



**HAL**  
open science

# Développement multipolaire en harmoniques sphériques et propagation des incertitudes appliqués à la modélisation de source de rayonnement en compatibilité électromagnétique

Zhao Li

► **To cite this version:**

Zhao Li. Développement multipolaire en harmoniques sphériques et propagation des incertitudes appliqués à la modélisation de source de rayonnement en compatibilité électromagnétique. Autre. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSEC049 . tel-02141494

**HAL Id: tel-02141494**

**<https://theses.hal.science/tel-02141494v1>**

Submitted on 27 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE  
**CENTRALE** LYON

N° d'ordre NNT : 2017LYSEC49

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**

opérée au sein de

**l'École Centrale de Lyon**

Spécialité : **“Génie Électrique”**

préparée au laboratoire **Ampère**

dans le cadre de l'École Doctorale EEA de Lyon (**ED160**)

par : **Zhao LI**

---

**Développement multipolaire en harmoniques sphériques et propagation des incertitudes appliqués à la modélisation de source de rayonnement en compatibilité électromagnétique**

---

Directeur de thèse : M. Laurent Krähenbühl

Co-encadrant : M. Arnaud Bréard

*Soutenue publiquement le 28 novembre 2017 devant le jury composé de :*

Président	M. Olivier Chadebec	Directeur de recherche CNRS - Laboratoire G2Elab
Rapporteur	Mme Viviane Cristine Silva	Professeur - Université de São Paulo
Rapporteur	M. Lionel Pichon	Directeur de recherche CNRS - Laboratoire GEEPS
Examineur	M. Kévin Berger	Maître de conférences - Université de Lorraine
Directeur de thèse	M. Laurent Krähenbühl	Directeur de recherche CNRS - Laboratoire Ampère
Co-encadrant	M. Arnaud Bréard	Maître de conférences - Laboratoire Ampère



# Remerciements

---

« Le temps passait, le temps filait ». Au dernier moment de ma thèse, je voudrais écrire quelques lignes des remerciements et j'espère qu'ils sauront retranscrire ma sincère gratitude envers celles et ceux qui m'ont entouré et aidé durant ces trois années.

Mes premiers remerciements vont à **Laurent Krähenbühl**, mon directeur de thèse, qui m'a dirigé, conseillé et aidé durant ces trois ans et je suis incapable de trouver les mots justes pour exprimer à quel point je lui en suis reconnaissant. Je ne pouvais espérer meilleur directeur de thèse tant d'un point de vue scientifique que d'un point de vue humain. Il a toujours été disponible, à l'écoute de mes nombreuses questions, et s'est toujours intéressé à l'avancée de mes travaux. Les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que ses conseils sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Ses nombreuses relectures et corrections ont été très appréciables et cette thèse lui doit beaucoup. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie également très chaleureusement **Arnaud Bréard**, mon co-encadrant de thèse. Cette aventure n'aurait pas commencé sans le financement qu'il a obtenu et surtout la confiance qu'il m'a apportée. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il est un modèle professionnel pour sa gestion calme de son temps pourtant si chargé et bien sûr pour sa maîtrise remarquable de notre domaine. Sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré que le monde de la recherche pouvait être un univers passionnant. Soyez assuré de mon attachement et de ma profonde gratitude.

Ensuite, j'adresse mes remerciements à **Olivier Chadebec**, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. J'ai beaucoup apprécié l'intérêt qu'il a porté à ce travail, pour sa participation scientifique ainsi que le temps qu'il a consacré à mes recherches. J'en profite pour le remercier de sa confiance, de sa gentillesse et de son accueil chaleureux dans son laboratoire il y a un an. Grâce à la plateforme MIPSE qu'il nous a fournie, nous avons pu valider numériquement plusieurs conclusions présentes dans ce travail.

Je tiens également à remercier **Lionel Pichon** et **Viviane Cristine Silva** d'avoir accepté de rapporter ce présent manuscrit et de l'avoir fait de manière aussi remarquable. Je les remercie notamment pour leurs commentaires utiles et pertinents sur mon travail ainsi que pour leur bienveillance et pour les très intéressantes discussions ayant eu lieu lors de la soutenance. La version finale de ce mémoire a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs précieuses remarques.

Pour compléter les remerciements pour mon jury de thèse, je remercie **Kévin Berger** de m'avoir fait l'honneur d'assister à ma soutenance de thèse et pour les discussions qui s'y sont tenues. Je lui suis également reconnaissant pour le programme qu'il a développé en post-doctorat au Laboratoire Ampère, et sans lequel le début de cette thèse ne se serait pas aussi bien déroulé.

Car une thèse n'est jamais uniquement le produit d'un doctorant, de ses encadrants et de son jury, j'aimerais également remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin,



---

directement ou indirectement, à ce manuscrit :

Je remercie particulièrement **Olivier Fabregue** et **Jacques Gonin** pour leurs contributions importantes sur la mise en œuvre du banc de mesure et la commande des systèmes électriques. Les résultats expérimentaux obtenus à la fin de ce travail leur doivent beaucoup.

J'adresse également mes remerciements à **Christian Vollaire**, **Damien Voyer**, **Ronan Perrussel** et **Carlos Sartori** avec qui j'ai eu l'occasion d'avoir de nombreuses discussions. Leurs conseils précieux ont contribué à l'amélioration de ce travail.

Je voudrais remercier **Olivier Pinaud** pour son accueil très chaleureux dans le laboratoire G2Elab de Grenoble où il m'a initié à la méthode du maximum à posteriori et autour de laquelle nous avons ensuite collaboré.

Je remercie également **François Tavernier**, avec qui j'ai eu la chance de pouvoir travailler pendant trois ans. Je me souviens encore de nos premiers jours ici au laboratoire Ampère : j'ai vraiment eu beaucoup de plaisir à travailler avec lui et ai apprécié chacune de nos millions de conversations, scientifiques ou pas. Grâce à lui, ce fut un réel plaisir de venir au laboratoire tous les matins, de par sa gentillesse, sa bonne humeur ou encore son enthousiasme. Les bons moments que nous avons passés ensemble resteront parmi mes meilleurs souvenirs de la France.

Je tiens aussi à remercier tous les membres passés et présents de la GRANDE Salle Poitou : **Khaled Laib**, **Sergio Waitman**, **Alexandre Kircher**, **Samuel Eke**, **Ouassim Agri**, **Debarghya Ghosh** pour leur soutien lors de difficultés techniques mais également pour toutes les discussions diverses et variées que nous avons pu avoir (jeux vidéo, cinéma, gastronomie, etc.). Je souhaite que notre amitié naissante puisse perdurer et grandir malgré les distances liées aux activités professionnelles de chacun et je leur souhaite le meilleur pour la suite.

De manière générale, je suis reconnaissant envers tous les membres du site du Laboratoire Ampère à l'Ecole Centrale de Lyon (**Laurent Bako**, **Edith Bergeroux**, **Gérard Scorletti**, **Anton Kornienko**, **Arthur Perodou**, **Peng Wang**...), qui par leur bonne humeur, leur disponibilité et leurs compétences m'ont non seulement permis de mener ce projet à bien mais également de profiter d'une agréable ambiance de travail.

Je souhaite à présent terminer ces remerciements avec celles et ceux qui sont au plus profond de mon cœur : **ma famille**. Un très grand merci à mes parents, même s'ils ne comprennent pas le français, sans qui je ne serais jamais arrivé là. Malgré mon éloignement depuis de nombreuses années, leur sagesse, leur confiance, leur tendresse, leur amour me portent et me guident tous les jours. Enfin, merci à mon amour **Yue Zheng**, sans qui rien mais absolument rien de tout cela n'aurait été possible. Elle a su me soutenir, me supporter, m'encourager pendant toute la durée de ma thèse et plus particulièrement durant les derniers mois de rédaction qui n'ont pas toujours été des plus agréables. Elle est présente à chaque instant, prête à me suivre au bout du monde, « je t'aime ».

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Contextes et objectifs de l'étude</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Introduction de la compatibilité électromagnétique . . . . .	5
1.2.1 Les sources de perturbation . . . . .	6
1.2.2 Le couplage entre systèmes . . . . .	7
1.2.2.1 Le couplage conduit . . . . .	7
1.2.2.2 Le couplage rayonné . . . . .	9
1.3 Prise en compte de la CEM dans la conception d'EDP . . . . .	10
1.3.1 Solutions de minimisation des perturbations . . . . .	10
1.3.2 Les filtres pour la CEM . . . . .	12
1.4 La CEM prédictive . . . . .	14
1.5 L'évolution du banc de mesure . . . . .	15
1.5.1 Système LLA . . . . .	16
1.5.2 Système de filtre spatial en champ proche . . . . .	17
1.5.3 Système de capteurs rotatifs . . . . .	18
1.5.4 Système de mesure automatisé du LMAG . . . . .	19
1.6 Conclusion . . . . .	21
<b>2 Développement en harmoniques sphériques</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Rappel des équations de Maxwell . . . . .	23
2.3 Les potentiels électromagnétiques . . . . .	25
2.3.1 Le potentiel électrique . . . . .	25
2.3.2 Le potentiel vecteur magnétique . . . . .	26
2.3.3 Approximations des régimes quasi-stationnaires . . . . .	27
2.3.4 Le potentiel scalaire magnétique . . . . .	28
2.3.5 Équations auxquelles obéissent les potentiels $\mathbf{A}$ et $\psi$ . . . . .	28
2.4 Spire circulaire de courant . . . . .	29
2.4.1 Étude théorique de la spire filaire . . . . .	30
2.4.2 Simulation avec Flux . . . . .	33
2.4.2.1 Boucle active . . . . .	33
2.4.2.2 Boucle passive . . . . .	36
2.5 Développement multipolaire en harmoniques sphériques . . . . .	38
2.5.1 Résolution de l'équation de Laplace . . . . .	38
2.5.2 Introduction des harmoniques sphériques . . . . .	41

---

2.5.2.1	Problème externe . . . . .	42
2.5.2.2	Problème interne . . . . .	43
2.6	Présentation du logiciel <i>Flux3D</i> . . . . .	45
2.7	Caractéristiques des harmoniques sphériques . . . . .	47
2.7.1	Notion d'ordre . . . . .	47
2.7.2	Quelques exemples des fonction HS . . . . .	48
2.7.3	Orthogonalité . . . . .	49
2.7.4	Constructions de sources harmoniques « pures » . . . . .	52
2.7.5	Rotation . . . . .	55
2.7.6	Translation . . . . .	60
2.8	Inductance mutuelle . . . . .	62
2.8.1	Introduction de l'induction mutuelle . . . . .	62
2.8.2	Inductance mutuelle en harmoniques sphériques . . . . .	64
2.8.3	Validations numériques . . . . .	68
2.9	Conclusion . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Compléments au développement en HS</b>	<b>71</b>
3.1	Choix optimal de l'origine du développement . . . . .	71
3.1.1	Impact du choix de l'origine . . . . .	71
3.1.2	Impact d'une translation en HS . . . . .	73
3.1.3	Énergie magnétique en harmoniques sphériques . . . . .	74
3.1.4	Méthode de Nelder-Mead et origine optimale du développement . . . . .	76
3.1.5	Localisation des composants électroniques dans une boîte noire . . . . .	78
3.2	Effets de sources secondaires . . . . .	80
3.2.1	Calcul analytique pour une seule source secondaire . . . . .	80
3.2.1.1	Mesure en présence des deux dispositifs . . . . .	82
3.2.1.2	Mesure isolée pour chaque dispositif . . . . .	83
3.2.2	Calcul analytique pour deux sources secondaires . . . . .	84
3.2.2.1	Mesure en présence des deux dispositifs . . . . .	85
3.2.2.2	Mesure isolée pour chaque dispositif . . . . .	86
3.2.2.3	Méthode Richmond . . . . .	87
3.2.3	Modélisation avec <i>Flux3d</i> . . . . .	87
3.2.3.1	Cas ferromagnétique . . . . .	87
3.2.3.2	Cas conducteur . . . . .	91
3.2.4	Compensation de l'erreur . . . . .	92
3.3	Conclusion . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Problème inverse</b>	<b>99</b>
4.1	Introduction du problème inverse . . . . .	99
4.2	Système de capteurs circulaires . . . . .	100
4.2.1	Principe de mesure . . . . .	100
4.2.2	Démonstration pour l'ordre 3 . . . . .	101
4.3	Système de mesure automatisé . . . . .	103

4.4	Outils mathématiques du diagnostic . . . . .	104
4.4.1	Rang . . . . .	104
4.4.2	Conditionnement . . . . .	104
4.4.3	Notions de statistiques . . . . .	106
4.4.3.1	Moyenne et écart-type . . . . .	106
4.4.3.2	Loi normale et intervalle de confiance . . . . .	107
4.4.4	Résidu . . . . .	109
4.5	Résolution du problème inverse . . . . .	109
4.5.1	La méthode des moindres carrés . . . . .	109
4.5.2	La propagation des incertitudes de la méthode de moindres carrés . . . . .	110
4.5.3	Choix de l'ordre maximal du développement . . . . .	113
4.5.4	Dimension optimal du capteur . . . . .	117
4.5.5	Positions de mesures . . . . .	119
4.6	Information a priori sur la géométrie . . . . .	122
4.6.1	Source « parfaite » . . . . .	123
4.6.2	Source « imparfaite » . . . . .	125
4.6.3	Méthode des moindres carrés sous contraintes . . . . .	127
4.6.4	Maximum a posteriori (MAP) . . . . .	128
4.6.4.1	Théorème de Bayes . . . . .	129
4.6.4.2	Méthode du maximum a posteriori . . . . .	129
4.6.4.3	Application sur l'information a priori géométrique . . . . .	130
4.6.4.4	Autres applications . . . . .	131
4.7	Conclusion . . . . .	133
<b>5</b>	<b>Approche expérimentale</b>	<b>135</b>
5.1	Introduction . . . . .	135
5.2	Présentation du système de mesure . . . . .	135
5.2.1	Analyseur de réseau (VNA) . . . . .	136
5.2.2	Bande passante de résolution . . . . .	138
5.2.3	Interface graphique . . . . .	139
5.3	Validation pour deux boucles de courant . . . . .	140
5.3.1	Caractérisations des deux spires en circuit imprimé . . . . .	140
5.3.2	Inductances mutuelles entre les deux spires circulaires en circuits imprimés	144
5.3.3	Propagation des incertitudes . . . . .	147
5.4	Bobine torique et inductance de lissage . . . . .	150
5.4.1	Identifications des sources . . . . .	150
5.4.2	L'inductance mutuelle . . . . .	152
5.4.3	Réduire le couplage inductif . . . . .	153
5.5	Conclusion . . . . .	154
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>155</b>
	<b>Liste de publications</b>	<b>157</b>

**Bibliographie**

**159**

# Table des figures

---

1.1	Schéma de principe de la CEM . . . . .	6
1.2	Le spectre électromagnétiques . . . . .	7
1.3	Deux modes de couplages électromagnétiques . . . . .	7
1.4	Schéma de principe de mode différentiel . . . . .	8
1.5	Schéma de principe de mode commun . . . . .	8
1.6	Chambre anéchoïque . . . . .	10
1.7	Processus de conception d'un produit . . . . .	11
1.8	a) Convertisseur statique avec son filtre b) schéma électrique du filtre passe-bas . .	13
1.9	Performance du filtre du convertisseur statique . . . . .	13
1.10	Nombre de techniques utilisables et coût supplémentaire pour résoudre les problèmes de CEM en fonction du temps pendant le développement d'un produit . .	15
1.11	Schéma de principe de système de LLA [LLA08] . . . . .	16
1.12	Schéma de principe de capteur de filtre spatial [Vin09] . . . . .	17
1.13	Huit capteurs pour identifier les deux premiers ordres [VCS <sup>+</sup> 10] . . . . .	18
1.14	Prototype de mesure pour les deux premiers ordres . . . . .	18
1.15	Prototype de mesure pour les quatre premiers ordres . . . . .	19
1.16	Banc de mesure automatisé développé au LMAG [BCK <sup>+</sup> 17] . . . . .	20
2.1	Spire circulaire en circuit imprimé . . . . .	30
2.2	Le principe de la loi de Biot et Savart . . . . .	30
2.3	Spire circulaire parcourue par un courant $I$ . . . . .	31
2.4	Coordonnées sphériques . . . . .	32
2.5	$\varepsilon$ en fonction de $R/r$ . . . . .	33
2.6	Configuration de la simulation sous <i>Flux2D</i> . . . . .	34
2.7	Répartition de courant dans une boucle en circuit imprimé sous <i>Flux2D</i> . . . . .	35
2.8	Induction magnétique de la boucle en circuit imprimé . . . . .	35
2.9	Boucle en circuit imprimé sert de capteur . . . . .	36
2.10	Répartition de la densité de courant dans le capteur à 300 kHz . . . . .	37
2.11	Polynômes associés de Legendre . . . . .	40
2.12	Induction magnétique (T) d'une source de rayonnement avec $Y_1^0 = Y_2^2 = Y_3^2 = 1$ sur une surface sphérique d'un rayon $r_M = 1, 2, 5, 10$ m . . . . .	42
2.13	Principe de la sphère de validité sur une source quelconque du problème externe	43
2.14	Principe de la sphère de validité sur une source quelconque du problème interne .	44
2.15	Schéma de principe de la boîte infinie . . . . .	46
2.16	Influences des ordres en fonction de la distance au centre . . . . .	47
2.17	Représentations des premières harmoniques sphériques réelles . . . . .	49
2.18	Représentation de la symétrie et la périodicité de la fonction harmonique sphérique	49

2.19	Induction magnétique de la bobine d'un rayon de 3 cm à 5 cm (gauche), 10 cm (milieu) et 50 cm (droite). . . . .	52
2.20	Inductions magnétiques de la bobine d'un rayon de 3 cm et des sources reconstruites en harmoniques sphériques avec $r_m = 5$ cm (gauche); $r_m = 10$ cm (centre) et $r_m = 50$ cm (droite) . . . . .	53
2.21	Constructions des sources "pures" à partir de boucles de courant . . . . .	54
2.22	Constructions de la composante $Y_3^2$ avec les boucles de courant . . . . .	55
2.23	Principe des angles d'Euler . . . . .	56
2.24	Forme de la composante $Y_2^1$ (gauche); Cercles d'annulations de la composante $Y_2^1$ (droite) . . . . .	59
2.25	Configuration des boucles de courant (gauche); Induction magnétique sur une sphère de 1 m (droite) . . . . .	59
2.26	Principe de la translation de l'origine du développement en harmoniques sphériques	60
2.27	Principe des deux types de translation : translation interne (gauche); translation externe (droite) . . . . .	61
2.28	Exemple de bobinage avec son induction magnétique . . . . .	63
2.29	Schéma de principe de l'induction mutuelle . . . . .	64
2.30	Situation de mesure pour déterminer l'impédance mutuelle entre sources 1 et 2 .	65
2.31	Configuration des sources en boucles . . . . .	68
2.32	Inductance mutuelle entre les sources 1 et 2 (gauche); Erreur relative de l'inductance mutuelle par rapport la simulation sous <i>Flux3D</i> (droite) . . . . .	69
3.1	Calcul de l'inductance mutuelle entre deux spires en translatant l'origine du développement . . . . .	72
3.2	Erreur relative de l'inductance mutuelle en fonction de la position de l'origine du développement . . . . .	72
3.3	Impacts d'une translation suivant l'axe $z$ sur les composantes harmoniques de moment nul . . . . .	74
3.4	Opération de réflexion de la méthode de Nelder-Mead (gauche); Opération d'expansion de la méthode de Nelder-Mead (droite) . . . . .	77
3.5	Opération de contraction de la méthode de Nelder-Mead (gauche); Opération de rétrécissement de la méthode de Nelder-Mead (droite) . . . . .	77
3.6	La méthode de Nelder-Mead pour trouver l'origine optimale du développement .	79
3.7	Processus du calcul de l'inductance mutuelle avec la méthode du développement en harmoniques sphériques [Zan11] . . . . .	80
3.8	Schéma de principe d'une seule source secondaire . . . . .	81
3.9	Schéma de principe de deux sources secondaires . . . . .	84
3.10	Inductance mutuelle entre deux inductances de lissage . . . . .	88
3.11	Induction magnétique (T) sur la sphère de mesure en présence du dispositif $B$ (haut); Induction magnétique (T) sur la sphère de mesure en absence du dispositif $B$ (bas) . . . . .	89
3.12	Différence entre les induction magnétiques sur la sphère de mesure en présence du dispositif $B$ et sans présence du dispositif $B$ . . . . .	89

3.13	L'inductance mutuelle entre deux boucles sur les plaques de cuivre . . . . .	91
3.14	Inductance mutuelle entre deux bobines . . . . .	92
3.15	Induction magnétique sur le cercle de mesure . . . . .	93
3.16	Caractérisation d'ordre 1 pour une source secondaire . . . . .	94
3.17	Induction magnétique sur le cercle pour une grande boucle de courant . . . . .	95
3.18	Induction magnétique sur le cercle pour chaque source source canonique . . . . .	96
4.1	Principe des problèmes direct (haut) et inverse (bas) . . . . .	99
4.2	Prototype du système de mesure (gauche) et son schéma de principe (droite) [HBV14] . . . . .	100
4.3	Schéma de principe pour calculer la forme du capteur d'ordre 3, la couleur re- présente la fonction de $Y_5^0$ dont l'intégrale s'annule à travers chacun des capteurs d'ordre 3 . . . . .	102
4.4	Banc de mesure automatisé (gauche) et sa représentation schématique (droite) .	103
4.5	Densité de probabilité de la loi normale . . . . .	108
4.6	Intervalles de confiance de la loi normale . . . . .	108
4.7	Bobine torique étudiée . . . . .	113
4.8	Induction magnétique normales sur une sphère de mesure ( $r = 10$ cm) autour du dispositif . . . . .	113
4.9	Induction magnétique normale sur une sphère de mesure ( $r = 10$ cm) autour du dispositif en fonction de $\varphi$ (droite) . . . . .	115
4.10	Induction magnétique sur une sphère de mesure ( $r = 5$ cm) autour du dispositif .	116
4.11	Écart-type normalisé des échantillons pour chaque composante harmonique en fonction de rayon du capteur pour une longueur de bras de 20 cm . . . . .	118
4.12	Rayon de sphère de mesure en fonction de la taille du capteur pour les différentes valeurs du longueur du bras . . . . .	118
4.13	La somme des écart-types normalisés des quatre premiers ordres en fonction de rayon du capteur . . . . .	119
4.14	Points de mesures répartis d'une façon équi-angulaire . . . . .	119
4.15	Points de mesures répartis d'une façon spirale . . . . .	120
4.16	Points de mesures répartis d'une façon quasiment équi-distante . . . . .	120
4.17	Mesures équi-distantes itératives à partir d'un icosaèdre . . . . .	121
4.18	Mesures équi-distantes itératives à partir d'un cube . . . . .	122
4.19	Inductance de lissage étudiée sous <i>Flux3D</i> . . . . .	123
4.20	Induction magnétique de l'inductance sur une sphère de 10 cm . . . . .	123
4.21	50 points de mesures répartis d'une façon quasiment équi-distante sur la surface sphérique autour du dispositif . . . . .	124
4.22	Inductance de lissage étudiée sous <i>Flux3d</i> avec les fils d'alimentation . . . . .	126
4.23	Induction magnétique du transformateur avec les fils d'alimentation sur une sphère de 10 cm . . . . .	126
4.24	8 exemples de bobines modélisés sous <i>Flux3d</i> . . . . .	132
5.1	Système de mesure . . . . .	135



5.2	Schéma de principe du système de mesure . . . . .	136
5.3	Système d'un quadripôle . . . . .	137
5.4	Principe de l'influence de la bande passante de résolution [Mul00] . . . . .	138
5.5	Mesures des flux d'induction magnétique pour différentes RBW . . . . .	139
5.6	Temps de mesure et erreur quadratique en fonction de la RBW . . . . .	140
5.7	Interface graphique . . . . .	141
5.8	Configuration de VNA dans l'interface graphique . . . . .	141
5.9	2 spires circulaires à caractériser . . . . .	142
5.10	Analyseur d'impédance . . . . .	142
5.11	Impédance mesurée de la spire de 5 cm avec le fil d'alimentation en fonction de la fréquence . . . . .	142
5.12	Flux d'induction magnétique mesuré de la spire circulaire de 5 cm sur une sphère de $r_M = 12.8$ cm . . . . .	143
5.13	Induction magnétique estimée à partir des coefficients harmoniques en Table 5.2 sur la sphère de mesure de rayon $r_m = 12.8$ cm . . . . .	144
5.14	Deux spires en circuits imprimés placées verticalement . . . . .	145
5.15	Inductance mutuelle entre les deux spires filaires (gauche); en circuits imprimés (droite) en fonction de la distance entre elles . . . . .	145
5.16	Erreurs relatives sur l'inductance mutuelle calculée en harmoniques sphériques et sur la valeur analytique par rapport à la mesure . . . . .	146
5.17	Deux spires coplanaires en circuits imprimés . . . . .	146
5.18	Inductance mutuelle entre les deux spires en circuits imprimés en fonction de la distance entre elles . . . . .	147
5.19	Erreurs relatives sur l'inductance mutuelle calculée en harmoniques sphériques par rapport à la mesure . . . . .	147
5.20	Inductance mutuelle entre deux spires horizontales en fonction de la distance entre elles . . . . .	148
5.21	Inductance mutuelle entre deux spires horizontales en fonction de la distance entre elles . . . . .	149
5.22	Bobine torique à identifier . . . . .	150
5.23	Impédance de la bobine torique (gauche); flux d'induction magnétique de la bobine torique mesuré sur une sphère de $r_M = 12.8$ cm (droite) . . . . .	150
5.24	Inductance de lissage à identifier . . . . .	151
5.25	Impédance de l'inductance de lissage (gauche); Flux d'induction magnétique mesurés de l'inductance de lissage sur une sphère de $r_M = 12.8$ cm (droite) . . . . .	151
5.26	Configuration de la bobine torique et l'inductance de lissage . . . . .	152
5.27	Inductance mutuelle entre la bobine torique et l'inductance de lissage . . . . .	152
5.28	Valeur absolue de l'inductance mutuelle entre la bobine torique et l'inductance de lissage à une distance de 15 cm en fonction de l'orientation relative entre elles . . . . .	153
5.29	Configuration de la bobine torique tournée et l'inductance de lissage . . . . .	154
5.30	Inductance mutuelle entre la bobine torique et l'inductance de lissage en fonction de la distance entre elles . . . . .	154

# Liste des tableaux

---

2.1	Erreur sur l'induction magnétique d'une boucle en circuit imprimé . . . . .	36
2.2	L'erreur sur l'induction magnétique d'une boucle en circuit imprimé . . . . .	37
2.3	Premières harmoniques sphériques, en coordonnées sphériques et cartésiennes . .	48
2.4	Erreur quadratique relative $\varepsilon(\%)$ sur l'induction magnétique reconstruite d'une spire de 3 cm pour les différents $N_{max}$ et distances d'observation $r_m$ . . . . .	53
2.5	Présentation des coefficients harmoniques dans une table . . . . .	68
2.6	Coefficients harmoniques des sources 1 et 2 présentées la Figure 2.31 . . . . .	69
3.1	Coefficients harmoniques de la source sur la Figure 3.6 (haut); les coefficients harmoniques après la méthode de Nelder-Mead (bas) . . . . .	79
3.2	Coefficients harmoniques pondérés par $r^{n+2}$ ( $r = 5$ cm) en présence du dispositif $B$ (haut); coefficients harmoniques pondérés par $r^{n+2}$ ( $r = 5$ cm) en l'absence du dispositif $B$ (bas) . . . . .	90
3.3	L'inductance mutuelle en fonction de la distance entre les deux dispositifs $A$ et $B$	90
3.4	Inductance mutuelle en fonction de la distance entre les deux dispositifs $A$ et $B$ .	91
3.5	Coefficients harmoniques du dispositif $A$ pondérés par $r^{n+2}$ ( $r = 5$ cm) . . . . .	93
3.6	Coefficients harmoniques du dispositif $A$ après la translation . . . . .	94
4.1	Coefficient de Student . . . . .	111
4.2	Erreur quadratique relative en fonction de l'ordre maximal du développement . .	114
4.3	Écart-type de résidu en fonction de l'ordre maximal du développement . . . . .	115
4.4	Coefficient d'Akaike corrigé en fonction de l'ordre du développement à 10 cm . .	116
4.5	Coefficient d'Akaike corrigé en fonction de l'ordre du développement à 5 cm . . .	117
4.6	Conditionnement pour chaque méthode de mesure . . . . .	121
4.7	Coefficients harmoniques pondérés par $r^{-(n+2)}$ ( $r = 0.1$ m) obtenus à partir des 50 mesures sans informations a priori . . . . .	124
4.8	Coefficients harmoniques pondérés par $r^{-(n+2)}$ ( $r = 0.1$ m) obtenus à partir des 50 mesures en simplifiant le modèle . . . . .	125
4.9	Coefficients harmoniques pondérés par $r^{-(n+2)}$ ( $r = 0.1$ m) obtenus à partir des 50 mesures sans informations a priori . . . . .	127
4.10	Coefficients harmoniques pondérés par $r^{-(n+2)}$ ( $r = 0.1$ m) obtenus à partir des 50 mesures en simplifiant le modèle . . . . .	127
4.11	Coefficients harmoniques pondérés par $r^{-(n+2)}$ ( $r = 0.1$ m) obtenus à partir des 50 mesures en ajoutant les contraintes . . . . .	128
4.12	Coefficients harmoniques pondérés par $r^{-(n+2)}$ ( $r = 0.1$ m) obtenus à partir des 50 mesures avec la méthode MAP . . . . .	131
4.13	Erreur quadratique relative en fonction de $\mathbf{S}_0$ . . . . .	131

4.14	$\mathbf{Q}_0$ pondérés par $r^{-(n+2)}$ ( $r = 0.1$ m) calculé à partir des 20 essais . . . . .	132
4.15	Erreurs quadratiques relatives sur les inductions magnétiques pour la méthode du maximum de vraisemblance, l'information a priori et la méthode du maximum a posteriori . . . . .	133
4.16	Coefficients harmoniques pondérés par $r^{-(n+2)}$ ( $r = 0.1$ m) calculés avec la méthode du maximum a posteriori . . . . .	133
5.1	Coefficient d'Akaike corrigé en fonction de l'ordre du développement . . . . .	143
5.2	Coefficients harmoniques de la spire de 5 cm déterminés à partir de 131 mesures	143
5.3	Coefficients harmoniques de la spire de 3 cm déterminés à partir de 131 mesures	144
5.4	Coefficients harmoniques des deux spires en circuits imprimés déterminés à partir de 7 répétitions . . . . .	148
5.5	Coefficients harmoniques de la bobine torique déterminés à partir de 131 mesures	151
5.6	Coefficients harmoniques de l'inductance de lissage déterminés à partir de 131 mesures . . . . .	152

# Introduction générale

---

Pendant longtemps, les phénomènes « électriques » et « magnétiques » ont été considérés comme indépendants. Cette conception a toutefois changé au début du XIXe siècle, grâce aux expériences d'Ørsted, Ampère et Faraday, et aux interprétations qu'ils en ont faites. Ces expériences ont prouvé que les forces « électrique » et « magnétique » peuvent être en fait unifiées. En 1860, Maxwell a proposé une théorie générale de l'électromagnétisme classique pour la première fois. Au début, cette théorie a consisté en vingt équations et vingt inconnues. Quelques années plus tard, Heaviside a réécrit cette théorie sous la forme des quatre équations vectorielles aux dérivées partielles que l'on connaît maintenant comme « les équations de Maxwell ». Ces quatre équations permettent de décrire tous les comportements électromagnétiques connus.

Après environ deux cents ans de développement, l'électromagnétisme est depuis longtemps étroitement associé à la vie quotidienne. Grand comme les moteurs électriques dans les navigations aérospatiales, petit comme les récepteurs de communications dans nos portables, les dispositifs utilisant l'électromagnétisme sont aujourd'hui omniprésents. A cause des champs électromagnétiques qu'ils émettent, ces dispositifs sont malheureusement sources intrinsèques d'interférences électromagnétiques. Et avec les progrès de la technologie, la densité de puissance des appareils électriques augmente avec une vitesse importante. Ceci conduit également à une augmentation des interférences électromagnétiques entre deux systèmes d'électroniques de puissance. Ces interférences peuvent engendrer des dysfonctionnements ou même des dommages des appareillages. Ce type de problème est associé à la notion de compatibilité électromagnétique (CEM).

Quel que soit le domaine d'application, il est obligatoire de respecter des normes en terme de rayonnement parasite afin de pouvoir garantir un bon fonctionnement de l'ensemble des équipements ainsi que d'assurer la sécurité des personnes. Actuellement les problématiques de la CEM sont traitées après le développement d'un nouveau prototype. Un ensemble de mesures doit être effectué, cherchant à vérifier que les normes de la CEM sont bien respectées. Ceci conduit généralement à une modification du prototype, à travers l'ajout de filtres, de blindage. Il est parfois nécessaire de produire un nouveau prototype afin de répondre aux contraintes imposées. Ce processus empirique et itératif conduira à un surcoût et une augmentation des délais de fabrication importants dans le cycle de conception des systèmes. Il est même possible que certains produits ne parviennent pas à respecter certaines normes du fait de leur conception. Cette thèse a en fait pour objectif de résoudre une partie de ces problèmes. L'idée est de calculer des coefficients d'influence entre systèmes (inductances mutuelles) en utilisant le développement de modèles simples du rayonnement parasite en champ proche de systèmes ou éléments d'un système. Ceci permet de prendre en compte des contraintes CEM dès la phase de conception.

Dans ce contexte, deux types de développement sont étudiés ces dernières années. Le premier a été effectué notamment au Laboratoire GEEPS, qui consiste via un ensemble de mesures ponctuelles en 3D à chercher un ensemble de sources équivalentes de type dipôles répartis sur

une surface ou un volume [BPB<sup>+</sup>17]. La deuxième méthode consiste à modéliser la source de perturbations comme un ensemble de multipôles localisés en un point. L'avantage de cette dernière méthode réside dans le nombre restreint de paramètres à estimer qui est lié à la complexité du système étudié, ce qui est à l'opposé de la méthode de dipôles répartis qui va dépendre de la taille du système et va donner de bons résultats au prix de temps de calcul ou mesure important. La deuxième méthode a aussi fait l'objet du projet ANR-14-CE22-009 JC « PolHar-CEM », qui finance cette thèse.

Commencé au 1er octobre 2014, ce projet comporte trois phases de recherche principales.

La première phase correspond à l'objectif de cette thèse, qui est d'exploiter les développements multipolaires, basés sur les développements en harmoniques sphériques. En étendant le système de mesures aux ordres supérieurs (avant le début de ces travaux, les dispositifs de mesure disponibles étaient limités à l'ordre 4), il est possible de traiter les configurations dans lesquelles des systèmes sont proches ainsi que de prendre en compte le couplage entre éléments d'un même système. Une étude de divers systèmes classiques, ainsi que l'élaboration d'une bibliothèque de composants permettra d'intégrer dans un logiciel de simulation de circuit, tel qu'INCA (Altair), le couplage en champ proche magnétique inter et intra système. On s'intéresse ici au champ proche du fait qu'aux fréquences de travail des systèmes étudiés,  $f < 20\text{MHz}$ , les dimensions du système sont petites devant la longueur d'onde. Les systèmes étudiés sont parcourus par de forts, de ce fait les effets du champ magnétique sont prédominants devant ceux du champ électrique.

La seconde phase du projet porte sur le développement de nouveaux modèles toujours basés sur des développements multipolaires, mais faisant appel à des développements en harmoniques cylindriques puis à des harmoniques sphéroïdales (ellipsoïde de révolution). Ces travaux correspondent à une autre thèse qui est effectuée en même temps par François Tavernier. L'intérêt de l'étude de ces deux nouveaux modèles réside dans la limite du domaine de validité en harmoniques sphériques. En effet certains cas ne peuvent être correctement modélisés par un développement multipolaire. Lorsque deux composants sont à une distance inférieure à la dimension la plus grande d'un des composants et donc qui ne peuvent pas être modélisés par des sources équivalentes ponctuelles (exemple d'une bobine proche d'un autre composant). Ce problème pourrait être modélisé via un développement en harmoniques cylindriques. Le développement en harmoniques sphéroïdales offre encore plus de liberté et l'association de ces différents modèles permettrait de traiter une palette de cas extrêmement variés.

La troisième phase de ce projet, aussi étudiée dans cette thèse, porte sur l'étude des impacts et propagations des incertitudes. Premièrement, l'augmentation en ordre du banc de mesure implique une maîtrise de la précision sur la réalisation du banc ainsi que sur les mesures. Chaque mesure portera des incertitudes, il est important de déterminer les impacts de ces incertitudes sur l'identification de la source de rayonnement inconnue. Deuxièmement, chaque composant du commerce est réalisé avec une certaine précision sur ses caractéristiques. L'évaluation de l'impact de cette imprécision et de la propagation de cette incertitude dans le calcul de l'inductance mutuelle caractérisant le couplage entre deux composants doit être réalisée afin d'établir une enveloppe des valeurs des composantes du développement en harmonique d'une source de rayonnement caractérisé. La bibliothèque de composants devra intégrer ce caractère incertain des valeurs des composants.

Ce mémoire de thèse porte sur la première et la troisième phase du projet, et s'articule autour de cinq chapitres.

Le chapitre 1 est consacré à la présentation précise du contexte dans lequel s'inscrivent ces travaux. L'étude bibliographique est présentée, elle contient un rappel des bases de la compatibilité électromagnétique. L'exemple d'un filtre CEM est proposé afin de mieux faire comprendre l'importance de la CEM prédictive, traduite par la prise en compte de l'inductance mutuelle entre les systèmes ou entre les composants d'un même système dès la phase de conception. Enfin, l'évolution du banc de mesure dédié à l'identification du développement multipolaire est présentée, du banc historique de 1989 jusqu'aux dernières améliorations, proposées à l'EP-USP (São Paulo) et par nous-mêmes à Lyon.

Le chapitre 2 est consacré à la présentation de l'outil mathématique des développements multipolaires en harmoniques sphériques. En introduction, nous présentons les bases physiques (équations de Maxwell), leurs approximations en régime quasi-statique, et les potentiels qui permettent de représenter les champs. Nous présentons ensuite une étude détaillée de la spire circulaire de courant réalisée en circuit imprimé : c'est en effet un outil essentiel pour la partie expérimentale de notre étude, parce qu'elle sert non seulement de capteur mesurant le flux magnétique à travers sa surface, mais aussi grâce à sa symétrie parfaite à valider et calibrer le banc de mesure. Il est important de présenter cette étude ici parce qu'elle permet clarifier les notions liées au développement en harmoniques sphériques (HS). La construction des développements en harmoniques sphériques (HS) est ensuite présentée, en partant de l'équation de Laplace. Les caractéristiques de ces développements qui nous seront utiles par la suite, notamment les changements de repères (rotation, translation...) sont exposées. Nous montrons enfin comment les développements en HS peuvent nous servir pour le calcul de l'inductance mutuelle.

Le chapitre 3 complète le chapitre 2 en abordant deux problématiques liées au calcul de l'inductance mutuelle. La première est le choix de l'« origine » du développement : les coefficients du développement dépendent du choix du centre de ce développement. Nous détaillons cette dépendance, ce qui permet d'interpréter l'importance du choix de ce centre ; la méthode de Nelder-Mead que nous présentons ensuite nous permet de trouver le centre optimal du développement. La deuxième problématique concerne les « sources secondaires », tels que les champs de réaction liés à des pièces massives ferromagnétiques ou conductrices faisant partie de l'un ou l'autre des dispositifs en interaction. Dans notre approche, l'expansion multipolaire de chaque dispositif est obtenue par isolement, c'est-à-dire que chaque source est considérée comme « seule au monde ». Seuls les phénomènes d'induit internes à une source sont pris en compte, pas les phénomènes induits croisés entre deux sources. Ensuite, des études analytique et numérique sur les effets des sources secondaires permettent de valider notre approche. Enfin, une méthode est proposée pour compenser l'erreur engendrée.

Le chapitre 4 introduit le problème inverse et sa résolution, c'est-à-dire comment obtenir les coefficients harmoniques à partir des résultats des mesures ou des modélisations. Les notions de rang, conditionnement et résidu sont présentées, elles permettent d'une part de vérifier si le problème est bien posé, d'autre part de caractériser la qualité de la résolution faite. Ensuite, sur la base de la méthode de moindres carrés, les facteurs essentiels de la résolution sont discutés et étudiés : propagation des incertitudes, effets des choix de l'ordre maximal du développement et

des positions de mesures, etc. Enfin, nous montrons comment utiliser de l'information a priori dans la résolution du problème inverse. Plusieurs méthodes sont proposées pour rendre ces informations utiles et quelques exemples sont étudiés pour illustrer l'intérêt de cette approche.

Le chapitre 5 constitue une première validation expérimentale. Le nouveau banc de mesure automatisé qui a été développé au Laboratoire Ampère pendant ce travail est présenté en détail, avec ses instruments de mesure. Ensuite, plusieurs résultats de mesures en champ proche sont présentés pour différentes sources, et utilisés pour construire les modèles équivalents en HS ; ces résultats sont ensuite utilisés pour estimer les inductances mutuelles entre sources, et comparés à la mesure directe. Pour ces quelques sources, ces résultats permettent de valider notre démarche qui répond donc bien aux attentes mentionnées au chapitre 1.

# Contextes et objectifs de l'étude

---

## 1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour objectif de préciser le contexte dans lequel s'inscrivent ces travaux. Il commence par une brève introduction de la CEM, y compris sa définition, les causes, les risques et les mesures préventives.

Ensuite, le couplage inductif et les mesures à prendre pour éviter les problèmes liés à la CEM seront présentés et discutés. Un exemple concret de problème CEM sera montré. Ceci nécessite la mise en place du concept de la CEM prédictive. Cette approche est basée sur un outil mathématique qui s'appelle le développement multipolaire avec l'idée de représenter la source équivalente avec cet outil. Le couplage inductif peut être calculé à partir de ces modèles équivalents.

La caractérisation des coefficients multipolaires est basée sur le problème inverse, dont les entrées sont les mesures. Un banc pour réaliser ces mesures est donc nécessaire. Avant le début de ce travail, le laboratoire disposait d'un tel banc ; à la fin de ce chapitre, nous montrerons comment nous l'avons fait évoluer.

## 1.2 Introduction de la compatibilité électromagnétique

Depuis le début des communications radio et télégraphiques, on savait qu'un éclateur peut générer des ondes électromagnétiques riches en composantes fréquentielles. Ces ondes peuvent provoquer des interférences avec divers dispositifs électroniques tels que les récepteurs radio. De nombreuses autres sources d'émissions électromagnétiques telles que la foudre, les moteurs électriques et les lampes fluorescentes peuvent aussi générer des interférences dans ces systèmes électroniques [CGLR14]. Ces interférences électromagnétiques (IEM) entre deux systèmes peuvent engendrer un dysfonctionnement des appareillages. Un système est compatible électromagnétiquement avec son environnement s'il satisfait à trois critères [Pau06] [SL06] :

- Il n'est pas sensible aux émissions d'autres systèmes.
- Il ne provoque pas d'interférence avec d'autres systèmes.
- Il ne provoque pas d'interférence indésirable avec lui-même.

La susceptibilité est la capacité d'un dispositif ou d'un circuit à réagir à une énergie électromagnétique indésirable (le bruit). Le contraire est l'immunité. Le niveau d'immunité d'un circuit ou d'un dispositif permet de caractériser l'environnement électromagnétique dans lequel l'équipement peut fonctionner de manière satisfaisante, sans dégradation et avec une marge de sécurité définie.



L'émission concerne le potentiel d'interférence d'un produit. L'objectif de la maîtrise des émissions est de limiter l'énergie électromagnétique émise et donc de contrôler l'environnement électromagnétique dans lequel d'autres dispositifs doivent fonctionner. Par conséquent, il est désirable de contrôler l'émission afin d'assurer un environnement électromagnétique compatible.

Le couplage est le phénomène de propagation des perturbations qui se produit entre la source et la victime.

Ces trois aspects sont les trois points importants pour traiter un problème de CEM. Comme illustré en Figure 1.1, une source (émetteur) produit l'émission, qui est transférée par un chemin de transfert (couplage) vers un récepteur (victime). Cette transmission d'énergie conduit à un comportement désiré ou indésirable, ce dernier est ce qu'on appelle l'interférence.

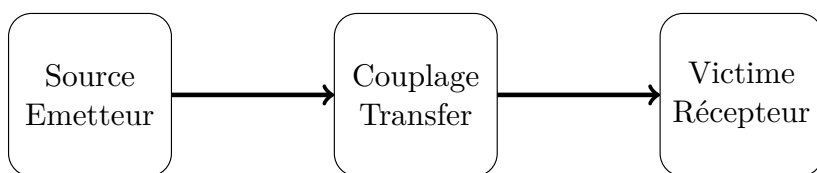


FIGURE 1.1 – Schéma de principe de la CEM

### 1.2.1 Les sources de perturbation

Les sources de perturbation peuvent être regroupées en trois catégories [Pou10] [Pau06] :

- les sources de perturbations intrinsèques : elles proviennent de fluctuations aléatoires dans les systèmes physiques, tels que les bruits thermiques et mécaniques.
- les sources naturelles : ce sont les bruits causés par les perturbations naturelles telles que la foudre et les taches solaires. Elles peuvent générer des champs électromagnétiques ionisant comme les rayons X et également des champs électromagnétiques non ionisants comme les champs électromagnétiques terrestres.
- les sources de perturbations artificielles : elles produisent des ondes électromagnétiques indésirables, comme les moteurs électriques, les interrupteurs, les ordinateurs et les émetteurs radio [Lat07].

Les ondes électromagnétiques peuvent être classées en plusieurs catégories selon leur fréquence comme montré en Figure 1.2. Dans ce document, on s'intéresse à la bande de fréquence allant de 20 kHz à 20 MHz, celle-ci correspond à l'ensemble des domaines basse fréquence (BF), moyenne fréquence (MF) et haute fréquence (HF) sur la Figure 1.2.

Comme le montre la Figure 1.1, la transmission des perturbations entre une source émettrice et une victime réceptrice peut être réduite en agissant à plusieurs niveaux :

- sur la source elle-même, au travers de sa conception intrinsèque, durant laquelle on cherchera à réduire son spectre d'émission ;
- sur la source et/ou le récepteur, en utilisant des boîtiers qui réduisent l'émission ou la réception par leurs propriétés de blindage ;
- enfin, sur le couplage lui-même [Del01] : indépendamment de la conception propre des deux systèmes qui interagissent, le couplage dépend aussi de leurs positions relatives, et

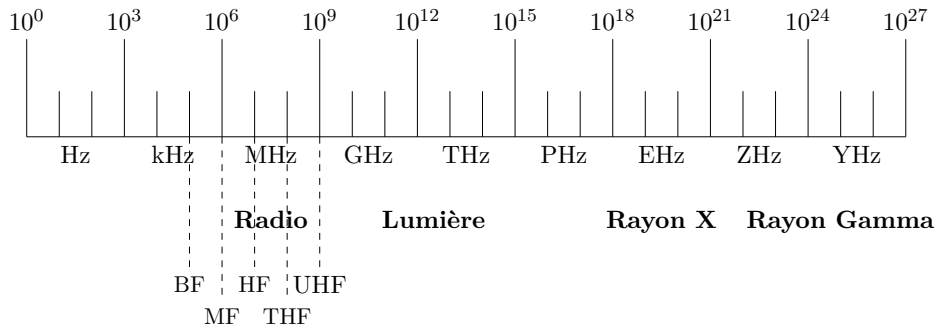


FIGURE 1.2 – Le spectre électromagnétiques

même de la position relative de certains de leurs sous-systèmes (inductances, pistes, ...).

La conception doit utiliser ces trois approches, en prenant en compte aussi leurs conséquences sur d'autres contraintes (poids, encombrement, coûts, esthétique, ...).

Ce travail s'attaque principalement aux méthodes qui doivent permettre d'intégrer les couplages dans la phase de conception initiale des produits.

## 1.2.2 Le couplage entre systèmes

Le couplage en CEM, qui représente le transfert de perturbations entre la source et la victime, peut se faire de deux façons : par couplage conduit ou rayonné comme illustré en Figure 1.3 [Lop11]. Notons dès maintenant que, dans ce texte, "rayonné" signifie seulement que le couplage existe sans contact galvanique, il ne nécessite pas pour autant une propagation d'onde, nous y reviendrons plus loin.

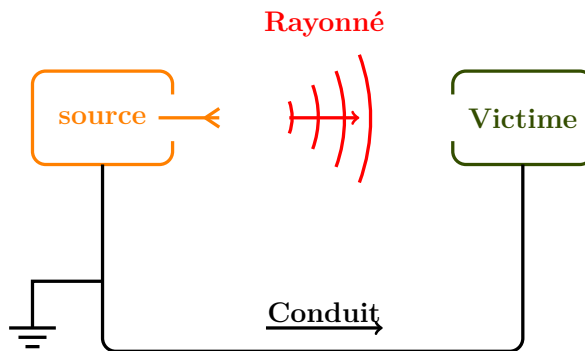


FIGURE 1.3 – Deux modes de couplages électromagnétiques

### 1.2.2.1 Le couplage conduit

Le couplage conduit se produit lorsque la propagation entre la source et le récepteur se fait par contact électrique direct avec un corps conducteur, par exemple une ligne de transmission, un fil, un câble ou une enceinte métallique. Dans le cas du couplage par conduction, il existe deux modes de propagation du signal parasite : le mode différentiel et le mode commun [Cha06a].

### 1.2.2.1.1 Mode différentiel

Le mode différentiel (MD) est la façon normale de transmission de tous les signaux électriques. On l'appelle aussi mode symétrique, mode série ou mode normal. Dans ce mode de propagation, le plan de masse ne joue aucun rôle. Le bruit peut se produire entre deux lignes quelconques du système. Dans un système monophasé, il peut s'agir de ligne de phase et de ligne de neutre comme montré en Figure 1.4. Dans un système triphasé, il peut s'agir de la phase 1 et de la phase 2. Dans les systèmes à courant continu, le bruit peut passer du plus au moins.

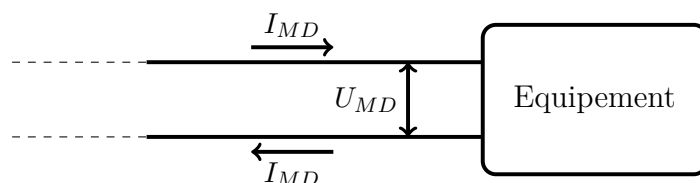


FIGURE 1.4 – Schéma de principe de mode différentiel

Le bruit de mode différentiel est le résultat de composants parasites dans un circuit. Dans un système électronique, il se produit habituellement à des fréquences inférieures et est couramment associé à la fréquence de commutation d'une alimentation à découpage. Ces perturbations ne se couplent que de façon très faible sur les câbles.

Puisque les perturbations de mode différentiel sont négligeables pour un équipement raisonnablement câblé, où se situe donc le problème principal en CEM par conduction ? La réponse est presque toujours dans le mode commun.

### 1.2.2.1.2 Mode commun

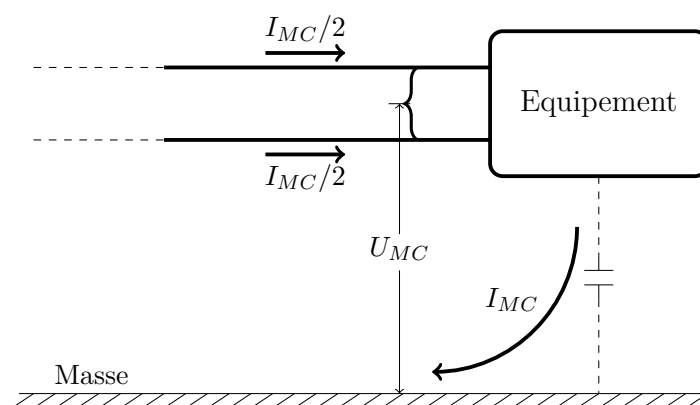


FIGURE 1.5 – Schéma de principe de mode commun

Le bruit peut également être conduit à partir de n'importe quelle ligne dans le système vers la terre. Comme illustré en Figure 1.5, le courant se propage sur tous les conducteurs dans le même sens et revient par la masse. Ce type de bruit est alors appelé bruit en mode commun. On l'appelle aussi parfois mode parallèle, mode longitudinal ou mode asymétrique. Ce type de perturbations se produit souvent entre câbles.

Le bruit en mode commun résulte de capacités parasites dans un système, qui se produisent souvent entre les semi-conducteurs et les dissipateurs de chaleur. Il est souvent dominant en

haute fréquence. Par exemple, les signaux des téléscripteurs étaient très perturbés lorsqu'ils utilisaient la terre comme conducteur de retour. Pour résoudre ce problème, les données ne sont plus transmises en mode commun.

### 1.2.2.2 Le couplage rayonné

Le bruit peut non seulement se propager par contacts directs entre conducteurs, mais aussi à travers l'air (Figure 1.3). Une fois les signaux générés dans les systèmes électriques et électroniques, ils peuvent ensuite se propager à l'intérieur du système (intra-système) ou même à l'extérieur (inter-système) simplement suivant le chemin de moindre résistance. Cette perturbation se transmet via les champs magnétique, électrique ou électromagnétique et peut donc être captée par d'autres équipements, sans contact électrique direct. Le fonctionnement de l'appareil doit être satisfaisant lorsqu'il est dans l'environnement d'un champ électromagnétique perturbateur, et les champs qu'il produit autour de lui ne doivent pas être trop importants.

On peut distinguer deux modes de couplage rayonné : le couplage en champ proche et le couplage en champ lointain. Comme indiqué par leurs noms, le couplage en champ proche signifie que la source et la victime sont placés à proximité l'un de l'autre et le couplage en champ lointain signifie que la distance entre eux est très grande par rapport à leurs dimensions et la longueur d'onde. Pour le couplage en champ lointain, la partie radiative de l'énergie de la source est prédominante et on peut parler d'une onde électromagnétique sphérique qui se propage. Pour le couplage en champ proche, on ne peut pas parler de rayonnement électromagnétique, puisqu'une partie importante de l'énergie électrique et magnétique n'est pas liée à une onde qui se propage.

La limite entre le champ proche et le champ lointain est un peu floue et dépend de la fréquence et des dimensions de l'antenne. En général, on peut considérer qu'on est dans le cas du couplage en champ proche lorsque la plus grande dimension  $D$  des source et victime, et la distance  $L$  entre elles sont suffisamment petites devant la longueur d'onde  $\lambda$ . La limite peut être définie par le critère suivant :

$$L \ll \frac{2D^2}{\lambda} \quad (1.1)$$

Le couplage en champ proche peut encore être regroupé en deux catégories :

- le couplage capacitif : il existe toujours des capacités partielles entre les parties conductrices d'un ou plusieurs dispositifs. Une différence de potentiel variable entre deux dispositifs conduit à l'apparition d'un courant de déplacement à travers cette capacité, donc d'un courant de conduction dans les dispositifs eux-mêmes. Ce type de couplage apparaît là où le champ électrique domine par rapport au champ magnétique. Pour cette raison, il s'appelle aussi le couplage électrique.
- le couplage inductif : il existe toujours des inductances mutuelles entre les branches de circuits électriques voisins. Un courant variable dans un dispositif induit un courant parasite dans l'autre. Cela peut être modélisé par une inductance mutuelle. Au contraire du couplage capacitif, ce type de couplage apparaît plus souvent lorsque le champ magnétique domine par rapport au champ électrique. Pour cette raison, il s'appelle aussi le couplage magnétique.

Dans ce document, on s'intéresse au couplage inductif, c'est-à-dire au calcul de l'inductance

mutuelle entre deux systèmes, qui sera détaillé dans le chapitre 2.

## 1.3 Prise en compte de la CEM dans la conception d'EDP

Avant mise sur le marché d'un appareil électrique ou électronique, il est exigé qu'il se conforme aux normes de la CEM. Les normes CEM définissent, pour chaque gamme de fréquence, la limite de rayonnement acceptable pour prévenir les interférences avec les autres appareils. Les normes internationales sont élaborées pour respecter les principes définis par l'OMC (Organisation mondiale du commerce). A l'origine, la plupart de ces normes venaient des secteurs militaires et de l'aviation civile. Ensuite, l'utilisation des composants électronique s'est étendue à presque tous les aspects de nos vies. Les systèmes de transmissions et de communications sans fil sont devenus de plus en plus courants, les exigences de CEM ont donc été développées dans d'autres secteurs. De plus, étant donné que les systèmes réglementaires varient d'un pays à l'autre, les systèmes de conformité dans chaque pays sont également très différents : normes européennes, américaines, chinoises, etc.

### 1.3.1 Solutions de minimisation des perturbations

Différents tests de validation sont nécessaires afin de vérifier le respect des normes de CEM par un système donné. Ces tests nécessitent souvent des moyens d'essais spécifiques et coûteux. En effet, pour réduire les réflexions et les bruits externes, les mesures doivent être réalisées dans une chambre anéchoïque ou semi-anéchoïque dont un exemple est présenté en Figure 1.6.

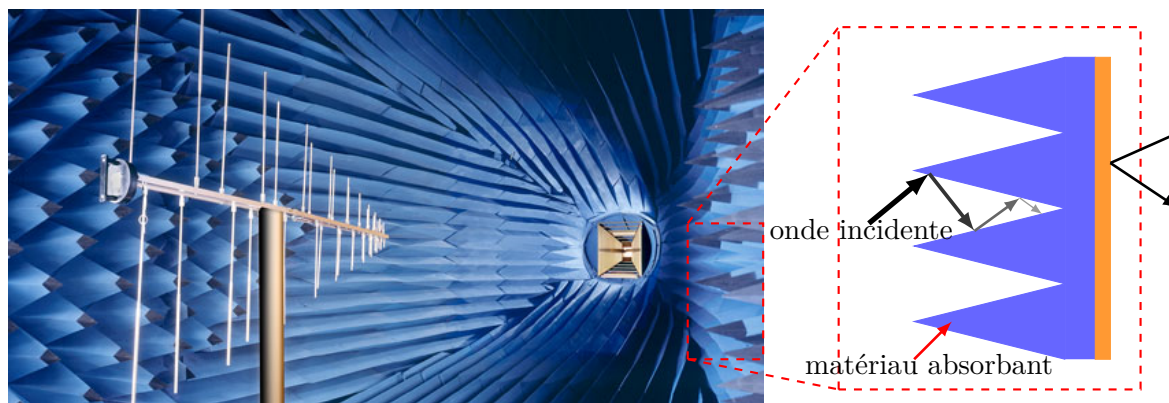


FIGURE 1.6 – Chambre anéchoïque

La partie orange représente la couche conductive, qui permet de bloquer les perturbations venant de l'extérieur. Les parois dans la chambre sont composées de série de cônes, qui permettent de limiter les réflexions directes vers la chambre en multipliant les réflexions locales entre cônes [Cha06b]. En même temps, les surfaces intérieures de la chambre anéchoïque sont recouvertes d'un matériau absorbant. Ainsi, une partie de l'énergie est absorbée à chacune de ces réflexions locales. L'énergie finalement réfléchi vers la chambre est ainsi beaucoup plus faible que l'énergie incidente vers la paroi.

Si jamais après les mesures, on trouve que les normes de CEM ne sont pas toutes respectées, le produit ne peut pas être mis sur le marché. Un nouveau cycle de conception doit être lancé avec quelques modifications sur le prototype afin d'essayer de respecter les normes CEM. En Figure 1.7 [Lab10], l'enchaînement des principales étapes de conception d'un produit, du cahier de charges jusqu'à sa mise sur le marché, est présenté. Le processus complet de conception d'un produit comprend deux parties : la conception virtuelle et le test sur le dispositif réel.

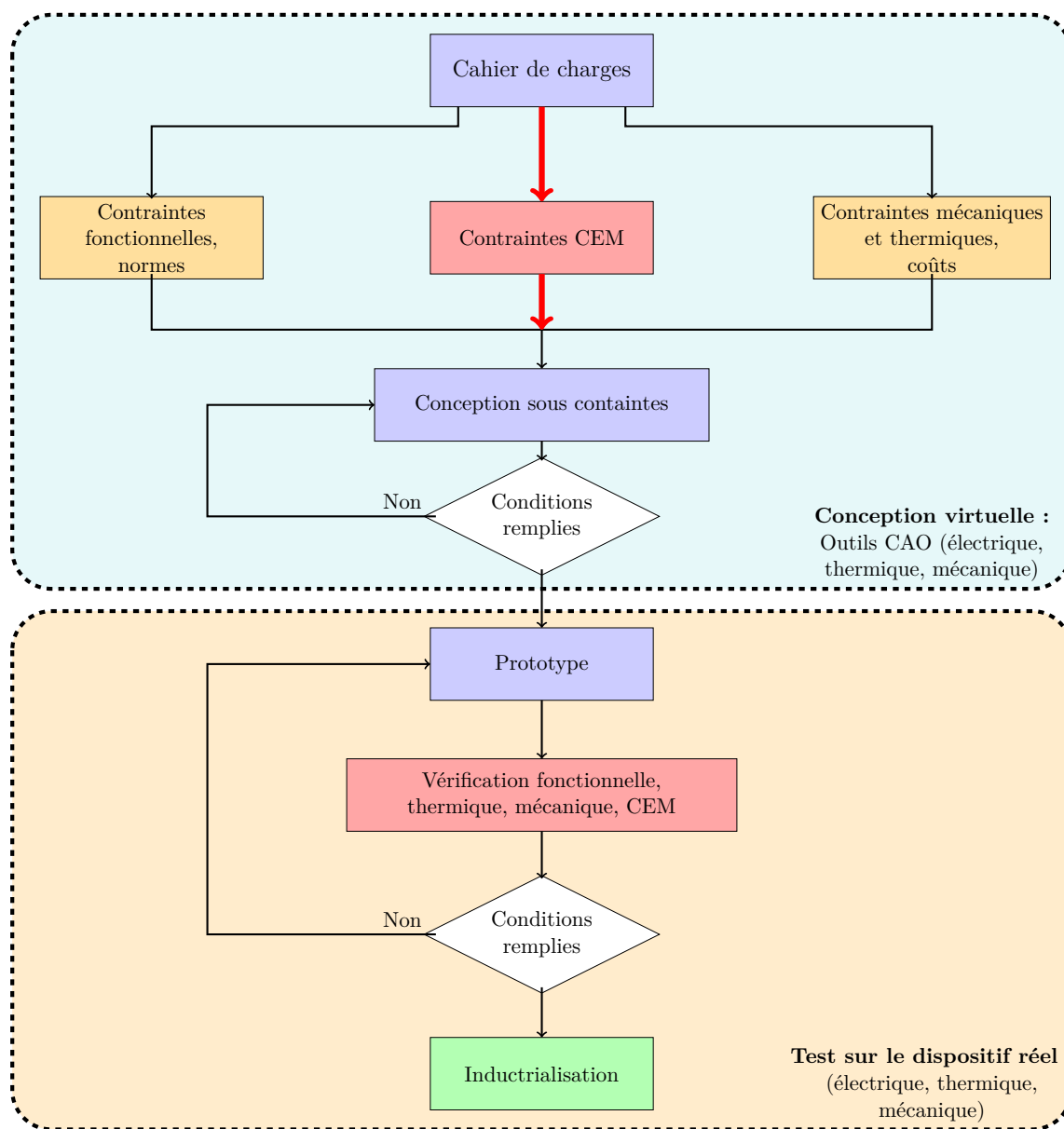


FIGURE 1.7 – Processus de conception d'un produit

Afin de minimiser les temps et les coûts de développement, il est important de prendre en compte les contraintes CEM le plus tôt possible, c'est-à-dire dès la phase de prototype virtuel en même temps que les contraintes fonctionnelles, thermiques, mécaniques, économiques... Pour ce faire, il faut des outils logiciels non seulement dédiés à la CEM, mais aussi compatibles avec les outils de conception déjà existants. L'utilisation de ce type de logiciel comme COMSOL, ANSYS et Flux exige beaucoup de ressources humaines et matérielles. Pour cette raison, un

certain nombre d'entreprises ne commencent à prendre en considération les contraintes de la CEM que lors des tests sur les dispositifs réels, c'est-à-dire lorsque le prototype est déjà fabriqué. Notre approche pour régler les problèmes liés aux couplages inductifs, basée sur la construction de modèles équivalents à partir de mesures, est détaillée en section 1.4.

Une fois que toutes les contraintes sont respectées dans la conception virtuelle, on peut donc entrer dans la deuxième partie : test sur le dispositif réel, y compris bien sûr les tests de la CEM. Selon les résultats, il y a deux possibilités : soit les résultats obtenus sont conformes aux attentes des normes et les processus de fabrication peuvent être lancés, ou bien ils ne sont pas conformes ; il faut alors modifier le prototype pour réduire les interférences.

Il existe trois voies pour réduire les interférences électromagnétiques (Figure 1.1) :

- Réduire les émissions indésirables de la source
- Rendre le récepteur moins sensible à l'émission
- Rendre le chemin de couplage le plus inefficace possible, ce qui est une combinaison des deux méthodes précédentes

Afin de ne pas perturber le fonctionnement normal de l'instrument, il est souvent exigé d'ajouter d'autres éléments d'atténuation sur les chemins de propagations.

### 1.3.2 Les filtres pour la CEM

Pour réduire les perturbations électromagnétiques, la solution la plus couramment utilisée est d'ajouter un filtre, dont il existe de nombreuses variétés. Le choix du filtre résulte d'une combinaison de plusieurs facteurs comme l'atténuation exigée et l'encombrement, le poids, le prix etc.

Ces filtres peuvent également être classés par leurs caractéristiques fréquentielles comme [Sch01] :

- filtre passe-bas : garde les fréquences au-dessous d'une fréquence déterminée, appelée fréquence de coupure, et atténue les autres (hautes fréquences).
- filtre passe-haut : garde les fréquences au-dessus d'une fréquence déterminée, et atténue les autres (basses fréquences).
- filtre passe-bande : présente un gain relativement supérieur pour une certaine bande de fréquences.
- filtre coupe-bande : est le complémentaire du passe-bande ; il atténue une plage de fréquences.
- filtre déphaseurs : présente un gain identique sur toute la plage de fréquence utilisée, mais la phase relative des fréquences qui composent le signal varie selon la fréquence.
- filtre en peigne : présente un gain ou une atténuation pour une fréquence et toutes ses harmoniques.

A titre d'exemple, un convertisseur statique industriel est représenté en Figure 1.8.a (modèle Schneider). Afin de garantir un bon fonctionnement du convertisseur, un filtre passe-bas est intégré pour éviter les perturbations conduites de mode commun en hautes fréquences. Le filtre possède trois composants électriques : une bobine torique et deux capacités. Le schéma électrique de ce filtre en  $\pi$  est montré à droite. La performance de ce filtre est donnée sur la Figure 1.9 en fonction de la fréquence [WLO06] [ZBV<sup>+</sup>10].

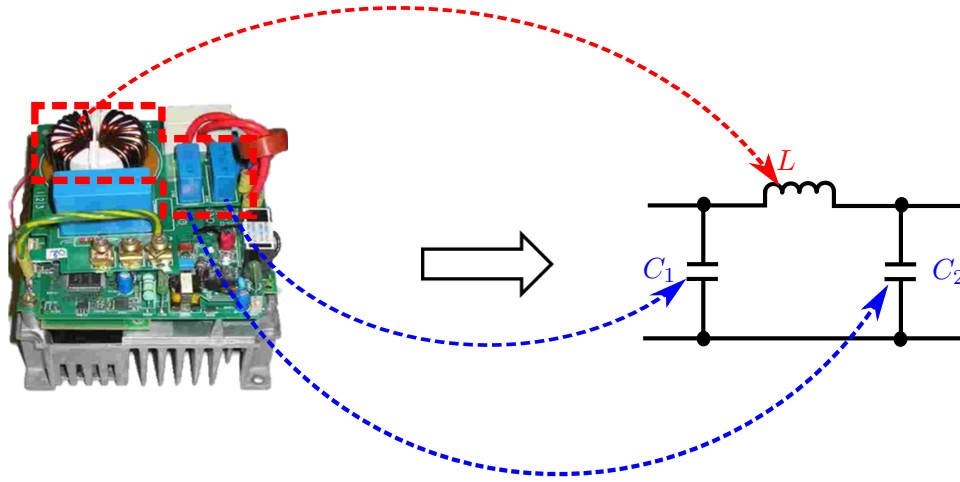


FIGURE 1.8 – a) Convertisseur statique avec son filtre b) schéma électrique du filtre passe-bas

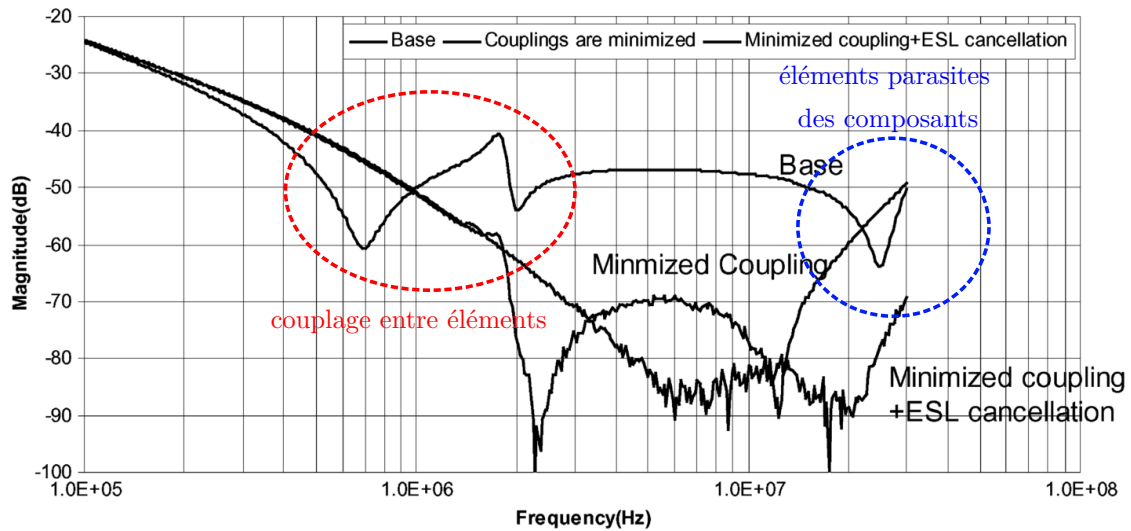


FIGURE 1.9 – Performance du filtre du convertisseur statique

D'après la figure, on peut constater que la performance réelle du filtre (courbe "Base" sur la figure) ne correspond pas parfaitement à la performance idéale d'un filtre passe-bas. Il y a deux résonances qui se situent respectivement à 1 MHz et 30 MHz. Ces différences sont entourées par les lignes pointillées sur la figure. La résonance à 30 MHz est due aux éléments parasites des composants. En pratique, chaque composant du filtre comporte des éléments parasites intrinsèques. Prenant le filtre en  $\pi$  sur la Figure 1.8 comme un exemple, la bobine torique et les deux capacités possèdent toutes une résistance, une inductance et une capacité intrinsèques. Ces éléments parasites intrinsèques peuvent fortement influencer sur le fonctionnement du filtre en haute fréquence. Le lecteur trouvera plus de détails dans [WLO06].

Comme expliqué dans la section 1.2.2.2, le couplage inductif se produit lorsqu'un courant dans un conducteur génère un champ magnétique variable, ce dernier peut induire une force électromotrice dans le conducteur voisin. Il en résulte souvent un courant parasite dans le deuxième conducteur, phénomène qui peut être décrit par une inductance mutuelle. Dans ce filtre passe-



bas, il existe trois inductances mutuelles :

- $M_{LC_1}$  : l'inductance mutuelle entre  $L$  et  $C_1$
- $M_{LC_2}$  : l'inductance mutuelle entre  $L$  et  $C_2$
- $M_{C_1C_2}$  : l'inductance mutuelle entre  $C_1$  et  $C_2$

Ces trois inductances mutuelles sont les responsables de la première résonance à environ 1 MHz en Figure 1.9. Par conséquent, afin d'améliorer la performance de ce filtre, il faut prendre des mesures pour réduire ces inductances mutuelles. Dans [WLO04], quelques filtres typiques sont étudiés et des mesures pour améliorer leur fonctionnement sont proposées. En Figure 1.9, la première résonance à 1 MHz est éliminée en minimisant les couplages entre les composants. Pour ce faire, il existe trois façons principales :

1. Blinder tous les composants du filtre. Cette approche est très efficace pour réduire les couplages entre les éléments si les blindages sont bien intégrés. Cependant, elle ne sera jamais réalisable en pratique à cause de son prix extrêmement élevé et de l'augmentation du volume du filtre causée par ces blindages.
2. Maintenir les composants suffisamment loin les uns des autres pour réduire le couplage inductif. Cette approche est certainement utile, mais l'inconvénient est qu'elle conduit à une taille de filtre beaucoup plus grande.
3. Optimiser les orientations des composants. L'avantage de cette approche est qu'elle n'a pas de coût supplémentaire et elle n'augmente pas la taille du filtre. Son point faible est que pour les filtres complexes avec beaucoup de composants, il est très difficile ou même impossible de trouver une combinaison optimale pour que les inductances mutuelles entre chaque paire de composants soient négligeables.

