



Milieux Granulaires à Particules Molles : Modélisation Expérimentale et Numérique

Thi-Lo Vu

► To cite this version:

Thi-Lo Vu. Milieux Granulaires à Particules Molles : Modélisation Expérimentale et Numérique. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier, 2018. Français. NNT : 2018MONTTS100 . tel-02158082

HAL Id: tel-02158082

<https://theses.hal.science/tel-02158082>

Submitted on 17 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivré par **UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER**

Préparée au sein de l'école doctorale
Information, Structures, Systèmes

Et de l'unité de recherche
Laboratoire de Mécanique et Génie Civil

Spécialité: **Mécanique et Génie Civil**

**Milieus Granulaires à Particules Molles :
Modélisation Expérimentale et Numérique**

Présentée par **Thi Lo VU**

Soutenance prévue le 23 novembre 2018 devant le jury composé de

Mme. Florence ROUYER	MCF HDR	IFSTTAR, Laboratoire Navier	Rapporteur
M. Gaël COMBE	Pr	Université Grenoble Alpes	Rapporteur
Mme. Lydie STARON	CR	CNRS - Sorbonne Universités	Examineur
M. Renaud DELANNAY	Pr	Université de Rennes 1	Examineur
M. Farhang RADJAI	DR	CNRS - Université de Montpellier	Examineur
M. Serge MORA	Pr	Université de Montpellier	Directeur
M. Saeid NEZAMABADI	MCF	Université de Montpellier	Co-encadrant



Remerciements

Je remercie particulièrement à mes deux encadrants de thèse, Serge MORA et Saeid NEZAMABADI pour la confiance qu'ils m'ont accordée, pour leur suivi de près durant de ce travail. Serge MORA, merci pour tout ses conseils et ses idées scientifiques, son esprit positif, sa patience à rester des heures pour m'expliquer des choses que je ne comprenais pas, surtout au début de ma thèse et aussi sa relecture pointilleuse du manuscrit. Merci à Saeid NEZAMABADI pour son implication, ses conseils avisés, ainsi que pour la disponibilité qu'il m'a consacré et qui a mené à de nombreuses discussions autour du sujet. Merci.

J'adresse toute ma gratitude aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail. Je remercie Renaud DELANNAY qui a bien voulu présider le jury et accepter d'examiner mes travaux de thèse. Je remercie les deux rapporteurs, Florence ROUYER et Gaël COMBE, pour la rapidité avec laquelle ils ont examiné mon manuscrit, ainsi que pour leurs remarques très constructives. Je remercie Lydie STARON et Farhang RADJAI d'avoir accepté le rôle d'examineur.

Je remercie également les membres de mon équipe de recherche PMMD, notamment Farhang, Emilien et Mathieu pour les discussions intéressantes et leur soutien pendant mes trois ans de thèse.

Mes remerciements vont à l'ensemble du personnel du laboratoire, Frédéric DUBOIS pour sa gentillesse, ses conseils et son aide quand j'ai commencé à utiliser LMGC90, Rémy, Vincent, Gille, Robert, Katya, Chantal et Roxane pour leurs aides à différents instants de cette thèse.

Cette belle aventure a été réalisée avec des personnes incroyables que j'ai rencontrées au LMGC et à Montpellier. Merci Cécile BATIER (mon propre professeur de français, une amie adorable qui peut écouter enthousiasmement tous mes bla bla!), David CANTOR (qui a toujours rechargé ma passion pour la Recherche durant les moments plus difficiles de ma thèse, avec sa bonne humeur et son amour avec la Recherche), Daniel LAMPOH (une personne incroyable qui sait tout faire et jamais dire "difficile" dans le travail), Kajetan WOJTACKI (pour toutes ses blagues bizarres et son soutien important), Lhassan AMARSID (pour ton amitié sincère), Thành Trung VÕ (avec qui je partage l'éloignement du Vietnam), Thanh Hải NGUYỄN (pour son aide et son accueil chaleureux au commencement de ma thèse), Paul SCHUMACHER (qui va, je l'espère, trouver un nouveau métier qui le passionne), Mahmoud FAKIH (le plus incroyable co-bureau du monde), Maud LE HAY (qui m'a transmis son esprit écologique et m'a transporté sur son incroyable vélo). Je remer-

cie également Đức Hạnh NGUYỄN, Chaoquen ZENG, Aditi CHAKRABARTI, William BETTINI, Pankaj YADAV, Luisa OROZCO, Vincent SERANTONI, Jonaz VASQUEZ-VILLEGAS, Joeffrey LHONNEUR, Noémie PETITJEAN, Thierry SATOH, Theechalit BINAREE, Asma IDRISSE, Nicolas FALGAYRETTES, Xavier MAETZ, Nesrine SALAH, Issam HRAZMI, Félix LABOUP, Manuel CARDENAS, Mouad JEBLI, Julien BONNET, Noé Brice NKOUMBOU, Andrien... Merci pour vos accueils chaleureux lors de mon séjour à Montpellier.

Que les éventuels oubliés me pardonnent...

Merci à toute ma famille et particulièrement à mes parents Đức Dũng VŨ, Thị Duyên NGUYỄN et mes beaux parents Thị Mai Hương PHẠM et Văn Thông PHẠM pour leur amour et leur soutien inconditionnel. Merci à mon grand frère Trọng Duẩn VŨ et à sa femme Thuỳ Dương NGUYỄN pour leurs encouragements et leur confiance tout au long de mes études. J'adresse un grand amour à mes neveux Hoàng Anh VŨ et Đức Thuận VŨ de réaliser dans leur vie de merveilleuses aventures. Merci à ma petite soeur Thị Hương Thảo PHẠM à qui je souhaite un bel avenir.

Enfin, mais certainement le plus important, merci à mon mari, Minh PHẠM. Ensemble, avec ta patience, ton soutien et un amour le plus grand du monde, on a réalisé cette belle aventure. Merci Minh.

Thi-Lo VU

À Montpellier, le 07 Avril 2019

à mes parents

"Công cha như núi Thái Sơn
Nghĩa mẹ như nước trong nguồn chảy ra"

à mon mari,

"Vợ chồng nghĩa nặng tình sâu
Thương nhau đến lúc bạc đầu còn thương"

Table des matières

Introduction générale	1
1 Milieux granulaires à particules molles	7
1.1 Matériaux à particules molles	9
1.2 Contact et déformation de particules molles	11
1.3 Assemblage de particules molles	13
1.3.1 Méthodes expérimentales	13
1.3.2 Méthodes numériques	16
1.3.3 Rigidité des milieux granulaires	20
1.4 Comportements élastiques	24
1.4.1 Equations constitutives de matériaux élastiques	26
1.5 Conclusion	28
2 Déformation d'une particule unique	29
2.1 Méthodologie	31
2.1.1 Technique expérimentale	31
2.1.2 Méthode numérique	34
2.2 Compression radiale d'une particule	34
2.2.1 Particule élastique	39
2.2.2 Particule plastique	50
2.2.3 Particule en mousse de polyuréthane	53
2.3 Conclusion	54
3 Compression uniaxiale quasi-statique d'un assemblage de cylindres élastiques : Étude numérique et expérimentale	57
3.1 Procédure expérimentale	59
3.1.1 Dispositif expérimental	59
3.1.2 Corrélation d'images numériques pour un système constitué de plusieurs particules	60
3.2 Simulations numériques	63
3.2.1 Montage numérique	63
3.2.2 Validation numérique	65

3.3	Compression uniaxiale d'un milieu granulaire composé des particules élastiques hautement déformables.	68
3.3.1	Compacité et déformation compressive cumulée	70
3.3.2	Force de compression globale	71
3.3.3	Énergie de déformation du système	72
3.3.4	Évolution de la surface et de la forme des particules	75
3.3.5	Coordinance	78
3.3.6	Répartition de l'énergie	82
3.4	Décharge d'un milieu granulaire frottant composé des particules élastiques fortement déformées	83
3.5	Conclusion	87
4	Assemblage de disques élastiques : Etude paramétrique	89
4.1	Procédure numérique	91
4.2	Effet de la compressibilité des particules	92
4.2.1	Étude de grandeurs macroscopiques	92
4.2.2	Étude de la micro-structure du système	98
4.3	Effet du coefficient de frottement sur le comportement macroscopique et sur la micro-structure du système	106
4.3.1	Analyse des grandeurs macroscopiques	107
4.3.2	Analyse de la micro-structure	108
4.4	Conclusion	112
5	Conclusion et Perspectives	115
5.1	Conclusion	115
5.2	Perspectives	117
	Bibliographie	118

Introduction générale

LES moules en silicone utilisés pour cuisiner de délicieux gâteaux sont légers, pratiques et facilement déformables. Quelles que soient les déformations qu’on leur fait subir, il reviennent à leur forme de départ ; lorsqu’on gonfle un ballon de baudruche, sa forme et son volume changent considérablement, mais reviennent (presque) à leur forme initiale lorsqu’on laisse l’air s’échapper ; quand on remue de la farine de blé avec de l’eau et des œufs pour avoir une pâte, le mélange obtenu devient de plus en plus solide, suffisamment pour pouvoir façonner toutes sortes de formes. Ces situations, a priori très différentes, font appel à la notion de la matériaux mous. Proposé par la physicienne Madeleine Veyssié dans les années 1970, le vocable *matière molle* désigne toute matière présentant une forte susceptibilité mécanique, allant des matières plastiques aux bulles de savon, en passant par les gels, les élastomères, les cristaux liquides, les boues, etc. Le caractère commun de ces matériaux est qu’ils peuvent se déformer “beaucoup” sous l’action d’une contrainte. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons aux matériaux composés de particules athermiques molles, constituant une classe importante mais peu étudiée de milieux divisés (figure 1).

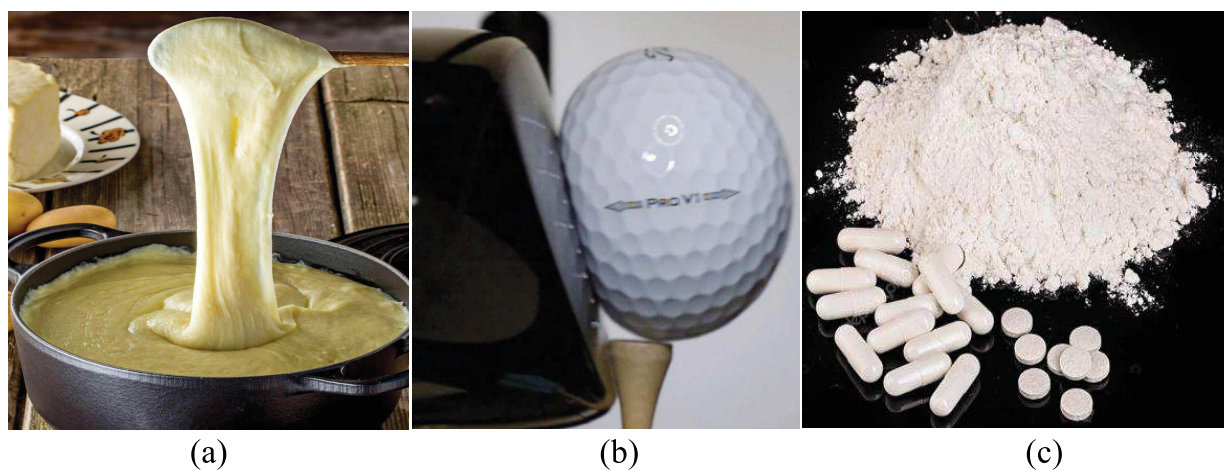


FIGURE 1 – Quelques exemples de systèmes mous : (a) Aligot présentant une texture très élastique [Aveyron \(2018\)](#), (b) Déformation d’une balle de golf après le choc avec le club [Golf \(2018\)](#), (c) Poudre de médicaments comprimés [Poudre \(2018\)](#).

Le comportement mécanique d’un assemblage de particules athermiques molles présente

des spécificités intéressantes. Ce comportement résulte à la fois de la compressibilité des particules, de leur changement de forme, de leurs interactions, et des réarrangements pouvant se produire entre les particules. Le comportement collectif des particules s'en trouve alors modifié. Ainsi, un assemblage de particules molles peut atteindre une compacité plus élevée qu'un assemblage de particules rigides, puisque les particules molles peuvent se réarranger tout en changeant de forme pour mieux combler des vides. Bien que les particules molles jouent un rôle important dans notre vie et dans l'industrie, nos connaissances sur ces matériaux restent encore limitées. C'est la raison pour laquelle nous consacrons cette thèse à l'étude des propriétés mécaniques d'assemblages de particules molles athermiques. Les principaux objectifs de ces travaux sont :

1. de valider une procédure expérimentale permettant de caractériser et d'étudier le comportement de particules molles tant à l'échelle individuelle qu'à l'échelle d'un assemblage de particules, en comparant les comportements obtenus par simulations numériques, et expérimentalement ;
2. de caractériser le comportement macroscopique et la micro-structure d'un tel assemblage ;
3. de déterminer et comprendre les mécanismes qui entrent en jeu lors de la compaction uniaxiale de ces assemblages ;
4. d'analyser l'effet de la compressibilité du matériau et l'effet du coefficient de frottement sur la compaction d'assemblages de particules molles.

Pour atteindre ces objectifs, nous avons utilisé une méthode de corrélation d'images numériques optimisée pour traiter de grandes déformations. Développée au sein du laboratoire, cette méthode permet de travailler avec une large gamme de matériaux ayant des comportements mécaniques bien distincts.

Ce mémoire est structuré en cinq chapitres comme suit :

Au chapitre 1, nous présentons une brève introduction aux milieux granulaires constitués de particules molles. Nous montrons les outils expérimentaux et numériques disponibles dans la littérature pour leur analyse dans différents domaines.

Le chapitre 2 est consacré à une présentation des procédures numériques et expérimentales mises en œuvre dans le cadre de cette thèse. Elles sont utilisées pour étudier la déformation d'une particule molle unique, constituée de matériaux aux propriétés mécaniques différentes : élastique, plastique ou mousse solide.

Au chapitre 3, nous présentons une comparaison à l'échelle macroscopique et microscopique du comportement d'un assemblage de particules molles, comportement obtenu expérimentalement ainsi que par simulations numériques. L'étude présentée dans ce chapitre est centrée sur des milieux constitués de particules *élastiques* subissant des compressions uniaxiales.

Au chapitre 4, nous analysons l'effet de la compressibilité du matériau ainsi que du coefficient de frottement lors de la compression uniaxiale d'assemblages de cylindres élastiques.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale et par la présentation de quelques perspectives.

Milieus granulaires à particules molles

DANS ce chapitre, nous présentons des systèmes constitués de particules molles, ainsi que des enjeux scientifiques et industriels qui y sont associés. Nous décrivons les principales méthodes numériques et expérimentales développées par le passé pour étudier les particules molles à l'échelle d'une particule individuelle ou à l'échelle d'une collection de particules molles. Les résultats importants de la littérature concernant le comportement des milieux granulaires à particules molles sont également rappelés. L'objectif de ce chapitre est de présenter le contexte des études qui seront présentées dans les autres chapitres de ce mémoire.

Sommaire

1.1	Matériaux à particules molles	9
1.2	Contact et déformation de particules molles	11
1.3	Assemblage de particules molles	13
1.3.1	Méthodes expérimentales	13
1.3.2	Méthodes numériques	16
1.3.3	Rigidité des milieux granulaires	20
1.4	Comportements élastiques	24
1.4.1	Equations constitutives de matériaux élastiques	26
1.5	Conclusion	28

1.1 Matériaux à particules molles

De très nombreux produits de consommation se présentent aujourd’hui sous une forme granulaire, ou ont été sous forme divisée lors de l’une des étapes de leur fabrication. Il peut s’agir par exemple de produits pharmaceutiques ou alimentaires, de produits cosmétiques, de composites biosourcés ou de biocarburants. Cependant, en comparaison avec les liquides et les gaz, nos connaissances des propriétés des matériaux athermiques constitués d’un grand nombre de particules restent limitées. Tout progrès dans la compréhension de leurs comportements peut avoir des conséquences considérables dans l’industrie. Une prédiction réaliste de leur comportement statique ou sous écoulement est une étape essentielle au développement et à l’optimisation de processus industriels afin de maîtriser les aléas et les risques, de limiter les énergies consommées en production, ou de répondre aux exigences de plus en plus contraignantes d’éco-conception.

Le comportement d’un assemblage de grains est en général très complexe car il est fortement couplé à sa géométrie et à sa composition. Il présente en effet un désordre très important dont les origines peuvent être nombreuses telle que le désordre de structure lié à la forme, à la taille et à l’état de surface des particules. Dans le cadre des matériaux à particules dures, le comportement mécanique et les propriétés de texture proviennent en partie du caractère faiblement déformable des particules. Par exemple, les distributions hétérogènes des forces sont liées aux faibles aires de contact entre particules (ce qui permet de les assimiler à des contacts ponctuels) et aux exclusions stériques. Un assemblage de particules de sphères rigides monodisperses ne peut pas dépasser une compacité (la compacité est définie comme le rapport entre le volume occupé par les particules et le volume total du système, incluant par exemple les vides) approximative de 0,64 tandis qu’un assemblage de sphères molles (les particules peuvent subir des grandes déformations sans se fracturer) peut atteindre des compacités beaucoup plus élevées car les particules sont capables de changer de forme (Cloitre et al. (2003)). De même, le comportement plastique et la perte de mémoire de l’état initial dans l’état critique résultent des réarrangements des particules et de la dissipation d’énergie par frottement et collisions inélastiques (Lachhab (1994)), qui peuvent être profondément modifiés par les déformations d’amplitudes finies des particules. Une question essentielle concernant les matériaux à particules molles est de comprendre dans quelle mesure la déformabilité des particules affecte les propriétés de ces matériaux granulaires.

De nombreux exemples de matériaux à particules molles peuvent être trouvés plus spécifiquement dans les industries pharmaceutiques et alimentaires (Emery et al. (2009); Barnabé et al. (2018)). Les produits alimentaires en poudre (par exemple, le café instantané, le lait en poudre) ont généralement un comportement très dépendant de l’humidité et de la

température. De leur production à leur utilisation, ils subissent différentes étapes d'hydratation, de séchage et de cuisson qui modifient le comportement mécanique des particules et leurs interactions. Les gels et les hydrogels contenant des particules molles, présents dans les denrées alimentaires, dictent dans une large mesure le comportement rhéologique global (Alvarez-Lorenzo et al. (2013)). Les argiles peuvent également être considérées comme des matériaux à particules molles dans la mesure où, à l'échelle nanoscopique, les argiles sont composées d'agrégats de plaquettes qui peuvent être flexibles ou changer de forme en glissant les unes sur les autres (Hantal et al. (2014)). Les gels à base de protéines sont des matériaux idéaux pour l'encapsulation de composés bioactifs tels que les vitamines, les peptides bioactifs, les probiotiques et les antioxydants. Ils sont à la base des nouveaux aliments fonctionnels qui peuvent avoir des effets bénéfiques sur le plan physiologique ou réduire les risques de maladies (Chen et al. (2006)). Les phénomènes d'auto-assemblage tels que l'auto-assemblage des mono-glycérides sont recherchés pour la rétention de la saveur, l'administration de médicaments, etc. (Sagalowicz et al. (2006)). Des hydrogels peuvent également être ajoutés au sol pour améliorer ses caractéristiques de rétention d'eau, ce qui permet de créer des conditions d'eau optimales pour la croissance des plantes dans les régions où la disponibilité en eau est réduite. En effet, les hydrogels sont des super-absorbants qui absorbent et stockent l'eau des centaines de fois leur propre poids (Koupai et al. (2008)). La circulation sanguine, les dispositifs micro-fluidiques et le traitement par émulsion mettent en jeu des particules micrométriques, telles que des cellules, des vésicules et des gouttes dans les écoulements visqueux. Par exemple, la déformabilité des globules rouges joue un rôle crucial dans les propriétés rhéologiques du sang, à la fois à l'échelle des artères et dans la microcirculation à travers de très petits vaisseaux capillaires. Les vésicules à membranes fermées en phospholipide sont des particules hautement déformables en raison du fluide visqueux interne, de la souplesse et de la quasi-inextensibilité de leur membrane visqueuse lipidique (Mader et al. (2006); Abkarian et Viallat (2008)).

Bien que tous les matériaux présentés ci-dessus n'aient pas les mêmes lois d'interaction entre leurs particules, ils ont la caractéristique commune d'être composés de particules bien définies qui peuvent subir des déformations importantes sans se fracturer. La déformation des particules dans les milieux divisés est particulièrement sensible à la présence de forces de cohésion, à la température et l'humidité, et à la pression de confinement (Liu (2006)). Cette déformation, le plus souvent négligée dans les modèles de dimensionnement, est à l'origine d'une variabilité importante de comportement. Dans les opérations d'extrusion par exemple, la pression subie par les particules est importante et conduit à leur réarrangement et à leur déformation. En sortie de filière, la relaxation de la contrainte produit une expansion de la matière qui peut conduire à des défauts. Le même type de problématique se pose dans l'utilisation des fibres de bois ou de pailles en fabrication additive.

Nous allons présenter par la suite certains aspects et résultats liés aux matériaux constitués de particules molles.

1.2 Contact et déformation de particules molles

L'adhésion et le frottement entre particules ainsi que les comportements élasto-plastiques des particules contrôlent le comportement collectif des particules molles que ce soit sous pression ou en écoulement sous l'effet d'une contrainte cisailante (Thornton et Ning (1998); Pasha et al. (2014)). C'est pourquoi la compréhension des grandes déformations d'une seule particule molle, ou d'un contact unique entre deux particules molles, est une étape importante pour l'étude de la rhéologie des assemblages de particules molles. Les interactions entre les particules dépendent des forces de surface élastiques, frictionnelles et cohésives, ainsi que de la dissipation d'énergie due au comportement plastique ou visqueux. Un nombre croissant de travaux de recherche, dans un large éventail de disciplines, étudient expérimentalement ou théoriquement les mécanismes de déformation des particules (Liu (2006)).

Les lois d'interaction de contact entre particules ne sont souvent exprimées analytiquement que dans la limite des petites déformations comme dans le cas de la loi de Hertz et de ses extensions aux contacts frottants et adhésifs (Johnson (1987); Derjaguin et al. (1975); Maugis (2000)). De nos jours, ces lois sont très utilisées dans différents domaines de la physique et de la mécanique tels que les matériaux granulaires (Radjai et al. (1996); Majmudar et Behringer (2005); Brodu et al. (2015); Favier de Coulomb et al. (2017)), la chimie (Langston et al. (1995)), la géophysique (Tutuncu et Sharma (1992)) et la biomécanique (Dimitriadis et al. (2002); Lin et al. (2009)). Cependant, alors que les lois de contact comme la loi de Hertz décrivent le contact dans la limite des déformations infinitésimales, dans le cadre des grandes déformations, on observe une grande variété de comportements dépendant des propriétés des particules. Il existe plusieurs modèles représentant de grandes déformations de particules simples telles que des sphères solides homogènes, des membranes sphériques remplies par un fluide incompressible ou des coques sphériques élastiques. Par exemple, pour les contacts adhésifs, les modèles théoriques JKR (Johnson et al. (1971)) et DMT (Derjaguin et al. (1975)) corrigent le comportement des contacts hertziens en présence de forces de surface. Plus récemment, un modèle théorique a été développé par Liu et Wan (Liu et Wan (2000); Wan et Liu (2001)) pour décrire une capsule adhérent à une substrat plan : la mécanique de contact a été formulée sur la base de l'élasticité linéaire pour représenter quantitativement la relation entre gonflement osmotique, zone de contact et angle, étirement de la membrane et force d'adhérence. Cette théorie a été expérimentalement validée pour plusieurs systèmes cellulaires tels que les micro-capsules (Liu et al. (2002)).

Les modèles théoriques décrivant les grandes déformations de particules élastiques non adhésives ne sont disponibles que pour des systèmes ayant des structures simples telles que les membranes sphériques de matériaux incompressibles. Le comportement de particules constituées de matériaux présentant des propriétés mécaniques plus complexes, par exemple élastiques non linéaires est bien moins documenté. Nous pouvons citer le modèle développé par Tatara (Tatara (1991a,b)) qui est adapté pour décrire des particules en caoutchouc, ou le modèle développé par Lardner (Lardner et Pujara (1980)) qui est adapté

pour décrire la déformation en compression d'un système granulaire. Tatara a développé une théorie générale de la déformation en compression d'une sphère élastique homogène non adhésive pour des déformations atteignant 15 %. Le modèle diffère de la théorie classique du contact Hertz dans la mesure où il considère des déformations qui ne sont pas forcément infinitésimales, ce qui nécessite la prise en compte de non-linéarités. Ce modèle théorique a été validé expérimentalement avec des sphères microscopiques d'élastomères (Afrin et al. (2005)) ainsi que sur des micro-gels pharmaceutiques (Andrei et al. (1996)).

Les déformations de particules ont fait l'objet d'un grand nombre d'études expérimentales, y compris sous grandes déformations. Différentes approches expérimentales ont été utilisées pour ces études. Pour mesurer les forces inter-surfaces d'une particule molle en contact avec un substrat ou une autre particule, les machines à force de surface (SFA) (Luckham et de L. Costello (1993)) et la microscopie à force atomique (AFM) (Claesson et al. (1996)) sont les techniques les plus courantes en raison de leur grande précision pour les mesures de force et de déplacement. La technique utilisant une SFA est généralement appliquée pour mesurer les forces entre deux surfaces, tandis que l'AFM est souvent appliquée pour étudier à la fois la force entre surfaces et la mécanique de la déformation des particules.

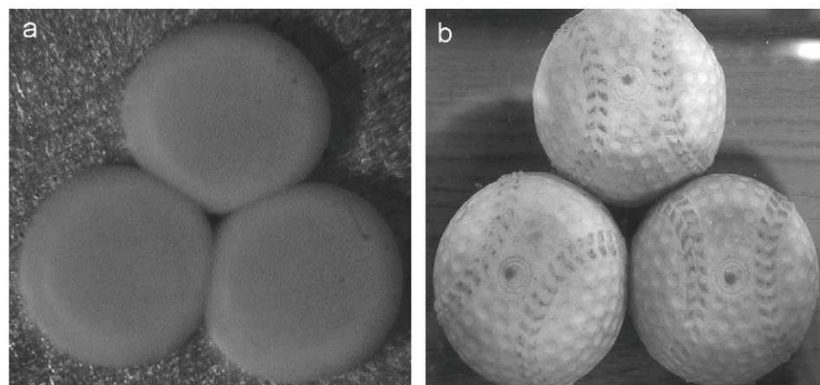


FIGURE 1.1 – Comparaison de la forme des pores entre les sphères les plus proches dans des assemblages compacts : a) sphères en éponge et b) sphères en caoutchouc (Lin et al. (2008)).

La déformation des particules molles peut impliquer un changement de forme et/ou une variation de volume de particule. On distingue les particules molles incompressibles dont la forme change tandis que le volume global reste constant pendant la déformation, et des particules molles compressibles dont la forme et le volume global changent simultanément. Lin et al. (2008) ont étudié la déformation des particules compressibles et incompressibles soumises à une compression entre deux platines. Les auteurs observent que la forme des particules en dehors de la zone de contact peut être bien approchée par une ellipse et que l'extension latérale des particules est plus grande dans le cas incompressible, ce qui permet naturellement de déduire que les vides entre particules seront plus petits dans le cas de

particules compressibles qu’avec des particules incompressibles (voir la figure 1.1). Cependant, une étude expérimentale et quantitative du champ de déformation ou de contrainte fait encore défaut.

1.3 Assemblage de particules molles

Les propriétés géométriques et mécaniques des assemblages de particules molles sont en générales très complexes. Par exemple, lorsqu’on comprime un milieu granulaire constitué de particules solides (dures ou molles), plusieurs types de comportements peuvent se présenter. En début de compression, le système peut d’abord se réarranger à grande échelle : des ensembles de particules glissent les uns par rapport aux autres, des glissements et des rotations peuvent aussi se produire à petite échelle. Dans cette phase, le milieu granulaire n’est pas stable mécaniquement, et ne résiste à aucune déformation. L’échelle des restructurations du milieu granulaire dépend alors essentiellement des conditions aux limites imposées au système et de son histoire. Si la compression se poursuit, l’échelle de réarrangements devient locale et le milieu adopte une nouvelle configuration dans laquelle il peut supporter des contraintes imposées. Si le milieu granulaire est constitué de particules molles et que la compression se poursuit, alors les particules changent de forme afin de trouver une nouvelle position d’équilibre. Afin de mieux comprendre le comportement mécanique associé ainsi que les propriétés de texture des assemblages de particules molles, plusieurs études numériques et expérimentales ont déjà été réalisées.

1.3.1 Méthodes expérimentales

Il existe plusieurs méthodes pour étudier expérimentalement un milieu granulaire à l’échelle du grain. Développée au début du 20^{me} siècle (Coker et Filon (1957)), la méthode de photoélasticimétrie devient de plus en plus répandue pour étudier les forces à l’intérieur de l’assemblage de particules (Dantu (1957); Drescher et de Josselin de Jong (1972)). Cette méthode est applicable à des matériaux comme le pyrex, le Plexiglas, ou certains polymères qui deviennent biréfringents lorsqu’ils sont soumis à une contrainte. Majmudar et Behringer (2005) ont visualisé les contraintes internes dans chaque particule et obtenu les composantes des forces normales et tangentielles pour chaque contact entre les disques en optimisant la technique de photoélasticimétrie. Les auteurs proposent un algorithme d’extraction des forces de contact en ajustant les données des images photo-élastiques observées à l’intérieur de chaque disque, avec les solutions élastiques calculées pour la contrainte (Landau et Lifshitz (1959)). Cet algorithme fournit une bonne approximation dans la limite des petites déformations des particules. Il existe une autre méthode dénommée *analyse des contraintes thermoélastiques* (TSA) (Dulieu-Barton et Stanley (1998)), qui est potentiellement applicable à tous types de matériaux, y compris les matériaux opaques. La TSA est basée sur la détection des petits changements de température qui surviennent lorsqu’un matériau est soumis à un changement de déformation, effet appelé *effet thermoélastique*. Il permet

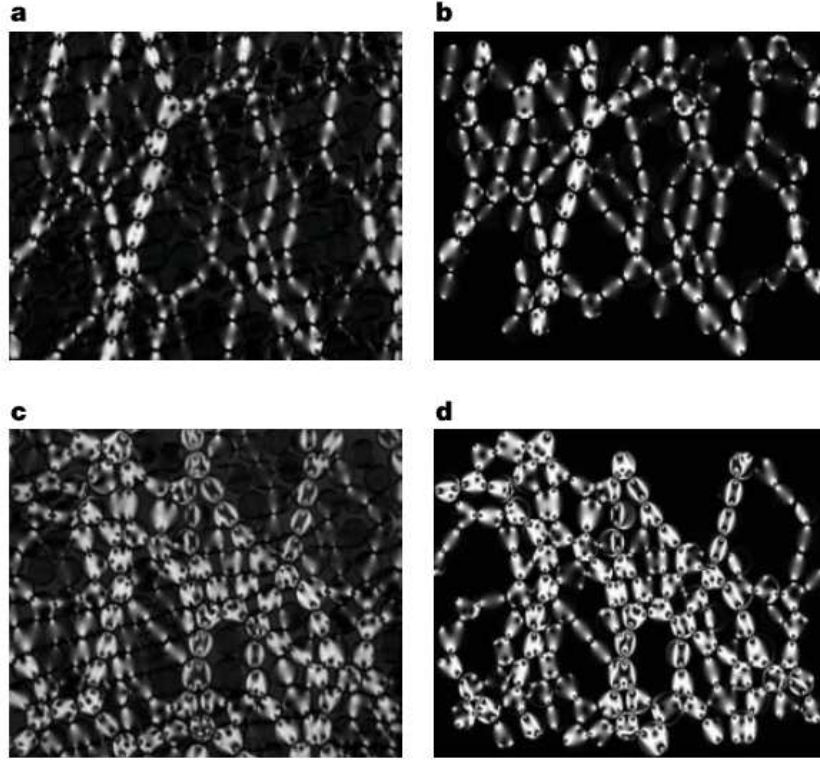


FIGURE 1.2 – Comparaison d’images issues d’expériences de photoélasticimétrie (a,c) et d’images issues de simulations (b,d). Les deux vues supérieures présentent un état de cisaillement sous faible contrainte. Les deux vues inférieures montrent un état d’une compression isotrope sous contrainte élevée. Les forces inférieures à 10 % de la force moyenne ne sont pas représentées (Majmudar et Behringer (2005)).

de calculer les contraintes principales de chaque particule dans un système expérimental (Jongchansitto et al. (2014)).

Les forces de contact entre particules et parois peuvent être mesurées en utilisant la technique du papier carbone (Liu et al. (1995); Mueth et al. (1998)). Avec cette méthode, toutes les surfaces des parois du système sont recouvertes d’une couche de papier carbone et d’une feuille de papier vierge. Une fois la charge appliquée, il apparaît sur la feuille vierge des marques qui correspondent à l’empreinte des contacts entre les particules et une paroi. Ces marques, dont l’intensité dépend de l’amplitude de la force pressante, peuvent être numérisées à l’aide d’un scanner pour fournir, après analyse, la distribution des forces de contact exercées par le système granulaire sur les parois.

Nous pouvons citer aussi les techniques de tomographie (par exemple la tomographie microscopique aux rayons X, microCT) (Saadatfar et al. (2012); Vlahinić et al. (2014)) ou d’iso-indice de réfraction (Dijksman et al. (2012); Mukhopadhyay et Peixinho (2011)) qui ont été mises en œuvre avec succès pour mesurer la structure et les contacts de particules en 3D. L’extraction des forces peut être réalisée à partir des mesures des contours

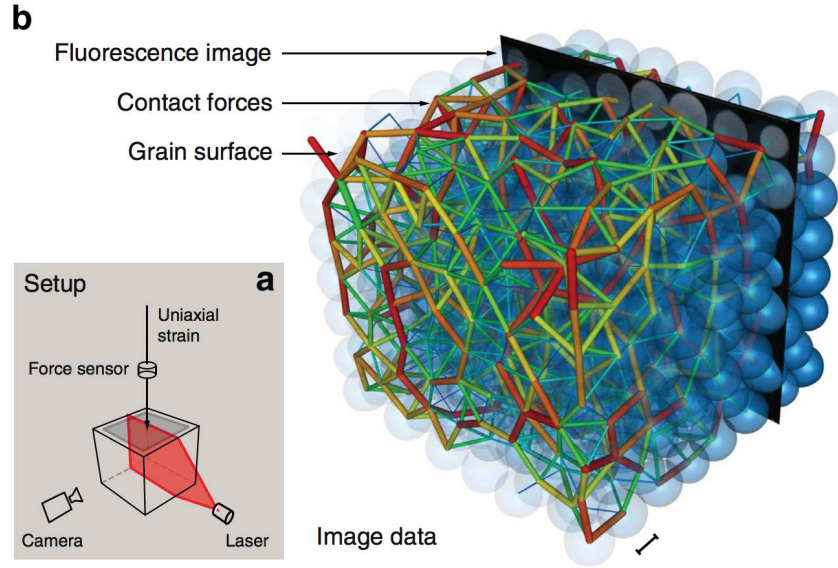


FIGURE 1.3 – (a) Représentation schématique d’un dispositif de tomographie optique par fluorescence. (b) Reconstruction tridimensionnelle obtenue à partir de plusieurs tranches : les particules sont représentées en bleu et les forces sont représentées par des barres colorées dont l’épaisseur (fine - épaisse) et la couleur (bleu - rouge) représentent ensemble les forces de contact (Brodu et al. (2015)).

obtenus par microCT pour chaque particule (Andrade et Avila (2012); Hurley et al. (2014)) associées à la condition d’équilibre. Brodu et al. (2015) ont adapté cette méthode à la tomographie iso-indice de réfraction, qui permet de varier les chargements macroscopiques sur le milieu tout en mesurant les forces entre grains. Cette technique ne peut s’appliquer que pour des systèmes constitués de grains transparents, de façon à pouvoir les éclairer avec une nappe laser (figure 1.3).

Les méthodes citées ci-dessus sont utilisées pour étudier les propriétés géométriques et mécaniques d’assemblages de particules rigides ou très peu déformées. Lorsque les particules sont molles, il est intéressant d’obtenir des informations sur la structure des déformations à l’intérieur même des particules. Nous présentons ci-dessous la méthode de corrélation d’images numériques (*Digital Image Correlation* : DIC) que nous avons utilisée dans cette thèse pour déterminer ces champs de déformation internes aux particules. Cette méthode peut être rapprochée de technique de vélocimétrie par imagerie de particules, largement utilisée en mécanique des fluides (Barker et Fourney (1977); Dudderar et Simpkins (1977)). Elle a été d’abord développée à l’University of South Carolina dans les années 1980 (Peters et Ranson (1982); Chu et al. (1985)). La corrélation d’images numériques présente l’avantage d’être polyvalente en termes d’échelles d’observation, allant des observations nanoscopiques aux observations macroscopiques avec essentiellement le même type d’analyses. Cette technique est applicable à une très large gamme de matériaux. La méthode DIC en 2D comprend les trois étapes suivantes : (1) la préparation des échantillons et des

équipements; (2) l'enregistrement des images de la surface plane de l'échantillon avant et après le chargement; (3) le traitement des images numériques pour obtenir les informations sur les champs de déplacement et de déformation souhaités. Cette méthode de DIC en 2D a de très nombreuses applications que l'on peut classer en trois catégories d'après [Pan et al. \(2009\)](#), suivant que : (1) La DIC peut être directement utilisée pour quantitativement déterminer le champ de déformation et caractériser le mécanisme de déformation de divers matériaux soumis à un chargement mécanique, chargement thermique ou autre chargement ([Wattrisse et al. \(2001\)](#); [Xiang et al. \(2007\)](#); [Bastawros et al. \(2000\)](#)); (2) Des paramètres mécaniques du matériau (tels que le module de Young, le coefficient de Poisson ([Zhang et al. \(1999\)](#); [Chasiotis et Knauss \(2002\)](#); [Cho et al. \(2005b\)](#); [Zhang et al. \(2006\)](#)), etc) peuvent être identifiés à partir du calcul du champs de déplacement ou de déformation; (3) Les champs de déformation calculés peuvent être utilisés pour valider des simulations ([Avril et al. \(2008\)](#); [Sun et Pang \(2008\)](#)) ou une analyse théorique ([Sabate et al. \(2006\)](#); [Cho et al. \(2005a\)](#); [Knauss et al. \(2003\)](#)). Comme dans le cadre de cette thèse nous étudions le comportement d'un assemblage de particules molles, nous avons adapté une méthode de DIC (qui sera détaillée dans la suite de ce mémoire) au cas où le matériau subit des grandes déformations.

1.3.2 Méthodes numériques

En parallèle au développement des méthodes expérimentales, la modélisation des particules molles a fait l'objet de nombreux travaux.

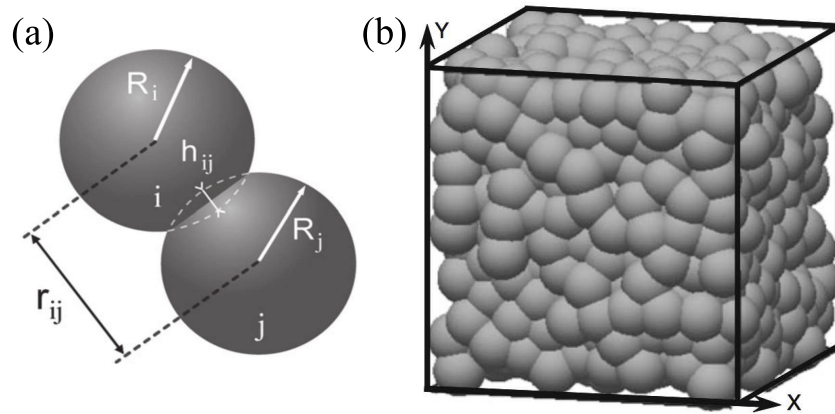


FIGURE 1.4 – (a) Deux particules déformables (i et j) comprimées l'une contre l'autre et interagissant élastiquement à travers leur surface de contact. (b) Boîte périodique contenant des particules sphériques molles. Ces particules sont supposées se déformer selon la théorie du contact de Hertz avec un grand recouvrement entre particules ([Bonnecaze et Cloitre \(2010\)](#)).

Des stratégies numériques basées sur la modélisation discrète ont été développées pour la simulation des assemblages de particules en supposant que les particules sont dures

ou faiblement déformables. Dans ce contexte, la méthode la plus utilisée est la *méthode des éléments discrets* (*Discrete Element Method* : DEM) introduite par Cundall et Strack (1979). Les particules sont traitées comme des corps rigides, mais les contacts entre les particules sont considérés comme déformables et obéissent à un comportement élastique dans lequel la variable de déformation au contact est déduite des positions et déplacements relatifs des particules. Les lois de force permettent d'appliquer les méthodes d'intégration classiques avec un pas de temps faible devant le temps de réponse élastique du contact. Par exemple, un modèle micro-mécanique basé sur la DEM sans frottement avec des interactions de Hertz entre les particules solides, ainsi que des recouvrements entre particules plus grands que le domaine de Hertz, a été proposé par Bonnecaze et Cloître (2010) pour modéliser des assemblages de particules molles non frottantes (figure 1.4). La limitation de ces travaux vient de ce que la loi de Hertz (Landau et Lifshitz (1959)) n'est valide que dans le cas où la force ne possède pas de composante tangentielle, et où les surfaces en contact sont parfaitement lisses. Mindlin (1949) a repris la théorie de Hertz en introduisant une composante tangentielle de la force ainsi qu'un terme qui tient compte de l'effet des frottements de Coulomb entre les deux surfaces de contact. Ce modèle a mis en évidence, outre la non linéarité du comportement, l'importance de l'histoire de la surface de contact dans l'évolution de ce comportement. Ce modèle est validé par les résultats expérimentaux de (Mason et al. (1995); Skouri et al. (1995)). Des modèles similaires ont été utilisés dans d'autres contextes. Par exemple, Durian (1995) a obtenu un comportement similaire pour les mousses en modélisant les bulles comme des sphères élastiques sans frottement avec une raideur qui dépend de la tension de surface. Ces méthodes sont maintenant considérées comme bien établies, et sont employées dans des applications liées à la technologie des poudres, la mécanique des sols et la géologie (O'Hern et al. (2003); van Hecke (2010)).

Une autre variante de l'approche discrète est la méthode de *Dynamique des Contacts* (*Contact Dynamics* : CD) développée par J.J. Moreau et M. Jean (Moreau (1977, 1983, 1988b,a, 1993, 1994); Jean et Pratt (1985); Jean (1988, 1995, 1999); Jean et Moreau (1992); Jean et al. (1994)). Elle est le résultat d'une formulation mathématique de dynamique non-régulière et de développements algorithmiques. La différence essentielle entre cette approche et la DEM classique réside dans le traitement des interactions de contact. La DEM classique basée sur la méthode de dynamique moléculaire (*Molecular Dynamics* : MD), (MD-DEM), est une approche régulière où les interactions sont décrites de manière explicite. En d'autres termes, il existe une loi de force qui lie les forces de contact à la configuration géométrique des particules en contact. Cette approche utilise des schémas d'intégration explicites avec un pas de temps faible devant le temps de réponse élastique du contact. Au contraire, la méthode CD est une approche non-régulière de DEM, les interactions de contact sont décrites par des *lois de contact* non-régularisées. Ces lois de contact sont la condition d'interpénétrabilité des corps et le frottement solide de Coulomb. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire des fonctions régularisantes pour les contacts comme dans les méthodes régulières. Le mouvement des particules n'est pas régulier et comporte des sauts de vitesse traduisant les collisions multiples et des frottements collectifs entre les particules. Ces discontinuités font que les équations du mouvement sont écrites sous une forme intégrée et nécessitent un schéma d'intégration implicite pour les résoudre. De plus,

cette méthode admet des pas de temps bien plus grands que l'approche DEM classique (Radjai et Dubois (2011)). De nos jours, elle est couramment utilisée pour étudier les matériaux granulaires (Moreau (1977); Radjai et al. (1998); Renouf et al. (2004); Nguyen et al. (2015)), les systèmes multi-corps flexibles (Renouf et al. (2011); Saussine et al. (2006)) ou les maçonneries (Taforel (2012); Acary (2001)). Un avantage important de l'algorithme traitant des contacts frottants sans régularisation de la méthode CD est qu'il peut être directement appliqué au problème de contacts entre particules molles.

Les méthodes qui sont utilisées pour les particules dures ont seulement besoin de tenir compte des degrés de liberté de corps rigide. Cependant, une simulation de particules molles nécessite l'introduction des degrés de liberté *internes* des particules avec un traitement approprié de l'impénétrabilité des particules et du frottement dans les zones de contact. La première stratégie simple est la méthode des particules liées (*Bonded Particle Method* : BPM), qui consiste à modéliser chaque particule comme un agrégat de particules primaires rigides avec des interactions cohésives (Nguyen (2016); Nezamabadi et al. (2017)). Les particules primaires peuvent donc se déplacer et se réarranger dans un agrégat selon les forces extérieures exercées sur ses bords par d'autres agrégats. Cette "discrétisation particulaire" des particules est une approche simple car elle permet une application simple de la DEM pour la simulation des grains déformables. Cette technique a été également appliquée à la simulation des particules sécables en introduisant un seuil de rupture entre particules (Thornton et al. (1996); Moreno et al. (2003); Antonyuk et al. (2006); Bolton et al. (2008); Wittel et al. (2008); Liu et al. (2010); Nguyen et al. (2015); Cantor et al. (2017)).

Pour prendre en compte les propriétés constitutives des particules ainsi que leurs interactions mutuelles, des approches variationnelles basées sur les descriptions Eulérienne (Benson (1997)) ou Lagrangienne (Munjiza et al. (1995); Bardenhagen et al. (2000)) ont été développées. Ces méthodes consistent à mailler les particules et à résoudre les équations continues en prenant en compte des formes régularisées des interactions de contact et de frottement. Une première technique basée sur une approche implicite de la méthode de points matériels (*Material Point Method* : MPM) en association avec la méthode CD a été développée (Nezamabadi et al. (2015, 2017)). Dans cette méthode, les particules sont discrétisées sous forme de points matériels caractérisés par leur masse, leur position, leur vitesse et portant les informations associées à un élément de volume tels que les tenseurs de contrainte et de déformation. A chaque pas de temps, ces informations sont projetées sur un maillage sous-jacent au niveau duquel les conditions aux limites de contact frottant sont appliquées et les équations du mouvement sont résolues. A partir des champs obtenus aux nœuds, les informations sont ensuite réactualisées au niveau des points matériels. En appliquant la méthode CD, l'algorithme de contact consiste à déterminer la force entre les nœuds associés à plusieurs particules et donc potentiellement en contact. Le frottement est déterminé en évaluant les vitesses nodales relatives. Avec son efficacité numérique et sa possibilité de simuler de très grandes déformations, MPM a été appliquée dans une grande variété de problèmes en mécanique des solides, par exemple la décharge d'un silo (Wieckowski et al. (1999)), la traction d'une membrane (York et al. (1999)), les vibrations élastiques (Sulsky et al. (1994)), les collisions (Bardenhagen et al. (1998); Sulsky et al. (1994, 1995); Sulsky et Schreyer (1996)) ou encore les milieux granulaires (Bardenhagen et

Brackbill (1998); Bardenhagen et al. (2000); Cummins et Brackbill (2002); Bardenhagen et al. (2001)).

Une autre approche que l'on peut citer est le couplage DEM-FEM qui consiste à combiner la méthode des éléments finis (*Finite Element Method* : FEM) avec la méthode des éléments discrets (DEM) (Munjiza et al. (1995); Munjiza (2004)). Dans ce cas, chaque particule est discrétisée par la FEM et des interactions entre particules sont modélisées par la DEM. Par exemple, Gethin et al. (2001) ont appliqué cette technique au compactage de poudres métalliques. D'autres exemples d'application de la FEM-DEM peuvent être trouvées dans Munjiza (2004).

Couplage FEM-CD

Prenant en compte les avantages de la méthode de Dynamique de Contact par rapport à la DEM classique, une combinaison FEM-CD a été développée et implémentée dans le logiciel LMGC90 (LMGC90 (2018)). Elle permet de simuler des particules déformables en traitant les contacts frottants entre les particules. Dans le but de modéliser des assemblages de particules déformables avec contact frottant, nous utilisons dans le cadre de cette thèse la méthode FEM-CD pour nos simulations numériques. Nous présentons dans la suite brièvement l'algorithme de cette méthode. La formulation standard du comportement mécanique des corps déformables et les équations discrétisées de la dynamique d'un ensemble de corps peuvent être écrites sous la forme générique suivante :

$$\mathbf{M}a_{node}(t) = \mathbf{F}^{ext}(t) + \mathbf{F}^{int}(t) + \mathbf{F}^C(t) \quad (1.1)$$

où $\mathbf{M}$ est la matrice de masse, $\mathbf{F}^{ext}$ est le vecteur de la force extérieure, $\mathbf{F}^{int}$ est le vecteur de la force intérieure, et le vecteur accélération aux nœuds est noté $\mathbf{a}_{node}$. La force intérieure dépend du comportement du matériau. Les forces de contact $\mathbf{F}^C$ entre les particules sont calculées à l'aide d'un algorithme de contact prenant en compte la condition de non-interpénétration de la matière ainsi que la loi de frottement de Coulomb. Considérons un instant que la réaction exercée entre deux corps en contact est la force $\mathcal{R}$ et $\mathcal{V}$ est la vitesse relative. $\mathcal{R}$ a deux composantes qui sont la force normale $\mathcal{R}_n$ et la force de frottement $\mathcal{R}_t$. La vitesse relative a aussi deux composantes qui sont la vitesse normale relative $\mathcal{V}_n$ et la vitesse de glissement $\mathcal{V}_t$. La distance algébrique entre deux corps de contact est notée g . La condition de Signorini pour les contacts non frottants s'écrit de la façon suivante (Jean (1995); Brogliato (1999)) :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_n = 0 \Rightarrow \mathcal{R}_n = 0 \\ \mathcal{V}_n > 0 \Rightarrow \mathcal{R}_n > 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

et la loi de frottement de Coulomb s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_t > 0 \Rightarrow \mathcal{R}_t = -\mu_f \mathcal{R}_n \\ \mathcal{V}_t = 0 \Rightarrow |\mathcal{R}_t| < \mu_f \mathcal{R}_n \\ \mathcal{V}_t < 0 \Rightarrow \mathcal{R}_t = \mu_f \mathcal{R}_n \end{cases} \quad (1.3)$$

où μ_f est le coefficient de frottement entre deux corps. Ces deux lois sont illustrées graphiquement dans la figure 1.5.

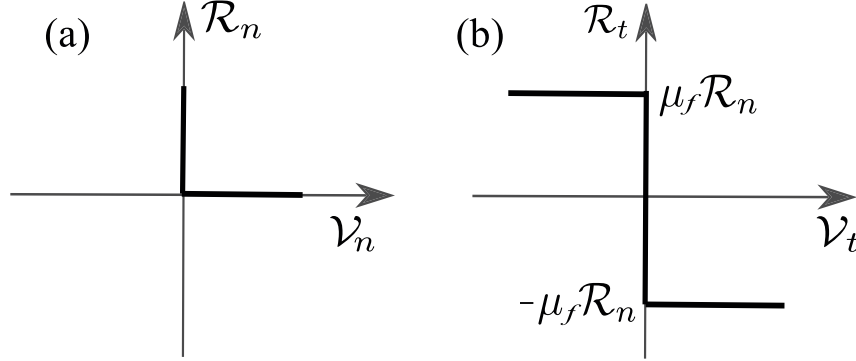


FIGURE 1.5 – (a) Condition de Signorini reliant la vitesse normale entre deux particules $\mathcal{V}_n$ et la force normale $\mathcal{R}_n$. (b) Loi de frottement de Coulomb reliant la vitesse de glissement $\mathcal{V}_t$ et la force de frottement $\mathcal{R}_t$. μ_f est le coefficient de frottement.

