)^3 + A_i''B_i''(t_i^c)^2 + B_i''^2t_i^c + \int_{\underline{t}_Z}^{\bar{t}_Z} u_i^2(t)dt + \frac{(v_i^f - v_i(\bar{t}_Z))^2}{t_f - \bar{t}_Z} \right), \\ \text{sous les contraintes} \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \quad \forall t \in [\underline{t}_Z, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \dot{x}_i(t) = v_i(t)d_i \quad \forall t \in [\underline{t}_Z, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq u_i(t) \leq \bar{u}_i \quad \forall t \in [\underline{t}_Z, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{v}_i \leq v_i(t) \leq \bar{v}_i \quad \forall t \in [\underline{t}_Z, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq \frac{v_i^f - v_i(\bar{t}_Z)}{t_f - \bar{t}_Z} \leq \bar{u}_i \quad \forall i \in I, \\ x_i(t_0) = x_i^0, \quad v_i(t_0) = v_i^0 \quad \forall i \in I, \\ x_i(t_f) \text{ libre}, \quad v_i(t_f) = v_i^{t_f} \quad \forall i \in I, \\ v_i(\underline{t}_Z) = \frac{1}{2}A_i''(t_i^c)^2 + B_i''t_i^c + v_i^0 \quad \forall i \in I, \\ x_i(\underline{t}_Z) = \frac{1}{6}A_i''d_i(t_i^c)^3 + B_i''d_i(t_i^c)^2 + v_i^0d_i(\underline{t}_Z - t_i^c) \quad \forall i \in I, \\ \|x_i(t) - x_j(t)\|^2 \geq D^2 \quad \forall t \in [\underline{t}_Z, \bar{t}_Z], \forall i < j, (i, j) \in I^2. \end{array} \right.$$

REMARQUE 2.12. Les principales différences entre les deux formulations du problème de contrôle, (\mathcal{P}_{Z1}) et (\mathcal{P}_{Z2}) sont les suivantes : Dans la formulation (\mathcal{P}_{Z2}) , pour chaque avion i , les variables d'optimisation A_i'' , B_i'' , et t_i^c sont introduites. La fenêtre de temps, en considérant le système dynamique et les contraintes sur les variables, est réduite à l'intervalle $[t_Z, \bar{t}_Z]$. Ainsi, les conditions de jonction initialisent la période en zone étudiée. Nous remarquons que la fonction coût, dans (\mathcal{P}_{Z2}) , n'est plus convexe (par rapport aux variables A et B), ce qui peut générer des difficultés supplémentaires dans la résolution numérique.

Soit $u^*(.)$ dans U_{ad} une commande optimale (accélération) (dans le sens global) et soit $v^*(.) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x^*(.) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ les états optimaux correspondants (vitesse et position respectivement), au sein de (\mathcal{P}) .

PROPOSITION 2.13. Sous les conditions de l'hypothèse 2.10, le problème (\mathcal{P}_{Z2}) est une approximation de (\mathcal{P}) .

Démonstration.

Nous allons montrer que la commande optimale est linéaire, pour chaque avion i , sur la période de temps $[t_0, t_i^c]$.

Tout d'abord, nous remplaçons le coût intégral en introduisant n variables d'états supplémentaires, respectivement à chaque avion i . Ces variables d'états, notées $x_i^o(t)$, doivent, pour tout t dans $]t_0, t^c]$, satisfaire la relation :

$$\frac{\partial x_i^o(t)}{\partial t} = u_i^2(t),$$

avec la condition aux limites : $x_i^o(t_0) = 0$. Par conséquent, pour tout t dans $]t_0, t^c]$, nous avons l'égalité suivante :

$$x_i^o(t) = \int_{t_0}^{t^c} u_i^2(t) dt.$$

Nous introduisons le scalaire réel $z_{0,i}$ associée à la fonction coût, définie avec $x_i^o(t)$, et les variables d'états adjoints (les vecteurs adjoints) $z_{1,i}(t)$, $z_{2,i}(t)$, $z_{3,i}(t)$, où $z_{1,i}(t)$, $z_{2,i}(t)$, $z_{3,i}(t)$ sont associés à $x_i^X(t)$, $x_i^Y(t)$ et $v_i(t)$ respectivement.

Pour tout $(x_i, v_i, z_{1,i}, z_{2,i}, z_{0,i}, u_i)$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le hamiltonien H_i' est :

$$\begin{aligned} H_i' & (x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)) \\ & = z_{1,i}(t)v_i(t)d_i + z_{2,i}(t)u_i(t) - u_i(t)^2 + \frac{\partial g_{1,i}(v)}{\partial v_i}(t)\mu_{1,i}(t) + \frac{\partial g_{2,i}(v)}{\partial v_i}(t)\mu_{2,i}(t). \end{aligned}$$

Où $g_{1,i}(v_i(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (v_i(t) - \bar{v}_i)\mu_{1,i}(t) = 0$, et $g_{2,i}(v_i(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (v_i(t) - v_i)\mu_{2,i}(t) = 0$, avec les conditions de signes $g_{1,i}(v(t))$, $g_{2,i}(v(t)) \leq 0$ et $\mu_{1,i}(t)$, $\mu_{2,i}(t) \geq 0$ pour tout t dans $[t_0, \bar{t}_Z]$.

Rappelons les équations extrémales comme suit.

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1,i}(t) &= -\frac{\partial H'_i}{\partial x_i}(x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)) = 0_{\mathbb{R}^2}, \text{ d'où } z_{1,i}(t) \text{ est constant dans } \mathbb{R}^2, \\ \dot{z}_{2,i}(t) &= -\frac{\partial H'_i}{\partial v_i}(x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)) = -z_{1,i}(t)d_i - \mu_{1,i}(t) - \mu_{2,i}(t).\end{aligned}$$

Le contrôle optimal $u^*(\cdot)$ maximise le hamiltonien H'_i le long des extrémales :

$$\frac{\partial H'_i}{\partial u_i}(x_i(t), v_i(t), z_{1,i}(t), z_{2,i}(t), z_{0,i}, u_i(t)) = 0.$$

Suivant les valeurs de $\mu_{1,i}$ et $\mu_{2,i}$, pour chaque avion i , nous avons trois cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{1,i}(t) > 0, \\ \mu_{2,i}(t) > 0, \\ \mu_{1,i}(t) = \mu_{2,i}(t) = 0, \end{array} \right. \begin{array}{l} \Rightarrow g_{1,i}(\cdot) \text{ est active } \Rightarrow v_i(t) = \bar{v}_i, \\ \Rightarrow \left(u_i^*(t) = 0 \text{ avec } u_i^*(t) = \frac{z_{2,i}(t)}{2} \right) \Rightarrow z_{2,i}(t) = 0, \\ \Rightarrow g_{2,i}(\cdot) \text{ est active } \Rightarrow v_i(t) = \underline{v}_i, \\ \Rightarrow \left(u_i^*(t) = 0 \text{ avec } u_i^*(t) = \frac{z_{2,i}(t)}{2} \right) \Rightarrow z_{2,i}(t) = 0, \\ \Rightarrow g_{1,i}(\cdot) \text{ et } g_{2,i}(\cdot) \text{ sont non actives,} \\ \Rightarrow \underline{v}_i \leq v_i(t) \leq \bar{v}_i. \end{array}$$

Sous les conditions de l'hypothèse 2.10, pour chaque avion i , sans considérer les contraintes de vitesse sur $[t_0, t_i^c]$, nous avons le problème relâché suivant (\mathcal{P}'_i) .

$$(\mathcal{P}'_i) \left\{ \begin{array}{l} \min_{u_i} \int_{t_0}^{t_i^c} u_i^2(t) dt, \\ \text{sous les contraintes} \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \quad \forall t \in [t_0, t_i^c], \\ \dot{x}_i(t) = v_i(t)d_i \quad \forall t \in [t_0, t_i^c], \\ x_i(t_0) = x_i^{t_0}, \quad v_i(t_0) = v_i^{t_0}, \\ x_i(t_i^c) = x_i^{t_i^c}, \quad v_i(t_i^c) = v_i^{t_i^c}. \end{array} \right.$$

De manière similaire à la Proposition 2.13 (laquelle faisait appel au système (\mathcal{P}_i)), nous devons résoudre, pour chaque avion i , le problème (\mathcal{P}'_i) . Le hamiltonien du système (\mathcal{P}'_i) est identique à celui du système (\mathcal{P}_i) , à savoir le hamiltonien H_i (eq.2.2).

Ainsi, en introduisant six constantes réelles à déterminer : $A'_i, B'_i, C'_i, D'_i, E'_i$, et F'_i (dans le système ci-dessous, nous distinguons les composantes cartésiennes du cap d_i , en d_i^X

et d_i^Y), nous obtenons un système d'équations (\mathcal{S}'_i).

$$(\mathcal{S}'_i) \begin{cases} u_i(t) = -\frac{A'_i d_i^X + B'_i d_i^Y}{2} t + \frac{C'_i}{2}, \\ v_i(t) = -\frac{A'_i d_i^X + B'_i d_i^Y}{4} t^2 + \frac{C'_i}{2} t + D'_i, \\ x_i^X(t) = -\frac{A'_i (d_i^X)^2 + B'_i d_i^X d_i^Y}{12} t^3 + \frac{C'_i}{4} d_i^X t^2 + D'_i d_i^X t + E'_i, \\ x_i^Y(t) = -\frac{A'_i d_i^X d_i^Y + B'_i (d_i^Y)^2}{12} t^3 + \frac{C'_i}{4} d_i^Y t^2 + D'_i d_i^Y t + F'_i. \end{cases}$$

Dans le cas de (\mathcal{P}'_i), les conditions terminales sur les états (les vitesses et les positions) sont fixées ; ainsi, les conditions de transversalité ne donnent pas d'information supplémentaire pour les variables d'états adjointes associées (en particulier, les variables d'états adjointes $z_{1,i}(t_f)$ ne sont pas nécessairement nulles).

En considérant $t_0 = 0$, nous déduisons $D'_i = v_i^{t_0}$, $E'_i = x_i^{X_{t_0}}$, et $F'_i = x_i^{Y_{t_0}}$. Nous introduisons, par commodité, la constante réelle Q'_i comme suit :

$$Q'_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A'_i d_i^X + B'_i d_i^Y}{4}.$$

En considérant $t_i^c \neq t_0$ nous pouvons exprimer Q'_i en tenant compte du temps t_i^c et des valeurs des états : la valeur de la vitesse ($v_i^{t_i^c}$) et la valeur position ($x_i^{X_{t_i^c}}$ si $d_i^X \neq 0$, ou $x_i^{Y_{t_i^c}}$ si $d_i^Y \neq 0$). Pour toute composante de direction positive strictement d_i^\diamond de d_i , nous employons, par commodité, la notation \diamond correspond à X si $d_i^X \neq 0$, sinon \diamond représente Y . En effet, le choix de la composante de direction d_i est arbitraire, comme les trajectoires sont rectilignes, et nous pouvons connaître $x_i^{Y_{t_i^c}}$ à partir de $x_i^{X_{t_i^c}}$, et vice versa. Ces deux dernières valeurs doivent correspondre aux conditions initiales de la zone (i.e. pour permettre la séparation cruciale durant la phase suivante). Nous pouvons aussi écrire, par commodité, la quantité suivante C'_i :

$$C'_i \stackrel{\text{def}}{=} 12 \left(\frac{x_i^{\diamond_{t_i^c}} - x_i^{\diamond_{t_0}}}{d_i^\diamond (t_i^c)^2} \right) - 4 \left(\frac{v_i^{t_i^c} - 2v_i^{t_0}}{t_i^c} \right).$$

En considérant les constantes réelles Q'_i et C'_i , le système (\mathcal{S}'_i) peut être écrit comme suit :

$$(\mathcal{S}'_i) \begin{cases} u_i(t) = -2Q'_i t + \frac{C'_i}{2}, \\ v_i(t) = -Q'_i t^2 + \frac{C'_i}{2} t + v_i^{t_0}, \\ x_i^X(t) = -\frac{Q'_i}{3} d_i^X t^3 + \frac{C'_i}{4} d_i^X t^2 + v_i^{t_0} d_i^X t + x_i^{X_{t_0}}, \\ x_i^Y(t) = -\frac{Q'_i}{3} d_i^Y t^3 + \frac{C'_i}{4} d_i^Y t^2 + v_i^{t_0} d_i^Y t + x_i^{Y_{t_0}}. \end{cases}$$

Par substitution, nous obtenons le système de solution (\mathcal{S}'_i).

$$(S'_i) \left\{ \begin{array}{l} u_i(t) = -12 \left(\frac{x_i^{\diamond t_i^c} - x_i^{\diamond t_0}}{d_i^{\diamond}(t_i^c)^3} - \frac{v_i^{t_i^c} - v_i^{t_0}}{2(t_i^c)^2} \right) t + 2 \left(3 \left(\frac{x_i^{\diamond t_i^c} - x_i^{\diamond t_0}}{d_i^{\diamond}(t_i^c)^2} \right) - \left(\frac{v_i^{t_i^c} - 2v_i^{t_0}}{t_i^c} \right) \right), \\ v_i(t) = -6 \left(\frac{x_i^{\diamond t_i^c} - x_i^{\diamond t_0}}{d_i^{\diamond}(t_i^c)^3} - \frac{v_i^{t_i^c} - v_i^{t_0}}{2(t_i^c)^2} \right) t^2 + 2 \left(3 \left(\frac{x_i^{\diamond t_i^c} - x_i^{\diamond t_0}}{d_i^{\diamond}(t_i^c)^2} \right) - \left(\frac{v_i^{t_i^c} - 2v_i^{t_0}}{t_i^c} \right) \right) t + v_i^{t_0}, \\ x_i^X(t) = -2 \left(\frac{x_i^{\diamond t_i^c} - x_i^{\diamond t_0}}{d_i^{\diamond}(t_i^c)^3} - \frac{v_i^{t_i^c} - v_i^{t_0}}{2(t_i^c)^2} \right) d_i^X t^3 + \left(3 \left(\frac{x_i^{\diamond t_i^c} - x_i^{\diamond t_0}}{d_i^{\diamond}(t_i^c)^2} \right) - \left(\frac{v_i^{t_i^c} - 2v_i^{t_0}}{t_i^c} \right) \right) d_i^X t^2 + v_i^{t_0} d_i^X t + x_i^{X t_0}, \\ x_i^Y(t) = -2 \left(\frac{x_i^{\diamond t_i^c} - x_i^{\diamond t_0}}{d_i^{\diamond}(t_i^c)^3} - \frac{v_i^{t_i^c} - v_i^{t_0}}{2(t_i^c)^2} \right) d_i^Y t^3 + \left(3 \left(\frac{x_i^{\diamond t_i^c} - x_i^{\diamond t_0}}{d_i^{\diamond}(t_i^c)^2} \right) - \left(\frac{v_i^{t_i^c} - 2v_i^{t_0}}{t_i^c} \right) \right) d_i^Y t^2 + v_i^{t_0} d_i^Y t + x_i^{Y t_0}. \end{array} \right.$$

Pour chaque avion i , le contrôle optimal $u_i^*(\cdot)$ est affine par rapport au temps t , sur l'intervalle $[t_0, t_i^c]$. De plus, le contrôle optimal $u_i^*(\cdot)$ dépend seulement des instants spécifiques t_0, t_i^c et des valeurs respectives des états de vitesse ($v_i^{t_0}, v_i^{t_i^c}$) et position ($x_i^{\diamond t_0}, x_i^{\diamond t_i^c}$). Ceci nous conduit à une nouvelle formulation du problème d'optimisation (\mathcal{P}_{Z2}).

$$(P_{Z2}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{u, A'', B'', t^c} \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{3} A_i''^2 (t_i^c)^3 + A_i'' B_i'' (t_i^c)^2 + B_i''^2 t_i^c + \int_{\underline{t}_Z}^{\bar{t}_Z} u_i^2(t) dt + \frac{(v_i^f - v_i(\bar{t}_Z))^2}{t_f - \bar{t}_Z} \right), \\ \text{sous les contraintes} \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \quad \forall t \in [\underline{t}_Z, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \dot{x}_i(t) = v_i(t) d_i \quad \forall t \in [\underline{t}_Z, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq u_i(t) \leq \bar{u}_i \quad \forall t \in [\underline{t}_Z, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{v}_i \leq v_i(t) \leq \bar{v}_i \quad \forall t \in [\underline{t}_Z, \bar{t}_Z], \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq \frac{v_i^f - v_i(\bar{t}_Z)}{t_f - \bar{t}_Z} \leq \bar{u}_i \quad \forall i \in I, \\ x_i(t_0) = x_i^0, \quad v_i(t_0) = v_i^0 \quad \forall i \in I, \\ x_i(t_f) \text{ libre}, \quad v_i(t_f) = v_i^{t_f} \quad \forall i \in I, \\ v_i(\underline{t}_Z) = \frac{1}{2} A_i'' (t_i^c)^2 + B_i'' t_i^c + v_i^0 \quad \forall i \in I, \\ x_i(\underline{t}_Z) = \frac{1}{6} A_i'' d_i (t_i^c)^3 + B_i'' d_i (t_i^c)^2 + v_i^0 d_i (\underline{t}_Z - t_i^c) \quad \forall i \in I, \\ \|x_i(t) - x_j(t)\|^2 \geq D^2 \quad \forall t \in [\underline{t}_Z, \bar{t}_Z], \forall i < j, (i, j) \in I^2. \end{array} \right.$$

□

2.3.3 Résolution du problème en « zone »

En appliquant la méthode directe de tir sur le problème de contrôle optimal (\mathcal{P}_Z), les équations différentielles ordinaires sont résolues numériquement par discrétisation des variables qui apparaissent dans ces équations en tenant compte du temps. Des intégrateurs numériques (par exemple, intégrateurs de type-Euler) sont utilisés pour approximer les équations différentielles. En particulier, nous utilisons une approximation

de type-Heun d'ordre deux, Dans ce contexte, la précision est $O(h^2)$, où h correspond au pas de discrétisation du temps.

Nous proposons d'utiliser deux pas de discrétisation, un pas assez fin pour vérifier si les contraintes de séparation sont respectées (pas de temps correspondant à la détection), et un autre afin de calculer la valeur des variables de contrôle (pas de temps correspondant à la résolution). Dans le but de réduire le nombre de variables du problème en PNL, le pas de temps pour la résolution est considéré plus grand que le pas de temps pour la détection (dans le sens de vérification de toutes les contraintes sur les états), illustré en Figure 2.3. Soit ρ le ratio entre le pas de détection et le pas de résolution. Par exemple, si le pas de détection (respectivement résolution) est 15'' (respectivement 1'), alors ρ correspond à 4. Le pas de discrétisation de temps pour les variables d'états (vitesses et positions), correspondant à 15'', tient compte des questions opérationnelles sur les vitesses (notamment pour la détection de conflits potentiels). Le pas de discrétisation de temps pour les variables de commande (accélérations), correspondant à 1', est proposé (en sous-Section 3.1.3), suite aux expérimentations numériques, comme le plus pertinent dans notre modèle. Ainsi, avoir deux pas de discrétisation de temps a pour but de réduire le nombre de variables de décision ; l'avantage ici est de réduire le nombre de variables (de commande).

Un intégrateur numérique NUM est utilisé et dépend des variables d'états. Nous utilisons, sauf mention contraire, l'intégrateur NUM de type Euler, défini par :

$$\forall i \in I, \forall k \in K, \text{NUM}_{v_i} \left(U_i^{(l \frac{k}{\rho})} \right) \stackrel{\text{def}}{=} v_i^{(k)} + h \times U_i^{(l \frac{k}{\rho})}, \quad \text{NUM}_{x_i} \left(v_i^{(k)} \right) \stackrel{\text{def}}{=} x_i^{(k)} + h \times v_i^{(k)}.$$

Les variables d'états v_i et x_i sont calculées en utilisant un pas de discrétisation h , tandis que les variables de contrôle U_i (discrétisées) sont déterminées en utilisant un pas de discrétisation ρh . Les termes $U_i^{(l \frac{k}{\rho})}$, $v_i^{(k)}$ et $x_i^{(k)}$ dénotent les valeurs d'accélération, vitesse et position respectivement à l'instant $t_k \stackrel{\text{def}}{=} kh$.

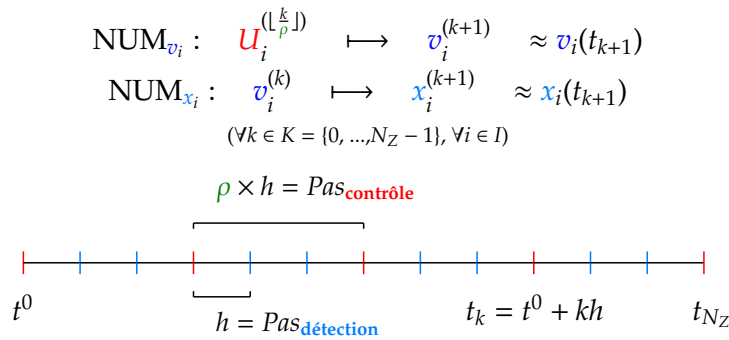


Figure 2.3 – Deux pas de discrétisation de temps (détection et contrôle).

Les variables sont indexées sur les ensembles K et M_Z , tels que $K \stackrel{\text{def}}{=} \{0, \dots, N_Z - 1\}$, et $M_Z \stackrel{\text{def}}{=} \{0, \dots, m_Z - 1\}$ avec $m_Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N_Z}{\rho}$.

En discrétisant le temps dans l'intervalle $[t_0, t_f]$ en N_Z étapes $\left(N_Z = \frac{t_f - t_0}{h} \right)$, et ensuite en discrétisant les contrôles u_i et les variables d'états v_i, x_i (pour tout avion i), nous obtenons

le problème de programmation non linéaire suivant :

$$(P_{D^-}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,v,U) \in \mathbb{R}^{nN_Z(3+\frac{1}{\rho})}} \rho h \sum_{i \in I} \sum_{l \in M_Z} (U_i^{(l)})^2, \\ \text{sous les contraintes} \\ v_i^{(k+1)} = \text{NUM}_{v_i} \left(U_i^{(l \frac{k}{\rho})} \right) \quad \forall k \in K, \forall i \in I, \\ x_i^{(k+1)} = \text{NUM}_{x_i} \left(v_i^{(k)} \right) \quad \forall k \in K, \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq U_i^{(l)} \leq \bar{u}_i \quad \forall l \in M_Z, \forall i \in I, \\ \underline{v}_i \leq v_i^{(k+1)} \leq \bar{v}_i \quad \forall k \in K, \forall i \in I, \\ x_i^{(0)} = x_i^0, \quad v_i^{(0)} = v_i^0, \quad \forall i \in I, \\ v_i^{(N_Z)} = v_i^f, \quad \forall i \in I, \\ \| x_i^{(k+1)} - x_j^{(k+1)} \|^2 \geq D^2 \quad \forall k \in K, \forall i < j, (i, j) \in I^2. \end{array} \right.$$

Le problème (P_{D^-}) admet $nN_Z(3 + \frac{1}{\rho})$ variables et $n(3N_Z + 1)$ contraintes d'égalité liées à l'intégrateur numérique et aux conditions finales (autrement dit, sans tenir compte de l'initialisation correspondant à $3n$ conditions initiales), ainsi que $2nN_Z(1 + \frac{1}{\rho})$ contraintes de bornes et enfin $|\mathcal{R}_p| \left(\left\lceil \frac{t_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor \right)$ contraintes d'inégalité correspondant aux contraintes de séparation, en tenant compte de la décomposition suivant les rencontres potentielles entre avions (au pire cas, $\frac{n(n-1)}{2} \left(\left\lceil \frac{t_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor \right)$ contraintes de séparation).

Remarquons que le problème de programmation non linéaire (P_{D^-}) dépend seulement des variables de contrôle discrétisées $U_i^{(l)}$, comme les variables d'états discrétisées peuvent être calculées (déduites) à partir des contraintes d'égalité. Ainsi, nous pouvons produire une formulation compacte du problème comme suit :

$$(P_{D_c^-}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{U \in \mathbb{R}^{n \frac{N_Z}{\rho}}} \rho h \sum_{i \in I} \sum_{l \in M_Z} (U_i^{(l)})^2, \\ \text{sous les contraintes} \\ \underline{u}_i \leq U_i^{(l)} \leq \bar{u}_i, \quad \forall l \in M_Z, \quad \forall i \in I, \\ \underline{v}_i \leq \text{NUM}_{v_i} \left(U_i^{(l)} \right) \leq \bar{v}_i, \quad \forall l \in M_Z, \quad \forall i \in I, \\ x_i^{(0)} = x_i^0 \quad v_i^{(0)} = v_i^0, \quad \forall i \in I, \\ \text{NUM}_{v_i} \left(U_i^{(l \frac{N_Z}{\rho})} \right) = v_i^f, \quad \forall i \in I, \\ \| \text{NUM}_{x_i} \left(\text{NUM}_{v_i} \left(U_i^{(k+1)} \right) \right) - \text{NUM}_{x_j} \left(\text{NUM}_{v_j} \left(U_j^{(k+1)} \right) \right) \|^2 \geq D^2 \\ \quad \forall k \in K, \forall i < j, (i, j) \in I^2. \end{array} \right.$$

Nous avons appliqué une méthode directe de tir, à deux pas de discrétisation de temps pour les modèles des deux problèmes (P_D) et (P_{D^-}) . La séparation entre avions, vue comme un ensemble de contraintes, est vérifiée sur tout l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ et pour toutes

les paires d'avions $\{(i, j) \in I^2 : i < j\}$. Dans la suite, nous proposons d'utiliser l'information issue des techniques proposées de détection et de détermination de zones et de sous-ensembles d'avions en rencontres potentielles. Ainsi, pour les conditions de séparation entre avions, nous les vérifierons uniquement pour les paires d'avions en rencontres potentielles, (i, j) dans \mathcal{R}_p , sur la période de temps en zone. Les deux problèmes (P_D) et (P_{D_c}) correspondent respectivement aux problèmes (P_{D^-}) et $(P_{D_c^-})$ avec les conditions de séparation vérifiant pour toute paire d'avions (i, j) dans \mathcal{R}_p pour tout instant de temps en « zone », i.e., k dans $\left\{\left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{\bar{t}_Z}{h} \right\rfloor\right\}$ (et non plus « pour tout instant de temps k dans K et pour tout paire d'avions (i, j) ». À présent, nous proposons une approche de résolution numérique, en appliquant en postzone les conditions du PMP. Ainsi, nous tenons compte des résultats présentés en sous-section 2.3.1.

2.3.4 Combinaison des méthodes utilisant le PMP en postzone

En discrétisant le temps dans l'intervalle $[t_0, \bar{t}_Z]$ (période correspondant à la réunion de la prézone et de la zone) en N_Z étapes $\left(N_Z = \left\lceil \frac{\bar{t}_Z - t_0}{h} \right\rceil\right)$, nous obtenons le problème de programmation non linéaire suivant :

$$(P_{C1}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(x, v, U) \in \mathbb{R}^{nN_Z(3 + \frac{1}{\rho})}} \sum_{i \in I} h \left(\rho \sum_{l \in M_Z} (U_i^{(l)})^2 + \left(\frac{v_i^f - v_i^{(N_Z)}}{t_f - N_Z h} \right)^2 \right), \\ \text{sous les contraintes} \\ v_i^{(k+1)} = \text{NUM}_{v_i} \left(U_i^{\left\lfloor \frac{k}{\rho} \right\rfloor} \right) \quad \forall k \in K, \forall i \in I, \\ x_i^{(k+1)} = \text{NUM}_{x_i} \left(v_i^{(k)} \right) \quad \forall k \in K, \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq U_i^{(l)} \leq \bar{u}_i \quad \forall l \in M_Z, \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq \frac{v_i^f - v_i^{(N_Z)}}{t_f - N_Z h} \leq \bar{u}_i \quad \forall i \in I, \\ \underline{v}_i \leq v_i^{(k+1)} \leq \bar{v}_i \quad \forall k \in K, \forall i \in I, \\ x_i^{(0)} = x_i^0, \quad v_i^{(0)} = v_i^0, \quad \forall i \in I, \\ \|x_i^{(k)} - x_j^{(k)}\|^2 \geq D^2 \quad \forall k \in \left\{ \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{\bar{t}_Z}{h} \right\rfloor \right\}, \forall (i, j) \in \mathcal{R}_p. \end{array} \right.$$

Le problème (P_{C1}) admet $nN_Z(3 + \frac{1}{\rho})$ variables et $3nN_Z$ contraintes d'égalité liées à l'intégrateur numérique et aux conditions finales, et $2n(N_Z(1 + \frac{1}{\rho}) + 1)$ contraintes de bornes et enfin $|\mathcal{R}_p| \left(\left\lfloor \frac{\bar{t}_Z}{h} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor \right)$ contraintes d'inégalité correspondant aux contraintes de séparation, en tenant compte de la décomposition suivant les rencontres potentielles entre avions (au pire cas, $\frac{n(n-1)}{2} \left(\left\lfloor \frac{\bar{t}_Z}{h} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor \right)$ contraintes de séparation). De même que pour la méthode directe précédente avec les deux formulations (P_D) et (P_{D_c}) du problème, nous pouvons considérer une formulation compacte (P_{C1_c}) comme suit. Les formulations, (P_{C1}) , (P_{C1_c}) , (P_D) et (P_{D_c}) , sont comparées sous différents environnements numériques, avec différents solveurs en programmation non linéaire de grande taille, dans Cellier et al. [54], et en sous-section 3.3.1.1.

$$\begin{aligned}
(P_{C1c}) \left\{ \begin{array}{l}
\min_{U \in \mathbb{R}^{\frac{N_Z}{\rho}}} \sum_{i \in I} h \left(\rho \sum_{l \in M_Z} (U_i^{(l)})^2 + \left(\frac{v_i^f - \text{NUM}_{v_i}(U_i^{(m_Z)})}{t_f - N_Z h} \right)^2 \right), \\
\text{sous les contraintes} \\
\underline{v}_i \leq \text{NUM}_{v_i}(U_i^{(l)}) \leq \overline{v}_i, \quad \forall l \in M_Z, \forall i \in I, \\
\underline{u}_i \leq \frac{v_i^f - \text{NUM}_{v_i}(U_i^{(m_Z)})}{t_f - N_Z h} \leq \overline{u}_i \quad \forall i \in I, \\
x_i^{(0)} = x_i^0, \quad v_i^{(0)} = v_i^0, \quad \forall i \in I, \\
\| \text{NUM}_{x_i} \left(\text{NUM}_{v_i} \left(U_i^{\lfloor \frac{k-1}{\rho} \rfloor} \right) \right) - \text{NUM}_{x_j} \left(\text{NUM}_{v_j} \left(U_j^{\lfloor \frac{k-1}{\rho} \rfloor} \right) \right) \|^2 \geq D^2, \\
\forall k \in \left\{ \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor, \dots, \left\lceil \frac{\overline{t}_Z}{h} \right\rceil \right\}, \forall (i, j) \in \mathcal{R}_p.
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

2.3.5 Combinaison des méthodes utilisant le PMP en prézone

De manière similaire, nous proposons dans la suite une approche de résolution, en tenant compte des résultats présentés (pour la prézone) en sous-section 2.3.2. En discrétisant le temps dans l'intervalle $[\underline{t}_Z, \overline{t}_Z]$ (en zone uniquement) en N_Z étapes ($N_Z = \left\lceil \frac{\overline{t}_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{\underline{t}_Z}{h} \right\rfloor$), et en discrétisant les contrôles u_i et les variables d'états v_i, x_i (pour tout avion i), nous obtenons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
(P_{C2}) \left\{ \begin{array}{l}
\min_{(x, v, U, A, B, t^c) \in \mathbb{R}^{n(N_Z(3+\frac{1}{\rho})+3)}} \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{3} A_i^2 (t_i^c)^3 + A_i B_i (t_i^c)^2 + B_i^2 t_i^c + h \left(\rho \sum_{l \in M_Z} (U_i^{(l)})^2 + \left(\frac{v_i^f - v_i^{(N_Z)}}{t_f - N_Z h} \right)^2 \right) \right), \\
\text{sous les contraintes} \\
v_i^{(k+1)} = \text{NUM}_{v_i} \left(U_i^{\lfloor \frac{k}{\rho} \rfloor} \right) \quad \forall k \in K, \forall i \in I, \\
x_i^{(k+1)} = \text{NUM}_{x_i} (v_i^{(k)}) \quad \forall k \in K, \forall i \in I, \\
\underline{u}_i \leq U_i^{(l)} \leq \overline{u}_i \quad \forall l \in M_Z, \forall i \in I, \\
t_0 \leq t_i^c \leq \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor \quad \forall i \in I, \\
\underline{u}_i \leq B_i \leq \overline{u}_i \quad \forall i \in I, \\
\underline{u}_i \leq A_i t_i^c + B_i \leq \overline{u}_i \quad \forall i \in I, \\
\underline{u}_i \leq \frac{v_i^f - v_i^{(N_Z)}}{t_f - N_Z h} \leq \overline{u}_i \quad \forall i \in I, \\
\underline{v}_i \leq v_i^{(k+1)} \leq \overline{v}_i \quad \forall k \in K, \forall i \in I, \\
v_i^{(0)} = \frac{1}{2} A_i (t_i^c)^2 + B_i t_i^c + v_i^0 \quad \forall i \in I, \\
x_i^{(0)} = \frac{1}{6} A_i d_i (t_i^c)^3 + B_i d_i (t_i^c)^2 + v_i^0 d_i \left(\left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor - t_i^c \right) \quad \forall i \in I, \\
\| x_i^{(k)} - x_j^{(k)} \|^2 \geq D^2 \quad \forall k \in \left\{ \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor, \dots, \left\lceil \frac{\overline{t}_Z}{h} \right\rceil \right\}, \forall (i, j) \in \mathcal{R}_p.
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

Le problème (P_{C2}) admet $n(N_Z(3 + \frac{1}{\rho}) + 3)$ variables et $3nN_Z$ contraintes d'égalité liées à l'intégrateur numérique et aux conditions finales (autrement dit, sans tenir compte de l'initialisation correspondant à $3n$ conditions initiales), ainsi que $2n(N_Z(1 + \frac{1}{\rho}) + 4)$ contraintes de bornes et enfin $|\mathcal{R}_p| \left(\left\lceil \frac{t_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor \right)$ contraintes d'inégalité correspondant aux contraintes de séparation, en tenant compte de la décomposition suivant les rencontres potentielles entre avions (au pire cas, $\frac{n(n-1)}{2} \left(\left\lceil \frac{t_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor \right)$ contraintes de séparation).

De même que pour la méthode directe précédente avec les deux formulations (P_{C1}) et (P_{C1c}) du problème, nous pouvons considérer une formulation compacte (P_{C2c}) comme suit ; nous obtenons le problème de programmation linéaire suivant :

$$(P_{C2c}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(U,A,B,t^c) \in \mathbb{R}^{n(\frac{N_Z}{\rho} + 3)}} \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{3} A_i^2 (t_i^c)^3 + A_i B_i (t_i^c)^2 + B_i^2 t_i^c + h \left(\rho \sum_{l \in M_Z} (U_i^{(l)})^2 + \left(\frac{v_i^f - \text{NUM}_{v_i}(U_i^{(m_Z)})}{t_f - N_Z h} \right)^2 \right) \right), \\ \text{sous les contraintes} \\ \underline{u}_i \leq U_i^{(l)} \leq \bar{u}_i \quad \forall l \in M_Z, \quad \forall i \in I, \\ t_0 \leq t_i^c \leq \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor \quad \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq B_i \leq \bar{u}_i \quad \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq A_i t_i^c + B_i \leq \bar{u}_i \quad \forall i \in I, \\ \underline{v}_i \leq \text{NUM}_{v_i}(U_i^{(l)}) \leq \bar{v}_i, \quad \forall l \in M_Z, \quad \forall i \in I, \\ \underline{u}_i \leq \frac{v_i^f - \text{NUM}_{v_i}(U_i^{(m_Z)})}{t_f - N_Z h} \leq \bar{u}_i \quad \forall i \in I, \\ v_i^{(0)} = \frac{1}{2} A_i (t_i^c)^2 + B_i t_i^c + v_i^0 \quad \forall i \in I, \\ x_i^{(0)} = \frac{1}{6} A_i d_i (t_i^c)^3 + B_i d_i (t_i^c)^2 + v_i^0 d_i \left(\left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor - t_i^c \right) \quad \forall i \in I, \\ \left\| \text{NUM}_{x_i} \left(\text{NUM}_{v_i} \left(U_i^{\left\lfloor \frac{k-1}{\rho} \right\rfloor} \right) \right) - \text{NUM}_{x_j} \left(\text{NUM}_{v_j} \left(U_j^{\left\lfloor \frac{k-1}{\rho} \right\rfloor} \right) \right) \right\|^2 \geq D^2, \\ \forall k \in \left\{ \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor, \dots, \left\lceil \frac{t_Z}{h} \right\rceil \right\}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{R}_p. \end{array} \right.$$

Le problème (P_{C2c}) admet $n(\frac{N_Z}{\rho} + 3)$ variables et 0 contrainte d'égalité (sans tenir compte de l'initialisation correspondant à $3n$ conditions initiales), ainsi que $2n(2\frac{N_Z}{\rho} + 4)$ contraintes de bornes et enfin $|\mathcal{R}_p| \left(\left\lceil \frac{t_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor \right)$ contraintes d'inégalité correspondant aux contraintes de séparation, en tenant compte de la décomposition suivant les rencontres potentielles entre avions (au pire cas, $\frac{n(n-1)}{2} \left(\left\lceil \frac{t_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor \right)$ contraintes de séparation).

Nous venons de présenter différents méthodes de résolution spécifiques à notre modèle. Les méthodes numériques évoquées font appel, d'une part, à une discrétisation totale ou partielle (de l'intervalle temps), comme la méthode directe de tir (avec les formulations (P_D) et (P_{Dc}) , cf. sous-section 2.3.3) et, d'autre part, à la combinaison de méthodes, avec l'application des conditions du PMP en postzone (pour les formulations (P_{C1}) et (P_{C1c}) ,

cf. sous-section 2.3.4), et avec l'application des conditions du PMP en postzone et prézone (pour les formulations (P_{C2}) et (P_{C2_c}) , cf. sous-section 2.3.5). Dans la section suivante, nous comparons la complexité des différentes formulations discutées précédemment.