Ces trois approches ont toutes leur propres avantages et inconvénients, il faut donc bien choisir une méthode selon la situation réelle pour réduire les couplages inductifs entre les composants d'un filtre. Les approches 2 et 3 sont bien sûr préférées pour leur prix et leur commodité. Dans des circonstances normales, une combinaison des approches 2 et 3 est suffisante pour éliminer les dysfonctionnements d'un filtre à cause du couplage inductif. Cependant, l'approche pour réduire ces couplages inductifs est jusqu'à ce jour restée essentiellement empirique, et peut demander de longs ajustements sur prototype lorsque le filtre est complexe. Pour résoudre ce problème, une méthode prédictive est proposée dans ce travail. Elle permet de déterminer a priori les inductances mutuelles entre composants, et donc de les prendre en compte dans la conception, avant fabrication d'une maquette.

## 1.4 La CEM prédictive

Dans la dernière section, on a vu que le couplage inductif entre les dispositifs est un sujet très important dans le domaine de la CEM. Les couplages inductifs entre les composants d'un filtre de mode commun sont aussi cause de dysfonctionnements à basse fréquence. La réduction du couplage inductif est très importante que ce soit pour réduire les perturbations électromagnétiques entre deux dispositifs, ou pour améliorer la performance d'un filtre. Néanmoins, ces couplages inductifs sont souvent pris en considération durant la phase expérimentale. Si jamais les tests sont négatifs, des modifications sur la maquette sont nécessaires. Ceci est souvent un

processus empirique et cyclique jusqu'à ce que les exigences soient satisfaites. Le coût de l'ensemble du processus peut donc devenir extrêmement important comme le montre la Figure 1.10 [Ott09].

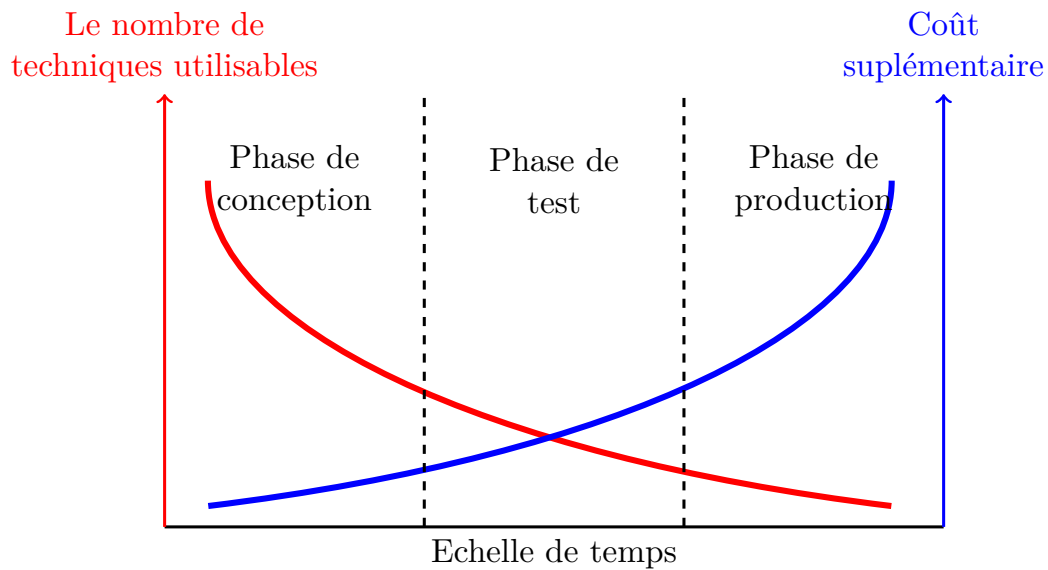


FIGURE 1.10 – Nombre de techniques utilisables et coût supplémentaire pour résoudre les problèmes de CEM en fonction du temps pendant le développement d'un produit

Cette figure représente les relations entre le nombre de technologies utilisables et le coût supplémentaire pour résoudre les problèmes de CEM, plus précisément les problèmes de couplage inductif et le temps de développement d'un produit. Plus tôt les problèmes sont pris en compte, plus les possibilités pour les résoudre sont nombreuses, moins le sur-coût est élevé. L'idéal, bien sûr, est de les penser dès la phase de conception comme déjà mentionné dans la section 1.3. Cette approche est appelée la CEM prédictive.

Le calcul de l'inductance mutuelle entre deux éléments électriques peut se faire à l'aide d'outils numériques tels que la méthode des éléments finis ou la méthode PEEC [AAC<sup>+</sup>10] pour les circuits imprimés. Cependant, le coût de ces méthodes devient très important lorsque les systèmes sont complexes. Une méthode a été proposée au Laboratoire Ampère, qui est complémentaire et propose une solution dans le cas où les systèmes sont difficiles à modéliser par des techniques numériques classiques. L'idée de la méthode proposée est d'établir pour chaque composant (considéré comme "seul au monde") un modèle de rayonnement, pour une large bande de fréquences, à l'aide d'un développement harmonique multipolaire. Cette représentation présente en particulier l'avantage de permettre un calcul direct des inductances mutuelles, en fonction de la position relative des deux composants et des deux développements harmoniques. La méthode et les outils mathématiques seront détaillés dans les chapitres 2 et 3.

## 1.5 L'évolution du banc de mesure

La méthode basée sur le développement multipolaire a été proposée et développée depuis quelques années. L'avantage de cette approche est qu'elle demande très peu de paramètres pour

décrire le champ électromagnétique rayonné par un système. La partie la plus importante et la plus difficile est de caractériser ces paramètres. Ces coefficients peuvent, bien sûr être obtenus par des simulations numériques. Cependant, la procédure devient difficile quand les systèmes sont complexes. Afin d'éviter des sur-coûts et des temps très élevés dans les simulations (problèmes directs), on propose d'obtenir les coefficients du développement harmonique à partir de mesures de champ ou de flux, en résolvant un problème inverse. Depuis 1989, plusieurs systèmes de mesures ont été proposés et améliorés. Nous les décrivons ci-dessous.

### 1.5.1 Système LLA

Le système LLA (Large Loop Antenna) a été proposé et construit en 1989 [BV89]. Le système de mesure consiste en trois grandes antennes boucles orthogonales (voir Figure 1.11).

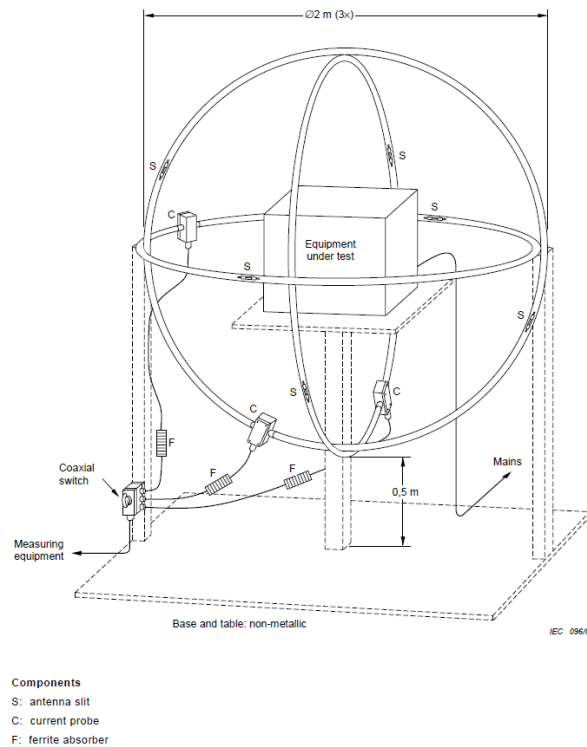


FIGURE 1.11 – Schéma de principe de système de LLA [LLA08]

Chaque boucle de mesure fait 1 m de rayon. L'Équipement Sous Test (EST) est placé au centre du système, sur un support non métallique. Le dispositif mesure le flux à travers les spires, c'est-à-dire l'intégrale de l'induction magnétique. Les spires sont réalisées avec le câble coaxial, ce qui permet de limiter l'effet du champ électrique [BV89]. Le courant circulant dans les boucles, qui est quasiment proportionnel au flux magnétique à travers ces boucles, peut être mesuré avec des sondes de courant. Par rapport à la mesure ponctuelle qui est plus conventionnelle, cette méthode intégrale possède deux avantages principaux. Le premier est qu'elle permet de réduire l'impact des erreurs de positionnement du capteur et le bruit d'environnement [Zan11], parce que les mesures sont plus sensibles puisque les flux sont proportionnels à la surface de la boucle, donc au carré de son rayon. Le deuxième avantage est que les coefficients du développement

multipolaire peuvent directement être déterminés à partir des mesures de flux magnétique. Ensuite, quelques améliorations ont été réalisées sur le système LLA, par exemple les ballasts, afin de rendre le système moins sensible à l'environnement électromagnétique [SGTS04]. Ce système est fiable, commode et insensible au bruit d'environnement, par contre il est limité à la détermination des 3 composants dipolaires, à l'exclusion de tout ordre supérieur.

### 1.5.2 Système de filtre spatial en champ proche

Afin de décrire correctement le rayonnement d'un dispositif électrique typique, les coefficients dipolaires sont souvent insuffisants. Une méthode basée sur le principe de filtre spatial a donc été proposée [VCS<sup>+</sup>08] dans l'objectif de mesurer directement les coefficients multipolaires d'ordres supérieurs à 1. La conception du capteur reste la même que celle de LLA, qui permet de mesurer le flux magnétique à travers d'une boucle fermée. La seule différence est que cette fois, chaque capteur est constitué de plusieurs spires. L'idée est que selon la forme du système, chaque spire est sensible à une composante spécifique du développement multipolaire. Le principe est montré en Figure 1.12.

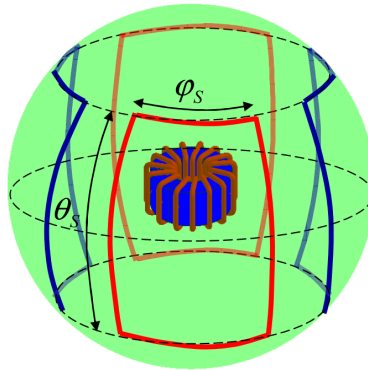
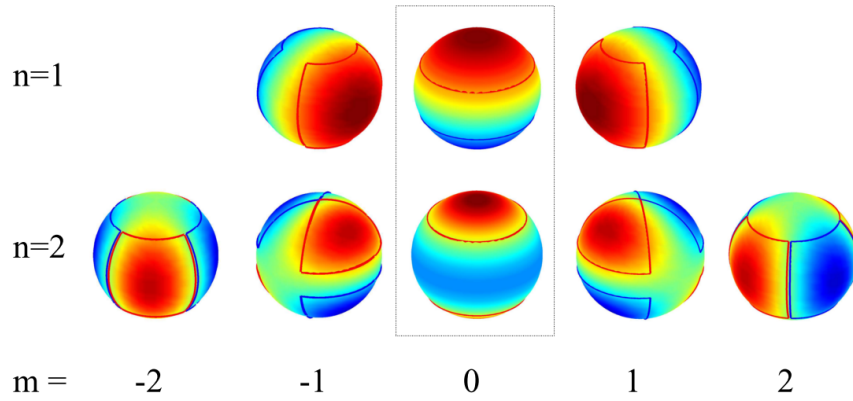


FIGURE 1.12 – Schéma de principe de capteur de filtre spatial [Vin09]

Le principe est de faire des sommes ou des différences entre les flux mesurés. Ceci est symbolisé (Figure 1.12) en dessinant en rouge les spires avec un flux positif, en bleu avec un flux négatif. Cette étape permet d'exclure directement les composants d'ordre paire ou impaire selon addition ou soustraction. Ensuite, les deux paramètres (élévation ( $\varphi_s$ ) et azimut ( $\theta_s$ )) sont calculés pour annuler les flux des autres composantes multipolaires, avec une hypothèse très importante : les composantes multipolaires d'ordre supérieur à 4 sont négligées, ce qui impose de procéder aux mesures à une distance "suffisante" du dispositif, et par la suite de ne pas exploiter les résultats pour des distances inférieures. Les principes et calculs concrets seront expliqués au Chapitre 4. Au final, les formes de huit capteurs pour les composants multipolaires d'ordre 1 et 2 sont présentées en Figure 1.13.

Comme sur la Figure 1.12, la couleur de bobine représente le sens du flux magnétique.  $n$  et  $m$  sont les paramètres des composants multipolaires, qui seront aussi détaillés dans le chapitre 2. Malheureusement, cette méthode de filtre spatial ne peut pas être réalisée dans la pratique à cause des formes exotiques des capteurs. Un autre système de mesure basé sur le même principe, mais n'utilisant comme capteurs que des combinaisons de boucles circulaires, a été conçu et


 FIGURE 1.13 – Huit capteurs pour identifier les deux premiers ordres [VCS<sup>+</sup>10]

développé, qui est présenté dans la section suivante.

### 1.5.3 Système de capteurs rotatifs

Le dispositif de mesure montré en Figure 1.13 est très difficile à construire. Il faut 3 fois 2 boucles pour les 3 composantes dipolaires (ordre  $n=1$ ) et 18 boucles pour l'ordre 2, pour réaliser en une fois les mesures jusqu'aux composantes quadripolaires... Les bobines ne sont pas situées sur les surfaces planes et sont trop nombreuses à construire. Même pour une identification dipolaire simple, la solution reste très difficile. Une simplification de cette configuration théorique est donc nécessaire. Une méthode a été proposée, basée sur les rotations des capteurs en profitant des propriétés des développement multipolaires. Une première version de banc de mesure a été conçue en 2010, elle est représentée en Figure 1.14 [VCSB10].

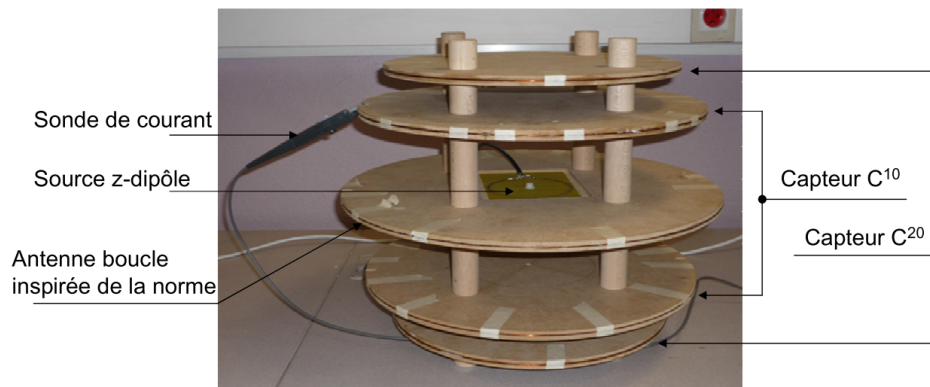


FIGURE 1.14 – Prototype de mesure pour les deux premiers ordres

Cette approche est également basée sur l'hypothèse que la source de rayonnement ne possède pas de composantes multipolaires d'ordres plus élevés que 4. Le banc de mesure consiste en 5 capteurs sous forme de boucles et l'EST est placé au centre. Les coefficients de développement multipolaire peuvent être déterminés après quelques calculs. Néanmoins, l'identification des coefficients multipolaires est limitée à l'ordre 2 de moment nul, c'est-à-dire uniquement les composantes dipolaire et quadripolaire. Les rayonnements électromagnétiques des dispositifs

électriques sont souvent très complexes et l'ordre 2 ne peut pas être suffisant pour modéliser ces rayonnements. Quelques modifications ont donc été réalisées sur le banc de mesure afin de caractériser les composantes de moment non nul et d'ordre plus élevé.

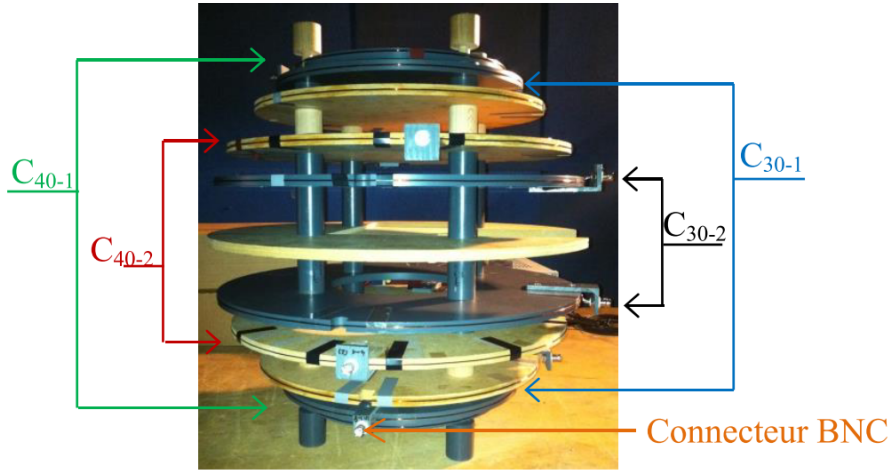


FIGURE 1.15 – Prototype de mesure pour les quatre premiers ordres

La nouvelle version du banc de mesure est présentée en Figure 1.15 [HBV14]. Elle permet de déterminer les coefficients multipolaires jusqu'à l'ordre 4. Le banc autorise deux rotations suivant deux axes  $\theta$  et  $\phi$ . Le principe et l'hypothèse sur l'ordre 4 restent les mêmes que pour le banc limité aux deux premiers ordres. Dans le banc précédent, tous les capteurs bobines sont court-circuités. Ceci conduit à des effets de couplage magnétique entre capteurs lorsqu'une spire est mesurée. Un post-traitement est donc nécessaire pour compenser les effets de ces couplages [Zan11]. Dans ce nouveau banc de mesure, un seul capteur en court-circuit est utilisé pour chaque mesure, toutes les autres bobines étant laissées en circuit ouvert (en utilisant le connecteur BNC). Plus aucun effet de couplage indésirable n'intervient, le processus de calcul est donc moins complexe et moins d'erreurs sont introduites. Les calculs pour déterminer les coefficients multipolaires à partir des mesures seront détaillés dans le chapitre 4.

Cependant, avec ce banc de mesure, l'identification des 24 coefficients nécessaires jusqu'à l'ordre 4 nécessite 120 mesures de flux magnétiques, avec 25 orientations différentes de l'EST. Ceci exige énormément de temps pour réaliser une série de mesure et ne peut pas être mis en œuvre efficacement sans une automatisation avancée de l'ensemble du processus. Notons aussi que les composantes du développement harmonique ne sont pas mesurées au même instant (puisque'il faut changer 25 fois l'orientation relative entre dispositif et capteur). Dès lors, des questions comme les différences de phases entre composantes, à une fréquence donnée, seront difficiles à appréhender.

#### 1.5.4 Système de mesure automatisé du LMAG

Un banc de mesure automatisé est en cours de développement au LMAG (Ecole Polytechnique de l'Université de São Paulo) présenté sur la Figure 1.16 [BCK<sup>+</sup>17].

Ce banc de mesure ressemble à celui de la Figure 1.14, parce qu'il utilise le même système

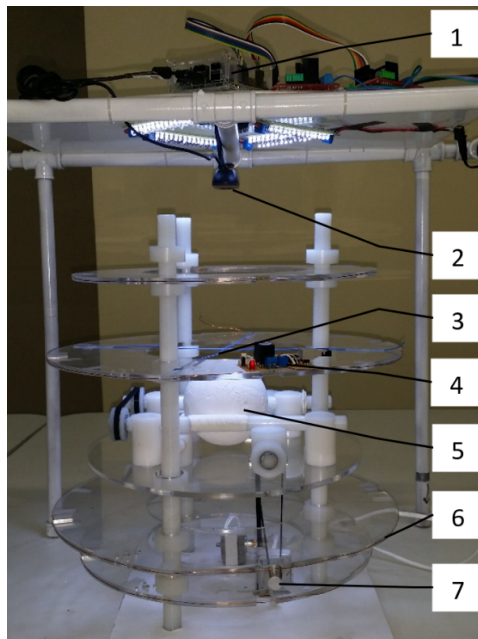


FIGURE 1.16 – Banc de mesure automatisé développé au LMAG [BCK<sup>+</sup>17]

de spires. L'EST est positionné au centre du système, dans une sphère qui permet les rotations suivant deux axes via des moteurs pas à pas. La position précise est contrôlée par une caméra, avec un processus itératif de repositionnement. Afin d'éviter les perturbations des équipements, les moteurs sont tous hors tension pendant les mesures magnétiques. Les éléments principaux dans ce système sont :

1. Raspberry Pi : l'ensemble du contrôle des mouvements, de la collecte d'images et du traitement des données. Il est assuré par un système informatique de Raspberry pi, utilisant Python et les bibliothèques associées.
2. Caméra de rétroaction visuelle : la caméra qui est actuellement utilisée a une résolution de  $640 \times 480$  pixels, ce qui donne une précision de  $0,35 \text{ mm/px}$  sur le dessus de la surface de la sphère. Autrement dit, le système possède une précision d'environ  $1^\circ$ .
3. Marqueur fixe : un repère fixe permet à la caméra d'obtenir la position actuelle de l'EST.
4. Sonde de courant : elle permet de mesurer le courant induit circulant dans les capteurs. Avec cette mesure, le flux magnétique à travers les bobines peut être déduit.
5. Sphère d'EST : l'EST est contenu et alimenté dans la sphère. L'idée est d'avoir un contrôle de mouvement précis de l'EST suivant deux angles.
6. Capteur de boucle : le principe de ce type de capteur est déjà présenté dans la section 1.5.3
7. Moteurs pas à pas : ils sont connectés à des poulies pour faire tourner la sphère de EST suivant deux angles.

Ce système de mesure automatisé permet d'accomplir toutes les mesures mentionnées dans la section 1.5.3. Il reste encore la calibration et la validation expérimentale à faire avant de le mettre en application.

## 1.6 Conclusion

Une brève introduction de la compatibilité électromagnétique (CEM) est faite au début de ce chapitre. La définition de la CEM est donnée, qui consiste en trois critères : la susceptibilité, l'émission et le couplage. Le couplage peut encore être divisé en conduit et rayonné. Dans ce travail de recherche, on se concentre sur le couplage rayonné, et nous nous limiterons au "champ proche", c'est-à-dire pour l'essentiel aux couplages inductifs.

Afin d'éviter les perturbations par les ondes électromagnétiques, de nombreuses normes de la CEM sont proposées. Pour vérifier qu'un produit industriel respecte bien les normes CEM, différents types de mesures sont nécessaires. Si jamais les mesures sont défavorables, un nouveau cycle de conception et de mesure doit être lancé pour tenter de réduire les problèmes de CEM. Ce processus itératif exige souvent beaucoup de temps et un coût supplémentaire. Ceci est la première motivation pour la recherche en CEM.

Le deuxième problème se produit au niveau du filtre CEM. La solution la plus couramment utilisée pour résoudre un problème CEM est d'insérer un filtre CEM. Dans la section 1.3.2, un exemple d'un filtre  $\pi$  de mode commun dans un convertisseur statique est présenté. Une grande résonance apparaît à cause des inductances mutuelles entre les éléments dans ce filtre. Pour améliorer la performance du filtre, une approche efficace et peu coûteuse est d'améliorer les positions et les orientations relatives des composants électriques. Ceci est aussi une approche empirique et itératif. On retrouve ainsi le premier problème.

La CEM prédictive est proposée afin de résoudre les deux problèmes ci-dessus. L'approche est basée sur la modélisation du rayonnement des composants de systèmes par des développements harmoniques multipolaires. La caractérisation des coefficients multipolaires est fondée sur les mesures de flux magnétiques.

L'évolution du banc de mesure est discutée à la fin du chapitre. Du système LLA en 1989, jusqu'au nouveau système automatisé en cours de développement au Brésil, rien ne cesse de progresser. Un nouveau banc de mesure automatisé est aussi conçu, fabriqué, validé au Laboratoire Ampère. Sa conception sera détaillée au chapitre 5, et des résultats de mesures y seront également présentés

Le chapitre suivant est consacré à la description de la méthode du développement multipolaire, y compris ses origines, ses caractéristiques et comment elle est utilisée dans le calcul de l'inductance mutuelle.





# Développement en harmoniques sphériques

---

## 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter la méthode pour construire les sources équivalentes ponctuelles du rayonnement des systèmes modélisés. Cela est basé sur un outil qui s'appelle le développement en harmoniques sphériques. Nous illustrons l'origine et les caractéristiques de ces fonctions harmoniques et comment elles peuvent nous aider pour déterminer le couplage inductif entre deux systèmes.

Avant de détailler la méthode utilisée, ce chapitre commence par un bref rappel des bases fondamentales en électromagnétisme.

## 2.2 Rappel des équations de Maxwell

Les quatre équations de Maxwell de forme intégrale permettent de décrire entièrement le comportement électromagnétique d'un système, qui relie les grandeurs électriques et magnétiques [Fit08] [Fle08] :

**Equation de Maxwell-Ampère :**

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.1)$$

- $S$  est une surface avec une frontière fermée  $\partial S$
- $\mathbf{H}$  : l'intensité du champ magnétique
- $\mathbf{D}$  : l'induction électrique
- $\mathbf{J}$  : la densité de courant électrique

Cette équation relie le champ magnétique à ses sources et au champ électrique. Elle signifie que la circulation du champ magnétique calculée sur un contour fermé quelconque est nulle, sauf si le courant total (conduction et déplacement) qui passe à travers cette boucle n'est pas nul ; dans ce cas, la circulation du champ est égale à ce courant, qui peut de ce fait être considéré comme la source de la partie "rotationnelle" du champ, là où se trouve le contour considéré.

**Equation de Maxwell-Faraday :**

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.2)$$

- $\mathbf{E}$  : le champ électrique

- $\mathbf{B}$  : l'induction magnétique

La surface  $S$  et son contour étant ici aussi arbitraires, cette équation montre qu'à un champ  $\mathbf{B}$  variable dans le temps est associé un champ électrique dont la circulation "autour" de ce champ est proportionnelle à l'intensité de ce champ et à sa vitesse de variation. Ce champ  $\mathbf{B}$  est de ce fait appelé (en français) champ d'induction magnétique. L'équation (2.2) décrit les phénomènes d'induction.

#### Equation de Maxwell-Gauss

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_{\Omega} \rho \cdot dV \quad (2.3)$$

- $\Omega$  : un volume fixe avec une surface de délimitation fermée  $\partial\Omega$
- $\rho$  : la densité volumique de charge électrique

Cette équation signifie que le flux du déplacement électrique sortant d'un volume arbitraire est égal à la charge électrique totale contenue dans ce volume. Ce flux n'est donc pas "conservatif" dans les régions de l'espace où la densité de charge n'est pas nulle.

#### Equation du flux magnétique

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.4)$$

Cette équation signifie que le flux magnétique total à travers toute surface fermée est nul. C'est une propriété intrinsèque de  $\mathbf{B}$  qui montre que le champ magnétique ne peut pas diverger depuis une région de l'espace, ou encore (par comparaison avec (2.3)), qu'il n'existe pas de "charges magnétiques".

Les équations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4) nous permettent de décrire toutes les phénomènes électromagnétiques. Elles sont souvent exprimées sous forme différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \text{équation de Maxwell-Ampère} \quad (2.5a) \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{équation de Maxwell-Faraday} \quad (2.5b) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho & \text{équation de Maxwell-Gauss} \quad (2.5c) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{équation du flux magnétique} \quad (2.5d) \end{array} \right.$$

Afin de compléter les équations de Maxwell, les lois constitutives des matériaux sont ajoutées. Dans le vide, dans l'air, et dans de nombreux matériaux, ces lois permettent d'écrire des liens directs d'une part entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  (les grandeurs électriques), d'autre part entre  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$  (les grandeurs magnétiques).

En particulier dans le vide (et dans l'air, le plus souvent), on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$\mu_0$  est la perméabilité de l'espace, qui égale à  $4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m.  $\varepsilon_0$  est la permittivité de l'espace libre qui égale à  $\frac{1}{c^2 \mu_0}$  F/m, avec  $c$  la vitesse de la lumière.

Dans un diélectrique, on pourra écrire :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} \quad (2.7)$$

avec  $\varepsilon$  la permittivité électrique [F/m].

Dans un conducteur électrique :

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (2.8)$$

avec  $\sigma$  la conductivité [ $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ].

Dans les milieux magnétiques, le lien entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  peut être très complexe, et dépend le plus souvent de l'historique des sollicitations. Néanmoins, on peut souvent simplifier ces relations et écrire :

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (2.9)$$

avec  $\mu$  la perméabilité magnétique [H/m].

Les équations de Maxwell (2.5), associées aux caractéristiques des matériaux et à leur géométrie, à des conditions initiales bien posées et à la connaissance de la variation temporelle des sources, permettent de déterminer les champs électromagnétiques. Cependant, les calculs peuvent être grandement facilités par l'introduction des potentiels.

## 2.3 Les potentiels électromagnétiques

### 2.3.1 Le potentiel électrique

On a vu en (2.5b) que le rotationnel de  $\mathbf{E}$  dépend de la vitesse de variation de  $\mathbf{B}$ . En électrostatique, la circulation du champ  $\mathbf{E}$  est indépendante du chemin suivi [Dul96]. On peut donc définir une grandeur scalaire  $V$  telle que :

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\ell = V(A) - V(B) \quad (2.10)$$

Cette grandeur  $V$  est appelée potentiel électrique et s'exprime en Volt. Puisque le champ électrostatique vérifie le principe de superposition, le potentiel électrostatique est additif. C'est-à-dire que le potentiel créé par la réunion de deux systèmes de charges est la somme des potentiels créés par chaque système. La relation entre  $\mathbf{E}$  et  $V$  peut être exprimée autrement sous une forme de gradient :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V = -\nabla V \quad (2.11)$$

Le potentiel électrique  $V$  n'est pas unique, une constante arbitraire peut être ajoutée. Pour que  $V$  soit défini de manière unique, il suffit de lui attribuer une valeur particulière en un point de l'espace. S'il n'y a pas de charge électrique en dehors d'un voisinage de la zone d'étude, on peut aussi fixer ce potentiel à zéro à l'infini.

### 2.3.2 Le potentiel vecteur magnétique

Si on commence à partir des équations de Maxwell pour déterminer le champ magnétique, la résolution de l'équation différentielle de (2.5a) sera très difficile. La divergence du rotationnel d'un vecteur est toujours égale à zéro :

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{X} = 0 \quad (2.12)$$

avec  $\mathbf{X}$  un vecteur quelconque.

$\mathbf{B}$  étant à divergence nulle (2.5d), on peut donc définir un nouveau vecteur  $\mathbf{A}$  tel que :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.13)$$

$\mathbf{A}$  est appelé le potentiel vecteur magnétique avec une unité en volt-seconde par mètre ( $\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ). En combinant les équations (2.5b) et (2.13), les relations entre le potentiel vecteur magnétique, le champ électrique et les courants de Foucault peuvent aussi être établies [Sch06] :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (2.14)$$

$\mathbf{A}$  se simplifie souvent par :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.15)$$

Cette dernière relation est un cas particulier où on suppose que le potentiel scalaire électrique est annulé ( $V = 0$ ) [Dul96, ES83]. Pour résumer, la connaissance du potentiel vecteur magnétique donne directement le champ électrique, les courants de Foucault et le champ magnétique. Le potentiel vecteur magnétique est donc le lien entre toutes grandeurs physiques. Afin de définir complètement une fonction vectorielle, son rotationnel et sa divergence doivent être définis. La divergence de  $\mathbf{A}$  peut être choisie arbitrairement, ce qui conduit à des calculs incommodes. Pour faciliter les calculs, des conditions supplémentaires sont proposés. Ces conditions sont appelées les conditions de jauge. Les deux choix les plus courants sont :

*La jauge de Lorentz :*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (2.16)$$

*La jauge de Coulomb :*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.17)$$

Pour la méthode des éléments finis, le potentiel vecteur magnétique est un moyen de calcul robuste et précis [Luo97]. Cependant, il engendre un grand nombre d'inconnues du système à résoudre et les problèmes de jauge et de convergence se posent dans le cas d'une représentation par des éléments mixtes. Afin de résoudre ce problème, la notion du potentiel scalaire magnétique a été proposé, elle sera détaillé dans §2.3.4.

### 2.3.3 Approximations des régimes quasi-stationnaires

Il existe plusieurs régimes pour étudier les phénomènes électromagnétiques. Le régime stationnaire représente le cas où le champ est invariant dans le temps, tels que électrostatique et magnéto-statique. Dans ce régime, le champ électrique et le champ magnétique ne sont pas couplés. Par contre, ce n'est pas le cas pour le régime de propagation (champ lointain).

Les régimes à variations lentes, appelés aussi *approximations des régimes quasi-stationnaires* (ARQS) ou *quasi-permanents*, caractérisent les situations où le système varie suffisamment lentement dans le temps. Autrement dit, la durée de propagation d'une modification d'un bout à l'autre du dispositif peut être négligée devant la durée caractéristique du régime variable. Cela revient au même de dire que la longueur d'onde est grande devant les dimensions du dispositif étudié. Le phénomène de propagation peut alors être négligé. Cependant, cette définition et assez équivoque, les explications plus précises sont données dans [Maz13], [Jam05], [Sag13], [Vin09].

Si l'on considère un signal électrique sinusoïdal de période  $T$ , la dimension caractéristique du montage électrique  $L$  devra nécessairement être très inférieure à  $\lambda$  ( $\lambda$  représente la longueur d'onde électromagnétique) pour que l'on puisse limiter les développements en  $\frac{\partial}{\partial t}$  au plus bas ordre non-nul, et envisager d'appliquer l'ARQS. Ceci se traduit par la condition :

$$L \ll \lambda \implies L_{max} < \frac{\lambda_{min}}{10} = \frac{3 \cdot 10^7}{f_{max}} \quad (2.18)$$

Pour la bande de fréquence considérée dans ce travail (20 kHz  $\sim$  20 MHz), on obtient une distance maximum d'environ 1.5 mètre. Une analyse d'ordre de grandeur nous permet de mieux comprendre quantitativement cette approximation [Vin09]. L'ordre de grandeur d'une quantité physique  $X$  et noté  $\tilde{X}$ . L'analyse appliquée à l'équation (2.5b) donne :

$$\begin{cases} \|\nabla \times \mathbf{E}\| \approx \frac{\tilde{E}}{L} \\ \|\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\| \approx \frac{\tilde{B}}{T} \end{cases} \implies \frac{\tilde{E}}{L} \approx \frac{\tilde{B}}{T} \quad (2.19)$$

L'analyse appliquée à l'équation (2.5a) donne :

$$\|\nabla \times \mathbf{H}\| \approx \frac{\tilde{H}}{L} \quad (2.20)$$

$$\|\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\| \approx \frac{\tilde{D}}{T} \quad (2.21)$$

$c$  représente la vitesse de la lumière. Donc le rapport entre (2.20) et (2.21) dans le vide est :

$$\frac{\|\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\|}{\|\nabla \times \mathbf{H}\|} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\|}{\|\nabla \times \mathbf{B}\|} \approx \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\tilde{E}}{T} \cdot \frac{L}{\tilde{B}} \quad (2.22)$$

Si on combine les équations (2.19) et (2.22), on a :

$$\frac{\|\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\|}{\|\nabla \times \mathbf{H}\|} \approx \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 \ll 1 \quad (2.23)$$

La conclusion de l'équation (2.23) est que l'ARQS magnétique peut se traduire par le fait que la densité de courant de déplacement est petite devant celle du courant de conduction. Ceci revient au même que la magnétostatique. C'est-à-dire que le terme  $(\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D})$  dans l'équation (2.1) peut être négligé. L'équation de Maxwell-Ampère peut donc être simplifiée :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (2.24)$$

Cette équation permet de montrer que l'induction magnétique ne dépend que de la densité de courant électrique. Ceci permet de simplifier les calculs sur les potentiels magnétiques dans la suite.

### 2.3.4 Le potentiel scalaire magnétique

L'équation (2.24) représente la relation entre l'induction magnétique et la densité de courant en ARQS. En faisant l'hypothèse que les courants source n'existent pas dans la région (connexe) où l'onde électromagnétique se propage ( $\mathbf{J} = 0$ ), elle peut encore être simplifiée comme :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (2.25)$$

Cette équation est sous la même forme que le champ électrique  $\mathbf{E}$  en électrostatique. Dans cette situation, on peut donc définir un potentiel scalaire magnétique  $\psi$  qui est relié au champ magnétique dans la région :

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi \quad (2.26)$$

Dans le vide, l'induction magnétique peut s'écrire comme :

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \psi \quad (2.27)$$

Par rapport au potentiel vecteur magnétique, le potentiel scalaire magnétique permet de réduire considérablement l'effort de calcul, car une seule variable est nécessaire pour décrire les champs dans une région. Néanmoins, il faut bien noter que dans certain cas, le potentiel scalaire magnétique peut être mal adapté. Dans notre étude (ARQS et  $\mathbf{J}=0$ ), le potentiel scalaire peut donner la même généralité que le potentiel vecteur magnétique.

### 2.3.5 Équations auxquelles obéissent les potentiels $\mathbf{A}$ et $\psi$

Comme déjà mentionné avant, il est très difficile de résoudre analytiquement les équations de Maxwell pour un système. L'utilisation de potentiel magnétique est un outil efficace qui permet d'obtenir une équation plus simple. En supposant que les matériaux magnétiques sont linéaires et homogènes, on peut développer l'équation (2.13) comme :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (2.28)$$

$\Delta \mathbf{A}$  est appelé l'opérateur laplacien vectoriel du vecteur  $\mathbf{A}$ . Il présente beaucoup de simili-

tudes avec l'opérateur laplacien scalaire. L'opérateur laplacien scalaire d'une fonction est défini comme la divergence de son gradient :

$$\Delta\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) \quad (2.29)$$

On retourne maintenant à l'équation (2.28), en appliquant la jauge de Coulomb à l'équation (2.17), on obtient :

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\Delta\mathbf{A} \quad (2.30)$$

En combinant avec l'équation (2.24), on obtient :

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \quad (2.31)$$

Cette équation est appelée l'équation de Poisson à trois dimensions. Elle permet de décrire le champ potentiel causé par une charge. Cependant, sa résolution reste encore très compliquée. Comme déjà mentionné, on se place dans l'hypothèse ARQS, mais à l'extérieur d'un volume connexe contenant toutes les sources. On peut alors établir une équation simplifiée :

$$\Delta\mathbf{A} = 0 \quad (2.32)$$

Cette équation est appelée l'équation de Laplace vectorielle, qui est un cas particulier de l'équation de Poisson. Le même résultat peut être obtenu à partir du potentiel scalaire magnétique  $\psi$ . En combinant les équations (2.5d) et (2.27), on obtient directement l'équation de Laplace scalaire :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (-\mu_0 \nabla\psi) = 0 \quad \implies \quad \Delta\psi = 0 \quad (2.33)$$

Les fonctions harmoniques sont des solutions particulières de l'équation de Laplace (en dehors d'un voisinage de leur centre). Les mathématiciens montrent qu'elles forment une base complète pour développer n'importe quelle solution. Celles-ci donnent directement l'expression du potentiel scalaire magnétique, dont l'induction magnétique peut être déduite. Par rapport à l'équation de Laplace vectorielle, la solution de (2.33) est encore plus simple. Les calculs détaillés seront montrés après dans §2.5.1.

Dans la suite de ce document, la spire circulaire sera prise en exemple plusieurs fois, qui est un outil important dans cette étude. Elle permet non seulement de servir de capteur mesurant le flux magnétique à travers sa surface, mais aussi de valider et calibrer le banc de mesure grâce à sa symétrie parfaite. La spire circulaire sera étudiée et présentée en détails en paragraphe suivant.

## 2.4 Spire circulaire de courant

Un exemple d'un circuit imprimé est présenté en Figure 2.1 :

Afin de garantir la forme de spire, elles sont toutes réalisées en circuit imprimé. La spire est alimentée par un connecteur BNC (Bayonet Neill-Concelman connector). Les fils d'alimentation sont torsadés afin de limiter leurs rayonnements.  $R$  et  $l$  représentent le rayon et le largeur de



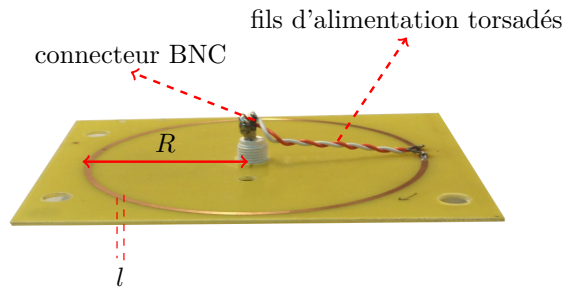


FIGURE 2.1 – Spire circulaire en circuit imprimé

la spire. L'épaisseur de ce type de circuit imprimé est d'environ 0.5 mm, qui peut être négligé devant  $R$  et  $l$ . Néanmoins, le rayonnement de cette spire est-il équivalent à celui d'une spire filaire? Est-ce que les flux d'induction magnétique mesurés sont les mêmes? La répartition du courant a-t-elle une influence sur la performance de la spire? Afin de répondre à ces questions, une étude de la spire circulaire en circuit imprimé est réalisée, qui commence par une étude théorique.

### 2.4.1 Étude théorique de la spire filaire

#### La loi de Biot et Savart

En 1820, Jean Baptiste Biot et Félix Savart ont effectué une étude quantitative des interactions entre aimants et courants à travers, ce qui a conduit à la loi de Biot et Savart formulée par Pierre Simon de Laplace. Cette loi décrit le champ magnétique généré par un courant électrique. Elle relie le champ magnétique à l'amplitude, la direction et la longueur d'un segment parcouru par un courant. La loi est valable dans l'approximation magnétostatique et est compatible avec l'équation de Maxwell-Ampère et l'équation de Maxwell-Gauss [Ric15].

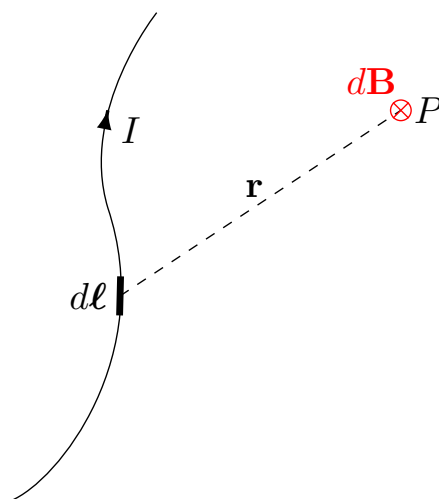


FIGURE 2.2 – Le principe de la loi de Biot et Savart

La Figure 2.2 représente un segment de conducteur filaire avec un courant  $I$ .  $d\ell$  représente un segment élémentaire le long de ce circuit orienté dans le même sens que le courant.  $\mathbf{r}$  est le

vecteur de l'élément  $d\ell$  au point  $P$  où l'induction magnétique est exprimé [Ric15] :

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\ell \wedge \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (2.34)$$

L'induction magnétique totale générée par le circuit s'écrit donc :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \oint d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\ell \wedge \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (2.35)$$

Basé sur l'équation (2.35), l'expression de l'induction magnétique d'une spire circulaire comme sur la Figure 2.3 peut être déduite.

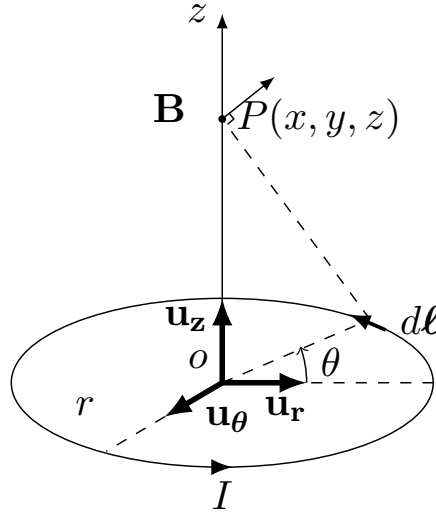


FIGURE 2.3 – Spire circulaire parcourue par un courant  $I$

Les étapes spécifiques de calculs se trouvent dans [Dur68]. Les résultats finaux en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_r = \frac{\mu_0 I k z}{4\pi \rho \sqrt{r\rho}} \cdot \left[ -J_1 + \frac{r^2 + \rho^2 + z^2}{(r - \rho)^2 + z^2} J_2 \right] \end{array} \right. \quad (2.36a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_\theta = 0 \end{array} \right. \quad (2.36b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_z = \frac{\mu_0 I k}{4\pi \sqrt{r\rho}} \cdot \left[ J_1 + \frac{r^2 - \rho^2 - z^2}{(r - \rho)^2 + z^2} J_2 \right] \end{array} \right. \quad (2.36c)$$

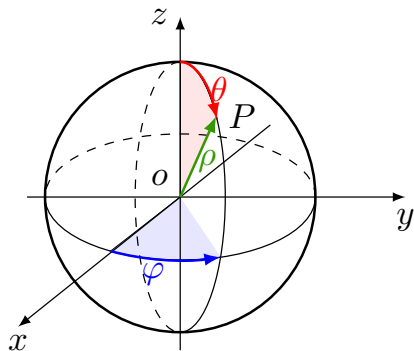
avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ k = \sqrt{\frac{4r\rho}{(r + \rho)^2 + z^2}} \\ J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2((\pi - \theta)/2)}} \\ J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -1/2 \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\pi - \theta)/2} \cdot d\theta \end{array} \right. \quad (2.37)$$

$J_1, J_2$  sont les intégrales elliptiques de Legendre. Pour un cas très particulier où la dimension

de la spire de courant est infiniment petite devant la distance à laquelle on calcule le champ, c'est-à-dire que  $r^2 \ll R^2$  avec  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $r$  représente le rayon de spire et  $R$  représente la distance entre le centre de la spire et le point d'observation. L'équation (2.36) se simplifie par :

$$\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0 I \pi r^2 z \sqrt{x^2 + y^2}}{2\pi R^5} \\ B_\theta = 0 \\ B_z = \frac{\mu_0 I \pi r^2 z^2}{4\pi R^5} \end{cases} \quad (2.38)$$



$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

FIGURE 2.4 – Coordonnées sphériques

Si on récrit l'expression (2.38) en coordonnées sphériques comme représentée en Figure 2.4, on obtient :

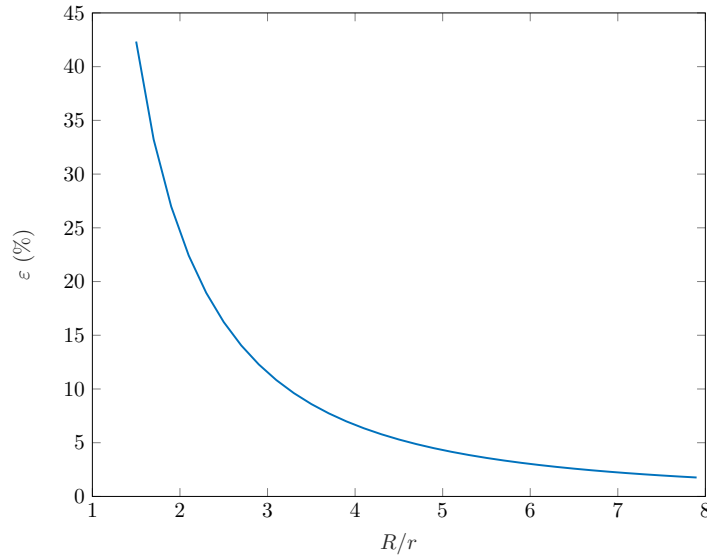
$$\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0 I \pi r^2 \cos \theta}{2\pi R^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0 I \pi r^2 \sin \theta}{4\pi R^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Cette équation est formellement identique au champ créé par un dipôle magnétique de moment magnétique  $m = \pi I r^2$  dirigé suivant l'axe  $z$ . De ce fait, au delà d'une certaine distance, la boucle de courant est assimilable à un dipôle qui génère le premier ordre du développement multipolaire. Afin de quantifier cette assimilation, l'induction magnétique engendrée par un dipôle  $\mathbf{B}_d$  est comparée avec l'induction magnétique d'une spire de courant (de rayon  $r$ )  $\mathbf{B}_s$ , sur une surface sphérique (de rayon  $R$ ). L'erreur quadratique relative  $\varepsilon$  est calculée pour l'ensemble des points sur la surface, qui est définie par :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum (\mathbf{B}_d - \mathbf{B}_s)^2}{\sum \mathbf{B}_s^2}} \quad (2.40)$$

Les résultats sont montrés sur la Figure 2.5 pour les différents  $R/r$ .

On peut constater que l'erreur devient assez faible à partir de  $R/r = 5$ . C'est-à-dire que l'induction magnétique d'une spire peut être assimilée à un dipôle au delà d'une distance d'environ 5 fois son rayon. Cette propriété de la boucle de courant est très intéressante et utile. Elle permet de construire des sources dipolaires quasiment "pures", mais aussi des quadripôles et octopôles.

FIGURE 2.5 –  $\varepsilon$  en fonction de  $R/r$ 

On y reviendra après dans §2.7.4.

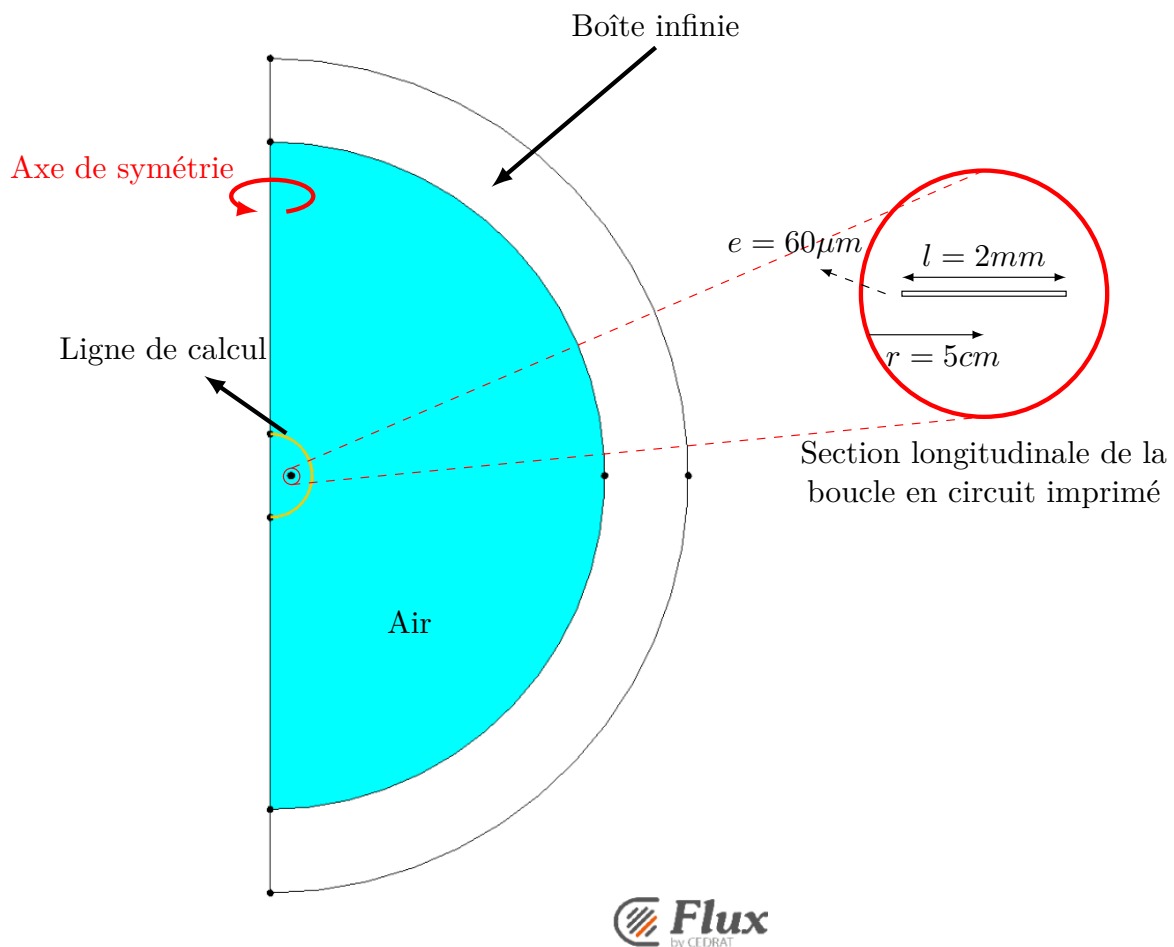
## 2.4.2 Simulation avec Flux

Afin de vérifier si le comportement de la boucle en circuit imprimé correspond à la théorie, des simulations numériques sont effectuées. Le logiciel utilisé dans cette partie est *Flux*. *Flux* est un logiciel développé par la société Cedrat (récemment rachetée par Altair) et le laboratoire G2ELab. Il est spécialisé dans les analyses électromagnétiques et thermiques, permettant de modéliser et d'optimiser les dispositifs électriques. Basé sur la méthode des éléments finis, il permet des représentations et des analyses en 2D et 3D.

### 2.4.2.1 Boucle active

Dans cette section pour modéliser une boucle de courant, une simulation sous *Flux2D* est suffisante grâce à sa symétrie axiale. Le type de domaine d'étude est donc axisymétrique comme représenté en Figure 2.6. On utilise la formulation *Magnéto Harmonique*, qui permet l'étude des dispositifs en régime harmonique (régime permanent sinusoïdal) à une fréquence donnée. La résolution en complexes des équations Maxwell suppose que toutes les grandeurs physiques varient de façon sinusoïdale dans le temps à une fréquence donnée. Le champ magnétique est lié à la présence de courants électriques variables, obligatoirement sinusoïdaux.

La ligne du coté gauche de la Figure 2.6 représente l'axe de symétrie. Il faut juste considérer une section longitudinale rectangle pour modéliser une boucle en circuit imprimé. La fermeture du domaine d'étude est réalisée à l'aide de la technique de la boîte infinie, qui est représentée par la couche blanche sur la figure. Cette technique permet des conditions à l'infini, tout en réduisant la taille du domaine d'étude. L'induction  $\mathbf{B}$  à l'extérieur de la source est calculée sur la ligne jaune. Il s'agit d'un demi cercle avec un rayon de 10 cm. La boucle en circuit imprimé possède un rayon  $r$  de 5 cm, une largeur de piste de 2 mm et une épaisseur de 60  $\mu\text{m}$ . La vue agrandie de sa section longitudinale est aussi présentée sur la figure. Le conducteur est en cuivre

FIGURE 2.6 – Configuration de la simulation sous *Flux2D*

et la bobine est alimentée par un courant de 1 A. La répartition de la densité de courant en fonction de la fréquence est présentée en Figure 2.7.

On peut constater que le courant atteint un minimum au milieu de la boucle et il augmente en s'approchant des extrémités. Cette tendance augmente avec la fréquence. En  $300\text{ kHz}$ , cette croissance est approximativement linéaire. En  $10\text{ MHz}$ , les courants sont concentrés aux deux extrémités de la boucle. Les répartitions de courant ne sont pas parfaitement symétriques parce que le rayon de la partie intérieure de la boucle est plus petit que celui de la partie extérieure, la résistance et l'inductance sont donc plus petites, le courant du côté intérieur est donc plus grand que celui de côté extérieur. Le comportement de cette boucle en circuit imprimé devrait donc s'approcher de celui de deux boucles filaires situées aux extrémités de la boucle réelle. Cela justifie qu'on se pose la question de savoir si cette répartition de courant a ou non une influence sur l'induction magnétique générée par cette boucle.

En prenant l'expression (2.36) comme la valeur théorique, on peut constater que les courbes de la valeur théorique et celles de simulations à plusieurs fréquences se superposent presque en Figure 2.8. Sur la vue agrandie, on observe une petite différence entre elles et plus la fréquence est grande, plus les résultats de simulations s'éloignent à la valeur théorique. Afin de quantifier

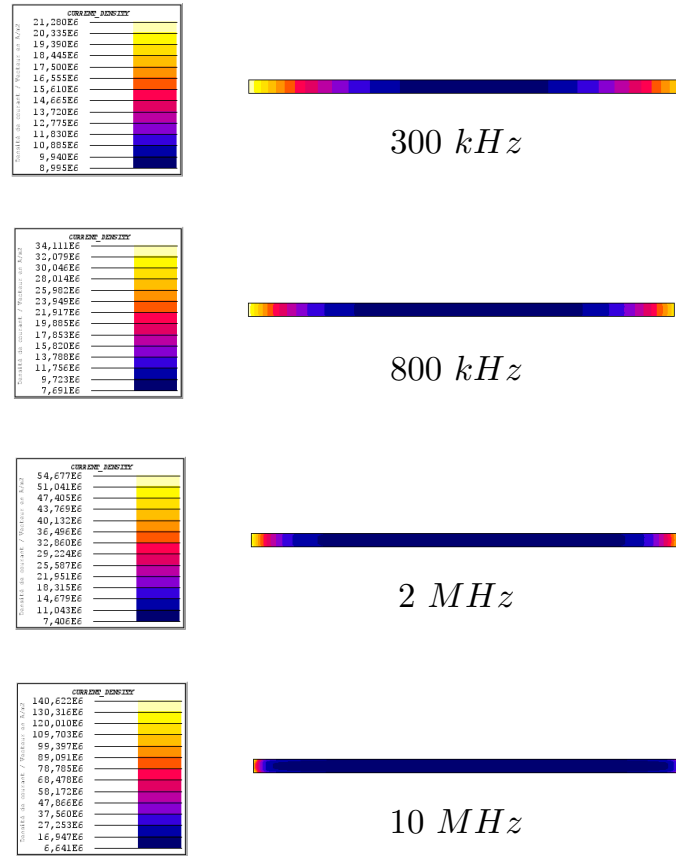


FIGURE 2.7 – Répartition de courant dans une boucle en circuit imprimé sous *Flux2D*

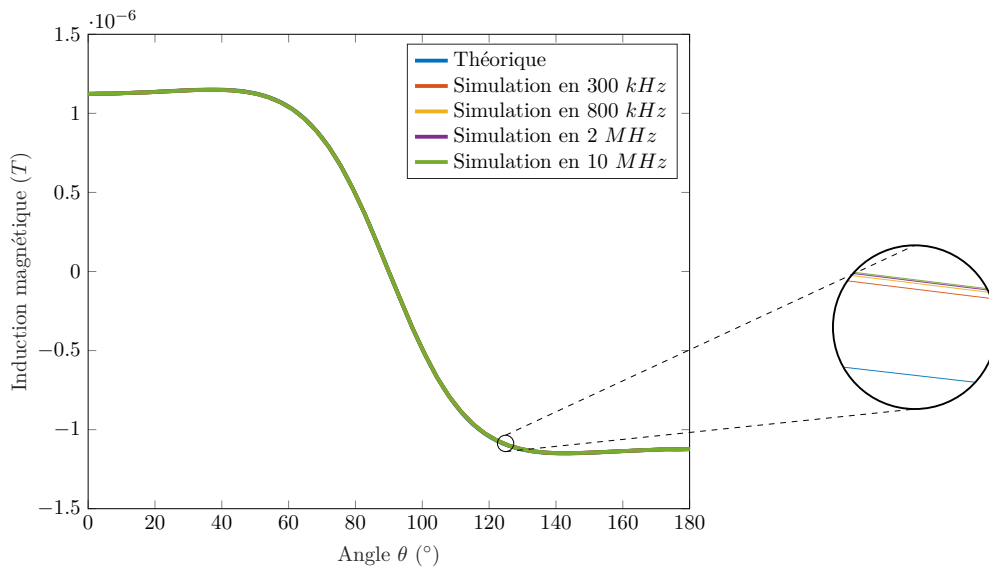


FIGURE 2.8 – Induction magnétique de la boucle en circuit imprimé

cet écart, l'erreur quadratique relative est calculée :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum (\mathbf{B}_s - \mathbf{B}_t)^2}{\sum \mathbf{B}_t^2}} \quad (2.41)$$

$\mathbf{B}_t$  et  $\mathbf{B}_s$  représente l'induction magnétique en théorique et en simulation. L'erreur  $\varepsilon$  est donnée dans la Table 2.1 :

Fréquence	300 kHz	800 kHz	2 MHz	10 MHz
$\varepsilon$ en %	0.133	0.150	0.154	0.159

TABLE 2.1 – Erreur sur l'induction magnétique d'une boucle en circuit imprimé

La tendance des erreurs quadratiques vérifie bien les conclusions précédentes. Les erreurs sont toutes très faibles, ce qui permet de montrer que le rayonnement d'une boucle en circuit imprimé correspond bien à celui d'une boucle filaire théorique.

### 2.4.2.2 Boucle passive

Dans la section 2.4.2.1, il est montré que l'induction magnétique générée par une boucle en circuit imprimé est essentiellement la même que celle d'une boucle filaire. Cette approximation nous permet de beaucoup réduire les calculs et de comparer les résultats de mesures aux valeurs théoriques dans la partie expérimentale. En effet, la boucle en circuit imprimé est aussi utilisée comme un capteur, mesurant le flux magnétique comme déjà mentionné dans le premier chapitre. Est-t-il toujours possible de considérer la boucle en circuit imprimé comme une boucle filaire? Un exemple très simple est étudié comme représenté en Figure 2.9

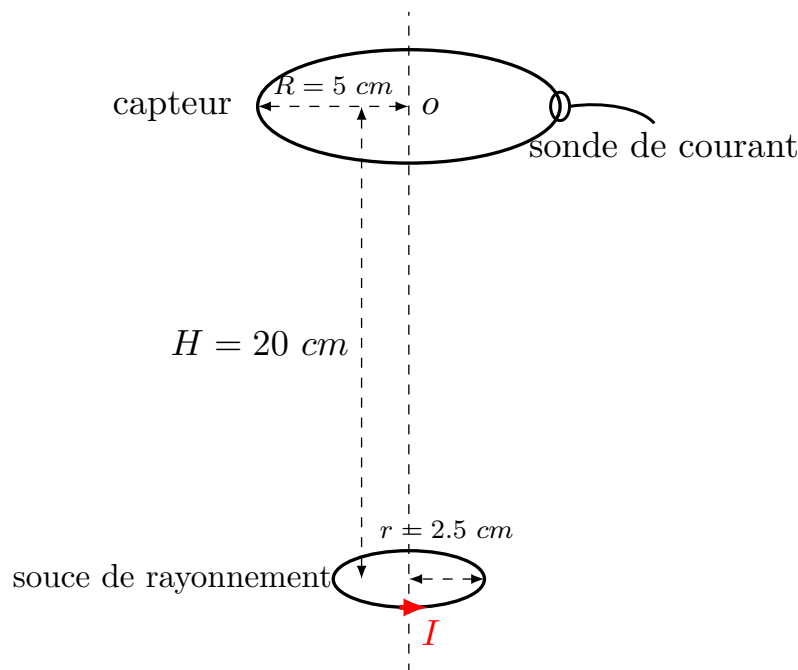


FIGURE 2.9 – Boucle en circuit imprimé sert de capteur

Cette fois-ci, la boucle en circuit imprimé étudiée (Figure 2.1) est utilisée comme capteur. La source de rayonnement est aussi une boucle en circuit imprimé mais avec une taille plus petite. Le capteur permet de mesurer un flux magnétique à travers de la boucle. Théoriquement, le flux magnétique est calculé en faisant l'intégrale de l'induction magnétique sur la surface de la

grande boucle. Dans le cas ici d'une axisymétrie, il peut être déduit :

$$\Phi_t = \int_s \mathbf{B} \cdot ds = 2\pi \int_0^R \mathbf{B} \cdot dl \quad (2.42)$$

Cependant, en réalité, le flux magnétique est calculé à partir d'une mesure de courant. Comme présenté en Figure 2.9, une sonde de courant est utilisée pour déterminer le courant parcourant la spire. Ensuite, le flux magnétique peut être déduit :

$$\Phi_c = L \cdot I \quad (2.43)$$

$I$  est le courant qui circule dans le capteur et  $L$  est l'inductance propre de la spire du capteur. Ce paramètre peut être déterminé sous *Flux2D* ou directement mesuré en pratique. La distribution du courant à 300 kHz est présentée en Figure 2.10.

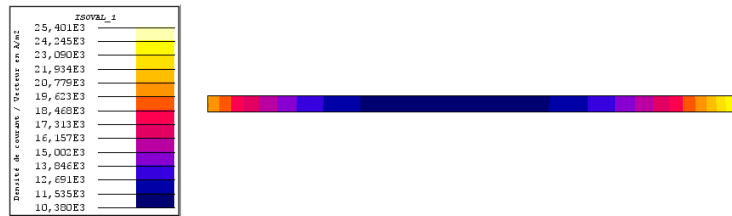


FIGURE 2.10 – Répartition de la densité de courant dans le capteur à 300 kHz

On peut constater que la distribution du courant dans la boucle du capteur est presque la même que dans le cas de la boucle active parce que l'axe de la boucle est orthogonal à la surface de la sphère de mesure, l'effet d'induit dissymétrique peut donc être négligé. La conclusion est également la même que pour la boucle active. Le courant atteint un minimum au milieu de la boucle et il augmente en s'approchant des deux côtés. Cette tendance augmente avec la fréquence. Cependant, elle ne répond pas à la question principale : est-ce que le flux mesuré par la boucle en circuit imprimé correspond bien au flux théorique à travers la surface, c'est-à-dire  $\Phi_t$  et  $\Phi_c$  sont-ils égaux ?

Fréquence	300 kHz	800 kHz	2 MHz	10 MHz
$\Phi_t$ ( $10^{-10}$ Wb)	4.87	4.87	4.87	4.87
$L$ ( $10^{-7}$ H)	2.99	2.99	2.99	2.99
$I$ ( $10^{-3}$ A)	1.63	1.65	1.66	1.67
$\Phi_c$ ( $10^{-10}$ Wb)	4.874	4.93	4.96	4.99
$\varepsilon$	$6 \cdot 10^{-4}$	0.012	0.019	0.025

TABLE 2.2 – L'erreur sur l'induction magnétique d'une boucle en circuit imprimé

Le Table 2.4.2.2 permet de quantifier la différence entre le flux magnétique théorique et le flux magnétique mesuré par un capteur boucle en circuit imprimé.  $\varepsilon$  est l'erreur relative sur le flux calculé, qui est définie par :

$$\varepsilon = \frac{|\Phi_c - \Phi_t|}{|\Phi_t|} \quad (2.44)$$



L'erreur relative de flux magnétique mesuré par le capteur augmente avec la fréquence d'alimentation comme dans le cas de la boucle active. Ces erreurs restent très faibles, mais malgré tout, non négligeable en haute fréquence, notamment au-delà de 10 MHz. Il est possible de considérer la boucle en circuit imprimé comme une boucle filaire en basse fréquence entre 20 kHz et 2 MHz. Afin de corriger l'erreur causé par la distribution du courant, soit on peut directement augmenter le flux en pourcentage comme montré dans la table, soit on peut augmenter la surface d'intégration entre le milieu et le coté extérieur de la boucle.

Pour conclure, dans cette section 2.4, l'expression du champ d'une spire filaire est tout d'abord développée. Ensuite, le comportement de la boucle en circuit imprimé est étudié comme source de rayonnement et comme capteur, des comparaisons seront effectuées vis-à-vis de la théorie. Il est montré qu'en basse fréquence entre 20 kHz et 2 MHz, une boucle en circuit imprimé peut être assimilée à une boucle filaire. Par contre, en haute fréquence supérieure à 2 MHz, cette assimilation n'est plus parfaitement valable et il faut prendre en compte la distribution du courant pour compenser cette erreur sur le comportement du circuit.

## 2.5 Développement multipolaire en harmoniques sphériques

### 2.5.1 Résolution de l'équation de Laplace

L'équation de Laplace permet de décrire le comportement des champs ou potentiels électromagnétiques. Il est donc important de proposer des méthodes pour sa résolution. Les coordonnées sphériques (Figure 2.4) sont bien adaptées pour les systèmes de rayonnement "ponctuels". Nous allons d'abord nous concentrer sur la solution de l'équation de Laplace scalaire. En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , l'opérateur laplacien s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.45)$$

En combinant avec l'équation (2.33), on obtient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.46)$$

La méthode de séparation des variables suppose que la fonction  $\psi$  peut s'écrire sous une forme d'un produit de trois fonctions dont chacune ne dépend que d'une variable [Pla68] :

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (2.47)$$

En insérant cette décomposition dans l'équation de Laplace et en multipliant par un rapport  $\frac{r^2}{R\Theta\Phi}$  on obtient :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Theta \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0 \quad (2.48)$$

Donc, on a :

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -m^2 \quad (2.49)$$

où  $-m^2$  est la constante de séparation, qui est choisie négative pour que les solutions de  $\Phi(\phi)$  soient périodiques en  $2\pi$ . La solution de cette équation aux dérivées partielles nous donne :

$$\Phi(\phi) = \begin{cases} e^{im\phi} \\ e^{-im\phi} \end{cases} \quad \text{pour } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.50)$$

Il faut noter que  $m$  doit être un entier puisque  $\phi$  est une variable périodique tel que  $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ . Dans le cas de  $m = 0$ , la solution générale est  $\Phi(\phi) = a\phi + b$ . Cependant, il est nécessaire de choisir  $a = 0$  pour être cohérent avec  $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ . Par conséquent, une seule solution est permise dans le cas de  $m = 0$ .

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = \ell(\ell + 1) \quad (2.51)$$

À cette étape, la constante de séparation est définie comme  $\ell(\ell + 1)$ . L'équation (2.51) peut se développer comme :

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - \ell(\ell + 1)R = 0 \quad (2.52)$$

L'équation (2.52) est reconnue comme étant une équation d'Euler. Cela signifie que la solution est sous la forme de  $R = r^s$ . Afin de déterminer l'exposant  $s$ , on peut insérer cette solution dans l'équation (2.52), qui donne :

$$s(s + 1) = \ell(\ell + 1) \quad \implies \quad s = \ell \quad \text{ou} \quad s = -\ell - 1 \quad (2.53)$$

Les solutions de l'équation (2.52) sont :

$$R(r) = \begin{cases} r^\ell \\ r^{-\ell-1} \end{cases} \quad (2.54)$$

En parallèle avec l'équation (2.52), l'équation (2.51) produit également l'équation suivante :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ \ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (2.55)$$

En appliquant les changements de variables  $x = \cos \theta$  et  $y = \Theta(\theta)$ , l'équation différentielle ci-dessus se réduit à :

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ \ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] y = 0 \quad (2.56)$$

L'équation (2.56) est la fameuse équation générale de Legendre, nommée par le mathématicien français Adrien-Marie Legendre. Ses résolutions analytiques ont été donnés en 1785 [Bel62].

Ceci est aussi la raison pour laquelle la constante de séparation  $\ell(\ell+1)$  a été choisie. La solution de l'équation (2.56) est donc :

$$y(x) = P_\ell^m(x) \quad \text{pour } \ell = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ et } m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell \quad (2.57)$$

Deux restrictions sont :  $\ell$  doit être un entier non négatif et  $|m| \leq \ell$ . Les expressions des polynômes associés de Legendre  $P_\ell^m(x)$  sont :

$$P_\ell^m(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell \quad (2.58)$$

La solution de  $P_\ell^m(x)$  est très importante parce qu'elle détermine des propriétés essentielles de la solution de l'équation de Laplace telles que la parité, l'orthogonalité, etc. Quelques exemples de  $P_\ell^m(x)$  sont montrés en Figure 2.11.

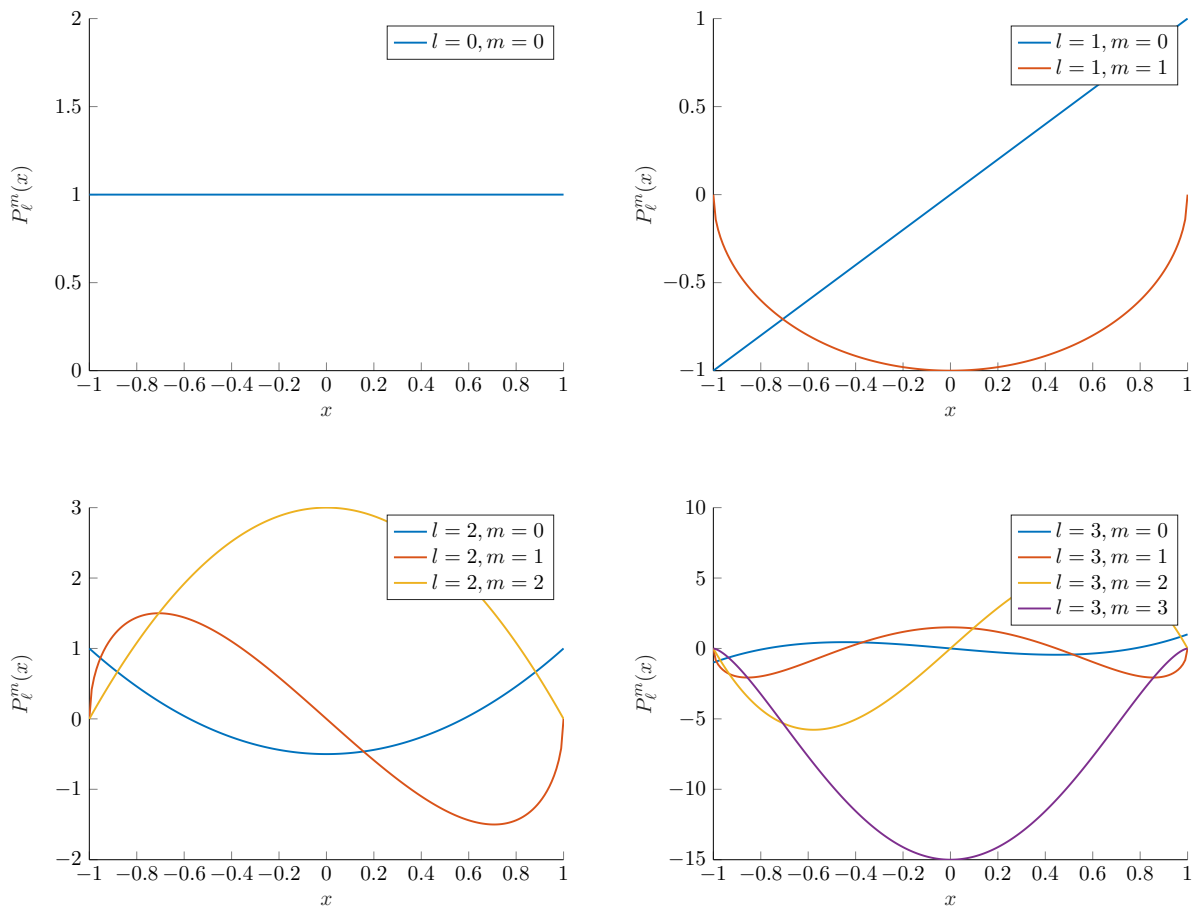


FIGURE 2.11 – Polynômes associés de Legendre

En effet, l'équation différentielle pour les polynômes de Legendre associés, donnée dans l'équation (2.58), dépend de  $m^2$  et n'est donc pas sensible au signe de  $m$ . Néanmoins,  $P_\ell^m(x)$  et  $P_\ell^{-m}$  doivent être des solutions équivalentes, c'est-à-dire proportionnelles entre elles. En utilisant l'équation (2.58), il est prouvé que :

$$P_\ell^{-m}(\cos\theta) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(\cos\theta), \quad m = 1, 2, 3, 4, \dots, \ell \quad (2.59)$$

En combinant les résultats des équations (2.50), (2.54) et (2.58), on peut obtenir la solution générale de l'équation de Laplace, qui est sous la forme :

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{Bmatrix} r^\ell \\ r^{-\ell-1} \end{Bmatrix} P_\ell^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} e^{im\phi} \\ e^{-im\phi} \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

où  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$  et  $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$ .