1.3.3 Rigidité des milieux granulaires

Un milieu granulaire à l'équilibre statique se comporte comme un solide : un tas de neige, un silo rempli de grains, etc, sont autant d'exemples de situations où les grains ne bougent pas et où le milieu peut se comporter comme un solide (voir quelques exemples à la figure 1.6). Par exemple, si on verse un volume de céréale sur une table, l'écoulement s'arrête spontanément et on obtient un tas mécaniquement stable. Le comportement des milieux granulaires offre de nombreux avantages dans la vie quotidienne ou industrielle, en particulier concernant à la production, le stockage et le transport. Par exemple, nous stockons toujours des matières granulaires sèches dans un silo dont la hauteur est beaucoup plus grande que la largeur car la force ressentie au fond du silo est largement inférieure du poids total des grains qu'il contient. De nos jours, nous comprenons bien ce phénomène avec l'effet Janssen ([Vanel et Clément \(1999\)](#)). En fait, les grains dans le silo s'organisent en créant des voûtes qui transforment la quasi totalité du poids des grains en forces sur les parois latérales.

De nombreux travaux ont été réalisés ces dernières années afin d'approfondir nos connaissances sur les phénomènes liés à la nature granulaire d'un milieu. L'état de blocage d'un milieu granulaire est associé à la transition de rigidité de la manière désordonnée. Les verres, les milieux granulaires, les pâtes ou les mousses peuvent se bloquer dans des états rigides et désordonnés. Leur réponse mécanique est alors essentiellement élastique lorsqu'ils sont soumis à de faibles contraintes. Mais ils peuvent aussi s'écouler lorsque la contrainte excède un seuil, comme indiqué par un diagramme proposé par [Liu et Nagel \(1998\)](#) ; voir la figure 1.6(e). De nombreux matériaux désordonnés peuvent se trouver dans un état bloqué pour de faibles températures, de faibles charges et de grandes densités, mais peuvent céder et s'écouler lorsque ces paramètres sont modifiés. Un point particulier de ce

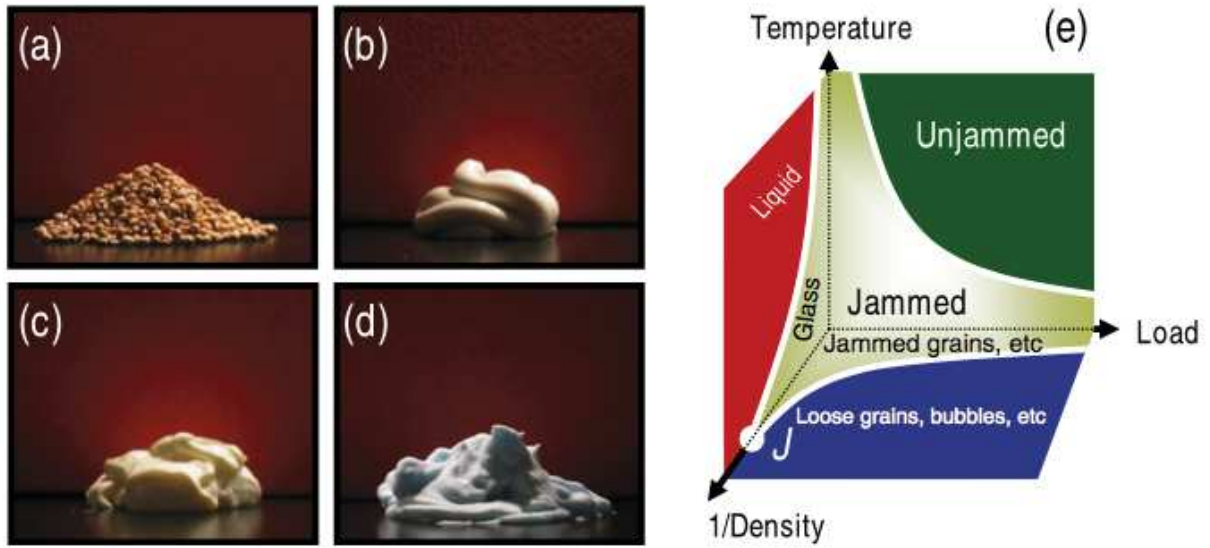


FIGURE 1.6 – (a) - (d) Exemples de matériaux désordonnés d’usage quotidien, dans un état de blocage. a) Milieux granulaires constitués de grains solides. (b) Dentifrice, un assemblage dense de particules colloïdales dans un fluide. (c) Mayonnaise, émulsion consistant en un assemblage dense de gouttelettes (d’huile) dans un fluide non miscible. (d) Mousse à raser, un assemblage dense de bulles de gaz dans un fluide. (e) Diagramme de transition de blocage proposé par [Liu et Nagel \(1998\)](#). Il montre que de nombreux matériaux désordonnés se trouvent dans un état bloqué pour de basses températures, de faibles charges et de grandes densités ([van Hecke \(2010\)](#)).

diagramme, noté J , est défini par [O’Hern et al. \(2002\)](#) comme le point de température et de contrainte imposée nulles, contrôlé en densité, auquel la rigidité de ces systèmes apparaît. Ce point n’est défini par les auteurs que pour des particules interagissant de manière répulsive avec un potentiel de portée finie et sans frottement. Il représente le début de l’état de transition de blocage avec l’augmentation de la compacité. Un assemblage de particules rigides est difficile à comprimer au-delà de l’état de blocage sans casser les particules. Par contre, un assemblage de particules molles peut être comprimé au-delà de cet état grâce à la déformabilité des particules. La robustesse de ce point J est illustrée à travers de nombreux travaux sur les écoulements de milieux désordonnés ([Olsson et Teitel \(2007\)](#); [Langlois et al. \(2008\)](#); [Katgert et al. \(2008\)](#); [Head \(2009\)](#)). D’autres études, théoriques et expérimentales, se sont intéressées aux systèmes divisés à température finie ([Berthier et Witten \(2009a,b\)](#); [Dauchot et al. \(2005\)](#); [Majmudar et al. \(2007\)](#); [Keys et al. \(2007\)](#); [Berthier et Biroli \(2011\)](#)).

La coordinance Z , définie comme le nombre moyen de contacts par particule dans un milieu divisé, joue un rôle crucial pour ces systèmes divisés. Il existe une valeur minimale Z_c de Z correspondant à la compacité Φ_c (compacité au point J) en dessous de laquelle le système perd toute rigidité. Lorsque la coordinance est inférieure à Z_c , des mouvements collectifs de particules sont possibles sans que les particules ne doivent être déformées.

Transition de rigidité dans un milieu granulaire constitué de sphères non frottantes

Un milieu granulaire constitué de particules non frottantes au point J a des propriétés géométriques remarquables, liées à la notion d'isostaticité (Moukarzel (1998); Tkachenko et Witten (1999); Roux (2000)). Considérons dans un premier temps un empilement à l'équilibre dans un espace de dimension d , de N particules identiques de rayon R , rigides et non frottantes, ce qui implique que les forces de contact sont toutes normales. On suppose qu'à la transition de rigidité du système, N_c est le nombre de contacts dans le système. Comme les particules sont non frottantes, la détermination des forces de contact ne nécessite d'en connaître que la norme, ce qui représente N_c inconnues. La condition d'équilibre de l'ensemble des N particules du système forme un ensemble de dN équations. Pour que l'empilement soit à l'équilibre, il doit y avoir au moins une solution pour la répartition des forces, et donc il doit y avoir moins d'équations que d'inconnues, soit la condition $dN \leq N_c$. La coordinance étant égale par définition à $Z_c = 2N_c/N$, on en déduit que $Z_c \geq 4$ dans un espace à 2 dimensions et $Z_c \geq 6$ à 3 dimensions. Par ailleurs, au point J , les particules n'étant pas déformées, la distance qui sépare les centres de deux particules en contact est égale à $2R$. Cela signifie que le nombre de contacts ne peut pas être supérieur au nombre de degrés de libertés des positions des particules d'où $Z_c \leq 4$ à 2 dimensions et $Z_c \leq 6$ à 3 dimensions.

En combinant ces deux conditions (le dénombrement des équations d'équilibre et des contraintes géométriques) nous déduisons que la coordinance à la transition de rigidité est $Z_c = 4$ à 2 dimensions et $Z_c = 6$ à 3 dimensions. Avec cette condition, le nombre d'inconnues en termes d'amplitude des forces de contact est exactement égal au nombre d'équations. Autrement dit, en connaissant la position des grains, on peut calculer de façon univoque les forces entre particules. Il y a donc exactement le bon nombre de contacts pour qu'il n'y ait aucune redondance dans les forces. Cela nous permet de qualifier d'isostatique l'empilement à la transition de rigidité d'un assemblage de sphères non frottantes.

Transition de rigidité dans un milieu granulaire avec des sphères frottantes

Un système granulaire réel est généralement constitué de grains frottants. En présence de frottement, il y a pour chaque particule 2 équations pour l'équilibre de forces à deux dimensions (3 à 3 dimensions) et une équation pour l'équilibre des moments en 2 dimensions (3 à 3 à trois dimensions) tandis que le nombre d'inconnues pour chaque force est $2N_c$ à 2 dimensions et $3N_c$ à trois dimensions. Ainsi, il faut (à deux dimensions) $2N_c \geq 3N$ d'où $Z_c \geq 3$ ($Z_c \geq 4$ à trois dimensions). La condition géométrique au point J demeure la même, c'est-à-dire $Z_c \leq 4$ à deux dimensions ($Z_c \leq 6$ à 3 dimensions). Pour répondre en même temps aux deux conditions, la coordinance doit être comprise entre 3 et 4 à deux dimensions, et entre 4 et 6 à 3 dimensions.

Ces conditions sur Z montrent qu'il y a une grande différence entre les cas de sphères frottantes et non frottantes. Dans le cas frottant, la compacité et la coordinance à l'état isostatique (Z_{iso} , Φ_{iso}) et à la transition de rigidité (Z_c , Φ_c) ne sont pas forcément identiques.

Z_{iso} est strictement égale 3 tandis qu'il existe une plage de Z_c (entre 3 et 4) ainsi que de la compacité Φ_c pour que le système soit à la transition de rigidité. La valeur de Z_c , qui dépend du coefficient de frottement μ_f et de l'histoire du système, peut être plus grande que Z_{iso} (Donev et al. (2007); Mailman et al. (2009); Zeravcic et al. (2009)). van Hecke (2010) a résumé la dépendance de Z_c avec μ_f par le schéma montré à la figure 1.7(a). Z_c diminue avec l'augmentation de μ_f , et s'approche de $2d$ lorsque μ_f est petit, et de $d+1$ lorsque le coefficient de frottement est important. De plus, Z_c dépend de l'histoire du système, ce qui fait qu'il existe une plage de valeurs de Z_c accessibles pour un assemblage aléatoire frottant.

Discussion

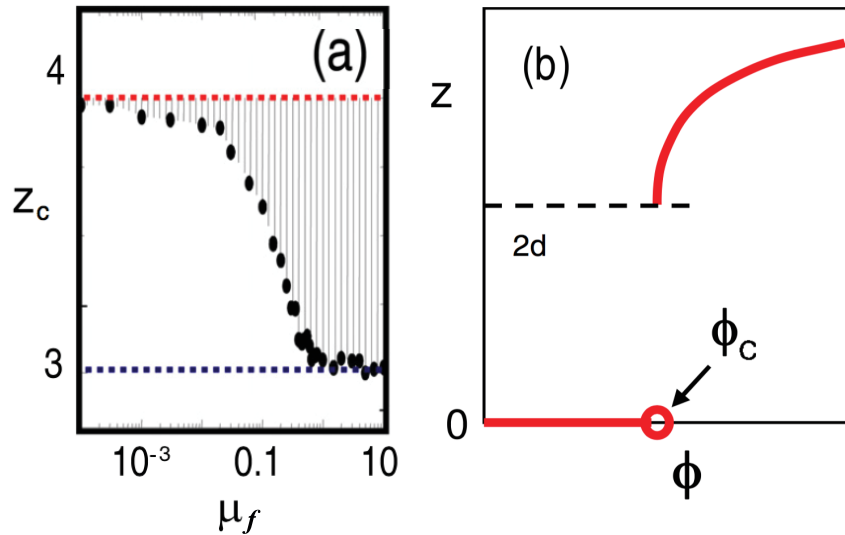


FIGURE 1.7 – (a) Variation de la coordianance Z_c dans un assemblage de disques rigides athermiques à deux dimensions, en fonction du coefficient de frottement μ_f . La limite isostatique pour un système sans frottement ($2d$) est indiquée en rouge, et en bleu ($d+1$) pour un système avec frottement. La zone hachurée indique la plage de valeurs de Z_c qui sont accessibles à la transition de rigidité pour un assemblage aléatoire frottant. (b) Coordianance en fonction de la densité, illustrant le caractère mixte de la transition de blocage pour les sphères molles non frottantes (van Hecke (2010)).

La transition de rigidité et l'isostaticité des milieux granulaires contenant des particules indéformables ou déformables ont fait l'objet de nombreuses études, tant numériques qu'expérimentales. Silbert et al. (2002) et O'Hern et al. (2002, 2003) ont simulé des systèmes constitués de sphères frottantes ou non frottantes en utilisant l'interaction de Hertz-Mindlin (contact de Hertz et recouvrement entre particules). Les auteurs ont montré que Z augmente en fonction de la compacité de façon discontinue, de zéro à Z_c à la transition de rigidité du système caractérisé par la compacité Φ_c . Lorsque la compacité augmente au-delà de Φ_c , Z continue à augmenter en suivant une loi de type $Z - Z_c \propto (\Phi - \Phi_c)^\beta$ avec

$\beta \simeq 0.5$ pour des systèmes granulaires à 2 ou 3 dimensions. Cette relation a d'abord été trouvée dans des simulations de mousses (Durian (1995)) avec $\beta = 0.5 \pm 0.1$. Elle est validée expérimentalement par l'étude de Majmudar et al. (2007) portant sur un système athermique bidisperse de 3000 cylindres photoélastiques de tailles centimétriques. Plus récemment, Katgert et van Hecke (2010) ont retrouvé cette relation en étudiant la rhéologie de mousses par des expériences en géométrie de Taylor-Couette. La variété de types de matériaux dans ces études montre que cette dépendance de Z avec la compacité est générale.

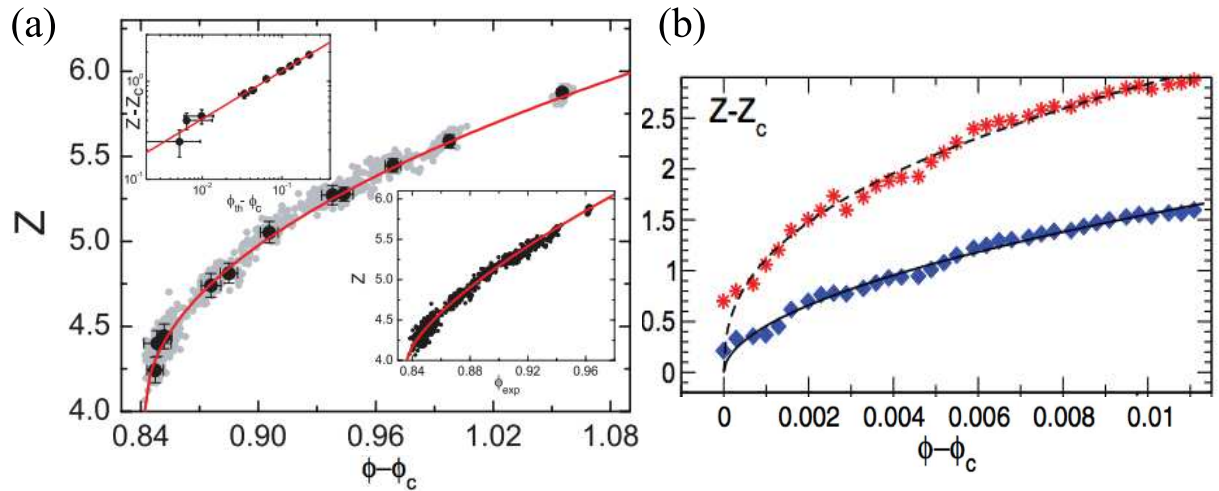


FIGURE 1.8 – (a) Coordination Z des bulles d'une mousse en fonction de la compacité Φ déterminée expérimentalement. Les points gris présentent Z pour chaque image individuelle et les cercles noirs présentent la valeur moyenne de Z sur chaque zone de compacité. La ligne continue est un ajustement : $Z = 4 + z_0(\Phi - \Phi_c)^\beta$ avec $z_0 = 4.02 \pm 0.2$, $\Phi_c = 0.842 \pm 0.002$ et $\beta = 0.5 \pm 0.02$ (Katgert et van Hecke (2010)). (b) Coordination à la transition de rigidité d'un système de disques photoélastiques. Les étoiles rouges correspondent aux données brutes où les particules flottantes sont présentées, et les symboles bleus ont été obtenus en excluant ces particules flottantes. La ligne continue présente la relation $Z - Z_c = (\Phi - \Phi_c)^\beta$ avec $\beta = 0.495$ et 0.561 selon que les particules flottantes sont exclues ou incluses (Majmudar et al. (2007)).

1.4 Comportements élastiques

Nous étudions dans cette thèse plusieurs types de particules, dont certaines ont un comportement élastique, c'est-à-dire qu'elles retrouvent leur forme de référence lorsque les contraintes qui leur ont été appliquées sont complètement relâchées. Comme ces particules auront à subir de grandes déformations, au-delà de la limite des déformations infinitésimales décrites par la théorie de Hooke (Landau et Lifshitz (1959)), nous présentons dans cette

section des éléments théoriques permettant de modéliser le comportement de particules élastiques pouvant subir des *déformations finies*.

Le formalisme permettant de traiter les matériaux élastiques soumis à des déformations d'amplitude finie est maintenant bien établi (Bateman (1963); Freckley et Payne (1978); Treloar (2005)). Les premiers travaux importants portant sur l'élasticité finie ont été menés par Mooney (1940) et Rivlin (1948). Valanis et Landel (1967) ont proposé d'écrire l'énergie de déformation sous une forme séparable suivant les directions principales des déformations. Cette démarche a mené au modèle très utilisé de Ogden (1972, 1982). Les difficultés liées à la modélisation de l'incompressibilité ont été traitées par Ogden (1972) et Oden et Kikuchi (1982). Récemment, différents modèles ont été développés pour modéliser les matériaux sujets à de grandes déformations élastiques, surtout dans le domaine de la biomécanique (par exemple, Holzapfel (2000); Humphrey (2002); Criscione et al. (2003); Sacks (2003); Zulliger et al. (2004)).

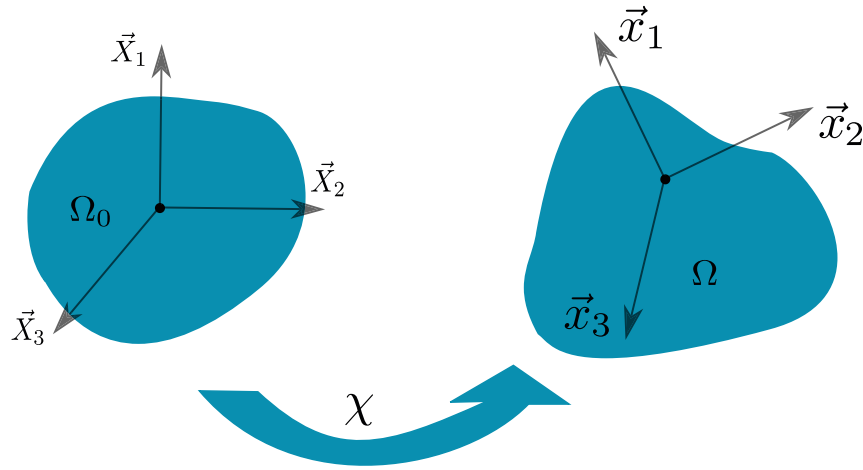


FIGURE 1.9 – Paramétrisation d'une déformation dans un milieu continu.

Considérons un solide soumis à des grandes déformations :

- à l'instant initial $t = 0$, le solide est dans sa configuration de référence Ω_0 dans laquelle les points sont labellisés par leurs coordonnées $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$.
- à l'instant t , après déformation, le solide occupe le domaine Ω . Un point situé en $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ dans la configuration de référence se trouve alors à la position $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Le passage de la configuration de référence à un état déformé donné est décrit par une fonction vectorielle f , telle que $\mathbf{x} = f(\mathbf{X}, t)$. Le vecteur déplacement est défini par $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}$. Le tenseur du gradient de déformation $\mathbf{F}$ s'écrit, dans une base cartésienne ortho-normée :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}, \quad (1.4)$$

où $\nabla_{\mathbf{X}}$ est l'opérateur gradient par rapport aux coordonnées Lagrangiennes, c'est-à-dire que les dérivations spatiales sont effectuées par rapport aux coordonnées du point matériel

considéré dans l'état de référence. Un élément de volume dv_0 de la configuration de référence Ω_0 se transforme en un élément de volume $dv = Jdv_0$ dans la configuration déformée, où J est le Jacobien de la transformation, défini par :

$$J = \det(\mathbf{F}) = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\right). \quad (1.5)$$

On introduit à partir du tenseur $\mathbf{F}$ deux tenseurs qui permettent, l'un ou l'autre, de formuler les lois de comportement d'un matériau élastique isotrope : le tenseur de Cauchy-Green droit $\mathbf{C}$ qui permet d'obtenir dans la configuration déformée, la distance qui sépare deux points infiniment proches connaissant leur position dans l'état de référence, et le tenseur de Cauchy-Green gauche $\mathbf{B}$ qui permet d'obtenir dans la configuration de référence, la distance qui sépare deux points infiniment proches connaissant leur position dans l'état déformé :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Un corps élastique déformé possède une énergie de déformation égale au travail des forces qui lui ont été appliquées pour atteindre, d'une manière supposée infiniment lente, la déformation finale depuis l'état non déformé. Cette énergie peut être définie pour n'importe quelle sous-partie du solide élastique et nous appellerons Ψ sa densité volumique d'énergie de déformation. Ψ est une fonction scalaire qui dépend de la déformation et lorsque le matériau est isotrope, Ψ peut s'exprimer en fonction de trois invariants indépendants des tenseurs $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{B}$. Ces trois invariants peuvent être choisis comme étant :

$$\begin{cases} I_1 = \mathbf{I} : \mathbf{C} = \text{Tr}(\mathbf{C}) \\ I_2 = \frac{1}{2}((\text{Tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{Tr}(\mathbf{C}^2)) \\ I_3 = J^2 = \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F})^2 \end{cases} \quad (1.7)$$

La densité volumique d'énergie de déformation s'exprime donc sous la forme :

$$\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_3). \quad (1.8)$$

Notons que nous aurions très bien pu, de manière équivalente, définir les invariants I_1 , I_2 et I_3 non pas à partir de $\mathbf{C}$, mais à partir de $\mathbf{B}$.

1.4.1 Equations constitutives de matériaux élastiques

Plusieurs expressions théoriques de la fonction d'énergie de déformation ont été proposées dans la littérature pour représenter le comportement élastique. Nous montrons ici quelques modèles pour des matériaux isotropes.

Le modèle d'Ogden (Ogden (1972, 1982)) est couramment utilisé. La densité volumique d'énergie de déformation est exprimée à partir des valeurs propres λ_i , ($i = 1, 2, 3$) du tenseur

C :

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i/2} + \lambda_2^{\alpha_i/2} + \lambda_3^{\alpha_i/2} - 3) + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i \beta_i} (J^{-\alpha_i \beta_i} - 1), \quad (1.9)$$

où N, μ_i et β_i sont des constantes du matériau.

Comme cas particuliers, on peut obtenir à partir de l'équation (1.9) le modèle de Mooney-Rivlin *incompressible* (Holzapfel (2000)) en prenant $N=2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -2$, et $\beta_1 = \beta_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \Psi &= c_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + c_2(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) \\ &= c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Le module de cisaillement est alors $\mu = 2(c_1 + c_2)$.

Dans le cas d'un solide de Mooney-Rivlin *compressible*, la densité d'énergie de déformation est souvent prise sous la forme suivante :

$$\Psi = c(J - 1)^2 - d \ln J + c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3), \quad (1.11)$$

où c et d sont des constantes du matériau.

Le modèle du solide néo-hookéen *incompressible* correspond au cas particulier du modèle de Mooney-Rivlin *incompressible* (1.10) lorsque $c_1 = \mu/2$ et $c_2 = 0$. Un modèle du solide Néo-Hookéen *compressible* souvent utilisé s'exprime sous la forme suivante :

$$\Psi = \frac{1}{2} \lambda (\ln J)^2 - \mu \ln J + \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3), \quad (1.12)$$

où λ et μ sont des constantes du matériau, appelées paramètres de Lamé, à partir desquels il est possible d'exprimer le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \\ \nu &= \frac{\lambda}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Pour un solide néo-hookéen *incompressible*, $\lambda \rightarrow \infty$ et donc $\nu \simeq 0.5$. On peut montrer que le coefficient de Poisson ν est toujours inférieur à $1/2$. Plus ν est faible, plus le matériau sera facilement compressible.

Pour terminer, nous citons comme dernier modèle, le modèle de Gent (1996), qui introduit la notion d'extensibilité maximale du matériau grâce au paramètre J_m , et pour lequel la densité d'énergie de déformation s'écrit sous la forme :

$$\Psi = \frac{\mu}{2} \left[d(J^2 - 1) - 2(d + 1)(J - 1) - J_m \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \right]. \quad (1.14)$$

La tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ permet d'exprimer la force élémentaire $d\mathbf{f}$ s'exerçant sur l'élément de surface de la configuration déformée ds de vecteur normal

$\mathbf{n}$ par la relation $d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds$. L'expression de la densité d'énergie de déformation d'un matériau permet d'obtenir l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy en fonction de la déformation :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \text{ ou } \sigma_{ij} = \frac{2}{J} F_{iK} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{KL}} F_{jL} , \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2}{J} \mathbf{B} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}} \text{ ou } \sigma_{ij} = \frac{2}{J} B_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial B_{kj}} . \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.5 Conclusion

Les matériaux consistant en un assemblage de particules molles sont nombreux dans la nature et dans les applications industrielles. Nous avons présenté des enjeux impliquant ce type de matériau, et montré que leur comportement est riche et complexe, y compris dans l'état statique. Des travaux expérimentaux et numériques ont été développés, permettant de mieux comprendre ces comportements. Cependant, des progrès substantiels restent encore à faire pour atteindre une compréhension plus profonde des comportements mécaniques de ces matériaux. D'un point de vue des simulations numériques, les modèles discrets sont utilisés pour modéliser des particules déformables en autorisant un recouvrement important entre particules, ce qui n'est pas satisfaisant dès que l'on s'intéresse aux déformations locales à l'échelle des particules et à la microstructure. Concernant les expériences, de nouveaux développements permettant d'obtenir des informations plus précises sur la structure microscopique de ces systèmes, par exemple sur les déformations locales à l'intérieur même des particules molles, apparaissent souhaitables.

Déformation d'une particule unique

Dans ce chapitre, nous présentons le dispositif expérimental avec lequel nous avons étudié la compression uniaxiale d'échantillons cylindriques. Ce dispositif est constitué d'un appareil de compression posé à plat sur un scanner de bureau. Il permet d'obtenir des images à haute résolution de la surface inférieure de l'échantillon. Nous déterminons les champs locaux de déformations de cylindre fabriqué dans différents matériaux mous (caoutchouc de silicone, gel d'agar, mousse solide) en utilisant une méthode de la corrélation d'images numériques (DIC) optimisée pour traiter de grandes déformations. Les mesures expérimentales sont ensuite comparées aux résultats de simulations numériques que nous avons effectuées. Ces approches expérimentale et numérique seront appliquées dans les chapitres suivants au processus de compaction d'une collection de particules molles.

Sommaire

2.1	Méthodologie	31
2.1.1	Technique expérimentale	31
2.1.2	Méthode numérique	34
2.2	Compression radiale d'une particule	34
2.2.1	Particule élastique	39
2.2.2	Particule plastique	50
2.2.3	Particule en mousse de polyuréthane	53
2.3	Conclusion	54

2.1 Méthodologie

2.1.1 Technique expérimentale

Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé consiste en un appareil de compression positionné à plat sur un scanner (Mora et al. (2017)), comme le montre la figure 2.1(a). Cet appareil est composé de trois parois verticales rigides et fixes, et d'une quatrième paroi rigide pouvant coulisser perpendiculairement aux deux parois latérales. Le déplacement de la paroi mobile est contrôlé par un moteur pas à pas et un mécanisme à vis linéaire. Cette paroi est équipée de deux capteurs de force pour mesurer la force f appliquée à l'échantillon, avec une fréquence d'acquisition de 100 Hz. L'échantillon qui est initialement cylindrique et dont la hauteur est inférieure à la hauteur des parois, repose sur une plaque de verre plaquée sur la surface du scanner. Il est comprimé radicalement et quasi-statiquement entre la paroi mobile et la paroi opposée. Les deux autres parois sont suffisamment éloignées pour ne pas entrer en contact avec l'échantillon. Après chaque étape de compression et un temps d'attente donné (voir ci-dessous), la surface inférieure de l'échantillon déformé est enregistrée par le scanner. Il s'agit d'un scanner CanoScan 9000F Mark II avec une résolution ajustable de 7 dpi à 4800 dpi et une profondeur numérique réglable de 8 bits à 16 bits pour chaque couleur, sur une surface de 210 mm $\times$ 297 mm. Dans ce chapitre, les résultats ont été obtenus avec une résolution de 2400 dpi $\times$ 4800 dpi pour une profondeur de 8 bits pour des images en noir et blanc. La précision des images est montrée à la figure 2.1(b). Ces images brutes sont utilisées pour effectuer une corrélation d'images numériques et mesurer le champ de déplacement lié à la compression. Cette méthode nécessite un motif aléatoire sur la surface inférieure de l'échantillon avec une longueur de corrélation de quelques pixels et un contraste élevé.

Technique de post-traitement d'images

Afin d'étudier la déformation locale de l'échantillon, nous déterminons d'abord le champ de déplacement $\mathbf{u}(x, y)$ correspondant au déplacement dans le plan de la surface inférieure de l'échantillon. Le champ de déplacement est mesuré pour chaque pas de compression au moyen de la technique de DIC (Hild et Roux (2006); Pan et al. (2009); Bornert et al. (2009)). La DIC est couramment utilisée pour traiter les petites déformations. Les grandes déformations peuvent également être traitées en adaptant cette méthode (Tang et al. (2012); Stanier et al. (2016)). Dans ce contexte, un algorithme de DIC a été développée pour traiter de grandes images et de grands déplacements.

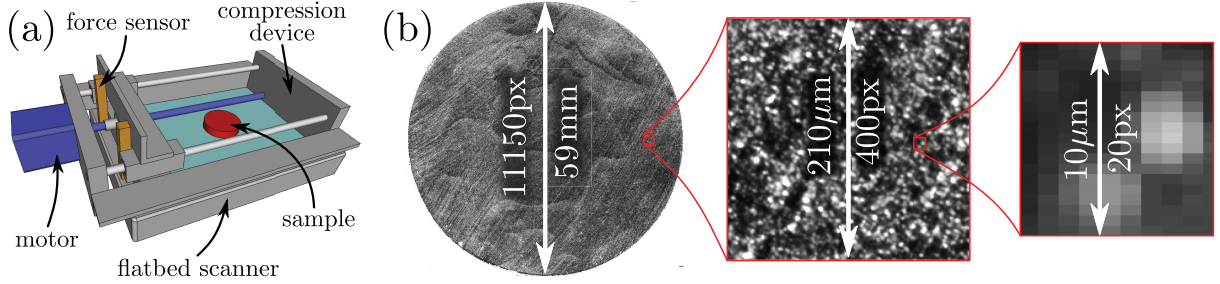


FIGURE 2.1 – (a) Schéma du dispositif expérimental. Une particule initialement cylindrique repose sur la surface plane d'un scanner optique. Un appareil de compression déforme la particule pas à pas tandis que la face inférieure de l'échantillon est scannée entre deux pas de compression et que la force de compression f est mesurée. (b) Vue de dessous d'une particule numérisée en noir et blanc. Un motif fin constitué de paillettes métalliques micrométriques a été déposé sur la face inférieure de la particule. Les images de gauche à droite montrent un zoom de ces motifs à l'échelle des cellules de corrélation pour la DIC (20 px $\times$ 20 px). La taille d'un pixel est de $5,29 \mu\text{m}$.

L'image enregistrée par le scanner consiste en un champ de niveaux de gris représenté par les fonctions $I_n(x, y)$, où $n \in [0, N]$ est le numéro du pas de compression, et x et y sont les coordonnées Lagrangiennes dans le plan. Nous définissons d'abord une grille régulière sur l'image initiale non déformée $I_0(x, y)$; voir la figure 2.2(a). La taille de cellule de cette grille est de 50 px $\times$ 50 px. Les nœuds de la grille qui correspondent à un point situé à l'intérieur de l'échantillon forment les centres des cellules de corrélation comme celui marqué d'un point rouge sur la figure 2.2(a). Ces points doivent être suivis d'une image à l'autre pour obtenir le champ de déplacement $\mathbf{u}_n(x, y)$ à l'étape n de la compression. Nous suivons maintenant la marque cyan comme indiquée sur la figure 2.2(b) de l'image n à l'image $n + 1$. Sa position évolue, de l'étape n à l'étape $n + 1$, de $(x_n, y_n) = (x_0, y_0) + \mathbf{u}_n(x_0, y_0)$, avec (x_0, y_0) la position sur l'image initiale du système non déformé, à $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + \Delta\mathbf{u}_n(x_n, y_n)$. Le champ correspondant aux déplacements du pas $n + 1$ se déduit du champ des déplacements au pas n , $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_n$. On obtient ainsi de proche en proche le champ de déplacement pour tous les pas de temps.

La détermination de $\Delta\mathbf{u}_n$ se fait en corrélant une surface de forme carrée autour du point désiré sur l'image n avec la même zone sur l'image $n + 1$. Le centre de cette zone sur l'image $n + 1$ est la nouvelle position du point considéré. Il convient de noter que si cette zone, définie comme la cellule de corrélation, est trop grande la corrélation sera moyennée et la précision du déplacement sera faible. Au contraire, si le champ de déplacement est plus grand ou le même que la taille de la cellule de corrélation, la cellule de corrélation n'aura pas suffisamment de motifs pour permettre une corrélation correcte entre deux images. Par conséquent, afin de pouvoir mesurer avec précision les (grands) déplacements, nous considérons une taille adaptative des cellules de corrélation de 300 px à 40 px par décréments de 8. Comme le montre la figure 2.2(b-c), nous recherchons la translation qui maximise la corrélation entre l'image à l'intérieur du plus grand carré centré autour de

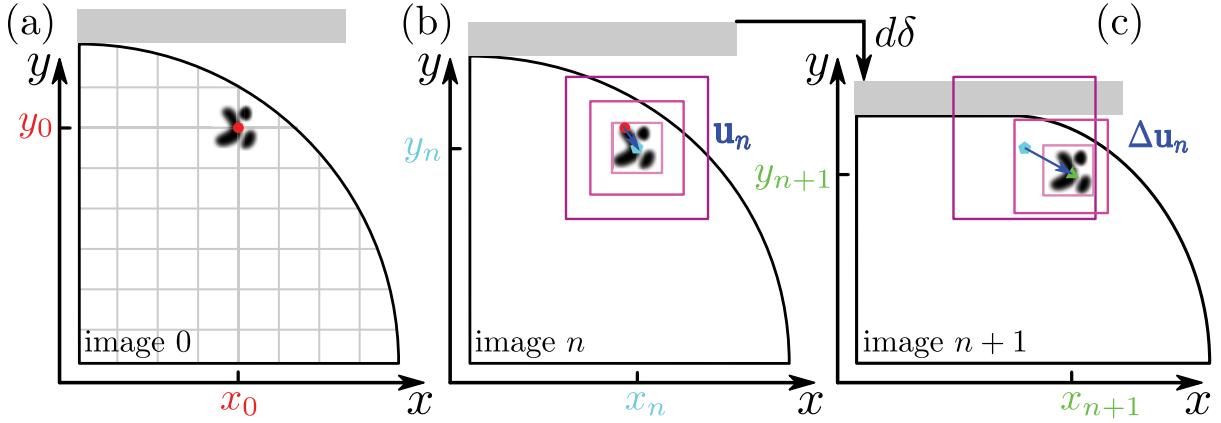


FIGURE 2.2 – Vue schématique de l’algorithme de corrélation d’images numériques adapté aux grandes déformations. (a) Sur l’image non déformée ($n = 0$), une grille régulière de centres de cellules de corrélation est tracée. Le système est déformé de l’image n (b) à l’image $n + 1$ (c) par un incrément de compression $d\delta$. Voir le texte pour plus de détails sur la procédure de DIC.

(x_n, y_n) dans les deux images. Cette translation concerne le centre d’un carré de taille moyenne sur l’image $n + 1$. La même optimisation est répétée pour l’image à l’intérieur de ces carrés, donnant la position d’un carré plus petit sur l’image $n + 1$. En répétant ceci et en prenant des cellules de plus en plus petites, la maximisation de corrélation donne la nouvelle position de l’élément aléatoire dans l’image $n + 1$: (x_{n+1}, y_{n+1}) . Comme le motif aléatoire est inhomogène, la plus petite taille de cellule n’est pas systématiquement optimale en tout point de l’échantillon. Nous choisissons en chaque point la taille de cellule de corrélation qui donne la meilleure corrélation. De cette manière, la dimension de la cellule de corrélation peut être adaptée pour chaque étape et pour chaque point de corrélation. Ceci est calculé avec une précision de 1 px, en utilisant un algorithme de corrélation basé sur la transformée de Fourier (Pan et al. (2009)). Enfin, la mesure est améliorée à une précision inférieure au pixel grâce à une approche d’optimisation (Bornert et al. (2009)) qui est plus coûteuse en termes de calcul : le centre de la cellule de corrélation sur I_{n+1} , (x_{n+1}, y_{n+1}) est optimisé en maximisant la corrélation

$$\sum_{(x,y) \in \text{cell}} (I_n(x, y) * I_{n+1}(x, y))^2 ,$$

via un algorithme de Nelder-Mead (Lagarias et al. (1998)). Cette technique de DIC a été développée en Python par Jonathan Barés (ingénieur de recherche au laboratoire). Le temps de calcul est d’environ 6 heures pour 30 étapes de compression en utilisant un calcul parallèle avec 12 processeurs de 3GHz.

2.1.2 Méthode numérique

Pour étudier numériquement les particules molles dans cette thèse, les simulations sont effectuées en utilisant la méthode de couplage FEM-CD, présentée au chapitre 1, qui est implantée dans le logiciel LMGC90 (LMGC90 (2018)). Dans ce code, chaque particule est discrétisée par la FEM, les interactions entre particules sont traitées par la CD. Cette approche utilise un schéma d'interaction implicite avec un pas de temps plus important que celui avec la dynamique moléculaire-DEM. Les forces de contact entre les particules nécessitent d'être calculées à l'aide d'un algorithme de contact prenant en compte la condition de non-interpénétration de la matière ainsi que la loi de frottement de Coulomb. Le grand avantage de ce couplage FEM-CD est que nous pouvons non seulement simuler le vrai comportement des particules déformables en prenant en compte les degrés de liberté globaux (déplacement et rotation) et les degrés de liberté internes des particules, et aussi traiter le contact frottant et non frottant entre particules avec le pas de temps raisonnable.

2.2 Compression radiale d'une particule

L'objectif premier de cette thèse est d'étudier, par des méthodes expérimentales et numériques, le comportement mécanique d'un assemblage de particules molles. Dans ce chapitre, nous étudions d'abord le comportement d'une particule isolée subissant une compression quasi-statique radiale d'amplitude finie. Cette étude permettra d'étudier la précision et l'efficacité des méthodes expérimentales et numériques proposées en considérant le comportement d'une seule particule et en utilisant les deux techniques décrites plus haut. Pour cela, trois types d'échantillons solides et déformables sont étudiés :

1. Une *particule de silicone réticulé* (ou caoutchouc de silicone) a été moulée à partir du produit commercial MoldStar 15[®] ¹ et colorée en noir avec du colorant vendu sous le nom de SilkPig[®] ². Elle est de forme initiale cylindrique de diamètre $D = 59$ mm et d'épaisseur $\ell = 9,5$ mm. Cet échantillon permet d'étudier un comportement élastique de type caoutchoutique. Avant de couler le silicone, le fond du moule est recouvert de paillettes brillantes, dont le nom commercial est Cast-magic Silver Bullet[®] ³, et dont la taille moyenne est de $5 \mu\text{m}$ (voir la figure 2.1(b)-droite). Avant de déposer l'échantillon au-dessus de la vitre du scanner, une fine couche d'huile végétale de faible viscosité (60 mPa.s) est appliquée sur la surface du verre afin de supprimer presque tout frottement statique et d'améliorer la transmission optique.
2. Une *particule d'hydrogel d'agar* a été coulée dans le même moule que précédemment. Elle permet d'étudier la déformation d'une particule constituée d'un matériau pouvant présenter des déformations plastiques irréversibles. La particule est composée en masse de 98,67% d'eau déionisée (DI), de 0,99% de poudre d'agar sèche ⁴, 0,29%

1. <https://www.smooth-on.com/products/mold-star-15-slow/>

2. <https://www.smooth-on.com/product-line/silk-pig/>

3. <https://www.smooth-on.com/tutorials/create-metallic-glitter-effects-cast-magic-casting-system/>

4. Poudre d'agar A10752 d'Alfa Aesar.

d'encre noire et de 0,05% de fines paillettes métalliques, les mêmes que celles utilisées avec l'échantillon réalisé en silicone réticulé. Le tout est chauffé à 90°C avant de le placer à chaud dans le moule. Les paillettes produisent, comme avec l'échantillon précédent, un motif aléatoire fin avec une longueur de corrélation d'environ 10 px. Avant d'être comprimé, l'échantillon est conservé dans un réfrigérateur à 5°C pendant une heure. Afin d'éviter l'évaporation de l'eau contenue dans l'échantillon tout au long de l'expérience, le gel d'agar est légèrement humidifié en laissant tomber régulièrement quelques gouttes d'eau déionisée par le dessus afin qu'il reste saturé en eau. Avant de déposer l'échantillon sur le dessus de la vitre du scanner, de l'eau déionisée est disposée sur la vitre ce qui assure une bonne lubrification et une bonne transmission optique.

3. Une *particule de mousse solide* est découpée dans un bloc de mousse de polyuréthane haute résilience Bultex[®] de densité 52 kg/m³. L'échantillon est un cylindre de diamètre $D = 120$ mm et d'épaisseur $\ell = 30$ mm. Dans ce cas, aucun ingrédient externe n'est utilisé pour créer un motif aléatoire car nous tirons directement profit de la texture naturelle de la surface de l'échantillon constituée par les cellules de la mousse et dont la taille caractéristique est d'environ 0,2 mm (10 px pour un scan à 1200 dpi). De plus, le coefficient de frottement entre le verre et cette mousse est suffisamment faible pour ne pas avoir à ajouter de lubrifiant.

Notons que lorsque nous passerons à l'étude du comportement mécanique d'un assemblage de particules (Chapitre 3), nous nous restreindrons au cas de particules en silicone réticulé.

Pour le chargement du système expérimental, chaque étape de compression commence par un chargement lent à 2 mm/min. Ensuite, une fois l'incrément de déplacement souhaité, $\delta = 0,5$ mm, atteint, la paroi mobile est maintenue au repos pendant 20 min pour permettre au système de relaxer et de ramener la force globale à l'équilibre statique. Ce temps de repos est nécessaire avant de scanner la surface inférieure de l'échantillon en raison des différents processus visqueux en jeu. D'une part, le matériau lui-même peut avoir un comportement visqueux intrinsèque en raison de processus de relaxation internes. D'autre part, la lubrification est un processus visqueux dont la dynamique est lente, ce qui nécessite un long temps d'attente pour que la force de friction fluide se soit annulée. Deux cas sont analysés : des contacts non-frottant ou frottant avec les deux parois verticales (le piston et la paroi fixe). Pour le contact non-frottant, les parois sont enduites d'huile pour la particule de silicone et d'eau déionisée pour l'échantillon d'agar. Dans le second cas (contact frottant), les parois sont recouvertes de papier de verre, ce qui interdit tout glissement entre l'échantillon et les parois. Dans les expériences, la compression continue jusqu'à ce que l'échantillon soit expulsé en raison d'une instabilité hors-plan de type flambement. Comme présenté sur la figure 2.3, en considérant les matériaux aux trois comportements mécaniques distincts - à savoir plastique (l'Agar), élastique (le silicone réticulé) et compressible (la mousse de polyuréthane) - comprimés comme présenté dans l'encadré inférieur de la figure 2.3, des courbes contraintes-déformations très différentes et non linéaires sont observées.

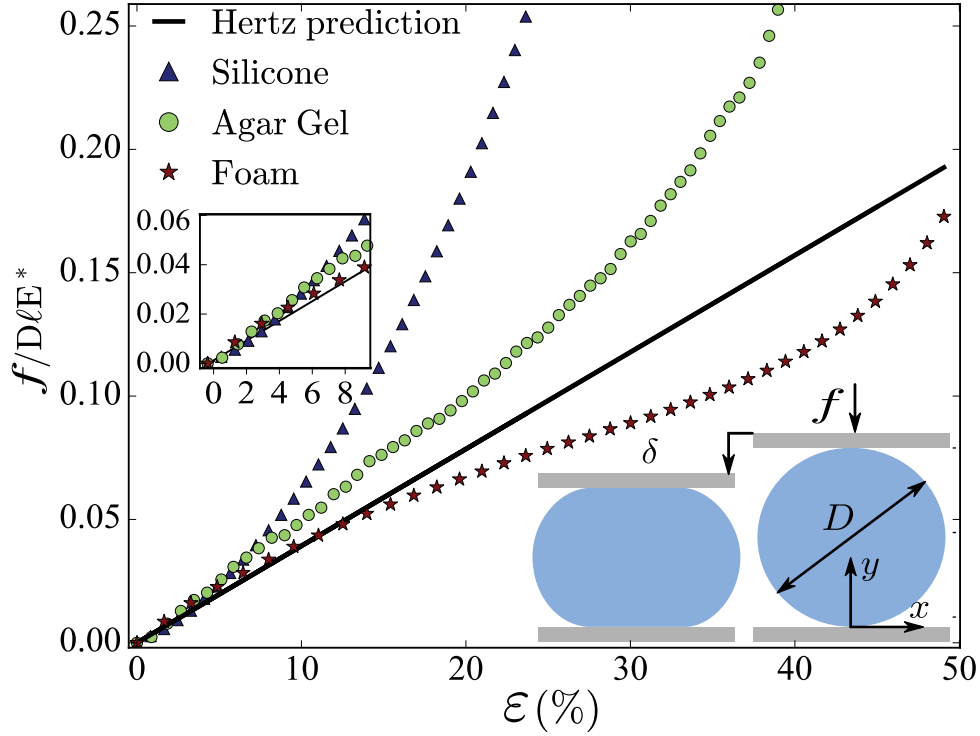


FIGURE 2.3 – Force de compression radiale adimensionnée $f/D\ell E^*$ (avec $E^* = E/(1 - \nu^2)$, E le module de Young et ν le coefficient de Poisson) en fonction de la déformation compressive cumulée ε ($\varepsilon = -\ln(1 - \delta/D)$) pour la compression quasi-statique radiale des cylindres (diamètre D et épaisseur ℓ) réalisés dans différents matériaux : silicone réticulé (triangles), hydrogel d'agar (cercles) et mousse de polyuréthane (étoiles). La prédiction l'analyse de Hertz (établie pour des déformations infinitésimales) pour le contact entre deux cylindres dont les axes sont parallèles (Johnson (1987)) est tracée comme guide pour les yeux (ligne simple) ; Encart inférieur : vue schématique de la géométrie de compression de cylindre. Un cylindre de diamètre D est lentement comprimé par le déplacement δ du plateau supérieur, associé à une force f . L'axe y est dans le sens de la compression alors que l'axe x en est perpendiculaire.

Les simulations numériques utilisant le code LMGC90 sont effectuées en parallèle des expériences dans le but de déterminer dans quelle mesure et avec quels paramètres elles peuvent mimer le comportement du système expérimental. Notons que puisque la méthode expérimentale ne fournit que des informations locales sur la surface inférieure des échantillons cylindriques et non dans l'ensemble du volume des échantillons, la comparaison des déformations entre les systèmes numériques et réels ne peut être effectuée qu'à la surface inférieure de l'échantillon. L'échantillon est discrétisé en utilisant environ 71000 hexaèdres

(8 nœuds). Comme dans le cas expérimental, la compression est appliquée avec des conditions de contact frottant et non-frottant pour les matériaux avec les différentes lois de comportements.

Il est connu que le comportement d'un matériau constitué de silicone réticulé subissant des grandes déformations est bien décrit par le modèle néo-hookéen isotrope (Holzapfel (2000); Nezamabadi et al. (2011)). La densité d'énergie de déformation dans le cadre de ce modèle est donnée par la relation (1.12). A partir de cette énergie de déformation, la contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ peut être obtenue comme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} [\mu \mathbf{B} + (\lambda \ln J - \mu) \mathbf{I}] , \quad (2.1)$$

Afin de déterminer les paramètres constitutifs de la particule de silicone réticulé, un test de compression axiale sans friction (utilisant une machine de compression LLOYD 01/LFLS/LXA/EU) a été réalisé sur un échantillon de silicone réticulé avec une forme cylindrique (hauteur de 10 mm et diamètre de 10 mm). La compression axiale non-frottante garantit que l'échantillon subit une déformation homogène. La courbe contrainte-déformation obtenue est représentée à la figure 2.4. Le coefficient de Poisson ν a d'abord été déterminé en mesurant le changement de volume de l'échantillon pour différentes valeurs de la déformation compressive. Le matériau s'avère être quasiment incompressible, c'est-à-dire $\nu \approx 0.5$. Ensuite, la courbe contrainte-déformation expérimentale a été ajustée par les prédictions pour un modèle néo-hookéen. Le meilleur ajustement est obtenu avec un module de Young de $E = 0,45 \pm 0,01$ MPa, dans toute la gamme des déformations compressives testées, $\varepsilon \in [0, 40]\%$ (voir la figure 2.4). L'accord est alors très satisfaisant. Ainsi, dans les simulations numériques de la particule de silicone réticulé, le module de Young et le coefficient de Poisson ont été fixés à $E = 0,45$ MPa et $\nu = 0,495$. La densité de matériau est $\rho = 990$ kg/m³.

La réponse mécanique de l'hydrogel d'agar a été déterminée en utilisant un procédé similaire. Dans ce cas, pour être dans les mêmes conditions expérimentales, ces tests nécessitent un temps d'attente plus long entre chaque étape du processus de compression, de sorte que la concentration du solvant à l'équilibre est atteinte avant chaque mesure de contrainte. De plus, des précautions particulières doivent être prises pour éviter que l'échantillon ne s'assèche. Pour ces raisons, le test de compression a été effectué sur un échantillon parallélépipédique d'agar ($30 \times 30 \times 10$ mm³) avec les mêmes concentrations que celles du cylindre d'agar comprimé radialement. L'échantillon est placé sur une surface horizontale en verre et comprimé lentement le long d'une des dimensions les plus grandes (horizontales) entre les deux parois du dispositif de compression utilisé pour la compression des échantillons cylindres. Grâce à la lubrification de la surface du verre avec de l'eau déionisée, l'échantillon parallélépipédique subit dans cette géométrie une déformation homogène. La courbe contrainte-déformation correspondante est représentée à la figure 2.4(a). Pour décrire le comportement de la particule d'agar à partir de cette courbe, un modèle de plasticité de von Mises avec écrouissage isotrope (Simo et Hughes (2006)) a été utilisé. Ce modèle, en prenant les paramètres $E = 10$ kPa, $\nu = 0,15$, $E_p = 1,8$ kPa (module plastique) et

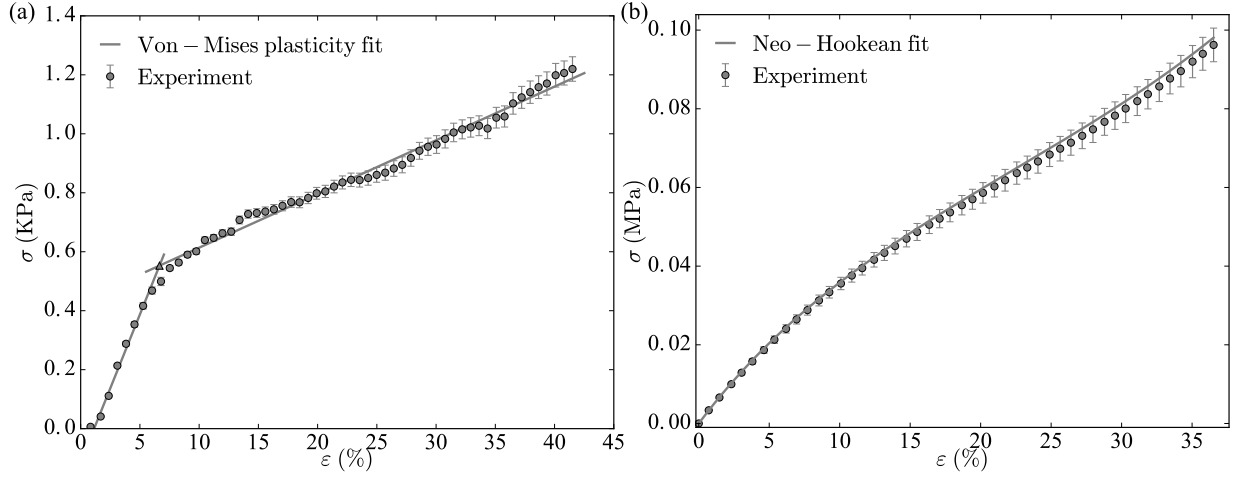


FIGURE 2.4 – (a) Courbe contrainte-déformation du gel d’agar mesurée à partir d’un essai de compression effectué sur un échantillon parallélépipédique d’agar (dimensions $30 \times 30 \times 10 \text{ mm}^3$) avec un contact non-frottant. Le temps d’attente entre deux mesures est de 24 min. Les domaines élastique et plastique sont identifiés et ajustés (lignes droites continues). (b) Courbe contrainte-déformation d’un cylindre en silicone réticulé déterminée avec un essai de compression non-frottant. Le temps d’attente entre deux mesures de la contrainte est de 1 min. La contrainte calculée pour un solide néo-hookéen incompressible est ajustée sur la courbe expérimentale (ligne continue).