2.3.6 Complexité des formulations

Nous proposons un récapitulatif, en Tableau 2.1, permettant de rendre compte de la complexité de chacune des formulations énoncées, où n est le nombre d'avions, N_Z le nombre de pas de temps de discrétisation, t_Z et \bar{t}_Z les deux instants temporels définissant la zone, h le pas de temps de discrétisation pour la détection, ρ le ratio entre les deux pas de temps de discrétisation (i.e., $\rho = \frac{\text{pas de temps de commande}}{\text{pas de temps de détection}}$). Nous avons observé également

formulations	nombre de variables	d'égalité	nombre de contraintes		nombre de pas de temps N_Z
			bornes	d'inégalité séparation	
P_{D^-}	$nN_Z \left(3 + \frac{1}{\rho}\right)$	$n(3N_Z + 1)$	$2nN_Z \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)$	$\frac{n(n-1)}{2}N_Z$	$\left\lceil \frac{t_f - t_0}{h} \right\rceil$
$P_{D_c^-}$	$n \frac{N_Z}{\rho}$	n	$2n \frac{N_Z}{\rho}$	$\frac{n(n-1)}{2}N_Z$	$\left\lceil \frac{t_f - t_0}{h} \right\rceil$
P_D	$nN_Z \left(3 + \frac{1}{\rho}\right)$	$n(3N_Z + 1)$	$2nN_Z \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)$	$ \mathcal{R}_p \left(1 + \left\lceil \frac{\bar{t}_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor\right)$	$\left\lceil \frac{t_f - t_0}{h} \right\rceil$
P_{D_c}	$n \frac{N_Z}{\rho}$	n	$2n \frac{N_Z}{\rho}$	$ \mathcal{R}_p \left(1 + \left\lceil \frac{\bar{t}_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor\right)$	$\left\lceil \frac{t_f - t_0}{h} \right\rceil$
P_{C1}	$nN_Z \left(3 + \frac{1}{\rho}\right)$	$3nN_Z$	$2n \left(N_Z \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) + 1\right)$	$ \mathcal{R}_p \left(1 + \left\lceil \frac{\bar{t}_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor\right)$	$\left\lceil \frac{\bar{t}_Z - t_0}{h} \right\rceil$
P_{C1_c}	$n \frac{N_Z}{\rho}$	0	$2n \left(\frac{N_Z}{\rho} + 1\right)$	$ \mathcal{R}_p \left(1 + \left\lceil \frac{\bar{t}_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor\right)$	$\left\lceil \frac{\bar{t}_Z - t_0}{h} \right\rceil$
P_{C2}	$n \left(N_Z \left(3 + \frac{1}{\rho}\right) + 3\right)$	$3nN_Z$	$2n \left(N_Z \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) + 4\right)$	$ \mathcal{R}_p \left(1 + \left\lceil \frac{\bar{t}_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor\right)$	$\left\lceil \frac{t_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor$
P_{C2_c}	$n \left(\frac{N_Z}{\rho} + 3\right)$	0	$2n \left(2 \frac{N_Z}{\rho} + 4\right)$	$ \mathcal{R}_p \left(1 + \left\lceil \frac{\bar{t}_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor\right)$	$\left\lceil \frac{t_Z}{h} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t_Z}{h} \right\rfloor$

Tableau 2.1 – Caractéristiques des formulations considérées. Nombre de variables, nombre de contraintes d'égalité, nombre de contraintes d'inégalité (en distinguant les contraintes de bornes opérationnelles et les contraintes de séparation entre avions) et nombre de pas de discrétisation de temps.

deux formulations basiques (P_{D^-}) et ($P_{D_c^-}$), qui correspondent à des formulations - respectivement non compacte et compacte - du problème d'évitement par une méthode directe (comme vue en sous-section 2.3.3), mais dans ces formulations - à la différence des formulations (P_D) et (P_{D_c}) - nous ne déterminons pas de zones ni de rencontres potentielles. Ainsi, le nombre de contraintes de séparation, pour ces dernières formulations, (P_{D^-}) et ($P_{D_c^-}$), correspond à $\frac{n(n-1)}{2} \left\lceil \frac{t_f - t_0}{h} \right\rceil$. Ces deux formulations nous permettent alors un point de comparaison supplémentaire concernant l'apport de notre approche construite grâce à la détermination et la décomposition en zones et à la détermination et la décomposition en rencontres potentielles.

Pour discuter davantage la complexité de nos approches, nous donnons deux exemples :

1. un évitement à 3 avions, où $|\mathcal{R}_p|$ le nombre de rencontres potentielles correspond à 2 et que $t_Z = 100 \times h$ et $\bar{t}_Z = 140 \times h$ (ainsi, la période en zone représente 17,08% de la fenêtre de totale de temps, valeur arrondie au centième) ;
2. un évitement à 8 avions, où $|\mathcal{R}_p|$ le nombre de rencontres potentielles correspond

à 12, et que $t_Z = 72 \times h$ et $\overline{t_Z} = 180 \times h$ (ainsi, la période en zone représente 45,42% de la fenêtre de totale de temps, valeur arrondie au centième).

Nous considérons deux pas de discrétisation de temps : respectivement le pas de temps de détection correspondant à $h = 15''$, et le pas de temps de commande correspondant à $1'$ (autrement dit, $\rho = 4$). La fenêtre totale de temps est égale à 1h. Les valeurs (nombre de variables, nombre de contraintes) sont reportées respectivement en Tableau 2.2 pour l'évitement à 3 avions, et en Tableau 2.3 pour l'évitement à 8 avions.

formu- lations PNL	nombre de variables	nombre de contraintes			nombre de pas de temps N_Z
		d'égalité	d'inégalité bornes	séparation	
P_{D^-}	2340	2163	1800	720	240
$P_{D_c^-}$	180	3	360	720	240
P_D	2340	2163	1800	82	240
P_{D_c}	180	3	360	82	240
P_{C1}	1365	1260	1056	82	140
P_{C1_c}	105	0	216	82	140
P_{C2}	399	360	324	82	40
P_{C2_c}	39	0	144	82	40

Tableau 2.2 – Valeurs prises pour un évitement à 3 avions. Les caractéristiques suivantes sont indiquées : nombre de variables, nombre de contraintes d'égalité, nombre de contraintes d'inégalité, et nombre de pas de discrétisation du temps.

formu- lations PNL	nombre de variables	nombre de contraintes			nombre de pas de temps N_Z
		d'égalité	d'inégalité bornes	séparation	
P_{D^-}	6240	5768	4800	6720	240
$P_{D_c^-}$	480	8	960	6720	240
P_D	6240	5768	4800	1308	240
P_{D_c}	480	8	960	1308	240
P_{C1}	4680	4320	3616	1308	180
P_{C1_c}	360	0	736	1308	180
P_{C2}	2832	2592	2224	1308	108
P_{C2_c}	240	0	928	1308	108

Tableau 2.3 – Valeurs prises pour un évitement à 8 avions. Les caractéristiques suivantes sont indiquées : nombre de variables, nombre de contraintes d'égalité, nombre de contraintes d'inégalité, et nombre de pas de discrétisation du temps.

Nous comparons tout d'abord la formulation (P_{D^-}) à (P_{C1_c}) et (P_{C2_c}) respectivement, nous réduisons de 2340 variables à 105 et 39, pour le problème à 3 avions (soit des gains

supérieurs à 95,5% et 98,3% respectivement), de même, nous réduisons de 2340 variables à 360 et 240, pour le problème à 8 avions (soit des gains supérieurs à 94,2% et 96,1% respectivement). À présent si nous effectuons la comparaison avec la formulation (P_{D^-}) par rapport à (P_{C1_c}) et (P_{C2_c}), les méthodes du PMP en postzone et prézone permettent de passer de 180 variables à 105 et 39, pour le problème à 3 avions (soit des gains supérieurs à 41,6% et 78,3% respectivement), et encore de 480 variables à 360 et 240, pour le problème à 8 avions (soit des gains égaux à 25% et 50%). Les méthodes du PMP en postzone et en prézone réduisent significativement le nombre de pas de discrétisation du temps, et ce qui permet de réduire le nombre de variables associées aux modèles (problèmes respectifs). En comparant respectivement la formulation (P_{D^-}) à (P_{C1_c}) et (P_{C2_c}), nous passons de 720 contraintes de séparation à 82, pour le problème à 3 avions (soit un gain supérieur à 88,5%) et nous passons de 6720 contraintes de séparation à 1308, pour le problème à 8 avions (soit un gain supérieur à 80,5%). Ainsi, la détermination et détection de zones, suivant les rencontres potentielles entre avions, réduit significativement aussi le nombre de contraintes de séparation.

2.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié la modélisation et la résolution numérique, en termes de contrôle optimal.

Tout d'abord, nous avons présenté notre modèle, en termes de contrôle optimal, pour étudier le problème d'évitement de conflits aériens par une régulation subliminale en vitesse. Notamment, nous avons posé un critère énergétique quadratique pénalisant les accélérations, autrement dit minimisant les variations en vitesse, de manière équitable sur l'ensemble des avions ; nous avons considéré l'accélération comme variable de commande et nous avons fixé le retour aux vitesses nominales comme conditions terminales.

Nous avons proposé des décompositions du problème initial en sous-problèmes (plus aisés à résoudre), d'une part, avec des décompositions en « zones » suivant les conditions de séparation entre avions, d'autre part, avec une décomposition suivant les sous-ensembles d'avions en « rencontres potentielles ». Ainsi, la fenêtre totale de temps peut être vue en trois périodes successives : la prézone, la zone et la postzone. Des conflits aériens peuvent survenir uniquement dans la période en zone, c'est pourquoi il suffit de vérifier les conditions de séparation sur cette période. De cette décomposition du problème initial de contrôle optimal en trois sous-problèmes, nous avons observé la présence ou non de contraintes sur les variables d'états suivant les zones.

Enfin, nous avons proposé des combinaisons de méthodes numériques appropriées au modèle et aux décompositions suggérées. La zone est traitée avec une méthode numérique directe de tir, avec deux pas de discrétisation de temps. Pour nos méthodes en postzone et en prézone, nous avons fait appel aux conditions du principe du maximum de Pontryagin. La résolution par notre approche va se ramener à la résolution d'un problème de programmation non linéaire. En particulier, nous avons étudié les complexités respectives des méthodes proposées, suivant le nombre de variables et le nombre de contraintes, du nombre de pas de discrétisation de temps, et du nombre de rencontres potentielles. Les méthodes proposées ont permis de réduire significativement, par rapport à une méthode numérique directe de tir, le nombre de variables et le nombre de contraintes, liées aux conditions de séparation entre avions.

Nous présentons dans le prochain chapitre les tests et résultats obtenus relatifs aux méthodes proposées.

CHAPITRE 3

Tests numériques



« A computer would deserve to be called intelligent if it could deceive a human into believing that it was human. »

A. Turing



Contenu de ce chapitre

3.1 Exemples introductifs	82
3.1.1 Contraintes sur les vitesses	83
3.1.2 Conditions terminales en position	84
3.1.3 Étude numérique de discrétisations différentes en temps	86
3.1.4 Conflits potentiels en croisement	89
3.1.5 Phase tactique et temps d’anticipation limité	90
3.2 Génération d’instances et cadre expérimental	92
3.2.1 Indicateurs de complexité	92
3.2.2 Caractéristiques des configurations aériennes et instances	93
3.3 Résultats numériques pour les instances générées	95
3.3.1 Méthode du PMP en postzone	95
3.3.2 Méthode du PMP en postzone et partitionnement	102
3.3.3 Méthode du PMP en prézone	105
3.4 Conclusions	107

Dans ce chapitre, nous discutons les résultats numériques obtenus pour les méthodes de résolution présentées au Chapitre 2. En Section 3.1, nous exposons, sur des cas simples, l’importance de certains paramètres pour les modèles de contrôle optimal et les approches de résolution. Nous illustrons et discutons ainsi, notamment, des contraintes sur les vitesses, des conditions terminales et des pas de discrétisation du temps (relatifs aux contrôles et aux états). En Section 3.2, nous présentons le cadre expérimental pour nos tests, d’une part en précisant des indicateurs de complexité propres aux configurations aériennes, et plus particulièrement pour nos approches ; d’autre part, nous présentons les instances utilisées dont la génération est détaillée en Annexe C pour le problème d’évitement de conflits en croisement. La Section 3.3 décrit les résultats. Différents environnements numériques (AMPL [87] et MATLAB [123]) et deux solveurs de programmation non linéaire de grande taille (SNOPT [95] et IPOPT [169]) sont comparés (en sous-Section 3.3.1.1). Les combinaisons de méthodes numériques (décrites en Chapitre 2), à travers la décomposition en zones (et la décomposition en sous-ensembles d’avions, en sous-Section 3.3.2), avec notamment les conditions d’application du PMP (en postzone et/ou en prézone), sont implémentées et les résultats numériques sont discutés.

3.1 Exemples introductifs

Dans cette section, nous introduisons quelques uns des paramètres afin d’aborder l’aspect numérique de la résolution des problèmes de contrôle optimal présentés au Chapitre 2. Ces premières observations vont permettre de mieux appréhender l’importance des paramètres, sur notre approche, tels que les contraintes sur la vitesse, les pas de discrétisation du temps (pour les contrôles et pour les états), les conditions terminales (comme le retour des avions aux positions finales initialement prévues dans leur plan de vol, à la fin de la période de temps considérée), les configurations de conflits potentiels en croisement ou en poursuite, et le faible temps d’anticipation dans la phase tactique. En effet, les intervalles de régulation en vitesse, introduits en Section 1.1.3.2, ont un rôle prépondérant dans notre approche. Les aspects opérationnels et les ordres de grandeurs pour les vitesses sont pris en compte (par exemple, BADA [80]).

3.1.1 Contraintes sur les vitesses

Pour évaluer l'impact des contraintes sur les états de la vitesse, nous allons résoudre une instance du problème de contrôle optimal (\mathcal{P}) en utilisant uniquement une méthode directe de tir ; le temps sera discrétisé et les variables du problème deviendront uniquement les commandes d'accélération ; les positions et les vitesses seront déduites via un intégrateur numérique de type Euler. Nous nous plaçons dans une situation simple de phase tactique d'évitement de conflit entre deux avions (i.e., quelques minutes avant que le conflit n'ait lieu et le nombre d'avions $n = 2$) :

1. nous considérons une fenêtre de temps de 30' (i.e., $t_0 = 0$ et $t_f = 0.5h$, le conflit aérien aurait lieu près de la 15^{ième} minute si aucune manœuvre d'évitement n'est effectuée) ;
2. les conditions initiales sont données par : $x_1^0 = (0, 100)^T$, $x_2^0 = (100, 0)^T$ et $v_1^0 = v_2^0 = 400 \text{ NM.h}^{-1}$;
3. les directions correspondent à : $d_1 = (1, 0)$ et $d_2 = (0, 1)$;
4. les conditions finales sont : $v_1^f = v_2^f = v_1^0$ (et les positions finales sont libres) ;
5. les bornes sur les vitesses sont : $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = 0.94 \times v_1^0$ et $\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = 1.03 \times v_1^0$;
6. les bornes sur l'accélération sont : $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = -\underline{u}_1 = -\underline{u}_2 = 4000 \text{ NM.h}^{-2}$;
7. les pas de temps pour la discrétisation des commandes (accélération) et des états (vitesses et positions) sont identiques, correspondant à des pas de temps égaux à 15'', ici $\rho = 1$, et nous considérons le problème (P_D) ;
8. nous initialisons les commandes avec le vecteur de commande initiale triviale de la méthode locale d'optimisation.

Les courbes des solutions obtenues, via la fonction (algorithme SQP) de MATLAB, pour le problème (P_D), pour les accélérations (commandes) et les vitesses (états), sont représentées en Figure 3.1, suivant si nous relâchons ou non, au sein de notre modèle de contrôle optimal (\mathcal{P}), les contraintes associées à l'intervalle de régulation en vitesse : [376; 412].

La Figure 3.2 représente un zoom sur une partie de la résolution d'un problème d'évitement à deux avions (illustré précédemment en Figure 3.1), avec la représentation de l'état de la vitesse de l'avion qui accélère. Dans la Figure 3.2, nous distinguons ainsi les courbes des solutions optimales de l'état de la vitesse : en bleu sans tenir compte de la borne supérieure sur l'état de la vitesse, en rouge en tenant compte de la borne supérieure (ici, fixée à 412NM/h) sur l'état de la vitesse. La Figure 3.2 permet de rendre compte, dans l'approche de résolution faisant appel aux conditions du PMP en prézone, d'un instant (éventuel) de saturation d'une des deux contraintes sur les états de la vitesse (ici, la contrainte supérieure de vitesse). Le rôle des contraintes sur les vitesses est essentiel dans notre approche de régulation subliminale. Les solutions optimales obtenues, pour la résolution du problème (P_D) avec $\rho = 1$, en tenant compte des contraintes en vitesse donnent une valeur objectif plus élevée (courbes solutions en bleu), que si nous relâchons ces contraintes (courbes solutions en rouge) dans notre modèle. Le respect d'intervalles stricts autour des vitesses nominales contraint les avions considérés dans le problème d'évitement, à une prompt variation de vitesse. En effet, nous remarquons, à travers les courbes solutions obtenues en Figure 3.1, que le changement en vitesse s'effectue dès le début de la fenêtre de temps, puis jusqu'à la saturation de la contrainte en vitesse si nécessaire. Cette accélération est plus importante (ici, pour le cas de l'avion qui accélère)

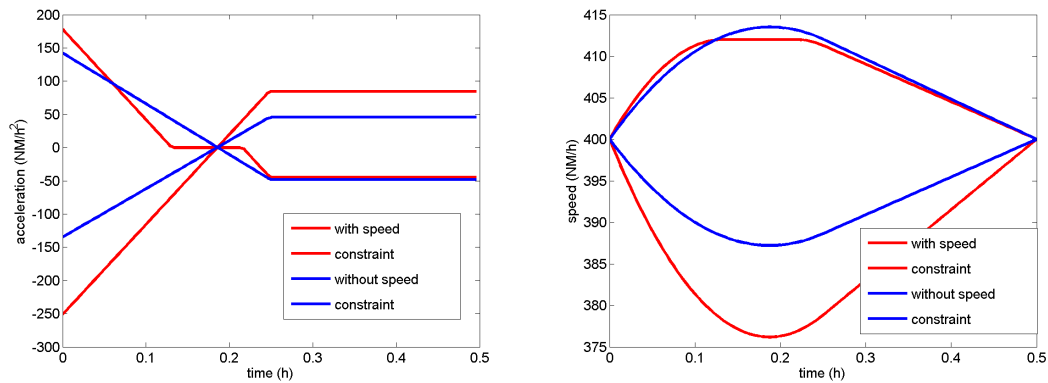


Figure 3.1 – Évitement à 2 avions : sans ou avec contraintes sur les états de vitesse. À gauche, les courbes représentent les commandes obtenues d’accélération (en NM/h^2) en fonction du temps. À droite, les courbes représentent les états obtenus de vitesses (en NM/h) en fonction du temps (sur une fenêtre totale de temps de 30'). Les traits en bleu, sur chacun des diagrammes présentent les solutions obtenues sans prendre en compte les contraintes sur les états de vitesse. Les traits en rouge, sur chacun des diagrammes présentent les solutions obtenues avec la prise en compte des contraintes sur les états de vitesse.

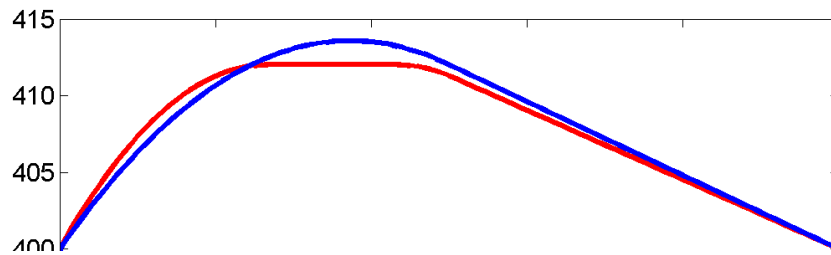


Figure 3.2 – Zoom : importance de la contrainte sur l’état de la vitesse. Résolution d’un problème d’évitement à deux avions, avec la représentation de l’état de la vitesse de l’avion qui accélère. Courbes des solutions optimales de l’état de la vitesse : en bleu sans tenir compte de la borne supérieure sur l’état de la vitesse, en rouge en tenant compte de la borne supérieure (ici, fixée à 412 NM/h) sur l’état de la vitesse.

que dans le cas où les contraintes en vitesse sont relâchées. Cette accélération est pénalisée par notre critère énergétique quadratique ; ce qui justifie une valeur objectif plus élevée pour les solutions optimales obtenues en tenant compte des contraintes en vitesse.

En fonction de la complexité de la configuration aérienne (en particulier du nombre d’avions), nous pouvons noter des différences significatives entre les courbes des solutions obtenues en vitesse respectivement avec ou sans tenir de contraintes en vitesse. Par exemple, l’impact des contraintes en vitesse est accentué avec le nombre d’avions, sur le « problème du cercle » (décrit en section 3.2.2). Ainsi, pour un problème d’évitement de conflits à 4 avions, ayant les directions spécifiques au problème du cercle (autrement dit, problème dans lequel la configuration admet le nombre de conflits potentiels le plus élevé, problème défini formellement dans la suite), sous les mêmes hypothèses que l’exemple précédent à deux avions ; nous obtenons les illustrations en Figure 3.3.

3.1.2 Conditions terminales en position

Les états du système (positions et vitesses initiales respectives aux avions) sont supposés connus et considérées comme des données de notre problème. Il s’agit des condi-

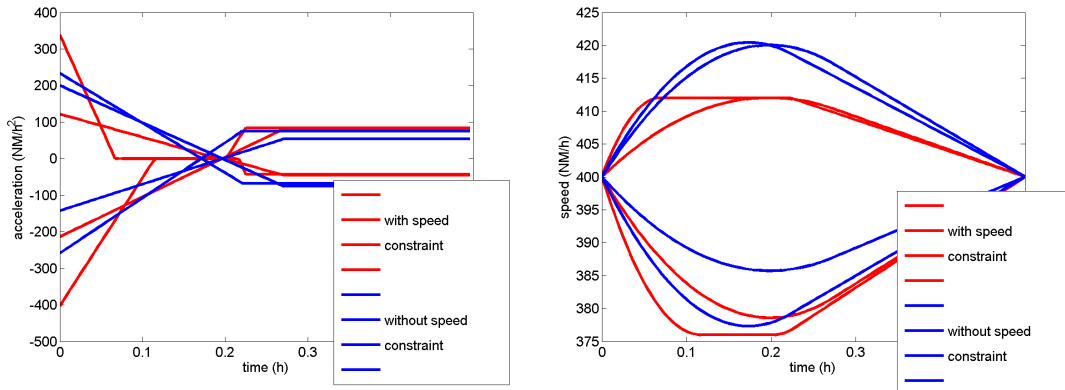


Figure 3.3 – Évitement à 4 avions : sans ou avec contraintes sur les états de vitesse. Courbes représentant les commandes obtenues et vitesses obtenues pour la résolution du problème (P_D). À gauche, les courbes représentent les commandes obtenues d’accélération (en NM/h^2) en fonction du temps (sur une fenêtre totale de temps de 30'). À droite, les courbes représentent les états obtenus de vitesses (en NM/h) en fonction du temps (sur une fenêtre totale de temps de 30'). Les traits en bleu, sur chacun des diagrammes présentent les solutions obtenues sans prendre en compte les contraintes sur les états de vitesse. Les traits en rouge, sur chacun des diagrammes présentent les solutions obtenues avec la prise en compte des contraintes sur les états de vitesse.

tions initiales sur notre modèle de contrôle optimal, décrit en Section 2.1. Les états du système dynamique à la fin de la fenêtre totale de temps étudiée (conditions terminales sur le problème) sont fixés ou libres. Dans notre modèle, proposé en Section 2.1, nous fixons les vitesses finales comme étant égales aux vitesses nominales initiales, et nous nous laissons libres les états concernant les positions des avions. Nous décrivons les conditions terminales, comme suit. Dans le cadre de notre approche, en régulation subliminale, nous souhaitons limiter les modifications faites sur les plans de vols. La condition terminale d’un retour aux positions finales (initialement prévues), présente un intérêt à ne pas perturber la suite des plans de vols des avions en sortie du secteur étudié. Toutefois, elle s’avère contraignante et difficile à réaliser dans le cadre d’une régulation subliminale en vitesse, en phase tactique (avec un faible temps d’anticipation avant conflits) et sur une fenêtre totale de temps le plus souvent inférieure ou égale à 1 heure. De rares cas (généralement simples), auxquels nous imposons un retour aux positions finales, admettent des solutions. Par exemple, nous reprenons le problème d’évitement à deux avions sous la formulation (P_D), indiqué en sous-section 3.1.1, avec, cette fois-ci, des positions initiales et des directions d’avions différentes, illustrées en Figure 3.4. Les avions sont supposés partager les mêmes caractéristiques, notamment les vitesses nominales des deux avions sont identiques, fixées à 400 NM/h . Cette figure n’est pas symétrique ; en effet, nous constatons, du point de vue des positions finales, le retard pris par l’avion ayant décélééré et l’avance prise par l’avion ayant accéléré, après la résolution du problème d’évitement.

Nous comparons pour ce problème les résultats numériques, avec ou sans tenir compte de la condition de retour aux positions finales. Les temps de calculs, les nombres d’itérations et les nombres d’évaluations de la fonction objectif sont reportés en Tableau 3.1. La résolution du problème avec la condition de retour aux positions finales est plus coûteuse (que sans cette condition), dans le sens où nous observons pour celle-ci que le nombre d’itérations est plus élevé, un temps de calculs plus élevé et une valeur objectif plus élevée (que les solutions obtenues sans cette condition).

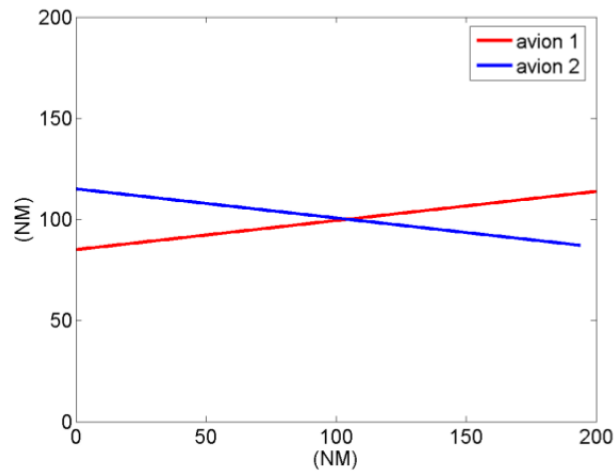


Figure 3.4 – Problème d'évitement de conflits à 2 avions, considéré en une fenêtre de temps de 30', avec un temps d'anticipation inférieur à 15', les trajectoires sont représentées en traits pleins, en rouge pour le premier avion, et bleu pour le second.

Condition terminale sur les positions finales	AVEC	SANS
temps de calculs	1'47''	1'05''
valeur de l'objectif	$2.2 \cdot 10^4$	$3.7 \cdot 10^3$
nombre d'itérations	269	175
nombre d'évaluations	17661	11598

Tableau 3.1 – Avec ou sans condition terminale sur les positions finales.

Les courbes de solutions obtenues, pour les accélérations et les vitesses, avec ou sans la condition de retour aux positions finales initialement prévues comme condition terminale sur notre modèle, sont présentées en Figure 3.5. La condition terminale demandant le retour aux positions finales initialement prévues n'est pas retenue dans notre approche, puisqu'elle est trop limitante.

3.1.3 Étude numérique de discrétisations différentes en temps

Comme nous l'avons proposé en sous-section 2.3.3, nous distinguons les pas de discrétisation de temps de variables d'états et ceux des variables de commandes.

Les expressions de la vitesse sont souvent formulées en nautiques par heure (NM/h), autrement dit, en noeuds (kt). Dans la littérature, pour les expériences numériques, les auteurs choisissent le plus souvent des vitesses comprises entre 400kt et 500kt, et ceci permettant une approximation du déplacement de l'avion, d'une distance de 8NM par minute. On peut ainsi donner des bornes sur les distances qui peuvent être parcourues par les avions. Cette discrétisation par pas de temps de 15'' est utilisé dans la littérature, pour la détection et/ou la résolution de conflits potentiels. Ainsi, dans toute la suite, les pas de discrétisation du temps concernant les états, pour le système dynamique et la satisfaction de contraintes (comme la séparation), sont fixés à 15''.

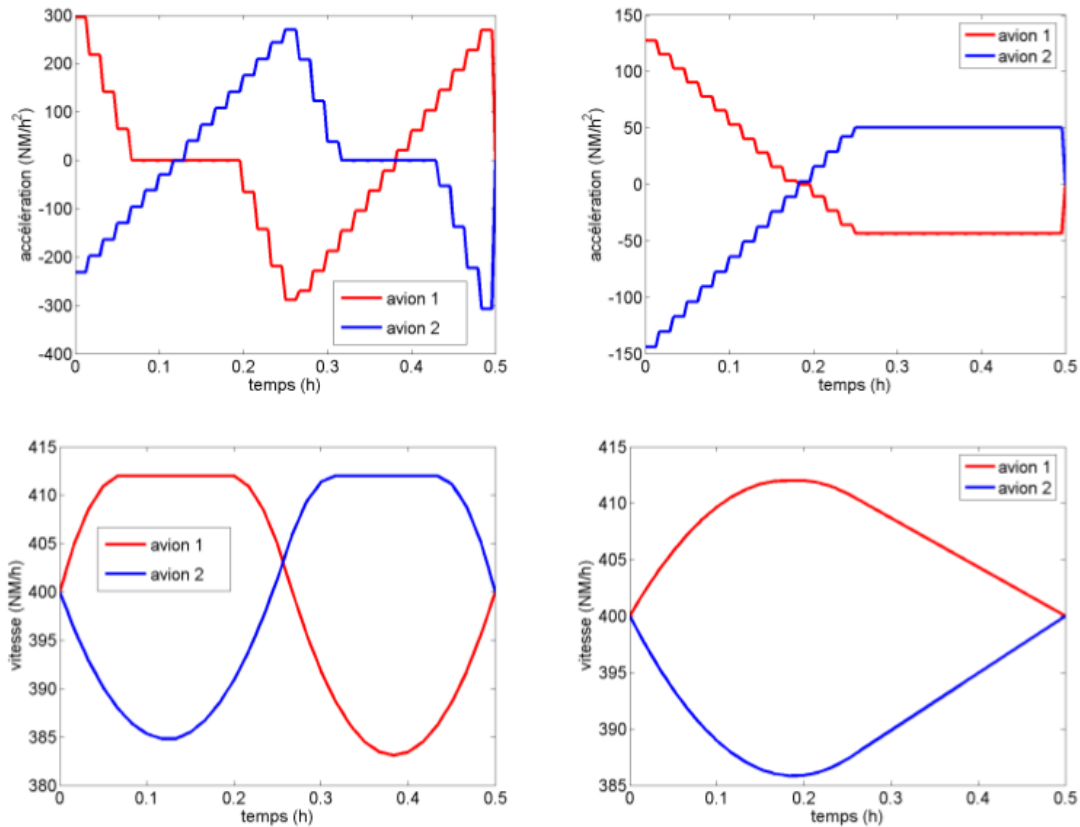


Figure 3.5 – Comparaison des courbes de solutions optimales des accélérations (en haut) et des vitesses (en bas), pour un évitement de conflit à 2 avions, avec une condition terminale différente : sans ou avec le retour aux positions finales initialement prévues. Avec le retour aux positions finales initiales prévues : accélérations et vitesses à gauche ; ou sans cette condition : accélérations et vitesses à droite.

À présent, nous nous intéressons aux pas de discrétisation pour les commandes. Pour le choix du pas de discrétisation de la commande d'accélération, nous avons préféré retenir $1'$ (autrement dit, $\rho = 4$ dans le modèle présenté en sous-section 2.3.3), il s'agit d'un compromis entre la précision et l'efficacité pour notre résolution numérique à pas fixés. Pour argumenter ce choix du pas de discrétisation de la commande d'accélération, nous présentons quelques uns des résultats les plus significatifs, à travers un problème d'évitement à deux avions (cf. Cellier et al. [51]).

Nous allons résoudre une instance du problème de contrôle optimal (P_D) en utilisant une méthode directe de tir ; le temps sera discrétisé et les variables du problème deviendront uniquement les commandes ; les positions et les vitesses seront déduites via un intégrateur numérique de type Euler. Nous nous plaçons dans une situation simple de phase tactique d'évitement de conflit entre deux avions (i.e., quelques minutes avant que le conflit n'ait lieu et le nombre d'avions $n = 2$) :

1. nous considérons une fenêtre de temps de 30 min (i.e., $t_0 = 0$ et $t_f = 0.5$ h, le conflit aurait lieu près de la 15^{ème} minute) ;
2. les conditions initiales sont données par : $x_1^0 = (0, 100)^T$, $x_2^0 = (85, 0)^T$ et $v_1^0 = v_2^0 = 400 \text{ NM.h}^{-1}$;
3. les directions correspondent à : $d_1 = (1, 0)^T$ et $d_2 = (\cos(5\pi/11), \sin(5\pi/11))^T$;

4. les conditions finales sont : $v_1^f = v_2^f = v_1^0$, $x_1^f = x_1^0 + (t_f - t_0)v_1^0 d_1$ et $x_2^f = x_2^0 + (t_f - t_0)v_2^0 d_2$;
5. les bornes sur les vitesses (régulation faible) sont : $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = 0.94v_1^0$ et $\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = 1.03v_1^0$;
6. les bornes sur l'accélération sont : $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = -\underline{u}_1 = -\underline{u}_2 = 4000 \text{ NM.h}^{-2}$;
7. nous initialisons les commandes avec le vecteur nul pour commande initiale triviale de la méthode locale d'optimisation.

Avec un pas de discrétisation correspondant à 1 minute, nous obtenons un problème d'optimisation continue non linéaire de 60 variables, de 360 contraintes d'égalités et de 390 contraintes d'inégalités. Pour la résolution, nous utilisons la fonction `fmincon` (algorithme SQP) de MATLAB version 7. Nous obtenons une solution optimale (minimum local) dont les vitesses des deux avions sont représentées sur la Figure 3.6, et correspondent aux manœuvres des deux avions (tests effectués sur un PC - portable à 2.53GHz et possédant 4Go de RAM). Quatre pas de discrétisation de temps de contrôle sont observés, respectivement 5', 3', 1' et 30'', dans le Tableau 3.2. Nous observons que le pas de temps égal à 1' semble être le plus intéressant dans le sens où il admet un temps de calculs significativement plus faible que le pas de 30'', tout en gardant une certaine précision (qualité) de la solution comme nous l'illustrons dans la suite.

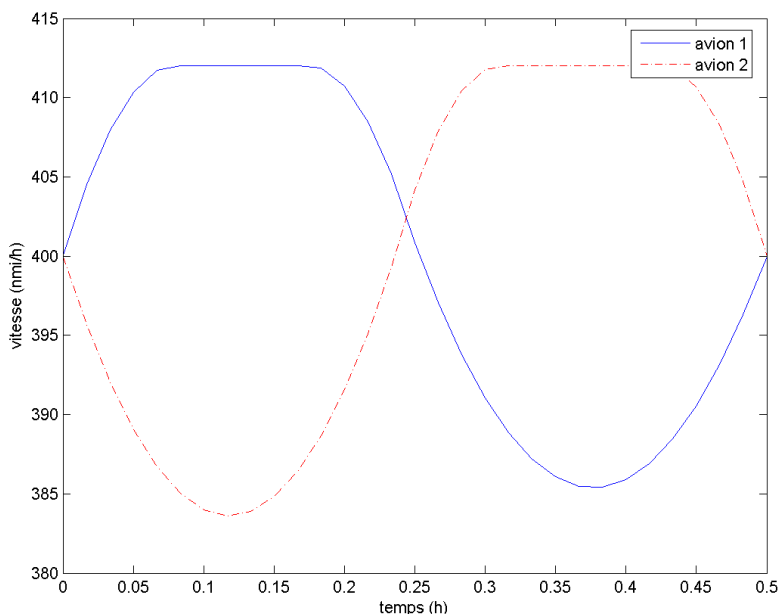


Figure 3.6 – Régulation en vitesse pour deux avions, sur une fenêtre totale de temps de 30 minutes. Les deux avions sont considérés comme ayant des vitesses nominales identiques, égales à 400NM/h. Les conditions finales correspondent au retour aux vitesses nominales, et au retour aux positions finales initialement prévues.

À présent, nous examinons les pas de discrétisation de temps du point de vue de la précision des solutions obtenues, courbes d'accélération et de vitesse.

Nous reprenons le problème d'évitement à deux avions indiqué dans la sous-section précédente (3.1.1). En Figure 3.8, nous comparons les solutions obtenues via une discrétisation des pas de temps pour l'accélération égaux à 1', avec les solutions obtenues pour des pas de temps égaux à 15'' (i.e., dans le cas où les pas de discrétisation des variables de commandes sont identiques aux pas de discrétisation des variables des états).

pas de discrétisation du temps de contrôle	nombre de variables	temps de calculs	nombre d'itérations
5'	12	0''54	65
3'	20	0''56	50
1'	60	21''65	298
30''	120	15'54''	799

Tableau 3.2 – Pas de discrétisation du temps de contrôle, de plus en plus petits, respectivement 5', 3', 1' et 30''. Le pas de discrétisation égal à 1' apparaît le plus satisfaisant alliant « précision » (précision détaillée dans la suite, cf. Figure 3.7) et « rapidité » de résolution.

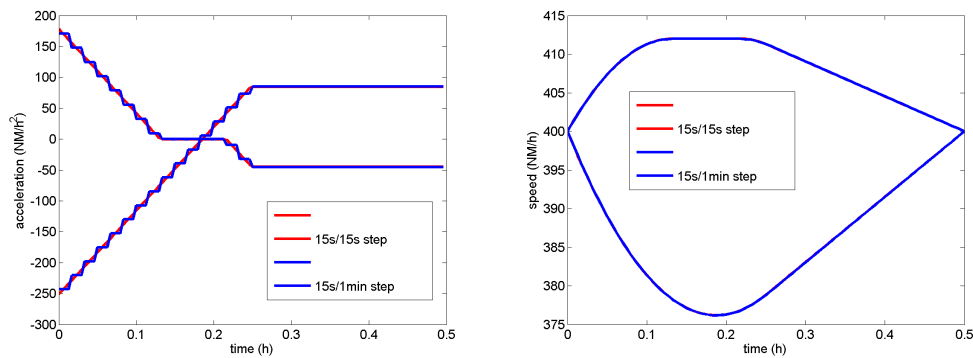


Figure 3.7 – Comparaison de pas de discrétisation de temps pour l'accélération : courbes d'accélération à droite et courbes de vitesse à gauche, représentées sur une fenêtre totale de temps de 30 minutes. Les solutions obtenues en utilisant des pas de temps pour l'accélération égaux à 1' (en bleu) sont comparées avec les solutions obtenues pour des pas de temps égaux à 15'' (en rouge).

Pour ce tel test avec, cette fois-ci, une fenêtre totale de temps correspondant à 45', les pas de discrétisation de 5' sont inappropriés, en donnant une valeur objectif nettement plus élevée (que les pas de discrétisation égaux à 1', même si la fenêtre totale de temps est plus grande et les variations de vitesse pour le retour aux vitesses nominales).

