HAL open science

Développement des algorithmes pour le traitement des images de franges pour la reconstruction tomographique du champ de température dans un milieu axisymétrique

Efagrich Mahfoud

To cite this version:

Efagrich Mahfoud. Développement des algorithmes pour le traitement des images de franges pour la reconstruction tomographique du champ de température dans un milieu axisymétrique. Informatique [cs]. FSTG - Marrakech, 2014. Français. NNT : . tel-02163058v1

HAL Id: tel-02163058

https://theses.hal.science/tel-02163058v1

Submitted on 23 Jun 2019 (v1), last revised 22 Sep 2024 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES - MARRAKECH

N° d'ordre
18/2014

……

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences et Techniques de Marrakech

pour obtenir le grade de :

Docteur

UFR : Métrologie Automatique et Analyse des Systèmes

Spécialité : Informatique et traitement du signal

TITRE

Développement des algorithmes pour le traitement des images de franges pour la reconstruction tomographique du champ de température dans un milieu axisymétrique

par :

Mahfoud ELFAGRICH

(DESA: Astrophysique)

Soutenue le 11/10/ 2014 Devant la Commission d'Examen :

P. Nour Eddine ALAA	PES	FST Marrakech,	Président
P. Mohamed AFIFI	PES	FS Ben M'sik Casablanca	Rapporteur
P. Abdelkrim NASSIM	PES	FS El Jadida	Rapporteur
P. Hassan CHEHOUANI	PES	FST Marrakech	Examinateur
P. Mohamed LAZREK	PES	FS Semlalia Marrakech	Examinateur
P. Fouad SEFYANI LAKRIZI	PH	FST Marrakech	Examinateur

A ma mère

Avec tout mon amour

A ma femme

Pour son indéfectible soutien

A ma petite fille Roua

Que j'ai rendu, malgré lui, sage comme… une image

A mon frère Kamal

Parce que c'est Kamal!

IL faut avoir foi dans les petits efforts et lutter en insecte contre l'insecte.

Alain, '' Propos sur le bonheur''

Edition Gallimard

Remerciements

C’est peut-être la première page que vous lisez mais pour moi ces pages clôturent six années de dur labeur.

Je voudrais avant tout exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance à Monsieur le professeur **Hassan CHEHOUANI**. Je le remercie pour son accueil au sein du Laboratoire **LP2M2E**, et surtout pour son encadrement durant six ans. Ce fut un réel plaisir de l’avoir comme directeur de thèse. Chaque discussion avec lui est un remontant idéal contre les baisses de motivation. Je doute d’avoir un jour sa patience et sa détermination. C’est grâce à lui j’ai pu mener ce travail à son terme. Il m’a toujours donné des idées, fait des suggestions, des commentaires et des critiques. Il m’a relancé, encouragé et soutenu quand il le fallait. Je lui suis très reconnaissant de s’être autant impliqué dans ce travail. Si je ne pus pas m’acquitter de la dette que j’ai envers lui, qu’il en trouve au moins ici le témoignage.

Je suis très sensible à l’honneur qu’a fait Monsieur **Nour Eddine ALAA**, professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Marrakech, en acceptant la présidence de ce jury. Qu’il soit assuré de ma profonde reconnaissance pour l’attention qu’il a portée à ma thèse.

Je suis très honoré que Messieurs **Mohamed AFIFI**, professeur à la Faculté des Sciences de Ben M’sik et **Abdlkrim NASSIM**, professeur à la Faculté des Sciences d’El Jadida aient accepté de rapporter cette thèse. Je suis très sensible à l’intérêt qu’ils ont porté à mon travail, qu’ils reçoivent tous mes remerciements.

J’adresse aussi mes remerciements à Monsieur **Larbi BOUAMAMA,** professeur à l’Institut d’Optique et Mécanique de Précision de Sétif en Algérie, d’avoir accepté de rapporter ma thèse. Ses commentaires si constructifs ont porté grandement amélioration à ce manuscrit. J'ai souhaité de tout mon cœur qu’il soit présent à ma soutenance mais le destin a voulu qu’il soit au pèlerinage.

Mohamed LAZREK, professeur à la Faculté des Sciences Semlalia de Marrakech a eu la gentillesse de bien vouloir s’intéresser à mon travail. Ses conseils et critiques avisés ont été précieux. Sa présence dans ce jury ma touché particulièrement.

J’exprime ma profonde gratitude à Monsieur **Fouad SEFYANI LAKRIZI**, professeur habilité à la Faculté des Sciences et Techniques de Marrakech de m’avoir fait l’honneur de participer à mon jury.

Je ne peux oublier tous mes collègues et thèsards du Laboratoire **LP2M2E**, qui m’ont apporté leur soutien moral tout le long de ce travail. Plus particulièrement **Abdessadek AIT HAJ SAID** avec qui j’ai partagé les espoirs et les découragements, **Omar ABOUNACHIT**, **Façial AITLAHBIB, Mohamed BELAQZIZ** et **Fouad BAGHDADI** pour l’amitié qu’ils m’ont témoignée et l’aide qu’ils m’ont apportée.

Je remercie aussi toutes les personnes que j’ai eu l’occasion de rencontrer ou qui m’ont apporté une aide durant ma thèse : **Azzedine LEMTOUNI**, **Hassan AKABLI**, **Habib AYAD**, **Mohamed AIT OUSSOUSS**. J ‘ai envers eux un véritable sentiment fraternel.

Enfin, ma grande pensée est pour ma famille pour l’amour et le soutien qu’elle a témoignés tout le long de la préparation cette thèse. Qu’elle me pardonne si je l’ai un peu délaissée durant cette période.

Je m’excuse à toute personne qui a contribué à me soutenir moralement sans pour autant figurer dans cette liste.

Mahfoud ELFAGRICH

Résumé

La tomographie du champ de la température est la pierre angulaire de toute métrologie thermique. Devenant un domaine d'activité de plus en plus large, il nécessite de nouveaux moyens de contrôle plus performants, plus efficaces et de faible coût. L'utilisation de l'interférométrie holographique et la déflectométrie de moiré ont permis de simplifier au maximum le matériel et de reporter la charge aux algorithmes intelligents et précis de traitement des images offertes par ces techniques. L'objectif de cette thèse était de développer tout un chainage d'algorithmes permettant la reconstitution tomographique du champ de température d'un milieu transparent axisymétrique. L'entité de l'étude réalisée consiste à proposer au moins trois classes d'algorithmes permettant l'accès aux informations nécessaires à la reconstitution du champ de température. La première regroupe les algorithmes de démodulation de la phase. La seconde réunit les algorithmes de dépliement de la phase. La troisième classe inclut les algorithmes de l'inversion de la transformée d'Abel. Pour contribuer à la solution des ce problème, la démodulation de la phase par transformée en ondelettes a été mise en œuvre. En terme de ce point, nous avons examiné quatre visions d'implémentation de la transformée en ondelettes ainsi que le développement et la comparaison de trois algorithmes d'estimation de la crête d'ondelette. Concernant le dépliement de la phase, nous avons décortiqué quatre algorithmes pour cerner et vaincre certains problèmes intrinsèques au dépliement de la phase. Dans la même optique, nous avons mis en exergue la résolution de transformée d'Abel inverse pour laquelle nous avons proposé deux nouveaux algorithmes pour les données respectivement déflectométriques et interférométriques.

Le fonctionnement de l'ensemble de ces algorithmes a été testé fructueusement sur des images et profils numériques. Les résultats obtenus dévoilent les faiblesses de certains de ces algorithmes et démontrent la convergence sûre et particulièrement rapide des autres. Nous avons également examiné leurs capacités d'outrepasser certains problèmes cruciaux et inhérents à la tomographie des milieux axisymétriques. Pour donner un aspect pratique et appliqué à ce travail, nous avons conduit une recherche expérimentale par le biais de l'interférométrie holographique. Les interférogrammes réalisés ont fait l'objet de traitement par les algorithmes étudiés et jugés adéquats pour la tomographie du champ de température axisymétrique.

.

Mots-clés : Tomographie, Démodulation de phase, Dépliement de phase, Transformée en ondelettes, Transformée d'Abel inverse, Interférométrie holographique, Déflectométrie de moiré.

Abstract

The tomography of temperature fields is the cornerstone of every thermal metrology. Being an area of large scale activity, it requires a new control tools that are more powerful and efficient with a low cost. The use of holographic interferometry and moiré deflectometry have simplified to the maximum the needed equipments and transmitted the task to the smart and accurate image processing algorithms offered by these techniques.

The main objective of this thesis is to develop chaining algorithms that allow the tomographic reconstruction of the temperature field of a transparent axis-symmetric medium. The realized work consists on providing at least three classes of algorithms which lead to the necessary information for the temperature field tomography. The first class includes the phase demodulation algorithms. The second represents the unwrapping phase algorithms. The last and the third class gather the algorithms used for solving the inverse Abel transform. To contribute to the problem solving, a phase demodulation by wavelet transform implementation has been performed. In this way, we have examined four versions of implementation of the wavelet transform, developed and compared three algorithms of estimation of the wavelet ridge. Concerning the unwrapping process, we have dissected four algorithms to surround and overcome some of the inherent problems involved in the unwrapping phase operation. In the same context, we have highlighted the resolution of the Abel inverse transform for which we have tested four algorithms for the moiré deflectometry and three algorithms for the holographic interferometry.

The performance of all of these algorithms has been tested in both simulated images and profiles, as well as in real images and profiles. The obtained results reveal the weakness of some of these algorithms and attest the insured and fast convergence for others. We have also examined their ability to overcome some of the critical and inherent problems to the tomography of axis-symmetric mediums. To give practical and applied aspects to this work, we have conducted an experimental research using the holographic interferometry technique. Interferograms have been the subject of processing algorithms studied and found to be adequate for reconstruction of axisymmetric field temperature

Keywords : Tomography, Phase demodulation, Phase unwrapping, Wavelet transform, Abel inverse transform, holographic interferometry, moiré déflectométrie

ملخـــص الرســـالة

يعتبر التصوير المقطعي للمجال الحراري حجر الزاوية في علم القياسات الحرارية، وبشغله مساحات واسعة في مجالات عدة، أصبح الأمر يتطلب إمكانيات تحكم جديدة، متطورة وبأقل كلفة.

استعمال تقنيات وتركيبات بصرية بديلة على سبيل المثال لا الحصر مثل التداخلات الثلاثية الأبعاد وانحراف مواري، وكلها تقنيات ذات كلفة جد بسيطة مقارنة بمثلثها جعل التركيز ينصب على الخوارزميات الذكية والفائقة الدقة لمعالجة الصور المحصل عليها بواسطة هذه التقنيات.الهدف من هذه الأطروحة هو تطوير سلسلة من الخوارزميات بهدف الوصول إلى إعادة تشكيل المجال الحراري الثلاثي الأبعاد لوسط شفاف وذا تماثل محوري.

جوهر هذه الدراسة هو تقديم على الأقل ثلاث فئات من الخوارزميات الرقمية التي تمكن من الوصول إلى إعادة تشكيل المجال الحراري الثلاثي الأبعاد وذلك إنطلاقا من التصوير المقطعي للمجال الحراري.الفئة الأولى من هذه الخوارزميات هي إستخلاص الطور والثانية تجمع خوارزميات إزالة التغليف المصاحب للطور المستخلص، في حين أن الفئة الثلاثة من الخوارزميات هي التي تقوم بحل محولة أبيل العكسية.

للمساهمة في حل الإشكالية المركزية لهذه الأطروحة تم استخلاص الطور باستعمال وإحداث خوارزميات تعتمد في مجملها على محولة المويجات الصغيرة في هذا النسق تم إمتحان أربعة طرق رقمية بواسطة الحاسوب لغاية حساب محولة المويجات الصغيرة وكذلك قمنا بتطوير ومقارنة ثلاث أنواع من الخوارزميات للتقدير الرقمي لذروة المويجات.في حين أن للإزالة التغليف في الطور، تم إدراج أربع خوارزميات لحصر وإعطاء حلول للمشاكل المتأصلة في هذه المرحلة. في نفس السياق، قمنا بتسليط الضوء على محولة أبيل العكسية والتي من خلالها قمنا بإمتحان أربع خوارزميات لمعالجة الصور التي يقدمها التركيب البصري مواري و ثلاث خوارزميات فيما يخص الصور التي يقدمها التركيب البصري التداخلات الثلاثية الأبعاد.

إختبار مدى نجاعة الخوارزميات المقترحة تم من جهة أولية من خلال تجربتها على العديد من الصور المنشئة والمحاكاة بواسطة الحاسوب، ثم من جهة ثانية على صور حقيقة ثم الحصول عليها بواسطة التركيبين السالفي الذكر.

النتائج المحصل عليها تكشف بوضوح نقاط ضعف بعض الخوارزميات المقترحة وتظهر قوة الأخرى المتمثلة في سرعة معالجتها ودقتها الفائقة لإعادة تشكيل المجال الحراري بواسطة التصوير المقطعي لوسط شفاف وذا تماثل محوري.

لإعطاء بصمة تجريبية لهدا العمل, قمنا بإنجاز تجربة التداخلات الثلاثية الأبعاد للحصول على صور حقيقية. و من تم معالجتها بالخوارزميات التي تم التحقق سابقا من نجاعتها لإعادة إنشاء المجال الحراري الثلاثي الأبعاد.

الكلمات الرئيسية: التصوير المقطعي، إستخلاص الطور، إزالة التغليف في الطور، محولة المويجات الصغيرة، محولة أبيل العكسية، التداخلات الثلاثية الأبعاد، انحراف مواري.

Sommaire

Chapitre I : État de l’art de la tomographie par les techniques optiques 25
I-1 Introduction 25
I-2 Définition de la tomographie 25
I-3 Mesure et tomographie 26
I-3.1 Les techniques optiques 27
I-3.2 Milieu axisymétrique 29
I-4 La déflectométrie de moiré 31
I-4.1 Principe de la mesure par déflectométrie 31
I-5 L’interférométrie holographique 36
I-5.1 L’holographie 36
I-5.2 L'interférométrie holographique 37
I-6 Similitude d’images de franges 40
I-7 Techniques d’analyse des franges 40
I-7.1 Préambule et revue bibliographique 40
I-7.2 Démodulation de la phase 41
I-7.3 Comparaison des méthodes de démodulation de phase 48
I-7.4 . Dépliement de phase 48
I-8 Problème inverse 49
I-8.1 Définition 49
I-8.2 Tomographie et problème inverse 51
I-8.3 De la transformée de Radon vers la transformée d’Abel 51
I-9 Tomographie à symétrie circulaire 53
I-9.1 Revue sur les méthodes de résolution 54
I-10 Conclusion 57
Chapitre II : Mise en œuvre numérique de la transformée en ondelette et du bruit de speckle 58
II-1 Introduction 58
II-2 Décompositions espace-fréquence 58

II-2.1 Transformée de Fourier 59
II-2.2 Transformée de Fourier à fenêtre glissante 60
II-2.3 Transformation en ondelettes 62
II-2.4 Principe d'Heisenberg-Gabor 64
II-2.5 Fréquence locale 68
II-3 Implantation numérique de la TO 68
II-3.1 Calcul par quadrature 69
II-3.2 Calcul par produit de convolution 70
II-3.3 Calcul par l'algorithme FFT 70
II-3.4 Calcul par la transformée en Z 71
II-4 Choix de la méthode appropriée 72
II-4.1 Test 72
II-4.2 Discussion 73
II-5 Notion de scalogrammes et crête d'ondelette 74
II-5.1 Scalogrammes 74
II-5.2 Crête d'ondelette 75
II-5.3 Formalisme d'extraction de la phase 76
II-6 Bruit du speckle synthétique 79
II-6.1 Notions essentielles sur le phénomène de speckle 79
II-6.2 Aspects physiques et statistiques du speckle 79
II-7 Mesure de la qualité de la grandeur reconstruite 87
II-8 Conclusion 88
Chapitre III : Développement des algorithmes pour l'extraction de phase 90
III-1 Introduction 90
III-2 Génération de l'image de test 90
III-3 Reconstitution de la distribution de la phase 93
III-3.1 Calcul des scalogrammes 95
III-3.2 Estimation de la crête d'ondelettes 96
III-3.3 Algorithme de Liu 99
III-3.4 Algorithme du Groupe de Marseille 104
III-4 Tests de robustesse 105

III-5 Conditionnement et choix de l'ondelette 109
III-6 Dépliement de la phase 112
III-6.1 Position du problème 112
III-6.2 Condition d'Itoh 113
III-6.3 Algorithmes de dépliement 113
III-7 Résultats du dépliement 117
III-7.1 Test sans violation de la condition d'Itoh 117
III-7.2 Test avec violation de la condition d'Itoh 118
III-8 Conclusion 120
Chapitre IV : Résultats d'analyse des images de franges numériques 122
IV-1 Introduction 122
IV-2 Génération des profils numériques 122
IV-2.1 En interférométrie holographique 122
IV-3 Traitement des images simulées 128
IV-3.1 Test de l'approche par estimation de la phase 129
IV-3.1.2 Résultat de l'image non bruitée 131
IV-3.1.3 Résultat de l'image bruitée 131
IV-3.2 Test de l'aproche de gradient de phase 134
IV-3.2.2 Résultat de l'image non bruitée 136
IV-3.2.3 Cas de l'image bruitée 137
IV-4 Ondelette mère optimale 139
IV-5 Conclusion 140
Chapitre V : Mise en œuvre des techniques innovatrices d'inversion de la transformée d'Abel 142
V-1 Introduction 142
V-2 Inversion d'Abel 143
V-3 Inversion des données interférométriques 143
V-3.1 Méthode des ondelettes de Legendre (OL) 144
V-3.2 Méthode de Fourier-Hankel modifiée (FHM) 147
V-3.3 Méthode Polynomiale de Puissances Paires (PPP) 149
V-3.4 Précision de l'inversion 152

V-4 Inversion des données déflectométriques 156
V-4.1 Génération du profil test 157
V-4.2 Méthode Fourier-Hankel adaptée (AFH) 160
V-4.3 Méthodes existantes 164
V-4.4 Validation numérique 165
V-4.5 Précision de l'inversion 166
V-4.6 Comparaison avec les méthodes existantes 168
V-4.7 Propriété de filtrage de la méthode AFH 170
V-5 Conclusion 172
Chapitre VI : Expérimentation et mesures 174
VI-1 Introduction 174
VI-2 Description de l’appareillage 174
VI-2.1 Schéma optique de l’interféromètre holographique 174
VI-3 Mesures 179
VI-3.1 Perturbations extérieures 183
VI-4 Traitement de l’interférogramme réel 184
VI-4.1 Exemple de traitement 185
VI-4.2 Validation du processus d’analyse 188
VI-5 Corrélation expérimentale 190
VI-6 Analyse des incertitudes 195
VI-6.1 Les erreurs systématiques 196
VI-6.2 Erreurs dues au traitement 197
VI-7 Conclusion 198

Liste des tableaux

Tableau I-1 : Tableau récapitulatif des techniques de démodulation des images de franges. 48
Tableau III-1 : Coordonnées du candidat à la formation de la crête. 103
Tableau III-2 : Valeurs des maxima relatifs. 103
Tableau III-3 : Les coûts relatifs à l'ensemble des candidats pour former la crête. 103
Tableau III-4: Comparaison entre les différentes d'ondelettes mères utilisées pour le calcul la transformée en ondelette de la ligne d'intensité située à z= 400 pixels de l'image des franges théoriques de la Figure III-2 La première colonne montre le nom de l'ondelette mère et ses différents paramètres, la deuxième est réservée aux représentations graphiques de ses parties réelle et imaginaire, tandis que la dernière présente les scalogrammes des modules illustrant la crête. 112
Tableau III-5 : Erreurs quadratiques moyennes résultant de l'application des trois algorithmes pour déplier la phase de la Figure III-16 b. 118
Tableau III-6 : Valeurs de l'écart quadratique moyen et temps d'exécution sur un PC portable équipé d'un microprocesseur Core ™ 2 Duo de fréquence 2Ghz et de mémoire SDRAM de taille 4 Go . 120
Tableau V-1 : Comparaison des écarts quadratiques moyens pour la reconstruction des profils de température en utilisant les algorithmes étudiés avec leurs paramètres optimaux. 152
Tableau V-2 : Temps mis par chaque algorithme sur un ordinateur portable équipé d'un microprocesseur Intel ® Core TM 2 Duo CPU T5870, 2 GHz. 152
Tableau V-3 : Comparaison, dans le cas des données bruitées, des écarts quadratiques moyens pour la reconstruction des profils de température par les trois algorithmes étudiés avec leurs paramètres optimaux. 154
Tableau VI-1 Données expérimentales des interférogrammes réalisés. 180
Tableau VI-2 : Ecart quadratique moyen calculé par comparaison entre la cartographie reconstruite de l'ordre de frange et la lecture des interférogrammes en teinte plate (a), (b), (c) et (d). 190
Tableau VI-3 : Grandeurs physiques à la température $20\ °\ C$ pour le calcul des nombres adimensionnels.192
Tableau VI-4 : Corrélations $Nu = C\ Ra^n$. 193

Liste des figures

Figure I-1:Techniques optiques de mesure dans les milieux semi-transparents. 28
Figure I-2: Champ de température axisymétrique au dessus d'un disque horizontal chaud. 30
Figure I-3: Champ de température axisymétrique au dessous d'un disque horizontal chaud. (1) Cylindre chauffé; (2) et (3) Faisceau d'étude; (4) Frontière de la région perturbée thermiquement ; (5) Région à la température ambiante. 30
Figure I-4: Schéma du montage optique pour la déflectométrie de moiré [20]. 32
Figure I-5: Disposition des deux réseaux de pas p et p' et phénomène de moiré. 32
Figure I-6: Images des franges de moiré de l'air ambiant autour d'un cylindre chauffé aux températures a- T=23 °C (température ambiante) et b- T=350 °C [20]. 34
Figure I-7: Section située à la cote z de la zone perturbée. 35
Figure I-8: Schéma de principe de l'interférométrie holographique. 37
Figure I-9: Interférogrammes holographiques d'un jet de plasma.(a) interferogramme de référence sans plasma (b) interferogramme en présence du plasma [23]. 38
Figure I-10: Section à la cote z de la zone perturbée. 39
Figure I-11:Interférogramme simulé à partir d'un champ de température induit par un cylindre de rayon $15\ mm$, porté à une température de $350\ °C$, avec un fond gaussian et une fréquence de porteuse $\nu_0 = 0.1\ \text{Pixel} - 1$ [4]. 44
Figure I-12: profil d'intensité correspond a la ligne en pointié sur l'interferigramme de la Figure I-11. 44
Figure I-13: Spectre fréquentiel de Fourier montrant les deux lobes. 45
Figure I-14: Lobe isolé. 46
Figure I-15: Schéma du principe de la tomographie d'une section d'un milieu non symétrique. 52
Figure II-1: Interferogramme réel de taille 680×840 pixels [91]. 59
Figure II-2: Illustrations des avantages de la représentation conjointe espace-fréquence (a) espace classique, (b) espace de Fourier, (c) scalogramme de Gabor. 62
Figure II-3: Deux gaborlettes dont la résolution spatiale est figée. 66
Figure II-4: Effet antagonique des résolutions spatiales et fréquentielles en fonction du paramètre d'échelle a. 67
Figure II-5: Comparaison de localisation espace-fréquence entre la TG (a) et la TO. 67
Figure II -6: Franges synthétiques digitalisées sur une matrice de 512×512 pixels. 73
Figure II-7: (a) Scalogramme d'amplitude, (b) Scalogramme de phase. 75
Figure II-8: Scalogramme d'amplitude en trois dimensions montrant la crête. 75
Figure II-9: Speckle réel généré par une surface d'aluminium. 80
Figure II-10: Fonction de densité de la phase du speckle. 81
Figure II-11: Image de speckle simulé. 82
Figure II-12: Fonction de densité de l'intensité du speckle. 82
Figure II-13: Formation de speckle dans l'espace libre et la représentation des deux dimensions d'un grain de speckle. 83
Figure II-14: Zoom sur une partie du champ de speckle simulé précédemment montré sur la Figure II-11. 84

Figure II-15 : Fonction d'autocovariance représentée en 3-D du champ du speckle simulé de (Figure II-14). 84
Figure II-16 : Fonction d'autocovariance en 2-D du champ de speckle simulé présenté précédemment sur la Figure II-15. 85
Figure II-17 : les fonctions d'autocovariance normalisées $C(y,0)$ et $C(z,0)$ de la figure du speckle simulé précédemment. 85
Figure II-19 : Interferogramme bruité par un speckle de taille 5×5. 86
Figure III-1 : Image de phase théorique échantillonnée sur 512×512 pixels. 91
Figure III -2 : Franges synthétiques avec $I_m = 0,\ V = 1, \nu_0 = 0.08$. 92
Figure III-3 : Image de frange bruitée. 92
Figure III-4 : Organigramme illustratif pour l'analyse des franges. 94
Figure III-5 : Profil d'intensité $I(y, z = 400)$. 95
Figure III-6 : Les images (a) et (b) représentent respectivement le scalogramme des modules et le scalogramme des arguments. 95
Figure III-7 : Profil de la variation des valeurs de la dixième colonne du scalogramme d'amplitude de TO. 97
Figure III-8 : (a) Phase repliée correspondant à la ligne d'intensité z $= 400$. (b) cartographie de la phase repliée. (c) image des franges reconstruites à partir de la phase repliée. 98
Figure III-9 : Image des franges recalculées montrant certaines zones de points singuliers. 99
Figure III-10 : Profil d'intensité $z = 400$ de l'image des franges (Figure III-3) 100
Figure III-11 : (a) Scalogramme d'amplitude. (b) Scalogramme des arguments. (c) - Profil d'évolution des échelles pour la colonne b=10 où les maxima sont indiqués par des motifs circulaires. (d) Profil de phase repliée de la ligne $z = 400$. (e) Cartographie de la phase repliée (f) Image des franges recalculées. 101
Figure III-12 : (a) Scalogramme des arguments de la TO. (b) Scalogramme des modules montrant la crête. (c) Image de franges reconstruites. 105
Figure III-13 : Évolution du critère de qualité le PSNR en fonction de la taille des gains de speckle pour les trois algorithmes d'estimation de la crête d'ondelettes. 106
Figure III-14 : Les images reconstruites selon les trois algorithmes de détection de crête, respectivement, de haut en bas, l'algorithme de maximum direct, l'algorithme de Liu, et celui du groupe Marseille. 107
Figure III-15 : Calcul des résidus. 115
Figure III-16 : (a) Phase non repliée (b) Phase repliée en calculant $arctan2x$ de la phase non repliée. 117
Figure III-17 : Phase non repliée. 119
Figure III-18 : (a) Phase initiale (b) phase linéaire (c) phase résultante. 119
Figure III-19 : Phase dépliée par l'algorithme d'Itoh qui ressemble à la phase repliée. 119
Figure III-20 : Image de la phase dépliée par l'algorithme Itoh 1-D 120
Figure IV-1 : Champ de température axisymétrique au dessous d'un cylindre chaud.(1) cylindre chauffé ; (2) et (3) faisceau d'étude ; (4) frontière de la région perturbée thermiquement ; (5) région à la température ambiante. 123
Figure IV-2 : Champ de température autour d'un cylindre chauffé à $350\ °C$ dans l'air. 124

Figure IV-3 : Variation de l'indice de réfraction de l'air autour d'un cylindre chauffé à $350°C$. 125
Figure IV-4 : Découpage uniforme d'une section de cote zj en anneaux d'épaisseurΔr. 126
Figure IV-5 : Cartographie de l'ordre d'interférence multiplié par 2π. 126
Figure IV-6 : Interferogramme avec franges de référence verticales ici $\upsilon 0 = 0.05$ 127
Figure IV-7 : Interferogramme avec franges de référence horizontales ici $\upsilon 0 = 0.05$ 128
Figure IV-8 : Interférogramme sans frange de référence (teinte plate). 128
Figure IV-9 : (a) : Interferogramme simulé à la température ambiante $T = 20\ °C$, (b) : Interferogramme simulé à la température $T = 350\ °C$, (c) Image de la phase repliée relative à l'interferogramme (a), (d) Image de la phase repliée relative à l'interferogramme (b), (e) Phase dépliée obtenue. 130
Figure IV-10 : Comparaison entre la phase initiale et celle obtenue après traitement des lignes de cotes $1, 5, 10$ et $20\ mm$ sous le disque de Figure IV-9g. 131
Figure IV-11 : Images de franges affectées par un bruit de speckle de taille 2×2. (a) Interférogramme à la température $T = 20°C$ et (b) Interférogramme à la température $T = 350°C$. 132
Figure IV-12 : La phase extraite à partir d'interferogramme simulé bruité avec un bruit de speckle de taille du grain égale à 2×2 pixels. 132
Figure IV-13 : Comparaison entre la phase de départ et celle après traitement déterminée sur les lignes de cotes $1, 5, 10$, et $20\ mm$ sélectionnées de l'image de phase présentée sur la Figure IV-5. 133
Figure IV-14 : Erreur de traitement d'un interferogramme bruité par un bruit de speckle dont la taille du grain est égale à 5×5 pixels. 133
Figure IV-15 : (a) - Image de fréquences relative à l'interferogramme (a) de la Figure , (b) - Image de fréquences relative à l'interferogramme (b) de la Figure, (c) - Phase continue obtenue par intégration de l'image (a), (d) - Phase continue obtenue par intégration de l'image (b), (e) - Phase obtenue après la soustraction de l'image (c) de l'image (d). 135
Figure IV-16 : Phase extraite à partir de l'interférogramme simulé non bruité, par l'approche de gradient de la phase.136
Figure IV-17 : Comparaison entre la phase de départ et celle obtenue après traitement effectué sur les lignes de cotes $1, 5, 10$, et $20\ mm$ sélectionnées sur l'image de phase de la Figure IV-16. 137
Figure IV-18 : La phase extraite par l'approche de gradient de la phase à partir de l'interférogramme simulé et bruité avec un bruit de speckle de taille de grain égale à 2×2 pixels. 138
Figure IV-19 : Comparaison entre la phase de départ et celle obtenue après traitement des lignes de cotes $1, 5, 10, et\ 20\ mm$ sélectionnées sur l'image de phase présentée sur la Figure IV.33. 139
Figure IV-20 : Évolution de l'écart quadratique moyen de l'approche d'estimation de phase en fonction de la taille moyenne du grain de speckle et pour sept ondelettes mères. 140
Figure IV-21 : Évolution de l'écart quadratique moyen de l'approche gradient de phase en fonction de la taille moyenne du grain de speckle et pour deux ondelettes mères. 140

Figure V-1 : Profils de la distribution d'ordre des franges. 144
Figure V-2 : Évolution de l'écart quadratique moyen de l'inversion de TA pour différentes valeurs de M en fonction du paramètre k. 146
Figure V-3 : Profils de température initiaux et recalculés aux différentes cotes par la méthode OL 147
Figure V-4 : Évolution de l'écart quadratique moyen de l'inversion de TA en fonction du paramètre α. 148
Figure V-5 : Profils de température initiaux et recalculés par la méthode FHM pour différentes cotes au dessous du cylindre chauffé. 149
Figure V-6 : Evolution de l'écart quadratique moyen de l'inversion TA en fonction du degré de polynôme dans la méthode PPP. 151
Figure V-7 : Profils de température initiaux et recalculés par la méthode PPP pour différents cotes au dessous du cylindre chauffé. 151
Figure V-8 : Profils d'ordre bruité. 153
Figure V-9 : Evolution de l'écart quadratique moyen de l'inversion de TA pour différentes valeurs du paramètreα en cas de données bruitées. 154
Figure V-10 : Profils de température obtenus par les trois méthodes à la cote z= $1\ mm$. 155
Figure V-11 : Mise en évidence du problème induit par le mauvais raccordement entre les segments par la méthode OL. 156
Figure V-12 : Schématisation du champ de température axisymétrique pour l'application de la déflectométrie de moiré. 158
Figure V-13 : Cartographie du champ de température simulé numériquement au dessus du cylindre chauffé. 158
Figure V-14 : Déflectogramme simulé de moiré avec $I_m = 100$; $V = 100$; $\nu = 5$; $G = 1100$. 159
Figure V-15 : Coefficient $D9\ j$ de chaque algorithme. 166
Figure V-16 : Profil de l'angle de déflection $\varepsilon(y)$ pour une ligne de visé à $z = 1\ mm$. 166
Figure V-17 : Profil de température $T(r)$ pour $z = 1\ mm$. 167
Figure V-18 : Evolution de l'écart quadratique moyen σ en fonction du paramètre α pour différentes valeurs de N. 167
Figure V-19 : Profils de température recalculés pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0.2$. 168
Figure V-20 : Comparaison entre les différentes méthodes d'inversion d'Abel. 169
Figure V-21 : Évolution de l'erreur relative pour les différentes méthodes. 169
Figure V-22 : Profil de l'angle de déflection bruité. 171
Figure V-23 : Évolution de l'erreur quadratique en fonction du paramètre α pour les deux versions de la méthode AFH. 172
Figure V-24 : Profils de température recalculés pour les quatre méthodes. 172
Figure VI-1 : Schéma de l'interféromètre holographique. 1-Miroir, 2-Séparatrice, 3-Atténuateur, 4-Objectif de microscope, 5-Trou, 6-Lentille collimatrice, 7-Lentille réductrice, 8-Plaque holographique, 9-Caméra CCD, 10-Moniteur de visualisation, 11-Ordinateur. 175
Figure VI-2 : Coupe latérale du dispositif expérimental (vue de devant). 1 - Support en acier de hauteur réglable, 2 - Cylindre chauffé par une résistance électrique, 3 - Support en inox de cuve de développement des plaques, 4 - Table en marbre, 5 - Silentblocs, 6 - Semelle en caoutchouc. 178

Figure VI-3 : 1 - Objectif X40 du microscope, 2 - Trou de diamètre 100 µm, Platine de déplacement à trois axes, 4- Lentille collimatrice. 179
Figure VI-4 : Image d'un interferogramme de dimension 1280×960 montrant la zone d'intérêt encadrée ainsi que le système de repérage utilisé. 180
Figure VI-5 : (a), (c), (e), (g) - Interférogrammes avec franges de référence; (b), (d), (f), (h) - interférogrammes en teinte plate. 182
Figure VI-6 : Série d'images en teinte plate d'un cylindre de diamètre $30\,mm$ porté à la température $230°C$ pris à des instants espacés d'une seconde. 183
Figure VI-7 : Organigramme du traitement des interférogrammes expérimentaux. 185
Figure VI-8 : Intensité sur la ligne horizontale située à $1\,mm$ au dessous du cylindre. 186
Figure VI-9 : Scalogramme de la TO montrant la crête d'ondelette relative à la ligne d'intensité représentée par la Figure VI-8. 186
Figure VI-10 : Phase repliée. 187
Figure VI-11 : Carte de phase modulo 2π issue d'une analyse de franges de l'interferogramme présenté sur la Figure VI-5a. 187
Figure VI-12 : Distribution $S(y,z)$ de l'ordre des franges au dessous du cylindre. 187
Figure VI-13 : Profils de température en différentes cotes au-dessous du cylindre. 188
Figure VI-14 : Chacune de ces images présente dans sa moitié de gauche les franges reconstruites par traitement et dans l'autre moitiè les franges de l'interférogramme en teinte plate. 189
Figure VI-15 : Comparaison entre de l'ordre des franges extrait numériquement et celui par comptage manuel des franges. 190
Figure VI-16 : Interferogrammes réels (a, c et e) respectivement pour le couple de rayons et le nombre Rayleigh ($R = 40\,mm,\ Ra = 4.4\ 10^5$); ($R = 25\,mm,\ Ra = 9.8\ 10^4$) et ($R = 20\,mm,\ Ra = 1.3\ 10^5$) avec leurs champs de température correspondants (b, d, et f). 194
Figure VI-17 : Comparaison des corrélations. 195

Glossaire: Sigles et Notations

La plupart des notations (abréviations) utilisées dans le présent document correspondent à celles les plus couramment employées dans la littérature. Toutefois, afin de faciliter la lecture du manuscrit et d'éviter toute équivoque, une liste des principales notations (sigles) est présentée. La majorité des sigles sont détaillés dans le texte la première fois qu'elle apparait ainsi que lorsque certaines définitions de variables peuvent prêter à confusion.

Sigles

TF	Transformée de Fourier.
TA	Transformée d'Abel.
TO	Transformée d'ondelette.
TH	Transformée de Hankel.
TR	Transformée de Radon.
TG	Transformée de Gabor.
MSE	Erreur quadratique moyenne (Mean Square Error).
$PSNR$	Rapport signal à bruit (Peak signal to noise ratio).
AFH	Adaptative Fourier-Hankel.
NIS	Numerical integration using Simpson's 1/3rd rule.
TPF	Numerical integration using two point formula.
OPF	Numerical integration using one point formula.
OL	Méthode des ondelettes de Legendre.
HFM	Méthode de Hankel-Fourier modifiée.
PPP	Méthode polynomiale de puissances paire.

Symboles et Notations Mathématiques

$x(y)$	Représentation spatiale d'un signal x.
(r, θ, z)	Système de coordonnés cylindriques.
$\hat{x}$	Estimée de x.
$X(\nu)$ ou $X(\omega)$	Transformée de Fourier de $x(y)$, fonction de la variable fréquentielle ν ou de la pulsation ω.

ω	Pulsation $\omega = 2\pi\nu$.
J_m	Fonction de Bessel d'ordre m.
P_m	Polynôme de Legendre d'ordre m.
R, N, Z, C	Corps des réels, des entiers naturels, entiers relatifs, des complexes.
α	Paramètre de lissage des méthodes MFH et AFH.
$\langle . \vert . \rangle$	Produits scalaire dans L_2.
$\hat{\imath}$	Unité imaginaire $\hat{\imath}^2 = -1$.
$\Re$	Partie réelle.
$\Im$	Partie imaginaire.
$\vert . \vert^2$	Module au carré d'un nombre complexe.
σ	Erreur quadratique moyenne.
$E[x]$	Partie entière du nombre x.

Symboles et Notations Physique

T_0	Température ambiante.
R_0	Rayon d'une zone perturbée par la température.
$T(r,z)$	Température variable de l'air autour du disque de rayon r de cote z.
Δ	Distance entre les deux réseaux.
p'	Pas des franges de moiré .
p	Pas du réseau.
β	L'inclinaison des trames des deux réseaux.
h	Déplacement de franges de moiré.
ε_y	Angle de déviation latérale.
ε_z	Angle de déviation axiale.
Σ_O	Onde objet.
Σ_r	Onde de référence.
S	Ordre des franges.
n_0	Indice de réfraction du milieu à la température ambiante.
n	Indice de réfraction à une température T.
L_0	Chemin optique de l'onde traversant le milieu d'indice de réfraction n_0.
L	Chemin optique de l'onde traversant le milieu d'indice de réfraction n.

R	Constante des gaz parfaits.
K	Constante de Gladstone-Dale.
Ra	Nombre de Rayleigh.
Nu	Nombre de Nusselt.
Gr	Nombre de Grashof.
Pr	Nombre de Prandlt.
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection.
α	Diffusivité thermique.
k	Conductivité thermique.
ρ	Masse volumique.
C_p	Chaleur spécifique à pression constante.
β	Coefficient de dilatation volumique.
ν	Viscosité cinématique du gaz.
M	Masse molaire.

Introduction

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de développement des algorithmes et outils numériques pour la reconstitution tomographique du champ (3-D) de température à partir des images issues d'une métrologie thermique fondée sur deux techniques optiques : la déflectométrie de moiré et l'interférométrie holographique. Il a vocation à s'adresser non seulement aux numériciens et spécialistes du traitement des images, mais aussi aux chercheurs et praticiens en instrumentation et mesure par les techniques non destructives en général et en métrologie thermique par les techniques optiques en particulier.

La tomographie par les techniques optiques des milieux transparents axisymétriques, sujet principal d'application de cette thèse, est un parfait exemple de système d'imagerie basé sur une propriété mathématique élémentaire, la transformée d'Abel et son inverse en l'occurrence. Cette propriété se heurte dans son application pratique à l'hypersensibilité au bruit et à des problèmes dus aux caractéristiques intrinsèques de cette transformée. Cependant, l'étude des milieux transparents, tels que l'air nécessite un traitement des images optique qui précède le calcul inverse de la transformée d'Abel. Ce traitement limitant ainsi le développement de l'imagerie 3-D nécessite une attention particulière.

Par ailleurs, la reconstitution tomographique du champ de température d'un tel milieu, se fera en deux parties de traitement, dont la première portera sur l'analyse des figures de fanges, tandis que la deuxième est dédiée à la résolution du problème inverse engendré par la transformée d'Abel.

Approches proposées

Les travaux présentés tout au long de ce manuscrit portent sur le développement des algorithmes d'extraction de la phase ainsi que son dépliement et la résolution du problème inverse.

Les dégradations dues aux différents genres de bruit, en particulier celui de speckle omniprésent dans toute métrologie utilisant la lumière cohérente rend l'image reconstruite mal résolue. Un moyen pour outrepasser ces dégradations est d'intervenir au niveau de

l’analyse des figures de franges qui comprend souvent deux étapes distinctes: l’extraction de la phase encodée dans les images de franges ainsi que son dépliement.

A ce propos, en partant des limitations de la démodulation des figures de franges par la technique du décalage de phase [1]ou par transformée de Fourier [2], nous proposons dans cette thèse deux approches d’extraction de la phase, englobant trois récents algorithmes basés sur la notion de crête d’ondelette [3]. En effet, l’une de ces approches fournit une phase repliée d’où la nécessité d’un algorithme de dépliement. Dans cette étape, nous évoquons que dans le cadre de certaines conditions mathématiques qu’un algorithme basique en une dimension tel que l’algorithme d’Itoh [3] est largement suffisant pour faire le dépliement. En revanche, dans le cas contraire, nous proposons des alternatives en deux dimensions. L’ensemble des algorithmes d’analyse des images de franges sera détaillé dans le chapitre III. Une fois l’analyse des images de franges s’est achevée, nous aurons à notre disposition des résultats qui vont servir comme données pour le problème mal posé.

Dans la deuxième partie du traitement, qui met en exergue le calcul inverse de la transformée d’Abel, nous proposons deux nouvelles techniques numériques, dont la première est semi-analytique basée sur un ajustement au sens des moindre carrés des données par un polynôme ne contenant que les puissances paires [4]. La seconde technique est purement numérique basée sur le lien entre la transformée d’Abel, de Fourier, et celle de Hankel [5].

Reste à préciser un point important, nous validons l’intérêt et la performance de tous les algorithmes que nous développons sur des profils de test analytique et numérique. Nous comparons les résultats numériques obtenus avec ceux donnés par d’autres algorithmes existants et récemment publiés.

Présentation globale du document

L'image du travail que relate ce manuscrit se décompose en six chapitres:

Pour commencer, le chapitre I est consacré à l’état de l’art non exhaustif des techniques de traitement des images de franges, afin d’accéder à la reconstitution tomographique du champ de température. Nous détaillerons ces techniques au fur et à mesure des besoins. Nous présentons la problématique et les objectifs de notre étude, mais aussi les atteintes et les contraintes de l’étude.

Le chapitre II présente premièrement les outils théoriques sur lesquels se base le développement de l'ensemble des algorithmes discutés dans cette thèse et plus particulièrement l'implémentation de la transformée en ondelettes et la notion de sa crête. Nous présenterons dans un premier temps la transformée de Fourier, outil incontournable pour toute application ayant pour objectif de traiter un signal. Nous mettons l'accent sur les limitations du traitement par une telle transformée. Nous verrons également comment la transformée de Fourier à fenêtre glissante et plus précisément la transformée de Gabor permettent de réduire les inconvénients de la transformée de Fourier sans pour autant posséder des caractéristiques optimales, notamment en terme d'analyse espace-fréquence. Enfin, nous verrons pourquoi le traitement par transformée en ondelettes peut s'avérer avantageux par rapport aux deux transformées précédentes lorsqu'on cherche à effectuer une analyse sur un signal non stationnaire. Nous exposons aussi les aspects physiques et mathématiques gouvernant la modélisation et la génération du bruit de speckle qui est omniprésent dans toute métrologie utilisant du laser.

Le chapitre III portera sur l'analyse des interférogrammes afin de retrouver le profil de phase synthétisé numériquement à partir d'une expression analytique. Cette analyse fait souvent intervenir deux étapes : l'extraction de l'information de phase puis le dépliement de cette phase. En ce qui concerne la première étape et afin de cerner le meilleur algorithme pour estimer la crête, nous étudierons plus en détail les algorithmes du maximum direct, de Liu et du groupe de Marseille. Dans la seconde étape, nous étudierons d'une façon pratique et comparative quatre algorithmes de dépliement à savoir l'algorithme d'Itoh 1-D et 2-D [3], de Goldstein [6] et de Herráez [7].

Le chapitre IV porte information sur la méthodologie que nous avons à suivre pour l'analyse des images de franges incarnant le phénomène de la convection naturelle environnant un cylindre chauffé suspendu dans l'air. L'étude couvre une comparaison entre deux approches d'extraction de la phase encodée dans le réseau de franges simulées à savoir : l'approche estimation de la phase et l'approche du gradient de la phase. On recherchera l'ondelette mère optimale et ses paramètres.

Le chapitre V entame une mise en œuvre innovatrice pour la résolution de la transformée d'Abel inverse, en ses deux versions interférométrique puis déflectométrique.

Dans son prolongement, nous aurons à discuter et comparer sept algorithmes récemment publiés. Nous porterons un regard critique sur les performances de certains de ces algorithmes à vaincre les problèmes inhérents à la résolution numérique de la transformée d'Abel inverse ainsi que leur complexité.

Le chapitre VI, dédié à l'expérimentation et mesures, a pour objectif principal d'appliquer l'ensemble des algorithmes développés et validés dans les chapitres précédents, sur des images réels. De ce fait, ce chapitre traite exclusivement les travaux expérimentaux menés dans cette thèse. Nous y présenterons la totalité des dispositifs expérimentaux de tomographie par interférométrie holographique. Ensuite, nous présenterons les résultats des algorithmes que nous avons développés, en montrant la reconstruction tomographique du champ de température en trois dimensions du milieu étudié. Dans le but de s'assurer de la validité de ces algorithmes, nous comparerons les résultats finaux de notre métrologie thermique avec ceux trouvés dans la littérature.

Enfin, nous terminons ce document par une conclusion générale qui dressera un bilan de l'ensemble des travaux réalisés et les perspectives qui s'ouvrent à une telle étude.

Chapitre I : État de l'art de la tomographie par les techniques optiques

I-1 Introduction

Ce chapitre constitue une synthèse bibliographique sur le développement des algorithmes pour l'analyse et le filtrage des images optiques, en vue de la reconstitution tomographique du champ de température d'un milieu axisymétrique.

D'abord, nous rappelons le principe physique de la tomographie en général, puis nous convergeons vers la tomographie par les méthodes de déflectométrie de moiré et d'interférométrie holographique. Nous résumerons les principes de base de ces deux méthodes et les équations qui les régissent dans le cas d'un milieu transparent à symétrie axiale. Ensuite, nous donnerons une synthèse bibliographique sur les techniques d'analyse des images optiques issues de la métrologie thermique utilisant les deux techniques optiques précédemment citées. Pour cela, nous passerons en revue les méthodes de démodulation de la phase puis nous aborderons le problème de dépliement et les différentes approches de sa résolution. Finalement, nous présentons le problème mathématique associé à la tomographie dans une synthèse bibliographique et historique. Le point sera fait sur les connaissances concernant les particularités d'un problème mal posé (inverse) d'une façon générale et celles inhérentes à la transformée d'Abel en particulier.

I-2 Définition de la tomographie

La tomographie originellement, désigne un mode de visualisation en coupe d'un objet quel qu'il soit. Aujourd'hui, le terme « tomographie » est employé pour désigner l'ensemble des techniques permettant l'acquisition d'informations et la reconstruction d'une section plane d'objets. La tomographie peut être effectuée en exploitant de nombreux phénomènes physiques tels que les rayons laser, rayons X, ondes acoustiques, résonance magnétique … .

Quel que soit le rayonnement ou l'onde utilisée, les systèmes de tomographie, moyennant les outils informatiques et numériques, ont en commun les aspects suivants :

L’acquisition des informations inaccessibles de l’objet sous différentes incidences (projections sur une tranche).

La détermination de l’image par inversion d’une formalisation mathématique souvent non linéaire et complexe.

Dans les différents cas, on reconstruit l’image d’une grandeur physique liée au rayonnement ou au principe physique utilisé. Généralement, les systèmes tomographiques permettent d’obtenir implicitement des images en trois dimensions par un empilement de plusieurs coupes contiguës et parallèles. On peut ainsi obtenir une reconstruction tridimensionnelle de l’objet. Il existe cependant des techniques permettant de réaliser de façon explicite de la tomographie tridimensionnelle. On peut par exemple citer les techniques optiques utilisant une source de lumière cohérente de rayons laser qui traversent l’objet transparent. Pour chaque position de la source encerclant l’objet, on acquiert une image qui correspond à une projection dans le plan du détecteur de l’objet en 3-D à reconstruire. En déplaçant le système source-détecteur, on obtient un ensemble d’images, sous différents angles de vision, la reconstruction doit être effectuée. A partir de ces images réparties tout autour de l’objet.

I-3 Mesure et tomographie

L'acquisition et le traitement des mesures expérimentales, constituent souvent des taches fastidieuses mais incontournables pour améliorer notre connaissance d’un phénomène physique. Cependant, si certaines mesures apportent directement une information utile sur le phénomène étudié, il existe des cas (milieux trop sensibles ou agressifs, formes géométriques complexes, ...) où les mesures recherchées ne sont pas directement accessibles. Il est alors nécessaire d'utiliser d'autres grandeurs mesurables (ou observables) et physiquement reliées aux grandeurs recherchées : on est en situation de mesure indirecte.

Dans le cas des fluides, deux grandes catégories de techniques expérimentales sont généralement utilisées pour mettre en œuvre la tomographie du champ de température. La première contient les techniques de mesures intrusives. Ce genre de métrologie est plus ou moins perturbateur du milieu à diagnostiquer. Comme leur nom l’indique, ces techniques s’appuient sur l’utilisation de capteurs physiquement présents en contact direct avec

l'écoulement. Ceci implique l'apport de pont thermique, de capacités calorifiques et de perturbations plus au moins importantes au sein de l'écoulement.

La deuxième catégorie concerne les techniques de contrôle non destructif où l'on cherche à réduire, voire éliminer, tout contact et par suite influence du dispositif de mesure sur l'écoulement. Les méthodes optiques en particulier celles fondées sur la différence de phase de l'onde ou celles exploitant la déviation du rayon lumineux réfracté sont d'un usage courant pour diagnostiquer les écoulements des fluides transparents. Nous nous limitons à l'interférométrie holographique et la déflectométrie de moiré qui ont l'avantage d'être simples à mettre en œuvre et facilement accessibles au niveau coût [8].

I-3.1 Les techniques optiques

Les techniques optiques de mesure ont connu un développement notable ces deux dernières décades à l'égard du développement de la modélisation numérique pour l'étude des processus physiques dans le domaine de la mécanique des fluides et de la thermique. Ce progrès résulte de l'évolution à la fois des lasers et des moyens d'acquisition ainsi que des techniques de traitement mathématico-numérique du signal.

Le principe de cette tomographie est fondé sur le fait qu'une onde électromagnétique est susceptible de subir certaines modifications lors de sa traversée d'un milieu transparent (Figure I-1). En effet, les gradients de température qui existent dans un fluide peuvent affecter la vitesse, la phase ou la direction de propagation de l'onde qui le traverse. En mesurant l'une de ces caractéristiques de l'onde à la sortie du milieu, on peut remonter à la distribution d'indice de réfraction $n(x, y, z)$ et par la suite on peut déduire la distribution de la température $T(x, y, z)$ en appliquant l'équation de Gladstone–Dale (I-1). De ce principe découle une diversité de techniques optiques qui constituent les outils les plus utilisés dans les diagnostics des écoulements de fluides. Pour d'amples informations, le lecteur est invité à se référer à l'ouvrage de Hauff et al [9].

$$n(x, y, z) = 1 + \frac{KPM}{RT(x, y, z)} \tag{I.1}$$

avec :

M : Masse molaire du gaz en $kg.mol^{-1}$

P : Pression en Pa.

$R = 8.14\, J.mol^{-1}.K^{-1}$: Constante des gaz parfaits.

K : Constante de Gladstone-Dale en $m^3.kg^{-1}$.

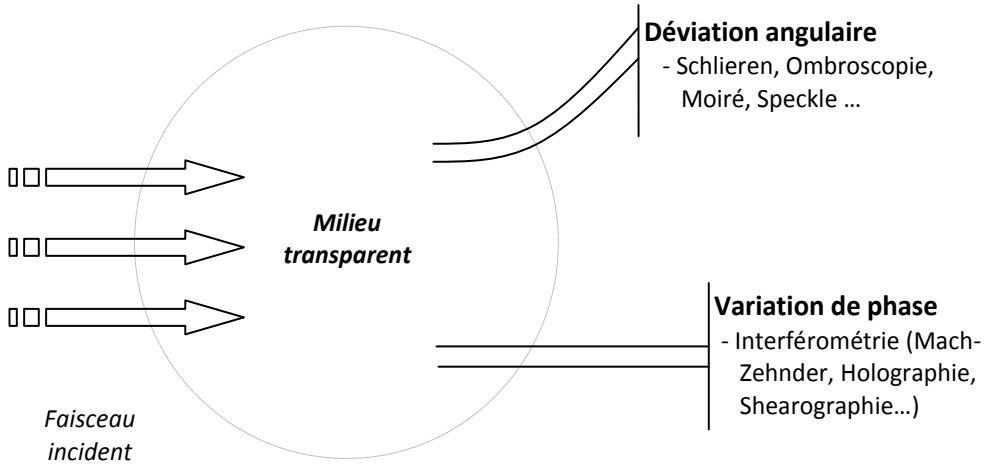


Figure I-1 : Techniques optiques de mesure dans les milieux transparents.

L'information correspondant au milieu d'étude transparent est extraite de la déformation du front d'onde de la lumière traversant le milieu. Ainsi, on peut distinguer deux catégories de techniques optiques : dans la première catégorie on trouve les techniques donnant accès à la différence de phase de l'onde. Ce sont les méthodes interférométriques de type Mach-Zehnder, holographie, speckle, shearographie ...Tandis que dans la deuxième catégorie on trouve les techniques utilisant la déviation du rayon lumineux réfracté. Elles sont des techniques déflectométriques telles que Schlieren, ombroscopie, rainbow, moiré, …

Il nous parait très utile sans se perdre dans les généralités qui sont liées à la géométrie des milieux soumis à l'étude, de détailler les deux techniques d'interférométrie holographique (IH) et de déflectométrie de moiré (DM) dans le cas d'un milieu axisymétrique. Ces deux méthodes sont amplement utilisées dans la métrologie thermique des milieux à symétrie radiale tels que les flammes [10] [11], les torches de plasma [12] et les écoulements convectifs autour des objets à symétrie de révolution [13].

I-3.2 Milieu axisymétrique

Au cours des dernières décennies, la tomographie des objets à symétrie cylindrique a reçu une attention approfondie qui a donné lieu à diverses études expérimentales, théoriques et numériques. La reconstitution du champ de température des milieux transparents a un grand intérêt dans de nombreuses applications d'ingénierie et dans les phénomènes naturels impliquant des sciences de l'environnement et de la mécanique des fluides.

L'écoulement en convection naturelle dans l'air au dessous ou au dessus d'un cylindre vertical chaud peut constituer un cas simple pour réaliser un milieu axisymétrique. Cette configuration est couramment rencontrée dans les procédés d'élaboration des matériaux par la technique CVD et dans le refroidissement des composants électroniques [14], [13], [15].

Considérons un cylindre de rayon R porté à haute température. A l'équilibre thermique, le système est schématisé par la Figure I-2 et la Figure I-3 relatives respectivement à la tomographie par interférométrie holographique et la déflectométrie de moiré. Le cylindre (1) est environné par l'air qui est faiblement conducteur de la chaleur. L'espace autour du cylindre peut être divisé en deux zones :

Zone froide à température ambiante notée T_0 (5).

Zone perturbée (4), où la répartition de température varie de la température du cylindre à la température ambiante. Cette région constitue notre domaine d'étude par les deux techniques optiques déjà citées.