$\sigma_y = 500 \text{ Pa}$ (contrainte à la limite élastique), décrit bien la relation contrainte-déformation mesurée avec l’échantillon parallélépipédique d’agar (voir figure 2.4). Cette faible valeur du coefficient de Poisson (qui correspond à une grande compressibilité) est une conséquence de l’expulsion d’eau qui résulte de la contrainte locale (analogue au cas d’une éponge qui rejette de l’eau lorsqu’on la comprime). De plus, étant donné que l’échantillon d’agar est principalement composé d’eau (voir la section 2.1.1), sa masse volumique a été fixée à $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ pour les simulations d’échantillons composés de ce matériau.

En ce qui concerne l’échantillon de mousse de polyuréthane, en raison de la localisation de la déformation induite par le micro-flambage sous compression (Gong et al. (2005); Pampolini et Del Piero (2008)), il n’est pas facile de décrire son comportement matériel avec une loi simple. Par conséquent, les simulations numériques sur la mousse sortiraient du cadre de cette étude et nous n’avons effectué aucune simulation liée à cet échantillon.

Dans les simulations numériques, afin d’appliquer une charge de façon quasi-statique, la vitesse c de la paroi mobile a été choisie de manière à assurer qu’elle remplit la condition suivante :

$$c \ll V_S, \quad (2.2)$$

où $V_S = \sqrt{\mu/\rho}$ est la vitesse des ondes de cisaillement se propageant dans l’échantillon, μ et ρ étant le module de cisaillement et la densité volumique du matériau, respectivement. Notons que cette vitesse est plus lente que la vitesse des ondes de compression. En conséquence, la vitesse appliquée dans toutes nos simulations dans ce chapitre est fixée à

$c = 0,02$ m/s, ce qui satisfait la condition (2.2) et donc la condition de quasi-staticité.

2.2.1 Particule élastique

Des expériences ont d'abord été réalisées sur la particule de silicone réticulé. L'échantillon cylindrique est progressivement comprimé jusqu'à une compression cumulée de $\varepsilon = 14\%$ ($\varepsilon = -\ln(1 - \delta/D)$ avec δ la flèche totale et D le diamètre initial de l'échantillon ; voir la figure 2.3). Au-delà de cette valeur de ε , l'échantillon flambe vers le haut. Pour chaque étape de la compression, la face inférieure de l'échantillon est scannée et la force de confinement est mesurée par les capteurs de force. Le champ de déplacement est obtenu grâce à la méthode de corrélation d'image décrite à la section 2.1.1. Dans la suite, plusieurs champs (déplacement, déformation ...) obtenus expérimentalement sont comparés aux prédictions provenant des simulations en considérant d'abord la théorie des déformations infinitésimales et ensuite, la théories des déformations finies.

Comparaison de résultats expérimentaux avec les prédictions de la théorie élastique des déformations infinitésimales

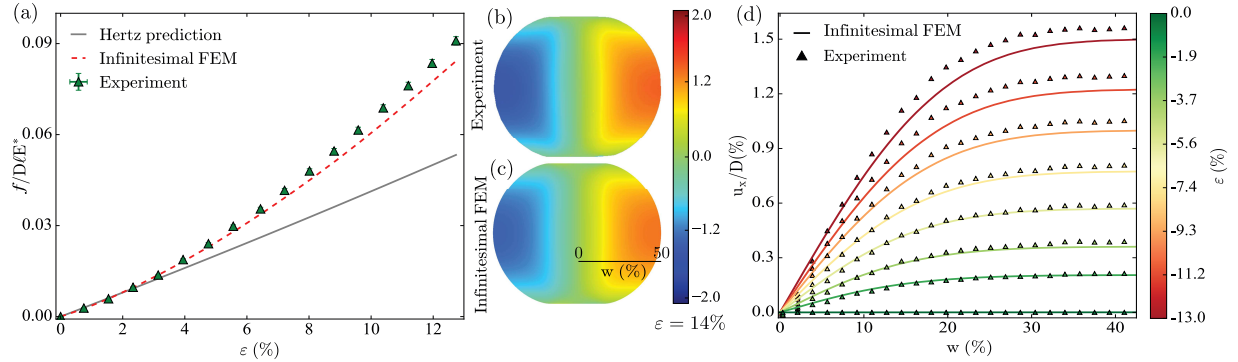


FIGURE 2.5 – (a) Force adimensionnée f/DlE^* en fonction de la déformation compressive cumulée ε obtenue à partir du capteur de force pour l'expérience, comparée à la simulation FEM dans le cadre de la théorie des déformations infinitésimales et à la prédiction de Hertz. (b)-(c) Champ de déplacement adimensionné mesuré (expérience) et calculé (simulations FEM linéarisée) le long de la direction x (u_x/D) pour $\varepsilon = 14\%$. Les contacts sont non frottants dans les deux cas. Le champ de déplacement est tracé sur cette figure en fonction des coordonnées eulériennes afin de montrer le système dans sa configuration déformée. (d) Champ de déplacement adimensionné u_x/D en fonction de la position radiale lagrangienne w indiquée dans (c), pour plusieurs valeurs de ε . Les lignes continues présentent les résultats de la simulation FEM alors que les triangles montrent les résultats expérimentaux.

Dans un premier temps, une simulation FEM pour l'échantillon de silicone réticulé

(cylindre de diamètre $D = 59$ mm et épaisseur $\ell = 9,5$ mm) est réalisée dans le cadre de la théorie des déformations *infinitésimales*. Ici, comme mentionné précédemment, le module de Young, le coefficient de Poisson et la densité de l'échantillon ont été fixés à $E = 0,45$ MPa, $\nu = 0,495$ et $\rho = 990$ kg/m³, respectivement. La figure 2.5(a) montre la force de contact adimensionnée $f/D\ell E^*$ (avec $E^* = E/(1 - \nu^2)$) en fonction de la déformation compressive cumulée ε . Les résultats expérimentaux et numériques sont en bon accord jusqu'à $\varepsilon \simeq 10\%$. Cependant, des écarts par rapport à la prédiction de Hertz sont observés pour $\varepsilon > 3\%$ à la fois pour l'expérience et la simulation. Cette prédiction est dérivée de l'analyse de Hertz pour le contact entre deux cylindres avec des axes parallèles (Johnson (1987)) :

$$f/D\ell E^* = \frac{\pi}{8}\varepsilon . \quad (2.3)$$

Cette loi est obtenue sous l'hypothèse de déformation plane, contrairement aux conditions expérimentales où l'approximation de déformation plane n'est pertinente que lorsque $\delta/\ell \ll 1$. On en déduit de la figure 2.5(a) que cette condition n'est plus remplie pour $\varepsilon > 3\%$.

L'accord entre la simulation FEM dans le cadre de la théorie des déformations infinitésimales et l'expérience semble acceptable en ce qui concerne la force. Cependant, un examen du champ de déplacement montre que l'accord entre simulation et expérience n'est pas satisfaisant à l'échelle locale. La figure 2.5(b) présente le champ de déplacement adimensionné le long de la direction transversale u_x/D (où u_x est le déplacement dans la direction perpendiculaire à la compression globale) pour $\varepsilon = 14\%$, tandis que la figure 2.5(c) montre le même champ obtenu à partir des simulations. Une comparaison détaillée de ces deux résultats montre des écarts quantitatifs. Ce point est souligné par la figure 2.5(d) avec les variations de u_x/D suivant la direction transversale w (comme indiqué sur la figure 2.5(c)) tant pour l'expérience et la simulation pour plusieurs niveaux de la déformation compressive cumulée. En effet, les résultats expérimentaux et numériques ne coïncident plus lorsque ε augmente, bien que leurs tendances globales restent similaires. Cela implique que même si les simulations basées sur la théorie des déformations infinitésimales peuvent reproduire de manière acceptable l'expérience d'un point de vue global, à des valeurs plus élevées de la contrainte de compression, les résultats à l'échelle locale divergent. Il est donc nécessaire de simuler l'échantillon de silicone en utilisant un modèle dans lequel les déformations finies (non infinitésimales) sont correctement prises en compte.

Comparaison avec un solide néo-hookéen

La simulation FEM de l'échantillon de silicone réticulé dans le contexte de la théorie des déformations infinitésimales, comme mentionné ci-dessus, ne permet pas de reproduire correctement les champs locaux expérimentaux bien que les réponses globales expérimentales soient proches. Afin de modéliser de manière appropriée l'échantillon de silicone réticulé, nous avons effectué des simulations FEM dans le cadre de la théorie des déformations *finies* en utilisant le modèle néo-hookéen (voir l'équation (2.1)). Pour cette simulation, un échantillon, dont les paramètres géométriques et élastiques sont identiques au précédent, a été considéré. La comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques dans ce

contexte est décrite ci-après.

Champs de déplacement

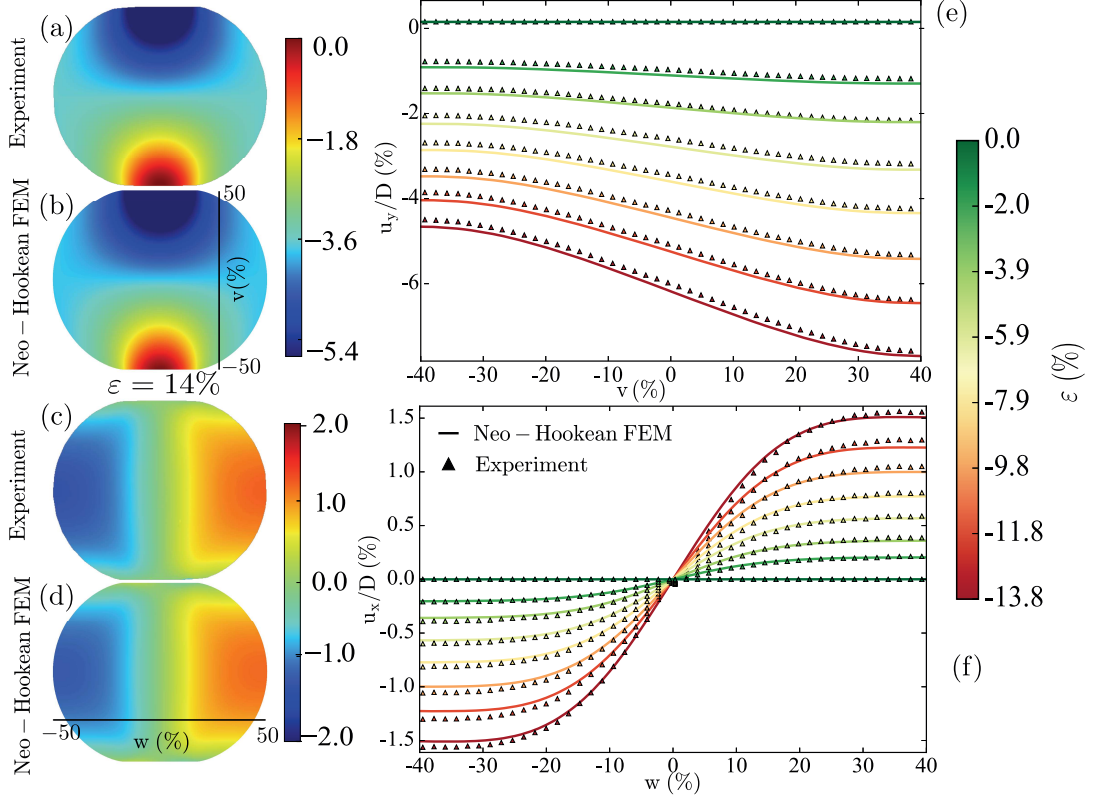


FIGURE 2.6 – Champs de déplacement adimensionnés calculés ou mesurés le long de la direction y (u_y/D) ((a), (b)), et le long de la direction x (u_x/D) ((c), (d)) pour une déformation compressive cumulée de $\varepsilon = 14\%$, pour une expérience avec la particule de silicone réticulé et une simulation d'éléments finis non linéaire avec un matériau néo-hookéen. Les champs de déplacement dans (a-d) sont tracés en fonction des coordonnées eulériennes. La condition de contact non-frottant a été prise en compte tant pour l'expérience que pour la simulation. (e) Champ de déplacement adimensionné u_y/D en fonction de la position verticale lagrangienne v indiquée en (b) pour plusieurs valeurs de ε ; (f) Champ de déplacement adimensionné u_x/D en fonction de la position transversale lagrangienne w indiquée en (d) pour plusieurs valeurs de ε . Dans les deux figures (e) et (f), les lignes continues présentent les résultats pour la simulation FEM néo-hookéenne alors que les triangles montrent les résultats expérimentaux.

Les figures 2.6(a) et (b) montrent, respectivement, le champ de déplacement adimensionné le long de la direction de compression u_y/D pour l'expérience et la simulation FEM

néo-hookéenne pour $\varepsilon = 14\%$. Les figures 2.6(c) et (d) présentent le déplacement perpendiculaire u_x/D dans les mêmes conditions. L'accord entre les résultats expérimentaux et numériques est quantitativement bon. On en déduit que la déformation de l'échantillon est cohérente avec un matériau décrit par le modèle néo-hookéen incompressible.

On remarque que le déplacement de la matière située dans la bande verticale moyenne de l'échantillon suit linéairement le déplacement vertical impliqué par la compression, tandis que la matière située à gauche se déplace vers la gauche et la matière située à droite se déplace vers la droite.

De manière plus quantitative, la figure 2.6(e) montre les variations de u_y/D le long d'une ligne verticale excentrée v indiquée à la figure 2.6(b). Ici, les valeurs expérimentales et numériques de u_y/D sont affichées en fonction de v pour plusieurs niveaux de compression. Les deux approches sont en accord quantitatif même pour des déformations de compression aussi élevées que 14%. La même conclusion est observée pour la figure 2.6(f) présentant u_x/D le long de la ligne horizontale excentrée w indiquée à la figure 2.6(d) pour l'expérience et la simulation FEM néo-hookéenne.

Nous avons également testé l'effet du frottement des parois de confinement sur les champs locaux. Dans la figure 2.7, nous comparons les champs de déplacement pour les expériences effectuées avec les conditions non-frottante et frottante. Pour la condition frottante, les parois de confinement sont revêtues de papier de verre. Nous n'observons aucune différence significative entre les résultats obtenus avec les deux conditions de frottement. On peut donc conclure que, dans ce cas, le frottement aux bords ne modifie pas de manière significative le comportement local, jusqu'à la résolution considérée ici. Dans la suite de cette section, seule la condition non-frottante est envisagée.

Champs de contrainte et de déformations

Les expériences donnent accès uniquement aux composantes dans le plan (xy) du champ de déplacement de la surface inférieure de l'échantillon, mais pas à la composante hors-plan. Or, cette dernière intervient dans les expressions des composantes B_{xx} , B_{xy} et B_{yy} du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \Rightarrow \begin{cases} B_{xx} = \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^2 \\ B_{xy} = B_{yx} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial z}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Y} \\ B_{yy} = \left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Connaître les composantes dans le plan (xy) du tenseur $\mathbf{B}$ est important car ces composantes permettent de calculer les composantes planes du tenseur des contraintes. En effet, dans le cas d'un solide néo-hookéen incompressible (c'est-à-dire, $J = 1$ et $\nu = 0,5$), le tenseur de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ se déduit des équations (1.12) et (2.1) comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{E}{3}\mathbf{B}, \quad (2.5)$$

où p est une pression indéterminée (en effet, le solide étant incompressible, la pression n'induit aucune déformation). Ici, nous faisons l'hypothèse que les effets des déplacements

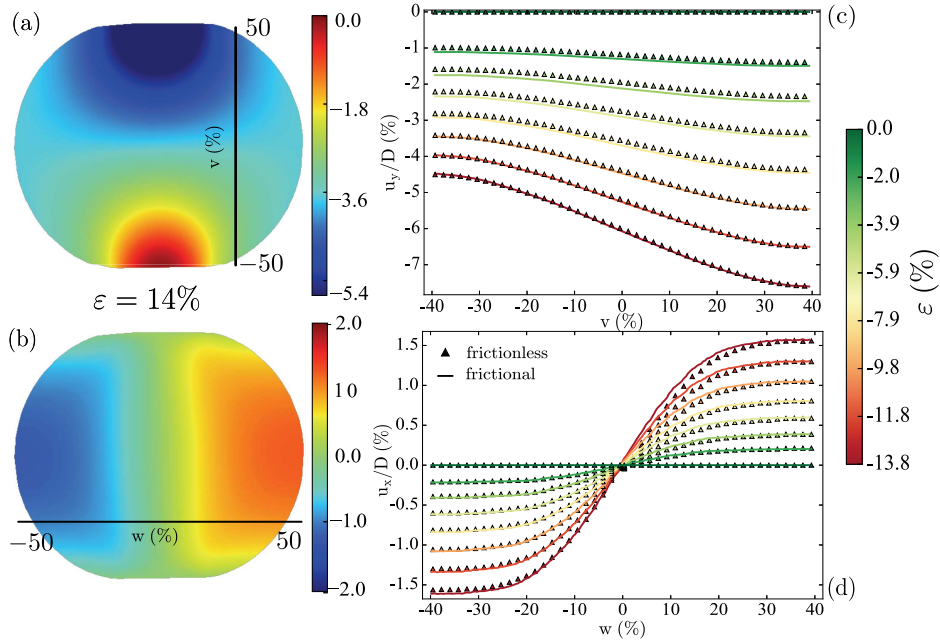


FIGURE 2.7 – Champs de déplacement adimensionnés mesurés le long des directions y (u_y/D)(a) et x (u_x/D)(b) pour une déformation globale cumulée de $\varepsilon = 14\%$, pour une expérience avec la particule de silicone réticulé en considérant la condition de contact frottant (les parois de confinement sont recouvertes de papier de verre pour éviter le glissement). Les champs de déplacement dans (a-b) sont tracés en fonction des coordonnées eulériennes; (c) Champ de déplacement adimensionné u_y/D en fonction de la position verticale lagrangienne v indiquée à la figure (a) pour plusieurs valeurs de ε ; (d) Champ de déplacement adimensionné u_x/D en fonction de la position transversale lagrangienne w indiquée en (b) pour plusieurs valeurs de ε . Les lignes continues présentent les résultats expérimentaux pour la condition de contact frottant, tandis que les triangles montrent ceux de la condition non-frottant.

dans la direction z sont négligeables devant ceux suivant les directions y et x pour le calcul de B_{xx} , B_{xy} et B_{yy} . Nous avons vérifié la pertinence de cette hypothèse en utilisant les simulations FEM, grâce auxquelles nous avons accès au champ de déplacements tridimensionnel (contrairement à ce qu'apporte la méthode expérimentale). Une comparaison des composantes dans le plan (xy) du tenseur $\mathbf{B}$ calculées en tenant compte les déplacements selon z , ou en négligeant leurs contributions, donne les mêmes valeurs jusqu'à la précision des simulations, comme le montre la figure 2.8.

En considérant cette approximation, les composantes dans le plan de $\mathbf{B}$, B_{xx} , B_{xy} et B_{yy} , peuvent être obtenues à partir des champs de déplacement dans le plan inférieur, u_x et u_y , précédemment déterminés. Notons que la résolution spatiale dans la détermination du

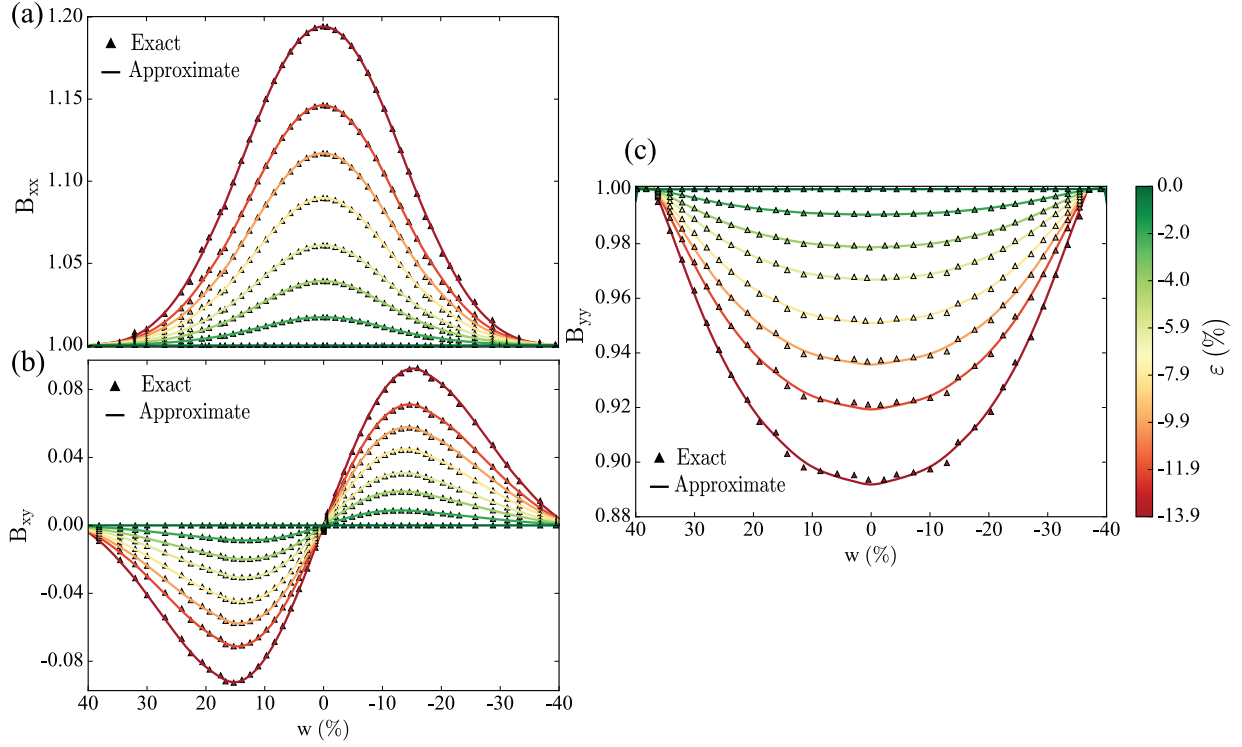


FIGURE 2.8 – Évolution des composantes du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche ($\mathbf{B}$), B_{xx} (a), B_{xy} (b) et B_{yy} (c) issues des simulations FEM néo-hookéennes, suivant l'axe lagrangien transversal w indiqué à la figure 2.7(b) pour plusieurs valeurs de la déformation globale cumulée ε . Les triangles représentent le calcul exact en tenant compte des déformations hors plan, tandis que les traits pleins montrent le calcul approximatif qui néglige les déformations hors plan.

champ de déplacement est suffisamment élevée et que le niveau de bruit est suffisamment bas pour qu'aucun filtre n'ait dû être appliqué lors du calcul des dérivées du champ de déplacement. On peut aussi en déduire des données issues de la DIC les composantes dans le plan (xy) du tenseur des contraintes déviatoriques $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ ($\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E}{3}\mathbf{B}$) en utilisant les composantes correspondantes de $\mathbf{B}$. Notons que $\mathbf{B}$ est obtenu sans aucune hypothèse sur la loi de comportement du matériau, alors que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ provient de l'équation (2.5), qui repose sur l'hypothèse d'un solide néo-hookéen incompressible validé précédemment (accord entre simulations et expériences pour le champ des déplacements). Les composantes dans le plan du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche B_{xx} , B_{xy} , B_{yy} , ou de manière équivalente les composantes de la contrainte déviatorique $\tilde{\sigma}_{xx}$, $\tilde{\sigma}_{xy}$ et $\tilde{\sigma}_{yy}$, sont représentées à la figure 2.9(a, c, e), respectivement, pour une déformation globale cumulée de $\varepsilon = 14\%$. Comme attendu, B_{yy} est maximum à gauche et à droite de l'échantillon et minimum au centre. Cela est le contraire pour B_{xx} qui est maximal sur une bande verticale centrale. Le terme B_{xy} est maximum en valeur absolue lorsque le matériau est le plus cisailé. Cela

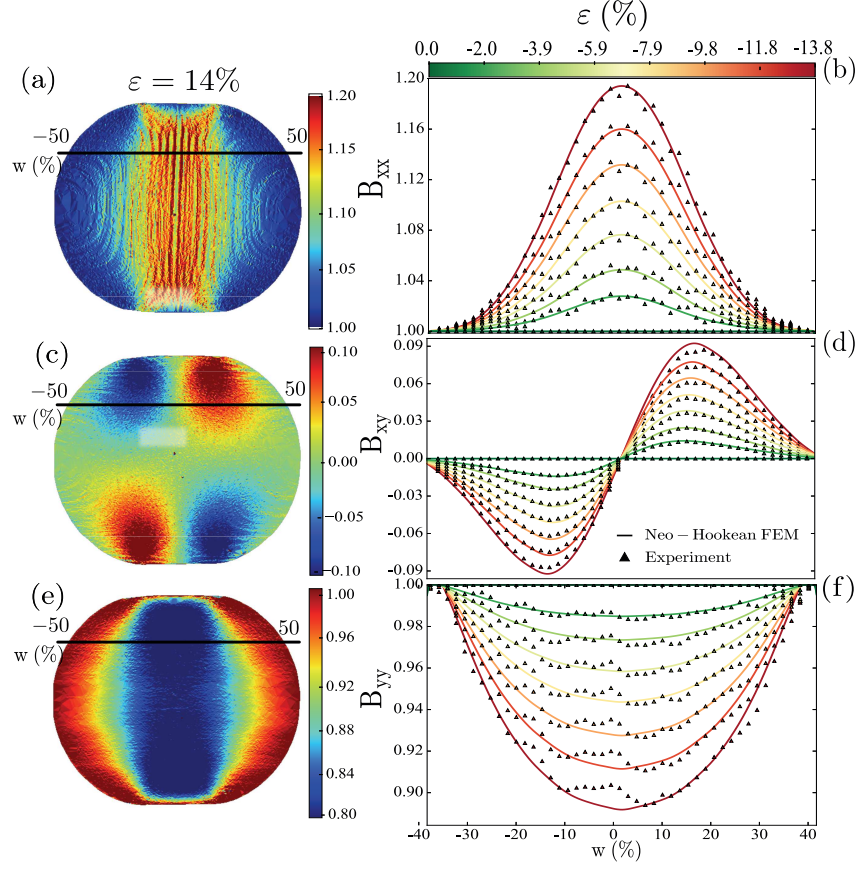


FIGURE 2.9 – Composantes dans le plan du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche ($\mathbf{B}$), B_{xx} (a), B_{xy} (c) et B_{yy} (e), de la surface inférieure d'un cylindre de silicone réticulé comprimé latéralement (condition non-frottante). Ces composantes sont représentées en fonction des coordonnées eulériennes pour des expériences à la déformation $\varepsilon = 14\%$. Évolutions de B_{xx} (b), B_{xy} (d) et B_{yy} (f) suivant l'axe lagrangien transversal w indiqué dans (a), (c) et (e), respectivement, pour plusieurs valeurs de ε . Dans chaque graphique, les lignes continues présentent les simulations FEM néo-hookéenne alors que les triangles montrent des résultats expérimentaux.

se révèle être à l'intérieur de quatre lobes pointant vers les bords où l'échantillon est en contact avec les parois.

Le tenseur de déformation Cauchy-Green gauche $\mathbf{B}$ obtenu ci-dessus est ensuite comparé aux simulations FEM. Les gradients de déformation du champ de déplacement hors plan sont pris en compte dans les résultats de la simulation. La figure 2.9(b, d, f) compare les mesures expérimentales et numériques pour plusieurs valeurs de la déformation compressive cumulée. Ils montrent l'évolution de B_{xx} , B_{xy} et B_{yy} le long des lignes horizontales excentrées indiquées à la figure 2.9(a, c, e), respectivement, pour ε variant de 0 à 14%. Une fois de plus, un accord quantitatif est observé entre les expériences et les simulations numé-

riques bien que dans la figure 2.9(f), les courbes expérimentales soient un peu bruitées pour certaines positions horizontales. Ceci provient d'une légère inhomogénéité de la vitesse de translation du scanner pendant le processus d'imagerie.

De la surface inférieure au volume

Bien que, comme nous l'avons vu précédemment, il existe un bon accord entre les champs locaux expérimentaux et numériques (contrainte, déformations ...), l'accord entre les paramètres globaux n'est pas automatique puisque la comparaison précédente est limitée à la surface inférieure de l'échantillon. Par conséquent, nous étudions également l'évolution de la force de contact f et de l'énergie élastique $\mathcal{E}$ en fonction de la déformation cumulée. Du côté des expériences, f est directement mesurée à l'aide des capteurs de force.

La détermination expérimentale de l'énergie élastique, à partir des résultats issus de la DIC, est plus délicate. En effet, le calcul exact de l'énergie doit se faire à partir de la connaissance des invariants du tenseur $\mathbf{B}$. Pour calculer ces derniers, nous avons besoin de connaître les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 de ce tenseur. Notons que ces valeurs changent a priori en chaque point du système. La simple connaissance des champs $\mathbf{u}_x(x, y)$ et $\mathbf{u}_y(x, y)$ au niveau de la surface inférieure des échantillons ne permet pas a priori de calculer ces valeurs propres. Cependant, à partir du tenseur

$$\begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix}$$

calculé précédemment de façon approchée pour les points situés au niveau de la surface inférieure, nous pouvons obtenir deux valeurs propres λ_x et λ_y qui constituent, comme nous allons le justifier, une bonne approximation de deux des valeurs propres de $\mathbf{B}$. Prenons par exemple $\lambda_1 \simeq \lambda_x$ et $\lambda_2 \simeq \lambda_y$. La troisième valeur propre peut se déduire de la condition d'incompressibilité : puisque $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \simeq 1$, $\lambda_3 \simeq 1/(\lambda_x \lambda_y)$. En négligeant maintenant les gradients suivant la direction z , les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 peuvent ainsi être calculées, de manière approchée, dans tout l'échantillon. A partir de là, il est aisé de déterminer les invariants du tenseur $\mathbf{B}$ puis l'énergie totale de déformation du système à partir de l'équation (1.12). Par ailleurs, l'énergie élastique $\mathcal{E}$ peut être calculée d'une autre façon (et donc indépendamment de la DIC) en considérant le travail de la force compressive f (puisque les forces de frottement sont négligeables grâce aux parois non frottantes). L'énergie de déformation obtenue expérimentalement par les deux méthodes décrites ci-dessus est tracée à la figure 2.10, en fonction de la déformation compressive cumulée. Le bon accord montre que les hypothèses sur lesquelles le calcul de l'énergie élastique à partir des données issue de la DIC est effectué sont pertinentes.

L'énergie élastique adimensionnée issue des résultats numériques est également tracée sur cette figure, avec à nouveau un bon accord. Que l'analyse de la DIC effectuée uniquement au niveau de la surface inférieure de l'échantillon permette de retrouver le résultat de calcul direct de l'énergie élastique à partir de la force mesurée par le capteur de force montre d'une part la pertinence de la modélisation du matériau par le modèle du so-

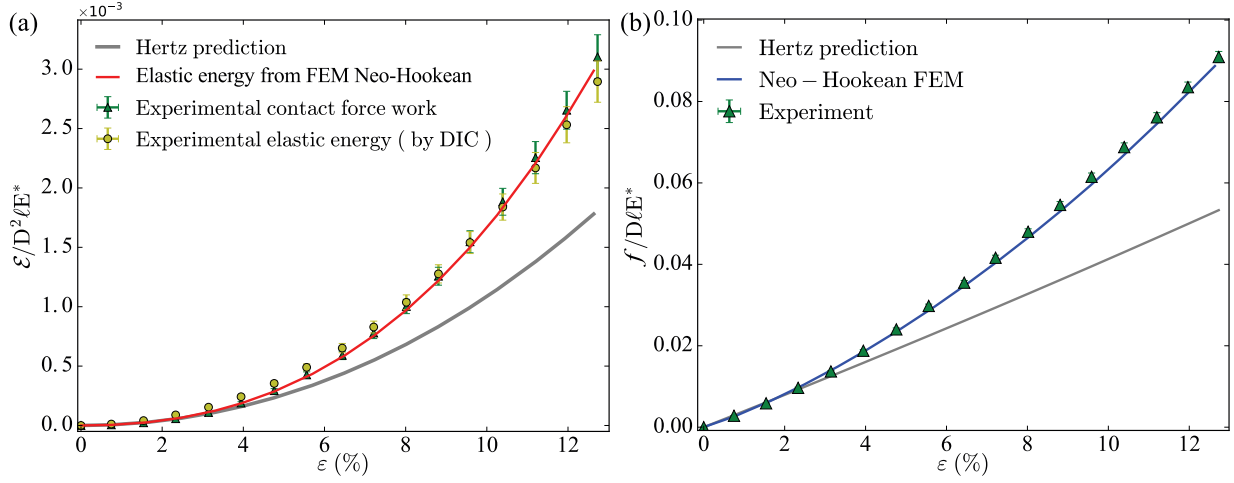


FIGURE 2.10 – (a) Évolution de l'énergie élastique adimensionnée $\mathcal{E}/D^2\ell E^*$ en fonction de la déformation globale cumulée ε déduite d'une part de la mesure directe (capteurs sur la paroi mobile) de force et d'autre part des mesures de corrélation d'images, pour une expérience réalisée avec cylindre de silicone réticulé; Cette énergie est aussi calculée à partir des simulations FEM néo-hookéenne. L'énergie déduite de la loi de contact de Hertz est ajoutée pour comparaison; (b) Évolution de la force de contact adimensionnée $f/D\ell E^*$ en fonction de la déformation globale cumulée ε mesurée directement à partir des capteurs de force de l'expérience de compression et de la simulation FEM néo-hookéenne. La prédiction Hertz est également ajoutée pour comparaison.

lide néo-hookéen incompressible, et d'autre part que la connaissance de la déformation au niveau de la surface inférieure de l'échantillon est suffisante pour calculer l'énergie élastique de l'ensemble de l'échantillon. Ainsi, dans la géométrie considérée ici d'un cylindre comprimé radialement, la technique d'imagerie utilisée permet de remonter à une mesure globale. Ce résultat sera mis à profit au chapitre 3 dans lequel nous n'étudierons non pas une unique particule, mais un assemblage de particules cylindriques. La technique de DIC nous permettra alors de calculer l'énergie élastique de l'ensemble du système.

Notons de plus que les évolutions de la force adimensionnée $f/D\ell E^*$ déduites des simulations et mesurées expérimentalement grâce au capteur de force sont en bon accord, comme le montre la figure 2.10(b). Ceci ne constitue pas une surprise, puisque l'énergie calculée à partir de la force mesurée par le capteur était déjà en accord avec l'énergie calculée par les simulations.

Les mesures de $\mathcal{E}$ et f divergent rapidement des prédictions de Hertz après quelques pourcents de la déformation compressive ε . Comme mentionné précédemment, ceci provient de ce que les prédictions de Hertz sont obtenues dans le contexte de la condition de déformation plane, ce qui n'est pas le cas pour les résultats expérimentaux et numériques.

Pour conclure, ces bons accords entre simulations et expériences montrent que la technique d'imagerie couplée à l'algorithme de corrélation d'image constitue un outil efficace

pour des mesures locales précises et non invasives, et permet de déterminer, avec une bonne approximation, des grandeurs locales comme l'énergie de déformation du système.

Passage du 3D au 2D pour les simulations

Nous avons montré à la section 2.2.1 le bon accord entre les résultats de la simulation 3D avec les résultats expérimentaux. Dans le chapitre 3, nous allons étudier le comportement d'un assemblage de plusieurs particules cylindriques, qui constituera un système granulaire modèle. Afin de pouvoir réaliser des simulations numériques avec des temps de calculs raisonnables, nous allons effectuer les simulations de ces systèmes en considérant l'approximation de déformation plane, c'est-à-dire en ne considérant que deux dimensions de l'espace au lieu de 3. Nous allons ici valider cette hypothèse en considérant, comme précédemment, une particule unique soumise à une compression radiale.

Afin de simuler de la manière la plus approchée possible la déformation d'une particule cylindrique soumise à une compression radiale, tout en réalisant des simulations sous l'hypothèse des déformations planes, nous considérons une particule effective. Cette particule est aussi une particule cylindrique, elle sera aussi comprimée radicalement, mais avec des conditions aux limites telles que la déformation qui en résulte est plane. De plus, le matériau qui constitue la particule effective a des caractéristiques élastiques différentes de la particule réelle : ces caractéristiques (module de Young et coefficient de Poisson) sont choisies de telle sorte que l'énergie de déformation des deux particules (la particule réelle et la particule effective) soient les mêmes, dans la limite des petites déformations, lorsque les composantes horizontales des deux tenseurs de déformations (celui de la particule effective et celui de la particule réelle) sont identiques.

Supposons pour simplifier la présentation que la déformation du matériau réel est localement biaxiale si bien que le tenseur de Cauchy-Green droit $\mathbf{C}$ s'écrit dans le repère principal :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (1 + \epsilon)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 + \epsilon} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Si de plus que la déformation est infinitésimale, alors ϵ est un petit paramètre. Notons que ce tenseur $\mathbf{C}$ vérifie bien la condition d'incompressibilité du matériau, $I_3 = \det(\mathbf{C}) = 1$. Ce matériau étant décrit par le modèle du solide néo-hookéen, la densité d'énergie de déformation associée à la déformation est :

$$W = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) = \frac{\mu}{2} \left((1 + \epsilon)^2 + \frac{2}{1 + \epsilon} - 3 \right), \quad (2.7)$$

où I_1 est le premier invariant de $\mathbf{C}$. En développant cette expression à l'ordre 2 en ϵ , on obtient :

$$W = \frac{3\mu}{2} \epsilon^2. \quad (2.8)$$

La déformation plane ayant les mêmes composantes dans le plan xy est décrite par le tenseur de Cauchy-Green droit :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} (1+\epsilon)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Cette déformation n'est alors plus isochore ($\det(\mathbf{C}) \neq 1$). La densité d'énergie de déformation associée, pour un matériau néo-hookéen de paramètres de Lamé $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$ est alors :

$$\tilde{W} = \frac{\tilde{\mu}}{2} \left(\tilde{I}_1 - 2 - 2 \ln \tilde{J} \right) + \frac{\tilde{\lambda}}{2} (\ln \tilde{J})^2, \quad (2.10)$$

où $\tilde{J} = \det \tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{I}_1 = \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}})$ est le premier invariant de $\tilde{\mathbf{C}}$. En développant cette expression à l'ordre 2 en ϵ nous obtenons :

$$\tilde{W} = \frac{5\tilde{\mu}}{4} \epsilon^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{8} \epsilon^2. \quad (2.11)$$

Nous choisissons $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$ de telle sorte que $\tilde{W}$ s'identifie à W , ce qui conduit à $\tilde{\mu} = \mu$ et $\tilde{\lambda} = 2\mu$. Nous pouvons alors déterminer le coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$ à partir de la relation classique en élasticité linéaire :

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{\lambda}}{2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} = \frac{2\tilde{\mu}}{2 \times 3\tilde{\mu}} = \frac{1}{3}. \quad (2.12)$$

Nous en concluons que pour obtenir la même énergie élastique pour les mêmes composantes dans le plan (xy) des tenseurs de déformation dans le cas du matériau incompressible et dans le cas d'une déformation plane, il faut considérer un matériau effectif de coefficient de Poisson effectif $\tilde{\nu} = \frac{1}{3}$ et de même module de cisaillement ($\tilde{\mu} = \mu$).

Cette équivalence a été établie en supposant que les déformations sont infiniment petites ($\epsilon \ll 1$), or les particules des systèmes que nous étudions dans le cadre de cette thèse subissent des déformations finies. Afin de tester les limites de l'approche bi-dimensionnelle consistant à considérer un matériau effectif subissant des déformations planes, nous avons réalisé des simulations en considérant une particule effective (avec un coefficient de Poisson égale à 1/3) subissant la même déformation compressive cumulée que les cylindres étudiés à la section 2.2.1.

L'évolution de la force de contact adimensionnée $f/D\ell\mu$ en fonction de la déformation compressive cumulée ϵ est présentée à la figure 2.11(a), et le champ de déplacement adimensionné u_x/D en fonction de la position transversale lagrangienne w indiquée à la figure 2.7 pour plusieurs valeurs de ϵ indiquées à la figure 2.11(b). Les lignes continues présentent les résultats de la simulation en 3D (effectuée avec le coefficient de Poisson $\nu = 0.495$), tandis que les triangles montrent ceux de la simulation en déformation plane effectuée en considérant un matériau néo-hookéen avec le même module de cisaillement mais avec le coefficient de Poisson effectif $\nu = 0.34$. Les bons accords entre ces résultats

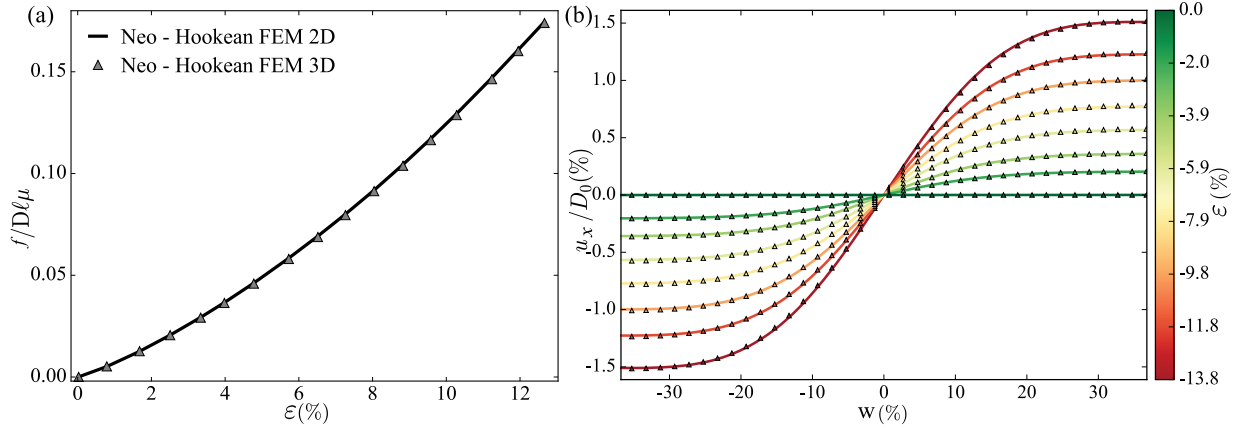


FIGURE 2.11 – (a) Évolution de la force de contact adimensionnée $f/D\ell\mu$ en fonction de la déformation compressive cumulée ε . (b) Champ de déplacement adimensionné u_x/D en fonction de la position transversale lagrangienne w indiquée à la figure 2.7, pour plusieurs valeurs de ε . Les lignes continues présentent les résultats de la simulation en 3D avec $\nu = 0.49$, tandis que les triangles montrent ceux de la simulation en déformations planes avec le coefficient de Poisson $\nu = 0.34$.

nous permettent de valider le passage de 3D à 2D pour un matériau néo-hookéen y compris lorsque les déformations sont finies. Ce résultat sera mis à profit dans le chapitre 3 où des assemblages de particules néo-hookéennes sont simulés.

2.2.2 Particule plastique

Dans cette section, nous utilisons le même dispositif expérimental et la même technique de DIC pour étudier la compression quasi-statique d'un échantillon cylindrique constitué d'un hydrogel d'agar. La simulation FEM est également réalisée en considérant un cylindre de diamètre $D = 59$ mm et d'épaisseur de $\ell = 9,5$ mm ayant un comportement plastique tel que mentionné précédemment. A l'échelle locale, les champs de déplacement calculés à partir de la simulation FEM plastique coïncident bien avec ceux de l'approche DIC. La figure 2.12 montre les composantes du champ de déplacement adimensionné le long de la direction de compression u_y/D (voir la figure 2.12 (a, b)) et de la direction transversale u_x/D (voir la figure 2.12 (c, d)) pour une déformation compressive globale de $\varepsilon = 14\%$ à la fois pour l'expérience et la simulation avec la condition de contact non-frottant. Nous notons une différence frappante entre ces champs et ceux de l'échantillon de silicone montré à la figure 2.6. Même si les valeurs extrêmes de u_y sont toujours concentrées circulairement autour des zones de contact, elles sont nettement plus localisées dans le cas plastique. Pour u_x , la structure du champ est très différente : la matière est déplacée vers l'axe de compression près les zones de compression, et dans la direction opposée loin de ces zones. La figure 2.12(e) montre l'évolution de u_y/D le long de l'axe de compression v indiqué sur la

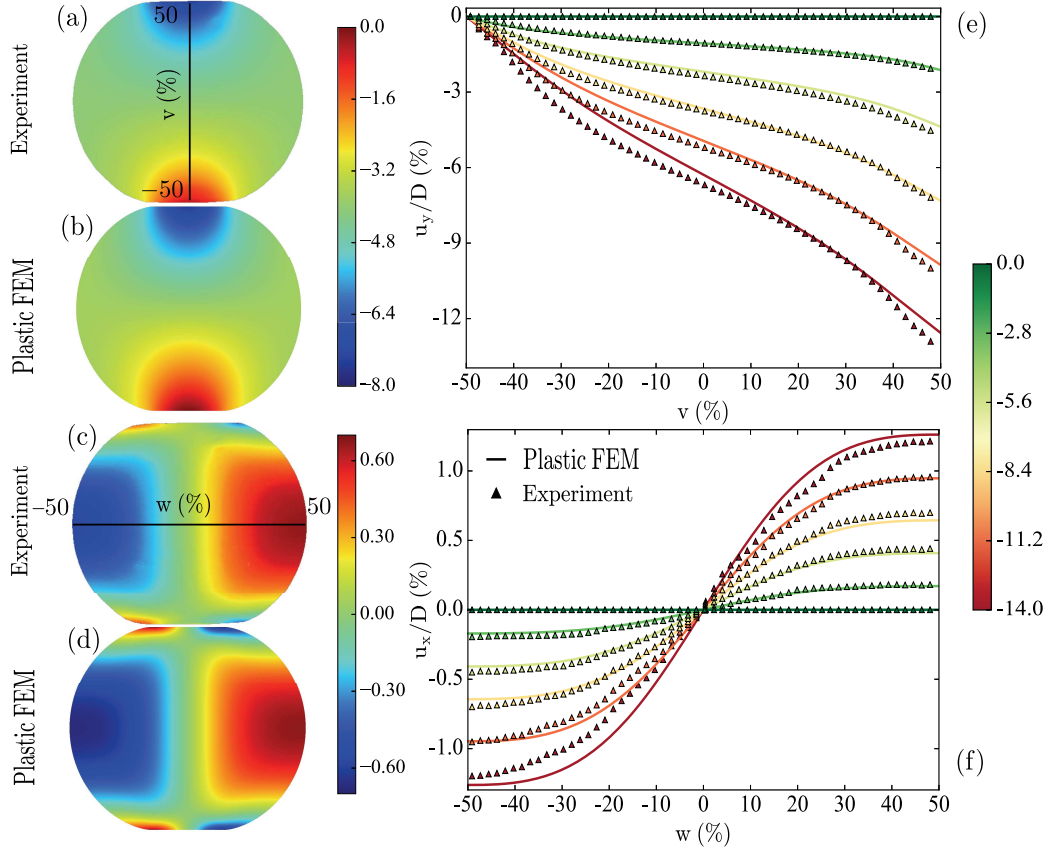


FIGURE 2.12 – Champ de déplacement adimensionné le long de la direction y (u_y/D) ((a), (b)), et le long de la direction x (u_x/D) ((c), (d)) pour la déformation compressive cumulée $\varepsilon = 14\%$ obtenue lors d'une expérience réalisée avec une particule cylindrique d'agar, et obtenue par simulation FEM d'un matériau plastique de von Mises. Le champ de déplacement dans (a-d) est tracé en fonction des coordonnées eulériennes. La condition de contact non-frottant a été prise en compte tant pour l'expérience que pour la simulation; (e) Champ de déplacement adimensionné u_y/D en fonction de la position verticale lagrangienne v indiquée à la figure (a) pour plusieurs valeurs de ε ; (f) Champ de déplacement adimensionné u_x/D en fonction de la position transversale lagrangienne w indiquée en (d) pour plusieurs valeurs de ε . Dans les deux figures (e) et (f), les lignes continues représentent les résultats de la simulation FEM plastique, et les triangles montrent les résultats expérimentaux.

figure 2.12(a), pour les valeurs de ε variant de 0 à 14%. Ceci est montré pour plusieurs valeurs de la déformation globale compressive ε pour les mesures numériques et expérimentales. Nous observons un accord satisfaisant jusqu'à $\varepsilon \simeq 5\%$. Pour les déformations plus grandes, l'accord commence à faiblir proche des zones de contact. La figure 2.12(f) présente

des résultats similaires pour u_x/D dans la direction perpendiculaire à l'axe de compression w indiqué à la figure 2.12(c). Les courbes expérimentales et numériques suivent la même tendance qu'auparavant.

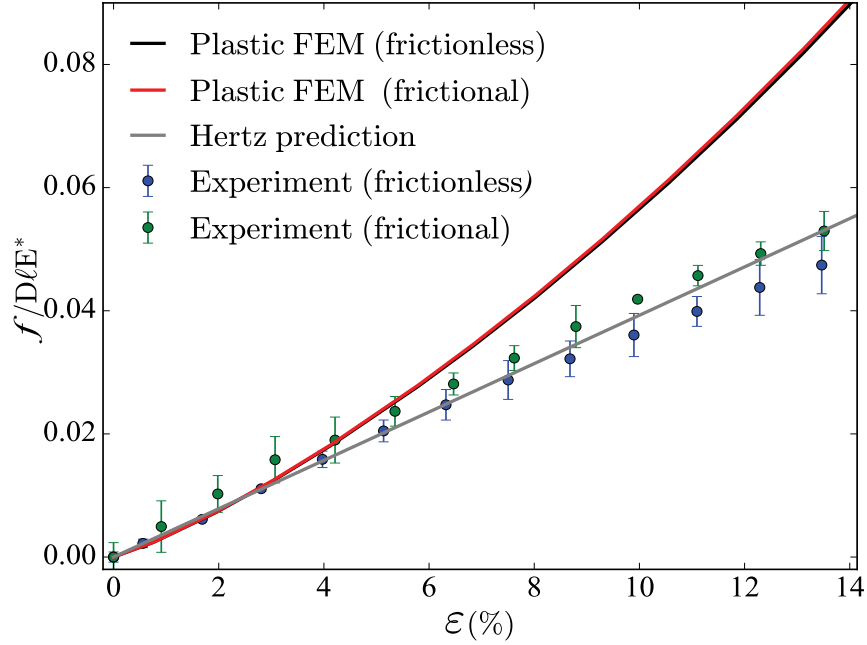


FIGURE 2.13 – Évolution de la force de contact adimensionnée $f/D\ell E^*$ en fonction de la déformation compressive cumulée ε . La force est mesurée directement à partir des capteurs de force dans l'expérience avec le cylindre d'agar, et calculée à partir de simulations FEM plastiques. Les résultats sont présentés pour les conditions de contact non-frottant et frottant. La prédiction Hertz est ajoutée pour comparaison.