En Figure 3.8, nous comparons les solutions obtenues via une discrétisation grossière de l'accélération, en utilisant des pas de temps pour l'accélération égaux à 5', avec les solutions obtenues pour des pas de temps égaux à 15'' (i.e., dans le cas où les pas de discrétisation des variables de commandes sont identiques aux pas de discrétisation des variables des états).

3.1.4 Conflits potentiels en croisement

Les instances utilisées pour tester nos approches de résolution sont des configurations aériennes avec des conflits potentiels « en croisement » ou en « poursuites ». Les conflits potentiels en croisement se produisent pour des intersections de trajectoires, alors que les conflits potentiels en poursuite (ou rattrapage) ont lieu sur une même route aérienne lorsque deux avions se suivent (l'avion suiveur avec une vitesse plus élevée que celui qui le précède). Par exemple, nous discutons d'un problème d'évitement de conflits à 4 avions, lequel donne lieu à des problèmes d'évitement des types croisement et poursuite, dont les trajectoires suivies sont illustrées en Figure 3.9, dans lequel deux routes aériennes sécantes sont empruntées par les avions (deux avions sur chaque route se suivent). Nous

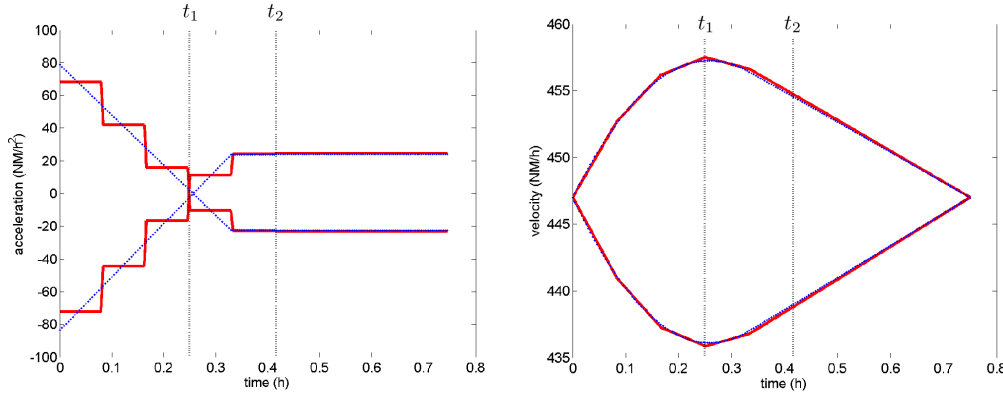


Figure 3.8 – Aspects des pas de discrétisation : 15'' ou 5' pour l'accélération. Courbes d'accélération à droite et courbes de vitesse à gauche, représentées sur une fenêtre totale de temps de 45 minutes. Les solutions obtenues en utilisant des pas de temps pour l'accélération égaux à 5' (en rouge) sont comparées avec les solutions obtenues pour des pas de temps égaux à 15'' (en bleu). Les instants t_1 et t_2 délimitent la période en zone.

allons résoudre une instance du problème en utilisant une méthode directe de tir. Nous nous plaçons dans une situation simple de phase tactique d'évitement de conflits entre quatre avions :

1. nous considérons une fenêtre de temps de 30 minutes (i.e., $t_0 = 0$ et $t_f = 0.5$ h, le conflit aurait lieu autour de la 15^{ième} minute (si aucune manœuvre d'évitement n'est effectuée) ;
2. les conditions initiales sont données par : $x_1^0 = x_3^0 = (0, 0)^T$, et $x_2^0 = x_4^0 = (200, 200)^T$ et $v_1^0 = v_2^0 = v_3^0 = v_4^0 = 400 \text{ NM.h}^{-1}$;
3. les distances entre l'avion suiveur et l'avion suivi (respectivement 3 et 1, et 4 et 2) sont initialement à 9.89NM ;
4. les directions correspondent à : $d_1 = d_3 = (0, 7071, 0, 7071)^T$ et $d_2 = d_4 = (0, 7071, 0, 7071)^T$;
5. les conditions finales sont : $v_1^f = v_2^f = v_3^f = v_4^f = v_1^0$;
6. les bornes sur les vitesses (régulation faible) sont : $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{v}_3 = \underline{v}_4 = 0.94v_1^0$ et $\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = \overline{v}_3 = \overline{v}_4 = 1.03v_1^0$;
7. les bornes sur l'accélération sont : $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = \overline{u}_3 = \overline{u}_4 = -\underline{u}_1 = -\underline{u}_2 = -\underline{u}_3 = -\underline{u}_4 = 4000 \text{ NM.h}^{-2}$;
8. nous initialisons ce test avec le vecteur nul pour point de départ (commande initiale triviale) de la méthode locale d'optimisation.

Les distances entre les positions finales observées après l'évitement sont différentes. Les distances initiales entre les avions qui se suivent ont une influence, en particulier, sur l'ordre de passage au point de croisement (à l'intersection) des deux routes ; ici, l'ordre de passage observé est : 1 – 2 – 4 – 3. Nous décrivons également les solutions en vitesses obtenues pour le problème d'évitement à 4 avions, en Figure 3.9.

3.1.5 Phase tactique et temps d'anticipation limité

Une particularité, évidente, de la régulation subliminale en vitesse est le besoin d'un temps d'anticipation (avant que les conflits n'aient lieu) qui ne soit pas trop faible, dans

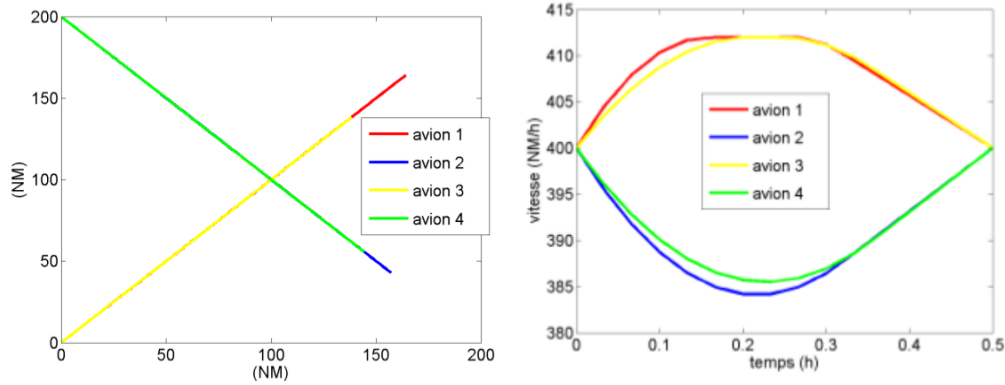


Figure 3.9 – Évitement de 4 avions en croisement et en poursuite. Les distances entre l’avion suiveur et l’avion suivi (respectivement 3 et 1, et 4 et 2) sont initialement à 9.89NM. Au schéma de gauche se trouvent les trajectoires ; à droite, se trouvent les courbes obtenues de vitesses, pour l’évitement à 4 avions.

le sens où l’approche bénéficie de ce temps pour que les avions puissent effectuer les manœuvres d’évitement.

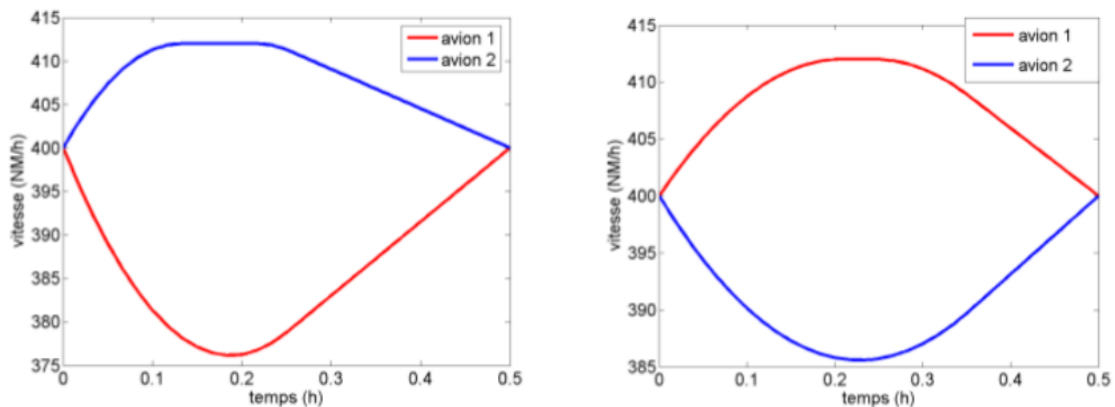


Figure 3.10 – Comparaison d’évitement de conflits à deux avions avec des temps différents d’anticipation (avant que les conflits n’aient lieu) : 15’ à gauche, et 20’ à droite.

Nous mettons en évidence, pour notre modèle, l’influence du temps d’anticipation, dans le problème d’évitement de conflits aériens par régulation en vitesse, en Figure 3.10 Les deux illustrations décrivent les courbes de solutions pour les vitesses. À gauche, le temps d’anticipation (avant conflit) est proche de 15’ ; tandis que pour la représentation du bas, ce temps est supérieur, à 20’. Les accélérations des avions sont moins importantes pour le second évitement, avec les solutions de vitesses illustrées à droite. Nous observons aussi pour de faibles temps d’anticipation la saturation de la contrainte en vitesse (à gauche), discutée en sous-section 3.1.1.

En conclusion de cette section, nous avons pu constater, à travers ces premiers tests numériques, l’importance de certains paramètres et de certaines conditions pour notre approche.

3.2 Génération d'instances et cadre expérimental

Pour introduire la notion de « complexité » concernant les problèmes d'évitement de conflits aériens, dans la sous-section suivante, nous précisons les indicateurs retenus pour notre approche. Nous présentons ainsi des configurations aériennes (problème du cercle et problème du cercle avec déviation) et les instances retenues, en sous-section 3.2.2 et annexe C, permettant de réaliser les tests numériques.

3.2.1 Indicateurs de complexité

De nombreux travaux visent à établir des indicateurs et une meilleure compréhension de la « complexité » des configurations en trafic aérien. Un état de l'art, en 2011, sur les travaux concernant les indicateurs (dans la littérature, on retrouve aussi le terme de « metrics ») pour la complexité des configurations aériennes, est présenté dans Prandini et al. [137]. Différents aspects remarquables des configurations aériennes ont été étudiés.

1. Le nombre d'avions est l'un des indicateurs primordiaux pour mesurer la difficulté de résolution de l'instance.
2. Le nombre de conflits potentiels ($|C_p|$) ; les expériences montrent que plus le nombre de conflits est élevé, plus sa résolution numérique est délicate (ou la sévérité du problème d'évitement de conflits, notamment présente dans les problèmes du type cercle).
3. Les angles de croisement entre les trajectoires d'avions (nous précisons pour nos instances l'angle de croisement minimal), par exemple, Huang et Tomlin [105].
4. Le temps d'anticipation (comme nous l'avons discuté en section précédente), ou du temps d'arrivée (sans changement en vitesse) à l'intersection de leurs trajectoires, par exemple, Rey [140].
5. La somme des durées des conflits potentiels peut être utilisée pour mesurer la complexité du trafic aérien, par exemple, Delahaye et Puechmorel [67]. Cet indicateur peut être vu comme un agrégat de deux types de grandeurs discutées usuellement pour des paires d'avions : la durée (maximale) de violation potentielle de la condition de séparation, et la distance (minimale) potentielle entre les deux avions, par exemple, Friedman [91].

Les deux grandeurs, la durée (maximale) de violation potentielle de la condition de séparation, et la distance (minimale) potentielle entre les deux avions, sont corrélées dans la mesure où en considérant les trajectoires rectilignes, et en prenant comme référentiel l'un des deux avions la durée de violation de séparation croît à mesure que la distance entre les avions se réduit. Ces grandeurs sont aussi discutées pour le travail des contrôleurs aériens :

1. la géométrie des conflits potentiels affecte la charge des contrôleurs aériens, par exemple, Majumbar et Ochieng [121].
2. la distance minimale entre deux vols est un indicateur utilisé par les contrôleurs aériens, par exemple, Averty et al. [6].

Pour décrire nos instances, nous ajoutons, en plus des cinq indicateurs cités ci-dessus, des indicateurs propres à notre approche, présentée au Chapitre 2, concernant :

1. le nombre de rencontres potentielles ($|R_p|$) entre avions ;
2. le nombre de sous-ensembles d'avions en rencontres potentielles ;

- la durée de la zone (exprimée en pourcentage par rapport à la fenêtre de temps totale étudiée).

3.2.2 Caractéristiques des configurations aériennes et instances

À présent, nous discutons les types d'instances les plus utilisés. Il s'agit deux types de configurations (géométriques) :

- Problèmes dits « du cercle », illustrés en Figure 3.12 ;
- Problèmes dits « du cercle avec déviation », illustrés en Figure 3.11.

Dans les problèmes dits du cercle, disposés sur une portion du cercle (un quart de cercle), les avions convergent tous en passant par le centre de ce cercle. Pour un problème du cercle avec n avions, dans lequel les avions sont considérés avec les mêmes caractéristiques (notamment, les mêmes vitesses nominales), tous les avions sont en conflits potentiels deux à deux ; ce qui donne une situation avec $\frac{n(n-1)}{2}$ conflits potentiels. Cette situation permet de mettre à l'épreuve les algorithmes et approches de résolution en considérant un nombre particulièrement important de conflits aériens. Nous représentons ce type de configuration aérienne en Figure 3.11.

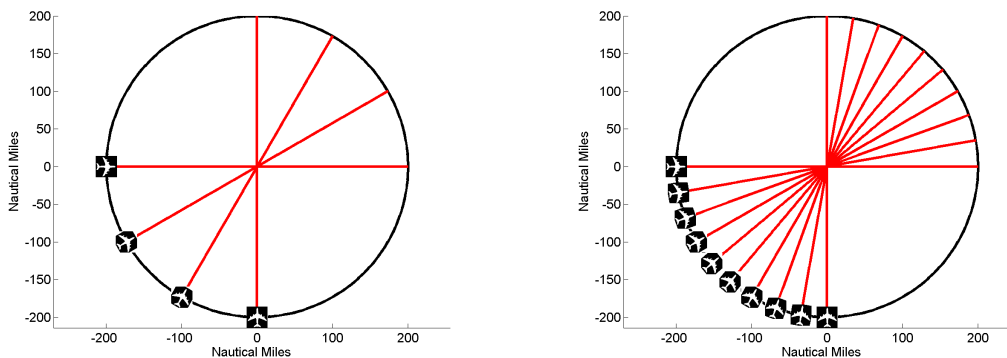


Figure 3.11 – Représentation de configurations aériennes avec les positions initiales des avions et leur trajectoire rectiligne prévue (segment en rouge). Les trajectoires satisfont le type de problèmes dit du cercle, configurations avec 4 avions et 10 avions.

Cette situation aérienne admet aussi des limites par rapport à la régulation subliminale en vitesse, concernant les situations en phase tactique, avec un temps d'anticipation faible avant conflits (d'environ 20'). En effet, suivant les paramètres choisis (par exemple, pour un rayon du cercle égal à 100NM, une vitesse nominale égale à 400NM/h et un intervalle de vitesse correspondant à la régulation faible suggérée par le projet ERASMUS), seulement de l'ordre de 4 ou 5 avions de vitesses nominales identiques, peuvent effectivement passer par le centre en satisfaisant les contraintes de séparation. Pour nous permettre de tester des instances plus réalistes en usant d'une régulation subliminale en vitesse, nous présentons les problèmes dits du cercle avec déviation. Cette fois, les avions sont disposés sur la totalité du cercle, tels que les avions soient équi-répartis, dans le sens où les distances entre les positions initiales de deux avions consécutifs (i.e., pour tout i dans $\{1, \dots, n-1\}$, les distances entre les positions initiales x_i^0 et x_{i+1}^0) sont identiques. Les avions convergent proche du centre du cercle (leurs trajectoires rectilignes ne passent pas par le centre du cercle ; elles sont comme étant déviées par rapport au centre du cercle, avec un certain angle latéral au départ, ce type de situation est illustré en Figure 3.12.

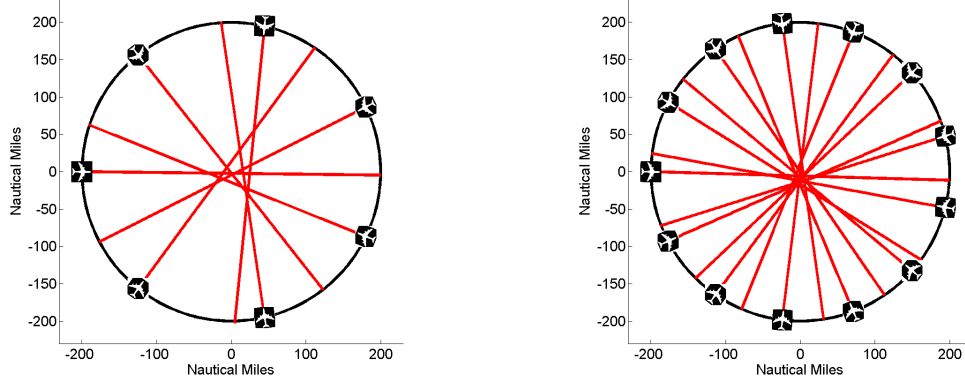


Figure 3.12 – Représentation de configurations aériennes avec les positions initiales des avions et leur trajectoire rectiligne prévue (segment en rouge). Les trajectoires satisfont le type de problèmes dit du cercle avec déviation, configurations avec 7 avions et 13 avions.

Les avions considérés peuvent éventuellement avoir des caractéristiques différentes notamment, des vitesses nominales différentes. Cette situation offre la possibilité d’avoir des instances réalisables pour la régulation subliminale en vitesse, en tout en proposant un nombre d’avions plus important à gérer. Les instances pour les tests numériques ont les caractéristiques suivantes. Les problèmes sont du type du cercle avec déviation, dans lesquels les avions sont initialement disposés sur un cercle et convergent vers le centre de ce cercle, avec un angle de déviation appartenant à l’intervalle $[-\frac{\pi}{6}, +\frac{\pi}{6}]$, (en Figure 3.12), et avec les caractéristiques suivantes :

1. les trajectoires sont rectilignes ;
2. la norme de séparation horizontale est fixée à 5NM ;
3. la plupart des avions ont un faible temps d’anticipation (de l’ordre de 10’) ;
4. la vitesse nominale, pour chaque avion i , notée $v_i^{t_0}$, correspond à 400 NM/h ou 447 NM/h, ou même, dans le cas où nous considérons différentes vitesses pour les avions, différentes valeurs de vitesses nominales incluses dans l’intervalle $[400; 450]$;
5. les vitesses sont bornées, basées sur le projet européen ERASMUS [28], par un intervalle de régulation faible (i.e., $[v_i^{t_0} - 6\%v_i^{t_0}, v_i^{t_0} + 3\%v_i^{t_0}]$), par un intervalle de régulation forte (i.e., $[v_i^{t_0} - 12\%v_i^{t_0}, v_i^{t_0} + 6\%v_i^{t_0}]$) ou par l’intervalle de régulation $[v_i^{t_0} - 10\%v_i^{t_0}, v_i^{t_0} + 10\%v_i^{t_0}]$;
6. les accélérations sont bornées, basées sur le manuel de référence aéronautique d’Eurocontrol, Base of Aircraft Data (BADA) [80] : $\bar{u}_i = -\underline{u}_i = 4000 \text{ NM}/h^2$;
7. la fenêtre de temps considérée pour étudier une configuration correspond à $[t_0, t_f]$ avec $t_0 = 0$ et $t_f = 1\text{h}$;
8. les conditions terminales imposent un retour aux vitesses nominales pour tous les avions, autrement dit, atteindre les vitesses ($v_i^{t_0}$) au temps final (t_f).

Le nombre d’avions, le nombre de conflits potentiels détectés, le nombre de rencontres potentielles détectées, le pourcentage de temps que représente la zone par rapport à toute la fenêtre de temps, en tenant compte de notre décomposition (présentée dans la Section 2.2), les vitesses nominales des avions, les pourcentages sur les bornes de vitesse, la somme des temps de conflits sont reportés dans le Tableau 3.3. Les détails sur les configurations aériennes, notamment les positions initiales et les directions des avions, sont décrites et illustrées en Annexe C. Avec les instances proposées, nous sommes à présent en mesure de réaliser les tests numériques de notre approche.

3.3 Résultats numériques pour les instances générées

Cette section présente les résultats des tests avec notre approche. En premier lieu, nous détaillons, suivant les environnements numériques utilisés, l'application du PMP en postzone avec les contraintes de séparation vérifiées pour les couples d'avions détectés en rencontres potentielles, en sous-section 3.3.1. Puis nous considérons la méthode du PMP en postzone en tenant compte d'une décomposition en sous-ensembles d'avions en rencontres potentielles, en sous-section 3.3.2. Enfin, nous discuterons la méthode du PMP en postzone et en prézone, en sous-section 3.3.3.

3.3.1 Méthode du PMP en postzone

Nous précisons ici l'apport de notre approche en appliquant les conditions du PMP sur la période en postzone. La fenêtre de temps de discrétisation étant réduite, et la vérification de la séparation n'ayant lieu qu'en zone le gain de temps de calculs est significatif. Au niveau du modèle de programmation non linéaire, l'application du PMP en postzone permet, pour le programme non linéaire associé, de réduire le nombre de variables et le nombre de contraintes, en réduisant la fenêtre de temps étudiée. Les commandes optimales d'accélération en postzone sont fournies par les conditions d'application du PMP, et s'intègrent directement dans la fonction de coût (cf. le problème (P_{Z1}) en sous-section 2.3.1). Le code du modèle, écrit en environnement AMPL (au format `.mod`), se trouve en Annexe B (plus précisément, le modèle « `.mod` » correspond à l'Algorithme 3).

Dans cette sous-section, nous discutons des résultats numériques obtenus en appliquant les stratégies proposées (cf. sous-section 2.3.4) pour résoudre le problème (P_{Z1}) d'évitement de conflits aériens. Les expériences numériques se déroulent au moyen de l'environnement de modélisation AMPL [87] et du solveur basé sur la méthode de point intérieur IPOPT [169] pour la résolution de problèmes d'optimisation non linéaires de grande taille. La machine sur laquelle les tests ont été réalisés a les propriétés suivantes : 2GHz / 128Go RAM.

Nous comparons, en Tableau 3.4, les premières colonnes de résultats obtenus par l'application de la méthode directe de tir pour le problème (P_{D-}) (avec les pas de discrétisation de détection/résolution égaux à $15''/1'$, autrement dit $\rho = 4$) et la satisfaction des contraintes de séparation sur la totalité de la fenêtre de temps $[t_0, t_f]$, avec le second ensemble de colonnes pour lesquelles les résultats pour le problème (P_{C1}) correspondent à la combinaison de l'application de la méthode de tir directe et des conditions d'application du PMP sans contrainte sur les variables d'états (combinaison décrite en section 2.2). Le nombre de variables, le nombre de contraintes, le nombre d'itérations, le nombre d'évaluations de la fonction objectif, la valeur de la fonction objectif, et le temps de calculs sont réportés dans le Tableau 3.4.

La Figure 3.13 représente les trajectoires et solutions en vitesse d'un évitement à 3 avions pour le problème (P_{C1}) . Pour des raisons de visibilité, l'échelle des vitesses est grande dans le voisinage de 400 NM/h (leur vitesse initiale nominale). Pour cette instance, nous remarquons qu'il suffit de minimales variations en vitesse, pour résoudre ce problème d'évitement :

1. deux avions accélèrent et puis décélèrent ; les courbes de solutions obtenues en vitesse sont presque confondues ; leur vitesse maximale est inférieure à 401,5 NM/h ; leur changement en vitesse est inférieur à 0,375% ;
2. tandis qu'un avion décélère puis accélère ; sa vitesse minimale est supérieure à 396 NM/h ; son changement en vitesse est inférieur à 1%.

Identifiants des problèmes	nombre d'avions	nombre de conflits potentiels	nombre de rencontres potentielles	pourcentages de temps en « zone »	vitesse nominale (NM/h)			intervalles de régulation en vitesse (%)			somme des durées des conflits potentiels (secondes)
					400	447	[400;450]	[-6; 3]	[-12; 6]	[-10; 10]	
pb01	3	2	3	13	✓					✓	61.0
pb02	3	2	3	16	✓					✓	50.5
pb03	3	2	2	11	✓			✓			73.3
pb04	4	3	3	16			✓			✓	150.0
pb05	4	3	3	16			✓	✓			102.2
pb06	5	4	5	26		✓				✓	206.1
pb07	5	4	5	26			✓			✓	225.0
pb08	6	4	6	41	✓			✓			315.7
pb09	6	4	5	31			✓	✓			207.9
pb10	6	4	5	15			✓	✓			225.0
pb11	7	4	11	41	✓			✓			416.4
pb12	7	4	11	36		✓		✓			372.6
pb13	7	4	9	26			✓			✓	291.6
pb14	8	4	7	41	✓			✓			346.2
pb15	8	4	5	53	✓			✓			236.6
pb16	8	6	10	16	✓			✓			411.2
pb17	9	5	13	35	✓			✓			357.0
pb18	9	5	13	31		✓		✓			319.5
pb19	9	5	13	31		✓				✓	319.5
pb20	10	5	5	31		✓		✓			232.0
pb21	10	5	5	31		✓				✓	232.0
pb22	10	5	5	35	✓			✓			259.2
pb23	11	6	17	45	✓			✓			521.1
pb24	11	5	7	54	✓			✓			259.1
pb25	11	6	15	51			✓	✓			320.4
pb26	12	6	12	32	✓			✓			643.0
pb27	12	6	15	46		✓		✓			472.2
pb28	12	6	12	29		✓		✓			575.4
pb29	13	9	14	67			✓	✓			1294.0
pb30	13	6	14	59		✓		✓			418.3

Tableau 3.3 – Données des configurations de problèmes d'évitement de conflits aériens : nom du problème, nombre d'avions considérés, nombre de conflits aériens potentiels détectés, nombre de rencontres aériennes potentielles détectées, pourcentage de temps en zone par rapport à la fenêtre entière de temps, vitesses nominales, intervalle en pourcentages autour de la vitesse nominale pour les bornes de régulation en vitesse, somme des durées totale de conflits potentiels détectés. Dans la suite, nous examinons particulièrement les trois instances (*pb01*), (*pb21*) et (*pb29*) respectivement, comme une configuration avec un nombre faible d'avions (rapidement résolue), une configuration difficile avec 10 avions, et une configuration parmi les plus difficiles générées (avec 13 avions), toutes résolues.

Identifiants des problèmes	nombre de variables	nombre de contraintes	nombre d'itérations.	nombre d'évaluations	valeur objectif	temps de calculs (secondes)	nombre de variables	nombre de contraintes	nombre d'itérations	nombre d'évaluations	valeur objectif	temps de calculs (secondes)	gain en temps (pourcentages)
pb01	2358	4698	12	16	77.774	0.272	1383	2421	11	14	77.774	0.096	64.706
pb02	2358	4698	21	78	144.714	0.476	1383	2439	18	53	144.714	0.152	68.067
pb03	2358	4698	20	107	907.372	0.472	1383	2403	20	80	907.372	0.148	68.644
pb04	3144	6744	33	145	1068.120	1.628	1896	3420	28	95	1068.120	0.416	74.447
pb05	3144	6744	75	479	644.613	3.388	1792	3244	31	99	644.613	0.356	89.492
pb06	3930	9030	96	679	3146.400	9.985	2435	4725	68	381	3146.400	1.868	81.893
pb07	3930	9030	77	353	943.283	7.912	2435	4725	35	86	943.283	0.948	88.018
pb08	4716	11556	66	156	1764.090	6.252	2844	6285	53	92	1764.090	2.348	62.444
pb09	4716	11556	20	78	334.126	2.864	3312	6702	19	72	334.126	1.080	62.291
pb10	4716	11556	50	90	1666.300	4.456	2610	4944	48	69	1666.300	0.984	77.917
pb11	5502	14322	35	147	597.614	9.201	4228	9226	34	149	597.614	3.932	57.266
pb12	5502	14322	58	282	791.315	15.213	3773	8225	49	206	791.315	4.788	68.527
pb13	5502	14322	34	197	710.621	9.021	3409	7063	21	83	710.621	1.852	79.470
pb14	6288	17328	67	131	926.576	29.886	5144	11476	55	77	926.576	8.981	69.949
pb15	6288	17328	22	100	1848.030	15.225	5248	12464	22	95	1848.030	9.401	38.253
pb16	6288	17328	187	742	3257.440	104.751	3792	7480	115	272	3257.440	10.913	89.582
pb17	7074	20574	28	88	642.835	33.742	4617	10845	26	80	642.835	7.820	76.824
pb18	7074	20574	116	741	810.262	139.213	4149	9729	53	212	810.262	12.193	91.241
pb19	7074	20574	116	741	810.262	139.121	4032	9495	52	200	810.262	13.805	90.077
pb20	7860	24060	87	843	6099.380	124.072	4740	11460	60	478	6099.380	25.306	79.604
pb21	7860	24060	372	4403	6099.380	533.325	4740	11415	35	207	6099.380	15.377	97.117
pb22	7860	24060	87	836	4893.630	123.508	5390	12965	61	475	4893.630	33.706	72.709
pb23	8646	27786	215	1208	5855.790	420.366	5786	15763	110	346	5855.790	87.793	79.115
pb24	8646	27786	178	1565	1604.610	394.725	6930	18964	49	341	1604.610	60.732	84.614
pb25	8646	27786	115	895	2665.110	256.476	6358	17556	63	394	2665.110	79.165	69.134
pb26	9432	31752	183	1237	2400.130	594.361	6000	15348	99	463	2400.130	72.744	87.761
pb27	9432	31752	357	2665	6102.880	1108.420	5844	17196	167	1190	6102.880	244.123	77.976
pb28	9432	31752	235	1747	3051.040	832.024	5376	13698	98	471	3051.040	81.437	90.212
pb29	10218	35958	242	1880	4906.200	986.822	8528	27131	177	1251	4906.200	451.824	54.214
pb30	10218	35958	-	-	-	> 1200.000	7683	24219	164	974	3011.190	326.672	-

Tableau 3.4 – Comparaison des résultats numériques obtenus entre une méthode directe de tir pour le problème (P_D) et la combinaison d'une méthode directe de tir avec l'application du PMP en postzone pour le problème (P_{C1}) : nombre de variables, nombre de contraintes, nombre d'itérations, nombre d'évaluations de la fonction objectif, valeur du critère dans la solution, temps de calculs.

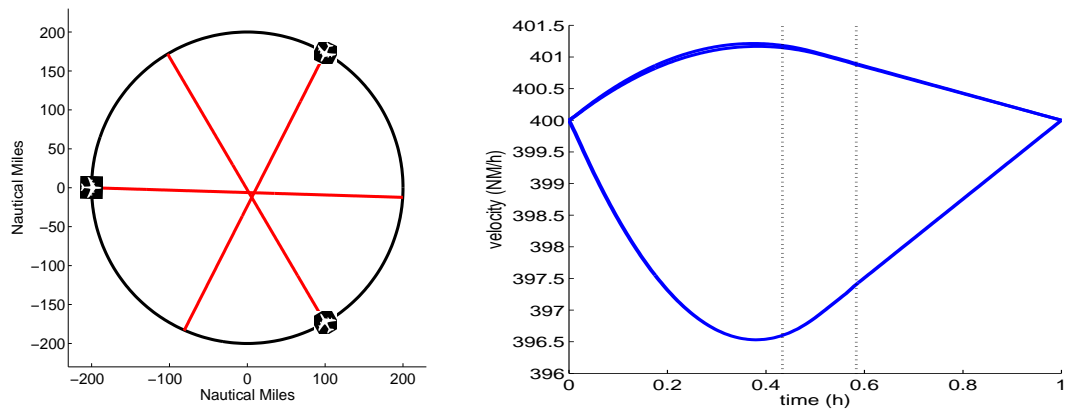


Figure 3.13 – Représentation d’un problème d’évitement à 3 avions et solutions : trajectoires et courbes des vitesses pour le problème pb01 (temps de calculs : 00’00’’096). Le schéma de gauche représente la configuration aérienne problème dit du cercle avec déviation : les positions initiales des avions et leur trajectoire rectiligne prévue (segment en rouge). Le schéma à droite représente les courbes des solutions optimales obtenues pour les vitesses. Pour ce schéma, l’axe vertical représente la vitesse exprimée en NM/h, nous soulignons l’importance de l’échelle utilisée, l’axe horizontal représente le temps (sur une fenêtre de 1h) et les deux instants, d’entrée et de fin de zone ont indiqués par des traits en pointillés.

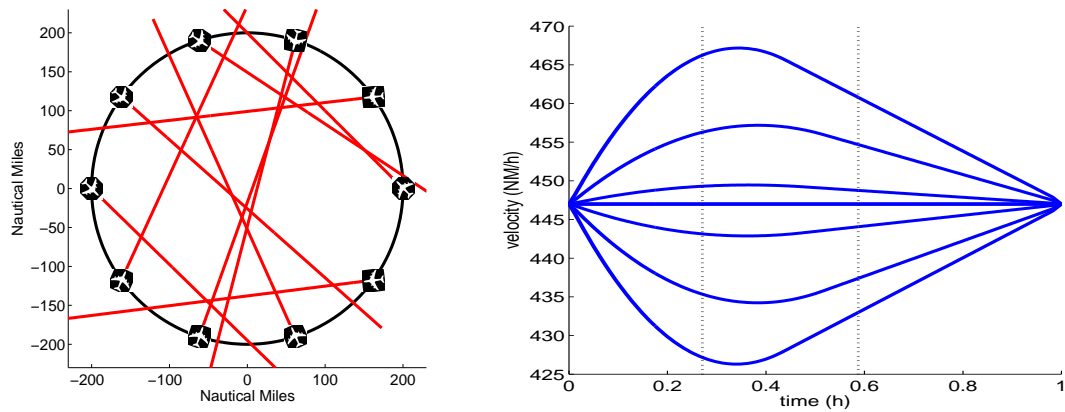


Figure 3.14 – Représentation d’un problème d’évitement à 10 avions et solutions : trajectoires et courbes des vitesses pour pb21 (temps de calculs : 00’15’’377). Le schéma de gauche représente la configuration aérienne problème dit du cercle avec déviation : les positions initiales des avions et leur trajectoire rectiligne prévue (segment en rouge). Le schéma à droite représente les courbes des solutions optimales obtenues pour les vitesses. Pour ce schéma, l’axe vertical représente la vitesse exprimée en NM/h, nous soulignons l’importance de l’échelle utilisée, l’axe horizontal représente le temps (sur une fenêtre de 1h) et les deux instants, d’entrée et de fin de zone ont indiqués par des traits en pointillés.

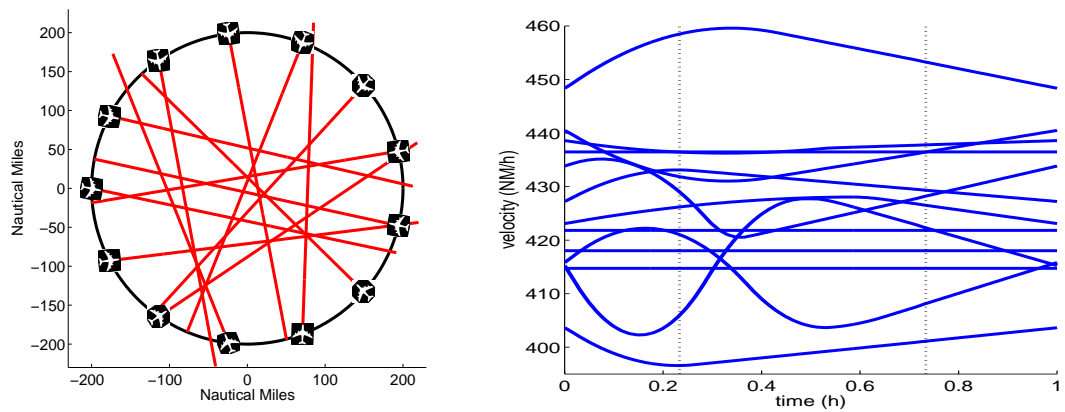


Figure 3.15 – Représentation d’un problème d’évitement à 13 avions et solutions : trajectoires et courbes des vitesses pour pb29 (temps de calculs : 7’31’’824). Le schéma de gauche représente la configuration aérienne problème dit du cercle avec déviation : les positions initiales des avions et leur trajectoire rectiligne prévue (segment en rouge). Le schéma à droite représente les courbes des solutions optimales obtenues pour les vitesses. Pour ce schéma, l’axe vertical représente la vitesse exprimée en NM/h, nous soulignons l’importance de l’échelle utilisée, l’axe horizontal représente le temps (sur une fenêtre de 1h) et les deux instants, d’entrée et de fin de zone ont indiqués par des traits en pointillés.

La Figure 3.14 représente les trajectoires et solutions en vitesse d'un évitement à 10 avions pour le problème (P_{C1}). Les avions sont supposés à une vitesse nominale identique : 447NM/h. La zone est inférieure à $\frac{1}{3}$ de la fenêtre totale de temps étudiée. Seulement 6 avions dévient de leur vitesse nominale pour contribuer à l'évitement de conflits. En effet, les solutions obtenues proposent des commandes nulles pour 4 des avions. La Figure 3.15 décrit aussi les courbes des solutions optimales en termes de vitesse pour le problème de conflits aériens à 13 avions : problème (*pb29*). Les vitesses nominales (initiales, et considérées comme vitesses de croisière) des avions appartiennent à l'intervalle [400, 450], en nautiques par heure (autrement dit en noeuds). La fenêtre de temps totale, correspondant à une heure, est décomposée en trois parties : prézone, zone et postzone. La Figure 3.15 représente les trajectoires et solutions obtenues en vitesse d'un évitement à 13 avions pour le problème (P_{C1}), où les avions ont des vitesses nominales différentes (comprises entre 400NM/h et 450NM/h). Cette instance (*pb29*) apparaît comme une des plus compliquées parmi les 30 instances générées. Le problème d'évitement admet 14 rencontres potentielles, 9 conflits potentiels sont détectés et la somme totale de leur durée correspond à 1294.0 secondes. (En ne considérant qu'un seul pas de discrétisation de temps égal à 15'', suivant une méthode directe de tir pour le problème (P_{D_c}), le problème de programmation non linéaire associé admet 10218 variables et 35958 contraintes). Nous remarquons que les solutions obtenues en vitesse sont non triviales, dans le sens où, pour trois avions, nous observons que le nombre de changements de signe de la fonction de commande d'accélération est impair (correspondant à 3) :

1. deux avions, les avions 3 et 8, de vitesses nominales respectivement égales à 433,326911 NM/h, et 416,004456 NM/h, accélèrent, puis décelèrent et enfin accélèrent pour finir ;
2. un avion, l'avion 5, de vitesse nominale 412,753099 NM/h, décelère, puis accélère et décelère pour finir.

3.3.1.1 Comparaison de solveurs

Nous proposons une étude numérique, en comparant, à l'aide de deux environnements : MATLAB [123] et AMPL [87], différents types de solveurs non linéaires : SNOPT [95] et IPOPT [169] (cf. Cellier et al. [54]).