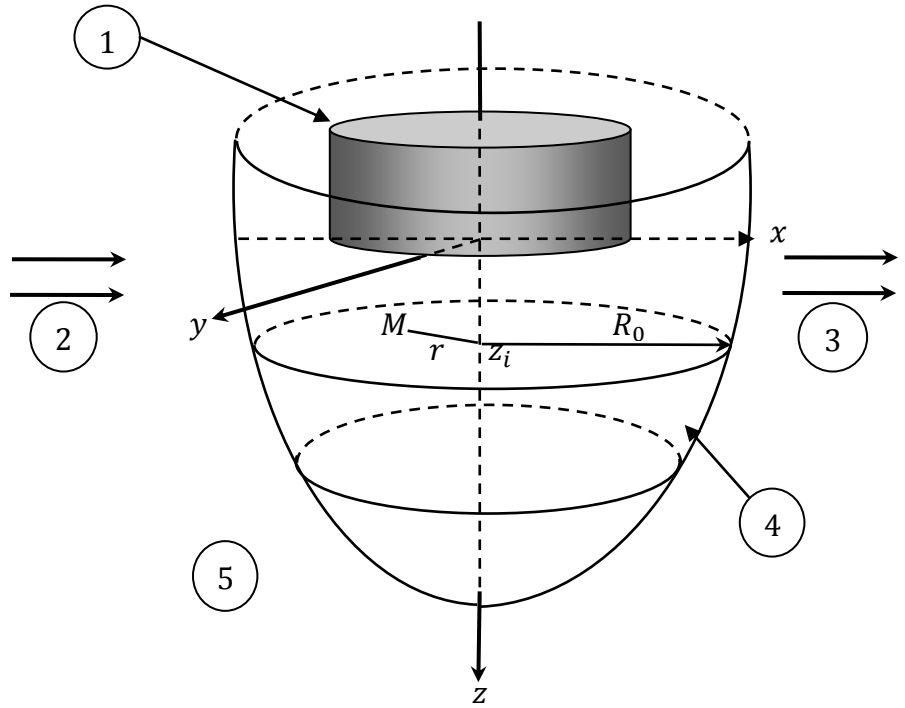


Figure I-2 : Champ de température axisymétrique au dessus d'un disque horizontal chaud. (1) cylindre chauffé ; (2) et (3) faisceau d'étude ; (4) frontière de la région perturbée thermiquement ; (5) région à la température ambiante.

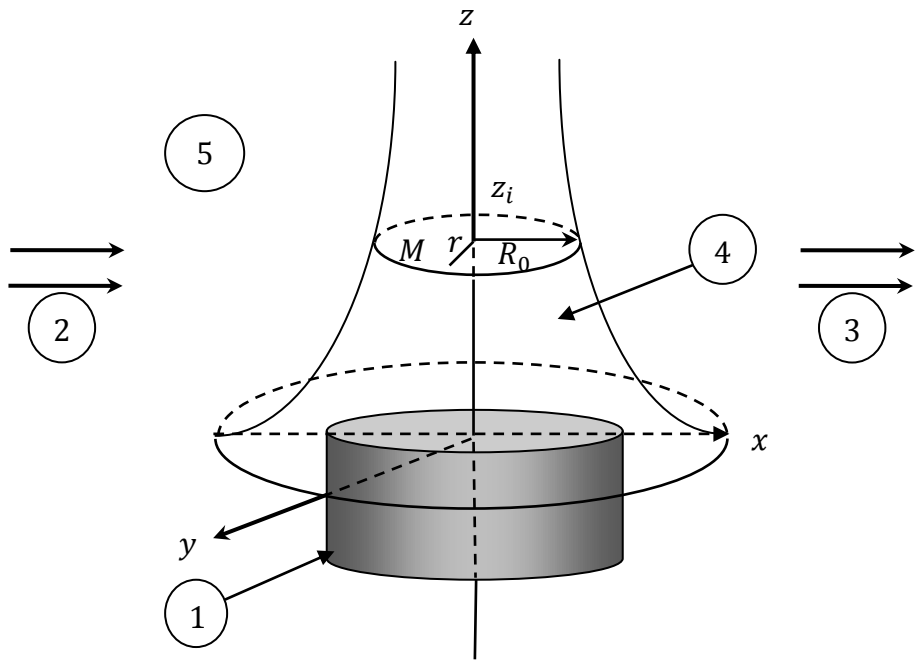


Figure I-3 : Champ de température axisymétrique au dessous d'un disque horizontal chaud. (1) Cylindre chauffé ; (2) et (3) Faisceau d'étude ; (4) Frontière de la région perturbée thermiquement ; (5) Région à la température ambiante.

D'après l'étude expérimentale [14] menée sur ce genre de géométrie, l'écoulement peut être considéré laminaire et le champ de température est de symétrie axiale c.à.d. indépendant de la cordonnée angulaire (voir Figure I-2 et Figure I-3). Un point quelconque M reste défini par les coordonnées cylindriques (r, z). Le rayon R_0 de la zone perturbée est fonction de la coordonnée axiale z.

L'hypothèse de symétrie axiale facilite la tomographie du champ de température. En effet, une seule coupe dans un plan de symétrie du milieu est suffisante pour effectuer cette opération. La tomographie s'opère par inversion de la transformée d'Abel [16].

Dans le cas d'absence de symétrie axiale, c.à.d. lorsque le champ de température est dissymétrique, le problème peut être aussi résolu. La méthode consiste à reproduire expérimentalement plusieurs projections du milieu suivant des directions différentes d'observation. Dans cette situation, nous avons à faire l'inversion de la transformée de Radon [16], [8].

I-4 La déflectométrie de moiré

Cette technique s'intéresse à l'information contenue dans la modification de la trajectoire des rayons lumineux et à la quantification de leurs déflections. Elle a été introduite par O. Kafri [17] et appliquée dans plusieurs domaines métrologiques notamment dans le diagnostic de la planéité des surfaces [18], ainsi qu'en tomographie des milieux transparents pour l'étude des champs de température et des processus de transfert de masse [19].

I-4.1 Principe de la mesure par déflectométrie

La Figure I-4 illustre le dispositif expérimental utilisé par Elmotassadeq [20] pour mettre en œuvre la technique de moiré pour mesurer le champ de température. Le faisceau laser est tout d'abord élargi par un objectif de microscope pour couvrir la lentille convergente puis filtré à l'aide d'un filtre spatial. Le faisceau parallèle traverse ensuite l'espace autour du disque où l'air a une température et un indice variables respectivement $T(r, z)$ et $n(r, z)$. La présence dans le milieu du gradient d'indice fait subir aux rayons lumineux des déviations dans leur trajectoire rendues perceptibles à l'œil en intercalant sur le trajet optique deux réseaux dont le pas p est identique (voir Figure I-5).

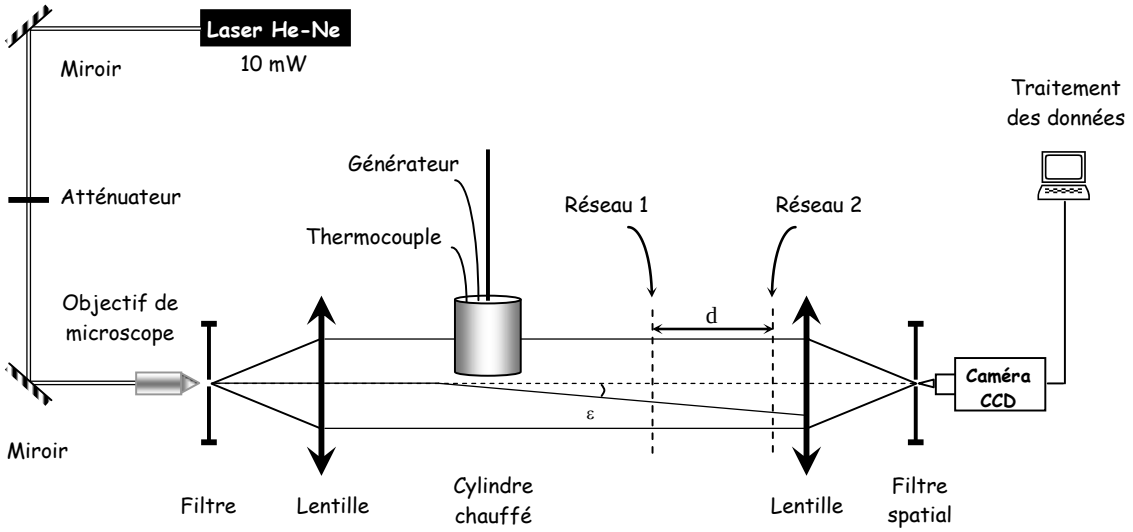


Figure I-4 : Schéma du montage optique pour la déflectométrie de moiré [20].

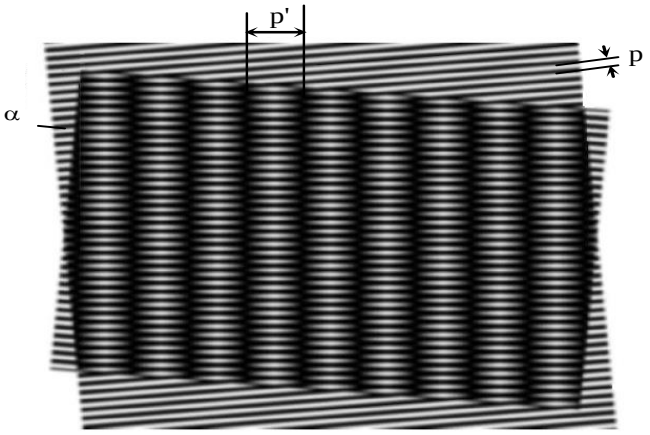


Figure I-5 : Disposition des deux réseaux de pas p et p' et phénomène de moiré.

Le premier réseau sert de référence et le second est disposé parallèlement au premier à une distance d. L'inclinaison des trames des deux réseaux d'un angle α fait apparaître à la température ambiante des franges de moiré disposées verticalement avec un pas p' (voir Figure I-5). En théorie de moiré, on montre que les pas p et p' sont reliés par la relation suivante :

$$p' = \frac{p}{\alpha} \tag{I.2}$$

Lorsque le cylindre est chauffé, les rayons lumineux traversant l'air chaud au dessous de sa surface inférieure subissent la réfraction et leur trajectoire devient courbée. Leur déviation angulaire est visualisée sous la forme d'un déplacement h de chaque frange comme le montre la Figure I-6. Les franges de moiré se déforment d'une manière d'autant appréciable que le gradient de température est important. L'acquisition de l'image de moiré se fait à l'aide d'une caméra CCD reliée à un micro-ordinateur pour le traitement. La démodulation de la figure des franges de moiré consiste à évaluer ponctuellement la déformation h, par rapport au réseau de franges initialement verticales et permet de remonter aux déviations angulaires ε des rayons lumineux en utilisant la relation approximative suivante :

$$\varepsilon = \frac{\alpha h}{\mathrm{d}} \tag{I.3}$$

Enfin, il faut signaler que dans le dispositif de la Figure I-4, les deux réseaux peuvent être disposés horizontalement et par suite les franges de moiré sont verticales (voir Figure I-5) et permettent de mesurer la déviation verticale. En revanche, si les deux réseaux sont disposés verticalement les franges de moiré sont horizontales et permettent de mesurer la déviation latérale. Ainsi, le signal de moiré s'écrit :

$$I(y,z) = I_m(y,z) + V(y,z)cos\left[2\pi\left(\frac{h}{p'} + \frac{y}{p'}\right)\right] \tag{I.4}$$

Dans l'expression précédente, I_m est l'intensité moyenne, V est le contraste des franges. En utilisant l'expression (I.3) donnant h, on aboutit à :

$$I(y,z) = I_m(y,z) + V(y,z)cos\left[2\pi\left(\frac{d\,\varepsilon}{p} + \frac{y}{p'}\right)\right] \tag{I.5}$$

Si on introduit la notion de déphasage $\Delta\phi = \Delta\phi_T + \Delta\phi_{T_0}$, l'expression de $I(y,z)$ prend la forme suivante :

$$I(y,z) = I_m(y,z) + V(y,z)cos[\Delta\phi(y,z)] \tag{I.6}$$

où nous définissons $\Delta\phi_{T_0} = \frac{y}{p'}$ et $\Delta\phi_T = \frac{d\,\varepsilon}{p}$ deux phases mesurables à partir des deux images de moiré (Figure I-6) respectivement à T_0 et T.

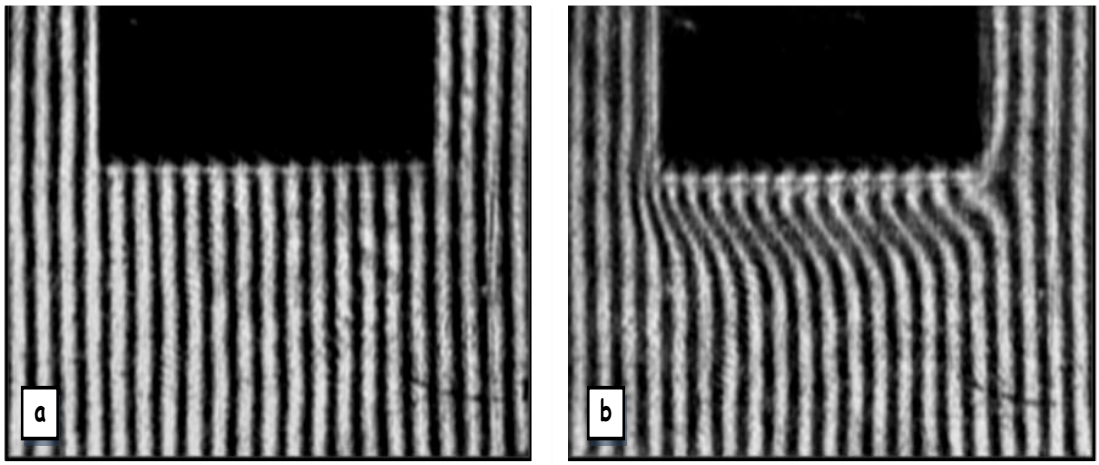


Figure I-6. : Images des franges de moiré de l'air ambiant autour d'un cylindre chauffé aux températures a- T=23 °C (température ambiante) et b- T=350 °C [20].

La déflection longitudinale dans le plan (x, z) et la déflection latérale dans le plan (y, z) sont régies par les équations suivantes :

$$\varepsilon_z(y,z) \sim \tan(\varepsilon_z) = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{n_0} \int_{trajet} \frac{\partial n(x,y,z)}{\partial z} dx \qquad \text{(I.7)}$$

$$\varepsilon_y(y,z) \sim \tan(\varepsilon_y) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n_0} \int_{trajet} \frac{\partial n(x,y,z)}{\partial y} dx \qquad \text{(I.8)}$$

n_0 désigne l'indice de réfraction du milieu environnant à la température T_0. On considère une section horizontale du milieu située à la cote z sous le cylindre comme le montre la Figure I-7 et en désignant par $R_0(z)$ le rayon de la zone perturbée où l'indice $n(r, z)$ est variable.

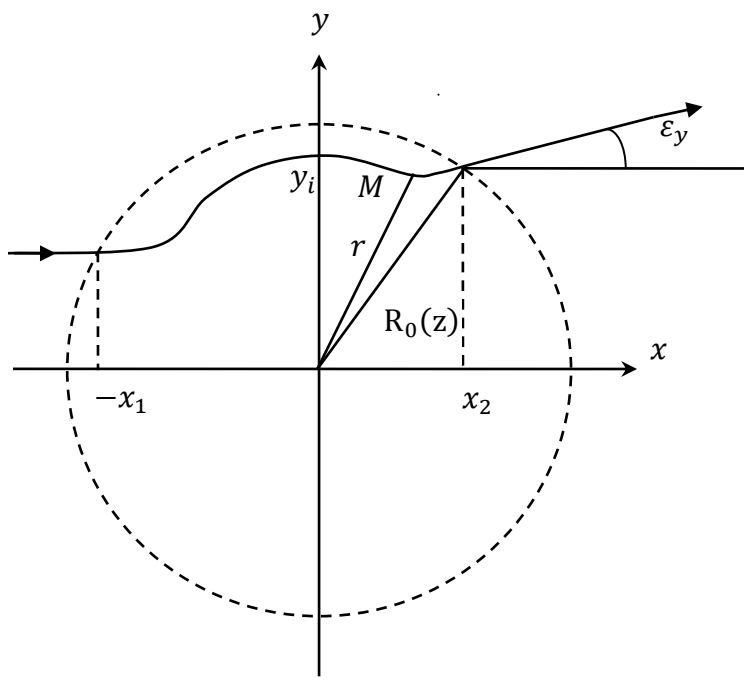


Figure I-7 : Section située à la cote z de la zone perturbée.

Les intégrales *(I.7)* et *(I.8)* précédentes s'écrivent :

$$\varepsilon_z(y,z) = \frac{1}{n_0} \int_{-x1}^{+x2} \frac{\partial n(r,z)}{\partial z} dx \qquad \text{(I.9)}$$

$$\varepsilon_y(y,z) = \frac{1}{n_0} \int_{-x1}^{+x2} \frac{\partial n(r,z)}{\partial y} dx \qquad \text{(I.10)}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la coordonnée radiale.

En effectuant le changement de variable suivant:

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} \qquad \text{et} \qquad dx = (r^2 - y^2)^{-1/2} r dr \qquad \text{(I.11)}$$

et en posant :

$$\delta(r,z) = \frac{n(r,z)}{n_0} - 1 \qquad \text{(I.12)}$$

$$g(r,z) = \frac{1}{n_0}\frac{\partial n(r,z)}{\partial z} \tag{I.13}$$

les équations donnant $\varepsilon_z$et ε_y peuvent s'écrire en coordonnées cylindriques:

$$\varepsilon_z(y,z) = 2\int_y^{R_0(z)} \frac{g(r,z)}{\sqrt{r^2-y^2}}\, rdr \tag{I.14}$$

$$\varepsilon_y(y,z) = 2y\int_y^{R_0(z)} \frac{\partial\delta(r,z)}{\partial r}\frac{dr}{\sqrt{r^2-y^2}} \tag{I.15}$$

Les deux intégrales (I.14) et (I.15) sont de type d'Abel mais de natures différentes. Leur transformées inverses vont être aussi calculées différemment.

I-5 L'interférométrie holographique

I-5.1 L'holographie

L'holographie se distingue d'une simple photographie, par le pouvoir d'enregistrer non seulement l'amplitude de l'onde électromagnétique émise des différents points d'un objet mais aussi sa phase. Seule une technique d'interférométrie permet d'atteindre l'information de phase. C'est en 1947 que le physicien hongrois D. Gabor eut l'idée de l'holographie pour laquelle il a reçu le prix Nobel de physique [21]. Mais il a fallu attendre 1962, soit deux ans après l'avènement du premier laser, pour que l'holographie prenne son véritable expansion.

Pour mieux comprendre ce qu'est l'interférométrie holographique, il est nécessaire de comprendre d'abord le processus d'enregistrement et de restitution de l'onde électromagnétique provenant d'un objet, c.-à-d. le processus de l'holographie. Le principe de l'holographie consiste à superposer à l'onde Σ_O transmise par le milieu d'étude une onde Σ_r de référence (voir Figure I-8). Le résultat de cette superposition cohérente donne lieu à un phénomène d'interférence qui est enregistré sur un support photosensible appelé "hologramme". Celui-ci représente une image de la différence de phase des ondes provenant du milieu et l'onde de référence et contient toutes les informations nécessaires à la reconstitution de l'onde enregistrée Σ_O.

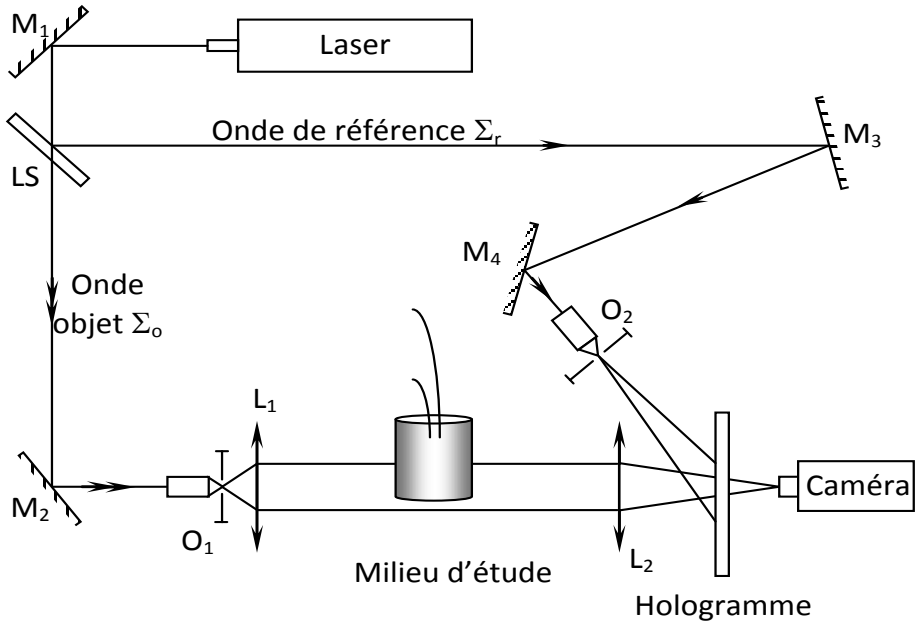


Figure I-8 : Schéma de principe de l'interférométrie holographique.

I-5.2 L'interférométrie holographique

L'interférométrie holographique a vu le jour concurremment dans de nombreux laboratoires en 1964 [22]. Elle consiste à faire interférer deux ondes électromagnétiques dont l'une vient de la restitution d'un hologramme préalablement enregistré. Dans le cas de l'exemple de la Figure I-8, toutes les modifications de l'état thermique du milieu par rapport à l'état mémorisé par l'hologramme vont donner lieu à une image de franges d'interférence d'autant plus distordues que les gradients de température sont importants.

I-5.2.1 Tomographie par interférométrie holographique

En tomographie par interférométrie holographique, on compare deux ondes $\Sigma_O(n_0, t_0)$ et $\Sigma_O(n, t)$ qui ont traversé le même milieu d'étude mais avec deux états d'indice de réfraction différents. En général, cette comparaison d'ondes se fait en temps réel permettant ainsi de suivre l'évolution temporelle du phénomène à étudier.

A l'instant t_0, le système est à la température ambiante. Son état est caractérisé par un indice de réfraction constant n_0. L'onde objet $\Sigma_O\ (n_0, t_0)$ qui traverse le milieu sera mémorisée par l'hologramme grâce à son interférence avec l'onde d'enregistrement Σ_r. A l'instant t, le milieu, perturbé par la présence du phénomène thermique à étudier, a une distribution d'indice

variable $n(x, y, z)$. Le milieu est traversé par l'onde $\Sigma_O\ (n, t)$ qui sera comparée en temps réel avec l'onde $\Sigma_O\ (n_0, t_0)$ reconstruite par l'onde Σ_r inchangée. Pour faciliter la tomographie, on introduit optiquement un déphasage supplémentaire entre $\Sigma_O\ (n_0, t_0)$ et $\Sigma_O\ (n, t)$. Le but de cette opération est de faire apparaitre des franges verticales ou horizontales qui seront prises comme référence lorsque le milieu est à la température T_0. La Figure I-9 montre deux interférogrammes holographiques (a) et (b) relatifs respectivement à l'état où la température est ambiante puis au moment où le système est porté à une température différente.

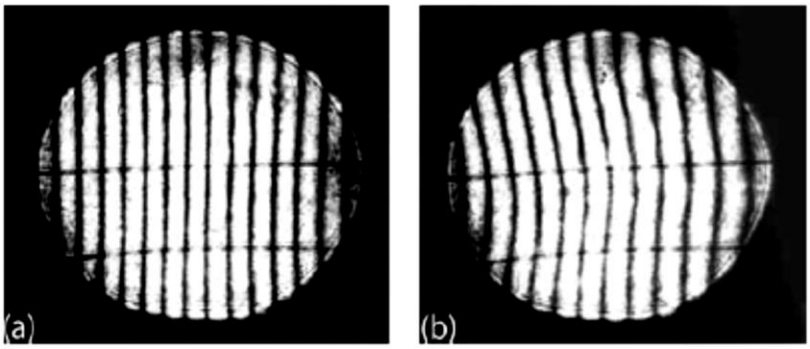


Figure I-9: Interférogrammes holographiques d'un jet de plasma.(a) interferogramme de référence sans plasma (b) interferogramme en présence du plasma [23].

On montre [16] que l'intensité sur l'image des franges obéit au même type d'équation que nous avons vue en déflectométrie de moiré à savoir :

$$I(y, z) = I_m(y, z) + V(y, z)cos[\Delta\phi(y, z)] \tag{I.16}$$

où $\Delta\phi = \Delta\phi_{T_0} + \Delta\phi_T$ avec $\Delta\phi_{T_0}$ est le déphasage créé optiquement et $\Delta\phi_T$ est le déphasage thermique dû à la variation de la température du milieu entre les instants t_0 et t.

En chaque point du plan d'observation (y, z), le déphasage $\Delta\phi_T$ s'exprime par la relation suivante :

$$\Delta\phi_T(y, z) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_{trajet} [n(x, y, z) - n_0]\, dx \tag{I.17}$$

Afin de déduire l'expression de l'équation de l'interferogramme, nous considérons une section horizontale, située à la cote z comme le montre la Figure I-10. L'équation précédente s'écrit :

$$\Delta\phi_T(y,z) = \frac{2\pi}{\lambda}\int_{-x_1}^{+x_1}[n(x,y,z)-n_0]\,dx = 2\pi S(y,z) \qquad \text{(I.18)}$$

où $S(y,z)$ est l'ordre de frange. En effectuant le changement de variable suivant :

$$x = \sqrt{r^2-y^2}\,; \quad dx = (r^2-y^2)^{-1/2} r dr \qquad \text{(I.19)}$$

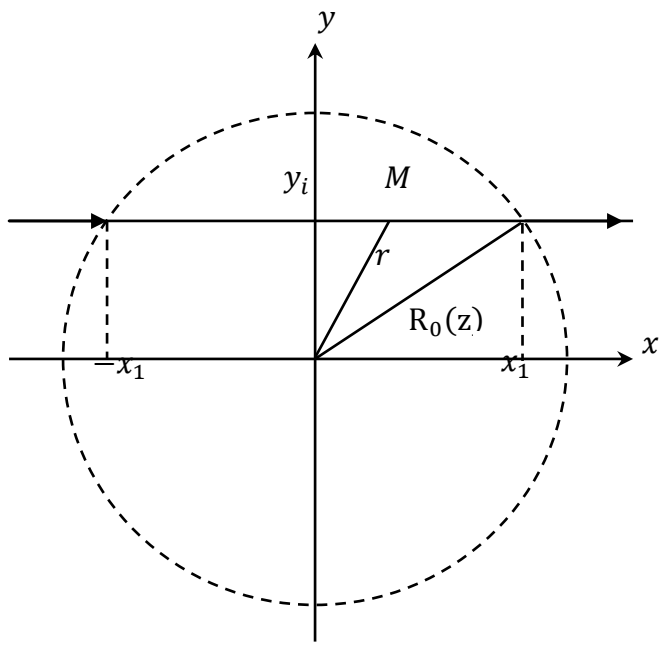


Figure I-10 : Section à la cote z de la zone perturbée.

et en posant :

$$f(r,z) = n(r,z) - n_0 \qquad \text{(I.20)}$$

l'équation (I.18) s'écrit alors en coordonnées cylindriques sous la forme :

$$S(y,z) = \frac{2}{\lambda}\int_{y}^{R_0(z)} \frac{f(r,z)}{\sqrt{r^2-y^2}}\, r dr \qquad \text{(I.21)}$$

L'équation (I.21) est de type d'Abel et ressemble à l'équation intégrale donnant ε_z en déflectométrie de moiré (I.14). Cette similitude offre l'avantage d'effectuer le même traitement numérique en déflectométrie et en interférométrie holographique.

I-6 Similitude d'images de franges

Comme étant déjà évoqué dans les sections (I-4 et I-5), la déflectométrie de moiré et l'interférométrie holographique, permettent d'avoir sur la matrice du détecteur un éclairement qui s'écrit d'une façon générale sous l'expression mathématique suivante :

$$I(y,z) = I_m(y,z) + V(y,z)\cos[\Delta\phi(y,z)] \qquad \text{(I.22)}$$

Les deux méthodes diffèrent par l'expression du terme de phase $\Delta\phi(y,z)$ qui représente l'information qu'on cherche à extraire d'une image de franges. $\Delta\phi(y,z)$ fait intervenir soit une dérivée partielle de $n(r,z)$ (déflectométrie de moiré) ou directement $n(r,z)$ (interférométrie holographique). Cette similitude de représentation nous permet par conséquence d'appliquer le même traitement aux images de franges pour remonter à la tomographie du champ de température. Ce traitement consiste premièrement à déterminer le terme de la phase. La seconde étape consiste à calculer, selon la métrologie adoptée, le champ d'indice de réfraction par l'inversion de l'une des équations intégrales (I.14), (I.15) ou (I.21) L'étape finale est le calcul de la température par application de la relation de Gladstone-Dale (I.1).

I-7 Techniques d'analyse des franges

I-7.1 Préambule et revue bibliographique

Nous entendons par analyse des franges à la fois l'extraction du terme de phase ainsi que son dépliement. L'obtention des figures de frange communément appelées "interférogrammes ou déflectogrammes" par les techniques optiques sont porteuses d'information qui doit être extraite. Les variations d'indice de réfraction et donc de température dans le milieu sont codées en un réseau de franges d'interférence ou de moiré. L'intensité lumineuse sur ces films varie comme le cosinus de la phase. La détermination absolue du terme de phase est par conséquent une étape très importante pour laquelle différentes approches numériques sont envisageables.

La méthode la plus antique est le comptage manuel des franges [16]. Son principe consiste à reporter en abscisse les centres des franges brillantes et sombres en leur affectant en

ordonnée un déphasage multiple de 2π ou π respectivement. Cette méthode simple a le mérite de ne demander qu'une seule image de franges mais elle conduit à une incertitude élevée [15] [14]. En plus, elle ne fournit qu'un nombre fini de mesures qui est égal au nombre de franges (généralement petit). Heureusement, la venue des caméras CCD permettant de numériser les images de franges et le développement des traitements numériques et informatiques associés ont quasiment relégué au rang des oubliettes cette méthode.

Les techniques de démodulation des franges peuvent être classées en deux grandes catégories selon leur aptitude à localiser les variations de fréquence dans le signal de franges. D'une part, il y a les techniques temporelles ou locales telles que la méthode du décalage de phase [24] qui nécessite au moins trois interférogrammes pour calculer la phase. D'autre part, il y a les technique dites spatiales ou globales telles que l'analyse des franges par la transformée de Fourier [25] qui ne nécessite qu'une seule figure de franges pour extraire la phase. On peut également citer une approche utilisant l'analyse par transformée en ondelettes [26], [27], [28], [29] qui est actuellement en pleine expansion. C'est aussi une approche de détection locale de la phase mais avec la particularité de n'utiliser qu'une seule figure de franges.

Désormais, la plus part de ces techniques procurent une phase repliée. Une étape supplémentaire est nécessaire pour rendre cette phase continue et qui revêtit d'une importance capitale dans le processus d'analyse des images de franges. Récemment, les techniques de dépilement de phase (*phase unwrapping*) sont de plus en plus sophistiquées mais dont l'implémentation n'est pas toujours facile [30], [31].

I-7.2 Démodulation de la phase

Cette section est consacrée aux diverses méthodes numériques applicables sur les images de franges. Nous nous appuyons sur des images simulées pour présenter ces méthodes numériques. Dans ce qui suit, les trois méthodes d'analyse des franges qui s'appuient sur le décalage de phase, la transformée de Fourier ou sur la transformée en ondelettes seront brièvement introduites. Les différents algorithmes utilisant la dernière méthode vont être rigoureusement détaillés dans le troisième chapitre. En effet, l'implémentation de la

transformée en ondelettes dans l'analyse des franges constitue une large partie de l'originalité de notre travail.

I-7.2.1 Démodulation de phase par décalage de phase

En comparaison avec les techniques de démodulation de la phase utilisant un seul interférogramme telles que l'analyse par transformée de Fourier, l'extraction de la phase par décalage de phase ou de l'anglais "*phase shifting*" est relativement simple à mettre en œuvre. Cette technique est amplement utilisée depuis son introduction probablement pour la première fois en 1974 par Bruning et al. [32]. Elle a été l'objet d'investigation et de développement par de nombreuses publications [1], [33], [34], [35]. On dénombre ainsi plusieurs variantes de cette technique dont la performance dépend uniquement du choix du nombre de figures de frange enregistrées en introduisant à chaque fois une valeur du décalage.

Le principe de la technique est issu du fait que l'équation (I.22) présente trois inconnues : $I_m(y,z)$, $V\,(y,z)$ et $\Delta\phi(y,z)$. Il faut donc au minimum trois équations pour calculer la phase $\Delta\phi(y,z)$. Autrement dit, il faut prendre au moins trois images des franges en introduisant à chaque prise un décalage de phase τ connu entre chaque prise d'image. Pour la $k^{iéme}$ image, l'intensité enregistrée sera écrite sous la forme de la relation (I.23):

$$I(y,z) = I_m(y,z) + V\,(y,z)cos[\Delta\phi(y,z) + k\tau] \qquad \text{(I.23)}$$

On réécrit l'équation (I.23) en considérant un algorithme à quatre sauts de phase ($\tau = \frac{\pi}{2} et\ k = 0, 1, 2\ ou\ 3$) donne :

$$I_0(y,z) = I_m(y,z) + V\,(y,z)cos[\Delta\phi(y,z)] \qquad \text{(I.24)}$$

$$I_1(y,z) = I_m(y,z) + V\,(y,z)cos\left[\Delta\phi(y,z) + \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{(I.25)}$$

$$I_2(y,z) = I_m(y,z) + V\,(y,z)cos[\Delta\phi(y,z) + \pi] \qquad \text{(I.26)}$$

$$I_3(y,z) = I_m(y,z) + V\,(y,z)cos\left[\Delta\phi(y,z) + 3\frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{(I.27)}$$

en prenant la différence des deux équations (I.24) et (I.26) on obtient :

$$I_0(y,z) - I_2(y,z) = 2V\,(x,y)\,cos[\Delta\phi(y,z)] \qquad \text{(I.28)}$$

de même la différence des deux équations (I.27) et (I.25) donne :

$$I_3(y,z) - I_1(y,z) = 2V\,(y,z)\,sin[\Delta\phi(y,z)] \tag{I.29}$$

en prenant l'arctangente du quotient des deux dernières équations, nous obtenons l'équation (I.30) représentant la phase désirée :

$$\begin{aligned} arctan\left[\frac{I_3(y,z) - I_1(y,z)}{I_0(y,z) - I_2(x,y)}\right] &= \Delta\phi(y,z) \\ &= \left[\Delta\phi_{T_0}(y,z) + \Delta\phi_T(y,z)\right] mod\,\pi \\ &= 2\pi\,[\nu_0 y + S(y,z)]\,mod\,\pi \end{aligned} \tag{I.30}$$

avec $\Delta\phi_{T_0}(y,z) = 2\pi\,\nu_0 y$ est le déphasage créé optiquement et $\Delta\phi_T(y,z) = 2\pi S(y,z)$ est le déphasage thermique, $\nu_0$est une constante qui représente les fréquences des franges et $S(y,z)$ est leur ordre de frange inconnu.

La phase résultante de cette méthode est repliée et par conséquent un algorithme de dépliement est nécessaire afin d'éliminer les discontinuités à 2π. En outre, l'un des inconvénients de cette méthode réside au niveau expérimental qui exige l'utilisation d'un élément optique supplémentaire tel qu'un transducteur ou un piézo-électrique dans l'interféromètre qui va introduire les décalages de phase τ à des instants différents. Ainsi, cette procédure ne convient pas à l'analyse des milieux dynamiques tels que les écoulements.

I-7.2.2 Démodulation de phase par transformée de Fourier

Depuis son introduction en 1982 par Takeda et al [36]., la démodulation de phase par transformée de Fourier pour l'analyse des franges a été adoptée par de nombreux auteurs en particulier pour la mesure non destructive. Pour illustrer cette technique, considérons l'interférogramme de la Figure I-11 dont l'intensité sur une ligne (voir Figure I-12) obéit l'équation suivante :

$$I(y) = I_m(y) + V\,(y)\,cos[2\pi\nu_0 y + \varphi(y)] \tag{I.31}$$

avec $\varphi(y,z) = 2\pi S(y,z) = \Delta\phi_T(y,z)$

réécrivons cette expression (I.31) en faisant apparaître des exponentielles complexes :

$$I(y) = I_m(y,) + c(y)e^{i2\pi\nu_0 y} + \bar{c}(y)e^{-i2\pi\nu_0 y} \tag{I.32}$$

avec :

$$c(y) = \frac{V\,(y)e^{i\varphi(y)}}{2} \qquad et \quad \bar{c}(y) \;= \frac{V\,(y)e^{-i\varphi(y)}}{2} \tag{I.33}$$

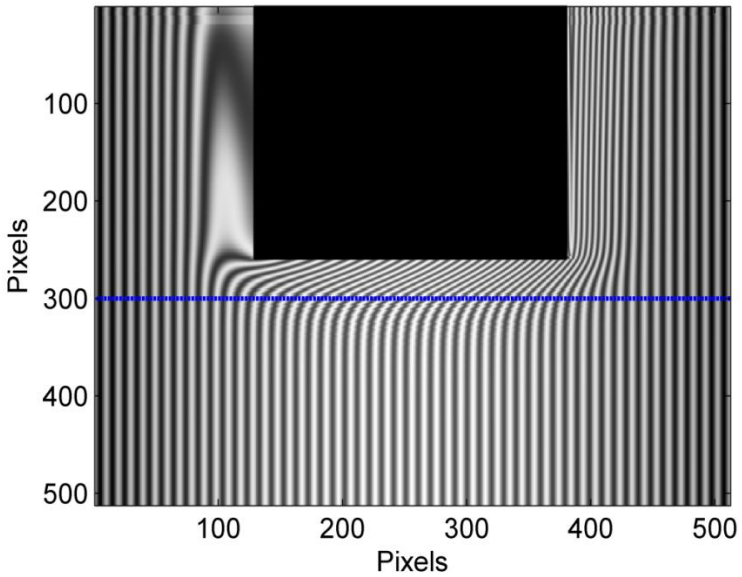


Figure I-11 : Interférogramme simulé à partir d'un champ de température induit par un cylindre de rayon $15\ mm$*, porté à une température de* $350\ °C$*, avec un fond gaussian et une fréquence de porteuse* $\nu_0 = 0.1\ Pixel^{-1}$ [4].

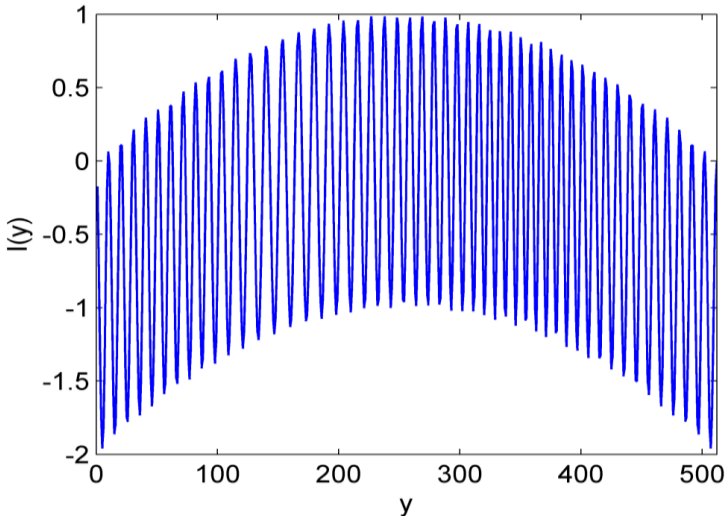


Figure I-12 : Profil d'intensité correspondant à la ligne 300 sur l'interférogramme de la Figure I-11.

Le spectre le long d'une ligne d'intensité peut être exprimé comme:

$$H(\nu) = A(\nu) + C(\nu - \nu_0) + \bar{C}(\nu + \nu_0) \tag{I.34}$$

avec $H(\nu)$, $A(\nu)$, $C(\nu - \nu_0)$ et $\bar{C}(\nu + \nu_0)$ représentent respectivement la transformée de Fourier des termes $I(y)$, $I_m(y)$, $c(y)$ et $\bar{c}(y)$.

La transformée de Fourier fait alors apparaître trois pics (ou lobes): l'un centré sur l'origine, les deux autres centrés respectivement sur la fréquence du signal ν_0 et son opposée $-\nu_0$ comme le montre la Figure I-13. Par un simple filtrage, seulement un lobe est conservé par exemple celui correspondant à la fréquence positive qui sera ensuite ramenée à l'origine par une translation de $-\nu_0$ dans l'espace de Fourier (voir Figure I-14). Une transformation inverse permet alors de déterminer un signal analytique complexe que nous notons $c(y)$. La partie réelle et la partie imaginaire sont données par :

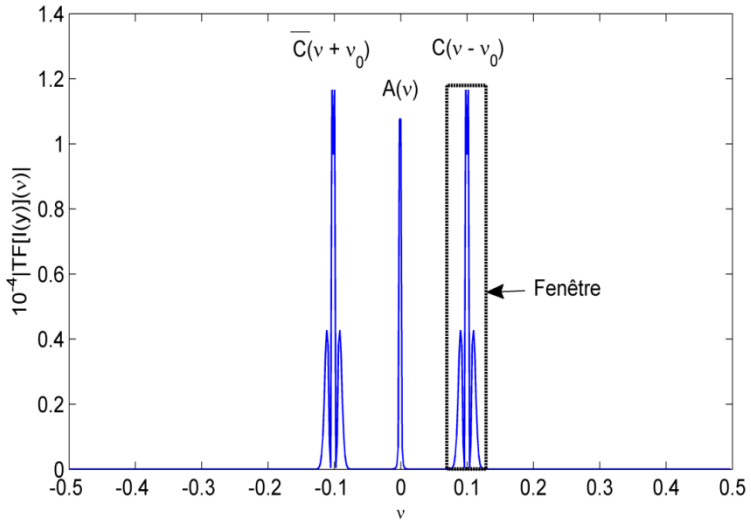


Figure I-13 : Spectre fréquentiel de Fourier montrant les deux lobes.

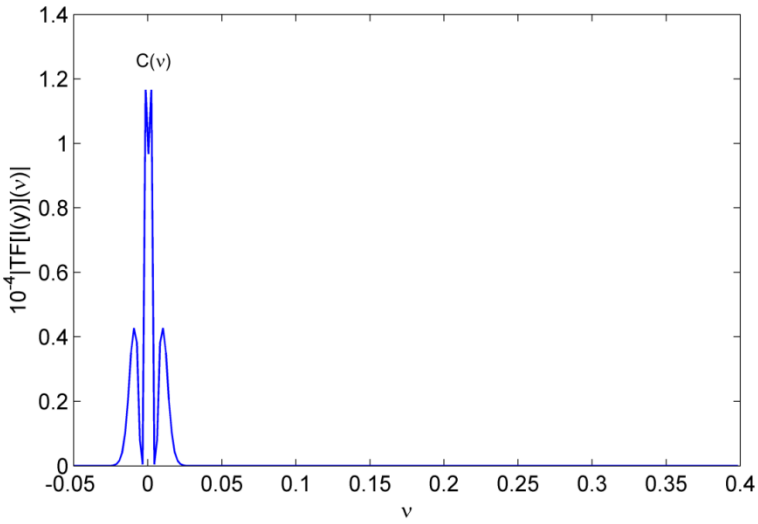


Figure I-14 : Lobe isolé.

$$\Re[c(y)] \;=\; \frac{1}{2}V\,(y)\;cos[\varphi(y)] \tag{I.35}$$

$$\Im[c(y)] \;=\; \frac{1}{2}V\,(y)\;sin[\,\varphi(y)] \tag{I.36}$$

Finalement la phase désirée est extraite en prenons l'arctangente du quotient de l'équation (I.36) par l'équation (I.35) :

$$\varphi(y) \;=\; arctan\left\{\frac{\Im[c(y)]}{\Re[c(y)]}\right\} \tag{I.37}$$

$$=\; arctan\left\{\frac{V\,(y)\;sin[\,\varphi(y)]}{V\,(y)\;cos[\,\varphi(y)]}\right\} \tag{I.38}$$

$$= arctan\{tan[\,\varphi(y)]\} \tag{I.39}$$

$$= \varphi(y) mod\;\pi \tag{I.40}$$

Or l'intervalle image de la fonction $arctan(x)$ est $[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\,]$. On peut le prolonger à $[-\pi,\pi]$ en tenant compte des signes respectifs de $\Re[c(y)]$ et $\Im[c(y)]$. La phase du signal ainsi calculée va engendrer des discontinuités en 2π. Une opération de dépliement de la phase extraite est nécessaire afin d'éliminer ces discontinuités.

L'avantage primordial de la démodulation de phase par transformée de Fourier est sa capacité de réduire considérablement le niveau de bruit de la phase démodulée, grâce à l'opération d'isolation de l'un des deux lobes. Cependant, le fait que ce filtrage est purement fréquentiel dégrade complètement la résolution spatiale (nous aurons l'occasion de revenir sur ce point avec plus d'éclaircissement dans le Chapitre II). Ainsi, aucune information locale ne peut être fournie par la phase extraite. En plus, en pratique la méconnaissance préalable de la fréquence de la porteuse v_0 pour la sélection de l'un des lobes nécessite une interaction forte avec l'utilisateur pour que l'extraction de la phase soit fiable. Cet inconvénient montre que l'automatisation totale de la démodulation par cette technique n'est pas un recueil aisé.

I-7.2.3 Démodulation de phase par transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes (TO) a connu un développement spectaculaire depuis son apparition implicitement dans un célèbre travail de Calderon [37]. Elle a été redécouverte et explicitée par Grossmann et Morlet en 1984 [38], [39]. Elle touche de nombreux domaines des mathématiques [40], notamment le traitement de signal et des images [41]. Cependant, son usage pour l'analyse des franges issues de la métrologie thermique des écoulements reste encore très limitée.

Dans l'analyse des figures de franges, il n'est légitime d'utiliser la méthode de décalage de phase que si le système étudié est stable, ce qui n'est pas généralement le cas des fluides. En revanche, l'utilisation de la transformée de Fourier, n'est intéressante que si le signal d'intensité représentant les franges est stationnaire, c'est-à-dire sa fréquence ne change pas dans l'espace. Cette approche trouve une limitation naturelle dès que les signaux analysés sont non stationnaires (fréquences évolutives, transitoires, ruptures, modulations, …), ce qui est bien souvent le cas dans les images de franges. Du fait que la transformée de Fourier est constituée par une superposition d'ondes oscillant dans tout l'espace, l'information du signal transformé est délocalisée entre tous les coefficients de Fourier. Dans de telles situations, une description plus pertinente consiste à représenter le signal à l'aide de deux variables conjointes à savoir l'espace et la fréquence. Ainsi, la démodulation des images des franges par la TO comprend souvent deux étapes : la première est le calcul de la transformation en ondelettes en tant qu'intégrale. Cette étape donne comme résultat deux scalogrammes l'un des modules et l'autre des arguments. Tandis que la deuxième étape porte sur l'extraction des informations

pertinentes du signal à partir de ces deux scalogrammes. En ce qui concerne cette étape, deux approches sont couramment employées dans la littérature. Il s'agit de l'estimation de la phase [42], [43] [44], [45] et l'estimation de la fréquence [46], [47], [48].

I-7.3 Comparaison des méthodes de démodulation de phase

Le tableau récapitulatif ci-dessous, montre les points de force ainsi que de faiblesse de chacune des méthodes de démodulation de la phase, présentés dans ce qui précède.

	Décalage de phase	**Transformée de Fourier**	**Transformée en ondelettes**
Domaine d'analyse	Spatial	Fréquentiel	Spatial et fréquentiel
Complexité	Faible	Élevée	Très élevée
Nombre d'interferogrammes	Au moins trois	Un	Un
Mémoire exigée	Faible	Moyenne	Très exigeante
Aptitude d'analyser des objets dynamiques	Non convenable	Convenable	Convenable

Tableau I-1 : Tableau récapitulatif des techniques de démodulation des images de franges.

I-7.4 . Dépliement de phase

En général, dans les algorithmes dédiés à l'estimation de la phase à partir d'une figure de franges, la fonction $arctan(x)$ est omniprésente. L'approche par estimation de la fréquence locale utilisant la transformée en ondelettes fait exception. L'usage de la fonction $arctan(x)$ fournit une phase discontinue située dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Dans ce cas, la phase est repliée puisqu'elle contient un ou plusieurs sauts en 2π d'origine mathématique. Bien que la phase doit être continue, réelle, avec une monotonie physiquement parlante. Donc, pour avoir accès à la variation de phase continue, il faut faire appel à un algorithme de dépliement de phase, qui permet de reconstituer la continuité physique de la phase que nous cherchons à évaluer. On peut considérer qu'il existe deux principales classes de méthodes de dépliement de phase dans la littérature :

Premièrement les méthodes locales ou de propagation que ce soit en une ou deux dimensions, issues de l'algorithme de déroulement monodimensionnel d'Itoh qui est souvent cité comme algorithme révélateur de la philosophie du dépliement de la phase [3]. Dans le même cadre, on trouve aussi l'algorithme de Goldstein qui est le premier à avoir introduit un algorithme bidimensionnel pour le dépliement local de la phase [6].

Deuxièmement les méthodes dites globales [49] qui cherchent soit à déterminer des structures globales ou à minimiser un critère de régularité sur des partitions ou sur l'ensemble de la carte de la phase repliée. On peut citer les méthodes de dépliement qui opèrent par algorithmes itératifs [50], moindres carrés [51], par calcul du produit de convolution ou par identification de la phase dépliée par rapport à un modèle global continu [52]. Toutes ces méthodes viennent pour palier le problème des méthodes de propagation en une dimension qu'est dû à son caractère local. En effet, la détermination de la phase continue se fait de proche en proche pixel par pixel pour prendre en compte l'aspect bidimensionnel et produisant ainsi un résultat tout à fait aberrant.

I-8 Problème inverse

Une fois que la phase est extraite de la figure optique, on est alors confronté au problème inverse de la reconstruction du champ de la température axisymétrique ayant donné cette phase. Cette section est consacrée aux aspects liés à la résolution du problème inverse en général. Le but visé est de passer en revue les méthodes numériques pour la reconstitution tomographique en métrologie thermique et qui sont tout à fait adaptées à la haute précision offerte par les techniques optiques.

I-8.1 Définition

Dès lors qu'on aborde la problématique inverse, une question se pose du premier coup: qu'entend-t-on exactement par « problème mal posé ou inverse» ? Cette question en apparence assez simple comprend tout un éventail de conséquences physiques ainsi que mathématiques. En effet, on qualifiera de problème inverse toute situation expérimentale où l'on cherche à évaluer une certaine grandeur physique x inaccessible à l'expérience à partir d'une autre grandeur y mesurable. Bien entendu, on suppose connaitre la formalisation mathématique du

problème direct qui donne explicitement y en fonction de x (ce que l'on note symboliquement $y = Q(x)$ où Q désigne un opérateur mathématique). Cependant, une telle définition aussi étendue conduirait pratiquement à appeler «problème inverse» la résolution de toute équation algébrique, matricielle, différentielle, intégrale, aux dérivées partielles, ... Or, le problème direct conduit également à résoudre ce genre d'équations. Ce qui rend difficile de distinguer le problème direct et le problème inverse associé. Ce sont alors les circonstances expérimentales ou les considérations mathématiques qui permettent de trancher. Le problème direct est traité en premier et peut être avec plus de détails. Il est généralement le problème le plus facile à résoudre, parce qu'il est bien posé du point de vue mathématique.

La notation Q symbolise un operateur mathématique incarnant les équations de la physique du problème considéré. Il dépend souvent de la géométrie du système étudié. Dans le cas de la tomographie par interférométrie holographique et par déflectométrie de moiré, x correspond à la fonction d'indice de réfraction et y au déphasage ou l'angle de déviation respectivement.

Par ailleurs, la majorité des problèmes inverses sont des problèmes mal posés car ils ne respectent pas la définition d'un problème bien posé [53]. En pratique, cela signifie que la résolution du problème inverse est extrêmement sensible aux petites fluctuations sur les données causées par les erreurs systématiques de mesure qui sont inévitables en expérience. Cette sensibilité est due au caractère approché du modèle mathématique par rapport à la réalité physique et au nombre fini des données expérimentales. Selon Hadamard [53], un problème bien posé respecte simultanément les conditions suivantes :

Existence : $\forall y \in \mathbb{R}^m, \exists\, x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = Q\,(x)$;

Unicité : $\forall y \in \mathbb{R}^m$, si $y = Q\,(x_1)$ et $y = Q\,(x_2)$, alors $x_1 = x_2$;

Stabilité : Dépend continûment des données. Une faible perturbation δy sur les données y a un faible impact δx sur la solution x.

Si l'une au moins des trois conditions ci-dessus n'est pas vérifiée alors le problème est mal posé. En général, l'existence d'une solution d'un problème mal posé ne pose pas de difficulté contrairement à la stabilité et l'unicité. Des problèmes de stabilité de la solution peuvent surgir lorsque le problème est mal conditionné ou sensible à des points de l'espace.

De même, si un problème a plusieurs solutions, il faut disposer d'un critère (par exemple une information sur le système étudié) pour choisir entre elles. Dans ce cas, l'unicité de la solution n'est pas assurée. Les progrès réalisés en terme des schémas numériques développées pour la résolution d'un problème mal posé ont permis aujourd'hui de présenter un cadre d'analyse cohérent et rigoureux, même si les difficultés pratiques de mise en œuvre demeurent réelles et présentent un vrai défi [54].

I-8.2 Tomographie et problème inverse

C'est un domaine très vaste, qui excède largement celui de la métrologie thermique par les techniques optiques. D'une manière générale, il s'agit de reconstruire une variable interne hétérogène, caractéristique locale du système étudié, à l'aide des grandeurs accessibles relevées d'extérieur. Ceci reflète le lien solide avec les problèmes inverses.

Donc intrinsèquement, la tomographie nécessite la résolution d'un problème inverse. Cette notion, très générale, cache une foule de concepts physiques appartenant tous au contrôle non destructif souvent sans contact. On peut citer à titre d'exemple, la tomographie sismique utilisant les ondes acoustiques qui trouve une application en géophysique et prospection sous terraine [55] et la tomographie médicale par rayons X ou autre, qui est largement utilisé en radiologie [56]. Tous ces exemples de tomographie sont fondés sur l'inversion de la transformée de Radon [57].

I-8.3 De la transformée de Radon vers la transformée d'Abel

D'après ce préambule, il est clair que la tomographie est généralement gouvernée par l'inversion de la transformée de Radon. Cette dernière permet de reconstituer une fonction réelle à deux variables (assimilable à une image d'une section d'un objet en 3-D) à l'aide de la totalité des projections selon des lignes de visée parallèles et concourantes (Figure I-15). Les principes mathématiques de base de la transformée de Radon ont été pour la première fois énoncés par J. Radon en 1917. Cette transformée est définie pour $f \in L_2(\mathbb{R})$ par :

$$TRf(p,\theta) = \iint f(x,y)\,\delta(p - x\cos\theta - y\sin\theta))dxdy \qquad \text{(I.41)}$$

où $TRf(p,\theta)$ représente les données captées par un dispositif d'imagerie. Ces données correspondent précisément à des projections du contenu de l'objet $f(x,y)$ dont on cherche à obtenir une image. Une reconstruction approximative de l'image recherchée est d'autant plus précise que le nombre de directions de projection est élevé et l'algorithme utilisé pour l'inversion de l'équation (I.41) est performant.

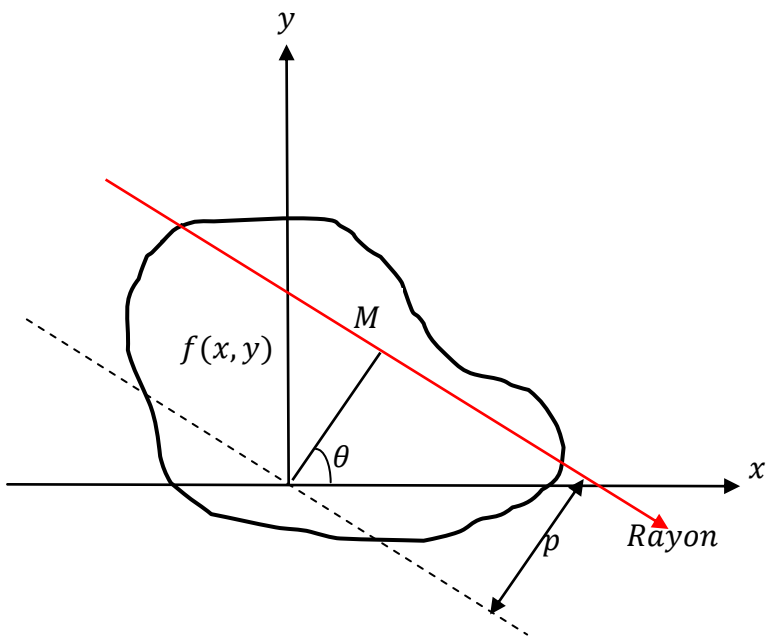


Figure I-15 : Schéma du principe de la tomographie d'une section d'un milieu non symétrique.