## 2.5.2 Introduction des harmoniques sphériques

Le fonction des harmoniques sphériques (HS) est pratiquement la solution de la partie angulaire de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. Son expression traditionnelle se trouve par exemple dans [HKK11] et [BFB97] :

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (2.61)$$

avec  $n$  nul ou positif,  $m$  varie de  $-n$  à  $n$ .  $n$  et  $m$  sont appelés respectivement « ordre » et « moment ». Le facteur  $(-1)^m$  dans cette formule est connu sous le nom de « phase de Condon-Shortley ». Il est utilisé ici pour que la composante de moment négatif ( $m < 0$ ) soit cohérente avec le moment positif ( $m > 0$ ). Le terme  $\sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$  est une fonction de normalisation.

L'utilisation des nombres complexes permet de garder l'expression très compacte, qui ne différencie pas les expressions suivant le signe de  $m$ . Mais comme la solution finale (le potentiel scalaire) est réelle, cela impose que les coefficients harmoniques soient eux-mêmes des complexes conjugués. Pour éviter cette contrainte, on peut aussi tout écrire en nombres réels, tout en introduisant le coefficient  $\sqrt{2}$  pour conserver la norme :

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} \sqrt{2} \cos(m\phi), & m > 0 \\ 1, & m = 0 \\ \sqrt{2} \sin(|m|\phi), & m < 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

En utilisant (2.60) (2.61), on peut réécrire le potentiel magnétique scalaire sous la forme d'une somme infinie :

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ A_n^m \cdot r^n + \frac{B_n^m}{r^{n+1}} \right] \cdot Y_n^m(\theta, \phi) \quad (2.63)$$

L'idée est de décomposer le potentiel en une somme infinie de termes normalisés connus tels que : dipôle, quadripôle, etc... Quelques exemples simples sont présentés en Figure 2.12, y compris les termes  $Y_1^0$ ,  $Y_2^2$  et  $Y_3^2$ . L'induction magnétique d'une source de rayonnement consistant en trois composantes harmoniques ( $Y_1^0 = Y_2^2 = Y_3^2 = 1$ ) est aussi présentée pour les différentes distances ( $r_M = 1, 2, 5, 10$  m).

Pour exprimer  $\psi$  dans l'équation (2.63), la fonction harmonique sphérique, qui est une fonction angulaire, est multipliée par une fonction qui ne dépend que de la variable  $r$ , c'est-à-dire la

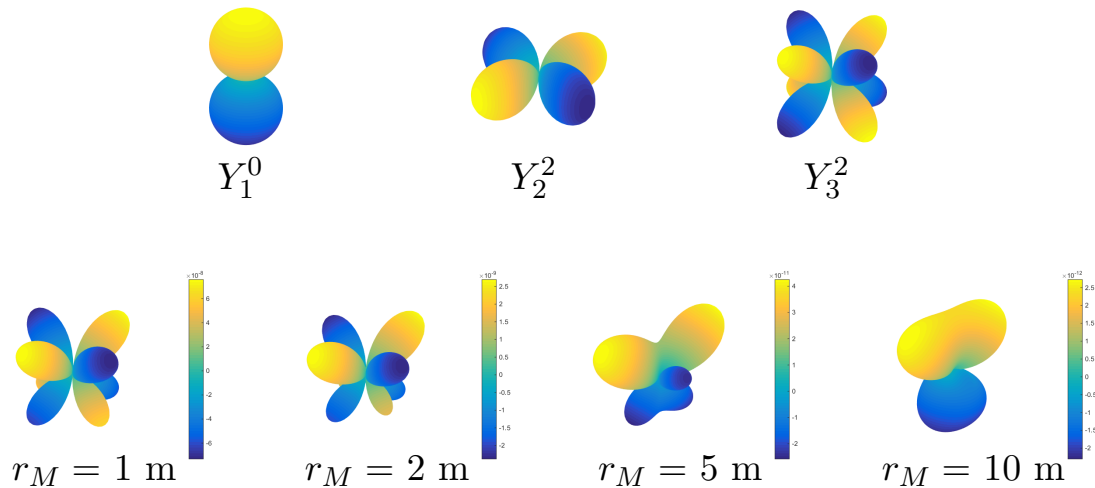


FIGURE 2.12 – Induction magnétique (T) d'une source de rayonnement avec  $Y_1^0 = Y_2^2 = Y_3^2 = 1$  sur une surface sphérique d'un rayon  $r_M = 1, 2, 5, 10$  m

distance entre l'origine de la décomposition et le point de calcul. Comme montré en Figure 2.12, la forme du rayonnement du dispositif dépend non seulement de ses coefficients harmoniques, mais aussi de la distance d'observation. Néanmoins, il est important de noter que la solution de  $\psi$  en (2.63), qui est un couple de fonction  $r$  dont l'une est croissante et l'autre décroissante, est juste une solution générale mathématique. En réalité, on ne peut jamais avoir les  $A_n^m$  et  $B_n^m$  en même temps. En fait, les deux termes  $r^n$  et  $\frac{1}{r^{n+1}}$  sont généralement liés à deux types de problèmes : les problèmes internes et externes.

### 2.5.2.1 Problème externe

Lorsque la source de rayonnement est à l'intérieur d'une zone et on cherche à développer les champs ou les potentiels autour d'une source. Plus on s'éloigne, moins ces champs ou potentiels seront importants de sorte qu'à l'infini, ils sont tous nuls. Dans ces conditions, la fonction  $\frac{1}{r^{n+1}}$  peut intervenir dans l'écriture et les solutions du problème s'écrivent uniquement avec les fonctions décroissantes. Cela est donc appelé le problème externe, c'est-à-dire à l'extérieur de l'ensemble des sources.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur le problème externe. L'écriture du potentiel magnétique scalaire  $\psi$  peut alors être simplifié :

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot Y_n^m(\theta, \phi) \quad (2.64)$$

Avec :

- $r$  : la distance à partir du centre du développement au point où le potentiel est exprimé
- $Q_n^m$  : les coefficients harmoniques à déterminer, ils sont intrinsèques à la source et au choix de l'origine du développement multipolaire
- $Y_n^m$  : les fonctions harmoniques réelles de l'ordre  $n$  et du moment  $m$

Il est important d'introduire la notion de la zone de validité. La première raison est qu'on

a remplacé des sources réparties dans une zone de l'espace (le terme de droite de l'équation de Poisson) par une source équivalente ponctuelle. Il est bien évident que la source équivalente (qui obéit partout à l'équation de Laplace, sauf le point  $r=0$ ) ne représente pas la réalité là où le laplacien n'est - en réalité - pas nul. Afin d'assurer la convergence de la solution, le développement doit être effectué au delà d'une distance  $r_0$ , ce qui conduit au concept de la sphère de validité, présenté en Figure 2.13 [Leg96] (page 49, annexe B.1.a) :

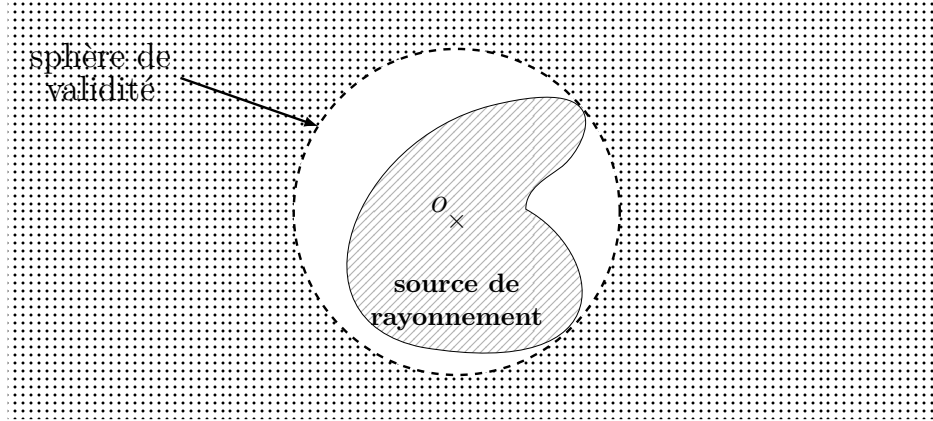


FIGURE 2.13 – Principe de la sphère de validité sur une source quelconque du problème externe

La sphère de validité est la plus petite sphère englobant la source, centré sur le centre du développement  $O$ . La convergence du développement décrivant le champ est assuré si et seulement si le point d'expression est à l'extérieur de cette sphère. Autrement dit, la zone de validité est tout l'espace pointillé définie par la sphère de validité.

Dans le cas des coordonnées sphériques, en appliquant l'équation (2.27), l'induction magnétique peut être déduite :

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot \frac{n+1}{r^{n+2}} \cdot Y_n^m(\theta, \phi) \cdot \mathbf{e}_r \\ -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot \frac{1}{r^{n+2}} \cdot \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} \cdot \mathbf{e}_\theta \\ -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot \frac{1}{r^{n+2}} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \phi} \cdot \mathbf{e}_\phi \end{cases} \quad (2.65)$$

$r$ ,  $Q_n^m$  et  $Y_n^m$  sont définis de la même façon que dans l'équation (2.64). Les monopôles magnétiques n'existent pas, donc le terme avec  $n = 0$  peut être rejeté.

### 2.5.2.2 Problème interne

On verra dans § 2.8 consacrée au calcul de l'inductance mutuelle, qu'il est dans certains cas utile de développer la solution en harmoniques sphériques autour d'un centre  $O$  qui n'est pas dans la zone de la source réelle (Figure 2.14). C'est ce qu'on appelle un problème interne. Le développement obtenu est valable dans l'espace pointillé de la figure.

Le champ et le potentiel magnétique ne sont valables que dans la sphère de validité qui est la plus grande sphère qui ne contient pas la source de rayonnement. Le potentiel magnétique

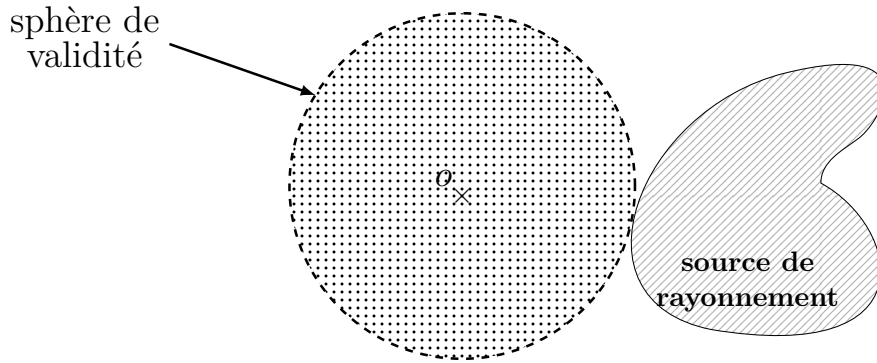


FIGURE 2.14 – Principe de la sphère de validité sur une source quelconque du problème interne

scalaire  $\psi$  s'écrit alors comme un développement des seules puissance positive de  $r$  :

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot r^n \cdot Y_n^m(\theta, \phi) \quad (2.66)$$

Avec :

- $r$  : la distance à partir du centre du développement au point où le potentiel est exprimé ;
- $Q_n^m$  : les coefficients harmoniques à déterminer, ils sont intrinsèques à la source et au choix du centre du développement multipolaire ;
- $Y_n^m$  : les fonctions harmoniques réelles d'ordre  $n$  et de moment  $m$ .

En coordonnées sphériques, l'induction magnétique s'écrit :

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot n \cdot r^{n-1} \cdot Y_n^m(\theta, \phi) \cdot \mathbf{e}_r \\ -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot r^{n-1} \cdot \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} \cdot \mathbf{e}_\theta \\ -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot r^{n-1} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial Y_n^m(\theta, \phi)}{\partial \phi} \cdot \mathbf{e}_\phi \end{cases} \quad (2.67)$$

L'équation de Laplace vectorielle présente beaucoup de similitudes avec l'équation de Laplace scalaire, mais la résolution est plus complexe, cette résolution est détaillé en annexe de [Lor01]. Les résultats sont :

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot Q_n^m \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \mathbf{Y}_n^m(\theta, \phi) & \text{problème externe} \\ \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot Q_n^m \cdot r^n \cdot \mathbf{Y}_n^m(\theta, \phi) & \text{problème interne} \end{cases} \quad (2.68)$$

Les termes  $r^n$  et  $\frac{1}{r^{n+1}}$  correspondent respectivement aux problèmes internes et externes, exactement comme dans le cas scalaire. Les facteurs  $\mu_0$ ,  $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$  et  $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$  sont ajoutés pour que le potentiel magnétique vectoriel soit en accord avec le potentiel magnétique scalaire défini

précédemment : en procédant ainsi, les  $Q_n^m$  obtenus sont les mêmes pour les deux développements scalaire ou vectoriel.  $\mathbf{Y}_n^m(\theta, \phi)$  représente les harmoniques sphériques vectorielles, qui sont définies par :

$$\mathbf{Y}_n^m = \frac{\mathbf{r} \wedge (\nabla Y_n^m)}{\sqrt{n(n+1)}} = \begin{cases} 0 \\ \frac{-1}{\sin(\theta)\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \phi} \cdot \mathbf{e}_\theta \\ \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \cdot \mathbf{e}_\phi \end{cases} \quad (2.69)$$

Dans notre cas, le potentiel magnétique scalaire est, bien sûr, un bon outil intermédiaire pour déterminer le champ magnétique. Cependant, il est valable uniquement dans le cadre de l'hypothèse de l'ARQS, donc en champ proche. A l'opposé, le potentiel magnétique vectoriel peut être généralisé dans toutes les zones, c'est-à-dire en champ proche et champ lointain. Autrement dit,  $\psi$  vérifie seulement l'équation de Laplace, alors que  $\mathbf{A}$  vérifie aussi l'équation d'Helmholtz, qui prend en compte la phénomène de propagation en champ lointain. Ceci ne sera pas discuté dans ce document, plus de détails peuvent être trouvés dans [TA07]. La notion de potentiel vecteur magnétique nous aidera dans la suite à expliquer le calcul de l'inductance mutuelle.

## 2.6 Présentation du logiciel *Flux3D*

Dans ce travail, une grande quantité de modélisations ont été réalisées avec le logiciel *Flux3D*. Une résolution avec Flux3D fait appel à 5 modules : un descripteur géométrique, un mailleur tridimensionnel, un descripteur de propriétés physiques, un solveur et un module d'exploitation des résultats [Nen02].

### Descripteur géométrique

Le modeleur géométrique de *Flux3D* est de type frontalier qui conduit à créer les différents objets de la géométrie de manière ascendante. Un volume est donc décrit par les faces qui le bordent, une face est définie par ses lignes frontières et une ligne est caractérisée par ses points d'extrémités.

Dans ce travail, nous cherchons à caractériser essentiellement les champs "de fuite" des dispositifs étudiés. Il est donc hors de question de les négliger, comme on fait parfois pour les modélisations magnéto-statiques ou magnéto-mécaniques par éléments finis, en fermant le domaine d'étude par des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann. Du fait que nous considérons ici des milieux ouverts, nous utilisons l'outil "boite infinie" proposé dans le logiciel *Flux3D* (Figure 2.15).

La boîte infinie en *Flux3D* est sous forme d'une couche parallélépipédique, qui peut être réalisée soit par deux parallélépipèdes, soit par deux cylindres. L'exemple présenté en Figure 2.15 est réalisé par deux cubes imbriqués. Toutes les sources à étudier doivent être englobées dans le petit cube ; il est généralement recommandé que ce petit cube ait des dimensions 10 fois supérieures à celles de l'objet étudié.



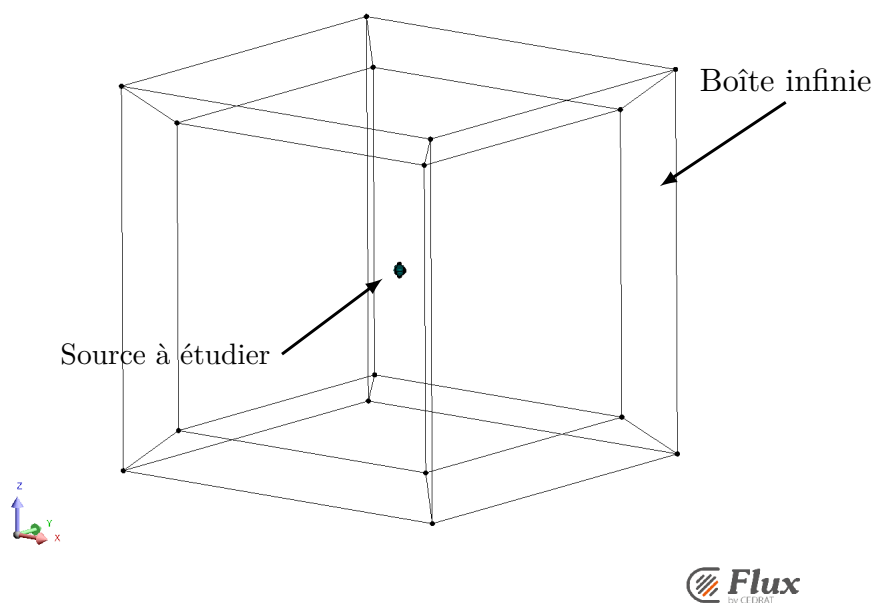


FIGURE 2.15 – Schéma de principe de la boîte infinie

### Maillage tridimensionnel

L'opération de maillage consiste à diviser le domaine d'étude en nombreux éléments de maillages. La qualité des résultats obtenus dépend de la finesse du maillage, car les degrés de liberté de la solution numériques sont portés par les noeuds. Le maillage de *Flux3D* est basé sur la méthode de Delaunay, qui permet de discrétiser automatiquement un objet en respectant les interfaces entre les régions surfaciques ou volumiques. Les noeuds du maillage sont créés successivement sur les points, les lignes, les faces et à la fin les volumes. Les éléments générés sont sous formes de triangle ou tétraèdre du premier ou second ordre.

### Descripteur de propriétés physiques et choix de formulation

Le descripteur de propriétés physiques de *Flux3D* permet de définir les caractéristiques physiques du projet, dont la solution électromagnétique dépend. Les caractéristiques comprennent :

- les propriétés électriques, magnétiques ou thermiques des matériaux
- les sources du dispositif étudié tel que les courants et les aimants
- les conditions aux limites, le cas échéant (nous utilisons de préférence l'outil "boite infinie")
- les propriétés géométriques comme les symétries.

Un avantage dans *Flux3D* est la fonction "la bobine non maillée". La bobine non maillée est une entité géométrique de forme circulaire, rectangulaire ou de forme plus complexe, qui est parcouru par un courant défini par l'utilisateur. Le calcul du champ magnétique généré par ce courant est réalisé à partir de la loi de Biot et Savart de façon analytique, comme expliqué dans § 2.4.1. Une bobine non maillée ne fait pas partie de la géométrie (au sens des éléments finis), car elle n'est pas formée de points, lignes, faces et volumes. Ceci nous permet de réduire

fortement le nombre de nœuds et diminuer le bruit de maillage sur les résultats.

Avant la résolution du problème, il faut tout d'abord choisir le type d'application parmi : magnéto-statique, magnéto-harmonique, électro-cinétique, etc. Ensuite, il est exigé de définir les méthodes de calculs appropriées, c'est-à-dire les formulations les plus adaptées au problème à partir des équations de Maxwell. Elles peuvent être le potentiel vecteur, le potentiel scalaire, le potentiel scalaire réduit par rapport au champ généré par la source de courant, etc. Pour les matériaux des caractéristiques non linéaires, un algorithme itératif basé sur la méthode de Newton-Raphson est utilisé afin de converger vers la solution.

## Exploitation des résultats

Après résolution du problème, *Flux3D* propose de nombreuses fonctions pour l'interprétation des résultats du calcul des champs et de nombreux outils graphiques. Les supports des grandeurs physiques sont variés : point, chemin, face, volume, régions, etc. Le post-processeur permet également de calculer l'intégrale de grandeurs physiques sur les différents supports.

## 2.7 Caractéristiques des harmoniques sphériques

### 2.7.1 Notion d'ordre

Similaire au série de Fourier, le développement en HS (harmoniques sphériques) jusqu'à l'ordre infini permet toujours de décrire le rayonnement sans erreur. Mais en pratique, ce développement est limité à un certain ordre  $N_{max}$ . En raison du terme  $\frac{1}{r^{n+2}}$  dans l'équation (2.65), les termes d'ordre élevé ont une décroissance plus forte en fonction de la distance au centre de la décomposition. Si on se place suffisamment loin de la sphère de validité mais toujours dans la zone de champ proche, s'arrêter à l'ordre 1, c'est-à-dire considérer les trois composantes dipolaires, suffit à caractériser le comportement de la source. Un peu plus près, les cinq composantes de l'ordre 2 (quadripolaire) vont devenir nécessaires. Plus on s'approche de la source, plus l'ordre nécessaire pour décrire le champ est élevé. Le principe est présenté en Figure 2.16.

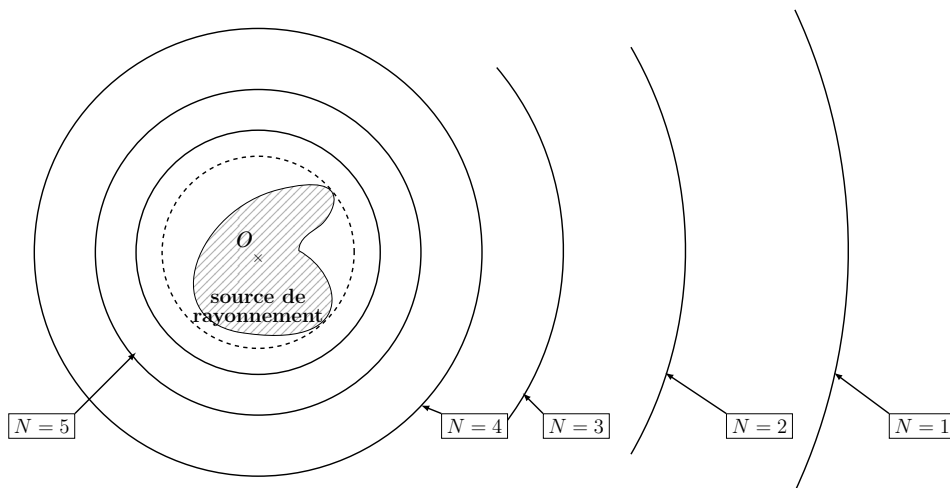


FIGURE 2.16 – Influences des ordres en fonction de la distance au centre

La détermination de  $N_{max}$  n'est pas seulement basée sur la décroissance des termes, mais aussi sur le bruit de mesure. A partir d'une certaine distance, les mesures pour un ordre donné et les ordres supérieurs seront noyées dans le bruit d'environnement.

## 2.7.2 Quelques exemples des fonction HS

Pour plus de commodité dans la suite du document, les fonctions HS (harmoniques sphériques) réelles sont énumérées pour  $N = 0, 1, 2$  en coordonnées sphériques et cartésiennes.

		sphérique	cartésien
$n = 0$	$Y_0^0$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$n = 1$	$Y_1^{-1}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \sin \phi$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} x$
	$Y_1^0$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} z$
	$Y_1^1$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \cos \phi$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} y$
$n = 2$	$Y_2^{-2}$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} xy$
	$Y_2^{-1}$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin \theta \cos \theta \sin \phi$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} yz$
	$Y_2^0$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3z^2 - 1)$
	$Y_2^1$	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin \theta \cos \theta \cos \phi$	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}} xz$
	$Y_2^2$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin^2 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} (x^2 - y^2)$

TABLE 2.3 – Premières harmoniques sphériques, en coordonnées sphériques et cartésiennes

Les expressions de ces premières harmoniques sphériques permettent de mettre en évidence quelques règles simples : par exemple, le moment maximum pour un ordre donné est égal à cet ordre. Les graphiques de quelques premiers termes de HS sont présentées en Figure 2.17.

A partir de la représentation des premières HS réelles, on peut constater plus clairement les propriétés des fonctions HS. La première remarque et aussi la plus évidente est que les composantes de moment négatif ont toujours la même forme que celles de moment positif, mais avec une rotation de  $\frac{\pi}{2|m|}$  autour de l'axe  $z$ . En raison du terme  $\cos$  et  $\sin$  dans la définition de la fonction HS réelle en (2.62), la relation entre les composantes de moments positifs et négatifs peuvent être déduites :

$$Y_n^{|m|}(\theta, \phi + \frac{\pi}{2|m|}) = Y_n^{-|m|}(\theta, \phi) \quad (2.70)$$

Ensuite, la symétrie et la périodicité de toutes les composantes suivent aussi des lois spécifiques comme en Figure 2.18 :

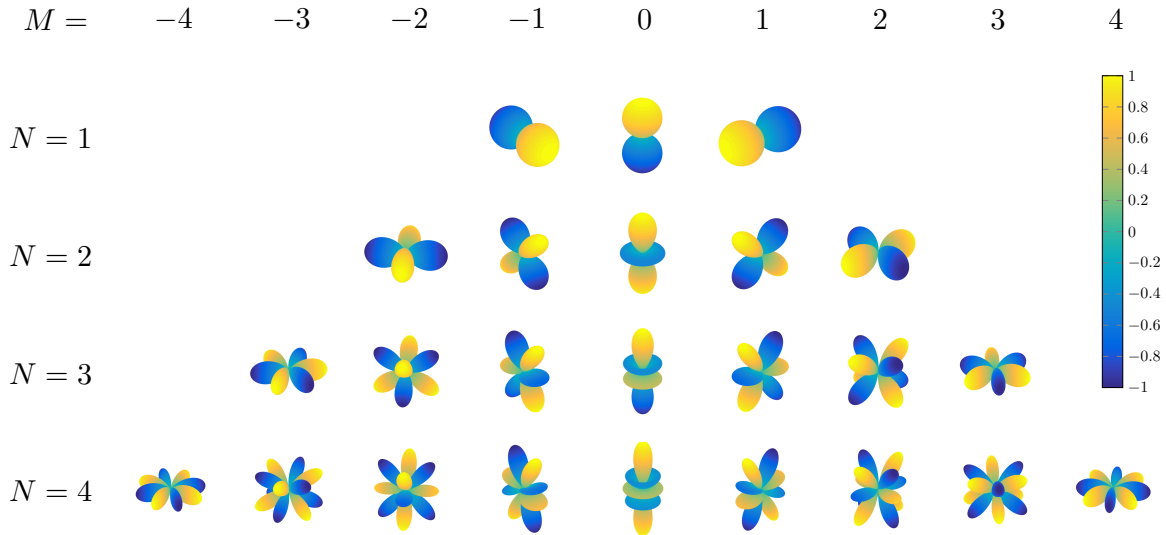


FIGURE 2.17 – Représentations des premières harmoniques sphériques réelles

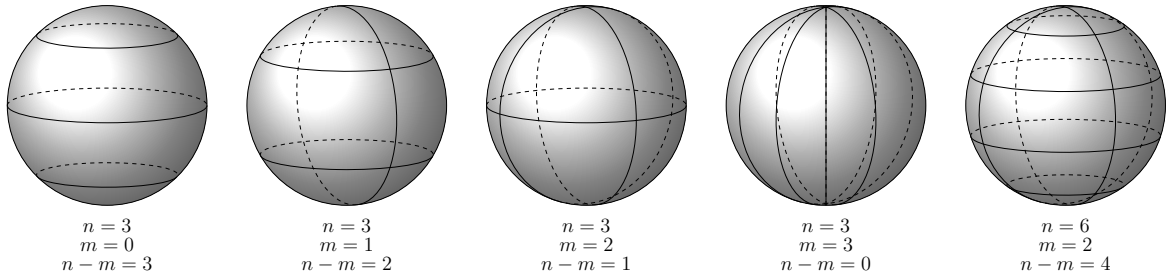


FIGURE 2.18 – Représentation de la symétrie et la périodicité de la fonction harmonique sphérique

En effet, la symétrie et la périodicité de la fonction HS sont définies par les polynômes de Legendre associés  $P_n^m(\theta, \phi)$  et le terme  $e^{im\phi}$  en (2.61), qui sont donc directement reliés aux ordre  $n$  et moment  $m$ . Sur la Figure 2.18, les lignes représentent les cercles d'annulation, qui séparent donc les zones positives et négatives. Ces lignes sont comme les méridiens (iso-longitude) et les parallèles (iso-latitude) de la terre. Le nombre de lignes « méridien » est  $m$ . Donc les composantes de moment nul sont toutes axi-symétriques. Le nombre de « parallèle » est  $n - m$ . En conséquence, la fonction HS est symétrique sur le plan xOy quand  $n - m$  est paire et asymétrique quand  $n - m$  est impaire. Ces propriétés importantes nous permettront de simplifier le modèle avec les connaissances a priori de la source. Des exemples d'application seront montrés au chapitre 4.

### 2.7.3 Orthogonalité

Les harmoniques sphériques constituent une base orthonormée dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{S}^2)$  où  $\mathbb{S}^2$  est la sphère unité. L'espace de Hilbert est un espace vectoriel linéaire muni d'un produit scalaire dont l'espace normé est complet [Mou06].

Le produit scalaire des fonctions complexes est défini par :

$$\langle \psi, \chi \rangle = \int_a^b \psi(x)(\chi(x))^* \cdot dx \quad (2.71)$$

La fonction de normalisation (2.61) assure que le produit scalaire d'une fonction de base avec elle-même est égal à 1. Nous démontrons ci-dessous cette propriété.

$$\begin{aligned} \int Y_n^m(\Omega) \cdot (Y_{n'}^{m'}(\Omega))^* &= (-1)^{m+m'} \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} \sqrt{\frac{(2n'+1)(n'-m')!}{4\pi(n'+m')!}} \\ &\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi P_n^m(\cos \theta) P_{n'}^{m'}(\cos \theta) e^{im\phi} e^{-im'\phi} \end{aligned} \quad (2.72)$$

$\Omega$  représente la coordonnée angulaire  $(\theta, \phi)$  et son intégrale volumique est  $d\Omega = d(\cos \theta)d\phi$ . L'intégrale de  $\phi$  s'annule sauf si  $m = m'$ , on a donc :

$$\begin{aligned} &\int Y_n^m(\Omega) \cdot (Y_{n'}^{m'}(\Omega))^* \\ &= 2\pi \delta_m^{m'} \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} \sqrt{\frac{(2n'+1)(n'-m')!}{4\pi(n'+m')!}} \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^{m'}(x) dx \\ &= 2\pi \delta_m^{m'} \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} \sqrt{\frac{(2n'+1)(n'-m')!}{4\pi(n'+m')!}} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_n^{n'} \\ &= 2\pi \delta_m^{m'} \delta_n^{n'} \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\ &= \delta_m^{m'} \delta_n^{n'} \end{aligned} \quad (2.73)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker, qui est défini comme :

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.74)$$

(2.73) démontre que la base en harmoniques sphériques est orthonormée. C'est aussi pour cette raison que la fonction de normalisation est choisi comme :  $\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}$ . Cette propriété est valable aussi pour l'harmonique sphérique vectorielle :

$$\int \mathbf{Y}_n^m(\Omega) \cdot (\mathbf{Y}_{n'}^{m'}(\Omega))^* = \delta_m^{m'} \delta_n^{n'} \quad (2.75)$$

La démonstration est presque la même que pour les harmoniques sphériques scalaires mais exige le calcul de la dérivée du polynôme de Legendre associé. D'un point de vue plus générale, cette propriété « orthonormée » peut se traduire en : toute les fonctions  $F(\theta, \phi)$  de carré sommable sur la sphère de rayon unité (dont l'intégration de  $F^2$  sur les angles  $\theta$  et  $\phi$  existe) forment un espace vectoriel [Vin09]. Donc, toutes les fonctions appartenant à cet espace sont décomposables en une série d'harmoniques sphériques :

$$F(\theta, \phi) = \sum \sum \alpha_n^m Y_n^m(\theta, \phi) \quad (2.76)$$

Ceci est une propriété très importante, qui montre également que les coefficients harmoniques  $\alpha_n^m$  peuvent être déterminés par le produit scalaire de  $F(\theta, \phi)$  et  $Y_n^m(\theta, \phi)$ , noté  $\langle | \rangle$  :

$$\langle F | Y_n^m \rangle = \alpha_n^m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_n^m(\theta, \phi) \cdot Y_n^m(\theta, \phi)^* \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (2.77)$$

(2.77) propose une façon de déterminer les coefficients harmoniques à partir de la fonction en espace, est-elle applicable pour notre cas d'induction magnétique? L'équation (2.65) donne l'expression de l'induction magnétique en harmoniques sphériques du problème externe. La composante radiale sur une sphère de mesure ( $S_M$ ) s'écrit :

$$B_r(r_M, \theta, \phi) = \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot \frac{n+1}{r_M^{n+2}} \cdot Y_n^m(\theta, \phi) \quad (2.78)$$

$r_M$  représente le rayon de la sphère de mesure. (2.73) donne le produit scalaire entre les fonctions harmoniques sphériques sur une sphère unité. Celle-ci peut également être adaptée à une sphère de mesure d'un rayon  $r_M$  :

$$\begin{aligned} \iint_{S_M} Y_n^m \cdot (Y_{n'}^{m'})^* dS &= r_M^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Y_n^m(\theta, \phi) \cdot Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi)^* \\ &= r_M^2 \cdot \delta_n^{n'} \delta_m^{m'} \end{aligned} \quad (2.79)$$

En combinant les équations (2.77), (2.78) et (2.79), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle B_r | Y_n^m \rangle &= \iint_{S_M} B_r(r_M, \theta, \phi) \cdot Y_n^m(\theta, \phi)^* dS \\ &= \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot \frac{n+1}{r_M^{n+2}} \cdot \iint_{S_M} Y_n^m(\theta, \phi) \cdot Y_n^m(\theta, \phi)^* dS \\ &= \mu_0(n+1) \cdot \frac{1}{r_M^n} \cdot Q_n^m \end{aligned} \quad (2.80)$$

Par conséquent, chaque composante harmonique peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Q_n^m &= \frac{r_M^n}{\mu_0(n+1)} \iint_{S_M} B_r(r_M, \theta, \phi) \cdot Y_n^m(\theta, \phi)^* dS \\ &= \frac{r_M^n}{\mu_0(n+1)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi B_r(r_M, \theta, \phi) \cdot Y_n^m(\theta, \phi)^* \sin(\theta) d\theta d\phi \end{aligned} \quad (2.81)$$

L'équation (2.81) montre que pour d'obtenir les coefficients harmoniques d'une source de rayonnement, la connaissance de la seule composante radiale d'induction magnétique est suffisante. Cette méthode d'identification par intégration est un outil pour le problème direct. Elle peut être appliquée avec la méthode des éléments finis, ou avec l'expression analytique du rayonnement de la source.

### 2.7.4 Constructions de sources harmoniques « pures »

On revient maintenant à l'équation (2.39), l'expression analytique du champ d'une spire horizontale sous condition  $r^2 \ll R^2$  en coordonnées sphériques. Ceci correspond à la situation où le rayon de la spire est petit devant la distance entre cette spire et le point d'observation. La composante radiale de l'induction magnétique de cette spire est :

$$B_r(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 I r^2 \cos \theta}{2R^3} \quad (2.82)$$

où  $r$  représente le rayon de la spire et  $R$  représente la distance entre le centre de la spire et le point d'observation. Il est important de noter que cette expression est proportionnelle à celle de  $Y_1^0$  dans la Table 2.3. Afin de rendre la comparaison plus intuitive, la composante radiale de l'induction magnétique d'une spire (équation (2.36)) est tracée en Figure 2.19 pour les différentes distances d'observation  $r_m$ .

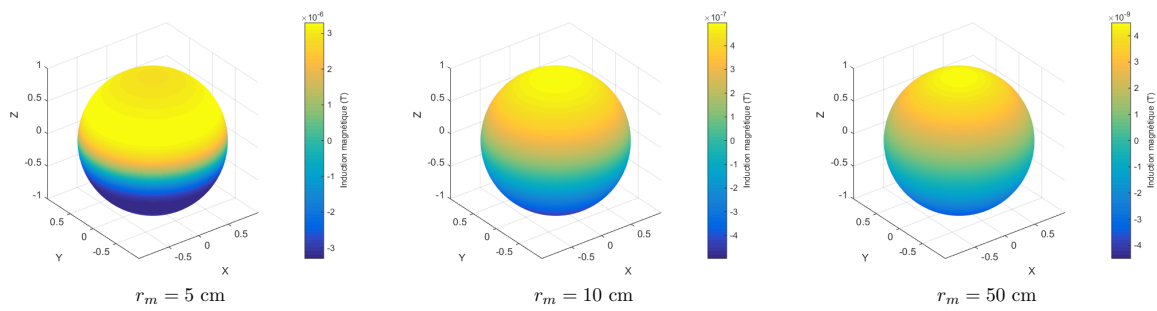


FIGURE 2.19 – Induction magnétique de la bobine d'un rayon de 3 cm à 5 cm (gauche), 10 cm (milieu) et 50 cm (droite).

On peut constater que l'induction magnétique de la boucle est équivalente à un dipôle à 50 cm. Parce que la condition  $r^2 \ll R^2$  est bien respectée dans cette situation, ce qui permet d'approximer une spire de courant à un dipôle magnétique. Cependant, ce n'est plus le cas lorsque le point d'observation est plus proche de la spire ( $r_m = 5$  cm et  $r_m = 10$  cm en Figure 2.19), parce que d'autres composantes harmoniques existent quand même. Grâce à l'axi-symétrie autour de l'axe  $z$ , seules les composantes de moment nul existent. Les composantes d'ordre pair sont toutes nulles en raison de la symétrie par rapport au plan  $xOy$ . Ainsi, une spire de courant ne possède que les composantes :  $Q_1^0, Q_3^0, Q_5^0, \dots$ . Pour le cas d'une spire de 3 cm, les premiers coefficients harmoniques sont :

- $Q_1^0 = 4.61 \cdot 10^{-4}$
- $Q_3^0 = -2.03 \cdot 10^{-7}$
- $Q_5^0 = 1.22 \cdot 10^{-10}$
- $Q_7^0 = 4.11 \cdot 10^{-14}$

Par rapport à  $Q_1^0$ , les coefficients supérieurs sont tous négligeables, les champs magnétiques générés sur la sphère de 1 mètre par ces composantes harmoniques sont également négligeables. Comme déjà expliqué sur la Figure 2.16, plus on s'approche de la source, plus les champs magnétiques générés par les ordres élevés sont importants, plus le nombre d'ordre nécessaire pour décrire le champ sera important. Un exemple est montré en Figure 2.20. La source est toujours

la boucle de courant avec un rayon de 3 cm, mais cette fois l'induction magnétique est observé sur une sphère de 5, 10, et 50 cm.

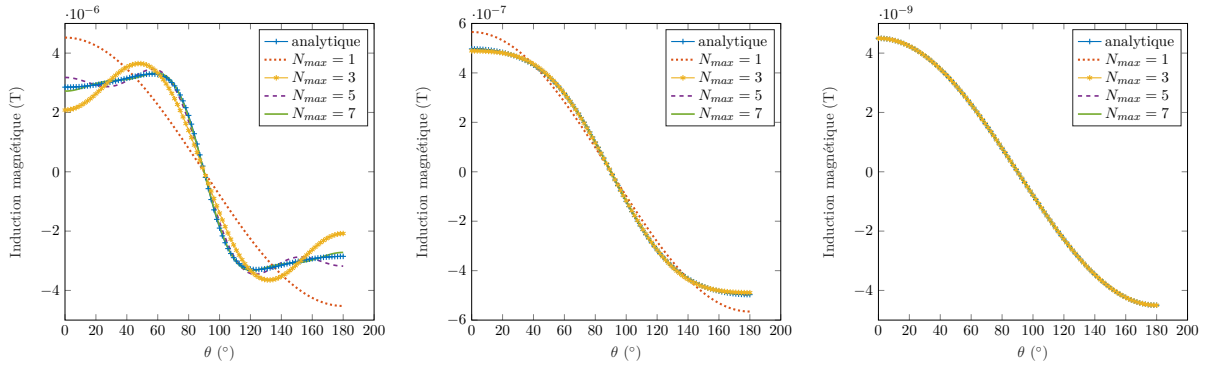


FIGURE 2.20 – Inductions magnétiques de la bobine d'un rayon de 3 cm et des sources reconstruites en harmoniques sphériques avec  $r_m = 5$  cm (gauche) ;  $r_m = 10$  cm (centre) et  $r_m = 50$  cm (droite)

Vu que la source de rayonnement est axi-symétrique, l'induction magnétique n'est étudiée qu'en fonction de  $\theta$  (le long de la ligne de longitude). Sur la Figure 2.20, la courbe bleue représente l'induction magnétique calculée analytiquement de la boucle de 3 cm. Les inductions générées par les sources reconstruites en harmoniques sphériques sont aussi tracées. Ces sources reconstruites possèdent différents ordres maximaux considérés ( $N_{max}$ ). Plus  $N_{max}$  est grand, plus l'induction magnétique reconstruite s'approche de la valeur analytique. Les erreurs quadratiques sur les inductions magnétiques reconstruites en harmoniques sphériques par rapport à la valeur analytique sont calculées et données dans la Table 2.4 en fonction de la distance et  $N_{max}$ .

$r_m \backslash N_{max}$	1	3	5	7
5 cm	38.7	14.5	5.4	2.0
10 cm	9.9	0.9	$8.5 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
50 cm	0.39	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2.4 – Erreur quadratique relative  $\varepsilon(\%)$  sur l'induction magnétique reconstruite d'une spire de 3 cm pour les différents  $N_{max}$  et distances d'observation  $r_m$

Il est évident que  $N_{max} = 1$  n'est pas suffisant pour décrire le rayonnement de la spire à 5 cm, autrement dit, la spire de 3 cm ne peut plus être considérée comme un dipôle magnétique avec un point d'observation placé à 5 cm du centre. Classiquement, il faut observer à une distance d'au moins 5 fois le rayon de la spire pour avoir cette assimilation. Cette image est en effet très pratique, elle fait le lien entre les développements mathématiques et le sens physique. Est-il possible de construire des sources équivalentes et simples pour les quadripôles ( $n = 2$ ) et octopôles ( $n = 3$ ) ?

[WS85] propose une méthode simple pour construire les sources sur les ordres élevés, seulement avec des boucles de courant. Cette méthode est basée sur la divergence d'un vecteur potentiel. Quelques exemples sont cités en Figure 2.21.

La première colonne représente les configurations des boucles de courant. Toutes les spires



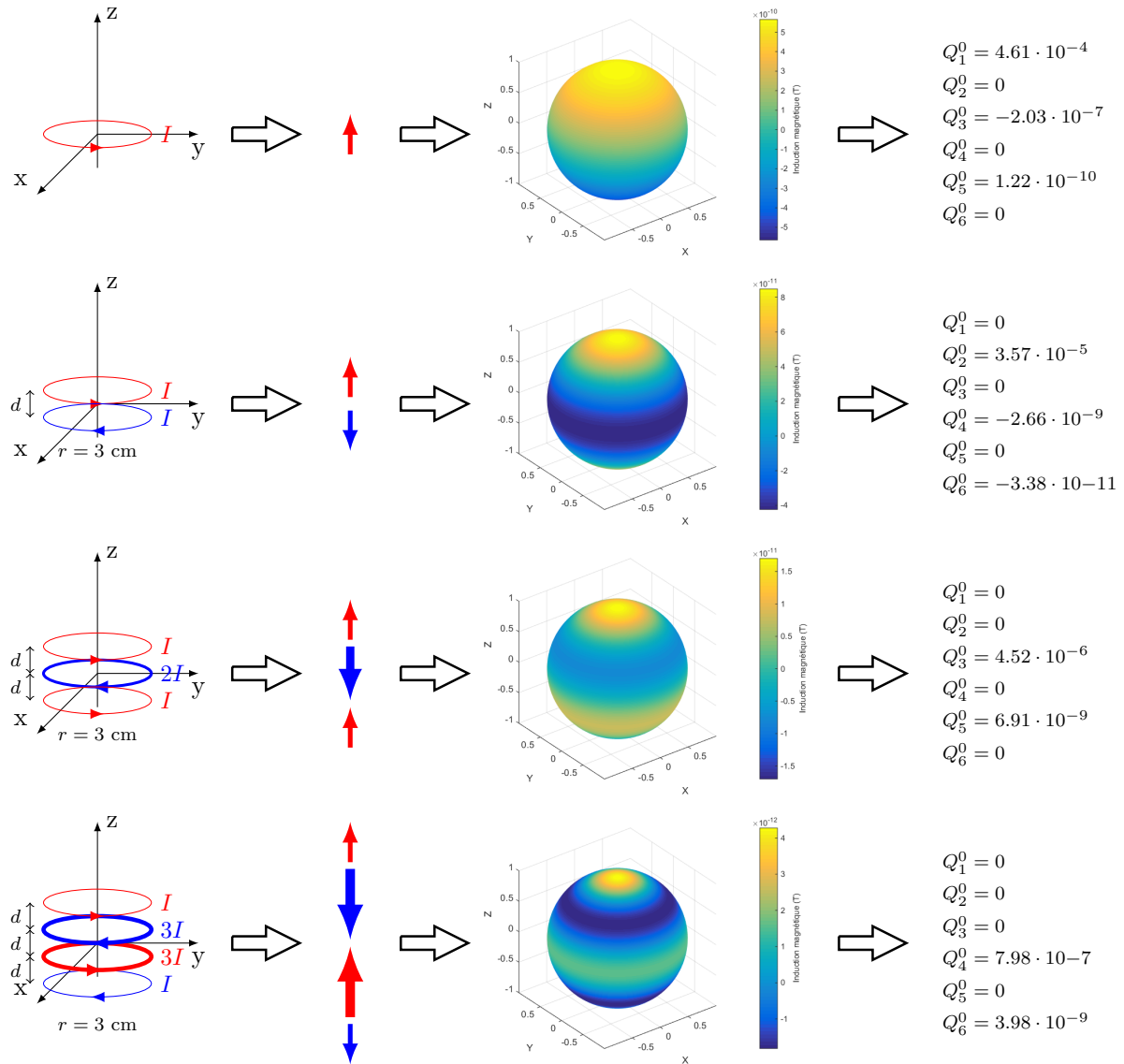


FIGURE 2.21 – Constructions des sources "pures" à partir de boucles de courant

possèdent un même rayon de 3 cm et elle sont toutes sur l'axe  $z$ . Les deux couleurs rouge et bleu représentent deux sens de courants. La deuxième colonne représente la direction de chaque « dipôle ». Les dimensions des flèches représentent les intensités de ces « dipôles » qui sont proportionnelles aux intensités des courants. Le quadripôle ( $n = 2$ ) peut être construit par association de deux dipôles ( $N = 1$ ) tête bêche et équidistants du centre. L'octopôle ( $N = 3$ ) peut également être vu comme l'association de deux quadripôles tête bêche. En effet, cette relation entre la composante  $N$  et  $N - 1$  est toujours vraie. La troisième colonne représente la composante normale des inductions magnétiques des sources construites sur une sphère de mesure de 1 mètre. La quatrième colonne donne les six premiers coefficients harmoniques de la source en utilisant l'équation (2.81). Chaque source possède une composante harmonique prédominante par rapport aux autres. En première approximation, le comportement de ce champ normal est donc le même que  $Y_1^0$ ,  $Y_2^0$ ,  $Y_3^0$  et  $Y_4^0$  sur la Figure 2.17.

Il est aussi possible de construire des sources de moment non nul avec les boucles de courant.

La configuration des boucles est plus complexe que pour le moment zéro, parce que les spires ne sont plus sur le même axe. Un exemple de la composante  $Y_3^2$  est représenté sur la Figure 2.22.

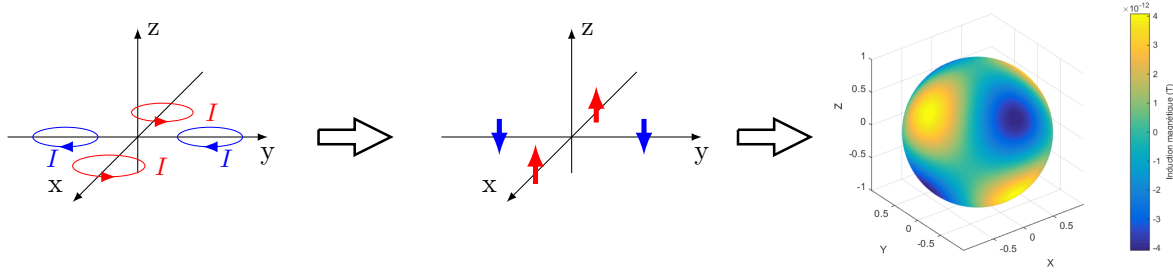


FIGURE 2.22 – Constructions de la composante  $Y_3^2$  avec les boucles de courant

En pratique, 4 boucles de courants sont suffisantes pour créer la source de  $Y_3^2$ . Néanmoins, la complexité de la configuration augmente très vite en fonction de l'ordre  $N$ . Une autre méthode est proposée pour construire les sources « pure » de moments non nuls, basée sur les rotations des composantes de moment nul. Cette méthode sera présentée dans les sections suivantes après l'introduction de la rotation du repère en harmoniques sphériques.

Tous les exemples montrés ci-dessus concerne le problème externe. Pour le problème interne, l'approche est presque la même. La seule différence est qu'au lieu de prendre des spires de très petites dimensions, les sources sont construites avec des spires circulaires d'une taille très importante. C'est-à-dire pour avoir toutes les approximations, la condition à respecter est  $R^2 \ll r^2$  avec  $r$  le rayon de la spire et  $R$  la distance d'observation par rapport au centre du repère.

L'objectif de cette section est de chercher les équivalences physiques des sources en développement multipolaire. Les Figures 2.21 et 2.22 montrent qu'il est possible de construire la source en harmonique sphérique ( $Y_n^m$ ) avec des boucles de courant. Ces résultats ont une grande signification dans les mesures expérimentales, parce qu'ils nous permettent non seulement de valider notre banc de mesure, mais aussi de corriger les erreurs causées par les sources secondaires, dont on parlera dans la section 3.2. Cette méthode de compensation est réalisée par les construction des sources canoniques dans le cas du problème interne.

### 2.7.5 Rotation

Les fonctions des harmoniques sphériques sont invariantes en rotations, ce qui signifie que si la fonction  $g(\theta, \phi)$  est la fonction de  $f(\theta, \phi)$  après une rotation de  $(\theta', \phi')$  :

$$g(\theta, \phi) = \mathbf{R}(f(\theta, \phi), \theta', \phi') \quad (2.83)$$

alors on a :

$$\tilde{g}(\theta, \phi) = \mathbf{R}(\tilde{f}(\theta, \phi), \theta', \phi') \quad (2.84)$$

où  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  sont les développements à l'ordre  $N$  des fonctions d'origine  $f$  et  $g$ .  $\mathbf{R}$  est la matrice de passage d'une base à l'autre, qui représente la rotation de la source ou du repère. Les équations (2.83) et (2.84) signifient que, pour évaluer une fonction harmonique tournée  $\tilde{g}$ , on peut soit tourner le développement  $\tilde{f}$ , soit approximer la fonction d'origine  $f$  tournée  $g$ . Cette propriété

implique que la projection harmonique sphérique ne produit aucun biais. La question maintenant est comment tourner les fonctions en harmoniques sphériques? Autrement dit, comment établir la matrice de rotation  $\mathbf{R}$ ?

Dans le cas général, les trois angles d'Euler, sont utilisés pour décrire l'orientation d'un solide. Tous les mouvements de rotation peuvent être obtenus en composant trois rotations élémentaires, c'est-à-dire des rotations autour des axes d'un système de coordonnées. Le principe est présenté en Figure 2.23.

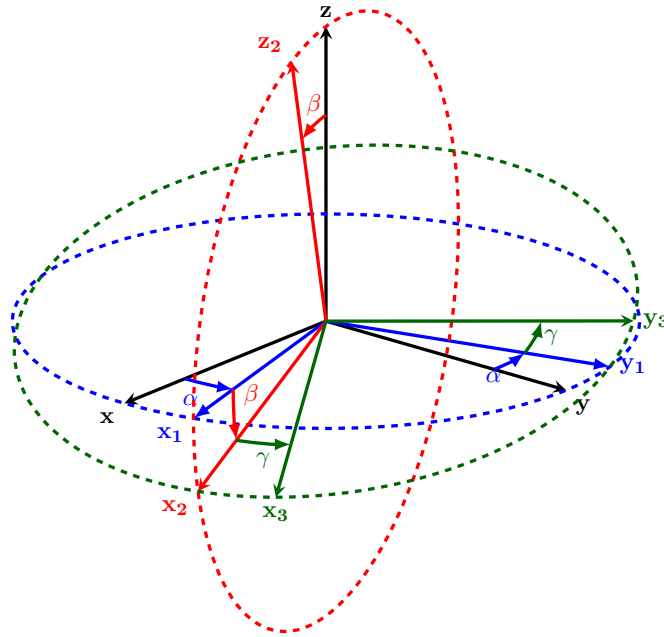


FIGURE 2.23 – Principe des angles d'Euler

La convention utilisé sur la Figure 2.23 est  $z - y - z$ , qui représente l'ordre des axes de rotations. Les valeurs des trois rotations correspondantes sont respectivement  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . La matrice de rotation  $\mathbf{R}$  peut s'écrire comme le produit de trois matrices de rotation élémentaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) &= R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

La matrice de rotation  $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$  dans l'équation (2.85) permet d'exprimer la fonction après une rotation. Existe-t-il une matrice de passage directe d'une base en harmoniques sphériques à l'autre? La relation entre les coefficients peut être exprimée comme :

$$\mathbf{Q}_{\text{HS}}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}_{\text{HS}} \quad (2.86)$$

$\mathbf{Q}_{\text{HS}}$  et  $\mathbf{Q}_{\text{HS}}'$  représente les coefficients harmoniques avant et après la rotation. Ils sont sous

la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{\mathbf{HS}} = (Q_0^0, Q_1^{-1}, Q_1^0, Q_1^1, Q_2^{-2}, Q_2^{-1}, Q_2^0, Q_2^1, Q_2^2, Q_3^{-3} \dots) \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{HS}'} = (Q_0^{0'}, Q_1^{-1'}, Q_1^{0'}, Q_1^{1'}, Q_2^{-2'}, Q_2^{-1'}, Q_2^{0'}, Q_2^{1'}, Q_2^{2'}, Q_3^{-3'} \dots) \end{cases} \quad (2.87)$$

$Q_n^m$  représente le coefficient harmonique sphérique de l'ordre  $n$  et moment  $m$ . La matrice de rotation  $\mathbf{R}$  est une matrice de dimension  $N_{max}^2 \times N_{max}^2$  avec  $N_{max}$  l'ordre maximal considéré. Grâce à la propriété d'orthogonalité des harmoniques sphériques, la rotation est en effet une opération linéaire et les coefficients d'ordres différents n'interagissent pas [GG09].  $\mathbf{R}$  est ainsi une matrice creuse par blocs [Gre03]. La forme de la matrice  $\mathbf{R}$  est présentée sur l'équation (2.88).

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{R}^1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{R}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

L'indice  $i$  dans  $\mathbf{R}^i$  représente l'ordre en harmoniques sphériques. Pour un ordre  $n$  donné, on a donc :

$$Q_n^{m'} = \sum_{m=-n}^n R_n^{m',m} \cdot Q_n^m \quad (2.89)$$

Le coefficient de la transformation  $R_n^{m',m}$  s'écrit comme [BFB97] :

$$R_n^{m',m} = e^{-im'\gamma} d_n^{m',m}(\beta) e^{-im'\alpha} \quad (2.90)$$

$d_n^{m',m}(\beta)$  est connue sous le nom de matrice D de Wigner qui est introduit par Eugene Wigner en 1927, utilisée souvent en mécanique quantique. Son expression est :

$$\begin{aligned} d_n^{m',m}(\beta) = & (-1)^{m'-m} [(n+m')!(n-m')!(n+m)!(n-m)!]^{1/2} \\ & \sum_s (-1)^s \frac{(\cos \frac{\beta}{2})^{2(n-s)+m-m'} (\sin \frac{\beta}{2})^{2s-m+m'}}{(n+m-s)!s!(m'-m+s)!(n-m'-s)!} \end{aligned} \quad (2.91)$$

La somme sur  $s$  est effectuée sur des valeurs telles que les factoriels ne soient pas négatifs. Le calcul du  $d_n^{m',m}(\beta)$  est extrêmement lourd à cause de la boucle de factoriel et risque de conduire à une instabilité numérique. Afin de résoudre ce problème, plusieurs méthodes ont été proposées basées sur l'utilisation de récurrences [CIGR99], [GG09], [GD14], [IR96]. Dans ce travail, la méthode décrite dans [BFB97] est utilisée. Elle permet de calculer par récurrence tous

les éléments de  $\mathbf{R}$ . Par exemple, la matrice de rotation d'ordre 1 ( $\mathbf{R}^1$ ) s'écrit :

$$\mathbf{R}^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \alpha - \\ \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta \end{pmatrix} & \begin{matrix} \sin \gamma \sin \beta \\ \cos \beta \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cos \gamma \sin \alpha + \\ \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\cos \gamma \sin \alpha \cos \beta - \\ \sin \gamma \cos \alpha \end{pmatrix} & \begin{matrix} \cos \gamma \sin \beta \\ \sin \gamma \sin \alpha \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \alpha \cos \beta - \\ \sin \gamma \sin \alpha \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

$\mathbf{R}^1$  est une matrice  $3 \times 3$  parce qu'il y a trois composantes harmoniques pour l'ordre 1. Selon l'équation (2.87), la deuxième colonne dans la matrice (2.92) entourée par la ligne pointillée représente les composantes harmoniques créées par la rotation de  $Y_1^0$ . Grâce à l'axi-symétrie des composantes de moments nuls, les termes de  $\alpha$  disparaissent. [VCS<sup>+</sup>10] propose une idée intéressante de créer les composantes harmoniques de moments non nuls à partir de celui de moment nul, en appliquant une combinaison linéaire. On note  $Y_n^m(\alpha, \beta, \gamma)$  les harmoniques créées par  $Y_n^m$  après une rotation de  $\mathbf{R}^n(\alpha, \beta, \gamma)$ , c'est-à-dire :

$$Y_n^m(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}^n(\alpha, \beta, \gamma) \cdot Y_n^m \quad (2.93)$$

Si  $n = 1$ , en combinant les équations (2.92) et (2.93), il est facile de montrer que :

$$\begin{cases} Y_1^0(0, \frac{\pi}{2}, 0) = Y_1^1 \\ Y_1^0(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = Y_1^{-1} \end{cases} \quad (2.94)$$

On peut constater que  $Y_1^1$  et  $Y_1^{-1}$  peuvent tous être obtenus après une rotation de  $Y_1^0$ . Cette idée de construction de sources standards peut être généralisée pour tous les ordres. Par exemple pour l'ordre 2 ( $n = 2$ ), la première étape est toujours d'établir la matrice de rotation (Seule la troisième colonne de la matrice est présentée correspondant aux composantes harmoniques créées par  $Y_2^0$ ) :

$$\mathbf{R}^2(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} X & X & \begin{matrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \alpha \sin(2\beta) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\beta) \sin \gamma \end{matrix} & X & X \\ X & X & \frac{1}{4}(3 \cos(2\beta) + 1) & X & X \\ X & X & \begin{matrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\beta) \cos \gamma \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \beta \cos(2\gamma) \end{matrix} & X & X \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

Comme déjà évoqué précédemment, à cause de la matrice D de Wigner, la complexité de la matrice de rotation explose. A titre d'exemple, la composante  $Y_2^1$  sera construite. La forme de  $Y_2^1$  est présenté en Figure 2.24, également avec les cercles d'annulations, obtenues par la règle de symétrie et de périodicité sur la Figure 2.18.

A l'aide des cercles d'annulations, il est intuitif de tourner  $Y_2^0$  de  $45^\circ$ . En effet, à partir de

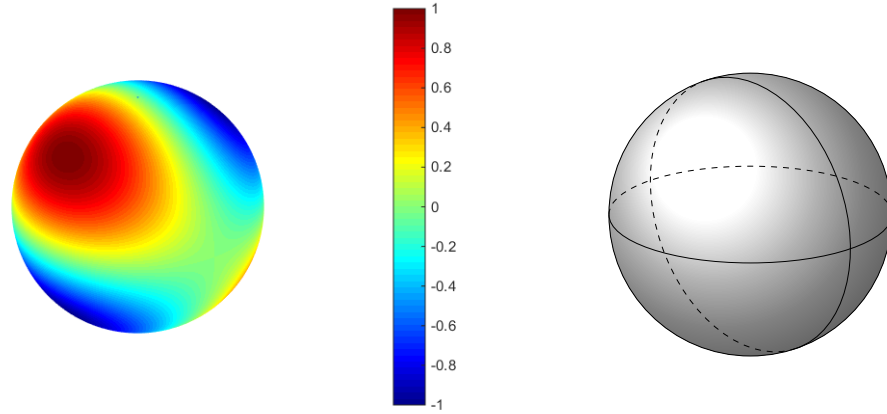


FIGURE 2.24 – Forme de la composante  $Y_2^1$  (gauche); Cercles d'annulations de la composante  $Y_2^1$  (droite)

la matrice 2.95, on peut obtenir :

$$\begin{cases} Y_2^0(0, \frac{\pi}{4}, 0) = \frac{1}{4}Y_2^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}Y_2^1 + \frac{\sqrt{3}}{4}Y_2^2 \\ Y_2^0(0, -\frac{\pi}{4}, 0) = \frac{1}{4}Y_2^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}Y_2^1 + \frac{\sqrt{3}}{4}Y_2^2 \end{cases} \quad (2.96)$$

En soustrayant les deux équations en (2.96), on obtient :

$$Y_2^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( Y_2^0(0, \frac{\pi}{4}, 0) - Y_2^0(0, -\frac{\pi}{4}, 0) \right) \quad (2.97)$$

L'équation (2.97) montre que la composante harmonique  $Y_2^1$  peut être construite par des rotations et combinaisons linéaires de  $Y_2^0$ . Les constructions par les boucles de courant de  $Y_n^0$  sont toutes connues (Figure 2.21), la construction de  $Y_2^1$  est donc réalisable facilement. La simulation en *Flux3D* est effectuée pour vérifier l'exemple de  $Y_2^1$ .

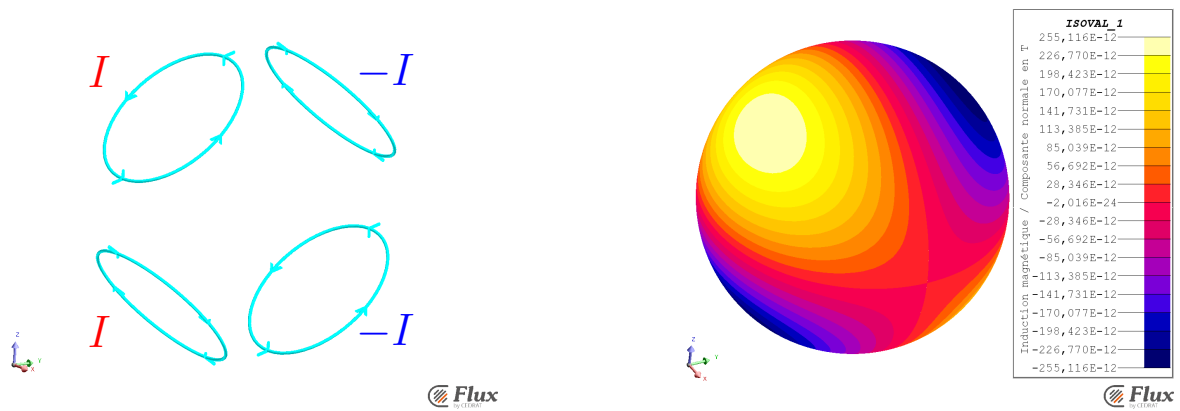


FIGURE 2.25 – Configuration des boucles de courant (gauche); Induction magnétique sur une sphère de 1 m (droite)

La Figure 2.25 montre la configurations de boucles de courant pour construire la composante

$Y_2^1$  et son induction magnétique sur une sphère de 1 m. Ceci confirme les calculs et les conclusions précédentes.

Cette idée de combinaison linéaire non seulement relie toutes les composantes harmoniques de même ordre, mais conduit également à une méthode permettant de construire les sources standards. Ceci nous permettra de compenser les erreurs causées par les sources secondaires en mesures expérimentales, qui sera détaillé dans §3.2.

## 2.7.6 Translation

Un autre outil très important et utile en harmoniques sphériques est la translation. Comme pour la rotation, le calcul de la translation est assez complexe, il nécessite un outil mathématique : les symboles Wigner 3-j. Les détails de calcul se trouvent dans [Bro01], dédié aux harmoniques sphériques vectorielles. Seul le principe est présenté ici, en Figure 2.26.

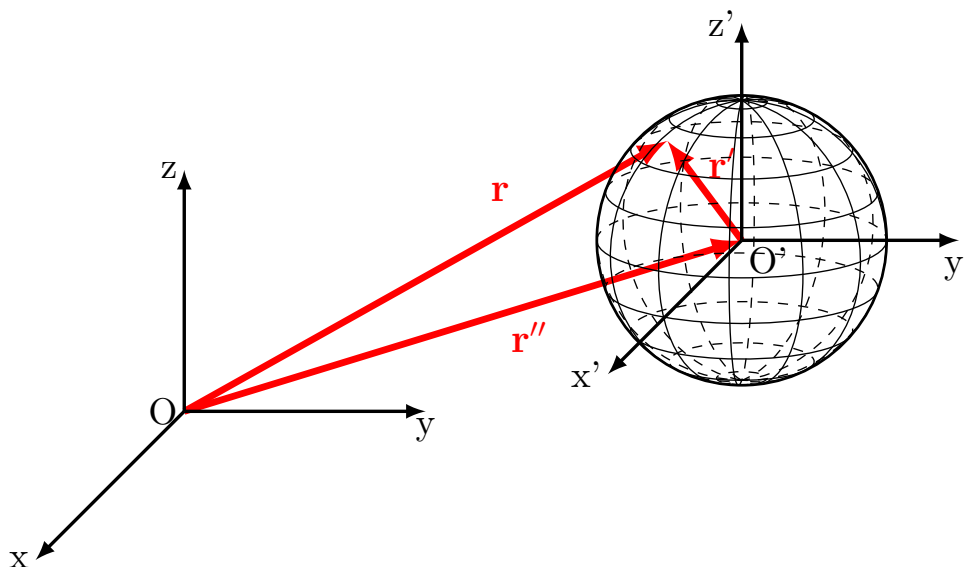


FIGURE 2.26 – Principe de la translation de l’origine du développement en harmoniques sphériques

Le repère  $(x, y, z)$  est translaté au  $(x', y', z')$ . Les origines des deux repères  $O$  et  $O'$  représentent aussi les deux origines du développement multipolaires avant et après la translation. Les axes des deux systèmes de coordonnées sont tous parallèles.  $\mathbf{r}''$  est un vecteur reliant les origines des deux systèmes. La sphère représente la surface d’intégration, avec laquelle les coefficients harmoniques dans le deuxième repère sont déterminés.  $\mathbf{r}'$  représente le vecteur de  $O'$  à un point arbitraire sur la surface d’intégration.  $\mathbf{r}$  localise ce point par rapport à l’origine du premier repère  $O$ . La relation entre ces trois vecteurs est donc :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'' + \mathbf{r}' \quad (2.98)$$

Les trois vecteurs sont reliés par une simple addition, ceci explique donc pourquoi la méthode s’appelle « addition theorem ». Il faut aussi noter que  $|\mathbf{r}'|$  et  $|\mathbf{r}''|$  sont constants pendant l’intégration. Le potentiel scalaire magnétique en un point de la surface d’intégration peut être

exprimé dans les deux repères :

$${}_1\psi(\mathbf{r}) = {}_2\psi(\mathbf{r}') = {}_2\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \quad (2.99)$$

L'indice  $i$  de  ${}_i\psi$  représente le numéro du système de coordonnées dans lequel le potentiel est exprimé. En développant les deux potentiels en harmoniques sphériques, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_1Q_n^m \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}|^{n+1}} \cdot Y_n^m(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_2Q_n^m \cdot Y_n^m(\theta', \phi') \cdot R(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \quad (2.100)$$

L'indice  $i$  de  ${}_iQ_n^m$  représente le numéro du système de coordonnées dans lequel le potentiel est exprimé. La fonction  $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')$  est la même que dans l'équation (2.54). Ainsi, elle peut être soit  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^n$ , soit  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^{n+1}}$ . Le choix dépend de la valeur de  $|\mathbf{r}''|$ . Selon [Bro01], deux types de translation existent et leurs différences sont montrées sur la Figure 2.27. Ce qui est représenté à gauche est la translation interne. Elle représente le cas où la source de rayonnement est à l'extérieur de la sphère d'intégration, qui correspond au problème interne comme expliqué dans la section 2.5.2. Le potentiel et le champ magnétiques ne sont valables que dans la zone pointillée à l'intérieur de la sphère de validité. Il est important d'assurer que la sphère d'intégration ne contient pas la source de rayonnement. Dans ce cas,  $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')$  s'écrit  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^n$  dans l'expression du potentiel magnétique.

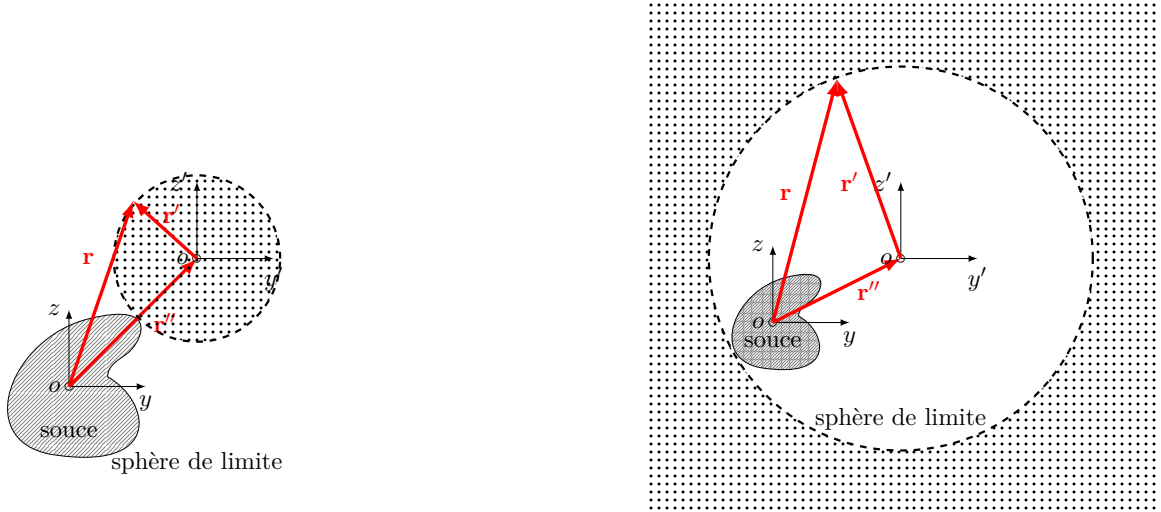


FIGURE 2.27 – Principe des deux types de translation : translation interne (gauche) ; translation externe (droite)

Ce qui est représenté à droite sur la Figure 2.27 est la translation externe. Exactement à l'opposé de la translation interne, la source de rayonnement doit être dans la sphère d'intégration. Il correspond donc au problème externe où le potentiel et le champ magnétiques ne sont valables qu'à l'extérieur de la sphère de validité.  $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')$  s'écrit alors  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^{n+1}}$  dans l'équation (2.100).