Nous implémentons deux formulations du problème : (P_{C1}) et (P_{C1_c}). Nous résolvons les problèmes en programmation non linéaire en utilisant les solveurs suivants :

1. MATLAB/ fmincon en sélectionnant le solveur sqp (basé sur une méthode de programmation quadratique séquentielle) ;
2. MATLAB/fmincon en sélectionnant le solveur interior-point ;
3. AMPL/SNOPT (basé sur une méthode dite active set, cf. [95]) ;
4. AMPL/IPOPT (basé sur une méthode de point-intérieur, cf. [169]).

Le langage AMPL ne nous permet pas d'implémenter la formulation (P_{C1_c}), AMPL étant un langage déclaratif de programmation mathématique. En effet, les variables d'états (états des vitesses et des positions), bien que dépendant implicitement des commandes d'accélération, vont être considérées comme variables de décision pour le langage AMPL. Au contraire, en utilisant MATLAB nous pouvons implémenter chacune des deux formulations (P_{C1}) et (P_{C1_c}). Les expérimentations numériques sont réalisées en utilisant six possibilités différentes : les deux solveurs au sein d'AMPL sont appliqués à la formulation (P_{C1}) et les deux solveurs au sein de MATLAB sont appliqués aux formulations (P_{C1}) et (P_{C1_c}).

Pour cette étude numérique, issue d'un travail antérieur au Tableau 3.5, nous présentons 7 instances de la manière suivante. Les instances pour les problèmes de conflits aériens sont générées avec les caractéristiques suivantes : les trajectoires des avions sont rectilignes ; la norme de séparation (horizontale) standard est de 5NM ; la vitesse nominale de chaque avion i correspond à $v_i^0 = 447\text{NM/h}$; les vitesses sont bornées et basées sur les directives du projet ERASMUS [94] par un petit intervalle (régulation faible) : $[0.94 v_i^0, 1.03 v_i^0]$; les accélérations sont bornées, basée sur le manuel de référence d'Eurocontrol, Base of Aircraft Data (BADA) [80], $\bar{u}_i = -u_i = 4000\text{NM/h}^2$; la fenêtre de temps des configurations-problèmes correspond à $[t_0, t_f]$ avec $t_0 = 0$ et $t_f = 1\text{h}$ (excepté pour l'instance (pb47), où $t_f = 45'$) ; les conditions terminales sont le retour aux vitesses nominales (initiales) (i.e., $v_i(t_f) = v_i^f = v_i^0 = 447\text{NM/h}$).

Le nombre d'avions n , le nombre de conflits potentiels, le pourcentage de durée en zone respectivement à la fenêtre de temps totale, le nombre de variables et le nombre de contraintes dans les deux formulations (P_{C1}) et (P_{C1_c}) sont reportés dans le Tableau 3.5.

Identifiants des problèmes	nombre d'avions (n)	nombre de conflits potentiels ($ C_p $)	pourcentage de temps en « zone »	problème (P_{C1})		problème (P_{C1_c})	
				nb_variables	nb_contraintes	nb_variables	nb_contraintes
pb41	7	3	15.77	2821	5593	217	2555
pb42	8	4	15.77	3536	7368	272	3560
pb43	9	6	21.99	4095	8820	315	4410
pb44	6	3	4.56	2574	4641	198	1869
pb45	8	4	4.56	3432	6340	264	2644
pb46	5	5	26.97	3120	5910	240	2550
pb47	2	1	6.08	546	936	42	348

Tableau 3.5 – Paramètres des instances : nombre d'avions, nombre de conflits potentiels, pourcentage de durée en zone par rapport à la totalité de la fenêtre de temps, nombre de variables et nombres de contraintes pour les deux formulations.

Dans nos expérimentations numériques, pour toutes les instances les pas de détection/résolution sont $h = 15''$ et $\rho h = 1'$ ($\rho = 4$). Pour toutes les instances, les points de départ sont déduites des contrôles égaux à 0 (pour (P_{C1}) toutes les variables de vitesse et de position sont initialisées à partir d'un contrôle nul).

Les tests numériques sont réalisés sur deux ordinateurs avec 2.53GHz/4Go pour les solveurs utilisant AMPL et avec 3.2GHz pour les solveurs utilisant MATLAB.

D'abord, nous présentons les tests utilisant les deux algorithmes MATLAB/fmincon sqp et interior-point, appliqués sur les deux formulations (P_{C1}) et (P_{C1_c}). Nous remarquons que :

1. Les deux algorithmes appliqués sur la formulation (P_{C1}) sont incapables de fournir une solution dans un temps limité à $10'$. Ainsi, pour les solveurs MATLAB, l'utilisation de la formulation (P_{C1_c}) apparaît être plus robuste et la plus efficace (cf. Tableau 3.6).
2. L'algorithme sqp est aussi inefficace sur la formulation (P_{C1_c}). Seulement une instance résolue (pb47) (l'instance ayant le plus petit nombre d'avions : 2 avions). Dans ce cas, sqp donne une réponse (en 19 itérations) avec une valeur objectif de 1835,4 en 54,351 secondes. Remarquons que ce minimum local est meilleur que celui donné par l'algorithme interior-point de MATLAB mais reste plus grand que celui obtenu avec IPOPT (indiqué dans le Tableau 3.6, discuté ci-dessous).

Ainsi, seulement les solutions correspondantes à la fonction MATLAB/ fmincon interior-point appliqué à la formulation (P_{C1_c}) sont considérées dans la suite.

	(P_{C1}) avec AMPL/SNOPT			(P_{C1}) avec AMPL/IPOPT			(P_{C1c}) avec MATLAB/fmincon		
	nb_it.	valeur_obj.	temps de calculs	nb_it.	valeur_obj.	time	nb_it.	valeur_obj.	temps de calculs
pb41	3100	4339.58	14.477	276	4339.58	5.413	55	5824.4	43.415
pb42	4056	5180.19	19.048	245	5180.19	10.621	–	–	> 10'
pb43	–	–	> 10'	556	39742.2	52.869	–	–	> 10'
pb44	2804	2882.6	14.726	1175	2882.6	56.474	48	3576.9	22.979
pb45	5384	3843.47	65.193	1565	3843.47	116.189	45	4395.2	41.668
pb46	3924	4553.92	9.126	394	8282.67	19.701	130	22235	127.765
pb47	–	–	> 10'	91	1631.47	0.484	100	3152.6	3.947

Tableau 3.6 – Comparaison des tests numériques : (P_{C1}) avec l’algorithme AMPL/SNOPT, (P_{C1}) avec l’algorithme AMPL/IPOPT, (P_{C1c}) avec l’algorithme MATLAB/fmincon interior-point.

Dans le Tableau 3.6, nous fournissons les résultats numériques utilisant l’environnement AMPL et les solveurs SNOPT et IPOPT sur la formulation (P_{C1}) , et MATLAB avec la routine `fmincon-interior-point` sur la formulation (P_{C1c}) seulement. Dans les deux premières colonnes, les résultats sont reportés pour les deux différents solveurs SNOPT et IPOPT qui utilisent la même formulation (P_{C1}) , le même environnement AMPL et le même ordinateur (2.53GHz/4Go). Ainsi, ces résultats sont directement comparables. Nous remarquons que :

1. IPOPT fournit toujours une solution locale tandis que SNOPT échoue à deux reprises, pour le problème (*pb43*) et (*pb47*).
2. Toutes les solutions locales correspondent, sauf pour le cas (*pb46*) où SNOPT trouve un meilleur minimum local que IPOPT.
3. Quand les minima locaux trouvés sont les mêmes, IPOPT est plus rapide que SNOPT sur les deux instances (*pb41*) et (*pb42*), et c’est le contraire sur les instances (*pb44*) et (*pb45*). Cela peut dépendre de la taille de la zone : 15,77% pour (*pb41*) et (*pb42*) et 4,56% pour (*pb44*) et (*pb45*).
4. Comme attendu, pour le solveur active-set comparé au solveur interior-point, le nombre d’itérations effectuées par SNOPT pour trouver une solution locale est bien plus grand que celui d’IPOPT, même si les itérations de SNOPT sont plus rapides.

Suivant ces tests numériques, IPOPT semble être plus robuste que SNOPT. Il semble assez difficile toutefois d’établir quel solveur est plus rapide qu’un autre. Remarquons que le pré-solveur d’IPOPT réduit considérablement la taille du problème : par exemple, sur le problème (*pb43*), nous avons 4095 variables et 8820 contraintes (cf. Tableau 3.5), et ils sont réduits par le pré-solveur d’IPOPT à 2946 variables et 4575 contraintes.

Suivants les résultats numériques fournis dans le Tableau 3.6 par l’algorithme MATLAB/fmincon- interior-point algorithme (sous la machine 3.2GHz-4Go) appliqué sur (P_{C1c}) , nous remarquons que :

1. Toutes les solutions locales sont plus grandes que celles fournies par IPOPT et SNOPT.
2. Le nombre d’itérations est en général assez faible. Cela implique qu’une itération du solveur de MATLAB interior point est bien plus coûteuse qu’une itération du solveur interior-point dans l’environnement AMPL.
3. L’algorithme MATLAB/fmincon- interior-point n’est pas capable de fournir une solution locale dans un temps limité à 10' pour les deux instances les plus difficiles, même en utilisant la formulation (P_{C1c}) .

4. Les temps de calculs sont généralement plus grands dans ceux effectués par IPOPT et SNOPT ; de plus les temps de calculs sont difficiles à comparer parce que les calculs ont été réalisés sur deux machines différentes.

Ainsi, les solutions fournies par MATLAB semblent être moins intéressantes comparées à celles fournies via l'environnement AMPL sur le problème concerné.

Nous remarquons que les minima locaux de (P_{C_1}) sont aussi des minima locaux de (P_{C_1c}) ; cela se vérifie aisément en prenant comme point de départ des algorithmes interior-point et SQP de MATLAB les minima locaux provenant de ceux de IPOPT. Nous remarquons aussi que les différentes solutions fournies par les différents solveurs d'optimisation montrent que les problèmes étudiés de programmation non linéaires de grandes tailles exhibent plusieurs minima locaux et sont difficiles à résoudre.

Nous venons d'étudier notre décomposition en zones et la méthode du PMP en postzone avec les résultats obtenus suivant les environnements numériques et types de solveurs considérés en PNL. À présent, nous abordons notre décomposition en termes des sous-ensembles d'avions suivant les rencontres potentielles entre ces derniers.

3.3.2 Méthode du PMP en postzone et partitionnement

Cette sous-section est issue d'un travail (cf. Cellier et al. [53]) antérieur au Tableau 3.5. Nous indiquons huit instances du problème (dit du cercle avec déviation) en Tableau 3.7, et les illustrations se trouvent en Annexe C.

Nous reportons les résultats obtenus pour les huit instances (précisions en Annexe C), sans ou avec notre approche de décomposition en sous-ensembles (partitions) d'avions, avec le Tableau 3.8.

À titre d'exemple, nous nous focalisons sur une instance du problème (*pb35*), nous proposons ainsi d'étudier un évitement de conflits à 10 avions, avec un code couleurs respectant la répartition en sous-ensembles d'avions (ici, 4 sous-ensembles). Les trajectoires prévues pour l'instance (*pb35*) sont reportées en Figure 3.16. Les solutions obtenues pour cet évitement à 10 avions, les courbes des accélérations et des vitesses, sont illustrées en Figure 3.17.

Les temps de discrétisation sont les suivants : 15'' pour le pas de temps relatif à la détection, et 1' pour le pas de temps relatif au contrôle. La fenêtre de temps totale correspond à 1h. Les problèmes de (*pb31*) à (*pb35*) sont générés aléatoirement avec les caractéristiques suivantes :

1. les vitesses initiales $v_i^{t_0}$ sont comprises dans l'intervalle [400; 450] ;
2. les variations en vitesse satisfont l'intervalle de régulation faible du projet ERASMUS : $[v_i^{t_0} - 6\%v_i^{t_0}; v_i^{t_0} + 3\%v_i^{t_0}]$;
3. les problèmes sont du type du cercle avec déviation, les avions passent tous proches du centre du cercle avec une faible déviation de trajectoire comprises dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{6}, +\frac{\pi}{6}]$;

Nous construisons aussi les configurations aériennes pour les problèmes (*pb36*), (*pb37*) et (*pb38*) avec des trajectoires rectilignes. Suite à la détection et détermination de sous-ensembles d'avions en rencontres potentielles, les caractéristiques des instances sont indiquées en Tableau 3.7.

En premier lieu, nous constatons, avec la Figure 3.17, que cinq parmi les dix avions de l'instance maintiennent leurs vitesses nominales tout en assurant l'évitement de conflits.

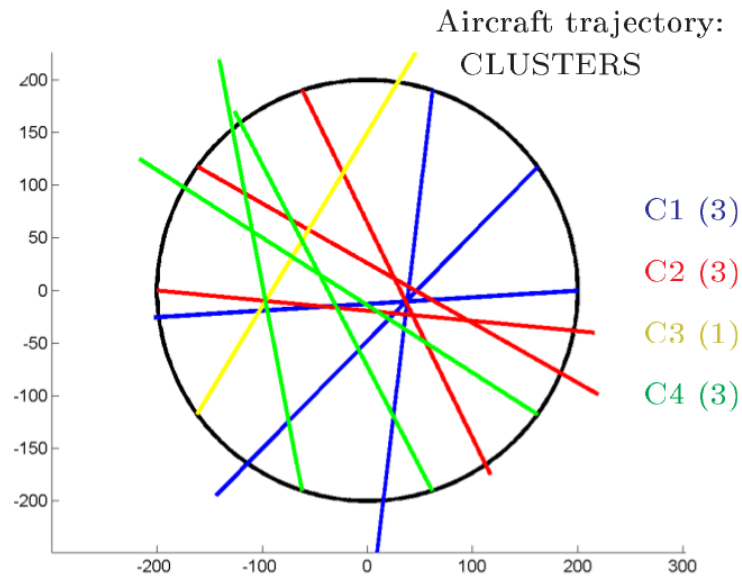


Figure 3.16 – Trajectoires, évitement à 10 avions : 4 sous-ensembles (clusters) d’avions en rencontres potentielles ; ces 4 sous-ensembles ont été déterminés par l’algorithme de détection de rencontres potentielles.

Les trois avions du cluster C4 en vert n’effectuent aucune modification en vitesse, de même que l’avion (considéré seul) en cluster C3 en jaune, les avions conservent leurs vitesses nominales tout au long de la fenêtre de temps. Un des trois avions du cluster C2 en bleu admet une commande d’accélération triviale pour solution (sa courbe d’accélération nulle, en bleu, se superpose aux courbes des solutions d’accélération nulles obtenues pour les quatre avions discutés précédemment). Les variations en vitesse obtenues pour assurer l’évitement de conflits sont faibles et le qualificatif subliminal est bien présent dans notre approche de régulation. En effet, les commandes solutions d’accélération obtenues sont comprises dans l’intervalle $[-80; +80]$ (où l’unité est : NM/h^2).

	nombre d’ avions	nombre de rencontres potentielles	nombre de conflits potentiels	cardinalité des sous-ensembles
pb31	10	11	4	1 – 1 – 2 – 1 – 5
pb32	10	10	1	1 – 4 – 2 – 3
pb33	10	6	3	1 – 2 – 2 – 3 – 2
pb34	10	14	2	5 – 4 – 1
pb35	10	8	3	3 – 3 – 1 – 3
pb36	8	4	4	2 – 2 – 2 – 2
pb37	10	5	5	2 – 2 – 2 – 2 – 2
pb38	10	16	10	5 – 5

Tableau 3.7 – Sous-ensembles d’avions et données des configurations aériennes : noms des instances, nombre d’avions, nombre de rencontres potentielles, nombre de conflits potentiels détectés, et cardinalité des sous-ensembles d’avions en rencontres potentielles.

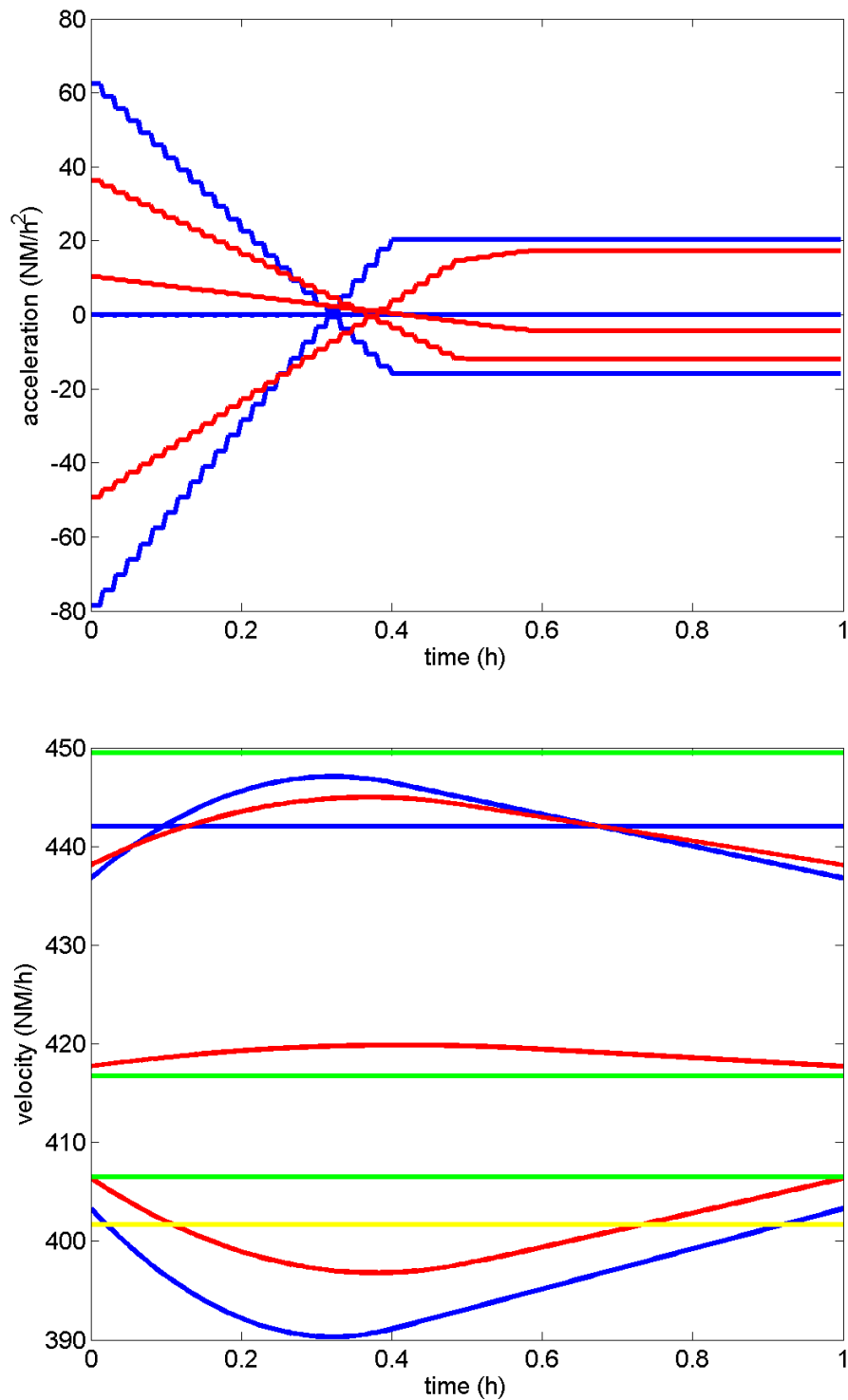


Figure 3.17 – Évitement à 10 avions : 4 sous-ensembles (clusters) d’avions en rencontres potentielles. Courbes de solutions obtenues : les commandes d’accélération sont représentées en image en haut, les états de vitesses sont représentées en image du bas. Le même code-couleur est utilisé pour illustrer les sous-ensembles déterminés d’avions en rencontres pontentielles.

Avec le Tableau 3.8, nous observons que les instances (*pb31*), (*pb32*), (*pb33*) et (*pb35*) dépassent les 7000 variables pour l'approche sans décomposition, et parmi ces quatre instances seule (*pb33*) parvient à être résolue dans un délai de 20', mais admet un temps de calculs élevé, supérieur à 7'. Pour ces mêmes quatre instances, notre décomposition en sous-ensembles d'avions permet de décomposer le problème de contrôle initial prenant en compte tous les avions en sous-problèmes prenant en compte chacun un sous-ensemble d'avions. La décomposition permet ainsi de résoudre indépendamment les sous-problèmes. La difficulté de résolution se porte alors sur le plus gros des sous-problèmes, issu du plus gros sous-ensemble d'avions (cluster). On considère alors les problèmes de programmation non linéaire pour le plus gros « cluster » dont le nombre de variables est réduit de plus de moitié (pour ces quatre même instances) par rapport aux problèmes de PNL précédents (i.e., en termes du nombre de variables, les bénéfiques sont supérieurs à 50% avec notre approche de décomposition). Ce qui permet une résolution plus efficace, les quatre instances sont résolues et admettent un temps de calculs strictement inférieur à 30''.

Pour l'instance (*pb35*), les trajectoires et clusters d'avions sont illustrés en Figure 3.16, et les courbes de solutions en termes d'accélération et de vitesses représentées en Figure 3.17. L'instance (*pb35*) pour le problème (P_D) sans décomposition est non résolue dans un délai de 20', et admet 7750 variables et 13945 contraintes. Avec la décomposition, l'instance (*pb35*) pour le problème (P_{C1}) pour son plus gros sous-ensemble (cluster) admet un problème de PNL avec 2325 variables et 2487 contraintes ; soit un bénéfice de 70% et de plus de 82% respectivement sur le nombre de variables et de contraintes ; le temps de calculs pour la résolution de l'instance (*pb35*) est plus intéressant et correspond alors à 4''77.

3.3.3 Méthode du PMP en prézone

Nous avons décrit, en Section 2.3.2, dans notre décomposition en zones, le rôle de l'instant t_i^c en prézone. Il peut être vu comme le premier instant pour lequel une des contraintes de vitesse est saturée pour l'avion i . Cet instant t_i^c a été illustré en sous-section 3.1.1.

La combinaison pour la résolution du problème d'évitement de conflits aériens se décompose en trois parties : l'application des conditions du PMP en prézone, l'application d'une méthode directe de tir en zone, et l'application des conditions du PMP en post-zone. La méthode en prézone fait appel à de nouvelles variables, notamment elle définit pour chaque avion, de manière conditionnelle, un instant (t_i^c) de saturation éventuelle d'une borne de vitesse, et impose des conditions de jonction. Les résultats obtenus avec les méthodes dépendent de l'environnement numérique et, en particulier, du type de solveurs retenu pour la résolution du problème de programmation non linéaire. Des environnements et solveurs, tels que MATLAB et la sous-routine d'optimisation *fmincon* avec les algorithmes : *sqp* ou *interior-point* sont en mesure de traiter la formulation du problème comme (P_{C2_c}). Toutefois, il arrive aussi que les conditions de jonctions et les nouvelles variables posent des complications numériques, comme nous avons pu le constater même sur de petites instances (cas à 2 avions). La résolution à travers l'environnement déclaratif AMPL et du solveur IPOPT, dans le cadre de l'approche, apparaît moins adaptée que sous l'environnement MATLAB et *fmincon*. En effet, des difficultés d'ordre numérique semblent provenir des sensibilités au point de départ pour l'application d'une telle combinaison dans la résolution (avec conditions PMP en prézone). Les résultats numériques relatifs aux formulations (P_{C2}) et (P_{C2_c}) sont encore à l'étude.

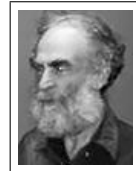
	(P_D) SANS décomposition					(P_{C1}) AVEC décomposition (* pour le plus gros « cluster »)					bénéfices observés (en %)				
	var.	contr.	nb_it.	nb_eval.	temps	var.*	contr.*	nb_it.*	nb_eval.*	temps	var.	contr.	nb_it.	nb_eval.	temps
pb41	7750	13225	–	–	> 20'	3875	5185	646	1787	28.68	50	60.79	–	–	–
pb42	7750	14620	–	–	> 20'	3100	3760	534	2823	12.16	60	74.28	–	–	–
pb43	7620	12295	1045	1897	461.57	2965	3195	325	349	5.74	61.09	74.01	68.90	81.60	98.76
pb44	6840	12295	–	–	> 20'	4104	5781	299	1046	22.27	40	52.98	–	–	–
pb45	7750	13945	–	–	> 20'	2325	2487	290	2075	4.77	70	82.17	–	–	–
pb46	3392	3660	1421	2399	34.02	848	801	258	286	3.11	75	78.11	81.84	88.08	90.86
pb47	4240	4765	–	–	> 20'	848	801	268	278	4.23	80	82.2	–	–	–
pb48	5930	9610	–	–	> 20'	3095	3515	460	586	15.98	47.81	63.42	–	–	–

Tableau 3.8 – Sous-ensembles d’avions et comparaison de résultats : nombre de variables, nombre de contraintes, nombre d’itérations, nombre d’évaluations de la fonction objectif, et temps de calculs (en secondes). Parmi les huit instances proposées, seuls les problèmes (pb33) et (pb36) parviennent à être résolus, dans un délai de 20’, par l’application d’une méthode directe sans l’application de notre approche de décomposition (qui combine une décomposition en sous-ensembles d’avions en rencontres potentielles et une décomposition de la fenêtre de temps étudiée en zones).

3.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté et discuté des expérimentations numériques effectuées avec notre modèle et ses décompositions permettant la mise en œuvre de combinaisons de méthodes numériques. Nous avons, tout d'abord, proposé des exemples, sur un nombre faible d'avions, pour introduire et étudier les conditions du problème (par exemple, contraintes en vitesse, discrétisation des pas de temps). Des résultats significatifs sont obtenus par la méthode utilisant les conditions du PMP en postzone. Notamment, en réduisant le nombre de variables, ces méthodes réduisent ainsi le temps de calculs, voire fournissent des solutions, par rapport à des méthodes directes de tir basiques pour les problèmes (P_{D^-}) , $(P_{D_c^-})$, (P_D) et (P_{D_c}) (dans le sens où, ces dernières ne bénéficient d'aucune décomposition). Les méthodes utilisant les conditions du PMP en prézone sont en développement; du point de vue de la complexité, elles diminuent le nombre de variables en réduisant l'intervalle de temps à discrétiser, dans le problème associé en PNL. Toutefois, elles introduisent aussi des conditions de jonctions et d'autres variables de décision pour un contrôle affine. L'approche avec la méthode du PMP en prézone montre une grande sensibilité par rapport au point de départ, ce qui complique la résolution numérique suivant le type de solveur choisi pour la résolution du problème de PNL.

Conclusions



« On ne sait pas si un problème est intéressant ou non
tant que l'on ne l'a pas résolu. »
M. Gromov



Nous commençons par présenter, en quelques points, les différentes investigations menées durant ce travail de thèse.

Nous avons proposé une modélisation et des approches de résolution par le contrôle optimal du problème d'évitement de conflits aériens en régulation subliminale en vitesse.

Pour le modèle, les variables de commandes correspondent aux accélérations respectives aux avions. Le critère énergétique quadratique peut être vu comme une dépense en carburant, il tient compte des variations de vitesse, de manière équitable sur l'ensemble des avions. Les conditions terminales correspondent à un retour aux vitesses nominales des avions. Le système contrôlé suit les lois de la dynamique de Newton, les états (les vitesses et les positions) peuvent être déduits des commandes d'accélération. Les contraintes opérationnelles sont prises en compte, avec un soin particulier pour les contraintes liées aux états de vitesses dans le cadre d'une régulation subliminale (suivant le projet européen ERASMUS pour les bornes de vitesses, et suivant le manuel BADA pour les bornes d'accélérations). Enfin, les conditions de séparation entre avions sont vues comme des contraintes du problème.

Le problème de contrôle optimal ainsi formulé admet des contraintes sur les états. Nous avons alors mis en place une décomposition du problème en sous-problèmes (plus aisés à résoudre). Nous avons proposé un algorithme de détection et détermination de trois « zones » : prézone, zone et postzone (suivant les conditions de séparation entre avions) propres à l'évitement de conflits aériens en vitesse. Nous avons montré qu'il suffit de satisfaire les conditions de séparation dans la période de temps en zone, et que les sous-problèmes en prézone et en postzone peuvent être appréhendés comme des problèmes de contrôle optimal sans contrainte d'ordre 2 sur les états. Nous avons présenté un algorithme de détection et de détermination de sous-ensembles d'avions en « rencontres potentielles » (avions susceptibles d'être en conflits suivant les variations en vitesse). Cette définition de rencontres potentielles (spécifique à la régulation en vitesse) permet d'une part de réduire le nombre de contraintes induites par les conditions de séparation entre avions et d'autre part de décomposer le problème initial en sous-problèmes en considérant différents sous-ensembles d'avions (clustering).

Nous avons présenté une combinaison de méthodes numériques de résolution, appropriée à notre décomposition du problème en zones et spécifique au traitement des sous-problèmes en contrôle optimal : méthodes directes de tir et applications de conditions du principe du maximum de Pontryagin.

Suivant les périodes de temps considérées (zones), nous développons des méthodes numériques déterministes différentes pour la résolution. Nous avons privilégié une méthode numérique directe de tir pour résoudre le problème sur la période en zone. Celle-ci nous permet de prendre en compte les contraintes d'ordre 2 sur les variables d'états. Cette méthode directe conduit à la discrétisation totale ou partielle du problème de contrôle optimal, et transforme le problème initial en problème de programmation non linéaire de grande taille. Afin de réduire le nombre de variables de décision et de contraintes, nous avons considéré deux pas de discrétisation de temps : un pas de temps pour la mise à jour les variables d'états et la détection de conflits potentiels ; un autre pas de temps pour les variables de commandes et la résolution.

Nous avons mis en œuvre pour deux périodes : la prézone et la postzone (dans lesquelles les conditions de séparation entre avions n'interviennent pas) des méthodes faisant appel aux conditions du principe du maximum de Pontryagin.

Nous avons réalisé des implémentations et des comparaisons d'environnements numériques (en particulier, codes en AMPL et en MATLAB, faisant appel à des solveurs basés sur des méthodes de type point-intérieur et de type programmation quadratique séquen-

tielle) pour la résolution de problèmes en programmation non linéaire de grande taille (par exemples, l'algorithme « fmincon » de MATLAB, les solveurs IPOPT et SNOPT).

Nous rendons compte également, à travers les résultats obtenus, des principaux intérêts de notre approche et de ses principales limites.

Un des premiers intérêts de cette approche est qu'elle prend en compte le contexte du contrôle aérien actuel et ne demande pas une ré-organisation profonde du système de gestion, en particulier pour le problème d'évitement de conflits aériens, elle peut être considérée comme un outil d'aide à la décision pour les contrôleurs aériens.

Avec cette approche, les solutions obtenues sont continues en vitesse (les solutions optimales obtenues pour la régulation en vitesse sont de classe C^0). Les variations en vitesse proposées sont subliminales (i.e., il s'agit de modulations de faibles amplitudes autour de la vitesse nominale de référence pour chaque avion). Ces manœuvres d'évitement sont présentées, suivant de récentes études, comme compétitives au regard d'une réduction des dépenses économiques et environnementales.

À travers notre approche en contrôle optimal, par le système dynamique, nous avons les informations sur les variables de commandes (accélérations) et d'états (vitesses et positions) tout au long de la fenêtre de temps considérée (en phase tactique, sur 1h).

Les temps de calculs sont relativement faibles pour des instances avec un petit nombre d'avions (par exemples, les temps de calculs obtenus - en moyenne - pour les évitements à 3 avions sont de l'ordre de 0'00''60, et ceux pour les évitements à 8 avions sont de l'ordre de 0'07''40 sur une machine 2GHz/128Go RAM).

L'approche présentée admet des limites. L'approche ne bénéficie pas d'une garantie sur la faisabilité (notamment puisque l'utilisation d'intervalle de régulation subliminale en vitesse contraint le problème d'évitement de conflits aériens). L'approche ne prend pas encore en compte les incertitudes ; notamment nous n'avons pas traité la question de la robustesse des solutions par rapport à des retards, ou d'autres aléas liés à la prise en compte d'un « nouvel » avion dans le système en cours de résolution (optimisation online).

D'une part, nous espérons que notre approche par combinaison de méthodes numériques en contrôle optimal puisse s'adapter à d'autres domaines d'application ; d'autre part, les modèles proposés et les méthodes suggérées de résolution sont perfectibles ; ainsi, nous citons quelques unes des perspectives envisagées.

Une première perspective peut être considérée au niveau d'un compromis entre performances pour la résolution (efficacité, en termes de faibles temps de calculs) et précision du résultat (par exemple, garantie d'une solution optimale globale). Dans le cadre d'approche en phase tactique, peu avant la phase en temps réel, le temps de calculs pour la résolution du problème est un constituant important pour la validation d'outils d'aide à la décision. Les progrès technologiques en informatique proposent des machines de plus en plus puissantes, dans le sens où, elles réduisent génériquement les temps de calculs pour effectuer des opérations élémentaires. La modélisation de problèmes de gestion en trafic aérien se traduit souvent par des problèmes d'optimisation, parfois des problèmes de programmation non linéaire de grande taille, qui restent numériquement difficiles à résoudre. La réduction de temps de calculs est donc un enjeu dans ce contexte, et une adaptation à d'autres environnements numériques peut se révéler une perspective opportune (par exemples, usage d'autres langages de programmation). Dans cette perspective,

le choix des méthodes numériques utilisées est crucial. Nous avons développé une combinaison de méthodes numériques déterministes locales. Dans la suite, une adaptation avec d'autres méthodes - analytiques et/ou numériques - de résolution en contrôle optimal peut être vue comme une démarche d'amélioration. Par exemple, une adaptation de notre approche et des récents résultats de « turnpike property » par Trélat et Zuazua [161], peut être envisagée. Dans le sens où, d'une part, nous observons dans la structure de notre problème trois périodes distinctes (que nous avons appelées zones) et, d'autre part, que nous souhaiterions faire appel à une méthode de résolution moins sensible aux points de départ que la méthode numérique indirecte de tir. Dans une autre mesure, une adaptation de notre approche avec des résultats en vue d'optimisation « globale » pourrait être une aubaine pour discuter de la qualité des solutions obtenues (par exemple, pour la résolution exacte d'instances avec un petit nombre d'avions).

Une deuxième perspective peut être considérée au niveau de la modélisation du problème. Un des moyens de prolonger le travail consiste à proposer un raffinement du modèle d'évitement de conflits aériens par régulation en vitesse (par exemples, prise en compte d'incertitudes, prise en compte de variables discrètes). La prise en compte d'incertitudes est une des clefs dans un système critique comme le trafic aérien. Ainsi, proposer une méthode robuste peut être considéré comme une continuation importante de cette thèse. La prise en compte de variables discrètes permet une modélisation plus générale, comme on peut l'observer avec la fécondité des récents développements en MIOC et MINLP. La résolution numérique de ce type de problèmes est généralement difficile.

Une troisième perspective consiste à appréhender les moyens de généralisation de ce travail de thèse. En particulier, il s'agit d'envisager une adaptation de la combinaison proposée de méthodes numériques en contrôle optimal pour d'autres applications. Parmi les premiers exemples d'applications, peuvent être concernés les réseaux de transports : maritime ou routier ; ou, plus généralement, d'autres réseaux de flux ou communications.