Si la fonction $f(x,y)$ a une symétrie circulaire, alors tous les angles θ donneront les mêmes valeurs des projections. Ainsi, nous avons $TRf(p,\theta) = TRf(p,0)$. Conséquemment la fonction $f(x,y)$ ne dépendra que du rayon $r = \sqrt{x^2+y^2}$. D'où, la transformée de Radon peut s'écrire comme suit :

$$TR[f(p)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\delta(p - x)dxdy$$

$$TR[f(p)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{p^2+y^2}\right)dy \qquad \text{(I.42)}$$

$$TR[f(p)] = 2\int_{0}^{+\infty} f(r)\,dy$$

Là où la ligne de visée passe par $r^2 = p^2 + y^2$. La dernière équation peut être modifiée par une intégration selon r comme suit :

$$TR[f(p)] = 2\int_{p}^{+\infty} \frac{rf(r)}{\sqrt{r^2 - p^2}} dr = TA[f(p)] \qquad \text{(I.43)}$$

Alors on a obtenu l'équation connue sous le nom de la transformée d'Abel [58] [59] qui est une réduction de la transformée de Radon appliquée a un objet ayant une symétrie circulaire. Mais la première réduction de la transformée de Radon a une intégrale de forme Abélienne a été faite par Cormak [60] en réécrivant la TR sous la forme de l'équation (I.43). L'inversion de cette dernière équation à été démontrée par R. Bracewell [61] un extrait de cette démonstration est donné dans l'annexe (A) de cette thèse.

Pour finir cet aperçu historique de la tomographie, nous devrons mentionner que l'application de la transformation d'Abel telle qu'elle a été formulée par Niels Abel (1802-1829), a été utilisée en tomographie sismique par Herglotz en (1907) [62] puis par Wiechert en (1910) [63], dix ans avant même l'apparition de la transformée de Radon. Donc, d'après cette chronologie, il nous apparait plus juste de parler d'une généralisation de la transformée d'Abel vers la transformée de Radon au lieu d'une réduction.

I-9 Tomographie à symétrie circulaire

Comme étant déjà évoqué, les techniques optiques sont très prometteuses car elles ne nécessitent pas l'insertion d'une sonde dans le fluide. Elles ne sont pas affectées par la sévérité de l'écoulement et elles ne perturbent pas le milieu étudié. En outre, ces techniques peuvent fournir de hautes résolutions spatiales et temporelles. Selon la technique, les mesures sont obtenues localement ou sur la ligne de visée. En revanche, ces techniques nécessitent un calcul d'inversion faisant intervenir la transformée d'Abel dans le cas d'un milieu à symétrie axiale.

Dans ce travail, les modèles directs et inverses sont donnés respectivement par les équations intégrales (I.44) et (I.46) d'une part (I.45) et (I.47) d'autre part:

$$\varepsilon(x) = 2\int_{p}^{R_0} \frac{\partial\delta(r)}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr \qquad \text{(I.44)}$$

$$\delta(r) = -\frac{1}{\pi}\int_{p}^{R_0} \varepsilon(x)\frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \tag{I.45}$$

$$S(x) = 2\int_{p}^{R_0} \frac{rf(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}}dr \tag{I.46}$$

$$f(r) = -\frac{1}{\pi}\int_{p}^{R_0} \frac{dS(x)}{dx}\frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \tag{I.47}$$

I-9.1 Revue sur les méthodes de résolution

Nous nous attacherons dans ce prolongement à décrire brièvement les principales méthodes de résolution de la transformée d'Abel inverse que l'on peut trouver dans la littérature. L'objectif n'est pas d'être exhaustif, mais plutôt de donner une revue bibliographique des méthodes permettant de reconstruire les paramètres internes d'un milieu à révolution axiale.

Les données extraites à partir des images issues d'une métrologie par les techniques optiques sont discrètes. En effet, l'usage des caméras CCD, pour l'acquisition des données, rend impossible l'obtention d'une expression analytique pour f à partir des résultats d'analyse des franges. En outre, il faut prendre en considération certains problèmes intrinsèques à la transformée d'Abel, qu'on peut les résumer en : la singularité aux points $r = y = R_0$ et $r = y = 0$, l'amplification des erreurs par la dérivation et la cumulation des erreurs vers le centre ($r = 0$). Tous ces problèmes participent et expliquent le recourt et le développement accentué des méthodes numériques. De nos jours, on assiste à une variété des méthodes d'inversion de l'intégrale d'Abel :

Les méthodes polynomiales ont été introduites par Freeman et Katz [64] et reprises par Mermet et Robin [65], en procédant par un lissage des données par un polynôme d'ordre préalablement fixé. Les résultats que procurent ces méthodes restent insatisfaisants et non précis en particulier vers les extrémités. D'autres auteurs comme Chan et al [66] ont utilisé des polynômes d'ordre nettement supérieur à celui proposé par Freeman et Katz. Cette procédure a amélioré la précision de l'inversion mais avec le risque de produire des fluctuations en cas de faible nombre de points. Dans le but d'améliorer les performances des méthodes polynomiales

Cremers et Birkebak [67] ont proposé de repartir les données à inverser en segments et d'appliquer un lissage standard au sens des moindres carrés par un polynôme de faible ordre pour chaque segment. Cette technique a été considérée meilleure par apport aux méthodes polynomiales. Cependant, dans la pratique, on se retrouve en face d'un problème à deux degrés de liberté. Il est difficile de déterminer le nombre adéquats de segments ainsi que l'ordre des polynômes utilisés.

D'autres auteurs ont profité du concept de Spline tout en utilisant des polynômes orthogonaux. Cette variante permet de réduire considérablement l'expression analytique de $f(r)$. Toutefois; à part le rang de la complexité des calculs qui a été augmentée, elles n'ont pas de différence avec les méthodes de Spline. Les méthodes utilisant une extension des bases des polynômes orthogonaux vers des bases gaussiennes ont été également développées. On peut citer par exemple les études comme [68], [69], [70] utilisant un modèle de mélange gaussien. Ces méthodes s'implémentent le plus souvent itérativement via l'algorithme espérance-maximisation afin d'estimer le nombre des gaussiennes nécessaires ainsi que le poids de chacune d'elles.

Les méthodes de régularisation comme la méthode de Tikhonov [71], qui nécessite l'écriture des équations (I.45 et I.48) sous forme matricielle, exigent un choix du paramètre de Tikhonov « paramètre de régularisation ». Ce dernier est souvent difficile à prédire en cas de faible rapport signal sur bruit.

Récemment les méthodes de transformation ont connu un véritable essor, tout en profitant de l'existence, d'une part, des liens théoriques entre les différentes formes de la transformée d'Abel et d'autres transformées en particulier la transformée de Fourier, de Hankel et d'ondelette et d'autre part, des routines de calcul rapides de ces dernières. Dans la littérature, on assiste à une grande discussion controversée concernant la méthode de Fourier-Hankel. Certaines études comme [72] [73] ont rapporté que cette méthode est dotée d'une très haute précision en cas de faible nombre de points. D'autres travaux augurent le contraire [66] [74]. Deux points principaux ont fait la force de cette méthode : son aptitude à surmonter le problème de la singularité et de réduire considérablement l'effet du bruit comme il est démontré par R. Alvarez et al [73]. Très récemment, nous avons [5] confirmé le résultat d'Alvarez et al. dans le cas de l'inversion des mesures en déflectométrie de moiré. En effet, la

méthode de Fourier -Hankel peut être déduite de la méthode d'expansion de la transformée de Fourier proposée par Tatekura [75] dont les conditions d'applicabilité sont largement discutées par Kalal et Nugent [76]. La méthode d'expansion de la transformée de Fourier est également reprise par Jaffe et al. [77] qui proposent une inversion de la transformée d'Abel à partir de la série de Fourier.

Très récemment, après que les fondements de la théorie de la TO soient connus, certaines études [78] [79] ont proposé la résolution des équations intégrales de type Abel-Voltera en terme d'analyse multi-résolution. Cette méthode, qui peut être considérée comme une extension et amélioration à la fois des méthodes de Spline et d'approximation des fonctions dans des bases orthogonales, va être l'objet de plusieurs travaux témoignant son efficacité [80] [81] [82]. En revanche, nous avons dévoilé certains défauts de l'application de cette méthode en particulier l'estimation du nombre de segments, le problème de raccordement entre ces segments, et la dimension de la base de projection [4].

Si la littérature est assez riche et variée en ce qui concerne les méthodes numériques de résolution de l'équation intégrale (I.46), peu d'articles se sont attachées jusqu'à présent à la résolution de l'équation (I.44). Ce constat peut être expliqué par le faible recours aux techniques expérimentales déflectométriques en comparaison à l'interférométrie.

Bien que, la plus part des méthodes déjà citées auparavant s'adaptent à la résolution de l'équation (I.44), la majorité des techniques existantes sont toutes basées sur la discrétisation de l'équation (I.44) par des méthodes simple de calcul d'intégrale (Simpson, méthodes quadratiques, méthode de trapèze etc…), dont on peut citer le travail de Gorenflo et Kovetz [83] et celui de Atkinson [84]. En 1992, Dasch a montré, pour la première fois, que toutes ces techniques pourraient être réarrangées sous la forme linéaire d'un opérateur matriciel [85]. Ce travail est souvent cité comme référence fondamentale dans presque tous les travaux que nous avons cités dans ce survole bibliographique.

Récemment, à l instar de la formalisation suggéré par Dasch, certain auteurs comme Kolhe et Agrawal [86] proposent une étude numérique comparative de quatre méthodes: la méthode de Simpson, intégration utilisant un ou deux points et la méthode proposée par Rubinstein et Greenberg [87] utilisant un lissage au sens des moindres carrés par les

polynômes de Gauss-Hermit. Très récemment, nous avons introduit pour la première fois la transformée de Fourier et celle de Hankel pour l'inversion des données déflectométriques tout en comparant avec les méthodes existantes pour ce genre de mesures [5].

I-10 Conclusion

Dans ce chapitre, un état de l'art des différents enjeux qui ont conduit à l'élaboration de cette thèse est exposé. La tomographie du champ de température dans un milieu à symétrie axiale à partir d'un seul film optique englobe deux étapes principales : la mesure de la phase à partir de l'image des franges et l'inversion de cette donnée pour reconstruire le champ de température. Nous avons exposé un inventaire des techniques mathématico-numériques pouvant être utilisées pour accomplir ces deux étapes. Nous avons explicité avec un esprit critique leurs avantages et inconvénients pour en titrer les techniques qui méritent d'être testées voire améliorées dans le cadre du sujet de recherche de cette thèse. Notre choix est d'adapter et de tester les techniques récentes découlant de la théorie de la transformée en ondelettes pour démoduler les figures optiques dédiées à la métrologie thermique. Notre souci est de préserver la précision offerte par ces techniques et contribuer à automatiser l'instrument métrologique en réduisant l'intervention de l'utilisateur lors des déroulements des opérations de calcul. Dans cette même lignée, l'utilisation des transformées de Fourier et de Hankel dans la résolution du problème inverse posé par l'intégrale abélienne est un choix que nous comptons développer dans la suite de ce travail.

Chapitre II : Mise en œuvre numérique de la transformée en ondelette et du bruit de speckle

II-1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons des généralités en traitement du signal dans un cadre monodimensionnel. Ces rappels ne sont pas exhaustifs mais ils sont sélectionnés suivant les besoins pour la suite en particulier pour le calcul de la transformée en ondelettes. La transformation de Fourier et celle de Gabor sont présentées afin de mettre en évidence leurs limitations et repérer les notions importantes du domaine fréquentiel. L'analyse espace-fréquence est ensuite présentée en mettant l'accent sur la transformation en ondelettes. Étant donné la nature discrète des mesures, le calcul numérique de la transformation en ondelettes est nécessaire et indétournable. Il est alors utile de faire une discussion sur certaines possibilités de l'implémentation numérique de la transformée en ondelettes. Souvent dans les stratégies numériques, la robustesse des méthodes est évaluée à partir de leur aptitude à surmonter les effets néfastes du bruit de tout genre et plus particulièrement celui d'origine connue. Le speckle ou granularité laser reste le principal inconvénient qui affecte l'imagerie laser en général et réduit la précision offerte par la métrologie thermique utilisant les techniques optiques. Il est souvent modélisé comme un bruit aléatoire multiplicatif [88]. De ce fait, il s'avère utile de présenter les propriétés statistiques fondamentales qui gouvernent la description du phénomène de speckle afin de le générer correctement dans les images simulées et s'approcher d'avantage à l'expérience.

II-2 Décompositions espace-fréquence

En regardant l'exemple de franges de la Figure II-1 on s'aperçoit que l'épaisseur et la forme de certaines franges varient d'un endroit à l'autre. En d'autres termes, on constate que la fréquence spatiale varie en fonction de l'espace dans ces signaux. Cette variation peut être mesurée avec précision à l'aide des décompositions espace-fréquence. Cette forme de

représentation a été introduite pour la première fois par Gabor dans les années 1946 [89]. Toutefois, il existe dans la littérature de nombreuse transformations mathématiques qui permettent ce type de décomposition telles que la transformée de Fourier à fenêtre glissante, la transformée de Wigner-Ville, la transformation de Huang et la transformée en ondelettes. Nous nous contentons dans cette thèse de l'analyse espace-fréquence par la transformation en ondelettes (TO) qui constitue un outil puissant pour l'analyse des signaux non stationnaires [90]. Cependant, l'utilisation de cette transformée pose un problème au niveau du calcul numérique, de la lisibilité des représentations obtenues et de la dépendance du résultat au choix de l'ondelette mère analysante ainsi que ses paramètres.

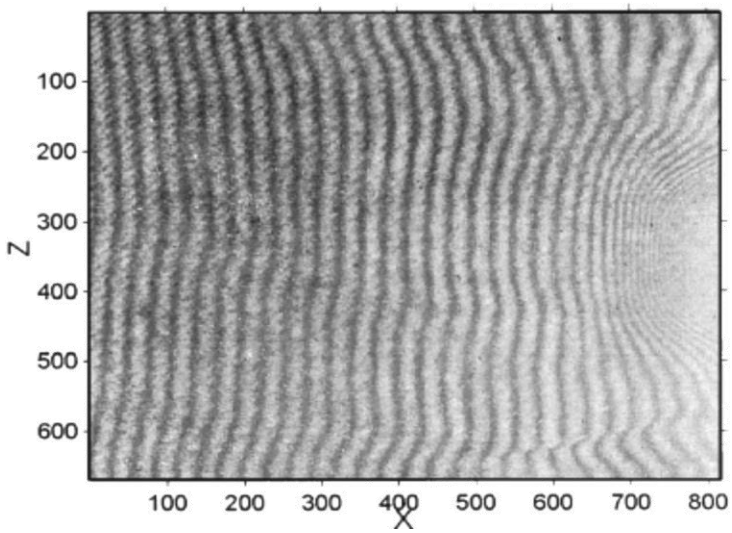


Figure II-1 : Interferogramme réel de taille 680×840 *pixels* [91].

II-2.1 Transformée de Fourier

Afin d'introduire l'analyse espace-fréquence, il convient de rappeler brièvement l'analyse fréquentielle largement gouvernée par la transformée Fourier. Cette dernière exprime tout signal infini $s(x)$ comme une somme de sinusoïdes correspondantes aux composantes fréquentielles contenues dans le signal.

$$s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} TF[s(x)](\omega) exp\,(i\omega x)\, d\omega \qquad \text{(II.1)}$$

L'amplitude d'une composante fréquentielle $TF[s(x)](\omega)$ est calculée par la transformée de Fourier continue de $s(x)$ comme suit :

$$TF[s(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) exp\,(-i\omega x)\,dx \qquad \text{(II.2)}$$

La transformée de Fourier est une décomposition dans la base des fonctions cosinusoïdales qui ont des résolutions spatiale et fréquentielle respectivement infinie et nulle. Ce comportement est inverse à celui de la transformée de Dirac qui correspond à une décomposition sur la base continue de la fonction de Dirac $\delta(x)$ translatée comme suit:

$$s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\delta(x - \tau)d\tau \qquad \text{(II.3)}$$

L'équation (II.3), qui n'est autre que la transformée de Dirac, donne une information précise en tout point x de l'espace. En revanche, elle ne donne aucune information sur le contenu fréquentiel. La question qui se pose naturellement, est sur l'existence d'une représentation dans laquelle on puisse lire une information mixte. C'est Dennis Gabor En 1946 qui a répondu à cette question en introduisant la transformée de Fourier fenêtrée.

II-2.2 Transformée de Fourier à fenêtre glissante

Pour pallier les limitations de la transformée de Fourier ainsi que celle de Dirac, Dennis Gabor a eu l'idée de limiter le domaine d'intégration spatial à l'aide d'une fonction «fenêtre» que l'on pourra faire glisser pour explorer le signal. On obtient ainsi la transformée de Fourier à fenêtre glissante dont le principe est une analyse de Fourier par segment du signal visualisé dans une fonction fenêtre plus courte que la durée du signal et qui permet une localisation de l'information du signal. Le résultat d'une telle transformée est une fonction de deux variables, espace et fréquence.

Quand la fenêtre est de forme gaussienne, on parle alors de la transformée de Gabor. Si l'on note $g(x) = exp\left(-\frac{x^2}{2{\sigma_b}^2}\right)/(\pi{\sigma_b}^2)^{\frac{1}{4}}$ la fenêtre et $I(x)$ le signal à analyser, le résultat est alors la collection de coefficients définis par :

$$TG[I](b,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x)g(x-b)exp\,[-i\omega(x-b)]\,dx \qquad \text{(II.4)}$$

où b est un réel permettant le glissement de la fenêtre de visualisation. Pour des raisons pratiques, il est plus intéressant d'écrire ces coefficients comme suit :

$$TG[I](b,\omega) = \langle I, {g_{b,\omega}}^* \rangle \quad \text{où} \quad {g_{b,\omega}}^*(x) = g(x-b)e^{i\omega(x-b)} \qquad \text{(II.5)}$$

Les gaborlettes $g_{b,\omega}(x)$ dérivent toutes de la fonction fenêtre $g(x)$ par translation spatiale (paramètre b) et par modulation (la multiplication de la fonction $g(x - b)$ par une fonction sinusoïdale de fréquence ω). Nous avons la transformée de Fourier :

$$TF\left[g_{b,\omega}(x)\right](\xi) = TF[g(x)](\xi - \omega)e^{-i\xi b} \qquad \text{(II.6)}$$

Les représentations spatiale et fréquentielle illustrées sur les Figure II-2a et 2b, quoique complémentaires, ne permettent pas de rattacher facilement et formellement les positions d'apparition et de disparition des sinusoïdes. En d'autres termes, le spectre de Fourier ne fournit pas d'information sur la localisation de chaque fréquence dans le signal. Par contre, on voit clairement que le scalogramme de Gabor Figure II-2c donne simultanément les deux aspects spatial et fréquentiel qui permettent une meilleure analyse du signal. Cependant, l'inconvénient majeur de l'analyse par la transformée de Gabor (TG) est le fait que la taille de la fenêtre est fixée une fois pour toute. On ne peut pas analyser des signaux dont la fréquence varie continuellement en fonction de l'espace. Autrement dit, TG convient aux signaux qui sont stationnaires sur des segments d'où la limitation de cette technique.

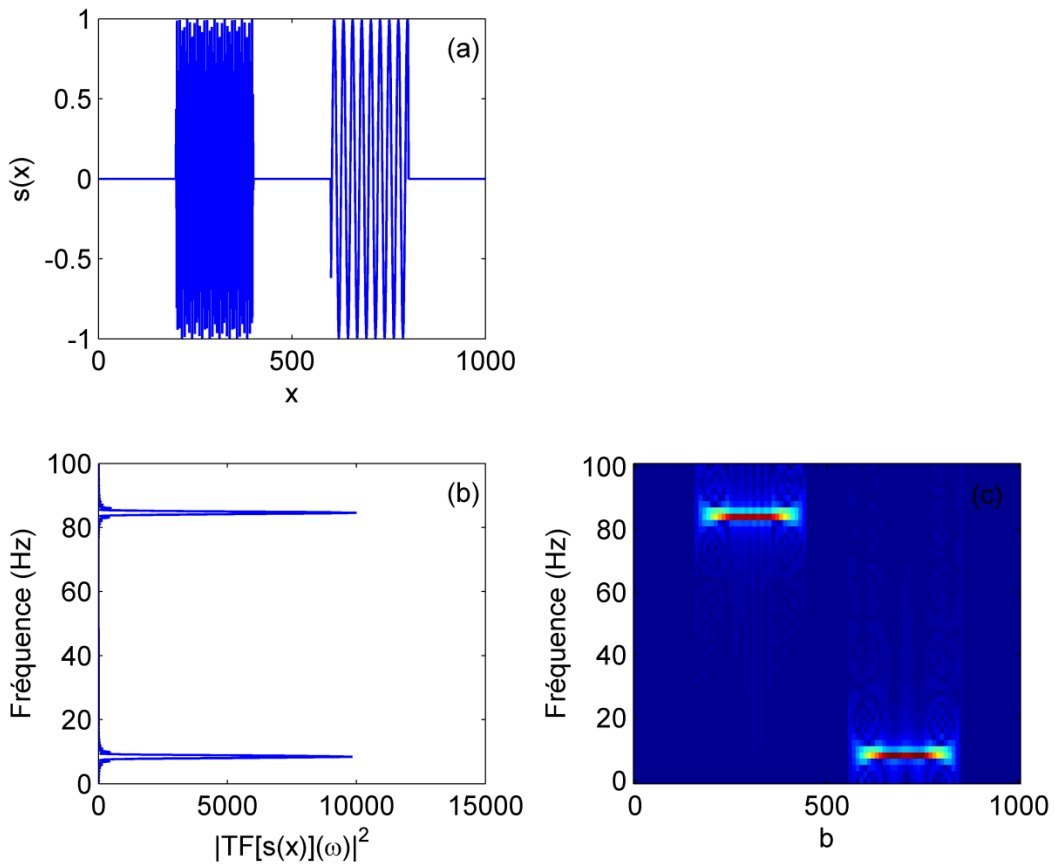


Figure II-2 : Illustrations des avantages de la représentation conjointe espace-fréquence (a) espace classique, (b) espace de Fourier, (c) scalogramme de Gabor.

II-2.3 Transformation en ondelettes

L'objectif est de remédier aux désavantages de l'analyse de Fourier à fenêtre glissante dus à la taille figée de la fonction analysante qui ne permet pas d'obtenir une résolution spatiale dynamique. Grossmann et Morlet [38] ont proposé la transformation en ondelettes dans un cadre mathématique lié aux concepts de la décomposition espace-fréquence. Elle est fondée sur la translation (paramètre b) et la contraction ou dilatation (paramètre a) en espace d'une fonction $\psi(x)$. On associe à cette dernière un ensemble d'ondelettes filles $\psi_{a,b}(x)$ engendrées par des dilatations et translations de $\psi(x)$. Il faut noter la différence avec la transformée de Gabor qui opère uniquement par translation et modulation.

II-2.3.1 Définition

La transformée en ondelettes réalise une projection sur une base de fonctions (dont la construction diffère de celles des transformées de Fourier et de Gabor) pour lesquelles on réserve classiquement le terme d'ondelettes (*Wavelets* en anglais). Les ondelettes ou fonctions analysantes sont construites à partir d'une ondelette mère ψ à l'aide d'une opération de translation spatiale et d'une opération de changement d'échelle.

Soit $\psi(x)$ une fonction carrée intégrable, continue par morceaux et bien localisée en espace et en fréquence. On lui associe une famille d'ondelettes $\psi_{a,b}(x)$ engendrée par des dilatations et translations de $\psi(x)$:

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \tag{II.7}$$

où a et b sont des paramètres relatifs respectivement à l'échelle (inverse de fréquence) et l'espace. On note H l'espace de ces paramètres tel que [90] :

$$H = \{(a,b)\ /\ a \in \mathbb{R}_+^*\,, b \in \mathbb{R}\ \} \tag{II.8}$$

Ainsi, les ondelettes filles ont une forme constante mais une taille variable proportionnelle au paramètre d'échelle a. La transformation en ondelettes d'un signal $I(x)$ peut se définir de différentes façons. La transformée continue en ondelettes est définie par :

$$T\psi[I](a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \langle I(x), \psi^*{}_{a,b}(x)\rangle \tag{II.9}$$

La définition précédente est celle utilisée dans de nombreuses références dont on peut citer à titre d'exemple le livre de Torrésani [90]. Le signal $I(x)$ peut être reconstruit par la formule suivante :

$$I(x) = \frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}} T\psi[I(x)](a,b)\,\frac{dadb}{a} \tag{II.10}$$

avec C_ψ est un coefficient fini non nul qui signifie que ψ est admissible pour une ondelette qui est définie par :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} |TF[\psi(x)](a\omega)|^2\,\frac{da}{a} \tag{II.11}$$

II-2.4 Principe d'Heisenberg-Gabor

Le principe d'Heisenberg-Gabor est emprunté du principe d'incertitude, déduit en 1927 par Heisenberg en mécanique quantique. Pour le domaine de traitement des signaux, ce principe postule qu'il n'est pas possible de construire une fonction dont le support est infiniment petit à la fois en espace et en fréquence. C'est la transformée de Fourier qui est dotée d'une résolution infinie dans le domaine des fréquences et nulle en espace. La transformée de Gabor a une résolution constante qui dépend de la largeur de la gaussienne. Disons qu'une analyse par transformée en ondelettes réalise un compromis entre les deux analyses de Fourier et de Gabor du point de vue résolution. Donc, il va falloir trouver un moyen rigoureux d'évaluation de cette résolution.

Théorème II.1. Soit $\psi \in L2(\mathbb{R})$ et $\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \, dx$ on définit la position moyenne spatiale $\bar{x}$ et la position fréquentielle moyenne $\bar{\omega}$ de ψ par :

$$\bar{x} = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x)|^2 \, dx \tag{II.12}$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega|\psi(\omega)|^2 \, d\omega \tag{II.13}$$

les variances autour de ces moyennes sont définies par :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 \, dx \tag{II.14}$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |\psi(\omega)|^2 \, d\omega \tag{II.15}$$

alors

$$\sigma_x \sigma_\omega \leq \frac{1}{2} \tag{II.16}$$

Le théorème II.1 décrit mathématiquement le principe d'Heisenberg-Gabor qui stipule que quelle que soit la méthode d'analyse espace-fréquence, on ne peut pas obtenir à la fois une résolution infiniment petite en espace et en fréquence. Il y a toujours un compromis à réaliser entre les deux.

La transformée de Fourier consiste à analyser un signal à l'aide des exponentielles complexes $e^{-i\omega x}$ qui ont des supports infinis et de plus ne privilégient aucun intervalle de l'espace. Toute information spatiale sur le signal analysé est donc perdue. Ceci reflète le caractère global de cette analyse. La transformée de Fourier répond bien au principe d'Heisenberg-Gabor en permettant une localisation infinie en fréquence mais en revanche aucune localisation spatiale.

Avant de projeter le principe d'Heisenberg-Gabor sur la TG, prenons la proposition suivante :

Proposition II.1. *Soit ψ une fonction de $L1(\mathbb{R})$ et $s \in \mathbb{R}^*$. Alors la transformée de l'ondelette dilatée $x \longmapsto \psi\left(\frac{x}{s}\right)$ de ψ est :*

$$TF\left[\psi\left(\frac{x}{s}\right)\right](\omega) = sTF[\psi\,(x)](s\omega) \qquad \text{(II.17)}$$

D'après la proposition II.1, on voit clairement qu'une contraction de la fonction ψ se traduit par une dilation de sa transformée de Fourier $TF[\psi\,(x)](\omega)$ et vice-versa. Ceci démontre que les résolutions spatiales et fréquentielles sont antagonistes et reflètent la vérification du principe d'Heisenberg Gabor par la transformée de Fourier à fenêtre glissante. Par exemple, la transformée de Fourier des gaborlettes $g(x-b)e^{i\omega(x-b)}$ vaut $TF[g(x)](\xi - \omega)e^{-i\xi b}$. On constate que le membre $g(x - b)$ (qui est une gaussienne de largeur σ_b) est indépendant de σ_b, ce qui signifie que l'enveloppe de la fenêtre glissante sera constante (comme c'est illustré sur la Figure II-3). On aura donc une résolution fixe sur toute la durée du signal. Plus σ_b est petit, plus le support de ψ est étroit et la résolution spatiale est meilleure. En revanche, si σ_b est petit $TF[\psi(x)](\omega)$ est large.

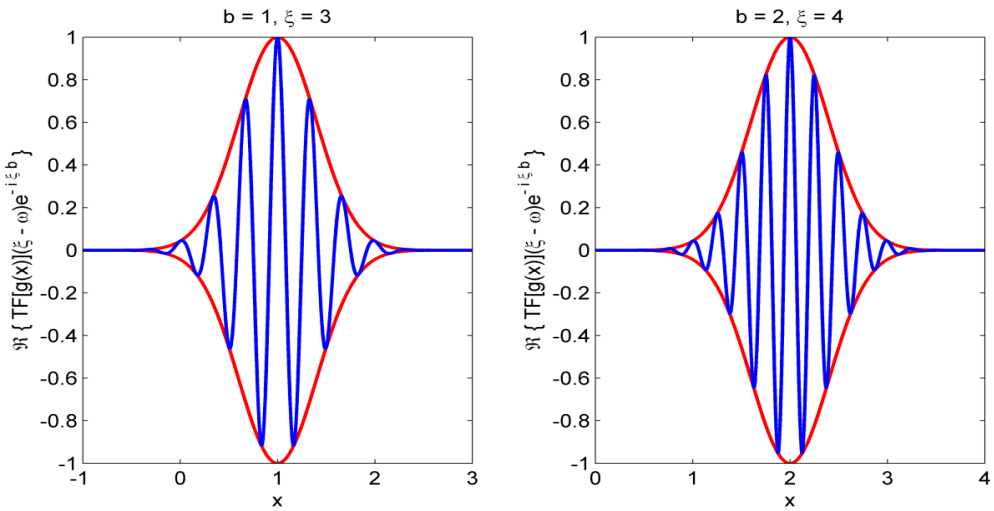


Figure II-3 : Deux gaborlettes dont la résolution spatiale est figée.

Ces constatations restent aussi valables pour la TO, puisque la contraction de $\psi_{a,b}$ (a ≤ 1) conduit à une dilatation de sa représentation fréquentielle, sauf que σ_x et σ_ω ne sont plus constantes en vertu de :

si

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{alors} \quad TF[f(x)](\omega) = \sqrt{a}TF[\psi(x)](a\omega) \tag{II.18}$$

alors

$$\sigma_x^f = a\sigma_x^\psi \qquad \text{et} \qquad \sigma_\omega^f = \frac{\sigma_\omega^\psi}{a} \tag{II.19}$$

Si on considère une ondelette mère $\psi\,(x) = \frac{1}{(\pi\sigma_b{}^2)^{\frac{1}{4}}} exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_b{}^2}\right) exp(i\omega_c x)$ de pulsation ω_c, alors les ondelettes filles $\psi_{a,b}$ ont comme pulsations $\omega = \frac{\omega_c}{a}$. Ainsi, c'est toujours le principe d'Heisenberg Gabor qui s'applique mais avec des résolutions spatiale et fréquentielle dynamiques qui dépendent en cas de la transformée en ondelette du paramètre d'échelle a (voir Figures II-4 et II-5). On conçoit ainsi la description par Meyer qualifiant la transformée en ondelettes en un microscope mathématique (zoom variable en espace et en fréquence):

$$\sigma_x(a)\,\sigma_\omega(a) \leq \frac{1}{2} \tag{II.20}$$

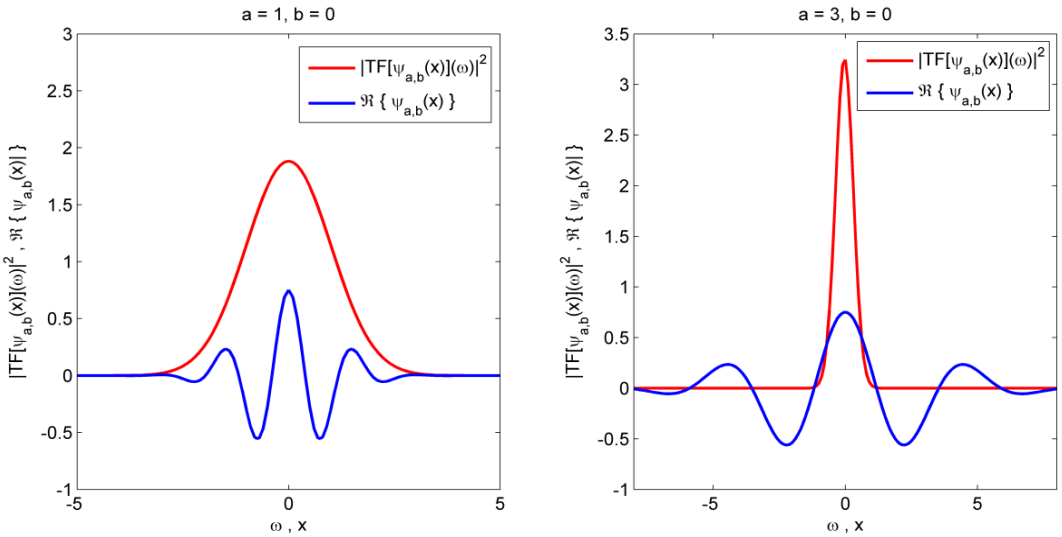


Figure II-4 : Effet antagonique des résolutions spatiales et fréquentielles en fonction du paramètre d'échelle a.

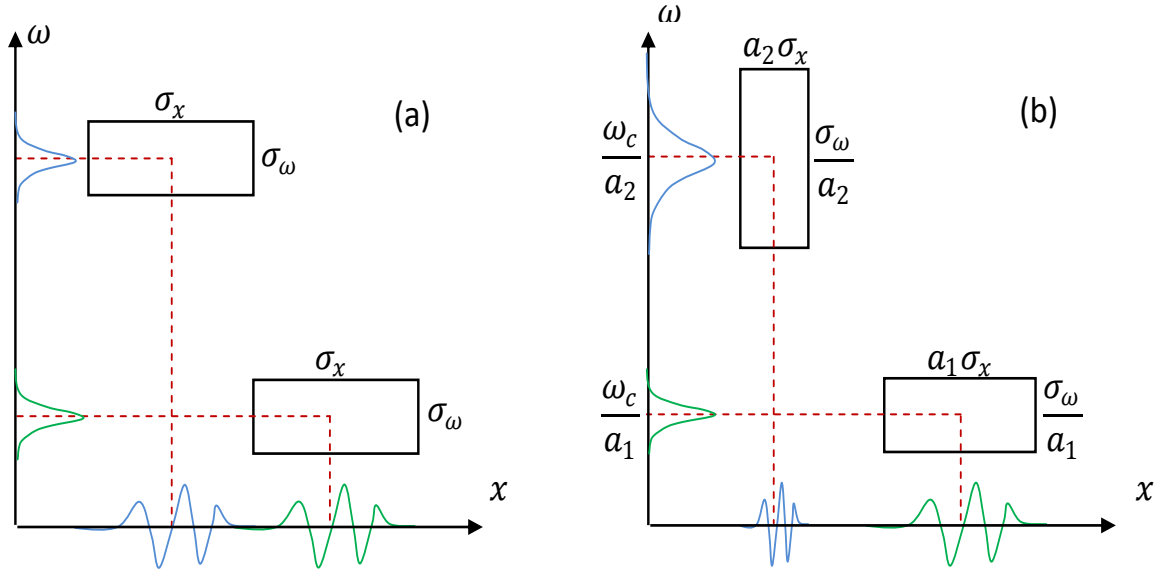


Figure II-5 : Comparaison de localisation espace-fréquence entre la TG (a) et la TO (b).

Donc, on peut dire que la transformée en ondelettes possède une résolution dynamique à la fois en espace et en fréquence, ce qui engendrera surement un bon suivi des fréquences locales contenues dans le signal à traiter.

II-2.5 Fréquence locale

Le but est de décrire formellement les non-stationnarités d'un signal s. La fréquence locale $\upsilon(y)$ est définie selon Ville [92] à partir du signal analytique associé. En effet, le signal analytique associé à un signal réel s est un signal complexe qui s'écrit comme suit:

$$x_a(x) = s(x) + iHs(x) \tag{II.21}$$

où H est la transformation de Hilbert. Ainsi on peut écrire $x_a(x) = A(x)exp\{i\varphi(x)\}$ selon :

$$\upsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(x)}{dx} \tag{II.22}$$

En ce sens, l'équation (II.22) peut s'interpréter comme une signature conjointe en espace et en fréquence du signal $s(x)$.

II-3 Implantation numérique de la TO

En réalité, les signaux (mesures) que nous traitons sont de nature discrète et de tailles finies. Donc, le calcul numérique de la transformée en ondelettes est incontournable et il mérite toute l'attention, plus particulièrement pour celui qui désire développer des algorithmes. Cette question ne se pose pas comme un grand problème pour la TF. En effet, l'existence des routines de grande fiabilité du genre de la transformée de Fourier rapide (FFT) et du théorème de Shannon-Nyquest donne un cadre rigoureux pour le calcul discret de la TF. Il ne faut pas oublier que même si la transformée est discrète, les ondelettes filles générées par dilation ou contraction et par translation de l'ondelette mère ne le sont pas. Elles restent dans tous les cas des fonctions continues. En revanche, les coefficients de la transformée en ondelettes sont dénombrables pour un certain nombre de paramètres a et b connus. Mais la projection d'un signal sur la base créée par l'ensemble des dilatations et translations de l'ondelette mère ne pourra être estimée que numériquement.

Ainsi, il est bien clair que pour les applications envisageables dans la suite de ce travail, les coefficients de la transformée en ondelettes $T\psi[I](a,b)$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, ne peuvent être évalués que pour un sous-ensemble discret de l'espace H.

Cette section n'a d'autre but que de rechercher une manière convenable d'implémenter numériquement la transformée en ondelettes. A ce propos, quatre versions fondées sur des

arguments mathématiques différents qui reflètent chacune un point de vue de la définition de la TO sont présentées et discutées. Signalons que cette section ne s'attache à aucune des approches que nous abordons par la suite concernant l'extraction de la phase qui constitue l'objectif principal du chapitre suivant.

II-3.1 Calcul par quadrature

La définition de la transformation en ondelettes appliquée au signal $I(x)$ se présente sous la forme de l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} T\psi[I](a,b) &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{x_k}^{x_{k+1}} I(x)\psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \end{aligned} \tag{II.23}$$

Donc, on peut penser à appliquer une méthode d'intégration numérique sur l'équation (II.23). En posant $x_k = k\Delta x$ avec $k = 0, 1, \dots, N-1$, l'équation (II.23) peut s'écrire numériquement comme suit :

$$T\psi[I](a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{k=0}^{N} I(x_k)\psi^*\left(\frac{k\Delta x - b}{a}\right)\Delta x \tag{II.24}$$

Si on connait la primitive de ψ, on peut aussi aboutir à une expression approchée de $T\psi[I](a,b)$ par le calcul semi-analytique suivant :

$$T\psi[I](a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{k=0}^{+\infty} I(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \tag{II.25}$$

Pour calculer l'expression (II.25), on peut utiliser la fonction $intwave$ disponible dans la bibliothèque du traitement de signal sous MATLAB.

Par ailleurs, le calcul direct (II.24) est intuitif et correspond à la discrétisation de l'intégrale par une méthode de quadrature. On peut constater que pour b fixé, le coût du calcul des coefficients d'ondelettes $T\psi[I](a,b)$ pour un nombre d'échelles J et N échantillons du signal est en $o(JN)$.

II-3.2 Calcul par produit de convolution

On peut voir la définition de la transformation en ondelettes (II.23) comme étant le produit de convolution du signal par l'ondelette mère translaté. Comme la définition du produit de convolution est écrite sous la forme :

$$s(x) = g * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)h(x - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x - \tau)h(\tau)d\tau \qquad \text{(II.26)}$$

L'expression de la TO peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} T\psi[I](a,b) &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\psi^*\left(-\frac{b-x}{a}\right)dx \end{aligned} \qquad \text{(II.27)}$$

Si on introduit l'operateur de parité P défini par $Pf(x) = f(-x)$, il est facile d'établir que l'équation (II.27) n'est autre qu'un produit de convolution

$$T\psi[I](a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[I(x) * P\psi^*{}_a\right] \qquad \text{(II.28)}$$

Cette remarque nous conduit à l'utilisation de la fonction $conv$ disponible dans MATLAB.

II-3.3 Calcul par l'algorithme FFT

En portant le calcul de la TO dans le domaine fréquentiel grâce au théorème de Parseval on obtient :

$$\begin{aligned} T\psi[I](a,b) &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} I(x)\psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} TF[I(x)](\omega)TF[\psi^*(x)](a\omega)e^{ib\omega}d\omega \end{aligned} \qquad \text{(II.29)}$$

On peut voir la formule (II.29) comme la transformation de Fourier inverse du produit $TF[I(x)](\omega)TF[\psi^*(x)](a\omega)$. La mise en ouvre de cette procédure peut être faite en utilisant l'algorithme fft et ifft de MATLAB.

II-3.4 Calcul par la transformée en Z

On peut aussi voir la définition de la transformation en ondelettes comme le produit scalaire entre le signal avec l'ondelette mère. Cela nous permet d'utiliser la routine czt existant dans MATLAB. La transformation en z (TZ) se définit comme suit:

$$TZ[I] = \sum_{k=0}^{+\infty} I(x_k)z^{-k} \tag{II.30}$$

Où $I(x_k)$ est la version discrète du signal $I(x)$. Si l'on arrive à écrire la transformation en ondelettes de la même forme que l'équation (II.30), on peut utiliser la fonction czt de MATLAB. On présente ici un exemple de calcul faisant intervenir l'ondelette mère la plus célèbre portant aussi le nom de son inventeur qui est l'ondelette de Morlet que nous écrivons selon la formulation simplifiée suivante :

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) exp(i\beta x) \tag{II.31}$$

on en déduit :

$$\psi^*\left(\frac{k\Delta x - b}{a}\right) = e^{-\frac{b^2}{2a^2} - i\beta\frac{b}{a}} e^{-\frac{(k\Delta x)^2}{2a^2}} \left[e^{i\beta\frac{\Delta x}{a} - \frac{\Delta x b}{a^2}}\right]^{-k} \tag{II.32}$$

en injectant l'équation (II.32) dans l'équation (II.24) on aura

$$\begin{aligned} T\psi[I](a,b) &= \frac{1}{\sqrt{a}}\Delta y e^{-\frac{b^2}{2a^2} - i\beta\frac{b}{a}} \sum_{k=0}^{+\infty} I(k\Delta x) e^{-\frac{(k\Delta x)^2}{2a^2}} \left[e^{i\beta\frac{\Delta x}{a} - \frac{\Delta x b}{a^2}}\right]^{-k} \\ &= g(a,b) \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) z^{-k} = g(a,b) TZ[h] \end{aligned} \tag{II.33}$$

avec $h(k) = I(k\Delta x)e^{-\frac{(k\Delta x)^2}{2a^2}}$, $z = e^{i\beta\frac{\Delta x}{a} - \frac{\Delta x b}{a^2}}$ et $g(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\Delta x e^{-\frac{b^2}{2a^2} - i\beta\frac{b}{a}}$

II-4 Choix de la méthode appropriée

II-4.1 Test

Donnons ici comme test, l'évaluation des coefficients $T\psi[I](a,b)$ pour une image de franges le taille 512×512 de la (Figure II-6) obtenue à partir de l'expression ci-dessous.

$$I(y,z) = cos[2\pi 0.05y + \varphi(y,z)] \tag{II.34}$$

avec

$$\begin{aligned}\varphi(y,z) = \; & 3(1-y)^2 exp[-y^2 - (z+1)^2] \\ & - 10\left(\frac{y}{5} - y^3 - z^5\right) exp(-y^2 - z^2) \\ & - \frac{1}{3} exp[-(y+1)^2 - z^2]\end{aligned} \tag{II.35}$$

Le paramètre d'échelle a est pris variable entre 1 et 50 avec un pas égal à 1. Notre choix est fait sur l'ondelette mère de Morlet. La procédure utilisant la méthode d'intégration numérique de quadrature a besoin de $40\ s$ sur le CPU Core 2 Duo de fréquence 2GHz. Tandis que le même traitement ne nécessite que $21\ s$ par la procédure de FFT et son inverse $IFFT$. Par la suite, on peut dire que le calcul par la méthode de quadrature est plus exigeant en temps de calcul. En revanche, les autres méthodes de calcul de TO sont inapplicables du fait qu'elles ne vérifient pas certaines contraintes mathématiques.

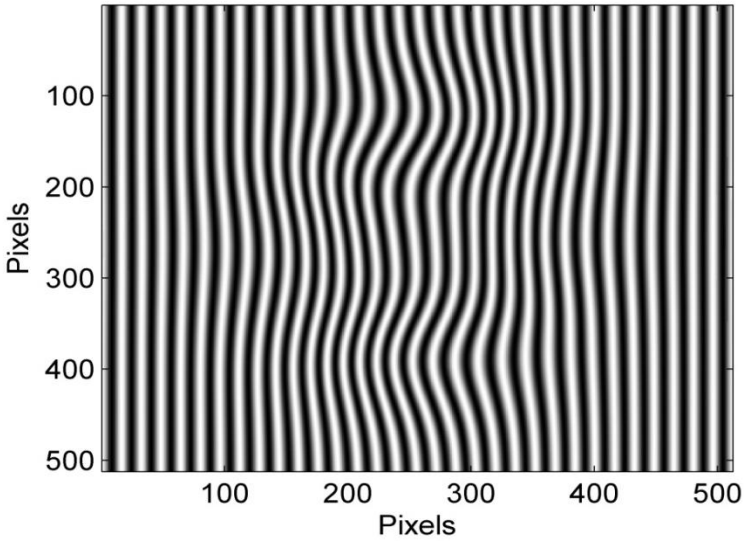


Figure II-6 : Franges synthétiques digitalisées sur une matrice de 512×512 *pixels.*

Dans ce travail nous avons opté pour l'utilisation de la procédure de quadrature malgré sa complexité temporelle au détriment de celle utilisant la FFT qui est limité par son inadéquation en traitement des signaux non stationnaires.

II-4.2 Discussion

Avant d'aller plus loin, nous aimerions avancer cette petite et précoce discussion concernant le calcul numérique de la transformée en ondelettes. En effet, il s'agit d'une étape indépendante dans les approches d'extraction de la phase.

Nous avons présenté ci-dessus différentes visions pour le calcul numérique de la transformation en ondelettes. Chaque vision a ses avantages et aussi ses inconvénients. Nous signalons qu'avant la mise en œuvre de tout schéma numérique, il convient de bien sélectionner la méthode adéquate pour chaque type de signal. L'examen des contraintes mathématiques de ces méthodes permet en principe d'effectuer ce choix. Le calcul semi-analytique est toujours valable. Il est très général, même dans le cas où le signal à traiter est échantillonné avec des pas non uniformes. Cependant, il faut s'assurer de l'existence explicite de la primitive de l'ondelette mère choisie. Sinon, il faut discrétiser l'intégrale en procédant par la méthode de quadrature. Le calcul de la transformée en ondelettes à l'aide de la transformée de Fourier et son inverse convient parfaitement aux signaux ergodiques de support infini. Autrement dit, cette procédure ne convient pas aux signaux non stationnaires.

L'avantage capital de l'utilisation de la FFT réside dans son faible coût. Le calcul par la convolution convient bien aux signaux amortis et nuls en dehors de l'intervalle d'enregistrement. En revanche, il devient peu intéressant si le signal est périodique ou pseudopériodique. Finalement, le calcul via la transformée en z est possible. Cependant, il est difficile à généraliser, pour toutes les ondelettes mères, un formalisme mathématique permettant de réécrire la transformée en ondelettes sous la forme de la transformée en z. L'utilisation de cet artefact doit être toujours effectuée avec précaution car il est possible que le calcul soit numériquement divergent. A noter aussi que la convergence de cette méthode est assurée si et seulement si la série (II.33) converge.

II-5 Notion de scalogrammes et crête d'ondelette

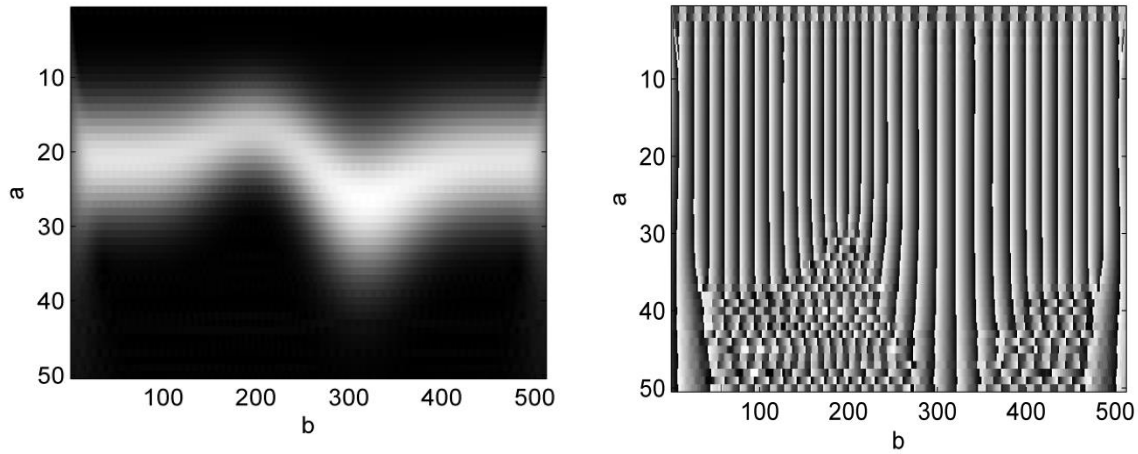
II-5.1 Scalogrammes

Le calcul de la transformation en ondelettes en tant qu'intégrale aboutit à un ensemble de coefficients $T\psi[I](a,b)$ qui dépendent des paramètres d'échelle a et de translation b. Il est alors plus commode de faire une représentation bidimensionnelle (scalogramme) de ces coefficients complexes. Il en découle deux scalogrammes pour représenter respectivement les modules et les arguments en fonction de a et b. Ces deux représentations contiennent toutes les informations pour décortiquer les structures du signal (variation fréquentielle, discontinuité…). Notons que pour la transformée de Fourier, les coefficients sont représentés en un spectre décrivant la variation du module des coefficients en fonction des fréquences contenues dans le signal. La Figure II-7a montre un exemple de scalogramme d'amplitude calculé par l'expression *(II.25)* pour une ligne d'intensité de l'image des franges de la Figure II-6. Ce scalogramme est calculé par la relation suivante :

$$S_M(a,b)^2 = \Im\{T\psi[I](a,b)\}^2 + \Re\{T\psi[I](a,b)\}^2 \qquad \text{(II.36)}$$

Subséquemment, un deuxième scalogramme (Figure II-7 b) a été obtenu en calculant par la relation (II.37) les arguments des coefficients $T\psi[I](a,b)$.

$$S_A(a,b) = arctan2\left(\frac{\Im\{T\psi[I](a,b)\}}{\Re\{T\psi[I](a,b)\}}\right) \qquad \text{(II.37)}$$



(a) (b)

Figure II-7 : (a) Scalogramme d'amplitude, (b) Scalogramme de phase.

II-5.2 Crête d'ondelette

La représentation de la transformée en ondelettes en scalogrammes permet de mettre en évidence des lignes particulières appelées crêtes d'ondelettes qui sont introduites pour la première fois par Delprat et al. [93]. Ces crêtes concentrent en quelque sorte toute l'information sur le signal. La Figure II-8 illustre en 3-D la crête du scalogramme d'amplitude de la Figure II-7a.

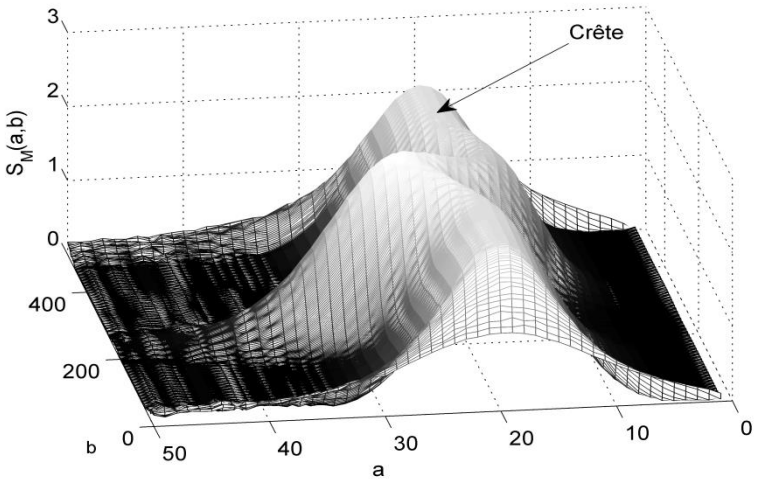


Figure II-8 : Scalogramme d'amplitude en trois dimensions montrant la crête.

II-5.3 Formalisme d'extraction de la phase

L'objectif est d'établir des outils mathématiques permettant d'estimer à partir des deux scalogrammes la distribution de la phase sur une ligne de l'image des franges. Pour ce faire, nous nous sommes inspirés des travaux de Delprat [93] et al. et Mallat [41].

Nous considérons l'ondelette complexe définie par :

$$\psi(x) = g(x)exp(i\omega_c x) \tag{II.38}$$

où g est une fenêtre symétrique de norme égale a l'unité. Les ondelettes filles issues de la translation et de la dilatation de l'ondelette mère ψ peuvent se réécrire :

$$\psi_{ab}(x) = g_a(x-b)exp[i\xi(x-b)] \tag{II.39}$$

avec $g_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{x}{a}\right)$ et $\xi = \frac{\omega_c}{a}$. Prenons la TO de la composante alternative $h(x) = V(x)\, cos[\varphi(x)]$ avec $\varphi(x) = 2\pi\nu_0 x + \phi(x)$ d'une ligne d'intensité de la figure de franges $I(x)$ écrite sous sa forme générale par l'équation (II.3) :

$$T\psi[h](a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\, cos[\varphi(x)]\, g_a(x-b)exp[-i\xi(x-b)]dx \tag{II.40}$$

et substituons $cos[\varphi(x)] = \frac{1}{2}\{exp\,[i\varphi(x)] + exp\,[-i\varphi(x)]\}$ dans *(II.40)*, nous obtenons :

$$\begin{aligned} T\psi[h](a,b) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\{\exp[i\varphi(x)] + \exp[-i\varphi(x)]\}\, g_a(x \\ &\quad - b)exp[i\xi(x-b)]dx \\ &= Q(\varphi) + Q(-\varphi) \end{aligned} \tag{II.41}$$

nous commençons par étudier :

$$Q(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\{\exp[i\varphi(x)]\}\, g_a(x-b)exp[-i\xi(x-b)]dx \tag{II.42}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} V(x+b)\{\exp[i\varphi(x+b)]\}\, g_a(x)exp[i\xi x]dx \tag{II.43}$$

si V et φ sont faiblement variables sur le support de $\psi_{a,b}$, l'intégrale précédente se calcule en utilisant des développements de Taylor au premier ordre :

$$V\,(x\,+\,b)\;\approx\;V\,(b)\,+\,x\,V'(b) \tag{II.44}$$

$$\varphi(x\,+\,b)\;\approx\;\varphi(b)\,+\,x\varphi'(b) \tag{II.45}$$

en substituant les équations (II.44) et (II.45) dans l'équation (II.43), on obtient

$$\begin{aligned} Q(\varphi) = \frac{1}{2}\exp[i\varphi(b)]\,V(b)\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)exp[-i\xi(x-\varphi'(b))]dx \\ +\,\frac{1}{2}\exp[i\varphi(b)]\,V'(b)\int_{-\infty}^{+\infty} xg_a(x)exp[-i\xi(x-\varphi'(b))]dx \end{aligned} \tag{II.46}$$

puisque nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)exp[i\xi(x-\varphi'(b))]dx = \sqrt{a}\hat{g}[a(\xi-\varphi'(b))] \tag{II.47}$$

avec $\hat{g}$ représente la transformée de Fourier de g,

et

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)xexp[i\xi(x-\varphi'(b))]dx \quad\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)xdx = 0 \tag{II.48}$$

et en tenant compte des équations (II.47) et (II.48), l'expression de $Q(\varphi)$ devient :

$$Q(\varphi) = \frac{\sqrt{a}}{2}V\,(b)exp\,[i\varphi(b)]\,\hat{g}[a(\xi-\varphi'(b))] \tag{II.49}$$

en appliquant le même raisonnement à $Q(-\varphi)$, il en résulte :

$$Q(-\varphi)\;=\frac{\sqrt{a}}{2}V\,(b)exp\,[-i\varphi(b)]\,\hat{g}[a(\xi-\varphi'(b))] \tag{II.50}$$

si $\varphi'(b)\;\geq\;\xi$, on peut négliger $Q(-\varphi)$ devant $Q(\varphi)$.

après avoir calculé le scalogramme d'amplitude normalisé, nous avons :

$$\frac{|T\psi[h](a,b)|^2}{a} = \frac{|Q(\varphi)|^2}{a} = \frac{V(b)^2}{4}|\hat{g}[a(\xi-\varphi'(b))]|^2 \tag{II.51}$$

Comme g est une gaussienne réelle et symétrique, la $TF[g](\omega)$ est aussi réelle, symétrique et de forme gaussienne. Donc, on peut écrire $TF[g](\omega) \leq TF[g](0)$. Ainsi, le scalogramme d'amplitude atteint son maximum lorsque :

$$\xi = \varphi'(b) = \frac{\omega_c}{a(b)} \tag{II.52}$$

Il en découle la définition suivante :

Définition II.1. (Crête à partir du module de la TO)

La crête est l'ensemble $\Gamma 1$ des points $(b;\ a_c(b))$ sur le plan espace-fréquence tel que le module de la TO en ces points est maximum.

$$\Gamma 1 \ = \ \{(b;\ a_c(b)) \mid |T\psi[h]|\ (b, a_c(b)) \ = \ max\ |T\psi[h](a,b)|\} \tag{II.53}$$

La crête d'ondelettes peut être aussi liée au scalogramme de la phase de la TO, en utilisant l'équation (II.52). Ainsi :

$$arg\ \{T\psi[h](a,b)\} \ = \ \Phi_{T_\psi}(a,b) \ = \ \varphi(b) \tag{II.54}$$

par la suite, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \Phi_{T_\psi}(a,b)}{\partial b} = \varphi'(b) = \frac{\omega_c}{a(b)} = \xi \tag{II.55}$$

en tenant compte de l'équation (II.55) et la définition de la fréquence locale incarnée par l'équation (II.22), on peut donner une deuxième définition de la crête d'ondelettes de point de vue de la représentation espace-fréquence de la phase de la TO.