L'évolution de la force de contact adimensionnée $f/D\ell E^*$ en fonction de la déformation compressive cumulée ε est montrée sur la figure 2.13 pour les deux conditions de contact, déterminée à partir de l'expérience et de la simulation. L'accord entre les résultats expérimentaux et numériques est mauvais pour $\varepsilon > 3\%$ (alors que les mesures expérimentales de f suivent bien la prédiction de l'analyse de Hertz jusqu'à $\varepsilon \simeq 10\%$, probablement parce que la déformation du cylindre d'agar est plane : nous observons en effet que la hauteur de l'échantillon déformé demeure en tout point identique à la hauteur initiale du cylindre).

Sur la figure 2.14(a) et (b), les champs de déplacement expérimentaux pour les conditions de contact non-frottant et frottant sont comparés. De légères différences sont observées même si les tendances sont similaires. Des valeurs de la déformation compressive cumulée plus élevées qu'avec la particules de silicone réticulée étudiée à la section 2.2.1 peuvent être atteintes car la survenue du flambage est retardée par la plasticité de l'agar. La figure 2.15 présente l'échantillon pour une déformation de $\varepsilon = 30\%$. Les champs de déplacement u_x et u_y sont alors qualitativement différents de ceux observés pour des va-

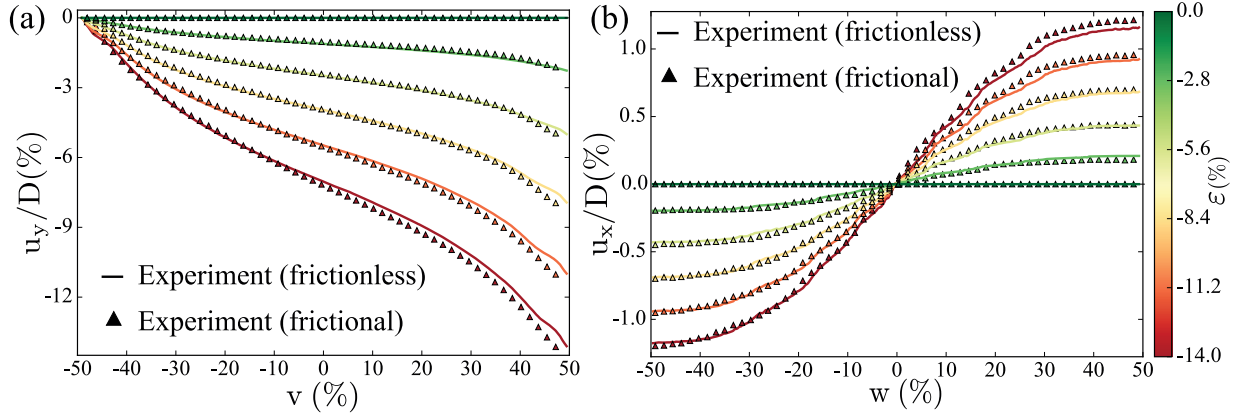


FIGURE 2.14 – (a) Champ de déplacement adimensionné u_y/D en fonction de la position transversale lagrangienne w indiquée à la figure 2.12(a) pour plusieurs valeurs de ε ; (b) Champ de déplacement adimensionné u_x/D en fonction de la position verticale lagrangienne v indiquée à la figure 2.12(c) pour plusieurs valeurs de ε . Dans les deux cas (a) et (b), les lignes continues présentent les résultats expérimentaux pour la condition de contact non-frottant, tandis que les triangles montrent les résultats expérimentaux pour la condition frottante.

leurs inférieures de ε , comme le montre la figure 2.12. Notons que l'analyse d'image produit toujours des champs lisses pour des niveaux de déformation aussi élevés. Les composantes dans le plan du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche B_{xx} , B_{xy} et B_{yy} sont présentées à la figure 2.15 (c), (d) et (e), respectivement. Bien que ces champs soient plus bruités que ceux présentés à la figure 2.9 pour l'échantillon de silicone dans une situation moins comprimée, nous pouvons observer que le tenseur de déformation est qualitativement différent.

2.2.3 Particule en mousse de polyuréthane

Nous étudions maintenant la compression radiale d'un cylindre constitué d'un autre matériau très déformable : une mousse de polyuréthane haute résilience. L'échantillon a un diamètre $D = 120$ mm et une épaisseur $\ell = 30$ mm. Il est comprimé en utilisant le même dispositif expérimental. Comme mentionné précédemment, puisque la déformation volumique du matériau n'est pas homogène en raison de la localisation de la déformation, la définition d'une loi de comportement du matériau pour de grandes déformations dépasse le cadre de ce travail. Pour cette raison, aucune comparaison numérique n'est effectuée dans cette section. Les paramètres élastiques linéaires ont été mesurés : le module de Young vaut $E = 0,07 \pm 0,001$ MPa et coefficient de Poisson vaut $\nu \approx 0$.

La figure 2.16(a) montre le champ de déplacement u_y pour $\varepsilon = 30\%$. Ce champ semble qualitativement similaire à celui présenté sur la figure 2.6 pour l'échantillon de silicone réticulé. Cependant, on peut observer des inhomogénéités locales au niveau de la compo-

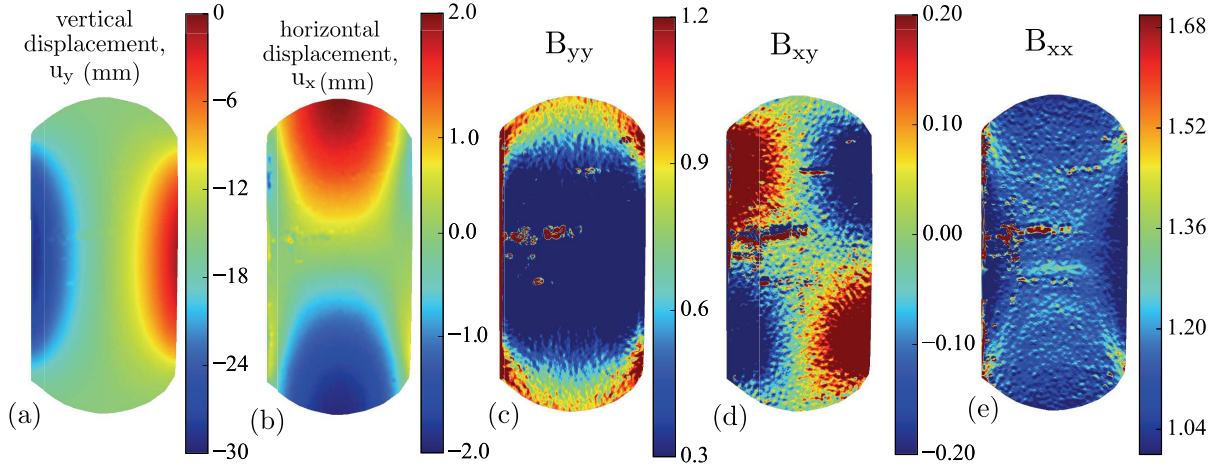


FIGURE 2.15 – Champs de déplacement u_y (a) et u_x (b), et composantes du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche ($\mathbf{B}$), B_{xx} (c), B_{xy} (d) et B_{yy} (e), en fonction des coordonnées eulériennes pour un cylindre d'agar fortement comprimé ($\varepsilon = 30\%$). Les champs de déplacement ont été mesurés à partir de la corrélation d'images et les composantes de déformation sont déduites de ces champs de déplacement. Sur cette figure, les images sont tournées de 90° par rapport aux autres figures de cette thèse.

sante u_y du champ de déplacement. Ces inhomogénéités apparaissent plus clairement sur les composantes B_{yy} et B_{xy} du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche présentées à la figure 2.16(c) et (d), respectivement. Ces inhomogénéités proviennent du flambage de la structure de la mousse à l'échelle locale (également appelé le micro-flambage). L'évolution du champ de déplacement vertical adimensionné u_y/D le long d'une ligne verticale excentrée v dont la position est indiquée à la figure 2.16(a) pour plusieurs valeurs de ε est montrée à la figure 2.16(b). Les hétérogénéités de déformations locales sont à nouveau mises en évidence sur ce graphique. Notons que contrairement au cas d'une particule en silicone réticulé, pour une contrainte compressive élevée u_z varie linéairement avec v comme si la compression du disque pouvait être approchée par une compression de poutre. Ces mesures sont présentées ici pour montrer que la méthode expérimentale de DIC peut s'appliquer à des matériaux plus complexes que le silicone réticulé par exemple.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, le dispositif utilisé dans les travaux expérimentaux de cette thèse est présenté pour l'étude de la compression des échantillons cylindres individuels. Ce dispositif est composé d'un appareil de compression posé à plat sur un scanner optique de bureau. Nous avons déterminé les champs cinématiques locaux des cylindres déformés en appliquant une méthode de la corrélation d'images adaptée pour traiter de grands déplacements. Trois

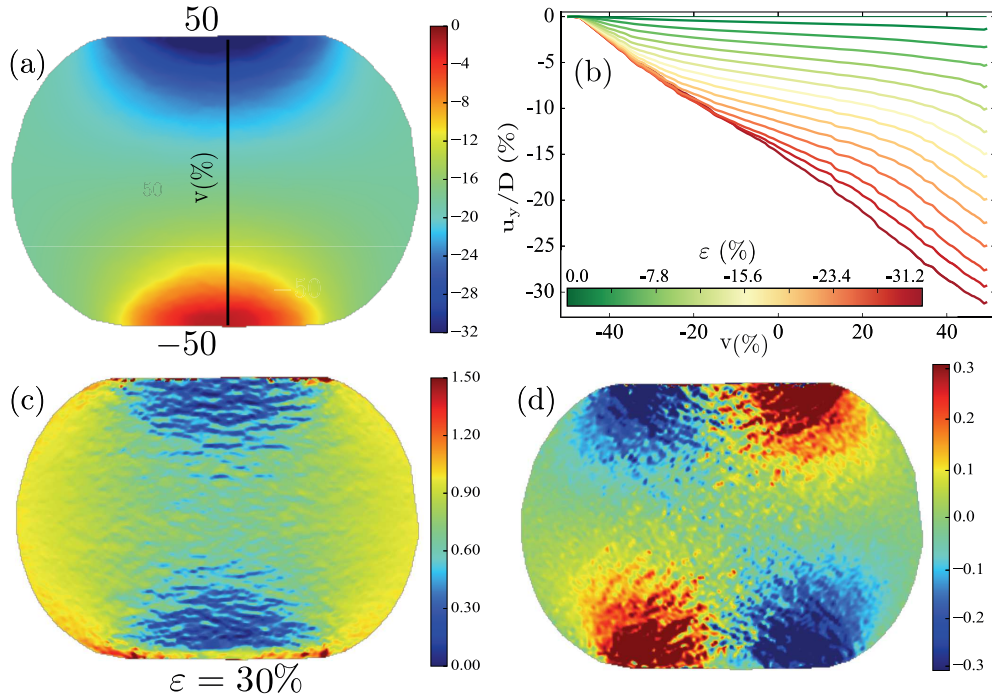


FIGURE 2.16 – Champ de déplacement adimensionné le long de la direction de compression u_y/D (a), et composantes du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche (**B**), B_{yy} (c) et B_{xy} (d), pour une expérience de compression d'un cylindre de mousse de polyuréthane, en fonction des coordonnées eulériennes, pour une déformation compressive cumulée $\varepsilon = 30\%$; (b) Évolution du champ de déplacement adimensionné u_y/D le long de la ligne verticale lagrangienne v indiquée en (a) pour différents niveaux de la déformation compressive ε .

matériaux aux comportements mécaniques sous grandes déformations très différents ont été utilisés pour réaliser les échantillons : silicone réticulé, hydrogel d'agar et mousse de polyuréthane. L'échantillon de silicone réticulé se comporte comme un matériau néo-hookéen incompressible. Des simulations FEM ont été effectuées dans le contexte de la théorie des déformations finies. Les mesures expérimentales locales et globales coïncident bien avec les résultats numériques alors que seuls des grandeurs non locales globales peuvent être approximées par des simulations FEM dans le cadre de la théorie des déformations infinitésimales. En ce qui concerne l'échantillon d'agar, son comportement se révèle proche d'un matériau parfaitement plastique dans le régime quasi-statique des expériences que nous avons réalisées. Des simulations FEM ont été réalisées en considérant une loi de comportement plastique de von Mises. Nous observons un bon accord entre les observations numériques et expérimentales pour les déformations globales faibles à modérées (inférieures à 3%). Ces résultats valident notre procédure expérimentale : fabrication des échantillons, imagerie et post-traitement des images. Nous avons aussi montré que les champs de dé-

formations peuvent être mesurés par cette technique de DIC pour des échantillons d'agar et de mousse de polyuréthane pour des valeurs de la déformation compressive atteignant ($\varepsilon \simeq 30\%$).

Dans le cas du cylindre en silicone réticulé, nous avons montré que la méthode de DIC qui analyse les déplacements uniquement dans le plan inférieur du cylindre déformé permet de remonter à l'énergie de déformation de l'échantillon. Ce résultat sera mis à profit au chapitre suivant (section 3) dans lequel la compression uniaxiale d'un assemblage de particules cylindriques faites en silicone réticulé est étudiée. Dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas étudié la compression d'un assemblage de particules d'hydrogel d'agar ou de mousse de polyuréthane.

Compression uniaxiale quasi-statique d'un assemblage de cylindres élastiques : Étude numérique et expérimentale

Dans le chapitre 2, nous avons présenté le protocole et l'analyse d'expériences de compression radiale d'une particule cylindrique molle unique. Nous avons validé des outils expérimentaux et numériques, et déterminé des paramètres du matériau élastique qui seront utilisés dans la suite. Dans ce chapitre, nous considérons la compression uniaxiale d'un assemblage de particules cylindriques élastiques et pouvant subir de grandes déformations. Des essais numériques et expérimentaux sont réalisés en parallèle. Nous nous intéressons à l'évolution de différentes propriétés de cet assemblage de particules telles que la compacité, l'énergie de déformation (ou énergie élastique) totale, la coordinance, etc. Des comparaisons de ces variables issues du système numérique et du système expérimental sont effectuées, montrant qu'il est possible de trouver un assemblage numérique bi-dimensionnel avec des paramètres convenables pouvant représenter correctement le comportement du système réel tridimensionnel. L'étude d'un cycle de charge et décharge du système est ensuite introduite avec une analyse qualitative de son comportement.

Sommaire

3.1	Procédure expérimentale	59
3.1.1	Dispositif expérimental	59
3.1.2	Corrélation d'images numériques pour un système constitué de plusieurs particules	60
3.2	Simulations numériques	63
3.2.1	Montage numérique	63
3.2.2	Validation numérique	65

3.3	Compression uniaxiale d'un milieu granulaire composé des particules élastiques hautement déformables.	68
3.3.1	Compacité et déformation compressive cumulée	70
3.3.2	Force de compression globale	71
3.3.3	Énergie de déformation du système	72
3.3.4	Évolution de la surface et de la forme des particules	75
3.3.5	Coordinance	78
3.3.6	Répartition de l'énergie	82
3.4	Décharge d'un milieu granulaire frottant composé des parti- cules élastiques fortement déformées	83
3.5	Conclusion	87

3.1 Procédure expérimentale

3.1.1 Dispositif expérimental

Pour réaliser des tests de compression uniaxiale d'un assemblage de plusieurs particules déformables, nous utilisons le même dispositif que celui présenté dans le chapitre précédent pour la compression d'une particule unique. A cause de la taille du dispositif, les assemblages effectués ont le nombre de particule limité. Les particules cylindriques sont fabriquées en silicone réticulé avec deux rayons différents, comme présenté à la figure 3.1, $D_1 = 20$ mm et $D_2 = 30$ mm, et avec la même épaisseur $H = 9,5$ mm.

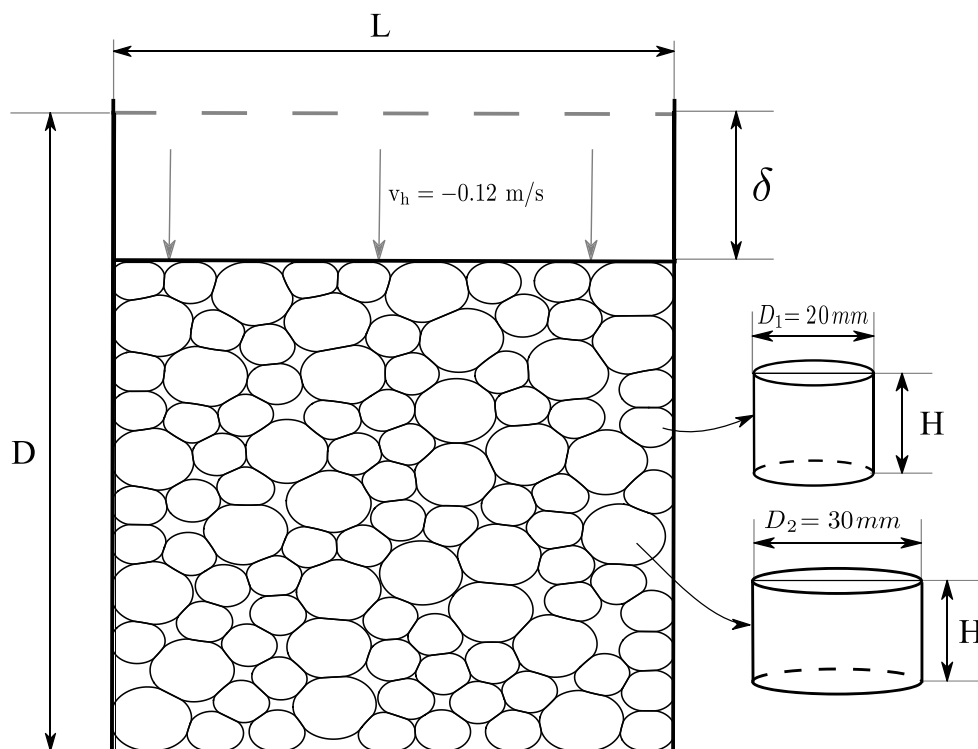


FIGURE 3.1 – Système constitué de 100 particules cylindriques en silicone réticulé, comprimé par une paroi mobile. Il s'agit d'un système bidisperse contenant deux tailles de particules $D_1 = 20$ mm et $D_2 = 30$ mm avec la même épaisseur $H = 9,5$ mm. La proportion de grandes particules dans le système est 30%.

La figure 3.1 présente un assemblage de 100 particules cylindriques réalisées par mou-

lage, en silicone réticulé. Ce système est soumis à une compression uniaxiale obtenue par translation d'un piston mobile et rigide. La boîte qui contient des particules a une longueur initiale $D = 0,286$ m et une largeur $L = 0,202$ m. La hauteur $H = 0,05$ m des parois est plus grande que l'épaisseur des particules cylindriques. De l'huile végétale qui n'est pas absorbée par le silicone est ajoutée entre les particules, entre les particules et les parois et entre les particules et le plancher de la cellule afin de lubrifier les contacts et d'améliorer la transmission optique. Le contact entre les particules et le plancher horizontal de la cellule est ainsi parfaitement lubrifié, et correspond à un frottement visqueux. Par contre, l'huile étant drainée vers le bas, un frottement solide subsiste entre les particules et entre les particules et les parois.

La paroi mobile se déplace à une vitesse de $v_h = -0,12$ m/s par pas de $\delta = 0,5$ mm. Après chaque pas, le piston est immobilisé pendant 30 minutes de repos afin que le système atteigne sa configuration d'équilibre : les forces visqueuses due à la lubrification par l'huile ont ainsi le temps de s'annuler. L'équilibre mécanique ainsi atteint ne dépend que de l'élasticité des particules, et des contacts solides entre particules et entre les particules et les parois. Un scanner optique enregistre une image de la surface inférieure du système à l'issue de chaque temps de repos. Dans le cadre de cette étude, on analyse la distribution $I(x, y)$ des niveaux de gris de ces images en noir et blanc avec la résolution de $1200 \text{ dpi} \times 2400 \text{ dpi}$ codées sur 8 bits. Un revêtement constitué de paillettes (taille moyenne $30 \mu\text{m}$) forme un motif aléatoire, homogène et très mince sur la face inférieure des particules avec un contraste noir/blanc élevé, ce qui permet de déterminer précisément les champs de déplacement de chacune des particules.

3.1.2 Corrélation d'images numériques pour un système constitué de plusieurs particules

Dans le chapitre 2, nous avons présenté l'algorithme de DIC destiné à étudier le champ de déplacement d'une particule unique. Afin de pouvoir utiliser cet algorithme dans le cas d'un milieu constitué d'un grand nombre de particules, nous avons besoin de détecter la position de chacune des particules ainsi que leur mouvement de solide rigide au cours de la compression du système. Cette procédure, qui a été mise au point et implémentée par Jonathan Barés (Ingénieur de recherche en imagerie/instrumentation au laboratoire), est expliquée ci-dessous.

Nous avons d'abord besoin de détecter la position de chaque particule dans le système à l'état initial. Pour ce faire, nous commençons par binariser l'image du système non déformé. Un seuil sur l'image en noir et blanc est choisi afin d'obtenir une image dont le niveau de gris a la valeur 1 sur les particules et 0 ailleurs (cf. figure 3.2(a)). Cette image binarisée est ensuite convoluée avec une matrice, patron type d'une particule. Cette dernière matrice est construite à partir d'une matrice nulle qui a en son centre un disque rond de la taille des particules les plus petites. Le résultat de la convolution est maximale à l'endroit des centres des particules. Cette matrice convoluée est ensuite seuillée pour fournir une nouvelle matrice faite d'îlots isolés dont le centre moyen correspond au centre

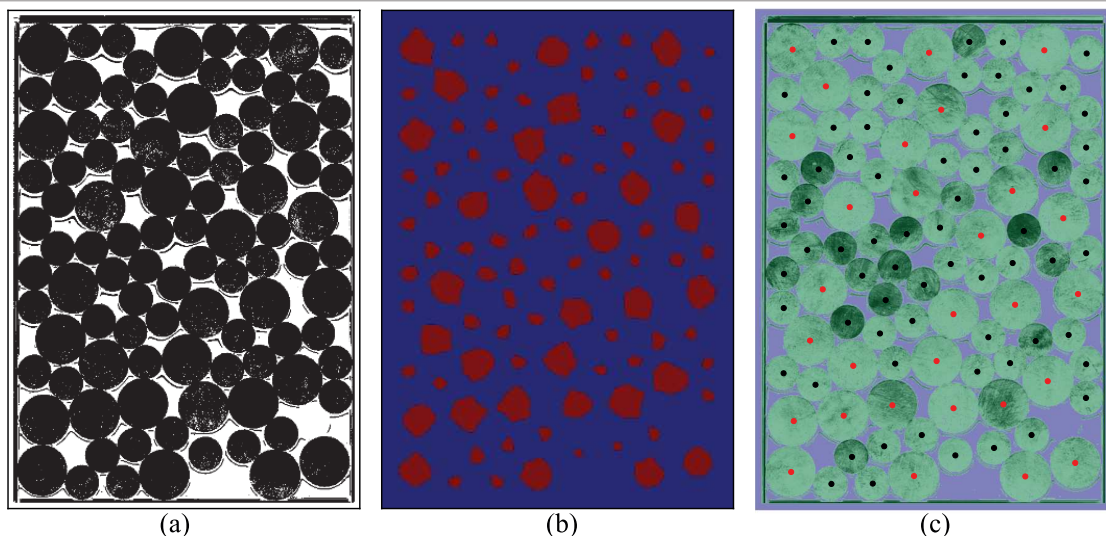


FIGURE 3.2 – Étapes principales permettant d'obtenir la position initiale des particules. (a) : Image binarisée qui prend la valeur 1 à l'endroit des particules et 0 ailleurs. (b) : Image issue de la convolution avec une matrice mimant une particule binarisée. Cette image présente des îlots isolés correspondant à des grandes particules (grandes taches) et des petites particules (petites taches). (c) : Position du centre géométrique de chaque particule.

des particules. Les grands îlots correspondent aux grandes particules et les petits aux petites (cf. figure 3.2(b)). Nous détectons alors ces îlots à partir d'un algorithme¹ classique de détection des éléments connectés. Le barycentre de chacun de ces éléments donne avec une bonne précision la position des particules et leur taille nous renseigne sur la taille des particules. Nous pouvons donc identifier la position approximative des grandes et des petites particules. Pour améliorer ces résultats, nous traçons en zoomant alors tour à tour sur chaque position approximative et donnons 3 points sur les bords de la particule. La position géométrique de ces trois points nous permet de calculer la position des centres de particules de façon bien plus précise. Cette algorithm marche aussi pour les systèmes plus dispersés en taille de particule. Après avoir repéré la position initiale de chaque particule dans l'état non déformé, nous suivons séparément leur évolution au cours du chargement. Cela se fait en deux temps. Premièrement, nous définissons une région d'intérêt (ROI) autour du centre de la particule dans l'état non déformé. Cette ROI est présentée par un carré vert $\mathbf{P}_1$ sur l'image 0 de la figure 3.3. $\mathbf{P}_1$ est une sous-matrice de l'image. Nous cherchons ensuite la sous-matrice $\mathbf{P}_2$ de l'image déformée la plus proche de $\mathbf{P}_1$. Pour ce faire, nous utilisons la méthode de corrélation présentée au chapitre 2. Le calcul de corrélation est dans un premier temps effectué dans l'espace Fourier avant de faire une maximisation sub-pixel de la corrélation. Cela nous permet d'isoler la sous-matrice $\mathbf{P}_2$ présentée par le carré rouge dans la figure 3.3. La translation et la rotation de la particule

1. la fonction 'ndimage.measurements.label' dans la bibliothèque Scipy de Python

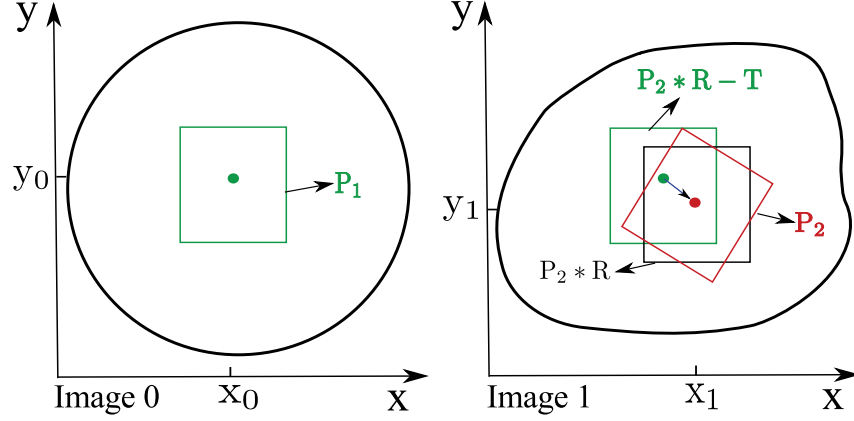


FIGURE 3.3 – Procédure permettant de déterminer le mouvement de corps rigide d'une particule (translation et rotation). Dans l'image non déformée, on isole une région d'intérêt (ROI) définie par la sous-matrice $\mathbf{P}_1$. Dans l'image déformée une seconde sous-matrice $\mathbf{P}_2$ est isolée. Cette matrice est la plus approchante de la matrice $\mathbf{P}_1$ une fois les matrices de rotation $\mathbf{R}$ et de translation $\mathbf{T}$ appliquées. Ces dernières représentent le mouvement de solide rigide de la particule. Voir le texte pour plus de détails.

sont alors matérialisées par les matrices de passage $\mathbf{T}$ et $\mathbf{R}$ définies par :

$$\sum (\mathbf{P}_1 - (\mathbf{P}_2 * \mathbf{R} - \mathbf{T})) , \quad (3.1)$$

où $\mathbf{T}$ est une matrice de translation et $\mathbf{R}$ est une matrice de rotation qui donnent le mouvement de solide rigide de la particule. Cette procédure est répétée pour chaque particule et chaque couple d'images consécutives afin de suivre les particules au cours du chargement.

Des réarrangements granulaires brusques, autrement appelés avalanches, peuvent toutefois intervenir entre deux pas consécutifs de chargement, ce qui peut modifier grandement la position de particules d'une image à l'autre et rendre inopérant le suivi par corrélation d'images précédemment décrit. Dans ce cas, nous améliorons la procédure comme présentée à la figure 3.4. Dans l'image 0, nous définissons deux ROIs dont les centres sont situés aux points de coordonnées (x'_0, y'_0) et (x''_0, y''_0) . La méthode de corrélation précédemment décrite est alors appliquée indépendamment sur chacune de ces deux sous-matrices. Nous trouvons alors deux sous-matrices aux coordonnées (x'_1, y'_1) et (x''_1, y''_1) . La nouvelle position du centre de la particule est donc $(x_1 = (x'_1 + x''_1)/2, y_1 = (y'_1 + y''_1)/2)$ et sa rotation $\hat{A}$ est donnée par :

$$\hat{A} = \arctan \left(\frac{y'_1 - y''_1}{x'_1 - x''_1} \right) . \quad (3.2)$$

Nous relançons alors l'optimisation de la corrélation (cf. Eq.3.1) à partir de cette nouvelle position et rotation pour trouver la valeur optimale du déplacement et de l'angle de rotation.

Grâce à cette procédure, nous obtenons le mouvement de solide rigide de chaque particule au cours de la compression du système. Nous pouvons alors, pour chaque particule,

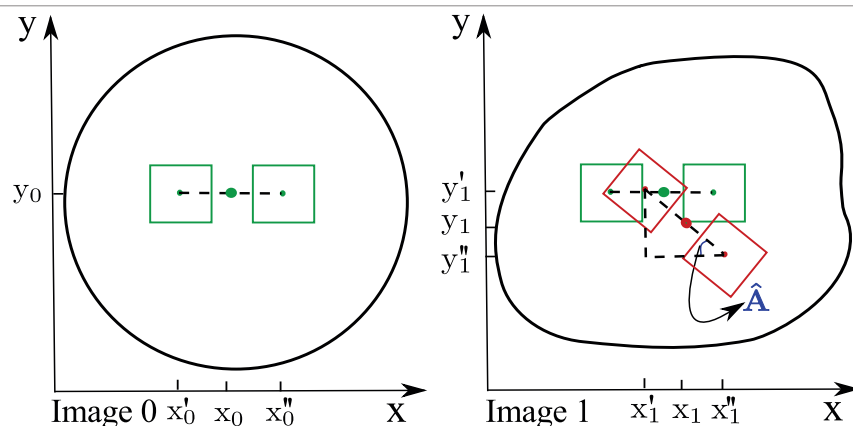


FIGURE 3.4 – Schéma de la méthode de recherche de l'angle de rotation ($\hat{A}$) et du déplacement de la particule en définissant deux ROIs. Dans l'image non déformée, ces deux ROIs sont centrées autour de (x'_0, y'_0) et (x''_0, y''_0) . Dans l'image déformée, les nouvelles positions de ces deux ROIs sont (x'_1, y'_1) et (x''_1, y''_1) . Elles sont trouvées par l'algorithme de corrélation présenté au chapitre 2.

re-créer un jeu d'images en corrigeant pour chacune ce mouvement de corps rigide (cf. figure 3.5). Il est alors possible de traiter la mesure de déformation des particules en parallèle et de façon totalement indépendante exactement de la même façon que pour les images obtenues dans le chapitre 2.

3.2 Simulations numériques

3.2.1 Montage numérique

Nous allons maintenant présenter les simulations ainsi que l'analyse du comportement de l'assemblage de particules élastiques. Ces résultats sont comparés avec les résultats obtenus exp  rimentalement². Nous avons utilisé le logiciel LMGC90, comme présenté au chapitre 1.

Ces assemblages sont préparés en utilisant la configuration des systèmes expérimentaux (position, taille et nombre de particules). Ils sont simulés avec des particules élastiques circulaires dans un espace à deux dimensions, confinées dans une boîte de forme rectangulaire de largeur $L = 0,201$ m et de longueur initiale $D = 0,286$ m dont seule la paroi supérieure est mobile (figure 3.1). Cette paroi mobile se déplace vers le bas à une vitesse constante de $0,1$ m/s. Le pas de temps dans ces simulations est $\delta t = 9 \mu s$. Ces paramètres sont validés par les tests numériques présentés à la section suivante (voir la section 3.2.2). Nous étudions deux cas : 1) frottement nul et 2) frottement non nul avec plusieurs valeurs de coefficient de frottement $\mu_f = [0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 7; 1]$ communs entre les particules, et entre les

2. expériences mises en œuvre par Jonathan Bar  s, ingénieur de recherche au laboratoire

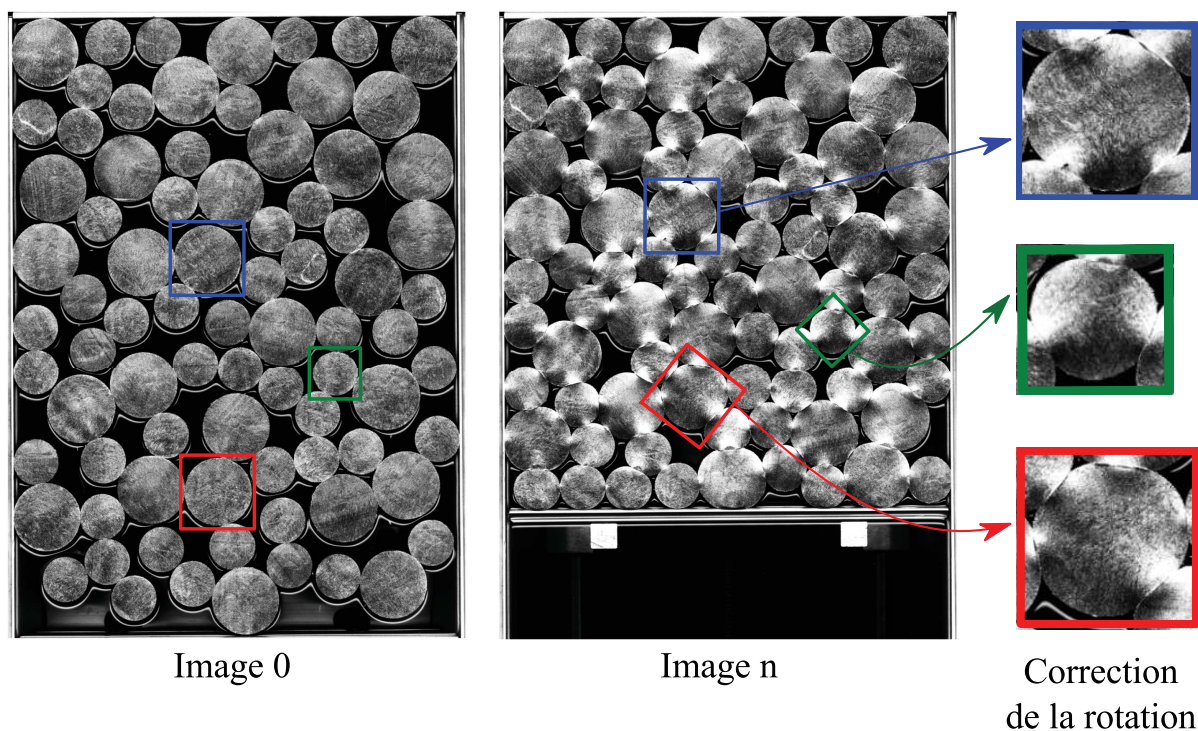


FIGURE 3.5 – Détermination du mouvement de solide rigide de chaque particule au cours de la compression du système. Nous montrons ici la rotation et la translation de trois particules depuis l'image initiale jusqu'à l'image finale. Les corrections des rotations de ces particules sont aussi présentées.

particules et la paroi. Les forces gravité sont nulles afin d'éviter des gradients de contrainte supplémentaires.

Les simulations sont effectuées (à deux dimensions) dans le cadre de l'hypothèse de déformations planes. Cette hypothèse rend les simulations possibles avec un temps de calcul raisonnable. Les déformations dans le système expérimental ne sont pas planes. Afin d'établir la correspondance entre les deux systèmes (numérique avec déformations plane et expérimental avec déformation tri-dimensionnelles), les particules réelles qui sont quasi-incompressibles sont modélisées par un matériau effectif ayant le coefficient de Poisson égale à $1/3$ (nous avons en réalité pris la valeur approchée de $0,34$), comme justifié à la section 2.2.1.

Un maillage des particules est obtenu avec le logiciel GMSH (GMSH (2018)). La résolution spatiale relative pour chaque particule est $\kappa = \frac{\delta}{D_i/2} = 0,071$ où δ est la taille moyenne de l'élément et D_i le diamètre de la particule (voir 3.2.2). Comme pour l'étude expérimentale, deux tailles de particules sont introduites. Les petites particules, de diamètre $D_1 = 20$ mm, contiennent 670 éléments triangulaires (3 nœuds). Les grandes particules, de diamètre $D_2 = 30$ mm, contiennent 1506 éléments triangulaires (3 nœuds). Les parois de la boîte sont modélisées comme des objets solides indéformables par LMGC90. Les expériences

étant réalisées avec le même silicone réticulé que lors des expériences du chapitre 2, nous utilisons les mêmes paramètres pour la modélisation du matériau constituant les grains. Nous utilisons donc une loi de comportement non linéaire néo-hookéenne pour chaque particule avec le coefficient de Poisson $\nu = 0,34$ et la densité $\rho = 1000 \text{ kg}^3/\text{m}$. Un amortisseur de Rayleigh est ajouté dans le système pour assurer la dissipation des ondes élastiques dans le système pendant la compression (voir 3.2.2). Sans cette dissipation, les particules seraient animées de mouvements de rebonds perpétuels, ce qui ne correspond pas au comportement du système expérimental dans lequel la dissipation se fait à l'intérieur même des particules (qui sont en réalité visco-élastiques) et par les forces associées à la lubrification.

3.2.2 Validation numérique

Pour valider les choix des paramètres numériques, nous avons effectué plusieurs tests afin d'analyser l'effet de discrétisation (maillage), l'effet des paramètres de l'amortisseur, et l'effet de la vitesse de compression. L'objectif est de choisir des paramètres permettant d'optimiser les temps de calcul tout en assurant des résultats corrects et robustes. Pour ces tests de validation, nous avons réalisé des simulations impliquant 50 particules déformables, avec le coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$ entre les particules, et entre les particules et les parois. Les paramètres du matériau (module de Young, coefficient de Poisson, dimensions et proportions des particules) sont ceux présentés précédemment.

3.2.2.1 Effet de la discrétisation en maillage

Plusieurs simulations ont été effectuées en changeant la résolution spatiale relative κ . La figure 3.6(a) montre l'évolution de la compacité et la figure 3.6(b) l'évolution de la force de compression, en fonction de la déformation compressive cumulée pour plusieurs valeurs de la résolution spatiale relative. On remarque qu'avec $\kappa \leq 0,071$, l'effet de la discrétisation du maillage devient négligeable sur le résultat final.

La figure 3.7 montre le temps de calcul en fonction de la résolution spatiale relative κ lorsque le système atteint la compacité $\Phi = 0,95$. La vitesse de compression est $v_h = 0,1 \text{ m/s}$. Nous trouvons que les simulations avec le maillage dense sont très coûteuses en temps de calcul. En analysant le résultat macroscopique obtenu à la figure 3.6 et les temps de calcul indiqués à la figure 3.7, nous avons décidé d'utiliser des maillages pour lesquels $\kappa = 0,071$ pour toutes les simulations présentées ultérieurement (chapitres 3 et 4).

3.2.2.2 Dissipation d'énergie

Le système expérimental est analysé à la fin de chaque pas de compression après un long temps d'attente qui suit l'immobilisation du piston. La vitesse de n'importe quel élément du système est alors nulle. Ceci résulte de la dissipation d'énergie qui a lieu au sein même de chaque particule (en raison des propriétés visco-élastiques du matériau) et de la dissipation visqueuse entre les particules et le plancher. Afin de reproduire une telle situation statique dans les simulations numériques, nous avons ajouté à la dynamique du

3. Compression uniaxiale quasi-statique d'un assemblage de cylindres élastiques : Étude numérique et expérimentale

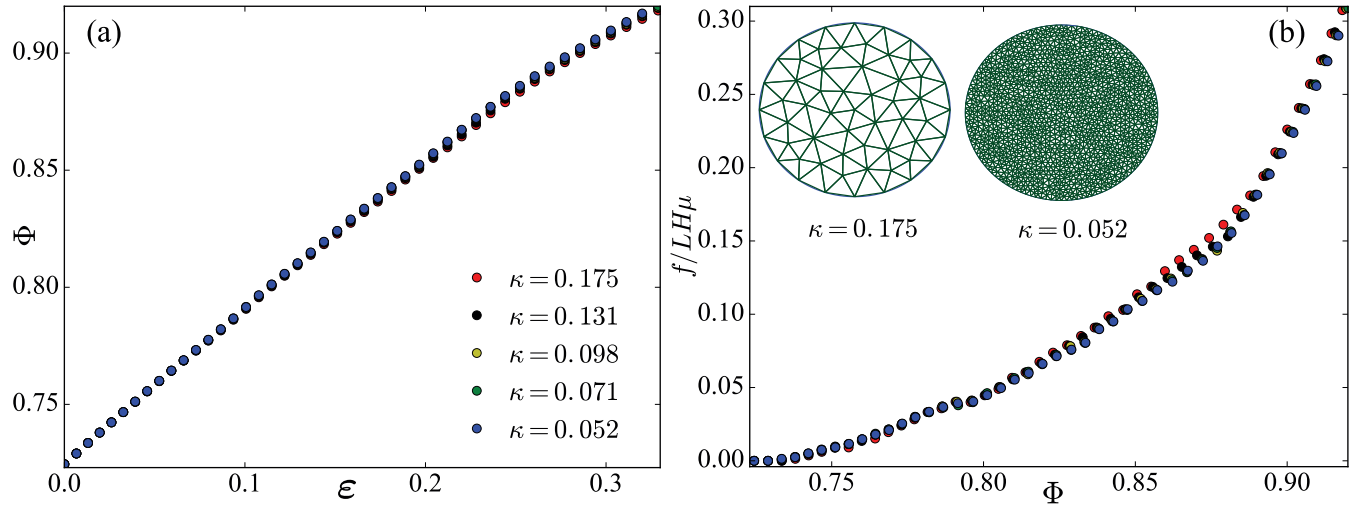


FIGURE 3.6 – Évolution de la compacité (a) et de la force de compression adimensionnée par $LH\mu$ (b) en fonction de la déformation compressive cumulée pour plusieurs valeurs de la résolution spatiale relative $\kappa = \frac{\delta}{D/2}$.

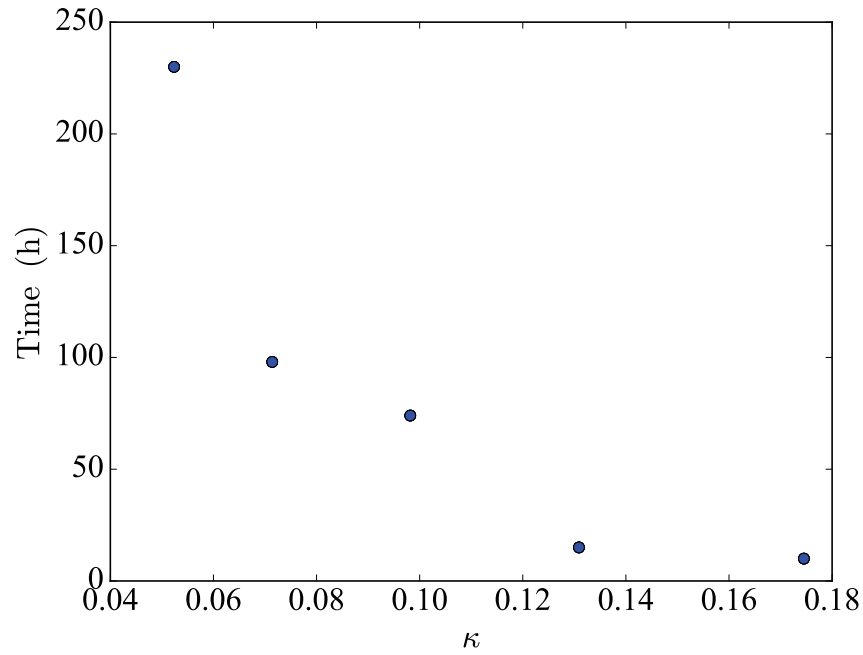


FIGURE 3.7 – Temps de calcul pour que le système atteigne la compacité $\Phi = 0,95$, en fonction de la résolution spatiale relative κ .

système un amortissement. L'objectif est de se placer en régime sur-amorti pour que les ondes élastiques et les vitesses des mouvements solides des particules n'aient pas d'effets significatifs sur les résultats.

Nous utilisons un amortisseur de Rayleigh (Strutt et Rayleigh (1945)) qui est très couramment utilisé dans la résolution des problèmes d'éléments finis associés aux systèmes continus modélisés par éléments finis. La matrice d'amortissement de Rayleigh est une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ respectivement :

$$\mathbf{C}_{\text{Rayleigh}} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} , \quad (3.3)$$

où α et β sont les coefficients relatifs de masse et de rigidité du système, respectivement. Ces deux coefficients sont sélectionnés pour obtenir le taux d'amortissement souhaité. L'effet d'amortisseur proportionnel à la masse est dominant pour les basses fréquences et celui proportionnel à la rigidité est dominant pour les hautes fréquences. Par conséquent, α et β sont des attributs des basses et hautes fréquences respectivement.

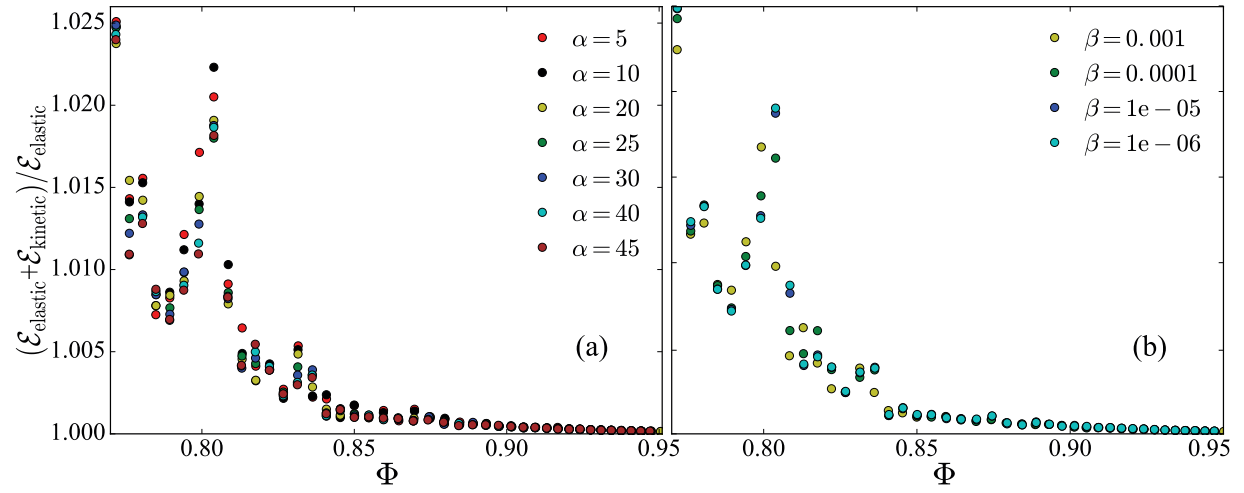


FIGURE 3.8 – Évolution du rapport entre l'énergie de déformation et l'énergie cinétique du système en fonction de la compacité, pour différents coefficients relatifs de masse α (a) et de rigidité β (b).

À la figure 3.8, nous présentons le rapport entre l'énergie de déformation et l'énergie cinétique d'un système, en fonction de la compacité pour plusieurs simulations en variant α (figure 3.8(a)), ou β (figure 3.8(b)). La vitesse de compression est $v_h = 0,1$ m/s. Dans le premier cas, on a fixé le coefficient $\beta = 10^{-5}$ en variant $\alpha = [5, 10, 20, 25, 30, 40, 45]$. Dans le deuxième cas, on a utilisé le coefficient $\alpha = 30$ avec plusieurs valeurs différentes de $\beta = [10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}]$. Nous observons que, avec $\alpha \geq 30$ et $\beta \leq 10^{-5}$, l'énergie cinétique devient suffisamment faible pour que la compression du système puisse être considérée comme quasi-statique.

3.2.2.3 Vitesse de déplacement de la paroi mobile

Des tests numériques ont été réalisés en variant la vitesse de déplacement de la paroi mobile pour analyser l'effet de ce paramètre sur le résultat final. Pour ces simulations,

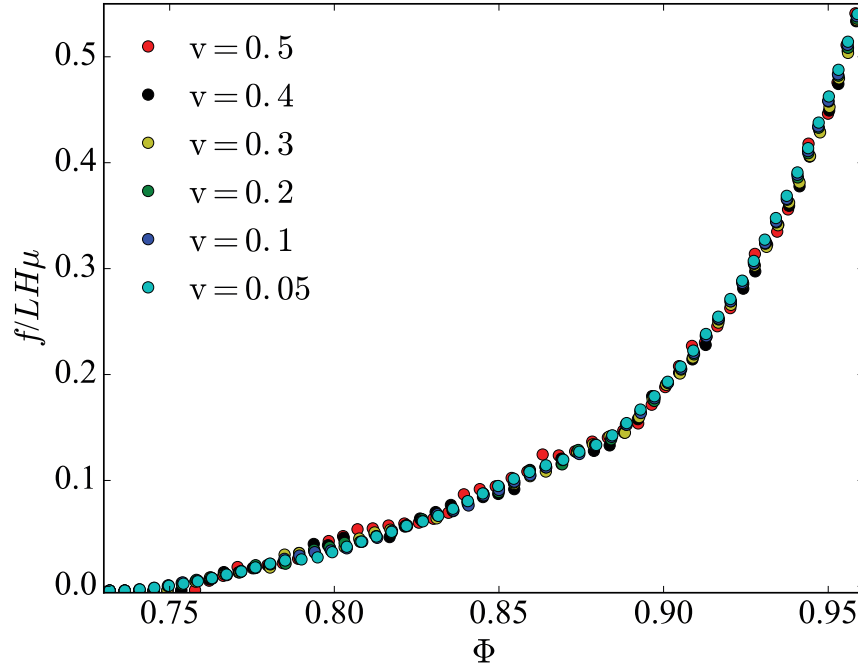


FIGURE 3.9 – Évolution de la force (adimensionnée par le facteur constant $LH\mu$) de compression uniaxiale en fonction de la compacité, pour différentes valeurs de vitesses de compression (exprimées en m/s).

nous avons utilisé le maillage avec la résolution spatiale relative $\kappa = 0,071$, l'amortisseur de Rayleigh avec $\alpha = 30$ et $\beta = 10^{-5}$ validés précédemment. La vitesse est variée de 0,005 m/s à 0,5 m/s. La figure 3.9 montre l'évolution de la force de compression (adimensionnée) en fonction de la compacité du système. Nous remarquons que cette force ne change pas significativement pour ces différentes vitesses de compression. Cela indique que l'hypothèse d'une compression quasi-statique du système est bien compatible avec nos simulations. Nous avons choisi la vitesse de compression $v_h = 0,1$ m/s qui présente un bon compromis en termes de temps de calcul pour les simulations qui seront présentées ultérieures.