Bibliographie

- [1] ACARE, Aeronautic and air transport beyond vision 2020 (towards 2050), rap. tech., Advisory Council for Aeronautics Research in Europe, 2010. Cité pages 11 et 131
- [2] E. Allgower et K. Georg, Numerical Continuation Methods, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990. Cité page 49
- [3] A. Alonso-Ayuso, L. Escudero et F. Martín-Campo, On modeling the air traffic control coordination in the collision avoidance problem by mixed integer linear optimization, Annals of Operations Research, (2011). Cité page 36
- [4] F. Alouges, A. DeSimone, L. Giraldi et M. Zoppello, Self-propulsion of slender microswimmers by curvature control : N-link swimmers, International Journal of Non-Linear Mechanics, (2013), p. 132–141. Cité page 37
- [5] S. Arora et B. Barak, Computational Complexity : A Modern Approach, Cambridge University Press, 2006. Cité page 31
- [6] P. Averty, Elements for prioritizing between conflicts resolutions in air traffic control, in Proceedings of the DASC : Digital Avionics System Conference, Saint Paul, USA, 2008. Cité page 92
- [7] P. Averty, K. Guittet et P. Lezaud, Perception du risque de conflit chez les contrôleurs aériens : le projet CREED, rap. tech., Revue technique de la DTI, 2006. Cité page 25
- [8] M. Bardi et I. Capuzzo-Dolcetta, Optimal control and viscosity solutions of Hamiltonian-Jacobi-Bellman equations, Birkhäuser, Boston, 1997. Cité pages 34 et 45
- [9] S. Barjou, S. Catteau, L. Cellier et Y. Leroy, Aspects opérationnels du contrôle aérien : enseignement et réelle pratique, questions concernant la régulation en vitesse. Toulouse, 2014. Cité pages 23, 24, et 133
- [10] G. Barles, Solution de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman, Springer-Verlag, 1994. Cité pages 34 et 45
- [11] C. Barnhart, D. Bertsimas, C. Caramanis et D. Fearing, Equitable and effecient coordination in traffic flow management, Transportation Science, 46 (2012), p. 262–280. Cité page 32
- [12] A. Bayen et C. Tomlin, Case study : Air traffic management systems, rap. tech., UNESCO-EOLSS : Encyclopedia of Life Support Systems, 2005. Cité page 18
- [13] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957. Cité page 34
- [14] P. Belotti, J. Lee, L. Liberti, F. Margot et A. Wächter, Branching and bounds tightening techniques for non-convex MINLP, Optimization Methods and Software, 24 (2009), p. 597–634. Cité page 36
- [15] A. Bemporad, Model Predictive Control (PhD Course), IMT Institute for Advanced Studies Lucca, 2013. Cité page 45
- [16] N. Bérend, J. Bonnans, J. Laurent-Varin, M. Haddou et C. Talbot, An interior-point approach to trajectory optimization, INRIA Report, (2005). Cité page 47
- [17] L. Berkovitz, On control problems with bounded state variables, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 5 (1962), p. 488–498. Cité page 43
- [18] D. Bertsimas et S. S. Patterson, The air traffic flow management problem with enroute capacities, Operations Research, 46 (1996). Cité page 31
- [19] P. Bettiol et H. Frankowska, Normality of the maximum principle for nonconvex constrained Bolza problems, J. Differential Equations, 243 (2007), p. 256–269. Cité page 43

- [20] J. Betts, Survey of numerical methods for trajectory optimization, *AIAA J. of Guidance, Control and Dynamics*, 21 (1998), p. 193–207. Cité page 45
- [21] ———, Practical methods for optimal control using nonlinear programming, *SIAM Advances in Design and Control*, 3 (2001). Cité page 45
- [22] ———, Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming, *SIAM*, 2010. Cité page 45
- [23] A. Bicchi et L. Pallottino, On optimal cooperative conflict resolution for air traffic management systems, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, (2000), p. 100–109. Cité pages 31 et 34
- [24] K. Bilimoria, A geometric optimization approach to aircraft conflict resolution, in *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Denver, USA, AIAA, 2000. Cité page 37
- [25] H. Bock et K. Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems, in *Proceedings of the 9th IFAC World Congress*, Pergamon Press, pp. 242–247, 1984. Cité page 45
- [26] P. Bonami, A. Olivares, M. Soler et E. Staffetti, Multiphase mixed-integer optimal control approach to aircraft trajectory optimization, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, (2013). Cité page 34
- [27] A. Bondy et U. Murty, *Graph theory with applications*, 2008. Cité page 58
- [28] D. Bonini, C. Dupré et G. Granger, How ERASMUS can support an increase in capacity in 2020, in *Proceedings of CCCT : the 7th International Conference on Computing, Communications and Control Technologies*, 2009. Cité pages 11, 25, 58, et 94
- [29] J. Bonnans, The shooting approach to optimal control problems, in *Proceedings of IFAC ALCOSP : the 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, 2013. Cité pages 45 et 48
- [30] J. Bonnans, J. Gilbert, C. Lemaréchal et C. Sagastizábal, *Numerical optimization : theoretical and practical aspects*, 2006. Cité page 47
- [31] J. Bonnans et A. Hermant, Revisiting the analysis of optimal control problems with several state constraints, *Control and Cybernetics*, 38 (2009), p. 1021–1052. Cité page 43
- [32] J. Bonnans et G. Launay, Large scale direct optimal control applied to a re-entry problem, *AIAA J. of Guidance, Control and Dynamics*, 21 (1998), p. 996–1000. Cité page 45
- [33] J. Bonnans, P. Martinon et V. Grélard, *BOCOP - A collection of examples*, rap. tech., RR-8053, INRIA, 2012. Cité page 47
- [34] B. Bonnard, J.-B. Caillaud et E. Trélat, Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 13 (2007), p. 207–236. Cité page 50
- [35] B. Bonnard et M. Chyba, *Singular Trajectories and their role in Control Theory, Mathematics and Applications*. Springer-Verlag, 2003. Cité page 43
- [36] B. Bonnard, L. Faubourg et E. Trélat, *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg GmbH & Co. K, 2005. Cité pages 37 et 38
- [37] A. Bryson et W. Denham, A steepest-ascent method for solving optimum programming problems, *Journal of Applied Mechanics*, 29 (1962). Cité page 33
- [38] A. Bryson, W. Denham et S. Dreyfus, Optimal programming problems with inequality constraints : Necessary conditions for extremal solutions, *AIAA Journal*, 1 (1963), p. 2544–2550. Cité page 33
- [39] A. Bryson et Y.-C. Ho, *Applied optimal control - optimization, estimation and control*, Taylor & Francis Group, 1975. Cité pages 13, 41, 43, et 62
- [40] R. Bulirsch, E. Nerz, H. Pesch et O. von Stryk, Combining direct and indirect methods in optimal control : range maximization of a hang glider, *ISNM International Series of Numerical Mathematics*, 111 (1993), p. 273–288. Cité page 50
- [41] S. Burer et A. Letchford, Non-convex mixed-integer nonlinear programming : a survey, *Surveys in Operations Research and Management Science*, 17 (2012), p. 97–106. Cité page 36

- [42] S. Cafieri, A mixed-integer optimization model for air traffic deconfliction, in Proceedings of GOW : the Global Optimization Workshop, 2012. Cité page 30
- [43] S. Cafieri et N. Durand, Aircraft deconfliction with speed regulation : new models from mixed-integer optimization, JOGO Journal of Global Optimization, 58 (2014), p. 613–629. Cité page 36
- [44] J.-B. Caillau, Contribution à l'étude du contrôle en temps minimal des transferts orbitaux, Thèse doctorat, INPT, Toulouse, France, 2000. Cité page 38
- [45] J.-B. Caillau, O. Cots et J. Gergaud, Differential continuation for regular optimal control problems, Optimization Methods & Software, 27 (2012), p. 177–196. Cité page 50
- [46] J.-B. Caillau, J. Gergaud et J. Noailles, 3D geosynchronous transfer of a satellite : Continuation on the thrust, J. Optim. Theory Appl., 118 (2003), p. 541–565. Cité page 38
- [47] E. Camacho et C. Bordons, Model Predictive Control, Springer London, 2004. Cité page 45
- [48] C. Carbone, U. Ciniglio, F. Corraro et S. Luongo, A novel 3D geometric algorithm for aircraft autonomous collision avoidance, in Proceedings of the 45th IEEE CDC, Conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA, 2006, p. 1580–1585. Cité page 32
- [49] P. Cardaliaguet, Introduction to differential games, 2010. Cité page 38
- [50] L. Cellier, S. Cafieri et F. Messine, Hybridizing direct and indirect optimal control approaches for aircraft conflict avoidance, in Proceedings of the ADVCOMP 2012, Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences, pp.42-45, Barcelone, Espagne, 2012. Cité page 15
- [51] —, Résolution de conflit aérien par contrôle optimal basé sur la régulation en vitesse, in Proceedings of the ROADEF 2012, Congrès Français de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Angers, France, 2012. Cité pages 15 et 87
- [52] —, Combinaison de méthodes de contrôle optimal pour l'évitement de collision dans le trafic aérien, in Proceedings of the ROADEF 2013, Congrès Français de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Troyes, France, 2013. Cité page 15
- [53] —, A decomposition-based optimal control approach for aircraft conflict avoidance performed by velocity regulation, in Proceedings of the ATACCS 2013, Application and Theory of Automation in Command and Control Systems, pp.129-131, Naples, Italie, 2013. Cité pages 15 et 102
- [54] —, Optimal control approaches for aircraft conflict avoidance using speed regulation : a numerical study, in Proceedings of the ISIAM 2013, Interdisciplinary Science for Innovative Air Traffic Management, Toulouse, France, 2013. Cité pages 15, 75, et 99
- [55] —, Régulation en vitesse pour un problème d'évitement de conflit aérien : combinaison des résolutions directe et indirecte de contrôle optimal, in Proceedings of the ROADEF 2014, Congrès Français de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Bordeaux, France, 2014. Cité page 15
- [56] B. Chachuat, Nonlinear and dynamic optimization : from theory to practice (notes de cours), École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007. Cité page 47
- [57] S. Chaimatanan, Strategic planning of aircraft trajectories, Thèse doctorat, Université Paul Sabatier - Toulouse 3, France, 2014. Cité page 31
- [58] S. Chaimatanan, D. Delahaye et M. Mongeau, Hybrid metaheuristic optimization algorithm for strategic planning 4D aircraft trajectories at the continental scale, IEEE Computational Intelligence Magazine, (2015). Cité page 37
- [59] G. Chaloulos, J. Lygeros, G. Roussos et K. Kyriakopoulos, Mid and short term conflict resolution in autonomous aircraft operations, in Proceedings of IRWE : the 8th Innovative Research Workshop & Exhibition, 2009. Cité page 30
- [60] Y. Chitour, F. Jean et E. Trélat, Singular trajectories of control-affine systems, SIAM J. Control Optim., 47 (2008), p. 1078–1095. Cité page 43
- [61] J.-P. Clarke, M. Lowther, L. Ren, W. Singhose, S. Solak, A. Vela et L. Wong, En route traffic optimization to reduce environmental impact, Rap. tech. 5, PARTNER, MIT, 2008. Cité page 132
- [62] J. Clements et B. Ingalls, An extended model for pairwise conflict resolution in air traffic management, Optimal Control Applications and Methods, 20 (1999), p. 183–197. Cité page 34

- [63] D. Colin de Verdière, Le système français de contrôle de trafic aérien : le CAUTRA, rap. tech., Air Navigation Research Center, 1992. Cité page 22
- [64] CORDIS, La recherche de l'UE prend son envol, rap. tech., Commission Européenne, CORDIS Express, 2014. Cité pages 11, 131, et 132
- [65] O. Cots, Contrôle optimal géométrique : méthodes homotopiques et applications, Thèse doctorat, Université de Bourgogne, France, 2012. Cité pages 38 et 49
- [66] D. Delahaye, Optimisation de la sectorisation de l'espace aérien par algorithmes génétiques, Thèse doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, 1995. Cité page 37
- [67] D. Delahaye et S. Puechmorel, A simplified approach to determine airspace complexity maps under automated conflict resolution, in Proceedings of the 3rd ATM R&D Seminar, 2000. Cité page 92
- [68] ———, Modeling and optimization of air traffic, Computer Engineering Series, Wiley, 2013. Cité pages 36 et 132
- [69] L. Delgado et X. Prats, Fuel consumption assessment for speed variation concepts during the cruise phase, in Proceedings of ATME : the Conference on Air Traffic Management (ATM) Economics, Belgrade, Serbia, 2009. Cité page 26
- [70] W. Denham et A. Bryson, Optimal programming problems with inequality constraints II : solution by steepest ascent, AIAA, 2 (1964), p. 25–34. Cité page 43
- [71] R. Diestel, Graph theory, 2000. Cité page 58
- [72] J. Dormand et P. Prince, A family of embedded runge-kutta formulae, Journal of Computational and Applied Mathematics, 6 (1980), p. 19–26. Cité page 46
- [73] G. Dowek, C. Munoz et V. Carreno, Provably safe coordinated strategy for distributed conflict resolution, in Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, San Francisco, California, USA, AIAA, 2005. Cité page 134
- [74] S. Dreyfus, Variational problems with inequality constraints, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 4 (1962), p. 297–308. Cité page 43
- [75] F. Drogoul, P. Averty et R. Weber, ERASMUS strategic deconfliction to benefit SESAR, in Proceedings of the 8th ATM R&D Seminar, Napa, USA, 2009. Cité pages 11, 14, et 25
- [76] DSN, Archive. Carte représentant l'espace français et du contrôle aérien en-route avec un découpage en secteurs aériens (datant des années 1990). 2011. Cité page 133
- [77] X. Dupuis, Optimal control of leukemic cell population dynamics, Math. Model. Nat. Phenom., 9 (2014), p. 4–26. Cité page 38
- [78] N. Durand, Optimisation de trajectoires pour la résolution de conflits en route, Thèse doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 1996. Cité pages 37 et 58
- [79] EEC, ERASMUS baseline scenario - first dynamic assessment of the ERASMUS concept, rap. tech., EEC Eurocontrol Experimental Centre, 2008. Cité page 25
- [80] ———, User manual for the base of aircraft data, rap. tech., EEC Eurocontrol Experimental Centre, 2008. Cité pages 26, 27, 33, 56, 82, 94, et 100
- [81] ———, SESAR consortium : The european ATM master plan, Rap. tech. 1, European Commission and EEC Eurocontrol Experimental Centre, 2009. Cité pages 11 et 131
- [82] ———, Long-term forecast : IFR flight movements 2010-2030, rap. tech., EEC Eurocontrol Experimental Centre - Air Traffic Statistics and Forecasts, 2010. Cité pages 11, 131, et 132
- [83] R. Ehrmanntraut et F. Jelinek, Performance parameters of speed control, in Proceedings of DASC : the 24th Digital Avionics System Conference, Washington D.C., USA, 2005. Cité page 26
- [84] ÉNAC, Basic ACC Workbook, premiers livrets de la formation basique en-route des contrôleurs aériens ÉNAC., rap. tech., ÉNAC ATM Department, France, 2014. Cité page 134
- [85] F. Filippov, On certain questions in the theory of optimal control, SIAM, Series A Control, 1 (1962), p. 76–84. Cité page 63
- [86] Flightradar24, Online aviation database. Affichage des informations en quasi-temps réel sur le vol des avions commerciaux civils. Vidéo en ligne (<http://www.flightradar24.com>). 2015. Cité page 12

- [87] R. Fourer, D. Gay et B. Kernighan, *AMPL : a modeling language for mathematical programming*, Thomson/Brooks/Cole, 2003. Cité pages 14, 82, 95, et 99
- [88] E. Frazzoli, Z. Mao et E. Féron, Aircraft conflict resolution via semidefinite programming, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, (2001). Cité page 37
- [89] E. Frazzoli, Z.-H. Mao, J.-H. Oh et E. Féron, Collision avoidance in air traffic management : A mixed-integer linear optimization approach, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 24 (2001), p. 79–86. Cité page 31
- [90] M. Friedman, Decision analysis and optimality in air traffic control conflict resolution. 1. optimal timing of speed control in linear planar configuration, *Transportation Research - part B*, 22B (1988), p. 207–216. Cité pages 34 et 35
- [91] ———, Decision analysis and optimality in air traffic control conflict resolution. 2. optimal heading (vectoring) control in a linear planar configuration, *Transportation Research - part B*, 25B (1991), p. 39–53. Cité page 92
- [92] D. Fudenberg et J. Tirole, *Game theory*, MIT Press, 1994. Cité page 38
- [93] M. Garey et D. Johnson, *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, 1979. Cité page 31
- [94] G. Gawinowski, J.-L. Garcia, R. Guerreau, R. Weber et M. Brochard, ERASMUS : a new path for 4D trajectory-based enablers to reduce the traffic complexity, in *Proceedings of DASC : the 26th Digital Avionics System Conference*, Dallas, USA, 2007. Cité pages 11, 25, et 100
- [95] P. Gill, W. Murray et M. Saunders, Snopt : An SQP algorithm for large-scale constrained optimization, *SIAM Journal on Optimization*, 12 (2002), p. 979–1006. Cité pages 14, 82, et 99
- [96] L. Guys, *Planification de trajectoires d'avions sans conflit : fonctions biharmoniques et fonction de navigation harmonique*, Thèse doctorat, Université Paul Sabatier - Toulouse 3, France, 2014. Cité page 23
- [97] J. Hansman, Impact of NextGen integration on improving efficiency and safety of operations, in *Proceedings of TRB : the 91st Annual Meeting of the Transportation Research Board*, Washington D.C, USA, 2012. Cité pages 11 et 131
- [98] R. Hartl, S. Sethi et R. Vickson, A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints, *SIAM Review*, 37 (1995), p. 181–218. Cité page 43
- [99] H. Hering, Technical analysis of ATC controller to pilot voice communication with regards to automatic speech recognition systems, rap. tech., EEC Eurocontrol Experimental Centre, 2001. Cité page 23
- [100] A. Hermant, *Sur l'algorithme de tir pour les problèmes de commande optimale avec contraintes sur l'état*, Thèse doctorat, École Polytechnique, France, 2008. Cité pages 43 et 44
- [101] J.-B. Hiriart-Urruty, *Les mathématiques du mieux faire. Vol.1 : Premiers pas en optimisation.*, 2007. Cité page 28
- [102] ———, *Les mathématiques du mieux faire. Vol.2 : La commande optimale pour les débutants*, 2007. Cité page 28
- [103] J.-B. Hiriart-Urruty et A. Rondepierre, *Introduction à l'optimisation et à la commande optimale (notes de cours)*, Université Paul Sabatier - Toulouse 3, 2011. Cité page 46
- [104] D. Hoehener, Variational approach to second-order optimality conditions for control problems with pure state constraints, *SIAM J. Control Optim.*, 50 (2012), p. 1139–1173. Cité page 43
- [105] H. Huang et C. Tomlin, A network-based approach to en-route sector aircraft trajectory planning, in *Proceedings of GNC : the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2009. Cité page 92
- [106] IBM ILOG, *User's Manual for CPLEX*, 2009. Cité pages 35, 36, et 37
- [107] ICAO, *Procedures for air navigation services - rules of the air and air traffic services*, rap. tech., International Civil Aviation Organization, 1996. Cité pages 20, 21, et 57
- [108] D. Jacobson, M. Lele et J. Speyer, New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35 (1971), p. 255–284. Cité page 43

- [109] D. Jousse, M. Drobycheff, P. Renault, M. Antmann, G. Soun, J.-M. Piduch et P. Lauroua, Du morse à la souris, 60 ans de contrôle en-route, Collection mémoire de l'aviation civile, 2007. Cité pages 18 et 29
- [110] T. Kettunen, J.-C. Hustache, I. Fuller, D. Howell, J. Bonn et D. Knorr, Flight efficiency studies in europe and the united states, in Proceedings of the 6th ATM R&D Seminar, Baltimore, Maryland, 2005. Cité page 133
- [111] J. Krozel, M. Peter et G. Hunter, Conflict detection and resolution for future air transportation management., rap. tech., NASA Ames Research Center, 1997. Cité pages 32 et 33
- [112] R. Laraki, J. Renault et S. Sorin, Bases mathématiques de la théorie des jeux, Éditions de l'École Polytechnique, 2013. Cité page 38
- [113] J. Laurent-Varin, F. Bonnans, N. Bérend, M. Haddou et C. Talbot, Interior-point approach to trajectory optimization, J. of Guidance, Control, and Dynamics, 30 (2007), p. 1228–1238. Cité page 45
- [114] M. Le Merrer, Optimisation de trajectoire d'avion pour la prise en compte du bruit dans la gestion du vol, Thèse doctorat, Université de Toulouse, France, 2012. Cité page 132
- [115] U. Ledzewicz et H. Schättler, Anti-angiogenic therapy in cancer treatment as an optimal control problem, SIAM J. on Control and Optimization, 46 (2007), p. 1052–1079. Cité page 38
- [116] T. Lehouillier, J. Omer, F. Soumis et G. Desaulniers, A flexible framework for solving the air conflict detection and resolution problem using maximum cliques in graph, in Proceedings of ATM Seminar, Lisbon, Portugal, 2015. Cité page 37
- [117] W. Li, Optimal control for Biological movement systems, Thèse doctorat, University of California, San Diego, USA, 2013. Cité page 38
- [118] D. Liberzon, Calculus of variations and optimal control theory, a concise introduction, Princeton University Press, 2011. Cité pages 13 et 41
- [119] J. Lovegren et J. Hansman, Estimation of potential aircraft fuel burn reduction in cruise via speed and altitude optimization strategies, rap. tech., International Center for Air Transportation, MIT, 2011. Cité pages 26 et 132
- [120] G. Maignan, Le Contrôle de la Circulation Aérienne, Presses Universitaires de France, 1991. Cité page 18
- [121] A. Majumbar et W. Ochieng, Factors affecting air traffic controller workload, Transportation Research Record, (2002). Cité page 92
- [122] P. Martinon, Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale, Thèse doctorat, INPT, Toulouse, France, 2005. Cité page 49
- [123] MATHWORKS, <http://fr.mathworks.com/>. 2015. Cité pages 14, 82, et 99
- [124] H. Maurer, T. Tarnopolskaya et N. Fulton, Optimal bang-bang and singular controls in collision avoidance for participants with unequal linear speeds, in CDC, 2012, p. 7697–7702. Cité pages 29, 30, 31, et 56
- [125] K. Mombaur, A. Truong et J.-P. Laumond, From human to humanoid locomotion—an inverse optimal control approach, Autonomous Robots, 28 (2009), p. 369–383. Cité page 38
- [126] C. Muñoz, A. Narkawicz et J. Chamberlain, A TCAS-II resolution advisory detection algorithm, in Proceedings of the AIAA, 2013. Cité page 134
- [127] J. Nocedal et S. Wright, Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research, 2006. Cité page 47
- [128] A. Olivares, M. Soler et E. Staffetti, Multiphase mixed-integer optimal control applied to 4D trajectory planning in air traffic management, in Proceedings of ATACCS : the 3rd International Conference on Application and Theory of Automation in Command and Control Systems, Naples, Italy, 2013. Cité pages 33 et 34
- [129] J. Omer et J.-L. Farges, Automating air traffic control through nonlinear programming, in Proceedings of ICRAT : the 5th International Conference on Research in Air Transportation, University of California, Berkeley, USA, 2012. Cité pages 31 et 35
- [130] R. Paielli et H. Erzberger, Conflict probability estimation for Free Flight., rap. tech., NASA Ames Research Center, 1996. Cité pages 32 et 33

- [131] L. Pallottino, E. Féron et A. Bicchi, Conflict resolution problems for air traffic management systems solved with mixed integer programming, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 3 (2002), p. 3–11. Cité pages 30, 31, 35, et 36
- [132] M. Panza, Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666, *Sciences dans l'histoire*, 2005. Cité page 12
- [133] C. Papadimitriou, *Computational complexity*, Addison-Wesley, 1993. Cité page 31
- [134] C. Peyronne, Modélisation mathématique et résolution automatique de conflits par algorithmes génétiques et par optimisation locale continue, Thèse doctorat, Université de Toulouse, France, 2012. Cité pages 31 et 37
- [135] L. Pfeiffer, Analyse de sensibilité pour des problèmes de commande optimale - Commande optimale stochastique sous contrainte en probabilité, Thèse doctorat, École Polytechnique, France, 2013. Cité page 38
- [136] L. Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze et E. Michtchenko, *Théorie mathématique des processus optimaux*, Editions Mir, Moscou, 1974. Cité pages 12, 13, 41, 43, et 62
- [137] M. Prandini, L. Piroddi, S. Puechmorel et S. Brázdilová, Toward air traffic complexity assessment in new generation air traffic management systems, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 12 (2011), p. 809–818. Cité page 92
- [138] T. Prevot, J. Homola et J. Mercer, Human-in-the-loop evaluation of ground-based automated separation assurance for NextGen, in *Proceedings of ICAS : the 26th Congress of International Council of the Aeronautical Sciences*, Anchorage, Alaska, USA, 2008. Cité pages 11 et 131
- [139] D. Prot, C. Rapine, S. Constans et R. Fondacci, A 4D-sequencing approach for air traffic management, *European Journal of Operational Research*, (2014). Cité page 37
- [140] D. Rey, Minimisation des conflits aériens par des modulations de vitesse, Thèse doctorat, Université de Grenoble, France, 2012. Cité pages 26, 29, 31, 59, et 92
- [141] D. Rey, C. Rapine, V. Dixit et S. Waller, Equity-oriented aircraft collision avoidance model, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, (2013). Cité page 32
- [142] D. Rey, C. Rapine, R. Fondacci et N.-E. El Faouzi, Potential air conflicts minimization through speed regulation, *Transportation Research Board*, DOI :10.3141/2300-07, (2012). Cité pages 30 et 36
- [143] D. Rey, C. Rapine, R. Fondacci et N.-E. El-Faouzi, Subliminal speed control in air traffic management : Optimization and simulation, *Transportation Science*, (2015). Cité pages 36 et 56
- [144] A. Richards et J. How, Aircraft trajectory planning with collision avoidance using mixed integer linear programming, in *Proceedings of ACC : the American Control Conference*, 2002, p. 1936–1941. Cité page 36
- [145] L. Rifford et E. Trélat, Morse-Sard type results in sub-Riemannian geometry, *Math. Ann.*, 332 (2005), p. 145–159. Cité page 43
- [146] B. Roberson, Fuel conservation strategies : Cost Index explained, *Rap. tech. 2, Aero Quarterly*, 2007. Cité pages 19, 22, 32, et 133
- [147] O. Rodionova, M. Sbihi, D. Delahaye et M. Mongeau, North atlantic aircraft trajectory optimization, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, (2014). Cité page 37
- [148] A. Rondepierre, Algorithmes hybrides pour le contrôle optimal des systèmes non linéaires, Thèse doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 2006. Cité page 50
- [149] J. Rong, J. Valasek, S. Geng et T. Ioerger, Air traffic conflict negotiation and resolution using an onboard multi-agent system, in *Proceedings of the 21th DASC*, 2000. Cité page 37
- [150] S. Sager, M. Claeys et F. Messine, Efficient upper and lower bounds for global mixed-integer optimal control, *JOGO Journal Of Global Optimization*, (2014), p. 1–23. Cité page 38
- [151] H. Sherali, R. Staats et A. Trani, An airspace planning and collaborative decision-making model : Part I probabilistic conflicts, workload, and equity considerations, *Transportation Science*, 37 (2003), p. 434–456. Cité page 32

- [152] M. Soler, M. Kamgarpour, C. Tomlin et E. Staffetti, Multiphase mixed-integer optimal control framework for aircraft conflict avoidance, in Proceedings of CDC : the 51th IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, 2012. Cité page 31
- [153] J. Stoer et R. Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, New-York, 1993. Cité page 45
- [154] SUISSE, Trafic aérien mondial de 24h en 80secondes. Collectif d'élèves ingénieurs suisses. Vidéo en ligne (<https://www.youtube.com/watch?v=Fz76-PIKg74>). 2009. Cité pages 13 et 132
- [155] H. Sussmann et J. Willems, 300 years of optimal control : from the brachystochrone to the maximum principle, IEEE Control System Magazine, 17 (1997), p. 32–44. Cité page 12
- [156] T. Tarnopolskaya et N. Fulton, Synthesis of optimal control for cooperative collision avoidance for aircraft (ships) with unequal turn capabilities, J. Optim. Theory Appl., DOI10.1007/s10957-009-9597-1, 144 (2010), p. 367–390. Cité page 34
- [157] C. Tomlin, J. Lygeros et S. Sastry, A game theoretic approach to controller design for hybrid systems, IEEE, 88 (2000), p. 949–970. Cité page 32
- [158] C. Tomlin, G. Pappas et S. Sastry, Conflict resolution for air traffic management : a case of study in multi-agent hybrid systems, IEEE Transactions on Automation Control, 43 (1998), p. 509–521. Cité pages 32, 34, et 37
- [159] E. Trélat, Contrôle optimal : théorie et applications, Vuibert, 2005. Cité pages 13, 41, 43, 44, 45, 49, et 64
- [160] ———, Optimal control and applications to aerospace : some results and challenges, J. Optim. Theory Appl., 154 (2012), p. 713–758. Cité page 38
- [161] E. Trélat et E. Zuazua, The turnpike property in finite-dimensional nonlinear optimal control, J. Differential Equations, 258 (2015), p. 81–114. Cité pages 43, 50, et 112
- [162] P. Tuan, H. Procter et G. Couluris, Advanced productivity analysis methods for air traffic control operations, rap. tech., Stanford Research Institute, 1976. Cité page 22
- [163] A. Vela, E. Salas, E. Féron, W. Singhose et J.-P. Clarke, Bounds on controller taskload rates at an intersection for dense traffic, in Proceedings of ACC : the American Control Conference, 2011. Cité pages 30 et 31
- [164] A. Vela, S. Solak, W. Singhose et J.-P. Clarke, A mixed-integer program for flight-level assignment and speed control for conflict resolution, in Proceedings of the joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, IEEE, 2009. Cité page 36
- [165] J. Villiers, Contribution à une théorie du système de contrôle en route et ses perspectives d'évolution, rap. tech., French Civil Aviation Authority, 1984. Cité page 22
- [166] ———, Automatisation du contrôle de la circulation aérienne - projet "ERASMUS" une voie originale pour mieux utiliser l'espace aérien, rap. tech., Institut de Transport Aérien, 2004. Cité pages 11 et 24
- [167] R. Vinter, Optimal control, Modern Birkhäuser Classics, 2000. Cité page 43
- [168] A. Wächter, A Short Course In Nonlinear Optimization (notes de cours), University of Bologna, 2007. Cité page 47
- [169] A. Wächter et L. Biegler, On the implementation of primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming, Mathematical Programming, 106 (2006), p. 25–27. Cité pages 14, 82, 95, et 99
- [170] J. Wangermann et R. Stengel, Distributed optimization and principled negotiation for advanced air traffic management, in Proceedings of the 1996 IEEE SIC, Symposium on Intelligent Control, Dearborn, MI, 1996, p. 156–161. Cité page 32
- [171] L. Wolsey, Integer programming, John Wiley & Sons, 1998. Cité page 28
- [172] R. Zanni, A methodology for airspace organization, rap. tech., Air Navigation Research Center, 1994. Cité page 22

Sigles et acronymes

- ACARE** → Advisory Council for Aviation Research in Europe. Conseil consultatif européen pour la recherche et l'innovation dans l'aviation civile.
- ADS** → Automatic Dependand Surveillance. Surveillance automatique de la position réelle de l'avion.
- ADUM** → Accès Doctorat Unique et Mutualisé.
- AEA** → Association of European Airlines. Association de compagnies aériennes européennes.
- AESA** → Agence Européenne de la Sécurité Aérienne (en anglais European Aviation Safety Agency, EASA).
- AIAA** → American Institute of Aeronautics and Astronautics. Institut d'aéronautique et aérospatial des États-Unis.
- AIRAC** → Aeronautical Information Regulation and Control. Périodique (tous les 28 jours) qui définit, en particulier, les routes aériennes.
- AMIES** → Agence pour les Mathématiques en Interaction avec l'Entreprise et la Société.
- AMPL** → A Mathematical Programming Language. Langage de programmation mathématique (L4G), de modélisation algébrique, il permet en particulier de décrire et résoudre des problèmes d'optimisation de grande taille.
- ANR** → Agence Nationale de la Recherche. Elle finance la recherche sur projets.
- ANSP** → Air Navigation Services Providers. Fournisseurs de services de navigation aérienne. En France, il s'agit de la DSNA.
- ARTCC** → Air Route Traffic Control Center. Centre de contrôle du trafic aérien en-route.
- ASR** → Agenda Stratégique de la Recherche, défini par l'ACARE (en anglais Strategic Research Agenda, SRA).
- ATC** → Air Traffic Control. Système de contrôle du trafic aérien.
- ATER** → Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche.
- ATFCM** → Air Traffic Flow and Capacity Management. Flux de trafic aérien et gestion de la capacité.
- ATM** → Air Traffic Management. Gestion du trafic aérien.
- ATOMIC** → Air Traffic Optimization via Mixed-Integer Computation. Projet de recherche français, de 2013 à 2016, financé par l'ANR.
- ATSEP** → Air Traffic Safety Electronics Personnel. Spécialistes responsables des systèmes de la navigation aérienne. En France, il s'agit des IESSA.
- BADA** → Base of Aircraft DAta. Base de données de référence pour les avions civils.
- BOCOP** → BOCOP – the optimal control solver. Algorithme, développé depuis 2010, pour la résolution de problèmes de contrôle optimal, par méthode directe.
- BVP** → Boundary Value Problem. Problème d'optimisation aux deux bouts.
- CAA** → Civil Aviation Authority. Organisme, datant de 1972, qui supervise et régule tous les aspects de l'aviation civile au Royaume-Uni.
- CARMIN** → Centres d'Accueil et de Rencontres Mathématiques Internationales.
- CAUTRA** → Coordonnateur AUtomatique du TRafic Aérien. Ensemble de calculateurs et de logiciels effectuant d'une part la poursuite radar (STR) et d'autre part le traitement des plans de vols (STPV). Cette corrélation des deux informations fournit les étiquettes sur les écrans radar des contrôleurs.
- CCSD** → Centre pour la Communication Scientifique Directe. Unité mixte de service (UMS 3668) du CNRS, INRIA et PRES de Lyon, créée fin 2000 et principalement dédiée à la réalisation d'archives ouvertes (telles que les services HAL, Episcience.org, et Scienceconf.org).
- CDM** → Collaborative Decision Making. Prise de décision coopérative.
- CD&R** → Conflict Detection and Resolution. Détection de conflits potentiels et résolution de problèmes d'évitement.
- CEDEX** → Courrier d'Entreprise à Distribution EXceptionnelle.
- CEO** → Chief Executive Officer. Directeur général, chef de la direction ou administrateur délégué.
- CFMU** → Central Flow Management Unit. Cellule de régulation du trafic aérien à l'échelle européenne.
- CIJM** → Comité International des Jeux Mathématiques.
- CIMI** → Centre International de Mathématiques et Informatique, de Toulouse.
- CIRM** → Centre International de Rencontres Mathématiques.
- CNES** → Centre National d'Études Spatiales. Établissement public à caractère industriel et commercial chargé d'élaborer le programme spatial français et de le mettre en œuvre.
- CNRS** → Centre National de la Recherche Scientifique. Organisme public français de recherche scientifique.
- CNRTL** → Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales.
- COCV** → Contrôle, Optimisation et Calcul des Variations.
- COIN-OR** → Computational Infrastructure for Operations Research. Projet qui vise à développer et à rassembler des logiciels mathématiques en accès libre et gratuit, en particulier pour la recherche opérationnelle.
- CORDIS** → COmmunity Research and Development Information Service. Service communautaire d'information, de la commission européenne, sur la recherche et le développement.
- COTCOT** → Conditions of Order Two and COnjugate Times. Algorithme, développé depuis 2005, pour la résolution de problèmes de contrôle optimal, par méthode indirecte, via le calcul de points conjugués.
- CRNA** → Centre en-route Régional de la Navigation Aérienne.
- CSAA** → Chinese Society of Aeronautics and Astronautics. Société chinoise d'aéronautique et astronautique.
- CTA** → Controlled Time of Arrival. Temps d'arrivée contraint/contrôlé.
- DALI** → Digits, Architecture et Logiciels Informatiques. Équipe-projet de l'UPVD et du LIRMM.
- DFO** → Derivative Free Optimization. Optimisation sans dérivées.
- DGAC** → Direction Générale de l'Aviation Civile.
- DME** → Distance Measuring Equipment. Équipement de radionavigation au sol. En interrogeant la station, l'avion connaît sa distance par rapport à elle. Associé à un VOR, le DME permet au pilote de connaître sa position par rapport à la balise.
- DSNA** → Direction des Services de la Navigation Aérienne (de la DGAC). Fournisseur de services de la navigation aérienne en France.
- DTI** → Direction des Techniques et de l'Innovation (de la DGAC).
- EASA** → European Aviation Safety Authority. Agence européenne, datant de 2002, ayant pour mission la certification de produits, la stratégie et la gestion de la sécurité de l'aviation civile.
- EADS** → European Aeronautic Defence and Space company. Agence de recherche et développement sur l'espace et la défense en aéronautique, devenue Airbus group.
- ÉDMITT** → École Doctorale Mathématiques, Informatique et Télécommunications de Toulouse.

- ÉDA** → Équations Différentielles Algébriques (en anglais Differential Algebraic Equations, DAE).
- ÉDO** → Équations Différentielles Ordinaires (en anglais Ordinary Differential Equations, ODE).
- ÉDP** → Équations aux Dérivées Partielles (en anglais Partial Differential Equations, PDE).
- EEC** → Eurocontrol Experimental Centre. Eurocontrol, organisation intergouvernementale européenne pour la sécurité de la navigation aérienne, créée en 1963.
- EEE** → Environnement Electronique ERATO. Projet décidé, en 2004, par la DGAC pour implémenter un environnement électronique et fournir des outils qui ont été expérimentés dans le cadre d'ERATO.
- ÉNAC** → École Nationale de l'Aviation Civile. École d'ingénieurs de l'UT, spécialisée en aéronautique civile, créée en 1949 à Orly et transférée en 1968 à Toulouse.
- ÉNSAE** → École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (appelée également SUPAERO), créée en 1909.
- ÉNSÉIHT** → École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique, d'Hydraulique et des Télécommunications, créée en 1907.
- ERASMUS** → En-Route Air traffic Soft Management Ultimate System. Projet européen sur la gestion du trafic aérien, de mai 2006 à novembre 2008.
- ERATO** → En Route Air Traffic Organizer. Projet ayant l'objectif d'analyser tous les mécanismes décisionnels des contrôleurs aériens pour permettre la création d'outils d'aide à la décision, visant à « améliorer le fonctionnement global du système de trafic aérien tout en gardant l'humain au centre de la boucle ».
- ETOPS** → Extended-range Twin-engine Operation Performance Standards. Règlement des normes standards (étendues) pour les performances aéronautiques d'avions commerciaux civils biréacteurs, concernant la circulation transocéanique.
- ETMS** → Enhanced Traffic Management System. Système d'aide à la décision pour la gestion du trafic aérien dont la fonction de gestion/d'alerte est basée sur une comparaison de la prédiction du volume aérien et la capacité (i.e., le volume de trafic seuil, exprimé en nombre d'avions, que les contrôleurs acceptent pour leur secteur).
- EUROCONTROL** → European Organisation for the Safety of Air Navigation. Organisme européen chargé de la gestion du trafic aérien en Europe, créé en 1960 avec la France, l'Allemagne (fédérale), les Pays-Bas, la Belgique, le Luxembourg et la Grande-Bretagne.
- FAA** → Federal Aviation Administration. Organisme de l'aviation civile des États-Unis.
- FAB** → Functional Airspace Block. Bloc fonctionnel de l'espace aérien, envisagé comme un regroupement de certains ANSP.
- FL** → Flight level. Niveau de vol, ou altitude-pressure, est l'altitude correspondant à la différence de pression entre la position occupée et la surface isobare 1013, 25 hPa exprimée en centaines de pieds (ft). Par exemple, un avion au FL330 vole à l'altitude-pressure de 33000 ft au dessus de l'isobare 1013, 25 hPa.
- FMJH** → Fondation Mathématique Jacques Hadamard.
- FMP** → Flow Management Position. Cellule de gestion des flux (au sein d'un centre de contrôle).
- FMS** → Flight Management System. Système de gestion des automatismes de l'avion.
- FSI** → Faculté des Sciences et de l'Ingénierie (une UFR de l'UPS).
- FSMP** → Fondation Sciences Mathématiques de Paris.
- GAMS** → General Algebraic Modeling System. Langage de programmation mathématique (L4G), de modélisation algébrique; permettant en particulier de décrire et résoudre des problèmes d'optimisation de grande taille.
- GLOPTIPOLY** → Global OPTimization over POLynomials (moments, optimization and semidefinite programming). Algorithmes d'optimisation sous contraintes semi-définies, pour la résolution d'un GPM.
- GPM** → Generalized Problem of Moments. Problème généralisé des moments.
- GPS** → Global Positioning System. Système de positionnement par satellite.
- GLPK** → GNU Linear Programming Kit. Paquetage de logiciels pour l'optimisation linéaire (discrète, continue ou mixte) de grande taille.
- GNU** → GNU's Not Unix. Projet de collaboration de masse pour le développement de logiciels informatiques libres et gratuits.
- GS** → Ground Speed. Vitesse sol. Vitesse correspond à la vitesse propre (TAS) corrigée de la vitesse du vent (VW). Vitesse présentée sur l'écran radar des contrôleurs aériens.
- HAL** → Hyper Articles en Ligne. Archive ouverte, créée en 2001, permettant aux chercheurs de déposer leurs articles et manuscrits dans une base à accès ouvert développée par le CCSD du CNRS.
- HAMPATH** → Logiciel développé, depuis 2009, pour la résolution de problème de contrôle optimal par le couplage de méthodes indirectes et de « suivi de chemin ».
- HDA** → High Density Airports. Aéroports à forte densité.
- HJB** → Hamilton-Jacobi-Bellman. Équations de HJB en théorie du contrôle.
- I3M** → Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier. Institut Montpellierain Alexander Grothendieck (UMR 5149).
- I-4D** → Initial 4D trajectory. Trajectoire planifiée en 4 dimensions, avec points de passage considérés en termes d'espace et de temps.
- IAS** → Indicated AirSpeed. Vitesse indiquée. Vitesse que lit le pilote sur l'indicateur de vitesse de bord (Le Badin). Vitesse directement indiquée par les instruments, issue des sondes extérieures (Pitot).
- IATA** → International Air Transport Association. Association internationale en transport aérien.
- ICIAM** → International Congress on Industrial and Applied Mathematics. Congrès international des mathématiques appliquées et industrielles.
- ICM** → International Congress of Mathematics. Congrès international des mathématiques.
- ICNA** → Ingénieurs du Contrôle de la Navigation Aérienne.
- IESSA** → Ingénieurs Électroniciens des Systèmes de Sécurité Aérienne.
- IEEAC** → Ingénieurs des Études et de l'Exploitation de l'Aviation Civile.
- IFR** → Instruments Flight Rules. Règles de navigation avec instruments.
- IFSTTAR** → Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux.
- IHM** → Interface Humain-Machine (en anglais Human-Machine Interface, HMI).
- IHP** → Institut Henri Poincaré. Structure internationale dédiée aux mathématiques et à la physique théorique.
- IMT** → Institut de Mathématiques de Toulouse. Unité mixte de recherche (UMR 5219) fédérant la communauté mathématique de la région toulousaine.
- INFORMS** → Institute for Operations Research and the Management Sciences. Organisme international qui regroupe des spécialistes en recherche opérationnelle et en sciences de gestion.
- INPT** → Institut National Polytechnique de Toulouse. Système universitaire composé de plusieurs écoles d'ingénieurs, d'une école vétérinaire et de plusieurs laboratoires de recherche.
- INSMI** → Institut National des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions (du CNRS).
- IPOPT** → Interior Point OPTimizer. Paquetage de logiciels informatiques pour la résolution de problèmes d'optimisation continue non linéaire de grande taille.
- IREM** → Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.
- IRIT** → Institut de Recherche en Informatique de Toulouse. Unité mixte de recherche (UMR 5505) commune au CNRS, à l'INPT.
- ISAE** → Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace.
- ITA** → Institut du Transport Aérien, axé principalement sur l'économie du transport aérien.
- ITU** → International Telecommunication Union. Union internationale des télécommunications.
- IUF** → Institut Universitaire de France.
- IUT** → Institut Universitaire de Technologie.
- IVAO** → International Virtual Aviation Organisation. Association spécialisée en contrôle aérien, qui propose, en particulier, des notes de cours sur différents thématiques du domaine.
- KKT** → Karush-Kuhn-Tucker. Conditions de KKT d'optimalité du premier ordre.
- L4G** → Langage de programmation de quatrième génération (en anglais 4-generation programming languages, 4GL), proches des « langues naturelles », avec une syntaxe déclarative.
- LASER** → Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Amplification de la lumière par émission stimulée de rayonnement.
- LAPLACE** → Laboratoire PLASMA et Conversion d'Énergie. Laboratoire de recherche de l'UPS, du CNRS, de l'ÉNSÉIHT et de l'INPT, spécialisé en plasma et conversion d'énergie.