Définition II.2. (Crête à partir de la phase de la TO)

La crête est l'ensemble $\Gamma 2$ des points $(b;\ a_c(b))$ sur le plan espace-fréquence tel que la variation de la phase de la transformée en ondelettes coïncide avec la fréquence locale $\upsilon(b)$ du signal analysé :

$$\Gamma 2 = \left\{\left(b;\ a_c(b)\right) \ \mid \ \upsilon(b) = \frac{\omega_c}{a(b)}\right\} \tag{II.56}$$

Avant d'en finir avec ce scenario mettant en exergue le lien mathématique existant entre la phase et la crête d'ondelette, une information supplémentaire peut être également extraite à partir de l'image de franges. Il s'agit du terme représentant le contraste signal interférométrique $V\ (b)$ par la relation suivante :

$$V\ (b)\ = \frac{2|T\psi[h](a,b)|}{\sqrt{a}|\hat{g}(0)|} \qquad \text{(II.57)}$$

II-6 Bruit du speckle synthétique

II-6.1 Notions essentielles sur le phénomène de speckle

Le phénomène optique de speckle, vu comme bruit gênant par certains et par d'autres comme porteur d'information, est connu depuis très longtemps et a été mis en évidence pour la première fois par Newton et le Duc de Chaulnes au XVIIème siècle [94]. L'arrivée du laser dans les années 60, grâce à sa lumière cohérente, a donné naissance aux développements des études théoriques permettant de modéliser statistiquement ce phénomène. Depuis lors, les applications n'ont pas cessé de se développer pour la métrologie à distance non destructive dans de nombreux domaines tels que l'astrophysique [95], la médecine [96] etc… En effet, les propriétés du speckle ont fait l'objet de nombreuses études de la part de plusieurs auteurs, dont on peut citer en particulier Goodman [97] et Goldfisher [98] qui ont contribué par une large mesure à la définition et à la caractérisation de ce phénomène.

Nous allons supposer tout au long de cette thèse que le bruit qui affecte nos figures de franges peut être modélisé par un bruit de speckle affectant l'image optique. Dans un souci de simplicité, nous faisons l'hypothèse encore plus restrictive que ce bruit est uniquement multiplicatif.

II-6.2 Aspects physiques et statistiques du speckle

II-6.2.1 Aspects physiques

Le speckle est l'ensemble de grains dus aux rayons laser lorsqu'ils rencontrent une surface. En effet, les surfaces présentent en général des micro-irrégularités (rugosité) d'amplitude supérieure ou égale à la longueur d'onde du laser. Lorsque une surface de ce type est éclairée par de la lumière laser, il se produit des interférences microscopiques au niveau de cette surface. Cela se traduit visuellement par un effet granuleux sur la tache lumineuse à cause de la différence de chemin optique liée à la microrugosité qui va produire un déphasage aléatoire. Comme le montre la Figure II-9 où l'amplitude résultante au point M est la somme

d'un grand nombre d'ondes cohérentes ayant chacune un module et une phase propre et aléatoire. Par conséquence, l'intensité lumineuse résultante en chaque point est également aléatoire et c'est sa répartition aléatoire qui produit le champ de speckle.

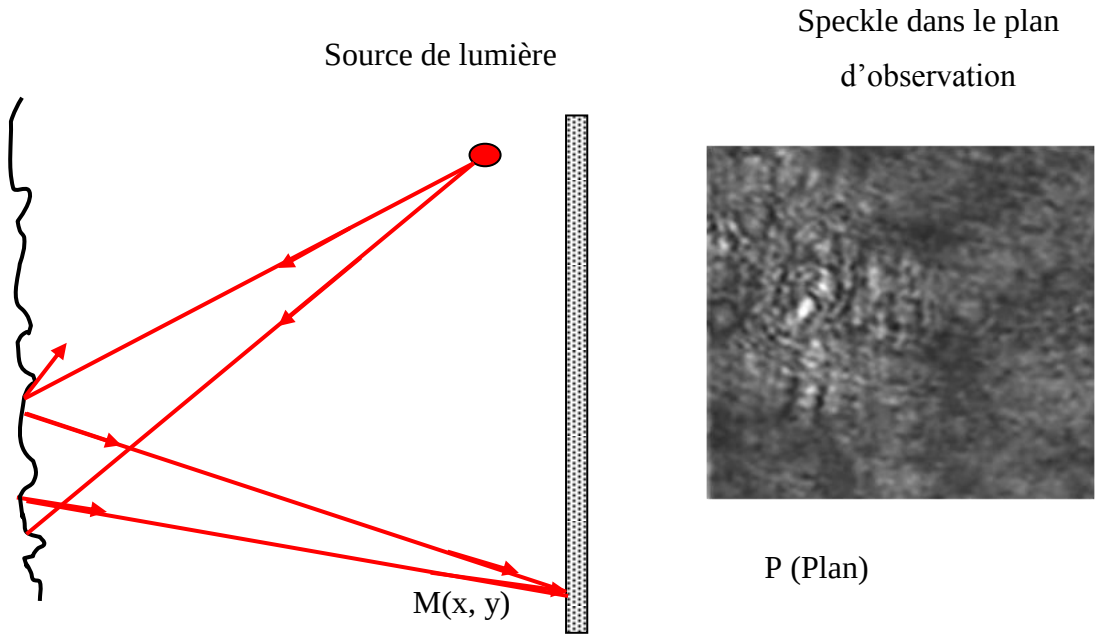


Figure II-9 : Champ de speckle réel généré par une surface d'aluminium.

II-6.2.2 Simulation du bruit de speckle

Pour simuler le bruit de speckle, nous allons nous intéresser au modèle statistique le plus utilisé. C'est le modèle gaussien développé selon les hypothèses proposées par Goodman [97] et qui sont le plus souvent réalisées dans le cas du speckle produit par une surface rugueuse. Nous supposerons que tous les éléments optiques intervenant pour la réalisation des images optiques sont homogènes de même rugosité et qu'ils ne dépolarisent pas l'onde incidente. Par conséquence, les variations spatiales de l'onde rétrodiffusée par ces surfaces sont dues uniquement au speckle.

Rappelons ici que la statistique du premier ordre, correspond à une statistique en un point de l'espace. Elle donne accès aux lois statistiques (fonctions de densités de probabilités) auxquelles obéissent l'amplitude complexe, l'intensité et la phase du champ de speckle intercepté dans un plan.

Nous nous sommes contentés dans le cadre de cette thèse à exploiter les formulations mathématiques existantes permettant de simuler numériquement le champ de speckle. Pour cet objectif, nous avons développé un programme sous MATLAB en s'inspirant de l'algorithme simple proposé par Duncan et al. [99]. 1) On génère une matrice dont les éléments sont purement des imaginaires d'amplitude unitaire et d'arguments uniformément distribués entre $-\pi$ et π (voir Figure II-11). Cette considération nous conduit à l'utilisation de la fonction *rand*. 2) On calcule la transformée de Fourier de cette matrice en utilisant la fonction fft2 de MATLAB. 3) On calcule le carré du module de chaque élément, le résultat étant une image de speckle dont l'illustration est montrée sur la Figure II-12. Ici dans cette démonstration la taille moyenne du grain du speckle est de 5×5 pixels.

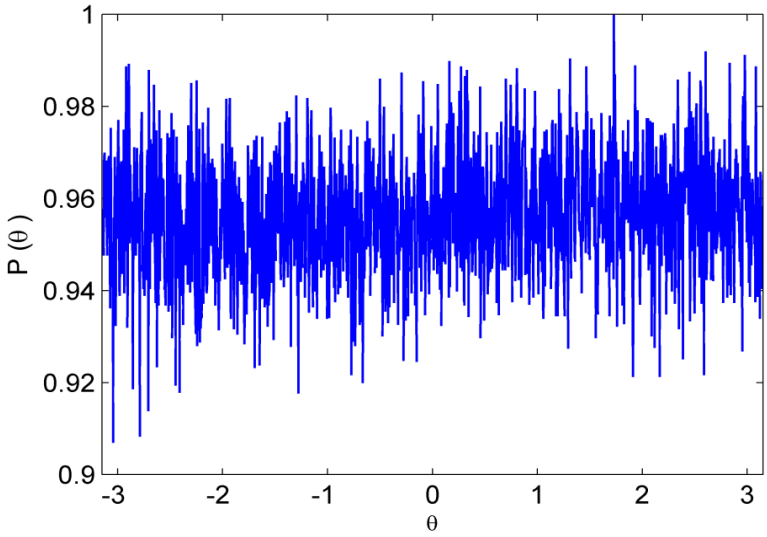


Figure II-10 : Fonction de densité de la phase du speckle.

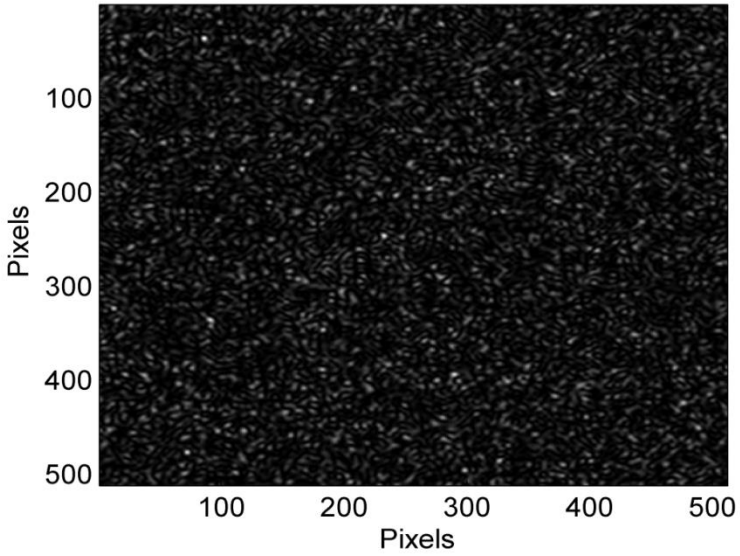


Figure II-11 : Image de speckle simulé.

A partir de la Figure II-11, nous avons représenté sur la Figure II-12 la fonction de densité de l'intensité qui a une allure d'une exponentielle négative, ce qui est prédit par la statistique du premier ordre et valide la mise en œuvre de notre algorithme.

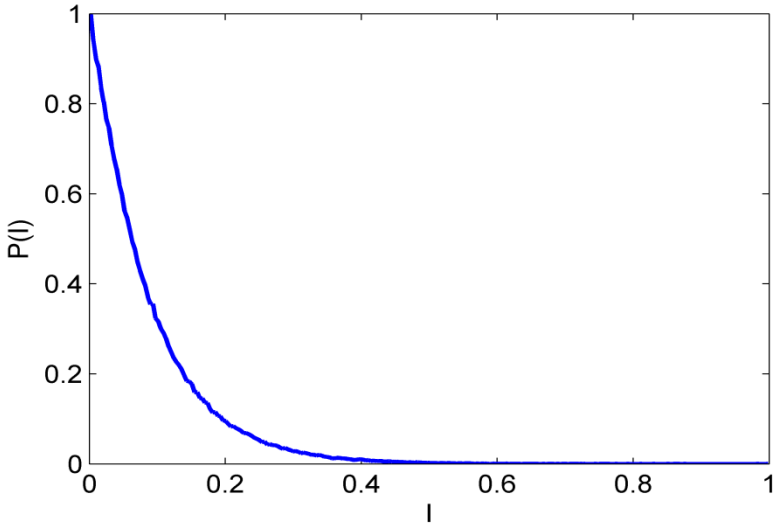


Figure II-12 : Fonction de densité de l'intensité du speckle.

II-6.2.3 Taille du gain du speckle

Pour décrire complètement le champ de speckle dans un plan d'observation nous aurons besoin de la statistique du deuxième ordre [98] [100] qui va permettre d'accéder aux dimensions transversales d'un grain de speckle (Figure II-13).

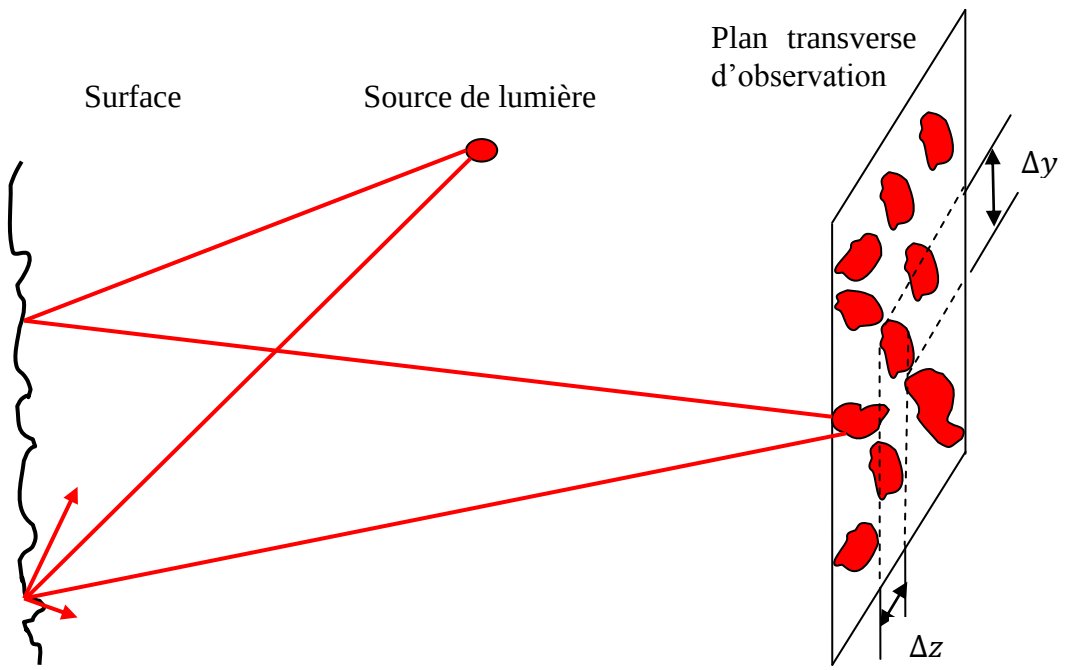


Figure II-13 : Formation de speckle dans l'espace et la représentation des deux dimensions d'un grain de speckle.

Pour ce faire, nous avons utilisé la fonction d'autocovariance normalisée C centrée prise à mi-hauteur appliquée à l'intensité du speckle qui s'écrit [97]:

$$\mathrm{C}(y,z) = \frac{\mathrm{R}(y,z) - \langle I(y,z)\rangle^2}{\langle I(y,z)^2\rangle - \langle I(y,z)\rangle^2} \qquad \text{(II.58)}$$

En pratique, R est la fonction d'autocorrelation calculée grâce au théorème de Wiener-Khintchine en calculant une paire de transformée de Fourier de $I(y,z)$ [101]

$$R(y,z) = TF^{-1}\{|TF[I(y,z)]|^2\} \qquad \text{(II.59)}$$

Dans ce qui suit nous présentons le calcul de la fonction d'autocovariance normalisée. En traitant l'image de speckle représenté sur Figure II-14.

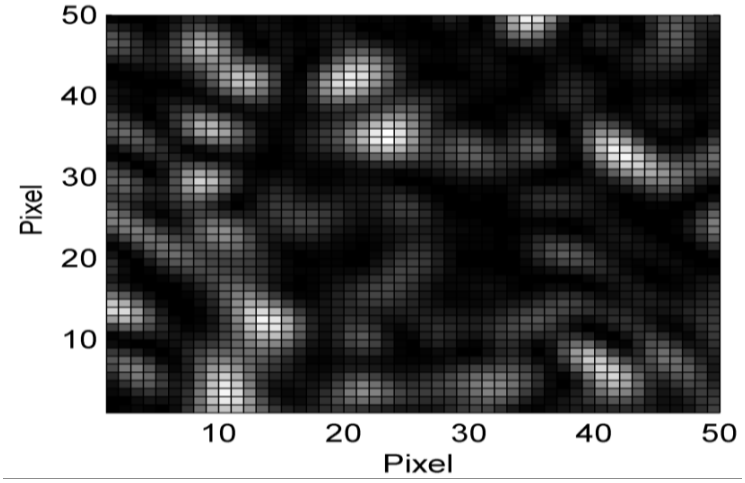


Figure II-14 : Zoom sur une partie du champ de speckle simulé précédemment montré sur la Figure II-11.

Le résultat du calcul de l'autocovariance, est représenté sur la Figure II-15 en 3-D. Nous pouvons observer clairement le pic de la fonction d'autocorrelation placé au centre de cette figure.

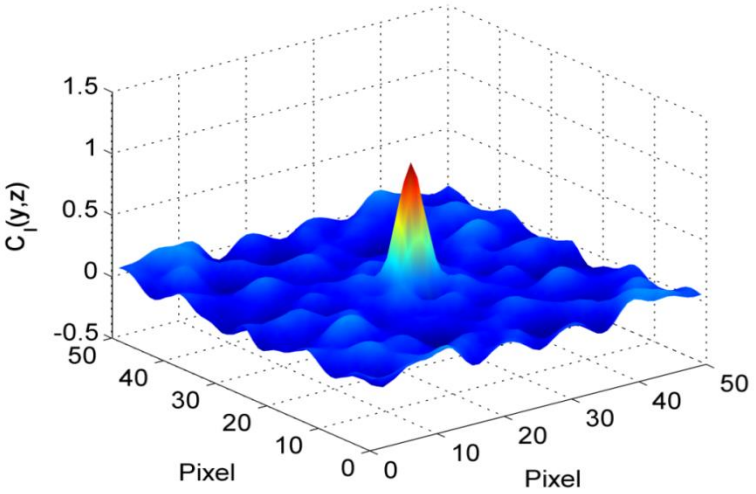


Figure II-15 : Fonction d'autocovariance représentée en 3-D du champ du speckle simulé de la Figure II-14.

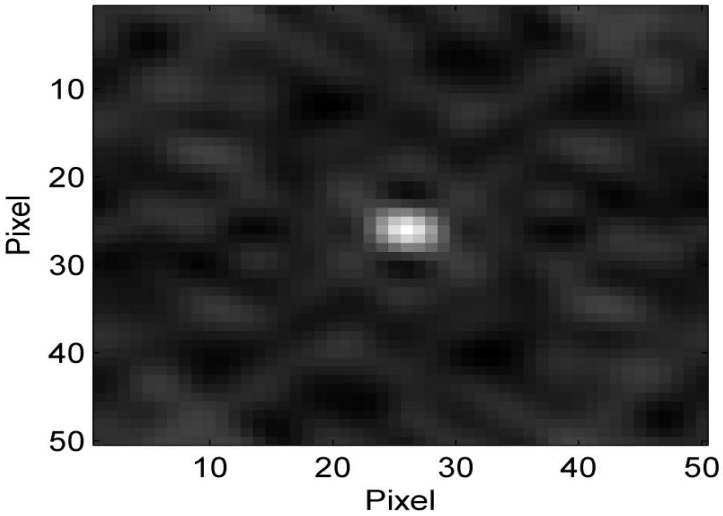


Figure II-16 : Fonction d'autocovariance en 2-D du champ de speckle simulé présenté précédemment sur la Figue II-15.

Une coupe horizontale en son centre de la fonction d'autocovariance 2-D donne $C(y,0)$ qui est une fonction en 1-D, représentée sur la Figure II-17.

Finalement nous pouvons tracer, la fonction d'autocovariance normalisée de l'intensité du speckle correspondant à une coupe horizontale de l'autocorrelation, représentée sur la Figure II-17.

$$C(y,0) = \frac{\mathrm{R}(y,0) - \langle I(y,z)\rangle^2}{\langle I(y,z)^2\rangle - \langle I(y,z)\rangle^2} \tag{II.60}$$

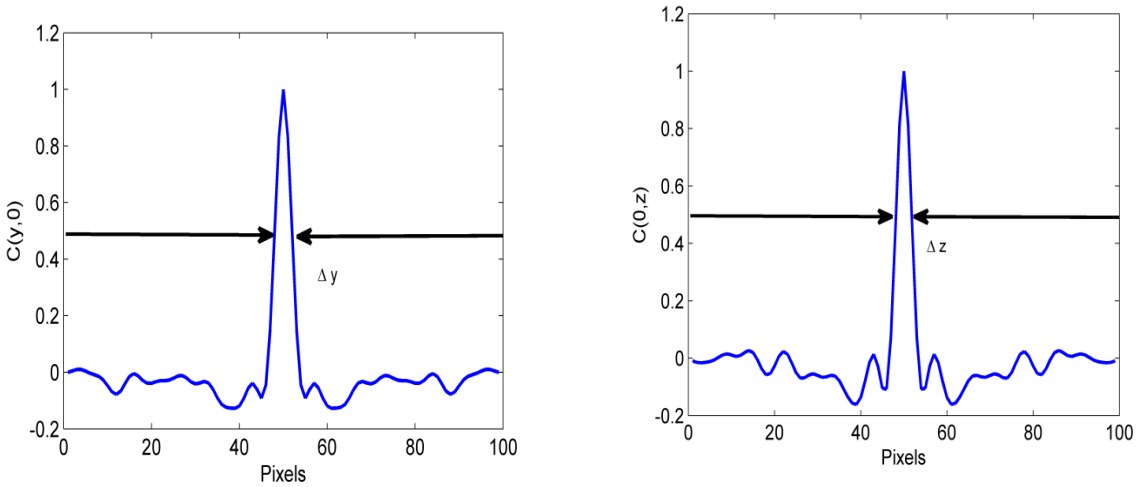


Figure II-17 : les fonctions d'autocovariance normalisées $C(y,0)$ et $C(0,z)$ de la figure du speckle simulé précédemment.

Nous désignons par Δy, la dimension horizontale d'un grain de speckle, obtenue en calculant la largeur à mi-hauteur de la fonction d'autocovariance normalisée dans la direction horizontale. De la même manière nous accédons à la dimension verticale Δz .

II-6.2.4 Constatations

Le fait qu'on dispose de plusieurs éléments optiques dans un banc expérimental avec des surfaces diffusantes qui peuvent être de rugosité différentes, et qui sont placées à différentes distances du plan d'observation, nous a amené à dire que la figure de speckle n'est que la contribution de la totalité de ces surfaces. Par conséquence, le développement d'un algorithme générant un amalgame de grains de speckle de différentes tailles est possible, en faisant la somme de plusieurs figures de speckle avec des dimensions des grains différents. Ce qui changera surement la statistique du speckle en vertu du théorème de centrale limite, qui prédit que l'intensité totale obéira à une loi normale. Toutefois, l'accès aux caractérisations spatiales dans un cas pareil, s'avère une tache ardue. En tenant compte des résultats de la simulation des images de franges vues dans la section précédente et ceux de cette section nous pouvons finalement obtenir une série d'images bruitées par le speckle proches des images réelles. Ceci permettra d'évaluer la performance des algorithmes développés dans ce travail de thèse. La Figure II-19 montre un interferogramme simulé bruité par une distribution d'intensité de speckle ayant 5×5 pixels comme taille moyenne des grains.

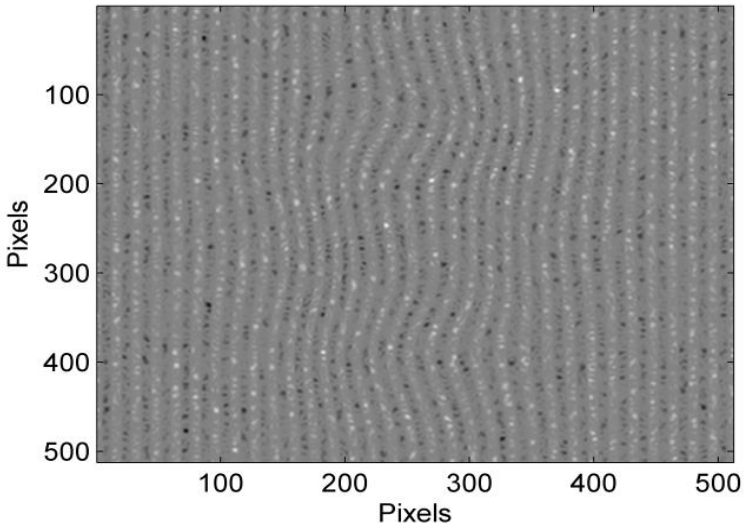


Figure II-19 : Interferogramme bruité par un speckle de taille 5×5.

Dans ce qui précède, on peut retenir les points suivants : la distribution statistique de la taille du speckle est gaussienne sur la base de l'amplitude complexe du champ électrique et que l'intensité obéit à une loi exponentielle négative. L'accès aux caractérisations spatiales des grains du speckle se fait à travers le calcul de la fonction d'autocovariance de l'intensité. L'ensemble de ces propriétés sont traduites en deux routines dont la première est désignée pour la génération du bruit de speckle avec une taille des grains variable, tandis que la deuxième permet d'accéder aux caractéristiques spatiales des grains de speckle dans une image.

II-7 Mesure de la qualité de la grandeur reconstruite

Généralement, il est préférable qu'une méthode numérique soit neutre vis à vis du traitement qu'elle accomplit. En revanche, le bruit de la méthode numérique ou tout simplement le bruit de l'algorithme est un indicateur permettant l'évaluation subjective et objective de la fiabilité et de la précision d'un algorithme. Pour ne pas alourdir ce récit, on peut consulter le travail de Buades et al [102] pour d'amples détails sur la notion de bruit d'une méthode numérique.

Si u est l'ensemble des données définies sur une grille finie Ω alors le bruit de méthode pour u associé à un algorithme est $BM(u) = u - algorithme(u)$ où $algorithme(u)$ est le résultat de l'application de l'algorithme à u. BM est pour désigner le bruit de la méthode.

Nous notons $\tilde{u}$, l'estimation de u. La qualité de l'estimation est le plus souvent mesurée par l'erreur quadratique moyenne (ou alors MSE de l'anglais *Mean Square Error*) entre la grandeur originale et la grandeur calculée ou reconstruite, soit :

$$\sigma = MSE(\tilde{u}, u) = \frac{\sum_{x\in\Omega}[\tilde{u}(x) - u(x)]^2}{card(\Omega)} \qquad \text{(II.75)}$$

Toutefois, en traitement numérique des images, un indicateur souvent utilisé est le pic du rapport signal sur bruit (en anglais *Peak Signal to Noise Ratio*, PSNR) exprimé en dB. En effet, la plupart des méthodes numériques présentées dans la littérature du traitement des images sont évaluées par ce critère. Ceci donnera facilement accès à une comparaison des performances entre les différents algorithmes qui vont être discutés dans la suite de cette thèse.

Pour définir le PSNR, on a besoin de l'erreur quadratique moyenne σ

$$PSNR(\tilde{u}, u) = 10\, log\, \frac{255^2}{\sigma} \qquad \text{(II.76)}$$

Nous ne donnons ici que la définition du PSNR dans le cas des images en niveaux de gris où le nombre 255 donne l'amplitude maximale de l'intensité de l'image. En effet, il est important de noter que le PSNR obtenu pour la reconstruction d'une image dépend très peu de la synthèse du bruit. Le grand nombre des pixels dans l'image (ici, il est supérieur ou égal à 256×256) garantit un comportement moyen et la stabilité de ce critère. Ceci nous évite de répéter tant de fois les expériences numériques pour avoir une idée de la performance d'un algorithme.

Dans ce travail de thèse, nous choisissons comme mesure objective de la qualité d'estimation l'erreur quadratique moyenne le MSE lorsqu'il s'agit d'estimer une grandeur et non pas une image. En revanche le $PSNR$ sera utilisé pour l'évaluation de la qualité de la reconstitution d'une image au sens vrai de la définition d'une image.

II-8 Conclusion

Ce chapitre a sommairement donné des notions importantes pour le traitement du signal en général et le traitement en ondelettes en particulier. Nous nous sommes basés sur les propriétés des signaux à traiter tout en passant en revue sur les particularités des transformées antécédentes qui ont donné naissance à la transformée en ondelettes. Ainsi, différents algorithmes d'implémentation numérique de la TO ont été décortiqués. Le choix de l'algorithme approprié est basé essentiellement sur la nature du signal analysé. La complexité temporelle est également prise en considération. L'algorithme utilisant la procédure d'intégration quadrature a été retenu. Nous avons également présenté les différentes définitions mathématiques de la crête d'ondelette permettant d'appréhender la démodulation des figures de franges par la TO.

Pour mieux simuler les franges d'interférence et pouvoir ainsi tester la fiabilité des algorithmes de mesure de la phase, le bruit de speckle doit être pris en considération. Nous

avons présenté les fondements physique et statistique du phénomène de speckle justes nécessaires pour le simuler numériquement. Nous avons privilégié dans ce but l'aspect pratique en proposant une routine permettant de générer aléatoirement le speckle sur une image tout en maitrisant sa taille moyenne.

Chapitre III : Développement des algorithmes pour l'extraction de phase

III-1 Introduction

Dans ce chapitre, nous discutons le processus d'extraction de la phase encodée dans les figures des franges synthétiques. Ce processus est désigné dans le jargon des numériciens par l'analyse des franges. Généralement, ce processus comporte deux étapes dont la première est l'extraction de la phase proprement dite. La deuxième étape portera sur le dépliement éventuel de cette phase.

Nous allons donner une attention particulière aux différents algorithmes d'extraction de la crête d'ondelettes. C'est une étape nécessaire à la mesure de la phase à partir des films optiques. Trois algorithmes sont considérés: l'algorithme de maximum direct [27], l'algorithme de Liu [43] nommé aussi algorithme de la fonction coût et l'algorithme du Groupe de Marseille [93]. Nous cherchons l'algorithme le plus adéquat et le plus robuste. Ensuite, nous décortiquons le problème de dépliement de phase. Pour ce faire, quatre algorithmes sont testés et comparés à savoir l'algorithme d'Itoh 1-D [3], l'algorithme Itoh 2-D, l'algorithme de Goldstein 2-D [30] et l'algorithme d'Arevalillo Herráez [7].

L'ensemble des algorithmes présentés dans ce chapitre sont programmés sous Matlab. Leur validation a été jugée en considérant les deux critères de qualité à savoir le PSNR et/ou le MES.

III-2 Génération de l'image de test

Nous avons choisi de tester les algorithmes que nous développons dans ce chapitre, sur une image de franges synthétiques. La phase qui est à l'origine de ces franges est calculée numériquement à l'aide d'une expression analytique bidimensionnelle. Cette procédure est largement utilisée dans la littérature pour la validation numérique des algorithmes pour l'analyse des franges [103]. Plus encore, ce choix nous épargne de la complexité et le coût élevé de calcul des simulations dans des configurations réalistes.

En principe, on peut simuler une figure de franges à partir de n'importe quelle distribution en deux dimensions représentant le déphasage en interférométrie ou les angles de déflection en déflectométrie de moiré. Il suffit simplement de formuler une expression mathématique pour ces grandeurs sous la forme d'une fonction à deux variables. Ainsi, nous considérons à titre d'exemple l'expression analytique suivante [103]:

$$\begin{aligned}\varphi(y,z) = \; & 3(1-y)^2 exp[-y^2 - (z+1)^2] \\ & - 10\left(\frac{y}{5} - y^3 - z^5\right) exp(-y^2 - z^2) \\ & - \frac{1}{3} exp[-(y+1)^2 - z^2]\end{aligned} \tag{III.1}$$

La Figure III-1 illustre la représentation graphique de la distribution de $\varphi(y,z)$ selon un échantillonnage de 512x512 pixels.

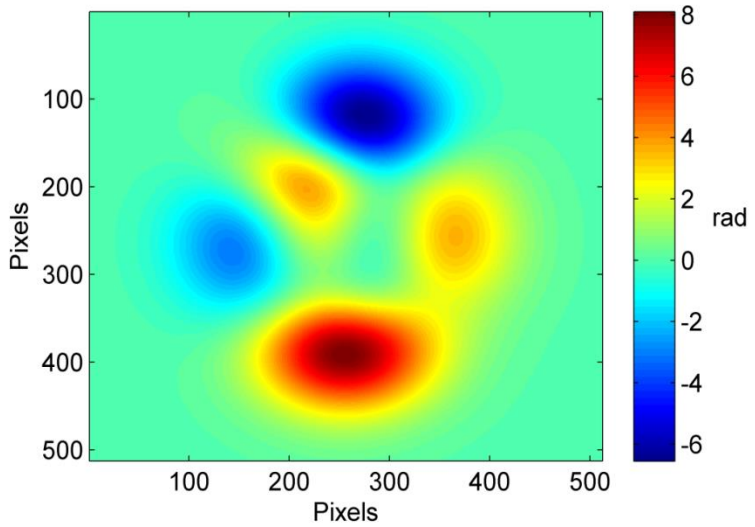


Figure III-1 : Image de phase théorique échantillonnée sur 512×512 *pixels.*

On injecte l'expression (III.1) comme terme de phase dans l'équation des franges $I(y,z)$ que nous rappelons ici :

$$I(y,z) = I_m(y,z) + V(y,z)\, cos[2\pi v_0 y + \varphi(y,z)] \tag{III.2}$$

Le résultat de ce calcul donne l'image de frange représentée sur la Figure III-2.

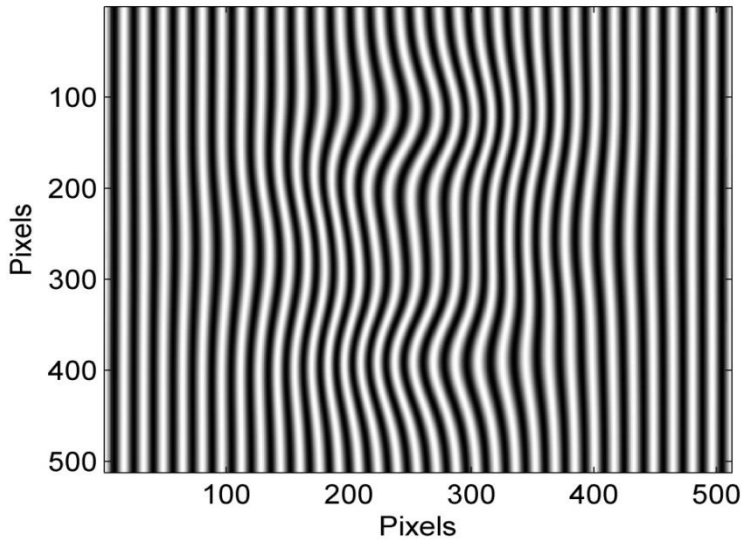


Figure III-2 : Franges synthétiques avec $I_m = 0,\ V = 1,\ \nu_0 = 0.08$.

La Figure III-3 montre la même image de franges mais cette fois affectée par un bruit de speckle multiplicatif dont la taille moyenne du grain est 5×5 pixels.

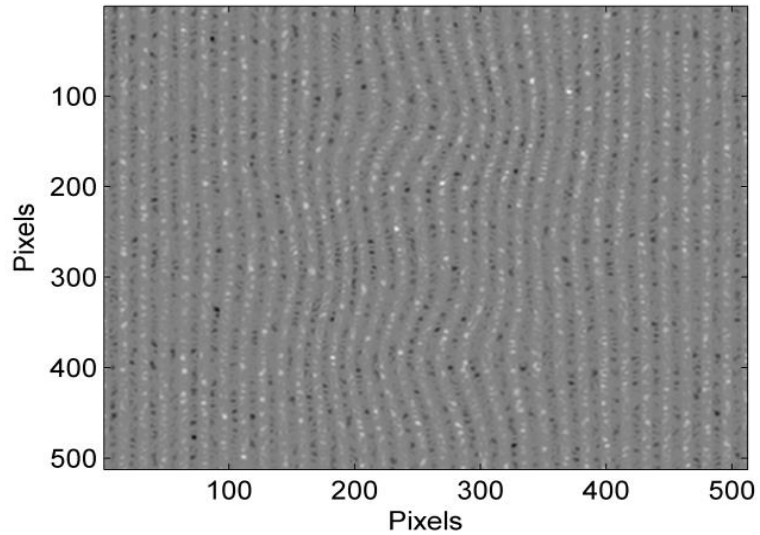


Figure III-3 : Image de frange bruitée.

Les images de franges de la Figure III-2 et la Figure III-3 seront utilisées pour valider les différents algorithmes d'extraction de la crête d'ondelettes. La Figure III-1 servira comme référence pour valider les différents algorithmes de dépliement (deuxième étape du processus d'analyse des franges).

III-3 Reconstitution de la distribution de la phase

Le dépouillement d'une image optique en vue de la reconstitution du champ de température qui lui a donné naissance commence tout d'abord par l'extraction de la phase. Cette étape est composée d'un enchainement d'opérations mathématico-numériques. La précision et la rapidité de la mesure de la phase sont étroitement liées aux choix des algorithmes et leurs paramètres. La Figure III-4 illustre l'enchainement de toutes les opérations et les algorithmes que l'on peut emprunter pour aboutir à la distribution de la phase inconnue. Notre but à travers le récit qui suit est de trouver, en le justifiant, la meilleure procédure pour le dépouillement d'une image optique par la technique de la transformée en ondelettes.

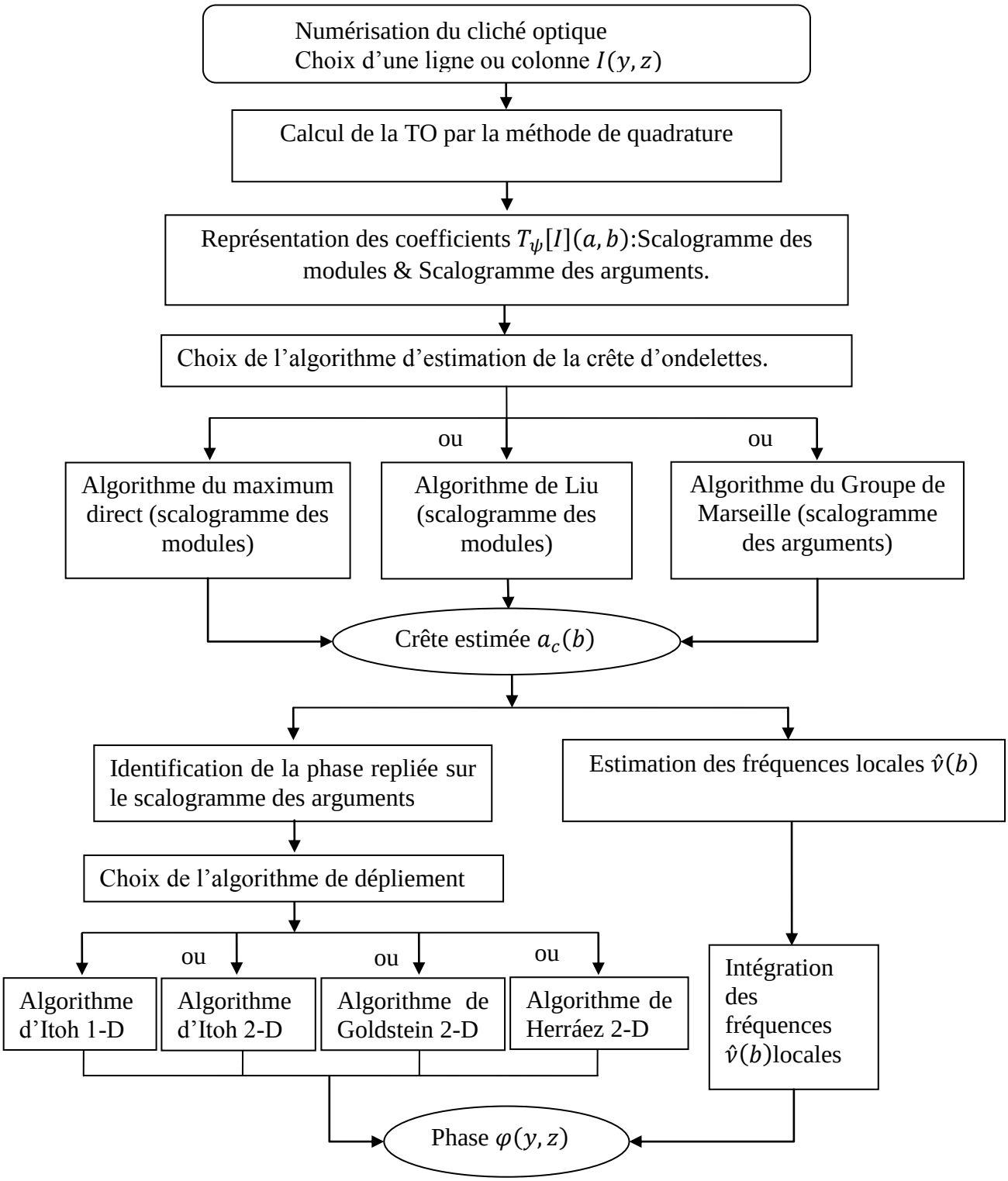


Figure III-4 : Organigramme illustratif pour l'analyse des franges.

III-3.1 Calcul des scalogrammes

Pour mieux illustrer le déroulement de cette approche, considérons la Figure III-5 qui représente l'intensité sur la ligne 400 de l'image des franges simulées (Figure III-2).

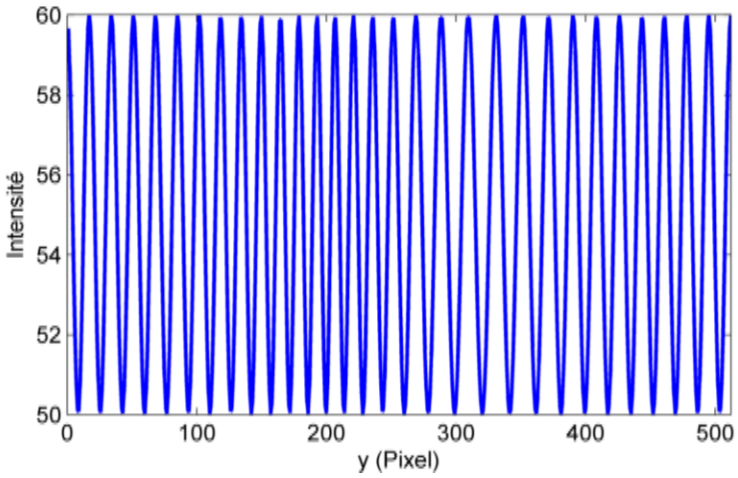
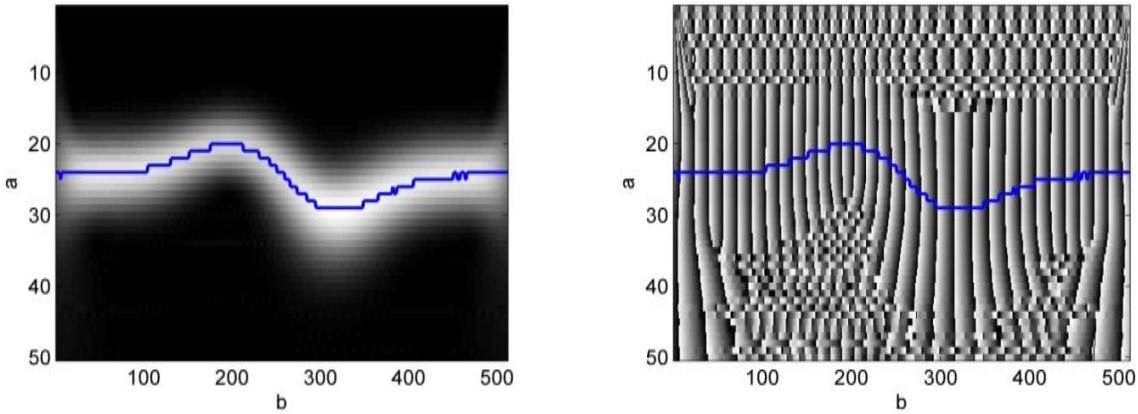


Figure III-5 : Profil d'intensité $I(y, z = 400)$.

Après le calcul de la transformée en ondelette de cette ligne, on peut accéder facilement aux deux scalogrammes d'amplitude et de phase (Figure III-6). Nous avons choisi de travailler avec l'ondelette complexe de Morlet qui est couramment utilisée.



(a) *(b)*

Figure III-6 : Les images (a) et (b) représentent respectivement le scalogramme des modules et le scalogramme des arguments.

On peut facilement observer sur le scalogramme des modules (Figure III-6a) le profil de la crête d'ondelettes sous la forme d'une bande claire. Le calcul de la TO peut être interprété comme un calcul des coefficients de corrélation entre le signal et les différentes

ondelettes filles. Ces coefficients prennent des valeurs en module d'autant grandes que l'ondelette fille et une portion du signal sont similaires (zone claire sur le scalogramme des modules). En d'autres termes, le module de la TO est maximal lorsqu'une ondelette fille a une fréquence d'analyse très proche de la fréquence locale du signal. Cela engendre l'apparition d'une crête qui donne accès aux variations de la fréquence du signal et par la suite a sa phase.

III-3.2 Estimation de la crête d'ondelettes

Dans un processus d'analyse des franges utilisant la TO, la détection de la crête d'ondelettes constitue une étape primordiale. A cet effet, nous allons mettre en œuvre et tester trois algorithmes à savoir : l'algorithme du maximum direct [27], l'algorithme de Liu [43] et l'algorithme du Groupe de Marseille [93] [104]. Leur fiabilité sera évaluée en considérant le critère de qualité PSNR (§ II-7 , page 87) pour chaque algorithme.

III-3.2.1 Algorithme du maximum direct

III-3.2.1.1 Test sur une image non bruitée

Cet algorithme est assez simple à programmer. L'extraction de l'ensemble des points formant la crête d'ondelettes se fait au niveau du scalogramme des modules (Figure III-6a). On détermine les coordonnées (a_c, b) de la valeur maximale de chaque colonne dans la matrice des modules comme c'est illustré sur la Figure III-7 pour la colonne $b = 10$. La valeur de la phase correspondante est extraite de la matrice des arguments par une simple identification. La répétition de ces deux opérations sur toutes les colonnes de la matrice des modules permet de tracer le profil (Figure III-8a) de la phase repliée. Afin de démoduler l'ensemble de l'image de franges, ce processus sera répété pour toutes les lignes. L'annexe (B) représente la mise œuvre de l'algorithme MD. Le résultat étant une carte de la phase repliée représentée en 256 niveaux de gris comme le montre la Figure III-8b. Pour s'assurer qualitativement du résultat obtenu, nous avons recalculé les franges en introduisant la phase repliée dans la formule (III.2). Le résultat de cette opération est illustré sur la Figure III-8c qui est une duplique fidèle de l'image initiale des franges (Figure III-2). Ceci démontre qualitativement l'aptitude de l'algorithme MD à démoduler la figure de franges simulée sans bruit.

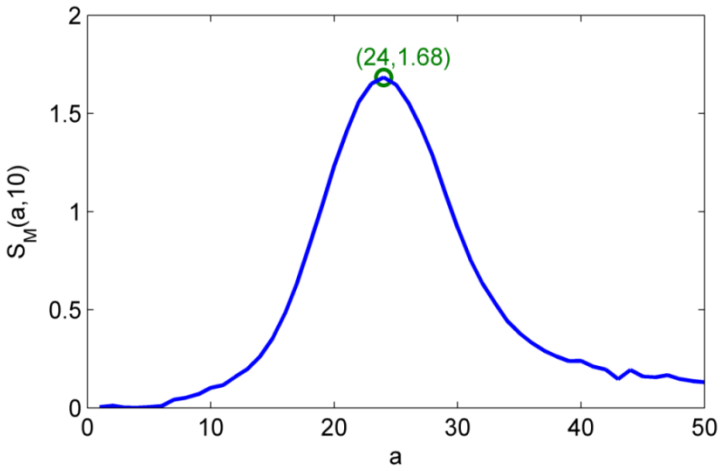
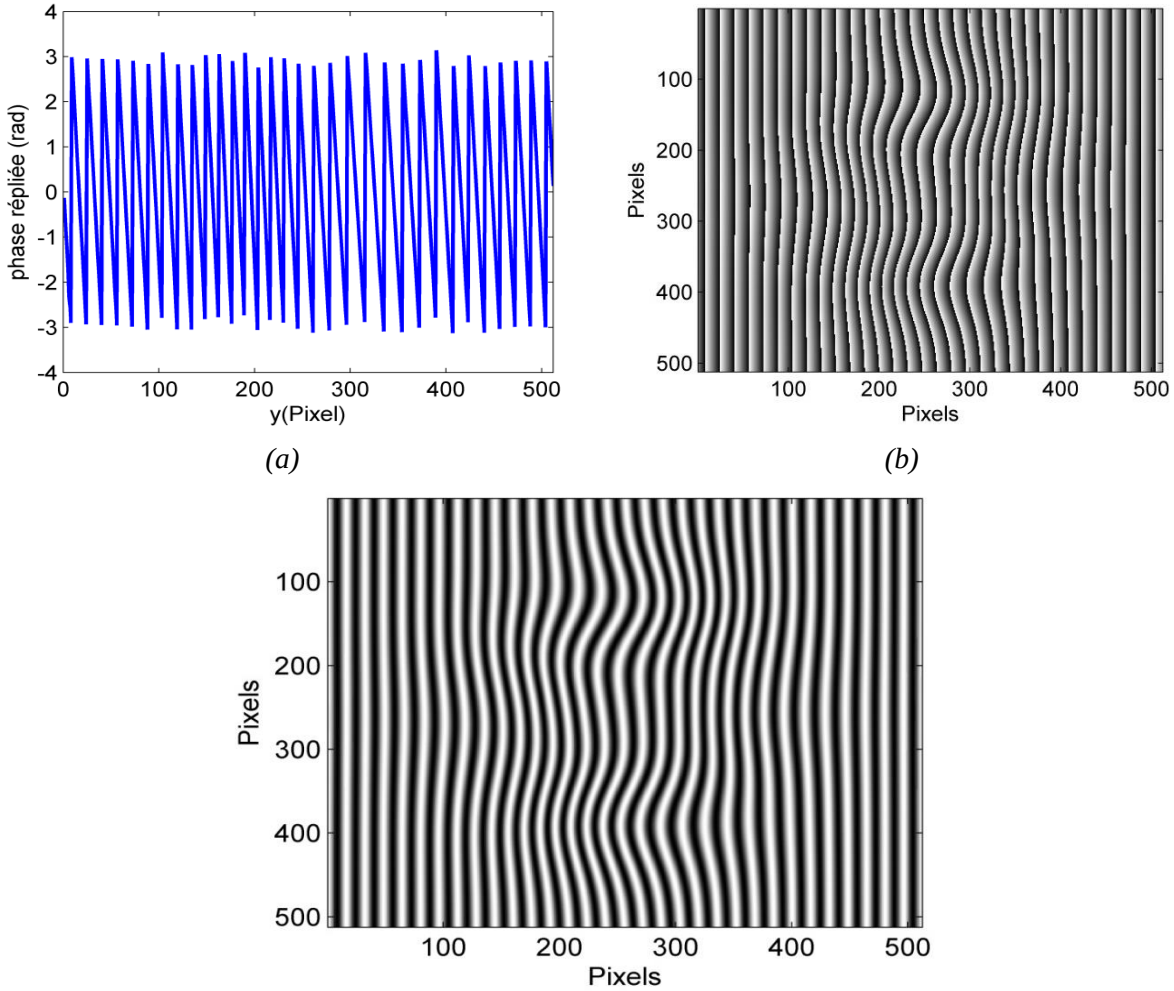


Figure III-7 : Profil de la variation des valeurs de la dixième colonne du scalogramme d'amplitude de TO.



(a) *(b)*

(c)

Figure III-8 : (a) Phase repliée correspondant à la ligne d'intensité $z = 400$. *(b) cartographie de la phase repliée. (c) image des franges reconstruites à partir de la phase repliée.*

III-3.2.1.2 Test sur une image bruitée

Afin de montrer les limitations de cet algorithme, nous utilisons cette fois-ci l'image de franges bruitées de la Figure III-3.

Le résultat de la démodulation des franges par l'algorithme MD est illustré sur la Figure III-9. Globalement, l'image recalculée est plus nette que l'image bruitée de la Figure III -3. On conçoit alors la capacité de la technique TO à filtrer les franges et à surmonter les effets du bruit de speckle. Néanmoins, nous observons dans certaines zones des points singuliers sur les franges apparaissant sous la forme de rayures (zones entourées en rouge sur la Figure III-9). Ces points correspondent à la meilleure corrélation des ondelettes filles avec le bruit au lieu

du signal recherché. L'algorithme MD qui ne détecte que le maximum absolu ne permet pas de contourner ces points singuliers. Par conséquent, un algorithme plus sélectif des points formant la crête s'avère plus adéquat.

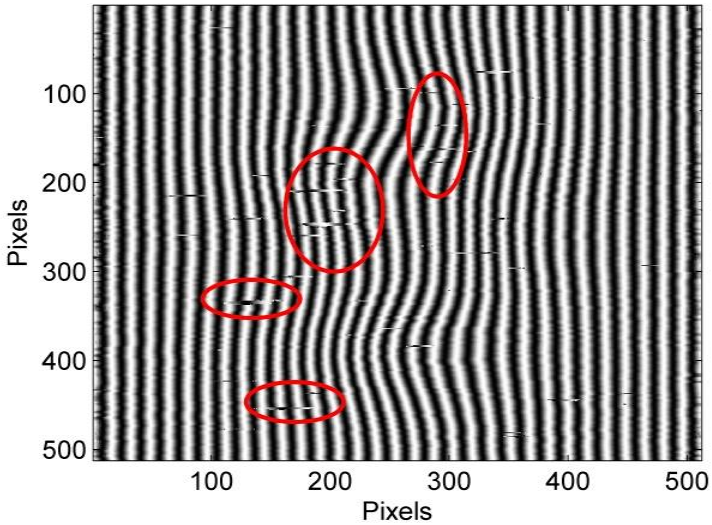


Figure III-9 : Image des franges recalculées montrant certaines zones de points singuliers.

III-3.3 Algorithme de Liu

La détection de la crête d'ondelettes en utilisant la programmation dynamique par la minimisation de la fonction coût a été introduite par Liu et al. [43]. L'objectif est de corriger les anomalies inhérentes à l'application systématique de l'algorithme de recherche du maximum absolu pour estimer la crête d'ondelettes. La solution proposée par Liu est de considérer conjointement au maximum absolu, tous les maximums relatifs du module de la transformée d'ondelettes. Pour fixer les idées, appliquons cet algorithme sur la ligne 400 (Figure III-10) de l'interferogramme bruité représenté par la Figure III-3. Tous les résultats de cet exemple sont illustrés sur la Figure III-11. Pour chaque candidat susceptible de faire partie de la crête, nous évaluons la fonction coût ou "$Cost$" dont l'expression est la suivante :

$$Cost[f(b), b] = -\int_b \{S_M[f(b), b]\}^2 \, db + \int_b \left|\frac{df(b)}{db}\right|^2 db \qquad \text{(III.3)}$$

où f est une fonction décrivant l'évolution des échelles a en fonction du paramètre de translation b et $S_M[f(b), b]$ est la valeur de module de la TO au candidat $(f(b), b)$

Le choix entre les maximums relatifs du module de la TO de la colonne considérée va se faire en cherchant la valeur $a_c(b)$ pour laquelle la fonction $Cost[f(b), b]$ est minimale.