[Bro01] propose une solution analytique qui relie  ${}_1Q_n^m$  et  ${}_2Q_n^m$  :

$${}_2Q_{n'}^{m'} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_1Q_n^m \cdot A_{n,m}^{n',m'} \quad (2.101)$$



$A_{n,m}^{n',m'}$  est la fonction de transfert entre  ${}_1Q_n^m$  et  ${}_2Q_n^m$ , qui est définie tel que :

$$A_{n,m}^{n',m'} = \frac{2\pi j^{n'-n}}{\sqrt{n(n+1)n'(n'+1)}} \sum_{n''=|n-n'|}^{n+n'} \left( j^{n''} [n(n+1) + n'(n'+1) - n''(n''+1)] \right) \cdot A(m, n, -m', n', n'') R(r'') Y_n^{m-m'}(\theta'', \phi'') \quad (2.102)$$

La sommation en  $n''$  est pour  $|n-n'|, 2+|n-n'|, 4+|n-n'| \dots$  jusqu'à  $n+n'$ .  $R(r'')$  est la fonction de la distance de translation, qui dépend aussi du type de translation :

$$R(r'') = \begin{cases} \frac{1}{(r'')^{n''+1}} & \text{translation interne} \\ (r'')^{n''} & \text{translation externe} \end{cases} \quad (2.103)$$

$(\theta'', \phi'')$  est la coordonné de  $\mathbf{r}''$  qui est défini comme :

$$\mathbf{r}'' = r'' [\sin \theta'' \cos \phi'' \mathbf{x} + \sin \theta'' \sin \phi'' \mathbf{y} + \cos \theta'' \mathbf{z}] \quad (2.104)$$

$A(m, n, -m', n', n'')$  est composé d'un produit du symbole de Wigner 3j :

$$A(m, n, -m', n', n'') = (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)(2n'+1)(2n''+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} n & n' & n'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & n' & n'' \\ -m & -m' & m+m' \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$  représente le symbole de Wigner 3j [Che95]. Le symbole de Wigner 3j est un outil souvent utilisé en mécanique quantique et son calcul est excessivement complexe. De nombreux algorithmes sont proposés pour le calculer, cependant certains ne sont pas numériquement stables et deviennent inexacts lorsque l'ordre est grand. L'algorithme utilisé dans ce travail pour calculer le symbole de Wigner 3j est le même que celui développé dans [Bro01]. Dans [LL98], c'est un algorithme récursif qui est proposé, amélioré pour trois cas particuliers où l'algorithme n'est pas valable. Le calcul du symbole de Wigner 3j ne sera pas discuté dans ce document, plus de détails se trouvent dans [Bro01] et [LL98].

Effectivement, les deux types de translation sont nécessaires aux travaux présentés dans ce document. La translation interne nous permet de calculer l'inductance mutuelle entre deux sources et la translation externe nous permet de trouver l'origine optimale du développement multipolaire en harmoniques sphériques. Les deux applications seront expliquées dans les sections suivantes.

## 2.8 Inductance mutuelle

### 2.8.1 Introduction de l'induction mutuelle

Comme déjà expliqué dans le chapitre 1, l'objectif principal de cette recherche est d'étudier le couplage inductif entre deux circuits indépendants, chacun étant potentiellement une source de champ, suivant les courants qui y circulent. Ce couplage peut être modélisé par une impédance mutuelle. Lorsque deux sources sont placées à proximité l'une de l'autre, l'impédance aux bornes d'une source n'est pas simplement égale à sa propre impédance, mais une autre impédance est introduite en raison d'un courant circulant dans l'autre source de tension, court-circuitée. Une telle impédance s'appelle l'impédance mutuelle.

Une variation de flux magnétique associée à un bobinage fait apparaître une tension à ses bornes, qui peut engendrer un courant dans ce conducteur. Ce phénomène est appelé l'induction magnétique [CJ78].

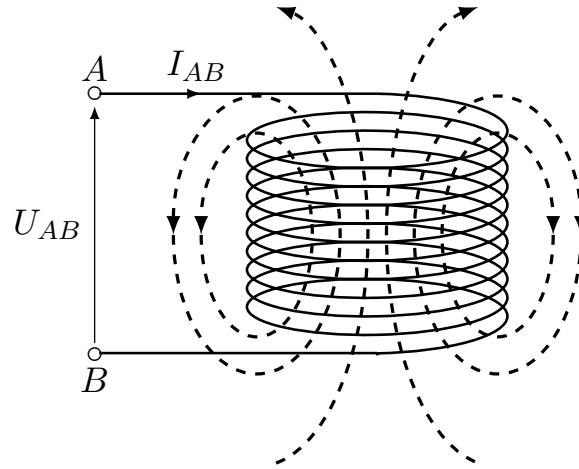


FIGURE 2.28 – Exemple de bobinage avec son induction magnétique

Considérons une bobine présentée sur la Figure 2.28 comme exemple. Les lignes pointillées représentent l'induction magnétique. La tension  $U_{AB}$  entre ces deux bornes a pour expression :

$$U_{AB} = RI + \frac{d(N\phi)}{dt} \quad (2.106)$$

$R$  représente la résistance de la bobine,  $N$  est le nombre de spires parcourues par le courant  $I$  et  $\phi$  est le flux d'induction magnétique qui est défini comme :

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.107)$$

Le terme  $\frac{d(N\phi)}{dt}$  dans l'équation (2.106) est appelé la tension induite. Le signe négatif est ajouté pour dire qu'un courant induit circule dans la direction opposée au changement.

Considérons maintenant le cas de deux bobines placées à proximité l'une de l'autre comme présentées en Figure 2.29.

La bobine 1 étant alimentée, elle génère donc une induction magnétique. La bobine 2 (Figure 2.29) est ouverte ( $I_2 = 0$ ). Comme montré sur Figure 2.29, une partie du flux d'induction de la bobine 1 traverse la bobine 2. Le flux d'induction magnétique est toujours conservatif, donc le flux issu de la bobine 1 peut être séparé en deux termes :

$$\phi_1 = \phi_{\sigma 1} + \phi_{12} \quad (2.108)$$

Avec :

- $\phi_{12}$  : le flux commun aux bobines 1 et 2
- $\phi_{\sigma 1}$  : partie du flux créé par la bobine 1, qui ne traverse pas la bobine 2

Par conséquent, les tensions induites sur les deux bobines sont :

$$\begin{cases} U_1 = R_1 I_1 + \frac{d(N_1 \phi_1)}{dt} \\ U_2 = \frac{d(N_2 \phi_{12})}{dt} \end{cases} \quad (2.109)$$

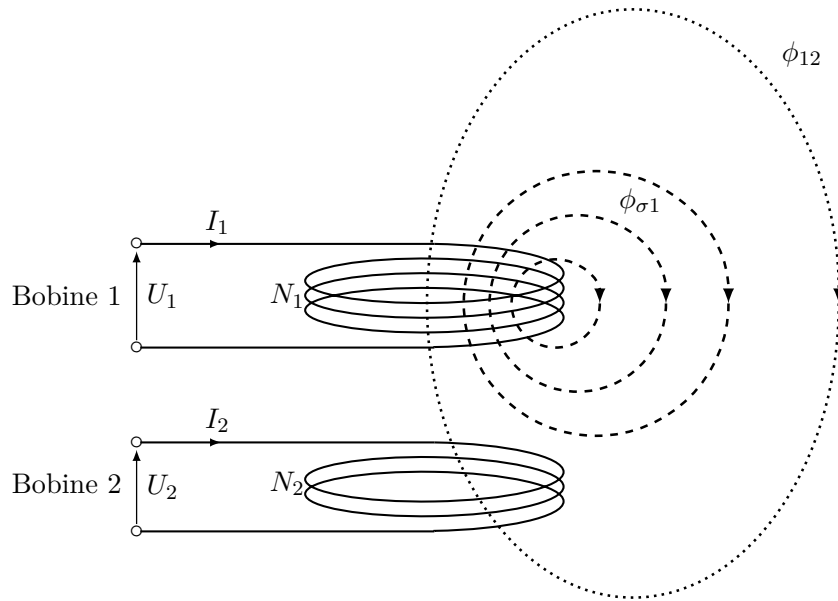


FIGURE 2.29 – Schéma de principe de l'induction mutuelle

L'inductance mutuelle entre les bobines 1 et 2 s'écrit :

$$L_{12} = \frac{N_2 \phi_{12}}{I_1} \quad (2.110)$$

De façon plus générale, l'impédance peut être décomposée sous une forme classique avec une partie résistive  $R$ , une partie inductive  $L$  et une partie capacitive  $C$  :

$$Z_m = R_m + j \left( L_m \omega - \frac{1}{C_m \omega} \right) \quad (2.111)$$

Dans ce travail, on suppose qu'il n'existe pas de pertes aux inductions des deux sources, ce qui permet de négliger le terme  $R_m$ . Comme déjà expliqué dans le chapitre 1, on se focalise sur le couplage inductif en champ proche et le champ électrique est négligeable sous condition de l'ARQS, le terme  $C_m$  s'annule aussi. L'impédance mutuelle peut donc être simplifiée :

$$Z_m = j\omega L_{12} = j\omega L_{21} \quad (2.112)$$

En pratique, l'impédance mutuelle peut être déduite en mesurant une tension et un courant. Elle dépend bien sûr de la distance entre les deux sources de rayonnement. Dans ce travail, nous allons caractériser le champ autour de chaque élément (inductance, transformateur, convertisseur, ...) considéré comme une source de champ. L'objectif est de prédire les couplages magnétiques entre deux éléments en fonction de leurs positions relatives, en utilisant uniquement leurs caractérisations magnétiques réalisées séparément. Le paragraphe suivant explicite la méthode utilisée pour calculer l'inductance mutuelle à partir des caractérisations séparées de deux sources.

## 2.8.2 Inductance mutuelle en harmoniques sphériques

[Rum54] et [Ric61] proposent le théorème de réciprocité en champ électromagnétique. [Ric61] regroupe le théorème en trois types : circuit pur, champ pur et mixte. Leurs formes mathématiques sont

respectivement :

$$\begin{cases} U_{12}I_1 = U_{21}I_2 & (2.113a) \\ \int_{S_1} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{s} & (2.113b) \\ \int_{v_1} \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv = \int_{v_2} \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 dv & (2.113c) \end{cases}$$

Les indices 1 et 2 signifient la source du champ ou du courant. C'est-à-dire que  $I_1$ ,  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{J}_1$  sont tous mesurés avec la source 1 alimentée et la source 2 éteinte. Il est important de noter que dans l'équation (2.113b), la surface  $S_1$  n'entoure que la source 1 et  $S_2$  n'entoure que la source 2. De même pour (2.113c),  $v_1$  ne comprend que la source 1 et  $v_2$  ne comprend que la source 2 comme présenté sur la Figure 2.30. Le symbole  $\langle 1, 2 \rangle$  est proposé pour le membre de gauche de (2.113b) et (2.113c), qui égale aussi à l'opposé du membre de gauche de (2.113a). Avec le théorème de réciprocité, on a :

$$\langle 1, 2 \rangle = - \langle 2, 1 \rangle \quad (2.114)$$

En appliquant les équations (2.113), l'impédance mutuelle a pour expression :

$$Z_{21} = - \frac{\langle 2, 1 \rangle}{I_1 I_2} \quad (2.115a)$$

$$= \frac{U_{21}}{I_1} \quad (2.115b)$$

$$= \frac{-1}{I_1 I_2} \int_{S_2} (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{s} \quad (2.115c)$$

$$= \frac{-1}{I_1 I_2} \int_{v_2} \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 dv \quad (2.115d)$$

Il est très important de noter qu'en calculant l'impédance mutuelle, tous les champs doivent être mesurés ou calculés dans l'environnement réel, c'est-à-dire avec toutes les sources en présence. Est-il possible d'exprimer  $Z_{21}$  directement en fonction des coefficients harmoniques des deux sources? Pour répondre à cette question, on va appliquer l'équation (2.115c). La situation est montrée en Figure 2.30.

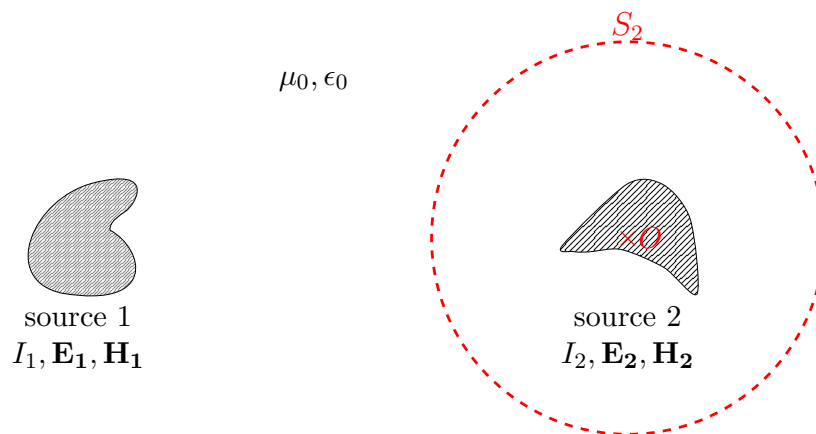


FIGURE 2.30 – Situation de mesure pour déterminer l'impédance mutuelle entre sources 1 et 2

Afin de simplifier les calculs, la surface d'intégration  $S_2$  choisie est une sphère centrée au point  $O$ . Ce point est donc l'origine du développement en harmoniques sphériques. Avant d'exprimer les champs en harmoniques sphériques, on va d'abord construire la relation entre l'harmonique sphérique vectorielle et le gradient d'harmonique sphérique scalaire. En coordonnées sphériques, en utilisant l'équation (2.69), on

a :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{Y}_n^m(\theta, \phi) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sin \theta \sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \phi} \\ \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \\ \frac{-1}{\sin \theta \sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \phi} \end{pmatrix} \\ &= -(\nabla Y_n^m) \cdot \frac{r}{\sqrt{n(n+1)}} \end{aligned} \quad (2.116)$$

Donc :

$$\nabla Y_n^m(\theta, \phi) = -\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{Y}_n^m(\theta, \phi) \cdot \frac{\sqrt{n(n+1)}}{r} \quad (2.117)$$

Avec l'équation (2.117), on peut maintenant exprimer tous les champs électromagnétiques. Du fait que la surface d'intégration  $S_2$  englobe la source 2, le développement de la source 2 est ainsi un problème externe. Basé sur (2.65) et (2.68), on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= -\nabla \psi_2 \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_2Q_n^m \cdot \nabla \left( \frac{1}{r^{n+1}} \cdot Y_n^m \right) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_2Q_n^m \cdot \left( -\frac{n+1}{r^{n+2}} \cdot Y_n^m \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \nabla Y_n^m \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_2Q_n^m \cdot \left( \frac{n+1}{r^{n+2}} \cdot Y_n^m \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{r^{n+2}} \cdot \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{Y}_n^m \right) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Rappelons que l'indice  $i$  dans  ${}_iQ_n^m$  signifie le numéro de la source. En combinant les équations (2.14) et (2.68), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= -\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} \\ &= -j\omega \mathbf{A}_2 \\ &= \mu_0 j\omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot {}_2Q_n^m \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \mathbf{Y}_n^m \end{aligned} \quad (2.119)$$

Contrairement à la source 2, le développement de la source 1 est un problème interne. A partir des équations (2.67) et (2.68), les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  peuvent également être déterminés. Le champ magnétique  $\mathbf{H}_1$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= -\nabla \psi_1 \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_1Q_n^m \cdot \nabla (r^n \cdot Y_n^m) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_1Q_n^m (n \cdot r^{n-1} \cdot Y_n^m \cdot \mathbf{e}_r + r^n \cdot \nabla Y_n^m) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_1Q_n^m (n \cdot r^{n-1} \cdot Y_n^m \cdot \mathbf{e}_r - r^{n-1} \cdot \sqrt{n(n+1)} \cdot \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{Y}_n^m) \end{aligned} \quad (2.120)$$

A partir du potentiel magnétique vecteur  $\mathbf{A}_1$ , on peut déterminer  $\mathbf{E}_1$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} \\ &= -j\omega \mathbf{A}_1 \\ &= -\mu_0 j\omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot {}_1Q_n^m \cdot r^n \cdot \mathbf{Y}_n^m \end{aligned} \quad (2.121)$$

L'impédance mutuelle entre les sources 1 et 2 peut être déduite à partir de  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  et  $\mathbf{A}_2$ . Grâce au fait que la surface d'intégration  $S_2$  est une sphère, l'équation (2.115c) se simplifie en :

$$Z_{21} = \frac{-1}{I_1 I_2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot (\mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{e}_r \quad (2.122)$$

$r$  représente le rayon de  $S_2$ . Maintenant, il faut insérer les résultats de (2.118), (2.119), (2.120) et (2.121) à l'équation (2.122). En raison du produit scalaire avec  $\mathbf{e}_r$ , seule le premier terme du vecteur peut exister. En utilisant la propriété d'orthogonalité des harmoniques sphériques définie en (2.75), on peut commencer par développer la première partie de l'équation :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot (\mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{e}_r \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot \left[ \left( \mu_0 j \omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot {}_2Q_n^m \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \mathbf{Y}_n^m \right) \wedge \right. \\ & \quad \left. \left( - \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} {}_1Q_{n'}^{m'} \left( n' \cdot r^{n'-1} \cdot \mathbf{Y}_{n'}^{m'} \cdot \mathbf{e}_r - r^{n'-1} \cdot \sqrt{n'(n'+1)} \cdot \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{Y}_{n'}^{m'} \right) \right) \right] \cdot \mathbf{e}_r \\ &= -\mu_0 j \omega \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot {}_2Q_n^m \cdot \frac{1}{r^{n+1}} {}_1Q_{n'}^{m'} \cdot \\ & \quad r^{n'-1} \cdot \sqrt{n'(n'+1)} \cdot \mathbf{Y}_n^m \wedge (\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{Y}_{n'}^{m'}) \cdot \mathbf{e}_r \\ &= -\mu_0 j \omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_1Q_n^m {}_2Q_n^m \cdot r^2 \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot r^{n-1} \cdot \sqrt{n(n+1)} \\ &= -\mu_0 j \omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n+1) \cdot {}_1Q_n^m {}_2Q_n^m \end{aligned} \quad (2.123)$$

De la même manière, la deuxième partie de l'équation (2.122) peut également être simplifiée :

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot (\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{e}_r = -\mu_0 j \omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n \cdot {}_1Q_n^m {}_2Q_n^m \quad (2.124)$$

En combinant les équations (2.122), (2.123) et (2.124), on peut exprimer l'impédance mutuelle en fonction des harmoniques sphériques :

$$Z_{21} = \frac{\mu_0 j \omega}{I_1 I_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_1Q_n^m {}_2Q_n^m \quad (2.125)$$

L'expression de  $Z_{21}$  en harmoniques sphériques est simplement à un rapport près du produit des coefficients harmoniques des deux sources. En combinant avec (2.112), l'inductance mutuelle entre deux sources est :

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{I_1 I_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_1Q_n^m {}_2Q_n^m \quad (2.126)$$

Cette inductance  $L_{21}$  correspond au couplage inductif que l'on cherche à déterminer. Les coefficients harmoniques  ${}_1Q_n^m$  et  ${}_2Q_n^m$  peuvent être déterminés à partir des inductions magnétiques autour de chaque source. Notez que  ${}_1Q_n^m$  est employé dans le cas du problème interne, donc une translation interne est nécessaire comme expliqué dans la section 2.7.6. Pour vérifier cette approche, les simulations numériques sont effectuées.

### 2.8.3 Validations numériques

La configuration des sources est présentée en Figure 2.31. La source 1 est une spire de courant sur le plan  $xOy$  centrée sur  $O_1$ , avec un rayon de 5 cm. La source 2 est aussi une spire de courant, mais inclinée de  $30^\circ$  par rapport à l'axe  $y$ , avec un rayon de 3 cm.

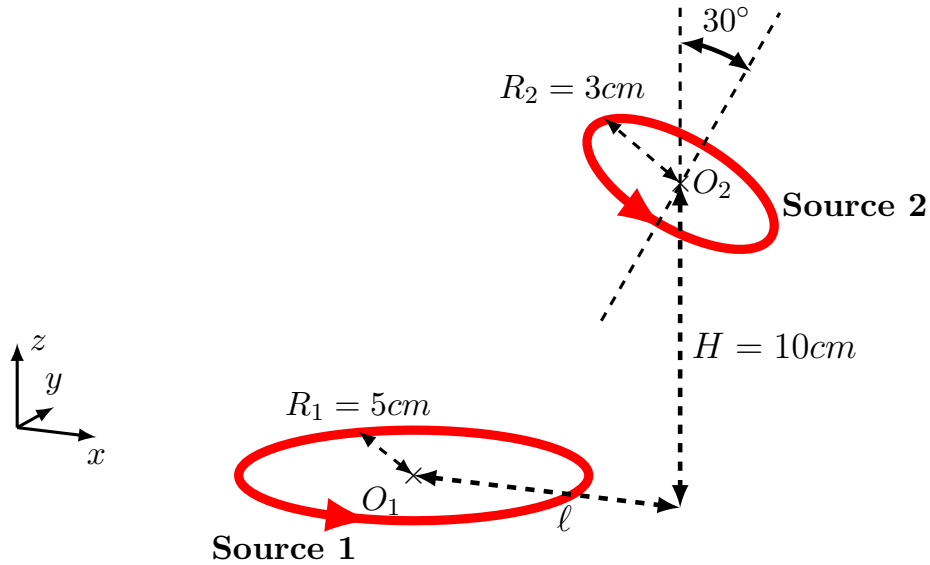


FIGURE 2.31 – Configuration des sources en boucles

Des simulations avec *Flux3D* sont effectuées pour valider le modèle. La hauteur  $H$  est fixée à 10 cm. En variant la distance  $L$ , l'inductance mutuelle entre les deux sources est calculée en utilisant l'équation (2.110). Cette valeur est considérée comme la référence pour vérifier l'inductance mutuelle calculée avec le développement en harmoniques sphériques. Les coefficients harmoniques de chaque source sont déterminés en appliquant (2.81). L'emplacement dans le tableau des coefficients  $Q_n^m$  pour un couple  $(n, m)$  donné est indiqué sur la Table 2.5.

$\mathbf{N} = 0$	$Q_0^0$	$Q_1^{-1}$	$Q_2^{-2}$	$Q_3^{-3}$	$Q_4^{-4}$	$\dots$	$Q_N^{-N}$
$\mathbf{N} = 1$	$Q_1^1$	$Q_1^0$	$Q_2^{-1}$	$Q_3^{-2}$	$Q_4^{-3}$	$\dots$	$\vdots$
$\mathbf{N} = 2$	$Q_2^2$	$Q_2^1$	$Q_2^0$	$Q_3^{-1}$	$Q_4^{-2}$	$\dots$	$\vdots$
$\mathbf{N} = 3$	$Q_3^3$	$Q_3^2$	$Q_3^1$	$Q_3^0$	$Q_4^{-1}$	$\dots$	$\vdots$
$\mathbf{N} = 4$	$Q_4^4$	$Q_4^3$	$Q_4^2$	$Q_4^1$	$Q_4^0$	$\dots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$Q_N^{-1}$
$\mathbf{N}_{\max}$	$Q_N^N$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$Q_N^1$	$Q_N^0$

TABLE 2.5 – Présentation des coefficients harmoniques dans une table

Chaque couleur représente un ordre du développement, et pour l'ordre  $N$ , il y a  $2N + 1$  composantes.

Les coefficients des sources 1 et 2 sont donnés sur la Table 2.6.

	-	+	0	0	0	0	0
$N = 1$	0	$1.3 \cdot 10^{-3}$	0	0	0	0	0
$N = 2$	0	0	0	0	0	0	0
$N = 3$	0	0	0	0	$-1.6 \cdot 10^{-6}$	0	0
$N = 4$	0	0	0	0	0	0	0
$N = 5$	0	0	0	0	0	0	$2.6 \cdot 10^{-9}$

Source 1

	-	+	0	0	0	0	0
$N = 1$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0	0
$N = 2$	0	0	0	0	0	0	0
$N = 3$	$-2.0 \cdot 10^{-8}$	$-8.5 \cdot 10^{-8}$	$-1.7 \cdot 10^{-7}$	$-6.6 \cdot 10^{-8}$	0	0	0
$N = 4$	0	0	0	0	0	0	0
$N = 5$	$2.7 \cdot 10^{-12}$	$1.5 \cdot 10^{-11}$	$4.6 \cdot 10^{-11}$	$8.4 \cdot 10^{-11}$	$-6.8 \cdot 10^{-11}$	$-2.7 \cdot 10^{-11}$	

Source 2

TABLE 2.6 – Coefficients harmoniques des sources 1 et 2 présentées la Figure 2.31

Le développement multipolaire est effectué jusqu'à l'ordre 5. Grâce à l'axi-symétrie autour de l'axe  $z$  et la symétrie sur le plan  $xOy$ , les coefficients harmoniques sont en fait très simples, ils ne possèdent que les composantes d'ordre impair :  $Q_1^0$ ,  $Q_3^0$  et  $Q_5^0$ . Par contre, le développement de la source 1 est effectué sur le point  $O_1$ , afin de calculer l'inductance mutuelle entre deux sources en harmoniques sphériques, il faut que les deux développements partagent la même origine. Une translation interne est donc nécessaire pour translater le développement de la source 1 au point  $O_2$ . L'équation (2.126) est utilisée pour calculer l'inductance mutuelle. Celle-ci est présentée sur la Figure 2.32 en fonction de la distance et de l'ordre du développement multipolaire .

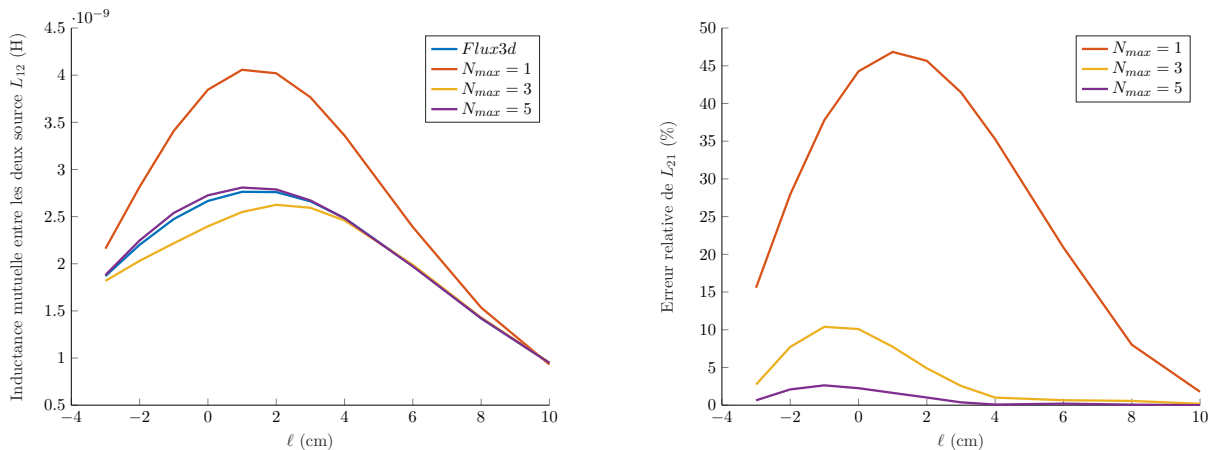


FIGURE 2.32 – Inductance mutuelle entre les sources 1 et 2 (gauche) ; Erreur relative de l'inductance mutuelle par rapport la simulation sous *Flux3D* (droite)

Ce qui est montré à gauche est l'inductance mutuelle  $L_{12}$  en fonction de la distance horizontale  $\ell$ .  $N_{max}$  est l'ordre maximal considéré dans le développement. Ici, les résultats de *Flux3D* sont considérées comme références en négligeant les bruits causés par les éléments finis. L'inductance mutuelle est également



calculée pour les différents  $N_{max}$ . On peut constater qu'en général,  $L_{12}$  diminue en fonction de la distance entre les deux sources et plus  $N_{max}$  est grand, plus la courbe s'approche de la valeur théorique, obtenue sous *Flux3D*. Ce dernier peut aussi être justifié par la figure de droite, qui représente l'erreur relative de  $L_{12}$  :

$$E_r = \frac{|\text{valeur calculée} - \text{valeur de référence}|}{|\text{valeur de référence}|} \quad (2.127)$$

On peut constater que plus  $N_{max}$  est grand, plus le résultat est précis et la précision augmente aussi avec  $\ell$ . Ceci est dû au fait que plus la source 1 est loin, moins le  $N_{max}$  nécessaire est important pour décrire son induction magnétique. Si les sources sont infiniment loin l'une de l'autre, l'induction de la source 1 peut donc être vue comme un dipôle pour la source 2, en conséquence,  $N_{max} = 1$  est déjà suffisant pour calculer l'inductance mutuelle entre elles.

Les résultats de cette section permettent de vérifier notre approche pour calculer l'inductance mutuelle entre deux sources à partir de leurs coefficients harmoniques. Par rapport aux méthodes empiriques qui existent déjà, cette approche est beaucoup plus pratique, elle demande un simple calcul pour n'importe quelle position relative. Par contre, il est montré sur la Figure 2.32 que  $N_{max}$  doit être suffisant pour avoir une bonne précision. Le choix de  $N_{max}$  sera discuté au chapitre 4.

## 2.9 Conclusion

Le développement multipolaire en harmoniques sphériques est présenté dans ce chapitre, il est basé sur les mesures faites dans son voisinage. Cette approche nous permet de reconstruire les sources de rayonnement par les modèles ponctuels, qui nous permet d'extrapoler la signature électromagnétique d'une source. A partir de cela, le couplage inductif entre deux systèmes peut être déduit.

# Compléments au développement en HS

## 3.1 Choix optimal de l'origine du développement

Avant de décomposer une source de rayonnement en harmoniques sphériques, il faut tout d'abord choisir l'origine du développement. Le développement en harmoniques sphériques peut être vu comme un modèle équivalent ponctuel lié à ce point. Par conséquent, ce développement multipolaire dépend non seulement de la source elle-même, mais aussi de l'origine de cette décomposition. Le centre géométrique est habituellement choisi comme l'origine, mais il peut ne pas convenir à certaines sources complexes telles que les cartes électrique. Un mauvais choix de l'origine peut en effet conduire à un nombre excessif de mesures et réduire la précision de la reconstruction de source. Les résultats de cette section peuvent être trouvés dans [LTB<sup>+</sup>16].

### 3.1.1 Impact du choix de l'origine

Le choix de l'origine possède un impact sur le développement : un choix inapproprié conduira à un ordre maximal  $N_{max}$  plus élevé pour obtenir une précision donnée. Pour illustrer ceci, l'inductance mutuelle est calculée dans un exemple avec deux spires. La configuration des sources est présentée en Figure 3.1.

Les deux spires de courant circulaires sont coaxiales et la distance entre elles  $h$  est 10 cm. Les deux boucles possèdent toutes un rayon de 3 cm. Les sphères sur la Figure 3.1 sont les sphères de validité, qui sont les plus petites sphères qui englobent les sources. Ensuite, l'inductance mutuelle entre les deux spires sera calculée.

La formule analytique de l'inductance mutuelle entre deux spires  $L_{12}$  est donnée dans [Dur68], elle intègre les inductions magnétiques d'une spire (donné dans la section 2.4) sur la surface de l'autre. Dans le cas de la Figure 3.1, l'inductance mutuelle est  $1.26 \cdot 10^{-9}$  H.

$L_{12}$  peut également être déduite avec le développement en harmoniques sphériques. Comme illustré sur la gauche de la Figure 3.1, si on développe la spire 1 et la spire 2 sur  $O_1$  et  $O_2$ , qui sont leurs centres géométriques, on retrouve parfaitement  $L_{12} = 1.26 \cdot 10^{-9}$  avec  $N_{max} = 5$ . En effet, par coïncidence, les points  $O_1$  et  $O_2$  sont leurs origines optimales pour le développement multipolaire. Cependant, que se passe-t-il si le développement n'est pas effectué sur l'origine optimale ?

A droite de la figure, la configuration des sources reste la même, mais l'origine du développement  $O_1$  est translatée dans la direction de  $z$  d'une distance de  $D$ .  $L_{12}$  est recalculée en fonction de  $D$  pour les différents  $N_{max}$  comme présenté sur la Figure 3.2.

On peut constater qu'une meilleure précision est obtenue lorsqu'un ordre plus élevé est utilisé. En plus, l'erreur relative augmente avec  $D$ , la distance entre l'origine du développement  $O_1$  et le centre géométrique de la spire 1. On peut aussi dire la même chose dans l'autre sens : pour avoir la même précision, il faut monter en ordre lorsque le centre du développement s'éloigne du centre de la spire. Par exemple, lorsque  $D = 5$  cm, l'erreur relative de  $L_{12}$  atteint 30% pour un développement jusqu'à l'ordre 5 ( $N_{max} = 5$ ). Pour réduire cette erreur à 10%, un développement jusqu'à  $N_{max} = 9$  sera nécessaire,

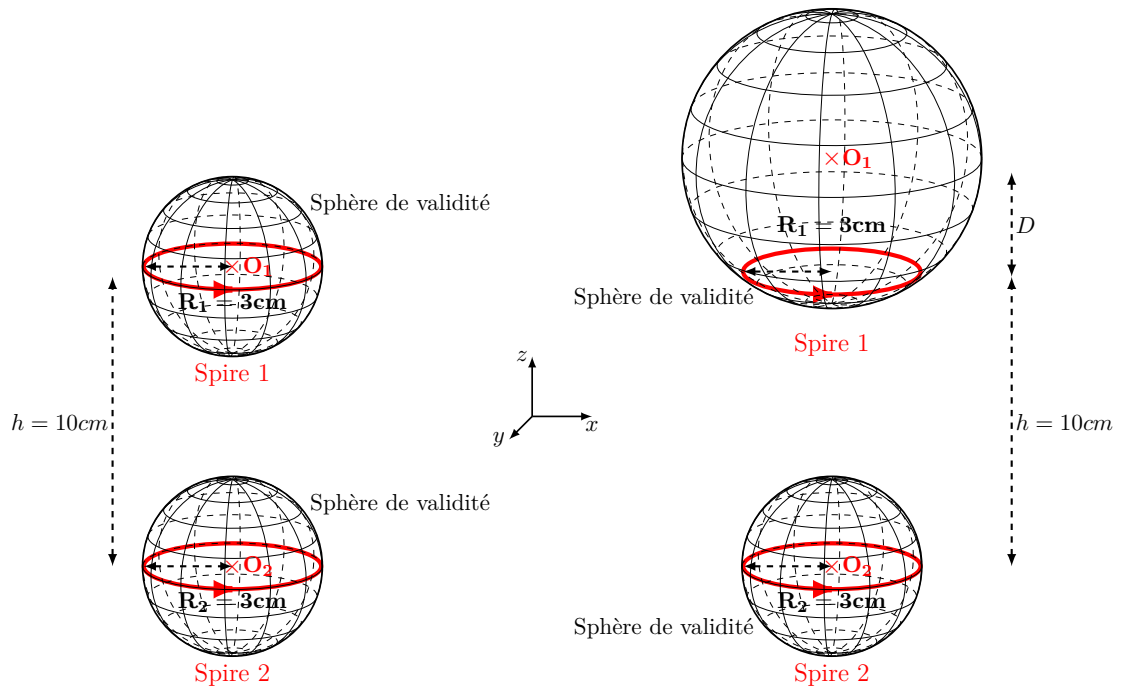


FIGURE 3.1 – Calcul de l'inductance mutuelle entre deux spires en tradant l'origine du développement

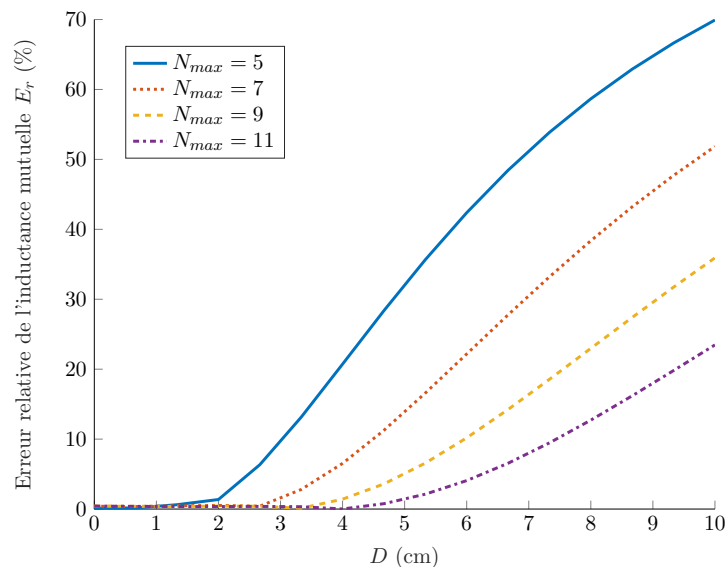


FIGURE 3.2 – Erreur relative de l'inductance mutuelle en fonction de la position de l'origine du développement

ce qui peut ne pas être pratique. En effet, l'identification d'une source jusqu'à  $N_{max} = 9$  implique que 99 composantes harmoniques ( $N_{max} \cdot (N_{max} + 2)$ ) doivent être déterminées. Cela permet de prouver l'importance du choix de l'origine pour la décomposition en harmoniques sphériques, mais est-t-il possible de trouver l'origine optimale pour n'importe quelle source? Avant de répondre à cette question, on va d'abord étudier l'impact d'une translation sur les composantes harmoniques.

### 3.1.2 Impact d'une translation en HS

En fait, il revient au même de traduire l'origine du développement harmonique, ou de traduire en sens inverse la source elle-même. Comme expliqué dans la section 2.7.6, ce qui nous intéresse est l'induction magnétique à l'extérieur de la source, ceci signifie qu'on est dans le cas de la translation externe. L'équation (2.102) s'écrit alors :

$$A_{n,m}^{n',m'} = \frac{2\pi j^{n'-n}}{\sqrt{n(n+1)n'(n'+1)}} \sum_{n''=|n-n'|}^{n+n'} \left( j^{n''} [n(n+1) + n'(n'+1) - n''(n''+1)] \right) \cdot A(m, n, -m', n', n'') r^{n''} Y_{n''}^{m-m'}(\theta'', \phi'') \quad (3.1)$$

$A_{n,m}^{n',m'}(\mathbf{r})$  est donc la fonction de transfert de  $Q_n^m$  à  $Q_{n'}^{m'}$  pour une translation de  $\mathbf{r}$  :

$$\mathbf{r} = r[\sin \theta \cos \phi \cdot \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \cdot \mathbf{e}_y + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_z] \quad (3.2)$$

$A(m, n, -m', n', n'')$  est composé d'un produit du symbole de Wigner  $3j$  qui est défini en (2.105). Grâce aux propriétés de Wigner  $3j$ , certaines conclusions pratiques peuvent être obtenues pour la translation d'une source de rayonnement développée en harmoniques sphériques. La caractéristique la plus importante est qu'une composante harmonique peut seulement impacter des composantes d'ordre supérieur. Cela se traduit par :

$$A_{n,m}^{n',m'}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & n = n' \\ 0 & n > n' \end{cases} \quad (3.3)$$

Cela signifie que la composante dipolaire d'une source quelconque est toujours une constante qui ne dépend pas de l'origine du développement. Une autre caractéristique est qu'en raison du terme  $r^{n''}$  dans (3.1),  $A_{n,m}^{n',m'}(\mathbf{r})$  peut en effet s'écrire sous une forme très simple de polynôme :

$$A_{n,m}^{n',m'}(\mathbf{r}) = k(n, n', m, m') \cdot r^{n'-n} \quad (3.4)$$

avec  $k$  une fonction qui dépend de  $n$ ,  $n'$ ,  $m$  et  $m'$ .

Prenons l'exemple d'une translation suivant l'axe  $z$ . Dans ce cas,  $\theta'' = 0$  et  $\mathbf{r}$  se simplifie en :

$$\mathbf{r} = r \cdot [0 \cdot \mathbf{e}_x + 0 \cdot \mathbf{e}_y + 1 \cdot \mathbf{e}_z] \quad (3.5)$$

La fonction harmonique  $Y_n^m(0, \phi)$  sera zéro, sauf si  $m = 0$ , c'est-à-dire que  $m = m'$  dans l'équation (3.1). Ainsi, après une translation suivant  $z$ , une composante harmonique peut seulement impacter les composantes de même moment  $m$ . Les exemples des composantes de moment nul sont donnés sur la Figure 3.3.

Après une translation suivant  $z$ ,  $Q_1^0$  peut engendrer les composantes  $Q_2^0$ ,  $Q_3^0$  et  $Q_4^0$ . Leurs expressions analytiques sont également données en Figure 3.3. Les translations suivant  $x$  et  $y$  suivent le même principe, elles peuvent s'exprimer sous une forme de polynôme. Cependant, les relations entre les composantes sont un peu plus complexes.

Cette écriture en polynôme est en effet très intéressante, elle permet d'avoir une combinaison linéaire simple des impacts d'une translation sur les composantes harmoniques. Ceci nous permettra aussi de trouver l'origine optimale par rapport à l'origine actuelle du développement comme expliqué dans les sections suivantes.

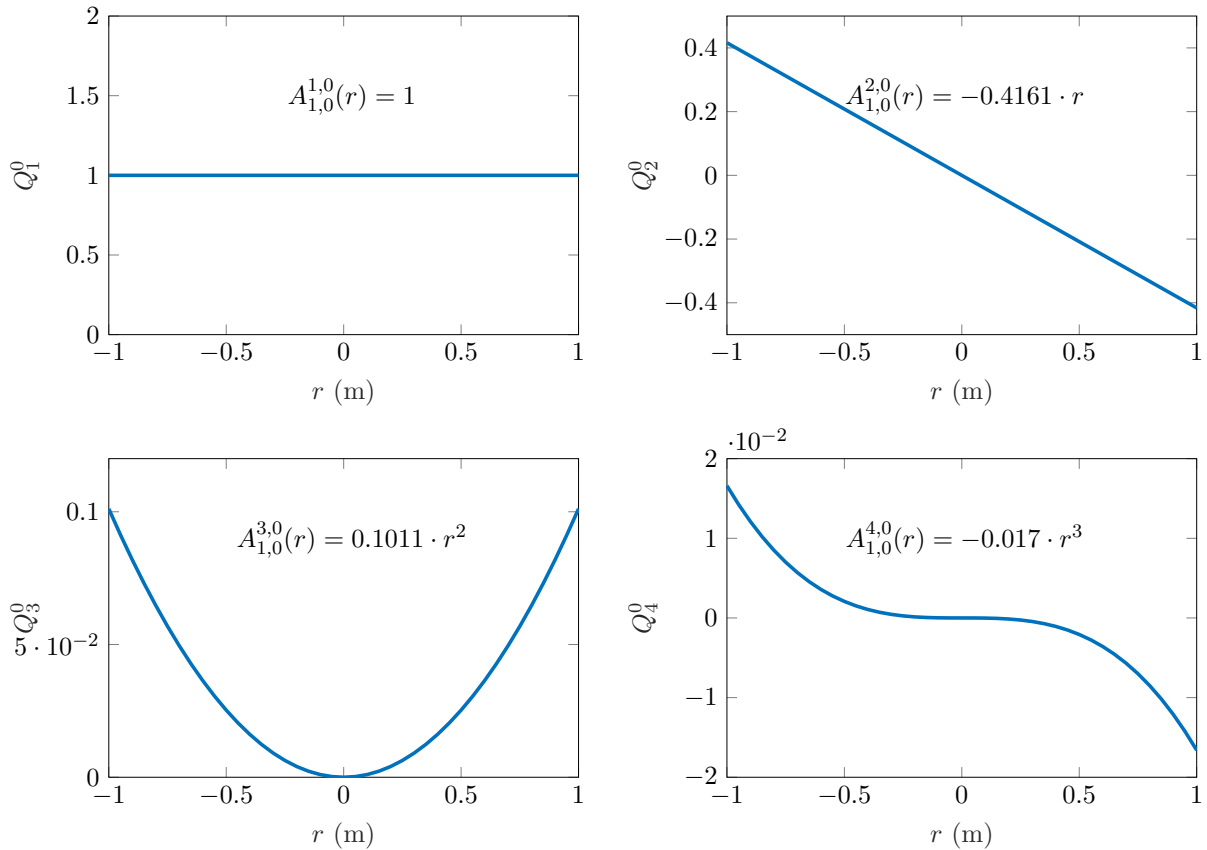


FIGURE 3.3 – Impacts d’une translation suivant l’axe  $z$  sur les composantes harmoniques de moment nul

### 3.1.3 Énergie magnétique en harmoniques sphériques

Les forces électrostatiques et magnétiques peuvent faire déplacer des objets à distance, il semble donc évident qu’à tout phénomène électromagnétique est associé une énergie. Cette énergie est appelée énergie électromagnétique [Mor12]. D’après les équations de Maxwell, la densité d’énergie électromagnétique dans le vide, correspondant à l’énergie contenue dans un volume élémentaire est donnée par :

$$dW = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (3.6)$$

Rappelons que dans ce travail, en raison de l’approximation quasi-stationnaire, l’énergie électrique est négligeable devant l’énergie magnétique. L’équation (3.6) se simplifie alors :

$$dW = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (3.7)$$

Maintenant, on cherche à calculer l’énergie magnétique totale à l’extérieur d’une sphère d’intégration. La source est dans cette sphère, on est donc dans un cas de problème externe. En faisant apparaître le potentiel magnétique vectoriel  $\mathbf{A}$  défini en (2.13), cette énergie magnétique s’écrit :

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_v \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot dV = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_v \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot dV \quad (3.8)$$

Grâce à une relation mathématique sur les opérateurs différentiels :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v}) \quad (3.9)$$

on a donc :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_v [\mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) + \nabla(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})] dV \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_v [\mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})) + \nabla(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})] dV \end{aligned} \quad (3.10)$$

Une autre propriété des opérateurs différentiels est :

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) \quad (3.11)$$

En la combinant avec (3.10), on obtient :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (3.12)$$

Il est déjà montré dans la section 2.3.5 que :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 & \text{la jauge de Coulomb} \\ \Delta \mathbf{A} = 0 & \text{libre de courant} \end{cases} \quad (3.13)$$

Ainsi, l'expression de l'énergie magnétique se simplifie en :

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_v \nabla(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) dV \quad (3.14)$$

En analyse vectorielle, le théorème de flux-divergence affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume  $v$  dans  $\mathbb{R}^3$  et le flux de ce champ à travers la surface fermée  $S$ .

$$\iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.15)$$

avec  $\mathbf{F}$  un vecteur quelconques.

Donc l'énergie magnétique à l'extérieur de la sphère d'intégration s'écrit comme :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0} \oiint_S \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \cdot (-\mathbf{e}_r) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Reprenons les expressions de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$  comme dans la section 2.8.2 :

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot \left( \frac{n+1}{r^{n+2}} \cdot Y_n^m \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{r^{n+2}} \cdot \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{Y}_n^m \right) \\ \mathbf{A} = -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot Q_n^m \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \mathbf{Y}_n^m \end{cases} \quad (3.17)$$

Les calculs sont du même principe que dans la section 2.8.2 et au final on trouve :

$$W = \frac{\mu_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{r^{2n+1}} \cdot (Q_n^m)^2 \quad (3.18)$$

En raison du terme  $\frac{1}{r^{2n+1}}$ ,  $W$  diminue avec  $r$ . Cela signifie que plus la sphère d'intégration est grande, plus l'énergie électromagnétique à l'extérieur de la sphère d'intégration est petite, ce qui est physiquement logique. Chercher l'origine optimale du développement revient à chercher la position relative de la source par rapport à l'origine qui permet de minimiser l'énergie à l'extérieur en (3.18). Supposons que la sphère d'intégration est une sphère de rayon unité, c'est-à-dire  $r = 1$ , on cherche donc à minimiser  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n+1) \cdot (Q_n^{m'})^2$  avec :

$$Q_n^{m'} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot A_{n,m}^{n',m'}(\mathbf{r}) \quad (3.19)$$

Vu que l'on est dans le cas de translation externe,  $A_{n,m}^{n',m'}$  peut s'écrire sous une forme de polynôme (3.4). La dernière étape est de trouver un vecteur  $\mathbf{r}(x, y, z)$  qui minimise  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n+1) \cdot (Q_n^{m'})^2$ .

### 3.1.4 Méthode de Nelder-Mead et origine optimale du développement

La méthode de Nelder-Mead, appelée aussi la méthode du simplex, est une méthode numérique heuristique, qui est appliquée couramment pour trouver le minimum ou le maximum d'une fonction dans un espace multidimensionnel. Elle peut aussi être appliquée aux problèmes non linéaires. Cette méthode a été proposée par John Nelder et Mead en 1965 [NM65].

Pour un problème à  $N$  dimensions, il faut avoir  $N+1$  tests initiaux, qui peuvent aussi être vus comme  $N+1$  sommets. Le principe de cette méthode est de remplacer le pire test parmi ces  $N+1$  par un nouveau point d'une façon itérative et le résultat converge vers la solution exacte. Il y a diverses méthodes pour obtenir de nouveaux : réflexion, expansion, contraction et rétrécissement. Afin de bien comprendre le principe, un exemple en dimension 2 est proposé ( $N = 2$ ) [MF04].

Considérons  $f(x, y)$  (la fonction à minimiser) et trois tests initiaux formant trois sommets d'un triangle, respectivement  $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$  et  $\mathbf{P}_3 = (x_3, y_3)$ . Supposons que :

$$f(\mathbf{P}_1) < f(\mathbf{P}_2) < f(\mathbf{P}_3) \quad (3.20)$$

Donc le point  $\mathbf{P}_1$  est le meilleur point et le point  $\mathbf{P}_3$  est le pire point qui sera remplacé.  $\mathbf{P}_0$  est le centre de gravité de tous les points sauf  $\mathbf{P}_{N+1}$ . Dans cet exemple,  $\mathbf{P}_0$  s'écrit comme :

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2}{2} = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (3.21)$$

Les quatre opérations principales sont :

#### Réflexion au point $\mathbf{P}_r$

La fonction  $f$  diminue au fur et à mesure que nous nous déplaçons le long du triangle de  $\mathbf{P}_3$  à  $\mathbf{P}_1$  et également de  $\mathbf{P}_3$  à  $\mathbf{P}_2$ . Il est donc possible que la valeur de  $f(x, y)$  soit plus petite aux points qui se situent à l'opposé de  $\mathbf{P}_3$  par rapport à  $\mathbf{P}_0$ . Un nouveau point  $\mathbf{P}_r$  peut donc être obtenu comme présenté sur la Figure 3.4. Son expression est :

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_3) = 2\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_3 \quad (3.22)$$

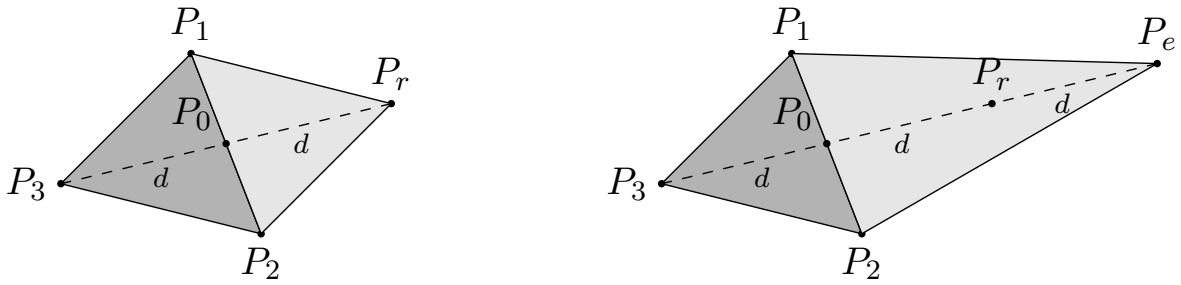


FIGURE 3.4 – Opération de réflexion de la méthode de Nelder-Mead (gauche) ; Opération d'expansion de la méthode de Nelder-Mead (droite)

### Expansion au point $P_e$

Si la valeur de la fonction au point  $P_r$  est inférieure à celle au point  $P_3$ , il est donc déplacé dans la direction correcte vers le minimum. Il est très possible que la valeur continue de diminuer dans cette direction. Ainsi, nous étendons le point jusqu'à  $P_e$  avec une distance supplémentaire  $d$  le long de la ligne  $P_3P_0$ . Le principe est montré à droite sur la Figure 3.4. Sa formule est :

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{P}_r + (\mathbf{P}_r - \mathbf{P}_0) = 2\mathbf{P}_r - \mathbf{P}_0 \quad (3.23)$$

### Contraction au point $P_c$

Si la valeur de la fonction au point  $P_r$  est supérieure à celle en  $P_3$ ,  $P_r$  est donc dans la mauvaise direction de minimisation. Il faut donc rapprocher le point  $P_3$  du point  $P_0$ , c'est-à-dire que le nouveau point se situe au milieu de la ligne  $P_3P_0$ , on le notera  $P_c$ . Le principe est présenté sur la Figure 3.5.

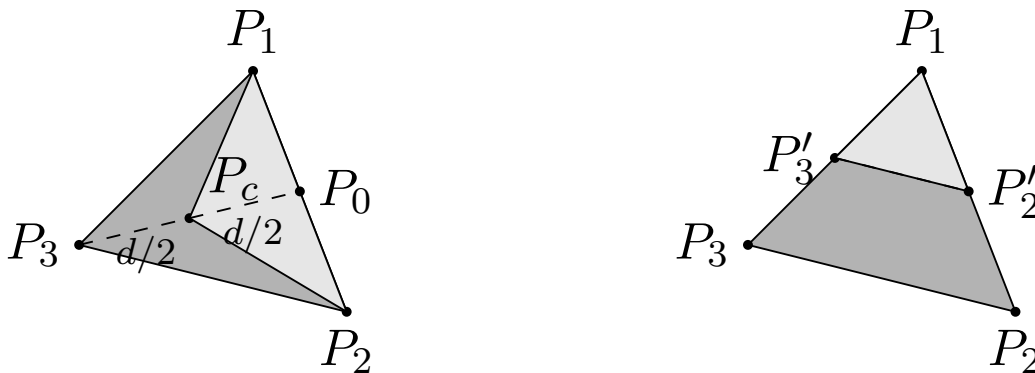


FIGURE 3.5 – Opération de contraction de la méthode de Nelder-Mead (gauche) ; Opération de rétrécissement de la méthode de Nelder-Mead (droite)

### Rétrécissement aux points $P'_2$ et $P'_3$

La partie droite de la Figure 3.5 représente le principe de l'opération de rétrécissement. Si la valeur de  $f$  au point  $P_c$  est encore inférieure à la valeur en  $P_3$ . Les points  $P_2$  et  $P_3$  seront remplacés par  $P'_2$  et  $P'_3$  qui sont les points intermédiaires des lignes  $P_1P_2$  et  $P_1P_3$ .



## Algorithme général

Supposons que pour une fonction de dimension  $N$ , on cherche à minimiser la fonction  $f$  avec  $N + 1$  tests. L'algorithme général est :

1. Calculer les valeurs de la fonction  $f$  en tous points et réindexer les points de façon à avoir  $f(\mathbf{P}_1) \leq f(\mathbf{P}_2) \leq \dots \leq f(\mathbf{P}_{N+1})$ .
2. Calculer le centre de gravité  $\mathbf{P}_0$  de tous les points sauf  $\mathbf{P}_{N+1}$  avec :

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{P}_n}{N} \quad (3.24)$$

3. Calculer le point de réflexion :  $\mathbf{P}_r = \mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_{N+1})$ .
4. Si  $f(\mathbf{P}_r) < f(\mathbf{P}_N)$ , calculer le point d'expansion :  $\mathbf{P}_e = \mathbf{P}_0 + 2(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_{N+1})$ . Si  $f(\mathbf{P}_e) \leq f(\mathbf{P}_N)$ ,  $\mathbf{P}_{N+1}$  sera remplacé par  $\mathbf{P}_e$ , sinon par  $\mathbf{P}_r$ . Retour à l'étape 1.
5. Si  $f(\mathbf{P}_r) > f(\mathbf{P}_N)$ , calculer le point de contraction :  $\mathbf{P}_c = \mathbf{P}_{N+1} + 0.5(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_{N+1})$ . Si  $f(\mathbf{P}_c) \leq f(\mathbf{P}_N)$ , remplacer  $\mathbf{P}_{N+1}$  par  $\mathbf{P}_c$  et retour à l'étape 1, sinon aller à l'étape 6.
6. Rétrécissement : remplacer tous les points sauf  $\mathbf{P}_1$  par :  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_1 + 0.5(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_1)$  et retour à l'étape 1.

Les tests initiaux sont très importants. En effet, un trop petit simplex initial peut conduire à une recherche locale, par conséquent, ce simplex initial doit être assez large et dépend bien sûr de la nature du problème.

La méthode de Nelder-Mead peut être réalisée par la fonction « fminsearchbnd » dans Matlab. En utilisant cette fonction, on peut trouver l'origine optimale du développement d'une source. La fonction à minimiser est l'énergie (3.18). Cela revient à minimiser une fonction de dimension 3 qui est définie comme :

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n+1) \cdot (Q_n^m \cdot A_{n,m}^{n',m'}(x, y, z))^2 \quad (3.25)$$

$A_{n,m}^{n',m'}(x, y, z)$  est la fonction translation qui peut s'écrire sous une forme de polynôme. Un vecteur de  $(x, y, z)$  minimisant la fonction  $f$  est cherché, cela correspond à la position relative optimale de l'origine par rapport à l'origine actuelle, qui permet aussi de rendre la source la plus simple possible. Pour mettre en évidence l'application de la méthode de Nelder-Mead, un exemple est donné ci-dessous.

Admettons que la source soit toujours une boucle de courant, centré sur (3, 4, 5) cm comme présenté sur la Figure 3.6. Cependant, cette fois, imaginons que l'origine optimale du développement n'est pas connue, ou même que la source soit englobée par une boîte noire sans qu'on connaisse sa position exacte. Un essai est effectué à (0, 0, 0) cm. Est-t-il possible de trouver l'origine optimale à partir de cet essai ?

Les coefficients harmoniques sphériques obtenus dans cette situation sont donnés dans la partie supérieure de la Table 3.1.

L'identification est effectuée jusqu'à l'ordre 5 ( $N_{max}$ ). On peut constater que le modèle équivalent est en effet très complexe. Il possède presque toutes les composantes harmoniques. Ensuite, la méthode de Nelder-Mead est appliquée. La fonction  $f$  est minimisée pour un vecteur de (3, 4, 5) cm. Ceci permet de justifier la méthode, les coefficients après cette translation sont donnés en bas de la table, qui correspond aussi à une boucle centrée.

### 3.1.5 Localisation des composants électroniques dans une boîte noire

Cette approche de translation peut également être appliquée pour localiser d'un composant électronique dans une boîte noire. Supposons que une source de rayonnement soit parfaitement identifiée et tous

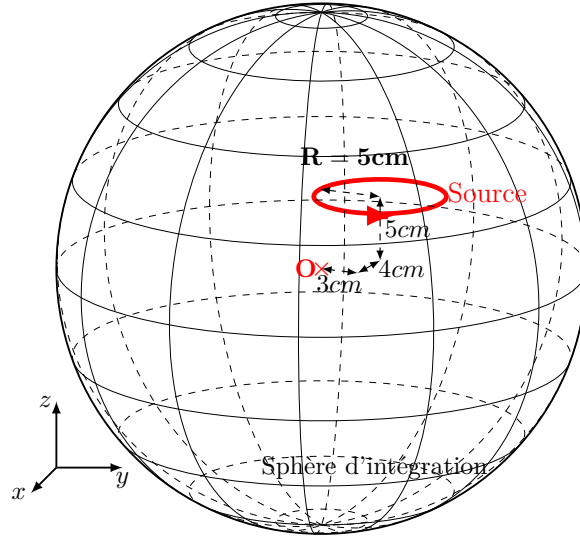


FIGURE 3.6 – La méthode de Nelder-Mead pour trouver l'origine optimale du développement

	0	0	0	0	0
<b>N = 1</b>	0	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$-6.86 \cdot 10^{-5}$	$3.89 \cdot 10^{-6}$	$-6.80 \cdot 10^{-8}$
<b>N = 2</b>	0	$-5.15 \cdot 10^{-5}$	$-9.91 \cdot 10^{-5}$	$8.20 \cdot 10^{-6}$	$-5.95 \cdot 10^{-7}$
<b>N = 3</b>	0	$-1.14 \cdot 10^{-6}$	$6.15 \cdot 10^{-6}$	$1.57 \cdot 10^{-6}$	$-3.50 \cdot 10^{-7}$
<b>N = 4</b>	0	$1.81 \cdot 10^{-7}$	$1.73 \cdot 10^{-7}$	$-2.63 \cdot 10^{-7}$	$4.62 \cdot 10^{-7}$
<b>N = 5</b>	0	$-7.81 \cdot 10^{-9}$	$-3.27 \cdot 10^{-8}$	$-1.05 \cdot 10^{-8}$	$-1.94 \cdot 10^{-8}$

Coefficients harmoniques d'un premier essai

	0	0	0	0	0
<b>N = 1</b>	0	$1.3 \cdot 10^{-3}$	0	0	0
<b>N = 2</b>	0	0	0	0	0
<b>N = 3</b>	0	0	0	$-1.57 \cdot 10^{-6}$	0
<b>N = 4</b>	0	0	0	0	0
<b>N = 5</b>	0	0	0	0	$2.61 \cdot 10^{-9}$

Coefficients harmoniques après la méthode de Nelder-Mead

TABLE 3.1 – Coefficients harmoniques de la source sur la Figure 3.6 (haut); les coefficients harmoniques après la méthode de Nelder-Mead (bas)

ses coefficients harmoniques sont connus, notés  $Q_n^m$ .

Maintenant, imaginons que la source seule soit englobée dans une boîte noire et on cherche à la localiser. Pour faire ceci, les inductions magnétiques de l'ensemble de la boîte noire seront mesurées ou calculées encore une fois et ses coefficients harmoniques, notés  $Q_{n'}^{m'}$ , seront également calculés. Au lieu d'appliquer la méthode de Nelder-Mead, il faut juste résoudre la série d'équations de trois variables  $(x, y, z)$  :

$$Q_{n'}^{m'} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n^m \cdot A_{n,m}^{n',m'}(x, y, z) \quad (3.26)$$

Cette équation doit être valable pour chaque  $n'$  et  $m'$ . Notons que pour chaque équation, il existe

plusieurs racines complexes, mais il n'y a qu'une seule solution finale qui permet de respecter toutes les équations.

## 3.2 Effets de sources secondaires

Dans les sections précédentes, une méthode prédictive pour calculer l'inductance mutuelle entre deux sources est présentée, qui est basée sur le développement multipolaire en harmoniques sphériques. Cette méthode est intéressante car premièrement, les calculs sont très simples, ils évitent les intégrations des champs. Deuxièmement, elle n'exige pas de mesures supplémentaires pour les différentes positions relatives entre les deux sources, autrement dit, l'inductance mutuelle peut être calculée pour n'importe quelle position, en n'utilisant que des calculs a posteriori. Le processus de cette approche est présenté sur la Figure 3.7.

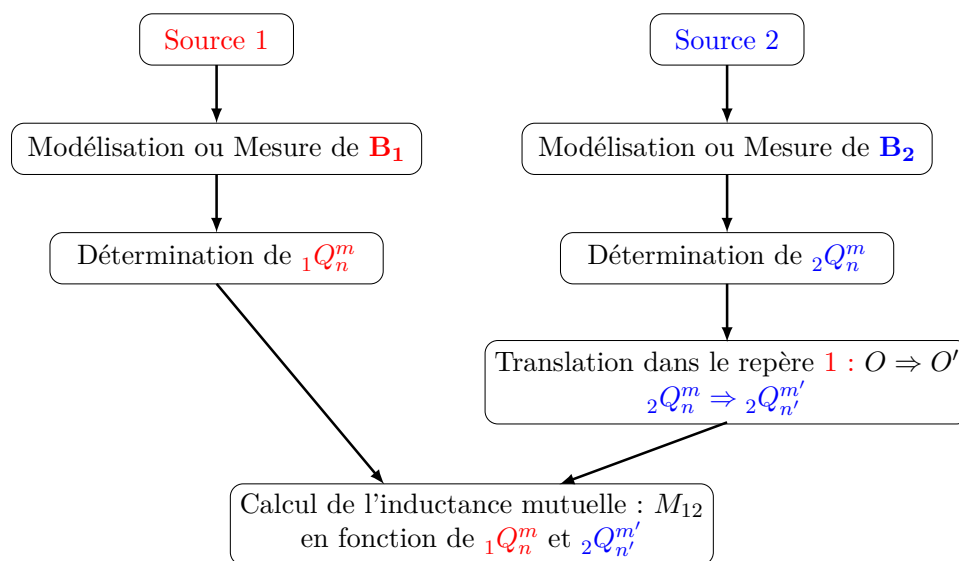


FIGURE 3.7 – Processus du calcul de l'inductance mutuelle avec la méthode du développement en harmoniques sphériques [Zan11]

Les déterminations des coefficients harmoniques des sources 1 et 2 sont basées sur leurs inductions magnétiques, calculées ou mesurées. Comme indiqué dans [Ric61], idéalement, ces inductions magnétiques doivent être mesurées ou calculées dans le vrai environnement, c'est-à-dire avec tous les autres éléments du système, à leurs positions définitives, mais non excitées. Cependant, ceci n'est pas efficace. En effet, dans l'approche efficace expliquée dans la section 2.8, l'expansion multipolaire de chaque élément du système est obtenue isolément. Chaque source est considérée comme « seule au monde ». Mais cette approche n'est exacte que lorsque chaque source est uniquement constituée de circuits où il n'existe pas de phénomène d'induit. Par contre, que se passe-t-il si les sources possèdent également les conducteurs massifs ou des matériaux ferromagnétique? Ces derniers peuvent être considérés comme les sources secondaires qui dépendent absolument de l'induction magnétique de l'environnement. Dans ce cas, la méthode de mesures isolées est-elle encore valide? Cette section est consacrée à ces questions abordées analytiquement et numériquement (éléments finis).

### 3.2.1 Calcul analytique pour une seule source secondaire

Dans le premier cas, on va considérer qu'il existe une seule source secondaire, c'est-à-dire que la source secondaire n'existe que dans une des deux sources. Le principe est donné sur la Figure 3.8.

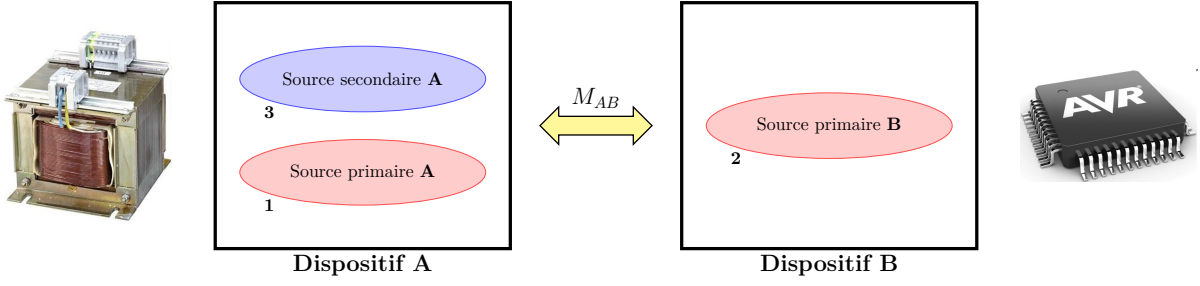


FIGURE 3.8 – Schéma de principe d'une seule source secondaire

Considérons que le dispositif  $A$  contient une source secondaire. Il peut donc être divisé en deux parties : une partie de source primaire qui représente l'ensemble de circuits qui sont directement alimentés par les générateurs externes ; et une partie de source secondaire qui représente l'ensemble des conducteurs et matériaux ferromagnétiques. Le dispositif  $B$  ne contient pas des sources secondaires. Les indices 1, 2, 3 représentent respectivement les sous-systèmes des deux dispositifs :

- sous-système 1 : source primaire du dispositif  $A$
- sous-système 2 : source secondaire du dispositif  $A$
- sous-système 3 : source primaire du dispositif  $B$

L'étude du couplage inductif entre les deux dispositifs  $A$  et  $B$  est équivalent à celle du couplage entre les 3 sous-systèmes. Nous pouvons décrire ce problème avec trois accès sous une forme matricielle avec des inductances propres et des inductances mutuelles définissant les couplages entre ces trois sous-systèmes :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

avec :

- $L_i$  : l'inductance propre du sous-système  $i$ .
- $M_{ij}$  : l'inductance mutuelle entre les sous-systèmes  $i$  et  $j$ ,  $M_{ij} = M_{ji}$ .
- $I_i$  : le courant circulant dans le sous-système  $i$ .
- $V_i$  : la tension aux bornes du sous-système  $i$ .

Vu que l'élément 3 est une source secondaire, il est donc en court-circuit, cela implique que la tension  $V_3$  est nulle :

$$V_3 = j\omega(M_{31}I_1 + M_{32}I_2 + L_3I_3) = 0 \quad (3.28)$$

On peut donc en déduire le courant  $I_3$  en fonction de  $I_1$  et  $I_2$  :

$$I_3 = -\left(\frac{M_{31}I_1}{L_3} + \frac{M_{32}I_2}{L_3}\right) \quad (3.29)$$

Avec l'équation (3.29),  $V_1$  peut s'écrire comme :

$$V_1 = j\omega \left( L_1 - \frac{M_{13}M_{31}}{L_3} \right) I_1 + j\omega \left( M_{12} - \frac{M_{13}M_{32}}{L_3} \right) I_2 \quad (3.30)$$

Si on alimente le dispositif  $B$  en éteignant le dispositif  $A$  ( $I_1 = 0$ ), le rapport entre  $V_1$  et  $I_2$  est donc l'inductance mutuelle entre ces deux dispositifs, qui s'écrit :

$$M_{AB} = M_{12} - \frac{M_{13}M_{32}}{L_3} \quad (3.31)$$

Comme expliqué dans la section 2.8, il est aussi possible de déterminer cette inductance mutuelle à partir des champs et potentiels magnétiques autour de la source. Avec ceci, la différence entre la mesure en présence des deux dispositifs et la mesure isolée peut être déduite.

### 3.2.1.1 Mesure en présence des deux dispositifs

Reprenons les équations (2.115c) et (2.119), l'impédance mutuelle entre les dispositifs  $A$  et  $B$  peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} Z_{AB} &= -\frac{\langle A, B \rangle}{I_A I_B} \\ &= -\frac{1}{I_A I_B} \iint_S (\mathbf{E}_A \times \mathbf{H}_B - \mathbf{E}_B \times \mathbf{H}_A) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{j\omega}{I_A I_B} \iint_S (\mathbf{A}_A \times \mathbf{H}_B - \mathbf{A}_B \times \mathbf{H}_A) \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Selon le théorème de la réciprocité,  $\mathbf{H}_A$  et  $\mathbf{A}_A$  sont le champ et le potentiel vecteur magnétique induits par le dispositif  $A$  en présence du dispositif  $B$ , mis hors tension.  $\mathbf{H}_B$  et  $\mathbf{A}_B$  sont le champ et le potentiel magnétique induits par le dispositif  $B$  en présence du dispositif  $A$  hors tension. Il est nécessaire que la surface  $S$  englobe un seul des dispositifs. Ici, supposons que la surface d'intégration  $S$  est une surface qui n'englobe que le dispositif  $A$ . Il est important ici de proposer une notion de champ et potentiel normalisé à 1 A :  $\{\mathbf{A}_i, \mathbf{H}_i\}$ . Il est défini comme étant le champ ou potentiel magnétique engendré par le sous-système seul, mais normalisé en courant. L'indice  $i$  peut donc être 1, 2 ou 3. Les impédances mutuelles entre ces sous-systèmes peuvent être exprimées en fonction de leurs champs magnétiques normalisés :

$$Z_{ij} = j\omega \iint_S (\mathbf{A}_i \times \mathbf{H}_j - \mathbf{A}_j \times \mathbf{H}_i) \cdot d\mathbf{s} \quad (3.33)$$

Comme dans l'équation (3.32), la surface d'intégration doit englober un seul dispositif.

Les champs du dispositif  $A$  sont calculés lorsque le dispositif  $B$  est hors tension, donc  $I_B = I_2 = 0$ . En combinant ceci avec l'équation (3.29), on en déduit :

$$I_3 = -\frac{M_{31} I_1}{L_3} \quad (3.34)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_A = I_1 \cdot \mathbf{A}_1 - \frac{M_{31}}{L_3} I_1 \cdot \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{H}_A = I_1 \cdot \mathbf{H}_1 - \frac{M_{31}}{L_3} I_1 \cdot \mathbf{H}_3 \end{cases} \quad (3.35)$$

Les champs du dispositif  $B$  peuvent être déduits de la même manière avec  $I_A = I_1 = 0$ . Il faut noter que le dispositif  $A$  est mis hors tension, mais sa source secondaire répond quand-même au champ du dispositif  $B$ , c'est-à-dire qu'elle engendre un champ induit dans l'environnement :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_B = I_2 \cdot \mathbf{A}_2 - \frac{M_{32}}{L_3} I_2 \cdot \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{H}_B = I_2 \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{M_{32}}{L_3} I_2 \cdot \mathbf{H}_3 \end{cases} \quad (3.36)$$

En combinant les équations (3.32), (3.35) et (3.36), on peut déduire :

$$\begin{aligned}
 Z_{AB} &= j\omega \frac{1}{I_A I_B} \iint_{S_A} (\mathbf{A}_A \times \mathbf{H}_B - \mathbf{A}_B \times \mathbf{H}_A) \cdot d\mathbf{s} \\
 &= j\omega \iint_{S_A} \left[ \left( \mathbf{A}_1 - \frac{M_{31}}{L_3} \mathbf{A}_3 \right) \times \left( \mathbf{H}_2 - \frac{M_{32}}{L_3} \mathbf{H}_3 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \mathbf{A}_2 - \frac{M_{32}}{L_3} \mathbf{A}_3 \right) \times \left( \mathbf{H}_1 - \frac{M_{31}}{L_3} \mathbf{H}_3 \right) \right] \cdot d\mathbf{s} \\
 &= j\omega \iint_{S_A} (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{s} - j\omega \iint_{S_A} \frac{M_{31}}{L_3} \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_3) \cdot d\mathbf{s} \\
 &\quad - j\omega \iint_{S_A} \frac{M_{32}}{L_3} \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_3) \cdot d\mathbf{s}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Vu que la surface  $S_A$  englobe non seulement le sous-système 1, mais aussi le sous-système 2, selon le théorème de la réciprocité, on a :

$$j\omega \iint_{S_A} \frac{M_{32}}{L_3} \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_3) \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{3.38}$$

L'équation (3.37) peut ainsi se simplifier :

$$\begin{aligned}
 Z_{AB} &= j\omega \iint_{S_A} (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{s} - j\omega \iint_{S_A} \frac{M_{31}}{L_3} \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_3) \cdot d\mathbf{s} \\
 &= j\omega \left( M_{12} - \frac{M_{31}M_{32}}{L_3} \right)
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

L'inductance mutuelle entre les deux dispositifs est donc :

$$M_{AB} = M_{12} - \frac{M_{31}M_{32}}{L_3} \tag{3.40}$$

Ceci correspond bien à l'équation (3.31), ce qui permet de valider la méthode consistant à mesurer en présence des deux dispositifs. En est-il de même pour la mesure isolée ?