3.3 Compression uniaxiale d'un milieu granulaire composé des particules élastiques hautement déformables.

Trois tests expérimentaux de compression uniaxiale de 100 particules cylindriques faites en silicone réticulé et placées dans une boîte rectangulaire de longueur initiale $D = 28,6$ cm et de largeur $L = 20,1$ cm ont été effectués. Il s'agit de systèmes bidisperses avec comme diamètre des particules, $D_1 = 20$ mm et $D_2 = 30$ mm. La hauteur commune des particules est $H = 9,5$ mm. La proportion de petites particules est de 70%. La figure 3.10 présente

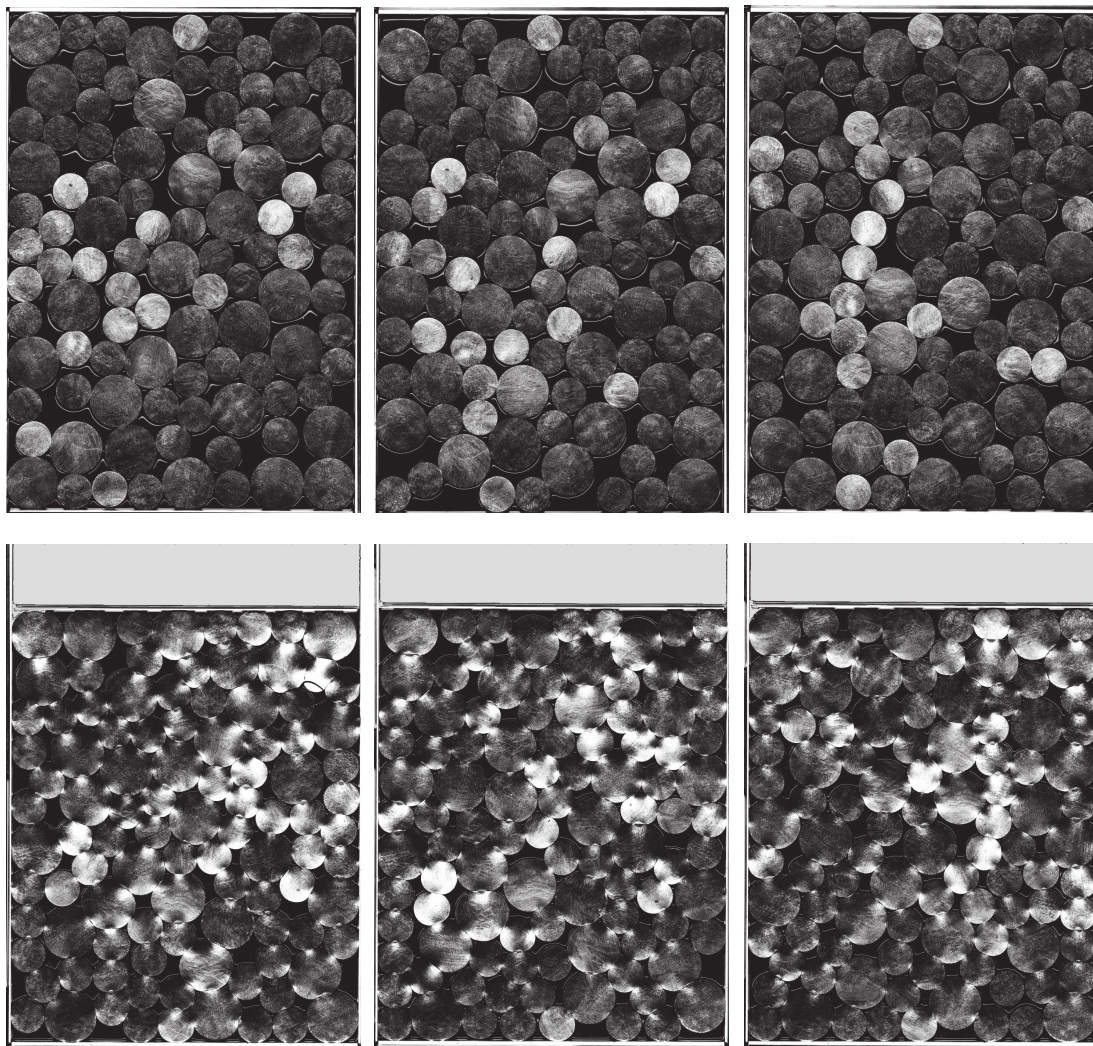


FIGURE 3.10 – Images expérimentales brutes prises par un scanner d'un assemblage de 100 particules cylindriques de silicone réticulé. Le diamètre des cylindres est $D_1 = 20$ mm pour les petites particules et $D_2 = 30$ mm pour les grandes (composition bidisperse). La proportion de petites particules est de 70%. Les 3 vues du haut correspondent à 3 configurations initiales différentes (chargement nul). La compacité vaut alors $\Phi = 0,78$. Les trois vues du bas correspondent à des états comprimés avec pour chacun une compacité $\Phi = 0,88$, la configuration initiale étant celle de la vue juste au dessus.

l'état initial $\Phi = 0,78$ et un état comprimé $\Phi = 0,88$ de ces trois systèmes. En parallèle, trois tests de compression uniaxiale numérique sont aussi réalisés en utilisant les mêmes configurations initiales que celles des systèmes expérimentaux. Répéter les expériences de compression pour trois systèmes équivalents, mais avec des configurations initiales différentes permet d'avoir une idée de l'influence de la configuration initiale sur les paramètres mesurés, et ainsi d'avoir quelques éléments statistiques. Dans la suite, certaines grandeurs

seront moyennées sur ces trois états initiaux afin d'obtenir des informations moins bruitées et un comportement plus général de ce milieu granulaire.

Un des paramètres importants à déterminer dans le système expérimental est le coefficient de frottement. Des mesures d'angle de frottement μ_f effectuées sur plan incliné ne nous ont pas permis d'obtenir une mesure reproductible, car la quantité et la répartition d'huile sont cruciales. Nous avons dû renoncer à mesurer indépendamment μ_f . Dans la suite, ce paramètre est d'abord laissé libre : nous avons effectué plusieurs tests numériques en changeant le coefficient de frottement $\mu_f = [0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 7; 1]$, pour retenir celui qui correspond le mieux aux résultats obtenus avec le système expérimental. Notons qu'expérimentalement, la même quantité d'huile est ajoutée dans les mêmes conditions, si bien que l'on s'attend à retrouver le même coefficient de frottement μ_f pour les trois configurations différentes.

3.3.1 Compacité et déformation compressive cumulée

La compacité Φ du système expérimental est mesurée directement à partir des images brutes issues du scanner. Le logiciel *ImageJ* nous a permis de mesurer simplement la surface totale de la boîte et la surface des particules dans la boîte pour en déduire la compacité (définie ici comme étant le rapport entre la surface totale des particules projetée sur le plan horizontal et de la surface horizontale totale du système) pour les différents niveaux de compression. Par ailleurs, le déplacement δ du piston est aussi mesuré directement à partir de ces images brutes, ce qui permet de calculer la déformation compressive cumulée ε du système, définie par :

$$\varepsilon = \left| \ln \left(\frac{\text{longueur finale}}{\text{longueur initiale}} \right) \right| = -\ln \left(1 - \frac{\delta}{D} \right). \quad (3.4)$$

La valeur absolue est là pour obtenir une grandeur positive lorsque le système est comprimé.

La figure 3.11 présente la compacité Φ en fonction de la déformation compressive cumulée ε des systèmes numériques et expérimentaux. Les tests numériques sont simulés avec plusieurs coefficients de frottement. Le même coefficient de frottement est pris pour le contact entre particules et le contact paroi-particule. A partir de ces comparaisons, il ressort :

- que la courbe compacité-déformation dépend comme attendu du coefficient de frottement,
- que la simulation avec le coefficient de frottement $\mu_f = 0, 3$ représente mieux le comportement du système expérimental.

En conclusion, nous obtenons un accord très satisfaisant entre expérience et simulation en prenant un coefficient de frottement $\mu_f = 0, 3$. Notons que nous ne prétendons pas avoir ici déterminé une valeur précise du coefficient de frottement, étant donné que l'effet de ce dernier sur la compacité reste modeste.

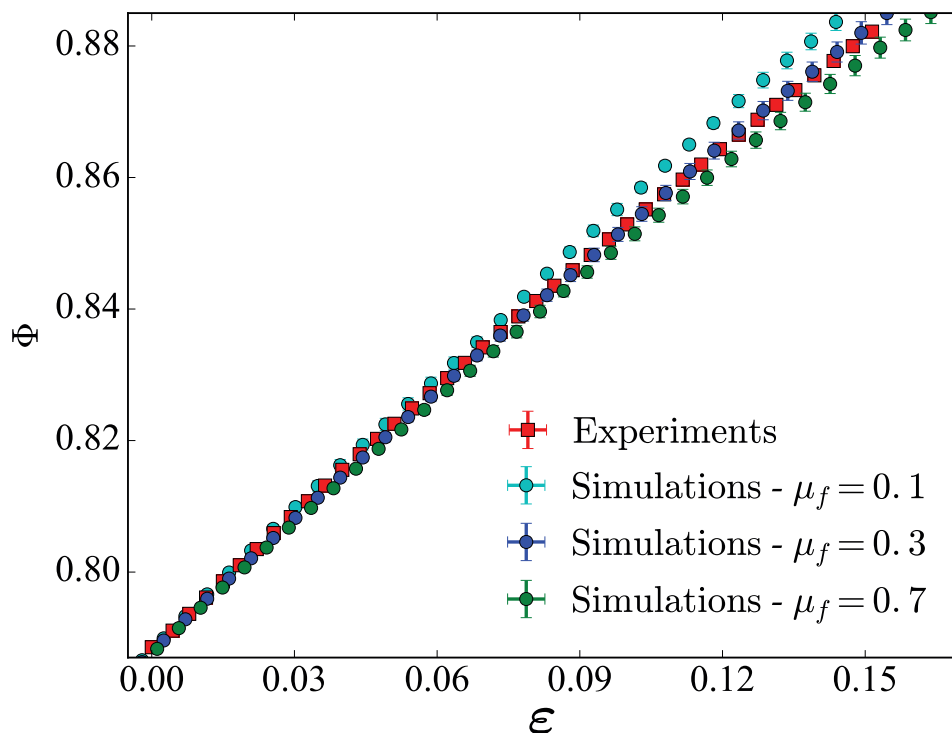


FIGURE 3.11 – Comparaison des résultats expérimentaux (carrés rouges) et numériques (disques pleins) donnant la compacité en fonction de la déformation cumulée lors de la compression d'un assemblage de particules néo-hookéennes. Les tests numériques sont effectués avec plusieurs coefficients de frottement. Nous montrons ici les résultats pour les coefficients de frottement $\mu_f = 0, 1$, $\mu_f = 0, 3$ et $\mu_f = 0, 7$.

3.3.2 Force de compression globale

Nous nous intéressons maintenant à une deuxième grandeur macroscopique associée à la compression : la force appliquée au piston. Cette dernière peut être tracée indifféremment en fonction de la déformation compressive cumulée ε , ou en fonction de la compacité Φ précédemment déterminée

Les évolutions de la force f de compression, expérimentale et numérique, en fonction de la compacité sont présentées à la figure 3.12(a). La force expérimentale est mesurée par le capteur de force lié au piston. La force f devant être (dans la limite des grands systèmes) proportionnelle à la longueur L du piston, à la hauteur H d'une particule, et au module de cisaillement μ , nous avons adimensionnalisé f par $LH\mu$.

Nous observons un décalage important entre la force expérimentale et les forces numériques obtenues pour différents coefficients de frottement testés. Le décalage le moins mauvais semble être pour $\mu_f = 0, 7$, et il pourrait être tentant de tester des coefficients de frottement encore plus grands. Cependant, nous avons vu précédemment qu'un tel coefficient est déjà trop grand pour être compatible avec la courbe compacité-déformation mesurée

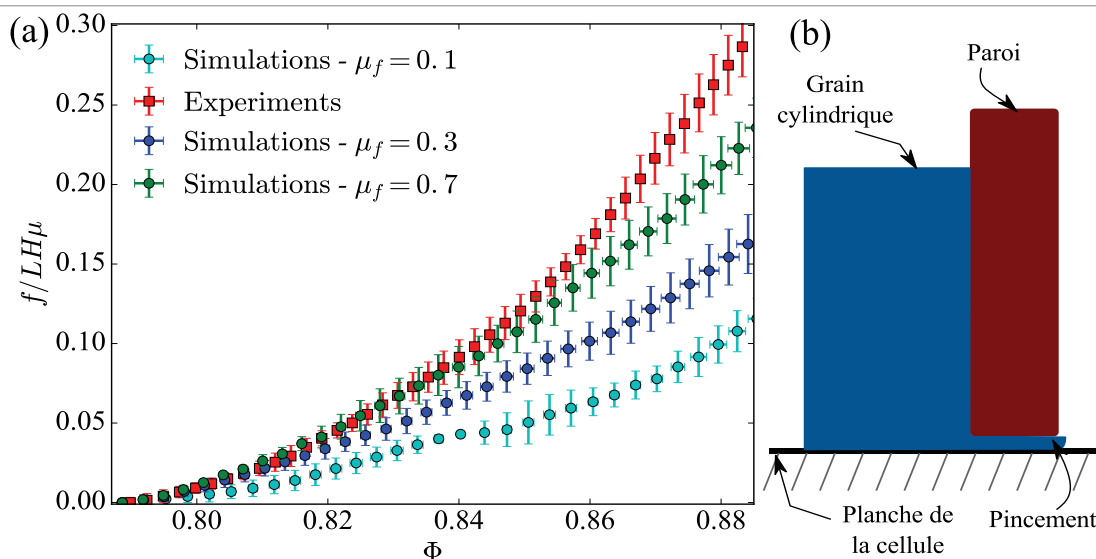


FIGURE 3.12 – (a) Comparaison entre la force expérimentale mesurée par le capteur de force (symboles carrés rouges) et la force issue des simulations numériques (symboles disques pleins bleus) lors de la compression uniaxiale d'un assemblage de 100 particules néo-hookéennes, en fonction de la compacité du système. Les tests numériques sont simulés avec différents coefficients de frottement : $\mu_f = 0,1$, $\mu_f = 0,3$ et $\mu_f = 0,7$. (b) Schéma pour expliquer le pincement des particules qui peut se produire au contact des parois.

expérimentalement. Nous expliquons ce désaccord par une mauvaise interprétation de la mesure réalisée par le capteur de force lié au piston. En effet, les particules déformables peuvent s'introduire en partie dans le mince interstice séparant le plancher du piston. De ce pincement résulte un blocage des particules qui ne sont alors plus correctement lubrifiées (figure 3.12(b)). Les forces étant transmises au piston par l'intermédiaire de ces particules pincées, nous en déduisons que la mesure de la force subie par le piston n'est pas égale à la force de compression qui s'exerce sur le milieu granulaire au-delà des grains qui sont directement en contact avec le piston. Nous devons donc nous résoudre à ne pas interpréter la force mesurée sur le piston comme étant la force de compression s'exerçant sur le milieu granulaire.

3.3.3 Énergie de déformation du système

Nous venons de voir qu'il n'est pas possible d'utiliser la force mesurée par le capteur de force pour comparer les résultats expérimentaux aux résultats numériques, car la force est déterminée uniquement par le contact entre les particules et le piston, et ce contact est biaisé par un pincement local des particules. Ici, nous nous intéressons à une troisième grandeur macroscopique, l'énergie de déformation stockée dans les particules constituant le système. Cette énergie est égale à l'intégrale de la densité d'énergie de déformation calculée sur le domaine constitué par l'ensemble des particules. Le poids relatif des zones pincées

sous les parois est ainsi largement diminué par rapport à ce qu'il était lors de la mesure de la force. La densité d'énergie de déformation est déterminée expérimentalement à partir du champ de déformation calculé par corrélation d'images, en utilisant la méthode établie à la section 2.2.1.

La technique de corrélation d'images numériques calcule difficilement le déplacement lorsque qu'une particule s'est déplacée avec une rotation d'angle important, ou si la zone analysée dans l'image représentant l'état final manque de contraste pour que l'algorithme puisse détecter finement les nouvelles positions. Dans ce cas, on obtient des valeurs de déplacement inexactes qui conduisent à des valeurs erronées des déformations. Pour gommer l'effet de ces erreurs sur le résultat expérimental final, nous avons établi un critère basé sur les valeurs du premier invariant I_1 (Eq. (1.7)). I_1 étant calculé pour chaque point de l'image par DIC, nous constatons qu'en un nombre limité de points, sa valeur est trop grande pour être réaliste (voir la particule représentée à la figure 3.13) et en d'autres points, elle paraît tout à fait juste. Notre approche est la suivante : le nombre de points pour lesquels la valeur de I_1 est soit aberrante soit suspecte étant limité, nous calculons la densité d'énergie de déformation moyenne de chaque particule en excluant toute zone où la valeur de I_1 excède une valeur seuil I_1^* . Nous calculons ensuite l'énergie de cette particule en multipliant cette énergie moyenne par le volume total de la particule. En sommant sur l'ensemble des particules, nous en déduisons *une énergie de déformation partielle*. Cette énergie de déformation partielle dépend à priori de la valeur de I_1^* .

La figure 3.13 montre l'énergie de déformation partielle $\tilde{\mathcal{E}}$ en fonction du seuil I_1^* de l'invariant I_1 , pour différentes valeurs de compacité Φ . En l'absence de déformation $I_1 = 2$ pour chaque particule. Dans le but d'obtenir un encadrement de la valeur de l'énergie de déformation du système, nous prenons :

- comme valeur minimale de l'énergie, la valeur de l'énergie de déformation partielle calculée en prenant $I_1^* = 2,2$. En effet, lorsque la DIC conduit à une valeur de I_1 inférieure à 2,2, les champs de déplacement sont correctement calculés. Ne considérant pas les contributions des zones plus déformées pour lesquelles I_1 serait supérieur à 2,2, nous obtenons une borne inférieure pour l'énergie ;
- comme valeur maximale de l'énergie, la valeur de l'énergie de déformation partielle calculée en prenant $I_1^* = 5$. Il est en effet exclu que I_1 atteigne des valeurs aussi grandes que 5. La valeur de 5 est ici choisie arbitrairement de façon à avoir de la marge. En prenant par exemple $I_1^* = 4$, nous aurions diminué la valeur de la borne maximale et donc les barres d'erreur.

L'évolution de l'énergie de déformation ainsi déterminée est tracée en fonction de la compacité à la figure 3.14. Ces résultats sont obtenus en calculant la moyenne de l'énergie de déformation sur les trois configurations présentées précédemment.

L'énergie de déformation calculée à partir des simulations numériques peut ainsi être comparée avec le résultat expérimental. Le meilleur accord est trouvé pour le coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$, comme représenté à la figure 3.14. L'encart présente une comparaison entre le résultat expérimental et des simulations numériques avec les coefficients de frottement $\mu_f = 0,1$ et $\mu_f = 0,7$. On remarque un décalage entre ces résultats, ce qui indique

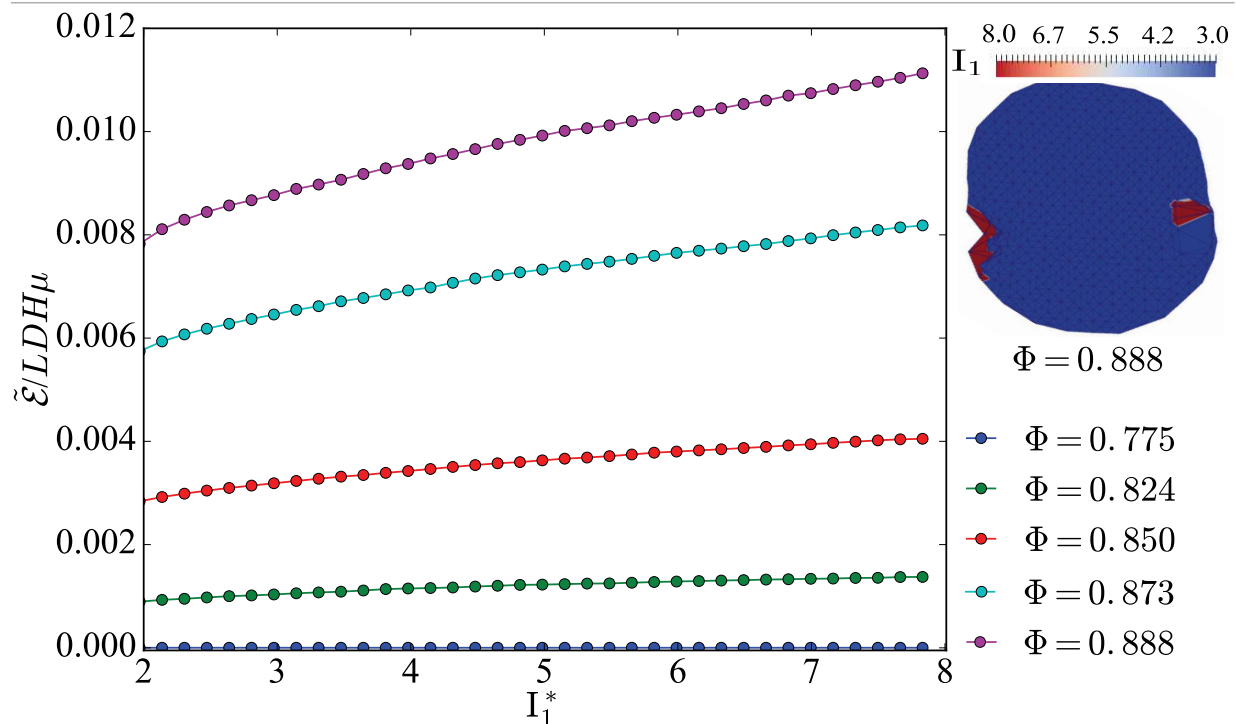


FIGURE 3.13 – Énergie élastique partielle en fonction du seuil I_1^* de l'invariant I_1 pour déterminer l'énergie de déformation dans le système expérimental pour différents niveaux de compacité ($\Phi = 0,775$; $0,824$; $0,850$; $0,873$ et $0,888$). La particule déformée représentée sur la droite est extraite d'un assemblage de compacité $\Phi = 0,888$, et fait apparaître des zones dans lesquelles le calcul de l'invariant I_1 par DIC a échoué.

que ces coefficients de frottement ($\mu_f = 0,1$ et $\mu_f = 0,7$) ne conviennent pas. La valeur trouvée pour le coefficient de frottement, $\mu_f = 0,3$, est cohérente avec le résultat issu des courbes compacité-déformation. S'agissant de l'énergie, la sensibilité avec le coefficient de frottement est nettement plus marquée que lors de l'étude de la compacité, et permet de conclure que le coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$ peut être retenu.

Dans la suite de cette étude comparative entre résultats numériques et expérimentaux, le coefficient de frottement sera fixé (sauf indication contraire) à $\mu_f = 0,3$ dans les simulations numériques.

Nous nous sommes jusqu'à présent intéressés à des grandeurs définies à l'échelle macroscopique du système : déformation cumulée, compacité, force, énergie de déformation. Nous allons maintenant nous intéresser à des grandeurs se manifestant à l'échelle des particules.

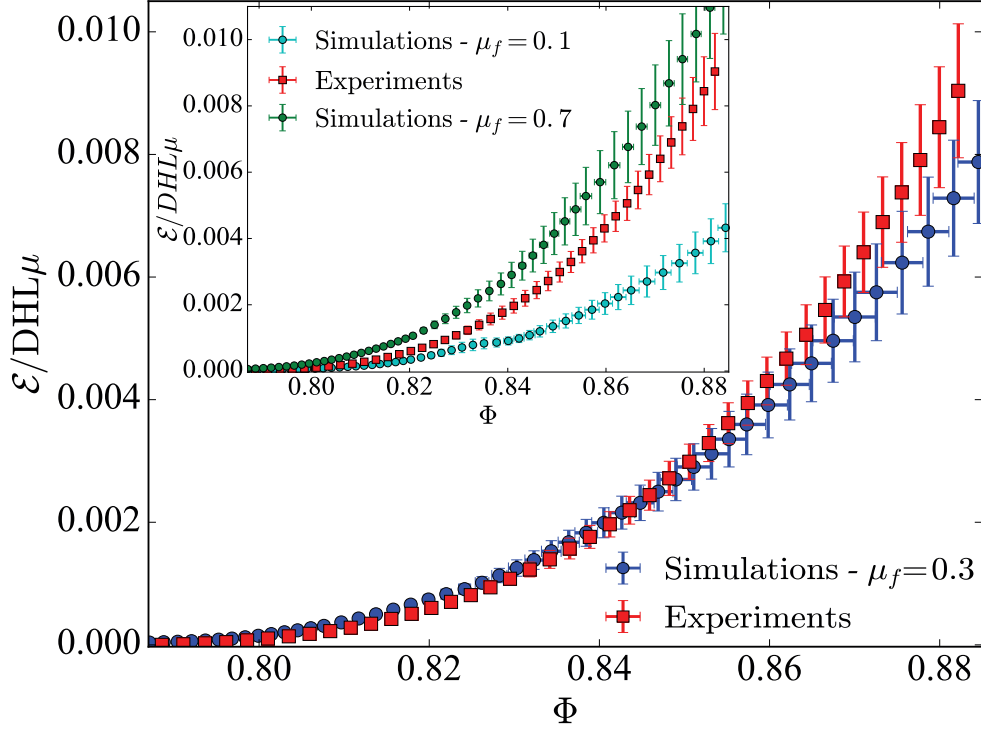


FIGURE 3.14 – Énergie de déformation totale en fonction de la compacité lors de la compression d'un assemblage de particules néo-hookéennes. Les données expérimentales sont indiquées par les symboles carrés rouges ; les données numériques, calculées avec le coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$, sont représentées par les disques bleus. Encart : comparaison expérience-numérique de l'énergie de déformation en prenant cette fois des coefficients de frottement $\mu_f = 0,1$ (disques cyans) et $\mu_f = 0,7$ (disques verts).

3.3.4 Évolution de la surface et de la forme des particules

La figure 3.15 présente trois instantanés de la compaction uniaxiale d'un assemblage de particules néo-hookéennes obtenus par simulation numérique (figures du haut) et obtenus expérimentalement par DIC (figures du bas). Ces deux systèmes (numérique et expérimental) ont une même configuration initiale. Le système numérique est simulé avec un coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$. Le code de couleurs, identique dans les deux cas, représente la densité d'énergie de déformation Ψ (qui est d'autant plus grande que la couleur s'éloigne du bleu et se rapproche du rouge). En raison de la nature intrinsèquement désordonnée de ces systèmes et de leur grande sensibilité aux fluctuations, simulations numériques et expériences ne conduisent pas à des états identiques à l'échelle des particules individuelles, comme le montrent les positions différentes des particules ou des chaînes de force. Afin de pouvoir comparer utilement ces deux systèmes (numérique et expérimental) à l'échelle des particules, nous allons nous intéresser à des grandeurs moyennées sur les systèmes.

L'aire de la surface inférieure (horizontale) des particules du système expérimental est

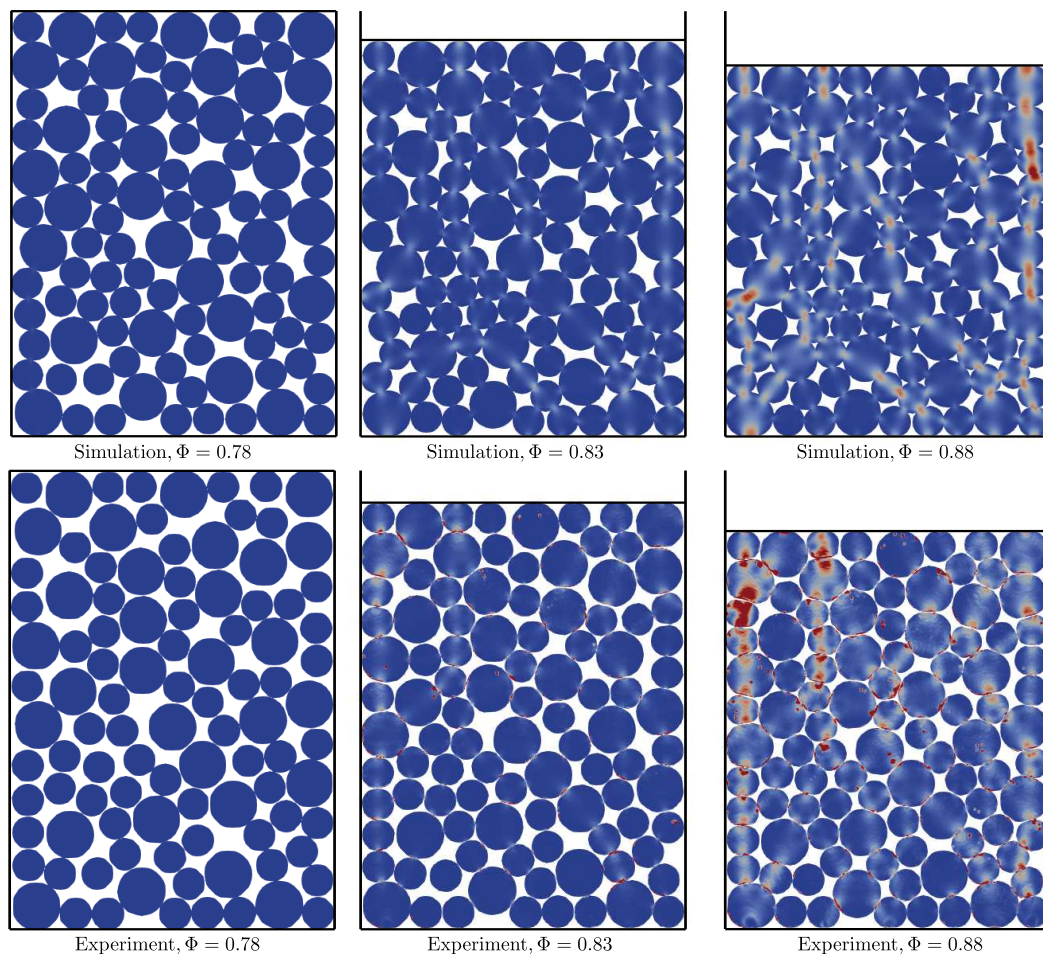


FIGURE 3.15 – Instantanés pris lors de la compression uniaxiale d'un assemblage de particules élastiques, lorsque la compacité vaut $\Phi = 0,78; 0,83$ et $0,88$. Le code de couleurs est la valeur de la densité d'énergie de déformation Ψ calculée à partir des champs de déformations et des équations constitutives des matériaux considérés. La densité d'énergie de déformation est d'autant plus grande que l'on passe du bleu (densité d'énergie nulle) au rouge. Les trois clichés représentés en haut sont issus d'une simulation numérique (coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$). Les trois clichés du bas sont issus des expériences analysées par DIC.

susceptible de décroître au cours de la compression en raison de la possibilité qu'ont les particules de se déformer dans la troisième dimension (verticale) de l'espace. C'est pour cette raison que nous avons été conduits à considérer des particules avec un coefficient de Poisson égal à $0,34$ dans les simulations numériques effectuées sous l'hypothèse des déformations planes. La figure 3.16 présente l'évolution du rapport entre l'aire de la surface inférieure des particules au cours de la compression et l'aire de la surface inférieure initiale des particules, en fonction de la compacité du système, obtenu expérimentalement et par les

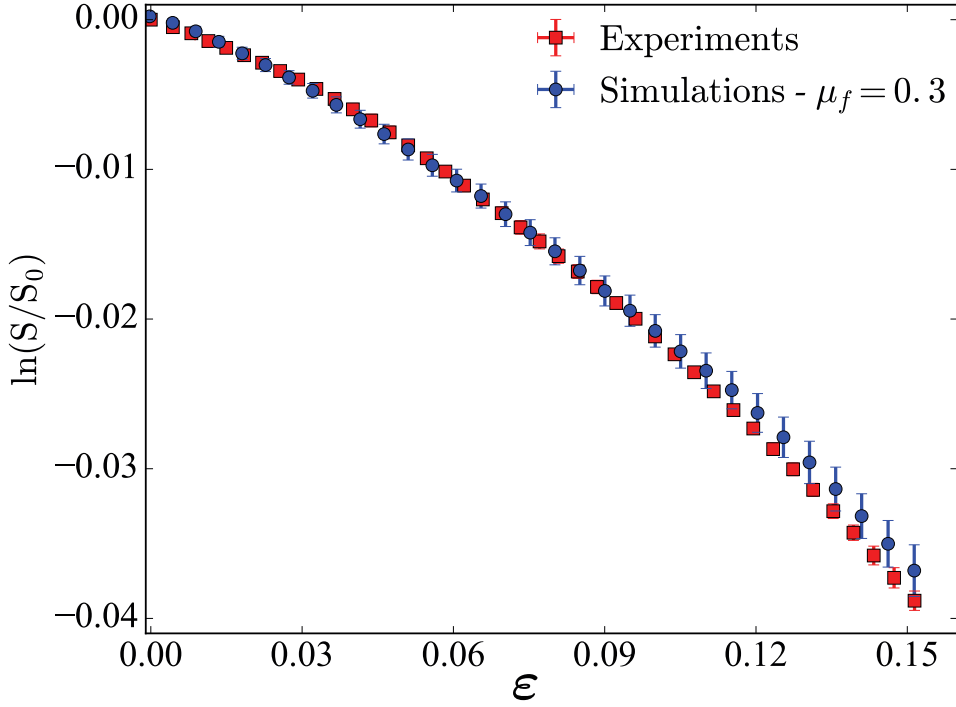


FIGURE 3.16 – Rapport entre la surface (inférieure) totale des particules et la surface (inférieure) totale initiale de ces particules en fonction de la compacité du système, issu des simulations numériques (disques bleus) et des systèmes expérimentaux (carrés rouges).

simulations numériques. La surface des particules expérimentales est obtenue à partir des images brutes de la projection des surfaces inférieures dans la plan du scanner (utilisation du logiciel *ImageJ*). On remarque une diminution de la surface des particules dans ces deux systèmes.

L'accord entre simulations numériques et expériences est très satisfaisant pour des déformations petites à modérées. L'écart observé pour des déformations compressives cumulées ε supérieures à 10% vient de l'hypothèse des déformations planes avec le coefficient de Poisson effectif : la correspondance, qui a été établie pour des petites déformations (voir la section 2.2.1), est de moins en moins précise lorsque les déformations de chaque particule augmentent. On peut néanmoins conclure que les simulations permettent de retrouver semi-quantitativement le comportement du système réel.

Les particules du système expérimental étant initialement cylindriques (à base circulaire), leur projection dans le plan du scanner dans l'état initial est circulaire. Cette forme évolue ensuite au cours de la compression (de même pour le système numérique). Afin de caractériser le changement de forme des particules, nous introduisons un indice de circularité de la surface inférieure, C , défini pour une particule donnée par

$$C = \left\langle \frac{\frac{1}{4\pi} P_p^2 - S_p}{S_p} \right\rangle, \quad (3.5)$$

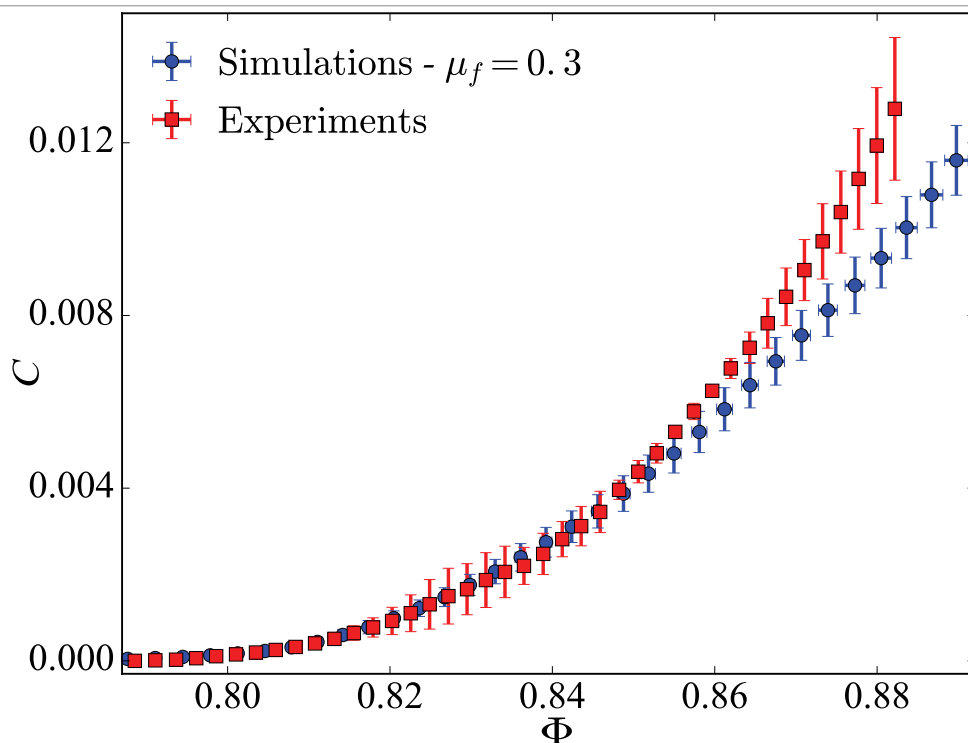


FIGURE 3.17 – Comparaison de l'évolution de la circularité moyenne des particules C entre les systèmes numérique et expérimental, en fonction de la compacité.

où P_p est le périmètre et S_p est l'aire de la surface inférieure de la particule considérée. Pour une surface circulaire l'indice C est égal à 0. Il augmente au fur et à mesure que la forme s'éloigne de celle du cercle.

P_p et S_p sont obtenus, pour les particules du système expérimental, à partir des positions des points de corrélation calculées par DIC. L'évolution du changement de forme des particules dans ce milieu numérique et expérimental suit une même tendance. Au dessus de la compacité $\Phi \geq 0,85$, une différence apparaît entre ces deux évolutions. Cet écart peut s'expliquer par la présence des zones dans lesquelles l'estimation des valeurs du déplacement calculées par l'algorithme DIC est erronée, comme expliqué à la section 3.3.3.

3.3.5 Coordinance

La coordinance (ou le nombre de coordination) Z est le nombre moyen de contacts actifs par particule impliquée dans la transmission de contraintes. Comme signalé au chapitre 1, il s'agit d'une donnée micro-structurale importante. Pour déterminer Z , il faut donc considérer toutes les particules qui sont en contact avec d'autres particules. Pour chacune de ces particules, on compte le nombre de voisins en contact avec elle. Finalement, on calcule la moyenne du nombre de voisins en contact de toutes les particules impliquées dans la transmission de contraintes. Les particules n'ayant aucun contact n'ont donc aucune

contribution. Dans ce qui précède, on entend par *contact* une occurrence où les particules se touchent en exerçant entre elles une force non nulle. De plus, nous considérons toujours des états statiques.

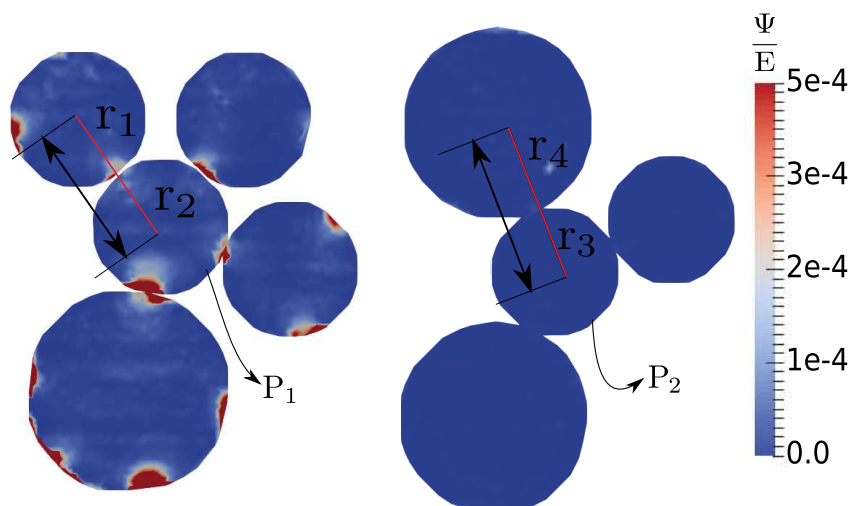


FIGURE 3.18 – Deux groupes différents de particules extraits d'un assemblage de particules d'un système expérimental, à la compacité $\Phi = 0,82$. Le code de couleurs correspond au rapport entre la densité d'énergie de déformation et le module de Young du matériau Ψ/E . En plaçant un seuil de détection des contacts pour $\Psi/E > 1,7e-4$, des particules du groupe de gauche apparaissent bien en situation de contact, contrairement aux particules du groupe de droite.

Pour déterminer expérimentalement Z , nous nous basons sur le champ de densité d'énergie de déformation pour détecter les contacts. La densité d'énergie de déformation calculée par DIC n'étant jamais rigoureusement nulle en raison de bruit expérimental, nous avons défini un seuil de densité d'énergie de déformation Ψ^* supérieur au bruit afin de déterminer si, lorsque deux particules se touchent géométriquement, il s'agit ou pas d'un contact avec force. Nous avons été conduit à prendre $\Psi^*/E = 1,7e-4$. La figure 3.18 montre deux groupes différents de particules au sein desquels certaines particules se touchent géométriquement. En analysant la densité d'énergie de déformation, nous remarquons que les particules du groupe de droite sont flottantes et doivent donc être ignorées lors du décompte de la coordinance, alors que les particules du groupe de gauche se touchent dans des contacts avec forces non nulles, et doivent donc être comptabilisées. Cette procédure permet donc, grâce au champ de déformation calculé par DIC, de remonter à la coordinance des systèmes expérimentaux. Nous avons vérifié qu'un changement de la valeur de Ψ^* n'entraîne pas de modification significative de la valeur de Z .

La procédure appliquée au système expérimental pour déterminer la coordinance n'est pas directement applicable au système numérique. En effet, si le système expérimental est imagé dans des états parfaitement statiques avec tout le système immobile, des vitesses résiduelles subsistent dans le système numérique lorsque la compacité est suffisamment

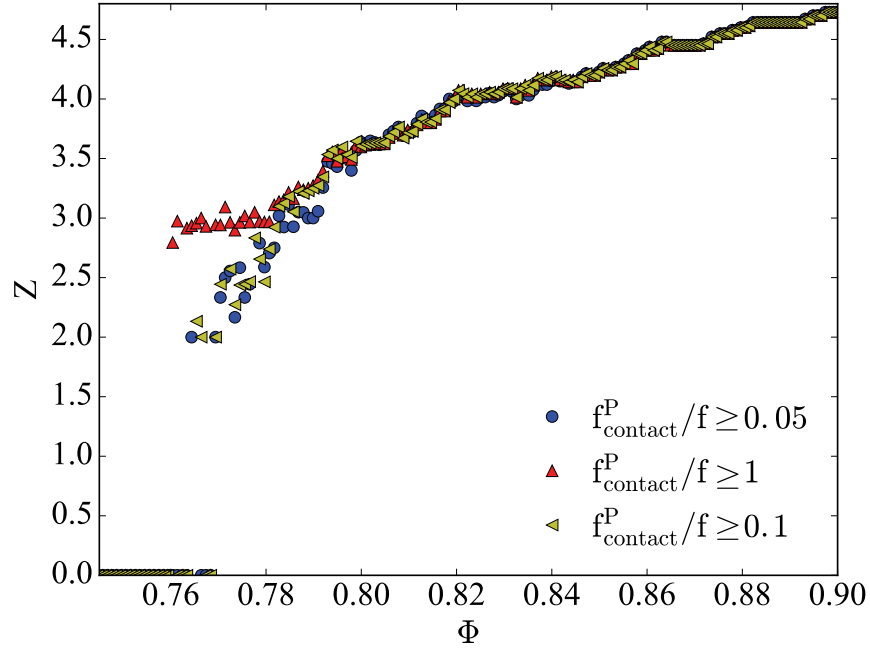


FIGURE 3.19 – La coordinance Z d'un système numérique en fonction de la compacité Φ calculée avec différents seuils pour le rapport entre la somme de force de contact de chaque particule et la force de compression globale.

faible pour que certaines particules puissent encore se mouvoir librement. De ce fait, même si l'énergie cinétique est très faible comme l'a montré la figure 3.8, certaines particules peuvent ne pas être parfaitement à l'équilibre. Pour éviter de compter les contacts dont l'origine de la force ne seraient pas statique mais dynamique (particules en train de rebondir l'une sur l'autre), nous avons été amenés à définir un critère d'équilibre sur les forces. Lorsque deux particules ont au minimum deux nœuds en contact, nous calculons alors la résultante des forces qui s'appliquent sur chacune de ces particules. Si une des deux résultantes a une norme supérieure à un seuil f_p^* alors ce contact implique au moins une particule qui n'est pas à l'équilibre (en train de rebondir). Cette particule et le(s) contact(s) associé(s) ne sont donc pas comptabilisés pour le calcul de la coordinance. Afin d'obtenir un même critère sur la force seuil pour l'ensemble de la compression uniaxiale du système, le seuil f_p^* est pris proportionnel à la force cumulée de compression. Nous montrons à la figure 3.19 que la coordinance ainsi obtenue ne change pas significativement pour des facteurs de proportionnalité entre f_p^* et la force globale compris entre 0,05 et 0,1.

La coordinance Z , numérique et expérimentale, est présentée en fonction de la compacité à la figure 3.20 pour une configuration initiale unique. La simulation numérique est effectuée en prenant $\mu_f = 0,3$. Nous observons un accord quantitatif entre les deux approches ; Z augmente lorsque Φ augmente. Cette augmentation résulte de mécanismes que l'on peut séparer comme suit : à faible compacité, les particules subissent des réarrangements pour trouver des états d'équilibre dans la structure. Elles obtiennent donc facilement les nou-

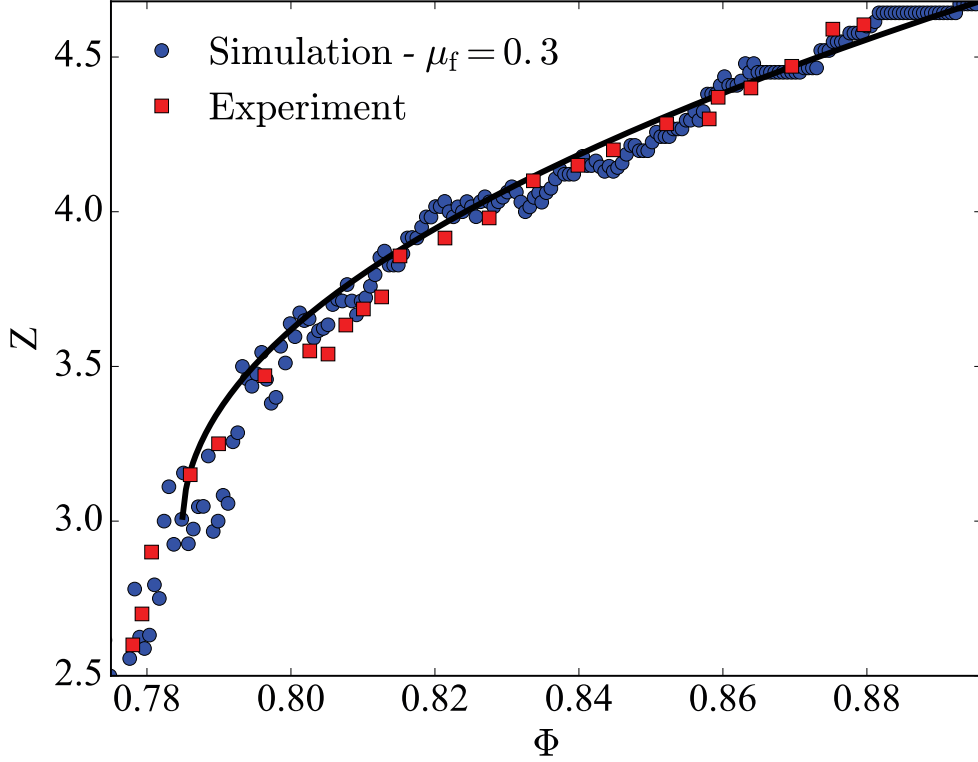


FIGURE 3.20 – Évolution de la coordinance Z numérique et expérimentale en fonction de la compacité Φ . Ce résultat est obtenu à partir d'une seule configuration initiale. La ligne continue noire correspond à la relation (3.6) avec $\Phi_T = 0.785 \pm 0.005$, $\Phi_1 = 0.9$, $Z_T = 3$, $Z_1 = 4,72$.

veaux voisins. À une compacité plus élevée, Z augmente grâce à l'effet de la déformation des particules élastiques.

L'étude de la coordinance en fonction de la compacité a fait l'objet d'un grand nombre de travaux sur des systèmes variés comme des émulsions, des mousses et des assemblages de particules solides (Majmudar et al. (2007); Durian (1995); van Hecke (2010); O'Hern et al. (2003)). Les données de la figure 3.20 sont compatibles avec la relation trouvée de façon récurrente dans la littérature pour des systèmes variés :

$$Z = Z_T + K\sqrt{\Phi - \Phi_T}, \quad (3.6)$$

où Φ_T est la valeur de la compacité à la transition de rigidité, le pré-facteur K est constant, et Z_T est la coordinance lorsque $\Phi = \Phi_T$. Comme expliqué à la section 3.3.2, nous ne pouvons pas utiliser la force mesurée par le capteur de force pour déterminer la transition de rigidité du système expérimental. Nous prenons donc $Z_T = 3$ ce qui correspond à la condition d'isostaticité (voir la section 1.3.3). Ce paramètre étant fixé, nous avons réalisé un ajustement de l'équation (3.6) qui conduit à $\Phi_T = 0,785 \pm 0,005$. Nous trouvons que $K = (Z_1 - Z_T)/\sqrt{(\Phi_1 - \Phi_T)}$ avec $\Phi_1 = 0,9$ et $Z_1 = 4,72$.

Ce résultat complète les données de la littérature pour des assemblages de particules élastiques avec des compacités largement plus grandes que Φ_T . En effet, les travaux antérieurs font état d'expériences réalisées sur des systèmes à particules élastiques déformables sur une plage très étroite de compacité (Majmudar et al. (2007); Makse et al. (2000)), ou de simulations basées sur des approximations de Hertz-Mindlin qui ne peuvent décrire correctement le comportement des particules élastiques soumises à de grandes déformations (O'Hern et al. (2002, 2003); Shundyak et al. (2007); van Hecke (2010)).

3.3.6 Répartition de l'énergie

Nous avons calculé à la section 3.3.3 l'énergie de déformation totale de l'ensemble du système, en fonction de la déformation ou de la compacité. Nous nous intéressons ici à la distribution de la densité d'énergie de déformation moyenne *entre les particules*. Chaque particule de l'assemblage possède une énergie de déformation. En divisant cette énergie de déformation par le volume de la particule, nous obtenons la densité d'énergie de déformation moyenne de cette particule, que l'on note Ψ_p . L'indice p indique qu'il s'agit d'une variable non pas relative à l'ensemble du système, mais à chaque particule. Ψ_p est nulle lorsque la particule n'est pas déformée, et augmente avec la déformation élastique. L'énergie de déformation moyenne particulaire $\langle \Psi_p \rangle$ se présente donc comme une mesure de la déformation cumulée des particules du système.

Les hétérogénéités du système font que, dans un état donné, Ψ_p varie d'une particule à l'autre. L'hétérogénéité de la densité d'énergie de déformation particulaire est d'autant plus grande que l'écart type-relatif ("*relative standard deviation*" en anglais) de Ψ_p , défini par

$$\sqrt{\frac{\langle \Psi_p^2 \rangle - \langle \Psi_p \rangle^2}{\langle \Psi_p \rangle^2}},$$

est grand.