La discrétisation de l'équation (III.3) avec un pas $\Delta b = 1$ permet d'aboutir à l'expression simplifiée suivante [43]:

$$Cost(n, b+1) = \min_{m}\{cost(m, b) - \{S_M[f(m), b+1]\}^2 + |n-m|^2\} \quad \text{(III.4)}$$

où n et m représentent deux indices qui parcourent respectivement les positions des maximas relatifs de la colonne b et la colonne $b+1$.

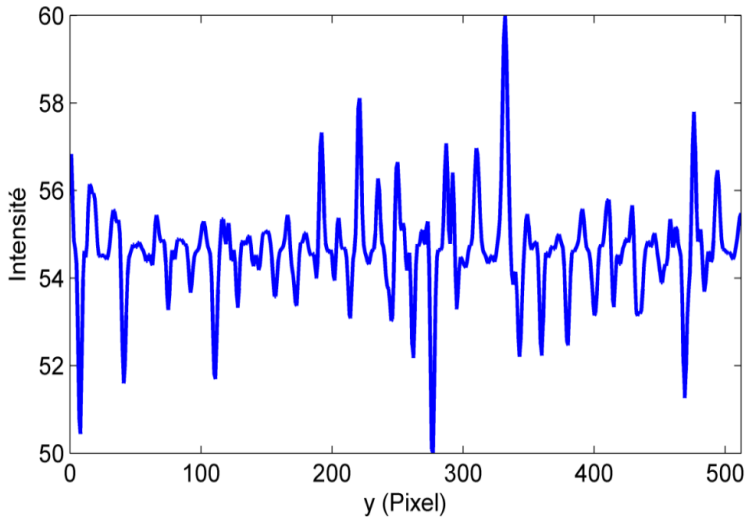


Figure III-10 : Profil d'intensité $(z = 400)$ *de l'image des franges (Figure III-3)*

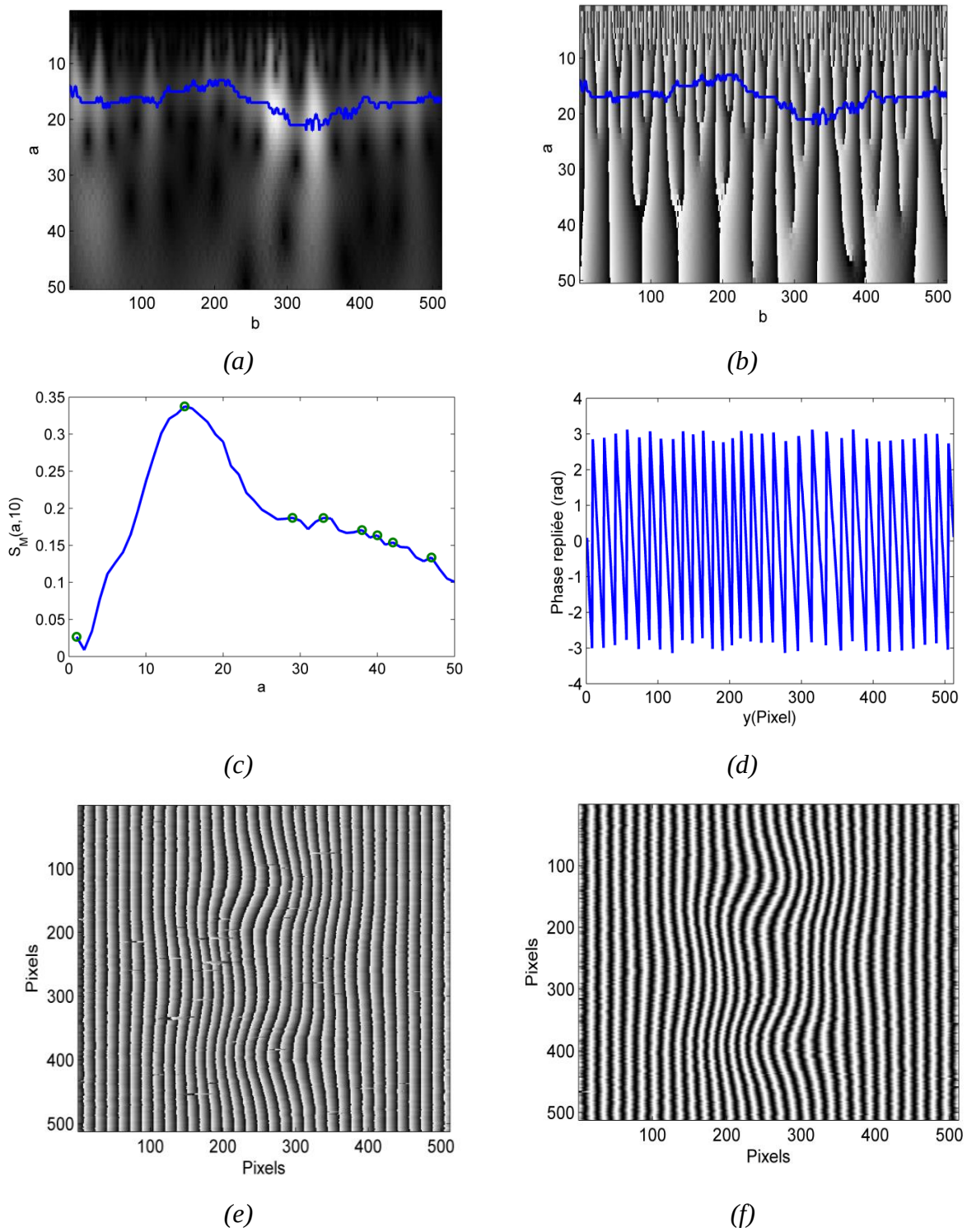


Figure III-11 : (a) Scalogramme d'amplitude. (b) Scalogramme des arguments. (c) - Profil d'évolution des échelles pour la colonne b=10 où les maxima sont indiqués par des motifs circulaires. (d) Profil de phase repliée de la ligne $z = 400$. *(e) Cartographie de la phase repliée (f) Image des franges recalculées.*

On commence par la détermination des candidats qui vont former la crête en utilisant la fonction $findpeaks$ de Matlab. Le résultat de cette opération appliquée sur l'exemple traité est donné sur le Tableau III-1 pour les coordonnées $(f(b), b)$ et sur le tableau III-2 pour les modules $S_M[f(b), b]$. Ensuite, on procède au calcul de la fonction coût pour chaque candidat pour dresser les tableaux (Tableau III-1et Tableau III-2). La dernière étape consiste à identifier le candidat et donc le point de la crête recherchée donnant lieu au coût minimum sur chaque colonne (voir les valeurs en gras et italique sur le Tableau III-3). L'ensemble des étapes nécessaires à la mise en œuvre de l'algorithme de Liu et illustré dans l'annexe (B).

	b = 1	b = 2	…	b =10	…	b = 256	…	b = 512
	4	4		1		1		9
	14	14		15		5		11
	16	16		29		8		17
	29	31		33		17		31
a	31	35		38		33		35
	34	40		40		36		37
	37	43		42		42		39
	43	47		47		47		
	46	4						

Tableau III-1: Coordonnées du candidat à la formation de la crête.

	b = 1	b = 2	…	b =10	…	b = 256	…	b = 512
	0.0659	0.0662		0.0265		0.0085		0.0439
	0.2227	0.2469		0.3375		0.0326		0.0449
	0.2257	0.2458		0.1871		0.0444		0.0556
	0.1614	0.1638		0.1869		0.2349		0.0153
a	0.1678	0.1544		0.1706		0.1445		0.0166
	0.1485	0.1286		0.1635		0.1395		0.0171
	0.1429	0.1334		0.1537		0.1086		0.0182
	0.1253	0.1194		0.1336		0.0881		
	0.1113	0.0662						

Tableau III-2 : Valeurs des maxima relatifs.

	b = 1	b = 2	…	b =10	…	b = 256	…	b = 512
	0	***0.0044***		172.2643		148.7055		140.3233
	0	0.0610		4.1511		132.6524		***140.3217***
	0	0.0604		18.7361		117.6514		104.3206
	0	0.0268		***2.7361***		***52.5457***		208.3381
a	0	0.9762		9.7454		143.1917		224.3379
	0	8.9835		13.7503		140.1938		228.3379
	0	0.0178		17.8173		160.2108		240.3379
	0	0.9857		30.8312		181.2259		
	0	-						

Tableau III-3 : Les coûts relatifs à l'ensemble des candidats pour former la crête.

III-3.4 Algorithme du Groupe de Marseille

A l'instar du scalogramme des modules, la deuxième représentation espace-fréquence de la transformée en ondelettes est aussi exploitable. Cette idée a été proposée pour la première fois par Delpar et al. en 1992 [93] et mise en œuvre sous la forme d'un algorithme qui porte le nom de l'algorithme du Groupe de Marseille. Ce dernier repose sur le fait que lorsque la fréquence $f = f_c/a$ de l'ondelette fille $\psi_{a,b}$ analysante est proche de la fréquence f_s du signal alors le taux de variation de la phase de la TO, $\partial\phi_{\psi(a,b)}/\partial b$, coïncide avec f pour les points du scalogramme des arguments appartenant à la crête [104]. Les étapes de cet algorithme sont illustrées dans l'annexe (B).

On initialise les calculs par une valeur d'échelle a_0. Une nouvelle fréquence f_1 est alors déterminée par le calcul de la quantité $\partial\phi_{\psi(a_0,b)}/\partial b$. La valeur d'échelle correspondante $a_1 = f_c / f_1$ est ensuite utilisée pour trouver $f_2 = \partial\phi_{\psi(a_1,b)}/\partial b$. On arrête les calculs lorsque l'erreur relative $|a_{i+1} - a_i| / a_i$ entre deux itérations successives i et $i+1$ devient inférieure à tolérance fixée. Une fois que $f_s\ (b)$ a été trouvée, l'algorithme se poursuit au point b +1 avec cette fois-ci $a_o = f_c / f_s\ (b)$. En prenant comme exemple l'image non bruitée (Figure III-2), l'estimation de la crête à l'aide de l'algorithme du Groupe de Marseille est illustrée sur la Figure III-12a représentant le scalogramme des arguments. Le tracé de cette crête estimée sur le scalogramme des modules permet de déceler un flagrant décalage par rapport à sa position visuellement marquée par une bande claire (voir Figure III-12b).

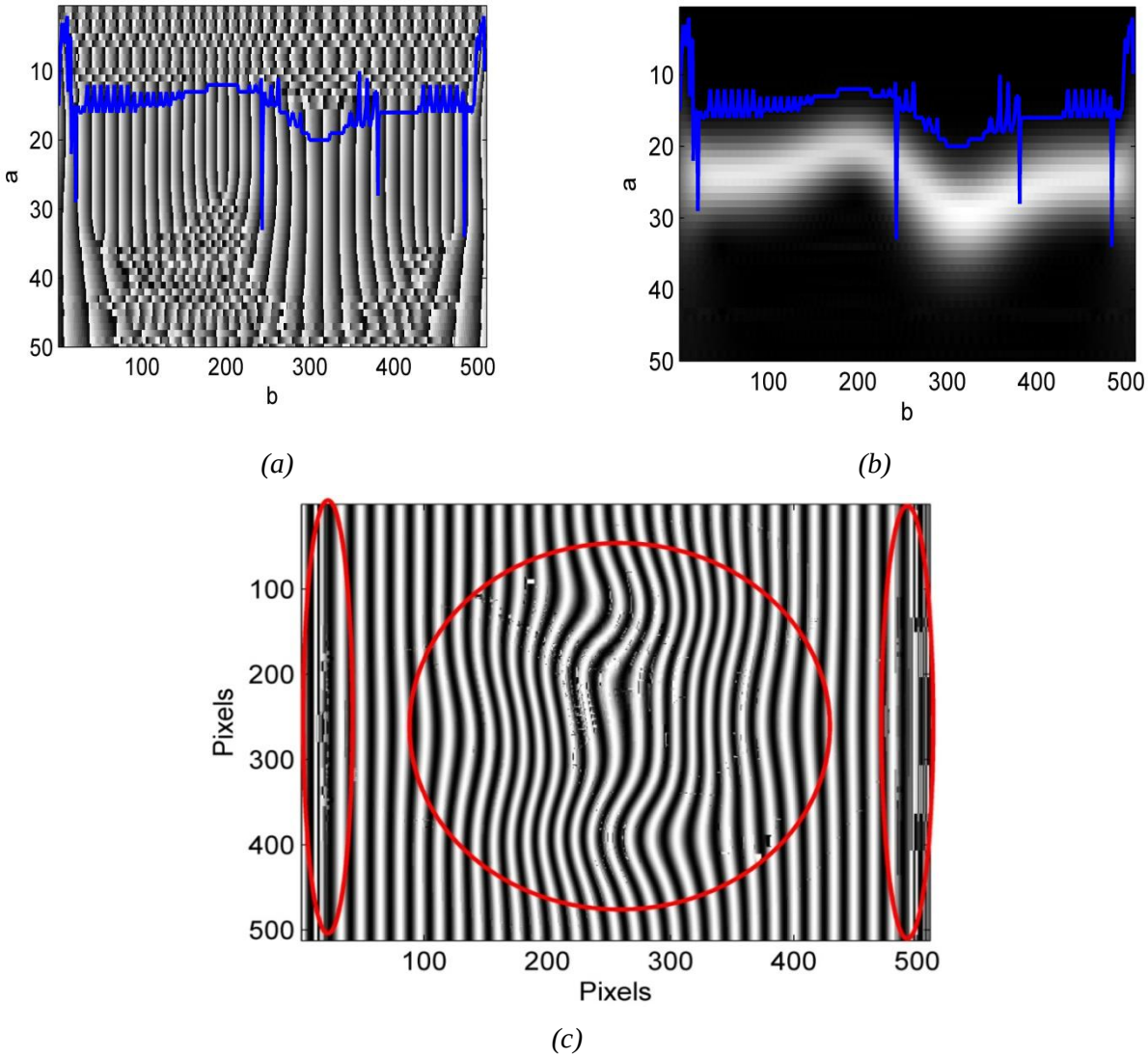


Figure III-12 : (a) Scalogramme des arguments de la TO. (b) Scalogramme des modules montrant la crête. (c) Image de franges reconstruites.

III-4 Tests de robustesse

Afin d'effectuer une comparaison quantitative entre les trois algorithmes de démodulationon, nous avons calculé le PSNR et déterminé la complexite temporélle de chaque algorithme. Ce test de robustesse sera réalisé sur des images de franges affectées à chaque fois par un bruit de speckle de taille de grains variant entre 1×1 et 5×5 pixels. La figure reporte le PSNR correspondant à chaque algorithme pour une image sans bruit et cinq images bruitées par un speckle de taille respectivement 1×1, 2×2, 3×3, 4×4 et 5×5. A titre comparatif,

les images de franges reconstruites sur la base d'un bruit 5×5 par les trois algorithmes sont illustrées sur la Figure III-14.

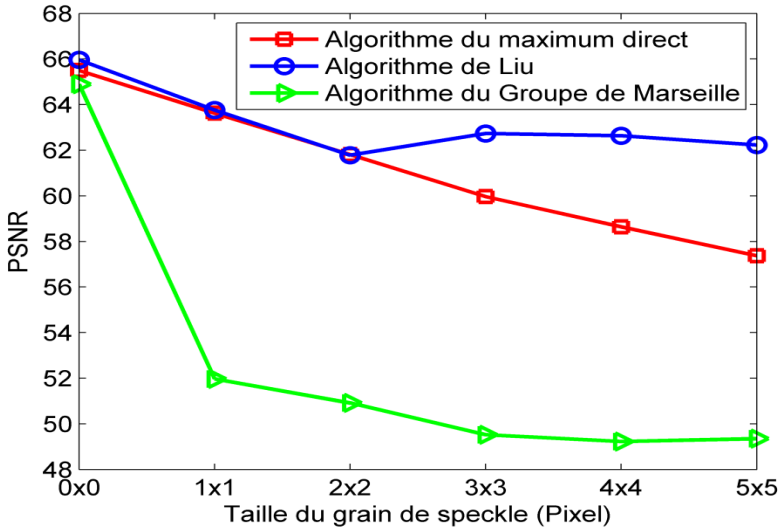


Figure III-13 : Évolution du critère de qualité le PSNR en fonction de la taille des gains de speckle pour les trois algorithmes d'estimation de la crête d'ondelettes.

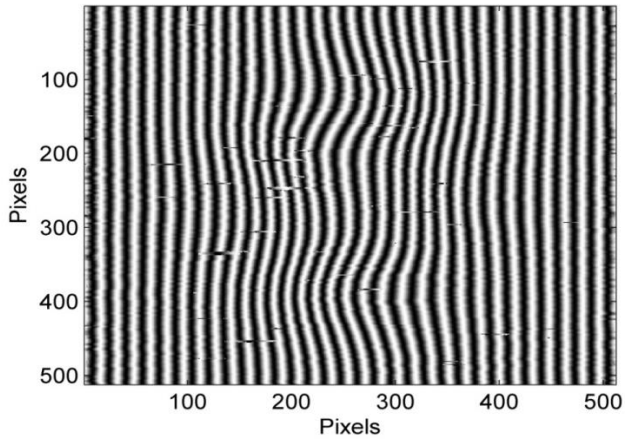


Image de franges reconstruite à partir de la phase repliée estimée par la détection de la crête selon l'algorithme du maximum direct PSNR = 57.37.

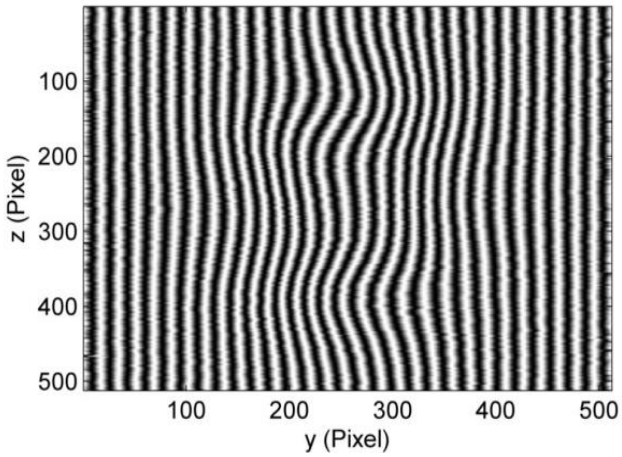


Image de franges reconstruite à partir de la phase repliée estimée par la détection de la crête selon l'algorithme de Liu PSNR = 62.4.

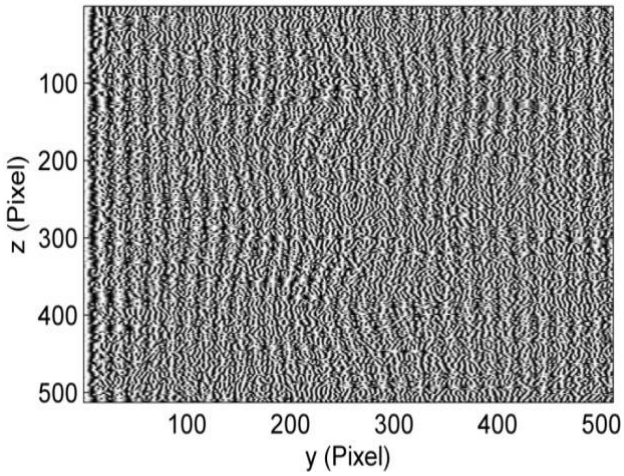


Image de franges reconstruite à partir de la phase repliée estimée par la détection de la crête selon l'algorithme du Groupe de Marseille PSNR = 49.35.

Figure III-14 : Les images reconstruites selon les trois algorithmes de détection de crête, respectivement, de haut en bas, l'algorithme de maximum direct, l'algorithme de Liu, et celui du groupe Marseille.

Nous avons vérifié que, quelque soit l'algorithme, lorsque la taille des gains de speckle augmente, le PSNR entre l'image originale et l'image estimée diminuera, mais selon différents enjeux. En regardant, la Figure III-13 on constate qu'en absence du bruit les trois algorithmes sont très comparables puisque leurs valeurs respectives du PSNR se trouvent dans la même fourchette. En présence du bruit, les valeurs du PSNR de chaque algorithme s'écartent démontrant ainsi une différence de sensibilité vis à vis du bruit. Par ailleurs, l'algorithme du maximum direct reste le plus facile à mettre en œuvre et le moins exigeant en mémoire et en temps de calcul. Il fournit également un bon résultat (voir la Figure III-14a) en comparaison avec l'algorithme du Groupe de Marseille. Ce dernier engendre une perte en PSNR plus marquée à mesure que la taille des grains de speckle augmente (voir la Figure III-13 et Figure III-14c). Il est aussi important de mentionner que cet algorithme a des inconvénients majeurs liés au choix de la tolérance et de la valeur d'initialisation a_0. En effet, les faibles valeurs de tolérance peuvent provoquer une divergence de l'algorithme (plus particulièrement en cas de bruit) ou alors dans les meilleurs des cas une augmentation du temps de calcul sans pour autant améliorer la précision des résultats. En plus, le choix de la valeur d'initialisation a_0 demeure un point faible de cet algorithme. En effet, la valeur de a_0 peut être responsable de l'apparition des effets de bord comme le montre la Figure III-12c. La solution que nous avons envisagée pour remédier à ce problème est d'initialiser les calculs par une valeur de a_0 relevée à partir du scalogramme des modules où la crête est nettement observable comme une bande claire. Ces inconvénients constituent un obstacle devant l'automatisation de l'algorithme du Groupe de Marseille en vue de l'extraction de la phase ou le filtrage des images en temps réel.

L'algorithme de Liu, reste sans doute le plus robuste comme le justifie l'évolution du PSNR (Figure III-13). L'algorithme du maximum direct donne un PSNR proche à celui obtenu par l'algorithme de Liu pour des tailles du grain de speckle inférieures ou égale à 2×2 pixels. Par contre, une nette différence apparait entre ces deux algorithmes lorsque la taille des grains de speckle dépasse 2×2 pixels. Ce même constat a été reporté par Liu et al. pour des images de franges de moiré [39]. Par ailleurs, l'algorithme de Liu n'est pas parfait. En effet, lorsque le bruit devient trop important le nombre de candidats pour former la crête optimale augmente, ce qui rend difficile la minimisation de la fonction coût et engendre une augmentation en

complexité temporelle. Bien entendu, ces deux inconvénients rendent difficile le traitement en temps réel des images de franges pour la métrologie thermique.

III-5 Conditionnement et choix de l'ondelette

Quelque soit l'algorithme adopté pour l'exploitation des scalogrammes de la TO, l'intervention de l'utilisateur reste minime et n'affecte que peu la qualité du résultat en comparaison avec la démodulation par la transformée de Fourier [105]. La supervision de l'algorithme se limite aux deux données suivantes :

- Le choix de l'intervalle des échelles $[a_{min}, a_{max}]$ ainsi que son pas d'échantillonnage Δa pour scanner aussi bien les basses et les hautes fréquences du signal analysé.
- Le choix de l'ondelette mère et ses paramètres.

Le choix de l'intervalle des échelles peut se faire par tâtonnement ou alors par le calcul préalable du spectre fréquentiel du signal afin de designer une bande de fréquences $[f_{min}, f_{max}]$ utile et de la lier à l'intervalle des échelles $[a_{min}, a_{max}]$. Etablir rigoureusement une telle relation peut se faire pour certaines ondelettes mères telles que l'ondelette de Morlet. En effet, cette ondelette a une fréquence centrale f_c bien explicite. Les échelles peuvent être alors exprimées avec exactitude en fonction de cette fréquence et celles du signal.

En ce qui concerne la détermination du pas adéquat d'échantillonnage Δa, le but recherché est d'optimiser d'une part le temps de calcul et d'autre part pour réduire l'effet d'aliasing dans la crête comme nous le verrons plus loin.

Pour le deuxième point, le choix de l'ondelette mère est déterminant. Vu le développement spectaculaire du traitement du signal par la théorie des ondelettes, on dénombre actuellement une diversité d'ondelettes mères analysantes [90]. Cependant, il n'existe pas de règle rigoureuse qui facilite le choix entre elles. Disons que l'approche générale consiste à en tester quelques unes pour décider de l'ondelette mère convenable au signal traité. Dans le cadre de cette thèse, nous avons fait le choix de tester sept ondelettes mères pour analyser les images de franges. Leurs expressions sont :

$$\psi_{Morlet}(x) = \frac{1}{(f_b^2\pi)^{1/4}} \exp(i2\pi f_c x) \exp\left(\frac{-x^2}{2f_b^2}\right) \tag{III.5}$$

$$\psi_{b-spline}(x) = \sqrt{f_b} \exp(i2\pi f_c x) \left[sinc\left(\frac{f_b x}{m}\right)\right]^m \tag{III.6}$$

$$\psi_{Shannon}(x) = \sqrt{f_b} \exp(i2\pi f_c x) \left[sinc(f_b x)\right] \tag{III.7}$$

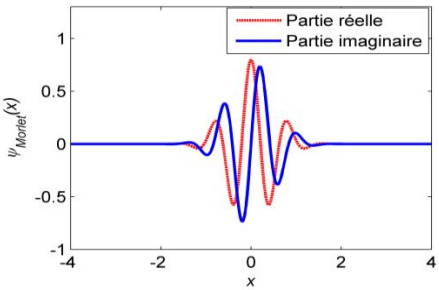
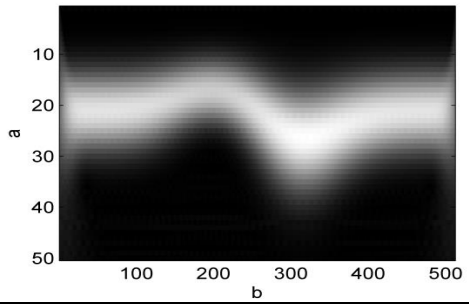
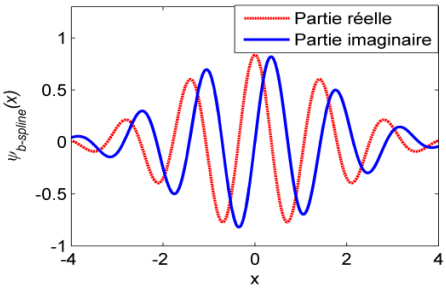
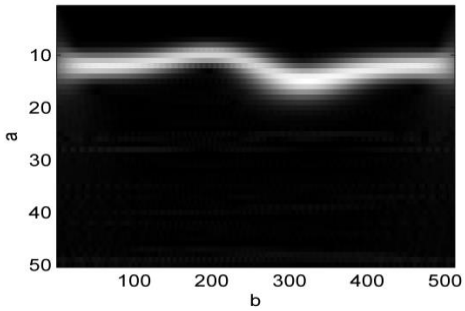
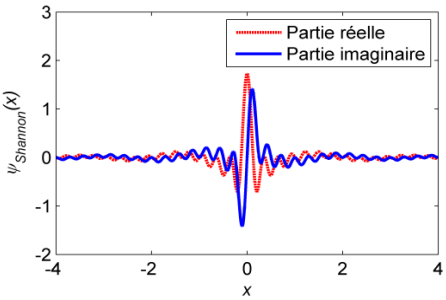
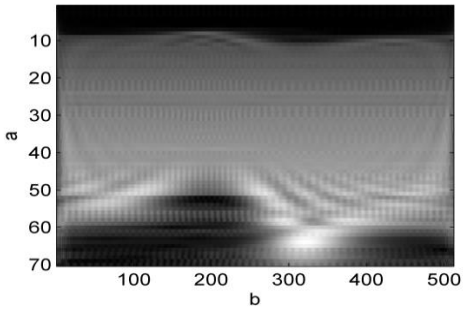
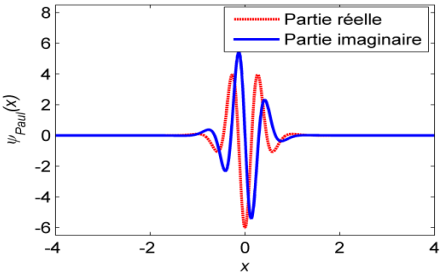
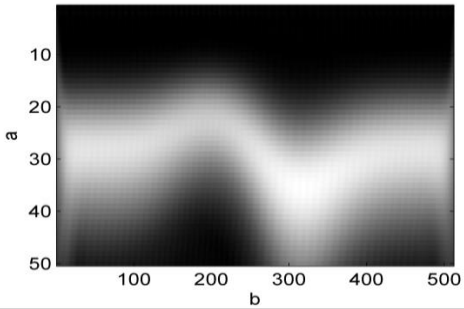
$$\psi_{Paul}(x) = \frac{2^n n!\,(1-ix)^{-(n+1)}}{2\pi\sqrt{\frac{(2n)!}{2}}} \tag{III.8}$$

$$\psi_{harmonic}(x) = \frac{exp(i2n\pi x) - exp(i2m\pi x)}{i2\pi(n-m)x} \tag{III.9}$$

$$\psi_{Cauchy}(x) = \frac{i}{(x+i)^{m+1}} \tag{III.10}$$

$$\psi_{Gaussian}(x) = \frac{d^p\left[C_p exp(-ix) - exp(-x^2)\right]}{dx^p} \tag{III.11}$$

Les allures de ces ondelettes et leurs scalogrammes des modules respectifs sont représentés sur le Tableau III-4. Nous avons comparé les résultats de chacune de ces ondelettes mères. Pour cela, nous avons considéré deux critères l'un qualitatif et l'autre quantitatif pour trancher sur ces ondelettes vis-à-vis de l'adéquation avec le signal traité. La netteté, l'appréciabilité ainsi que l'allure de la crête doivent être prises en considération par une simple visualisation du scalogramme des modules. Ensuite, nous comparons les PSNR entre l'image recalculée et celle de référence.

Nom et paramètres de l'ondelette analysante	**Profil des parties réelle et imaginaire**	**Scalogrammes des modules**
Ondelette de Morlet $f_c = 1.7$ $f_b = 0.5$		
Ondelette b-spline $f_c = 0.7 f_b = 0.7m = 5$		
Ondelette de Shannon $f_c = 3\ f_b = 2$		
Ondelette de Paul $n = 5$		

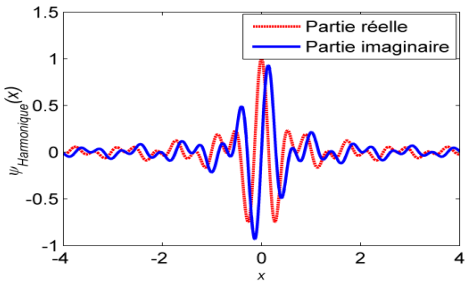
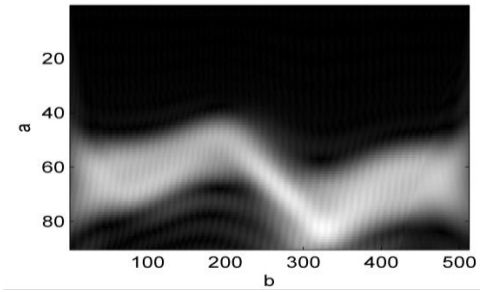
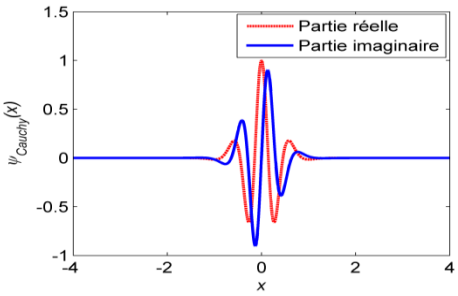
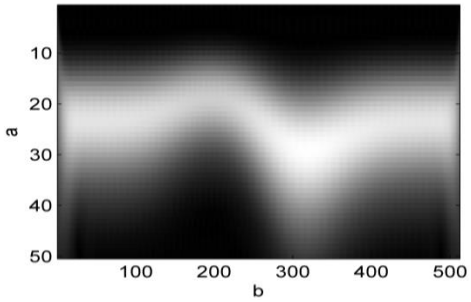
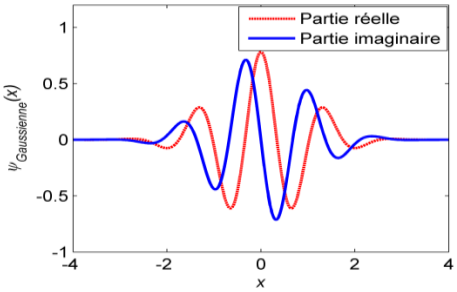
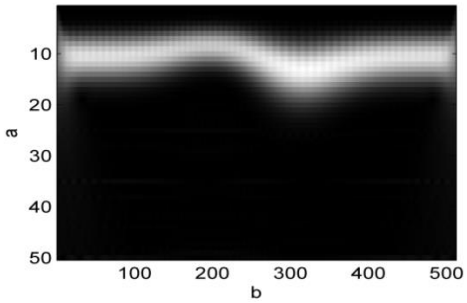
Ondelette harmonique $n = 3$ $m = 4.46$		
Ondelette de Cauchy $m = 18$		
Ondelette gaussienne $p = 8$		

Tableau III-4: Comparaison entre les différentes d'ondelettes mère utilisée pour le calcul la transformée en ondelette de la ligne d'intensité située à z= 400 pixels de l'image des franges théoriques de la Figure III-2 La première colonne montre le nom de l'ondelette mère et ses différents paramètres, la deuxième est réservée aux représentations graphiques de ses parties réelle et imaginaire, tandis que la dernière présente les scalogrammes des modules illustrant la crête.

III-6 Dépliement de la phase

III-6.1 Position du problème

Dans ce prolongement, ce n'est pas l'étude numérique ou la façon d'implémentation des algorithmes de dépliement qui nous préoccupe, mais plutôt l'analyse pratique du problème du dépliement (1-D ou 2-D). On se contentera d'un survole du principe de chaque algorithme en privilégiant la discussion sur la qualité des résultats qu'il fournit. On prendra en

considération l'aptitude de chaque algorithme à dérouler la phase d'une façon convenable et juste en s'affranchissant des singularités pouvant surgir par la présence d'obstacle (objets chauffants par exemple) ou des taches parasites en dehors des figures de franges (diffraction, aberrations optiques, speckle...). Nous citons aussi la singularité provenant notamment de l'addition d'une phase supplémentaire de référence mal choisie. Autrement dit, on examinera la capacité de l'algorithme à distinguer entre une « vraie discontinuité » et « une fausse discontinuité ». Nous verrons que certains algorithmes 2-D permettent de contourner ces singularités sans pour autant affecter la précision de déroulement de la phase.

III-6.2 Condition d'Itoh

Tous les algorithmes qui sont utilisés dans cette thèse sont fondés sur l'algorithme d'Itoh qui est local. L'approche la plus naturelle pour déplier la phase est de procéder pixel par pixel. Nous désignons par $\varphi_W(n)$ et $\varphi_U(n)$ les phases discrètes respectivement discontinue et continue et n le numéro de pixel. Pour supprimer les discontinuités de $\varphi_W(n)$, on doit rajouter ou soustraire 2π en chaque point donnant lieu à une variation brutale de la phase. Cependant, la phase continue peut elle-même contenir des variations brutales entre deux pixels suite aux problèmes de singularités évoquées précédemment. Ces variations risquent d'interférer avec l'algorithme de dépliement et d'altérer ainsi le résultat. La condition d'Itoh stipule qu'entre deux pixels adjacents, on ne peut pas passer d'une frange sombre à une frange brillante et vis versa. La relation suivante traduit la condition d'Itoh :

$$|\varphi_U(n) - \varphi_U(n-1)| < \pi \qquad \text{(III.12)}$$

La non vérification de la condition *(III.12)* est couramment désignée par la violation de la condition d'Itoh. Il convient de préciser une certaine absurdité de cette condition puisque en réalité la phase continue n'est pas connue à priori.

III-6.3 Algorithmes de dépliement

Pour l'étude du problème de dépliement, plusieurs algorithmes existent dans la littérature. Nous en avons sélectionné trois: Algorithme d'Itoh [3], de Goldstein [6] et d'Arevalillo Herráez [7].

III-6.3.1 Algorithme 1-D d'Itoh

On peut résumer l'algorithme d'Itoh en disant que le dépliement de phase s'obtient en intégrant la phase discontinue. Cette procédure peut s'effectuer numériquement à l'aide de l'algorithme suivant [106].

$$\varphi_U(n) = \varphi_W(n) + 2k(n)\pi \tag{III.13}$$

Avec :

$$k(n) = \begin{cases} 0, & si\ |\varphi_W(n) - \varphi_W(n-1)| \leq \pi \\ +1, & si\ [\varphi_W(n) - \varphi_W(n-1)] > -\pi \\ -1, & si\ [\varphi_W(n) - \varphi_W(n-1)] < \pi \end{cases} \tag{III.14}$$

L'algorithme *(III.14)* est encodé sous Matlab par la fonction « $unwrap$ » selon la technique d'Anderson [107]. Le chemin de dépliement de la phase selon cet algorithme est unique et long favorisant ainsi la propagation des erreurs dues aux bruits évoqués précédemment.

$\varphi_W(n)$	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	0	0.1000	0.2000
$\varphi_W(n)_{bruité}$	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	3.9000	0	0.1000	0.2000
$k(n)$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\varphi_U(n)$	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	3.9000	6.2832	6.3832	6.4832

L'algorithme d'Itoh peut s'exécuter en 2-D en faisant le dépliement tout d'abord horizontalement. La phase obtenue est déroulée ensuite dans le sens vertical. Dans cette variante, on peut inverser le sens de dépliement initial (horizontal ou vertical).

III-6.3.2 Algorithme 2-D de Goldstein

Le principe de base utilisé par cet algorithme reste le même que celui d'Itoh mais avec une approche bidimensionnelle développée par Goldstein et al. en (1988) [30]. La difficulté réside dans le fait qu'en 2-D on est face à plusieurs chemins. Ainsi, suivant le chemin de déroulement suivi, le résultat final ne sera pas toujours le même. Aussi, il est nécessaire de trouver un artifice mathématique ou autre afin d'éviter toute propagation d'erreur lors du dépliement.

En résumé, l'algorithme de Goldstein part d'un point initial et procède par intégration de la phase repliée sur des chemins bien choisis faisant appel à la notion des résidus dont le pseudo-code est donné dans le livre de Ghiglia et Pritt [108]. Si on désigne par $\varphi_W(n,m)$ la phase discrète bidimensionnelle, les résidus se calculent de la manière suivante en se référant à la Figure III-15:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \varphi_W(n+1,m) - \varphi_W(n,m) \\
\Delta_2 &= \varphi_W(n+1,m+1) - \varphi_W(n+1,m) \\
\Delta_3 &= \varphi_W(n,m+1) - \varphi_W(n+1,m+1) \\
\Delta_4 &= \varphi_W(n,m) - \varphi_W(n,m+1)
\end{aligned} \tag{III.15}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Delta_4 & & \\
 & \varphi_W(m,n) & \rightarrow & \varphi_W(m,n+1) & \\
\Delta_1 & \uparrow & & \downarrow & \Delta_3 \\
 & \varphi_W(m+1,n) & \leftarrow & \varphi_W(m+1,n+1) & \\
 & & \Delta_2 & &
\end{array}$$

Figure I-1 : Calcul des résidus.

La Figure III-15 montre comment se fait le calcul des résidus.

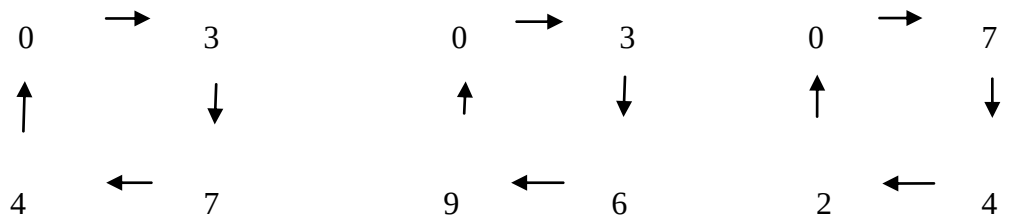
$$\Sigma = E\left[\frac{\sum_{j=1}^{4}\Delta_j}{2\pi}\right] \tag{III.16}$$

Le nombre Σ appelé résidus de charge ne peut être que 0, 1, ou -1. Pour les passionnés de la rigueur mathématique, ils trouveront la démonstration de ce résultat dans la référence [6].

L'idée de base de l'algorithme de Goldstein est la suivante : lorsque |Σ| est égal à 1, entre les quatre pixels concernés il y a un bruit qui risque d'affecter la phase si on le prend en considération dans la procédure de dépliement. Des barrières doivent être placées sur le chemin de dépliement de telle manière à éviter les pixels donnant lieu à ces singularités. Autrement dit, on doit choisir le chemin de dépliement dans le sens où le résidu Σ est nul. La

disposition de ces barrières doit se faire en cherchant la configuration qui minimise la longueur totale des ces barrières. Les barrières représentent sur la cartographie de la phase les segments de pixels «défectueux » que l'on doit éviter dans la procédure de dépliement. Cette dernière se fera tout simplement par application de l'algorithme d'Itoh.

Les résidus, sont associés aux endroits de l'image où la phase repliée varie fortement et brutalement entre deux pixels voisins. Cette variation ne peut être liée qu'au bruit local de toute sorte qui se manifeste par une incohérence avec les valeurs de la phase aux pixels voisins. Considérons chacun des trois ensembles des quatre pixels suivants:



Dans le premier groupe, la somme des différences calculées dans le sens des aiguilles d'une montre est de 0. Dans ce cas-ci, nous ne sommes donc pas en présence de bruit local puisque le nombre Σ est nul. Dans le deuxième groupe, le nombre Σ est de +1, ce qui montre la présence d'une erreur locale appelée résidu positif. Le dernier groupe conduit à un résidu de -1 montrant ainsi la présence d'une erreur locale associée à un résidu négatif. Lorsqu'un résidu positif ou négatif est introduit dans un ensemble de données, celui-ci se propage et procure des résultats de dépliement tout à fait faux. Afin d'éviter cette propagation d'erreur, il ne suffit pas d'exclure les pixels associés au résidu positif et négatif, mais de relier chaque résidu positif (+1) à un résidu négatif (-1) par une barrière. Lors du dépliement on choisit un parcours d'intégration qui ne traverse pas les barrières. (L'annexe B(Exemple d'application de l'algorithme de Goldstien) comprend un exemple illustratif du fonctionnement de cet algorithme).

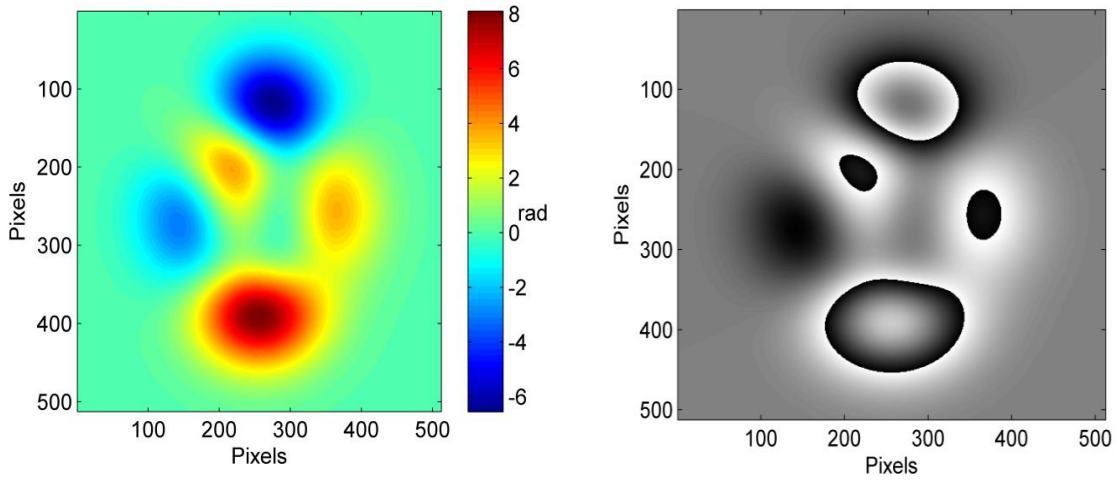
III-6.3.3 Algorithme 2-D d'Arevalillo Herráez

Cet algorithme est basé sur le découpage de la cartographie représentant la distribution de la phase repliée et l'utilisation récursive de l'algorithme d'Itoh. Le principe est relativement simple. Il consiste premièrement à diviser l'image de la phase repliée en quatre imagettes carrées, puis les déplier indépendamment et finalement de les raccorder. Pour le raccordement

des imagettes, on applique l'algorithme d'Itoh aux pixels formant les frontières séparant deux imagettes dépliées contigües. Cette procédure est répétée jusqu'à atteindre des imagettes élémentaires de taille 2×2 pixels. Le dépliement d'une imagette élémentaire est très simple. On choisit un des quatre pixels comme point de départ et on applique l'algorithme d'Itoh aux pixels voisins dans un sens cyclique. Dans l'annexe (B), on trouvera le schéma de l'algorithme d'Arevalillo Herráez.

III-7 Résultats du dépliement

Le test des trois algorithmes discutés précédemment sera effectué sur la phase bidimensionnelle (Figure III-16) dont l'expression est donnée par (III.1) et qui a été repliée en utilisant la fonction $arctan2(x)$ de Matlab.



(a) *(b).*

Figure III-16 : (a) Phase non repliée (b) Phase repliée en calculant $arctan2(x)$ de la phase non repliée.

III-7.1 Test sans violation de la condition d'Itoh

Le Tableau III-5 résume le résultat des tests des trois algorithmes en terme d'erreur quadratique moyenne σ. On constate que si le signal à déplier varie lentement, au sens où les différences de phase entre deux pixels contigus dans une direction sont inférieures à π, les trois algorithmes parviennent à détecter dans la phase repliée les discontinuités d'origine mathématique comme le justifie la faible valeur de $\sigma \approx 0$ dans le Tableau III-5.

	Algorithme d'Itoh		***Algorithme de Goldstein***	***Algorithme d'Arevalillo Herráez***
	1-D	***2-D***		
$\boldsymbol{\sigma}$	3.910^{-16}	3.210^{-16}	7.710^{-3}	7.510^{-8}

Tableau III-5 : Erreurs quadratiques moyennes résultant de l'application des trois algorithmes pour déplier la phase de la Figure III-16 b.

III-7.2 Test avec violation de la condition d'Itoh

Afin de réaliser une telle situation, on a ajouté à la phase initiale une phase de référence de profil linéaire. Le résultat de cette addition est représenté sur la Figure III-17. Pour mieux apprécier l'effet de cet ajout, nous avons considéré une ligne de l'image de la phase et appliqué à titre d'exemple l'algorithme d'Itoh 1-D pour déplier la phase. On constate d'après les résultats représentés par la Figure III-18 que le fait d'ajouter une droite de pente $2\pi\nu_0$ trop forte violera la condition d'Itoh et fait apparaitre des discontinuités dans la phase dépliée. Ceci, apparait nettement sur la Figure III-20 qui donne la cartographie 2-D de la phase dépliée par l'algorithme d'Itoh 1-D. Le Tableau III-6 compare les erreurs et les temps de calcul pour dérouler la phase de la Figure III-16 par les trois algorithmes étudiés. La version 2-D de l'algorithme d'Itoh permet d'améliorer considérablement la qualité de dépliement par rapport à la version 1-D. L'utilisation de l'algorithme d'Arevalillo Herráez reste la plus précise avec un temps de calcul relativement court. Par contre l'algorithme de Goldstein conduit dans ce cas à un résultat moins précis que celui de l'algorithme d'Itoh 2-D. Ceci peut s'expliquer par le fait que la phase simulée a uniquement des sauts dans la direction horizontale. Ainsi, les résidus peuvent s'annuler deux à deux conduisant à très peu de barrières pour dérouler la phase correctement.

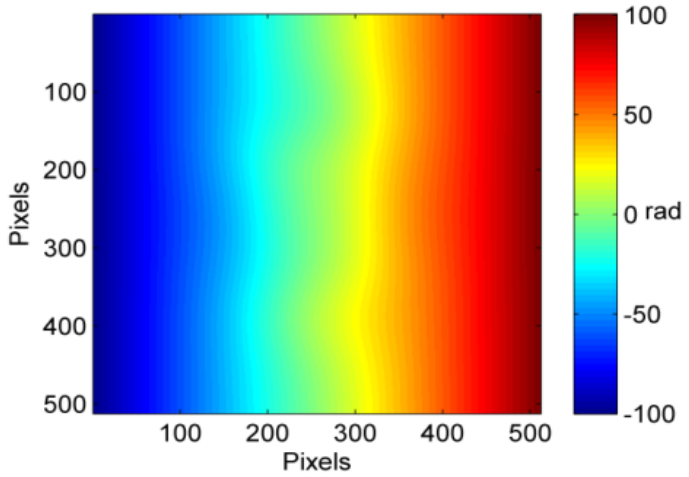


Figure III-17 : Phase non repliée.

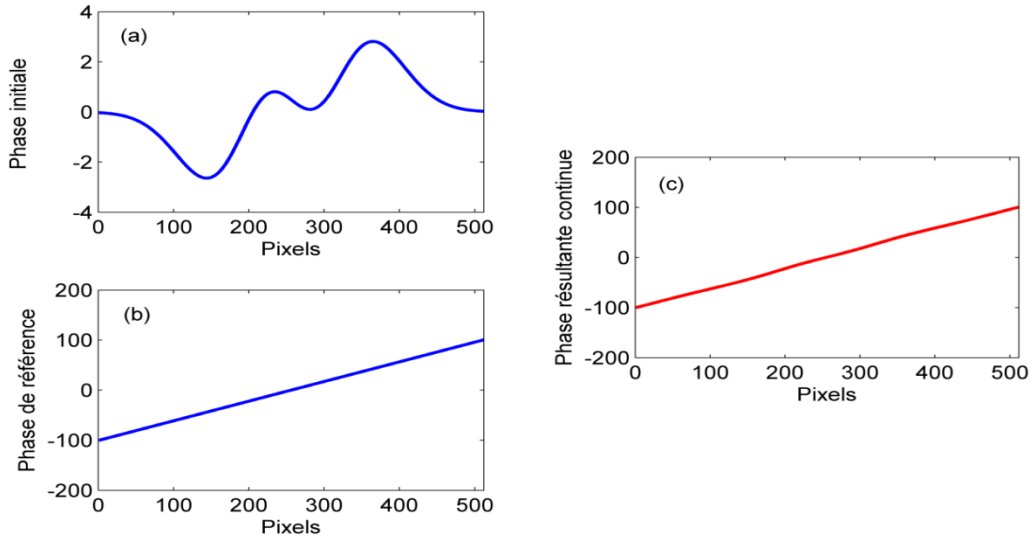


Figure III-18 : (a) Phase initiale (b) phase linéaire (c) phase résultante.

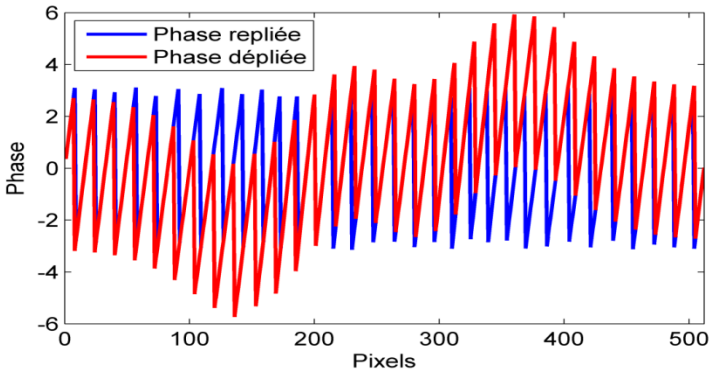


Figure III-19 : Phase dépliée par l'algorithme d'Itoh qui ressemble a la phase repliée.

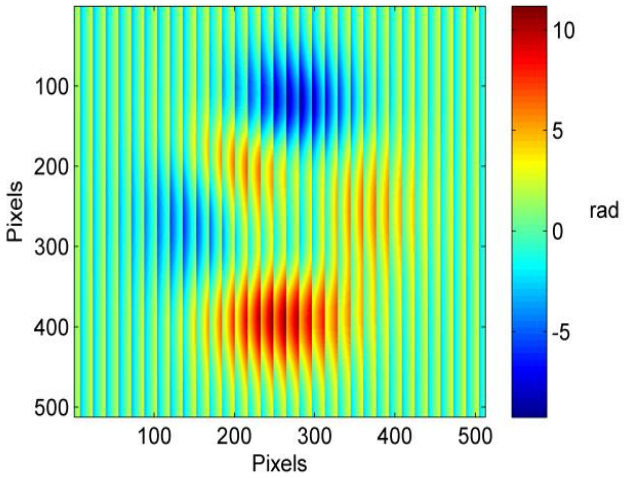


Figure III-20 : Image de la phase dépliée par l'algorithme Itoh 1-D

	Algorithme d'Itoh		***Algorithme de Goldstein***	***Algorithme d'Arevalillo Herráez***
	1-D	***2-D***		
$\boldsymbol{\sigma}$	115.9	3.9	7.2	0.4
Temps de calcul	10^{-4}	$1s$	$67s$	$1.2s$

Tableau III-6 : Valeurs de l'écart quadratique moyen et temps d'exécution sur un PC portable équipé d'un microprocesseur Core ™ 2 Duo de fréquence 2Ghz et de mémoire SDRAM de taille 4 Go.

III-8 Conclusion

Ce chapitre clôt l'inventaire de notre boite à outils pour l'analyse des images de franges. Les algorithmes destinés à ce propos ont été expliqués et détaillés en les appliquant sur une image de franges synthétisées à partir d'une expression analytique.

Nous avons attribué une large part aux algorithmes d'estimation de la crête d'ondelette. Ceci nous a mené à expliciter d'une manière comparative trois algorithmes d'estimation de crête: l'algorithme du maximum direct, l'algorithme de Liu et finalement l'algorithme du groupe de Marseille. Le calcul du critère de qualité PSNR révèle que l'algorithme de Liu est le plus robuste des deux autres mais cela se fait au détriment du temps de calcul. Cet inconvénient nous a conduit à adopter l'algorithme du maximum direct qui réalise à notre sens un compromis entre précision et complexité algorithmique que ce soit temporaire ou spatiale.

En ce qui concerne l'étape de dépliement de la phase, nous avons présenté d'une manière comparative trois algorithmes à savoir : l'algorithme d'Itoh 1-D et 2-D, l'algorithme de Goldstein 2-D et l'algorithme Herráez 2-D. Cette comparaison montre que l'algorithme de Herráez procure de très bons résultats. C'est ce dernier algorithme qui sera adopté pour la suite de ce travail.

Chapitre IV : Résultats d'analyse des images de franges numériques

IV-1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les différents enjeux gouvernant l'analyse des figures de franges synthétisées à partir d'une expression analytique. Dans le présent chapitre, nous proposons de tester les approches élaborées sur des images numériques issues des deux techniques optiques déjà citées. Le but est de trouver l'approche appropriée à nos images et de cerner l'ondelette mère optimale pour notre traitement. Dans ce contexte, nous proposons un paradigme de simulation souvent utilisé dans les stratégies numériques. Il s'agit de montrer comment sont générés les images et les profils de test qui vont être adoptés par la suite pour juger l'applicabilité et la performance des algorithmes que nous avons développés.

Nous présentons nos résultats de traitement que procure l'application des deux approches à savoir l'estimation de la phase et l'estimation des fréquences. Puis, dans le but d'obtenir l'ondelette mère optimale pour le traitement des images optiques, nous testons la faculté de sept ondelettes à surmonter le bruit de speckle affectant nos images de franges.

IV-2 Génération des profils numériques

Dans cette section, nous mettons en exergue d'une manière plus détaillée comment sont générées l'ensemble des images et des profils de test, dans des cas physiques concrets en utilisant la métrologie thermique par interférométrie holographique d'une part, et par déflectométrie de moiré d'autre part.

IV-2.1 En interférométrie holographique

IV-2.1.1 Calcul de l'ordre d'interférence

Considérons un solide de forme cylindrique de rayon $30\,mm$ et de hauteur $30\,mm$, chauffé à la température de $350\,°C$ suspendu dans l'air à la température $T_0 = 20\,°C$ et d'indice de réfraction n_0 (voir Figure IV-1). Les échanges thermiques entre le cylindre et l'air

environnant vont donner lieu à des gradients de température et donc d'indice de réfraction qui sont à la base de l'apparition des franges d'interférence.