### 3.2.1.2 Mesure isolée pour chaque dispositif

En pratique, on souhaite pouvoir calculer les couplages inductifs a posteriori, en n'utilisant que le développement harmonique de chaque dispositif caractérisé tout seul. Cela ne pose pas de problèmes s'il n'existe pas de sources secondaires car les inductions magnétiques ne changent pas en présence des autres dispositifs. Néanmoins, ce n'est plus le cas si un des deux dispositifs possède une source secondaire comme sur la Figure 3.8.

Le principe de calcul reste le même que dans la section 3.2.1.1, le champ et le potentiel  $\{\mathbf{H}_A, \mathbf{A}_A\}$  du dispositif  $A$  sont les mêmes que dans (3.35). Cependant, le dispositif  $B$  est mesuré sans présence de  $A$ , ces champs ne seront donc pas influencés par le sous-système 3.  $\{\mathbf{H}_B, \mathbf{A}_B\}$  sont :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_B = I_2 \cdot \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{H}_B = I_2 \cdot \mathbf{H}_2 \end{cases} \tag{3.41}$$

L'impédance mutuelle entre les dispositifs  $A$  et  $B$  est donc :

$$\begin{aligned}
 Z_{AB} &= j\omega \frac{1}{I_A I_B} \iint_{S_A} (\mathbf{A}_A \times \mathbf{H}_B - \mathbf{A}_B \times \mathbf{H}_A) \cdot d\mathbf{s} \\
 &= j\omega \iint_{S_A} \left[ \left( \mathbf{A}_1 - \frac{M_{31}}{L_3} \mathbf{A}_3 \right) \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \left( \mathbf{H}_1 - \frac{M_{31}}{L_3} \mathbf{H}_3 \right) \right] \cdot d\mathbf{s} \\
 &= j\omega \iint_{S_A} (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{s} - j\omega \iint_{S_A} \frac{M_{31}}{L_3} \cdot (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_3) \cdot d\mathbf{s} \\
 &= j\omega \left( M_{12} - \frac{M_{31} M_{32}}{L_3} \right)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

L'inductance mutuelle peut donc être déduite :

$$M_{AB} = M_{12} - \frac{M_{31} M_{32}}{L_3} \tag{3.43}$$

Le résultat correspond également à l'équation (3.31). Cela signifie que la méthode de mesure isolée est encore valide lorsque les sources secondaires ne sont présentes que dans un des dispositifs considérés. Maintenant, que se passe-t-il si les deux dispositifs possèdent des sources secondaires ?

### 3.2.2 Calcul analytique pour deux sources secondaires

Le principe de calcul est le même que pour une seule source secondaire. Comme présenté sur la Figure 3.9, on considère que les deux dispositifs sont constitués chacun d'une source primaire directement alimentée par un générateur externe et d'une source secondaire qui représente l'ensemble des conducteurs et des matériaux ferromagnétiques.

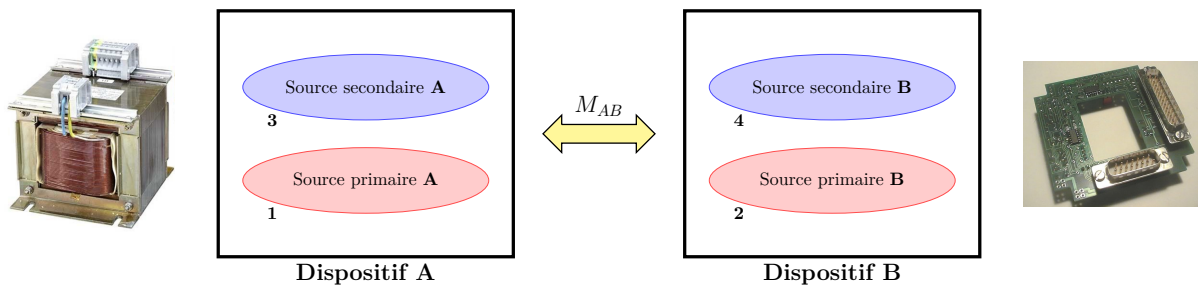


FIGURE 3.9 – Schéma de principe de deux sources secondaires

Les indices 1, 2, 3 et 4 représentent respectivement les sous-systèmes des deux dispositifs :

- sous-système 1 : source primaire du dispositif  $A$
- sous-système 2 : source secondaire du dispositif  $A$
- sous-système 3 : source primaire du dispositif  $B$
- sous-système 4 : source secondaire du dispositif  $B$

L'étude du couplage inductif entre les deux dispositifs  $A$  et  $B$  est équivalente à celle du couplage entre les 4 sous-systèmes. Le problème peut être décrit sous une forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & L_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

Les définitions de  $L_i$ ,  $M_{ij}$ ,  $I_i$  et  $V_i$  sont les mêmes que dans la section 3.2.1. La source secondaire 4

est toujours en court-circuit, on a donc :

$$V_4 = j\omega(M_{41}I_1 + M_{42}I_2 + M_{43}I_3 + L_4I_4) \quad (3.45)$$

On peut exprimer le courant  $I_4$  en fonction de  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  :

$$I_4 = -\left(\frac{M_{41}I_1}{L_4} + \frac{M_{42}I_2}{L_4} + \frac{M_{43}I_3}{L_4}\right) \quad (3.46)$$

De même pour la source secondaire 3 :

$$V_3 = j\omega(M_{31} \cdot I_1 + M_{32} \cdot I_2 + L_3 \cdot I_3 + M_{34} \cdot I_4) = 0 \quad (3.47)$$

En combinant les équations (3.46) et (3.47), on a :

$$I_3 = -\left(\frac{M_{31} - \frac{M_{41}}{L_4} \cdot M_{34}}{L_3 - \frac{M_{43}}{L_4} \cdot M_{34}}\right) I_1 - \left(\frac{M_{32} - \frac{M_{42}}{L_4} \cdot M_{34}}{L_3 - \frac{M_{43}}{L_4} \cdot M_{34}}\right) I_2 \quad (3.48)$$

Afin de rendre les calculs plus claires, notez :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{M_{31} - \frac{M_{41}}{L_4} \cdot M_{34}}{L_3 - \frac{M_{43}}{L_4} \cdot M_{34}} \\ k_2 = \frac{M_{32} - \frac{M_{42}}{L_4} \cdot M_{34}}{L_3 - \frac{M_{43}}{L_4} \cdot M_{34}} \end{cases} \quad (3.49)$$

La tension aux bornes du sous-système 1 est :

$$V_1 = j\omega \left[ L_1 - k_1 M_{13} - M_{14} \left( \frac{M_{41}}{L_4} - k_1 \frac{M_{43}}{L_4} \right) \right] I_1 + j\omega \left[ M_{12} - k_2 M_{13} - M_{14} \left( \frac{M_{42}}{L_4} - k_2 \frac{M_{43}}{L_4} \right) \right] I_2 \quad (3.50)$$

L'inductance mutuelle  $M_{AB}$  est alors :

$$\begin{aligned} M_{AB} &= M_{12} - k_2 M_{13} - M_{14} \left( \frac{M_{42}}{L_4} - k_2 \frac{M_{43}}{L_4} \right) \\ &= M_{12} - \frac{M_{42}}{L_4} M_{41} - \frac{M_{31} L_4}{L_3 L_4 - M_{34} M_{43}} M_{32} + \frac{M_{42} M_{31}}{L_3 L_4 - M_{34} M_{43}} M_{43} + \frac{M_{23} L_4 - M_{24} M_{34}}{L_3 L_4 - M_{34} M_{43}} M_{41} \end{aligned} \quad (3.51)$$

### 3.2.2.1 Mesure en présence des deux dispositifs

Le théorème de la réciprocité sera appliqué pour calculer  $M_{AB}$ , le principe est exactement le même que dans la section 3.2.1. Le potentiel et le champ magnétiques du dispositif  $A$  sont :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_A = \left[ \mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{A}_3 - \left( \frac{M_{41}}{L_4} - k_1 \frac{M_{43}}{L_4} \right) \mathbf{A}_4 \right] \cdot I_1 \\ \mathbf{H}_A = \left[ \mathbf{H}_1 - k_1 \mathbf{H}_3 - \left( \frac{M_{41}}{L_4} - k_1 \frac{M_{43}}{L_4} \right) \mathbf{H}_4 \right] \cdot I_1 \end{cases} \quad (3.52)$$



De la même manière, le potentiel et le champ magnétique du dispositif  $B$  sont :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_B = \left[ \mathbf{A}_2 - k_2 \mathbf{A}_3 - \left( \frac{M_{42}}{L_4} - k_2 \frac{M_{43}}{L_4} \right) \mathbf{A}_4 \right] \cdot I_2 \\ \mathbf{H}_B = \left[ \mathbf{H}_2 - k_2 \mathbf{H}_3 - \left( \frac{M_{42}}{L_4} - k_2 \frac{M_{43}}{L_4} \right) \mathbf{H}_4 \right] \cdot I_2 \end{cases} \quad (3.53)$$

En appliquant l'équation (3.32), l'impédance mutuelle  $Z_{AB}$  s'exprime comme :

$$\begin{aligned} Z_{AB} &= j\omega \frac{1}{I_A I_B} \iint_{S_A} (\mathbf{A}_A \times \mathbf{H}_B - \mathbf{A}_B \times \mathbf{H}_A) \cdot ds \\ &= j\omega \iint_{S_A} \left[ (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_1) - \left( \frac{M_{42}}{L_4} - k_2 \frac{M_{43}}{L_4} \right) (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_4 - \mathbf{A}_4 \times \mathbf{H}_1) \right. \\ &\quad - k_1 (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_3) + k_1 \left( \frac{M_{42}}{L_4} - k_2 \frac{M_{43}}{L_4} \right) (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_4 - \mathbf{A}_4 \times \mathbf{H}_3) \\ &\quad \left. + k_2 \left( \frac{M_{41}}{L_4} - k_1 \frac{M_{43}}{L_4} \right) (\mathbf{A}_4 \times \mathbf{H}_3 - \mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_4) \right] \cdot ds \end{aligned} \quad (3.54)$$

L'inductance mutuelle entre les deux dispositifs  $A$  et  $B$  est :

$$\begin{aligned} M_{AB} &= M_{12} - \left( \frac{M_{42}}{L_4} - k_2 \frac{M_{43}}{L_4} \right) M_{14} - k_1 M_{32} + \left( k_1 \frac{M_{42}}{L_4} - k_2 \frac{M_{41}}{L_4} \right) M_{43} \\ &= M_{12} - \frac{M_{42}}{L_4} M_{41} - \frac{M_{31} L_4}{L_3 L_4 - M_{34} M_{43}} M_{32} + \frac{M_{42} M_{31}}{L_3 L_4 - M_{34} M_{43}} M_{43} + \frac{M_{23} L_4 - M_{24} M_{34}}{L_3 L_4 - M_{34} M_{43}} M_{41} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Le résultat correspond parfaitement à (3.51). La méthode de mesure en présence des deux dispositifs ne pose pas de problèmes. Maintenant, la méthode de mesure isolée sera vérifiée.

### 3.2.2.2 Mesure isolée pour chaque dispositif

En mesure isolée, les champs magnétiques autour d'un dispositif ne seront pas influencés par l'autre dispositif. Dans ce cas, les champs et les potentiels du dispositif  $A$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_A = \left( \mathbf{A}_1 - \frac{M_{31}}{L_3} \mathbf{A}_3 \right) \cdot I_1 \\ \mathbf{H}_A = \left( \mathbf{H}_1 - \frac{M_{31}}{L_3} \mathbf{H}_3 \right) \cdot I_1 \end{cases} \quad (3.56)$$

De même pour le dispositif  $B$  :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_B = \left( \mathbf{A}_2 - \frac{M_{42}}{L_4} \mathbf{A}_4 \right) \cdot I_2 \\ \mathbf{H}_B = \left( \mathbf{H}_2 - \frac{M_{42}}{L_4} \mathbf{H}_4 \right) \cdot I_2 \end{cases} \quad (3.57)$$

De la même façon que les sections précédentes, l'impédance mutuelle  $Z_{AB}$  peut être déduite :

$$\begin{aligned} Z_{AB} &= j\omega \frac{1}{I_A I_B} \iint_{S_A} (\mathbf{A}_A \times \mathbf{H}_B - \mathbf{A}_B \times \mathbf{H}_A) \cdot ds \\ &= j\omega \iint_{S_A} \left[ (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_1) - \frac{M_{42}}{L_4} (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_4 - \mathbf{A}_4 \times \mathbf{H}_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_{31}}{L_3} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_3) + \frac{M_{31}M_{42}}{L_3L_4} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_4 - \mathbf{A}_4 \times \mathbf{H}_3) \right] \cdot ds \end{aligned} \quad (3.58)$$

On a donc :

$$M_{AB} = M_{12} - \frac{M_{42}}{L_4} M_{14} - \frac{M_{31}}{L_3} M_{32} + \frac{M_{42}M_{31}}{L_3L_4} M_{34} \quad (3.59)$$

Cette inductance mutuelle calculée à partir de mesures isolées diffère de celle calculée en (3.51) et (3.55). La différence entre la valeur théorique et la valeur calculée en mesure isolée est :

$$\varepsilon = M_{AB}^{théorique} - M_{AB}^{isolée} = \frac{M_{34}(L_3M_{14} - M_{13}M_{34})(L_4M_{23} - M_{24}M_{34})}{L_3L_4(M_{34}M_{34} - L_3L_4)} \quad (3.60)$$

Il est évident que cet écart n'est pas nul, il signifie que la méthode de mesure isolée pour calculer l'inductance mutuelle n'est pas exacte lorsque les deux dispositifs possèdent des sources secondaires. Pour confirmer ces résultats, des simulations sont effectuées avec *Flux3D* sur des exemples réels dans §3.2.3.

### 3.2.2.3 Méthode Richmond

Dans [Ric61], l'auteur a proposé que pour calculer l'inductance mutuelle entre deux dispositifs, qu'un seul dispositif soit identifié en présence de l'autre. Plus concrètement, le calcul peut être effectué en 2 étapes. La première étape consiste à mesurer le champ du dispositif  $A$  sur une surface qui englobe un seul dispositif ( $A$  ou  $B$ ), en présence de l'autre. La deuxième étape consiste à mesurer ou calculer le champ de l'autre dispositif sur la même surface que dans la première étape, mais en l'absence du dispositif  $A$ . Pour vérifier cette méthode, il suffit de calculer l'inductance mutuelle en utilisant les résultats des équations (3.52) et (3.57). L'impédance mutuelle  $Z_{AB}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} Z_{AB} &= j\omega \frac{1}{I_A I_B} \iint_{S_A} (\mathbf{A}_A \times \mathbf{H}_B - \mathbf{A}_B \times \mathbf{H}_A) \cdot ds \\ &= j\omega \iint_{S_A} \left[ (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_1) - \left( \frac{M_{42}}{L_4} - k_2 \frac{M_{43}}{L_4} \right) (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{H}_4 - \mathbf{A}_4 \times \mathbf{H}_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_{13}}{L_3} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{H}_3) + \left( \frac{M_{42}}{L_4} - k_2 \frac{M_{43}}{L_4} \right) \frac{M_{13}}{L_3} (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{H}_4 - \mathbf{A}_4 \times \mathbf{H}_3) \right] \cdot ds \end{aligned} \quad (3.61)$$

Après la simplification, on retrouve la même valeur de  $M_{AB}$  que la valeur théorique et également celle de (3.55). D'une part, cela signifie que pour la caractérisation des sources de rayonnement, un seul dispositif doit être identifié en présence de l'autre. D'autre part, il permet de confirmer la conclusion de la section précédente : la méthode de mesure isolée est correcte lorsqu'une source secondaire apparaît dans un seul dispositif.

## 3.2.3 Modélisation avec *Flux3d*

### 3.2.3.1 Cas ferromagnétique

Dans cette section, certains résultats de modélisation sous *Flux3D* en magnétostatique seront présentés afin de vérifier les conclusions analytiques obtenus et de quantifier l'erreur relative  $\varepsilon$  dans (3.60) pour quelques exemples réels.

Le premier cas que nous traitons est celui d'une source secondaire d'un matériaux ferromagnétique. Imaginons deux inductances de lissage placés à proximité l'un de l'autre comme présenté sur la Figure 3.10; le couplage entre eux doit être déterminé.

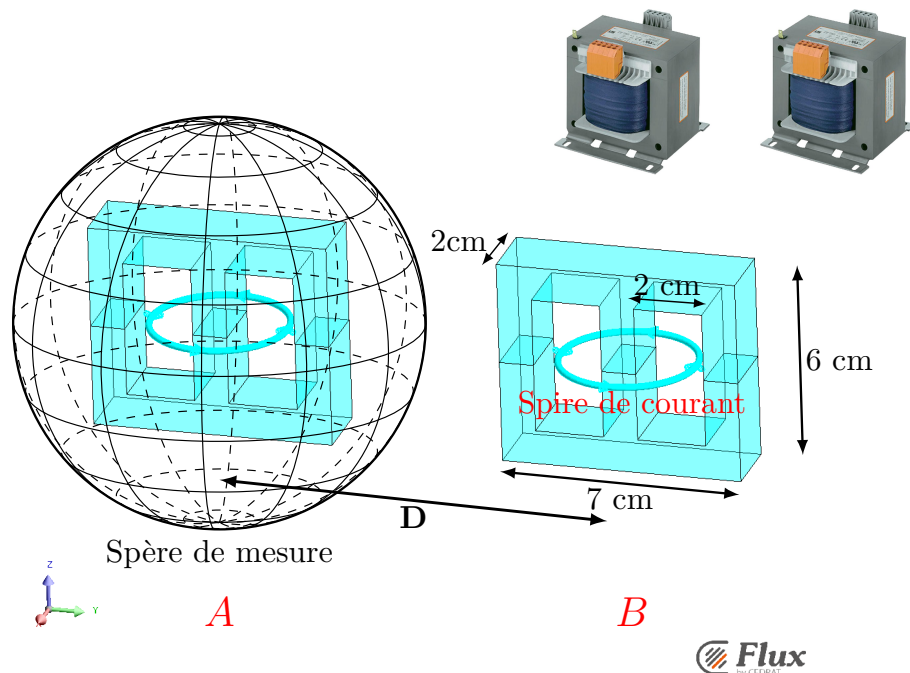


FIGURE 3.10 – Inductance mutuelle entre deux inductances de lissage

Les deux spires de courant ont un rayon de 3 cm. Elles sont considérées comme des sources primaires, alimentées par une source externe. La mesure de l'induction magnétique est effectuée sur une sphère qui englobe une seule des inductances comme montré sur la Figure 3.10, pour caractériser le dispositif A. Le rayon de la sphère est de 5 cm. La partie bleue représente le noyau ferromagnétique avec un perméabilité relative  $\mu_r$  de 1000. Ce noyau magnétique est excité par les courants circulant dans A, ou par ceux du dispositif voisin B. Ce dernier est ce qui est négligé dans la méthode de mesure isolée. Cet effet secondaire n'est pas important, mais peut quand-même influencer la caractérisation de la source de rayonnement. Par ailleurs, plus les deux dispositifs sont proches, plus cet effet est important. Plaçons-nous par exemple à une distance  $D = 9$  cm, le dispositif A, alimenté, étant à caractériser. Le dispositif B est mis hors tension pendant les mesures. Cependant, son noyau ferromagnétique engendre un champ secondaire en fonction de l'induction magnétique provenant du dispositif 1. L'induction magnétique sur la sphère de mesure (3.10) est présentée sur la Figure 3.11 pour les deux cas : en présence et en absence du dispositif B.

On peut constater que les répartitions de l'induction magnétique sont légèrement différentes dans les deux cas, et la différence se situe principalement du côté du dispositif B. Pour mettre en évidence cette différence les deux inductions magnétiques, cette dernière est tracée sur la Figure 3.12.

Cette différence est en effet l'induction magnétique engendrée par le noyau ferromagnétique du dispositif B lorsque le dispositif A est alimenté. C'est aussi cette induction magnétique qui n'est pas prise en compte dans la mesure isolée. Évidemment, les coefficients harmoniques pour ces deux inductions magnétiques ne seront pas les mêmes. Il est important de noter que la détermination des coefficients harmoniques n'est pas effectuée par l'intégrale surfacique comme dans l'équation (2.81). Les identifications de chaque dispositif sont réalisées par le problème inverse, c'est-à-dire à partir des mesures discrètes des inductions magnétiques autour d'un dispositif sur une surface sphérique. Les détails de ce problème inverse seront donnés dans le chapitre 4.

Le développement en harmoniques sphériques est effectué jusqu'au cinquième ordre ( $N_{max} = 5$ ). Les

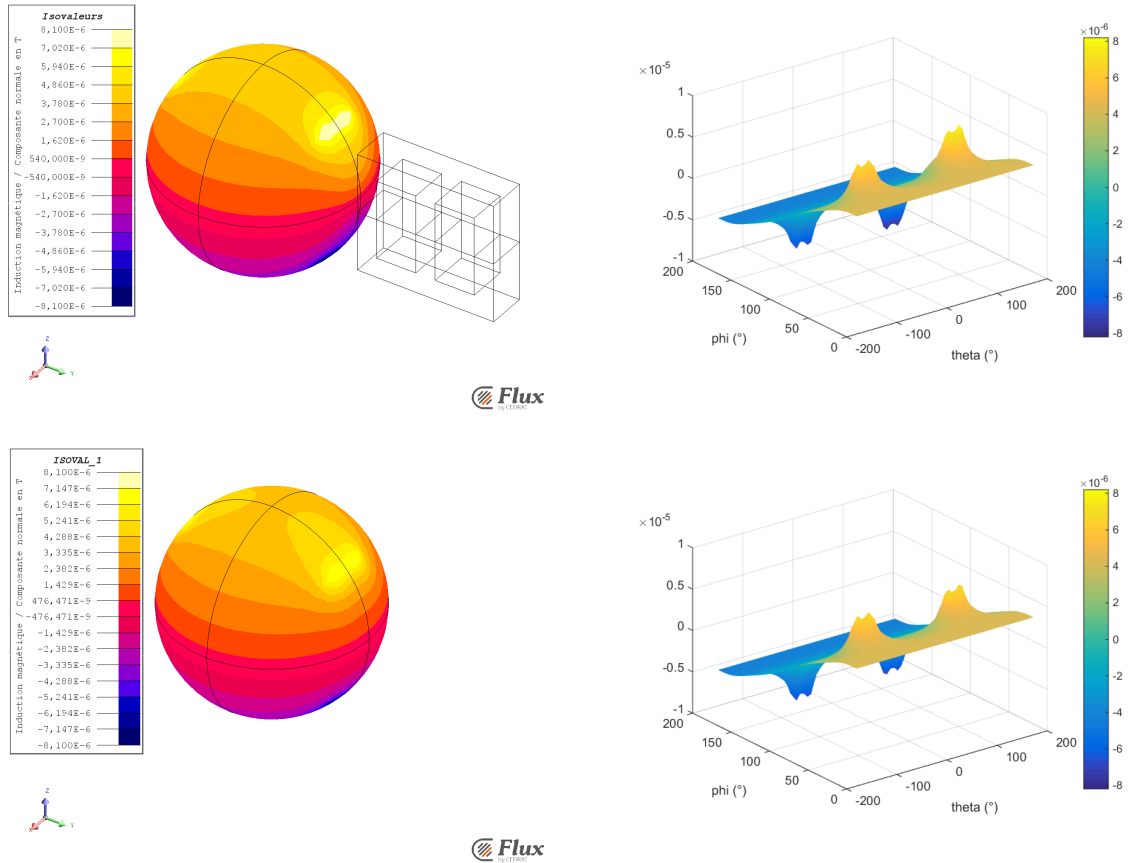


FIGURE 3.11 – Induction magnétique (T) sur la sphère de mesure en présence du dispositif  $B$  (haut) ; Induction magnétique (T) sur la sphère de mesure en absence du dispositif  $B$  (bas)

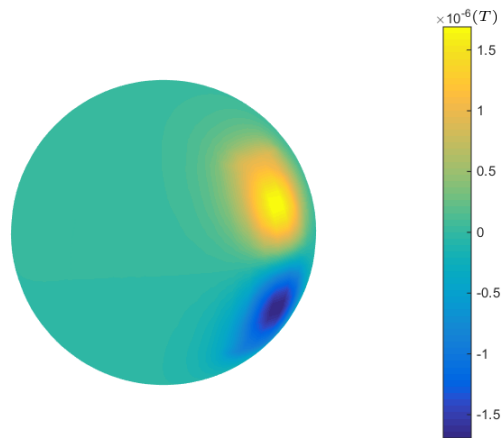


FIGURE 3.12 – Différence entre les induction magnétiques sur la sphère de mesure en présence du dispositif  $B$  et sans présence du dispositif  $B$

coefficients harmoniques du dispositif  $A$  sont donnés dans la Table 3.2. Afin d’observer directement les contributions à l’induction magnétique de chaque composante harmonique, les valeurs des coefficients sont pondérées par  $r^{n+2}$  ( $r = 5$  cm).

	$7.91 \cdot 10^{-4}$	$-8.59 \cdot 10^{-4}$	$-2.09 \cdot 10^{-4}$	$7.50 \cdot 10^{-4}$	$1.05 \cdot 10^{-4}$
<b>N = 1</b>	$-3.04 \cdot 10^{-4}$	4.14	0.124	$-9.33 \cdot 10^{-5}$	$-5.39 \cdot 10^{-2}$
<b>N = 2</b>	$4.66 \cdot 10^{-4}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$-3.07 \cdot 10^{-4}$	$1.70 \cdot 10^{-4}$	$-4.59 \cdot 10^{-4}$
<b>N = 3</b>	$1.53 \cdot 10^{-4}$	-0.460	$-1.66 \cdot 10^{-4}$	-0.178	$-3.93 \cdot 10^{-2}$
<b>N = 4</b>	$-1.46 \cdot 10^{-4}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$	$4.16 \cdot 10^{-4}$	$-1.73 \cdot 10^{-3}$	$1.71 \cdot 10^{-4}$
<b>N = 5</b>	$-1.66 \cdot 10^{-5}$	0.141	$2.14 \cdot 10^{-4}$	$-2.53 \cdot 10^{-2}$	$-5.66 \cdot 10^{-5}$

En présence du dispositif B

	$9.07 \cdot 10^{-4}$	$-8.32 \cdot 10^{-4}$	$-2.58 \cdot 10^{-4}$	$7.28 \cdot 10^{-4}$	$1.19 \cdot 10^{-4}$
<b>N = 1</b>	$-3.22 \cdot 10^{-4}$	4.02	$1.00 \cdot 10^{-3}$	$-1.01 \cdot 10^{-4}$	$-7.67 \cdot 10^{-4}$
<b>N = 2</b>	$3.97 \cdot 10^{-4}$	$1.37 \cdot 10^{-3}$	$-3.12 \cdot 10^{-4}$	$1.64 \cdot 10^{-4}$	$-4.56 \cdot 10^{-4}$
<b>N = 3</b>	$1.71 \cdot 10^{-4}$	-0.372	$-1.68 \cdot 10^{-4}$	-0.121	$-3.39 \cdot 10^{-2}$
<b>N = 4</b>	$-1.19 \cdot 10^{-4}$	$5.38 \cdot 10^{-4}$	$4.21 \cdot 10^{-4}$	$-1.63 \cdot 10^{-3}$	$1.70 \cdot 10^{-4}$
<b>N = 5</b>	$-3.42 \cdot 10^{-5}$	0.104	$2.24 \cdot 10^{-4}$	$-4.94 \cdot 10^{-2}$	$-5.32 \cdot 10^{-5}$

Sans présence du dispositif B

 TABLE 3.2 – Coefficients harmoniques pondérés par  $r^{n+2}$  ( $r = 5$  cm) en présence du dispositif B (haut) ; coefficients harmoniques pondérés par  $r^{n+2}$  ( $r = 5$  cm) en l'absence du dispositif B (bas)

On peut constater que les coefficients harmoniques du dispositif A ne sont pas les mêmes dans les deux cas. Pour la majorité des composantes, la différence est très petite. Cependant, l'écart est important pour certaines composantes, comme  $Q_2^{-1}$ . Quelles sont les influences de cet écart sur les calculs des inductances mutuelles ? Sur la Table 3.3, les résultats de l'inductance mutuelle sont donnés en fonction de  $D$  pour les deux méthodes : la méthode idéale en présence de tous les dispositifs et la méthode de mesure isolée. Les deux méthodes sont basées sur le développement en harmoniques sphériques. Il a déjà été démontré dans les sections précédentes que la première méthode est correcte et la deuxième peut créer une petite erreur. Ensuite, l'erreur relative sur l'inductance mutuelle de la méthode de mesure isolée est aussi calculée en prenant la première méthode comme référence.

$D$ (cm)	$M_{AB}$ idéale (H)	$M_{AB}$ isolée (H)	Erreur relative de $M_{AB}$ isolée
9	$1.745 \cdot 10^{-9}$	$1.547 \cdot 10^{-9}$	11.4%
9.5	$1.381 \cdot 10^{-9}$	$1.290 \cdot 10^{-9}$	6.6%
10	$1.109 \cdot 10^{-9}$	$1.067 \cdot 10^{-9}$	3.8%
10.5	$9.478 \cdot 10^{-10}$	$9.254 \cdot 10^{-10}$	2.4%
11	$8.058 \cdot 10^{-10}$	$7.944 \cdot 10^{-10}$	1.4%
12	$6.024 \cdot 10^{-10}$	$5.989 \cdot 10^{-10}$	0.4%

TABLE 3.3 – L'inductance mutuelle en fonction de la distance entre les deux dispositifs A et B

Sur la Table 3.3,  $D = 9$  cm correspond à la situation où les deux dispositifs sont placés extrêmement proches l'un à l'autre (la distance bord à bord est 2 cm). On peut constater que l'erreur sur la valeur de l'inductance mutuelle calculée en mesure isolée est très faible et elle diminue avec la distance entre les deux dispositifs. Cela s'explique par le fait que plus les deux dispositifs sont loin l'un de l'autre,

moins l'induction magnétique engendrée par les sources secondaires est importante, et moins les sources secondaires vont impacter les calculs d'inductance mutuelle.

### 3.2.3.2 Cas conducteur

Dans la section précédente, la source secondaire était un matériel ferromagnétique. Le deuxième cas que nous traitons est celui d'une source secondaire de type conducteur métallique.

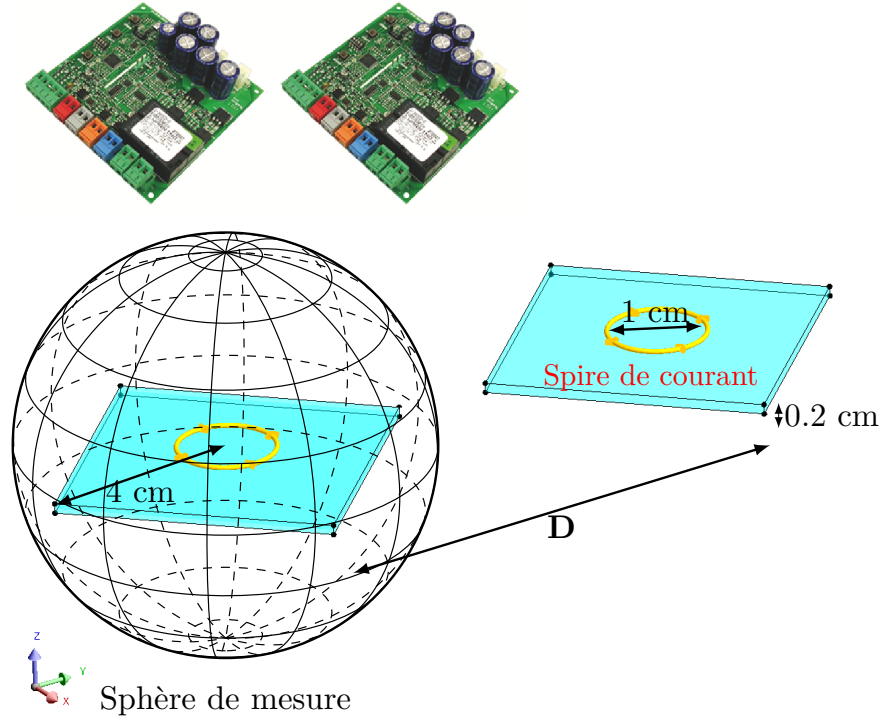


FIGURE 3.13 – L'inductance mutuelle entre deux boucles sur les plaques de cuivre

Comme présenté sur la Figure 3.13, chaque dispositif est constitué d'une spire de courant placée au-dessus d'une plaque de cuivre. Ce modèle peut être associé à une situation réelle où deux cartes électroniques sont placées à proximité l'une de l'autre et le couplage entre les composants électroniques sur les cartes doit être déterminé. Pour chaque série de mesure, une boucle est alimentée par une source externe avec une fréquence de 500 kHz. Les mesures de l'induction magnétique sont toujours effectuées sur une sphère d'un rayon de 5 cm. La même étude que dans le cas ferromagnétique est faite et les résultats des calculs de l'inductance mutuelle sont donnés sur la Table 3.4.

$D$ (cm)	$M_{AB}$ idéale (H)	$M_{AB}$ isolée (H)	Erreur relative de $M_{AB}$ isolée
9.5	$1.554 \cdot 10^{-12}$	$1.557 \cdot 10^{-12}$	0.19%
10	$1.287 \cdot 10^{-12}$	$1.288 \cdot 10^{-12}$	0.08%
10.5	$1.080 \cdot 10^{-12}$	$1.080 \cdot 10^{-1}$	0%

TABLE 3.4 – Inductance mutuelle en fonction de la distance entre les deux dispositifs  $A$  et  $B$

La variation de courant du dispositif  $A$  engendre un courant induit dans la plaque métallique du dispositif  $B$ . Cependant, à 500 kHz, l'approximation des régimes quasi-stationnaires est encore valable,

le courant induit généré dans le plaque secondaire est très petit devant celui dans le premier plaque et l'induction magnétique générée par ce courant est également négligeable. Pour cette raison, les erreurs de la méthode de mesure isolée sont très faibles.

Dans cette section et les sections précédentes, il est montré que le procédé de mesures isolées possède une erreur lorsque des sources secondaires sont présentés dans les deux dispositifs. Cette erreur est due au fait qu'on néglige le champ magnétique généré par la source secondaire. Les simulations en *Flux3D* montrent que cette erreur est très faible. Elles montrent que la méthode prédictive pour déterminer le couplage inductif entre deux dispositifs, basée sur les mesures isolées de chaque source, est en effet robuste. Il est encore possible de compenser cette erreur causée par les sources secondaires. Pour ce faire, une approche est proposée, elle sera détaillée par la suite.

### 3.2.4 Compensation de l'erreur

L'idée de l'approche est de caractériser le rayonnement de la source secondaire en fonction du champ magnétique externe qui sera représenté en harmoniques sphériques. Pour rendre la méthode plus claire, un exemple est proposé sur la Figure 3.14. Il est montré que l'effet d'une source secondaire de type conducteur est très faible et peut être négligé par rapport à celui du matériaux ferromagnétiques. Ainsi, dans cette section, on se concentre sur la compensation de l'erreur causée par les matériaux ferromagnétiques. Bien sûr, l'approche de compensation est exactement la même pour les conducteurs ou un mélange des deux.

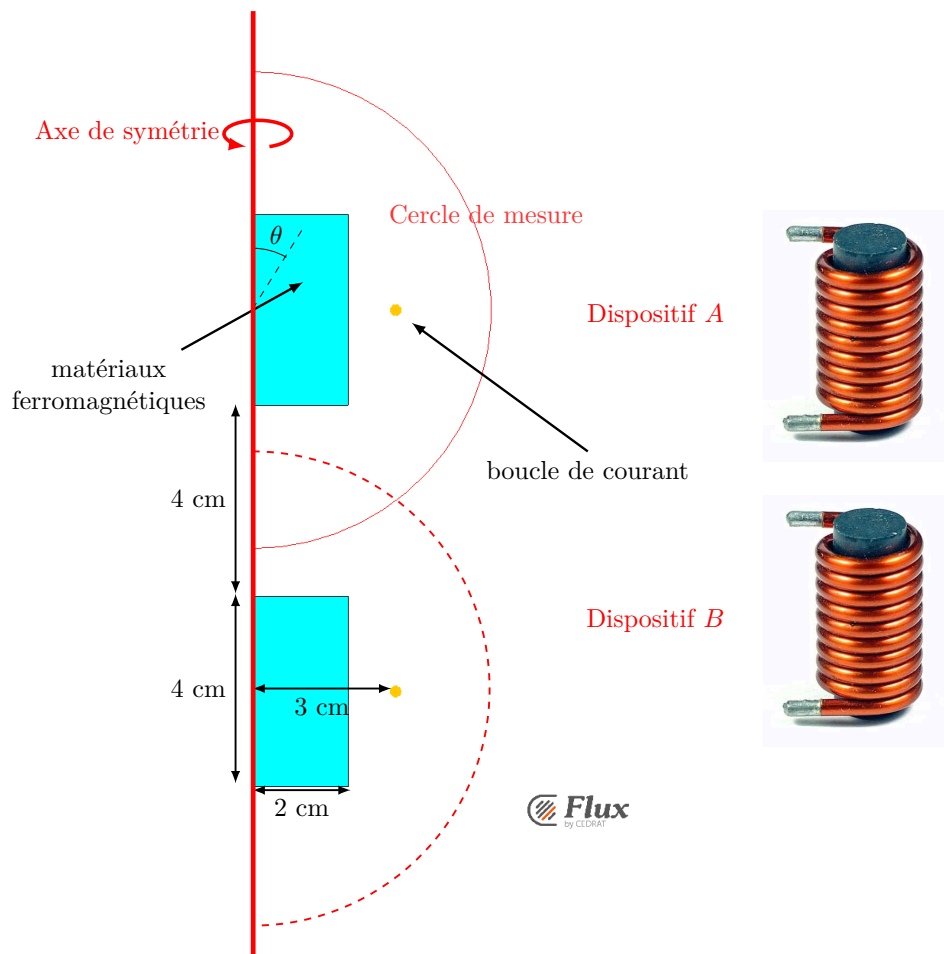


FIGURE 3.14 – Inductance mutuelle entre deux bobines

L'inductance mutuelle entre deux bobines avec un noyau ferromagnétique est à déterminer. Les deux

bobines sont placées sur le même axe comme montré sur la Figure 3.14. La partie bleue représente le matériau ferromagnétique, avec une perméabilité relative de 1000. Grâce à l'axi-symétrie du modèle, la modélisation peut être réalisée en 2D et il faut seulement considérer les composantes de moment nul pour le développement en harmoniques sphériques. Pour caractériser le dispositif *A*, l'induction magnétique est mesurée sur un cercle de 5 cm, qui est équivalent à la sphère de mesure dans les sections précédentes. Comme avant, le dispositif *A* est alimenté et le dispositif *B* est mis hors tension. Les mesures sont tracées sur la Figure 3.15.

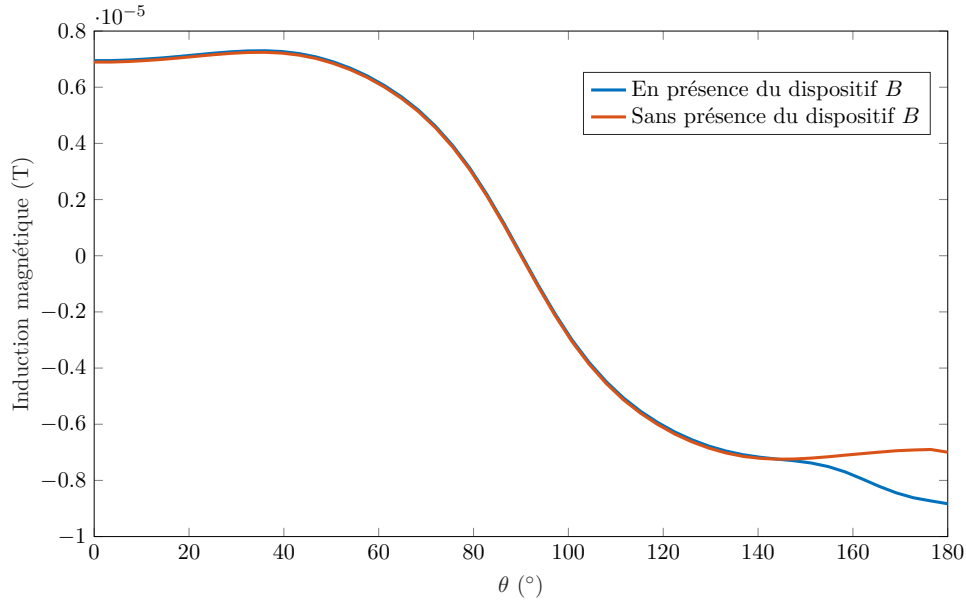


FIGURE 3.15 – Induction magnétique sur le cercle de mesure

Le résultat correspond bien à celui de la section 3.2.3.1. Entre la mesure isolée et la mesure en présence de l'autre dispositif, seulement la partie proche du dispositif *B* est faussée. En mesure isolée, plus le point d'observation est proche du dispositif *B*, plus l'induction magnétique est loin de sa valeur théorique. Les identifications des sources sont toujours effectuées jusqu'à l'ordre 5. Les coefficients harmoniques pondérés du dispositif *A*, obtenus à partir de ces mesures, sont donnés dans la Table 3.5.

Composante harmonique	$Q_1^0$	$Q_2^0$	$Q_3^0$	$Q_4^0$	$Q_5^0$
Mesure idéale	7.93	-0.100	-0.764	-0.0519	0.147
Mesure isolée	7.81	$-4.78 \cdot 10^{-4}$	0.840	$-2.83 \cdot 10^{-4}$	0.105

TABLE 3.5 – Coefficients harmoniques du dispositif *A* pondérés par  $r^{n+2}$  ( $r = 5$  cm)

Théoriquement, l'induction générée par le dispositif *A* seul est anti-symétrique. Cela signifie qu'il ne possède que les composantes harmoniques d'ordre impair. C'est-à-dire que  $Q_2^0 = 0$ ,  $Q_4^0 = 0$ ... Néanmoins, sur Table 3.5, on constate que les composantes d'ordre pair ne sont pas tout-à-fait nuls, à cause du bruit de maillage en éléments finis.

Pour calculer l'inductance mutuelle, le développement du dispositif *A* doit être translaté à l'origine du dispositif *B*. Ceci conduit à une décomposition de problème interne, développée sur le cercle en pointillé. Les coefficients harmoniques après la translation sont donnés dans la Table 3.6.

Les coefficients harmoniques des deux méthodes sont légèrement différents. L'inductance mutuelle calculée par la méthode idéale en présence de deux dispositifs est  $1.13 \cdot 10^{-8}$  H. L'inductance mutuelle



Composantes harmoniques après translation	$Q_1^0$	$Q_2^0$	$Q_3^0$	$Q_4^0$	$Q_5^0$
Mesure idéale	$1.06 \cdot 10^1$	$2.46 \cdot 10^2$	$4.63 \cdot 10^3$	$7.87 \cdot 10^4$	$1.27 \cdot 10^6$
Mesure isolée	9.94	$2.24 \cdot 10^2$	$4.00 \cdot 10^3$	$6.27 \cdot 10^4$	$9.07 \cdot 10^5$

TABLE 3.6 – Coefficients harmoniques du dispositif A après la translation

calculée par la méthode de mesure isolée est  $1.09 \cdot 10^{-8}$  H, avec un erreur relative de :

$$\varepsilon = \frac{|M_{AB}^{théorique} - M_{AB}^{isolé}|}{M_{AB}^{théorique}} = \frac{1.13 \cdot 10^{-8} - 1.09 \cdot 10^{-8}}{1.13 \cdot 10^{-8}} \approx 3.5\% \quad (3.62)$$

Cette erreur n'est pas importante, mais il est toujours possible de la compenser par la mesure du champ magnétique. L'idée de l'approche est de déterminer la réponse de la source secondaire à chaque composante harmonique ( $N = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) comme indiqué dans la matrice suivante. Grâce à la méthode de Richmond, une seule source secondaire a besoin d'être caractérisée. Il est très important de noter que toutes les caractérisations de source secondaire sont des problèmes internes.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_1^0 \\ Q_2^0 \\ \vdots \\ Q_n^0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} S_{10}^{10} & S_{20}^{10} & \dots & S_{n0}^{10} \\ S_{10}^{20} & S_{20}^{20} & \dots & S_{n0}^{20} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{10}^{n0} & S_{20}^{n0} & \dots & S_{n0}^{n0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1^{0'} \\ Q_2^{0'} \\ \vdots \\ Q_n^{0'} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}'} \quad (3.63)$$

Comme déjà mentionné, dans cet exemple axi-symétrique, seules les composantes de moment zéro ont besoin d'être considérées.  $\mathbf{S}$  représente la réponse de la source secondaire à chaque composante harmonique.  $S_{ij}^{i'j'}$  est la composante  $Q_{i'}^{j'}$  engendrée dans un environnement de  $Q_i^j$ . Le vecteur  $\mathbf{Q}$  est considéré comme connu pour chacune des  $n$  sources pures. On mesure le champ à l'intérieur de cette source avec la source secondaire à caractériser centrée ce qui donne le vecteur  $\mathbf{Q}'$ . En modélisation et en pratique, les sources canoniques sont construites par la méthode présentée dans la section 2.7.4. Un exemple pour compenser l'ordre 1 est présenté sur la Figure 3.16 :

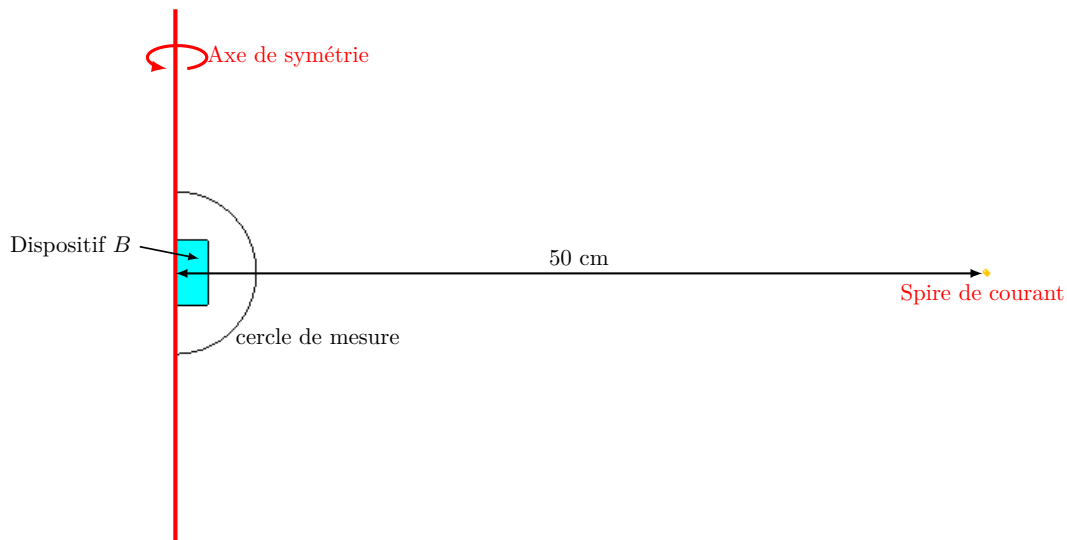


FIGURE 3.16 – Caractérisation d'ordre 1 pour une source secondaire

Une grande boucle de courant est alimentée. Les mesures d'induction magnétique sont effectuées sur le cercle de mesure. Avec ces mesures, les coefficients harmoniques de la grande boucle peuvent être déterminés. C'est un problème interne et la boucle de courant peut être considérée comme une source « pure » de  $Q_1^0$ , ce qui est déjà montré dans la section 2.7.4. Ensuite, le dispositif  $B$  est placé au milieu du cercle de mesure, mis hors tension. Les mêmes mesures sont effectuées et en raison de la source secondaire, les inductions magnétiques sur le cercle seront légèrement modifiées. Les mesures avant et après la présence du dispositif  $B$  sont présentées sur la Figure 3.17.

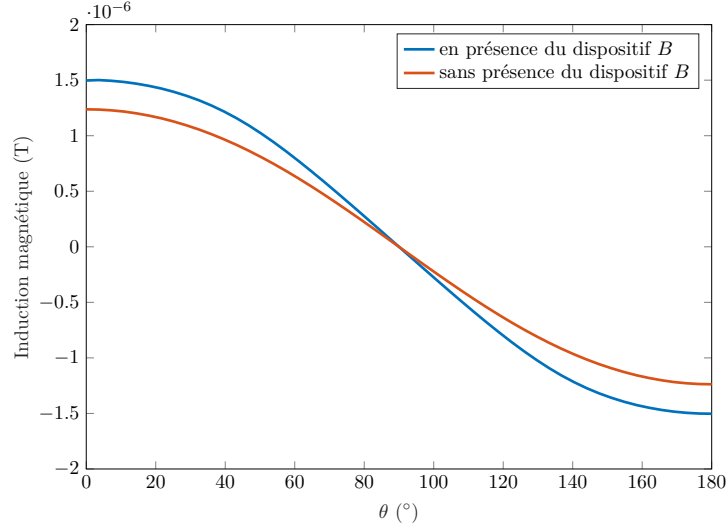


FIGURE 3.17 – Induction magnétique sur le cercle pour une grande boucle de courant

En présence du dispositif  $B$ , l'induction magnétique sur le cercle augmente. En développant les inductions magnétiques en harmoniques sphériques, on trouve que pour  $\mathbf{Q} = (1, 0, -0.14, 0, 0.09)$ , on obtient  $\mathbf{Q}' = (1.24, 0, -0.18, 0, 9.52)$ . Pour chaque source canonique tel que quadripôle, octopôle et etc., une composante harmonique est prépondérante par rapport aux autres. Les inductions magnétiques de ces sources sur le cercle de mesure sont présentées sur la Figure 3.18.

En développant tous les champs en harmoniques sphériques, la matrice  $\mathbf{S}$  dans l'équation (3.63) peut être déterminée. Dans le cas du dispositif  $B$ , on a :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1.58 & 9.41 \cdot 10^{-4} & -0.337 & 6.84 \cdot 10^{-2} & -10.42 \\ 3.3 \cdot 10^{-3} & 1.03 & -1.4 \cdot 10^{-3} & -5.06 \cdot 10^{-2} & 4.19 \cdot 10^{-2} \\ 3.03 & 8.7 \cdot 10^{-3} & -0.468 & 0.624 & -8.81 \\ 0.438 & -9.03 \cdot 10^{-4} & -0.191 & 1.17 & 3.47 \\ 4.36 \cdot 10^{-2} & 4.18 \cdot 10^{-5} & 2.04 \cdot 10^{-2} & 2.9 \cdot 10^{-3} & 1.20 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

$\mathbf{S}$  représente la réponse de la source secondaire du dispositif  $B$  à chaque composante harmonique, jusqu'à l'ordre 5. Avec cette matrice  $\mathbf{S}$ , le développement du dispositif  $A$  en mesure isolée dans la Table 3.6 peut être corrigé. Il suffit d'appliquer la multiplication dans l'équation (3.63) :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \\ &= (10.25, 245.9, 4.63 \cdot 10^3, 7.87 \cdot 10^4, 1.27 \cdot 10^6) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Avec ce développement corrigé, l'inductance mutuelle entre deux dispositifs peut être calculée plus précisément. On obtient :

$$M_{\text{corrigée}}^{\text{isolée}} = 1.12 \cdot 10^{-8} \quad (3.66)$$

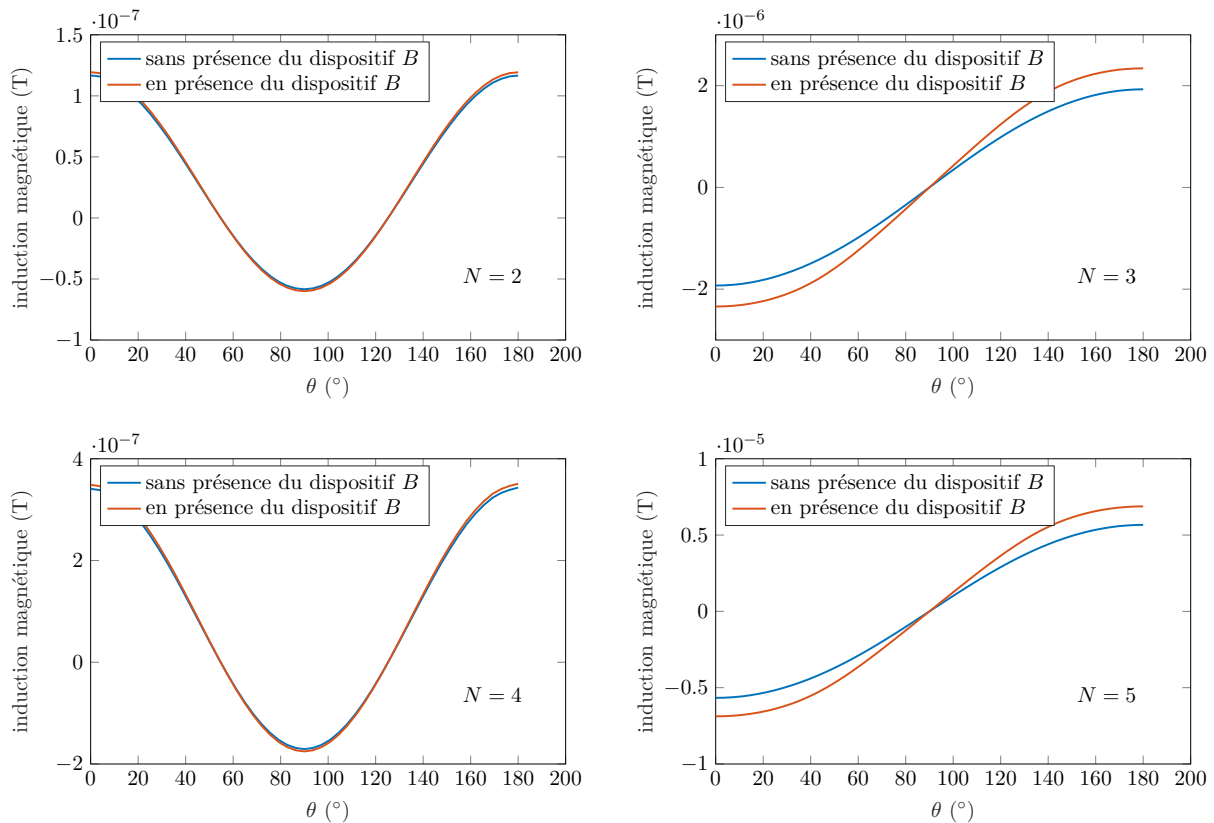


FIGURE 3.18 – Induction magnétique sur le cercle pour chaque source source canonique

L'erreur relative pour pour cette valeur est :

$$\varepsilon = \frac{|M_{AB}^{\text{théorique}} - M_{\text{corrigée}}^{\text{isolée}}|}{M_{AB}^{\text{théorique}}} = \frac{1.13 \cdot 10^{-8} - 1.12 \cdot 10^{-8}}{1.13 \cdot 10^{-8}} \approx 0.9\% \quad (3.67)$$

On peut noter que par rapport à la valeur initiale, avec une erreur de 3.5%, la valeur corrigée de l'inductance mutuelle est plus précise. L'approche pour compenser l'erreur est strictement la même pour les modèles non axi-symétriques, il faut juste considérer toutes les composantes harmoniques, y compris les moments non nuls.

Cette idée de caractériser les sources secondaires est en effet très intéressante, non seulement pour compenser les erreurs engendrées dans les calculs des inductances mutuelles, mais aussi pour optimiser le choix de blindage. Dans [Sch06], l'auteur a proposé une idée très similaire, dans le but de prédire l'atténuation d'un blindage indépendamment de l'amplitude des différents termes de la source. Ceci nécessite la connaissance des réponses du blindage aux différents environnements en harmoniques sphériques. Il a été montré que la réponse du blindage dépend plusieurs paramètres, comme sa forme et le nombre de couches, etc. Par contre, ce qui est plus complexe dans le cas du blindage, c'est qu'il faut considérer les deux types de problèmes : interne et externe.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, une approche est proposée pour choisir l'origine optimale du développement en harmoniques sphériques. Il est aussi montré que les sources secondaires ont un impact sur les calculs des inductances mutuelles. Cependant, il est toujours possible de compenser les erreurs engendrées.

En utilisant les outils montrés dans ce chapitre et le précédent, nous allons maintenant montrer comment obtenir tous les coefficients harmoniques d'un dispositif inconnu. Il est montré dans le chapitre 2 qu'il est possible théoriquement de calculer tous les coefficients en faisant les intégrales de  $\mathbf{B}_r$  sur une sphère. Ceci est néanmoins impossible en pratique. Bien souvent, les identifications des sources doivent être réalisées à partir d'un problème inverse. C'est-à-dire que l'on cherche à déterminer les causes (les coefficients harmoniques) en fonctions des effets (l'induction magnétique mesurée). Le chapitre suivant est consacré à cette question.



# Problème inverse

## 4.1 Introduction du problème inverse

Un problème inverse consiste à déterminer des causes à partir de la connaissance des effets. Il est l'inverse du problème dit direct [Tar04] [RT99]. Comme montré en Figure 4.1, dans le cas du problème inverse, l'objectif est de reconstruire le modèle à partir d'un ensemble de mesures, contrairement au cas du problème direct.

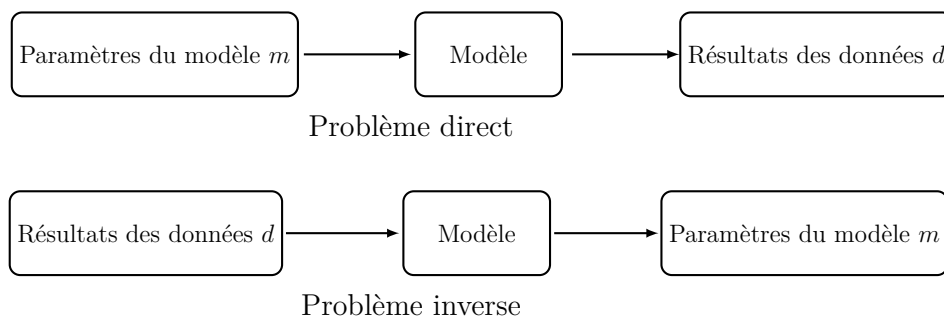


FIGURE 4.1 – Principe des problèmes direct (haut) et inverse (bas)

- Modèle : relation entre les paramètres du modèle et les données ;
- Paramètres du modèle : quantités numériques ou inconnues intrinsèques du modèle que l'on cherche à estimer ;
- Résultats des données : observations ou mesures effectuées sur le modèle.

Avant la résolution d'un problème inverse, la construction du modèle doit être effectuée. Cette étape fondamentale revient à résoudre le problème direct. Cela permet de décrire comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Un problème est bien posé s'il respecte les propriétés suivantes [Hoh02] :

- Il existe une solution au problème (existence) ;
- Il y a une seule solution au problème (unicité) ;
- La solution dépend continuellement des données pour les données continues (stabilité).

Un problème qui n'est pas bien posé est dit mal posé. On reviendra sur ce point après, dans la discussion du problème sous-dimensionné.

Dans notre cas, les paramètres du modèle seront les coefficients en harmoniques sphériques d'une source de rayonnement, les données seront les mesures des champs magnétiques, soit l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ , soit le flux d'induction magnétique  $\Phi$ . Mathématiquement, le problème inverse peut être décrit par :

$$d = G(m) \quad (4.1)$$

où  $G$  représente le modèle, qui est souvent appelé la fonction d'observation,  $d$  est connu,  $m$  est à déterminer. Dans le chapitre 2, il est montré que les grandeurs électromagnétiques peuvent être décomposées sous une somme de coefficients harmoniques et possèdent une dépendance linéaire. Ceci permet de justifier la

linéarité de notre problème. (4.1) peut donc être exprimée sous une forme matricielle :

$$d = G \cdot m \quad (4.2)$$

$d$  et  $m$  sont vecteurs et  $G$  est une matrice, appelée la matrice d'observation. La création de cette matrice est l'étape initiale et fondamentale dans la résolution du problème inverse, qui est complètement dépendant du système de mesures. Dans la section suivante, la résolution du problème inverse avec le banc de mesure dans §1.5.3 sera présenté. Ce banc est basé sur le principe du filtrage spatial.

## 4.2 Système de capteurs circulaires

### 4.2.1 Principe de mesure

Le principe de ce système de mesure est déjà présenté dans la section 1.5.3. La méthode de mesure est basée sur ce qui a été appelé « filtre spatial » par les auteurs de l'article d'origine [VCS<sup>+</sup>08]. Le prototype du système de mesure et son schéma de principe sont présentés en Figure 4.2.

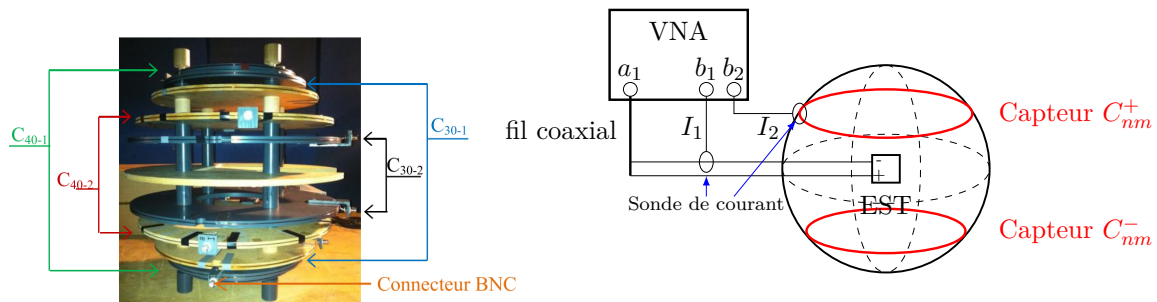


FIGURE 4.2 – Prototype du système de mesure (gauche) et son schéma de principe (droite) [HBV14]

En mesurant le rapport de courants entre la source rayonnante à l'étude, installée sur le plateau central, et un capteur en court-circuit, nous pouvons calculer le flux d'induction magnétique à travers la bobine du capteur, normalisé à 1 A, puis déterminer les coefficients correspondants. Les mesures sont réalisées par un analyseur de réseau vectoriel (VNA) Rohde & Schwarz et des sondes de courant large bande Tektronix P6022. Les appareils de mesures seront présentés dans la partie expérimentale de chapitre 5.

Cette méthode, différente de la mesure ponctuelle, basée sur la mesure du flux d'induction magnétique, est qualifiée de « méthode de mesure intégrale ». Elle offre apparemment des avantages comme la réduction des imprécisions de positionnement, la réduction du nombre de paramètres à estimer et la réduction du temps de mesure [HBV14].

Comme présenté en Figure 4.2, pour chaque composante harmonique, chaque capteur est constitué de deux spires afin de profiter de la caractéristique de symétrie par parité des fonctions harmoniques sphériques. Par conséquent, le flux correspond à la composante  $Q_n^m$  peut être calculé par l'addition ou la soustraction des flux traversant deux capteurs, suivant la parité de l'ordre  $n$  :

$$Flux_{nm}^{total} = \begin{cases} Flux_{nm}^+ - Flux_{nm}^- & \text{si } n \text{ est impair} \\ Flux_{nm}^+ + Flux_{nm}^- & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad (4.3)$$

$Flux_{nm}^+$  et  $Flux_{nm}^-$  sont les flux magnétiques normalisés, mesurés respectivement par les capteurs

$C_{nm}^+$  et  $C_{nm}^-$ , peuvent être calculés par :

$$Flux_{nm}^{+/-} = L_n \cdot \frac{I_2}{I_1} \quad (4.4)$$

avec  $L_n$  l'inductance propre de la spire du capteur  $C_{nm}$ . Ce paramètre est obtenu analytiquement dans [Dur68] :

$$L_n = \mu_0 \cdot r_n \cdot \left( \ln \frac{8r_n}{r_c} - \frac{7}{4} \right) \quad (4.5)$$

avec  $r_n$  le rayon de la spire du capteur et  $r_c$  le rayon du conducteur. Dans ce banc de mesure,  $r_c = 0.6$  mm. Le flux magnétique de la composante  $Q_n^m$  à travers le capteur  $C_{n'm'}$  peut également être calculé par intégration sur la surface de la spire du capteur :

$$\begin{aligned} Flux_{n'm'}^{nm} &= \iint_{S_M} M_{n'}^{m'}(\theta, \varphi) \cdot B_n^m(r_0, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{n} \cdot dS \\ &= \mu_0 \cdot \frac{n+1}{r_0^{n+2}} \cdot Q_n^m \cdot \iint_{S_M} M_{n'}^{m'}(\theta, \varphi) \cdot Y_n^m(\theta, \varphi) dS \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le système de mesure prend la forme d'une sphère d'identification  $S_M$ , avec un rayon  $r_0 = 22.5$  cm.  $M_n^m$  est la fonction de capteur. Alors maintenant, la question qui se pose est : quel modèle pour ce système de mesure et comment résoudre le problème inverse. Pour plus de clarté, un exemple d'ordre 3 est donné dans la suite.

## 4.2.2 Démonstration pour l'ordre 3

(4.6) montre que le flux est associé à la loi d'atténuation en  $\frac{1}{r_0^{n+2}}$ . Pour cette raison, la contribution des ordres élevés devient négligeable lorsque l'on se place assez loin de la source. Une hypothèse très importante pour ce système de mesure est que la source de rayonnement ne possède pas de composantes harmoniques d'ordres plus élevés que 6. C'est-à-dire que les ordres supérieurs ( $7^e$ ,  $8^e$ ,  $9^e$ ...) sont tous négligeables. Le principe pour concevoir le capteur  $C_{30}$  est de calculer la forme du filtrage spatial qui permet d'annuler les composantes des ordres pairs ainsi que la composante d'ordre 5.

Les composantes d'ordres pairs sont éliminées naturellement par la symétrie des fonctions harmoniques sphériques et par la façon de calculer le flux total selon (4.3). Pour commencer, on ne considère que les composantes de moment nul ( $m = 0$ ). Le flux de  $Q_5^0$  à travers le capteur  $C_{30}$  doit être annulé en imposant :

$$Flux_{30}^{50} = \frac{6\mu_0}{r_0^7} \cdot Q_5^0 \cdot \iint_{S_M} M_3^0(\theta, \varphi) \cdot Y_5^0(\theta, \varphi) \cdot dS = 0 \quad (4.7)$$

On obtient au final deux solutions :  $\theta_{3-1} = 40.09^\circ$  et  $\theta_{3-2} = 73.43^\circ$ , la Figure 4.3 montre une vue en coupe avec le lobe de  $Q_5^0$ , que l'on cherche à annuler ici.

Le flux magnétique généré par  $Q_3^0$  à travers le capteur d'ordre 3 est calculé par :

$$Flux_{30}^{30} = 2\mu_0 \cdot \frac{4}{r_0^5} \cdot Q_3^0 \cdot \iint_{S_M} M_3^0(\theta, \varphi) \cdot Y_3^0(\theta, \varphi) \cdot dS \quad (4.8)$$

Alors, les flux à travers les deux capteurs sont respectivement :

$$\begin{cases} Flux_{30-1}^{30} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{r_0^3} \cdot Q_{30} \cdot 0.3995 \\ Flux_{30-2}^{30} = \frac{-4\pi \cdot 10^{-7}}{r_0^3} \cdot Q_{30} \cdot 0.2725 \end{cases} \quad (4.9)$$



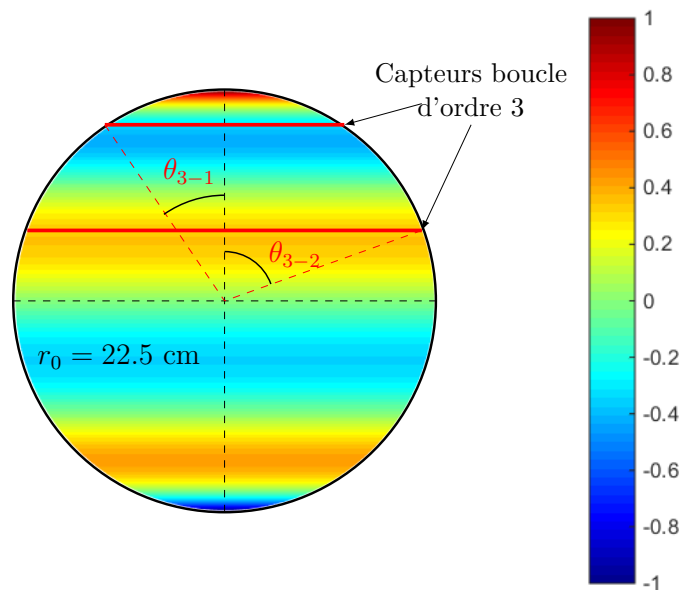


FIGURE 4.3 – Schéma de principe pour calculer la forme du capteur d'ordre 3, la couleur représente la fonction de  $Y_5^0$  dont l'intégrale s'annule à travers chacun des capteurs d'ordre 3

En appliquant le même principe, le flux généré par  $Q_1^0$  à travers les mêmes capteurs sont :

$$\begin{cases} Flux_{30-1}^{10} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{r_0} \cdot Q_{10} \cdot 0.4147 \\ Flux_{30-2}^{10} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{r_0} \cdot Q_{10} \cdot 0.9186 \end{cases} \quad (4.10)$$

De la même façon, les flux à travers le capteur d'ordre 1 peuvent également être calculés. Avec tous ces flux en fonction de l'ordre du développement, l'équation du problème inverse en (4.2) peut s'exprimer comme :

$$\begin{bmatrix} Flux_{10} \\ Flux_{30-1} \\ Flux_{30-2} \end{bmatrix} = \mu_0 \cdot \begin{bmatrix} \frac{0.8}{r_0} & 0 & \frac{-0.29}{r_0^5} \\ \frac{0.41}{r_0} & \frac{0.39}{r_0^3} & 0 \\ \frac{0.92}{r_0} & \frac{-0.27}{r_0^3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1^0 \\ Q_3^0 \\ Q_5^0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Finalement, on peut obtenir un système de 3 équations à 3 inconnues pour les ordres impairs. Ainsi, les trois composantes harmoniques  $Q_1^0$ ,  $Q_3^0$  et  $Q_5^0$  peuvent être déterminées avec trois paires de mesures. De même pour les composantes d'ordres pairs. Ceci nous permet donc de déterminer toutes les composantes harmoniques des ordres inférieurs à 7. L'avantage de ce système de mesure est qu'il permet de déterminer séparément les composantes d'ordre pair et impair et demande peu de mesures. La résolution du problème inverse est aussi très simple.

Cependant, ses inconvénients sont aussi remarquables. Premièrement, une forte hypothèse doit être respectée : la source ne possède pas de composantes d'ordre 7 et supérieurs. Si la source de rayonnement possède aussi des composantes d'ordres élevés, les caractérisations des ordres faibles seront fausses à cause du « repliement ». Deuxièmement, la procédure pour déterminer les composantes de moment non nul est assez complexe. Elle est basée sur les combinaisons linéaires expliquées dans la section 2.7.5. Une centaine de mesures sont nécessaires pour déterminer tous les coefficients harmoniques jusqu'à l'ordre 6.

Enfin, tel qu'il a été conçu, ce banc est difficilement automatisable ; chaque rotation de la source doit

être effectuée à la main, ce qui demande énormément de temps, et introduit aussi beaucoup d'incertitudes sur les positions.

Afin de surmonter toutes ces difficultés, un nouveau banc de mesure automatisé a été conçu et développé au laboratoire Ampère. Il est présenté à la section suivante.

### 4.3 Système de mesure automatisé

Le nouveau banc de mesure est présenté en Figure 4.4 avec son diagramme schématique à droite.