La figure 3.21 présente l'écart-type relatif de la densité d'énergie de déformation particulaire dans des assemblages numériques et expérimentaux en fonction de la compacité. L'accord entre les deux est quantitativement bon, excepté pour les compacités inférieures à 0,79. Ceci provient des incertitudes relatives dans le calcul de $\langle \Psi_p \rangle$. En effet, la densité d'énergie de déformation particulaire est en principe égale à 0 pour des compacités inférieures à la compacité de la transition de rigidité. Le système numérique n'étant pas parfaitement à l'équilibre dans ce cas (des vitesses résiduelles subsistent), Ψ_p n'est pas nulle, avec des hétérogénéités associées qui sont responsables de l'écart observé. Pour des compacités plus grandes, les contributions venant des écarts à l'équilibre mécanique sont négligeables, et l'accord avec les expériences devient alors très satisfaisant. Nous observons une diminution significative de l'écart-type relatif de la densité d'énergie de déformation particulaire avec la compacité : le système est de moins en moins hétérogène au fur et à mesure que la compacité augmente au-delà de la compacité critique de rigidité. L'hétérogénéité de la densité d'énergie particulaire subsiste néanmoins sur l'ensemble des compacités testées, et

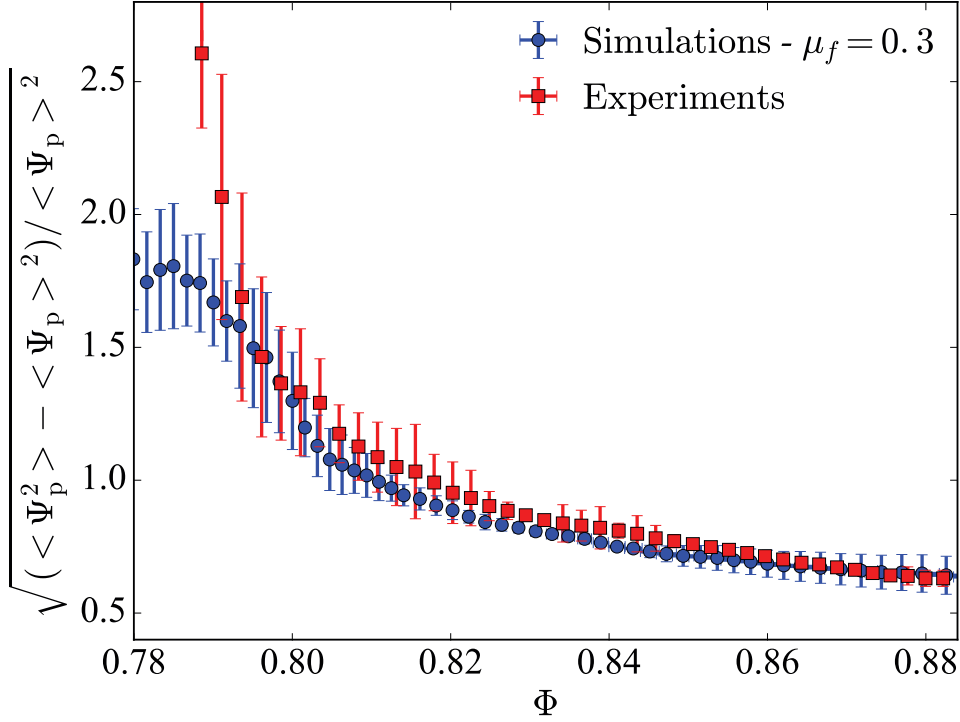


FIGURE 3.21 – Écart-type relatif de la densité d'énergie de déformation particulière dans l'assemblage numérique (disques bleus) et expérimental (carrés rouges) en fonction de la compacité. Les barres d'erreur sur les données des simulations numériques résultent de la dispersion sur les trois configurations différentes testées. Les barres d'erreur des données expérimentales proviennent en plus de la procédure de mesure de l'énergie par DIC (voir la section 3.3.3).

ne semble pas tendre vers 0 (toutes les particules auraient alors la même densité d'énergie de déformation) lorsque la compacité se rapproche de 1.

3.4 Décharge d'un milieu granulaire frottant composé des particules élastiques fortement déformées

L'étude d'un assemblage des particules déformables sous une compression uniaxiale, présentée dans la section précédente, a permis de valider les simulations numériques et de mieux en comprendre le comportement mécanique. Dans cette section, nous nous intéressons au comportement de cet assemblage lors d'une décharge, c'est-à-dire lorsque le piston est déplacé dans le sens inverse, à la suite d'une compression.

Expérimentalement, nous avons soumis un des assemblages qui ont été étudiés dans la section précédente sous compression uniaxiale, à une décharge uniaxiale en conservant la même vitesse (au sens près) du piston, le même incrément et la même durée d'attente que

lors de la compression. Le décharge expérimentale est effectuée à partir de la déformation $\varepsilon = 0,151$, ce qui correspond à la compacité $\Phi = 0,882$. Nous avons conservé la même démarche pour la procédure numérique, en prenant les mêmes paramètres pour la charge et la décharge du système. La vitesse de la paroi est $v_h = -0,1$ m/s.

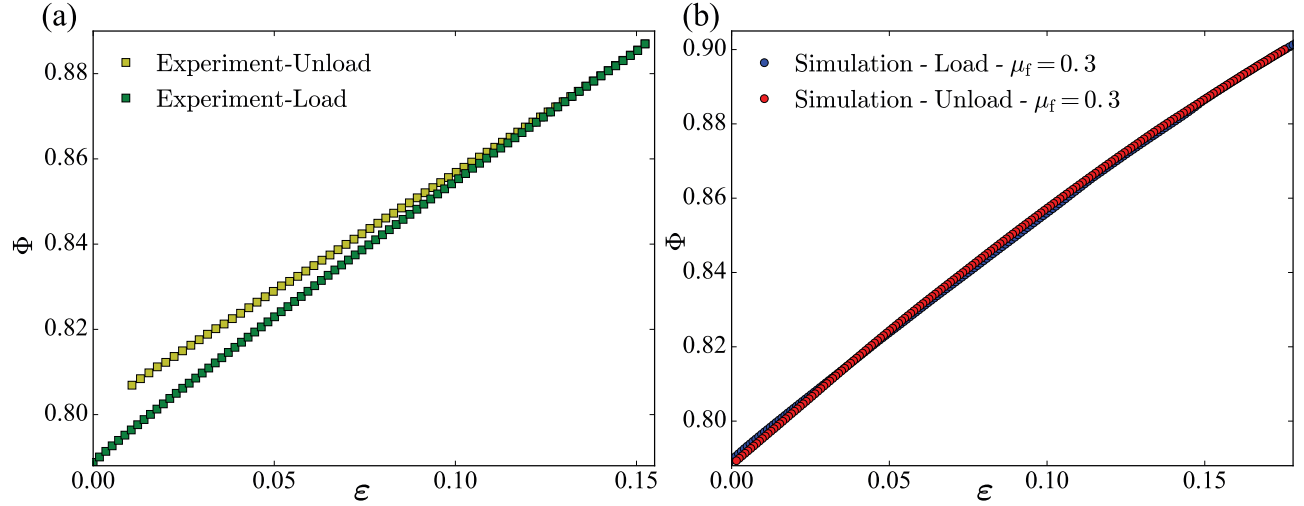


FIGURE 3.22 – Compacité en fonction de la déformation compressive cumulée du système expérimental (a) et numérique (b) pour une charge suivie d’une décharge. Le coefficient de frottement dans la simulation est $\mu_f = 0,3$ (entre les particules, entre les particules et les parois).

La figure 3.22 présente l’évolution de la compacité en fonction de la déformation compressive cumulée des systèmes numérique et expérimental lors d’une charge suivie d’une décharge uniaxiale. L’assemblage numérique est simulé avec le coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$ entre les particules et avec les parois. La compacité et la déformation expérimentales sont obtenues à partir de l’image brute comme expliquée à la section 3.3. Si comme il a déjà été noté, la relation entre la compacité et la déformation est similaire pour les deux systèmes (numérique et expérimental) lors de la charge, un comportement différent est observé lors de la décharge. La compacité lors de la décharge de l’assemblage numérique reste similaire à la compacité lors de la charge pour une valeur donnée du déplacement ε . Par contre, la compacité lors de la décharge du système expérimental est plus élevée que la compacité lors de la charge pour une même déformation. Cette tendance est expliquée par la figure 3.23. La figure 3.23(*droite*) montre l’évolution de la position des particules pendant la décharge lorsque la compacité passe de $\Phi = 0,82$ à $\Phi = 0,81$. On constate qu’un petit groupe de particules a changé de position alors que le reste du système reste pratiquement immobile. Les particules immobiles conservent la même déformation et donc la même compacité locale puisqu’elles n’ont pas bougé. L’existence de telles zones bloquées explique pourquoi la compacité est différente lors de la décharge que lors de la charge. L’état de déformation des particules est montré à la figure 3.23(*gauche*), à la compacité $\Phi = 0,82$. Le code de couleurs représente la composante xy du tenseur de déformation de

Green-Lagrange gauche, **B**. On observe la présence de mini-voûtes formées par certaines particules de la zone immobile.

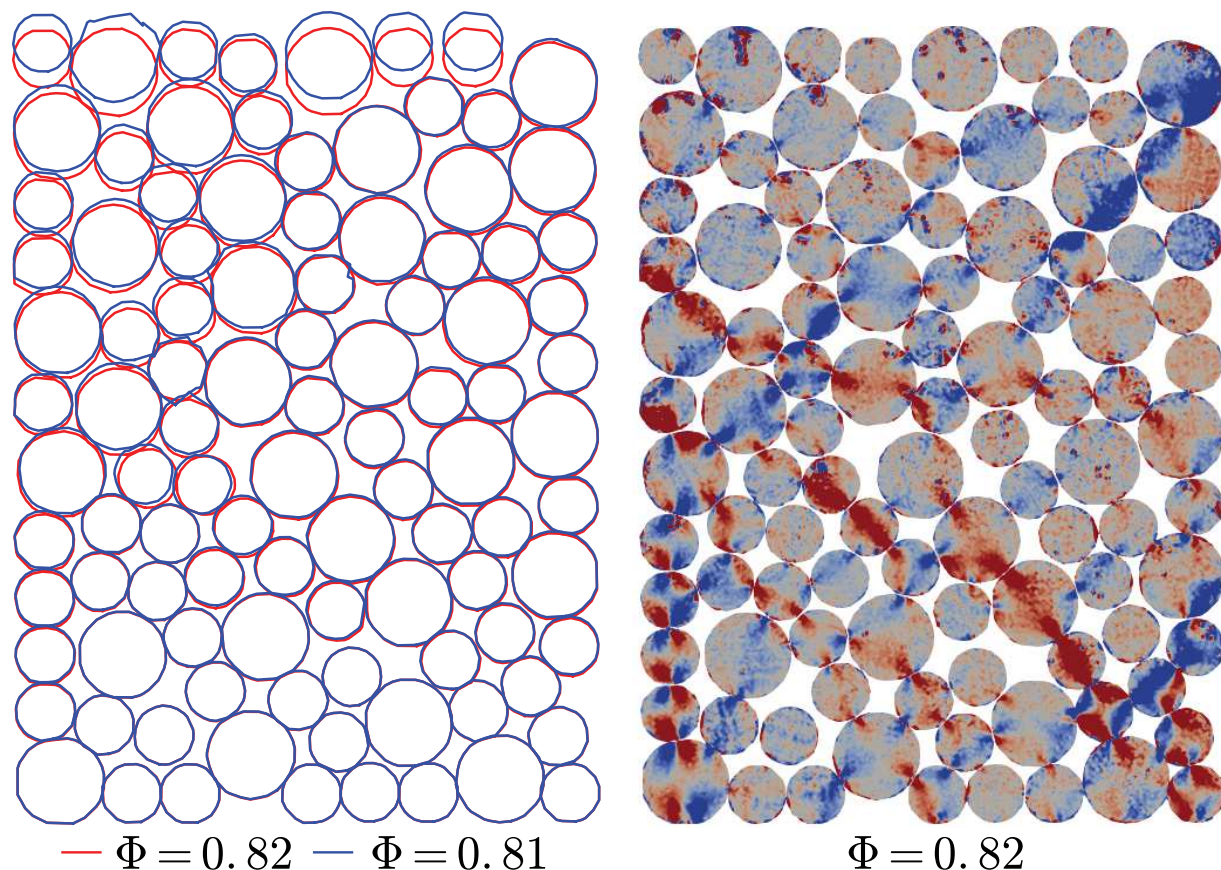


FIGURE 3.23 – *Droite* : Position des particules dans le milieu expérimental aux compacités $\Phi = 0,81$ et $\Phi = 0,82$. *Gauche* : Champ de déformation du système à la compacité $\Phi = 0,82$. Le code couleur est pour la composante xy du tenseur de la déformation Green Lagrange gauche (le rouge correspond à des valeurs positives, le gris une valeur nulle, et le bleu une valeur négative).

La figure 3.24 montre l'évolution de la force de compression (a) et de l'énergie de déformation totale (b) en fonction de la compacité pendant la charge et décharge du système expérimental. La force de décharge est plus petite que celle de charge, alors que l'énergie de déformation totale lors de la décharge est supérieure à celle du système lors de la charge, pour une compacité inférieure de 0,86. Ce phénomène est lié à celui qu'on a observé et expliqué à la figure 3.23. Plusieurs particules du système sont bloquées lors de la décharge et maintiennent leur déformation. C'est la raison pour laquelle on obtient une énergie de déformation plus importante lors de la décharge.

Nous allons étudier maintenant l'évolution de la force et de l'énergie de déformation totale en fonction de la compacité pendant la charge et décharge du système numérique. Elle est présentée à la figure 3.25. Les simulations sont effectuées avec les coefficients de

3. Compression uniaxiale quasi-statique d'un assemblage de cylindres élastiques : Étude numérique et expérimentale

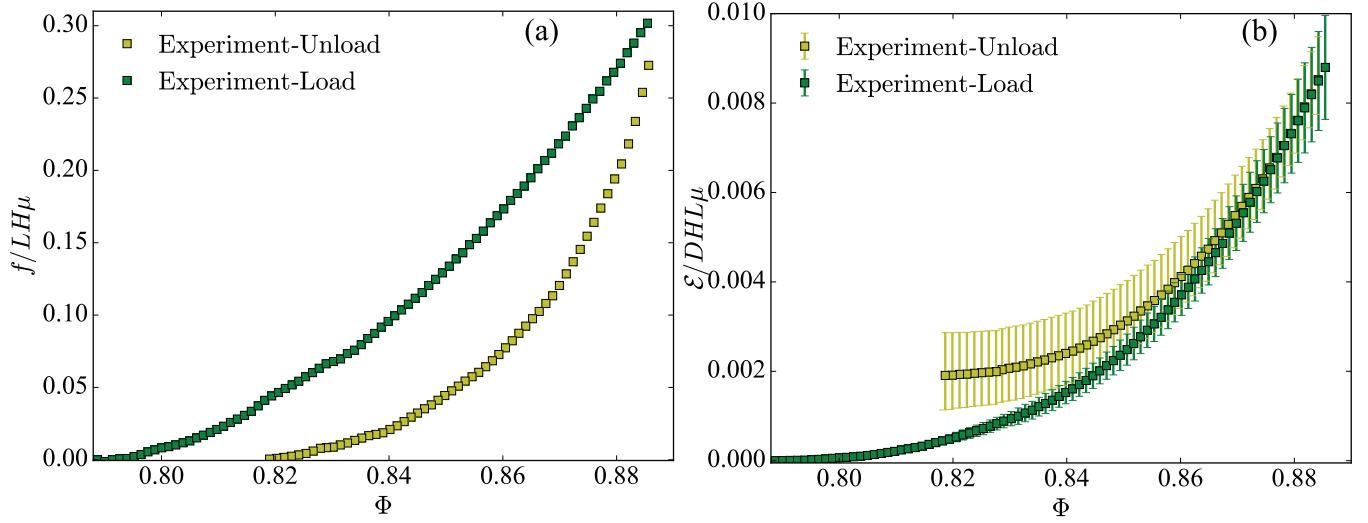


FIGURE 3.24 – Évolution de la force de compression (a) et l'évolution d'énergie de déformation totale (b) en fonction de compacité pendant la charge et la décharge du système expérimental.

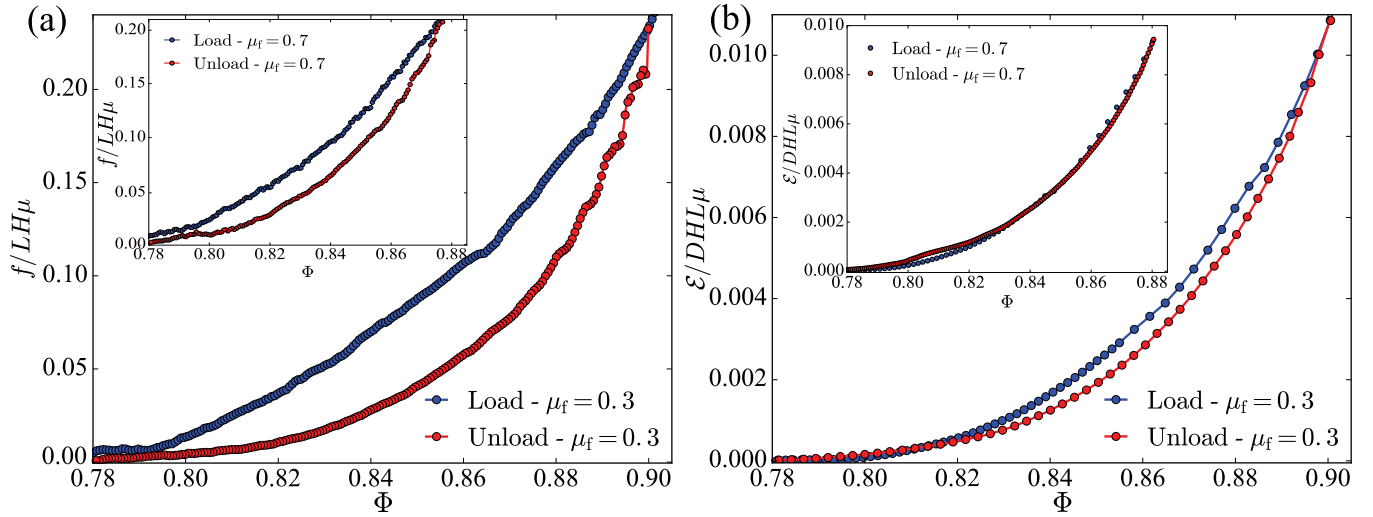


FIGURE 3.25 – Évolution de la force de compression (a) et de l'énergie de déformation totale (b) en fonction de compacité pendant la charge et la décharge du système numérique. Le coefficient de frottement est $\mu_f = 0,3$ (et $\mu_f = 0,7$ dans l'encart).

frottement $\mu_f = 0,3$ et $\mu_f = 0,7$. On constate que la force expérimentale et la force numérique suivent la même tendance pendant la décharge : elles sont à chaque fois inférieures à celles de la charge, aussi bien pour le coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$ que pour $\mu_f = 0,7$. La figure 3.25(b) montre que, dans le système avec $\mu_f = 0,3$, l'énergie de déformation pendant la décharge est légèrement plus petite que celle pendant le charge. Une visualisation de l'état du système montre, en accord avec cette observation, qu'il n'y a pas de

zone dans laquelle les particules sont bloquées. Par contre, lorsqu'on choisit le coefficient de frottement $\mu_f = 0,7$ (encart de la figure 3.25(b)), on constate que pour une compacité inférieure de 0,82, l'énergie de déformation pendant la décharge est sensiblement plus grande que celle pendant la charge. Autrement dit, plusieurs particules dans ce système sont plus déformées pendant la décharge que pendant la charge, pour une même compacité : nous retrouvons la même tendance qu'avec le système expérimental.

Nous avons montré à la section 3.3 que l'assemblage numérique avec un coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$ permet de retrouver le comportement du système expérimental pendant la charge. Mais dans cette section, il apparaît que ce coefficient de frottement ne permet pas de simuler correctement la décharge du système expérimental. Un coefficient de frottement $\mu_f \geq 0,7$ permet de retrouver certaines caractéristiques mais avec des résultats quantitativement bien éloignés de ceux du système réel. Nous interprétons ces observations comme une conséquence du frottement des particules avec les parois de la cellule. Nous pensons que les simulations numériques réalisées avec le coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$ ne font pas apparaître des voûtes suffisamment fortes pour bloquer une partie du système car le frottement entre les particules et les parois est insuffisant. L'hypothèse simplificatrice qui a consisté à prendre le même coefficient de frottement entre les particules et entre les particules et les parois a atteint ici ses limites. De simulations futures, dans lesquelles le coefficient de frottement entre particules et paroi est plus élevé, permettront probablement de conclure.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé le comportement d'un assemblage de plusieurs particules élastiques sous compression uniaxiale d'amplitude finie. La procédure d'analyse des images brutes obtenues à partir du système expérimental a été présentée. En parallèle, nous avons effectué des simulations numériques. La comparaison des paramètres macroscopiques (compacité, force, énergie de déformation totale) montre qu'un coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$ dans les simulations numériques permet de retrouver le comportement du système expérimental. L'analyse de grandeurs "microscopiques", c'est-à-dire à l'échelle des particules, conduit également à un bon accord. Au-delà de cette comparaison, nous avons démontré que la densité d'énergie de déformation particulaire, qui est homogène (car égale à zéro) avant la transition de rigidité redevient progressivement plus homogène au fur et à mesure que la compacité augmente au-delà de la compacité de la transition de rigidité.

Une étude des paramètres macroscopiques du système pendant la décharge est aussi exposée. Nous observons des comportements différents entre les systèmes numérique et expérimental. Nous pensons que ces différences s'expliquent par une mauvaise évaluation du frottement entre les particules et les parois de la cellule. De nouvelles simulations sont nécessaires pour confirmer cette hypothèse.

La charge étant bien décrite par les simulations numériques (parce que les effets de frottement sur les parois sont moins critiques que durant une décharge), nous allons pour-

*3. Compression uniaxiale quasi-statique d'un assemblage de cylindres élastiques : Étude
numérique et expérimentale*

suivre notre étude en analysant les effets de la compressibilité des particules élastiques et les effets du frottement entre particules lors de la charge d'un assemblage de particules élastiques. Cette analyse sera réalisée uniquement sur des systèmes numériques.

Assemblage de disques élastiques : Etude paramétrique

Au chapitre 3, nous avons montré qu'un assemblage numérique de particules élastiques cylindriques ayant un coefficient de Poisson $\nu = 0,34$ permet de reproduire le comportement mécanique et la micro-structure d'un assemblage de cylindres de silicone réticulé lors d'une compression uniaxiale tridimensionnelle. Le coefficient de frottement a été ajusté à $\mu_f = 0,3$, s'appliquant aussi bien entre les particules et entre les particules et les parois. Ceci a permis de valider l'approche numérique proposée, et le choix des paramètres utilisés dans ces simulations. Dans ce chapitre, nous nous intéressons d'une part à l'effet de la compressibilité du matériau constituant les particules, et d'autre part à l'effet du coefficient de frottement, sur le comportement mécanique du milieu granulaire sous compression uniaxiale en analysant ses propriétés macroscopiques et micro-structurales.

Sommaire

4.1	Procédure numérique	91
4.2	Effet de la compressibilité des particules	92
4.2.1	Étude de grandeurs macroscopiques	92
4.2.2	Étude de la micro-structure du système	98
4.3	Effet du coefficient de frottement sur le comportement macroscopique et sur la micro-structure du système	106
4.3.1	Analyse des grandeurs macroscopiques	107
4.3.2	Analyse de la micro-structure	108
4.4	Conclusion	112

4.1 Procédure numérique

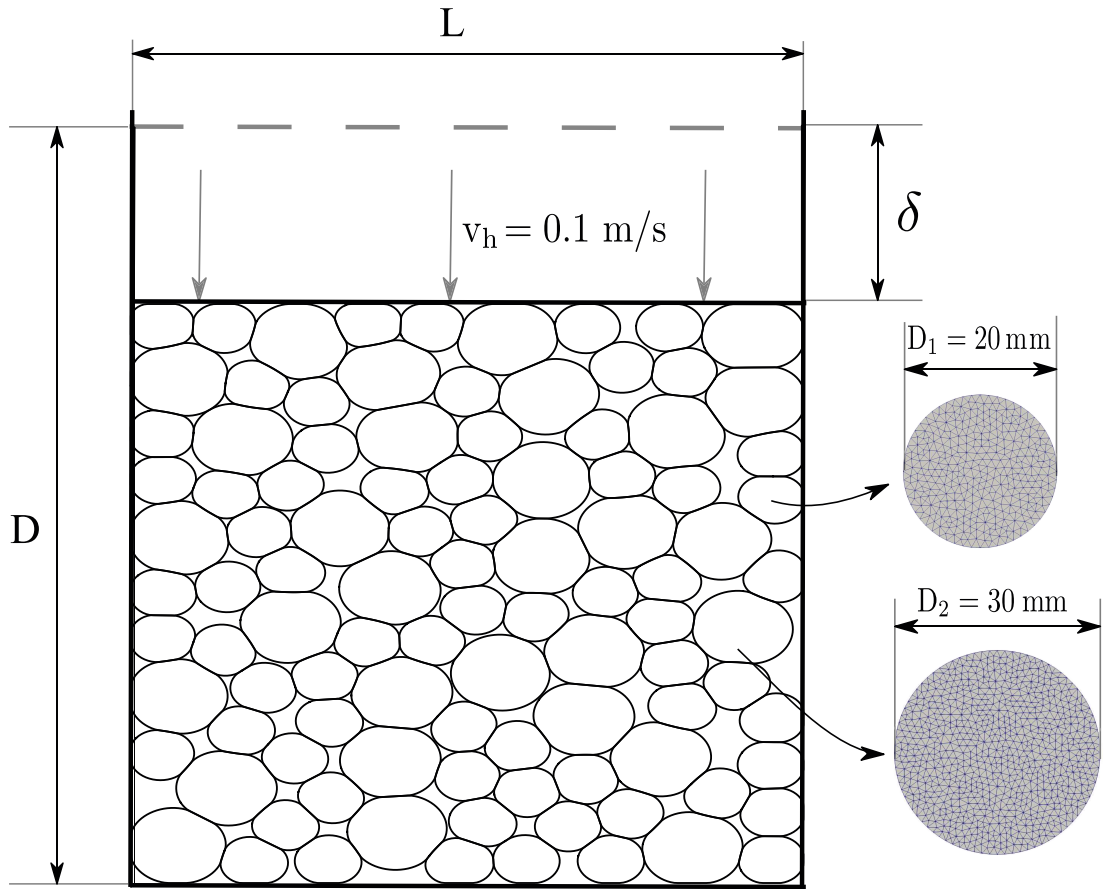


FIGURE 4.1 – Assemblage de 80 particules cylindriques réparties dans une boîte rectangulaire de largeur $L = 0,201 \text{ m}$, de longueur $D = 0,278 \text{ m}$. La distribution des tailles des particules est bi-disperse avec comme diamètres de particules $D_1 = 20 \text{ mm}$ et $D_2 = 30 \text{ mm}$, et une proportion de petites particules 64%.

Nous considérons dans ce chapitre des assemblages contenant tous 80 particules dans une boîte de forme rectangulaire de largeur $L = 0,201 \text{ m}$, de longueur $D = 0,278 \text{ m}$, avec des configurations initiales identiques. La distribution des tailles des particules est bi-disperse, les deux diamètres de particules étant $D_1 = 20 \text{ mm}$ et $D_2 = 30 \text{ mm}$. La proportion de petites particules est de 64%. Des simulations sont réalisées en utilisant la

méthode de couplage FEM-CD, présentée dans le chapitre 1, qui est implémentée dans le logiciel LMGC90. Les petites particules ($D_1 = 20$ mm) sont discrétisées par 670 éléments triangulaires (à 3 nœuds). Les grandes particules ($D_2 = 30$ mm) contiennent 1506 éléments triangulaires (à 3 nœuds); ces particules, avec leur maillage, sont représentées à la figure 4.1.

Comme au chapitre 3, ces assemblages sont soumis à une compression uniaxiale dans le cadre de l'hypothèse des déformations planes et dans le régime quasi-statique en imposant le déplacement de la paroi du haut représentée à la figure 4.1, avec la vitesse constante $v_h = 0,1$ m/s. Le coefficient de frottement entre les particules, et entre les particules et la paroi, est homogène et changé selon les tests. Pour ces particules néo-hookéennes, le module de Young est $E = 0,45$ MPa et la densité du matériau est $\rho = 990$ kg/m³. Le coefficient de Poisson prend selon les tests les trois valeurs suivantes, $\nu = [0,005; 0,34; 0,495]$, ce qui permet de faire varier la compressibilité des particules.

À la figure 4.2, nous présentons un même système de 80 particules dans trois états de chargement différents, pour un système constitué de particules ayant le coefficient de Poisson $\nu = 0,34$ et le coefficient de frottement $\mu_f = 0,1$. Le code de couleurs correspond à B_{xy} , la composante verticale du tenseur de déformation de Green-Lagrange gauche, $\mathbf{B}$. On constate qualitativement que dans l'état le plus comprimé, les particules sont fortement déformées et que la déformation reste hétérogène à l'œil alors que les vides entre particules ne représentent que 5% du volume total du système. Nous proposons dans la suite de ce chapitre une étude plus quantitative.

4.2 Effet de la compressibilité des particules

Nous étudions d'abord l'effet de la *compressibilité* sur le comportement macroscopique et micro-structural de l'assemblage de particules néo-hookéennes soumis à une compression uniaxiale plane. Nous considérons trois systèmes : l'un est constitué de particules quasi-incompressibles (de coefficient de Poisson $\nu = 0,495$), le deuxième est constitué de particules avec la même compressibilité que lors de l'étude du chapitre 3 ($\nu = 0,34$), et le troisième de particules fortement compressibles, avec le coefficient de Poisson $\nu = 0,05$. Dans cette section, le coefficient de frottement est fixé, sauf indication contraire, à $\mu_f = 0,1$.

4.2.1 Étude de grandeurs macroscopiques

4.2.1.1 Compacité du système

La figure 4.3(a) montre l'évolution de l'aire totale des sections droites des particules, adimensionnée par l'aire initiale de ces sections droites en fonction de la déformation compressive cumulée, ε , lors d'un chargement du système. À partir d'une certaine déformation cumulée ($\varepsilon \geq 0,15$), les particules commencent à se déformer et la surface des particules diminue au cours de la compression. Comme nous le verrons ci-dessous, cette déformation

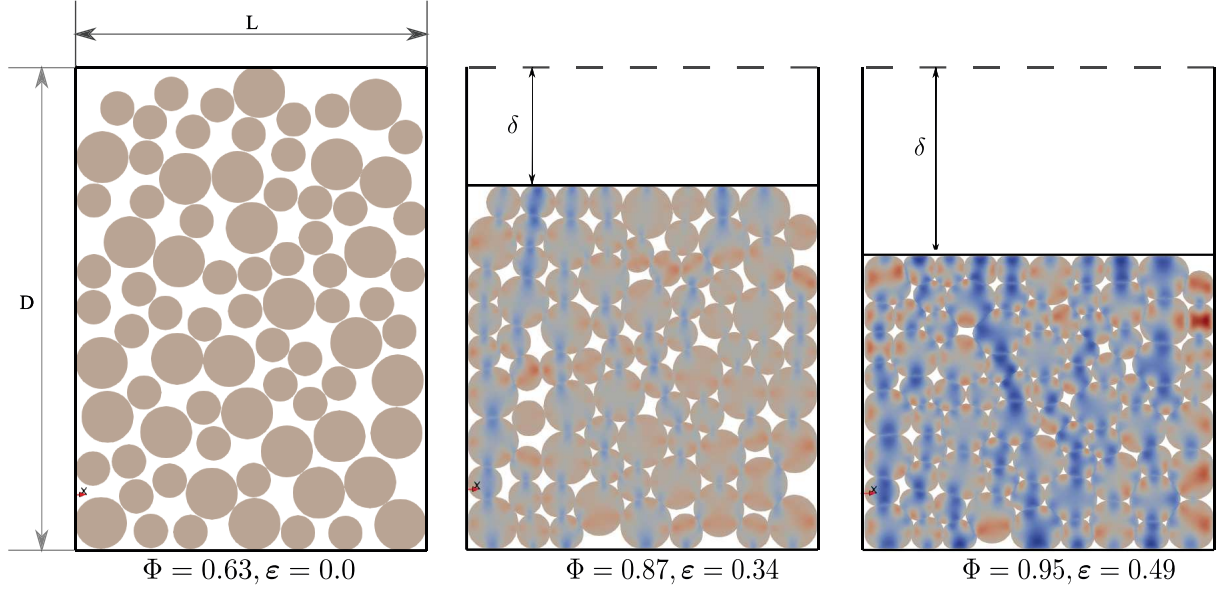


FIGURE 4.2 – Trois états au cours de la compression uniaxiale plane d'un assemblage de particules néo-hookéennes compressibles avec le coefficient de Poisson $\nu = 0,34$. Le coefficient de frottement entre particules et entre les particules et la paroi est ici fixé à $\mu_f = 0,1$. La déformation compressive cumulée ε et la compacité Φ sont indiquées en dessous de chaque vue. Le code de couleurs représente la composante xy du tenseur de déformation de Green-Lagrange gauche, B_{xy} . La couleur grise correspond à une valeur de B_{xy} égale à 0, c'est-à-dire à une zone non cisailée. La couleur rouge indique une valeur de B_{xy} positive, d'autant plus grande que le rouge est vif. La couleur bleu indique une valeur de B_{xy} négative, d'autant plus petite que le bleu est vif.

critique correspond à la transition de rigidité du système. Comme attendu, la diminution de la surface moyenne des particules est d'autant plus marquée que le coefficient de Poisson est petit. Notons que l'on observe, sur les courbes correspondant à $\mu_f = 0,05$ et $0,34$, la signature d'au moins une réorganisation de l'agencement des particules pour $\varepsilon \simeq 0,35$. Cette réorganisation conduit à une augmentation ponctuelle de la surface moyenne des particules dans le système constitué des éléments les plus compressibles. La compressibilité se présentant comme un mode de déformation supplémentaire (plus la compressibilité est grande, meilleures seront les possibilités), permet au système de se réorganiser et de passer ainsi plus facilement vers un autre état stable, d'énergie inférieure.

La figure 4.3(b) présente la compacité Φ en fonction de ε pour les trois systèmes étudiés dans cette section. La compacité augmente d'autant plus vite que le système est peu compressible. Dans le cas d'un système composé de particules incompressibles ($\nu = 0,5$), le volume étant constant au cours de chargement, on a la relation géométrique suivante :

$$\ln \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right) = \varepsilon. \quad (4.1)$$

Cette relation est aussi tracée à la figure 4.3(b) (ligne continue noire). Comme attendu, on n'observe pas d'écart significatif par rapport au système quasi-incompressible ($\nu = 0,495$).

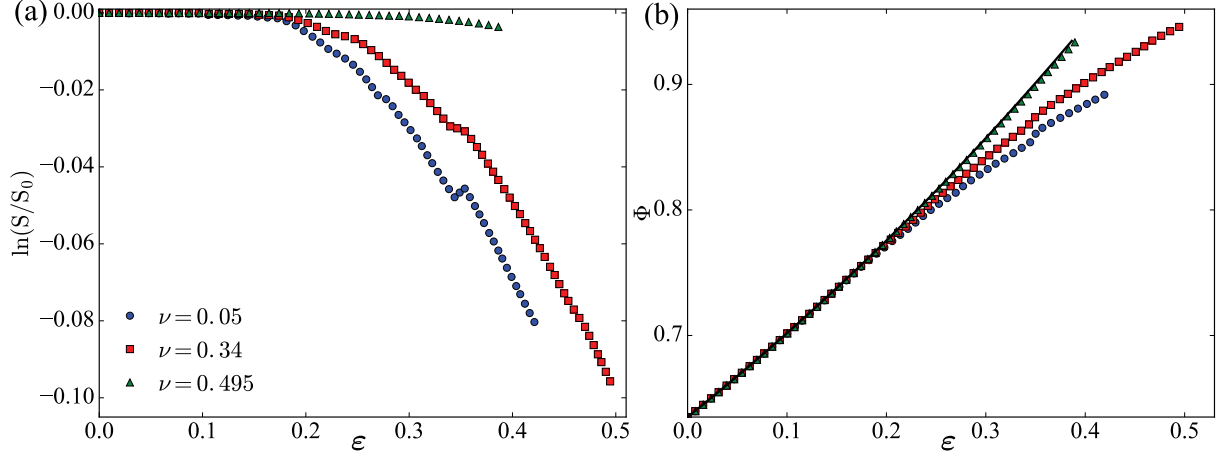


FIGURE 4.3 – Évolution de la somme des aires des sections droites des particules, adimensionnée par la somme des aires des sections droites dans l'état initial (a), et de la compacité (b), en fonction de la déformation compressive cumulée ε . Ces simulations sont réalisées avec le coefficient de frottement $\mu_f = 0,1$. La ligne continue noire correspond à la relation (4.1) qui est attendue pour une assemblage de particules incompressibles.

La figure 4.4 montre l'état d'un assemblage de particules à la compacité $\Phi = 0,895$ pour les trois coefficients de Poisson $\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$. La déformation compressive cumulée ε est alors différente d'un système à l'autre : le volume des particules les plus compressibles étant diminué sous l'effet des déformations, le volume total du système doit être plus petit pour obtenir une compacité donnée.

4.2.1.2 Étude de la force de compression appliquée au système

La figure 4.5 montre l'évolution de la force de compression f en fonction de la compacité du système Φ (figure principale) ou de la déformation compressive cumulée ε (dans l'encart) pour les trois assemblages de particules étudiées dans cette section. La force a été adimensionnée par le paramètre géométrique qui est la surface utile du piston, LH , et par le module élastique effectif E^* . Nous avons choisi cette normalisation compte-tenu du fait que la force globale est le résultat des forces de contact, et que ces dernières, d'après la théorie de Hertz, sont proportionnelles à E^* pour une déformation donnée (l'équation (2.3)). Nous observons d'après l'encart de la figure 4.5 que, pour une déformation cumulée ε donnée, la force de compression n'est pas proportionnelle à E^* . Par contre, comme le montre le graphique principal de la figure 4.5, la force f est proportionnelle au module élastique E^* pour une compacité Φ donnée. Ceci constitue un résultat important : connaissant le module de Young et le coefficient de Poisson des particules constituant un premier

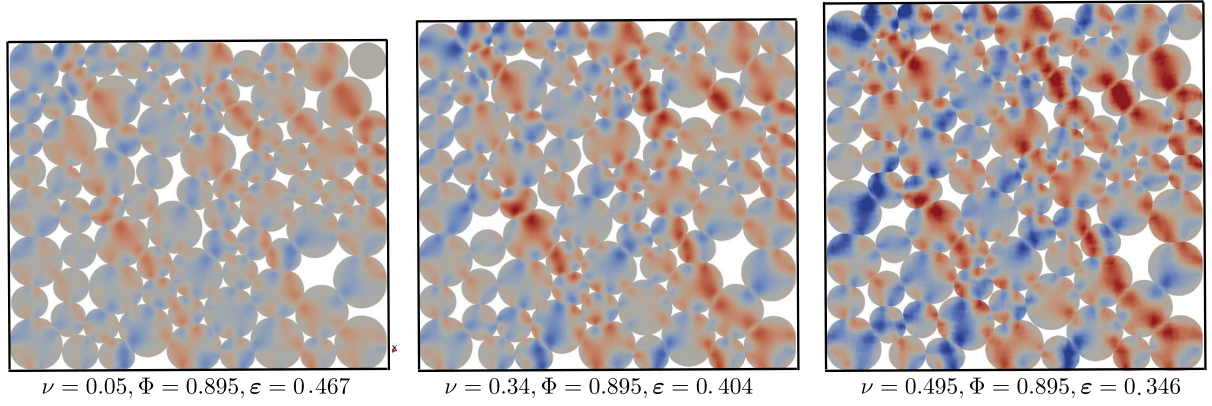


FIGURE 4.4 – État d'un assemblage de particules néo-hookéennes de compacité $\Phi = 0,895$ avec $\mu_f=0,1$, pour des particules ayant des coefficients de Poisson $\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$. Le code de couleurs représente la composante xy du tenseur de déformation de Green-Lagrange gauche, B_{xy} (voir la légende de la figure 4.2 pour la signification de ce code de couleurs).

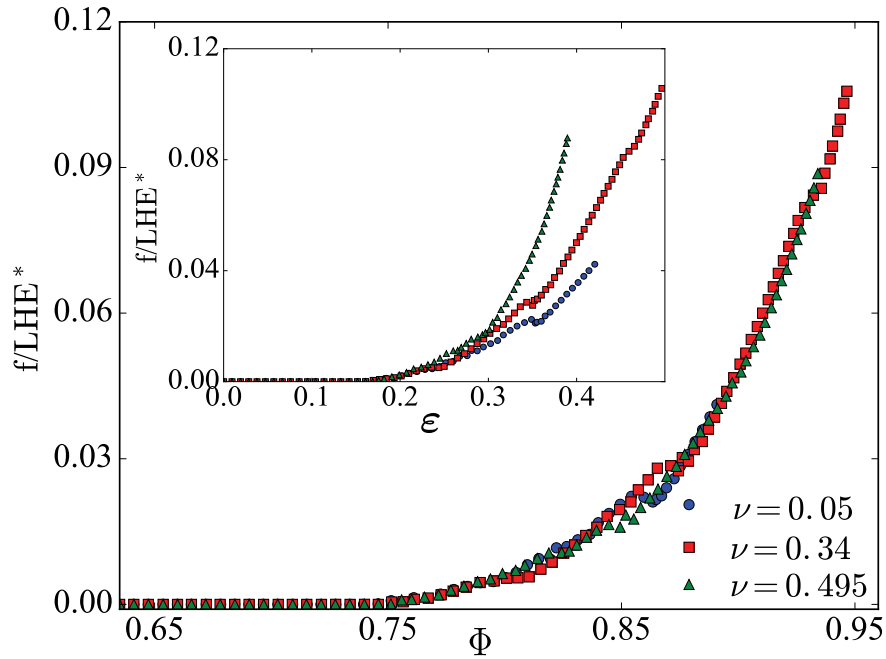


FIGURE 4.5 – Force de compression adimensionnée $f/(LHE^*)$ en fonction de la compacité Φ (ou de la déformation compressive cumulée ε dans l'encart) pour les trois systèmes différents (de même configuration géométrique initiale) pour lesquels les coefficients de Poisson sont $\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$.

assemblage, il est possible grâce à cette normalisation d'en déduire pour une même compacité la force de compression appliquée sur un autre assemblage constitué de particules avec la même polydispersité mais ayant un autre module de Young et un autre coefficient de Poisson. La limitation de notre démonstration vient du nombre relativement faible, 80, de particules dans les systèmes simulés, si bien que la comparaison doit se faire pour des systèmes de taille équivalente pour tenir compte des effets de taille finie. Certains effets de taille finie sont d'ailleurs visibles sur la figure 4.5 où des réarrangements locaux induisent des irrégularités sur la force, au niveau desquels la superposition entre les courbes est légèrement moins nette.

Par ailleurs, nous déduisons de la superposition des courbes $f/(LHE^*)$ en fonction de Φ que la compacité est (contrairement à la déformation cumulée ε) le bon paramètre pour décrire les propriétés mécaniques macroscopiques du système (nous verrons dans la suite qu'il en est de même pour les paramètres micro-structuraux). La courbe $f/(LHE^*)$ en fonction de Φ est donc indépendante (i) du module de Young et (ii) du coefficient de Poisson. Cette courbe maîtresse dépend par contre de la nature granulaire du système et des hétérogénéités qui y sont associées. Nous en déduisons que les effets de ces dernières (nature granulaire du système et hétérogénéités) sur la force ne sont donc pas affectés par un changement de la compressibilité des particules.

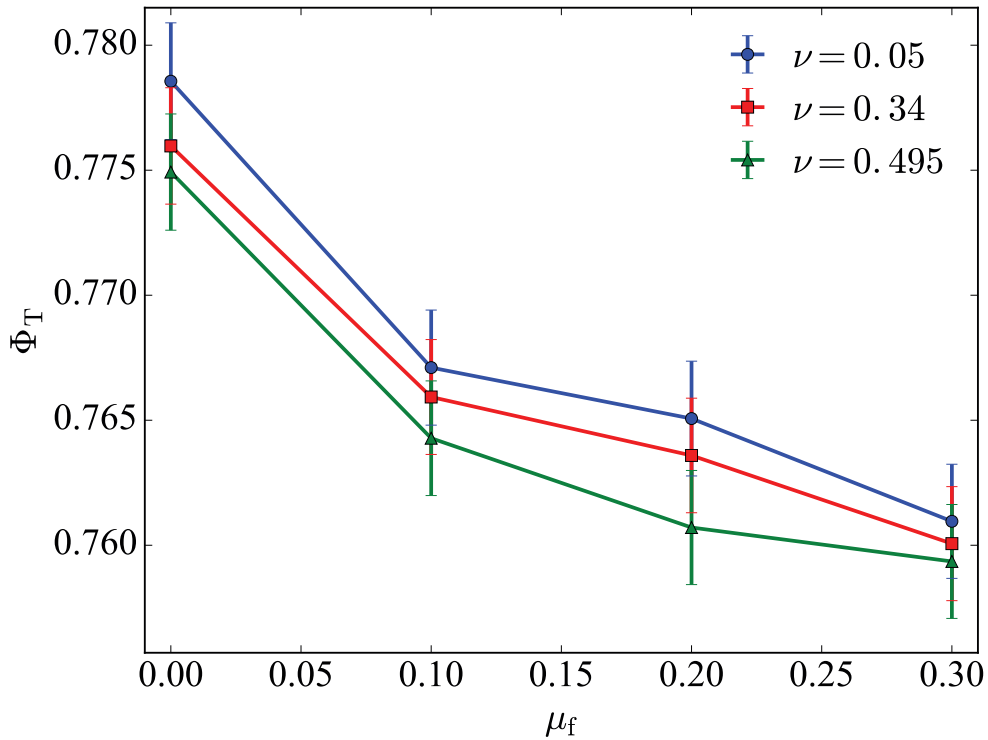


FIGURE 4.6 – Compacité à la transition de rigidité du système granulaire, Φ_T , en fonction du coefficient de frottement μ_f (existant entre les particules et entre les particules et les parois) pour trois systèmes différents (de même configuration géométrique initiale) pour lesquels les coefficients de Poisson sont $\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$.

Nous observons que la valeur de la force de compression est proche de zéro lorsque la compacité est inférieure à une valeur seuil Φ_T , et augmente franchement pour des compacités supérieures à cette valeur seuil. Ceci correspond à la transition de rigidité du système granulaire (Guyon et al. (1990); Moukarzel (1998); Roux (2000)). Afin de détecter la valeur de la compacité Φ_T pour laquelle la force commence à augmenter, nous fixons une valeur seuil f^* pour la force et nous repérons la valeur de la compacité pour laquelle la force de compression atteint cette valeur seuil. La valeur de la compacité ainsi déduite dépend faiblement de f^* sur une large gamme. Nous l'avons déterminée pour deux valeurs de f^* : $f^* = 0,0008LHE^*$ et $f^* = 0,002LHE^*$. Cela conduit à deux valeurs proches mais distinctes de la compacité. Ces deux valeurs constituent les limites des barres d'erreur de la valeur de Φ_T tracée à la figure 4.6. Pour chacun des trois coefficients de Poisson étudiés dans cette section ($\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$), nous avons déterminé les valeurs de Φ_T pour différentes valeurs du coefficient de frottement. On constate que Φ_T diminue lorsque le frottement μ_f augmente, ce qui est en accord avec les études antérieures (Somfai et al. (2007); Shundyak et al. (2007); van Hecke (2010)).

4.2.1.3 Étude de l'énergie de déformation des particules

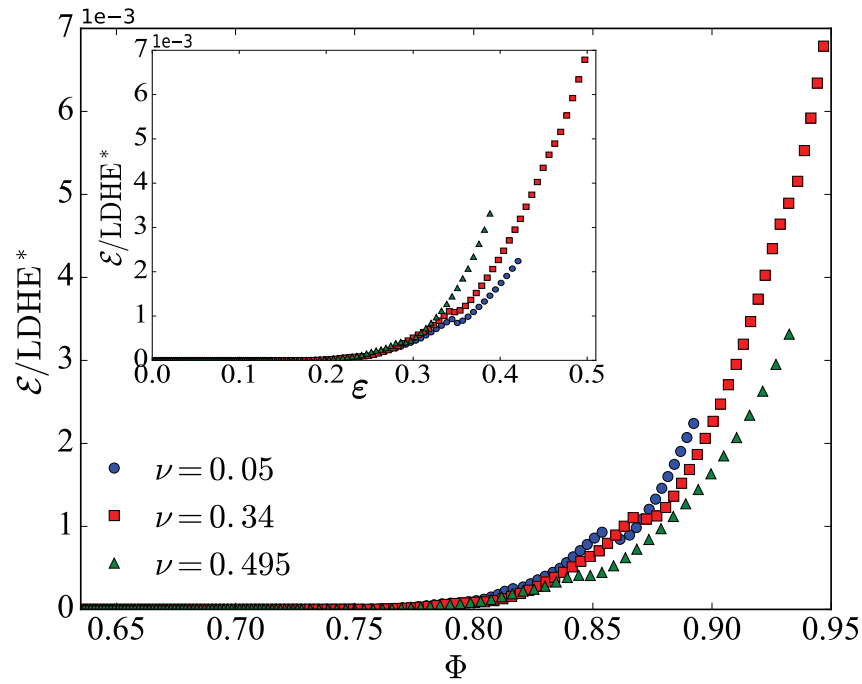


FIGURE 4.7 – Évolution de l'énergie de déformation adimensionnée $\mathcal{E}/LHE^*$ en fonction de la compacité du système Φ (ou de la déformation cumulée ε dans l'encart) pour trois assemblages différents avec les coefficients de Poisson $\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$.

La figure 4.7 montre l'évolution de l'énergie de déformation totale des particules $\mathcal{E}$ en

fonction de la compacité du système Φ (figure principale) et de la déformation compressive cumulée ε (encart). L'énergie a été adimensionnée par le volume initial du système, LDH et par le module élastique effectif E^* . On n'observe pas de superposition des courbes en passant d'un système à l'autre. Ceci est cohérent avec la conclusion de la section 4.2.1.2. En effet, l'énergie fournie au système lors de la compression est

$$\mathcal{E}_{fournie} = \int f d\delta ,$$

c'est-à-dire, en considérant les grandeurs adimensionnées :

$$\frac{\mathcal{E}_{fournie}}{LHDE^*} = \int \left(\frac{f}{LHE^*} \right) e^{-\varepsilon} d\varepsilon . \quad (4.2)$$

Étant donnée que f/LDE^* en fonction de ε ne se présente pas sous forme d'une courbe maîtresse lorsque le coefficient de Poisson change, il n'est pas étonnant que l'intégrale de l'équation (4.2) dépende du coefficient de Poisson. L'énergie fournie adimensionnée ne se rassemble donc pas sur une courbe maîtresse. Ceci permet de comprendre pourquoi l'adimensionnalisation de l'énergie de déformation ne conduit pas à une superposition lorsque les coefficients de Poisson changent.

4.2.2 Étude de la micro-structure du système

La micro-structure d'un milieu granulaire est caractérisée par plusieurs paramètres tels que la coordinance ou la distribution des forces de contact dans le système. Pour un assemblage avec des particules molles, elle présente aussi des aspects spécifiques tels que la surface de contact ou l'indice de forme des particules.

4.2.2.1 Coordinance

La figure 4.8 présente la coordinance Z (obtenue selon le même procédé qu'à la section 3.3.5) en fonction de la compacité Φ du système. Aucune dépendance de la coordinance Z avec le coefficient de Poisson n'est décelable à partir de ces données : pour une compacité donnée, la coordinance ne semble donc pas dépendre de la compressibilité des particules, ce qui est cohérent avec le résultat similaire obtenu à la section 4.2.1.2 pour la force de compression adimensionnée. Nous avons également superposé aux données issues des simulations pour Z , l'expression (3.6) où les paramètres Φ_T , Z_T et $K = (Z_1 - Z_T)/\sqrt{(\Phi_1 - \Phi_T)}$ ont été ajustés. Cette relation semble cohérente avec nos données ; voir la figure 4.8.

4.2.2.2 Évolution de la forme moyenne des particules

L'évolution de la forme des particules est ici analysée à travers la moyenne sur l'ensemble des particules de l'indice de circularité d'une particule C (l'équation (3.5)). L'évolution de l'indice de circularité se décompose en deux régimes. Pour des faibles déformations globales

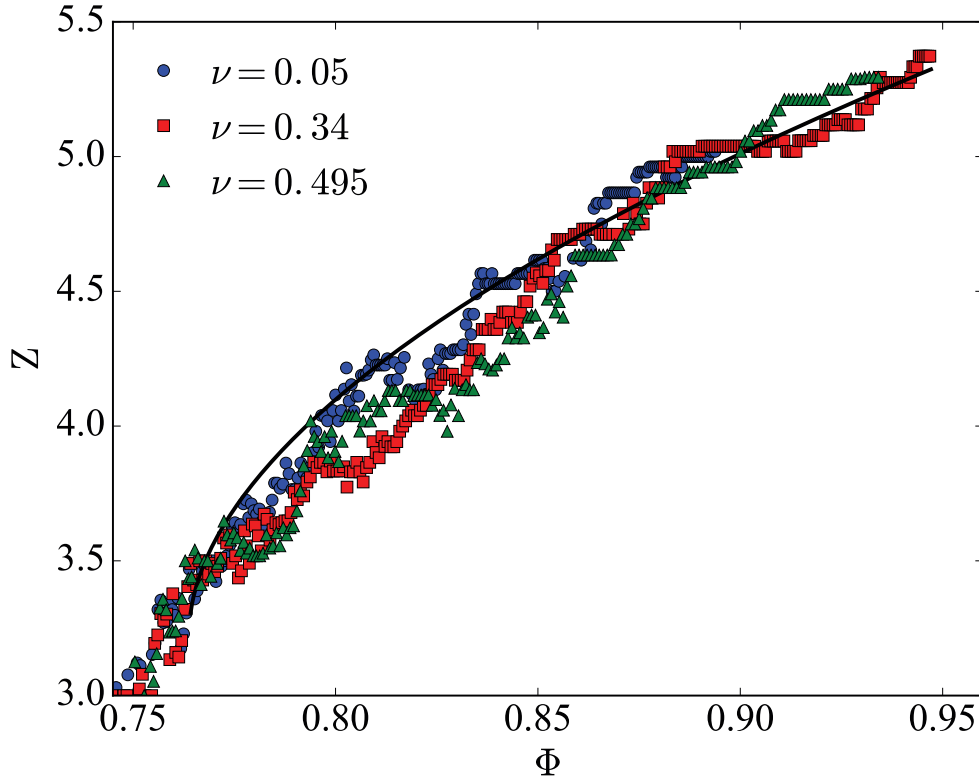


FIGURE 4.8 – Évolution de la coordonnée Z en fonction de la compacité Φ pour des assemblages constitués de trois matériaux différents dont les coefficients de Poisson sont $\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$. La simulation numérique est faite en prenant $\mu_f = 0,1$. La ligne continue noire correspond à la relation (3.6) avec $\Phi_T = 0,765$, $\Phi_1 = 0,947$, $Z_T = 3,25$, $Z_1 = 5,2$.