- LIRMM** → Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier.
- LQE** → Linear-Quadratic Estimator. Estimateur linéaire quadratique, par exemple, un filtre de Kalman.
- LQG** → Linear-Quadratic-Gaussian. Commande linéaire quadratique gaussienne; elle est composée d'un contrôleur/régulateur linéaire quadratique (LQR) et d'un estimateur linéaire quadratique (LQE).
- LQR** → Linear-Quadratic Regulator. Commande ou régulateur linéaire quadratique; approche initiée par Kalman.
- M2AN** → Modélisation Mathématique et Analyse Numérique.
- MAIAA** → Laboratoire Mathématiques Appliquées, Informatique et Automatique pour l'Aérien. Un des laboratoires de recherche de l'ÉNAC.
- MATLAB** → MATrix LABoratory. Langage de programmation (L4G), développé par la société « The MathWorks », pour le calcul numérique.
- MENESR** → Ministère de l'Éducation Nationale de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.
- MIOC** → Mixed-Integer Optimal Control. Contrôle optimal mixte, faisant intervenir des variables décisionnelles continues et entières.
- MILP** → Mixed-Integer Linear Programming. Programmation linéaire en variables continues et entières.
- MINLP** → Mixed-Integer NonLinear Programming. Programmation non linéaire en variables continues et entières.
- MMO** → Maximum Operating Mach. Vitesse maximale en Mach.
- MODE** → Mathématiques de l'Optimisation et de la Décision. Groupe thématique, créé en 1991, de la SMAI, dédié aux domaines tels que l'analyse non linéaire, l'optimisation, les mathématiques discrètes, la recherche opérationnelle, les modélisations mathématiques en économie, finance et sciences sociales.
- MOOC** → Massive Open Online Courses. Cours en Ligne Ouvert et Massif (CLOM).
- MTCOD** → Medium Term Conflict Detection. Détection de conflits potentiels à moyen terme.
- MTOM** → Maximum Take-Off Mass. Masse maximale autorisée au décollage (synonyme de Maximum Take-Off Weight, MTOW).
- MUMPS** → MULTifrontal Massively Parallel sparse direct Solver. Algorithme, développé depuis 1996, pour la résolution de systèmes algébriques linéaires, de grandes tailles, par la méthode multifrontale.
- NAS** → National Airspace System. Espace aérien des États-Unis.
- NASA** → National Aeronautics and Space Administration. L'administration dédiée à l'espace et à l'aéronautique des États-Unis.
- NATCA** → National Air Traffic Controllers Association. Association des contrôleurs aériens aux États-Unis.
- NEOS** → NEOS Server State-of-the-Art Solvers for Numerical Optimization. Service en ligne, gratuit, pour la résolution numérique de problèmes d'optimisation; en particulier, il met à disposition « plus de 60 solveurs ».
- NEXTGEN** → Next Generation Air Transportation System. Projet de modernisation de la gestion du trafic aérien aux États-Unis.
- NM** → Nautical mile. Un nautique (ou nœud marin) correspond à 1852 mètres (1 minute d'angle sur un méridien). En 50 ans, avec l'augmentation de la qualité et des performances des moyens techniques, la norme de séparation horizontale est passée de 20 NM à 5 NM pour le contrôle aérien civil en-route.
- NMOC** → Network Manager Operations Center. Centre d'opération de gestion du réseau, qui analyse les prévisions de demande de plans de vols des compagnies aériennes et de capacité, en phase stratégique.
- OACI** → Organisation de l'Aviation Civile Internationale (en anglais International Civil Aviation Organization, ICAO).
- OJME** → Optimisation, théorie des Jeux, et Modèles en Économie. Parcours de la spécialité mathématiques de la modélisation, du master mathématiques et applications, de l'université Paris 6 - Pierre et Marie Curie.
- ONERA** → Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales.
- ONU** → Organisation des Nations Unies (en anglais United Nations, UN).
- PARTNER** → Partnership for Air Transportation Noise and Emissions Reduction. Projet de recherche nord-américain, sur l'aviation, subventionné par la FAA, la NASA et le Centre d'excellence du transport Canadien.
- PATCO** → Professional Air Traffic Controllers Organization. Association des contrôleurs aériens aux États-Unis.
- PFD** → Principe Fondamental de la Dynamique.
- PNL** → Programmation Non Linéaire (en anglais NonLinear Programming, NLP).
- PLN** → Plan de vol. Document fourni au CAUTRA (STPV), décrivant de façon détaillée tout ce qui concerne le vol d'un avion, par exemples : la route suivie, les terrains de départ et d'arrivée, l'immatriculation de l'avion et l'altitude demandée.
- PLNE** → Programmation Linéaire en Nombres Entiers.
- PMP** → Principe du Maximum de Pontryagin.
- PQS** → Programmation Quadratique Séquentielle (en anglais Sequential Quadratic Programming, SQP).
- PSD** → Programmation Semi-Définie (en anglais Semi-Definite Programming, SDP).
- RADAR** → RAdio Detection And Ranging. Radar, système qui utilise les ondes électromagnétiques pour détecter la présence et déterminer la position ainsi que la vitesse d'objets, tels que les avions.
1. Poursuite Radar. Fonction du CAUTRA traitant les informations issues des radars secondaires. Elle consiste à extrapoler la position future d'un avion à partir de sa position actuelle afin de calculer la vitesse de l'avion et de présenter aux contrôleurs une image de qualité en lissant la trajectoire.
 2. Radar primaire. Équipement au sol permettant de détecter un avion. Le radar émet des impulsions qui sont réfléchies par l'avion : c'est l'écho. La mesure du temps aller-retour de l'impulsion fournit la distance. La position de l'antenne par rapport au Nord fournit la position angulaire de l'avion. (La détection de l'avion se fait sans sa collaboration.)
 3. Radar secondaire. Équipement au sol permettant la détection d'un avion avec la collaboration de ce dernier. L'avion équipé d'un transpondeur répond aux interrogations du radar secondaire, en lui fournissant son identification (code A) et son altitude (code C). La mesure de la distance et de l'angle se font selon les mêmes principes que pour le radar primaire. (Ces informations envoyées au CAUTRA servent à l'élaboration de l'étiquette donnée aux contrôleurs aériens.)
 4. Radar secondaire mono-impulsion. Ce dernier fonctionne selon les mêmes principes qu'un radar secondaire. L'élément additionnel est constitué par l'écartométrie qui permet de mesurer avec une grande précision la position angulaire de l'avion, et de le situer en une seule mesure par rapport à l'axe de l'antenne. (D'où l'appellation mono-impulsion.)
- RBT** → Reference Business Trajectory. Trajectoire de référence, elle est définie par la compagnie aérienne (en tenant compte de leur « cost index »).
- RK** → Runge-Kutta. Méthodes d'analyse numérique, datant de 1901, pour l'approximation de solutions d'équations différentielles.
- RO** → Recherche Opérationnelle (en anglais Operations/Operational Research, OR). Approche scientifique pour la gestion de systèmes complexes et l'aide à la décision.
- RPAS** → Remotely Piloted Aircraft Systems. Drone, aéronefs sans personne à bord (synonyme d'UAV).
- RTA** → Real Time of Arrival. Temps réel d'arrivée.
- RTCA** → Radio Technical Commission on Aeronautics. Organisation à but non-lucratif concernant des recommandations sur les moyens techniques de télécommunications, utilisés en aéronautique. Cette organisation propose des directives, à travers la tenue de commission de spécialistes et la rédaction de rapports d'experts. Elle fournit des ressources administratives et logistiques à des institutions telles que l'OACI ou l'ITA.
- SCTA** → Service du Contrôle du Trafic Aérien.
- SESAR** → Single European Sky ATM Research. Projet européen de modernisation de la gestion du trafic aérien. Comprenant trois phases : la définition (de 2004 à 2008), le développement (de 2008 à 2015), et le déploiement (de 2013 à 2020 et au-delà).
- SIA** → Services de l'Information Aéronautique. Service central de la DSN de la DGAC, chargé de rendre les services d'information aéronautique nécessaires à la sécurité, à la régularité et à l'efficacité de la navigation aérienne nationale et internationale, dans les zones de responsabilité française, en métropole et outre-mer.
- SIAM** → Society for Industrial and Applied Mathematics. Association américaine en mathématiques, fondée en 1951, elle est dédiée à la « coopération » entre les mathématiques et le monde scientifique et technologique, notamment à travers les publications, et les recherches concernant l'usage des mathématiques dans l'industrie.
- SINA** → Sciences et Ingénierie de la Navigation Aérienne. Un département de l'ÉNAC.
- SMAI** → Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles. Association française, fondée en 1983, à but non lucratif, elle contribue au développement des mathématiques appliquées à travers la recherche, les applications dans les entreprises, les publications, l'enseignement et la formation des chercheurs et ingénieurs.

- SMF** → Société de Mathématiques de France. Association française en mathématiques, fondée en 1872, à but non lucratif, reconnue d'utilité publique depuis 1988, elle soutient « l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées ».
- SNOPT** → Sparse Nonlinear OPTimizer. Paquetage de logiciels informatiques pour la résolution de problèmes d'optimisation continue non linéaire de grande taille.
- STR** → Système de Traitement Radar. Sous-ensemble du CAUTRA.
- STPV** → Système de Traitement des Plans de Vol. Sous-ensemble du CAUTRA.
- SUDOC** → Système Universitaire de DOCumentation. Le catalogue collectif des établissements français d'enseignement supérieur.
- SUPAERO** → École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (appelée également ÉNSAE), créée en 1909.
- SWIM** → System Wide Information Management. Un seul système d'information où toutes les parties prenantes sont reliées.
- TAS** → True AirSpeed. Vitesse propre. Vitesse d'un avion par rapport à la masse d'air à l'intérieur de laquelle il se trouve quelle que soit sa densité. Vitesse affichée par les GPS et les FMS.
- TBO** → Trajectory Based Operations. Opérations basées sur les trajectoires d'avions.
- TCAS** → Traffic alert and Collision Avoidance System. Système embarqué détectant à très court terme les pertes de séparations en vol et donnant un conseil de descente ou de montée de dernier recours aux pilotes. Système embarqué à bord de certains avions, obligatoirement utilisé pour les avions des États Unis de plus de 30 passagers.
- TCSA** → Trajectory Control by minor Speed Adjustment. Contrôle de la trajectoire par des ajustements mineurs en vitesse.
- TFM** → Traffic Flow Management. Gestion des flux en trafic aérien.
- TMA** → Terminal Manoeuvring Area. Zone de manœuvres, région autour d'un aéroport pour gérer le trafic en approche ou au départ de celui-ci.
- TORO** → Toulouse Operations Research and Optimization. Toulouse Optimization et Recherche Opérationnelle a pour but de présenter la recherche réalisée à Toulouse dans le champ de l'optimisation et de la recherche opérationnelle, en rassemblant des spécialistes issus des laboratoires IMT, IRIT, ISAE, LAAS, LAPLACE, MAIAA et universités de Toulouse.
- UAV** → Unmanned Aerial Vehicle. Drone, aéronef sans personne à bord (synonyme de RPAS).
- UBFC** → Université Bourgogne Franche-Comté.
- UFR** → Unité de Formation et de Recherche (d'une université).
- UM2** → Université Montpellier 2 - Sciences et Techniques.
- UMR** → Unité Mixte de Recherche (du CNRS).
- UPMC** → Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie.
- UPS** → Université Toulouse 3 - Paul Sabatier. L'une des 3 universités de l'Université de Toulouse, spécialisée en sciences, technologie, santé et sport.
- UPVD** → Université de Perpignan Via Domitia.
- UT** → Université de Toulouse. Consortium d'universités, d'écoles d'ingénieurs (grandes écoles) et d'autres institutions d'enseignement supérieur et de recherche.
- V1** → Vitesse de décision (appelée aussi vitesse critique). Avant V1, le pilote peut interrompre le décollage, après V1, le pilote doit décoller.
- V2** → Vitesse de sécurité au décollage à atteindre en passant 35 ft au dessus du niveau de la piste.
- VA** → Vitesse de manœuvre. Vitesse maximale à laquelle les commandes de l'avion peuvent être actionnées au maximum.
- VB** → Variations Bornées (en anglais Bounded Variation, BV). En analyse, une fonction est dite à variation bornée quand elle vérifie une certaine condition de régularité. Cette condition a été introduite en 1881 par le mathématicien Jordan pour étendre le théorème de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier.
- VFE** → Flaps Extended speed. Vitesse maximale volets sortis.
- VFR** → Visual Flight Rules. Règles de navigation à vue.
- VHF** → Very High Frequency. Gamme de fréquences s'étendant de 30 à 310 MHz. L'aviation civile utilise la gamme de 108 MHz à 138 MHz pour les liaisons « air-sol » et la radionavigation.
- VLO** → Landing gear Operation. Vitesse maximale pour manœuvrer le train.
- VLE** → Landing gear Extended. Vitesse maximale train sorti.
- VMO** → Maximum Operation speed. Vitesse maximale de vol.
- VNE** → Never Exceed speed. Vitesse à ne jamais dépasser.
- VNO** → Normale Operation speed. Vitesse de croisière, à ne pas dépasser en atmosphère turbulente.
- VOR** → VHF Omnidirectional Range. Radiophare omnidirectionnel à très haute fréquence. Équipement de radionavigation au sol. En sélectionnant la fréquence de la station, le pilote peut soit suivre une route magnétique prédéterminée sur une carte de radionavigation, soit se situer dans un espace en déterminant une direction par rapport à cette station et la route pour la rejoindre ou s'en éloigner.
- VR** → Vitesse de rotation. Vitesse à laquelle le pilote « tire sur le manche » pour lever le nez de l'avion et décoller.
- VREF** → Vitesse de référence (ou d'atterrissage, parfois notée VAT). Vitesse égale à 1,3 de VSO (i.e., $VREF = 1,3 \times VSO$).
- VS** → Stall speed. Vitesse de décrochage.
- VLJ** → Very Light Jets. Jets, avions d'affaires, très légers.
- VSO** → Stall Out speed. Vitesse de décrochage avec volets et train sortis.
- VW** → Wind speed. Vitesse du vent.

Liste des figures

1	Représentation du trafic aérien civil de la France, par Flightradar24	12
2	Représentation du trafic aérien civil mondial de 24h	13
1.1	Volume de protection standard pour l'aviation commerciale en-route	21
1.2	Changements en cap : créneau (offset) et point-tournant (turning point)	23
1.3	Représentation de consommation en carburant pour 3 modèles d'avions	27
1.4	Représentation du modèle point-masse avec les trois degrés de liberté	33
1.5	Construction géométrique pour l'évitement de conflits, par Pallottino et al.	35
2.1	Décomposition d'un problème d'évitement : une interprétation spatiale	60
2.2	Décomposition d'un problème d'évitement : une interprétation temporelle	61
2.3	Deux pas de discrétisation de temps (détection et contrôle)	73
3.1	Évitement à 2 avions : sans ou avec contraintes sur les états de vitesse	84
3.2	Zoom : importance de la contrainte sur l'état de la vitesse	84
3.3	Évitement à 4 avions : sans ou avec contraintes sur les états de vitesse	85
3.4	Problème d'évitement de conflits à 2 avions, sur une fenêtre de temps de 30'	86
3.5	Comparaison des courbes de solutions suivant les positions terminales	87
3.6	Régulation en vitesse pour deux avions	88
3.7	Comparaison de pas de discrétisation de temps pour l'accélération	89
3.8	Aspects des pas de discrétisation : 15'' ou 5' pour l'accélération	90
3.9	Évitement à 4 avions en croisement et en poursuite	91
3.10	Comparaison d'évitement de conflits à 2 avions : temps d'anticipation	91
3.11	Trajectoires, problèmes du cercle, avec 4 avions et 10 avions	93
3.12	Trajectoires, problèmes du cercle avec déviation, avec 7 avions et 13 avions	94
3.13	Trajectoires et vitesses d'un évitement à 3 avions	98
3.14	Trajectoires et vitesses d'un évitement à 10 avions	98
3.15	Trajectoires et vitesses d'un évitement à 13 avions	98
3.16	Trajectoires, évitement à 10 avions : 4 sous-ensembles d'avions	103
3.17	Évitement à 10 avions : 4 sous-ensembles d'avions, courbes de solutions	104
A.1	Représentation des secteurs et de routes aériennes civiles du Sud de la France	133
A.2	Représentation d'une équipe de contrôleurs aériens (radariste et organique)	134
C.1	Évitement à 3 avions (pb01)	152
C.2	Évitement à 3 avions (pb02)	152
C.3	Évitement à 3 avions (pb03)	152
C.4	Évitement à 4 avions (pb04)	152
C.5	Évitement à 4 avions (pb05)	152
C.6	Évitement à 5 avions (pb06)	152
C.7	Évitement à 5 avions (pb07)	152
C.8	Évitement à 6 avions (pb08)	152
C.9	Évitement à 6 avions (pb09)	152
C.10	Évitement à 6 avions (pb10)	152
C.11	Évitement à 7 avions (pb11)	152
C.12	Évitement à 7 avions (pb12)	152
C.13	Évitement à 7 avions (pb13)	152
C.14	Évitement à 8 avions (pb14)	152

C.15 Évitement à 8 avions (pb15)	152
C.16 Évitement à 8 avions (pb16)	153
C.17 Évitement à 9 avions (pb17)	153
C.18 Évitement à 9 avions (pb18)	153
C.19 Évitement à 9 avions (pb19)	153
C.20 Évitement à 10 avions (pb20)	153
C.21 Évitement à 10 avions (pb21)	153
C.22 Évitement à 10 avions (pb22)	153
C.23 Évitement à 11 avions (pb23)	153
C.24 Évitement à 11 avions (pb24)	153
C.25 Évitement à 11 avions (pb25)	153
C.26 Évitement à 12 avions (pb26)	153
C.27 Évitement à 12 avions (pb27)	153
C.28 Évitement à 12 avions (pb28)	153
C.29 Évitement à 13 avions (pb29)	153
C.30 Évitement à 13 avions (pb30)	153
C.31 Évitement à 10 avions (pb31)	156
C.32 Évitement à 10 avions (pb32)	156
C.33 Évitement à 10 avions (pb33)	156
C.34 Évitement à 10 avions (pb34)	156
C.35 Évitement à 10 avions (pb35)	156
C.36 Évitement à 10 avions (pb38)	156
C.37 Évitement à 8 avions (pb36)	156

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques des méthodes numériques locales : directes et indirectes	49
2.1	Récapitulatif des formulations	78
2.2	Valeurs pour un évitement à 3 avions	79
2.3	Valeurs pour un évitement à 8 avions	79
3.1	Avec ou sans condition terminale sur les positions finales	86
3.2	Pas de discrétisation de temps : évitement à 2 avions	89
3.3	Données des configurations de problèmes d'évitement de conflits aériens	96
3.4	Comparaison des résultats numériques	97
3.5	Paramètres des instances	100
3.6	Comparaison des tests numériques	101
3.7	Sous-ensembles d'avions et données des configurations aériennes	103
3.8	Sous-ensembles d'avions et comparaison de résultats	106

Liste des algorithmes

1	Exemple de fichier de données ; code AMPL (.dat) ; problème à 9 avions	136
2	Exemple de fichier d'exécution ; code AMPL (.run)	140
3	Exemple de fichier de modèle ; code AMPL (.mod)	146

ANNEXE A

Motivations en gestion de trafic aérien

Démocratisés au fil des dernières décennies, l'usage et les moyens alloués au transport aérien ont drastiquement été modifiés. Dans le contexte des flux d'avions de ligne commerciaux civils, le nombre de vols est indubitablement plus élevé que dans le passé. Le trafic s'étant considérablement densifié, cette évolution donne lieu à des problèmes, dits de gestion du trafic aérien, de plus en plus conséquents. En effet, le transport aérien, depuis ses débuts, fascine, mais, en contre partie, demande une attention particulière. L'importante croissance du trafic aérien interpelle. Parallèlement, des autorités internationales se sont mises en place pour garantir la sécurité et réguler le trafic, notamment, en établissant et en veillant au respect des règles de circulation. Concernant la gestion du trafic aérien (Air Traffic Management, ATM), citons par exemples les instances suivantes, l'European Organisation for the Safety of Air Navigation (EUROCONTROL), en charge du ciel européen, organisation créée en 1960 avec la France, l'Allemagne (fédérale), les Pays-Bas, la Belgique, le Luxembourg et la Grande-Bretagne ; ou encore, la Federal Aviation Administration (FAA), organisme propre à l'aviation civile des États-Unis. Dans leur agenda stratégique, l'Advisory Council for Aviation Research in Europe (ACARE), composé de spécialistes de l'aviation, prévoyait un doublement du trafic aérien sur 15 ans, avec pour horizon 2020. La croissance du trafic aérien est maintenant davantage observée à l'échelle mondiale, avec l'influence des pays émergents, notamment en Orient, à travers l'essor économique de pays tels que la Russie, le Japon, l'Inde et la Chine, par exemple, ACARE [1]. Une nouvelle estimation de l'augmentation du trafic aérien dans les prochaines années est étudiée dans le rapport d'EUROCONTROL : STATFOR [82]. Un document de juin 2014 de la commission européenne [64] témoignent des récentes estimations, comme rappelées à la suite, concernant la croissance du trafic. « Le transport aérien est le moyen qui a connu la croissance la plus rapide ces dernières années. Le transport aérien mondial devrait augmenter d'environ 5% par an jusqu'à 2030 alors qu'en Europe, les trajets aériens devraient doubler. Ce bond est considérable si l'on estime que le trafic dans l'espace aérien européen est l'un des élevés au monde avec 33000 vols par jour. [...] Le trafic aérien augmente, de même que le besoin pour une efficacité, une sécurité et une protection environnementale plus importantes. » Au vu du nombre de vols croissant, et de ses conséquences en termes de gestion du trafic, le projet européen Single European Sky ATM Research (SESAR) [81] et son équivalent nord-américain Next Generation Air Transportation System (NextGen), par exemple, Prévot et al. [138] et Hansman [97], visent à « moderniser » la gestion du trafic aérien à toutes les échelles (au niveau des aéroports, en phases d'approche et en phases en-route, comme nous le précisons ci-dessous). La FAA indique qu'il est urgent d'agir pour une modernisation de la gestion du trafic aérien. Les motivations évoquées pour le projet NextGen sont alarmantes, comme rappelées à la suite (i.e., le paragraphe de la FAA du « Why now ? » dédié au projet NextGen). « Without NextGen there will be gridlock in the skies. By 2022, we estimate that this failure would cost the U.S. economy \$22 billion annually in lost economic activity. That number grows to over \$40 billion by 2033 if we don't act. Even as early as 2015 our simulation shows that without some of the initial elements of NextGen we will experience delays far greater than what we are seeing today. »

Cette volonté de modernisation, à travers les deux projets internationaux (SESAR et NEXTGEN), aussi bien en Europe qu'aux États-Unis, est insufflée par différents objectifs ; lesquels peuvent être regroupés, comme suit, en trois familles.

Satisfaction d'un trafic plus important. Face à la demande de circulation avec un nombre de vols toujours plus élevé, les exigences de sécurité doivent être maintenues et garanties. Au niveau occidental, examiné en Figure 1, le doublement du trafic aérien annoncé par l'ACARE [1], le

rapport d'Eurocontrol STATFOR [82] et le document de la commission européenne [64] nous donnent une idée de l'ampleur de l'augmentation du trafic aérien attendu. Cette demande mondiale effrénée est également portée par la croissance et le développement des pays dits « émergents ». Cette congestion s'explique aussi par l'asymétrie du trafic et l'aspect périodique des activités de circulation. En effet, les activités de circulation aérienne sont sensibles aux conditions météorologiques ; mais aussi, malgré les nombreux équipements à bord pour assister les vols de nuit, le trafic aérien est encore influencé par un rythme nyctéméral (par exemple, vidéo [154]).

Réduction des retards. Clarke et al. [61] soulignent les coûts générés par les retards dans le trafic aérien nord-américain en raison de la congestion du National Airspace System (NAS) ; cette congestion est estimée être équivalente à une perte d'environ \$10 milliards par an. Cet engorgement, notamment en zones aéroportuaires – zones de manœuvres autour d'un aéroport pour gérer le trafic en approche ou au départ de celui-ci – (Terminal Manoeuvring Area, TMA), en particulier, avec les aéroports à forte densité de trafic (High Density Airports, HDA), et sur les routes aériennes, est déjà fortement ressenti en Europe Occidentale, en Asie avec l'Inde et la Chine notamment, ainsi qu'en Océanie, avec l'Est de l'Australie.

Réduction du préjudice à l'encontre de l'environnement. Avec la responsabilité de ne pas dégrader notre écosystème, il convient naturellement de faire attention à la consommation de carburant, en termes d'énergie fossile, liée à l'émission de gaz dits polluants et à la mise en œuvre d'exploitation de ressources naturelles. Mais également les nuisances sonores sont prises en compte, visées pour être diminuées, notamment aux voisinages des zones aéroportuaires (par exemple, Le Merrer [114] propose une optimisation de trajectoire d'avion en tenant compte des nuisances sonores, à travers une modélisation en un problème de contrôle optimal).

Afin de planifier un trajet aérien d'un aéroport vers un autre, un plan de vol doit être enregistré auprès des services de la navigation aérienne. Ce document contient les informations nécessaires indiquant les horaires et décrivant l'itinéraire souhaité. En particulier, cet itinéraire est précisément marqué, la trajectoire souhaitée étant parcemée d'une série de balises et de points de passage (waypoints). Pour ces correspondances, observées en Figure 2, des routes aériennes (airways) sont ainsi exploitées, et donnent lieu à un réseau. En effet, pour un niveau de vol donné, approché par une représentation dans le plan, ces lignes brisées, ces routes aériennes définies par une série de balises s'intersectent et nous parlons de points de croisement (cross point). En ces points, véritables carrefours aériens, le risque de rencontres entre avions est élevé. Deux avions arrivant de manière concomitante aux abords de ces points peuvent se trouver trop proches et, de fait, générer un conflit aérien, que nous explicitons et étudions dans cette thèse.

La tâche du contrôle du trafic aérien est de structurer, de coordonner les flux d'avions, illustrés en Figures 2 et 1, de sorte à garantir la sécurité, particulièrement en minimisant les risques de collision, tout en améliorant la capacité de ce réseau emprunté par les avions commerciaux civils. Le contrôle du trafic aérien peut être décomposé, comme suit, en trois phases de surveillance.

En-route. Aussi appelée parfois la croisière, c'est une période durant laquelle les avions se trouvent entre leurs aéroports de départ et de destination. Cette phase concentre la majeure partie du temps de trajet. La densité du trafic aérien y est plus faible. La phase en-route est une des plus importantes pour le développement d'outils d'aide à la décision et à leur bonne intégration avec les moyens actuels. Cette phase de vol présente en effet différents avantages du point de vue de l'aide à la décision, puisqu'à la fois cette phase représente la majeure partie du trajet pour les avions (notamment pour les moyen-courriers et les long-courriers), elle peut ainsi être vue comme la plus grande opportunité pour la réduction de consommation en carburant Lovgren et Hansman [119] et, à la fois elle possède une densité d'avions pour les secteurs contrôlés moins importante qu'aux abords des aéroports, ce qui peut en faciliter la mise en œuvre. C'est au sein de cette phase, pour laquelle les avions sont éloignés des aéroports, que nous positionnons notre étude pour l'évitement de conflits aériens.

En approche. Dans le voisinage d'un aéroport, suivant la dimension de l'aéroport. Les avions sont en période de montée suite au décollage, respectivement de descente en vue de l'atterrissage.

Au sein de l'aéroport. C'est dans ce lieu restreint qu'il est question de la gestion du roulage (taxiing), du décollage (take-off) et de l'atterrissage (landing).

Dans Delahaye et Puechmorel [68], on estime qu'actuellement environ 8000 traversées aériennes ont lieu chaque jour sur le territoire français, illustrées en Figure 1. Le besoin de contrôle

étant important, cette tâche délicate est divisée et répartie en espaces aériens ; ce qui donne lieu à un découpage en secteurs aériens où chaque secteur est placé sous la responsabilité d'une équipe de contrôleurs, illustrée en Figure A.1. Cette équipe assure l'évitement de conflits aériens et la coordination des vols : le contrôleur radariste en donnant des instructions aux pilotes des vols dans l'espace considéré (avec la résolution de conflits aériens potentiels), et le contrôleur organique, en assurant la coordination entre son secteur et les secteurs voisins (transitions vols entrants-vols sortants, et pré-détection de conflits aériens potentiels), par exemple, Barjou et al. [9]. En pratique, la capacité maximale d'un secteur aérien est généralement comprise entre 10 et 15 avions simultanément dans le secteur considéré ; si la limite est atteinte, le secteur est dit saturé ; il suit souvent de ce type de congestion, des retards importants, pour détourner les vols du secteur contrôlé saturé. Au cours de la seconde moitié du XX^{ème} siècle, le contrôle propre à la gestion du trafic aérien s'est

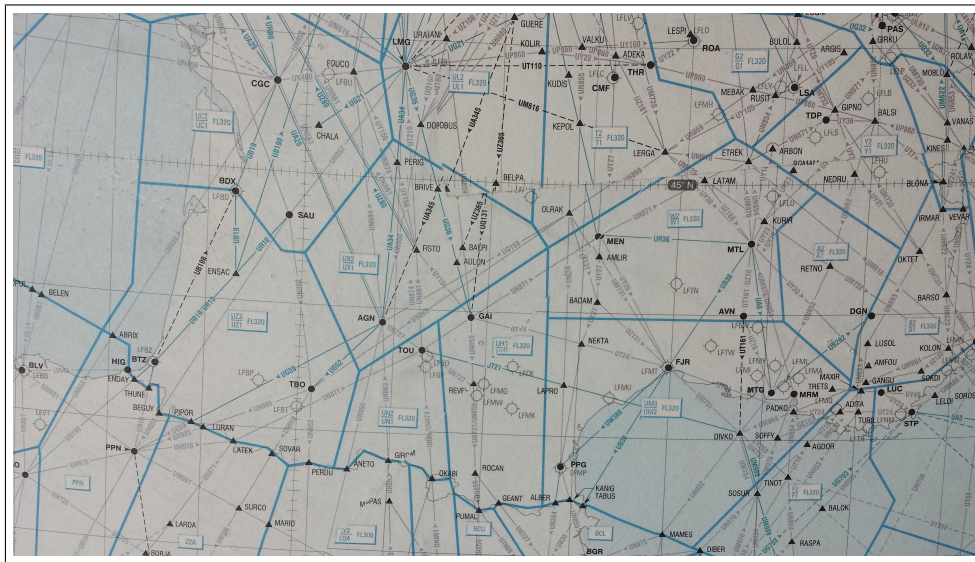


Figure A.1 – Représentation d'un découpage en secteurs aériens (délimités par les traits épais pleins en bleu clair) et de quelques principales routes aériennes civiles (indiquées par les segments fins gris) d'une portion du Sud de la France. Carte représentant l'espace français et du contrôle aérien en-route avec un découpage en secteurs aériens (datant des années 1990) [76]. Archive du centre basé à l'ÉNAC, en recherche et développement, de la Direction des Services de la Navigation Aérienne (DSNA/DTI/R&D).

développé. Néanmoins, la coordination de vols, dont l'effectif est toujours plus élevé, se révèle une tâche complexe. Dès 2000, des rapports techniques, de la FAA et de Eurocontrol Experimental Centre (EEC), sur la gestion du trafic aérien, mettent en lumière de nombreux points à améliorer ; par exemple, Kettunen et al. [110] évoquent les systèmes dédiés à la gestion du trafic aérien, en Europe et aux États-Unis, et met l'accent sur leurs inefficacités. L'étude pointe qu'une extension des vols de près de 30% est subie en comparant le vol réel effectué à la route directe, au sens de la route la plus courte suivant le critère de la compagnie aérienne. Ce critère confidentiel, appelé dans la littérature *cost index* (par exemple, Roberson [146]), souhaite représenter un compromis entre la durée du vol et la consommation en carburant de l'avion. Sans cesse en évolution, le milieu aéronautique souhaite améliorer la sécurité et l'ergonomie pour ses utilisateurs, en particulier, dans la relation privilégiée entre contrôleurs et pilotes. Cet environnement est ainsi de plus en plus friand des outils d'aide à la décision, et constitue un vivier d'envergure pour la modélisation mathématique et l'optimisation.

En effet, la chaîne de régulation du trafic aérien, décrite en sous-Section 1.1.1, prend fin avec le filtre « temps réel » dans lequel l'humain joue un rôle prédominant. Les contrôleurs aériens ont alors la tâche « complexe » de veiller à la circulation, de coordonner les flux et modifier les plans de vols des avions si nécessaire. Ces dernières opérations dans cet environnement « critique » doivent être effectuées, d'une part avec une extrême vigilance, et d'autre part dans un temps très court. Pour se donner un ordre de grandeur, le temps moyen de parcours d'un secteur pour un avion est égal à une quinzaine de minutes. La visibilité du contrôleur est légèrement plus grande, quelques minutes avant que l'avion pénètre dans son secteur. Le dispositif décrit dans la suite est centré « au sol » sur un écran radar de contrôle (en dimension 2). Le Coordonnateur AUTomatique

du TRafic Aérien (CAUTRA) est un ensemble de calculateurs et de logiciels effectuant d'une part le système de traitement/la poursuite radar (STR) et d'autre part le système de traitement des plans de vols (STPV). Cette corrélation des deux informations fournit les étiquettes sur les écrans radar des contrôleurs. Les contrôleurs, représentés en Figure A.2, sont donc entraînés à reconnaître des types de conflits aériens potentiels et à appliquer des manœuvres connues, décrites en sous-Section 1.1.2.



Figure A.2 – Représentation d'une équipe de contrôleurs aériens : contrôleur radariste et contrôleur organique. Au sol, au sein d'un centre de contrôle aérien, une équipe de deux contrôleurs a la responsabilité de la circulation aérienne dans un espace donné, appelé secteur aérien. À gauche, se trouve le contrôleur radariste (on retrouve souvent l'expression *executive controller* ou *radar controller*) chargé, en particulier, de la résolution de conflits aériens potentiels entre les vols au sein du secteur aérien considéré. À droite, se trouve le contrôleur organique (on retrouve souvent l'expression *planning controller*) chargé, en particulier, de la prédétection de conflits aériens potentiels en prenant en compte les vols entrants et de la gestion des vols aux frontières du secteur aérien considéré. (source : ÉNAC [84])

Au delà de la solide chaîne de filtres de régulation énoncée précédemment, il existe encore d'autres dispositifs de sécurité. Pour palier à une faille, i.e., dans le cas où deux avions viendraient à se rapprocher dangereusement, il reste le filet de sauvegarde qui est un logiciel intégré au STR, permettant, grâce au calcul de la position « extrapolée » des avions, d'attirer l'attention du contrôleur aérien sur le risque d'un croisement en dessous des normes de séparation en déclenchant le clignotement des étiquettes sur l'écran radar. Pour les cas plus extrêmes, si un conflit aérien a effectivement lieu, alors la priorité est d'assurer qu'il n'y ait pas de collision. Indiquons tout de même que ce moyen n'est utilisé que pour résoudre les conflits imprévus, par exemple quand un avion vient à ne pas respecter, et donc à quitter, le plan de vol fourni par le système de contrôle, ou encore lors d'un incident technique avec des effets significatifs sur les performances de l'avion. Nous présentons alors pour conclure le système lié à l'« urgence ». Ce tout dernier recours est supposé être opérationnel, disons capable d'agir, même si le système de contrôle est défectueux, voire inactif. Il est constitué de deux systèmes complémentaires :

1. Détection. Le réseau de sureté prédit les trajectoires de chaque avion dans un intervalle de temps de quelques minutes en utilisant les positions radar antérieures et des algorithmes de prédiction. Dans le cas de l'existence d'un conflit aérien, une alarme est activée. Ce système ne propose pas de solution pour résoudre le conflit aérien avéré, il s'agit de la détection.
2. Résolution et TCAS. Le Traffic alert and Collision Avoidance System (TCAS) n'a pas pour mission de séparer les avions, mais plutôt d'éviter une présumée collision. La prédiction de fenêtre de temps est alors moins d'une minute. Plus précisément cette fenêtre de temps varie entre 25 et 40 secondes. À ce stade, il est « trop tard » pour un contrôleur aérien (humain) d'agir. En effet, pour les opérations de contrôle humaines, les instructions (clearances) nécessitent 1 ou 2 minutes d'analyse de situations. Ainsi, actuellement, le TCAS (par exemple, Dowek et al [73], Muñoz et al [126]) détecte les avions voisins et dicte un ordre de résolution au pilote, en termes de changement d'altitude. Cet ordre sur le plan vertical donne lieu à un fulgurant changement de niveau de vol pour se prémunir d'une collision.