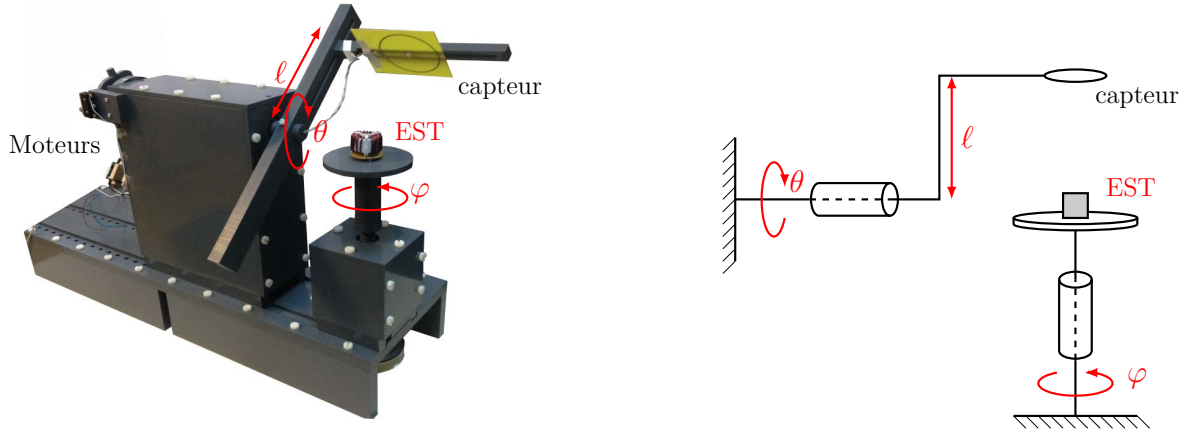


FIGURE 4.4 – Banc de mesure automatisé (gauche) et sa représentation schématique (droite)

Plus de détails sur ce banc de mesure seront donnés au chapitre 5. Nous nous concentrons ici sur le principe du système de mesure, qui est présenté à droite sur la Figure 4.4.

Ce banc permet deux mouvements de rotations via : un bras permet une rotation d'angle  $\theta$  par rapport à l'axe verticale et un support de source tournant autour de l'axe vertical permettant une rotation d'angle  $\varphi$ . L'Équipement Sous Test (EST) est placé au centre du support et est alimenté par le VNA. La hauteur du support peut être réglé pour que l'EST soit toujours centré par rapport à la sphère de mesure. Le rapport de tension entre le capteur et l'EST est mesuré, ce qui permet de déterminer le flux magnétique normalisé à travers le capteur. Le banc de mesure est entouré par des absorbeurs électromagnétiques, qui permettent de réduire le bruit environnemental. Avec ce système, les mesures de champs peuvent être effectuées sur une surface sphérique de rayon  $\ell$ . Cette longueur  $\ell$  peut également être réglée selon la dimension de l'EST et l'ordre du développement exigé.

L'équation du problème inverse peut donc s'exprimer sous une forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}(P_1) \\ \mathbf{B}(P_2) \\ \vdots \\ \mathbf{B}(P_p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\{p \times 1\}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{-1}(P_1) & A_1^0(P_1) & A_1^1(P_1) & A_2^{-2}(P_1) & \cdots & A_N^N(P_1) \\ A_1^{-1}(P_2) & A_1^0(P_2) & A_1^1(P_2) & A_2^{-2}(P_2) & \cdots & A_N^N(P_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^{-1}(P_p) & A_1^0(P_p) & A_1^1(P_p) & A_2^{-2}(P_p) & \cdots & A_N^N(P_p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\{p \times (N^2+2N)\}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1^{-1} \\ Q_1^0 \\ Q_1^1 \\ Q_2^{-2} \\ \vdots \\ Q_N^N \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_{\{(N^2+2N) \times 1\}}} \quad (4.12)$$

avec :

- $P$  :  $p$  points de mesure ;
- $\mathbf{B}$  : mesures en ces points (soit le flux magnétique, soit l'induction magnétique ponctuelle) ;
- $N$  : ordre maximal du développement multipolaire ;

- $\mathbf{Q}$  : ensemble des coefficients harmoniques à déterminer ;
- $\mathbf{A}$  : matrice d'observation, qui représente le modèle qui relie les « causes » et les « effets ».  $A_n^m(P_i)$  représente le champ généré par la composante  $Q_n^m$  sur le point  $P_i$ .

Le nombre d'inconnus de ce problème inverse est  $(N^2 + 2N)$  et le nombre d'équations est  $p$ . Avant la résolution de ce problème inverse, il faut vérifier si le problème est bien posé : y a-t-il existence, unicité, et stabilité de la solution (section 4.1) ?

L'existence n'est pas vraiment un problème, parce que même si les mesures sont de très mauvaise qualité et entachées de bruit, on peut en pratique toujours trouver une solution qui conduit à une modélisation assez proche des observations, accompagnée d'une incertitude. Par contre, les vérifications de l'unicité et de la stabilité exigent plus de prudence. Pour ce faire, on a besoin de quelques outils mathématiques qui sont présentés dans la section suivante.

## 4.4 Outils mathématiques du diagnostic

Dans cette section, nous allons présenter trois outils précieux qui permettent de diagnostiquer la qualité de l'identification. Ils permettent d'une part de dénombrer les coefficients identifiables, d'autre part d'évaluer la stabilité du système et la qualité de la résolution. Ces trois outils sont respectivement : le rang, le conditionnement et le résidu.

### 4.4.1 Rang

Notre problème inverse consiste à résoudre le système linéaire avec si possible autant d'équations que d'inconnues. Il est à noter que la solution ne peut pas être unique lorsqu'il n'y a pas assez d'équations. Ceci signifie que le problème est mal posé. Par contre, le nombre d'équations, ou d'informations n'est pas simplement relié au nombre de mesures ou nombre d'équations, parce qu'une mesure peut probablement être considérée comme la combinaison des autres, cette mesure n'est donc pas une information utile pour la résolution. Pour les systèmes linéaires comme dans notre cas, le rang du système représente le nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire le nombre d'informations utiles.

Le rang d'un système linéaire est le rang de sa matrice d'observation  $\mathbf{A}$ , qui est aussi le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants. Il peut être déterminé via la méthode de Gauss-Jordan [AM87]. Pour conclure, si le rang de la matrice  $\mathbf{A}$  est inférieur au nombre d'inconnues  $N_{max}^2 + 2N_{max}$  (avec  $N_{max}$  l'ordre maximal du développement), le problème est donc sous-déterminé. Il possède alors plusieurs solutions possibles. Cet outil permet de vérifier le deuxième critère d'un problème bien posé : l'unicité. On peut l'appliquer de deux façons : soit il nous permet de vérifier que les mesures sont toutes indépendantes, soit à partir d'une série de mesures, il nous permet de déterminer le nombre d'inconnues identifiables.

### 4.4.2 Conditionnement

Le troisième critère d'un problème bien posé est la stabilité. Cela peut être estimée par un outil mathématique qui s'appelle le conditionnement, qui est notamment introduit comme un indicateur de la sensibilité de la solution aux perturbations des données [Tak13] [Gra14]. Un exemple sera donné par la suite pour rendre cette notion plus intuitive.

Reprenons notre système linéaire à résoudre (4.12) et supposons que la matrice d'observation  $\mathbf{A}$  soit inversible. Le problème peut être facilement résolu en calculant :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{4.13}$$

On suppose maintenant que le système  $\mathbf{A}$  et la donnée  $\mathbf{B}$  sont soumises à des perturbations  $\Delta\mathbf{A}$  et  $\Delta\mathbf{B}$ . La perturbation  $\Delta\mathbf{Q}$  résultante satisfait l'équation :

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) = \mathbf{B} + \Delta\mathbf{B} \quad (4.14)$$

Après le développement, on obtient :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} + \Delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{Q} = \mathbf{B} + \Delta\mathbf{B} \quad (4.15)$$

Supposons que le terme du deuxième ordre  $\Delta\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{Q}$  soit négligeable, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{Q} &= \Delta\mathbf{B} - \Delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} \\ \Rightarrow \Delta\mathbf{Q} &= \mathbf{A}^{-1}(\Delta\mathbf{B} - \Delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Soit  $\|\cdot\|_2$  le norme Euclidienne ou sa norme matricielle induite, définie comme :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_2 &= \sup\{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \text{ avec } \|\mathbf{x}\|_2 = 1\} \\ &= \sigma_{max}(\mathbf{A}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

avec  $\mathbb{K}$  l'ensemble des réels ou complexes.  $\sigma(\mathbf{A})$  représente le vecteur des valeurs singulières de  $\mathbf{A}$ . Ainsi, calculer la norme euclidienne d'une matrice revient à chercher sa valeur singulière maximale. Puisque  $\mathbf{A}$  est inversible,  $\mathbf{B} \neq 0$  implique que  $\mathbf{Q} \neq 0$ , on a donc :

$$\frac{\|\Delta\mathbf{Q}\|_2}{\|\mathbf{Q}\|_2} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \cdot \left( \|\Delta\mathbf{A}\|_2 + \frac{\|\Delta\mathbf{B}\|_2}{\|\mathbf{Q}\|_2} \right) \quad (4.18)$$

Or  $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$  implique  $\|\mathbf{B}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{Q}\|_2$ , on a donc :

$$\frac{1}{\|\mathbf{Q}\|_2} \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_2}{\|\mathbf{B}\|_2} \quad (4.19)$$

En combinant les équations (4.18) et (4.19), on peut obtenir :

$$\frac{\|\Delta\mathbf{Q}\|_2}{\|\mathbf{Q}\|_2} \leq \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \cdot \left( \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2} + \frac{\|\Delta\mathbf{B}\|_2}{\|\mathbf{B}\|_2} \right) \quad (4.20)$$

Cette équation relie l'erreur relative de la solution et les erreurs relatives des deux entrées : le modèle  $\mathbf{A}$  et la donnée  $\mathbf{B}$ . Autrement dit, le facteur  $\|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2$  représente l'amplification des perturbations  $\Delta\mathbf{A}$  et  $\Delta\mathbf{B}$  sur  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , en normes relatives. Ce facteur est donc défini comme le conditionnement de la matrice :

$$cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{max}(\mathbf{A})}{\sigma_{min}(\mathbf{A})} \quad (4.21)$$

L'importance de ce coefficient est évident. Quand il est trop grand, d'une part cela signifie que la valeur de sortie du système (les coefficients harmoniques) pourrait énormément varier avec un petit changement dans les arguments d'entrée (tels que les mesures). D'autre part, cela signifie que parmi toutes les mesures, certaines ne portent aucune information dans les calculs. Dans ces cas, le système n'est donc pas stable et le problème n'est pas bien posé. Quelques propriétés générales du conditionnement sont données ci-dessous :

Pour n'importe quelle matrice  $\mathbf{A}$  inversible, on a :

1.  $cond(\mathbf{A}) \geq 1$
2.  $cond(\alpha\mathbf{A}) = cond(\mathbf{A})$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

3.  $\text{cond}(\mathbf{A}^{-1}) = \text{cond}(\mathbf{A})$
4. Soient  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  deux matrices inversibles de la même dimension, alors
 
$$\text{cond}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \cdot \text{cond}(\mathbf{B})$$

En fait, le conditionnement nous permet non seulement de vérifier si le système est stable, mais aussi de choisir les meilleurs points de mesures. Ceci sera détaillé après.

### 4.4.3 Notions de statistiques

Une expression chinoise connue dit : " 梦想总是美好的, 现实总是残酷的 (L'idéal est beau, la réalité est toujours cruelle)". En fait, aucune information expérimentale est certaine. Afin d'analyser ces mesures incertaines, les notions de statistiques doivent être introduites. La statistique est l'étude des variations observables, elle constitue également l'ensemble des méthodes permettant de réunir les données chiffrées sur les grands ensembles, puis à les analyser et les interpréter [Jou13], [Bac10]. Des études approfondies en statistiques ont été faites depuis longtemps et l'objectif de cette section est juste rappeler les notions essentielles en statistiques qui sont utiles dans ce travail, telles que la moyenne, l'écart-type, l'intervalle de confiance, etc.

#### 4.4.3.1 Moyenne et écart-type

Supposons que  $N$  mesures indépendantes sont effectuées sur une variable quantitative  $x$  et on observe :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ . La moyenne de cette série de mesures, plus précisément, la moyenne arithmétique de cette série de mesure est notée par  $\bar{x}$ . Elle est définie comme :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4.22)$$

Il existe aussi d'autres types de moyennes, telles que la moyenne quadratique et la moyenne géométrique, qui ne seront pas discutées dans ce document. Ainsi, dans ce document, la « moyenne » représente la moyenne arithmétique.

La variance de la variable quantitative  $x$ , noté par  $\text{Var}(x)$ , est définie comme la moyenne des carrés des écarts à la moyenne :

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (4.23)$$

Un autre type d'estimateur couramment utilisé pour la variance est :

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (4.24)$$

Le facteur  $(N-1)$  vient du fait que la formule utilise  $\bar{x}$  et qu'il n'est pas possible d'estimer l'écart-type d'une distribution à partir d'une seule mesure. En probabilités, il est commun de relier la moyenne (appelé aussi l'espérance mathématique) et la variance avec la fonction de masse, qui donne la probabilité d'un résultat élémentaire d'une expérience. On a :

$$\begin{cases} \mathbb{E} = \sum_{i=1}^N x_i f(x_i) \\ \text{Var}(x) = \mathbb{E}((x - \bar{x})^2) \end{cases} \quad (4.25)$$

$f(x)$  représente la fonction de masse de la variable  $x$ . Il faut noter qu'elle se distingue de la densité

de probabilité en ceci que les densités de probabilité ne sont définies que pour des variables aléatoires absolument continues, et que c'est leur intégrale sur un domaine qui a valeur de probabilité.

L'écart-type de la variable  $x$ , noté par  $\sigma_x$ , est défini comme la racine carrée de sa variance :

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(x)} \quad (4.26)$$

Pourquoi la moyenne et l'écart-type sont-ils deux outils extrêmement intéressants dans ces travaux ? Comme déjà expliqué plus haut, les mesures ne sont pas toujours identiques d'une fois à l'autre, même si les conditions de mesures semblent identiques. Pour prendre en compte cette incertitude, on écrit :

$$x_i = x_e + \delta_x \quad (4.27)$$

avec :

- $x_i$  : valeur observée ;
- $x_e$  : valeur exacte (inconnue) ;
- $\delta_x$  : incertitude de mesure.

En pratique, la valeur exacte d'une grandeur n'est pas connue. Il est habituel de prendre la moyenne  $\bar{x}$  comme estimation de  $x_e$ . Ainsi, la valeur de  $x$  se trouve « probablement » dans l'intervalle allant de  $\bar{x} - \delta_x$  à  $\bar{x} + \delta_x$ . L'écriture traditionnelle rapportant la mesure d'une grandeur physique  $x$  est :

$$x = \bar{x} \pm \delta_x \quad (4.28)$$

L'incertitude  $\delta_x$  sera par la suite reliée à l'écart-type  $\sigma_x$ .

#### 4.4.3.2 Loi normale et intervalle de confiance

[Gup12] dit que « In a metrology laboratory, measurements are carried out assuming that measuring instruments are unbiased; hence all measured values derived from the observations of the measuring instrument belong to a normal distribution »<sup>1</sup>. Le théorème de la limite centrale montre que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une certaine variable aléatoire ; sous la condition que le nombre d'échantillons est suffisamment important, la loi de probabilité associée converge vers une loi normale, appelée aussi la loi gaussienne.

Intuitivement, la loi normale est la loi de base permettant d'interpréter statistiquement les résultats obtenus à partir des mesures. Dans ce travail, on fera souvent l'hypothèse que toutes les variables à mesurer possèdent une loi normale.

La Figure 4.5 donne la densité de probabilité de la loi normale. Évidemment, sa répartition dépend de l'espérance  $\bar{x}$  et l'écart-type  $\sigma$ .

En effet, la densité de probabilité de la loi normale est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.29)$$

Lorsque  $\bar{x}$  et  $\sigma^2 = 1$ , on parle de loi normale standard. L'intérêt principal de la loi normale est qu'elle permet une formulation matricielle simple dans la résolution du problème, qui permet de largement réduire les calculs. Il permet d'extraire des renseignements significatifs sur les hypothèses, mesures et paramètres estimés. En outre, la loi normale nous permet de déterminer les « intervalles de confiance ».

---

1. Dans un laboratoire de métrologie, les mesures sont effectuées en supposant que les instruments de mesure ne sont pas biaisés ; par conséquent, toutes les valeurs mesurées dérivées des observations de l'instrument de mesure appartiennent à une distribution normale

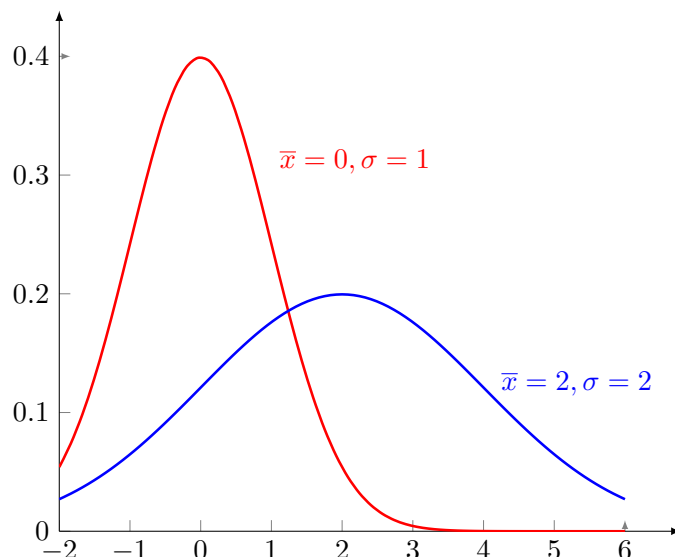


FIGURE 4.5 – Densité de probabilité de la loi normale

Un « intervalle de confiance » est un type d'estimation d'intervalle qui est calculé à partir des données observées. Les intervalles de confiance consistent en une gamme de valeurs (intervalle) qui agissent comme de bonnes estimations du paramètre observé. Le niveau de confiance représente la probabilité que l'intervalle contienne la valeur réelle. En effet, l'intervalle calculé à partir d'un échantillon particulier n'inclut pas nécessairement la valeur réelle du paramètre. Comme les données observées sont des échantillons aléatoires autour de la valeur réelle, l'intervalle de confiance obtenu à partir des données est également aléatoire. Concernant la loi normale dans notre cas, on utilise souvent 3 intervalles caractéristiques, présentés sur la Figure 4.6.

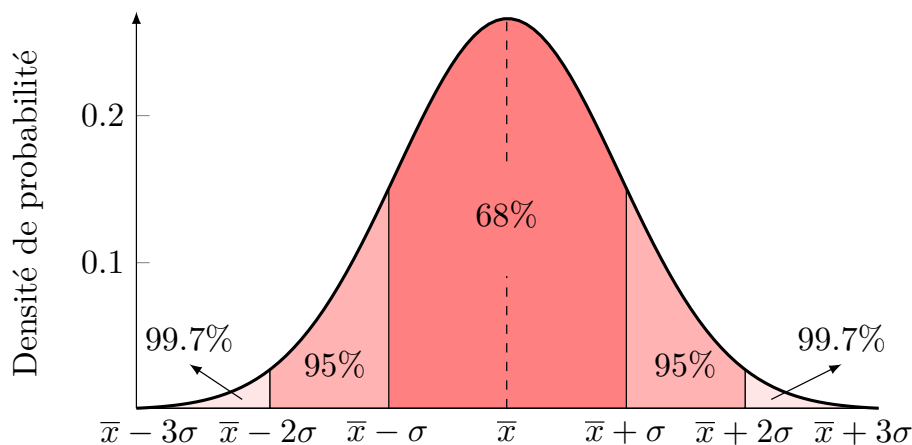


FIGURE 4.6 – Intervalles de confiance de la loi normale

On a :

- $P(\bar{x} - \sigma \leq x \leq \bar{x} + \sigma) = 0.68$  ;
- $P(\bar{x} - 2\sigma \leq x \leq \bar{x} + 2\sigma) = 0.95$  ;
- $P(\bar{x} - 3\sigma \leq x \leq \bar{x} + 3\sigma) = 0.997$  ;

Ces intervalles de confiance nous permettent aussi de formuler la règle de décision pour une nouvelle mesure, qui suit la même loi que les précédentes. Si la mesure est dans l'intervalle de confiance, elle peut être considérée comme raisonnable, sinon elle doit être discutée ou même rejetée.

#### 4.4.4 Résidu

Un autre indicateur de qualité de la résolution du problème inverse linéaire est le résidu, qui représente la différence entre les valeurs estimées et les observations. Comme déjà mentionné, toutes les mesures possèdent une incertitude. Dans ce travail, on suppose que les distributions de ces incertitudes sont symétriques, plus précisément suivent une loi normale et chaque mesure est indépendante des autres.

Pour notre problème, défini par l'équation (4.12), le résidu  $\mathbf{R}$  est défini comme :

$$\mathbf{R} = \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{Q}} \quad (4.30)$$

avec  $\hat{\mathbf{Q}}$  les coefficients harmoniques calculés via la résolution du problème inverse. Dans le cas idéal et avec un nombre de mesures infini, la moyenne du résidu  $\mathbf{R}$  est égale à zéro.

Le résidu est un outil très important dans ces travaux pour deux raisons principales. D'un côté, il nous permet d'optimiser le modèle. La moyenne ou l'écart-type du résidu peuvent être calculés, caractérisant la qualité de résolution du problème. Si la moyenne est très loin de zéro ou l'écart-type trop grand, ceci montre que le modèle est mal choisi, il faut probablement augmenter l'ordre du développement. Les détails pour choisir un ordre optimal du développement seront présentés dans la section suivante. D'autre part, cet outil nous permet de détecter les mesures aberrantes. Si le résidu d'une mesure est beaucoup plus important que les autres, on peut en déduire que cette mesure est très probablement aberrante et qu'elle doit être rejetée.

## 4.5 Résolution du problème inverse

### 4.5.1 La méthode des moindres carrés

Pour calculer les coefficients harmoniques  $\mathbf{Q}$  du problème inverse (4.12), l'idée la plus naturelle est d'inverser la matrice  $\mathbf{A}$ . Cependant, le nombre d'équations n'est pas toujours égal au nombre d'inconnues, c'est-à-dire que la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas toujours inversible. Dans le cas d'un système linéaire, la méthode la plus couramment utilisée est la méthode de moindres carrés [WK71]. Elle cherche à calculer la solution  $\hat{\mathbf{Q}}$  telle que la distance entre le modèle  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{Q}}$  et la mesure  $\mathbf{B}$  soit minimale :

$$\|\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{B}\|_2 = \min(\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{B}\|_2, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n) \quad (4.31)$$

$\hat{\mathbf{Q}}$  est donc la solution de la méthode des moindres carrés. On peut facilement noter que ce qui est minimisé dans la méthode des moindres carrés est justement la somme des carrés des résidus. Cela confirme également que le résidu est un bon outil pour diagnostiquer la qualité de l'estimation.

Plusieurs moyens existent pour obtenir la résolution aux moindres carrés des problèmes linéaires [Dem97] :

1. Équations normales
2. Décomposition QR
3. Décomposition en valeurs singulières

La première méthode est la plus rapide mais la moins précise. Il est adéquat lorsque le conditionnement est petit. La deuxième méthode est la méthode standard, cependant elle coûte deux fois plus cher que la première. La troisième méthode est souvent utilisée pour les problèmes mal conditionnés, son coût est encore supérieur. Dans notre cas, avec un conditionnement peu élevé, la première méthode possède une précision proche des deux autres. Cette dernière est donc utilisée dans cette étude pour sa rapidité et sa



simplicité. Elle sera détaillée par la suite. Plus de détails sur les deux autres méthodes et des comparaisons entre les trois sont donnés dans [Dem97].

Pour les problèmes surdéterminés, la solution de l'équation normale est [Pin14] :

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \quad (4.32)$$

Lorsque le problème est sous-déterminé, la solution est donc :

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (4.33)$$

Il faut noter que le problème sous-déterminé possède un conditionnement extrêmement important ; la solution n'est donc pas du tout stable. Comme mentionné précédemment, les mesures sont toujours accompagnées par les incertitudes. Comment ces incertitudes de mesures influencent les coefficients harmoniques calculés ? Afin de répondre à cette question, une étude sur la propagation des incertitudes doit être effectuée.

## 4.5.2 La propagation des incertitudes de la méthode de moindres carrés

### Incertitudes des mesures de flux d'induction magnétique

L'équation (4.28) a proposé une possibilité d'estimer la mesure sous une forme d'intervalle. L'écart-type  $\sigma_x$  est la meilleure estimation d'incertitude de mesure avec une intervalle de confiance de 68% [BB08]. C'est-à-dire qu'il y a 68% de probabilité qu'une mesure  $x_i$  se situe dans l'intervalle  $x \pm \sigma_x$ . Quelle est l'incertitude sur la détermination de la valeur  $x$  à partir de la moyenne de  $n$  mesures ? Autrement dit, quelle est l'incertitude sur la moyenne  $\bar{x}$  ? L'écart-type de la moyenne  $\bar{x}$  est approximé par [Tay00] :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (4.34)$$

Cette détermination est donc  $\sqrt{n}$  fois plus précise que celle obtenue à partir d'une mesure unique. Dans la pratique,  $\sqrt{n}$  croît très lentement et pour améliorer la précision d'un facteur 10, il faut effectuer 100 fois plus de mesures. Ainsi, pour la loi normale avec un niveau de confiance de 68%, le résultat final obtenu à partir de  $n$  mesures est :

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} \quad (4.35)$$

Cependant, cette approximation de  $\sigma_{\bar{x}}$  à  $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$  n'est valable qu'asymptotiquement pour les grandes valeurs de  $n$ . On ne peut l'utiliser si on effectue une moyenne pour un petit nombre de mesures. Dans ce cas, il faut ajouter un coefficient qui s'appelle *le coefficient de Student*. L'écart-type de la moyenne s'écrit comme :

$$\sigma_{\bar{x}} = t \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (4.36)$$

Le coefficient de Student  $t$  est donné dans la Table 4.1.

Avec la moyenne et l'écart-type d'une variable, on peut estimer les valeurs de mesures sur chaque position par une écriture d'un intervalle, soit la moyenne, soit la valeur d'une seule mesure. Alors, quelles sont les incertitudes des coefficients harmoniques ?

Nombre de mesure $n$	2	3	4	5	6	10	20	40	$\infty$
Coefficient de Student $t$	1.84	1.32	1.2	1.14	1.11	1.06	1.03	1.01	1.00

TABLE 4.1 – Coefficient de Student

### Incertitudes des coefficients harmoniques

Supposons une fonction  $q = f(x, y, \dots)$ , la formulation de la propagation d'incertitude est donnée par [BB08] [Tay00] :

$$\delta q = \sqrt{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 (\delta x)^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 (\delta y)^2 + \dots} \quad (4.37)$$

Cette formulation est valide dans le cas où les incertitudes sont relativement petites et où le système est linéaire, ce qui correspond parfaitement à notre problème. Il est important de noter que  $\delta q$  correspond au même niveau de probabilité que toutes les variables  $\delta x, \delta y, \dots$ . Par contre, une forte hypothèse de cette formulation est que les variables sont toutes indépendantes. Sinon, l'inégalité non quadratique suivante doit être appliquée :

$$\delta q \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta y + \dots \quad (4.38)$$

L'incertitude est surestimée dans cette inégalité, mais les calculs sont beaucoup plus simples car une écriture matricielle est possible. Pour notre problème surdéterminé de la méthode des moindres carrés (4.32), l'hypothèse habituelle est que le modèle est exact et les mesures incertaines, ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_0 + \delta \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B} \quad (4.39)$$

$\mathbf{Q}_0$  représente l'estimation des coefficients harmoniques sans incertitudes et  $\delta \mathbf{B}$  représente l'incertitude de mesure. En pratique,  $\delta \mathbf{B}$  peut être déterminé par une répétition de mesure avec le coefficient de Student. En appliquant la méthode des moindres carrés, on obtient :

$$\widehat{\mathbf{Q}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}) \quad (4.40)$$

En combinant avec l'équation (4.38), on obtient :

$$\delta \mathbf{Q} \leq \text{abs}((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T) \cdot \delta \mathbf{B} \quad (4.41)$$

où  $\text{abs}(\mathbf{X})$  représente la valeur absolue d'une matrice  $\mathbf{X}$ , c'est-à-dire la valeur absolue de chaque élément :

$$\text{abs}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} |x_{11}| & |x_{12}| & \dots & |x_{1n}| \\ |x_{21}| & |x_{22}| & \dots & |x_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |x_{m1}| & |x_{m2}| & \dots & |x_{mn}| \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

L'équation (4.41) donne l'incertitude des coefficients harmoniques calculés par la méthode des moindres carrés, en fonction de l'incertitude de mesure, qui est déterminée par des répétitions de mesures.  $\delta \mathbf{Q}$  est surestimée, mais ceci n'est pas vraiment un problème, il signifie seulement que la probabilité que la vraie valeur se situe dans l'intervalle de confiance est encore plus grande. Il faut aussi noter que plus le nombre de répétitions est grand, mieux  $\delta \mathbf{B}$  est estimée, et plus  $\delta \mathbf{Q}$  est calculée correctement.

Par contre, toute l'approche est basée sur les répétitions de mesures, qui exige beaucoup de temps.

En plus, tous les mouvements du banc sont réalisés par deux moteurs pas à pas dont la précision est déjà connue. Le moteur sera présenté dans le chapitre 5, ici on a seulement besoin de savoir que chaque position de mesure possède une incertitude (par exemple  $\delta = 0.1^\circ$ ). L'incertitude  $\delta\mathbf{A}$  sur la matrice d'observation peut donc être calculée, sous les hypothèses suivantes :

- Les mesures sont indépendantes entre elles ;
- Le bruit d'environnement peut être éliminé par une moyenne (ce qui sera détaillé dans le chapitre 5) ;
- Les incertitudes de positions de mesures sont suffisamment petites.

Au lieu de considérer que chaque mesure possède une incertitude, comme présenté précédemment, on suppose maintenant que toutes les mesures sont exactes et l'erreur vient toujours du modèle (la matrice d'observation). L'idée est de caractériser la précision du banc. Dans ce cas, avec seulement une série de mesure, les coefficients harmoniques peuvent être déterminés avec également leur incertitudes, aucune répétition n'est donc nécessaire. D'un autre point de vue, cette approche permet de rendre utiles les informations sur les équipements du banc, telles que les précisions des moteurs et la longueur du bras. Les calculs sont donnés par la suite.

Les mesures  $\mathbf{B}$  sont considérées exactes et la matrice d'observation possède une incertitude  $\delta\mathbf{A}$ . Le problème s'écrit donc sous la forme :

$$(\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{B} \quad (4.43)$$

En appliquant la méthode de moindres carrés, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \\ &= [(\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A})^T (\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A})]^{-1} \cdot (\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.44)$$

A cause de l'inversion de la matrice, il est extrêmement complexe de calculer  $\delta\mathbf{Q}$  analytiquement. [HM72] a proposé une approximation sous forme linéaire. En développant  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , on obtient :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0}_{\mathbf{X}} + \underbrace{(\delta\mathbf{A}^T \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \delta\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}^T \delta\mathbf{A})}_{\mathbf{Y}} \quad (4.45)$$

Sous l'hypothèse que  $\delta\mathbf{A}$  est petit devant  $\mathbf{A}_0$ , l'auteur développe  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$  comme :

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1} \dots \quad (4.46)$$

En négligeant tous les termes de  $\delta\mathbf{A}^2$  et supérieur, il obtient finalement :

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_0 + (\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0)^{-1} \cdot \delta\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{A}_0 \mathbf{Q}_0) - (\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0)^{-1} \cdot \mathbf{A}_0^T \cdot \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_0 \quad (4.47)$$

$\mathbf{Q}_0$  sont les coefficients harmoniques calculés sans incertitudes, définis comme  $\mathbf{Q}_0 = (\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{A}_0^T \mathbf{B}$ . De la même manière,  $\delta\mathbf{Q}$  peut être déterminé :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{Q} &\leq \text{abs} \left( (\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0)^{-1} \right) \cdot \delta\mathbf{A}^T \cdot \text{abs} ((\mathbf{B} - \mathbf{A}_0 \mathbf{Q}_0)) \\ &\quad + \text{abs} \left( (\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0)^{-1} \cdot \mathbf{A}_0^T \right) \cdot \delta\mathbf{A} \cdot \text{abs} (\mathbf{Q}_0) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Cette incertitude est surestimée. Cela permet de caractériser les précisions des coefficients harmoniques calculés à partir d'une série de mesures avec notre banc automatisé. Si le banc de mesure est bien calibré, c'est-à-dire que ses incertitudes de positions de mesures sont bien estimées, le  $\delta\mathbf{Q}$  obtenu avec cette approche doit correspondre à celui obtenu à partir de  $\delta\mathbf{B}$ , avec bien sûr un très grand nombre de répétitions.

### 4.5.3 Choix de l'ordre maximal du développement

Lorsqu'aucune information a priori n'est disponible pour la source à étudier, il est impossible de choisir a priori l'ordre maximal du développement  $N_{max}$ . Dans ce cas, on ne peut qu'estimer les champs magnétiques autour de la source, soit par la modélisation, soit par la mesure. Ensuite, à partir de ces données, il est possible de choisir l'ordre maximal du développement en harmoniques sphériques. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour cela, nous les présentons l'exemple d'une bobine torique (Figure 4.7).

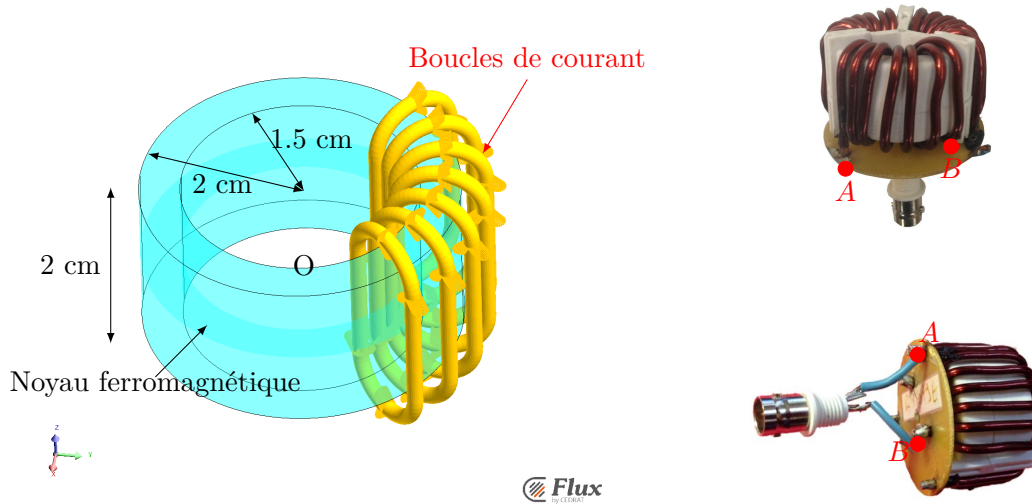


FIGURE 4.7 – Bobine torique étudiée

La bobine torique est la même que celle sur la Figure 1.8, cependant seul un tiers du tore est alimenté. La partie bleue représente le noyau ferromagnétique, avec une permittivité relative de 1000. Les boucles de courant sont toutes identiques et entourent régulièrement le noyau. Des simulations sont effectuées sous *Flux3D* et les inductions magnétiques normales sont calculées sur une sphère autour du dispositif (Figure 4.8).

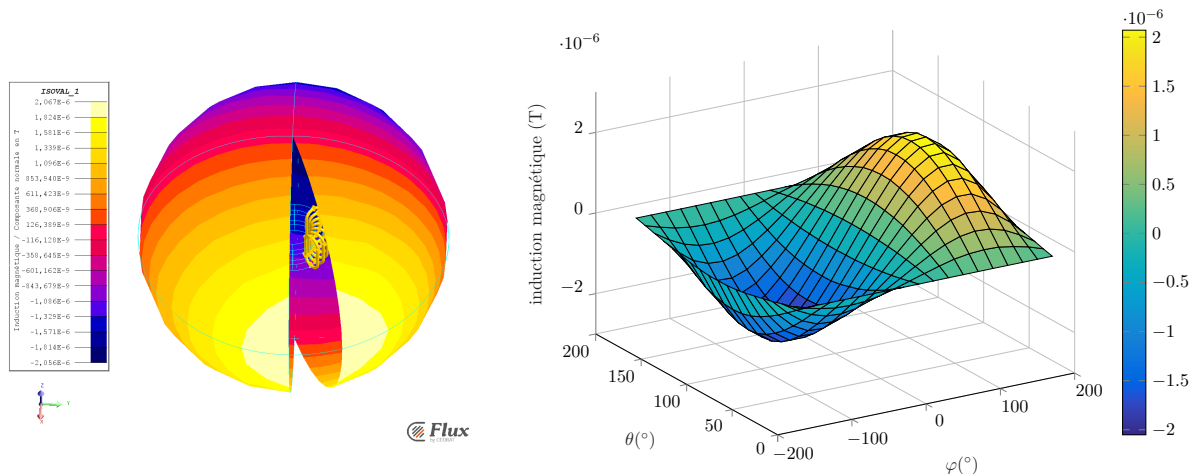


FIGURE 4.8 – Induction magnétique normales sur une sphère de mesure ( $r = 10$  cm) autour du dispositif

La sphère de mesure possède un rayon de 10 cm et les points de calcul se répartissent d'une façon equi-angulaire avec un pas de  $10^\circ$  et  $20^\circ$  suivant  $\theta$  et  $\varphi$ . Le choix des points de mesures sera discuté dans la section suivante. Dans cette simulation, le nombre de mesures est  $19 \times 18 = 342$ . Les inductions

magnétiques normales calculées, en ces points, sont tracées sur la Figure 4.8, en 3D et aussi en 2D surfacique.

### Erreur quadratique relative

Le calcul de l'inductance mutuelle entre ce dispositif et un autre, peut se baser sur le développement de ce champ en harmoniques sphériques. Une idée proposée dans [LLWF10] est de comparer l'erreur quadratique relative, qui est définie par :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_1^N (\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}})^2}{\sum_1^N \mathbf{B}^2}} \quad (4.49)$$

avec  $\hat{\mathbf{B}}$  les inductions magnétiques estimées aux  $N$  points qui sont mesurés pour un ordre maximal  $N_{max}$  donné du développement harmonique.

Si on commence le calcul de  $\varepsilon$  à partir de  $N_{max} = 1$ , on obtient :

$N_{max}$	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon(\%)$	9.35	1.34	0.1	0.098	0.097	0.096

TABLE 4.2 – Erreur quadratique relative en fonction de l'ordre maximal du développement

A partir de la table, on peut constater qu'en augmentant  $N_{max}$ , cette erreur continue à diminuer et converge vers une valeur minimale. L'intuition nous indique que  $N_{max} = 3$  est peut-être le meilleur choix car à partir de cet ordre, l'erreur diminue beaucoup moins vite qu'avant. Cependant, cette méthode n'est pas rigoureuse et elle n'est plus évidente lorsque la source possède une composante d'ordre élevé.

### Écart-type du résidu

Le résidu est un bon outil pour vérifier la qualité d'estimation. Il sera égal à zéro dans le cas idéal où les mesures sont toutes exactement reconstruites. Par conséquent,  $N_{max}$  est la plus petite valeur telle que le résidu  $\mathbf{R}$  contient uniquement les effets des bruits de mesures. Dans cette situation, l'écart type du résidu, noté  $\sigma_{\mathbf{R}}$ , représentera l'incertitude de mesure, incluant les incertitudes de positions et le bruit d'environnement.

L'idée est tout d'abord estimer le bruit d'environnement à partir de la série de mesure. Ensuite, il faut calculer l'écart-type du résidu en augmentant l'ordre du développement. Bien sûr  $\sigma_{\mathbf{R}}$  diminuera en fonction de  $N_{max}$ . Ce processus itératif s'arrêtera lorsque  $\sigma_{\mathbf{R}}$  sera plus petit que le bruit d'environnement. Le  $N_{max}$  correspondant est alors l'ordre maximal optimal du développement.

Expérimentalement, ce bruit d'environnement peut être évalué avec une mesure à vide. Dans notre simulation sous *Flux3D* pour la bobine torique, le bruit provient du maillage, qui peut aussi être estimé.

Les inductions magnétiques sont tracées en fonction  $\varphi$  pour les différentes valeurs de  $\theta$  données sur la Figure 4.9. Le dispositif étudié est parfaitement anti-symétrique par rapport au plan YoZ, ceci conduit au fait que son induction magnétique est anti-symétrique à  $\varphi = 0^\circ$  pour un  $\theta$  donné. Par exemple les deux points en Figure 4.9 devraient partager le même module. Grâce à la symétrie de la source, le bruit peut être estimé :  $\varepsilon \simeq 10^{-8}$

L'étape suivante consiste à estimer l'écart-type du résidu en fonction de  $N_{max}$ . Ses valeurs sont données par la Table 4.3.

On constate que cet écart-type possède la même tendance que l'erreur quadratique relative : il décroît jusqu'à l'ordre 3, puis est stable pour les ordres supérieurs. En plus, à partir de l'ordre 3,  $\sigma_{\mathbf{R}}$  est inférieur au bruit estimé ( $10^{-8}$ ). Cela confirme que  $N_{max} = 3$  est le meilleur choix du développement.

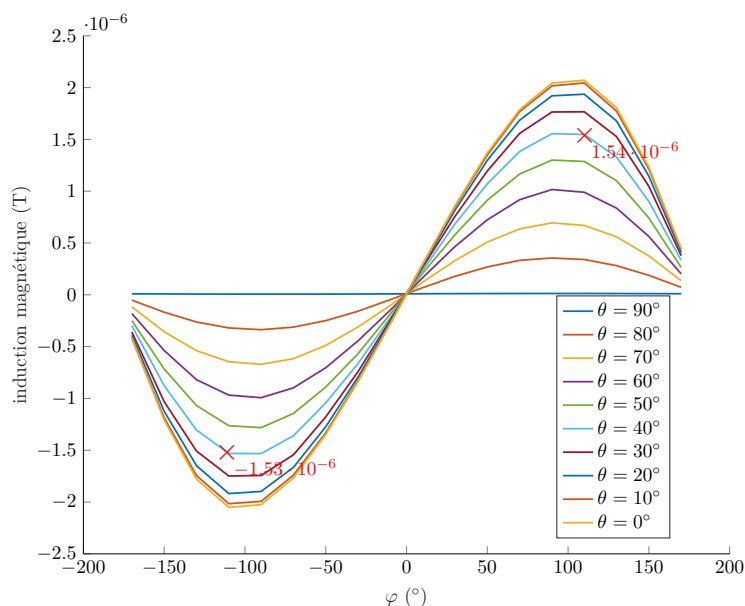


FIGURE 4.9 – Induction magnétique normale sur une sphère de mesure ( $r = 10$  cm) autour du dispositif en fonction de  $\varphi$  (droite)

$N_{max}$	1	2	3	4	5	6
$\sigma_{\mathbf{R}}$	$9.25 \cdot 10^{-8}$	$1.04 \cdot 10^{-8}$	$5.27 \cdot 10^{-9}$	$5.23 \cdot 10^{-9}$	$5.20 \cdot 10^{-9}$	$5.19 \cdot 10^{-9}$

TABLE 4.3 – Écart-type de résidu en fonction de l'ordre maximal du développement

Cette méthode de choix de l'ordre maximal à partir du résidu est très intéressante lorsque le bruit d'environnement peut être bien caractérisé.

### Critère d'information d'Akaike

En 1973, Hirotugu Akaike a proposé un critère d'information qui permet de mesurer la qualité relative des modèles statistiques pour un ensemble de données. Ce critère est appelé **critère d'information d'Akaike** (AIC) [Aka73]. Il estime la qualité de chaque modèle par rapport à chacun des autres modèles, ce qui permet alors de choisir le modèle optimal.

Le critère d'information d'Akaike est défini comme suit [HT89] :

$$AIC = n(\log \hat{\sigma}^2 + 1) + 2(m + 1) \quad (4.50)$$

avec :

- $n$  : nombre de données (mesures ou modélisations)
- $m$  : dimension du modèle, c'est-à-dire le nombre d'inconnues
- $\hat{\sigma}^2$  : variance d'estimation avec la méthode du maximum de vraisemblance.

La méthode du maximum de vraisemblance sera discuté dans le paragraphe 4.6.4, dans notre cas d'un problème linéaire, elle est définie par :

$$\hat{\mathbf{Q}}_{MV} = (\mathbf{A}^T \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{S}_m^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (4.51)$$

$\mathbf{S}_m$  est la matrice de covariance de mesure, qui représente l'incertitude de chaque mesure. Ici, on

considère que chaque mesure est indépendante et n'est perturbée que par le bruit de mesure. Supposons que chaque mesure soit affectée par la même puissance de bruit, la matrice de covariance peut donc être définie comme proportionnelle à l'identité. Par conséquent, la méthode du maximum de vraisemblance est équivalente à la méthode des moindres carrés. L'auteur montre que  $\hat{\sigma}^2$  est défini comme suit :

$$\hat{\sigma}^2 = \left\{ \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{Q}} \right\}^T \cdot \left\{ \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{Q}} \right\} / n \quad (4.52)$$

On peut constater que la valeur du critère d'Akaike  $AIC$  dépend de trois grandeurs : le nombre de données, le nombre d'inconnues et le résidu d'estimations. Le minimum de l' $AIC$  est en effet le compromis entre ces trois paramètres, qui correspond ainsi au choix optimal de l'ordre du développement.

Néanmoins, le critère d'Akaike n'est valable que pour un nombre de mesures très grand. Une correction a donc été proposée pour le cas où la taille d'échantillons est petite [HT89]. La méthode corrigée, appelée  $AIC_c$  est beaucoup plus efficace et précise que  $AIC$  lorsque  $n$  est petit, sa définition est :

$$AIC_c = AIC + \frac{2(m+1)(m+2)}{n-m-2} \quad (4.53)$$

En appliquant le critère d'Akaike corrigé sur le même exemple de bobine torique, on obtient :

$N_{max}$	1	2	3	4	5	6
$m$	3	8	15	24	35	48
$AIC$	$-1.073 \cdot 10^4$	$-1.205 \cdot 10^4$	$-1.224 \cdot 10^4$	$-1.223 \cdot 10^4$	$-1.221 \cdot 10^4$	$-1.218 \cdot 10^4$
$AIC_c$	$-1.072 \cdot 10^4$	$-1.205 \cdot 10^4$	$-1.224 \cdot 10^4$	$-1.222 \cdot 10^4$	$-1.220 \cdot 10^4$	$-1.216 \cdot 10^4$

TABLE 4.4 – Coefficient d'Akaike corrigé en fonction de l'ordre du développement à 10 cm

$m$  représente le nombre d'inconnues, qui est égal à  $(N_{max} + 2)N_{max}$ . On constate que la valeur minimale de  $AIC_c$  se situe à l'ordre 3. Ceci signifie que  $N_{max} = 3$  est probablement le meilleur choix du développement. La conclusion est la même que les deux méthodes précédentes, mais le critère d'Akaike est plus rigoureux et permet d'éviter toute ambiguïté. Qu'est-ce qui va se passer si les calculs des inductions magnétiques sont plus proches de la source ? Dans le chapitre 2, il a été montré que plus l'on s'approche de la source, plus l'ordre nécessaire pour décrire le champ sera élevé.

Pour la même bobine torique, son induction magnétique est calculée et tracée sur une sphère avec un rayon de 5 cm. Les courbes 3D et 3D surfacique sont données sur la Figure 4.10.

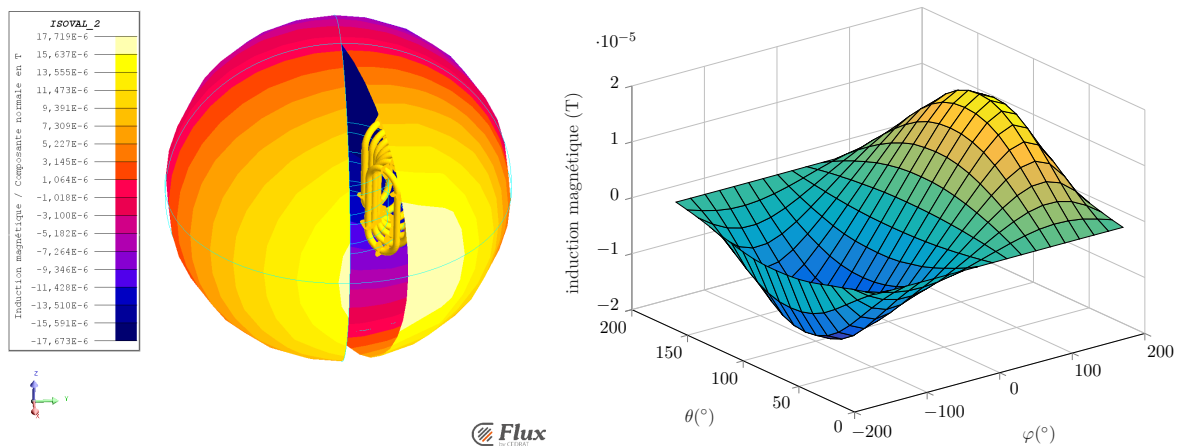


FIGURE 4.10 – Induction magnétique sur une sphère de mesure ( $r = 5$  cm) autour du dispositif

Par rapport au calcul pour  $r = 10$  cm, les inductions magnétiques sont plus irrégulières. Les résultats obtenus en appliquant le critère d'Akaike corrigé sont donnés dans la Table 4.5.

$N_{max}$	5	6	7	8	9
$m$	35	48	63	80	99
$AIC$	$-1.126 \cdot 10^4$	$-1.137 \cdot 10^4$	$-1.145 \cdot 10^4$	$-1.145 \cdot 10^4$	$-1.144 \cdot 10^4$
$AIC_c$	$-1.125 \cdot 10^4$	$-1.135 \cdot 10^4$	$-1.142 \cdot 10^4$	$-1.141 \cdot 10^4$	$-1.135 \cdot 10^4$

TABLE 4.5 – Coefficient d'Akaike corrigé en fonction de l'ordre du développement à 5 cm

De la même manière, le critère d'Akaike nous indique que  $N_{max} = 7$  est le choix optimal du développement. Cela est totalement logique et correspond bien à la conclusion précédente. Pour conclure, le critère d'information d'Akaike corrigé est un outil efficace pour choisir l'ordre optimal du développement en harmoniques sphériques.

#### 4.5.4 Dimension optimal du capteur

Dans les travaux précédents, plusieurs bancs de mesure ont été conçus et développés. Leur point commun est qu'ils sont tous basés sur le « filtrage spatial » qui conduit à utiliser comme capteurs des spires circulaires filaires ou réalisées en circuits imprimés. En tant qu'héritiers des anciens bancs, nous avons également choisi une spire circulaire en circuit imprimé comme capteur pour mesurer le flux magnétique. Il a été démontré dans le chapitre 2 que la performance du circuit imprimé est la même que pour une boucle filaire. La question maintenant est de savoir comment choisir la taille de la spire. Idéalement, la dimension du capteur n'a aucune influence sur l'identification de l'EST. Cependant, les incertitudes doivent être considérées dans les mesures. Dans ces travaux, les incertitudes impliquées sont : la position du capteur ( $\approx 0.1^\circ$ ), la position de l'EST ( $\approx 2$  mm), l'orientation de l'EST ( $\approx 0.5^\circ$ ), la longueur du bras ( $\approx 2$  mm) et le bruit environnemental ( $\approx 10^{10}$  Wb). Le bruit d'environnement est caractérisé par la mesure à vide, sans source, par le VNA, qui est considéré comme un bruit blanc. En fait, ces incertitudes sont estimées approximativement. L'idée de cette partie est d'avoir une idée sur la propagation des incertitudes et étudier l'influence de la dimension du capteur sur la précision des coefficients obtenus au final. Pour ce faire, une approche empirique est effectuée.

Un exemple académique avec plusieurs spires d'axe verticale est étudié (Figure 4.11), qui est en fait l'assemblage de sources canoniques des quatre premiers ordres. Grâce à l'axi-symétrie, l'identification de l'EST ne nécessite que des mesures pour un  $\phi$  donné et seulement les composantes de moment nul ont besoin d'être considérées. Avec toutes les incertitudes mentionnées, une grande quantité d'échantillons a été réalisée en simulation pour chaque taille de capteur avec le plateforme « Mipse », qui est un logiciel encore au cours de développement au G2Elab. Dans un premier temps, les capteurs sont toujours placés à 20 cm du centre de l'EST. L'écart-type des échantillons est calculé pour chaque composante harmonique en fonction du rayon du capteur. Les résultats sont présentés en Figure 4.11.

Afin de rendre les comparaisons plus visibles, les écart-types sont tous normalisés à la même échelle. On peut constater que les écart-types diminuent entre 1 cm et 6 cm. Cela est logique, parce que plus la taille du capteur augmente, plus le flux magnétique capturé sera grand, plus le rapport signal sur bruit sera important. Cependant, pour une longueur donnée du bras, le rayon de la sphère de mesure  $R$  augmente avec la taille du capteur  $r$  comme présenté en Figure 4.12.

La taille de sphère de mesure, qui représente la distance d'observation, augmente avec la taille du capteur. L'induction magnétique de la composante harmonique d'ordre  $n$  varie comme  $\frac{1}{R^{n+2}}$  (équation (2.65)); ceci conduit à un risque de perte d'information sur les ordres élevés à cause du bruit environne-



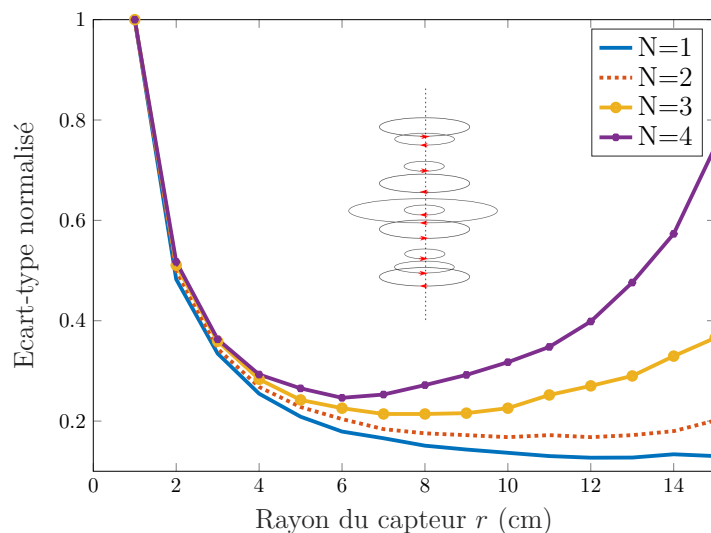


FIGURE 4.11 – Écart-type normalisé des échantillons pour chaque composante harmonique en fonction de rayon du capteur pour une longueur de bras de 20 cm

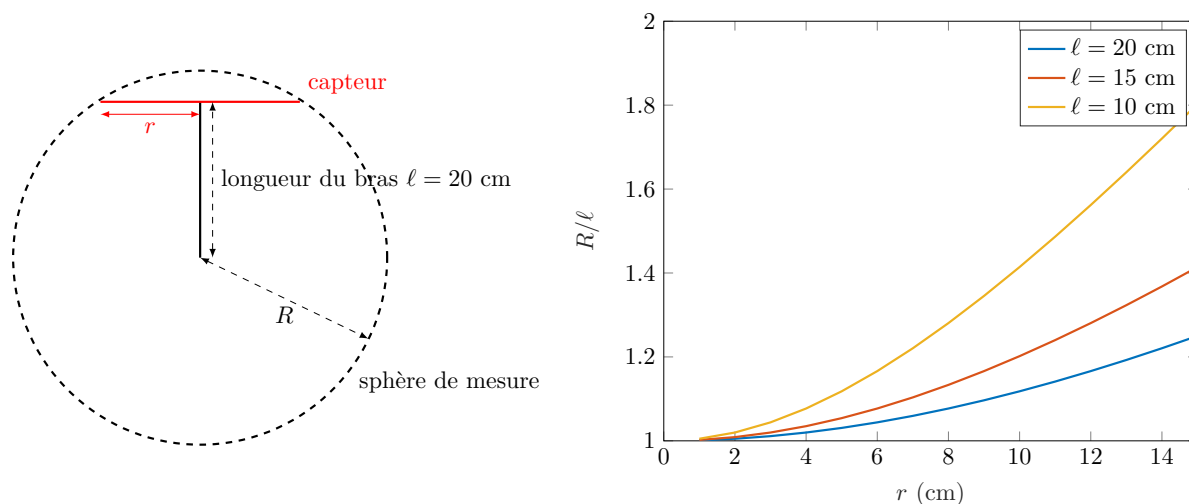


FIGURE 4.12 – Rayon de sphère de mesure en fonction de la taille du capteur pour les différentes valeurs du longueur du bras

mental lorsque la sphère de mesure est trop grande. Pour cette raison, les écart-types sur les composantes d'ordre 3 et 4 commencent à augmenter dès 8 cm.

Afin de trouver un compromis entre le rapport signal sur bruit et l'information des ordres élevés, la somme de tous les écart-types normalisés des quatre premiers ordres est calculée pour chaque taille de capteur. Les résultats sont présentés sur la Figure 4.13.

Il est intéressant de noter que les sommes des écart-types ont une forme parabolique, qui possède un minimum dépendant de la taille du capteur. On peut également constater que plus la mesure est proche (lorsque la longueur du bras est 15 ou 10 cm), plus on doit réduire la taille du capteur pour obtenir la meilleure précision. En fait, lorsque le capteur est plus proche de l'EST, la quantité de flux magnétique mesuré augmente, de sorte que l'influence de la taille du capteur sur le rapport signal sur bruit sera moins importante. En pratique, la dimension du capteur peut être réglée selon le bruit d'environnement et aussi la longueur du bras de mesure.

Une autre question essentielle en pratique est : quelles sont les positions optimales des points de

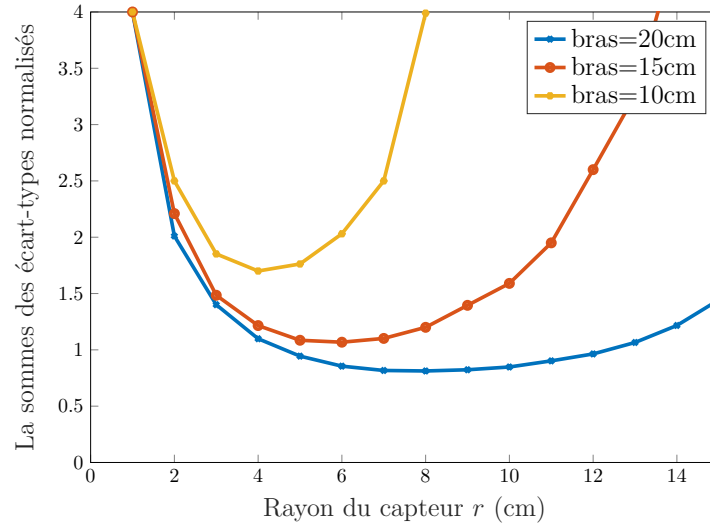


FIGURE 4.13 – La somme des écart-types normalisés des quatre premiers ordres en fonction de rayon du capteur

mesure ? Cela sera discuté dans la section suivante.

#### 4.5.5 Positions de mesures

Dans notre approche, l'identification d'une source est basée sur les mesures de flux magnétiques à travers une spire s'appuyant sur la surface d'une sphère entourant l'EST. Les points de mesures sur lesquels on centre la spire de mesure doivent être soigneusement sélectionnés. Afin de répartir régulièrement ces points de mesures sur la sphère, l'idée naturelle qui vient à l'esprit est la répartition équi-angulaire.

L'élevation  $\theta$  varie dans l'intervalle  $[0; \pi]$  et l'azimut  $\varphi$  varie dans  $[0; 2\pi]$ . Supposons que les deux directions possèdent toutes 10 pas, dans ce cas, le nombre de mesures est  $9 \times 9 + 2 = 83$ , qui sont tracés sur la Figure 4.14.

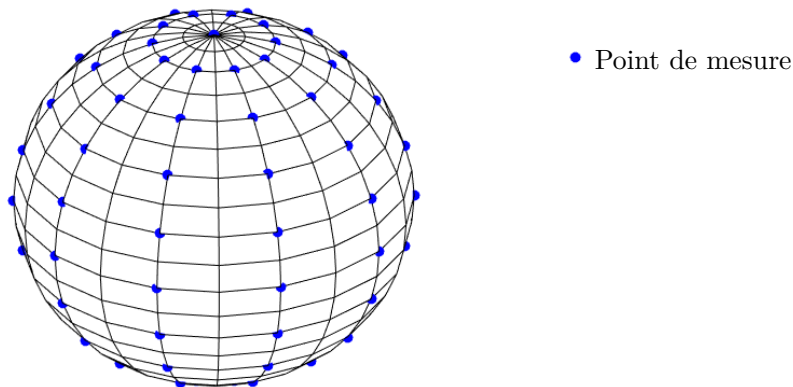


FIGURE 4.14 – Points de mesures répartis d'une façon équi-angulaire

Sur la figure, les points bleus représentent les points de mesures. Ce type de disposition est très régulier en angle, mais conduit au fait que les points de mesures sont concentrés vers les deux pôles. [RSCF06] a proposé une approche de mesure, et vérifié les inductions magnétiques autour d'une source, qui est basée sur une courbe en spirale sur la sphère de mesure. Les répartitions des points de mesures sont présentées sur la Figure 4.15.

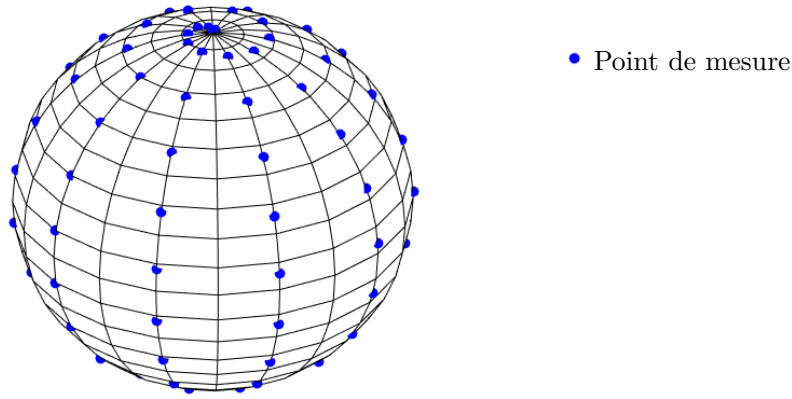


FIGURE 4.15 – Points de mesures répartis d’une façon spirale

Cette approche est intéressante parce qu’elle évite les répétitions de mesures pour des  $\theta$  et  $\varphi$  fixés. Par contre, l’inconvénient est le même que dans le cas équi-angulaire : les points sont concentrés vers les deux pôles. Pour caractériser le champ d’une source inconnue, il est plus logique de répartir les points de mesures sans privilégier aucune direction, c’est-à-dire équi-distant sur la sphère. Malheureusement, la répartition uniforme des points sur une surface sphérique n’est pas toujours possible. Pour certain nombre de points particuliers, tels que  $N=2, 3, 6, 12, 24, \dots$ , il est possible de répartir les points uniformément, mais ce n’est pas le cas pour les autres nombres de points [SK97].

Beaucoup d’auteurs ont cherché des méthodes pour répartir des points uniformément sur la sphère. [SK97] a proposé une méthode approximative pour ce faire, qui est basée sur l’approche spirale. La méthode ne sera pas détaillée dans ce document, un exemple pour  $N = 83$  est donné sur la Figure 4.16.

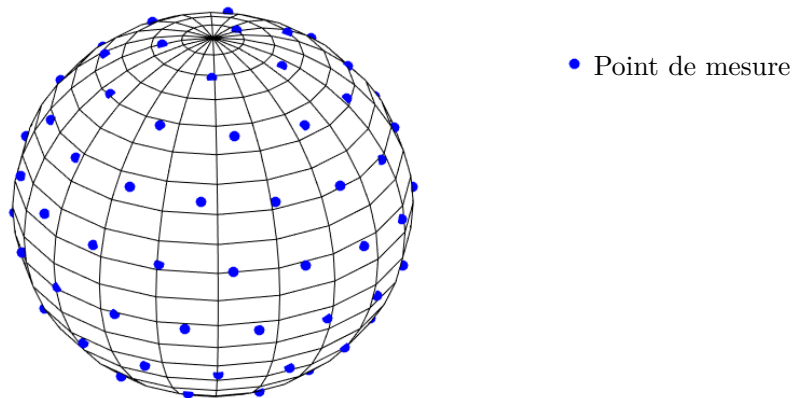


FIGURE 4.16 – Points de mesures répartis d’une façon quasiment équi-distante

Comme déjà expliqué dans la section 4.4.2, le conditionnement est un bon outil mathématique pour vérifier la stabilité du système, on peut aussi l’appliquer pour comparer les points de mesures. Reprenons les trois méthodes de mesures : équi-angulaire, spirale et équidistant. Le nombre de mesures est fixé à 83 et pour assurer la robustesse du système, le développement en harmoniques sphériques se limite à l’ordre 6. Le conditionnement est calculé pour chaque méthode et les résultats sont présentés dans la Table 4.6.

On peut constater que le conditionnement de la méthode équi-distante est le plus faible parmi les trois. Ceci signifie que cette méthode est la plus robuste et la moins sensible aux incertitudes. En résumé, la méthode équi-distante est la meilleure pour identifier une source inconnue. Son seul inconvénient est que pour une source inconnue, il est difficile de définir le nombre de mesure dans un premier temps. Au

Méthode	équi-angulaire	spirale	équi-distant
Conditionnement	$1.67 \cdot 10^{20}$	$7.49 \cdot 10^5$	$2.74 \cdot 10^4$

TABLE 4.6 – Conditionnement pour chaque méthode de mesure

cas où après la première série de mesure, il est montré que les mesures ne sont pas suffisantes et il faut encore augmenter le nombre de mesure, on est donc obligé de relancer une série de mesure complète pour le nouveau nombre de mesure. Parce qu'il n'est pas possible d'insérer quelques nouvelles mesures à celles qui sont déjà effectuées en gardant toujours la propriété équi-distante. Est-t-il possible d'effectuer les mesures d'une façon itérative? C'est-à-dire ajouter chaque fois une nouvelle série de mesure mais en gardant toutes les mesures qui sont déjà faites.

Les maillages sphériques nous a donné une excellente inspiration. Pour générer un maillage uniforme sur une surface sphérique, une méthode efficace est de partir de l'icosaèdre. Ensuite, pour augmenter la qualité du maillage, il suffit de subdiviser chaque arête en deux [Lor01], et ainsi de suite. Le principe est présenté sur la Figure 4.17.

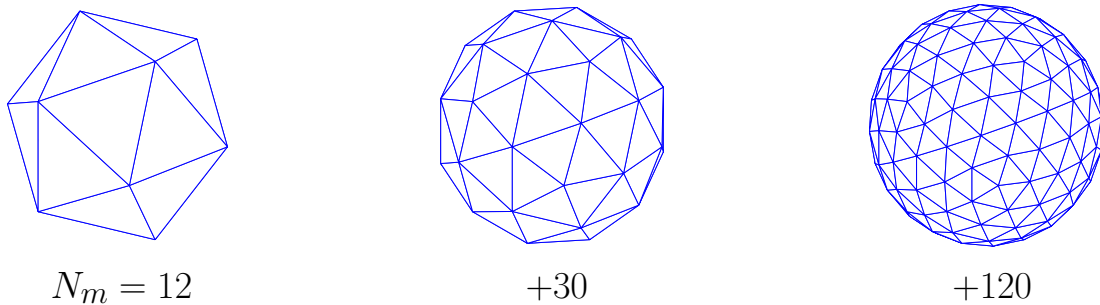


FIGURE 4.17 – Mesures équi-distantes itératives à partir d'un icosaèdre

$N_m$  représente le nombre de mesures et les sommets représentent les points de mesures, qui sont tous sur la même sphère. Pour chaque  $N_m$ , toutes les arêtes ont la même longueur, ce qui conduit à une série de mesures équi-distantes.

Cette approche est intéressante parce qu'elle permet d'ajouter une nouvelle série de mesure complémentaire de celle précédente, en conservant les caractéristiques de l'équidistance. En plus, dans la section 4.5.4, on a montré qu'il faut mesurer au plus près de la source pour déterminer les ordres plus élevés. Cette propriété peut être utilisée dans cette approche. Le procédé pour identifier une source inconnue est présentée par la suite :

1. Lancer une première série de mesures avec  $N_m = 12$ , à une distance de 20 cm. Déterminer les coefficients harmoniques de la source pour  $N_{max} = 2$ . Calculer le résidu. Si le résidu est assez faible, la source est donc bien identifiée. Sinon, aller à l'étape 2.
2. Ajouter 30 mesures complémentaires de l'étape 1, mais à une distance de 15 cm. Déterminer les coefficients harmoniques pour  $N_{max} = 5$ . Calculer le résidu. Si le résidu est assez faible, la source est donc bien identifiée. Sinon, aller à l'étape 3.
3. Ajouter 120 mesures qui sont complémentaires de l'étape 2, mais à une distance de 10 cm. Appliquer le critère d'Akaike pour déterminer  $N_{max}$  et ensuite résoudre le problème.

Cette méthode peut également se baser sur d'autres formes particulières, comme un cube. La procédure est exactement la même (Figure 4.18).

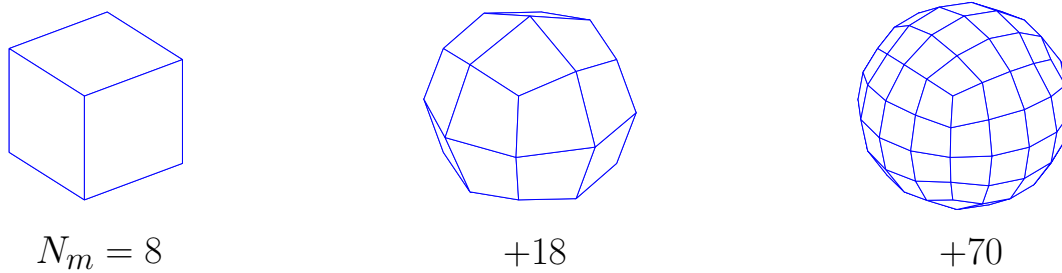


FIGURE 4.18 – Mesures équi-distantes itératives à partir d'un cube

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour résoudre notre problème inverse et déterminer les coefficients harmoniques de la source, y compris la dimension optimale du capteur, les points de mesures, les outils mathématiques pour la résolution, etc. Tous ces éléments sont basés sur le fait qu'aucune information a priori de la source n'est disponible. Cependant, en pratique, on dispose souvent, en plus des mesures, d'informations a priori sur le dispositif mesuré, tels que sa périodicité, sa symétrie, etc. Comment rendre ces informations utiles dans la résolution du problème inverse ? La section suivante est consacrée à cette question.

## 4.6 Information a priori sur la géométrie

Reprenons l'expression de la fonction d'harmoniques sphérique dans l'équation (2.61) :

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (4.54)$$

avec  $P_n^m(x)$  le polynôme associé de Legendre, qui est défini comme :

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (4.55)$$

Lors du passage d'un point à son symétrique par rapport à xOy, seulement  $\cos \theta$  change de signe. Ceci signifie que la symétrie de la fonction harmonique sphérique est définie par la symétrie de la fonction de Legendre associée. Celle-ci est composée de la fonction paire  $(1-x^2)^{m/2}$  et de la dérivée  $(n+m)^{\text{ième}}$  de la fonction paire  $(x^2-1)^n$ . Chaque dérivation change la parité, c'est-à-dire de symétrie à anti-symétrie ou inversement. Ainsi, la grandeur  $\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n$  a la même parité que  $(n+m)$ . Plus précisément, si  $(n+m)$  est paire,  $Y_n^m$  est symétrique par rapport au plan xOy, si  $(n+m)$  est impaire,  $Y_n^m$  est anti-symétrique.

La périodicité de  $Y_n^m$  suivant  $\phi$  est liée à  $e^{im\phi}$ . Ceci implique que la périodicité de la fonction HS autour de l'axe  $z$  est définie par le moment  $m$ . Si  $m = 0$ ,  $Y_n^m$  est axi-symétrique par rapport à l'axe  $z$  ; si  $m = 1$ ,  $Y_n^m$  est  $2\pi$ -périodique ; si  $m = 2$ ,  $Y_n^m$  est  $\pi$ -périodique, etc. Ensuite, il faut relier ces propriétés de la fonction HS au dispositif à caractériser. Afin de rendre l'idée d'appliquer les informations a priori plus claires, un exemple d'une inductance de lissage sera étudié sous *Flux3D*. On commence par la source « parfaite », qui respecte parfaitement les informations a priori.

### 4.6.1 Source « parfaite »

Le dispositif étudié dans cette section est l'inductance de lissage représentée en Figure 4.19. Les tests méthodologiques que nous réalisons ci-dessous sont entièrement numériques.