(avant la transition de rigidité), les particules sont peu déformées et se comportent comme des particules solides. C est donc proche de zéro (forme circulaire). Au-delà de la transition de rigidité, des particules sont déformées, ce qui induit un écart par rapport à la forme circulaire.

Dans l'encart de la figure 4.9(a), on observe que pour une même déformation cumulée ε donnée, les particules quasi-incompressibles ($\nu = 0,495$) sont nettement moins circulaires que les particules compressibles ($\nu = 0,005$). Cette tendance s'explique par l'absence du mode de déformation supplémentaire qu'est la possibilité de changement du volume pour les particules compressibles. Comme les particules quasi-incompressibles conservent presque leur volume, elles doivent plus se distordre pour que le volume total du système puisse diminuer, alors que les particules compressibles peuvent diminuer leur volume tout en restant quasi-circulaires (voir la figure 4.10).

En traçant maintenant l'évolution de l'indice de circularité en fonction de la compacité, on observe une superposition d'un système à l'autre. Ceci montre que pour une compacité donnée, la circularité moyenne des particules est la même que les particules soient

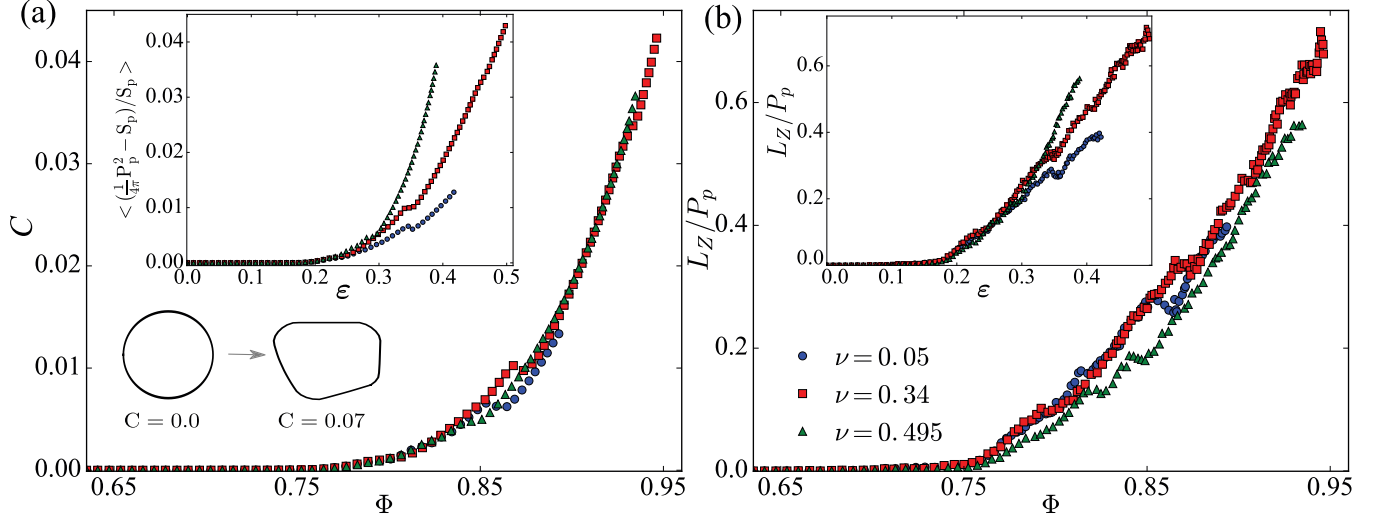


FIGURE 4.9 – Évolution de l'indice de circularité des particules C (l'équation (3.5)) (a) et du rapport de la surface des contacts et la surface latérale des particules déformées (b) en fonction de la compacité pour trois assemblages constituées de particules ayant des coefficients de Poisson différents : $\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$. Les configurations initiales de ces trois systèmes sont identiques. Les encarts représentent les mêmes données tracées en fonction de la déformation cumulée ε .

compressibles ou pas. Ceci est cohérent avec les résultats que nous avons obtenus concernant la force adimensionnée et la coordinance que l'on a trouvées indépendantes de la compressibilité : pour une compacité donnée, la structure du système ne dépend pas de la compressibilité.

Le fait que l'indice de circularité C ne dépende pas de la compacité n'a rien de paradoxal : la compressibilité seule des particules n'entraîne pas une diminution de la compacité (le volume des particules dont le module de compressibilité est très inférieur au module de Young, diminue proportionnellement au volume total du système). Ce sont par contre les déformations isochores des particules qui entraînent une diminution de la compacité. Ce que l'on vient de montrer est que ces déformations isochores conduisent à une circularité identique d'un système à l'autre, pour une compacité donnée.

La figure 4.9(b) présente l'évolution de la moyenne de la surface des contacts d'une particule $L_Z H$ adimensionnée par la surface latérale de la particule déformée $P_p H$, L_Z/P_p . Le comportement observé est à relier à l'évolution de l'indice de circularité des particules C : pour une déformation donnée (encart de la figure 4.9(b)), les particules quasi-incompressibles sont moins circulaires que les particules compressibles (voir la figure 4.10) et donc, les surfaces de contact sont plus grandes. L'évolution de la surface moyenne des contacts, L_Z/P_p , tracée en fonction de la compacité Φ montre la faible influence de la compressibilité du matériau : au même niveau de compacité, la surface de contact entre ces trois systèmes varie très peu. Les écarts observés peuvent s'expliquer par l'incertitude, venant de la discrétisation, sur la détermination des longueurs de contact.

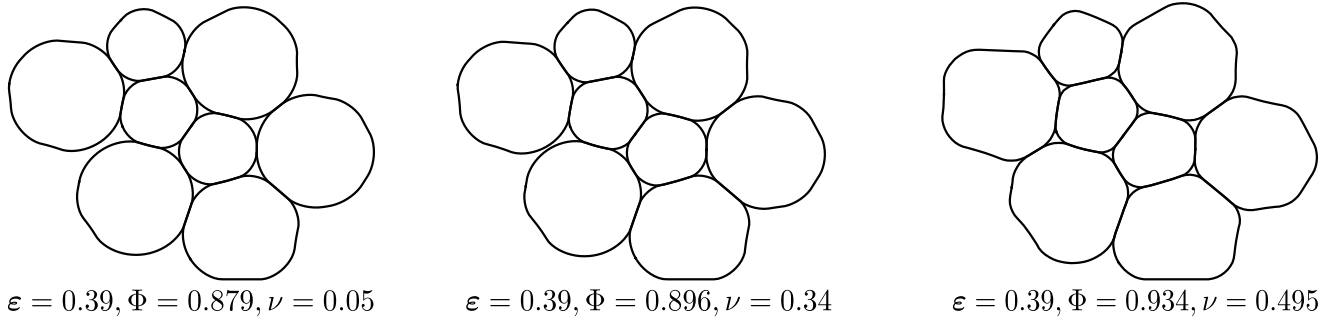


FIGURE 4.10 – Trois clichés d'un groupe des particules extrait de trois systèmes subissant la même déformation cumulée ($\varepsilon = 0,39$), constitués de particules ayant des coefficients de Poisson différents : $\nu = [0,05; 0,34; 0,495]$.

4.2.2.3 Distribution des forces normales de contact entre les particules

Nous nous intéressons ici à l'effet de la compressibilité des particules sur la distribution des forces normales de contact dans l'assemblage, en fonction de la compacité du système.

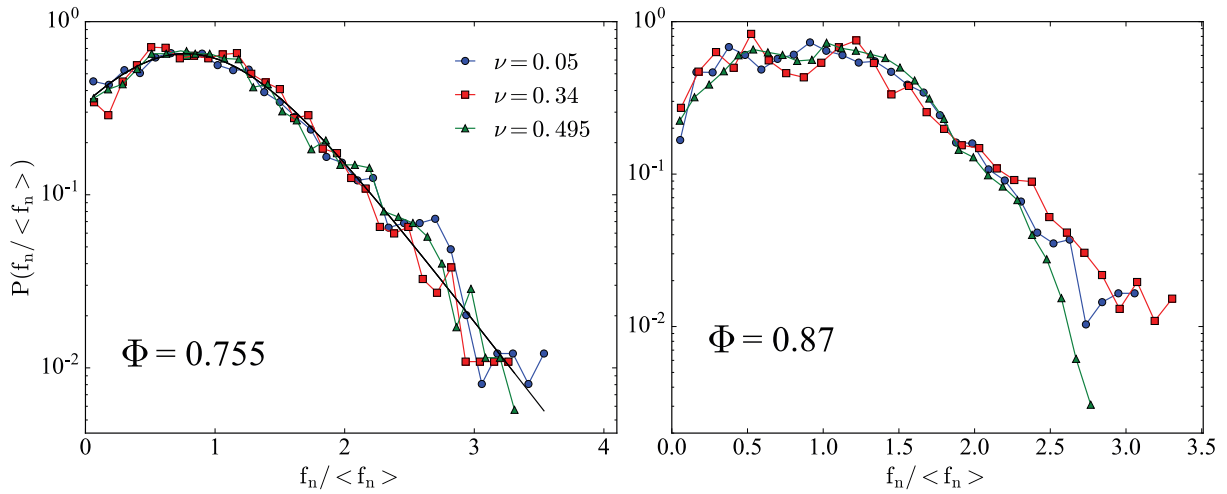


FIGURE 4.11 – Densité de probabilité (pdf) des forces normales de contact normalisées par la force normale moyenne pour les compacités $\Phi = 0,755$ et $\Phi = 0,87$, de trois systèmes simulés à partir d'une même configuration initiale mais avec différents coefficients de Poisson des particules : $\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$. Ces simulations sont effectuées en prenant le coefficient de frottement $\mu_f = 0,1$. La ligne continue noire sur la figure de gauche est obtenue à partir de l'équation 4.3 après ajustement du paramètre γ ($\gamma = 0,18$).

Nous avons obtenu les forces normales associées à chaque contact entre particules en calculant la somme vectorielle des forces normales aux noeuds de contact le long de la surface de chaque contact. La figure 4.11 montre les densités de probabilité de ces forces

normales à la compacité $\Phi = 0,755$ et $\Phi = 0,87$, pour les trois systèmes qui sont simulés à partir d'une même configuration géométrique initiale mais avec les différentes compressibilités des particules constituant l'assemblage. Nous observons qu'à la compacité $\Phi = 0,755$, la compressibilité n'influe pas les densités de probabilité car le système se trouve encore au voisinage de la transition de rigidité et donc, la déformabilité des particules n'est pas mise en jeu. Cette distribution des forces est celle qui est observée classiquement dans les milieux granulaires avec des particules rigides (Radjai et al. (1996); Mueth et al. (1998)). Elle peut être décomposée en deux régimes différents selon que les forces f_n sont supérieures ou inférieures à la force moyenne $\langle f_n \rangle$: une décroissance exponentielle aux fortes forces $f_n > \langle f_n \rangle$ et une partie en loi de puissance pour les faibles valeurs de force $f_n < \langle f_n \rangle$. Un modèle simple de "cascade" des forces proposé dans Radjai (2015) est bien ajusté à cette courbe. Ce modèle est présenté par l'expression suivante :

$$P(f) = \beta(1 + \gamma) \frac{\gamma e^{\beta f}}{(1 + \gamma e^{\beta f})^2} , \quad (4.3)$$

où $P(f)$ est la densité de probabilité d'une force adimensionnée avec deux paramètres β et γ . Si on impose que la force moyenne est 1 (la force dans l'expression 4.3 est alors adimensionnée par cette force moyenne), on obtient une relation entre ces deux paramètres :

$$\beta = (1 + \gamma) \ln\left(\frac{1 + \gamma}{\gamma}\right) . \quad (4.4)$$

La ligne ajustée sur la figure 4.11 est obtenue avec $\gamma = 0,18$. Lorsque $\gamma \leq 1$ comme ici, on obtient un pic de cette densité de probabilité des forces pour $f = -\ln \gamma / \{(1 + \gamma) \ln[(1 + \gamma)/\gamma]\}$. On remarque que P évolue vers une fonction exponentielle $P = \beta[(1 + \gamma)/\gamma]e^{-\beta f}$ pour les forces élevées et que P tend vers $P = \gamma \ln[(1 + \gamma)/\gamma]$ lorsque la valeur des forces tend vers 0.

À la compacité plus élevée $\Phi = 0,87$, pour laquelle la déformabilité des particules est importante, la statistique est trop bruitée en raison du nombre assez faible de contacts dans le système pour pouvoir conclure sur des différences éventuelles entre les densités de probabilité d'un coefficient de Poisson à l'autre (figure 4.11-droite).

Maintenant, nous considérons seulement les résultats du système avec $\nu = 0,34$. En effet, comme pour ce système nous avons effectué des simulations en partant de plusieurs configurations initiales, nous disposons de données moyennes moins bruitées. Il est bien connu que les forces à l'intérieur d'un matériau granulaire sont réparties de manière hétérogène. Les plus grandes forces inter-particulaires sont présentes dans un réseau de chaînes de force, tandis que les particules ne participant pas à ce réseau sont protégées de la force externe et interagissent par des forces de contact plus faibles. Sur la base de simulations et de travaux théoriques (Thornton (1997); Thornton et Antony (1998); Makse et al. (2000); Nguyen et Coppersmith (2000)), la forme de $P(f)$ devrait dépendre fortement de la déformation des grains individuels avec une forme proche d'une Gaussienne à forte déformation. Des simulations effectuées par O'Hern et al. (2001, 2002) de systèmes granulaires constitués de particules non frottantes et interagissant via un potentiel d'interaction hookéen

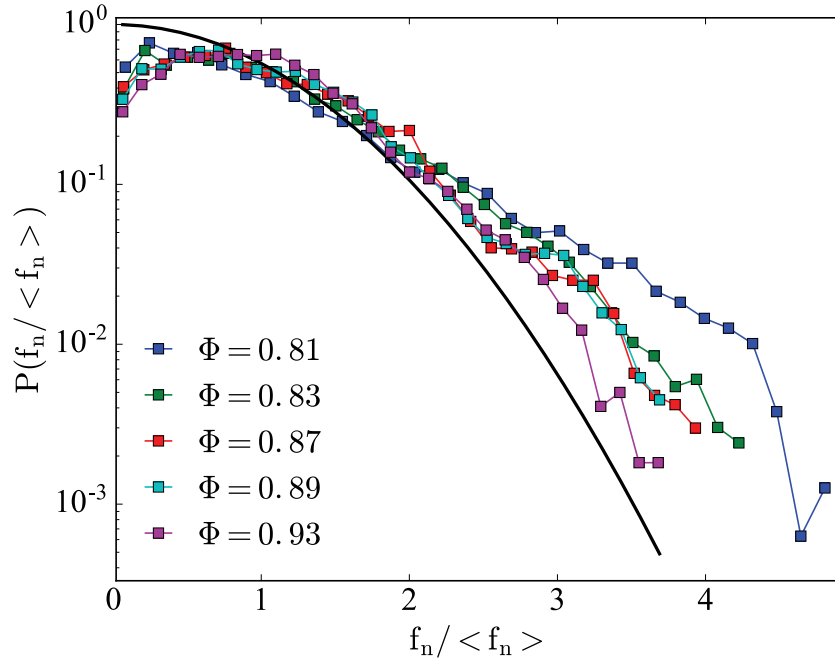


FIGURE 4.12 – Densité de probabilité (pdf) des forces normales de contact normalisées par la force normale moyenne pour cinq niveaux de compacité d'un assemblage de particules néo-hookéennes avec le coefficient de Poisson de $\nu = 0,34$. Cette statistique est obtenue à partir de l'ensemble de forces normales de contact de trois configurations différentes qui contient le même nombre de particules et les mêmes conditions aux limites avec le coefficient de frottement de $\mu_f = 0,1$. La ligne continue noire est la distribution Gaussienne, $P(f) = 2/\sqrt{\pi}e^{-(f_n/\langle f_n \rangle)^2}$.

suggèrent qu'une queue exponentielle de $P(f)$ provient d'une moyenne de distributions gaussiennes ayant des forces moyennes différentes. Au fur et à mesure que la compacité augmente (grandes déformations), les fluctuations relatives de la force moyenne diminuent, conduisant à une forme gaussienne de $P(f)$. Par ailleurs, les simulations de [Snoeijer et al. \(2004\)](#) montrent que la forme de la distribution des forces dans un état granulaire compact est très sensible au nombre de contacts entre les grains ; un plus grand nombre de contacts conduisant à un pic prononcé de $P(f)$ et à une décroissance exponentielle de $P(f)$ pour les grandes forces. On s'attend à ce que cette coordinance augmente sensiblement lorsque la déformation des grains augmente et par conséquent, tout effet sur la distribution de probabilité des forces doit être détecté.

Expérimentalement, il a été difficile de mesurer la distribution des force de contact dans des milieux granulaires constitués de particules compressibles. Les expériences de cisaillement bi-dimensionnel de [Howell et al. \(1999\)](#) permettent de trouver une transition vers une distribution gaussienne pour des déformations de l'ordre de 2%. Dans des assemblages statiques, [Makse et al. \(2000\)](#) ont rapporté l'existence d'une transition d'une distribution exponentielle de la densité de probabilité des forces vers une distribution gaussienne. Ce-

pendant, leurs déformations maximales n'étaient que de l'ordre de 0,4%. Plus récemment, [Erikson et al. \(2002\)](#) ont réalisé des expériences de compression de particules de caoutchouc. La force de contact est mesurée au niveau des parois de l'échantillon par une technique d'analyse d'empreintes sur du papier carbone. Lorsque la déformation moyenne des billes augmente au-delà de 30%, la densité de probabilité des forces de contact présente un pic qui devient de plus en plus prononcé, et n'est pas gaussienne.

Nous avons déterminé à partir des simulations la fonction de densité de probabilité des forces normales de contact normalisées par la force normale moyenne. Elle est présentée (en échelle linéaire - log) à la figure 4.12 pour cinq niveaux de compacité différents. Compte-tenu du nombre de compacts relativement faible avec 80 particules, pour obtenir une statistique suffisante pour les distributions des forces, nous avons calculé cette densité de probabilité sur l'ensemble des forces normales de contact à partir de trois configurations initiales différentes contenant le même nombre de particules, avec la même proportion de tailles des particules, et les mêmes conditions limites. Nous observons que la densité de probabilité diminue plus rapidement en fonction de la force normale pour les fortes compacités que pour des compacités plus modérées. Ceci signifie que le réseau de force dans le système devient de plus en plus homogène avec l'augmentation de la compacité. Il apparaît que nous n'obtenons pas de décroissance gaussienne à une haute compacité du système, en accord avec les résultats de [Erikson et al. \(2002\)](#) et de [Snoeijer et al. \(2004\)](#).

4.2.2.4 Distribution de l'énergie de déformation des particules

La figure 4.13 présente, pour plusieurs niveaux de compacité et pour deux systèmes contenant des particules ayant des coefficients de Poisson $\nu = 0,05$ et $\nu = 0,495$, les densités de probabilité de la densité d'énergie de déformation normalisée par la densité d'énergie de déformation moyenne $P(\Psi/\langle\Psi\rangle)$, où Ψ est la densité d'énergie de déformation. Notons que cette densité d'énergie n'est ici pas associée à une particule spécifique (contrairement à la densité particulaire Ψ_p étudiée à la section 4.2.1.3). Pour une même compacité, $P(\Psi/\langle\Psi\rangle)$ reste quasiment similaire d'un coefficient de Poisson à l'autre, ce qui vient appuyer nos conclusions des sections 4.2.1.2, 4.2.2.1, 4.2.2.2 et 4.2.2.3.

Pour tous les niveaux de la compacité, la probabilité d'énergie de déformation est maximale pour $\Psi/\langle\Psi\rangle = 0$. On constate qu'avec l'augmentation de la compacité, la densité de probabilité de l'énergie de déformation s'approche de plus en plus d'une exponentielle décroissante $P(\Psi) = e^{-\Psi/\langle\Psi\rangle}$, et que l'écart type relatif de la distribution diminue (le milieu est donc moins hétérogène qu'aux compacités moins élevées). Les instantanés de la figure 4.14, où la densité d'énergie est représentée par le code de couleurs, permettent de visualiser pour deux compacités différentes la répartition de l'énergie dans le système. À la compacité $\Phi = 0,84$ (figure 4.14), seules les particules présentes dans les chaînes de force sont déformées, d'où une distribution large de la densité de probabilité de la densité d'énergie de déformation. À la compacité $\Phi = 0,99$, toutes les particules dans ce milieu participent au réseau de force, rendant le système moins hétérogène.

Dans cette section, nous avons analysé l'effet du coefficient de Poisson dans un as-

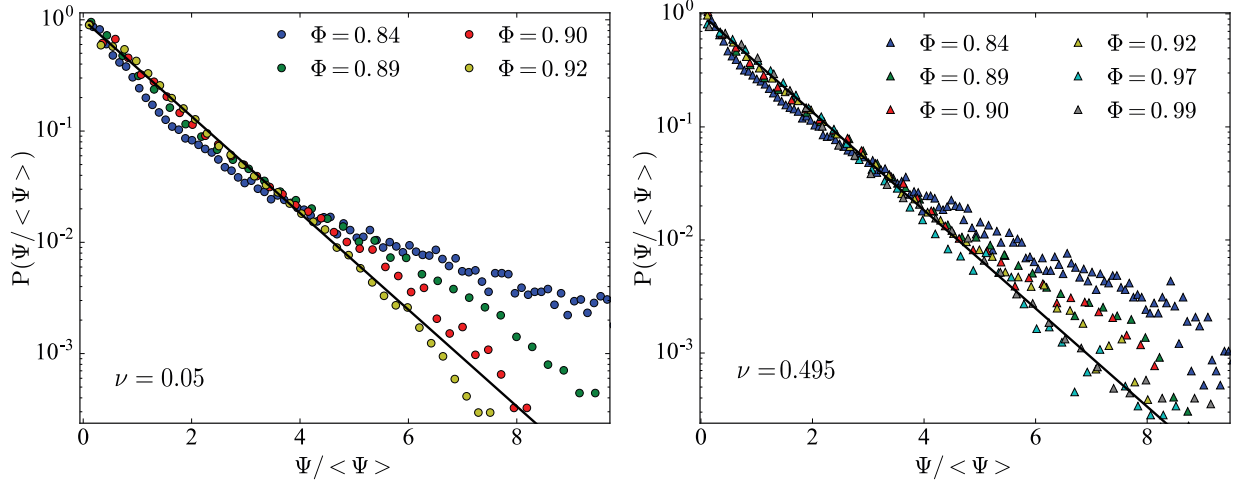


FIGURE 4.13 – Densité de probabilité (pdf) de l'énergie de déformation normalisée par l'énergie de déformation moyenne au cours de la compression uniaxiale d'un assemblage de particules néo-hookéennes ayant le coefficient de Poisson $\nu = 0,05$ ou $\nu = 0,495$. La ligne continue noire correspond à une distribution exponentielle, $P(\Psi/\langle\Psi\rangle) = e^{-\Psi/\langle\Psi\rangle}$. Nous présentons ici une simulation effectuée avec le coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$ entre les particules et entre les particules et les parois, ce qui nous a permis d'obtenir des plus fortes compacités dans nos simulations qu'avec $\mu_f = 0,1$.

semblage de particules élastiques avec un coefficient de frottement de $\mu_f = 0,1$, et nous avons montré que plusieurs grandeurs se superposent d'un coefficient de Poisson à l'autre lorsqu'elles sont exprimées en fonction de la compacité du système. La figure 4.15 montre l'évolution de la force de compression adimensionnée en fonction de la compacité pour trois systèmes différents (de même configuration géométrique initiale) pour lesquels les coefficients de Poisson sont $\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$ et pour deux autres valeurs du coefficient de frottement, $\mu_f = 0$ et $\mu_f = 0,3$. Nous observons qu'après l'adimensionnalisation, la force se superpose aussi entre ces trois systèmes pour chacun des deux coefficients de frottement. Ceci nous permet de penser que nos résultats sont généraux et ne dépendent pas de la valeur du coefficient de frottement, au moins dans la limite des valeurs testées. Pour étudier l'effet du coefficient de frottement, il est donc tout à fait légitime de fixer le coefficient de Poisson, sachant que les résultats obtenus seront aussi valables pour les autres valeurs de compressibilité (après l'adimensionnalisation, et en les regardant à la même compacité).

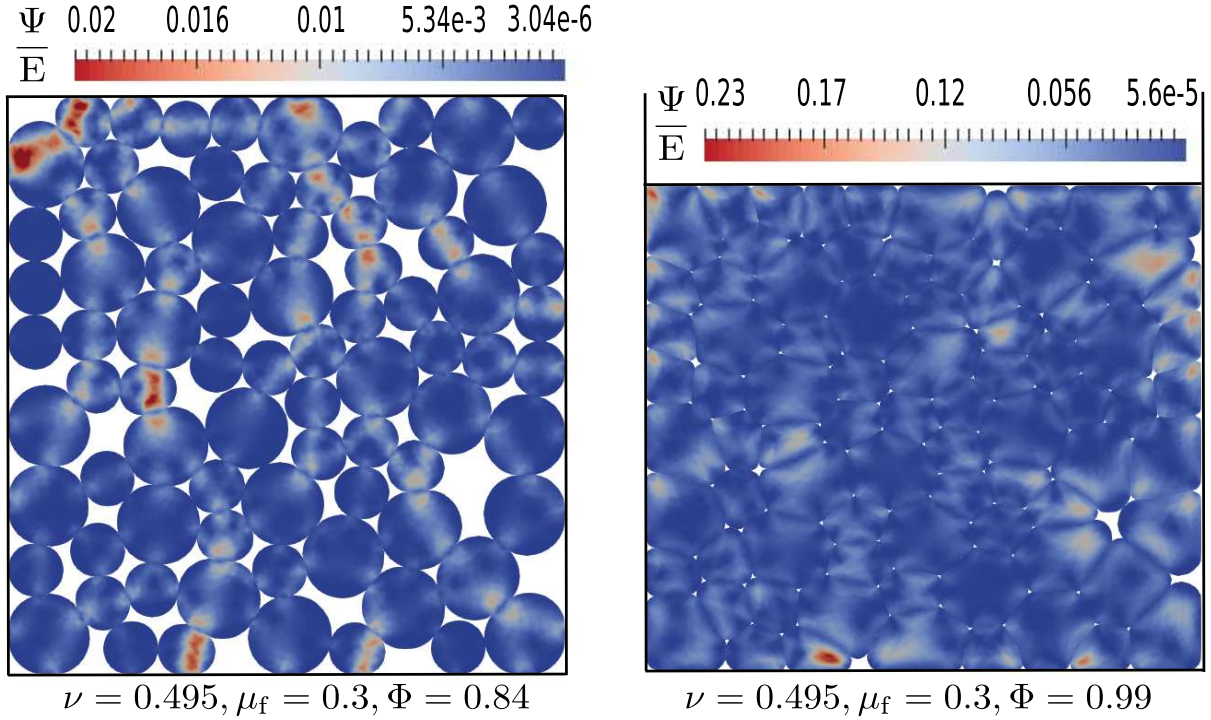


FIGURE 4.14 – Instantanés d'un assemblage de particules quasi-incompressibles, $\nu = 0,495$, à deux niveaux de compacité $\Phi = 0,84$ et $\Phi = 0,99$. Le code de couleurs est le rapport entre la densité d'énergie de déformation et le module de Young du matériau Ψ/E . Afin de pouvoir analyser ce résultat à une compacité plus élevée, nous avons pris les résultats d'une simulation avec le coefficient de frottement $\mu_f = 0,3$.

4.3 Effet du coefficient de frottement sur le comportement macroscopique et sur la micro-structure du système

Nous étudions dans cette section l'effet du coefficient de frottement μ_f sur le comportement mécanique et sur la structure d'un assemblage de particules néo-hookéennes soumis à une compression uniaxiale plane. Nous venons de voir à la section 4.2 que pour un coefficient de frottement donné et pour une compacité donnée, les effets de la compressibilité des particules peuvent se déduire d'un système à l'autre. Ici, nous avons choisi le coefficient de Poisson de $\nu = 0,34$. Cette valeur a été également utilisée pour la comparaison entre les expériences et les simulations du chapitre 3. Pour étudier l'effet du coefficient de frottement, nous avons réalisé des simulations numériques avec différentes valeurs du coefficients de frottement : $\mu_f = [0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 7; 1]$.

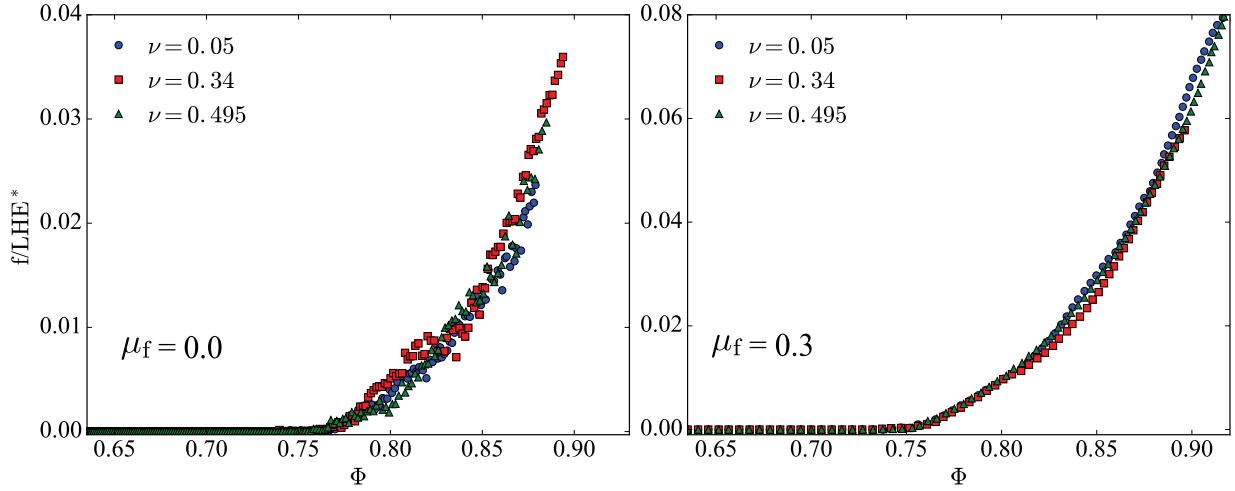


FIGURE 4.15 – Force de compression adimensionnée f/LHE^* en fonction de la compacité Φ pour les trois systèmes différents (de même configuration géométrique initiale) pour lesquels les coefficients de Poisson sont $\nu = 0,05$, $\nu = 0,34$ et $\nu = 0,495$. Le coefficient de frottement entre les particules et entre les particules et les parois est $\mu_f = 0$ (figure de gauche) et $\mu_f = 0,3$ (figure de droite).

4.3.1 Analyse des grandeurs macroscopiques

4.3.1.1 Compacité et volume

On observe à la figure 4.16 que le changement de surface (de volume en 3D) des particules est influencé par le coefficient de frottement. Pour une compacité Φ donnée, le volume des particules est d'autant plus faible que le coefficient de frottement est grand. Il faut donc imposer au système une déformation compressive cumulée ε plus grande pour obtenir une compacité donnée lorsque le coefficient de frottement est plus grand.

4.3.1.2 Force de compression

La figure 4.17 présente l'évolution de la force de compression f obtenue sur la paroi du bas du système (paroi fixe faisant face au piston) en fonction de la compacité Φ pour des coefficients de frottements différents. La force de compression du système est d'autant plus grande, pour une compacité donnée, que le coefficient de frottement μ_f est grand. Dans l'encart de cette figure, nous montrons la compacité à la transition de rigidité Φ_T (obtenue selon la procédure présentée à la section 4.2.1.2) du système. Nous observons, comme cela a déjà été rapporté dans la littérature ([van Hecke \(2010\)](#)), que Φ_T diminue lorsque le coefficient de frottement augmente.

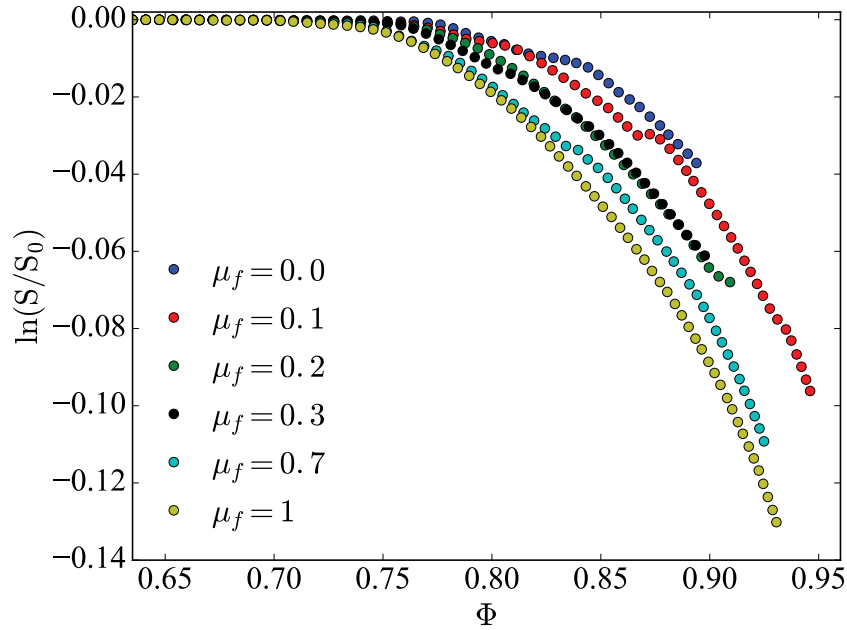


FIGURE 4.16 – Évolution de la somme des aires des sections droites des particules, adimensionnée par la somme des aires des sections droites dans l'état non déformé, $\ln(S/S_0)$, en fonction de la compacité Φ .

4.3.2 Analyse de la micro-structure

Dans cette section, l'influence du coefficient de frottement sur la micro-structure d'un assemblage de particules néo-hookéennes sous compression uniaxiale plane est étudiée. La figure 4.18 présente l'état d'un assemblage de particules néo-hookéennes à la compacité $\Phi = 0,89$ pour différents coefficients de frottement. Comme expliqué à la section 4.3.1.1, la déformation compressive cumulée ε est d'autant plus importante que le coefficient de frottement est élevé. En présentant par un même niveau de code de couleurs la composante B_{xy} du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche, on constate que les particules sont d'autant plus déformées que le coefficient de frottement est élevé, ce qui est cohérent avec la figure 4.17. Il ressort également de l'observation des instantanés de la figure 4.18 que les déformations des particules dans un assemblage ayant un coefficient de frottement plus élevé sont plus hétérogènes que les déformations dans un assemblage avec un coefficient de frottement inférieur. En effet, en présence de frottement, les chaînes de force sont plus stables si bien que les réarrangements des particules sont bloqués jusqu'à des valeurs de compacité plus élevées que celles qui permettent des réarrangements dans un système non frottant. De plus, comme le coefficient de frottement μ_f entre les particules est le même, dans ces simulations, que le coefficient de frottement entre les particules et les parois, des mini-voûtes se forment d'autant plus nombreuses que μ_f est élevé, ce qui conduit à des chaînes de force locales plus nombreuses. Pour minimiser cet effet dû aux conditions aux limites, il serait intéressant de simuler des systèmes avec plus de particules et en supprimant

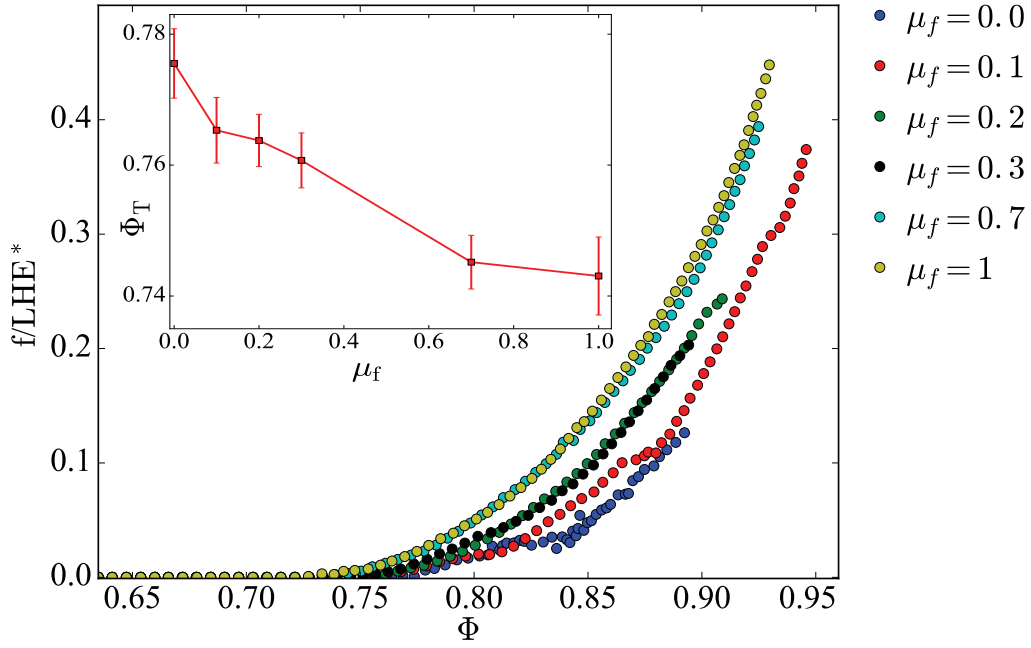


FIGURE 4.17 – Évolution de la force de compression adimensionnée f/LHE^* sur la paroi inférieure (fixe) du système en fonction de la compacité Φ pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ_f . L'encart présente la compacité à la transition de rigidité Φ_T en fonction du coefficient de frottement.

les frottements entre les parois et les particules.

4.3.2.1 Coordinance du système

La figure 4.19 montre l'évolution de la coordinance Z (obtenue selon le procédé présenté à la section 3.3.5) en fonction de la compacité Φ du système. Pour une compacité comprise dans l'intervalle $\Phi = [0,75; 0,8]$, la coordinance Z augmente rapidement avec la compacité. On observe que, pour une compacité donnée, la coordinance Z d'un système non frottant est plus élevée que dans un système frottant. En effet les particules d'un système non frottant se réarrangent plus facilement que dans un système frottant, ce qui leur permet de mieux se répartir dans l'espace pour atteindre un état d'énergie de déformation plus faible, et donc d'avoir plus de contacts avec les particules voisines. Par ailleurs, la figure 4.19(b) montre encore la robustesse de la relation (3.6).

4.3.2.2 Surface de contact et forme des particules

La figure 4.20(a) montre l'évolution de l'indice de circularité des particules C défini par l'équation 3.5, en fonction de la compacité Φ pour des assemblages avec différents coefficients de frottement. Il apparaît que pour une compacité fixée, la forme des particules s'éloigne d'autant plus de la forme circulaire que le coefficient de frottement est grand. Ceci

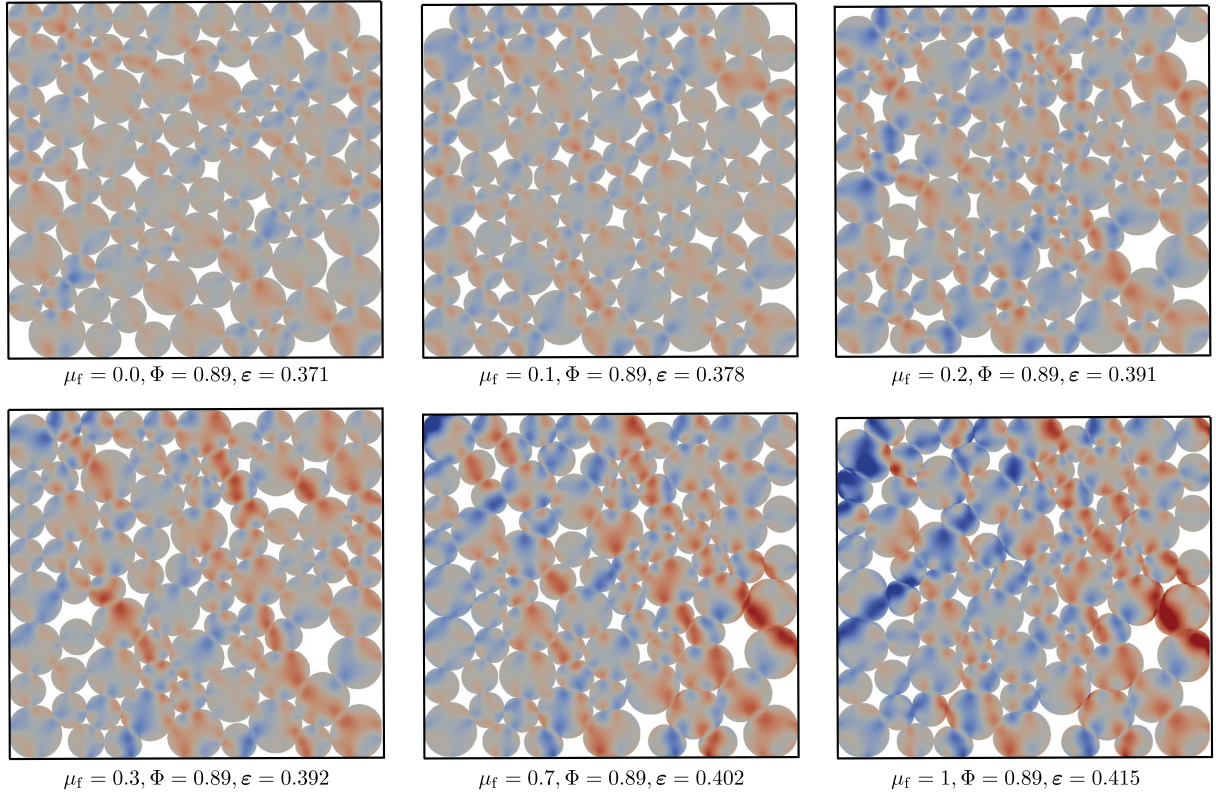


FIGURE 4.18 – État d'un assemblage de particules néo-hookéennes à la compacité $\Phi = 0,89$ pour différents coefficients de frottement. Ces états sont présentés avec un même code de couleurs qui correspond à la composante B_{xy} du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche.

est cohérent avec la figure 4.20(b) où il apparaît que la surface des contacts augmente, pour une compacité donnée, avec le coefficient de frottement.

4.3.2.3 Distribution des forces de contact et de l'énergie de déformation

Le réseau de contact est le support de la transmission des contraintes dans un matériau granulaire. Les grains interagissent à travers des forces de répulsion élastique f_n et de frottement f_t . La figure 4.21 montre la densité de probabilité des forces normales de contact (normalisées par la force normale moyenne) pour la compacité $\Phi = 0,91$ et pour des assemblages avec différents coefficients de frottement : $\mu_f = [0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 7, 1]$. En raison du nombre limité de particules dans les systèmes simulés, ces données sont bruitées. On observe néanmoins la tendance qu'ont ces distributions à être de plus en plus larges lorsque le coefficient de frottement augmente. Ceci est cohérent avec l'observation faite précédemment (section 4.3.1.2) d'une augmentation des hétérogénéités du système avec le coefficient de frottement.

La densité de probabilité de la densité d'énergie de déformation normalisées par la

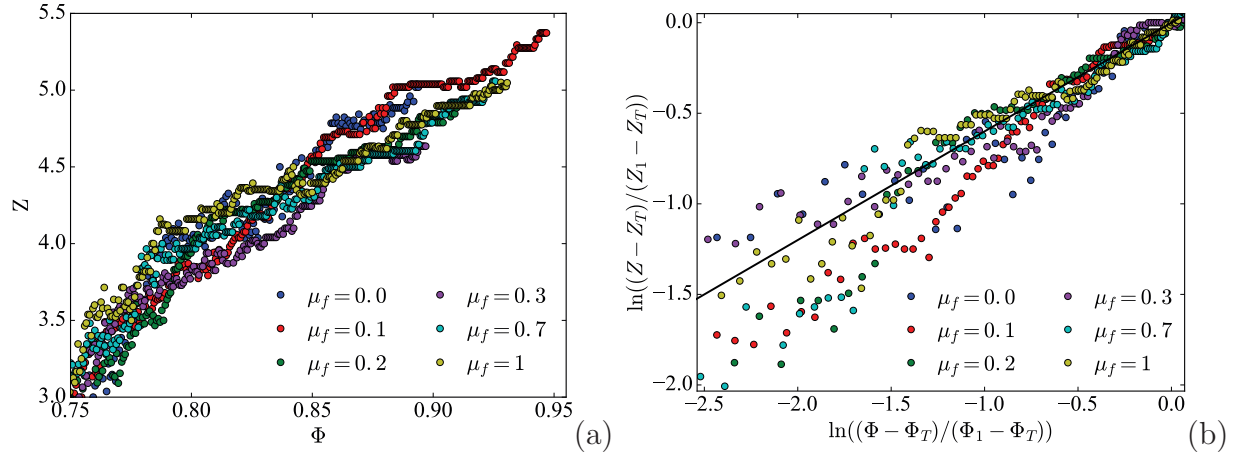


FIGURE 4.19 – Évolution de la coordonnée Z en fonction de la compacité Φ pour des systèmes avec des coefficients de frottement différents. La ligne continue (figure (b)) correspond à la relation (3.6).

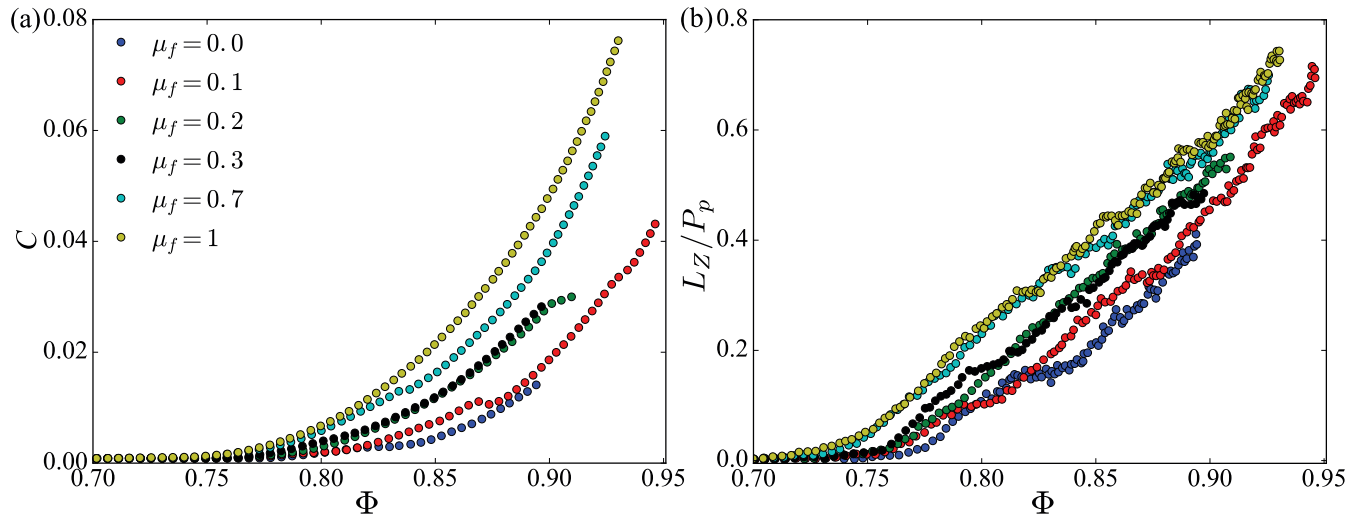


FIGURE 4.20 – Évolution de l'indice de circularité C (a) et de la surface relative moyenne des contacts L_Z/P_p (b) en fonction de la compacité Φ .

densité d'énergie de déformation moyenne, $P(\Psi/\langle\Psi\rangle)$ est tracée à la figure 4.22 pour des systèmes avec des coefficients de frottement différents et de compacité $\Phi = 0,9$. Cette distribution tend vers une loi exponentielle, comme cela a déjà été signalé à la section 4.2.2.4 : $P(\Psi) = e^{-\Psi/\langle\Psi\rangle}$. Quels que soient le coefficient de frottement et le coefficient de Poisson, la densité de probabilité de la densité d'énergie de déformation est donc, dans la limite des grandes compacités, une exponentielle décroissante. Ceci constitue une caractéristique remarquable des assemblages de particules néo-hookéennes étudiés dans cette thèse.

Puisque la valeur moyenne $\langle\Psi\rangle$ de l'énergie de déformation volumique dépend, pour

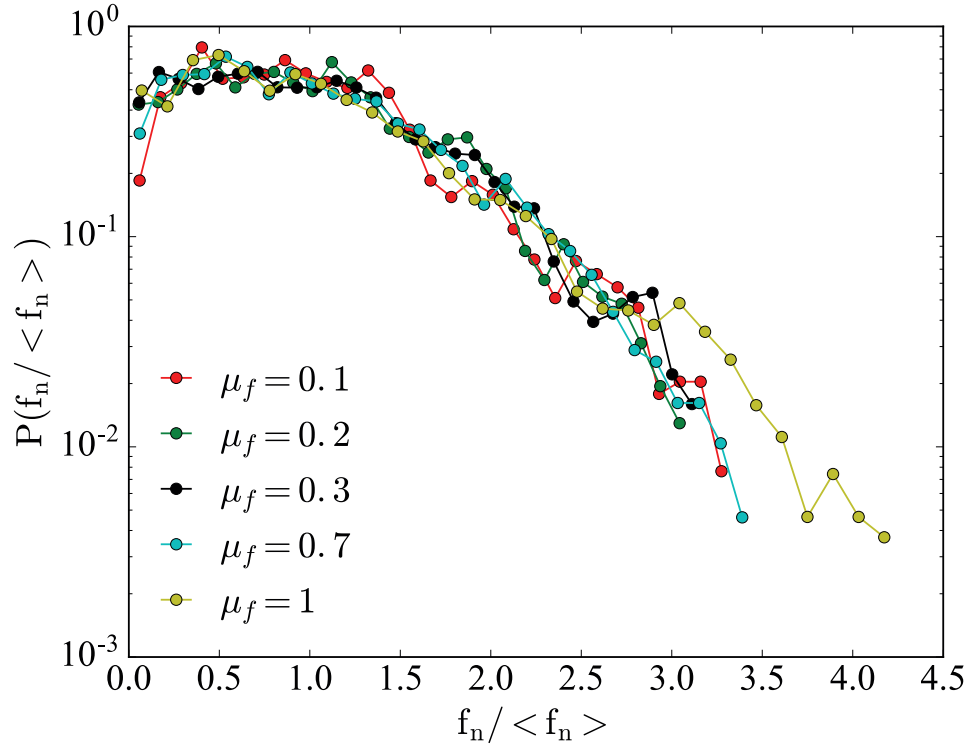


FIGURE 4.21 – Densité de probabilité (pdf) des forces normales de contact normalisées par la force normale moyenne pour la compacité $\Phi = 0,91$ et pour des systèmes ayant une même configuration géométrique initiale mais des coefficients de frottement différents.

une valeur donnée de la compacité, à la fois du coefficient de Poisson et du coefficient de frottement, l'énergie caractéristique qui apparaît dans la décroissance exponentielle de la densité de probabilité d'énergie de déformation varie d'un système à l'autre. Par contre, la nature exponentielle de cette décroissance est partagée par l'ensemble des assemblages de forte compacité.