ANNEXE B

Codes AMPL (fichiers .run, .dat et .mod)

Dans ce paragraphe, nous présentons un exemple de fichier de données, correspondant au fichier de paramètres (.dat), utilisé pour notre modèle de résolution en AMPL, pour le problème d'évitement de conflits aériens à 9 avions.

Ce fichier est généré par l'algorithme de détection et de prétraitement (via MatLab). L'entête du document permet de caractériser le fichier de données, en fournissant des détails sur le type de configurations aériennes, reportée dans le tableau de données ; par exemples, le nombre de conflits potentiels, le nombre de rencontres potentielles.

Seules les informations non commentées (qui ne sont pas précédées d'un #) sont lisibles dans l'exécution du programme (.run) en AMPL et utilisées par nos approches de résolution. La précision numérique, pour chaque paramètre de donnée, correspond à 10^{-6} .

Un exemple de fichier de données, dans le code AMPL, est vu en Algorithme 1. Il s'agit d'une instance d'un problème d'évitement, dit « du cercle avec déviation », avec 9 avions. Les caractéristiques de cette configuration aérienne en exemple sont les suivantes. En entête (commentée) du fichier de données, nous pouvons lire quelques informations propres à l'instance générée. En particulier, 6 paires d'avions sont en conflits potentiels, et 18 paires d'avions sont en rencontres potentielles. La distance minimale (norm) de séparation horizontale est indiquée (en NM), le temps terminal fixé (tf) est indiqué (en heures). Le nombre de pas de discrétisation (N) de la fenêtre de temps est indiqué ; ainsi, par exemple, pour $N := 241$, la durée entre deux pas de temps consécutifs, avec $tf := 1$, correspond à 15'' et satisfait les contraintes opérationnelles.

Un fichier pour l'exécution du programme, est vu en Algorithme 2. Il s'agit d'un exemple de fichier d'exécution ; d'un code AMPL (.run) pour le problème d'évitement de conflits aériens. Il y a un ajustement de paramètres (option), de précision et de tolérance, relatifs aux solveurs utilisés (IPOPT ou SNOPT) en programmation non linéaire. Il y a des appels au solveur, au fichier de données (.dat) et au fichier de modèle (.mod). Nous pouvons remarquer la commande d'affectation (let) et celle d'affichage (display) des résultats obtenus, valeurs de la solution et informations relatives à l'exécution du programme dans son ensemble, notamment, les informations pour le déroulement du solveur en programmation non linéaire (e.g., nombre de variables du modèle, nombre de contraintes du modèle, nombre d'itérations jusqu'à la solution, nombre d'évaluations de la fonction objectif).

Un fichier pour le modèle de résolution, code AMPL, est vu en Algorithme 3. Nous présentons ici le code AMPL pour le modèle en contrôle optimal. Les approches de résolution retenues sont indexées par le paramètre « flag » de la manière suivante.

1. L'approche de résolution correspond à la méthode numérique de tir directe, avec deux pas de discrétisation de temps, sur l'ensemble du problème (\mathcal{P}), sur la fenêtre de temps de t_0 à t_f . Elle correspond au modèle (P_D).
2. L'approche de résolution est composée d'une méthode numérique de tir directe, avec deux pas de discrétisation de temps, sur l'intervalle de t_0 à \bar{t}_Z et la méthode du PMP en « postzone », i.e., pour l'intervalle de temps de \bar{t}_Z à t_f . Elle correspond au modèle (P_{C1}).
3. L'approche de résolution est composée d'une méthode de tir directe, avec deux pas de discrétisation de temps, en « zone », sur l'intervalle de temps de t_Z à \bar{t}_Z , et de l'application des conditions du PMP, en « prezone » et en « postzone ». Elle correspond au modèle (\bar{P}_{C2}).

Les trois codes en AMPL (Algorithmes 1, 2 et 3) suivent.

```

# NAME := data_n9_dev_nv1_num1_vb1_clc4_clr2_nbc6_nbr18
# type := deviation;
# nombre d'avions := 9;
# pourcentage en zone
# (par rapport à la fenêtre de temps) := 20.000000;
##### par rapport aux conflits potentiels
# durée maximale d'un conflit := 133.588745secondes;
# durée moyenne d'un conflit := 82.291759secondes;
# somme (totale) des
# durées de conflits := 493.750553secondes;
# nombre de conflits := 6;
# nombre de clusters (relatifs aux conflits) := 4;
##### par rapport aux rencontres potentielles
# angle (minimal) de croisement := 26.593802degres;
# temps (minimal) d'anticipation := 23.966310minutes;
# distance (minimale) d'anticipation := 164.568665NM;
# avion (plus petit temps d') anticipation := 7;
# nombre de rencontres potentielles := 18;
# nombre de clusters (relatifs aux rencontres) := 2;
###
param norm := 5
;
param tf := 1.000000
;
param N := 241
;
param j_min := 96
;
param j_max := 144
;
param nb_flights := 9
;
param v0 :=
0 400.000000
1 400.000000
2 400.000000
3 400.000000
4 400.000000
5 400.000000
6 400.000000
7 400.000000
8 400.000000
;
param xx0 :=
0 -200.000000
1 -153.208889
2 -34.729636

```

```

3 100.000000
4 187.938524
5 187.938524
6 100.000000
7 -34.729636
8 -153.208889
;
param xy0 :=
0 0.000000
1 -128.557522
2 -196.961551
3 -173.205081
4 -68.404029
5 68.404029
6 173.205081
7 196.961551
8 128.557522
;
param coefdirx :=
0 0.990830
1 0.853765
2 0.336466
3 -0.554855
4 -0.944646
5 -0.952623
6 -0.566649
7 0.123721
8 0.808429
;
param coefdiry :=
0 -0.135116
1 0.520659
2 0.941696
3 0.831947
4 0.328092
5 -0.304155
6 -0.823959
7 -0.992317
8 -0.588593
;
param vmin :=
0 376.000000
1 376.000000
2 376.000000
3 376.000000
4 376.000000
5 376.000000

```

```

6 376.000000
7 376.000000
8 376.000000
;
param vmax :=
0 412.000000
1 412.000000
2 412.000000
3 412.000000
4 412.000000
5 412.000000
6 412.000000
7 412.000000
8 412.000000
;
# liste des couples de
# rencontres potentielles
set RP :=
(0,1)
,(0,8)
,(1,8)
,(2,3)
,(2,8)
,(3,4)
,(3,5)
,(3,6)
,(3,7)
,(4,5)
,(4,6)
,(4,7)
,(5,6)
,(5,7)
,(5,8)
,(6,7)
,(6,8)
,(7,8)
;
# liste des couples
# de conflits potentiels
set CP :=
(0,8)
,(3,5)
,(3,6)
,(4,5)
,(6,8)
,(7,8)
;

```

Algorithme 1 : Exemple de fichier de données; code AMPL (.dat); problème à 9 avions

```

###
# Processing
# tell ampl to use the ipopt (or snopt) executable as a solver
  option solver ipopt;
# http://www.coin-or.org/Bonmin/option_pages/options_list_ipopt.html
# solver options (for convergence)
# ipopt options
  option ipopt_options 'max_cpu_time=1800 constr_viol_tol=0.000001
tol=0.000001';
  # option ipopt_options 'max_cpu_time 600';
  # option ipopt_options 'outlevel 1 timing 1';
  # option ipopt_options 'acceptable_compl_inf_tol ';
  # option ipopt_options 'acceptable_constr_viol_tol ';
  # option ipopt_options 'acceptable_dual_inf_tol ';
  # option ipopt_options 'acceptable_iter ';
  # option ipopt_options 'acceptable_obj_change_tol ';
  # option ipopt_options 'acceptable_tol ';
  # option ipopt_options 'compl_inf_tol ';
  # option ipopt_options 'constr_viol_tol ';
  # options ipopt_options 'diverging_iterates_tol ';
  # option ipopt_options 'dual_inf_tol ';
  # option ipopt_options 'tol ';
  # bound_relax_factor
# # # snopt options
  # option snopt_options 'Iterations_limit=2000
# minor_feasibility_tolerance=0.000001
# function_precision=0.000001 Major_print_level=1';
  # option snopt_options 'major_feasibility_tolerance=0.000001';
  # option snopt_options 'major_optimality_tolerance=0.000001';
  # option snopt_options 'function_precision=0.000001';
  # option snopt_options 'Print file 1';
  # option snopt_options 'major print level 1';
###
# consider the model
  model test.mod; ## model
# meta parameters
  let flag := 1; # 0 1 2 (solution approaches)
  let rho := 4; # 1 4 8 12 (discretization)
# load parameters
  data my_data; ## data
# initialization of variables ("good"? starting points)
# include sol_starting.point.run
###
/*

```

```

# ("switch", e.g., if there exists no prezone...)
if (jmin = 0)
  then {
    flag := 1;
  }
;
*/
# options AMPL
  option presolve 0; ## WITHOUT presolve
  # option pl_linearize 0;
  # option substout 0;
  # option show_stats 1;
  option solver_msg 1;
  # option presolve_eps 1.e-5;
  # option randseed 0;
  display _nvars;
  display _ncons;
# presolve informations
  option show_stats 1;
# solver informations
  option solver_msg 1;
# solve the problem
  solve; ## sol > sol.out
# print the solution (objective function)
  display obj*h; # scale
# computing time
  display _solve_time;
  display _ampl_time;
  display solve_message;
# display sep_inneglplus;
/*
# for a linear command: u = A * t + B
  if (flag = 2)
    then {
      display A;
      display B;
    }
;
# include constr_viol.run; ## checking
  display {j in 1.._nvars}{
    (_varname[j])
  };
  display {j in 1.._nvars}{
    (_var[j].sstatus)
  };

```

```

);
display {j in 1..ncons : _con[j].slack < -1.0e-8}{
  (_conname[j])
};
display {j in 1..ncons : _con[j].slack < -1.0e-8}{
  (_con[j].slack)
};
# solution variable
display U;
display v;
# resolution approach choice
# jc corresponds to the (correction time) discretization step
param jc{i in 0..n-1} default 0;
let {i in 0..n-1} jc[i] := max( 1, floor(tc[i]/h) );
display jc;
display tc;
display tstart;
# build the solution state variables
param v_top{i in 0..n-1, j in 1..N};
param xx_top{i in 0..n-1, j in 1..N};
param xy_top{i in 0..n-1, j in 1..N};
# version prezone
# given by applying the PMP
if (flag = 2)
then {
  let {i in 0..n-1} v_top[i,1] := v0[i];
  let {i in 0..n-1} xx_top[i,1] := xx0[i];
  let {i in 0..n-1} xy_top[i,1] := xy0[i];
  let {i in 0..n-1, j in 2..jc[i]} v_top[i,j] := A[i]*(1/2)*(j*h)^2
    + B[i]*(j*h) + v0[i];
  let {i in 0..n-1, j in 2..jc[i]} xx_top[i,j] :=
    A[i]*(1/6)*coefdirx[i]*(j*h)^3
    + B[i]*(1/2)*coefdirx[i]*(j*h)^2
    + v0[i]*coefdirx[i]*(j*h) + xx0[i];
  let {i in 0..n-1, j in 2..jc[i]} xy_top[i,j] :=
    A[i]*(1/6)*coefdiry[i]*(j*h)^3
    + B[i]*(1/2)*coefdiry[i]*(j*h)^2
    + v0[i]*coefdiry[i]*(j*h) + xy0[i];
  let {i in 0..n-1, j in jc[i]..jstart-1} v_top[i,j+1] := v_top[i,j];
  let {i in 0..n-1, j in jc[i]..jstart-1} xx_top[i,j+1] := xx_top[i,j]
    + h*coefdirx[i]*v_top[i,j];
  let {i in 0..n-1, j in jc[i]..jstart-1} xy_top[i,j+1] := xy_top[i,j]
    + h*coefdiry[i]*v_top[i,j];
}

```

```

;
# solution state variables during the zone:
if (flag = 2)
then {
  let {i in 0..n-1, j in 1..endd} v_top[i,j+jstart] := v[i,j];
  let {i in 0..n-1, j in 1..endd} xx_top[i,j+jstart] := xx[i,j];
  let {i in 0..n-1, j in 1..endd} xy_top[i,j+jstart] := xy[i,j];
}
;
# postzone
if (flag = 1)
then {
  let {i in 0..n-1, j in 1..endd} v_top[i,j] := v[i,j];
  let {i in 0..n-1, j in 1..endd} xx_top[i,j] := xx[i,j];
  let {i in 0..n-1, j in 1..endd} xy_top[i,j] := xy[i,j];
}
;
# uconstante and so on
param uconstante{i in 0..n-1} default 0;
if (flag >= 1)
then {
  let {i in 0..n-1} uconstante[i] := (v0[i]-v[i,endd])/((N-(jend))*h);
  let {i in 0..n-1, j in jend+1..N} v_top[i,j] :=
    ((j-N)*h)*uconstante[i] + v0[i];
  let {i in 0..n-1, j in jend+1..N} xx_top[i,j] :=
    uconstante[i]*coefdirx[i]*(1/2)*((j*h)^2)
    + (v0[i] - uconstante[i]*tf)*coefdirx[i]*(j*h)
    - (uconstante[i]*(jend-N)*h
    + v0[i])*coefdirx[i]*(jend*h)+xx[i,endd];
  let {i in 0..n-1, j in jend+1..N} xy_top[i,j] :=
    uconstante[i]*coefdiry[i]*(1/2)*((j*h)^2)
    + (v0[i] - uconstante[i]*tf)*coefdiry[i]*(j*h)
    - (uconstante[i]*(jend-N)*h
    + v0[i])*coefdiry[i]*(jend*h)+xy[i,endd];
}
;
# to build the command value
param U_top{i in 0..n-1, j in 1..N} default 0;
# version prezone
# given by applying the PMP
if (flag = 2)
then {
  let {i in 0..n-1, j in 1..jc[i]} U_top[i,j] := A[i]*(j*h) + B[i];
  let {i in 0..n-1, j in jc[i]..jstart-1} U_top[i,j] := 0;
}

```

```

        let {i in 0..n-1, j in 1..endd} U_top[i,j+jstart] := U[i,ceil(j/rho)];
        let {i in 0..n-1, j in jend+1..N} U_top[i,j] := uconstante[i];
    }
;
if (flag = 1)
then {
    let {i in 0..n-1, j in 1..endd} U_top[i,j] := U[i,ceil(j/rho)];
    let {i in 0..n-1, j in jend+1..N} U_top[i,j] := uconstante[i];
}
;
# print "state" informations
display uconstante;
display U_top;
display v_top;
display xx_top;
display xy_top;
# display flag;
display jstart;
display jend;
# print "constraints" informations
display sep_ineg2; # separation constraint (flag=2)
display sep_ineg1; # separation constraint (flag=1)
display tcorrect;
display acc_ub1;
display acc_ub2;
display acc_lb1;
display acc_lb2;
# v_moy corresponds to the velocity average
param v_moy{i in 0..n-1} default 0;
let {i in 0..n-1} v_moy[i] := sum {j in 1..N} v_top[i,j]/N;
# v_max corresponds to the velocity average
param v_maxi in 0..n-1 default 0;
let {i in 0..n-1} v_max[i] := max j in 1..N v_top[i,j];
# v_min corresponds to the velocity average
param v_min{i in 0..n-1} default 0;
let {i in 0..n-1} v_min[i] := min {j in 1..N} v_top[i,j];
# pv_moy corresponds to the velocity average
param pv_moy{i in 0..n-1} default 0;
let {i in 0..n-1} pv_moy[i] := (v_moy[i]/v0[i]) - 1)*100;
# pv_max corresponds to the velocity average
param pv_maxi in 0..n-1 default 0;
let {i in 0..n-1} pv_max[i] := (v_max[i]/v0[i]) - 1)*100;
# pv_min corresponds to the velocity average
param pv_min{i in 0..n-1} default 0;

```

```

    let {i in 0..n-1} pv_min[i] := (v_min[i]/v0[i]) - 1)*100;
# print velocity informations
display v_moy;
display v_max;
display v_min;
display pv_moy;
display pv_max;
display pv_min;
# result information
display solve_result;
display solve_message;
display solve_exitcode;
# to analyse the computational result
# display start;
display {j in 1.._ncons : _con[j].slack < -1.0e-8}(
    (_conname[j])
);
display {j in 1.._ncons : _con[j].slack < -1.0e-8}(
    (_con[j].slack)
);
display {j in 1.._nvars : _var[j].slack < 0.0}(
    (_varname[j])
);
display {j in 1.._nvars : _var[j].slack < 0.0}(
    (_var[j].slack)
);
display {j in 1.._ncons : _con[j].slack < -1.0e-8}(
    (_conname[j], _con[j].slack)
);
display {j in 1.._nvars : _var[j].slack < 0.0}(
    (_varname[j], _var[j].slack)
);
# the constraints
display {j in 1.._ncons}(
    _con[j].astatus,
    _con[j].body,
    _con[j].defvar,
    _con[j].derstage,
    _con[j].dinit,
    _con[j].dinit0,
    _con[j].dual,
    _con[j].ipopt_zL_out,
    _con[j].ipopt_zU_out,
    _con[j].lb,

```



```

_con[j].lbs,
_con[j].lbs1,
_con[j].lbs2,
_con[j].ldual,
_con[j].lslack,
_con[j].no,
_con[j].relax,
_con[j].slack,
_con[j].sno,
_con[j].sstatus,
_con[j].stage,
_con[j].status,
_con[j].ub,
_con[j].ubs,
_con[j].ubs1,
_con[j].ubs2,
_con[j].udual,
_con[j].uslack
#_conname[j],
#_con[j].down,
#_con[j].current,
#_con[j].up,
#_con[j]
);
# the variables
display {j in 1..nvars}{
_var.sstatus[j],
_varname[j],
_var[j].astatus,
_var[j].init,
_var[j].val,
_var[j].lb,

```

```

_var[j].ub,
#_var[j].down,
#_var[j].current,
#_var[j].up,
_var[j]
);
###
display U;
display v;
display xx;
display xy;
display A;
display B;
##
display U_top;
display v_top;
display tc;
display tstart;
display jc;
display jstart;
display jmin;
display jmax;
display jend;
display N;
display vmin;
display vmax;
# display solver_options
### # the prezone starting point variable values (U, v, xx, xy, A, B, tc).
# conv_snopt_sol_prezone.run; # conv. into "good" starting points, prezone)
###
*/

```

Algorithme 2 : Exemple de fichier d'exécution ; code AMPL (.run)

```

# Model
# (combination of methods:
# application of the PMP on prezone,
# two time discretization steps on zone,
# application of the PMP on postzone)
# *****
# data parameters
  param n >= 2;
  param norm >= 0;
  set F := {0..n-1}; # flights
  param vmin{i in F};
  param vmax{i in F};
  set RP within {F,F}; # « rencontres potentielles »
  set CP within {F,F}; # « conflits potentiels »
# solution approach choice
# flag = 0 for discretization on the whole time window (basic)
# version "basic"
# flag = 1 for discretization + appli PMP on postzone
# version "postzone"
# flag = 2 for appli PMP on prezone + discretization + appli PMP on postzone
# version "prezone"
  param flag >= 0;
# number of small discretization steps for the whole time window [t0, tf].
  param N >= 2;
  param tf >= 0;
# square of safety distance (separation norm)
  param Dsep := norm^2;
# small discretization step. To check all constraints: h = 15 seconds.
  param h := tf/(N-1); # = 1/240
# two discretization steps: "ratio" between them.
  param rho >= 1;
# to delimit the "zone" [t1, t2] -> [jmin, jmax] (with the discretization)
  param jmin >= 0;
  param jmax >= 0;
# initial aircraft states (velocity and position)
  param v0{0..n-1};
  param xx0{i in 0..n-1};
  param xy0{i in 0..n-1};
# aircraft trajectory directions (heading)
  param coefdirx{i in 0..n-1};
  param coefdiry{i in 0..n-1};
# to take into account the "big" discretization step,
# we use a larger interval than [jmin, jmax] : the interval [jstart, jend].
  param jstart := rho*floor(jmin/rho);

```

```

    param jend := rho*ceil(jmax/rho);
    param tstart := h*jstart;
# remark: 0 <= jstart <= jmin <= jmax <= jend <= N.
# number of "big" discretization steps for the acceleration control
# with flag=1 into "prezone and zone" / or with flag=2 into the "zone" only.
    param M default if (flag = 2) then ((jend-jstart)/rho) else if (flag = 1) then (jend/rho) else if (flag = 0) then ((N-1)/rho);
    param endd default M*rho;
# duration of "postzone"
# difference between N and jend (instead of difference between N and jmax)
    param rest default if (flag > 0) then (N-jend-1) else (N); # rest has to be nonzero (for flag=0, arbitrary nonzero)
# precision 10^-6
    param epsilon := 0.000001;
# parameter for the criterion if flag = 0 or flag > 0 (to take into account analytic solution the constante: "Upostzone")
    param activf default if (flag = 0) then (0) else (1); # else if (flag = 1) then (1) else if (flag = 2) then (1);
# *****
# variables
# the acceleration control
# with flag=1 "prezone and zone" / or with flag=2 "zone" only
    var U{i in 0..n-1, J in 1..M} >= -4000, <= 4000, default 0;
# state (velocity and position) (variables). AMPL: declarative language
    var v{i in 0..n-1, j in 1..endd+1} >= vmin[i], <= vmax[i], default v0[i];
    var xx{i in 0..n-1, j in 1..endd+1}, default xx0[i] + v0[i]*coefdirx[i]*((j-1)*h);
    var xy{i in 0..n-1, j in 1..endd+1}, default xy0[i] + v0[i]*coefdiry[i]*((j-1)*h);
# *****
# variables for solution approach within the "prezone"
# we want to consider the acceleration control (upravlenie)
# as linear "A[i]*t + B[i]" on [t0, tc] and trivial "0" on [tc, t1]
# with the discretization version, linear on [0, jc], trivial on [jc, jstart]
    var A{i in F};
    var B{i in F};
    var tc{i in F} default tstart;
# *****
# objective function
    minimize obj :
        (sum{i in 0..n-1} (tc[i]/h)*((A[i]*tc[i])^2)/3 + A[i]*B[i]*tc[i] + B[i]^2)) + # prezone
        rho*(sum{i in 0..n-1, J in 1..M} (U[i,J]^2)) + # zone
        rest*( sum{i in 0..n-1} ( (v0[i]-v[i,endd+1])/((N-jend-1)*h) )^2 ); # postzone
# *****
# definition of the "correction time": tc
subject to tcorrect {i in 0..n-1 : flag = 2} : tc[i] =
    if ( (A[i] <= epsilon) and (A[i] >= -epsilon) )
        # if A[i] = 0, case: u = B[i] and v = B[i]*t + v0[i].
        then (
            if (B[i] >= epsilon)

```

```

    # case: with constraint:  $v = (B[i]*t + v0[i]) \leq v_{max}[i]$ , case: vmax
    then (
      min( tstart, (vmax[i]-v0[i])/B[i] )
    )
  else if (B[i] <= -epsilon)
    # case: with constraint:  $v = (B[i]*t + v0[i]) \geq v_{min}[i]$ , case: vmin
    then (
      min( tstart, (vmin[i]-v0[i])/B[i] )
    )
  else (
    # case: A[i] = B[i] = u = 0, no speed changes.
    tstart
  )
)
)
else
(
  if ( (-B[i]/(A[i])) <= 0 )
  # case: with te <= 0
  then (
    if ( B[i] >= 0 )
    # case: v'(0) >= 0, case: vmax
    then (
      min(tstart,
        max( (-B[i]-sqrt( (B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmax[i])) ))/A[i] , (-B[i]+sqrt( (B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmax[i])) ))/A[i] )
      )
    )
    else (
      tstart
    )
  )
  else (
    # case: with te > 0
    if ( B[i] >= 0 )
    # case: v'(0) >= 0, case: vmax
    then (
      if ( -(B[i]^2)/(2*A[i]) + v0[i] > vmax[i] )
      then (
        if ((B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmax[i])) > 0)
        then (
          if ( (0 < (-B[i]-sqrt( (B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmax[i])) ))/A[i])
            and ((-B[i]-sqrt((B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmax[i]))))/A[i] < (-B[i]+sqrt((B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmax[i]))))/A[i]) )
          then (
            min(tstart, (-B[i]-sqrt( (B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmax[i])) ))/A[i])
          )
        )
      )
    )
  )
)
)

```

```

        else if ( 0 < (-B[i]+sqrt( B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmax[i])) ))/A[i] )
            then (
                min(tstart, (-B[i]+sqrt( B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmax[i])) ))/A[i])
            )
            else (
                tstart
            )
        )
    )
    else (
        tstart
    )
)
else (
    tstart
)
)
else (
    # case: v'(0) < 0, case: min
    if ( -(B[i]^2)/(2*A[i]) + v0[i] <= vmin[i] )
        then (
            if ((B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmin[i])) > 0)
                then (
                    if ( (0 < (-B[i]-sqrt( B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmin[i])) ))/A[i] )
                        and ((-B[i]-sqrt((B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmin[i]))))/A[i] < (-B[i]+sqrt((B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmin[i]))))/A[i] ) )
                            then (
                                min(tstart, (-B[i]-sqrt( B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmin[i])) ))/A[i])
                            )
                            else if ( 0 < (-B[i]+sqrt( B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmin[i])) ))/A[i] )
                                then (
                                    min(tstart, (-B[i]+sqrt( B[i]^2-2*A[i]*(v0[i]-vmin[i])) ))/A[i])
                                )
                                else (
                                    tstart
                                )
                            )
                    )
                else (
                    tstart
                )
            )
        )
    else (
        tstart
    )
)
)
)
)
)
)

```

```

)
;
# *****
# /* a posteriori (acceleration bounds on "prezone")
  subject to acc_lb1{i in 0..n-1 : flag = 2} : -(A[i]*tc[i]+B[i]) <= 4000;
  subject to acc_lb2{i in 0..n-1 : flag = 2} : -B[i] <= 4000;
  subject to acc_ub1{i in 0..n-1 : flag = 2} : (A[i]*tc[i]+B[i]) <= 4000;
  subject to acc_ub2{i in 0..n-1 : flag = 2} : B[i] <= 4000;
# */
# *****
# initialization (of the state variables) for the "2 steps discretization" period (flag = 2)
  subject to Evstart0 {i in 0..n-1 : flag = 2} : v[i,1] = (1/2)*A[i]*(tc[i])^2 + B[i]*(tc[i]) + v0[i];
  subject to Exxstart0 {i in 0..n-1 : flag = 2} : xx[i,1] =
    (1/6)*A[i]*coefdirx[i]*(tc[i])^3 + (1/2)*B[i]*coefdirx[i]*(tc[i])^2 + v0[i]*coefdirx[i]*(tc[i])
    + xx0[i] + v[i,1]*coefdirx[i]*(jstart*h-tc[i]);
  subject to Exystart0 {i in 0..n-1 : flag = 2} : xy[i,1] =
    (1/6)*A[i]*coefdiry[i]*(tc[i])^3 + (1/2)*B[i]*coefdiry[i]*(tc[i])^2 + v0[i]*coefdiry[i]*(tc[i])
    + xy0[i] + v[i,1]*coefdiry[i]*(jstart*h-tc[i]);
# *****
# initialization (of the state) for the "2 steps discretization" period (flag <= 1)
  subject to Evstart1 {i in 0..n-1 : flag <= 1} : v[i,1] = v0[i];
  subject to Exxstart1 {i in 0..n-1 : flag <= 1} : xx[i,1] = xx0[i];
  subject to Exystart1 {i in 0..n-1 : flag <= 1} : xy[i,1] = xy0[i];
# *****
/*
# ZONE approximation, 0(h^2) ***Heun's method***
# to build velocity
  subject to Evzone{i in 0..n-1, j in 1..endd-1} : v[i,j+1] = v[i,j] + h*(1/2)*(U[i,ceil(j/rho)] + U[i,ceil((j+1)/rho)]);
  subject to Evjend{i in 0..n-1} : v[i,endd+1] = v[i,endd] + h*(U[i,M]);
# to guarantee vend=v0 for flag =0.
  subject to Vend{i in 0..n-1 : flag = 0} : v[i,endd+1] = v0[i];
# to build position
  subject to Exxall{i in 0..n-1, j in 1..endd} : xx[i,j+1] = xx[i,j] + h*(1/2)*(v[i,j]+v[i,j+1])*coefdirx[i];
  subject to Exyall{i in 0..n-1, j in 1..endd} : xy[i,j+1] = xy[i,j] + h*(1/2)*(v[i,j]+v[i,j+1])*coefdiry[i];
*/
# ZONE approximation, 0(h^1) ***Euler's method***
# to build velocity
  subject to Evzone{i in 0..n-1, j in 1..endd} : v[i,j+1] = v[i,j] + h*U[i,ceil(j/rho)];
# to guarantee vend=v0 for flag =0.
  subject to Vend{i in 0..n-1 : flag = 0} : v[i,endd+1] = v0[i];
# to build position
  subject to Exxall{i in 0..n-1, j in 1..endd} : xx[i,j+1] = xx[i,j] + h*v[i,j]*coefdirx[i];
  subject to Exyall{i in 0..n-1, j in 1..endd} : xy[i,j+1] = xy[i,j] + h*v[i,j]*coefdiry[i];
# *****

```

```

# speed constraint (cf. ERASMUS project)
  subject to ineg_vinf1 {i in 0..n-1, j in 1..endd+1} : vmin[i]-v[i,j] <= 0;
  subject to ineg_vsup1 {i in 0..n-1, j in 1..endd+1} : v[i,j]-vmax[i] <= 0;
# acceleration constraint (cf. EUROCONTROL)
  subject to ub_contr {i in 0..n-1, J in 1..M} : U[i,J] <= 4000;
  subject to lb_contr {i in 0..n-1, J in 1..M} : -U[i,J] <= 4000;
# *****
# flag = 2, version "prezone"
  subject to sep_ineg2 {j in jmin-jstart+1..endd-jend+jmax, i1 in 0..n-2, i2 in i1+1..n-1 : (i1,i2) in RP and flag = 2} :
    Dsep -( (xx[i1,j]-xx[i2,j])^2 + (xy[i1,j]-xy[i2,j])^2 ) <= 0;
# flag = 1, version "postzone"
  subject to sep_ineg1 {j in jmin..jmax, i1 in 0..n-2, i2 in i1+1..n-1 : (i1,i2) in RP and flag = 1} :
    Dsep -( (xx[i1,j]-xx[i2,j])^2 + (xy[i1,j]-xy[i2,j])^2 ) <= 0;
# flag = 0, version "basic"
  subject to sep_ineg0 {j in 1..N, i1 in 0..n-2, i2 in i1+1..n-1 : flag = 0} :
    Dsep -( (xx[i1,j]-xx[i2,j])^2 + (xy[i1,j]-xy[i2,j])^2 ) <= 0;
# *****

```

Algorithme 3 : Exemple de fichier de modèle ; code AMPL (.mod) ; problème d'évitement de conflits aériens.

ANNEXE C

Instances pour le problème d'évitement de conflits aériens

Nous reportons ici les configurations aériennes (trajectoires prévues illustrées), les vitesses nominales, les positions initiales et les directions des avions relatives aux 30 instances du problème d'évitement de conflits aériens, présentées en Section 3.2, avec les caractéristiques supplémentaires indiquées dans le Tableau 3.3. Les valeurs numériques, pour les vitesses nominales (v^0), pour les positions initiales (x) et pour les directions (d), sont fournies avec une précision égale à 10^{-6} . Les 30 instances proposées sont des problèmes du type « cercle avec déviation ». Les avions sont disposés sur un cercle de rayon 200NM, et les positions initiales sont communes aux problèmes ayant le même nombre d'avions. Nous distinguons pour les vecteurs « positions » et « directions », leurs deux composantes, respectivement aux coordonnées cartésiennes, en précisant x^X, x^Y, d^X et d^Y . Les données sont présentées par nombre d'avions croissant, de 3 à 13, comme suit.

- Les positions initiales pour les instances à 3 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, 100.000000, 100.000000)^T, \quad x^Y = (0.000000, -173.205081, 173.205081)^T.$$

Instance « pb01 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.999523, -0.505861, -0.452817)^T, \quad d^Y = (-0.030871, 0.862615, -0.891603)^T.$$

Instance « pb02 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.998984, -0.561745, -0.441776)^T, \quad d^Y = (-0.045074, 0.827310, -0.897125)^T.$$

Instance « pb03 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = 0.996349, -0.427584, -0.451585)^T, \quad d^Y = (0.085371, 0.903976, -0.892228)^T.$$

- Les positions initiales pour les instances à 4 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, 0.000000, 200.000000, 0.000000)^T, \quad x^Y = (0.000000, -200.000000, 0.000000, 200.000000)^T.$$

Instance « pb04 »

$$v^0 = 436.273725, 412.769978, 443.366270, 407.585565)^T,$$

$$d^X = (0.994413, -0.144068, -0.999278, -0.068205)^T,$$

$$d^Y = (0.105563, 0.989568, 0.037996, -0.997671)^T.$$

Instance « pb05 »

$$v^0 = (421.179832, 436.304866, 408.735178, 419.543519)^T,$$

$$d^X = (0.995483, -0.014912, -0.998664, 0.108033)^T,$$

$$d^Y = (-0.094943, 0.999889, 0.051678, -0.994147)^T.$$

- Les positions initiales pour les instances à 5 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, -61.803399, 161.803399, 161.803399, -61.803399)^T,$$

$$x^Y = (0.000000, -190.211303, -117.557050, 117.557050, 190.211303)^T.$$

Instance « pb06 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$d^X = (0.985104, 0.398255, -0.877108, -0.868623, 0.389752)^T,$$

$$d^Y = (-0.171959, 0.917275, 0.480294, -0.495474, -0.920920)^T.$$

Instance « pb07 »

$$v^0 = (407.302413, 447.962401, 444.448064, 446.366664, 424.364415)^T,$$

$$d^X = (0.985104, 0.398255, -0.877108, -0.868623, 0.389752)^T,$$

$$d^Y = (-0.171959, 0.917275, 0.480294, -0.495474, -0.920920)^T.$$

– Les positions initiales pour les instances à 6 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, -100.000000, 100.000000, 200.000000, 100.000000, -100.000000)^T,$$

$$x^Y = (0.000000, -173.205081, -173.205081, 0.000000, 173.205081, 173.205081)^T.$$

Instance « pb08 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.998433, 0.522453, -0.522329, -0.999597, -0.649062, 0.669337)^T,$$

$$d^Y = (0.055965, 0.852668, 0.852744, 0.028403, -0.760736, -0.742959)^T.$$

Instance « pb09 »

$$v^0 = (410.174575, 417.028434, 402.892290, 403.278458, 437.240352, 439.773193)^T,$$

$$d^X = (0.999314, 0.696546, -0.458412, -0.999998, -0.361496, 0.413045)^T,$$

$$d^Y = (-0.037031, 0.717512, 0.888740, -0.001913, -0.932374, -0.910711)^T.$$

Instance « pb10 »

$$v^0 = (417.850875, 435.970837, 427.835677, 437.589800, 442.419059, 439.673656)^T,$$

$$d^X = (0.998315, 0.490447, -0.450535, -0.996839, -0.613951, 0.523521)^T,$$

$$d^Y = (0.058019, 0.871471, 0.892759, 0.079453, -0.789344, -0.852013)^T.$$

– Les positions initiales pour les instances à 7 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, -124.697960, 44.504187, 180.193774, 180.193774, 44.504187, -124.697960)^T,$$

$$x^Y = (0.000000, -156.366296, -194.985582, -86.776748, 86.776748, 194.985582, 156.366296)^T.$$

Instance « pb11 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.976901, 0.765264, -0.355681, -0.942825, -0.939649, -0.307509, 0.761086)^T,$$

$$d^Y = (-0.213695, 0.643717, 0.934608, 0.333287, -0.342141, -0.951545, -0.648651)^T.$$

Instance « pb12 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$d^X = (0.976901, 0.765264, -0.355681, -0.942825, -0.939649, -0.307509, 0.761086)^T,$$

$$d^Y = (-0.213695, 0.643717, 0.934608, 0.333287, -0.342141, -0.951545, -0.648651)^T.$$

Instance « pb13 »

$$v^0 = (435.162072, 443.062647, 444.271574, 411.717021, 445.314167, 421.426075, 434.244424)^T,$$

$$d^X = (0.997345, 0.570551, -0.202211, -0.834688, -0.962671, -0.359151, 0.538543)^T,$$

$$d^Y = (-0.072821, 0.821262, 0.979342, 0.550723, -0.270674, -0.933279, -0.842598)^T.$$

- Les positions initiales pour les instances à 8 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, -141.421356, 0.000000, 141.421356, 200.000000, 141.421356, 0.000000, -141.421356)^T,$$

$$x^Y = (0.000000, -141.421356, -200.000000, -141.421356, 0.000000, 141.421356, 200.000000, 141.421356)^T.$$

Instance « pb14 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.963674, 0.696939, 0.013651, -0.682218, -0.997677, -0.813108, -0.309046, 0.398496)^T,$$

$$d^Y = (-0.267082, 0.717130, 0.999907, 0.731148, -0.068120, -0.582113, -0.951047, -0.917170)^T.$$

Instance « pb15 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.971150, 0.878370, -0.230068, -0.892969, -0.999725, -0.717279, -0.689437, 0.825328)^T,$$

$$d^Y = (-0.238471, 0.477981, 0.973174, 0.450118, -0.023471, -0.696786, -0.724346, -0.564654)^T.$$

Instance « pb16 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.993813, 0.788640, 0.237225, -0.723375, -0.999610, -0.744006, -0.033634, 0.734854)^T,$$

$$d^Y = (-0.111064, 0.614855, 0.971455, 0.690456, 0.027940, -0.668173, -0.999434, -0.678226)^T.$$

- Les positions initiales pour les instances à 9 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, -153.208889, -34.729636, 100.000000,$$

$$187.938524, 187.938524, 100.000000, -34.729636, -153.208889)^T,$$

$$x^Y = (0.000000, -128.557522, -196.961551, -173.205081,$$

$$-68.404029, 68.404029, 173.205081, 196.961551, 128.557522)^T.$$

Instance « pb17 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.998785, 0.731683, 0.181545, -0.474480, -0.991923, -0.993251, -0.352334, 0.308362, 0.819204)^T,$$

$$d^Y = (0.049280, 0.681645, 0.983383, 0.880266, 0.126842, -0.115981, -0.935874, -0.951269, -0.573503)^T.$$