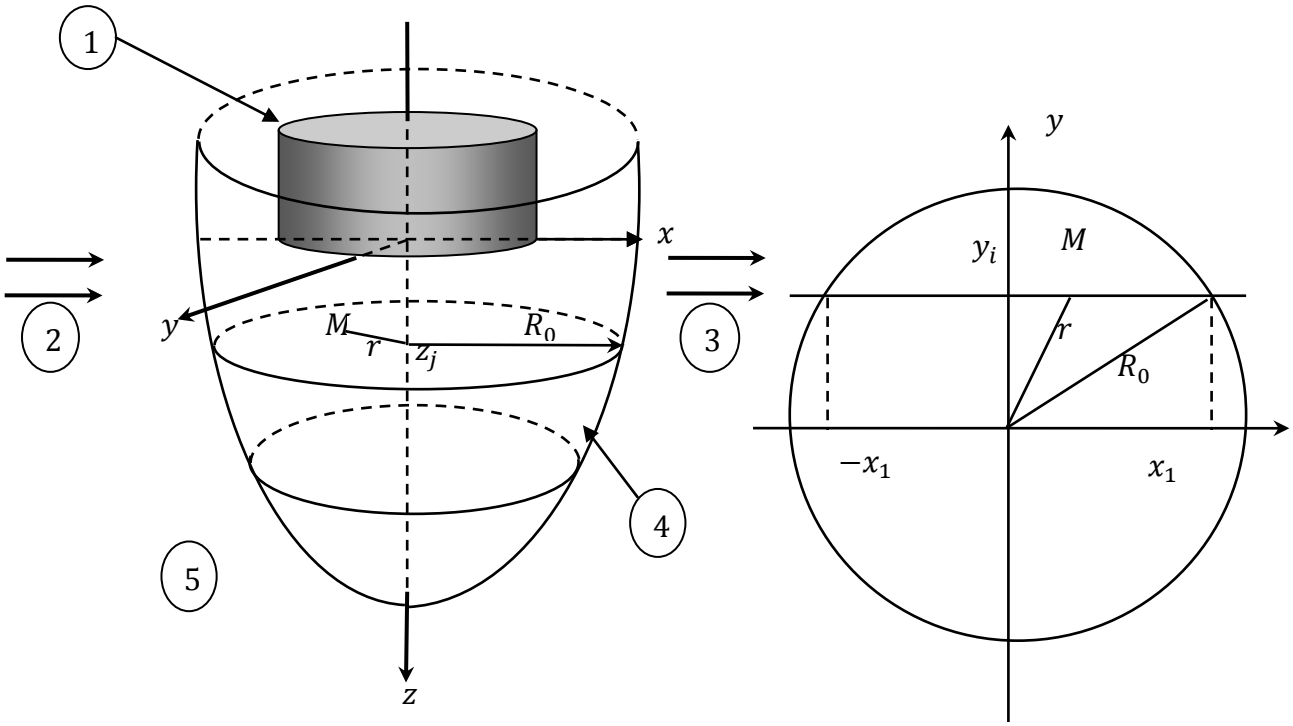


Figure IV-1 : Champ de température axisymétrique au dessous d'un cylindre chaud.(1) cylindre chauffé ; (2) et (3) faisceau d'étude ; (4) frontière de la région perturbée thermiquement ; (5) région à la température ambiante.

En principe, on peut simuler un interférogramme ou un déflectogramme à partir de n'importe quelle distribution de température. Il suffit simplement de se donner une expression mathématique de la température sous forme d'une fonction à deux variables $T(r, z)$. Cependant, la complication de la géométrie du système décrit par la Figure IV-1 rend difficile le choix d'une expression valable pour tout point du volume entourant le cylindre. En revanche, cette difficulté peut être surmontée en simulant l'écoulement et le transfert de chaleur par la résolution numérique des équations de Navier-Stokes et de l'énergie [15]. La distribution du champ de température obtenue dans ce cas est présentée dans la Figure IV-2.

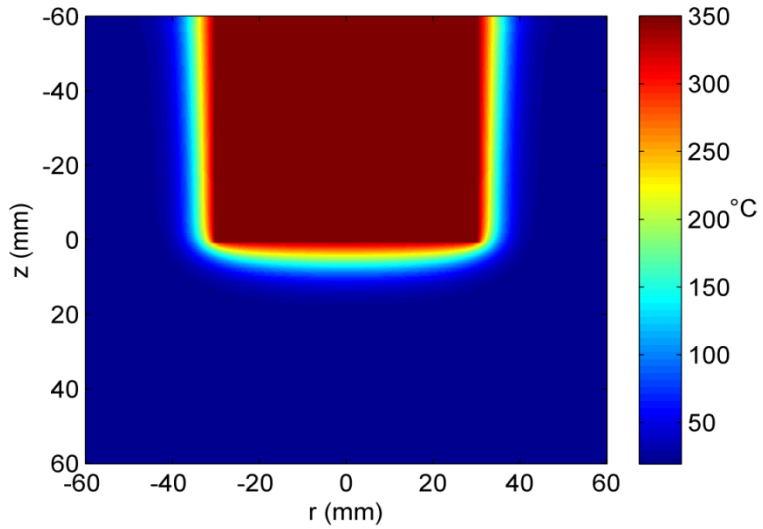


Figure IV-2 : Champ de température autour d'un cylindre chauffé à $350\ °C$ *dans l'air.*

En partant de cette distribution de température $T(r,z)$ représentée dans la Figure IV-2, on peut déduire la distribution de la variation d'indice de réfraction $n(r,z)$ (Figure IV-3) dans le milieu en appliquant la loi des gaz parfaits et la formule de Gladstone-Dale pour l'air [16]. Par conséquent nous aurons:

$$f(r,z) = n(r,z) - n_0 = \frac{KPM}{R}\left(\frac{1}{T(r,z)} - \frac{1}{T_0}\right) \qquad \text{(IV.1)}$$

avec :

$M = 2.88\ 10^{-4}\ kg.mol^{-1}$, masse molaire de l'air.

$P = 10^5 Pa$, pression

$R = 8.314\ J.mole^{-1}.K^{-1}$, constante des gaz parfaits.

$K = 2.256\ 10^{-4}\ m^3.kg^{-1}$, constante de Gladstone-Dale d'air pour $\lambda = 0.6328\ \mu m$.

r et z sont les coordonnées cylindriques.

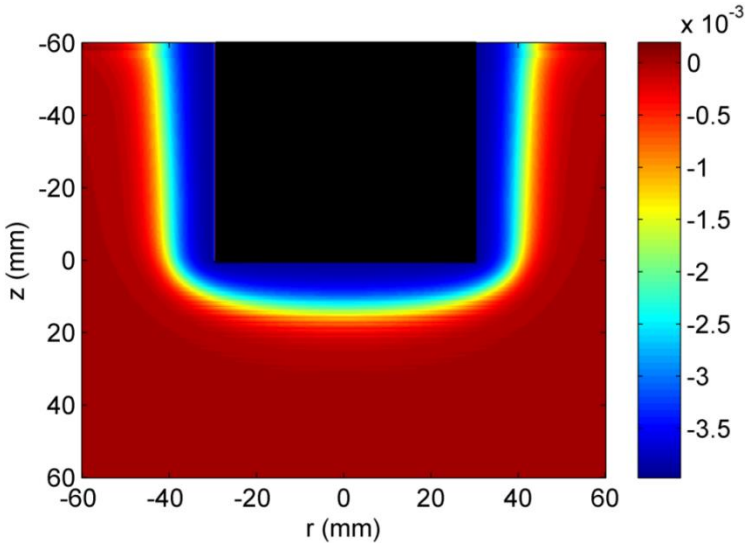


Figure IV-3: Variation de l'indice de réfraction de l'air autour d'un cylindre chauffé à $350°C$.

A partir de la distribution de la variation de la fonction d'indice de réfraction $f(r,z)$, on peut remonter à la distribution de l'ordre d'interférence $S(y,z)$ dans le milieu en calculant l'intégrale d'Abel suivante:

$$S(y,z) = \frac{2}{\lambda} \int_{y}^{R_0(z)} \frac{f(r,z)}{\sqrt{r^2 - y^2}}\, r dr \qquad \text{(IV.2)}$$

où $R_0(z)$ est le rayon de la section de cote z où l'indice est variable (voir Figure IV-1).

L'obtention de la distribution de l'ordre d'interférence $S(y,z)$ par la transformée d'Abel (IV.2) ne peut être calculée que numériquement sur un découpage de chaque section de cote z_j avec un pas uniforme Δr comme le montre la Figure IV-4. Pour chaque point $(y_i\,, z_j)$, l'intégrale précédente peut se décomposer facilement en un système algébrique d'équations linéaires si on suppose que la fonction $f(r,z_j)$ est constante sur chaque intervalle d'intégration $[r_k, r_{k+1}]$. Ainsi, l'expression finale de la distribution discrète de l'ordre d'interférence s'écrit :

$$S(y_i, z_j) = \frac{2\Delta r}{\lambda} \sum_{k=0}^{N} B(i,k) f(r_k, z_j) \qquad \text{(IV.3)}$$

où N désigne le nombre de pas selon la direction (or) tel que $r_N = y_N = R_0$. Les éléments de la matrice B associée au système sont définis par:

$$B(i,k) = \begin{cases} \sqrt{(k+1)^2 - i^2} - \sqrt{k^2 - i^2}, & k \geq i \\ 0, & si\ non \end{cases} \quad \text{(IV.4)}$$

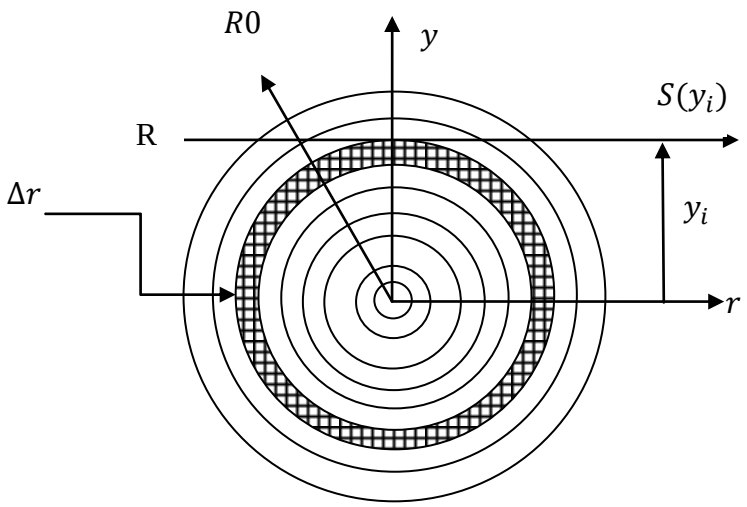


Figure IV-4: Découpage uniforme d'une section de cote z_j *en anneaux d'épaisseur* Δr.

Nous avons donc utilisé l'expression (IV.3) obtenue par une discrétisation simple de la transformée d'Abel pour calculer la distribution de l'ordre d'interférence en chaque point d'une image 512×512 pixel. Nous avons représenté sur la Figure IV-5 la cartographie correspondante de la phase.

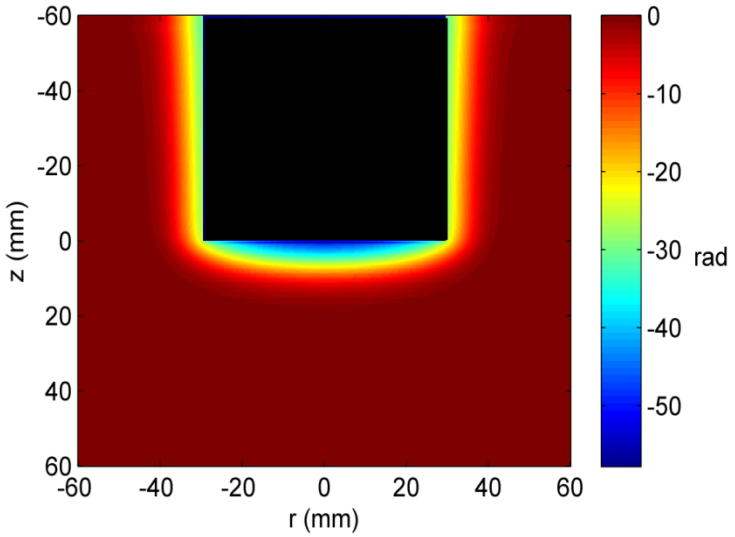


Figure IV-5 : Cartographie de l'ordre d'interférence multiplié par 2π.

IV-2.1.2 Image des franges

Une fois que l'on dispose de la distribution discrète de l'ordre d'interférence en chaque point (y_i, z_j), l'intensité lumineuse est calculée par :

$$I(y_i, z_j) = cos[\varphi(y_i, z_j)] \tag{IV.5}$$

avec $i = 0, 2, \dots, 511 \quad et \ j = 0, 2, \dots, 511$

Le déphasage $\varphi(y_i, z_j)$ peut être divisé en deux composantes, à savoir celle due au système optique ainsi que celle due à la température :

$$\varphi(y_i, z_j) = 2\pi\upsilon_0 t + 2\pi S(y_i, z_j) \tag{IV.6}$$

où υ_0 est la fréquence de la porteuse qui dépend du nombre de franges et de la taille de l'interférogramme. Comme le montre les Figure IV-6 et Figure IV-7, le choix de l'orientation des franges de référence se fait selon la variable t (horizontale $t = z_j$ ou verticale $t = y_i$). Si $\upsilon_0 = 0$, l'image est qualifiée de teinte plate où le déphasage est uniquement d'origine thermique (Figure IV-8). Ce cas de figure permet de délimiter à la zone où la température est variable.

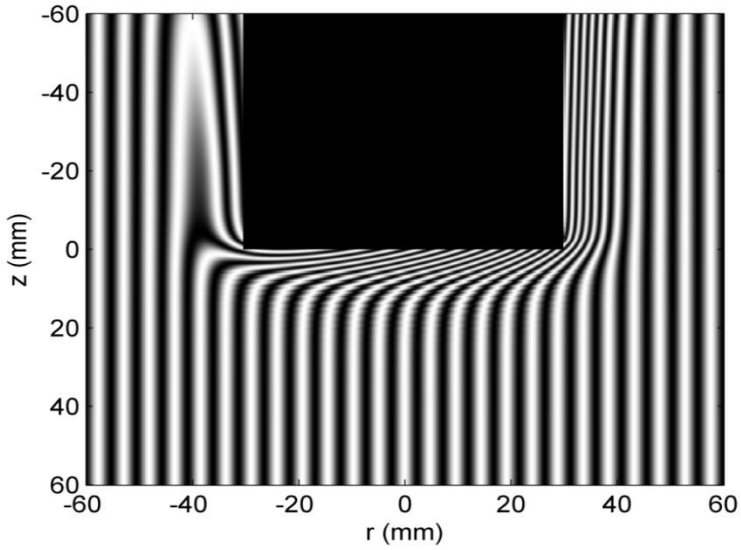


Figure IV-6 : Interferogramme avec franges de référence verticales ici $\upsilon_0 = 0.05$.

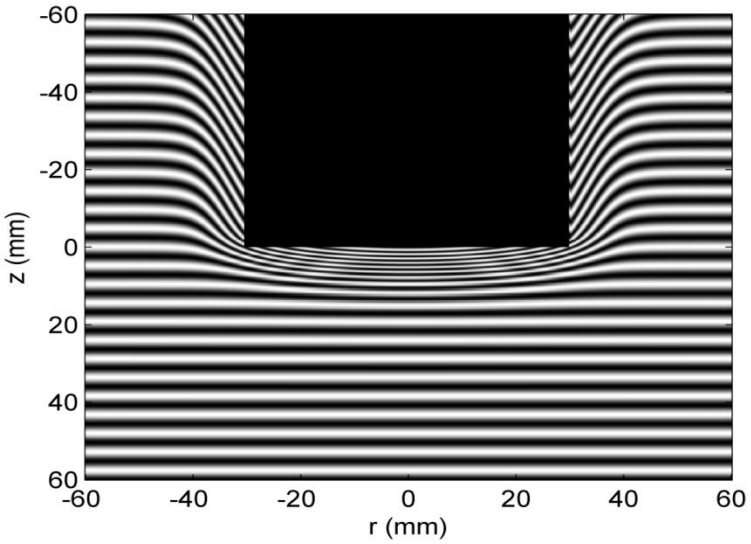


Figure IV -7 : Interferogramme avec franges de référence horizontales ici $\upsilon_0 = 0.05$.

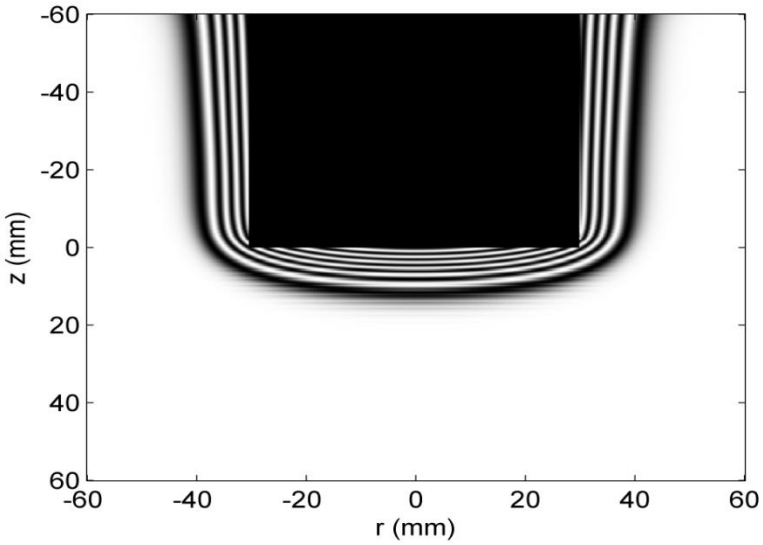


Figure IV -8 : Interférogramme sans franges de référence (teinte plate).

Les images de franges (Figure IV-6 et Figure IV-7) vont servir comme données pour la Figure IV-5) va être considérée comme référence pour juger la précision des procédures d'analyse des franges.

IV-3 Traitement des images simulées

L'application est destinée aux images d'origine interférométrique. Ce choix n'est pas arbitraire. Les franges relatives aux images interférométriques présentent plus de distorsion des franges avec des tailles variables en comparaison avec les franges de moiré [20]. On

conçoit alors que le signal interférométrique est susceptible de présenter des portions non stationnaires qui justifient notre recours au traitement par TO au lieu de l'approche classique par FFT. A fin de tester la robustesse de nos algorithmes de traitement, nous les appliquerons respectivement sur des figures de franges sans bruit, puis sur des images affectées sévèrement par un bruit de speckle.

IV-3.1 Test de l'approche par estimation de la phase

Dans cette approche, l'extraction de la phase, sera faite conjointement à l'extraction de la crête d'ondelette par l'algorithme du maximum direct, avec des valeurs d'échelle variant de 1 à 50 et un pas de 1. Le dépliement sera effectué par l'algorithme d'Arevalillo Herráez qui a montré une grande fiabilité d'après l'étude faite dans le chapitre précédent.

IV-3.1.1 Procédure de traitement

Les images (a) et (b) de la Figure IV-9 représentent deux interférogrammes de taille 512×512 simulés respectivement à la température $20°C$ et à la température $350\ °C$. La procédure du traitement s'effectue de la manière suivante : **1)** On calcule la transformée en ondelette de chaque ligne horizontale des images (a) et (b) de la Figure IV-9. **2)** On estime la crête d'ondelette pour chaque ligne par l'algorithme du maximum direct qui rappelons le n'utilise que le scalogramme de module de la TO. **3)** On identifie les coordonnées de la crête pour l'évaluation de la phase à partir du scalogramme des arguments de la TO qu'est une phase repliée (Figure IV-9c et d). **4)** On procède au dépliement de la phase en supprimant les discontinuités par application de l'algorithme d'Arevalillo Herráez donnant ainsi comme deux images relatives chacune aux interferogrammes (a) et (b) de la Figure IV-9. **5)** Finalement, une différence entre ces deux images ainsi obtenues procure l'information de la phase représentée par l'image (e) de la Figure IV-9.

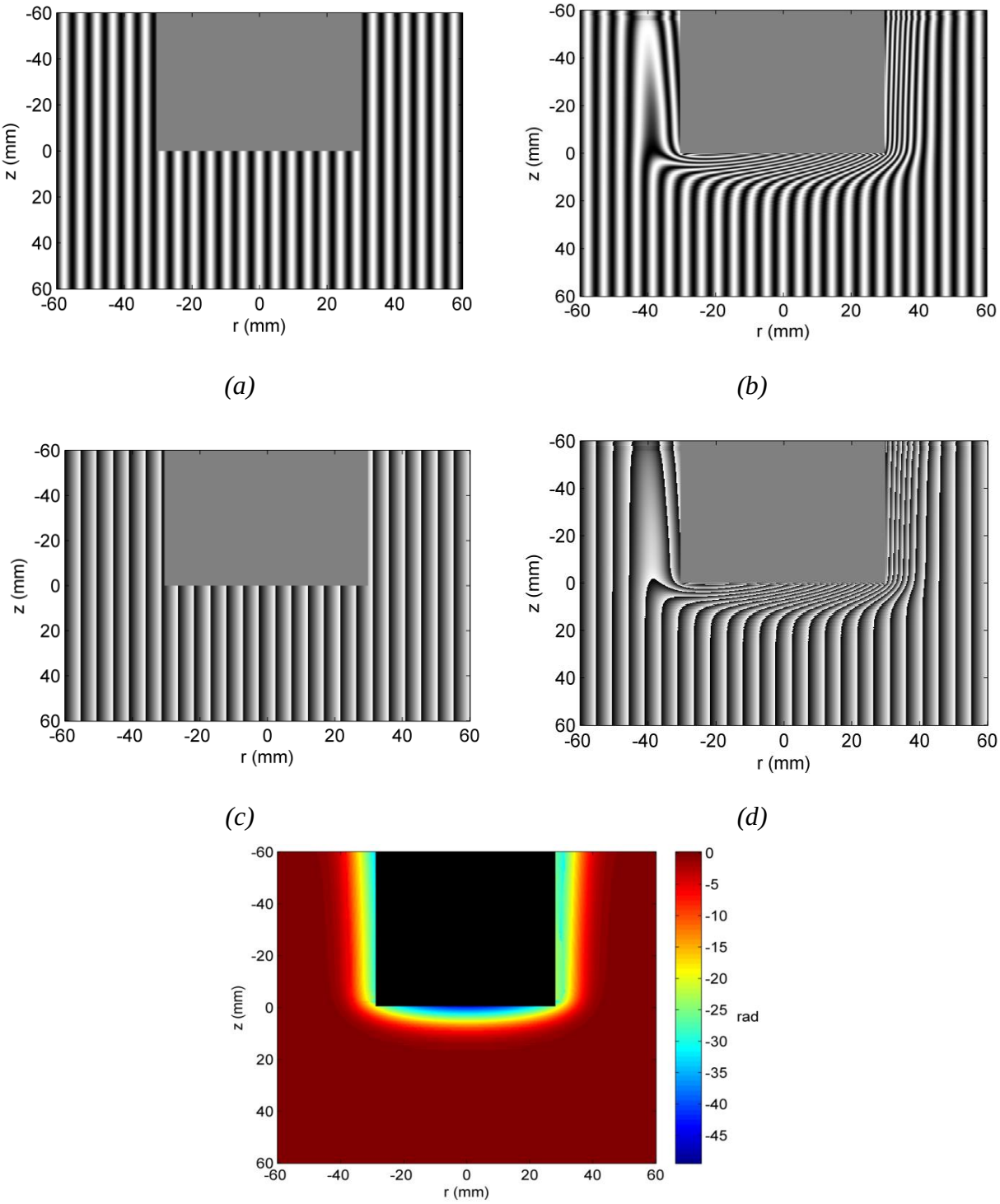


Figure IV -9 : (a) : Interferogramme simulé à la température ambiante $T = 20\ °C$, (b) : Interferogramme simulé à la température $T = 350\ °C$, (c) Image de la phase repliée relative à l'interferogramme (a), (d) Image de la phase repliée relative à l'interferogramme (b), (e) Phase dépliée obtenue.

IV-3.1.2 Résultat de l'image non bruitée

Afin de tester la validité de cette procédure d'analyse des interférogrammes, nous avons représenté sur la Figure IV-10 une comparaison entre la phase initiale et la phase recalculée après le traitement sur quatre lignes au dessous du cylindre chauffé pour les cotes $z = 1, 5, 10\ et\ 20\ mm$. On constate alors que pour chaque cote, les deux profils respectivement initial et recalculé sont presque identiques. En effet, l'écart moyen σ entre les deux images (Figure IV-5 et Figure IV-9e) est de l'ordre de 0.025. L'erreur est maximale sur les deux extrémités de la ligne d'étude. D'après ce faible écart, nous pouvons conclure que le choix de l'algorithme du maximum direct pour l'extraction de la crête et l'algorithme d'Arevalillo Herráez pour le dépliement est tout à fait adapté à la mesure de la phase à partir d'un interférogramme sans bruit.

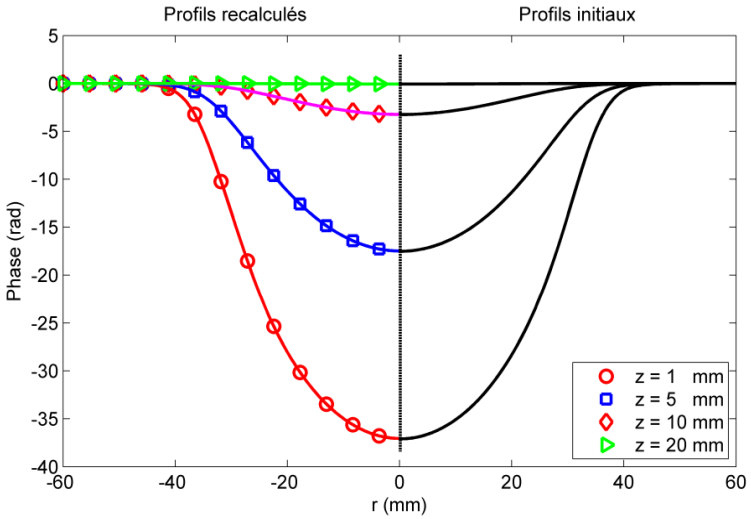
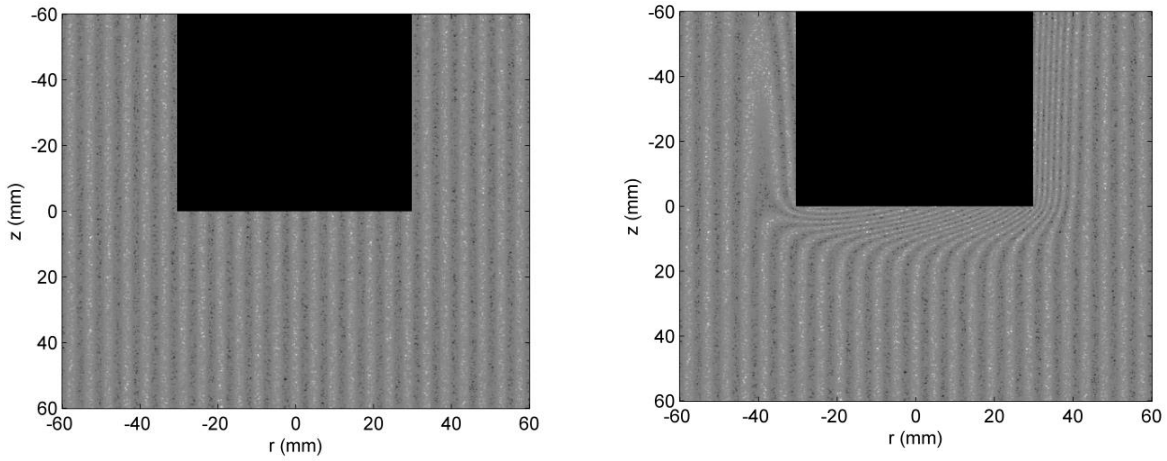


Figure IV -10 : Comparaison entre la phase initiale et celle obtenue après traitement des lignes de cotes $1, 5, 10$ *et* 20 *mm sous le disque de Figure IV-9e.*

IV-3.1.3 Résultat de l'image bruitée

La Figure IV-11 montre deux images affectées par un bruit de speckle de taille 2×2 pixels. Le traitement numérique de ces images aboutit à la cartographie de la phase illustrée en 2-D sur la Figure IV-12. De la comparaison avec la phase initiale représentée sur la Figure IV-13, on constate que globalement la procédure de traitement par estimation de phase est capable d'extraire l'information de phase malgré la sévérité du bruit. Les régions d'erreurs sont ponctuelles apparaissant sous la forme de taches sur l'image reconstruite. Ces erreurs sont plus répandues dans les zones où la phase est proche de zéro c'est-à-dire la frontière de la couche

limite thermique (Figure IV-12). Aucun algorithme de dépliement n'est parfait, il y a toujours quelques points de l'image de la phase où la condition de dépliement ne permet pas de déceler les discontinuités parasites [105]. L'avantage de l'algorithme d'Arevalillo Herráez est de limiter la propagation de ces erreurs sur toute la cartographie de la phase dépliée.



(a) *(b)*

Figure IV -11 : Images de franges affectées par un bruit de speckle de taille 2×2. *(a) Interférogramme à la température* $T = 20°C$ *et (b) Interférogramme à la température* $T = 350°C$.

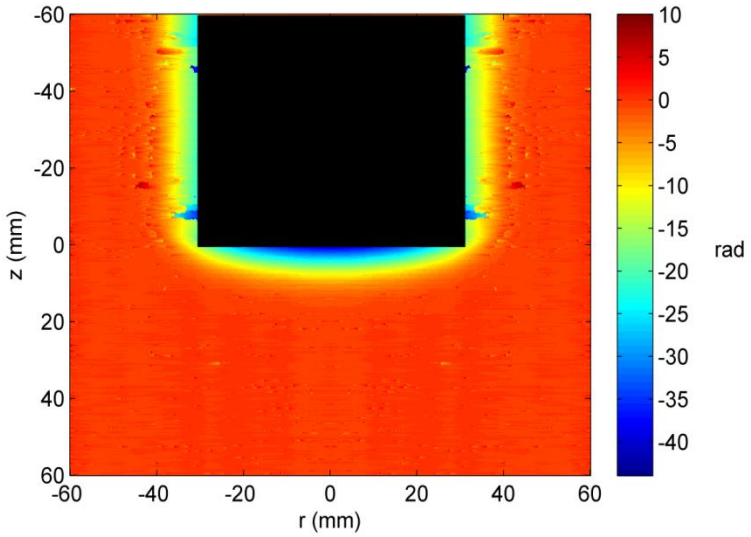


Figure IV -12 : La phase extraite à partir d'interferogramme simulé bruité avec un bruit de speckle de taille du grain égale à 2×2 *pixels.*

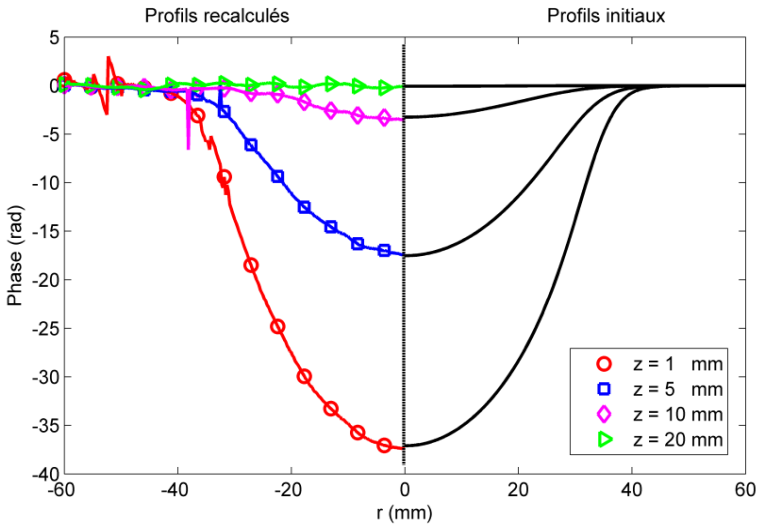


Figure IV -13 : Comparaison entre la phase de départ et celle après traitement déterminée sur les lignes de cotes $1, 5, 10$, *et* 20 *mm sélectionnées de l'image de phase présentée sur la Figure IV-5.*

La Figure IV-14 représente une vue 3-D de l'erreur c.-à-d. la différence entre la phase recalculée et la phase initiale pour une image de franges affectées par un bruit de speckle de taille 5×5 . On constate là aussi que les points d'erreur deviennent plus nombreux et plus appréciables lorsque le bruit augmente de taille.

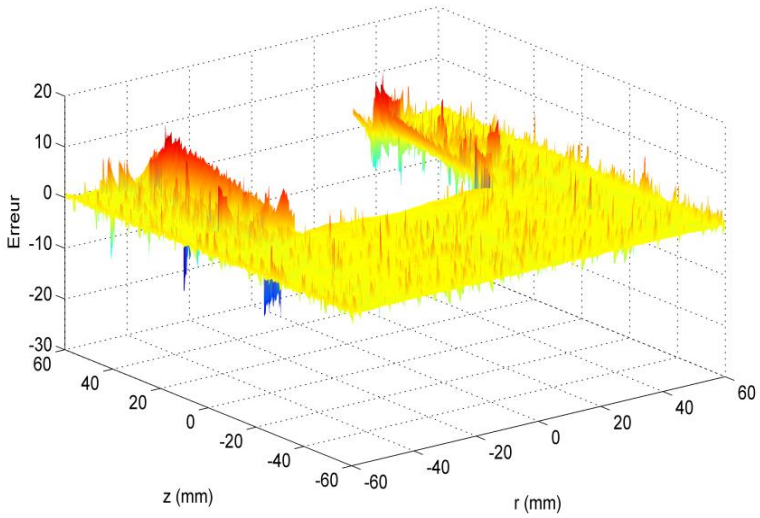


Figure IV -14 : Erreur de traitement d'un interferogramme bruité par un bruit de speckle dont la taille du grain est égale à 5×5 *pixels.*

IV-3.2 Test de l'aproche de gradient de phase

Dans cette approche, l'extraction de la phase, sera faite conjointement à l'extraction de la crête d'ondelette $a_c(b)$ par l'algorithme du maximum direct avec des valeurs d'échelle variant de 1 à 50 et un pas de 0.1. La variation de cette crête sera par la suite convertie en évolution des fréquences spatiales $\tilde{\upsilon}(b)$ grâce à l'une des équations (IV.7) ou (IV.8) respectivement selon l'ondelette de Morlet ou celle de Paul [109] [110]:

$$\tilde{\upsilon}(b) = \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c + 2}}{a_c(b)} - 2\pi\upsilon_0 \qquad \text{(IV.7)}$$

$$\tilde{\upsilon}(b) = \frac{2n + 1}{a_c(b)} - 2\pi\upsilon_0 \qquad \text{(IV.8)}$$

Pour les lecteurs qui souhaitent savoir en détail comment s'articulent les démonstrations de ces deux équations peuvent consulter les annexes (C).

IV-3.2.1 Procédure de traitement

Nous nous servons des images (a) et (b) de la Figure IV-9. La procédure de ce traitement comporte les étapes suivantes. **1)** On calcule la TO de chaque ligne horizontale des images (a) et (b). **2)** On estime la crête d'ondelette pour chaque ligne en utilisant l'algorithme du maximum direct. **3)** On utilise les coordonnées de cette crête pour l'évaluation des fréquences locales à partir de l'équation (IV.7) définissant l'évolution des fréquences locales en fonction de la crête. Ceci permet d'aboutir aux images (a) et (b) de la Figure IV-15 représentant deux matrices de fréquences locales relatives respectivement aux deux interferogrammes (a) et (b) de la Figure IV-9. **4)** On procède à l'intégration de la fréquence ligne par ligne donnant ainsi comme résultat les images (c) et (d) de la Figure IV-15. **5)** Finalement, de la soustraction de l'image (c) de l'image (d) résulte l'information de la phase désirée présentée par l'image (e).

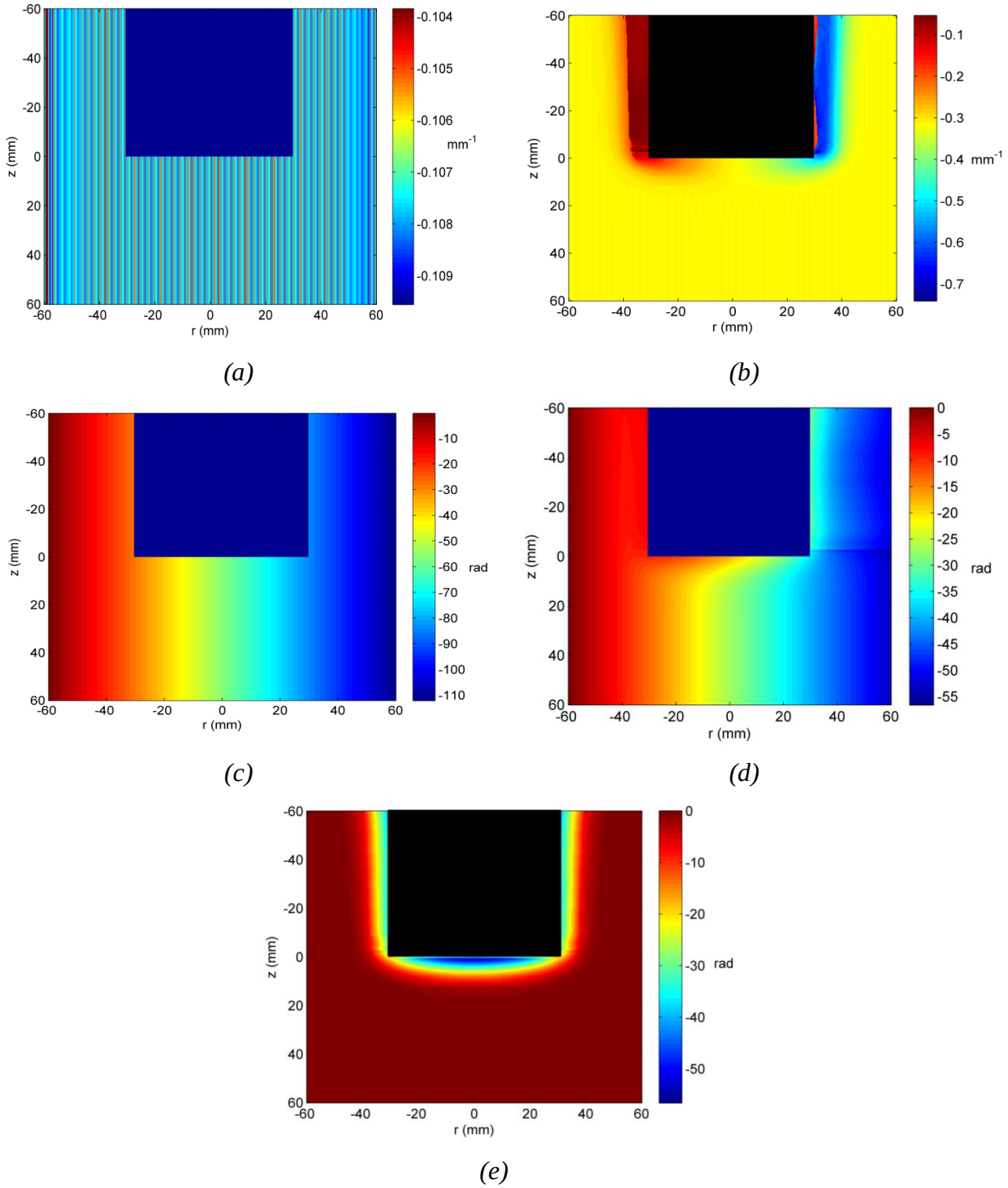


Figure IV -15 : (a) - Image de fréquences relative à l'interferogramme (a) de la Figure IV-9 , (b) - Image de fréquences relative à l'interferogramme (b) de la Figure IV-9, (c) - Phase continue obtenue par intégration de l'image (a), (d) - Phase continue obtenue par intégration de l'image (b), (e) - Phase obtenue après la soustraction de l'image (c) de l'image (d).

IV-3.2.2 Résultat de l'image non bruitée

Les Figure IV-16 et Figure IV-17 montrent respectivement les résultats que procure l'approche de gradient de phase en 2-D. La Figure IV-17 montre la présence d'un décalage de la phase recalculée par rapport à la phase initiale. Ceci est dû à la présence d'une constante d'intégration qui est préalablement inconnue. A notre connaissance, il n'y a pas une méthode efficace pour résoudre complètement ce problème. Disons, que la tentative que nous avons adoptée ici est de considérer la phase initiale (au premier pixel de la ligne traitée) comme un résidu qu'il faut soustraire point par point de la phase recalculée. Cette procédure se justifie par le fait que la phase à l'extrémité de l'interférogramme doit être nulle puisque la température est ambiante.

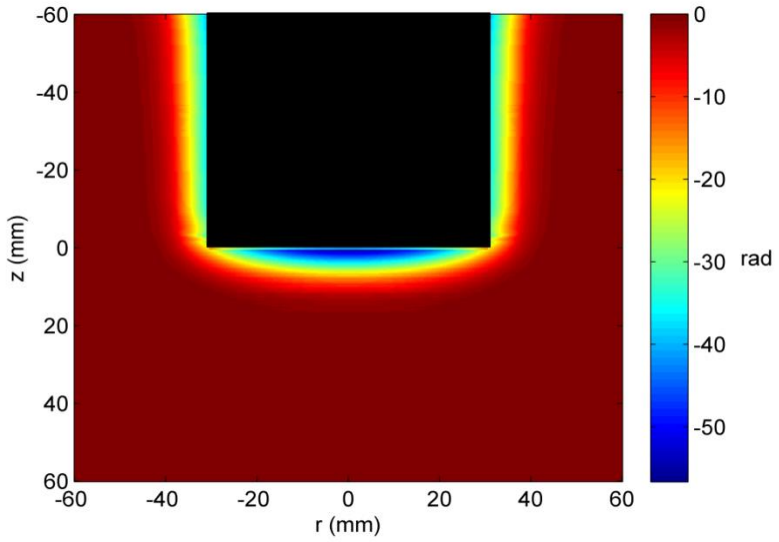


Figure IV-16 : Phase extraite à partir de l'interférogramme simulé non bruité, par l'approche de gradient de la phase.

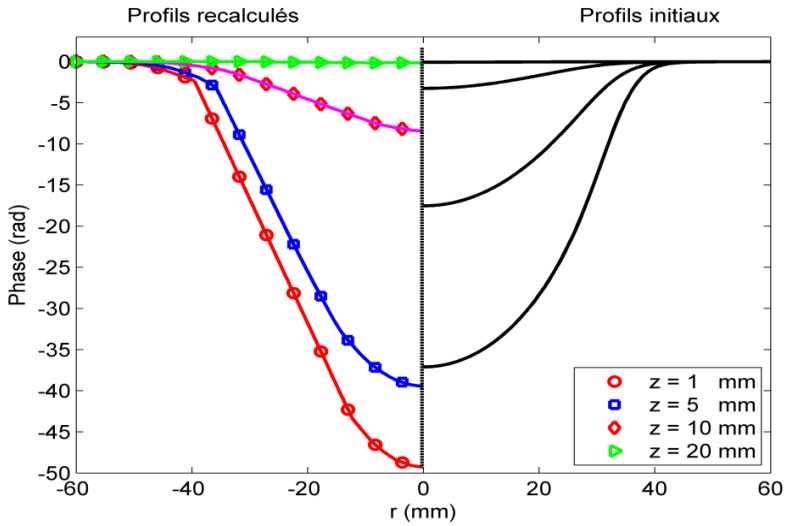


Figure IV-17 : Comparaison entre la phase de départ et celle obtenue après traitement effectué sur les lignes de cotes $1, 5, 10,$ *et* 20 *mm sélectionnées sur l'image de phase de la Figure IV-16.*

IV-3.2.3 **Cas de l'image bruitée**

Le traitement numérique des images de la Figure IV-11 aboutit à la cartographie de la phase illustrée en 2-D sur la Figure IV-18. De la comparaison de cette image et celle obtenue par l'approche de l'estimation de phase (Figure IV-12), on constate une nette différence morphologique dans les régions erronées. Pour le cas de l'approche d'estimation de phase, les erreurs apparaissent comme des taches limitées qui sont une signature propre des algorithmes du dépliement en 2-D [105]. Par contre, pour le cas de l'approche par estimation de la fréquence, les régions d'erreurs apparaissent comme des traits allongés dus principalement au problème évoqué précédemment de la constante d'intégration des fréquences.

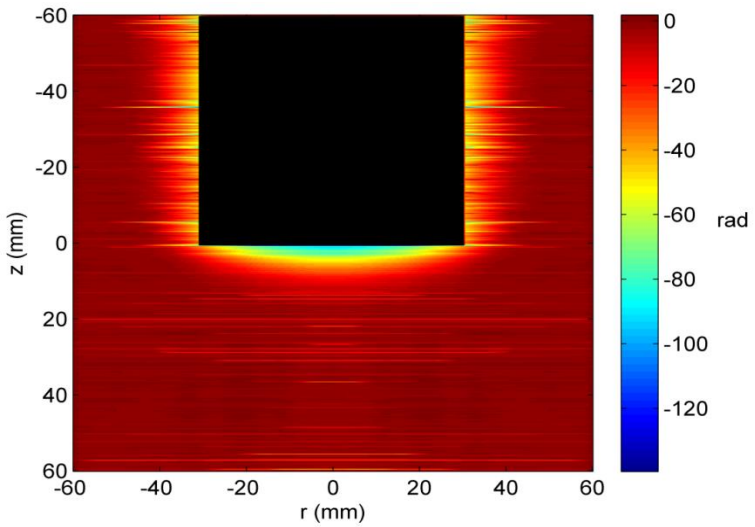


Figure IV-18 : La phase extraite par l'approche de gradient de la phase à partir de l'interférogramme simulé et bruité avec un bruit de speckle de taille de grain égale à 2×2 *pixels.*

La comparaison entre la phase initiale et la phase recalculée après le traitement sur quatre lignes (Figure IV-19) montrent des profils de tendance moins acceptable que celle obtenue par l'approche d'estimation de la phase. Pour exclure l'effet de la résolution des échelles, nous avons effectué les calculs avec un pas très fin de 0.01. Cet essai se traduit par une augmentation du temps de calcul, sans pour autant gagner en précision avec une persistance du décalage entre les profils initiaux et ceux recalculés. Ainsi, on peut conclure que le fait que l'approche du gradient de phase est épargnée de l'étape dépliement n'est pas un avantage. Ce constat a été rapporté par plusieurs études [31] [28]. En contre partie, nous n'avons trouvé qu'une seule étude qui montre que le fait de contourner l'étape du dépliement s'accompagne d'un gain en précision dans le processus d'analyse de franges [110].

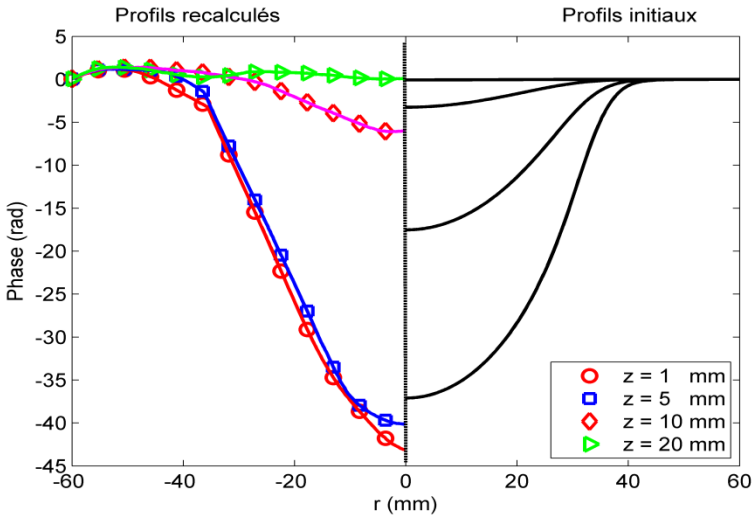


Figure IV-19: Comparaison entre la phase de départ et celle obtenue après traitement des lignes de cotes $1, 5, 10, et\ 20\ mm$ *sélectionnées sur l'image de phase présentée sur la Figure IV-3.*

IV-4 Ondelette mère optimale

Dans la littérature, il existe une multitude des ondelettes mères analysantes applicables dans divers domaines de la métrologie. En ce qui concerne l'approche par estimation de la phase, nous nous limitons à sept ondelettes mères à savoir les ondelettes de Morlet, Paul, Shannon, Gauss et Cauchy ainsi que les ondelettes b-spline et harmonique. Par contre, pour l'approche de gradient de phase, nous avons sélectionné l'ondelette de Morlet et celle de Paul. La Figure IV-20 montre l'évolution de l'erreur en fonction de la taille du bruit et la nature de l'ondelette mère. Cette figure montre que l'on peut adopter trois ondelettes mères pour l'approche estimation de la phase et qui sont l'ondelette harmonique, de Paul et celle de Morlet avec une préférence des deux dernières. Ce choix s'explique par la facilité de leurs paramétrages. En effet, l'ondelette mère de Paul ne possède qu'un seul paramètre avec lequel on peut fixer le nombre des oscillations pour que les ondelettes filles puissent mieux correspondre au signal. L'ondelette de Morlet a deux avantages. D'une part le fait qu'elle possède une fréquence centrale et un paramètre pour sa bande passante rend l'attribution des valeurs pour ces deux paramètres facile à travers une simple analyse spectrale préalable du signal par la transformée de Fourier. D'autre part, le fait de rendre cette ondelette admissible offre l'avantage à l'utilisateur de bien cerner le choix de ses paramètres à travers la condition $5 \leq 2\pi f_b f_c \leq 6$.

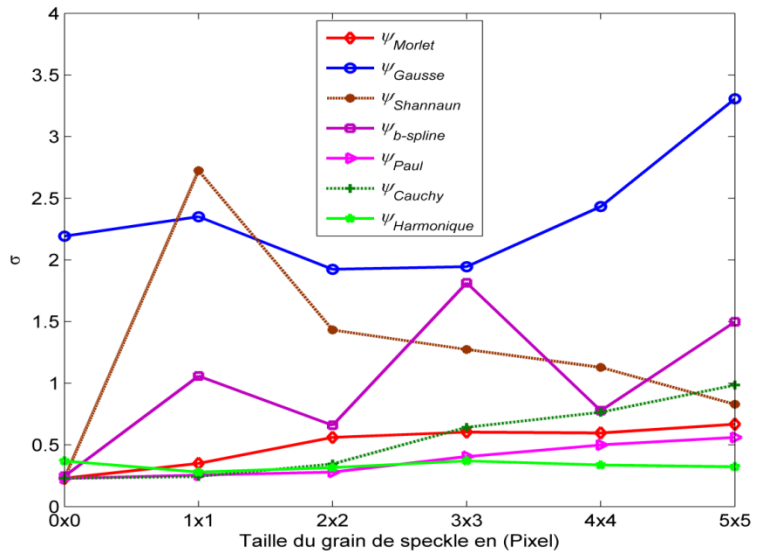


Figure IV-20 : Évolution de l'écart quadratique moyen de l'approche d'estimation de phase en fonction de la taille moyenne du grain de speckle pour sept ondelettes mères.

Par ailleurs, pour l'approche d'estimation de fréquence, la Figure IV-21 révèle que l'ondelette mère de Morlet procure une précision nettement supérieure par rapport à celle obtenue par l'ondelette mère de Paul. On note aussi presque une stabilité de l'écart quadratique moyen en fonction de l'évolution de la taille des grains de speckle.

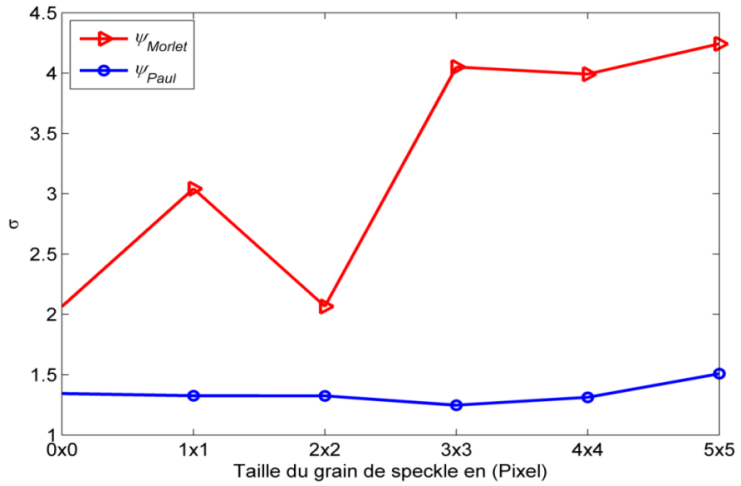


Figure IV-21 : Évolution de l'écart quadratique moyen de l'approche gradient de phase en fonction de la taille moyenne du grain de speckle et pour deux ondelettes mères.

IV-5 Conclusion

Cette étude révèle que l'approche de l'estimation de phase conjointement à l'ondelette mère de Morlet, produit des résultats plus précis que l'approche de l'estimation fréquence. La

première approche est capable d’estimer l'information de phase encodée dans les figures de franges même lorsque la résolution d’échelle utilisée est dix fois plus grande que celle utilisée pour la deuxième approche. En plus, l’approche de l’estimation de phase permet de réaliser un gain notable en complexité temporelle. Le résultat médiocre de l’approche du gradient est dû à la méconnaissance de la condition initiale. Nous avons présenté une tentative qui a permis de réduire l’erreur de la reconstitution de la topographie de la phase par cette approche.

Rappelons ici que les résultats de ce chapitre vont être adoptés pour l’analyse des images de frange issues du protocole expérimental qui sera présenté dans le dernier chapitre de cette thèse.

Chapitre V : Mise en œuvre des techniques innovatrices d'inversion de la transformée d'Abel

V-1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des méthodes numériques que nous avons mises au point pour doter une certaine stabilité aux problèmes mal posés « inverses » relatifs à la transformée d'Abel. L'objectif principal est d'énoncer le cadre général de la deuxième étape du traitement des figures de franges, en précisant l'originalité de nos approches par rapport aux méthodes d'inversion déjà exposées dans le chapitre I et récemment publiées. Il faut toutefois garder présent à l'esprit la remarque mentionnée par H. W. Engl et al. [111] qui stipule qu'aucune astuce mathématique ne peut faire d'un problème inhérent instable un problème stable. Certaines méthodes numériques que nous allons mettre en exergue dans la suite de ce prolongement, vont rendre le problème stable mais au détriment d'un changement vers un autre problème ou d'une altération des résultats et par la suite de la solution requise. Le contenu de ce chapitre met en évidence deux classes d'algorithmes concernant la reconstitution du champ de la température 3-D par inversion de la transformée d'Abel. La première classe intéresse l'interférométrie tandis que la deuxième classe concerne la déflectométrie de moiré. Rappelons que dans le chapitre précédent nous n'avons pas fait de distinction entre les images de franges traitées. Autrement dit, l'extraction de la phase se fait indépendamment de la métrologie source de ces images, que ce soit par interférométrie ou par déflectométrie de moiré. Cette similitude de représentation nous a permis d'appliquer le même processus d'analyse. La différence dans leurs traitements réside dans la reconstitution du champ de température en 3-D par inversion de la transformée d'Abel.

V-2 Inversion d'Abel

Rappelons que les équations de la tomographie du champ de température axisymétrique s'écrivent pour l'interférométrie et la déflectométrie de moiré selon les expressions suivantes :

$$f(r) = -\frac{\lambda}{\pi}\int_{r}^{R_0} \frac{\frac{dS(y)}{dy}}{\sqrt{y^2 - r^2}}\,dy \qquad \text{(V.1)}$$

$$\delta(r) = -\frac{1}{\pi}\int_{r}^{R_0} \frac{\varepsilon(y)}{\sqrt{y^2 - r^2}}\,dy \qquad \text{(V.2)}$$

Il s'agit d'un problème inverse non-linéaire dont la non-linéarité est liée aux grandeurs délivrées par l'analyse des figures de franges qui sont l'ordre des franges $S(y)$ pour l'interférométrie et l'angle de déviation $\varepsilon(y)$ pour la déflectométrie de moiré. On veut alors résoudre le problème inverse de façon à retrouver numériquement l'indice de réfraction et par conséquence le champ de température en appliquant la relation de Gladstone-Dale (I.1).

Du point de vue théorique, nous allons discuter la résolution de certaines contraintes liées aux équations intégrale *(V.1)* et *(V.2)* telles que la propagation d'erreur croissante vers le centre, la singularité aux points $r = y = 0$ et $r = y = R_0$ et la haute sensibilité au bruit. Le but sollicité est de développer des astuces mathématiques permettant de vaincre ces contraintes intrinsèques de la transformée d'Abel.