4.4 Conclusion

Nous terminons ce chapitre en résumant les principaux résultats obtenus :

1. Comme attendu, la compressibilité des particules influe sur le comportement des assemblages : les grandeurs macroscopiques et structurales dépendent du coefficient de Poisson pour une valeur donnée de la déformation compressive cumulée ε . Lors d'une compression uniaxiale à déformation imposée, le volume des particules compressibles diminue plus rapidement et les particules restent circulaires plus longtemps.
2. Lorsque les variables macroscopiques et structurales que nous avons étudiées sont comparées entre systèmes composés de particules de compressibilités différentes, nous

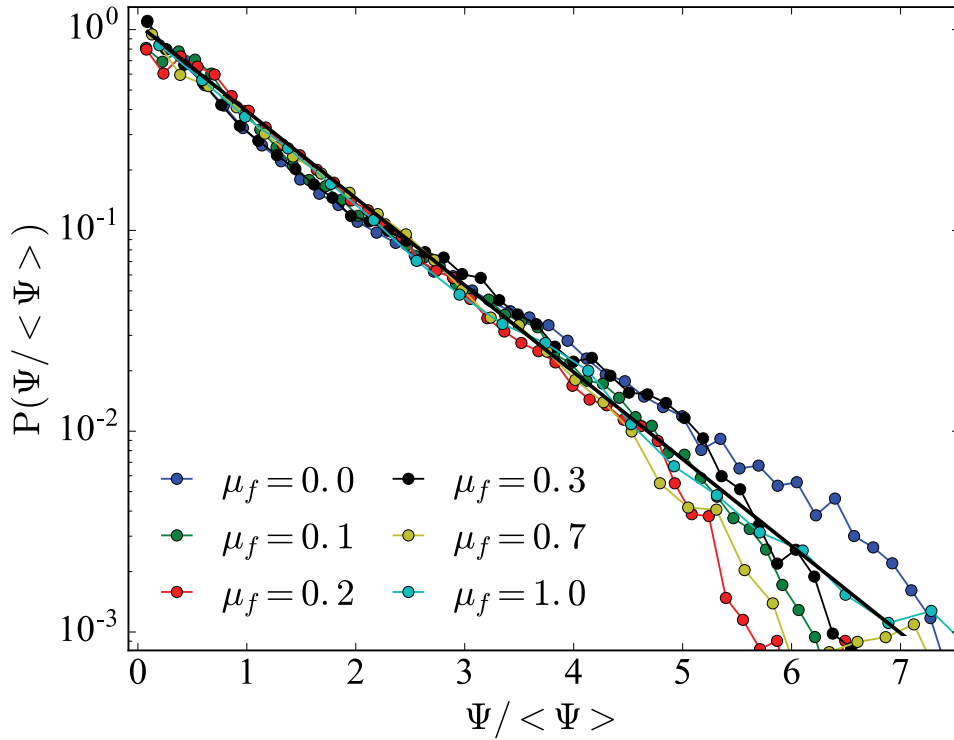


FIGURE 4.22 – Densité de probabilité (pdf) de la densité d'énergie de déformation normalisée par la densité d'énergie de déformation moyenne en échelle log-linéaire pour la compacité $\Phi = 0,9$.

observons quantitativement les mêmes caractéristiques d'un système à l'autre (force de compression, distribution des forces de contact, connectivité, indice de circularité, longueur des contacts, distribution de l'énergie).

3. L'analyse de l'effet du frottement pour un assemblage de particules compressibles avec le coefficient de Poisson $\nu = 0,34$ a permis de mettre en évidence différents effets. La dépendance de la compacité à la transition de rigidité avec le coefficient de frottement avait déjà été documentée pour des situations pour lesquelles les particules sont peu déformables. Nous sommes allés plus loin, en étudiant l'effet du coefficient de frottement dans un assemblage où les particules sont déformées au-delà des petites déformations. Nous avons aussi montré que les particules dans un système frottant perdent plus rapidement leur circularité que dans un système non frottant. Nous avons également caractérisé l'évolution de la connectivité en fonction de la compacité pour différents niveaux de frottement, et nous avons montré que les hétérogénéités du système augmentent avec le coefficient de frottement.
4. La densité d'énergie de déformation d'un assemblage de particules néo-hookéennes dont la compacité tend vers 1, tend vers une exponentielle décroissante.

Il serait maintenant intéressant de considérer d'autres lois de comportement élastique

(solide de Monney-Rivlin ([Mooney \(1940\)](#)), solide de Gent ([Gent \(1996\)](#)), etc.) afin de tester la robustesse de ces conclusions. De plus, l'étude de systèmes constitués d'un plus grand nombre de particules, avec des conditions aux limites différentes (frottement nul aux parois, limites périodiques, compression biaxiale) pourrait permettre de donner plus de généralités à nos résultats, ou d'en montrer les limites.

Conclusion et Perspectives

5.1 Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire ont porté sur l'étude des matériaux divisés composés d'entités molles. Ce type de matériau est très présent, comme dans des tissus biologiques, des poudres métalliques, des microgels ou des émulsions. Ces matériaux ont en commun la possibilité de pouvoir se déformer sans qu'il y ait rupture des particules, et d'atteindre des compacités bien au-delà de celles d'assemblages de particules rigides, grâce au changement de forme des particules. Cette thématique est centrale pour de nombreuses applications dans la vie quotidienne ainsi que dans l'industrie, comme la production de produits pharmaceutiques, alimentaires, cosmétiques, etc. Les études réalisées dans le cadre de cette thèse ont été motivées aussi bien par les applications que par le caractère fondamental des caractéristiques et des propriétés mécaniques et physiques de ces systèmes.

Le comportement des milieux granulaires à particules molles demande en effet à être plus largement exploré, même si des progrès significatifs ont été réalisés depuis plusieurs années à travers des développements de modèles numériques et de techniques expérimentales. Ces développements avaient pour but de décrire ces matériaux le plus finement possible et de comprendre leur comportement mécanique à partir de leur structure à l'échelle locale. Des systèmes composés de particules molles ont ainsi été simulés en modélisant les particules comme des particules solides avec des grands recouvrements entre particules, ce qui constitue une hypothèse forte qui ne convient plus pour décrire correctement la microstructure lorsque les particules sont soumises à de grandes déformations. Par ailleurs, des techniques expérimentales qui ont été développées ont permis d'étudier la structure de ces milieux, mais avec des restrictions sur le taux de déformation des particules, ou alors sur l'étendue des zones étudiées qui se limitaient, dans le cas des grandes déformations, au voisinage immédiat des parois. Dans ce travail de thèse, nous avons développé et utilisé des méthodes expérimentales et numériques qui sont adaptées aux cas des particules subissant des grandes déformations, pour décrire bien plus finement ses comportements.

Le premier chapitre de ce manuscrit a permis de donner un aperçu de la variété des systèmes constitués de particules molles, ainsi que de leur rôle important dans notre vie. Nous avons aussi présenté les principales méthodes numériques et expérimentales déve-

loppées par le passé pour étudier ces systèmes. Des résultats importants de la littérature concernant le comportement des milieux granulaires à particules molles ont également été rappelés. Enfin, ce premier chapitre a permis d'introduire la théorie classique de l'élasticité avec des déformations finies, qui a été utilisée dans cette thèse pour modéliser les grandes déformations des particules élastiques.

Le deuxième chapitre a été consacré à la méthodologie mise en œuvre dans cette thèse. Nous avons utilisé une technique de corrélation d'images numériques développée pour traiter de grandes images et de grands déplacements. Du côté des simulations numériques, nous avons utilisé un schéma implicite d'éléments finis FEM-CD qui est implémenté dans le logiciel LMGC90. Nous avons appliqué ces deux approches, expérimentales et numériques, à l'étude de la compression radiale d'une particule molle unique. Les champs cinématiques locaux de cylindres déformés ont été déterminés expérimentalement pour trois matériaux aux comportements mécaniques très différents, sous grandes déformations : du silicone réticulé, un hydrogel d'agar et une mousse de polyuréthane. L'échantillon de silicone réticulé se comporte comme un matériau néo-hookéen incompressible. Les simulations numériques ont été effectuées dans le cadre de la théorie des déformations finies. Les mesures expérimentales de grandeurs locales et globales coïncident bien avec les résultats numériques. Le comportement de l'échantillon constitué de gel d'agar se rapproche de celui d'un matériau plastique dans le régime de compression quasi-statique. Nous avons alors réalisé des simulations en considérant une loi de comportement plastique de von Mises pour ce matériau. Un bon accord entre les observations numériques et expérimentales pour des déformations globales faibles à modérées est observé. Cette étude a permis de valider la procédure expérimentale en pointant la robustesse de la méthode, qui permet entre autre de déterminer, en plus des champs de déformation et de déplacement, l'énergie de déformation du système élastique avec une excellente précision. Ces résultats ont été mis à profit au chapitre suivant.

Ce troisième chapitre concerne l'étude du comportement mécanique d'une assemblée de particules cylindriques de silicone réticulé sous compression uniaxiale d'amplitude finie. La procédure d'analyse des images brutes obtenues à partir du dispositif expérimental a été présentée, ainsi que la réalisation des simulations numériques. La comparaison des paramètres macroscopiques issus des expériences et des simulations a permis de déterminer le coefficient de frottement qui convient le mieux pour décrire le système. Un bon accord est également observé à travers une analyse de grandeurs micro-structurales. Nous avons retrouvé la relation fondamentale concernant la coordinance, $Z - Z_T = K\sqrt{\Phi - \Phi_T}$ où Φ_T est la compacité du système à la transition de rigidité. Ce résultat complète les données de la littérature pour des assemblages de particules élastiques avec des compacités largement plus grandes que Φ_T . L'écart-type relatif de la densité d'énergie de déformation particulaire montre que le système devient de moins en moins hétérogène avec l'augmentation de la compacité, pour des compacités au-delà celle de la transition de rigidité. Enfin, une étude des paramètres macroscopiques du système pendant une décharge est aussi exposée. Des comportements différents entre les systèmes numériques et expérimentaux sont remarqués. L'observation de l'ensemble des particules pendant la décharge nous conduit à penser que ces différences proviennent des frottements entre les particules et les parois de la cellule qui ne sont pas pris en compte avec suffisamment de finesse dans les simulations. De

nouvelles simulations doivent être réalisées pour étayer cette hypothèse. Ce chapitre a permis de confirmer la pertinence de la méthode de corrélation d'images pour étudier des assemblages de particules molles, et de montrer que les choix effectués pour réaliser les simulations numériques (en particulier l'hypothèse des déformations planes) permettent de simuler correctement un matériau granulaire athermique réel.

Le dernier chapitre propose une étude numérique paramétrique d'assemblages de cylindres élastiques : nous avons analysé l'effet de la compressibilité du matériau sur le comportement de ces assemblages. Les grandeurs macroscopiques et structurales dépendent du coefficient de Poisson pour une valeur donnée de la déformation compressive cumulée. Sous compression uniaxiale à déformation imposée, le volume des particules compressibles diminue plus rapidement et ces particules restent circulaires plus longtemps. L'analyse de l'évolution de ces grandeurs macroscopiques en fonction de la compacité a permis de démontrer que la compressibilité ne change pas les caractéristiques d'un système à l'autre, pour une compacité donnée. L'étude de la micro-structure de ces systèmes a également permis de montrer que la relation $Z - Z_T = K\sqrt{\Phi - \Phi_T}$ entre la coordinance et la compacité du système est valable, avec les mêmes paramètres, quelle que soit la compressibilité du matériau. L'analyse de la distribution des forces normales de contact entre les particules a montré que la distribution des forces normales de contact ne change pas significativement d'un système à l'autre. Nous avons aussi analysé l'effet du frottement pour un assemblage de particules compressibles avec le coefficient de Poisson $\nu = 0.34$. Nous avons montré qu'au delà des petites déformations, les particules dans un système frottant perdent plus rapidement leur circularité que dans un système non frottant. Une dépendance de la compacité à la transition de rigidité, Φ_T , avec le coefficient de frottement a été trouvée, en accord avec des études antérieures. Enfin, nous avons mis en évidence que la densité d'énergie de déformation d'un assemblage de particules néo-hookéennes dont la compacité tend vers 1, tend vers une exponentielle décroissante quels que soient la compressibilité du matériaux et le coefficient de frottement dans le système.

5.2 Perspectives

Les perspectives ouvertes par cette thèse sont nombreuses et concernent à la fois les développements numériques, expérimentaux, et les analyses physiques. Pour améliorer les résultats obtenus, des dispositifs expérimentaux adaptés à des systèmes contenant beaucoup de particules seraient bienvenus. En parallèle, une optimisation de l'algorithme de corrélation d'images numériques pourrait permettre de mieux rendre compte de la déformation à la périphérie des particules. De même, l'étude numérique de systèmes constitués d'un plus grand nombre de particules avec des conditions aux limites différentes telles que le frottement nul aux parois ou des limites périodiques permettrait d'obtenir des résultats moins sujets aux fluctuations. Au-delà de la compression uniaxiale, l'étude de la réponse sous cisaillement simple permettrait d'aller plus loin dans la caractérisation et la compréhension des comportements mécaniques de ces systèmes. La première étape sera alors de préparer l'échantillon à cisailer en le soumettant à une compression biaxiale jusqu'à at-

teindre une certaine pression de confinement. Les propriétés de l'échantillon ensuite cisailé dépendront de cette pression : c'est lorsque la pression de confinement sera du même ordre de grandeur que le module de cisaillement des particules que les effets de la déformabilité des particules se manifesteront le plus.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons simulé les particules néo-hookéennes pour retrouver le comportement d'un matériau réel en silicone réticulé. Il serait intéressant de considérer d'autres lois de comportement élastique telles que celles des modèles de *Mooney-Rivlin* ou de *Gent*, afin de tester si les courbes maîtresses que nous avons obtenues pour des systèmes à particules néo-hookéennes compressibles sont valables aussi pour des équations constitutives plus complexes, comportant par exemple des informations sur l'extensibilité maximale du matériau comme cela est le cas avec le modèle de *Gent*.

Il serait également intéressant d'étendre ces travaux à l'étude de l'influence de la polydispersité du système, ainsi que de la forme des particules (carrée, polygonale, non-convexe, allongée, etc). Les effets de ces paramètres ont été beaucoup analysés et bien compris dans les assemblages des particules indéformables ([Azéma et al. \(2006\)](#); [Voivret et al. \(2007\)](#); [Azéma et al. \(2009\)](#); [Azéma et Radjai \(2010\)](#)), mais restent encore très peu explorés dans le cas des assemblages des particules déformables.

Bibliographie

- M. Abkarian et A. Viallat. Vesicles and red blood cells in shear flow. *Soft Matter*, 4 : 653–657, 2008. [Cité page 10.]
- V. Acary. *Contribution à la modélisation mécanique et numérique des édifices maçonnés*. PhD thesis, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2001. [Cité page 18.]
- R. Afrin, M. T. Alam, et A. Ikai. Pretransition and progressive softening of bovine carbonic anhydrase ii as probed by single molecule atomic force microscopy. *Protein Science*, 14 : 1447–1457, 2005. [Cité page 12.]
- C. Alvarez-Lorenzo, B. Blanco-Fernandez, A. M. Puga, et A. Concheiro. Crosslinked ionic polysaccharides for stimuli-sensitive drug delivery. *Advanced Drug Delivery Reviews*, 65 : 1148 – 1171, 2013. [Cité page 10.]
- J. E. Andrade et C. F. Avila. Granular Element Method (GEM) : linking inter-particle forces with macroscopic loading. *Granular Matter*, 14 :51–61, 2012. [Cité page 15.]
- D. C. Andrei, B. J. Briscoe, P. F. Luckham, et D. R. Williams. The deformation of microscopie gel particles. *Journal de Chimie Physique*, 93 :960–976, 1996. [Cité page 12.]
- S. Antonyuk, M. Khanal, J. Tomas, S Heinrich, et L. Morl. Impact breakage of spherical granules : Experimental study and dem simulations. *Chemical Engineering and Processing : Process Intensification*, 45 :838 – 856, 2006. [Cité page 18.]
- Tourisme Aveyron. Aveyron. <https://decouvrir.blog.tourisme-aveyron.com/patrimoine/12-conseils-pour-decouvrir-l-aveyron>, 2018. [Cité page 3.]
- S. Avril, M. Bonnet, A. S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, et F. Pierron. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48 :381, 2008. [Cité page 16.]
- E. Azéma et F. Radjai. Stress-strain behavior and geometrical properties of packings of elongated particles. *Physical Review E*, 81 :051304, 2010. [Cité page 118.]
- E. Azéma, F. Radjai, R. Peyroux, F. Dubois, et G. Saussine. Vibrational dynamics of confined granular materials. *Physical Review E*, 74 :031302, 2006. [Cité page 118.]

- E. Azéma, F. Radjai, et G. Saussine. Quasistatic rheology, force transmission and fabric properties of a packing of irregular polyhedral particles. *Mechanics of Materials*, 41 :729 – 741, 2009. [Cité page 118.]
- S. G. Bardenhagen et J. U. Brackbill. Dynamic stress bridging in granular material. *Journal of Applied Physics*, 83 :5732–5740, 1998. [Cité page 18.]
- S. G. Bardenhagen, E. N. Harstad, P. J. Maudlin, G. T. Gray, et J. C. Foster. Viscoelastic models for explosive binder materials. *AIP Conference Proceedings*, 429 :281–284, 1998. [Cité page 18.]
- S. G. Bardenhagen, K. M. Roessig, J. U. Brackbill, W. M. Witzel, et J. C. Foster. Improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material. *Tech Science Press*, 2 :509–522, 2001. [Cité page 19.]
- S.G. Bardenhagen, J.U. Brackbill, et D. Sulsky. Numerical study of stress distribution in sheared granular material in two dimensions. *Physical Review E (Stat Phys Plasmas Fluids Relat Interdiscip Topics)*, 62 :3882–3890, 2000. [Cité pages 18 et 19.]
- D. B. Barker et M. E. Fourny. Measuring fluid velocities with speckle patterns. *Optics Letters*, 1 :135–137, 1977. [Cité page 15.]
- M. Barnabé, N. Blanc, T. Chabin, J.-Y. Delenne, A. Duri, X. Frank, V. Hugouvieux, E. Lutton, F. Mabilie, S. Nezamabadi, N. Perrot, F. Radjai, T. Ruiz, et A. Tonda. Multiscale modeling for bioresources and bioproducts. *Innovative Food Science & Emerging Technologies*, 46 :41 – 53, 2018. [Cité page 9.]
- A.-F. Bastawros, H. Bart-Smith, et A.G. Evans. Experimental analysis of deformation mechanisms in a closed-cell aluminum alloy foam. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :301 – 322, 2000. [Cité page 16.]
- L. Bateman. *The Chemistry and Physics of Rubber-Like Substances*. Applied Science Publishers, 1963. [Cité page 25.]
- D.J. Benson. A mixture theory for contact in multi-material eulerian formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140 :59–86, 1997. [Cité page 18.]
- L. Berthier et G. Biroli. Theoretical perspective on the glass transition and amorphous materials. *Reviews of Modern Physics*, 83 :587–645, 2011. [Cité page 21.]
- L. Berthier et T. A. Witten. Compressing nearly hard sphere fluids increases glass fragility. *Europhysics Letters*, 86 :10001, 2009a. [Cité page 21.]
- L. Berthier et T. A. Witten. Glass transition of dense fluids of hard and compressible spheres. *Physical Review E*, 80 :021502, 2009b. [Cité page 21.]

- M. D. Bolton, Y. Nakata, et Y. P. Cheng. Micro- and macro-mechanical behaviour of DEM crushable materials. *Géotechnique*, 58 :471–480, 2008. [Cité page 18.]
- R.T. Bonnecaze et M. Cloitre. Micromechanics of soft particle glasses. *Advances in Polymer Science*, 236 :117–161, 2010. [Cité pages 16 et 17.]
- M. Bornert, F. Brémand, P. Doumalin, J.-C. Dupré, M. Fazzini, M. Grédiac, F. Hild, S. Mistou, J. Molimard, J.-J. Orteu, L. Robert, Y. Surrel, P. Vacher, et B. Wattrisse. Assessment of digital image correlation measurement errors : Methodology and results. *Experimental Mechanics*, 49 :353–370, 2009. [Cité pages 31 et 33.]
- N. Brodu, J. Dijksman, et R. P. Behringer. Spanning the scales of granular materials through microscopic force imaging. *Nature Communications*, 6 :6361, 2015. [Cité pages 11 et 15.]
- B. Brogliato. *Nonsmooth Mechanics*. Springer International Publishing Switzerland, 1999. [Cité page 19.]
- D. Cantor, E. Azéma, P. Sornay, et F. Radjai. Three-dimensional bonded-cell model for grain fragmentation. *Computational Particle Mechanics*, 4 :441–450, 2017. [Cité page 18.]
- I. Chasiotis et W. G. Knauss. A new microtensile tester for the study of mems materials with the aid of atomic force microscopy. *Experimental Mechanics*, 42 :51–57, 2002. [Cité page 16.]
- J. R. Chen, C. W. Mao, et C. N. Weng. A recombinant chimera composed of repeat region RR1 of Mycoplasma hyopneumoniae adhesin with Pseudomonas exotoxin : in vivo evaluation of specific igg response in mice and pigs. *Vet Microbiol*, 80 :347–57, 2006. [Cité page 10.]
- S. Cho, J. F. Cárdenas-García, et I. Chasiotis. Measurement of nanodisplacements and elastic properties of MEMS via the microscopic hole method. *Sensors and Actuators A : Physical*, 120 :163 – 171, 2005a. [Cité page 16.]
- S. Cho, I. Chasiotis, T. A. Friedmann, et J. P. Sullivan. Young’s modulus, poisson’s ratio and failure properties of tetrahedral amorphous diamond-like carbon for mems devices. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15 :728, 2005b. [Cité page 16.]
- T. P. Chu, W. F. Ranson, et M. Sutton. Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics. *Experimental Mechanics*, 25 :232–244, 1985. [Cité page 15.]
- P. M. Claesson, T. Ederth, V. Bergeron, et M. W. Rutland. Techniques for measuring surface forces. *Advances in Colloid and Interface Science*, 67 :119 – 183, 1996. [Cité page 12.]
- M. Cloitre, R. Borrega, F. Monti, et L. Leibler. Glassy dynamics and flow properties of soft colloidal pastes. *Physical Review Letters*, 90 :068303, 2003. [Cité page 9.]

- E.G Coker et L.N.G Filon. *Treatise on Photoelasticity*. Cambridge University Press, London, 1957. [Cité page 13.]
- J. C. Criscione, M. S. Sacks, et W. C. Hunter. Experimentally tractable, pseudo-elastic constitutive law for biomembranes : I. theory. *Journal of Biomechanical Engineering*, 125 :94–99, 2003. [Cité page 25.]
- S.J. Cummins et J.U. Brackbill. An implicit particle-in-cell method for granular materials. *Journal of Computational Physics*, 180 :506 – 548, 2002. [Cité page 19.]
- P. A. Cundall et O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29 :47–65, 1979. [Cité page 17.]
- P. Dantu. Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents. Dans *International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, pages 144–148, London, 1957. [Cité page 13.]
- O. Dauchot, G. Marty, et G. Biroli. Dynamical heterogeneity close to the jamming transition in a sheared granular material. *Physical Review Letters*, 95 :265701, 2005. [Cité page 21.]
- B.V. Derjaguin, V.M. Muller, et Y.P. Toporov. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *Journal of Colloid and Interface Science*, 53 :314–326, 1975. [Cité page 11.]
- J. A. Dijksman, F. Rietz, K. A. Lőrincz, M. van Hecke, et W. Losert. Refractive index matched scanning of dense granular materials. *The Review of scientific instruments*, 83 :011301, 2012. [Cité page 14.]
- E. K. Dimitriadis, F. Horkay, J. Maresca, B. Kachar, et R. S. Chadwick. Determination of elastic moduli of thin layers of soft material using the atomic force microscope. *Biophysical journal*, 82 :2798–2810, 2002. [Cité page 11.]
- A. Donev, R. Connelly, F. H. Stillinger, et S. Torquato. Underconstrained jammed packings of nonspherical hard particles : Ellipses and ellipsoids. *Physical Review E*, 75 :051304, 2007. [Cité page 23.]
- A. Drescher et G. de Josselin de Jong. Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20 :337 – 340, 1972. [Cité page 13.]
- T. D. Dudderar et P. G. Simpkins. Laser speckle photography in a fluid medium. *Nature*, 270 :45 – 47, 1977. [Cité page 15.]
- J. M. Dulieu-Barton et P. Stanley. Development and applications of thermoelastic stress analysis. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 33 :93–104, 1998. [Cité page 13.]

- D. J. Durian. Foam mechanics at the bubble scale. *Physical Review Letters*, 75 :4780–4783, 1995. [Cité pages 17, 24 et 81.]
- E. Emery, J. Oliver T. Pugsley, J. Sharma, et J. Zhou. Flowability of moist pharmaceutical powders. *Powder Technology*, 189 :409 – 415, 2009. [Cité page 9.]
- J. M. Erikson, N. W. Mueggenburg, H. M. Jaeger, et S. R. Nagel. Force distributions in three-dimensional compressible granular packs. *Physical Review E*, 66 :040301, 2002. [Cité page 104.]
- A. Favier de Coulomb, M. Bouzid, P. Claudin, E. Clément, et B. Andreotti. Rheology of granular flows across the transition from soft to rigid particles. *Physical Review Fluids*, 2 :102301, 2017. [Cité page 11.]
- P.K. Freakley et A.R. Payne. *Theory and Practice of Engineering with Rubber*. Applied Science Publishers, 1978. [Cité page 25.]
- A. N. Gent. A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 69 :59–61, 1996. [Cité pages 27 et 114.]
- D. T. Gethin, R. S. Ransing, R. W. Lewis, M. Dutko, et A.J. L. Crook. Numerical comparison of a deformable discrete element model and an equivalent continuum analysis for the compaction of ductile porous material. *Computers & Structures*, 79 :1287–1294, 2001. [Cité page 19.]
- GMSH. Gmsh. <http://gmsh.info/>, 2018. [Cité page 64.]
- Golf. Golf. <https://twoguyswithballs.com/blog/what-is-golf-ball-compression>, 2018. [Cité page 3.]
- L. Gong, S. Kyriakides, et N. Triantafyllidis. On the stability of kelvin cell foams under compressive loads. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53 :771–794, 2005. [Cité page 38.]
- E. Guyon, S. Roux, A. Hansen, D. Bideau, J. P. Troadec, et H. Crapo. Non-local and non-linear problems in the mechanics of disordered systems : application to granular media and rigidity problems. *Reports on Progress in Physics*, 53 :373, 1990. [Cité page 97.]
- G. Hantal, L. Brochard, H. Laubie, D. Ebrahimi, R. J.-M. Pellenq, F. J. Ulm, et B. Coasne. Atomic-scale modelling of elastic and failure properties of clays. *Molecular Physics*, 112 : 1294–1305, 2014. [Cité page 10.]
- D. A. Head. Critical scaling and aging in cooling systems near the jamming transition. *Physical Review Letters*, 102 :138001, 2009. [Cité page 21.]
- F. Hild et S. Roux. Digital image correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties—a review. *Strain*, 42 :69–80, 2006. [Cité page 31.]

- G.A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics : A continuum approach for engineering*. Wiley, London, 2000. [Cité pages 25, 27 et 37.]
- D. Howell, R. P. Behringer, et C. Veje. Stress fluctuations in a 2D granular couette experiment : A continuous transition. *Physical Review Letters*, 82 :5241–5244, 1999. [Cité page 103.]
- J.D. Humphrey. *Cardiovascular solid mechanics : Cells, Tissues, and Organs*. Springer Science & Business Media, 2002. [Cité page 25.]
- R. Hurley, E. Marteau, G. Ravichandran, et J. E. Andrade. Extracting inter-particle forces in opaque granular materials : Beyond photoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 63 :154 – 166, 2014. [Cité page 15.]
- M. Jean. Unilateral contact and dry friction : time and space variables discretization. *Archives of Mechanics, Warszawa*, 40 :677–691, 1988. [Cité page 17.]
- M. Jean. Frictional contact in rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterials. Dans *Mechanics of Geomaterial Interfaces*, pages 463–486. Elsevier Science Publisher, Amsterdam, 1995. [Cité pages 17 et 19.]
- M. Jean. The non smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanic and Engineering*, 177 :235–257, 1999. [Cité page 17.]
- M. Jean, F. Jourdan, et B. Tathi. Numerical dynamics for the simulation of deep drawing. Dans *Proceeding of The International Deep Drawing Research Group (IDDRG 1994)*, Handbooks on Theory and Engineering Applications of Computational Methods, 1994. [Cité page 17.]
- M. Jean et J. J. Moreau. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. Dans *Proceedings of Contact Mechanics International Symposium*, pages 31–48, Lausanne, Switzerland, 1992. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. [Cité page 17.]
- M. Jean et E. Pratt. A system of rigid bodies with dry friction. *International Journal of Engineering Science*, 23 :497–513, 1985. [Cité page 17.]
- K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge university press, 1987. [Cité pages 11, 36 et 40.]
- K. L. Johnson, K. Kendall, et A. D. Roberts. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 324 :301–313, 1971. [Cité page 11.]
- P. Jongchansitto, X. Balandraud, M. Grediac, C. Beitone, et I. Preechawuttipong. Using infrared thermography to study hydrostatic stress networks in granular materials. *Soft Matter*, 10 :8603–8607, 2014. [Cité page 14.]

- G. Katgert, M. E. Möbius, et M. van Hecke. Rate dependence and role of disorder in linearly sheared two-dimensional foams. *Physical Review Letters*, 101 :058301, 2008. [Cité page 21.]
- G. Katgert et M. van Hecke. Jamming and geometry of two-dimensional foams. *Europhysics Letters*, 92 :34002, 2010. [Cité page 24.]
- A. S. Keys, A. R. Abate, S. C. Glotzer, et D. J. Durian. Measurement of growing dynamical length scales and prediction of the jamming transition in a granular material. *Nature*, 3 :260, 2007. [Cité page 21.]
- K. G. Knauss, I. Chasiotis, et Y. Huang. Mechanical measurements at the micron and nanometer scales. *Mechanics of Materials*, 35 :217 – 231, 2003. [Cité page 16.]
- J.A Koupai, F. Sohrab, et G. Swarbrick. Evaluation of hydrogel application on soil water retention characteristics. *Journal of Plant Nutrition*, 31 :317–331, 2008. [Cité page 10.]
- T. Lachhab. *Études des propriétés mécaniques d’empilements désordonnés de billes de gel*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994. [Cité page 9.]
- J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, et P. E. Wright. Convergence properties of the nelder–mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on optimization*, 9 : 112–147, 1998. [Cité page 33.]
- L.D. Landau et E.M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*. Butterworth-Heinemann, Oxford, third edition édition, 1959. [Cité pages 13, 17 et 24.]
- V. J. Langlois, S. Hutzler, et D. Weaire. Rheological properties of the soft-disk model of two-dimensional foams. *Physical Review E*, 78 :021401, 2008. [Cité page 21.]
- P. A. Langston, T. U. Üzüñ, et D. M. Heyes. Discrete element simulation of granular flow in 2D and 3D hoppers : dependence of discharge rate and wall stress on particle interactions. *Chemical Engineering Science*, 50 :967–987, 1995. [Cité page 11.]
- T.J. Lardner et P. Pujara. XII - Compression of spherical cells. Dans S. Nemat-Nasser, éditeur, *Mechanics Today*, pages 161 – 176. Pergamon, 1980. [Cité page 11.]
- D. C. Lin, D. I. Shreiber, E. K. Dimitriadis, et F. Horkay. Spherical indentation of soft matter beyond the hertzian regime : numerical and experimental validation of hyperelastic models. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 8 :345, 2009. [Cité page 11.]
- Y.-L. Lin, D.-M. Wang, W.-M. Lu, Y.-S. Lin, et K.-L. Tung. Compression and deformation of soft spherical particles. *Chemical Engineering Science*, 63 :195–203, 2008. [Cité page 12.]
- A. J. Liu et S. R. Nagel. Jamming is not just cool any more. *Nature*, 396 :21–22, 1998. [Cité pages 20 et 21.]

- C. Liu, S. R. Nagel, D. A. Schecter, S. N. Coppersmith, S. Majumdar, O. Narayan, et T. A. Witten. Force fluctuations in bead packs. *Science*, 269 :513–515, 1995. [Cité page 14.]
- K. K. Liu. Deformation behaviour of soft particles : a review. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 39 :189–199, 2006. [Cité pages 10 et 11.]
- K. K. Liu, V. Chan, et Z. Zhang. Capsule-substrate contact deformation : Determination of adhesion energy. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 40 :491–495, 2002. [Cité page 11.]
- K. K. Liu et K. T. Wan. New model to characterise cell-substrate adhesion in the presence of osmosis. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 38 :690–691, 2000. [Cité page 11.]
- L. Liu, K.D. Kafui, et C. Thornton. Impact breakage of spherical, cuboidal and cylindrical agglomerates. *Powder Technology*, 199 :189 – 196, 2010. [Cité page 18.]
- LMGC90. Lmgc90. https://git-xen.lmgc.univ-montp2.fr/lmgc90/lmgc90_user/wikis/home, 2018. [Cité pages 19 et 34.]
- P. F. Luckham et B. A. de L. Costello. Recent developments in the measurement of interparticle forces. *Advances in Colloid and Interface Science*, 44 :183 – 240, 1993. [Cité page 12.]
- M.A. Mader, V. Vitkova, et D. Abkarian. Dynamics of viscous vesicles in shear flow. *The European Physical Journal E*, 19 :389–397, 2006. [Cité page 10.]
- M. Mailman, C. F. Schreck, C. S. O’Hern, et B. Chakraborty. Jamming in systems composed of frictionless ellipse-shaped particles. *Physical Review Letters*, 102 :255501, 2009. [Cité page 23.]
- T. S. Majmudar et R. P. Behringer. Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, 435 :1079–1082, 2005. [Cité pages 11, 13 et 14.]
- T. S. Majmudar, M. Sperl, S. Luding, et R. P. Behringer. Jamming transition in granular systems. *Physical Review Letters*, 98 :058001, 2007. [Cité pages 21, 24, 81 et 82.]
- H. A. Makse, D. L. Johnson, et L. M. Schwartz. Packing of compressible granular materials. *Physical Review Letters*, 84 :4160, 2000. [Cité pages 82, 102 et 103.]
- T. G. Mason, J. Bibette, et D. A. Weitz. Elasticity of compressed emulsions. *Physical Review Letters*, 75 :2051, 1995. [Cité page 17.]
- D. Maugis. *Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids*. Springer, 2000. [Cité page 11.]
- R.D Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 16 : 259–268, 1949. [Cité page 17.]

- M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11 :582–592, 1940. [Cité pages 25 et 114.]
- S. Mora, T.-L. Vu, J. Barés, et S. Nezamabadi. Highly deformed grain : from the hertz contact limitation to a new strain field description in 2d. *EPJ Web of Conference*, 140 : 05011, 2017. [Cité page 31.]
- J. J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a hilbert space. *Journal of Differential Equations*, 26 :347–374, 1977. [Cité pages 17 et 18.]
- J. J. Moreau. Liasons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 296 :1473–1476, 1983. [Cité page 17.]
- J. J. Moreau. Bounded variation in time. Dans P.D. Panagiotopoulos et G Strang, éditeurs, *Topics in Nonsmooth Mechanics*, pages 1–74. Birkhäuser, Basel, 1988a. [Cité page 17.]
- J. J. Moreau. New computation methods in granular dynamics. Dans C. Thornton, éditeur, *Powders & Grains 93*, pages 227–232. August Aimé Balkema, Rotterdam, 1993. [Cité page 17.]
- J.J. Moreau. *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, volume 302 de *International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures*. Springer, Vienna, 1988b. [Cité page 17.]
- J.J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials. *European Journal of Mechanics A - Solids*, 13 :93–114, 1994. [Cité page 17.]
- R. Moreno, M. Ghadiri, et S. J. Antony. Effect of the impact angle on the breakage of agglomerates : a numerical study using DEM. *Powder Technology*, 130 :132 – 137, 2003. [Cité page 18.]
- C. F. Moukarzel. Isostatic phase transition and instability in stiff granular materials. *Physical Review Letters*, 81 :1634, 1998. [Cité pages 22 et 97.]
- D. M. Mueth, H. M. Jaeger, et S. R. Nagel. Force distribution in a granular medium. *Physical Review E*, 57 :3164, 1998. [Cité pages 14 et 102.]
- S. Mukhopadhyay et J. Peixinho. Packings of deformable spheres. *Physical Review E*, 84 : 011302, 2011. [Cité page 14.]
- A. A. Munjiza. *The Combined Finite-Discrete Element Method*. Wiley, Chichester, 2004. [Cité page 19.]
- A. A. Munjiza, D. R. J. Owen, et N. Bicanic. A combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids. *Engineering Computations*, 12 :145–174, 1995. [Cité pages 18 et 19.]

- S. Nezamabadi, T. H. Nguyen, J. Y. Delenne, et F. Radjai. Modeling soft granular materials. *Granular Matter*, 19 :8, 2017. [Cité page 18.]
- S. Nezamabadi, F. Radjai, J. Averseng, et J. Y. Delenne. Implicit frictional-contact model for soft particle systems. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 83 :72–87, 2015. [Cité page 18.]
- S. Nezamabadi, H. Zahrouni, et J. Yvonnet. Solving hyperelastic material problems by asymptotic numerical method. *Computational mechanics*, 47 :77–92, 2011. [Cité page 37.]
- D.-H. Nguyen, E. Azéma, P. Sornay, et F. Radjai. Bonded-cell model for particle fracture. *Physical Review E*, 91 :022203, 2015. [Cité page 18.]
- M. L. Nguyen et S. N. Coppersmith. Scalar model of inhomogeneous elastic and granular media. *Physical Review E*, 62 :5248–5262, 2000. [Cité page 102.]
- T. H. Nguyen. *Modélisation numérique et rhéologie des matériaux à particules déformables*. PhD thesis, Université de Montpellier, 2016. [Cité page 18.]
- J. T. Oden et N. Kikuchi. Finite element methods for constrained problems in elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18 :701–725, 1982. [Cité page 25.]
- R. W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 326 :565–584, 1972. [Cité pages 25 et 26.]
- R. W. Ogden. Elastic deformations of rubberlike solids. Dans H. G. Hopkins et M. J. Sewell, éditeurs, *Mechanics of Solids*, pages 499 – 537. Pergamon, Oxford, 1982. [Cité pages 25 et 26.]
- C. S. O’Hern, S. A. Langer, A. J. Liu, et S. R. Nagel. Force distributions near jamming and glass transitions. *Physical Review Letters*, 86 :111–114, 2001. [Cité page 102.]
- C. S. O’Hern, S. A. Langer, A. J. Liu, et S. R. Nagel. Random packings of frictionless particles. *Physical Review Letters*, 88 7 :075507, 2002. [Cité pages 21, 23, 82 et 102.]
- C. S. O’Hern, L. E. Silbert, A. J. Liu, et S. R. Nagel. Jamming at zero temperature and zero applied stress : the epitome of disorder. *Physical Review E : Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 68 :011306, 2003. [Cité pages 17, 23, 81 et 82.]
- P. Olsson et S. Teitel. Critical scaling of shear viscosity at the jamming transition. *Physical Review Letters*, 99 :178001, 2007. [Cité page 21.]
- G. Pampolini et G. Del Piero. Strain localization in open-cell polyurethane foams : experiments and theoretical model. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3 : 969–981, 2008. [Cité page 38.]

- B. Pan, K. Qian, H. Xie, et A. Asundi. Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement : a review. *Measurement Science and Technology*, 20 :062001, 2009. [Cité pages 16, 31 et 33.]
- M. Pasha, S. Dogbe, C. Hare, A. Hassanpour, et M. Ghadiri. A linear model of elasto-plastic and adhesive contact deformation. *Granular Matter*, 16 :151–162, 2014. [Cité page 11.]
- W. H. Peters et W. F. Ranson. Digital imaging techniques in experimental stress analysis. *Optical Engineering*, 21 :213427, 1982. [Cité page 15.]
- Poudre. Poudre, 2018. [Cité page 3.]
- F. Radjai. Modeling force transmission in granular materials. *Comptes Rendus Physique*, 16 :3 – 9, 2015. [Cité page 102.]
- F Radjai et F. Dubois. *Discrete-element Modeling of Granular Materials*. Iste-Wiley, London, 2011. [Cité page 18.]
- F. Radjai, M. Jean, J. J. Moreau, et S. Roux. Force distributions in dense two-dimensional granular systems. *Physical Review Letters*, 77 :274–277, 1996. [Cité pages 11 et 102.]
- F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean, et J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Physical Review Letters*, 80 :61–64, 1998. [Cité page 18.]
- M. Renouf, F. Dubois, et P. Alart. A parallel version of the non smooth contact dynamics algorithm applied to the simulation of granular media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :375 – 382, 2004. [Cité page 18.]
- M. Renouf, F. Massi, N. Fillot, et A. Saulot. Numerical tribology of a dry contact. *Tribology International*, 44 :834 – 844, 2011. [Cité page 18.]
- R.S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials iv. further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 241 :379–397, 1948. [Cité page 25.]
- J.-N. Roux. Geometric origin of mechanical properties of granular materials. *Physical Review E*, 61 :6802–6836, 2000. [Cité pages 22 et 97.]
- M. Saadatfar, A. P. Sheppard, T. J. Senden, et Al. J. Kabla. Mapping forces in a 3D elastic assembly of grains. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60 :55 – 66, 2012. [Cité page 14.]
- N. Sabate, D. Vogel, A. Gollhardt, J. Keller, B. Michel, C. Cané, I. Gràcia, et J. R. Morante. Measurement of residual stresses in micromachined structures in a microregion. *Applied Physics Letters*, 88 :071910, 2006. [Cité page 16.]

- M. S. Sacks. Incorporation of experimentally-derived fiber orientation into a structural constitutive model for planar collagenous tissues. *Journal of Biomechanical Engineering*, 125 :280–287, 2003. [Cité page 25.]
- L. Sagalowicz, M. Michel, M. Adrian, P. Frossard, M. Rouvet, H. J. Watzke, A. Yaghmur, L. De Campo, O. Glatter, et M. E. Leser. Crystallography of dispersed liquid crystalline phases studied by cryo-transmission electron microscopy. *Journal of Microscopy*, 221 : 110–121, 2006. [Cité page 10.]
- G. Saussine, C. Cholet, P.E. Gautier, F. Dubois, C. Bohatier, et J.J. Moreau. Modelling ballast behaviour under dynamic loading. part 1 : A 2d polygonal discrete element method approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :2841 – 2859, 2006. [Cité page 18.]
- K. Shundyak, M. van Hecke, et W. van Saarloos. Force mobilization and generalized isostaticity in jammed packings of frictional grains. *Physical Review E*, 75 :010301, 2007. [Cité pages 82 et 97.]
- L. E. Silbert, D. Ertas, G. S. Grest, T. C. Halsey, et D. Levine. Geometry of frictionless and frictional sphere packings. *Physical Review E*, 65 :031304, 2002. [Cité page 23.]
- J. C. Simo et T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York, 2006. [Cité page 37.]
- R. Skouri, F. Schosseler, J. P. Munch, et S. J. Candau. Swelling and elastic properties of polyelectrolyte gels. *Macromolecules*, 28 :197–210, 1995. [Cité page 17.]
- J. H. Snoeijer, M. van Hecke, E. Somfai, et W. van Saarloos. Packing geometry and statistics of force networks in granular media. *Physical Review E*, 70 :011301, 2004. [Cité pages 103 et 104.]
- E. Somfai, M. van Hecke, W. G. Ellenbroek, K. Shundyak, et W. van Saarloos. Critical and noncritical jamming of frictional grains. *Physical Review E*, 75 :020301, 2007. [Cité page 97.]
- S.A. Stanier, J. Blaber, w.A. Take, et D.J. White. Improved image-based deformation measurement for geotechnical applications. *Canadian Geotechnical Journal*, 53 :727–739, 2016. [Cité page 31.]
- J. W. Strutt et B. Rayleigh. *The Theory of Sound*. Dover, New York, 2 édition, 1945. [Cité page 67.]
- D. Sulsky, Z. Chen, et H.L. Schreyer. A particle method for history-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118 :179 – 196, 1994. [Cité page 18.]

- D. Sulsky et H. L. Schreyer. Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :409 – 429, 1996. [Cité page 18.]
- D. Sulsky, S. J. Zhou, et H. L. Schreyer. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Computer Physics Communications*, 87 :236 – 252, 1995. [Cité page 18.]
- Y. Sun et J. H. L. Pang. Experimental and numerical investigations of near-crack-tip deformation in a solder alloy. *Acta Materialia*, 56 :537 – 548, 2008. [Cité page 16.]
- P. Taforel. *Apport de la Méthode des Éléments Discrets à la Modélisation des Maçonneries en Contexte Sismique : Vers une Nouvelle Approche de la Vulnérabilité Sismique*. PhD thesis, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2012. [Cité page 18.]
- ZZ. Tang, J. Liang, ZZ. Xiao, et C. Guo. Large deformation measurement scheme for 3d digital image correlation method. *Optics and Lasers in Engineering*, 50 :122–130, 2012. [Cité page 31.]
- Y. Tatara. On compression of rubber elastic sphere over a large range of displacements Part 1 : Theoretical study. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 113 :285–291, 1991a. [Cité page 11.]
- Y. Tatara. On compression of rubber elastic sphere over a large range of displacements Part 2 : Comparison of theory and experiment. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 113 :292–295, 1991b. [Cité page 11.]
- C. Thornton. Force transmission in granular media. *KONA Powder and Particle Journal*, 15 :81–90, 1997. [Cité page 102.]
- C. Thornton et S. J. Antony. Quasi-static deformation of particulate media. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 356 :2763–2782, 1998. [Cité page 102.]
- C. Thornton et Z. Ning. A theoretical model for the stick/bounce behaviour of adhesive, elastic-plastic spheres. *Powder Technology*, 99 :154 – 162, 1998. [Cité page 11.]
- C. Thornton, K. K. Yin, et M. J. Adams. Numerical simulation of the impact fracture and fragmentation of agglomerates. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 29 :424, 1996. [Cité page 18.]
- A. V. Tkachenko et T. A. Witten. Stress propagation through frictionless granular material. *Physical Review E*, 60 :687–696, 1999. [Cité page 22.]
- L.R.G. Treloar. *The Physics of Rubber Elasticity*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. OUP Oxford, 2005. [Cité page 25.]

- A. N. Tutuncu et M. M. Sharma. The influence of fluids on grain contact stiffness and frame moduli in sedimentary rocks. *Geophysics*, 57 :1571–1582, 1992. [Cité page 11.]
- K. C. Valanis et R. F. Landel. The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *Journal of Applied Physics*, 38 :2997–3002, 1967. [Cité page 25.]
- M. van Hecke. Jamming of soft particles : geometry, mechanics, scaling and isostaticity. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 22 :033101, 2010. [Cité pages 17, 21, 23, 81, 82, 97 et 107.]
- L. Vanel et E. Clément. Pressure screening and fluctuations at the bottom of a granular column. *The European Physical Journal B*, 11 :525–533, 1999. [Cité page 20.]
- I. Vlahinić, E. Andò, G. Viggiani, et J. E. Andrade. Towards a more accurate characterization of granular media : extracting quantitative descriptors from tomographic images. *Granular Matter*, 16 :9–21, 2014. [Cité page 14.]
- C. Voivret, F. Radjai, J.-Y. Delenne, et M. S. El Youssoufi. Space-filling properties of polydisperse granular media. *Physical Review E*, 76 :021301, 2007. [Cité page 118.]
- K. T. Wan et K. K. Liu. Contact mechanics of a thin-walled capsule adhered onto a rigid planar substrate. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 39 :605–608, 2001. [Cité page 11.]
- B. Wattrisse, A. Chrysochoos, J.-M. Muracciole, et M. Némot-Gaillard. Analysis of strain localization during tensile tests by digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 41 :29–39, 2001. [Cité page 16.]
- Z. Wieckowski, S. K. Youn, et J. H. Yeon. A particle-in-cell solution to the silo discharging problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 :1203–1225, 1999. [Cité page 18.]
- F. K. Wittel, H. A. Carmona, F. Kun, et H. J. Herrmann. Mechanisms in impact fragmentation. *International Journal of Fracture*, 154 :105–117, 2008. [Cité page 18.]
- G.F. Xiang, Q.C. Zhang, H.W. Liu, X.P. Wu, et X.Y. Ju. Time-resolved deformation measurements of the portevin–le chatelier bands. *Scripta Materialia*, 56 :721 – 724, 2007. [Cité page 16.]
- A. R. York, D. Sulsky, et H. L. Schreyer. The material point method for simulation of thin membranes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 :1429–1456, 1999. [Cité page 18.]
- Z. Zeravcic, N. Xu, A. J. Liu, S. R. Nagel, et W. van Saarloos. Excitations of ellipsoid packings near jamming. *Europhysics Letters*, 87 :26001, 2009. [Cité page 23.]

- D. Zhang, X. Zhang, et G. Cheng. Compression strain measurement by digital speckle correlation. *Experimental Mechanics*, 39 :62–65, 1999. [Cité page 16.]
- D. S. Zhang, M. Luo, et D. D. Arola. Displacement/strain measurements using an optical microscope and digital image correlation. *Optical Engineering*, 45 :033605, 2006. [Cité page 16.]
- M. A. Zulliger, P. Fridez, K. Hayashi, et N. Stergiopulos. A strain energy function for arteries accounting for wall composition and structure. *Journal of Biomechanics*, 37 : 989 – 1000, 2004. [Cité page 25.]

Milieux Granulaires à Particules Molles : Modélisation Expérimentale et Numérique

Résumé : Cette thèse porte sur l'étude de milieux granulaires constitués de particules molles. Elle s'appuie d'une part sur la méthode de corrélation d'images numériques (DIC) et d'autre part sur des simulations associant la méthode des éléments finis et la méthode de Dynamique des Contacts permettant de tenir compte de la déformabilité élevée des particules et des interactions entre particules. Pour une large gamme de matériaux complexes (élastique, plastique ou mousse solide), l'étude préliminaire de particules uniques comprimées radialement valide la technique de DIC pour les mesures des champs de déformation, et pour la détermination de l'énergie de déformation pour des matériaux élastiques. Des grandeurs macroscopiques et micro-structurales d'assemblages granulaires de particules élastiques sont ensuite mesurées expérimentalement et comparées avec les résultats de simulations numériques, en particulier dans le régime où les déformations des particules sont d'amplitudes finies. L'accord quantitatif entre ces approches permet de valider à la fois la méthode expérimentale pour l'étude de milieux granulaires à particules déformables, et d'autre part l'approche numérique. Forts de ces résultats, nous avons mené une étude numérique de la compression uniaxiale d'un assemblage de cylindres néo-Hookeens. Les effets du frottement et de la compressibilité des particules sur les propriétés mécaniques des systèmes sont déterminés, y compris lorsque la compacité est proche de 100%.

Mots clés : Milieux granulaires, particule molle, élasticité finie, corrélation d'images numériques, Méthode des éléments finis, Méthode de dynamique des contacts.

Granular Materials Composed of Soft Particles : Simulations and Experiments

Abstract : This thesis deals with the study of granular materials composed of soft particles. It relies on the one hand on the method of Digital Image Correlation (DIC) technique and on the other hand, on simulations coupling the Finite Element Method and the Contact Dynamics Method, taking into account the high deformability of particles and interactions between particles. For a wide range of complex materials (elastic, plastic or solid foam), the preliminary study of radially compressed single particles validates the DIC technique for strain field measurements, and for the determination of the strain energy for elastic materials. Macroscopic and micro-structural quantities of granular systems composed of soft elastic particles are measured and compared between the numerical and experimental results in particular in the regime in which the deformations of the particles are large. The quantitative agreement between these approaches makes it possible to validate both the experimental method for the study of granular media with deformable particles, and the numerical approach. Based on these results, we conducted a numerical study of the uniaxial compression of a neo-Hookean cylinder assembly. The effect of both friction and bulk modulus of the particles on the mechanical properties of the systems are evidenced, including systems with packing fractions close to 100%.

Key words : Granular materials, soft particle, finite elasticity, digital image correlation, finite element method, contact dynamics method.