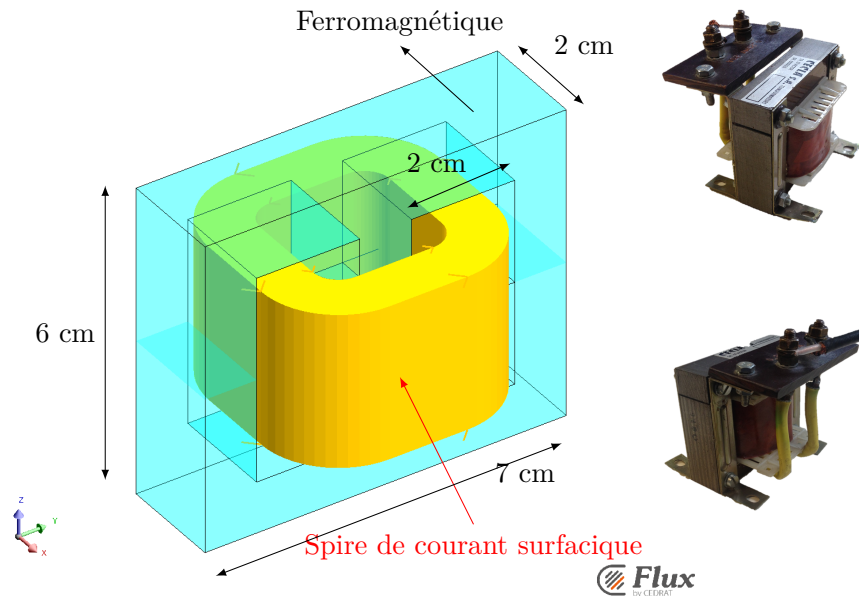


FIGURE 4.19 – Inductance de lissage étudiée sous *Flux3D*

La partie en bleu représente le noyau ferromagnétique, avec une permittivité relative de 1000. La partie jaune représente les 100 spires de l'inductance. Dans un premier temps, le dispositif est considéré « parfait », c'est-à-dire que les fils d'alimentation ne sont pas pris en compte et le bobinage est exactement centré sur le noyau. Dans ce cas, ce dispositif est anti-symétrique par rapport au plan  $xOy$  et  $\pi$ -périodique suivant l'axe  $z$ . Le champ de fuite du dispositif partage les mêmes caractéristiques, qui peuvent être considérées comme les informations a priori sur la source. Afin de vérifier ces deux caractéristiques, l'induction magnétique du dispositif est tracée sur une sphère avec un rayon de 10 cm.

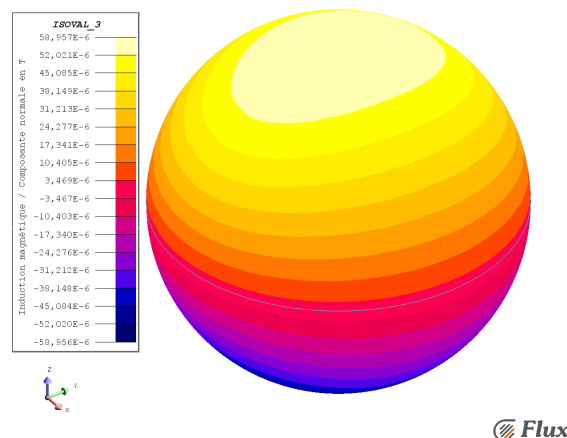


FIGURE 4.20 – Induction magnétique de l'inductance sur une sphère de 10 cm

La Figure 4.20 montre le champ  $\mathbf{B}$  du dispositif. Celle-ci permet de vérifier que les informations a priori sur le rayonnement du dispositif. Comme expliqué juste avant, la symétrie et la périodicité de la fonction HS sont directement reliées à son ordre  $n$  et moment  $m$ . Il est donc possible d'exprimer les

informations a priori par :

$$\begin{cases} n + m = \text{impair} \\ m = \text{pair} \end{cases} \quad (4.56)$$

Les composantes harmoniques qui respectent ces conditions sont :  $Q_1^0, Q_3^{-2}, Q_3^0, Q_3^2, Q_5^{-4}, Q_5^{-2}, Q_5^0, Q_5^2, Q_5^4$ ... Afin de rendre la comparaison plus claire, l'inductance de lissage sera identifiée d'abord sans information a priori.

### Sans informations a priori

50 mesures sont effectuées d'une façon équidistantes, les points de mesures sont présentés sur la Figure 4.21.

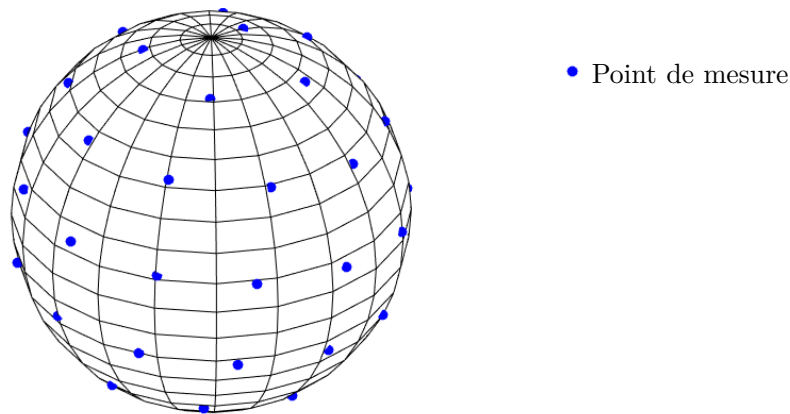


FIGURE 4.21 – 50 points de mesures répartis d'une façon quasiment équidistante sur la surface sphérique autour du dispositif

Le développement multipolaire du dispositif est réalisé jusqu'à l'ordre 6 ( $N_{max} = 6$ ). Dans ce cas, 48 composantes harmoniques doivent être déterminées, le problème est donc bien posé parce qu'on a plus d'équations que d'inconnues (rang=50). En appliquant la méthode des moindres carrés, les coefficients harmoniques obtenus à partir de ces 50 mesures sont donnés dans la Table 4.7 (la convention de lecture de Table 4.7 est donnée dans la Table 2.5; les trois coefficients d'ordre 1 est en bleu, les 5 coefficients d'ordre 2 sont en rouge...).

	- \ +	-0.0679	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$-1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$-3.9 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
N = 1	-0.0416	48.9	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$-1.0 \cdot 10^{-2}$	$-1.9 \cdot 10^{-2}$	$-1.3 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
N = 2	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$-9.6 \cdot 10^{-2}$	$-0.33 \cdot 10^{-4}$	$-1.9 \cdot 10^{-2}$	$-1.4 \cdot 10^{-2}$
N = 3	$3.7 \cdot 10^{-3}$	-1.3	$-5.9 \cdot 10^{-2}$	-0.29	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-2}$	$-2.5 \cdot 10^{-2}$
N = 4	$-6.4 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$-1.1 \cdot 10^{-2}$	0.11	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$-8.5 \cdot 10^{-2}$	-0.17
N = 5	$-5.9 \cdot 10^{-4}$	$6.9 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-2}$	-0.24	-0.30	-0.33
N = 6	$-7.6 \cdot 10^{-3}$	$-1.8 \cdot 10^{-2}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-2}$	$6.9 \cdot 10^{-2}$	0.34	0.43

TABLE 4.7 – Coefficients harmoniques pondérés par  $r^{-(n+2)}$  ( $r = 0.1$  m) obtenus à partir des 50 mesures sans informations a priori

On peut constater que le développement en HS de l'inductance contient presque toutes les composantes harmoniques. Néanmoins, selon les informations a priori exprimées par l'équation (4.56), seulement les composantes entourées en rouge (Table 4.7) peuvent exister. Les autres composantes harmoniques sont

dues au bruit de maillage et au « repliement » du problème inverse. Ces composantes peuvent perturber la représentation du champ et aussi le calcul de l'inductance mutuelle de manière significative. Afin de vérifier la précision des coefficients harmoniques obtenus et quantifier les perturbations des composantes qui ne devraient pas exister, 300 points supplémentaires sont choisis, uniformément répartis sur la sphère. Les inductions magnétiques mesurées sur ces 300 points sont comparées avec celles estimées par les composantes harmoniques sur la Table 4.7. L'erreur quadratique relative est calculée pour ces 300 points et on obtient :  $\varepsilon = 6\%$ .

## Simplification du modèle

Pour prendre en compte les informations a priori, l'idée naturelle est de simplifier le modèle, c'est-à-dire supprimer les composantes harmoniques qui ne devraient pas exister. Il est déjà mentionné que les composantes harmoniques qui respectent l'équation (4.56) jusqu'à l'ordre 6 sont :  $Q_1^0, Q_3^{-2}, Q_3^0, Q_3^2, Q_5^{-4}, Q_5^{-2}, Q_5^0, Q_5^2, Q_5^4$ . En effet, la prise en compte de l'information a priori fait passer le nombre de coefficients de 48 à 9. En appliquant la même démarche avec les mêmes mesures, les coefficients harmoniques obtenus à partir des 50 mesures sont présentés sur la Table 4.8.

	-	+	/	/	/	/	/
N = 1	/		49.0	/	$-0.22 \cdot 10^{-3}$	/	$-4.0 \cdot 10^{-3}$
N = 2	/		/	/	/	/	/
N = 3	/		-1.3	/	-0.21	/	$-2.2 \cdot 10^{-3}$
N = 4	/		/	/	/	/	/
N = 5	/		$6.7 \cdot 10^{-2}$	/	$-7.5 \cdot 10^{-2}$	/	$-7.5 \cdot 10^{-2}$
N = 6	/		/	/	/	/	/

TABLE 4.8 – Coefficients harmoniques pondérés par  $r^{-(n+2)}$  ( $r = 0.1$  m) obtenus à partir des 50 mesures en simplifiant le modèle

L'erreur quadratique relative pour les mêmes 300 points est ramenée à  $\varepsilon = 0.2\%$ . L'identification avec l'information a priori est donc environ 30 fois plus précise que celle sans information. Celles-ci montrent l'intérêt d'insérer les informations a priori à l'identification des sources à identifier. Cependant, il faut noter que l'exemple étudié est un cas idéal, qui respecte parfaitement les symétries et les périodicités que l'on suppose. En pratique, les informations a priori sont souvent acquises par les observations, qui ne sont donc pas tout à fait exactes. En d'autres termes, les informations a priori ne sont pas toujours entièrement respectées par la source. Dans le cas de source réelle, est-il encore possible d'appliquer les informations a priori sur la symétrie et la périodicité ?

### 4.6.2 Source « imparfaite »

Reprenons l'exemple précédent. Cette fois, les fils d'alimentations sont pris en compte et le bobinage est légèrement déplacé de (4,2,6) mm comme présenté sur la Figure 4.22.

Une spire rectangulaire de courant est ajoutée pour modéliser les fils d'alimentation. Celle-ci détruit complètement les informations a priori, parce qu'elle n'est ni anti-symétrique, ni périodique. L'induction magnétique autour du dispositif est tracée sur la Figure 4.23.

On peut constater que le rayonnement n'est plus anti-symétrique mais le changement n'est pas très important. En fait, le rayonnement des fils d'alimentation est relativement plus faible que celui de l'inductance elle-même, et le décentrage du bobinage est faible : les composantes harmoniques en dehors des neuf composantes principales peuvent exister, mais restent probablement peu importantes. Alors, comment



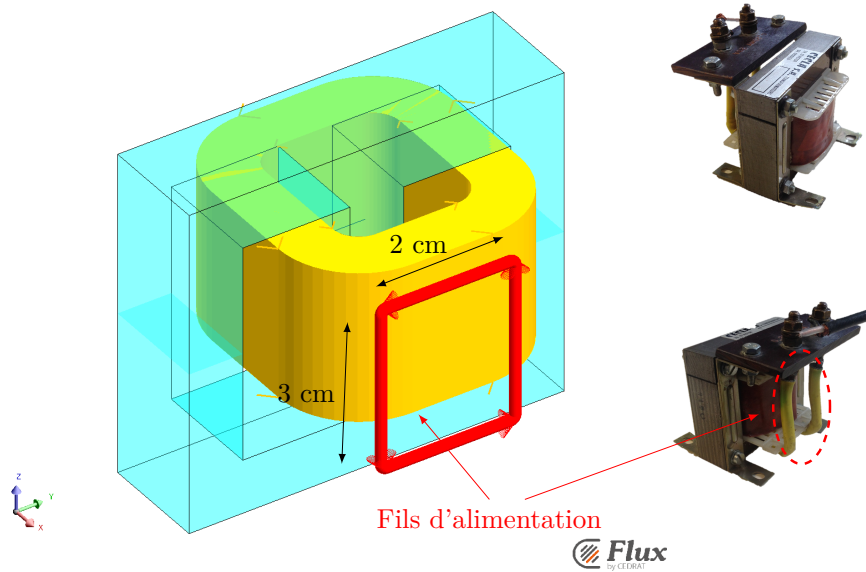


FIGURE 4.22 – Inductance de lissage étudiée sous *Flux3d* avec les fils d'alimentation

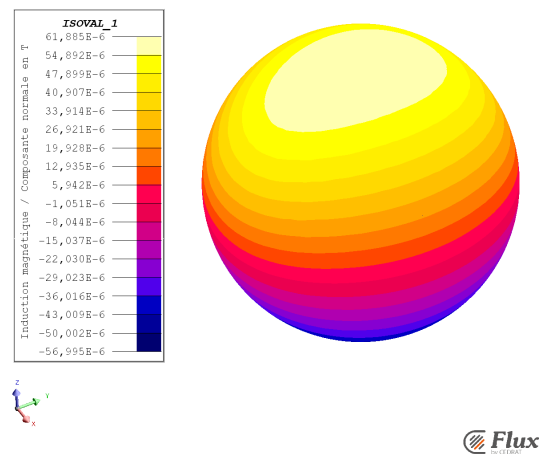


FIGURE 4.23 – Induction magnétique du transformateur avec les fils d'alimentation sur une sphère de 10 cm

pouvons-nous utiliser ces informations? Comme dans le cas de source « parfaite », on commence l'étude par le cas sans informations.

### Sans informations a priori

La même démarche que la section précédente est effectuée : 50 mesures pour identifier le dispositif jusqu'à l'ordre 6. Les coefficients harmoniques obtenus sont montrés dans la Table 4.9 :

Par rapport aux coefficients harmoniques de la source « parfaite », les coefficients hors des 9 principales sont modifiés, à cause des fils d'alimentation et de la translation du bobinage. Ensuite, l'erreur quadratique relative est calculée et on obtient :  $\varepsilon = 5.2\%$ . La précision est presque la même que celle de la source « parfaite ».

	- \ +	-0.119	$-7.3 \cdot 10^{-3}$	$-1.0 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$-3.9 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$
N = 1	-0.649	49.4	0.10	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$-3.8 \cdot 10^{-3}$	$-91.2 \cdot 10^{-3}$	$7.7 \cdot 10^{-4}$
N = 2	-1.7	-0.72	1.1	$-6.5 \cdot 10^{-2}$	$9.1 \cdot 10^{-3}$	$-1.5 \cdot 10^{-2}$	$-7.8 \cdot 10^{-3}$
N = 3	$-7.6 \cdot 10^{-2}$	-1.24	-0.12	-0.30	$4.1 \cdot 10^{-2}$	$4.4 \cdot 10^{-2}$	$-2.0 \cdot 10^{-2}$
N = 4	$7.4 \cdot 10^{-2}$	$-8.5 \cdot 10^{-3}$	$-4.7 \cdot 10^{-2}$	0.12	$-3.4 \cdot 10^{-2}$	$-7.2 \cdot 10^{-2}$	-0.15
N = 5	$-1.1 \cdot 10^{-2}$	$7.5 \cdot 10^{-2}$	$5.4 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-2}$	-0.20	-0.27	-0.29
N = 6	$-1.3 \cdot 10^{-2}$	$-1.6 \cdot 10^{-2}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	$5.6 \cdot 10^{-2}$	$6.2 \cdot 10^{-2}$	0.30	0.38

TABLE 4.9 – Coefficients harmoniques pondérés par  $r^{-(n+2)}$  ( $r = 0.1$  m) obtenus à partir des 50 mesures sans informations a priori

### Simplifier le modèle

Il a déjà été montré que les informations a priori ne sont plus entièrement respectées en prenant en compte des fils d'alimentation. Que se passe-t-il si nous simplifions encore le modèle ? Les coefficients sont montrés dans la Table 4.10.

	- \ +	/	/	/	/	/	/
N = 1	/	49.4	/	$1.9 \cdot 10^{-2}$	/	$6.8 \cdot 10^{-3}$	/
N = 2	/	/	/	/	/	/	/
N = 3	/	-1.3	/	-0.23	/	$-1.9 \cdot 10^{-2}$	/
N = 4	/	/	/	/	/	/	/
N = 5	/	$6.4 \cdot 10^{-2}$	/	$-3.2 \cdot 10^{-2}$	/	$-8.8 \cdot 10^{-2}$	/
N = 6	/	/	/	/	/	/	/

TABLE 4.10 – Coefficients harmoniques pondérés par  $r^{-(n+2)}$  ( $r = 0.1$  m) obtenus à partir des 50 mesures en simplifiant le modèle

L'erreur quadratique calculée est :  $\varepsilon = 5.4\%$ . En fait, en simplifiant le modèle, l'identification est moins précise que celle sans informations. Ceci est totalement logique, parce que les composantes harmoniques liées aux fils d'alimentation et la translation du bobinage ne sont pas du tout considérés. Pour conclure, il est déraisonnable de simplifier le modèle harmonique lorsque les informations a priori sont incertaines. Par contre, il existe d'autres méthodes qui permettent de prendre en compte ces informations a priori incertaines, ces méthodes seront expliquées par la suite.

### 4.6.3 Méthode des moindres carrés sous contraintes

Comme mentionné dans la section 4.5.1, le principe de la méthode des moindres carrés est de chercher la solution  $\hat{\mathbf{Q}}$  qui minimise la distance entre le modèle  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{Q}}$  et la mesure  $\mathbf{B}$ . Les informations a priori sont incertaines, mais les composantes harmoniques non principales sont relativement faibles. Ceci peut se traduire par  $-k \leq Q_n^m \leq k$  pour les composantes à part les 9 principales, avec  $k$  une petite constante. Ainsi, les contraintes sont ajoutées dans la résolution du problème avec la méthode des moindres carrés, qui s'exprime alors :

$$\begin{aligned} &\text{minimiser} && \|\mathbf{A}\mathbf{Q} - \mathbf{B}\|_2 \\ &\text{Contraintes :} && \ell \leq \mathbf{Q} \leq u \end{aligned} \quad (4.57)$$

où  $\ell$  et  $u$  sont les vecteurs de données avec la même dimension que  $\mathbf{Q}$ . Par contre, il n'est pas pratique de définir les limites des valeurs pour chaque composante harmonique. Un autre point de vue est de minimiser la norme de  $\hat{\mathbf{Q}}$ , qui peut s'exprimer par :

$$\text{minimiser } \|\mathbf{A}\mathbf{Q} - \mathbf{B}\|_2 + \xi \cdot \|\mathbf{Q}\|_2 \quad (4.58)$$

$\|\cdot\|_2$  représente la norme 2.  $\xi$  est un paramètre de pondération entre les deux normes.

Le problème de minimisation sous contraintes peut être résolu par un module de Matlab, qui s'appelle *CVX* [GB17]. *CVX* est un système de modélisation basé sur Matlab pour l'optimisation convexe. Plus de détails sur l'optimisation convexe se trouvent dans [BV10]. Il permet de spécifier des contraintes et les objectifs à l'aide de la syntaxe Matlab standard.

En appliquant l'algorithme de *CVX* avec le principe en (4.58), les coefficients harmoniques obtenus sont présentés dans la Table 4.11.

	-	+	$-5.8 \cdot 10^{-2}$	$-8.3 \cdot 10^{-3}$	$-3.6 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-6}$	$-1.43 \cdot 10^{-4}$
<b>N = 1</b>	$-6.1 \cdot 10^{-2}$	49.4	$7.6 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$-1.8 \cdot 10^{-4}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$	
<b>N = 2</b>	-1.7	-0.77	1.1	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-4}$	
<b>N = 3</b>	$-7.0 \cdot 10^{-2}$	-1.3	$-6.5 \cdot 10^{-2}$	-0.23	$5.5 \cdot 10^{-3}$	$-1.6 \cdot 10^{-3}$	$-3.0 \cdot 10^{-3}$	
<b>N = 4</b>	$7.7 \cdot 10^{-2}$	$-2.3 \cdot 10^{-2}$	$-3.1 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$-5.8 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$-4.7 \cdot 10^{-3}$	
<b>N = 5</b>	$-5.9 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$-7.0 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$-7.6 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	
<b>N = 6</b>	$-8.3 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	

TABLE 4.11 – Coefficients harmoniques pondérés par  $r^{-(n+2)}$  ( $r = 0.1$  m) obtenus à partir des 50 mesures en ajoutant les contraintes

On peut constater qu'en ajoutant les contraintes, certaines composantes harmoniques sont presque annulées et on peut clairement voir les composantes engendrées par les fils d'alimentation et la translation du bobinage, tels que :  $Q_2^2$ ,  $Q_3^3$ , etc. Au final, l'erreur quadratique est calculée et on obtient :  $\varepsilon = 0.3\%$ . En fait, la méthode des moindres carrés sous contraintes est 18 fois plus précise que celle sans information.

En conclusion, la méthode des moindres carrés sous contraintes est assez pertinente pour prendre en compte les informations incertaines dans la résolution du problème inverse, ce qui permet d'augmenter la précision. Néanmoins, le choix du paramètre  $\xi$  exige de la prudence. Si il est défini trop petit, ceci est équivalent au cas sans informations ; si il est défini trop grand, les coefficients harmoniques non principales seront tous annulés. Il n'est pas évident de choisir a priori ce paramètre  $\xi$ . Une autre méthode est donc proposée, permettant de transformer les informations incertaines sous la forme d'une densité de probabilité. Ainsi les valeurs des coefficients harmoniques non principales ne sont pas strictement limitées. La méthode est expliquée dans la section suivante.

#### 4.6.4 Maximum a posteriori (MAP)

La méthode du maximum a posteriori est une méthode pour résoudre les problèmes inverses sous une forme de densité de probabilité. La méthode est très liée au maximum de vraisemblance, mais en prenant en compte des informations a priori. Cette méthode est aussi appelée l'estimateur Bayésien, parce qu'elle est basée sur l'inversion Bayésienne. Ainsi, le théorème de Bayes sera d'abord introduit.

#### 4.6.4.1 Théorème de Bayes

Dans la théorie des probabilités et statistiques, le théorème de Bayes décrit la probabilité d'un événement, en fonction de la connaissance préalable des conditions qui pourraient être liées à l'événement [Bay63] [Dow12]. Cette probabilité est appelée la probabilité conditionnelle, qui est définie comme :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (4.59)$$

avec :

- $A$  et  $B$  : événements ;
- $P(A)$  et  $P(B)$  : probabilités a priori des événements  $A$  et  $B$ . Le terme *a priori* signifie qu'elle ne prend pas en compte toute information sur l'autre.
- $P(B|A)$  : probabilité d'observer l'événement  $B$  étant donné que  $A$  est vrai ;
- $P(A|B)$  : probabilité conditionnelle d'observer l'événement  $A$  étant donné que  $B$  est vrai.

Pour notre problème, l'événement  $A$  représente les coefficients harmoniques que l'on cherche à identifier, l'événement  $B$  représente les inductions magnétiques mesurées ou calculées. Le théorème de Bayes permet donc d'obtenir la densité de probabilité conditionnelle des coefficients harmoniques à partir des observations et des densités de probabilités des paramètres. Le problème linéaire  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{B}$  s'écrit donc comme suit :

$$P(\mathbf{Q}|\mathbf{B}) = \frac{P(\mathbf{B}|\mathbf{Q}) \cdot P(\mathbf{Q})}{P(\mathbf{B})} \quad (4.60)$$

Avec l'hypothèse que les incertitudes de mesures sont des bruits blancs qui suivent la loi gaussienne, nous pouvons reprendre l'équation (4.29) :

$$P(\mathbf{B}|\mathbf{Q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{B}\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (4.61)$$

Grâce à la linéarité du problème,  $P(\mathbf{B}|\mathbf{Q})$  peut s'écrire sous la forme matricielle [Sch06] :

$$P(\mathbf{B}|\mathbf{Q}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{B})^t \cdot \mathbf{S}_m^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{B})\right] \quad (4.62)$$

$\mathbf{S}_m$  est la matrice de covariance des mesures, qui représente l'incertitude de chaque mesure. Supposons maintenant que nous connaissons un vecteur  $\mathbf{Q}_0$ , qui représente les coefficients harmoniques a priori. De la même manière, la densité a priori peut s'écrire comme :

$$P(\mathbf{Q}_0) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0)^t \cdot \mathbf{S}_0^{-1} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0)\right] \quad (4.63)$$

$\mathbf{S}_0$  est la matrice de covariance de l'information a priori qui représente son incertitude. C'est une matrice carrée, de dimension égale au nombre de coefficients harmoniques considérés. En appliquant l'équation (4.60), on obtient :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Q}|\mathbf{B}) &= P(\mathbf{B}|\mathbf{Q}) \cdot P(\mathbf{Q}) \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{B})^t \cdot \mathbf{S}_m^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{B}) - \frac{1}{2}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0)^t \cdot \mathbf{S}_0^{-1} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0)\right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

#### 4.6.4.2 Méthode du maximum a posteriori

La méthode du maximum a posteriori cherche la solution de  $\mathbf{Q}$  la plus probable, qui maximise donc la probabilité a posteriori  $P(\mathbf{Q}|\mathbf{B})$ . Il faut noter qu'il existe d'autres types d'estimateurs tels que le minimum de variance et le maximum de la moyenne a posteriori [Kay93], mais dans ce travail on se focalise sur la

méthode MAP, parce que les calculs sont simples et il existe toujours une solution.

[Tar04] a donné la solution qui maximise  $P(\mathbf{Q}|\mathbf{B})$ . La solution  $\mathbf{Q}_{MAP}$  peut être exprimée sous trois formes :

$$\mathbf{Q}_{MAP} = (\mathbf{A}^T \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{S}_0^{-1})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{Q}_0) \quad (4.65a)$$

$$= \mathbf{Q}_0 + (\mathbf{A}^T \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{S}_0^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{S}_m^{-1} (\mathbf{B} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_0) \quad (4.65b)$$

$$= \mathbf{Q}_0 + \mathbf{S}_0 \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{S}_0 \mathbf{A}^T + \mathbf{S}_m)^{-1} (\mathbf{B} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_0) \quad (4.65c)$$

On peut constater sur (4.65b) et (4.65c) que la solution de la méthode du maximum a posteriori est au voisinage de l'information a priori, donc une information a priori complètement fautive dégradera bien sûr l'identification du dispositif inconnu.

En fait, lorsque  $\mathbf{S}_0$  est trop importante, l'information a priori est trop incertaine et est évincée directement dans le calcul, parce que [Pin14] :

$$\mathbf{S}_0 \rightarrow \infty \quad \implies \quad \mathbf{S}_0^{-1} \rightarrow 0 \quad (4.66)$$

Dans ce cas, à partir de (4.65a), on peut constater que  $\mathbf{S}_0$  et  $\mathbf{Q}_0$  ne sont pas pris en compte. Ceci peut donc être considéré comme une absence d'information a priori, qui revient donc au même que de la méthode du maximum de vraisemblance sur l'équation (4.51) :

$$\mathbf{Q}_{MV} = (\mathbf{A}^T \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{B} \quad (4.67)$$

Le comportement est le même pour les mesures. Si les variances des mesures sont trop grandes par rapport à l'information a priori ( $\mathbf{S}_m \rightarrow \infty$ ), les mesures ne sont donc pas considérées dans la résolution et on obtient finalement  $\mathbf{Q}_{MV} = \mathbf{Q}_0$ .

Il est intéressant de noter que l'équation (4.67) est la même que la méthode des moindres carrés pondérée par  $\mathbf{S}_m$ . Si on ne connaît pas l'incertitude de mesures  $\mathbf{S}_m$ , la solution revient à celle de moindres carrés :

$$\mathbf{Q}_{MC} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \quad (4.68)$$

La question maintenant est comment appliquer la méthode MAP pour rendre les informations a priori utiles ?

#### 4.6.4.3 Application sur l'information a priori géométrique

Reprenons l'exemple de l'inductance de lissage avec ses fils d'alimentation. On sait que les composantes harmoniques, à part les 9 principales, sont relativement faibles : comment rendre cette information utile ?

Les coefficients obtenus en simplifiant le modèle sont pris comme une information a priori, qui est représentée par  $\mathbf{Q}_0$ . Ensuite, une variance est donnée pour chaque composante harmonique, qui est représentée par  $\mathbf{S}_0$ , qui est une matrice diagonale proportionnelles à la matrice identité. Il est important de noter que la variance est le carré de l'incertitude, dans l'exemple de l'inductance de lissage, la composante harmonique principale est d'environ 50, une variance de 10 est alors donnée à chaque composante harmonique.

En appliquant (4.65), les coefficients harmoniques peuvent être obtenus, ils sont présentés dans la Table 4.12.

On peut constater que les coefficients sont légèrement différents par rapport à ceux de la méthode des moindres carrés sous contraintes et l'erreur est :  $\varepsilon = 0.9\%$ .

Comme pour la méthode des moindres carrés sous contraintes, le choix de la variance  $\mathbf{S}_0$  exige de la prudence. Comme présenté en Figure 4.13, si la variance est définie trop grande, on retrouve les résultats le cas sans informations, si la variance est définie trop petite, il revient au même que de simplifier le

	-	+						
			$-5.7 \cdot 10^{-2}$	$-1.3 \cdot 10^{-2}$	$-7.0 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$-6.7 \cdot 10^{-3}$
<b>N = 1</b>	-0.45	49.4	$6.6 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-4}$		$-1.1 \cdot 10^{-3}$
<b>N = 2</b>	-1.44	-0.66	0.97	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$		$3.6 \cdot 10^{-3}$
<b>N = 3</b>	$-6.6 \cdot 10^{-2}$	-1.3	$-6.3 \cdot 10^{-2}$	-0.24	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$-1.2 \cdot 10^{-4}$		$-9.2 \cdot 10^{-3}$
<b>N = 4</b>	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$-2.3 \cdot 10^{-2}$	$-2.6 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$-6.3 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$		$-1.8 \cdot 10^{-2}$
<b>N = 5</b>	$-6.8 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-2}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	$-5.5 \cdot 10^{-2}$	$-6.6 \cdot 10^{-3}$	$-8.8 \cdot 10^{-2}$		$-4.2 \cdot 10^{-2}$
<b>N = 6</b>	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$		$3.4 \cdot 10^{-2}$

TABLE 4.12 – Coefficients harmoniques pondérés par  $r^{-(n+2)}$  ( $r = 0.1$  m) obtenus à partir des 50 mesures avec la méthode MAP

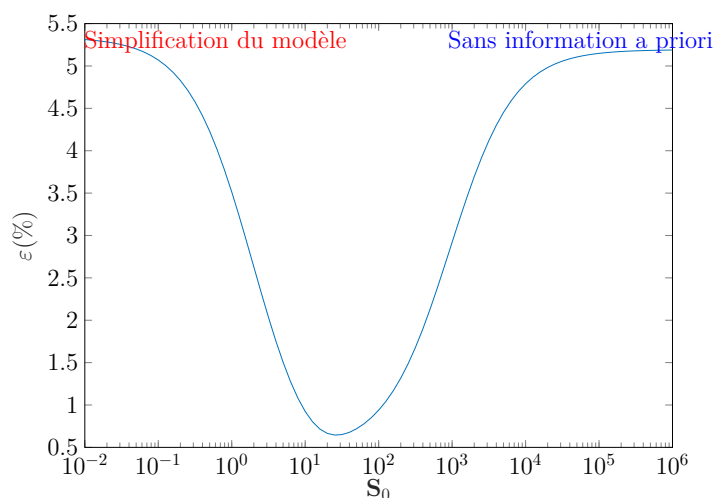


TABLE 4.13 – Erreur quadratique relative en fonction de  $\mathbf{S}_0$

modèle.

#### 4.6.4.4 Autres applications

L'information a priori de la méthode du maximum a posteriori est définie par sa moyenne et sa variance, il est donc aussi possible d'insérer une connaissance totale des coefficients harmoniques. Cette information peut venir des mesures, de la modélisation ou des deux. Ces informations peuvent être incertaines, mais permettent quand-même d'améliorer la résolution du problème lorsque elles sont correctes. Un autre avantage de la méthode MAP est qu'elle nous permet non seulement d'estimer tous les coefficients harmoniques, mais aussi les incertitudes sur chaque composante. La matrice de covariance de  $\mathbf{Q}_{MAP}$  est donné par [Tar04] :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{MAP} &= (\mathbf{A}\mathbf{S}_m^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{S}_0^{-1})^{-1} \\ &= \mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_0\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{S}_0\mathbf{A}^T + \mathbf{S}_m)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}_0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

La diagonale de  $\mathbf{S}_{MAP}$  représente la variance de chaque coefficient harmonique. Un exemple de problème interne est donné dans [Pin14] pour les fils électriques dans une voiture. Le principe est le même pour les problèmes externes. Afin de mieux comprendre la méthode, elle est appliquée à l'exemple de l'inductance de lissage sera montré.

En pratique, on connaît souvent approximativement la forme de l'objet à identifier, mais pas exactement tous les paramètres. L'idée est d'effectuer des modélisations en éléments finis en faisant varier tous

les paramètres géométriques. Puis d'établir l'information a priori, c'est-à-dire obtenir  $\mathbf{Q}_0$  et  $\mathbf{S}_0$  à partir de ces échantillons. De cette manière, le nombre de mesures peut être largement réduit pour identifier le dispositif inconnu.

Reprenons la bobine de lissage de la Figure 4.22, la forme du bobinage, la position des fils d'alimentations, les dimensions du noyau, etc, ne sont pas connues exactement. 20 essais sont effectués avec les différents paramètres géométriques. 8 exemples sont donnés sur la Figure 4.24.

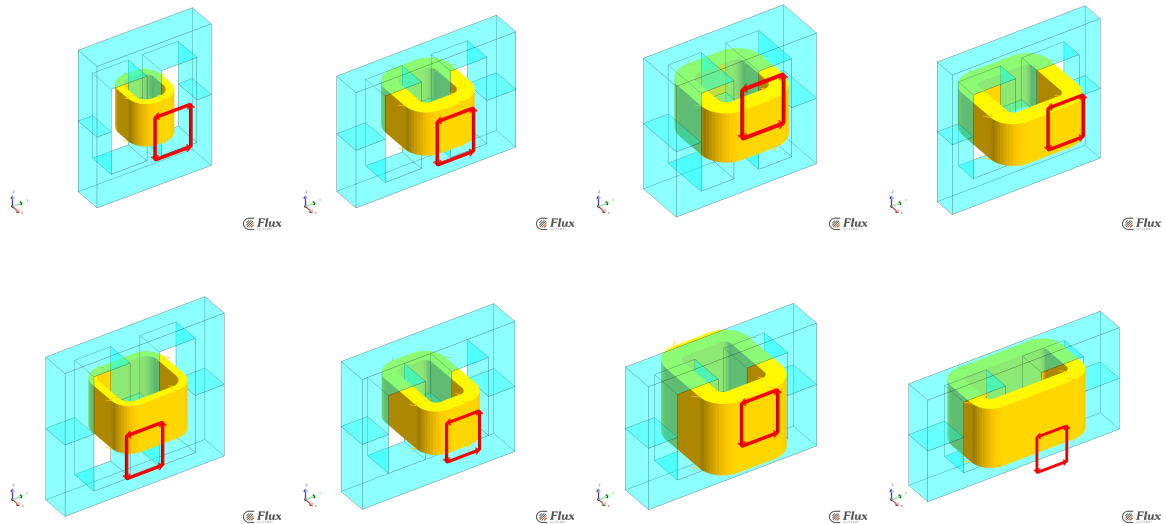


FIGURE 4.24 – 8 exemples de bobines modélisés sous *Flux3d*

Les coefficients harmoniques sont calculés pour chaque essai et leur moyenne donne  $\mathbf{Q}_0$ , présenté dans la Table 4.14.

	- \ +	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$-8.1 \cdot 10^{-4}$	$-6.6 \cdot 10^{-4}$
$N = 1$	-0.68	76.2	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$-3.8 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
$N = 2$	0.46	$-3.3 \cdot 10^{-3}$	-0.22	$7.6 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$-9.6 \cdot 10^{-5}$
$N = 3$	$-7.8 \cdot 10^{-2}$	-4.7	$4.9 \cdot 10^{-2}$	-1.1	$-0.48 \cdot 10^{-4}$	$-1.7 \cdot 10^{-3}$	$-4.3 \cdot 10^{-4}$
$N = 4$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$-6.4 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$-6.1 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$
$N = 5$	$-8.5 \cdot 10^{-3}$	0.70	$5.0 \cdot 10^{-3}$	-0.19	$-4.1 \cdot 10^{-3}$	-0.18	$2.9 \cdot 10^{-3}$
$N = 6$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$-2.2 \cdot 10^{-3}$	$-7.3 \cdot 10^{-3}$	$8.6 \cdot 10^{-5}$	$-6.7 \cdot 10^{-4}$	$-1.5 \cdot 10^{-3}$	$-1.1 \cdot 10^{-2}$

TABLE 4.14 –  $\mathbf{Q}_0$  pondérés par  $r^{-(n+2)}$  ( $r = 0.1$  m) calculé à partir des 20 essais

De même, la matrice de covariance  $\mathbf{S}_0$  peut également être obtenue. Il faut noter ici que les paramètres du vrai dispositif à étudier ne sont pas inclus. Ensuite, à titre d'exemple, 4 points équidistants (répartis sur les quatre sommets d'un tétraèdre régulier) sont choisis pour identifier le dispositif sur la Figure 4.22, jusqu'à l'ordre 6. Comme avant, 300 points uniformément répartis sur la sphère de mesure (une sphère de rayon  $r = 10$  cm) sont choisis comme références, pour comparer la précision des coefficients obtenus. Les erreurs quadratiques relatives sur les inductions magnétiques de ces 300 points  $\varepsilon$  sont calculées et données dans la Table 4.15.

La méthode du maximum du vraisemblance possède ici une erreur extrêmement importante. C'est logique, parce qu'avec 4 équations et 48 inconnues, le problème est donc mal posé, ce qui conduit facilement à une solution sans sens physique. L'erreur sur l'information a priori est aussi très élevée car elle ne correspond pas au vrai modèle. Par contre, la méthode du maximum a posteriori, qui est l'ensemble des

	Maximum de vraisemblance	Information a priori	Maximum a posteriori
$\varepsilon(\%)$	842	50.5	0.063

TABLE 4.15 – Erreurs quadratiques relatives sur les inductions magnétiques pour la méthode du maximum de vraisemblance, l'information a priori et la méthode du maximum a posteriori

deux, possède une excellente précision, avec les coefficients harmoniques comme donnés dans la Table 4.16.

	- \ +	-7.2	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$-1.1 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$-1.2 \cdot 10^{-3}$	$-6.2 \cdot 10^{-4}$
<b>N = 1</b>	-0.63	49.7	0.10	$3.0 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-3}$
<b>N = 2</b>	-1.53	-0.75	0.92	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$-4.2 \cdot 10^{-3}$
<b>N = 3</b>	$-7.7 \cdot 10^{-2}$	-2.4	$-1.8 \cdot 10^{-2}$	-0.86	$-1.1 \cdot 10^{-2}$	$-7.3 \cdot 10^{-4}$	$-9.6 \cdot 10^{-4}$
<b>N = 4</b>	0.10	$-2.6 \cdot 10^{-2}$	$-3.1 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$-5.7 \cdot 10^{-2}$	$-1.4 \cdot 10^{-3}$	$-5.9 \cdot 10^{-3}$
<b>N = 5</b>	$-4.9 \cdot 10^{-3}$	0.33	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$5.0 \cdot 10^{-2}$	$-1.8 \cdot 10^{-3}$	$-6.0 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$
<b>N = 6</b>	$-3.8 \cdot 10^{-3}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-4}$	$8.6 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$

TABLE 4.16 – Coefficients harmoniques pondérés par  $r^{-(n+2)}$  ( $r = 0.1$  m) calculés avec la méthode du maximum a posteriori

L'incertitude de chaque coefficient harmonique peut être calculée à partir de  $\mathbf{S}_0$ . Par exemple, on trouve :  $\delta_{Q_1^0} = 2.65$ ,  $\delta_{Q_3^2} = 1.28$ , etc.

En fait, cette approche est très intéressante pour plusieurs raisons. La première est qu'elle permet d'associer les modélisations numériques et les mesures. Deuxièmement, elle permet de rendre utiles les résultats obtenus précédemment (en modélisations ou en mesures) et de diminuer largement le nombre de mesures, pour obtenir une bonne précision. Par exemple, pour vérifier le rayonnement d'un dispositif sur une chaîne de fabrication, au lieu d'effectuer une grande série de mesures, seulement quelques mesures sont suffisantes pour caractériser la source, en se basant sur l'information a priori. Troisièmement, cette approche peut être une combinaison parfaite avec la méthode des mesures équidistantes, proposée dans la section 4.5.5. Le dispositif inconnu peut être identifié pas à pas en estimant des coefficients harmoniques d'ordre de plus en plus élevé, en mettant le capteur de plus en plus proche, et en utilisant les derniers coefficients identifiés comme information a priori.

Par exemple, en utilisant la méthode de mesures montrée sur la Figure 4.17, une démarche hiérarchique peut être établie. La première étape est d'effectuer 12 mesures, pour identifier les composantes d'ordre 1 et 2. S'il est trouvé que le résidu d'estimation est trop important, 30 mesures seront ajoutées. L'identification sera effectuée pour  $N = 3, 4, 5$ , en utilisant les coefficients de  $N = 1, 2$  qui sont déjà obtenus comme information a priori. Si le résidu n'est toujours pas suffisant, 120 mesures seront ajoutées et l'ordre maximal considéré pour l'identification peut aussi augmenter. Petit à petit, nous enrichissons notre information a priori et augmentons la précision de l'identification.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le problème inverse dont la résolution permet de déterminer les coefficients harmoniques inconnus d'un dispositif. Nous avons vu qu'il existe trois critères importants pour que ce problème inverse soit bien posé : l'existence, l'unicité et la stabilité. Des outils mathématiques ont été présentés, permettant de vérifier ces trois critères.

Ensuite, plus de détails sur la résolution du problème inverse ont été présentés, notamment la méthode



des moindres carrés. La propagation des incertitudes de la méthode est aussi étudiée, ce qui conduit au choix optimal de la dimension du capteur et de l'ordre optimal du développement. Les différentes méthodes de mesures sont également discutées, et il est montré que les mesures équi-distantes sont les plus adaptées.

Enfin, les moyens d'utiliser de l'information a priori ont été étudiés, afin d'augmenter la précision de la résolution ou de diminuer le nombre de mesures nécessaires.

Jusqu'ici, tous les résultats présentés sont théoriques ou numériques. Pour enrichir ce travail et valider finalement toutes les conclusions obtenues, la confrontation à l'expérience est nécessaire. Voici donc tout l'enjeu du dernier chapitre de ce document.

# Approche expérimentale

## 5.1 Introduction

Les quatre premiers chapitres se sont concentrés sur la théorie et la méthode du développement en harmoniques sphériques et sur la résolution du problème inverse. Afin de valider notre approche, la confrontation avec l'expérience est indispensable.

Tout d'abord l'objectif de ce chapitre est de présenter notre système de mesure, y compris la calibration, les appareils, etc. Une première validation avec les spires en circuits imprimés est ensuite effectuée. Enfin, les champs proches d'une inductance de lissage et d'une bobine torique sont mesurés et reconstruits. Ceci nous permet de calculer l'inductance mutuelle entre elles pour n'importe quelle position relative, ces résultats sont comparés aux mesures.

## 5.2 Présentation du système de mesure

Une photographie du système de mesure est présenté sur la Figure 5.1.

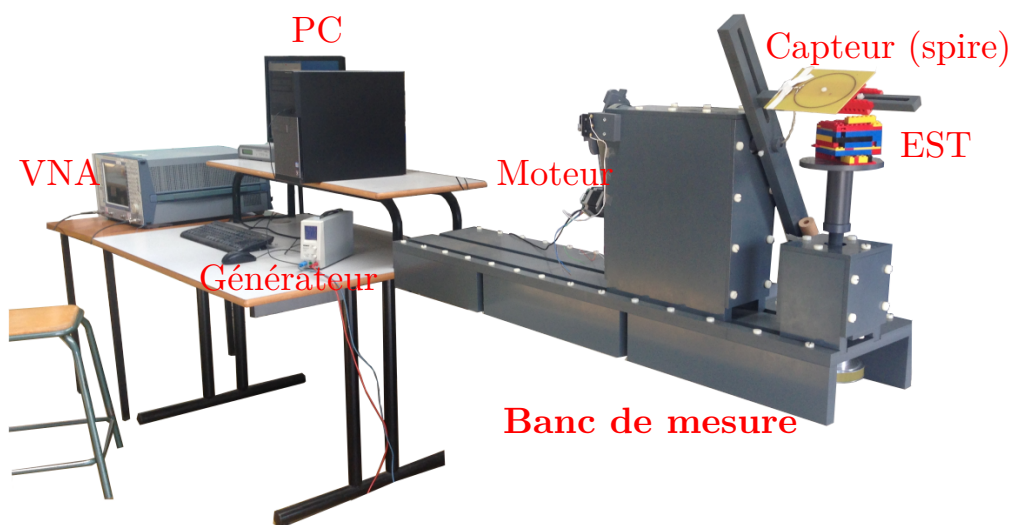


FIGURE 5.1 – Système de mesure

Le système est constitué par les différents éléments suivants :

- Analyseur de réseau (VNA) : alimente le dispositif à identifier et mesure le rapport de tension entre la source et le capteur ;
- 2 moteurs pas à pas : réalisent les rotations automatisées ;
- Générateur basse fréquence : alimente les deux moteurs ;
- PC : contrôle les positions du capteur et acquiert les mesures du VNA ;
- Banc de mesure : déplace le dispositif et le capteur afin de mesurer l'induction magnétique sur une surface sphérique.

Le schéma de principe est donné sur la Figure 5.2.

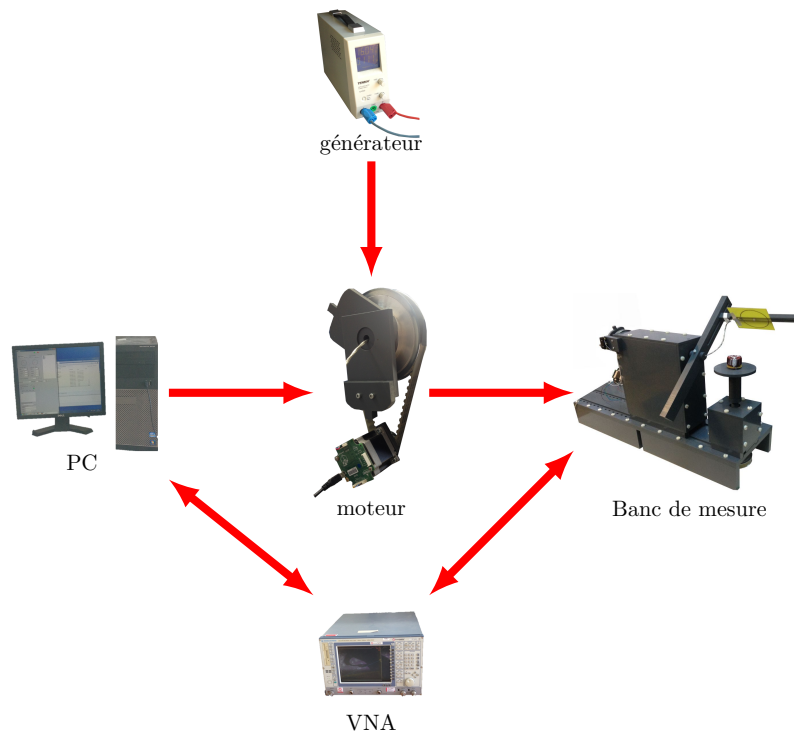


FIGURE 5.2 – Schéma de principe du système de mesure

Pour éviter les champs parasites dus aux courants induits, aucun matériau conducteur n'est utilisé pour la construction du banc, de la même manière, aucun matériau ferromagnétique est utilisé. Le banc est réalisé en PVC (polychlorure de vinyle). Le principe du banc de mesure a déjà été présenté au chapitre 4. Deux mouvements de rotations peuvent être réalisées via : un bras, support de capteur, effectue une rotation par rapport à l'axe vertical ( $\theta$ ) et le support de source tourne autour de l'axe horizontal ( $\varphi$ ). La transmission du mouvement est réalisée par des courroies crantées, ce qui permet d'éloigner les moteurs, pour éviter leurs influences parasites. Les moteurs pas à pas possèdent une précision angulaire de 0.1 degré.

La hauteur du support peut être réglée pour que l'équipement sous test (EST) soit placé au centre de la sphère de mesure. Le capteur est une spire circulaire, en circuit imprimé. Il est montré au chapitre 2 que dans la bande de fréquence de notre étude (20 kHz~20MHz), la spire en circuit imprimé se comporte comme une spire filaire. Le flux d'induction magnétique peut donc être mesuré par le capteur spire posée sur la sphère, avec toutefois une limitation mécanique :  $-130^\circ \leq \theta \leq 130^\circ$ .

### 5.2.1 Analyseur de réseau (VNA)

D'une part, pour mesurer la réponse en fréquence d'un dispositif ou un système, on utilise souvent un générateur sinusoïdal et un oscilloscope. Néanmoins, il faut effectuer une mesure (l'amplitude et la phase du signal) à chaque fréquence. Cela prend beaucoup de temps et la précision n'est pas garantie.

D'autre part, en haute fréquence, les mesures de tension et courant deviennent plus complexes. L'analyseur de réseau est une solution qui permet de surmonter ces deux difficultés. C'est un instrument qui permet de mesurer les paramètres S d'un quadripôle sur une bande de fréquence. Pour comprendre ceci, nous commencerons donc par faire quelques rappels sur le principe du quadripôle.

Le quadripôle peut être représenté de deux façons : soit par les tensions et courants, soit par les ondes incidentes et réfléchies. Le principe est présenté en Figure 5.3.

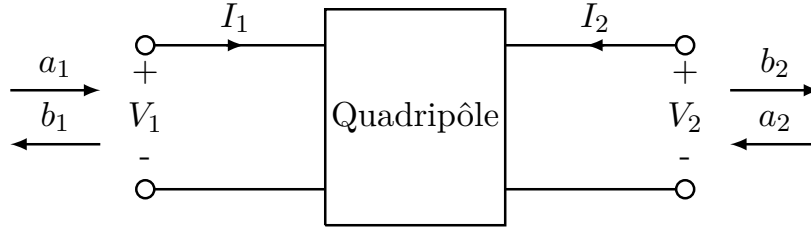


FIGURE 5.3 – Système d'un quadripôle

La relation entre les tensions et les courants peut être décrite par la matrice d'impédance :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}} \quad (5.1)$$

La matrice  $\mathbf{Z}$  représente la matrice d'impédance pour un quadripôle. Les ondes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$  peut être exprimées en fonction des tension et courants :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{V_1 + Z_0 I_1}{2\sqrt{Z_0}} \\ b_1 = \frac{V_1 - Z_0 I_1}{2\sqrt{Z_0}} \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = \frac{V_2 - Z_0 I_2}{2\sqrt{Z_0}} \\ b_2 = \frac{V_2 + Z_0 I_2}{2\sqrt{Z_0}} \end{cases} \quad (5.2)$$

$Z_0$  représente l'impédance caractéristique. De la même manière, la relation entre les ondes peut être décrite par [Orf] :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} \quad (5.3)$$

La matrice  $\mathbf{S}$  contient l'ensemble des paramètres  $S$ , chaque élément de la matrice est obtenue en faisant un rapport entre les énergies des deux ondes : une onde transmise ou réfléchi  $b_n$  et une onde incidente  $a_m$ . Dans le cas où  $a_2 = 0$ , cela signifie que le port 2 du quadripôle est adapté (en pratique, on a souvent  $Z_0 = 50\Omega$ ), alors  $S_{11} = \frac{b_1}{a_1}$  est le coefficient de réflexion vu par le port 1 et  $S_{21} = \frac{b_2}{a_1}$  est le coefficient de transmission du port 1 au port 2.

Le paramètre  $S_{22}$  est obtenu en alimentant uniquement le port 2,  $a_1 = 0$ , en mesurant le rapport  $b_2/a_2$ , ce paramètre correspond au coefficient de réflexion sur le port 2. De même, en alimentant uniquement le port 2 et en mesurant  $b_1/a_2$ , on évalue le paramètre  $S_{12}$ , coefficient de transmission du port 2 vers le port 1.

Selon l'équation (2.111), pour déterminer le flux d'induction magnétique à travers le capteur, il faut seulement déterminer  $L_{21}$  entre le capteur et l'EST, ceci revient au même que de mesurer l'impédance  $Z_{21}$  du quadripôle. Néanmoins, notre analyseur de réseau permet de mesurer le paramètre  $S_{21}$  sur une large bande de fréquence. La relation entre les matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{Z}$  est définie par :

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z} - Z_0 \mathbf{I})(\mathbf{Z} + Z_0 \mathbf{I})^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{S})Z_0 \quad (5.4)$$

$\mathbf{I}$  représente la matrice identité et  $Z_0$  est l'impédance caractéristique ( $50 \Omega$ ). On a alors :

$$S_{21} = \frac{2Z_0 Z_{21}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0) - Z_{12} Z_{21}} \quad (5.5)$$

$Z_{11}$  et  $Z_{22}$  représentent respectivement l'impédance de l'EST et l'impédance du capteur. Le terme

$Z_{12}Z_{21}$  peut être négligé car il est suffisamment petit devant  $(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0)$ . On a alors :

$$Z_{21} = \frac{S_{21} \cdot (Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0)}{2Z_0} \quad (5.6)$$

Pour conclure, afin de déterminer le flux d'induction à travers le capteur, il suffit de mesurer le  $S_{21}$  et les impédances de l'EST et du capteur.

## 5.2.2 Bande passante de résolution

« La résolution d'un analyseur de spectre dépend de la bande passante et du gabarit du filtre  $f_i$ , mais également de modulations de fréquences résiduelles et du bruit de phase de l'oscillateur local » [Mul00]. La bande passante de résolution (RBW : resolution bandwidth) est un paramètre très important pour l'analyseur de réseau, qui détermine le niveau de bruit et la proximité de composantes distinctes en fréquence. Le principe est présenté en Figure 5.4.

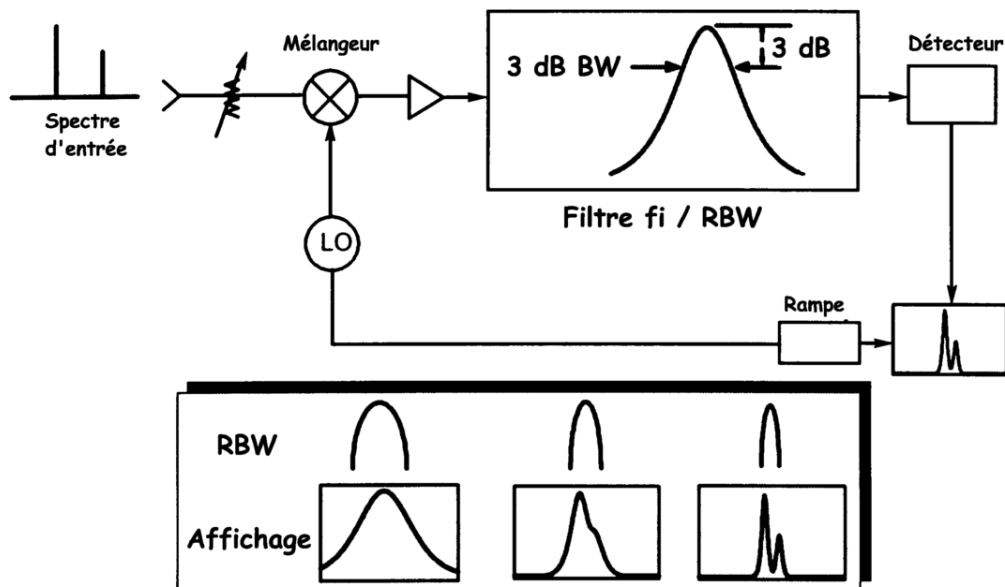


FIGURE 5.4 – Principe de l'influence de la bande passante de résolution [Mul00]

Il est clair que la bande passante de résolution ne peut pas être infiniment fine. La réduction de la bande passante de résolution diminue le niveau de bruit mesuré et vice versa. Cela s'explique par le fait que les RBW plus élevés transmettent plus de composantes de fréquence que des RBW inférieures, donc un RBW plus élevé entraîne un niveau de bruit de mesure plus élevé. Cependant, le temps de balayage en fréquence est largement réduite lorsque la RBW est augmenté. C'est toujours un problème de trouver le compromis entre la précision et le temps de mesure. Une étude sur l'influence du paramètre RBW sur la précision de mesure est effectuée pour notre VNA. 25 mesures sont effectuées sur un méridien d'une sphère de mesure d'une spire de courant pour différents RBW. Chaque mesure ( $B_i^m$ ) est basée sur un balayage en fréquence de 51 points. Les flux d'induction mesurés, calculés par les coefficients harmoniques, sont choisis comme la référence ( $B_i^r$ ) et l'erreur quadratique relative est calculée pour chaque RBW donné par :

$$\epsilon^2 = \frac{\sum_1^{51} (B_i^m - B_i^r)^2}{\sum_1^{51} (B_i^r)^2} \quad (5.7)$$

Les résultats sont donnés sur la Figure 5.5.

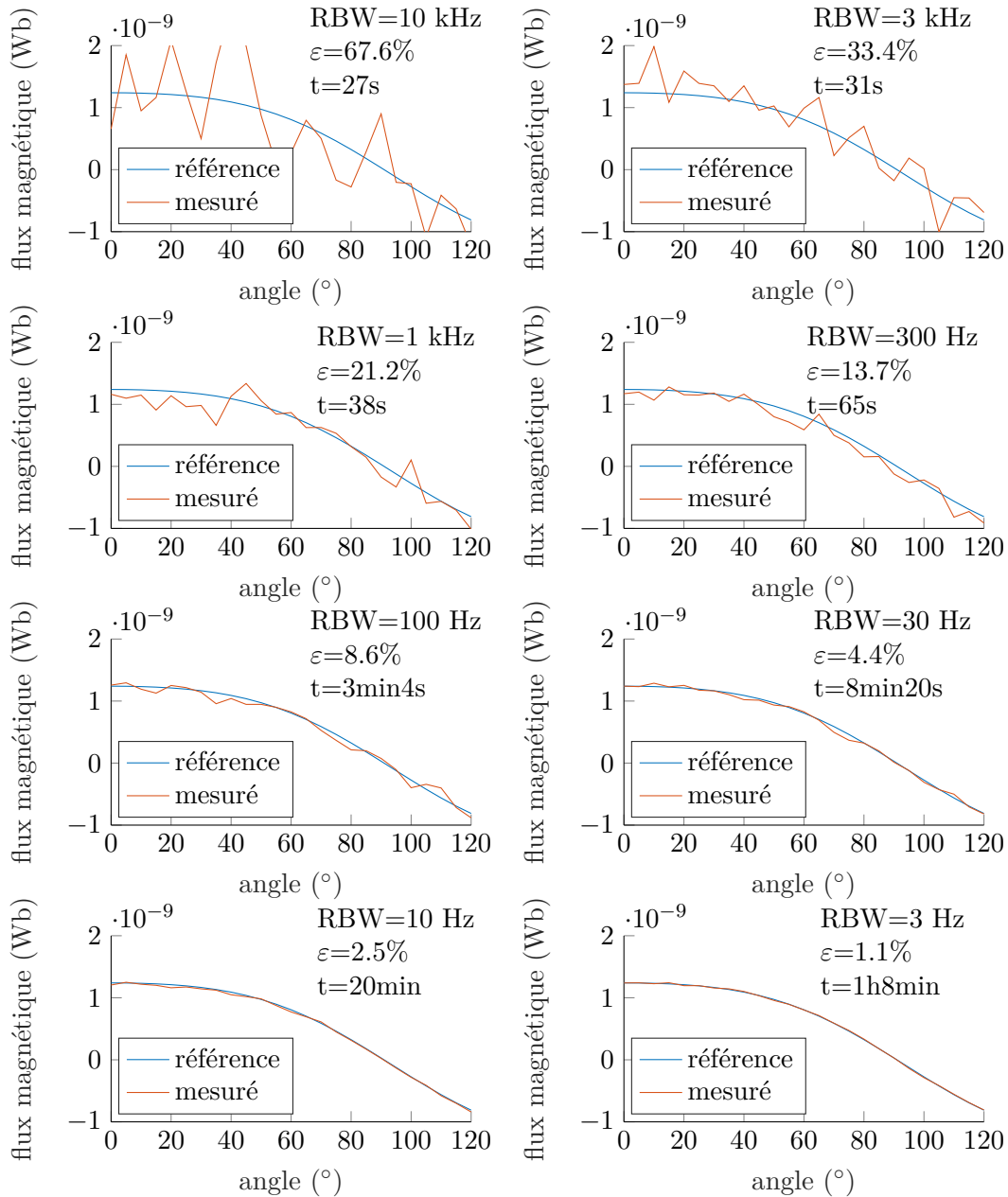


FIGURE 5.5 – Mesures des flux d'induction magnétique pour différentes RBW

$t$  représente le temps de mesure. La conclusion précédente est donc vérifiée : plus la RBW est petite, plus la mesure sera précise, et le temps de mesure sera plus important. La Figure 5.6 nous permet de trouver un compromis entre ces trois paramètres.

Dans ce travail, la bande passante de résolution est choisie à 10 Hz, qui est largement suffisant pour scanner l'induction magnétique autour de l'EST avec une bonne précision.

### 5.2.3 Interface graphique

Une interface graphique a été développée en JAVA <sup>1</sup> permettant premièrement de contrôler les positions de mesures via deux cartes de commandes pour piloter les moteurs pas à pas. Deuxièmement

1. par Olivier Fabregue

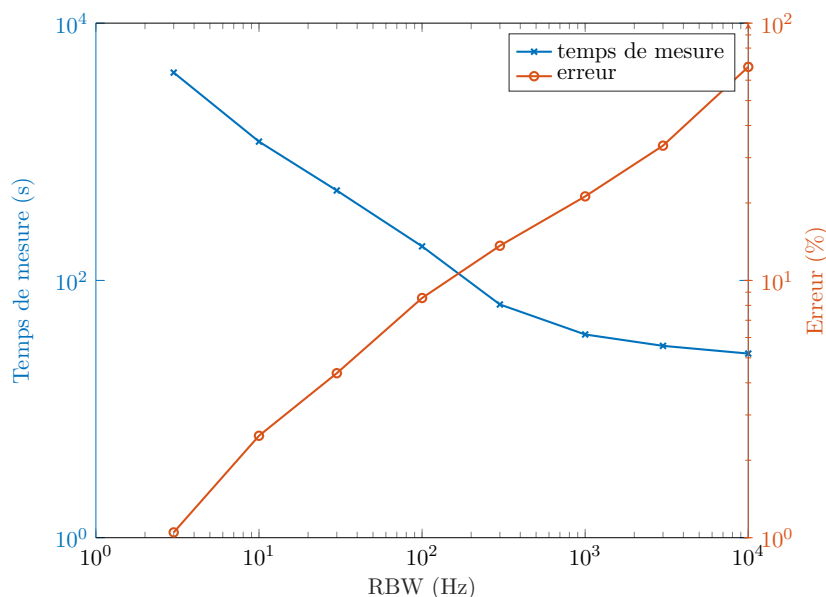


FIGURE 5.6 – Temps de mesure et erreur quadratique en fonction de la RBW

elle permet de sauvegarder et acquérir les mesures sur chaque position par réseau Ethernet. L'interface graphique est présentée en Figure 5.7.

La partie commande des moteurs nous permet non seulement de contrôler les mouvements des moteurs, mais aussi d'obtenir la position exacte du capteur. Il existe deux modes de fonctionnement, chacun possède une méthode de mesure différente. Le premier mode est la mesure équi-angulaire. Celui-ci définit un intervalle et aussi un pas pour  $\theta$  et  $\varphi$ . Le deuxième mode nous permet de définir une suite de couples de coordonnées angulaires à mesurer, qui rend la mesure équi-distante possible. La partie de la configuration du VNA est présentée sur la Figure 5.8. Elle permet de définir tous les paramètres du VNA, tels que la fréquence de balayage, RBW, le moyennage, la puissance de la source, etc.

## 5.3 Validation pour deux boucles de courant

Les premières mesures ont été effectuées pour deux spires circulaires, afin de valider notre système de mesure et l'approche du développement en harmoniques sphériques. Les deux spires sont présentées en Figure 5.9.

Les deux spires circulaires sont réalisées en circuits imprimés, avec les fils d'alimentations torsadés. Des "legos techniques" sont utilisés pour fixer les sources à mesurer, ce qui permet de contrôler leurs positions relatives et l'origine du développement harmonique.

### 5.3.1 Caractérisations des deux spires en circuit imprimé

Chaque EST est mesuré séparément et on commence par la spire de 5 cm. Comme montré dans l'équation (5.6), pour calculer le flux d'induction magnétique sur chaque position, il faut déterminer  $Z_{11}$  et  $Z_{22}$ , c'est-à-dire les impédances de l'EST et du capteur. Les impédances peuvent être mesurées directement par un analyseur d'impédance Agilent 4294A présenté sur la Figure 5.10. Cet instrument permet de mesurer l'impédance d'un composant ou d'un circuit électrique sur une bande de fréquence.

L'impédance de la spire de 5 cm est mesurée, avec bien sûr son fil d'alimentation coaxial de 2 m. Les résultats sont donnés en la Figure 5.11.

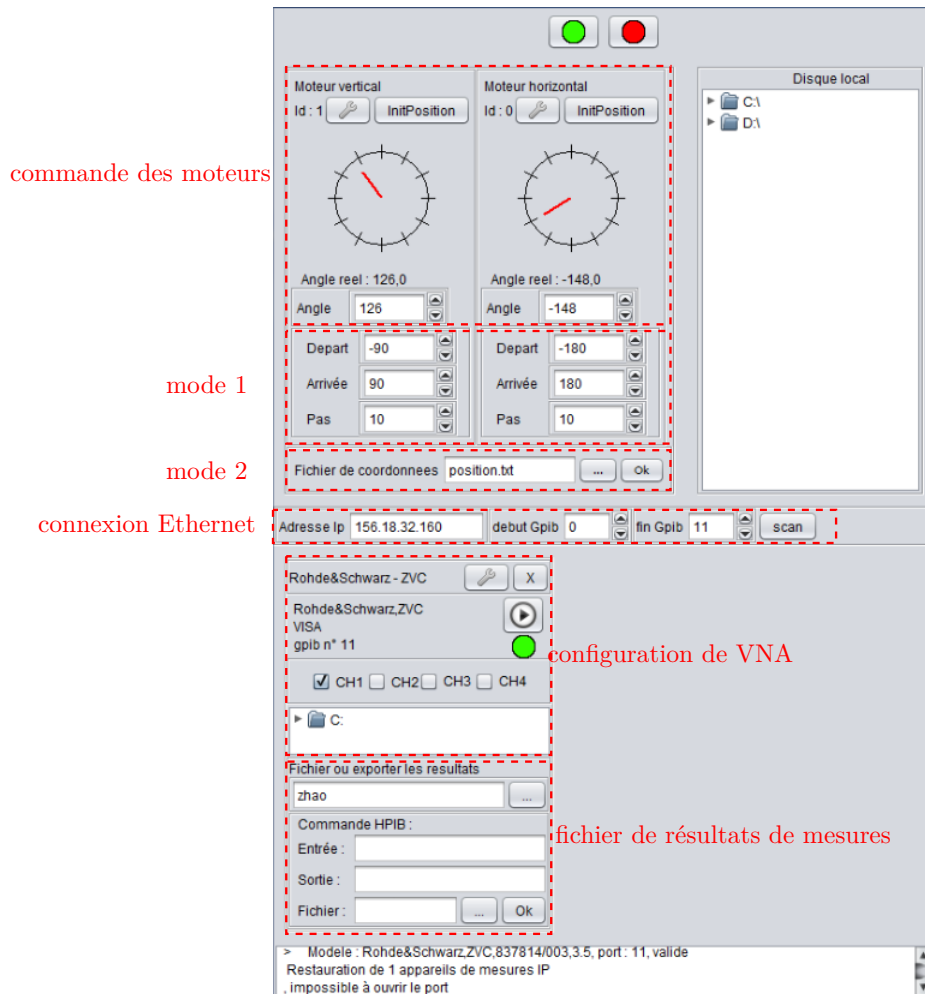


FIGURE 5.7 – Interface graphique

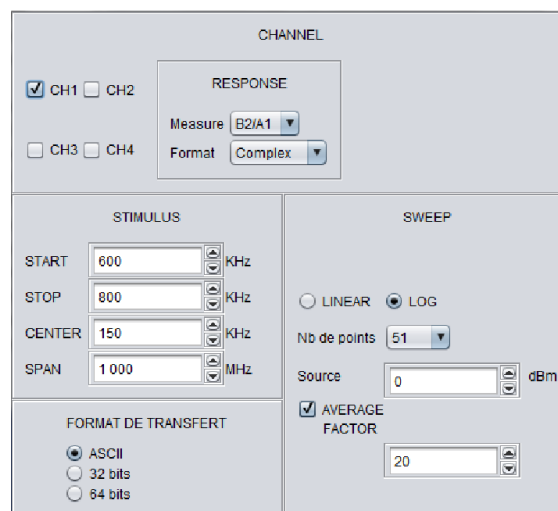


FIGURE 5.8 – Configuration de VNA dans l'interface graphique

L'impédance de l'EST est mesurée en fonction de la fréquence entre 100 kHz et 1 MHz. La partie réelle et la partie imaginaire sont représentées respectivement en bleu et rouge. On peut constater que la partie réelle est presque une constante et reste négligeable devant la partie imaginaire, qui est proportionnelle à



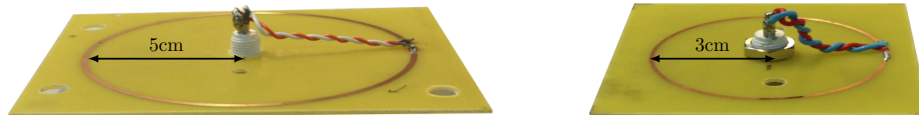


FIGURE 5.9 – 2 spires circulaires à caractériser



FIGURE 5.10 – Analyseur d'impédance

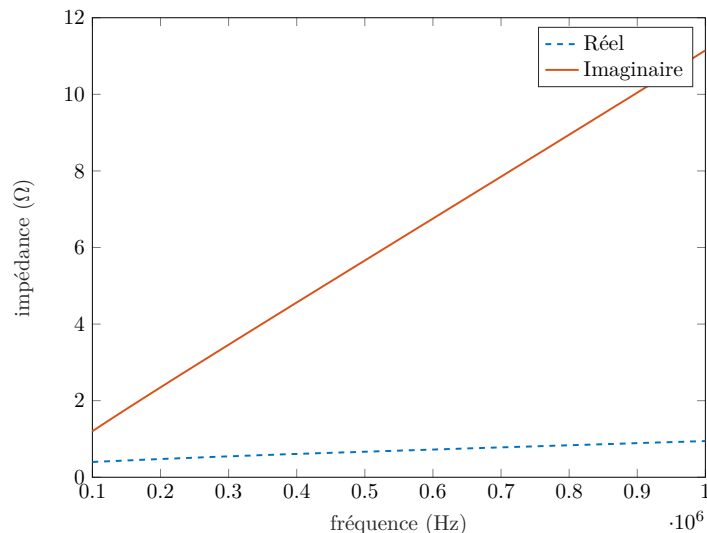


FIGURE 5.11 – Impédance mesurée de la spire de 5 cm avec le fil d'alimentation en fonction de la fréquence

la fréquence. Ceci permet de montrer que  $Z_{11}$  est un « RL » pure avec  $R \simeq 0.6 \Omega$  et  $L \simeq 1.8 \mu\text{H}$ .  $Z_{22}$  qui représente l'impédance du capteur doit aussi être mesurée. Il est mentionné plusieurs fois que le capteur est aussi une boucle de courant de 5 cm, et son impédance est également la même que  $Z_{11}$ . Les deux spires seront étudiées à 500 kHz.

L'étape suivante est de mesurer l'induction magnétique autour de l'EST avec le système de mesure automatisé. A cause de la contrainte mécanique, le mouvement du bras vertical est limité entre  $-130^\circ$  et  $130^\circ$ . Afin d'avoir un meilleur rapport signal sur bruit, le capteur est placé au plus près possible avec une distance de 12.8 cm du centre de sphère de mesure. Il est montré au chapitre 4 que la méthode équidistante est la meilleure méthode de mesure pour identifier une source inconnue et possède le plus faible conditionnement. En se basant sur la méthode itérative à partir d'un icosaèdre (Figure 4.17), 131 points de mesures sont choisis, répartis d'une façon équidistante sur la sphère. Les résultats de mesures sont donnés sur la Figure 5.12.

A partir de ces mesures, les coefficients harmoniques peuvent être déterminés en appliquant la méthode

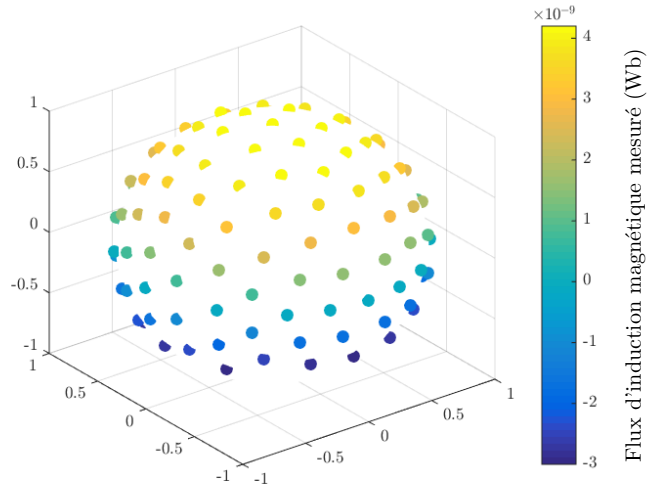


FIGURE 5.12 – Flux d'induction magnétique mesuré de la spire circulaire de 5 cm sur une sphère de  $r_M = 12.8$  cm

des moindres carrées. Le critère d'Akaike en équation (4.53) est utilisé pour choisir l'ordre maximal du développement.