V-3 Inversion des données interférométriques

Nous présentons ici une nouvelle reprise de l'une des plus anciennes méthodes semi-analytiques basée sur l'usage des polynômes, pour l'inversion de l'équation intégrale *(V.1)*. Le principe est de faire une régression du profil de l'ordre des franges par la méthode des moindres carrés en choisissant un polynôme ne contenant que les puissances paires (PPP). Par la suite, le calcul de l'intégrale abélienne se réduit à une sommation d'intégrales simples évaluables analytiquement et itérativement. Afin de tester l'exactitude et la robustesse en termes de propagation d'erreurs de cette méthode, nous la comparons avec deux autres méthodes récemment publiées. Il s'agit de la méthode des ondelettes de Legendre (OL) et de

la méthode de Fourier-Hankel modifiée (FHM). C'est par hasard que ces deux méthodes sont des mêmes auteurs Ma et a [81] [112].

Dans cette comparaison, nous mettons l'accent sur les deux problèmes capitaux inhérents qui provoquent l'instabilité de la solution de l'équation intégrale *(IV.1)*. La singularité aux points $r = y = 0$ et $r = y = R_0$ et l'amplification des erreurs résiduelles dans le profil de l'ordre par la dérivation et l'effet cumulatif de l'intégrale.

L'ensemble de ces trois techniques sont comparées en considérant la distribution de l'ordre des franges $S(y_j)$ (Figure V-1) issue de la simulation numérique de l'air sous un cylindre chauffé que nous avons présentée au chapitre précédant (Figure IV-5, p 117). Les données sont également espacées par ($2N + 1$ segments) avec $y_j = j\Delta y$ et $j = -N, \dots, 0, \dots N$. Le but est de calculer la fonction de différence d'indice de réfraction $f(r_i)$ en $N + 1$ points, avec $r_i = i\Delta r$ et $i = 0, \dots N$. Dans cette simulation N est pris égale à 255.

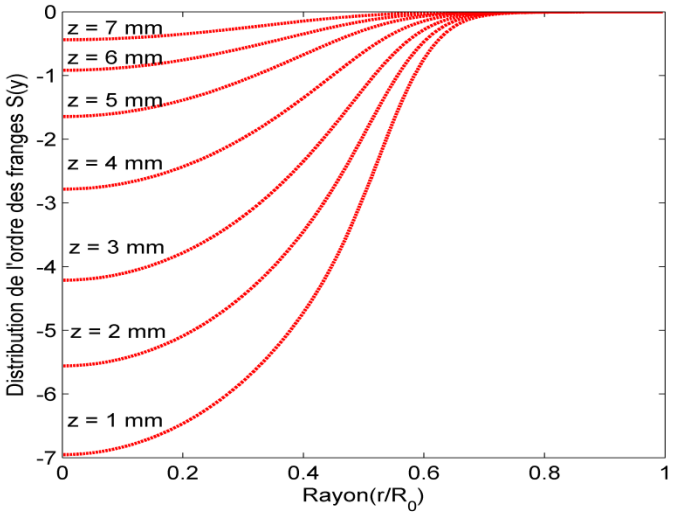


Figure V-1 : Profils de la distribution d'ordre des franges.

V-3.1 Méthode des ondelettes de Legendre (OL)

L'idée d'utiliser des bases d'ondelettes dans l'analyse numérique pour la résolution des équations intégrales aux dérivées partielles s'est imposée depuis que ces bases ont fait la preuve de leur efficacité dans le traitement du signal et d'images. En ce qui concerne l'approximation de l'intégrale d'Abel, nous développons dans ce qui suit la formulation qui permet de conduire les calculs.

On choisit comme ondelette, le polynôme de Legendre. L'ensemble des éléments formant ainsi une base des ondelettes orthonormées peut s'écrire comme suit [81] :

$$\psi_{n,m}(y) = \begin{cases} \sqrt{m+\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{k}{2}} P_m\,(2ky - n\ +1)\ si\ \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq y \leq \frac{n}{2^{k-1}} \\ 0 \qquad sinon \end{cases} \tag{V.3}$$

Avec $n = 1,2, \dots 2^{k-1}$, $m = 1,2, \dots M-1$ et P_m sont la famille de polynômes de Legendre d'ordre m définis sur l'intervalle$[-1, 1]$ et donné par la relation de récurrence de Bonnet suivante :

$$\begin{cases} P_0(y) = 1, \qquad P_1(y) = y \\ (m+1)P_{m+1}(y) = (2m+1)yP_m(y) - mP_{m-1}(y) \quad si \quad m \geq 1 \end{cases} \tag{V.4}$$

Les ondelettes de Legendre forment une base orthonormée telle que :

$$\int_0^1 \psi_{n,m}(y)\psi_{n,m}(y)dy = \varkappa_{nn'}\varkappa_{mm'} \tag{V.5}$$

avec $\varkappa$ est l'indice de Kronecker.

Ainsi, dans la base $\psi_{n,m}$ la fonction d'ordre d'interférence $S(y)$ peut s'écrire comme suit :

$$S(y) \cong \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m}\psi_{n,m}(y) = C\Psi(y) \tag{V.6}$$

avec $c_{n,m} = \int_0^1 S(y)\psi_{n,m}(y)dy$

les deux matrices ligne C et Ψ sont de taille $2^{k-1}M \times 1$ et décrites par :

$$C = [c_{1,0}, c_{1,1}, \dots c_{1,M-1}, c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2^{k-1},0}, c_{2^{k-1},1}, \dots, c_{2^{k-1},M-1}] \tag{V.7}$$

$$\Psi(y) = [\psi_{1,0}(y), \psi_{1,1}(y), \dots, \psi_{1,M-1}(y), \psi_{2,0}(y), \psi_{2,1}(y), \dots, \psi_{2^{k-1},0}(y), \psi_{2^{k-1},1}(y), \dots, \psi_{2^{k-1},M-1}(y)] \tag{V.8}$$

en utilisant l'équation (V.6), on obtient :

$$S^{'}(y) = CF\Psi(y) \tag{V.9}$$

avec F une matrice de taille $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$. On déduit l'expression de $f(r)$ par :

$$f(r) = -\frac{\lambda}{\pi} CF \int_{r}^{R0} \frac{\Psi(y)}{\sqrt{y2 - r2}} dy \tag{V.10}$$

Le problème principal qui se pose lors de l'utilisation de la méthode (OL) est le choix des paramètres M et k afin de reconstruire une base orthonormée optimale pour l'approximation des données de l'ordre des franges. Comme il n'est pas possible d'avoir un critère objectif pour le choix du couple optimum (M, k), nous avons effectué une étude comparative de leur influence sur la précision de l'inversion d'Abel par le calcul de l'écart quadratique moyen σ. Le résultat de cette étude est représenté sur la Figure V-2.

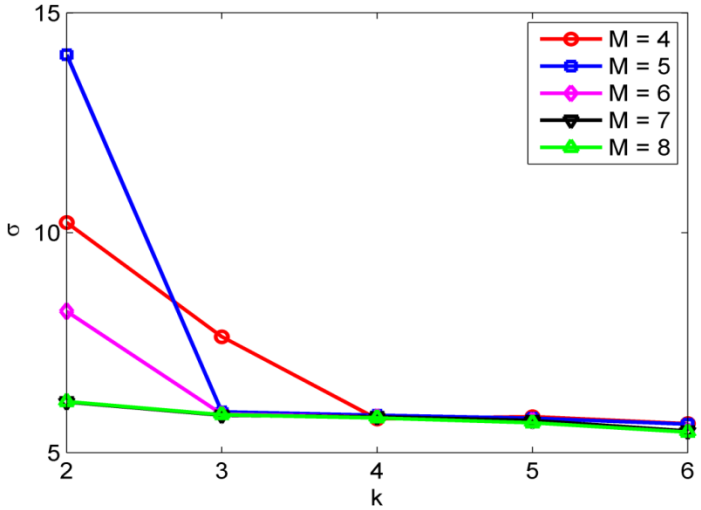


Figure V-2 : Évolution de l'écart quadratique moyen de l'inversion de TA pour différentes valeurs de M en fonction du paramètre k.

On constate que l'écart quadratique moyen diminue avec l'augmentation de M et k. Cependant, pour $k \geq 3$ et $M \geq 5$, cet écart moyen reste quasiment constant. Ainsi, pour gagner en complexité temporelle d'une part et d'autre part pour réduire le nombre des segments d'approximation du profil de l'ordre $S(y)$, nous avons considéré la paire des paramètres $k = 3$ et $M = 5$ comme valeurs optimales pour appliquer la technique OL sur la distribution de l'ordre de la Figure V-1. Les profils radiaux de température obtenue sont présentés dans la Figure V-3. Nous pouvons noter une erreur importante au voisinage de l'axe

de symétrie. Cette imprécision pourrait s'expliquer par le problème de la singularité qui n'est pas pris en compte par la technique des ondelettes de Legendre.

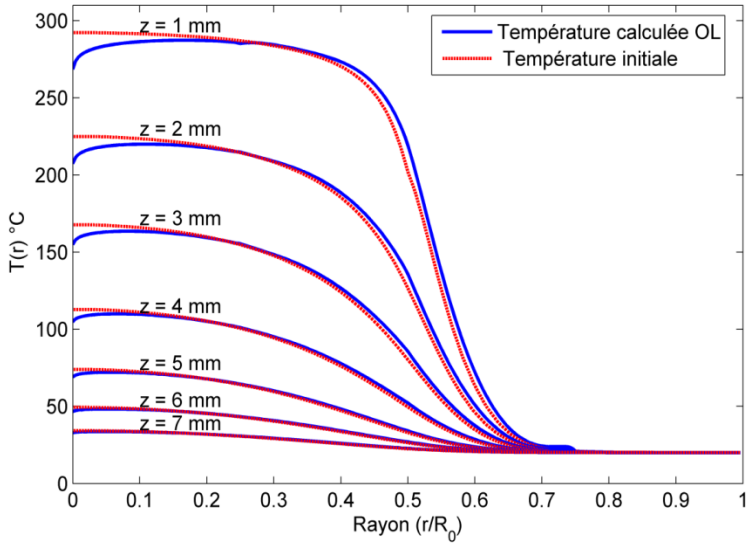


Figure V-3 : Profils de température initiaux et recalculés aux différentes cotes par la méthode OL

V-3.2 Méthode de Fourier-Hankel modifiée (FHM)

La transformée de Hankel est couramment utilisée dans la reconstruction tomographique et plus particulièrement pour les systèmes à symétrie cylindrique. En prenant la transformée de Fourier de la distribution discrète des mesures (résultats de l'analyse des images de franges) puis en effectuant un changement de variables d'intégration en coordonnées polaires on aboutit à la représentation du problème inverse sous la forme de la transformée de Hankel d'ordre zéro [5]. La distribution radiale $f(r)$ peut être alors récupérée en calculant la transformée de Hankel inverse.

Dans la littérature on trouve deux variantes de la technique de Fourier-Hankel (FH) dont les expressions sont (V.11) et (V.12):

$$f(r_j) = \frac{1}{2\pi(2N+1)^2\Delta y}\sum_{i=-N}^{N} S(y_i)\sum_{k=0}^{N} k\cos\left(\frac{ik}{2N+1}\right)J_0\left(\frac{jk}{2N+1}\right) \tag{V.11}$$

$$f(r_j) = \frac{\alpha^2\pi}{2NR_0}\sum_{i=0}^{N-1} S(y_i)\sum_{k=0}^{\lfloor N/\alpha \rfloor} k\cos\left(\frac{i\alpha k\pi}{N}\right)J_0\left(\frac{j\alpha k\pi}{N}\right) \tag{V.12}$$

L'équation (V.11) est la forme de base de la technique FH qui a été sujet de plusieurs études dont nous citons à titre d'exemples Alvarez et al. [73] et Chan et Hieftje [66]. La version (V.12) connue sous le nom de Fourier-Hankel Modifiée (FHM) a été proposée par Ma [112] afin de palier les limitations de la première forme (V.11). Le facteur $\alpha \in]0;1]$ a été introduit pour améliorer la précision de l'inversion en cas de faible nombre de points et éliminer l'écart systématique négatif induit par les erreurs de discrétisation et de troncature dans le calcul de la transformée de Fourier et de la fonction de Bessel d'ordre zéro. L'influence du coefficient est illustrée sur la Figure V-4 où les valeurs de α proches de zéro permettent de réduire significativement l'écart entre les profils de température respectivement initiaux et ceux recalculés après l'inversion d'Abel par la technique FHM. La valeur de $\alpha = 0.1$ a été adoptée pour reconstruire avec une excellente précision la distribution de température (Figure V-5).

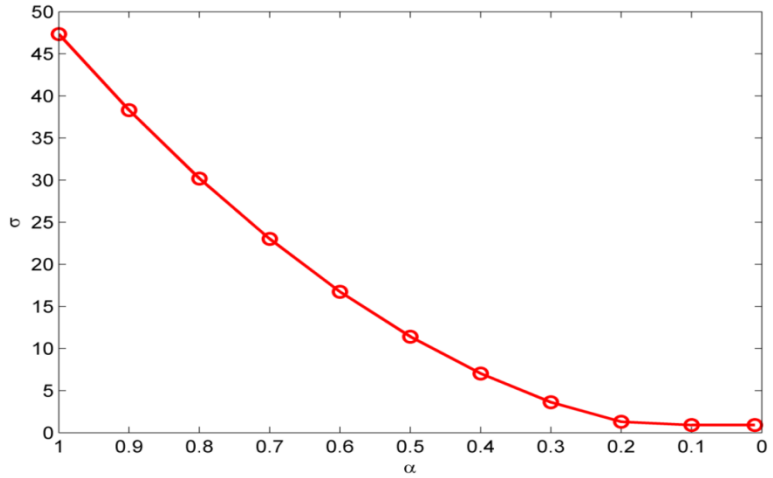


Figure V-4 : Évolution de l'écart quadratique moyen de l'inversion de TA en fonction du paramètre α.

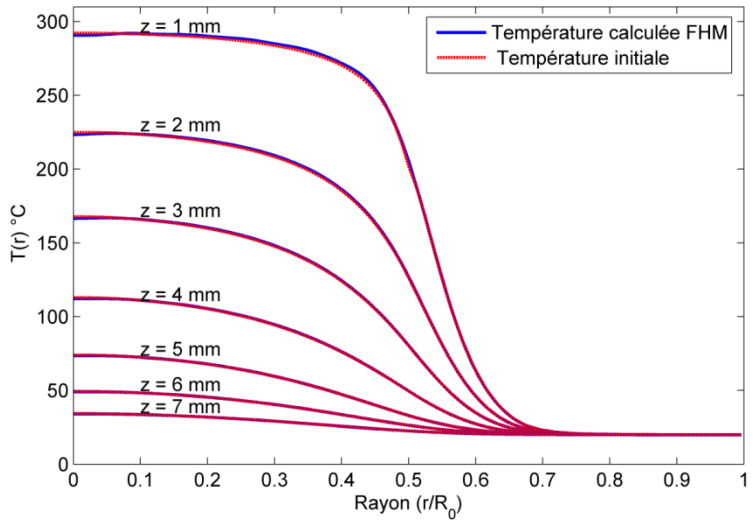


Figure V-5 : Profils de température initiaux et recalculés par la méthode FHM pour différentes cotes au dessous du cylindre chauffé.

V-3.3 Méthode Polynomiale de Puissances Paires (PPP)

Les profils d'ordre des franges sont des représentations des fonctions méconnues analytiquement. La représentation de ces profils par un polynôme de degré p est considérée par plusieurs auteurs comme une approche particulièrement simple. Le dilemme qui se pose à lors de la régression polynomiale est le choix du degré adéquat du polynôme qu'est le seul paramètre en cause de la qualité de l'approximation des données expérimentales en vue d'une fiable inversion de l'équation d'Abel. L'approche semi-analytique PPP que nous proposons dans ce travail est une reprise innovatrice de la méthode polynomiale pour le calcul de la transformée d'Abel inverse publiée par Deutsh [113]. Le principe de la technique PPP consiste à représenter $S(y)$ par un polynôme de degré p suffisamment élevé et dont les puissances sont toutes paires. Ce choix permet de forcer la vérification de la condition de symétrie par l'expression analytique modélisant le profil de $S(y)$ qui s'écrit ainsi :

$$S(y) = \sum_{i=0}^{p} a_{2i} y^{2i} \tag{V.13}$$

Les coefficients a_{2i} sont facilement déterminés par un ajustement au sens de moindres carrés. Ainsi, en introduisant la dérivée de $S(y)$ dans l'équation intégrale (V.1) on aura :

$$f(r) = -\frac{\lambda}{\pi} \int_{r}^{R_0} \frac{\sum_{i=1}^{p} 2i\, a_{2i}\, y^{2i-1}}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy \tag{V.14}$$

$$= -\frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=1}^{p} 2i\, a_{2i}\, I_{2i-1}$$

l'évaluation de l'expression (V.14) implique le calcul des intégrales de la forme :

$$I_{2i-1} = \int_{r}^{R_0} \frac{y^{2i-1}}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy \qquad \text{(V.15)}$$

par une simple intégration par parties, la dernière intégrale devient :

$$I_{2i-1} = {R_0}^{2i-2}\sqrt{{R_0}^2 - r^2} - (2i-2)\int_{r}^{R_0} y^{2i-3}\sqrt{y^2 - r^2}\, dy \qquad \text{(V.16)}$$

après un réarrangement des termes de l'équation ci-dessus, on aura la forme récursive suivante :

$$(2i-1)I_{2i-1} = {R_0}^{2i-2}\sqrt{{R_0}^2 - r^2} + (2i-2)r^2\, I_{2i-3}\ ;\ i = 2, \dots, p \qquad \text{(V.17)}$$

avec :

$$I_1 = \int_{r}^{R_0} \frac{y}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy = \sqrt{{R_0}^2 - r^2} \qquad \text{(V.18)}$$

en poussant un peu le calcul de l'intégrale I_{2i-1} et en effectuant le changement de variable $v^2 = y^2 - r^2$ tout en considérant la formule du binôme de Newton, on aboutit à l'expression suivante :

$$I_{2i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} r^{2k} \frac{1}{2(i-k)-1} \left({R_0}^2 - r^2\right)^{(i-k)-\frac{1}{2}} \qquad \text{(V.19)}$$

en remplaçant le terme I_{2i-1} de l'équation *(V.1)* par son expression finale, la fonction de différence d'indice de réfraction selon une ligne de visée peut s'écrire:

$$f(r) = -\frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=1}^{p} 2i\, a_{2i} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} r^{2k} \frac{1}{2(i-k)-1} \left({R_0}^2 - r^2\right)^{(i-k)-\frac{1}{2}} \qquad \text{(V.20)}$$

l'expression analytique ci-dessus est facilement programmable sous Matlab.

L'influence du degré de polynôme p est illustrée sur la Figure V-6 où les valeurs de $p \in [20,30]$ permettent de réduire significativement l'écart entre les profils de température respectivement initial et celui recalculé après l'inversion d'Abel par la technique PPP. Le

degré $p = 20$ a été adopté pour reconstruire avec une excellente précision la distribution de température et un gain en complexité temporelle (Figure V-7).

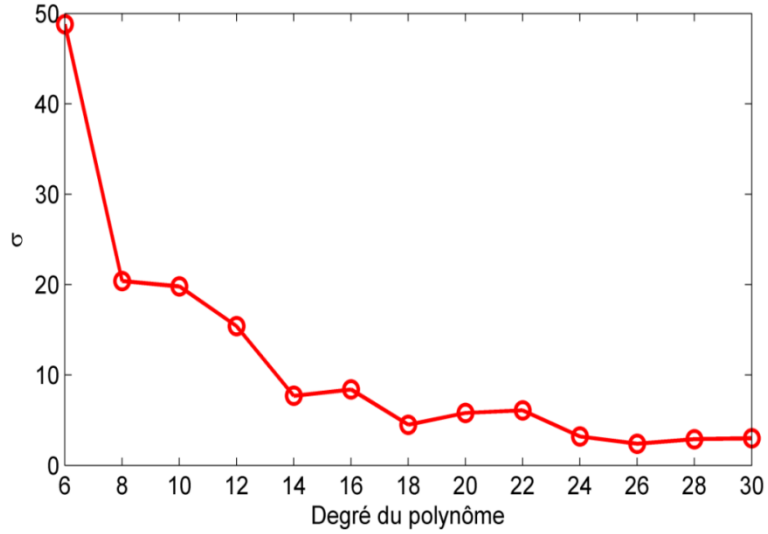


Figure V-6 : Évolution de l'écart quadratique moyen de l'inversion TA en fonction du degré de polynôme dans la méthode PPP.

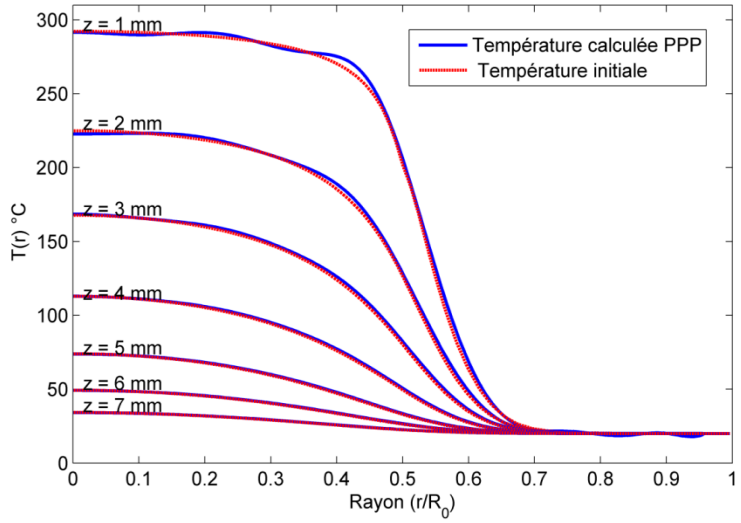


Figure V-7 : Profils de température initiaux et recalculées par la méthode PPP pour différentes cotes au dessous du cylindre chauffé.

V-3.4 Précision de l'inversion

V-3.4.1 Sans bruit

Dans le but d'estimer l'erreur induite par l'inversion de l'équation intégrale *(V.1)*, nous recalculons de nouveau l'écart quadratique moyen entre la température initiale et celle reconstruite par les trois algorithmes décrits auparavant. Les résultats obtenus pour les différents profils de test sont présentés dans le Tableau V-1.

Profils de test z (mm)	**MFH** $\boldsymbol{\alpha = 0.1}$	**OL** $\boldsymbol{k = 3\ \ M = 5}$	**PPP Degré 20**
1	1.0	6.0	2.2
2	0.7	4.0	1.4
3	0.5	2.6	0.9
4	0.4	1.5	0.5
5	0.1	0.8	0.3
6	0.1	0.5	0.1
7	0.1	0.2	0.1

Tableau V-1 : Comparaison des écarts quadratiques moyens pour la reconstruction des profils de température en utilisant les algorithmes étudiés avec leurs paramètres optimaux.

Le résultat le plus précis est celui obtenu avec FHM suivie par la méthode PPP (certains profils des deux résultats sont très proches) et dans le dernier rang on trouve la méthode OL. A partir de ces résultats nous concluons que la FHM et la méthode PPP permettent une inversion plus précise. Par ailleurs, le Tableau V-2 compare le temps de calcul requis pour chaque méthode pour réaliser le processus d'inversion. Nous constatons que la méthode PPP est la moins exigeante en temps de calcul d'où la faculté de son implémentation en temps réel dans un processus de traitement des images de franges réelles.

FHM $\boldsymbol{\alpha}$ **= 0.05**	**LO** $\boldsymbol{k}$**=3** $\boldsymbol{M}$**=5**	**PPP p = 20**
121 s	16 s	4 s

Tableau V-2 : Temps mis par chaque algorithme sur un ordinateur portable équipé d'un microprocesseur Intel ® Core TM 2 Duo CPU T5870, 2 GHz.

V-3.4.2 Avec bruit

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des profils d'ordre des franges non bruités. Cependant, dans la pratique les données expérimentales sont constamment dégradées par le

bruit plus particulièrement celui du speckle omni présent dans toute métrologie optique par lumière cohérente. Nous supposons que le bruit affectant l'ordre des franges $S(y)$ est aléatoire, additif et uniformément distribué d'amplitude 1/10 de frange [4].

Dans la présente étude, nous avons utilisé un vecteur de nombres aléatoires de densité de probabilité uniforme et de valeurs comprises entre -0.1 et 0.1. Le résultat de l'addition de ce bruit à l'ensemble de la distribution de l'ordre des franges est représenté sur la Figure V-8.

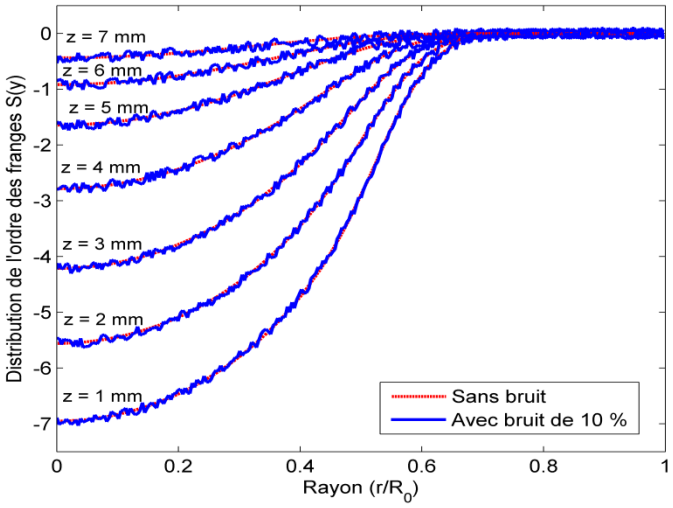


Figure V-8 : Profils d'ordre bruité.

Afin de tester la robustesse des trois algorithmes, nous avons réalisé une étude comparative des algorithmes en question sur les profils présentés sur la Figure V-8. Pour ce faire, nous avons cherché dans un premier temp les paramètres optimaux à attribuer à chaque méthode en cas des données bruitées. Nous avons constaté que les valeurs de M et k pour la technique OL et l'intervalle du degré de polynôme optimal pour la méthode PPP, tous les deux restent inchangés comme dans le cas des données sans bruit. Par contre, en ce qui concerne la technique FHM la courbe de la Figure V-9 révèle qu'il existe une valeur optimale pour le paramètre α qui vaut 0.05 pour diminuer les erreurs de troncature et de discrétisation et agir aussi comme un filtre passe bas [112], [5], [4].

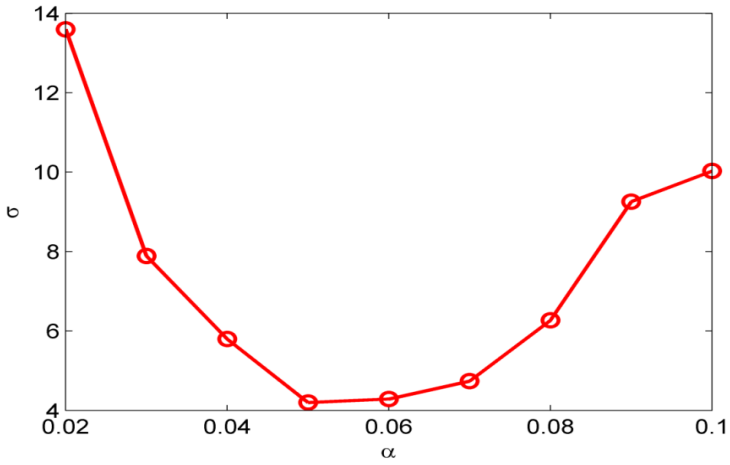


Figure V-9 : Evolution de l'écart quadratique moyen de l'inversion de TA pour différentes valeurs du paramètreα en cas de données bruitées.

Le Tableau V-3 présente l'écart quadratique moyen obtenu pour chaque méthode appliquée dans ses meilleures conditions. Il est clair que le résultat de la méthode OL est le moins précis et dévoile une grande sensibilité au bruit qu'est d'autant plus appréciable aux extrémités de chaque segment d'approximation et au voisinage de l'axe de symétrie. Tandis que la méthode PPP conduit à un écart quadratique moyen plus faible qui est comparable à celui obtenu en inversion des profils d'ordre sans bruit (Tableau V-1). En revanche, on note une légère régression en précision pour la méthode FHM.

Profils de test $z\ (mm)$	**MFH**$\alpha = 0.05$	**OL** $k = 3$ **et** $M = 5$	**PPP** $2p = 28$
1	4.2	10.1	3.0
2	3.8	7.4	2.7
3	2.2	6.6	1.2
4	0.7	3.0	0.5
5	0.9	1.9	0.5
6	0.5	1.8	0.4
7	0.4	2.3	0.3

Tableau V-3 : Comparaison, dans le cas des données bruitées, des écarts quadratiques moyens pour la reconstruction des profils de température par les trois algorithmes étudiés avec leurs paramètres optimaux.

Pour une vue décortiquante des résultats des différents algorithmes, nous présentons sur la Figure V-10 que le résultat d'inversion du profil de l'ordre à $z = 1\,mm$ pour lequel l'écart quadratique est le plus important pour chaque méthode. Tout d'abord, pour la région loin de l'axe de symétrie, l'ensemble des trois méthodes donnent presque le même résultat. En revanche, là où la température est presque constante (au voisinage du centre), la méthode OL produit un profil de température avec plus d'oscillations puis une variation brutale en s'approchant de l'axe de symétrie. En second lieu, la méthode FHM permet la reconstitution du profil de température initial avec une précision tolérable et avec moins de fluctuation mais sans pour autant atteindre la précision de la méthode PPP.

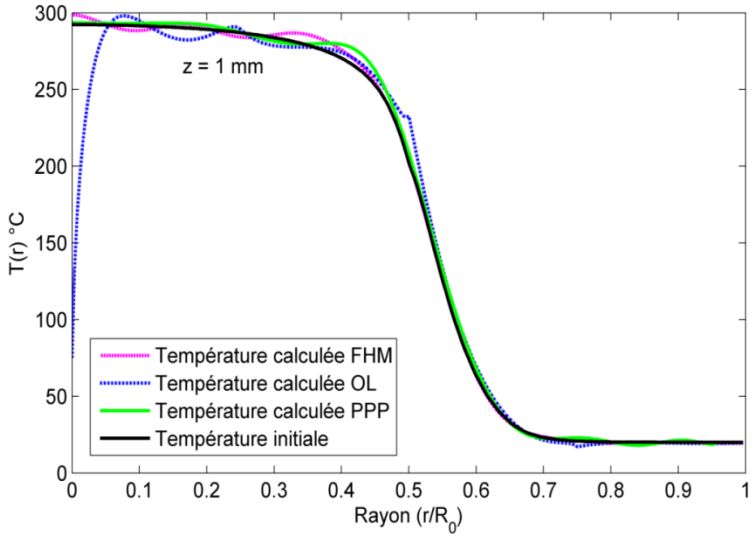


Figure V-10 : Profils de température obtenus par les trois méthodes à la cote z= $1\,mm$.

V-3.4.3 Discussion

Les résultats médiocres que procure la méthode OL sont dus à la singularité de la transformée d'Abel au voisinage de l'axe. Ceci s'explique par le fait que les polynômes de Legendre contiennent des termes en puissance impaire dont leurs transformée d'Abel est de la forme $r^{2n}\,ln\left(R_0 + \frac{\sqrt{{R_0}^2 - r^2}}{r}\right)$ qui conduit à une singularité à l'origine $(r = 0)$ pour laquelle la fonction $f\,(r)$ n'est pas définie. Par contre, les termes en puissances paires ayant comme transformée d'Abel le produit de $\sqrt{{R_0}^2 - r^2}$ par un polynôme en r^2 qui ne présente aucune singularité aux point $r = 0$ ni en $r = R_0$. Cet argument permet également de mettre en

évidence l'intérêt de la méthode PPP qui surmonte le problème de la singularité par l'absence des puissances impaires.

En plus, on constate d'après la Figure V-11, que la méthode OL a un deuxième effet non désirable apparaissant aux extrémités de chaque segment sous la forme d'un profil brisé de température. Cet effet, dû aux raccordements inadéquats des segments, a été corrigé par Ma et al., [82] en chevauchant les intervalles $[2^{k-1};\ 2^{k}\ ]$.

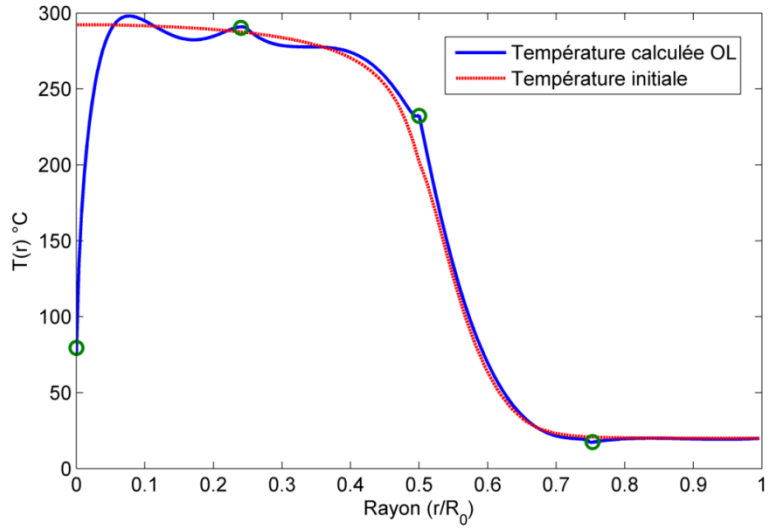


Figure V-11 : Mise en évidence du problème induit par le mauvais raccordement entre les segments par la méthode OL.

V-4 Inversion des données déflectométriques

Nous présentons dans cette section une nouvelle méthode purement numérique basée sur l'usage de transformée de Fourier et celle de Hankel, pour l'inversion de l'équation intégrale (V.1) que nous appelons Fourier-Hankel Adaptée (AFH). Afin de tester la précision et la robustesse en termes de propagation d'erreurs de la méthode proposée, nous la comparons avec trois autres méthodes existantes pour l'inversion des données déflectométriques et récemment réexaminées par Kolhe et al. [86] Il s'agit de la méthode de Simpson d'ordre 3 (NIS), la méthode de quadrature d'ordre 1 (OPF) et la méthode de quadrature d'ordre 2 (TPF). Pour faciliter la comparaison avec les travaux de Kolhe et al., nous avons préféré utiliser les abréviations en anglais pour ces techniques qui sont appelées respectivement *Numerical Integration using Simpson's 1/3rd rule* NIS, *One Point Formula OPF et Two Point Formula TPF*.

V-4.1 Génération du profil test

Pour la lisibilité de l'exposé et pour valider la méthode d'inversion d'Abel proposée, il convient tout d'abord de prendre un exemple de milieu axisymétrique où seront définis les axes. Considérons un cylindre de rayon $20\ mm$ et de hauteur $10\ mm$, chauffé à la température de $200\ °C$ et suspendu dans l'air à la température $T_0 = 20\ °C$ et d'indice de réfraction n_0 comme le montre la Figure V-12. Les courants de convection naturelle génèrent un panache thermique axisymétrique au dessus du disque dans lequel la masse volumique, la température et l'indice de réfraction de l'air varient. La direction du faisceau laser traversant la couche d'air chaud au dessus du disque est parallèle à l'axe x et perpendiculaire à l'axe z du cylindre (Figure V-12). La température et l'indice de réfraction de chaque section située à la cote $z = cte$ varient uniquement dans la direction radiale. On définit la fonction de différence relative d'indice de réfraction $\delta(r)$ par :

$$\delta(r) = \frac{n(r)}{n_0} - 1 \qquad \text{(V.21)}$$

$\delta(r)$ est liée à la température $T(r)$ par la relation suivante :

$$\delta(r) = \frac{\frac{T_0}{T(r)} - 1}{1 + \frac{R}{KPM} T_0} \qquad \text{(V.22)}$$

avec :

$M = 2.88\ 10^{-4}\ kg.mol^{-1}$, masse molaire de l'air.

$P = 10^5 Pa$, pression

$R = 8.314\ J.mole^{-1}.K^{-1}$, constante des gaz parfaits.

$K = 2.256\ 10^{-4}\ m^3.kg^{-1}$, constante de Gladstone-Dale d'air pour $\lambda = 0.6328\ \mu m$.

$T_0 = 20°C$, température ambiante

r et z sont les coordonnées cylindriques.

Le champ de température $T(r)$ au voisinage du disque est calculé numériquement à l'aide d'un code de calcul fondé sur la résolution des équations de Navier–Stokes et de

l'énergie [18]. Le résultat de cette simulation est représenté par le tracé des isothermes sur la Figure V-13.

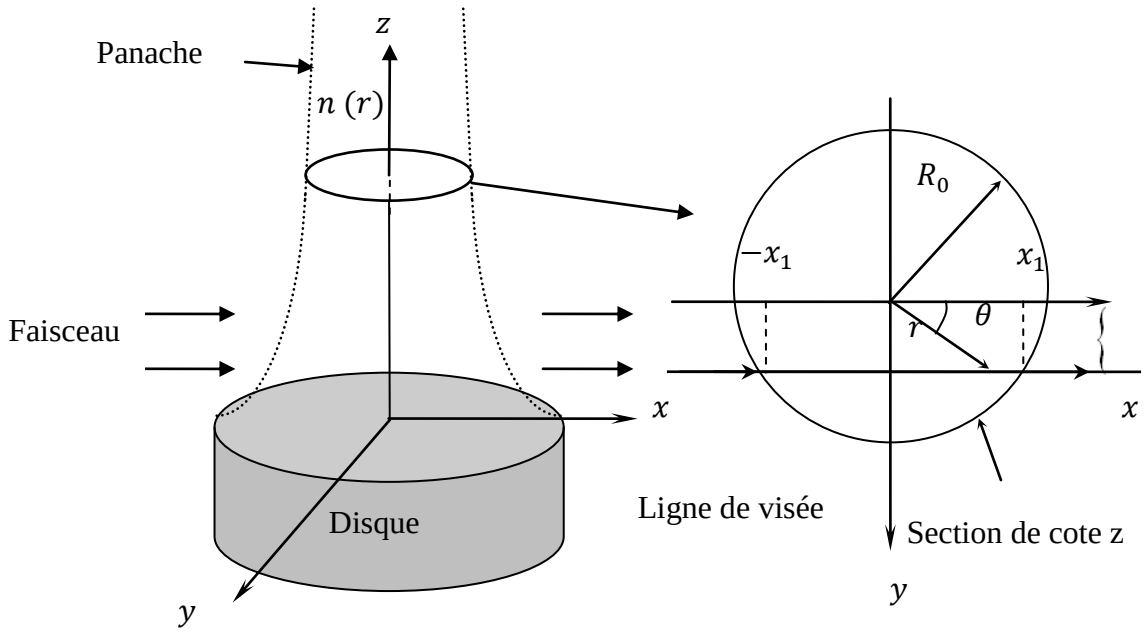


Figure V-12 : Schématisation du champ de température axisymétrique pour l'application de la déflectométrie de moiré.

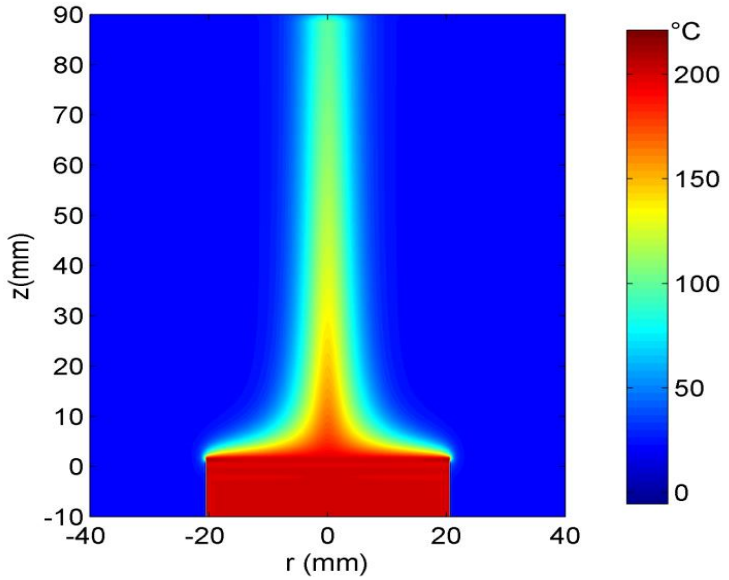


Figure V-13 : Cartographie du champ de température simulé numériquement au dessus du cylindre chauffé.

Comme nous l'avons déjà évoqué dans le Chapitre I :, la technique de moiré est sensible aux déviations angulaires des rayons traversant le milieu d'étude. A cet égard, nous pouvons visualiser selon, le type de montage optique, deux déviations orthogonales différentes: la déviation verticale suivant la direction oz (ou déflection longitudinale) et la déviation latérale suivant la direction oy (ou déflection latérale) [114]. Nous nous intéressons ici à cette dernière déviation qui est régie dans le cas où $z = cte$ par l'équation intégrale suivante :

$$\varepsilon(y) = 2y \int_{y}^{R_0} \frac{\frac{\partial \delta(r)}{\partial r}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr \qquad \text{(V.23)}$$

Nous avons opté pour la méthode présentée par Dasch [115] pour le calcul de la cartographie des déviations angulaires $\varepsilon(y)$ définie par l'équation intégrale (V.23). Par la suite, l'intensité des trames de moiré se calcule par l'expression suivante :

$$I(y,z) = I_m + V cos[\, 2\pi\nu y + 2\pi G \varepsilon(y,z)] \qquad \text{(V.24)}$$

où la seule différence avec l'équation (Chapitre I :) reste le coefficient multiplicatif G qui dépend de l'angle α ainsi que la distance d entre les deux réseaux (voir Figure V-4). L'équation (V.24) permet de simuler le déflectogramme de la Figure V-14.

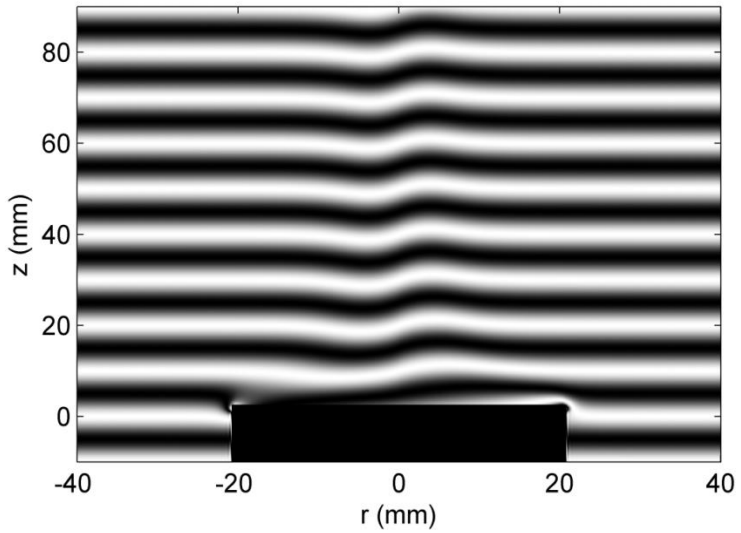


Figure V-14 : Déflectogramme simulé de moiré avec $I_m = 100$; $V = 100$; $\nu = 5$; $G = 1100$.

V-4.2 Méthode Fourier-Hankel adaptée (AFH)

En se basant sur le principe de la déflectométrie de moiré et sur le système de coordonnées de la Figure V-12, l'angle de déviation $\varepsilon\,(y)$ peut être aussi lié à la différence relative d'indice de réfraction $\delta(x,y)$ comme suit:

$$\varepsilon(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\delta(x,y)}{\partial y} dx \qquad \text{(V.25)}$$

On applique la transformée de Fourier (TF) à la fonction $\varepsilon\,(y)$ comme suit:

$$TF[\varepsilon](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(y)\, exp(-\hat{\imath}\omega y)\, dy \qquad \text{(V.26)}$$

où $\hat{\imath}$ désigne ici l'unité imaginaire et ω est la variable de fréquence. En remplaçant l'expression de l'angle de déflection $\varepsilon(y)$ donnée par (V.25) dans l'équation (V.26) on aura :

$$\begin{aligned} TF[\varepsilon](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\delta(x,y)}{\partial y} exp(-\hat{\imath}\omega y)\, dydx \\ &= \hat{\imath}\omega \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,y)\, exp(-\hat{\imath}\omega y)\, dydx \end{aligned} \qquad \text{(V.27)}$$

en passant en coordonnées polaires $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = arctan(y/x)$, l'équation précédente devient :

$$TF[\varepsilon](\omega) = \hat{\imath}\omega \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi} r\delta(r)\, exp(-\hat{\imath}\omega r sin\theta)\, d\theta dr \qquad \text{(V.28)}$$

la relation (V.28) fait apparaître la fonction de Bessel d'ordre zéro [116] qui est définie comme suit:

$$J_0(\omega r) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} exp(-\hat{\imath}\omega r sin\theta)\, d\theta \qquad \text{(V.29)}$$

on aura :

$$TF[\varepsilon](\omega) = \hat{\imath}2\pi\,\omega \int_0^{+\infty} \delta(r) J_0(\omega r) r dr \qquad \text{(V.30)}$$

L'expression (V.30) fait apparaitre la transformée de Hankel d'ordre zéro définie par Watson [117] à l'aide de l'expression suivante :

$$TH[\delta](\omega) = \int_0^{+\infty} \delta(r) J_0(\omega r) r dr \qquad \text{(V.31)}$$

ainsi, l'équation (V.30) peut s'écrire comme suit :

$$TF[\varepsilon](\omega) = \hat{\imath}2\pi\omega TH[\delta](\omega) \qquad \text{(V.32)}$$

Il s'ensuit que le profil radial de $\delta\,(r)$ peut être restitué en calculant la transformée de Hankel inverse de l'équation (V.32) Comme la transformée de Hankel et son inverse ont la même forme mathématique donnée par l'expression de l'équation.(V.31), nous pouvons écrire finalement $\delta(r)$ comme suit:

$$\delta(r) = \frac{1}{\hat{\imath}2\pi} \int_0^{+\infty} TF[\varepsilon](\omega) J_0(\omega r) d\omega \qquad \text{(V.33)}$$

Le fait quand on ne dispose pas d'expression analytique de $\varepsilon\,(y)$, l'intégrale précédente (V.33) ne peut être calculée que numériquement. Donc, il est d'abord nécessaire d'approximer de manière adéquate le calcul de $TF[\varepsilon](\omega)$. En tenant compte du fait que $\varepsilon\,(y)$ est réelle et impaire, sa transformée de Fourier est purement imaginaire. Son expression se réduit à ce que l'on appelle la transformation de Fourier sinus définie par:

$$TF[\varepsilon](\omega) = -2\hat{\imath} \int_0^{+\infty} \varepsilon(y)\, sin(y\omega)\, dy \qquad \text{(V.34)}$$

Dans la pratique, nous avons $N+1$ mesures équidistantes $\varepsilon\,(y_i)$ réparties sur l'intervalle $[0;\, R_0]$. L'angle de déviation s'annule pour $y \geq R_0$. De la même manière, nous supposons que le domaine de fréquences de $TF\,[\varepsilon]\,(\omega)$ est réparti sur une bande limitée comprise entre 0 et ω_{max}. Ainsi, nous sommes amenés à calculer numériquement l'intégrale

(V.34) pour chaque fréquence $\omega_k = k\Delta\omega$, où $\Delta\omega$ est l'espacement de fréquence défini par $\Delta\omega = \frac{\omega_{\max}}{N}$, comme suit :

$$TF[\varepsilon](\omega_k) = -2\hat{\imath} \int_0^{R_0} \varepsilon(y)\, sin(y\omega_k)\, dy \qquad \text{(V.35)}$$

l'équation. (V.35) peut être approchée numériquement par l'expression ci-dessous:

$$TF[\varepsilon](\omega_k) = -2\hat{\imath} \sum_{j=0}^{N} \varepsilon(y_j) sin(y_j\omega_k)\, \Delta y \qquad \text{(V.36)}$$

Cependant il est important de noter que le pas d'échantillonnage $\Delta\omega$ n'est pas arbitraire. Il doit être lié au pas d'échantillonnage Δy des données. Ce résultat est une conséquence directe du théorème d'échantillonnage de Nyquest-Shannon [118] qui exige que la condition ci-dessous soit satisfaite:

$$\omega_{max} \leq \frac{\pi}{\Delta y} \qquad \text{(V.37)}$$

Il vient alors que, l'espacement des fréquences ω_k doit aussi satisfaire la condition suivante:

$$\Delta\omega \leq \frac{\pi}{R_0} \qquad \text{(V.38)}$$

Nous introduisons un facteur α avec $0 < \alpha \leq 1$, tout en vérifiant la condition (V.38) pour choisir l'espacement permis des fréquences. Il suffit de prendre:

$$\Delta\omega = \alpha \frac{\pi}{R_0} \qquad \text{(V.39)}$$

Ainsi, la variable de fréquence devient $\omega_k = k\Delta\omega$ avec k variant de 0 à $\left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne l'entier le plus proche inférieur ou égal à x. Finalement, la forme discrète (V.36) de la TF appliquée à $\varepsilon\ (y_j)$ aura l'expression numérique suivante:

$$TF[\varepsilon](\omega_k) = -2\hat{\imath} \sum_{j=0}^{N} \varepsilon(y_j) sin\left(\frac{\alpha\pi jk}{N}\right) \Delta y \qquad \text{(V.40)}$$

En remplaçant l'expression (V.40) dans l'équation (V.33), on obtient:

$$\delta(r) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_{max}}\sum_{j=0}^{N}\varepsilon(y_j)sin\left(\frac{\alpha\pi jk}{N}\right)J_0(\omega r)\Delta y d\omega \qquad \text{(V.41)}$$

L'équation (V.41) ne présente pas de discontinuité et peut être facilement discrétisée en utilisant n'importe quelle méthode de base d'intégration numérique. En choisissant la technique de quadrature, nous aboutissons à l'expression finale de $\delta(r_i)$:

$$\delta(r_i) = -\frac{\alpha}{N}\sum_{j=0}^{N}\varepsilon(y_j)\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{N}{\alpha}\right\rfloor}sin\left(\frac{\alpha\pi jk}{N}\right)J_0\left(\frac{\alpha\pi ki}{N}\right) \qquad \text{(V.42)}$$

La précision de cette intégration numérique dépend fortement du pas $\Delta\omega$, qui lui-même dépend du facteur α d'après l'équation (V.39). Il est évident alors que le paramètre α que nous avons défini pour le choix des fréquences d'échantillonnage a une grande importance dans la précision de l'inversion de la transformée Abel par cette nouvelle méthode. Il convient aussi de noter que l'expression numérique d'inversion de la transformée d'Abel (V.42) pour les données déflectométriques diffère de celle utilisée en interférométrie [112]. La principale différence reste, par analogie heuristique, la présence du terme sinus au lieu de cosinus. Ceci s'explique par la différence de parité entre les deux fonctions $\varepsilon\ (y)$ et $S\ (y)$.

V-4.2.1 Forme matricielle de la méthode (AFH)

L'écriture de l'équation (V.42) sous la forme matricielle est plus convenable non seulement pour faciliter sa mise en œuvre algorithmique mais aussi pour rester en cohérence avec les méthodes existantes. En outre, une telle représentation permettra de mettre en évidence le niveau de la complexité de la méthode.

Nous changeons l'équation (V.42) sous la forme d'un opérateur matriciel conformément à l'écriture proposée par Dasch [115]:

$$\delta = D.\varepsilon \qquad \text{(V.43)}$$

avec δ et ε sont deux vecteurs colonnes de $(N+1)\times 1$ composantes qui représentent respectivement l'inconnue (la différence relative d'indice de réfraction) et la donnée (angles de déflection selon une ligne de visé). La matrice D est de taille $(N+1)\times(N+1)$. En adoptant la convention de sommation d'Einstein, l'operateur matriciel D_{ij} de la méthode AFH peut être défini comme suit:

$$D_{ij} = \frac{\alpha}{N} B_{ik} F_{kj} \tag{V.44}$$

avec:

$$\begin{aligned} B_{ik} &= J_0\left(\frac{\alpha\pi ik}{N}\right) \quad ; \ 0 \le i \le N \ \ et \ \ 0 \le k \le \left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor \\ F_{kj} &= -sin\left(\frac{\alpha\pi kj}{N}\right) \ ; \ 0 \le j \le N \ \ et \ \ 0 \le k \le \left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor \end{aligned} \tag{V.45}$$

V-4.3 Méthodes existantes

Pour la clarté de cet exposé, nous ne donnons ici que l'expression de l'opérateur matriciel associé à chacune des trois méthodes de comparaison. Pour d'ample détail; le lecteur est invité à consulter la thèse de Kolhe [119] :

V-4.3.1 La méthode NIS

$$\begin{aligned} D_{ij} &= -\frac{1}{3\pi}\frac{\left[2 + \left(1 + (-1)^{(j-i+1)}\right)\right]}{\sqrt{j^2 - i^2}} \qquad si \qquad j > i \ et \neq N \\ &= -\frac{1}{3\pi}\frac{\left[2 + \left(1 + (-1)^{(j-i+1)}\right)\right]}{\sqrt{j^2 - i^2}} \qquad si \qquad j = N \\ &= \ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad si \qquad j < i \end{aligned} \tag{V.46}$$

V-4.3.2 La méthode OPF

$$\begin{aligned} D_{ij} &= -\frac{1}{2\pi} ln\left[\frac{j + 1 + \sqrt{(j+1)^2 - i^2}}{(j-1) + \sqrt{(j-1)^2 - i^2}}\right] \qquad si \quad j > i \ \ et \ \ j \neq 1 \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left[2 + ln\left(\frac{j + 1 + \sqrt{(j+1)^2 - i^2}}{j + \sqrt{j^2 - i^2}}\right)\right] \quad si \quad j > i \ \ et \ \ j = 1 \\ &= -\frac{1}{2\pi} ln\left[\frac{j + 1 + \sqrt{(j+1)^2 - i^2}}{(j-1) + \sqrt{(j-1)^2 - i^2}}\right] \qquad si \quad j = i \ \ et \ \ j \neq 0 \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad si \quad j < i \ \ ou \ j = i = 0 \end{aligned} \tag{V.47}$$

V-4.3.3 La méthode TPF

$$
\begin{aligned}
D_{ij} &= \frac{1}{\pi}\left[A_{ij} - A_{ij-1} - (j+1)B_{ij} + (j-1)B_{ij-1}\right] && si\ \ j > i\ et\ j \neq 1 \\
&= \frac{1}{\pi}\left[A_{ij} - \ (j+1)B_{ij} - 1\right] && si\ \ \ j > i\ et\ j = 1 \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\ A_{ij} - (j+1)B_{ij}\right] && si\ \ \ j = i\ et\ i \neq 0 \\
&= 0 && si\ \ j = i = 0\ ou\ j < i
\end{aligned}
\tag{V.48}
$$

avec:

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \sqrt{(j+1)^2 - i^2} - \sqrt{j^2 - i^2} \\
B_{ij} &= ln\left[\frac{j + 1 + \sqrt{(j+1)^2 - i^2}}{j + \sqrt{j^2 - i^2}}\right]
\end{aligned}
\tag{V.49}
$$

V-4.4 Validation numérique

Les quatre algorithmes sont formulés suivant la notation matricielle telle que $\delta \ = \ D.\varepsilon$ qui est bien appropriée pour effectuer un traitement rapide d'un grand nombre de données. La reconstruction sera plus rapide si la matrice D est calculée à l'avance. A priori les quatre algorithmes sont différents par leurs matrices associées. Par analogie avec Kolhe et al. [86], nous avons comparé dans la Figure V-15 les coefficients $D_{9\ j}$ des quatre algorithmes. Cette comparaison révèle que de la méthode AFH a un comportement similaire aux méthodes existantes. D'après cette figure on constate que le coefficient $D_{9\ j}$ relatif à la méthode AFH suit une tendance asymptotique avec l'augmentation du rayon. Nous observons aussi sur la Figure V-15 que les points voisins de ($j \ \approx \ 9$) ont plus de poids que ceux qui sont situés plus loin ($j > \ 9$) de celui-ci. En d'autres termes, on est en présence d'une matrice D qui est à diagonale dominante par bloc. Elle est donc inversible d'après le théorème de Gershgorin-Hadamard [120] ce qui permet d'exploiter cette propriété pour l'évaluation du problème direct par cette méthode.