Instance « pb18 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$d^X = (0.998785, 0.731683, 0.181545, -0.474480, -0.991923, -0.993251, -0.352334, 0.308362, 0.819204)^T,$$

$$d^Y = (0.049280, 0.681645, 0.983383, 0.880266, 0.126842, -0.115981, -0.935874, -0.951269, -0.573503)^T.$$

Instance « pb19 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$d^X = (0.998785, 0.731683, 0.181545, -0.474480, -0.991923, -0.993251, -0.352334, 0.308362, 0.819204)^T,$$

$$d^Y = (0.049280, 0.681645, 0.983383, 0.880266, 0.126842, -0.115981, -0.935874, -0.951269, -0.573503)^T.$$

- Les positions initiales pour les instances à 10 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, -161.803399, -61.803399, 61.803399, 161.803399,$$

$$200.000000, 161.803399, 61.803399, -61.803399, -161.803399)^T,$$

$$x^Y = (0.000000, -117.557050, -190.211303, -190.211303, -117.557050,$$

$$0.000000, 117.557050, 190.211303, 190.211303, 117.557050)^T.$$

Instance « pb20 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$d^X = (0.715969, 0.417317, 0.337450, -0.409147, -0.992208, -0.707414, -0.993497, -0.250602, 0.833473, 0.748130)^T,$$

$$d^Y = (-0.698132, 0.908761, 0.941343, 0.912469, -0.124595, 0.706799, -0.113860, -0.968090, -0.552561, -0.663552)^T.$$

Instance « pb21 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$d^X = (0.715969, 0.417317, 0.337450, -0.409147, -0.992208, -0.707414, -0.993497, -0.250602, 0.833473, 0.748130)^T,$$

$$d^Y = (-0.698132, 0.908761, 0.941343, 0.912469, -0.124595, 0.706799, -0.113860, -0.968090, -0.552561, -0.663552)^T.$$

Instance « pb22 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.715969, 0.417317, 0.337450, -0.409147, -0.992208, -0.707414, -0.993497, -0.250602, 0.833473, 0.748130)^T,$$

$$d^Y = (-0.698132, 0.908761, 0.941343, 0.912469, -0.124595, 0.706799, -0.113860, -0.968090, -0.552561, -0.663552)^T.$$

- Les positions initiales pour les instances à 11 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, -168.250707, -83.083003, 28.462968, 130.972147,$$

$$191.898595, 191.898595, 130.972147, 28.462968, -83.083003, -168.250707)^T,$$

$$x^Y = (0.000000, -108.128163, -181.926399, -197.964288, -151.149915,$$

$$-56.346511, 56.346511, 151.149915, 197.964288, 181.926399, 108.128163)^T.$$

Instance « pb23 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.972256, 0.618181, 0.416683, -0.206782, -0.750782, -0.979401,$$

$$-0.947763, -0.692501, -0.494646, 0.042938, 0.977682)^T,$$

$$d^Y = (-0.233920, 0.786036, 0.909052, 0.978387, 0.660550, 0.201924,$$

$$-0.318975, -0.721417, -0.869094, -0.999078, -0.210089)^T.$$

Instance « pb24 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = (0.922580, 0.840349, -0.001274, -0.094975, -0.295308, -0.998499,$$

$$-0.983578, -0.502525, -0.591343, 0.237369, 0.998433)^T,$$

$$d^Y = (0.385805, 0.542046, 0.999999, 0.995480, 0.955402, 0.054775,$$

$$-0.180484, -0.864563, -0.806420, -0.971419, -0.055967)^T.$$

Instance « pb25 »

$$v^0 = (424.779735, 413.319821, 444.129512, 419.445082, 449.739808, 449.745936,$$

$$418.227162, 407.228475, 438.326374, 444.816498, 430.201397)^T,$$

$$d^X = (0.956208, 0.952337, 0.000738, -0.116826, -0.757186, -0.981834,$$

$$-0.929024, -0.678092, 0.088233, 0.052104, 0.945828)^T,$$

$$d^Y = (0.292688, 0.305048, 1.000000, 0.993152, 0.653199, 0.189743,$$

$$-0.370020, -0.734977, -0.996100, -0.998642, -0.324667)^T.$$

- Les positions initiales pour les instances à 12 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, -173.205081, -100.000000, -0.000000, 100.000000, 173.205081,$$

$$200.000000, 173.205081, 100.000000, 0.000000, -100.000000, -173.205081)^T,$$

$$x^Y = (0.000000, -100.000000, -173.205081, -200.000000, -173.205081, -100.000000,$$

$$0.000000, 100.000000, 173.205081, 200.000000, 173.205081, 100.000000)^T.$$

Instance « pb26 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 400 NM/h.

$$d^X = 0.995534, 0.876777, 0.520724, -0.048016, -0.034887, -0.965038,$$

$$-0.978551, -0.824665, -0.323019, 0.180039, 0.864931, 0.543105)^T,$$

$$d^Y = (-0.094399, 0.480896, 0.853725, 0.998847, 0.999391, 0.262109,$$

$$0.206006, -0.565621, -0.946393, -0.983659, -0.501891, -0.839665)^T.$$

Instance « pb27 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$d^X = (0.946607, 0.957882, 0.763958, -0.092049, -0.049774, -0.999988, \\ -0.987687, -0.830892, -0.494825, -0.045652, 0.362242, 0.792230)^T, \\ d^Y = (0.322390, 0.287162, 0.645266, 0.995754, 0.998760, 0.004905, \\ -0.156440, -0.556434, -0.868992, -0.998957, -0.932084, -0.610222)^T.$$

Instance « pb28 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$d^X = (0.995534, 0.876777, 0.520724, -0.048016, -0.034887, -0.965038, \\ -0.978551, -0.824665, -0.323019, 0.180039, 0.864931, 0.543105)^T, \\ d^Y = (-0.094399, 0.480896, 0.853725, 0.998847, 0.999391, 0.262109, 0.206006, \\ -0.565621, -0.946393, -0.983659, -0.501891, -0.839665)^T.$$

- Les positions initiales pour les instances à 13 avions sont les suivantes.

$$x^X = (-200.000000, -177.091205, -113.612949, -24.107336, 70.920977, 149.702150, \\ 194.188363, 194.188363, 149.702150, 70.920977, -24.107336, -113.612949, -177.091205)^T, \\ x^Y = (0.000000, -92.944634, -164.596773, -198.541775, -187.003249, -132.624532, \\ -47.863133, 47.863133, 132.624532, 187.003249, 198.541775, 164.596773, 92.944634)^T.$$

Instance « pb29 »

$$v^0 = (443.460669, 423.427051, 433.326911, 449.943976, 412.753099, 404.386733, \\ 407.653257, 405.168548, 416.004453, 408.627574, 401.770874, 421.351928, 445.390355)^T, \\ d^X = 0.914535, 0.897488, 0.700085, -0.098843, -0.137991, -0.936542, \\ -0.778864, -0.936374, -0.760360, -0.406291, -0.015982, 0.160654, 0.999501)^T, \\ d^Y = (-0.404507, 0.441039, 0.714059, 0.995103, 0.990434, 0.350556, \\ 0.627193, -0.351003, -0.649502, -0.913744, -0.999872, -0.987011, -0.031577)^T.$$

Instance « pb30 » Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$d^X = (0.996994, 0.904890, 0.598485, 0.073686, -0.712305, -0.900646, \\ -0.860899, -0.739159, -0.492070, -0.188438, 0.588952, 0.823043, 0.577455)^T, \\ d^Y = (-0.077473, 0.425645, 0.801134, 0.997281, 0.701870, 0.434553, \\ 0.508776, -0.673531, -0.870555, -0.982085, -0.808168, -0.567980, -0.816422)^T.$$

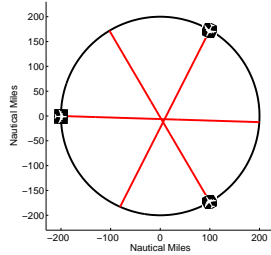


Figure C.1 – Évitement à 3 avions (pb01)

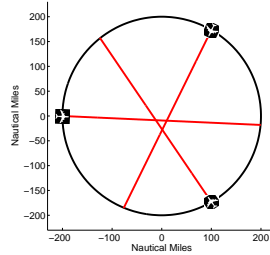


Figure C.2 – Évitement à 3 avions (pb02)

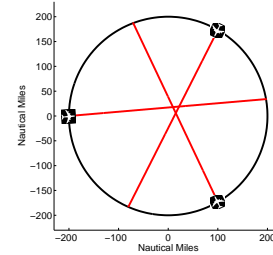


Figure C.3 – Évitement à 3 avions (pb03)

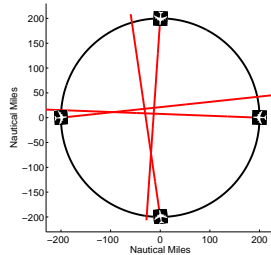


Figure C.4 – Évitement à 4 avions (pb04)

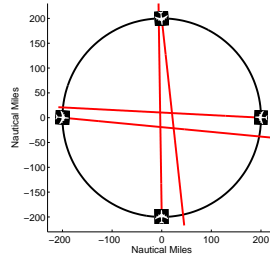


Figure C.5 – Évitement à 4 avions (pb05)

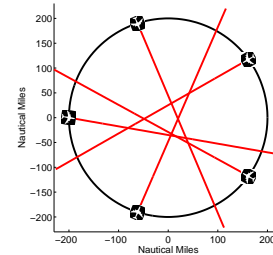


Figure C.6 – Évitement à 5 avions (pb06)

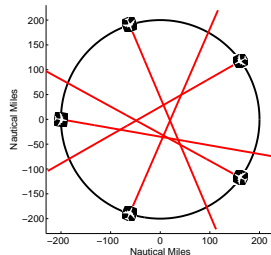


Figure C.7 – Évitement à 5 avions (pb07)

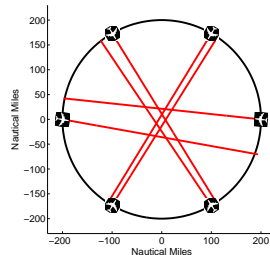


Figure C.8 – Évitement à 6 avions (pb08)

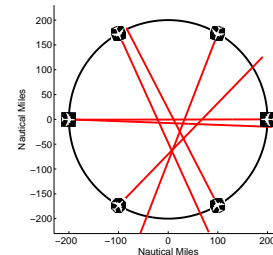


Figure C.9 – Évitement à 6 avions (pb09)

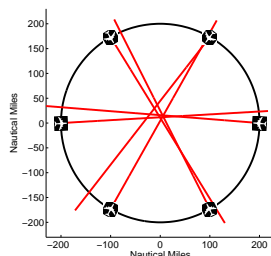


Figure C.10 – Évitement à 6 avions (pb10)

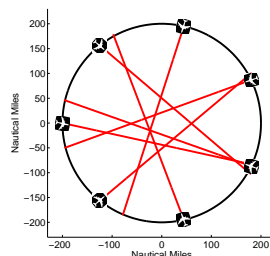


Figure C.11 – Évitement à 7 avions (pb11)

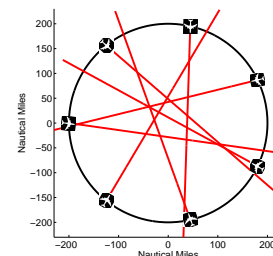


Figure C.12 – Évitement à 7 avions (pb12)

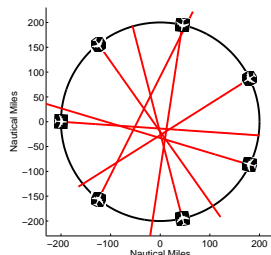


Figure C.13 – Évitement à 7 avions (pb13)

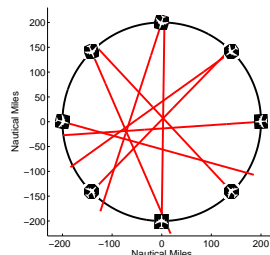


Figure C.14 – Évitement à 8 avions (pb14)

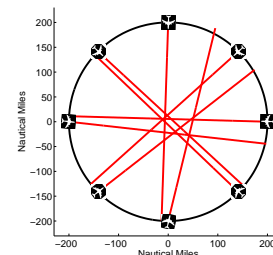


Figure C.15 – Évitement à 8 avions (pb15)

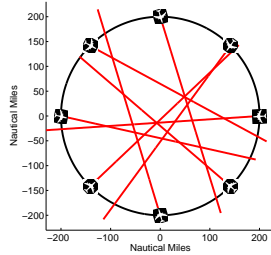


Figure C.16 – Évitement à 8 avions (pb16)

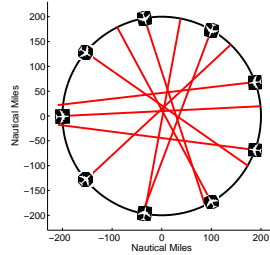


Figure C.17 – Évitement à 9 avions (pb17)

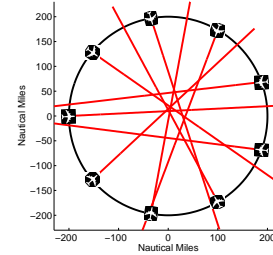


Figure C.18 – Évitement à 9 avions (pb18)

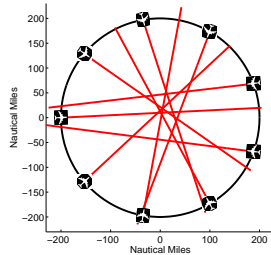


Figure C.19 – Évitement à 9 avions (pb19)

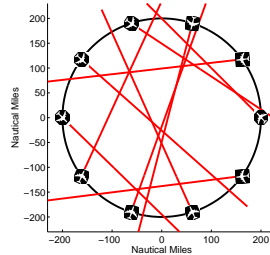


Figure C.20 – Évitement à 10 avions (pb20)

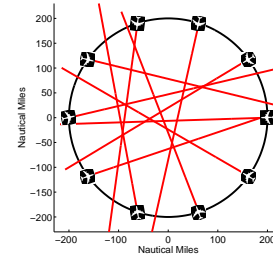


Figure C.21 – Évitement à 10 avions (pb21)

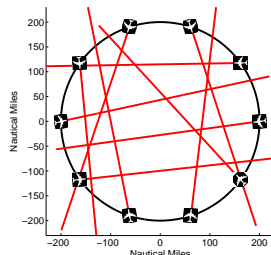


Figure C.22 – Évitement à 10 avions (pb22)

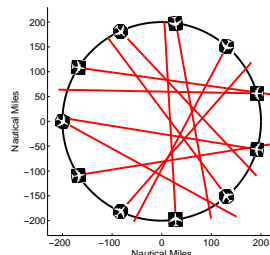


Figure C.23 – Évitement à 11 avions (pb23)

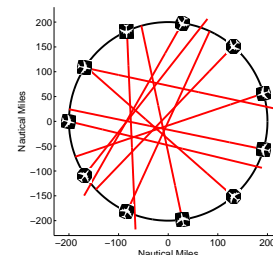


Figure C.24 – Évitement à 11 avions (pb24)

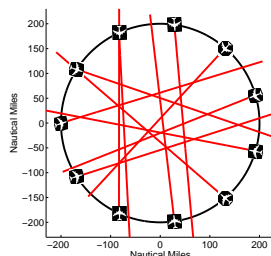


Figure C.25 – Évitement à 11 avions (pb25)

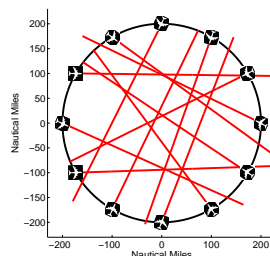


Figure C.26 – Évitement à 12 avions (pb26)

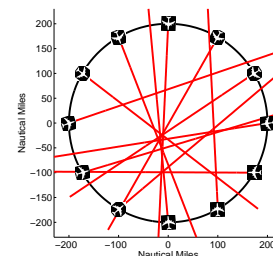


Figure C.27 – Évitement à 12 avions (pb27)

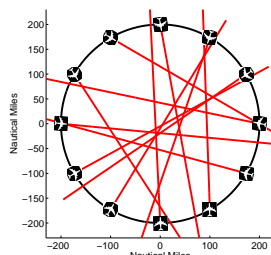


Figure C.28 – Évitement à 12 avions (pb28)

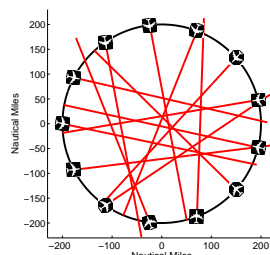


Figure C.29 – Évitement à 13 avions (pb29)

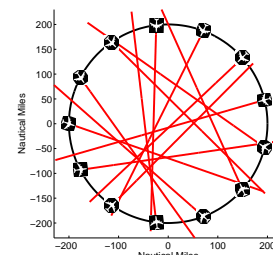


Figure C.30 – Évitement à 13 avions (pb30)

Instances supplémentaires : méthode du PMP et partitionnement (clustering)

Nous reportons ici les configurations aériennes (trajectoires prévues illustrées), les vitesses nominales, les positions initiales et les directions des avions relatives aux 8 instances du problème d'évitement de conflits aériens, présentées en Section 3.3.2, avec les caractéristiques supplémentaires indiquées dans le Tableau 3.7. Les valeurs numériques, pour les vitesses nominales (v^0), pour les positions initiales (x) et pour les directions (d), sont fournies avec une précision égale à 10^{-6} . Nous distinguons pour les vecteurs « positions » et « directions », leurs deux composantes, respectivement aux coordonnées cartésiennes, en précisant x^X, x^Y, d^X et d^Y .

Les 5 premières instances proposées, à 10 avions, sont des problèmes du type « cercle avec déviation ». Les avions sont disposés sur un cercle de rayon 200NM, et les positions initiales sont communes aux problèmes ayant le même nombre d'avions. Les positions initiales pour les instances à 10 avions sont les suivantes.

$$\begin{aligned} x^X &= (200,000000, 161.803000, 61.803400, -61.803300, -161.803000, \\ &\quad -200,000000, -161.803000, -61.803600, 61.803200, 161.803000)^T, \\ x^Y &= (0,000000, 117.557000, 190.211000, 190.211000, 117.557000, \\ &\quad 0.000130718, -117.557000, -190.211000, -190.211000, -117.557000)^T. \end{aligned}$$

Instance « pb31 »

$$\begin{aligned} v^0 &= (445.796000, 427.282200, 427.908600, 432.337500, 442.319700, \\ &\quad 416.217800, 415.039300, 413.624500, 426.080800, 422.257900)^T, \\ d^X &= (-0.993534, -0.421763, 0.191128, 0.596161, 0.752211, \\ &\quad 0.894576, 0.719986, 0.436569, -0.396883, -0.674818,)^T, \\ d^Y &= (0.113448, -0.906706, -0.981565, -0.802865, -0.658922, \\ &\quad 0.446916, 0.693989, 0.899671, 0.917869, 0.737984)^T. \end{aligned}$$

Instance « pb32 »

$$\begin{aligned} v^0 &= (431.205700, 449.506200, 429.007100, 412.316500, 410.306400, \\ &\quad 404.002100, 407.763900, 431.612400, 418.959900, 413.436100)^T, \\ d^X &= (-0.977589, -0.948412, -0.493830, 0.156367, 0.422961, \\ &\quad 0.998478, 0.586703, 0.410390, -0.181999, -0.642777)^T, \\ d^Y &= (-0.210520, -0.317040, -0.869558, -0.987699, -0.906148, \\ &\quad -0.055157, 0.809802, 0.911910, 0.983299, 0.766053)^T. \end{aligned}$$

Instance « pb33 »

$$\begin{aligned} v^0 &= (408.094100, 449.018000, 415.936100, 431.025900, 408.410200, \\ &\quad 424.859400, 414.526400, 428.555400, 434.769100, 440.517300)^T, \\ d^X &= (-0.948918, -0.425477, -0.107382, 0.267224, 0.965696, \\ &\quad 0.876436, 0.727782, 0.637448, 0.056152, -0.747651)^T, \\ d^Y &= (-0.315523, -0.904969, -0.994218, -0.963634, -0.259675, \\ &\quad -0.481517, 0.685809, 0.770493, 0.998422, 0.664091)^T. \end{aligned}$$

Instance « pb34 »

$$\begin{aligned} v^0 &= (419.573000, 449.212000, 449.182300, 440.496300, 420.654100, \\ &\quad 447.120900, 431.621600, 418.427400, 414.118300, 415.366500)^T, \\ d^X &= (-0.906656, -0.780014, -0.250589, 0.450934, 0.964939, \\ &\quad 0.983141, 0.913205, 0.524716, -0.330486, -0.773927)^T, \\ d^Y &= (-0.421870, -0.625761, -0.968093, -0.892558, -0.262474, \\ &\quad -0.182851, 0.407500, 0.851277, 0.943811, 0.633275)^T. \end{aligned}$$

Instance « pb35 »

$$\begin{aligned}
v^0 &= (403.2882, 436.7775, 441.9850, 406.3572, 438.1060, \\
&\quad 417.7084, 401.6556, 416.7534, 406.4809, 449.5036)^T, \\
d^X &= (-0.998016, -0.699708, -0.119304, 0.439831, 0.869560, \\
&\quad 0.995406, 0.517804, -0.188877, -0.462150, -0.841697)^T, \\
d^Y &= (-0.062966, -0.714429, -0.992858, -0.898080, -0.493827, \\
&\quad -0.095738, 0.855499, 0.982001, 0.886802, 0.539950)^T.
\end{aligned}$$

Les positions initiales pour les instances à 8 avions sont les suivantes.

$$\begin{aligned}
x^X &= (50, 000000, 50, 000000, 266, 000000, 266, 000000, \\
&\quad 482, 000000, 482, 000000, 698, 000000, 698, 000000)^T, \\
x^Y &= (-158, 000000, 158, 000000, -158, 000000, 158, 000000, \\
&\quad -158, 000000, 158, 000000, -158, 000000, 158, 000000)^T.
\end{aligned}$$

Instance « pb36 »

Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$\begin{aligned}
d^X &= (0.760249, 0.760249, 0.760249, 0.760249, \\
&\quad 0.760249, 0.760249, 0.760249, 0.760249)^T, \\
d^Y &= (0.649632, -0.649632, 0.649632, -0.649632, \\
&\quad 0.649632, -0.649632, 0.649632, -0.649632)^T.
\end{aligned}$$

Les positions initiales pour les instances à 10 avions sont les suivantes.

$$\begin{aligned}
x^X &= (50, 000000, 50, 000000, 266, 000000, 266, 000000, 482, 000000, \\
&\quad 482, 000000, 698, 000000, 698, 000000, 914, 000000, 914, 000000)^T, \\
x^Y &= (-158, 000000, 158, 000000, -158, 000000, 158, 000000, -158, 000000, \\
&\quad 158, 000000, -158, 000000, 158, 000000, -158, 000000, 158, 000000)^T.
\end{aligned}$$

Instance « pb37 »

Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$\begin{aligned}
d^X &= (0.760249, 0.760249, 0.760249, 0.760249, 0.760249, \\
&\quad 0.760249, 0.760249, 0.760249, 0.760249, 0.760249)^T, \\
d^Y &= (0.649632, -0.649632, 0.649632, -0.649632, 0.649632, \\
&\quad -0.649632, 0.649632, -0.649632, 0.649632, -0.649632)^T.
\end{aligned}$$

Instance « pb38 »

Les vitesses nominales, pour cette instance, sont toutes égales à : 447 NM/h.

$$\begin{aligned}
d^X &= (0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100, \\
&\quad 0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100)^T, \\
d^Y &= (0.707100, -0.707100, 0.707100, -0.707100, 0.707100, \\
&\quad -0.707100, 0.707100, -0.707100, 0.707100, -0.707100)^T.
\end{aligned}$$

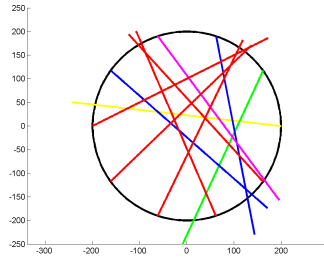


Figure C.31 – Évitement à 10 avions (pb31)

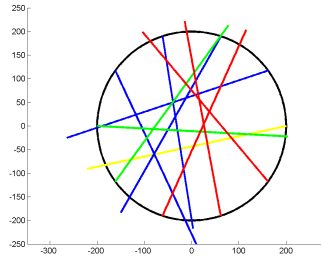


Figure C.32 – Évitement à 10 avions (pb32)

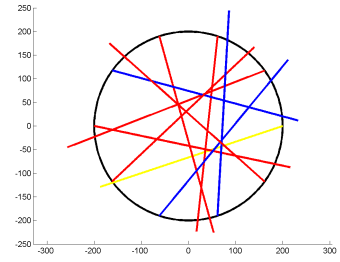


Figure C.33 – Évitement à 10 avions (pb33)

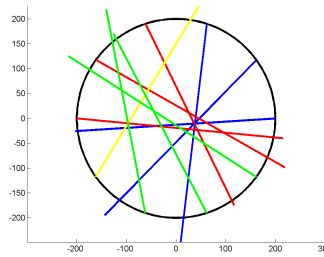


Figure C.34 – Évitement à 10 avions (pb34)

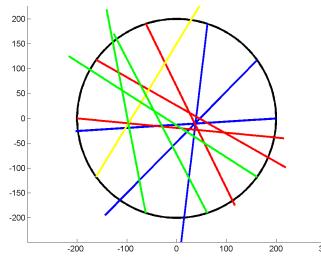


Figure C.35 – Évitement à 10 avions (pb35)

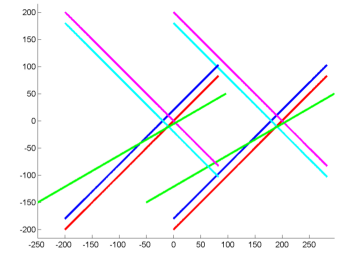


Figure C.36 – Évitement à 10 avions (pb38)

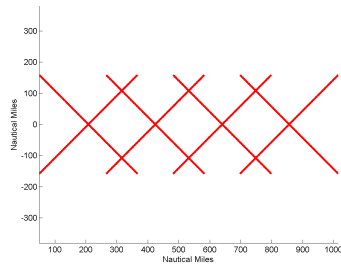


Figure C.37 – Évitement à 8 avions (pb36), même motif répété pour l'évitement à 10 avions (pb37)

Instances supplémentaires : méthode du PMP et comparaison de solveurs

Instance « pb41 » Les vitesses nominales, pour les sept avions, sont égales à : 447 NM/h.

$$x^X = (-200.000000, -200.000000, -200.000000, -200.000000, -30.000000, -10.000000, 10.000000)^T,$$

$$x^Y = (30.000000, 10.000000, -10.000000, -30.000000, -200.000000, -200.000000, -200.000000)^T,$$

$$d^X = (1.000000, 1.000000, 1.000000, 1.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000)^T,$$

$$d^Y = (0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000, 1.000000, 1.000000, 1.000000)^T.$$

Instance « pb42 » Les vitesses nominales, pour les sept avions, sont égales à : 447 NM/h.

$$x^X = (-200.000000, -200.000000, -200.000000, -200.000000, -30.000000, -10.000000, 10.000000, 30.000000)^T,$$

$$x^Y = (30.000000, 10.000000, -10.000000, -30.000000, -200.000000, -200.000000, -200.000000, -200.000000)^T,$$

$$d^X = (1.000000, 1.000000, 1.000000, 1.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000)^T,$$

$$d^Y = (0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000, 1.000000, 1.000000, 1.000000, 1.000000)^T.$$

Instance « pb43 » Les vitesses nominales, pour les neuf avions, sont égales à : 447 NM/h.

$$x^X = (-200.000000, -200.000000, -200.000000, -200.000000, -30.000000, -10.000000, 10.000000, 30.000000, -141.420000)^T,$$

$$x^Y = (30.000000, 10.000000, -10.000000, -30.000000, -200.000000, -200.000000, -200.000000, -200.000000, -141.420000)^T,$$

$$d^X = (1.000000, 1.000000, 1.000000, 1.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.707100)^T,$$

$$d^Y = (0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000, 1.000000, 1.000000, 1.000000, 1.000000, 0.707100)^T.$$

Instance « pb44 » Les vitesses nominales, pour les six avions, sont égales à : 447 NM/h.

$$x^X = (50.000000, 50.000000, 266.000000, 266.000000, 482.000000, 482.000000)^T,$$

$$x^Y = (-158.000000, 158.000000, -158.000000, 158.000000, -158.000000, 158.000000)^T,$$

$$d^X = (0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100)^T,$$

$$d^Y = (0.707100, -0.707100, 0.707100, -0.707100, 0.707100, -0.707100)^T.$$

Instance « pb45 » Les vitesses nominales, pour les huit avions, sont égales à : 447 NM/h.

$$x^X = (50.000000, 50.000000, 266.000000, 266.000000, 482.000000, 482.000000, 698.000000, 698.000000)^T,$$

$$x^Y = (-158.000000, 158.000000, -158.000000, 158.000000, -158.000000, 158.000000, -158.000000, 158.000000)^T,$$

$$d^X = (0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100)^T,$$

$$d^Y = (0.707100, -0.707100, 0.707100, -0.707100, 0.707100, -0.707100, 0.707100, -0.707100)^T.$$

Instance « pb46 » Les vitesses nominales, pour les cinq avions sont égales à : 447 NM/h.

$$x^X = (0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000, -50.000000)^T,$$

$$x^Y = (-200.000000, -180.000000, 180.000000, 200.000000, -150.000000)^T,$$

$$d^X = (0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.707100, 0.866000)^T,$$

$$d^Y = (0.707100, 0.707100, -0.707100, -0.707100, 0.500000)^T.$$

Instance « pb47 » Les vitesses nominales, pour les deux avions sont égales à : 447 NM/h.

$$x^X = (0.000000, 20.100000)^T, \quad x^Y = (150.000000, 75.000000)^T,$$

$$d^X = (1.000000, 0.866000)^T, \quad d^Y = (0.000000, 0.500000)^T.$$

Index

- A*
- Algorithme(s)
 - de résolution 44, 135
 - évolutionnaires 36
 - Application(s)
 - du contrôle optimal 38
 - du PMP 62, 67
 - Arc(s)
 - bang 48
 - frontière 48
 - régulier 48
 - singulier 48
- B*
- Changement(s)
 - en altitude 22
 - en cap 22
 - en vitesse 22
 - Code
 - en AMPL 135
 - Complexité
 - du problème 59
 - indicateurs de 92
 - théorie de la 31
 - Condition(s)
 - aux limites 42
 - de régularité 39
 - de transversalité 65
 - initiales 39
 - terminales 39
 - Conflit
 - aérien 20
 - aérien potentiel 21
 - Contrainte(s)
 - sur l'état 39, 57
 - sur le contrôle 39
 - Contrôle
 - admissible 41
 - contrainte sur le 39
 - de la circulation aérienne 18
 - méthodes de 44
 - modèle de 38
 - optimal 39
 - problème de 39
 - variable de 38
 - Contrôleur(s)
 - aériens 19
 - organique 133, 134
 - radariste 133, 134
 - Courbe(s)
 - d'accélération optimales 88
 - de vitesses optimales 98
- C*
- Coût
 - courant 40
 - fonction de 40
 - minimal 40
 - terminal 40
- D*
- Décomposition
 - en sous-ensembles d'avions 59
 - en zones 59, 60
 - Discrétisation
 - en différents pas de temps 72, 86
 - totale ou partielle du problème 47
- E*
- Équation(s)
 - d'états 65
 - de co-états 65
 - de la dynamique 54
 - différentielles ordinaires 56
 - du système contrôlé 56
 - extrémales 42
- F*
- Fichier
 - d'exécution (.run) 135
 - de données (.dat) 135
 - de modèle (.mod) 135
 - Filtre
 - pré-tactique 19
 - stratégique 19
 - tactique 20, 55
 - temps réel 20
 - Fonction
 - objectif 40
 - Formulation
 - de Bolza 40
 - de Lagrange 40, 57
 - de Mayer 40
- H*
- Hamiltonien 41, 64, 69
- I*
- Instance(s)
 - caractéristiques des 96
 - de type cercle 93
 - de type cercle avec déviation 93
 - exemple d' 135

- génération d' 93
 Intégrateur(s) numérique(s)
 de type Euler 73
 de type Heun 73
 de type Runge-Kutta 73
 Interprétation
 spatiale 59
 temporelle 60
- M*
- Méthode(s)
 du PMP en postzone 62
 du PMP en prézone 67
 en commande prédictive 45
 globales 45
 numériques directes 45
 numériques en contrôle optimal 45
 numériques indirectes 48
 numériques locales déterministes 45
 Modèle
 de contrôle optimal 55
 point-masse BADA 33
- N*
- Nautique 20
- P*
- Phase
 en approche 132
 en-route 132
 Plan de vol 25
 Planification de trajectoires 31, 34
 Postzone
 définition de la 62
 méthode du PMP en 62
 Prézone
 définition de la 62
 méthode du PMP en 67
 Principe
 du maximum de Pontryagin 41
 Problème
 autonome 41
 d'évitement de conflits aériens 21
 de contrôlabilité 37
 de contrôle optimal 38, 39, 55
 non-autonome 41
 Programmation
 en nombres entiers 31
 non linéaire 74
 Projet en gestion de trafic aérien
 ERASMUS 25
 NEXTGEN 131
 SESAR 131
- R*
- Régulation
 en vitesse 24
 subliminale 24
 Rencontre(s) potentielle(s)
 définition de 58
- détection et détermination de 54
 Rencontre(s) potentielle(s)
 sous-ensembles d'avions en 59
 Résolution
 centralisée 32
 décentralisée 32
- S*
- Secteur
 aérien 133
 capacité d'un 133
 Séparation
 étude de la 29
 contraintes de 55
 manœuvres de 22
 normes de 21
 Solveur
 de programmation non linéaire 99
 de type point-intérieur 99
 de type prog. quadr. séquentielle 99
 Sous-ensemble(s) d'avions
 en conflits potentiels 59
 en rencontres potentielles 58
 Système
 contrôlé 39
 différentiel 39
 dynamique 39
- T*
- Temps final
 fixé 40
 libre 40
 Trajectoire(s)
 définition de la 19
 planification de 34
- V*
- Variation(s)
 en vitesse 24
 subliminales 23
 Vecteur(s)
 d'états 56
 de co-états/adjoints 64, 69
 de forces 33
 de position 56
 de vitesse 56
 Vitesse
 changement en 22
 indiquée 57
 linéaire 34
 nominale 25
 régulation en 23
 relative 35
 sol 57
- Z*
- Zone(s)
 décomposition en 59, 60
 définition de la 62
 spatiale 59
 temporelle 60

Titre :

ÉVITEMENT DE CONFLITS AÉRIENS PAR UNE RÉGULATION SUBLIMINALE EN VITESSE :
MODÉLISATION & RÉOLUTION VIA LE CONTRÔLE OPTIMAL

Résumé :

À travers une approche de contrôle optimal, cette thèse de doctorat propose une étude des modèles et des techniques de résolution dans un domaine d'application propre à la gestion du trafic aérien. Motivés par la croissance des flux aériens d'une part, et les développements en théorie du contrôle optimal d'autre part, ces travaux portent sur l'analyse du problème d'évitement de conflits aériens. Cette étude permet le développement de nouvelles approches et algorithmes en vue d'aider les contrôleurs aériens dans leur tâche. Ainsi, dans le cadre du trafic aérien, afin de préserver des distances minimales de sécurité entre avions, lors de phases tactiques et de configurations des vols en-route, notre recherche se focalise sur une stratégie de régulation subliminale en vitesse (variations très réduites), pour assurer la séparation entre avions, tout en conservant leur trajectoire prédéfinie. D'une part, une méthode de résolution numérique en contrôle optimal telle que la méthode directe de tir, impliquant une discrétisation totale ou partielle du problème, transforme le problème initial en un problème en programmation non linéaire de grande taille. Ce type de méthodes peut générer des problèmes d'optimisation de grande taille numériquement difficiles à résoudre. Suivant le nombre de variables du problème, elles peuvent s'avérer trop coûteuse en termes de temps de calculs. D'autre part, les contraintes sur les variables d'états du problème posent des difficultés de résolution, par exemple, pour l'usage d'une méthode numérique indirecte de tir. Développant les informations caractéristiques des conflits aériens, une détection et une détermination a priori des zones de conflits permettent alors la décomposition du problème présenté de contrôle optimal en sous-problèmes plus aisés à résoudre. La résolution des sous-problèmes hors-zones peut être abordée en utilisant les conditions du principe du maximum de Pontryagin, ce qui en permet une résolution efficace. Une combinaison de méthodes numériques directes de tir et d'application des conditions du principe du maximum de Pontryagin est proposée, et des implémentations numériques valident ce type d'approche.

Mots-clefs :

Contrôle optimal, principe du maximum de Pontryagin, méthodes numériques de tir, optimisation non linéaire, recherche opérationnelle, aide à la décision, gestion du trafic aérien, problème d'évitement de conflits aériens, régulation en vitesse, modélisation mathématique, systèmes dynamiques.



English title:

VELOCITY-BASED AIRCRAFT CONFLICT AVOIDANCE
THROUGH OPTIMAL CONTROL MODEL AND SOLUTION APPROACHES

Abstract:

The purpose of this doctoral thesis is to study models and solution techniques based on optimal control approaches to address air traffic management problems. Motivated by the growth of air traffic volume, and by the advances in optimal control theory, this research works focus on analysing aircraft conflict avoidance problem. This study allows development of new approaches and algorithms to help air traffic controllers. In the framework of air traffic management, to ensure the minimum safety distances between aircraft, in tactical phases and en-route flight configurations, this thesis focusses on a subliminal velocity regulation strategy to perform the separation, while preserving the aircraft predefined trajectories. A numerical optimal control solution approach as the direct shooting method, wherein involves a total or partial discretization of the problem, transforms the initial problem into a large scale nonlinear programming problem. This kind of methods could generate large-size optimization problems which are numerically difficult to solve. Depending on the number of variables which involved, this approaches could be too expensive in terms of computation time. Moreover, the state-variables constraints of the problem lead to numerical difficulties, e.g., considering the indirect numerical shooting method. Tailored on aircraft conflict avoidance problems, a detection and a determination of a priori conflict zones allow the decomposition of the optimal control problem into sub-problems, easier to solve than the original one. Solving the off-zones sub-problems can be addressed using the Pontryagin maximum principle, which allows in this case directly the solution. A combination of direct numerical shooting method and application of conditions of Pontryagin's maximum principle is proposed, and numerical experiments validate this approach.

Keywords:

Optimal control, Pontryagin maximum principle, numerical shooting methods, nonlinear optimization, operations/operational research, decision-support, air traffic management, aircraft conflict avoidance problem, velocity regulation, mathematical modelling, dynamical systems.