$N_{max}$	2	3	4	5	6	7
$AIC_c$	$-5.71 \cdot 10^3$	$-5.94 \cdot 10^3$	$-6.00 \cdot 10^3$	$-6.05 \cdot 10^3$	$-6.03 \cdot 10^3$	$-6.01 \cdot 10^3$

TABLE 5.1 – Coefficient d'Akaike corrigé en fonction de l'ordre du développement

Sur la Table 5.1, on peut constater que le coefficient d'Akaike corrigé est minimisé lorsque  $N_{max} = 5$ . Le développement est donc réalisé jusqu'à l'ordre 5, les coefficients harmoniques sont présentés dans la Table 5.2.

	-	+	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$-1.8 \cdot 10^{-7}$	$-3.8 \cdot 10^{-9}$	$-1.5 \cdot 10^{-9}$	$8.9 \cdot 10^{-11}$	
$N = 1$			$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$-5.1 \cdot 10^{-6}$	$5.5 \cdot 10^{-9}$	$-1.9 \cdot 10^{-9}$	$-4.7 \cdot 10^{-11}$
$N = 2$			$-6.8 \cdot 10^{-8}$	$8.7 \cdot 10^{-8}$	$-2.4 \cdot 10^{-6}$	$-4.0 \cdot 10^{-8}$	$-1.1 \cdot 10^{-9}$	$-3.5 \cdot 10^{-11}$
$N = 3$			$-1.3 \cdot 10^{-9}$	$-1.8 \cdot 10^{-9}$	$-8.1 \cdot 10^{-9}$	$-7.1 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$
$N = 4$			$-7.0 \cdot 10^{-10}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$	$-1.0 \cdot 10^{-8}$	$-2.0 \cdot 10^{-9}$	$-8.2 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$
$N = 5$			$-3.9 \cdot 10^{-11}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$	$-4.7 \cdot 10^{-11}$	$6.3 \cdot 10^{-10}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$7.5 \cdot 10^{-9}$

TABLE 5.2 – Coefficients harmoniques de la spire de 5 cm déterminés à partir de 131 mesures

La valeur de la composante principale  $Q_1^0 = 1.3 \cdot 10^{-3}$  est exactement la même que la valeur théorique, qui est présentée dans la Table 2.6. Les composantes de moment nul sont plus importantes par rapport aux autres composantes du même ordre. L'existence de ces composantes moment non nul peut être expliquée par trois raisons : la première est l'incertitude de mesure (incertitude de position, bruit d'environnement, etc.) ; la deuxième est le dé-centrage de l'EST ; la troisième est le fil d'alimentations. Ce dernier est réalisé par les fils torsadés, qui risque d'engendrer les rayonnement complexes. Le champ d'induction magnétique sur la sphère de mesure engendré par ces coefficients harmoniques est calculé et tracé sur la Figure 5.13.

Afin de vérifier les coefficients en Table 5.2, l'erreur quadratique relative du flux d'induction magnétique estimé est calculée par rapport aux mesures de la Figure 5.12 et on trouve 1.6%. Ceci reste

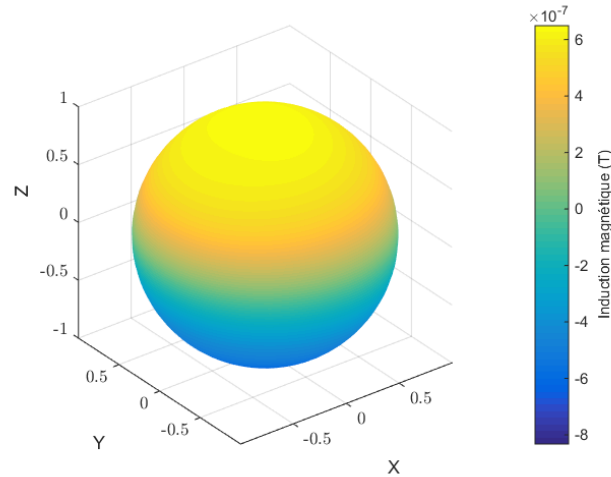


FIGURE 5.13 – Induction magnétique estimée à partir des coefficients harmoniques en Table 5.2 sur la sphère de mesure de rayon  $r_m = 12.8$  cm

acceptable.

La même approche est effectuée pour la spire de 3 cm ; les coefficients harmoniques calculés à partir de ces mesures sont donnés dans la Table 5.3.

	-	+	$-9.0 \cdot 10^{-6}$	$-6.6 \cdot 10^{-8}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$-3.6 \cdot 10^{-10}$	$2.0 \cdot 10^{-11}$	
N = 1			$2.2 \cdot 10^{-6}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$-2.0 \cdot 10^{-9}$	$-4.7 \cdot 10^{-10}$	$-1.3 \cdot 10^{-11}$
N = 2			$1.2 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$-4.8 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-11}$	$-1.9 \cdot 10^{-10}$
N = 3			$-4.6 \cdot 10^{-10}$	$-1.9 \cdot 10^{-8}$	$-6.8 \cdot 10^{-9}$	$-1.8 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$3.1 \cdot 10^{-11}$
N = 4			$-3.1 \cdot 10^{-10}$	$2.8 \cdot 10^{-10}$	$-2.9 \cdot 10^{-10}$	$-1.7 \cdot 10^{-10}$	$-6.3 \cdot 10^{-11}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$
N = 5			$-1.0 \cdot 10^{-11}$	$3.3 \cdot 10^{-11}$	$-6.2 \cdot 10^{-13}$	$-3.3 \cdot 10^{-10}$	$4.2 \cdot 10^{-13}$	$1.6 \cdot 10^{-12}$

TABLE 5.3 – Coefficients harmoniques de la spire de 3 cm déterminés à partir de 131 mesures

### 5.3.2 Inductances mutuelles entre les deux spires circulaires en circuits imprimés

Les objectifs de ce travail ne sont pas seulement d'identifier les sources inconnues, mais aussi de déterminer le couplage inductif entre deux dispositifs pour n'importe quelle position relative, basé sur les coefficients harmoniques correspondants.

Rappelons l'expression du calcul de l'inductance mutuelle à partir des coefficients harmoniques de chaque source (équation (2.126)) :

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{I_1 I_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n {}_1 Q_n^m {}_2 Q_n^m \quad (5.8)$$

Reprenons les deux spires en circuits imprimés ; l'inductance entre elles sera calculée en utilisant leurs coefficients harmoniques, et ensuite comparée avec la valeur obtenue par la méthode de mesure directe. Commençons par le cas vertical où les deux spires sont placées comme présentées en Figure 5.14.

La distance  $d$  entre les deux spires est contrôlée par les legos techniques. A gauche de la Figure 5.15, le cas des spires filaires est étudié. Les valeurs analytiques (page 175 dans [Dur68]) de l'inductance mutuelle

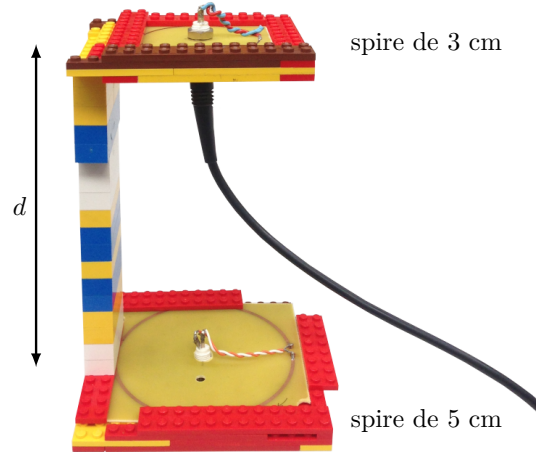


FIGURE 5.14 – Deux spires en circuits imprimés placées verticalement

sont comparées avec les valeurs calculées avec les coefficients harmoniques pour les différents  $N_{max}$ . La précision augmente avec  $N_{max}$  et  $L_{12}$  pour  $N_{max} = 5$  est presque la même que la valeur analytique.

Ensuite, le cas des deux spires en circuits imprimés est étudié. L'inductance mutuelle est mesurée pour chaque distance, et comparée avec celle calculée avec les coefficients harmoniques, qui sont identifiés séparément par les mesures. Les résultats sont présentés sur la droite de la Figure 5.15, avec aussi les valeurs théoriques entre deux spires filaires.

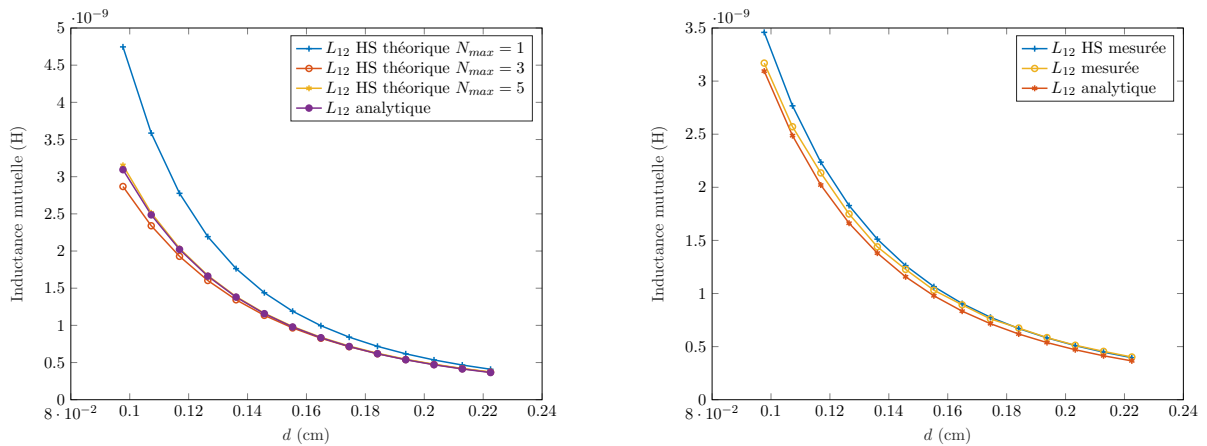


FIGURE 5.15 – Inductance mutuelle entre les deux spires filaires (gauche) ; en circuits imprimés (droite) en fonction de la distance entre elles

On peut constater qu'il existe un petit écart entre  $L_{12}$  mesurée et  $L_{12}$  analytique. Cette différence provient probablement des incertitudes sur les sources et les fils d'alimentation, qui ne sont pas considérés en analytique. La valeur calculée en harmoniques sphériques reste aussi très proche de la mesure directe. Pour quantifier les erreurs, l'erreur relative sur  $L_{12}$  en HS et  $L_{12}$  analytique est calculée par rapport à la mesure, les résultats sont donnés en Figure 5.16.

Sur cette figure, on peut constater que l'inductance mutuelle calculée en harmoniques sphériques possède une bonne précision avec une erreur inférieure à 10%. Cette erreur diminue lorsque  $d$  augmente, plus les sources sont loin l'une de l'autre, moins  $N_{max}$  nécessaire est important pour décrire leurs inductions magnétiques. Il en est de même pour le calcul de l'inductance mutuelle.

Les deux sources sont identifiées aussi pour les moments non nuls, ce qui nous permet de calculer

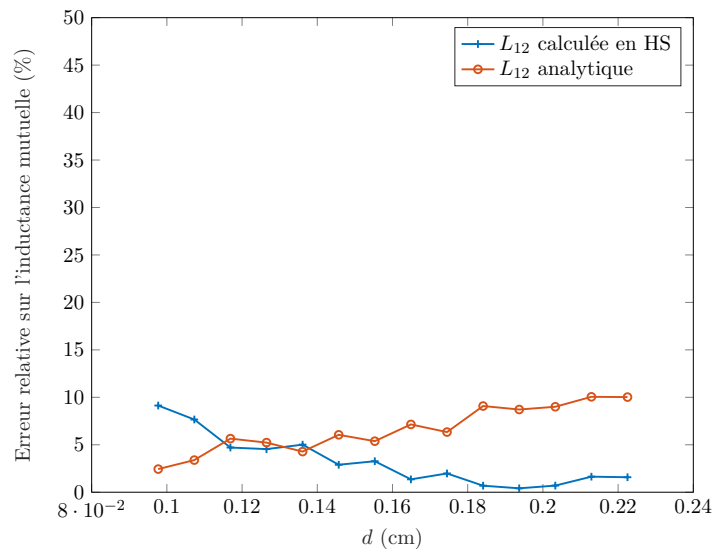


FIGURE 5.16 – Erreurs relatives sur l'inductance mutuelle calculée en harmoniques sphériques et sur la valeur analytique par rapport à la mesure

leur inductance mutuelle non seulement lorsque les deux spires sont coaxiales, mais aussi dans l'autre situation. Un autre exemple avec décalage horizontal suivant l'axe  $x$  est donc donné. La configuration des deux sources est présentée sur la Figure 5.17.

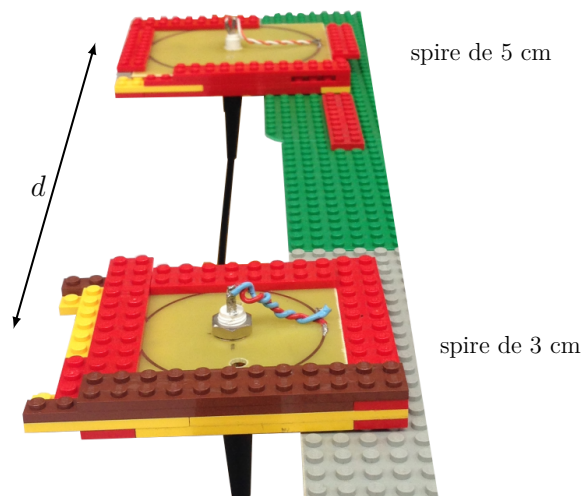


FIGURE 5.17 – Deux spires coplanaires en circuits imprimés

Les deux spires en circuits imprimés sont placées côte à côte d'une façon coplanaire.  $d$  est la distance entre les deux origines du développement. L'inductance mutuelle entre elles est étudiée pour les différentes valeurs de  $d$ . Les résultats sont présentés en Figure 5.18.

On peut constater que l'inductance mutuelle calculée par l'approche en harmoniques sphériques est très proche de celle mesurée directement. Son erreur relative est donnée sur la Figure 5.19.

De manière similaire au cas coaxial, l'erreur relative de l'approche en harmoniques sphériques est faible (inférieur à 10%) et diminue lorsque la distance entre les deux sources augmente. Ceci s'explique par le fait que plus les deux sources sont loin l'une de l'autre, moins  $N_{max}$  nécessaire est important pour calculer l'inductance mutuelle entre elles. Lorsque les sources sont suffisamment loin l'une de l'autre, seule la composante d'ordre 1 est requise pour calculer l'inductance mutuelle.

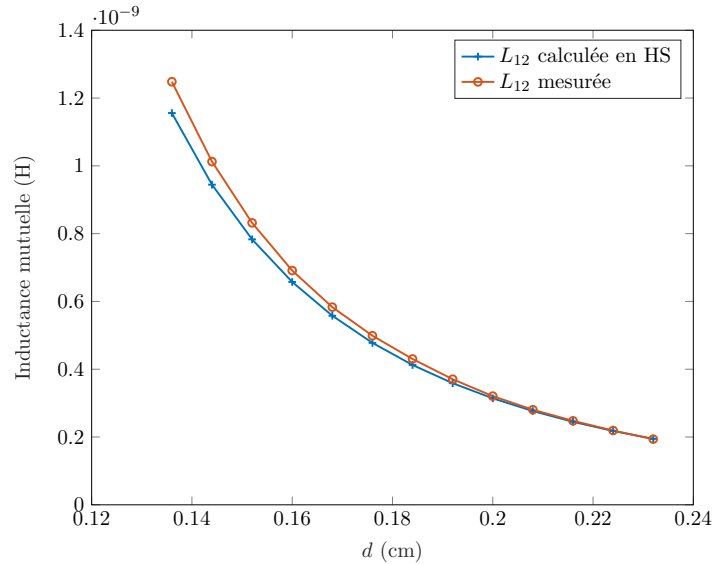


FIGURE 5.18 – Inductance mutuelle entre les deux spires en circuits imprimés en fonction de la distance entre elles

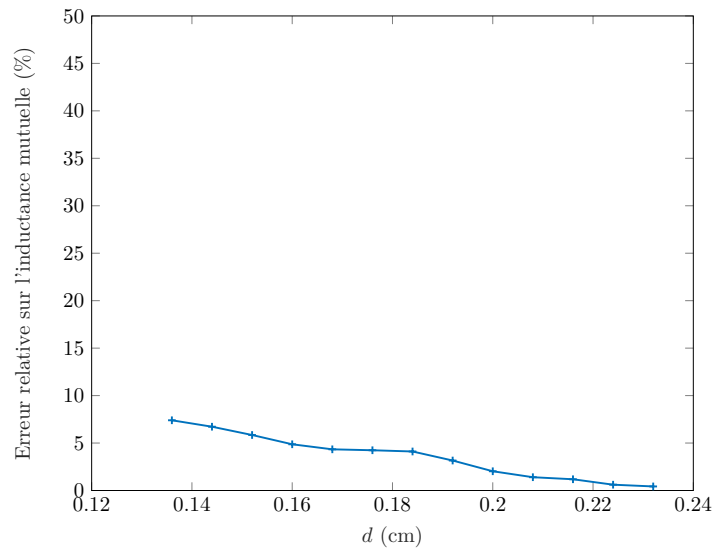


FIGURE 5.19 – Erreurs relatives sur l'inductance mutuelle calculée en harmoniques sphériques par rapport à la mesure

### 5.3.3 Propagation des incertitudes

#### Estimation des incertitudes en répétitions de mesures

En pratique, il est toujours important de déterminer la précision d'une série de mesures, c'est-à-dire de connaître les incertitudes des mesures et aussi des résultats finaux, obtenus à partir des mesures. Une étude théorique a déjà été effectuée dans §4.5.2. L'incertitude de mesure de flux d'induction magnétique sur chaque position peut être déterminée par répétition de la mesure. Reprenons l'exemple des deux spires coplanaires. 7 séries de mesures ont été effectuées pour chaque source, ceci nous permet de déterminer  $\mathbf{B}_0$  et  $\delta\mathbf{B}$  dans les équations (4.40) et (4.41). On peut donc en déduire  $\hat{\mathbf{Q}}$  et  $\delta\mathbf{Q}$  en appliquant (4.40) et (4.41). Les résultats sont donnés dans la Table 5.4.

On peut constater que les composantes d'ordre faible ( $N = 1, 2$  et  $3$ ) ont une bonne précision, c'est-à-

	- \ +					
		$-1.0 \cdot 10^{-5} \pm 5.5 \cdot 10^{-7}$	$-5.2 \cdot 10^{-8} \pm 3.0 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-10} \pm 1.1 \cdot 10^{-9}$	$-4.3 \cdot 10^{-10} \pm 1.9 \cdot 10^{-11}$	$3.2 \cdot 10^{-11} \pm 1.3 \cdot 10^{-11}$
<b>N = 1</b>	$3.1 \cdot 10^{-6} \pm 3.6 \cdot 10^{-7}$	$4.6 \cdot 10^{-4} \pm 1.5 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-7} \pm 4.2 \cdot 10^{-8}$	$-2.4 \cdot 10^{-9} \pm 7.2 \cdot 10^{-10}$	$-2.0 \cdot 10^{-10} \pm 1.6 \cdot 10^{-10}$	$6.3 \cdot 10^{-12} \pm 5.8 \cdot 10^{-12}$
<b>N = 2</b>	$1.2 \cdot 10^{-7} \pm 1.8 \cdot 10^{-9}$	$2.1 \cdot 10^{-7} \pm 8.3 \cdot 10^{-9}$	$-1.5 \cdot 10^{-6} \pm 1.1 \cdot 10^{-7}$	$6.6 \cdot 10^{-9} \pm 1.0 \cdot 10^{-8}$	$-1.3 \cdot 10^{-10} \pm 6.5 \cdot 10^{-11}$	$-8.2 \cdot 10^{-11} \pm 8.0 \cdot 10^{-11}$
<b>N = 3</b>	$-4.8 \cdot 10^{-10} \pm 2.0 \cdot 10^{-10}$	$-1.5 \cdot 10^{-8} \pm 9.3 \cdot 10^{-9}$	$-8.7 \cdot 10^{-9} \pm 6.3 \cdot 10^{-10}$	$-9.9 \cdot 10^{-8} \pm 1.4 \cdot 10^{-7}$	$6.5 \cdot 10^{-10} \pm 6.1 \cdot 10^{-11}$	$4.8 \cdot 10^{-11} \pm 1.5 \cdot 10^{-11}$
<b>N = 4</b>	$-2.9 \cdot 10^{-10} \pm 5.0 \cdot 10^{-11}$	$1.4 \cdot 10^{-10} \pm 1.2 \cdot 10^{10}$	$4.5 \cdot 10^{-11} \pm 3.3 \cdot 10^{-10}$	$-1.6 \cdot 10^{-11} \pm 2.5 \cdot 10^{-10}$	$-5.8 \cdot 10^{-9} \pm 1.2 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-10} \pm 1.2 \cdot 10^{-10}$
<b>N = 5</b>	$-4.2 \cdot 10^{-12} \pm 2.6 \cdot 10^{-12}$	$2.4 \cdot 10^{-11} \pm 2.6 \cdot 10^{-11}$	$-1.1 \cdot 10^{-12} \pm 6.8 \cdot 10^{-12}$	$-1.9 \cdot 10^{-10} \pm 2.1 \cdot 10^{-10}$	$-9.0 \cdot 10^{-12} \pm 2.3 \cdot 10^{-11}$	$3.7 \cdot 10^{-10} \pm 6.2 \cdot 10^{-10}$

Spire de 3 cm

	- \ +					
		$1.8 \cdot 10^{-5} \pm 2.9 \cdot 10^{-6}$	$-1.1 \cdot 10^{-7} \pm 1.1 \cdot 10^{-8}$	$-7.3 \cdot 10^{-9} \pm 5.5 \cdot 10^{-10}$	$-1.6 \cdot 10^{-9} \pm 1.4 \cdot 10^{-11}$	$1.2 \cdot 10^{-10} \pm 5.8 \cdot 10^{-13}$
<b>N = 1</b>	$1.1 \cdot 10^{-5} \pm 2.8 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-3} \pm 9.6 \cdot 10^{-5}$	$-4.6 \cdot 10^{-6} \pm 5.3 \cdot 10^{-9}$	$-1.6 \cdot 10^{-9} \pm 1.3 \cdot 10^{-9}$	$-2.3 \cdot 10^{-10} \pm 1.4 \cdot 10^{-10}$	$-1.5 \cdot 10^{-11} \pm 4.3 \cdot 10^{-12}$
<b>N = 2</b>	$1.5 \cdot 10^{-7} \pm 4.2 \cdot 10^{-8}$	$2.1 \cdot 10^{-8} \pm 4.4 \cdot 10^{-8}$	$2.2 \cdot 10^{-6} \pm 8.1 \cdot 10^{-7}$	$-1.1 \cdot 10^{-7} \pm 4.4 \cdot 10^{-9}$	$3.5 \cdot 10^{-11} \pm 2.0 \cdot 10^{-10}$	$-2.3 \cdot 10^{-10} \pm 6.2 \cdot 10^{-11}$
<b>N = 3</b>	$-6.2 \cdot 10^{-10} \pm 8.5 \cdot 10^{-10}$	$-4.6 \cdot 10^{-8} \pm 2.0 \cdot 10^{-8}$	$-4.3 \cdot 10^{-9} \pm 5.0 \cdot 10^{-9}$	$-1.1 \cdot 10^{-6} \pm 7.1 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-8} \pm 6.6 \cdot 10^{-10}$	$1.6 \cdot 10^{-10} \pm 3.1 \cdot 10^{-11}$
<b>N = 4</b>	$-8.2 \cdot 10^{-10} \pm 7.2 \cdot 10^{-11}$	$3.2 \cdot 10^{-11} \pm 9.7 \cdot 10^{-12}$	$-4.8 \cdot 10^{-10} \pm 2.4 \cdot 10^{-9}$	$-7.8 \cdot 10^{-10} \pm 5.8 \cdot 10^{-10}$	$-4.4 \cdot 10^{-8} \pm 6.2 \cdot 10^{-8}$	$4.8 \cdot 10^{-10} \pm 1.3 \cdot 10^{-10}$
<b>N = 5</b>	$-2.6 \cdot 10^{-11} \pm 1.0 \cdot 10^{-11}$	$3.9 \cdot 10^{-11} \pm 2.7 \cdot 10^{-11}$	$-7.6 \cdot 10^{-12} \pm 1.3 \cdot 10^{-11}$	$-4.5 \cdot 10^{-11} \pm 4.1 \cdot 10^{-10}$	$9.0 \cdot 10^{-11} \pm 5.2 \cdot 10^{-11}$	$3.7 \cdot 10^{-9} \pm 3.8 \cdot 10^{-9}$

Spire de 5 cm

TABLE 5.4 – Coefficients harmoniques des deux spires en circuits imprimés déterminés à partir de 7 répétitions

dire elles possèdent une faible incertitude relative. Par contre, les incertitudes sur certaines composantes d'ordre élevé ( $N = 4, 5$ ) sont très importantes. Ceci est dû à la distance de 12.8 cm pour les deux sources, l'induction magnétique correspond au  $N = 4, 5$  est très faible par rapport à celle de  $N = 1, 2, 3$ . Pour augmenter la précision des coefficients d'ordre élevé, il faut mesurer plus près de la source. Par contre, à cause des contraintes mécaniques, la distance de mesure est au moins 12.8 cm.

En appliquant les équations de propagation des incertitudes montrées en (4.37) et (4.38), l'incertitude sur l'inductance mutuelle peut aussi être déterminée. Dans le cas des deux spires horizontales, les résultats sont présentés sur la Figure 5.20.

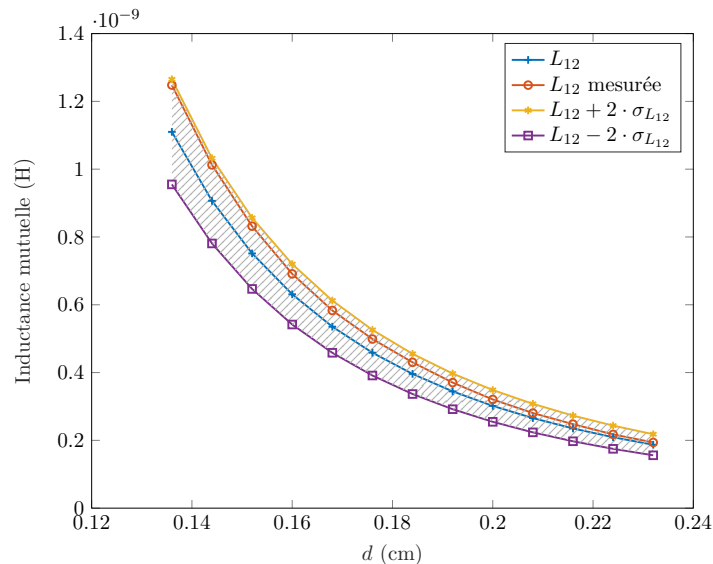


FIGURE 5.20 – Inductance mutuelle entre deux spires horizontales en fonction de la distance entre elles

$L_{12}$  est l'inductance mutuelle calculée en harmoniques sphériques,  $\sigma_{L_{12}}$  représente l'écart-type sur l'inductance mutuelle calculée à partir des coefficients harmoniques et leur incertitudes dans la Table 5.4. Comme expliqué au chapitre 4, l'incertitude nous permet d'écrire une variable sous une forme d'intervalle, qui correspond à un intervalle de confiance. En faisant l'hypothèse que  $L_{12}$  suit une loi normale, l'intervalle

de confiance est donc ce qui est présenté sur la Figure 4.6. Un taux de confiance de 95% est souvent utilisé dans l'industrie, ce qui conduit à une incertitude de  $2 \cdot \sigma$ . Ainsi, il y a 95% de probabilité que la vraie valeur de l'inductance se situe entre  $L_{12} - 2 \cdot \sigma_{L_{12}}$  et  $L_{12} + 2 \cdot \sigma_{L_{12}}$ , c'est-à-dire dans la zone hachurée en Figure 5.20. La courbe de  $L_{12}$  mesurée confirme cette conclusion.

Pour conclure, l'incertitude sur l'inductance mutuelle calculée en harmoniques sphériques est déterminée en se basant sur des répétitions de mesures. Bien sûr, plus le nombre d'essai est important, mieux cette incertitude sera estimée. Néanmoins, ceci prend un temps important.

## Estimation d'incertitude du banc de mesure

L'idée proposée dans §4.5.2 est de caractériser les incertitudes sur le banc de mesure, qui nous permet d'estimer l'incertitude du résultat final à partir d'une seule série de mesure. Pour appliquer l'équation sur la propagation des incertitudes en (4.48), l'étape essentielle est de créer la matrice  $\delta\mathbf{A}$ . 3 incertitudes principales sont considérées sur le banc de mesure : la précision du moteur pas à pas ( $0.1^\circ$ ), la longueur de bras (2 mm) et le bruit d'environnement ( $10^{-10}$  Wb). En supposant que ces incertitudes soient assez petites et que leur influences sur l'induction magnétique mesurée est linéaires,  $\delta\mathbf{A}$  peut être calculée. En appliquant (4.48), l'incertitude sur l'inductance mutuelle peut être déterminée, comme présentée sur la Figure 5.21.

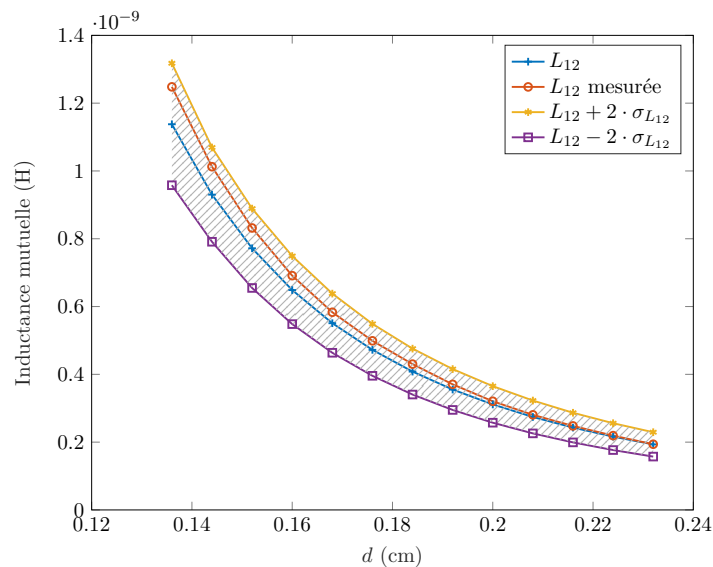


FIGURE 5.21 – Inductance mutuelle entre deux spires horizontales en fonction de la distance entre elles

On peut constater que l'incertitude sur l'inductance mutuelle est très proche de celle sur la Figure 5.20. Ce résultat est en effet très intéressant parce qu'il permet de montrer que l'incertitude sur le banc de mesure, avec laquelle on peut déterminer l'incertitude de l'inductance mutuelle à partir d'une seule mesure est bien estimée.

Cette partie de l'étude permet de valider l'approche du développement en harmoniques sphériques pour identifier les sources de rayonnement et aussi pour calculer l'inductance mutuelle entre deux sources sur n'importe quelle position relative. Cependant, les spires en circuits imprimés sont seulement des sources académiques très simples pour valider la méthode. Un exemple des deux dispositifs concrets sera étudié dans la section suivante.



## 5.4 Bobine torique et inductance de lissage

### 5.4.1 Identifications des sources

Dans cette section, deux dispositifs concrets seront étudiés, y compris leurs champ proche et l'inductance mutuelle entre elles. Les deux sources sont respectivement une bobine torique et une inductance de lissage. Comme pour les deux spires en circuits imprimés, la première étape est de caractériser chacune des sources séparément.

La bobine torique est présentée sur la Figure 5.22.

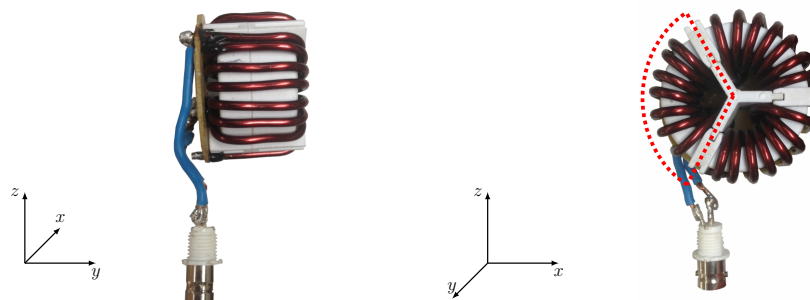


FIGURE 5.22 – Bobine torique à identifier

Cette bobine est du même type que celle montrée en Figure 1.8, seulement un tiers du tore (entouré par la ligne rouge en Figure 5.22) est alimenté ici. L'impédance du tore avec son fil d'alimentation est mesurée à l'analyseur d'impédance et le résultat est donné à la partie gauche de la Figure 5.23.

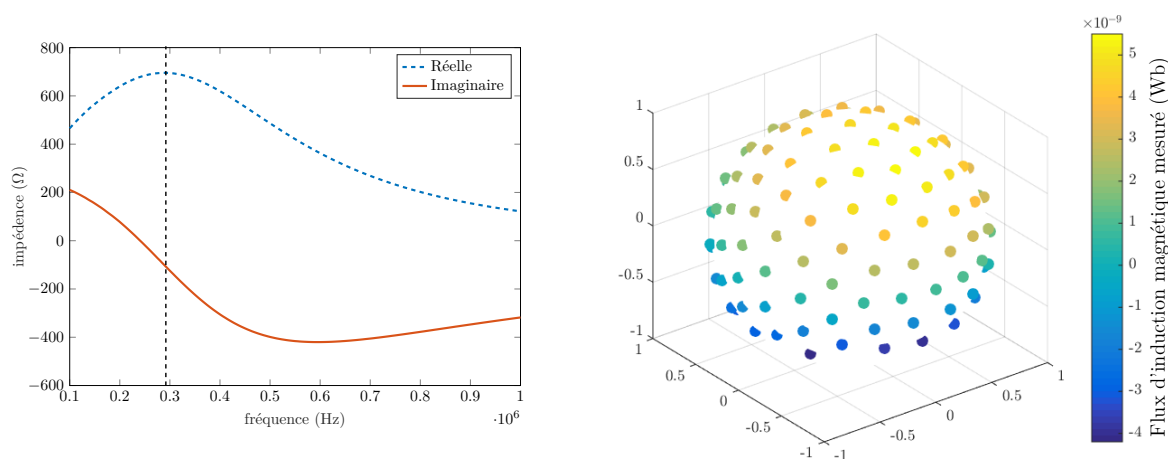


FIGURE 5.23 – Impédance de la bobine torique (gauche); flux d'induction magnétique de la bobine torique mesuré sur une sphère de  $r_M = 12.8$  cm (droite)

On peut constater sur cette figure qu'il existe une résonance à 300 kHz. Pour éviter ce phénomène de résonance, la bobine torique et aussi l'inductance de lissage sont étudiées à 200 kHz. L'impédance propre de la bobine torique à 200 kHz est  $633 + j80 \Omega$ . Avec ceci, le flux d'induction magnétique sur chaque position de mesure peut être déterminée

La démarche est la même que pour les deux spires, c'est-à-dire 131 mesures équidistantes sur une sphère de  $r_M = 12.8$  cm sont effectuées pour développer la source jusqu'à l'ordre 5. Les mesures sont

présentées à la partie droite de la Figure 5.23.

A partir de ces 131 mesures, les coefficients harmoniques sont déterminés et donnés dans la Table 5.5.

	-	+					
			$-1.1 \cdot 10^{-4}$	$-2.6 \cdot 10^{-6}$	$-1.4 \cdot 10^{-7}$	$-1.5 \cdot 10^{-9}$	$-4.6 \cdot 10^{-10}$
<b>N = 1</b>	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$-2.9 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$-3.1 \cdot 10^{-10}$	
<b>N = 2</b>	$3.2 \cdot 10^{-6}$	$-5.3 \cdot 10^{-6}$	$-2.2 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-9}$	$-1.6 \cdot 10^{-10}$	
<b>N = 3</b>	$3.3 \cdot 10^{-8}$	$-4.8 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$-1.3 \cdot 10^{-8}$	$6.3 \cdot 10^{-10}$	
<b>N = 4</b>	$-2.9 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$4.5 \cdot 10^{-9}$	$-1.1 \cdot 10^{-8}$	$-3.3 \cdot 10^{-8}$	$3.3 \cdot 10^{-10}$	
<b>N = 5</b>	$1.3 \cdot 10^{-10}$	$7.0 \cdot 10^{-10}$	$-6.2 \cdot 10^{-10}$	$-1.1 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-9}$	

TABLE 5.5 – Coefficients harmoniques de la bobine torique déterminés à partir de 131 mesures

A la différence des spires circulaires, la bobine torique possède des composantes harmoniques non nulles pour presque tous les moments. De la même manière, l'inductance de lissage peut aussi être identifiée ; ceci est présentée sur la Figure 5.24.

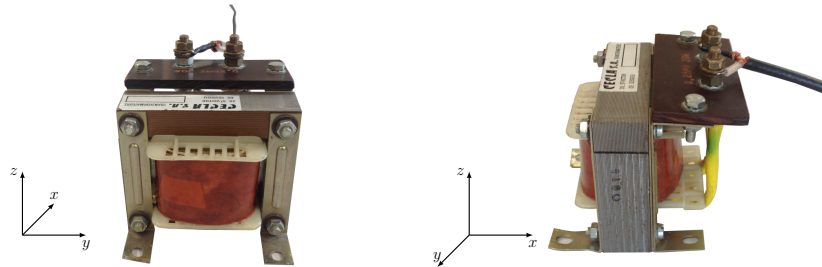


FIGURE 5.24 – Inductance de lissage à identifier

L'impédance de l'inductance de lissage est présentée sur la partie gauche de la Figure 5.25.

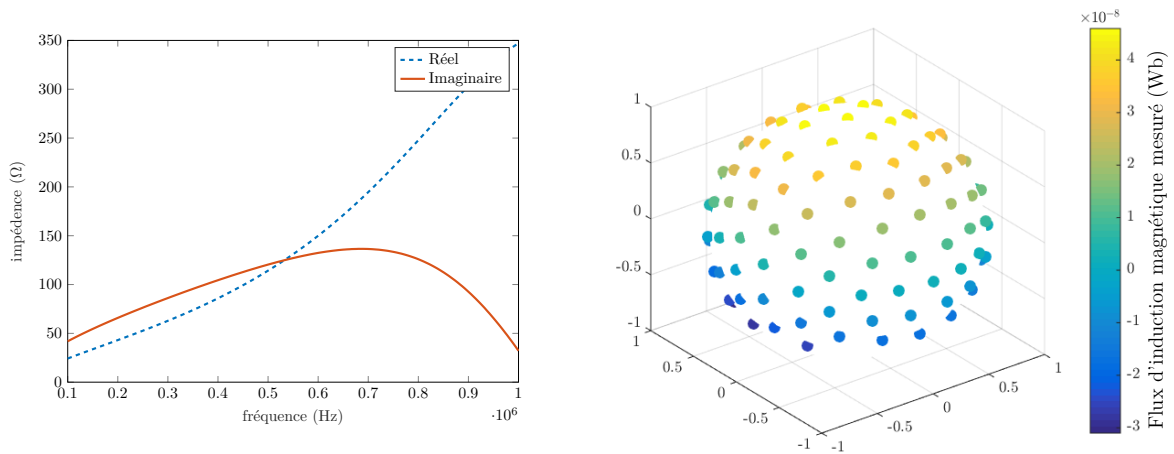


FIGURE 5.25 – Impédance de l'inductance de lissage (gauche) ; Flux d'induction magnétique mesurés de l'inductance de lissage sur une sphère de  $r_M = 12.8$  cm (droite)

Ensuite, le rayonnement en champ proche de l'inductance de lissage est mesurée par le banc automatisé, les flux d'inductions magnétiques sont présentés sur la partie droite de la Figure 5.25

Les coefficients harmoniques de cette inductance sont donnés dans la Table 5.6.

	- \ +	$-4.6 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$6.8 \cdot 10^{-10}$	$-1.3 \cdot 10^{-9}$	
N = 1		$1.2 \cdot 10^{-2}$	$5.9 \cdot 10^{-4}$	$7.9 \cdot 10^{-5}$	$-9.6 \cdot 10^{-8}$	$9.7 \cdot 10^{-8}$	$-6.3 \cdot 10^{-10}$
N = 2		$-1.6 \cdot 10^{-5}$	$-9.4 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$-7.0 \cdot 10^{-8}$	$-5.7 \cdot 10^{-9}$	$4.9 \cdot 10^{-9}$
N = 3		$4.2 \cdot 10^{-7}$	$5.2 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$3.2 \cdot 10^{-6}$	$-7.3 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$
N = 4		$-4.7 \cdot 10^{-8}$	$-1.2 \cdot 10^{-8}$	$5.0 \cdot 10^{-8}$	$2.0 \cdot 10^{-8}$	$-2.4 \cdot 10^{-7}$	$-4.5 \cdot 10^{-9}$
N = 5		$-1.9 \cdot 10^{-10}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	$-4.5 \cdot 10^{-10}$	$9.2 \cdot 10^{-9}$	$4.1 \cdot 10^{-10}$	$9.3 \cdot 10^{-9}$

TABLE 5.6 – Coefficients harmoniques de l'inductance de lissage déterminés à partir de 131 mesures

## 5.4.2 L'inductance mutuelle

Avec les coefficients harmoniques des deux dispositifs montrés dans les Tables 5.5 et 5.6, l'inductance mutuelle entre ces deux dispositifs peut être calculée pour n'importe quelle position et orientation relatives. La configuration de la Figure 5.26 est choisie comme exemple.

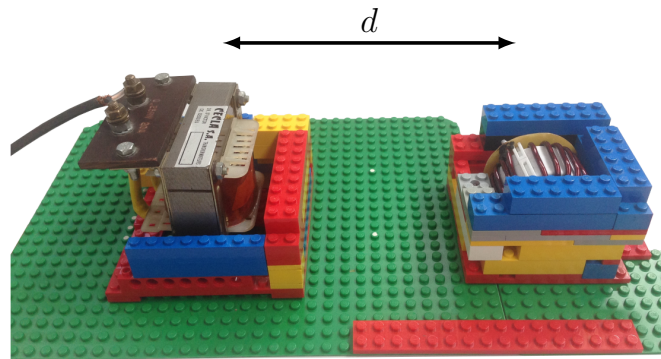


FIGURE 5.26 – Configuration de la bobine torique et l'inductance de lissage

L'inductance entre les deux dispositifs est calculée à l'aide des harmoniques sphériques en fonction de la distance  $d$  les séparant. Cette inductance mutuelle est présentée en Figure 5.27, et comparées avec les valeurs mesurées.

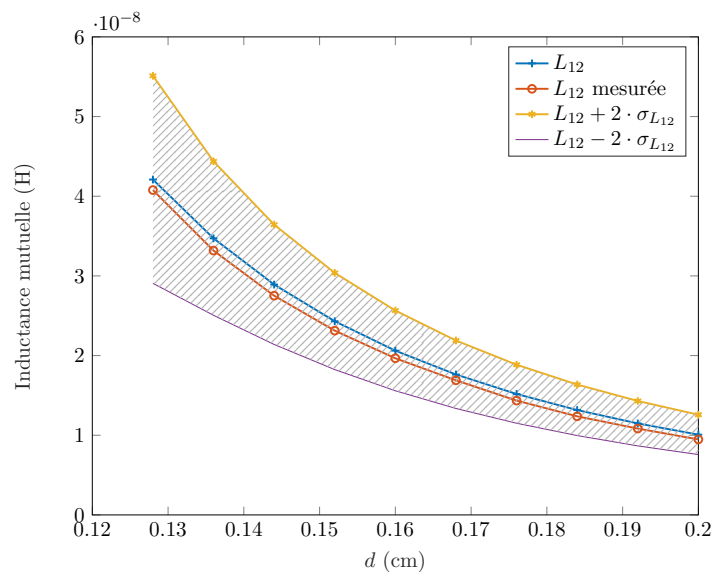


FIGURE 5.27 – Inductance mutuelle entre la bobine torique et l'inductance de lissage

$L_{12}$  mesurée est très proche de la valeur obtenue par l'approche en harmoniques sphériques. L'écart-type  $\sigma_{L_{12}}$  est déterminé par les incertitudes du banc, c'est-à-dire par l'approche expliquée dans §5.3.3. Ainsi, il y a une probabilité de 95% que la vraie valeur de  $L_{12}$  tombe dans la zone ombrée, ceci est vérifié par la courbe rouge, qui est largement bornée dans la zone. En outre, ce résultat permet de vérifier les conclusions de la section portant sur les sources secondaires (§3.2) : le procédé de mesures isolées possède une très bonne précision. C'est-à-dire que le champ magnétique généré par les sources secondaires peut être négligé.

### 5.4.3 Réduire le couplage inductif

Il est mentionné au chapitre 1 que pour améliorer la performance du filtre, il faut optimiser (dans certains cas, on cherche à minimiser) les couplages inductifs entre les composants électriques. L'approche la moins coûteuse est d'améliorer les positions et les orientations relatives des composants. Dans le cas où l'on cherche à réduire au minimum le couplage, il a été déjà montré précédemment que l'inductance mutuelle entre deux dispositifs diminue avec la distance entre eux. Par contre, il n'est pas toujours pratique d'augmenter la distance à cause des contraintes volumiques. Il faut donc se focaliser sur l'optimisation des orientations des composants. Ceci peut être facilement réalisé par le développement en harmoniques sphériques.

Reprenons l'exemple de la bobine torique et l'inductance de lissage, et on cherche à minimiser leur inductance mutuelle (calculée à partir des coefficients harmoniques) en modifiant l'orientation relative entre elles. Par exemple, dans le cas où  $d = 15$  cm, en tournant la bobine torique d'un angle  $\theta$ , les variations de la valeur absolue de l'inductance mutuelle sont présentées en Figure 5.28.

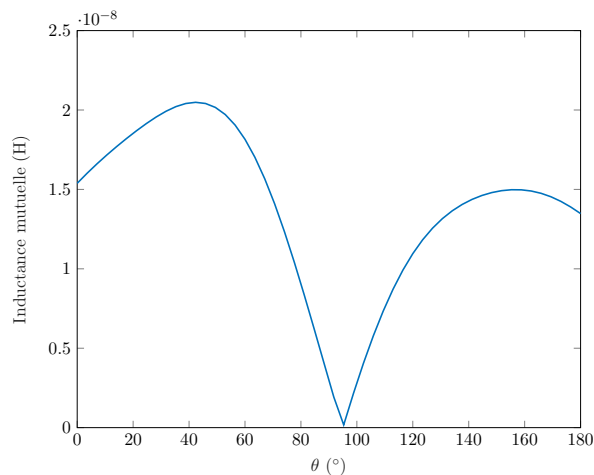


FIGURE 5.28 – Valeur absolue de l'inductance mutuelle entre la bobine torique et l'inductance de lissage à une distance de 15 cm en fonction de l'orientation relative entre elles

Il est constaté que la valeur absolue de l'inductance mutuelle entre la bobine torique et l'inductance de lissage est minimisée avec une rotation d'environ  $95^\circ$  par rapport à la position de la Figure 5.27, calculée à partir des coefficients harmoniques. Pour vérifier ce résultat, l'inductance mutuelle entre ces deux dispositifs est mesurée encore une fois, mais avec la bobine tournée de  $90^\circ$ . La configuration est présentée sur la Figure 5.29.

L'inductance mutuelle avec la même distance  $d$  est calculée et mesurée, en comparant avec les valeurs avant la rotation. Les résultats sont présentés sur la Figure 5.30.

On peut constater que l'inductance mutuelle est largement réduite et la valeur calculée par l'approche harmonique sphérique est très proche de celle mesurée.

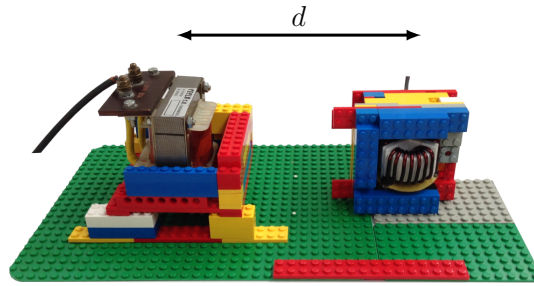


FIGURE 5.29 – Configuration de la bobine torique tournée et l'inductance de lissage

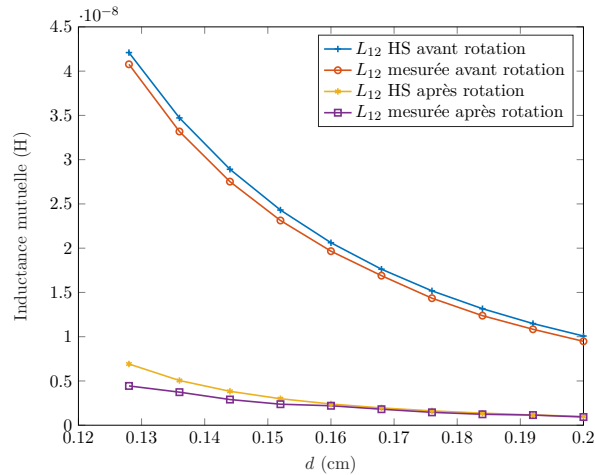


FIGURE 5.30 – Inductance mutuelle entre la bobine torique et l'inductance de lissage en fonction de la distance entre elles

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le nouveau système automatisé qui a été développé pour effectuer les mesures de flux d'induction magnétique autour d'un équipement sous test a été présenté. Avec ces mesures, les coefficients harmoniques correspondants peuvent être déterminés, ce qui permet de calculer l'inductance mutuelle entre l'un et l'autre.

Une première validation expérimentale a ensuite été réalisée pour deux spires en circuits imprimés. Les résultats permettent de valider le banc de mesure et également l'approche du développement en harmoniques sphériques. Une étude sur la propagation des incertitudes a été effectuée. D'un côté, il permet de vérifier les estimations des incertitudes sur les paramètres physiques du banc. D'un autre côté, en appliquant l'approche expliquée dans §5.3.3 et les incertitudes du banc, l'inductance mutuelle entre deux dispositifs avec son incertitude peut être déterminée par une seule série de mesure.

A la fin, deux dispositifs réels ont été identifiés et l'inductance mutuelle entre eux a été étudiée. Il a aussi été montré qu'avec l'approche en harmoniques sphériques, une orientation relative entre les deux dispositifs peut être déterminée pour minimiser à l'inductance mutuelle. Ceci permet de résoudre les problèmes des résonances causés par les couplages inductifs dans le filtre montré dans §1.3.2.

# Conclusion générale et perspectives

---

Cette thèse a pour objectif de prendre en compte des problèmes de compatibilité électromagnétique en champ proche dès la phase de conception d'un produit. Ceci est basé sur le développement en harmoniques sphériques du rayonnement parasite engendré par les dispositifs ou les composants d'un dispositif. Les champs proches d'un système peuvent être modélisés avec très peu de coefficients harmoniques, ces coefficients permettent ensuite de calculer le couplage inductif entre deux systèmes, pour n'importe quelle position relative. Ce couplage est représenté par une inductance mutuelle. Cette approche est validée par les résultats analytiques, numériques (par le logiciel *Flux3D*) et expérimentaux.

Pendant, deux points sont à noter : le choix de l'origine du développement et l'effet de sources secondaires. Il est démontré que la méthode de Nelder-Mead peut être appliquée pour choisir l'origine optimale, en basant sur les coefficients harmoniques déjà obtenus. Il est aussi démontré par des exemples concrets qu'en régime « quasi-statique », les champs engendrés par les sources secondaires d'un dispositif (conducteurs massifs ou matériaux ferromagnétiques), en alimentant tous les autres, peuvent être négligés, ce qui permet de justifier la robustesse de notre approche dans laquelle chaque dispositif est caractérisé de manière indépendante. Néanmoins, nous proposons une méthode qui permet de compenser la faible erreur commise, en utilisant les mesures des réponses des sources secondaires aux excitations de différentes sources canoniques multipolaires.

L'étape essentielle dans notre approche est l'identification de chaque source de rayonnement, c'est-à-dire celle de ses coefficients harmoniques. Il s'agit d'un problème inverse : déterminer les causes (coefficients harmoniques) en fonction des effets (champs magnétiques modélisés ou mesurés). Plusieurs aspects pour sa résolution sont discutés et étudiés : propagation des incertitudes, choix de l'ordre maximal du développement et des positions des mesures, etc. La méthode des moindres carrés sous contraintes et la méthode du maximum a posteriori peuvent être appliquées pour utiliser les informations a priori, y compris les informations géométriques et les connaissances des coefficients harmoniques. En pratique, ces informations sont souvent incertaines, mais elles permettent quand-même, jusqu'à un certain point, d'augmenter la précision de la résolution ou de diminuer le nombre de mesures nécessaires.

Le nouveau banc de mesure automatisé, conçu et réalisé au Laboratoire Ampère est présenté. Ce banc permet de mesurer le flux d'induction magnétique à travers un capteur (une spire circulaire en circuit imprimé) autour de l'équipement sous test sur une surface sphérique. Un premier essai a été réalisé pour deux spires en circuits imprimés et les résultats nous permettent de valider notre approche et de calibrer le banc de mesure. Ensuite, les mesures sont effectuées pour des exemples concrets (une inductance de lissage et une inductance torique); les calculs des inductances mutuelles entre eux sont effectués pour différentes positions relatives et la disposition optimale peut être obtenue en se basant sur le développement en harmoniques sphériques.

Ces travaux sont réalisés sous l'hypothèse des approximations des régimes quasi-statiques et la fréquence du travail est limitée entre 20kHz et 20MHz. Au-delà de cette gamme de fréquence, on est obligé de prendre en compte le champ électrique. En analytique, il faut se baser sur l'équation d'Helmholtz au lieu de l'équation de Laplace, ce qui conduit à une série complémentaire de coefficients harmoniques, correspondant au champ électrique. En pratique, notre capteur spire n'est plus valable, en effet sa sensibilité décroît rapidement à partir d'une certaine fréquence environ quelques MHz à cause de la résonance et les perturbations des champs électriques. Il est donc nécessaire de faire évoluer le capteur pour qu'il mesure séparément les champs électrique et magnétique. Ceci peut être un travail très intéressant pour le futur, parce qu'avec une identification des paramètres en champ proche, on est capable d'extrapoler

les rayonnements en lointain en appliquant des méthodes de correction [Ram10].

La deuxième perspective est l'étude méthodologique des systèmes actifs. Nos mesures sont basées sur le déplacement d'un capteur et sur un balayage en fréquence. Ces mesures ne sont donc pas simultanées, et la mesure des phases des coefficients du multipôle équivalent reste une étape indispensable. Pour les systèmes passifs, ce n'est pas vraiment une difficulté parce que nous pouvons synchroniser l'alimentation et la mesure ; mais ce n'est pas le cas pour les sources actives, dans lesquelles le rayonnement d'un dispositif dépend, par exemple, de son cycle de fonctionnement. Les systèmes actifs posent donc un problème spécifique à la solution duquel nous pourrions contribuer dans le futur.

La troisième perspective est la création d'une bibliothèque de composants permettant la simulation du couplage rayonné dans des logiciels circuits tels qu'INCA, où le développement en harmoniques sphériques est déjà codé. Un algorithme doit aussi être développé dans l'objectif de chercher une disposition optimale pour un certain nombre de composants dans un système, avec leurs coefficients harmoniques identifiés. Idéalement, cette disposition correspond aux couplages optimaux (plus souvent minimaux) entre les composants, afin de réduire le plus possible les problèmes de CEM.

# Liste de publications

---

## Revue internationale à comité de lecture

- Z. Li, F. Tavernier, A. Bréard, L. Krähenbühl, D. Voyer and C. A. F. Sartori, *Error analysis for near field EMC problems based on multipolar expansion approach*, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 53, issue 6, 2017, hal-01496540
- A. Bréard, O. Chadebec, L. Krähenbühl, C. A. F. Sartori, C. Vollaire, O. Fabrègue, Z. Li, R. P. B. Muylaert, F. Tavernier and D. Voyer, *Overview on the Evolution of Near Magnetic Field Coupling Prediction using Equivalent Multipole Spherical Harmonic Sources*, IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 59, issue 2, 2017, hal-01432166
- A. Bréard, F. Tavernier, Z. Li and L. Krähenbühl, *New Measurement System of Magnetic Near-field with Multipolar Expansion Approach*, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 52, issue 3, 2015, hal-01322299

## Conférences internationales

- Z. Li, F. Tavernier, A. Bréard, C. A. F. Sartori and L. Krähenbühl, *Use of a priori geometric information to improve the identification of the B-field measurement around a power electronic device*, IEEE GEMCCON 2017, São Paulo, Brazil, hal-01580387
- F. Tavernier, Z. Li, A. Bréard, C. A. F. Sartori and L. Krähenbühl, *Optimal points of measurement for identification of sources by harmonic expansion*, IEEE GEMCCON 2017, São Paulo, Brazil, hal-01580395
- Z. Li, F. Tavernier, A. Bréard and L. Krähenbühl, *Utilisation d'informations géométriques a priori pour améliorer l'identification du champ H mesuré autour d'un dispositif*, NUMELEC 2017, Paris, France, hal-01563074
- F. Tavernier, Z. Li, A. Bréard and L. Krähenbühl, *Position optimale des points de mesure pour l'identification de sources par développements harmoniques*, NUMELEC 2017, Paris, France, hal-01563065
- Z. Li, F. Tavernier, A. Bréard, L. Krähenbühl and D. Voyer, *Study of the choice of the origin in spherical harmonics expansion for magnetic near-field sources*, IEEE APEMC 2016, Shenzhen, China, hal-01388380
- Z. Li, F. Tavernier, A. Bréard and L. Krähenbühl, *Study of the limitation of a new predictive method for near-field EMC problems with a multipolar expansion approach*, EMF 2016, Lyon, France, hal-01393397



- F. Tavernier, Z. Li and A. Bréard, *Source reconstruction using multipolar expansion in different coordinate systems applied to electromagnetic problem*, EMF 2016, Lyon, France, hal-01393399
- F. Tavernier, Z. Li, A. Bréard, D.Voyer, C. A. F. Sartori and L. Krähenbühl, *Comparison of the near field coupling using spherical and spheroidal harmonics*, IEEE CEFC 2016, Miami, USA, hal-01393476

## Conférences nationales

- Z. Li, F. Tavernier, A. Bréard, L. Krähenbühl and D.Voyer, *Étude des effets de sources secondaires sur les couplages inductives, basée sur la méthode de développement multipolaire*, SGE 2016, Grenoble, France, hal-01361570
- F. Tavernier, Z. Li, A. Bréard, D.Voyer and L. Krähenbühl, *Comparaison du calcul d'inductances mutuelles entre dispositifs à partir de développements harmoniques séparés de leurs champs proches en coordonnées cylindriques et elliptiques*, SGE 2016, Grenoble, France, hal-01361572
- Z. Li, A. Bréard and L. Krähenbühl, *Recherche du meilleur centre de décomposition multipolaire d'une source électromagnétique en champ proche*, GDR Ondes 2015, Ecully, France, hal-01217239

# Bibliographie

---

- [AAC<sup>+</sup>10] V. Ardon, J. Aime, O. Chadebec, E. Clavel, J. M. Guichon, and E. Vialardi. EMC modeling of an industrial variable speed drive with an adapted PEEC method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8) : 2892–2898, 2010.
- [Aka73] H. Akaike. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. *Biometrika*, 60(2) : 255–265, 1973.
- [AM87] S. C. Althoen and R. McLaughlin. Gauss-jordan reduction : A brief history. *Am. Math. Monthly*, 94(2) :130–142, February 1987.
- [Bac10] A. Baccini. Statistique descriptive élémentaire. *Publications de l'Institut de Mathématiques de Toulouse*, 2010.
- [Bay63] T. Bayes. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Phil. Trans. of the Royal Soc. of London*, 53 : 370–418, 1763.
- [BB08] F. X. Bally and J. M. Berroir. Incertitudes expérimentales. *Ecole Normale Supérieure, Universités Paris 6, Paris 7, Paris 11*, 2008.
- [BCK<sup>+</sup>17] A. Bréard, O. Chadebec, L. Krähenbühl, C. A. F. Sartori, C. Vollaie, O. Fabrègue, Z. Li, R. P. B. Muylaert, F. Tavernier, and D. Voyer. Overview on the evolution of near magnetic field coupling prediction using equivalent multipole spherical harmonic sources. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 59(2) : 584–592, 2017.
- [Bel62] S. L. Belousov. Tables of normalized associated legendre polynomials. *Pergamon Press*, 1962.
- [BFB97] M. A. Blanco, M. Flórez, and M. Bermejo. Evaluation of the rotation matrices in the basis of real spherical harmonics. *Journal of Molecular Structure : THEOCHEM*, 419(1-3) : 19–27, 1997.
- [BPB<sup>+</sup>17] F. Benyoubi, L. Pichon, M. Bensetti, Y. Le Bihan, and M. Feliachi. An efficient method for modeling the magnetic field emissions of power electronic equipment from magnetic near field measurements. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 59(2) :609–617, April 2017.
- [Bro01] B. C. Brock. Using vector spherical harmonics to compute antenna mutual impedance from measured or computed fields. *Sandia National Laboratories*, 2001.
- [BV89] J. R. Bergervoet and H. V. Veen. A large-loop antenna for magnetic field measurements. *Zurich International Symposium on EMC*, 1989.
- [BV10] S. Boyd and L. Vandenberghe. Convex Optimization. *Optimization Methods and Software*, 25(3) : 487–487, 2010.
- [CGLR14] F. Costa, C. Gautier, E. Labouré, and B. Revol. Electromagnetic compatibility in Power Electronics. *ISTE Ltd and John Wiley*, 2014.
- [Cha06a] A. Charoy. Cem parasites et perturbations des électroniques, tome 1 sources, couplages, effets. *DUNOD*, 2006.
- [Cha06b] A. Charoy. Cem parasites et perturbations des électroniques, tome 3 blindages, filtres, câbles blindés. *DUNOD*, 2006.
- [Che95] W. C. Chew. *Waves and fields in inhomogeneous media*. 1995.

- [CIGR99] C. H. Choi, J. Ivanic, M. S. Gordon, and K. Ruedenberg. Rapid and stable determination of rotation matrices between spherical harmonics by direct recursion. *The Journal of Chemical Physics*, 111(19) : 8825, 1999.
- [CJ78] F. Coulon and M. Jufer. *Traité d'électricité, volume 1 : Introduction à l'électrotechnique. Editions Georgi*, 1978.
- [Del01] J. Delaballe. Emc : electromagnetic compatibility. *Schneider Electric Cahier technique no. 149*, 2001.
- [Dem97] J. W. Demmel. Linear Least Squares Problems. *Applied Numerical Linear Algebra : 101–138*, 1997.
- [Dow12] A. B. Downey. Think bayes, batesian statistics made simple. *Green Tea Press*, 2012.
- [Dul96] P. Dular. Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires. *Thèse, Université de Liège*, 1996.
- [Dur68] E. Durand. Magnetostatique. *Masson et Cie Editeurs*, 1968.
- [ES83] C. R. I. Emson and J. Simkin. An optimal method for 3-D eddy currents. *IEEE Transactions on Magnetism*, 19(6) : 2450–2452, 1983.
- [Fit08] R. Fitzpatrick. Maxwell's equations and the principles of electromagnetism. 2008.
- [Fle08] D. Fleisch. A student's guide to maxwell's equations. *Cambridge University Press*, 2008.
- [GB17] M. C. Grant and S. P. Boyd. The CVX Users' Guide Release 2.1. *CVX Research, Inc.*, 2017.
- [GD14] N. A. Gumerov and R. Duraiswami. Recursive computation of spherical harmonic rotation coefficients of large degree. *University of Maryland Institute for Advanced Compute Studies Technical Report, UMIACS-TR-2014-04*, (3) : 1–35, 2014.
- [GG09] Z. Gimbutas and L. Greengard. A fast and stable method for rotating spherical harmonic expansions. *Journal of Computational Physics*, 228(16) : 5621–5627, 2009.
- [Gra14] S. Gratton. Analyse matricielle et Optimisation. *Thèse, INP Toulouse*, 2014.
- [Gre03] R. Green. Spherical harmonic lighting : The gritty details. *Sony Computer Entertainment America*, 2003.
- [Gup12] S. V. Gupta. Measurement Uncertainties, physical parameters and calibration of instruments. *Springer*, 2012.
- [HBV14] T. Q. V. Hoang, A. Bréard, and C. Vollaire. Near magnetic field coupling prediction using equivalent spherical harmonic sources. *IEEE Transactions on EMC*, 56(6) : 1457–1465, 2014.
- [HKK11] W. Huang, Z. Khalid, and R. A. Kennedy. Efficient computation of spherical harmonic transform using parallel architecture of CUDA. *2011 5th International Conference on Signal Processing and Communication Systems (ICSPCS) : 1–6*, 2011.
- [HM72] S. D. Hodges and P. G. Moore. Data uncertainties and least squares regression. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 21(2) : 185–195, 1972.
- [Hoh02] T. Hohage. Inverse problems. *Technical report, University of Göttingen*, 2002.
- [HT89] C. M. Hurvich and C. L. Tsai. Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, 76(2) : 297–307, 1989.
- [IR96] J. Ivanic and K. Ruedenberg. Rotation matrices for real spherical harmonics. Direct determination by recursion. *Journal of Physical Chemistry*, 100(15) : 6342–6347, 1996.
- [Jam05] E. Jamelot. Résolution des équations de maxwell avec des éléments finis de galerkin continus. 2005.
- [Jou13] B. Jourdain. Probabilités et Statistique. 2013.

- [Kay93] S. Kay. Fundamentals of statistical signal processing. *University of Rhode Island*, 1993.
- [Lab10] D. Labrousse. Amélioration des techniques d'estimation des perturbations conduites : application à une chaîne de traction de véhicule électrique. *Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan*, 2010.
- [Lat07] F. Lattarulo. Electromagnetic Compatibility in Power Systems. *Elsevier*, 2007.
- [Leg96] M. Legris. Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche. *Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1996.
- [LL98] J. H. Luscombe and M. Luban. Simplified recursive algorithm for Wigner 3j and 6j symbols. *Physical Review E*, 57(6) : 7274–7277, 1998.
- [LLA08] Norme internationale cispr 16-1. *Comité international spécial des perturbations radioélectriques*, 2008.
- [LLWF10] P. M. Lam, C. S. Leung, T. T. Wong, and C. W. Fu. Uniformly sampling multi-resolution analysis for image-based relighting. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 21(7) : 693–706, 2010.
- [Lop11] P. F. Lopez. Modélisation du rayonnement électromagnétique des dispositifs électroniques pour des applications cem. *Thèse, Université de Rouen*, 2011.
- [Lor01] J. Lorange. Couplage des inductances par rayonnement magnétique. etude théorique et expérimentale. *Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2001.
- [LTB<sup>+</sup>16] Z. Li, F. Tavernier, A. Bréard, L. Krähenbühl, and D. Voyer. Study of the choice of the origin in spherical harmonics expansion for magnetic near-field sources. *2016 Asia-Pacific International Symposium on Electromagnetic Compatibility (APEMC)*, 01 : 373–375, 2016.
- [Luo97] H. T. Luong. Amélioration de la formulation en potentiel scalaire magnétique et généralisation au couplage entre équations de champ et de circuit électrique. *Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1997.
- [Maz13] V. Mazaure. Une approche variationnelle de l'électromagnétisme. *Technical report, Schneider Electric/Ecole de Mines de Paris*, 2013.
- [MF04] J. H. Mathews and K. K. Fink. Nelder-Mead Method. *Numerical Methods Using Matlab*, 2004.
- [Mor12] D. Morin. Electromagnetic waves. *Waves*, page 793, 2012.
- [Mou06] M. H. Mousa. Calcul efficace et direct des représentations de maillage 3d utilisant les harmoniques sphériques. *Thèse, Université Claude Bernard Lyon 1*, 2006.
- [Mul00] J. P. Muller. Analyse spectrale des signaux radiofréquence. *Technical report, Zillisheim*, 2000.
- [Nen02] Eric Nens. Contribution à la modélisation des structures symétriques en électromagnétisme. *Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2002.
- [NM65] J. A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 7(4) : 308–313, 1965.
- [Orf] S. Orfanidis. Scattering Parameters. *Electromagnetic Waves and Antennas*, pages 663–708.
- [Ott09] H. W. Ott. Electromagnetic compatibility engineering. *WILEY*, 2009.
- [Pau06] C. R. Paul. Introduction to Electromagnetic Compatibility. *Wiley Interscience*, 2006.
- [Pin14] O. Pinaud. Characterization, Modeling and Identification of magnetic field sources inside an electric vehicle. *Thèse, Université Grenoble Alpes*, 2014.
- [Pla68] O. Plaats. Separation of variables. *The American Mathematical Monthly*, (Vol. 75, No. 8) : 844–847, Oct. 1968.

- [Pou10] P. Poulichet. Introduction à la compatibilité électromagnétique. *Technical report, ESIEE*, 2010.
- [Ram10] R. Rammam. Caractérisation outdoor de structures rayonnantes via une mesure transitoire impulsionnelle et un algorithme de transformation champs proches - champs lointains. 2010.
- [Ric61] J. Richmond. A reaction theorem and its application to antenna impedance calculations. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, 9(6), 1961.
- [Ric15] B. Ricketti. Magnetostatics and the biot-savart law. *Technical report, Heriot-Watt University*, 2015.
- [RSCF06] L. L. Rouve, L. Schmerber, O. Chadebec, and A. Foggia. Optimal magnetic sensor location for spherical harmonic identification applied to radiated electrical devices. *IEEE Transactions on Magnetism*, 42(4) : 1167–1170, 2006.
- [RT99] S. Roel and J. Trampert. Inverse problems in geophysics. *Springer Vienna*, pages 119–190, 1999.
- [Rum54] V. H. Rumsey. Reaction concept in electromagnetic theory. *Physical Review*, 94(6) : 1483–1491, 1954.
- [Sag13] A. Saghir. Contribution à la caractérisation des structures rayonnantes - application aux études en champ proche de rayonnement électromagnétique. *Thèse, Université de Toulouse*, 2013.
- [Sch01] R. Schaumann. Design of analog filters. *Oxford university press*, 2001.
- [Sch06] L. Schmerber. Identification et caractérisation de sources électromagnétiques - application à la discrétion des moteurs de propulsion navale. *Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2006.
- [SGTS04] M. Savi, T. Z. Gireli, F. A. Tirich, and C. A. F. Sartori. Developing a van veen & bergervoet antenna. *EMC*, 2004.
- [SK97] E. B. Saff and B. J. Kuijlaars. Distributing many points on a sphere. *The Mathematical Intelligencer*, 19(1) : 5–11, 1997.
- [SL06] D. L. Sengupta and V. V. Liepa. Applied electromagnetics and electromagnetic compatibility. *WILEY INTERSCIENCE*, 2006.
- [TA07] I. Terrasse and T. Abboud. Modélisation des phénomènes de propagation d’ondes. *Technical report, Ecole Polytechnique*, 2007.
- [Tak13] T. Takahashi. Analyse numérique. *Cours de Ecole des Mines de Nancy*, 2013.
- [Tar04] A. Tarantola. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2004.
- [Tay00] J. Taylor. Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques. *Masson Sciences, Dunod*, 2000.
- [VCS+08] B. Vincent, O. Chadebec, J. L. Schanen, K. Berger, L. Krähenbühl, and R. Perrussel. Identification de sources multipolaires équivalentes par filtrage spatial. *NUMELEC, Liège Belgique*, 2008.
- [VCS+10] B. Vincent, O. Chadebec, J. L. Schanen, K. Berger, R. Perrussel, and L. Krähenbühl. Identification of equivalent multipolar electromagnetic sources by spatial filtering. *IEEE Transactions on Magnetism*, 46(8) : 2815 – 2818, 2010.
- [VCSB10] B. Vincent, O. Chadebec, J. L. Schanen, and K. Berger. Loop Antennas for Near-Field Multipolar-Expansion Identification : First Experimental Validations. 59(12) : 3086–3092, 2010.

- 
- [Vin09] B. Vincent. Identification de sources électromagnétiques multipolaires équivalentes par filtrage spatial : Application à la cem rayonnée pour les convertisseurs d'électronique de puissance. *Thèse, Institut Polytechnique de Grenoble*, 2009.
- [WK71] D. E. Wells and E. J. Krakiwsky. The Method of Least Squares. *University of New Brunswick*, 1971.
- [WLO04] S. Wang, F. C. Lee, and W. G. Odendaal. Controlling the parasitic parameters to improve EMI filter performance. *Nineteenth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2004. APEC '04.*, 1(c) : 503–509, 2004.
- [WLO06] S. Wang, F. C. Lee, and W. G. Odendaal. Cancellation of capacitor parasitic parameters for noise reduction application. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 21(4) : 1125–1132, 2006.
- [WS85] J. P. Wikswo and K. R. Swinney. Scalar multipole expansions and their dipole equivalents. *Journal of Applied Physics*, 57(9) : 4301–4308, 1985.
- [Zan11] S. Zangui. Détermination et modélisation du couplage en champ proche magnétique entre systemes complexes. *Thèse, Ecole Centrale de Lyon*, 2011.
- [ZBV<sup>+</sup>10] S. Zangui, K. Berger, B. Vincent, E. Clavel, R. Perrussel, and C. Vollaire. Modélisation des couplages en champ proche des composants des filtres cem en utilisant des sources équivalentes de rayonnement. *EPF*, 2010.