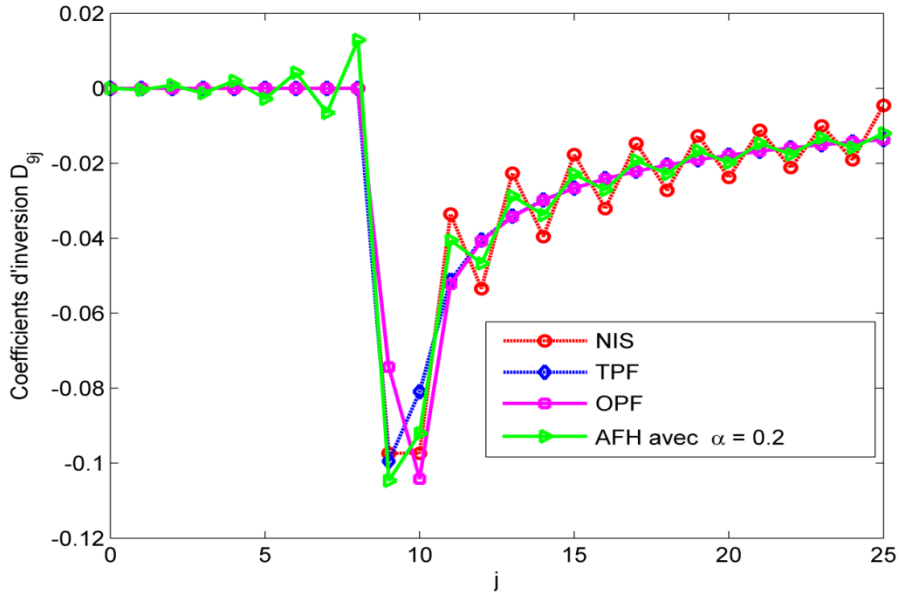


Figure V-15 : Coefficient $D_{9\,j}$ de chaque algorithme.

V-4.5 Précision de l'inversion

Dans ce paragraphe nous avons effectué une étude de l'impact du paramètre α sur la précision de l'inversion de la transformée d'Abel par la technique AFH en prenant comme donnée le profil de l'angle de déflection $\varepsilon(y)$ de la Figure V-16. A ce propos, nous avons calculé l'écart quadratique moyen σ entre la température résultante du processus d'inversion et la température initiale qui est tracée sur la Figure V-17.

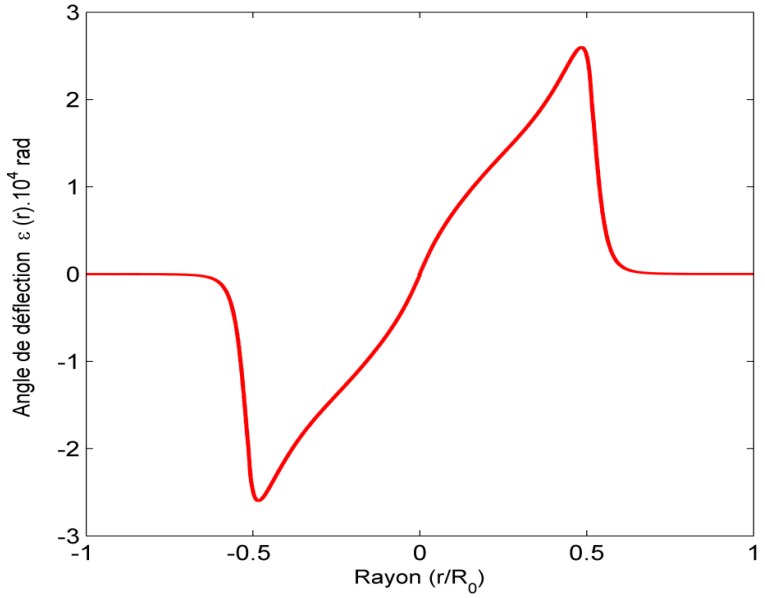


Figure V-16 : Profil de l'angle de déflection $\varepsilon(y)$ pour une ligne de visé à $z = 1\ mm$.

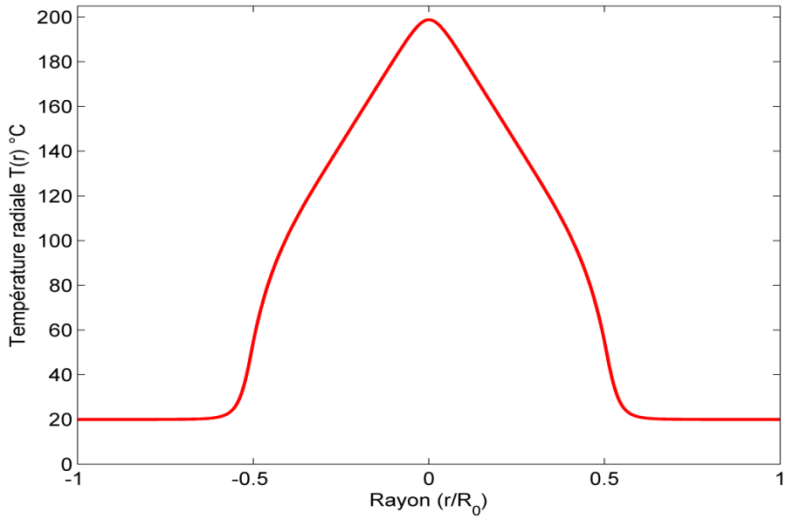


Figure V-17 : Profil de température $T(r)$ pour $z = 1\ mm$.

La Figure V-18 représente la variation de σ en fonction de α. On constate qu'une diminution du paramètre α conduit à une réduction de l'erreur d'inversion qui devient quasiment constante pour des valeurs de α inférieures à 0.2. Dans ce cas précis le seuil $\alpha = 0.2$ réalise un optimum. En regardant la même figure, nous constatons que le nombre de points N n'a pratiquement pas d'effet sur σ en variant α. Ce résultat justifie le fait que le paramètre α agit sur la précision de l'inversion en améliorant le calcul de la TF et de la fonction de Bessel J_0.

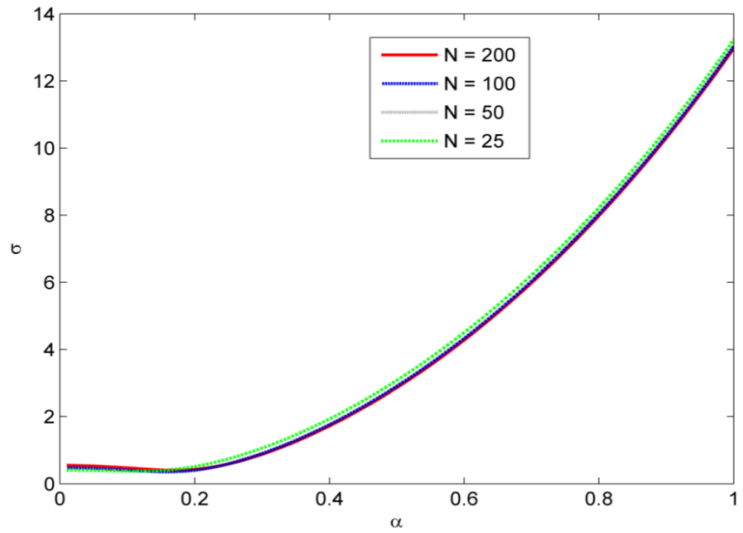


Figure V-18 : Évolution de l'écart quadratique moyen σ en fonction du paramètre α pour différentes valeurs de N.

Par conséquence, nous pouvons affirmer que $\alpha = 0.2$ réalise un optimum pour l'application de la méthode AFH pour ce profil test. Il est aussi important de noter qu'une diminution de α s'accompagne d'une augmentation de la complexité temporelle et spatiale. En effet, en diminuant le facteur α les dimensions des matrices B et F (V.45) deviennent très importantes. Par ailleurs, la Figure V-19 montre un écart négatif significatif pour $\alpha = 1$. Ce résultat a été également signalé par Ma et al. [112]. En revanche, pour $\alpha = 0.2$, la méthode AFH permet de reconstruire avec satisfaction le profil initial de température (Figure V-19).

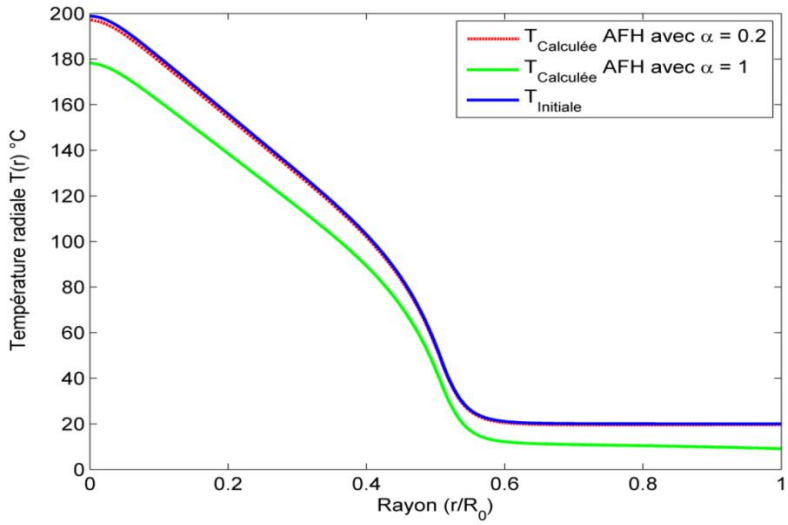


Figure V-19 : Profils de température recalculés pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0.2$.

V-4.6 Comparaison avec les méthodes existantes

La Figure V-20 compare l'écart quadratique moyen des trois méthodes existantes et de celui de la technique proposée AFH. Au-delà d'un nombre de points $N \geq 20$, tous les algorithmes produisent une inversion très acceptable avec un avantage de la méthode AFH suivie par la méthode TPF puis la méthode OPF et dans le dernier rang on trouve la méthode NIS.

Par ailleurs, pour analyser localement la précision de chaque algorithme, nous avons calculé en chaque point r_i l'erreur relative définie comme la différence de la température reconstruite $T_{calculé}(r_i)$ et la température initiale de référence, $T_{initiale}(r_i)$. Son expression est la suivante :

$$\Delta(r_i) = \frac{|T_{calculé}(r_i) - T_{initiale}(r_i)|}{T_{initiale}(r_i)} \quad \text{(V.50)}$$

La Figure V-21 nous montre que la variation de l'erreur relative croit en s'approchant du centre $(r = 0)$ pour l'ensemble des algorithmes étudiés. Cette propagation d'erreur s'explique par l'effet cumulatif de l'intégrale d'Abel de l'extrémité vers le centre. Toutefois, les erreurs des méthodes AFH et TPF sont les plus faibles et comparables entre elles et démontrent l'aptitude de ces deux techniques à reconstituer le champ initial de température avec plus de précision.

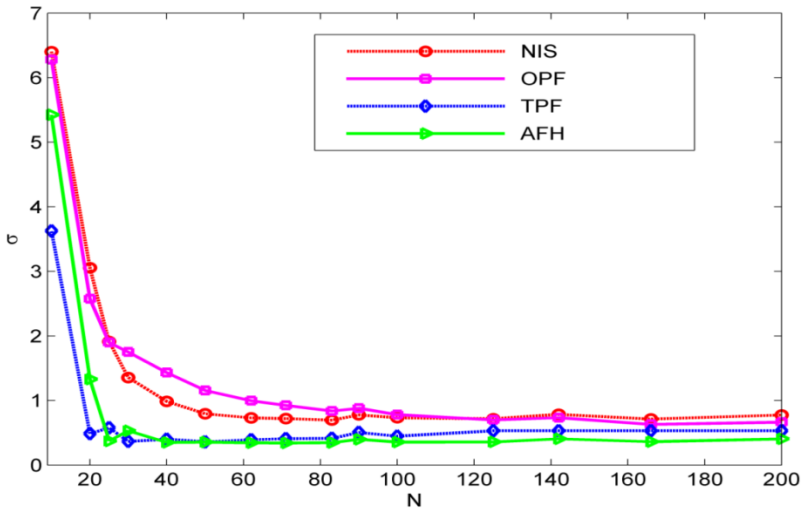


Figure V-20 : Comparaison entre les différentes méthodes d'inversion d'Abel.

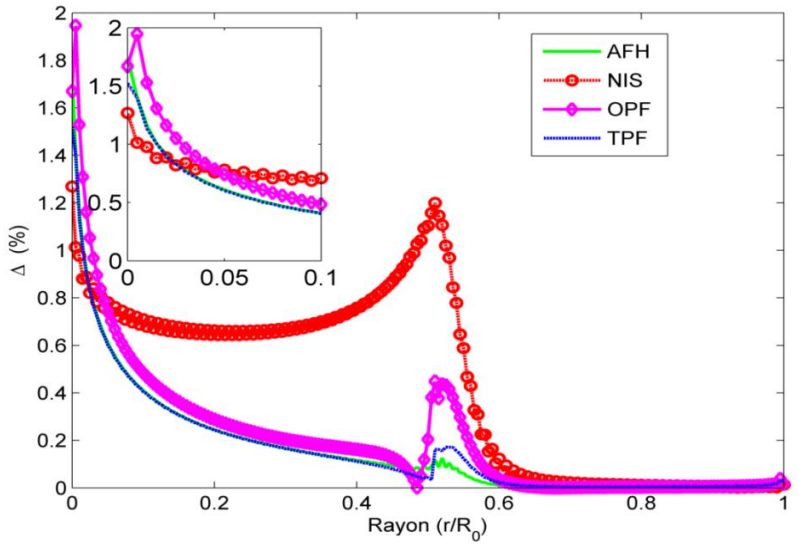


Figure V-21 : Évolution de l'erreur relative pour les différentes méthodes.

V-4.7 Propriété de filtrage de la méthode AFH

Un des avantages potentiels de la méthode proposée est que le filtrage de bruit est implicitement pris en compte dans le processus d'inversion. Cette propriété est en fait très utile notamment pour l'inversion des données expérimentales qui sont inévitablement corrompues par le bruit qui altère significativement le résultat de l'inversion. Le bruit majoritaire dans les films optiques par lumière cohérente est nul doute le bruit de speckle. Sa contribution dans le spectre fréquentiel du signal est située dans le domaine des hautes fréquences. Étant donné que la méthode AFH fait intervenir le calcul de la TF, nous pouvons réaliser un filtrage des données $\varepsilon(y)$ bruitées en éliminant une partie des composantes du spectre fréquentiel généré par la seconde sommation de l'équation (V.42). En contraste, l'étude faite par Ma et al. [112] attribut les hautes fréquences dans le spectre fréquentiel aux erreurs de discrétisation et que l'inversion ne peut être bien estimée que par les premières composantes du spectre des données. Dans les deux cas, nous pouvons appliquer un filtre passe-bas idéal pour éliminer toutes les fréquences allant du rang $N+1$ à $\left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor$. Ainsi, le paramètre α n'agit pas seulement sur l'affinement du pas du calcul du spectre de Fourier de l'angle de déviation et l'approximation de la fonction de Bessel, mais aussi sur le lissage des données dans le processus d'inversion. Finalement, la formule d'inversion de la méthode AHF mettant en jeu le filtrage du bruit est :

$$\delta(r_i) = -\frac{\alpha}{N}\sum_{j=0}^{N}\varepsilon(y_j)\sum_{k=0}^{N} sin\left(\frac{\alpha\pi jk}{N}\right) J_0\left(\frac{\alpha\pi ki}{N}\right) \tag{V.51}$$

V-4.7.1 Inversion des données bruitées

Les sources de bruit affectant les images de franges de moiré déflectométriques sont le fond gaussien, le speckle et l'effet Talbot [121]. Signalons aussi que les franges de moiré se déforment d'une manière d'autant appréciable que le gradient d'indice de réfraction est important (voir Figure V-14). Par conséquence, des erreurs résiduelles de l'analyse de ces figures de franges peuvent générer des instabilités de la solution de l'intégrale d'Abel. Afin de tester l'aptitude de l'algorithme proposé de filtrer le bruit, nous supposons que l'angle de déviation (Figure V-22) est affecté d'un bruit additif de densité uniforme et d'amplitude 10%.

C'est sur ce profil que les deux versions de la méthode AFH, avec et sans filtrage, seront testées.

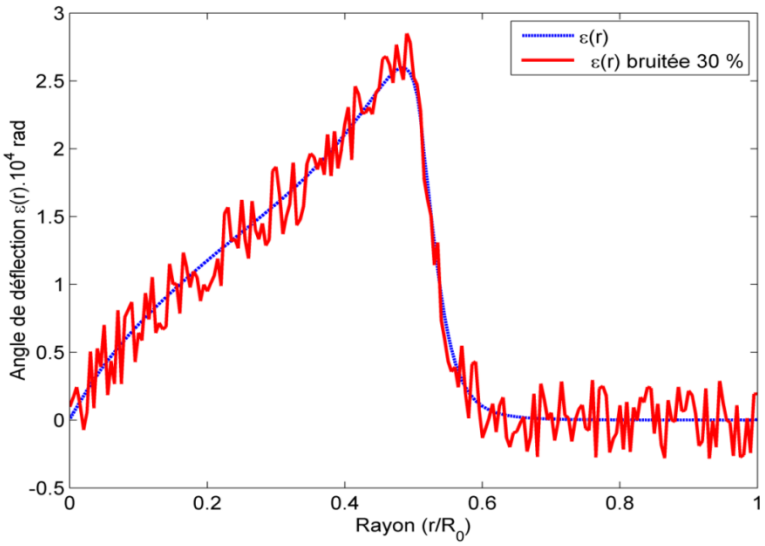


Figure V-22 : Profil de l'angle de déflection bruité.

La Figure V-23 montre qu'une diminution du paramètre α conduit également à une réduction de l'erreur d'inversion pour les deux versions de la méthode AFH, qui ont emprunté pratiquement la même tendance jusqu'à une valeur de α qui vaut 0.6. En dessous de cette valeur, on note un net avantage de la version AFH avec filtrage passe-bas par rapport à la variante sans ce filtre. L'augmentation de la précision résulte de la diminution des erreurs de discrétisation puisqu'en diminuant α, l'espacement devient de plus en plus petit. Toutefois, pour des valeurs de α trop petites la fréquence de coupure du filtre passe-bas idéal qui est $\left(\omega_c = \frac{N\alpha\pi}{R_0}\right)$ devient trop faible de telle sorte que le nombre N de composantes fréquentielles devient insuffisant (certaines composantes du signal seront éliminées) ce qui conduira à une grave distorsion du signal original provoquant ainsi une augmentation de l'erreur d'inversion. On peut remarquer aussi que pour le profil testé, $\alpha = 0.2$ réalise presque une valeur optimale pour la version AFH avec filtrage. La Figure V-24 compare alors la reconstitution du champ de température par les différentes méthodes étudiées à partir des données bruitées. Là encore on constate l'avantage de la méthode proposée par rapport à aux méthodes existantes.

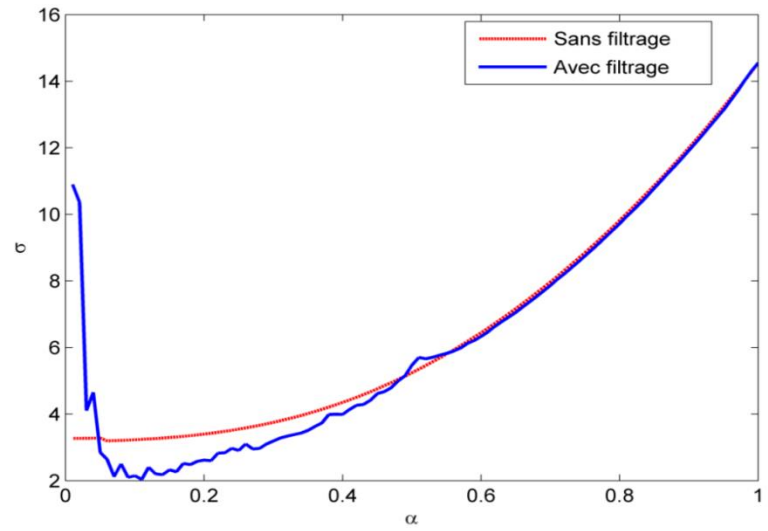


Figure V-23 : Évolution de l'erreur quadratique en fonction du paramètre α pour les deux versions de la méthode AFH.

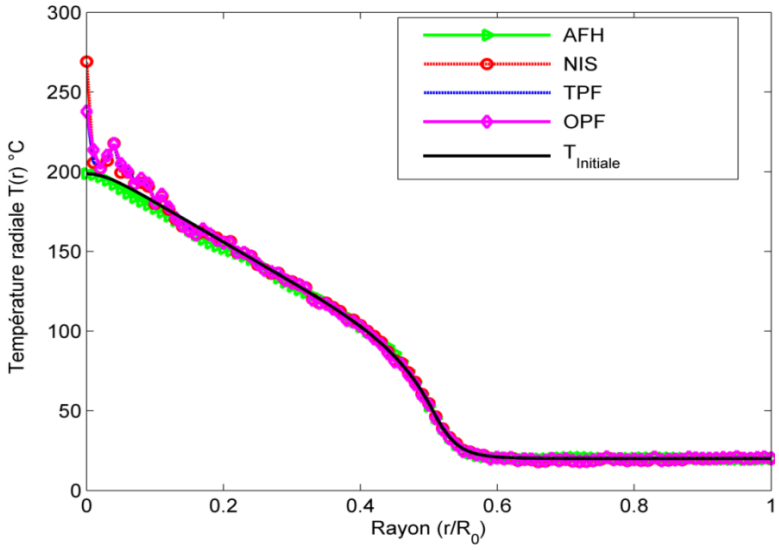


Figure V-24 : Profils de température recalculés pour les quatre méthodes.

V-5 Conclusion

Ce chapitre englobe sept algorithmes pour la résolution de la transformé d'Abel, dont trois sont pour le cas interférométrique et quatre pour le cas déflectométrique,

Pour l'inversion des données interférométriques, nous avons présenté une nouvelle reprise de la méthode polynomiale dans la résolution de la transformée d'Abel inverse en sa version holographique. Cette méthode semi-analytique, montre rigoureusement sa capacité de surmonter la singularité de la TA, son aptitude de filtrage du bruit en profitant de l'ajustement

des profils de l'ordre des franges par moindre carrés. Ainsi, nous avons proposé une expression finale de $f(r)$ qui peut être calculée au préalable pour un degré donné du polynôme indépendamment des coefficients a_{2i} délivrés par la régression par moindre carrés. Il en résulte un gain considérable en complexité temporelle. La technique FHM fournie aussi des résultats plus précises en comparaison avec la méthode PPP et permet de surmonter de problème de la singularité de la TA. Pour la méthode OL, on peut dire que malgré la bonne prestation qu'a connue l'analyse multi-résolution par TO dans l'approximation numérique des fonctions, on préserve à cette méthode sa vigilance d'approximation des profils de l'ordre des franges ainsi que leurs dérivées. On reproche à cette méthode son défaut de vaincre le problème de la singularité de la TA.

Pour l'inversion des données déflectométriques, nous avons présenté une nouvelle technique AFH purement numérique, basée sur l'utilisation des transformées mathématiques, pour l'inversion de l'équation intégrale d'Abel. Nous avons détaillé les fondements mathématiques de cette technique, ainsi nous avons proposé un opérateur linéaire qui facilite sa mise en œuvre. Cet opérateur est indépendant des données sujettes à l'inversion. Ceci permet de le calculer et de le stoker pour gagner en complexité temporelle. La technique proposée fournie des résultats plus précis par rapport aux méthodes existantes NIS, TPF et OPF. Ce qui fait la force de la méthode AFH est la présence du paramètre α dans son expression numérique d'inversion pour réduire significativement les erreurs de discrétisation. Théoriquement, une valeur du paramètre α proche de 0 conduit à une augmentation de la précision de l'inversion des données sans bruit. Dans cette étude, nous avons montré à travers les résultats de la simulation que $\alpha = 0.2$ réalise un optimum pour que l'obtention de l'inversion de la transformée d'Abel soit suffisamment précise. En outre, nous avons aussi proposé une version avec filtrage de la technique AFH. Le filtre passe-bas permet d'éliminer toutes les composantes de Fourier à partir de $N + 1$ jusqu'à $\left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor$. Par cette opération, on peut s'affranchir de tout bruit de haute fréquence notamment celui engendré par le speckle.

Les résultats de ce chapitre vont être adoptés dans le prochain chapitre, pour la reconstruction tomographique du champ de la température expérimental.

Chapitre VI : Expérimentation et mesures

VI-1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons étudié en détail l'ensemble des algorithmes, permettant de donner la tomographie du champ de température d'un milieu transparent à révolution axiale, en se basant toujours sur des données issues des simulations. En revanche, la confrontation avec des situations expérimentales permettant d'avoir des images de franges réelles. Ainsi, appliquer un traitement numérique à ces images permet de cerner d'une manière concrète et assez globale toutes les circonstances qu'on n'avait pas pu simuler ou même pas imaginer. Ceci dévoile à la fois la nature physique du problème et l'intérêt de sa solution mathématique, comme disait Fourier « l'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques ».

Donc, nous allons dans la première section, présenter le dispositif expérimental permettant d'obtenir des interférogrammes holographiques de qualité toute en décrivant le travail expérimental effectué : réalisation mécaniques, optique, développement des plaques photosensibles et enregistrement.

Puis dans la seconde section nous présentons les résultats de l'analyse des franges puis ceux de l'inversion de la transformée d'Abel.

La dernière section de ce chapitre aura comme objectif de présenter une validation globale de la métrologie thermique réalisée. Nous proposons une corrélation empirique du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh (Ra) et nous la comparons à des corrélations existantes dans la littérature.

VI-2 Description de l'appareillage

VI-2.1 Schéma optique de l'interféromètre holographique

Le schéma optique de cet instrument est représenté sur la Figure VI-1. La source cohérente laser Hélium-Néon émet en continu sur une longueur d'onde de $0.6328\ \mu m$, une puissance voisine de $10\ mW$. Le faisceau de section $1.5\ mm$ provenant de ce laser rencontre la lame séparatrice (2) qui le divise en deux faisceaux cohérents. Le faisceau transmis (50%)

constitue l'onde de référence et celui réfléchi (50%) l'onde objet. Nous allons considérer, successivement les trajets de ces faisceaux.

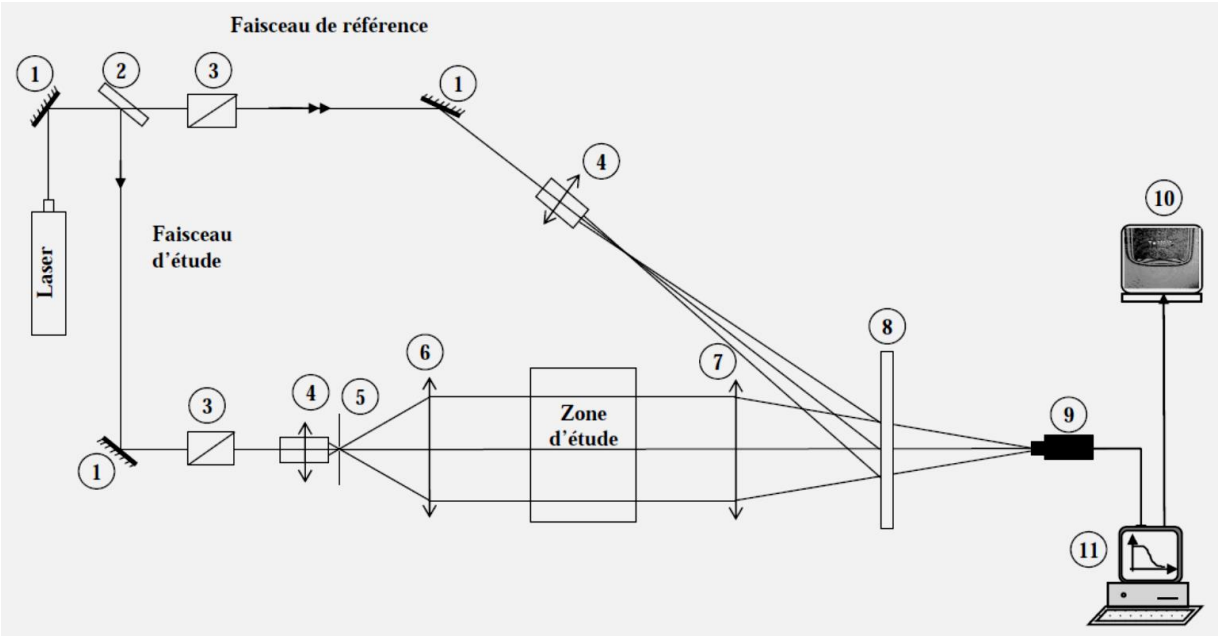


Figure VI-1 : Schéma de l'interféromètre holographique. 1-Miroir, 2-Séparatrice, 3-Atténuateur, 4-Objectif de microscope, 5-Trou, 6-Lentille collimatrice, 7-Lentille réductrice, 8-Plaque holographique, 9-Caméra CCD, 10-Moniteur de visualisation, 11-Ordinateur.

VI-2.1.1 Faisceau objet

Le faisceau lumineux réfléchi par la séparatrice constitue l'onde d'étude. Il est réfléchi par le miroir (1) pour prendre la direction du milieu étudié. Le faisceau traverse ensuite le dispositif atténuateur (3) constitué d'une lame $\lambda/2$ et d'un polariseur permettant de régler l'intensité du faisceau tout en maintenant fixe la direction de polarisation.

Le système (4) et (5) constitué d'un objectif de microscope 40X et d'un filtre spatial de 100 µm de diamètre permet de filtrer ce faisceau et de le rendre divergent pour couvrir la lentille collimatrice (6) de $150\ mm$ de diamètre et de focale $500\ mm$. Les rayons parallèles émergents de (6) traversent la zone d'étude. Une lentille convergente (7) de distance focale $500\ mm$, concentre la lumière à son foyer situé au-delà de la plaque holographique (8). C'est en ce point que doit être disposé le diaphragme de la caméra pour l'enregistrement de l'interférogramme.

La lentille collimatrice (6) doit être de bonne qualité optique puisque la précision de l'onde plane d'analyse du milieu en dépend. Cependant, lorsqu'on augmente la largeur du

champ de l'interféromètre qui est établi par le diamètre de cette lentille, des aberrations géométriques apparaissent au voisinage du contour de la lentille (loin de l'approximation de Gauss). Dans cette zone, ces aberrations introduisent des distorsions circulaires dans les images de franges. Ainsi, nous ne prenons pas en compte cette zone lors de l'analyse de franges.

VI-2.1.2 Faisceau de référence

Le pinceau lumineux transmis par la séparatrice (2) constitue le faisceau de référence. Le miroir (1) le réfléchit vers l'objectif X20 (4) qui l'élargit pour illuminer la plaque holographique. Sur le trajet de référence on a également placé un dispositif atténuateur (3) pour rendre plus aisé le réglage du rapport des intensités des deux faisceaux. L'objectif X20 est mobile suivant deux déplacements micrométriques YZ. Ces déplacements permettront d'introduire les réseaux de franges de référence par l'ajout d'un déphasage optique pour améliorer les exploitations quantitatives des interférogrammes.

VI-2.1.3 Bloc de réception

Les deux faisceaux, respectivement d'étude et de référence, interceptent le plan de la plaque holographique (8). Celle-ci doit avoir une très haute résolution. Elle est montée sur un support rigide en matière inoxydable (pour éviter toute oxydation par les produits chimiques de développement). On réalise l'hologramme de la zone étudiée en impressionnant la plaque par les deux faisceaux dont le rapport d'intensité est initialement réglé à une valeur voisine de 3. L'exposition de la plaque au laser dure environ une minute et s'effectue dans l'obscurité totale de la salle. Ensuite, on place un capot pour cacher la plaque holographique permettant ainsi à l'opérateur de réaliser le développement "in situ" et en plein lumière. Ce capot est muni d'un orifice pour introduire les produits chimiques (révélateur, bain d'arrêt, fixateur et agent mouillant). Le développement achevé, on enlève le capot afin de laisser sécher la plaque dans l'air ambiant et d'observer une teinte plate sans aucun réglage.

VI-2.1.4 Support de l'interféromètre

L'interférométrie holographique est une technique très précise et sensible. L'enregistrement de la haute densité des micro-franges constituant l'hologramme nécessite une très bonne stabilité du banc optique pendant la durée de l'exposition. Autrement dit, les

composants doivent être montés sur une table exempte de toute vibration et assurant une bonne planéité avec un minimum de dilatation. Pour satisfaire ces contraintes, nous avons choisi une table en marbre de 30 mm d'épaisseur et dont les dimensions sont indiquées sur la Figure VI-2. L'originalité de notre approche expérimentale est de concevoir un instrument de mesure complètement découplé et indépendant du milieu d'étude. Pour cela, une ouverture carrée $de\ 40\ cm\ \times\ 40\ cm$ a été découpée sur la table permettant d'insérer le milieu d'étude et de régler aisément la dimension verticale de la zone à investir. Pour amortir les vibrations, cette table est supportée (voir Figure VI-2) par des silent blocs.

La réalisation mécanique des supports optiques a été entreprise dans l'atelier du laboratoire LP2M2E. Les supports destinés à la fixation des éléments optiques ont été confectionnés et largement dimensionnés pour s'accommoder à la hauteur du milieu d'étude. Les accessoires mécaniques et les composants optiques ont été fournis par la Société Trioptics de France. Le châssis porte-plaque holographique est coiffé d'une cuve en inox inoxydable qui permet le développement chimique in-situ de l'hologramme.

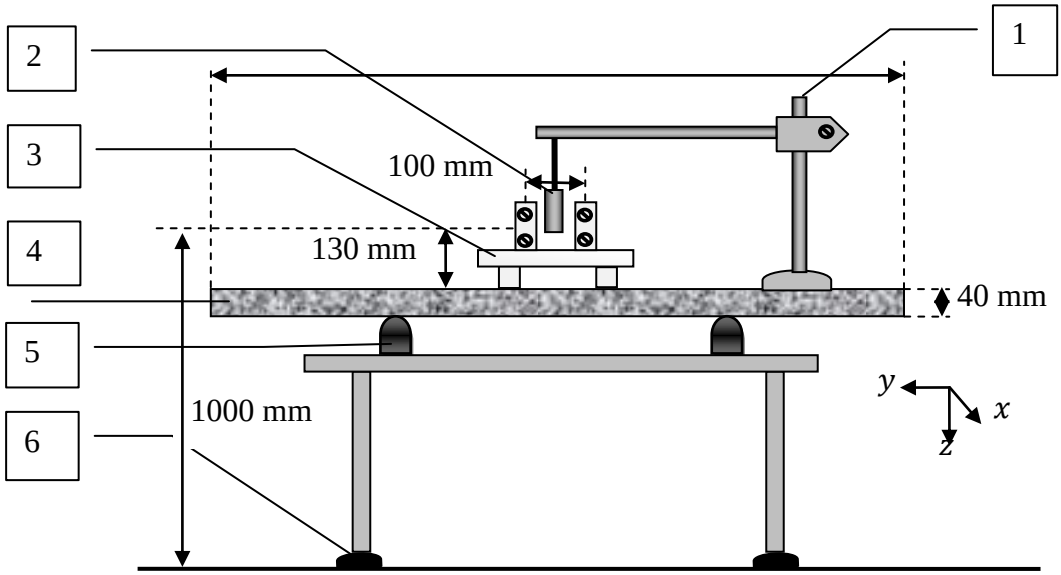


Figure VI-2 : Coupe latérale du dispositif expérimental (vue de face). 1 - Support en acier de hauteur réglable, 2 - Cylindre chauffé par une résistance électrique, 3 - Support en inox de cuve de développement des plaques, 4 - Table en marbre, 5 - Silentblocs, 6 - Semelle en caoutchouc.

VI-2.1.5 Acquisition et traitement des interférogrammes

L'interféromètre holographique est équipé d'une caméra C.C.D (de type *Imaging-Source*) permettant de réaliser l'acquisition des interférogrammes. Elle fournit une représentation numérique de l'image suivant une matrice 1280×960 pixels. Les données sont transmises d'une part à un moniteur pour visualiser la figure d'interférence et ajuster les réglages (contraste, saturation, alignement…) et d'autre part à un ordinateur pour une analyse quantitative des franges d'interférence. La caméra CCD permet de filmer l'interférogramme pour des études dynamiques du champ de température et pour choisir la meilleure image à traiter en cas de perturbation extérieure.

VI-2.1.6 Filtrage spatial

Du fait de la grande cohérence du faisceau laser, la présence de défauts et de poussières sur les surfaces optiques il y a apparition de figures de diffraction non localisées. Ceci peut affecter localement l'intensité du faisceau d'étude alors qu'il est souhaitable d'avoir un éclairement le plus homogène possible sur la plaque holographique. Pour remédier à cette anomalie, on place un diaphragme de diamètre adéquat ($100\ \mu m$) sur le trajet du faisceau pour

produire des anneaux de Newton (Figure VI-3). En filtrant les hautes fréquences pour ne laisser que la tache centrale qui constitue 95% de l'intensité totale du faisceau, on obtient une onde exempte de toute figure de diffraction parasite. Pour que ce système fonctionne correctement, il faut que le trou soit exactement ou point focale de l'objet. Le réglage (généralement fastidieux et lent) s'effectue à l'aide d'un dispositif spatial de déplacement XYZ à vis micrométriques.

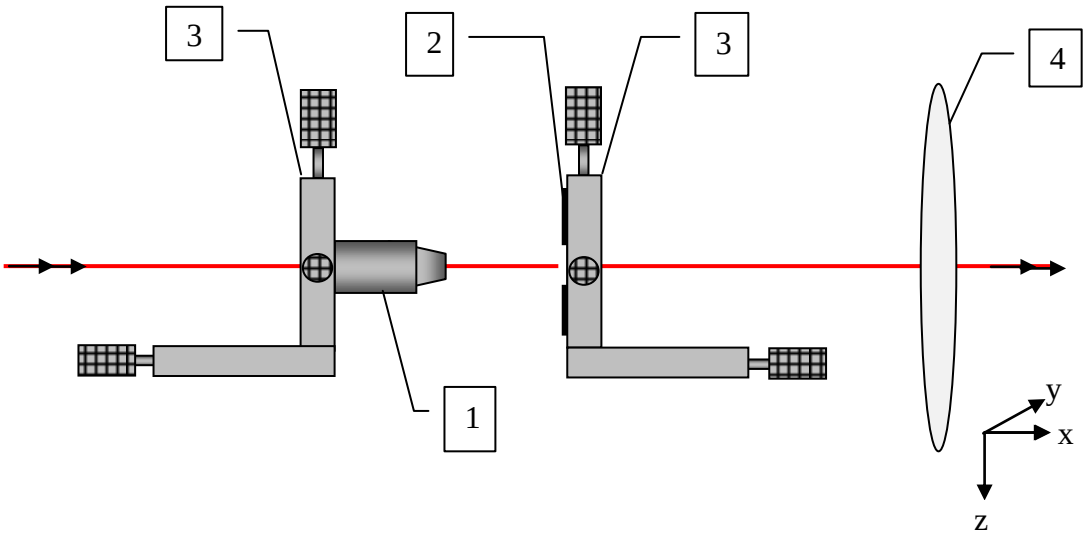


Figure VI-3 : 1 - Objectif 40X du microscope, 2 - Trou de diamètre 100 μm, Platine de déplacement à trois axes, 4- Lentille collimatrice.

VI-3 Mesures

Les interférogrammes présentés dans cette section résument l'ensemble des mesures effectuées sur une série de cylindres de différents rayons $15\ mm$, $20\ mm$, $25\ mm$ et $40\ mm$, pris chacun à des températures variant entre $24°C$ et $220°C$. Ces interférogrammes vont servir à tester les traitements mathématico-numériques que nous avons présentés dans les chapitres précédents. En outre, les champs de température mesurés permettront de déterminer le coefficient d'échange par convection entre la surface du disque et l'air ambiant. Nous pourrons en déduire des corrélations utiles du nombre de Nusselt en fonction de celui de Rayleigh. Le Tableau VI-1 résume les configurations étudiées pour tous les interférogrammes réalisés au cours de cette étude.

	Rayons des cylindres étudiés			
	$R = 15\ mm$	$R = 20\ mm$	$R = 25\ mm$	$R = 40\ mm$
T_w (°C)	100	80	80	37
	150	120	100	90
	200	140	120	115
	220	160	160	160
	-	180	185	-
	-	220	-	-

Tableau VI-1 Données expérimentales des interférogrammes réalisés.

Avant toute évaluation, l'image de l'interférogramme délivrée par la caméra subit un prétraitement qui consiste à découper la zone utile symétrique à conserver pour l'extraction de la phase (Figure).

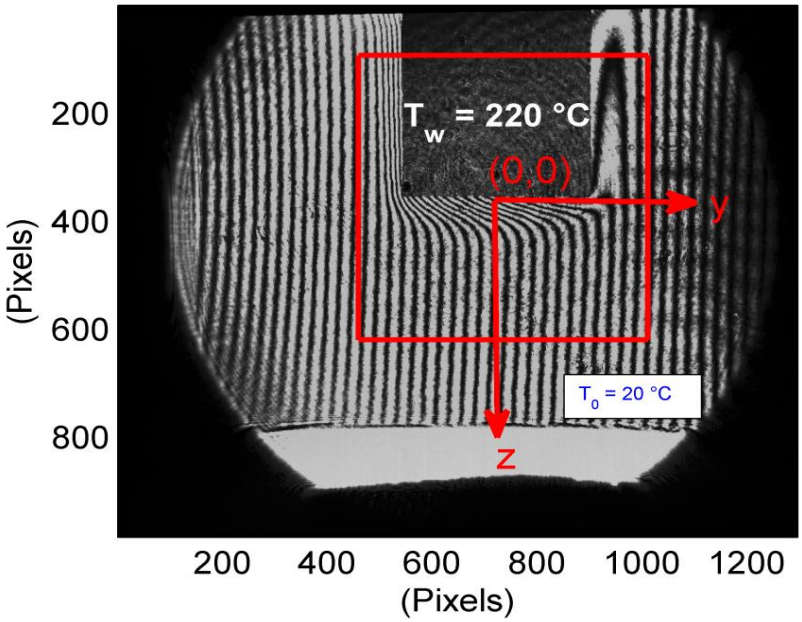


Figure VI-4 : Image d'un interferogramme de dimension 1280×960 *montrant la zone d'intérêt encadrée ainsi que le système de repérage utilisé.*

La Figure VI-5 montre des exemples d'interférogrammes avec franges de fond verticales ou en teinte plate (sans frange de référence) réalisés par l'interféromètre holographique. Ces images sont porteuses d'informations qualificatives sur le champ de température et le transfert de chaleur autour du cylindre chaud. En effet, la zone contenant les franges en teinte plate délimite le domaine qui a subi une variation de température entre

l’instant de réalisation de l’hologramme (température ambiante) et l’instant d’enregistrement des franges (température variable). Autrement dit, la dernière frange loin du cylindre délimite la couche d’air chaud ou ce que l’on appelle en langage thermique la couche limite thermique. Plus la température du cylindre augmente, plus le nombre de ces franges augmente. La couche limite thermique se met en évidence par la zone où les franges se déforment sur l’interférogramme avec des franges de référence.

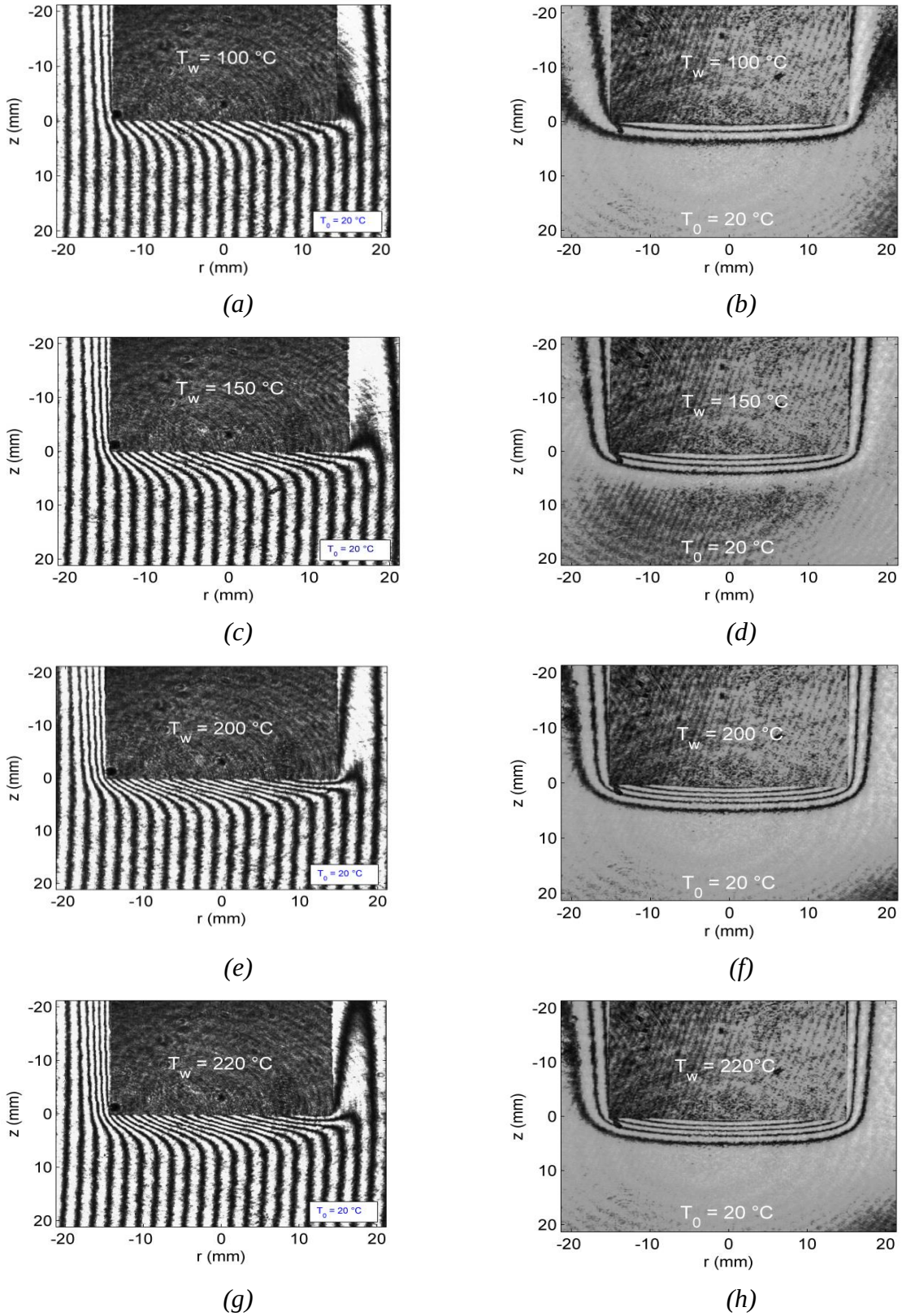


Figure VI-5 : (a), (c), (e), (g) - Interférogrammes avec franges de référence; (b), (d), (f), (h) - interférogrammes en teinte plate.

VI-3.1 Perturbations extérieures

La métrologie thermique par interférométrie holographique est très sensible aux variations du chemin optique en dehors du phénomène étudié. De ce fait, les perturbations mécaniques ou thermiques peuvent introduire des erreurs sur la mesure. Le problème le plus présent lors de l'enregistrement des franges est celui des courants convectifs dans la salle où est placé l'interféromètre. En effet, les mouvements d'air causés par le ventilateur de l'ordinateur, la présence humaine ou l'échauffement des appareils électriques perturbent la stabilité des franges. La Figure VI-6 présente une série de prise de vue des interférogrammes en teinte plate montrant l'effet des mouvements convectif d'air venant déformer les franges en les rendant dissymétriques. Bien entendu, cet effet influence la précision du traitement en particulier l'étape d'inversion d'Abel à cause de la violation de la condition de la symétrie. Pour remédier à ce problème, nous avons enregistré des séquences de l'interférogramme fluctuant (voir Figure VI-6) pour en sélectionner les images symétriques aptes pour subir le traitement numérique.

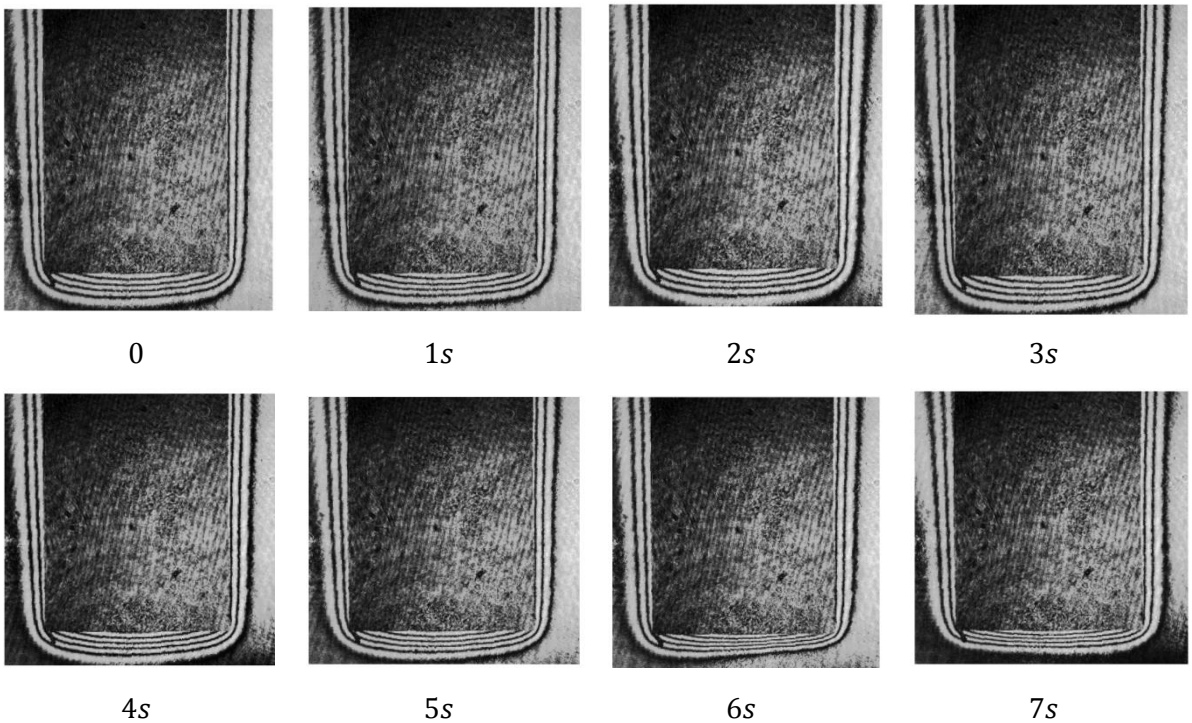


Figure VI-6 : Série d'images en teinte plate d'un cylindre de diamètre $30\,mm$ *porté à la température* $230°C$ *pris à des instants espacés d'une seconde.*

VI-4 Traitement de l’interférogramme réel

Rappelons que pour remontrer à la tomographie du champ de température, le traitement assidu contiendra deux étapes distinctes à savoir l’analyse des franges et l’inversion de la transformée d’Abel. L’organigramme de la Figure VI-7 montre l’ensemble des algorithmes avec leurs paramètres optimaux que nous comptons appliquer dans ce chapitre.

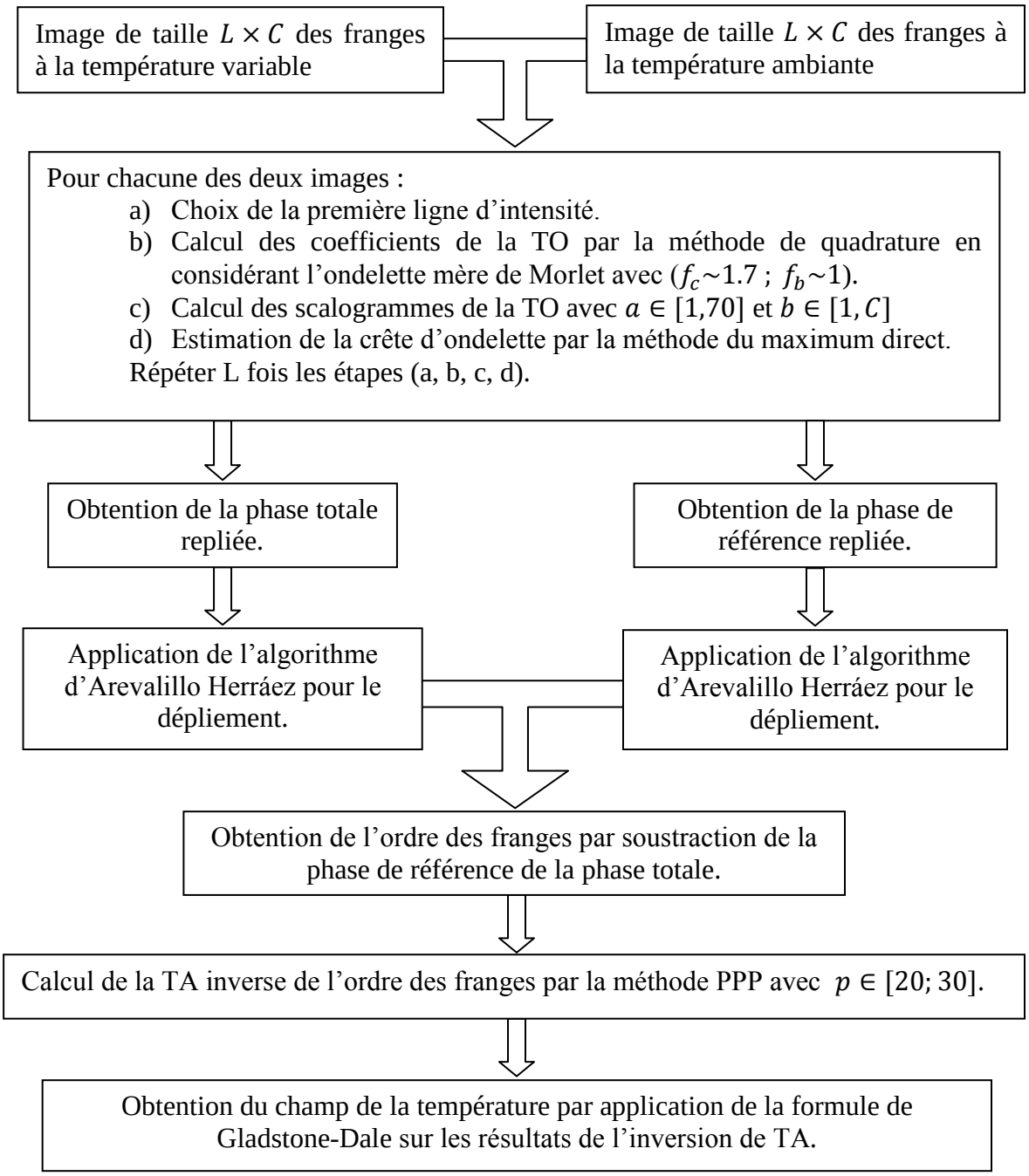


Figure VI-7 : Organigramme du traitement des interférogrammes expérimentaux.

VI-4.1 Exemple de traitement

Dans cette sous section, nous ne présentons que certains résultats intermédiaires du traitement de l'interférogramme. L'exemple choisi est celui de la Figure VI-5a où le cylindre de rayon 15 mm est porté à la température de 100 $°C$. Toutefois, nous signalons que le même traitement sera emprunté pour le reste des interférogrammes de la Figure VI-5.

Comme on le constate sur la Figure VI-8, qui représente la distribution de l'intensité sur une ligne horizontale située à 1 mm au dessous du cylindre, le signal enregistré est entaché de bruit de speckle. La Figure VI-9 montre les deux scalogrammes de la TO pour lesquels nous avons été amenés à changer la plage des échelles de $[0\,;60]$ à $[0\,;70]$ par rapport à l'analyse des images numériques présentées dans le Chapitre IV. Cet élargissement de la plage des échelles a pour but de mieux reconstruire la phase repliée qui est représentée sur Figure VI-10. Les Figures (Figure VI-10 et Figure VI-11) représentent respectivement la carte de l'ordre d'interférence $S(y,z)$ et sa distribution pour quelques lignes au dessous du cylindre.

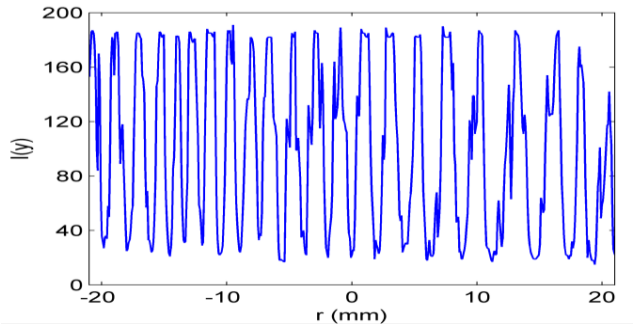
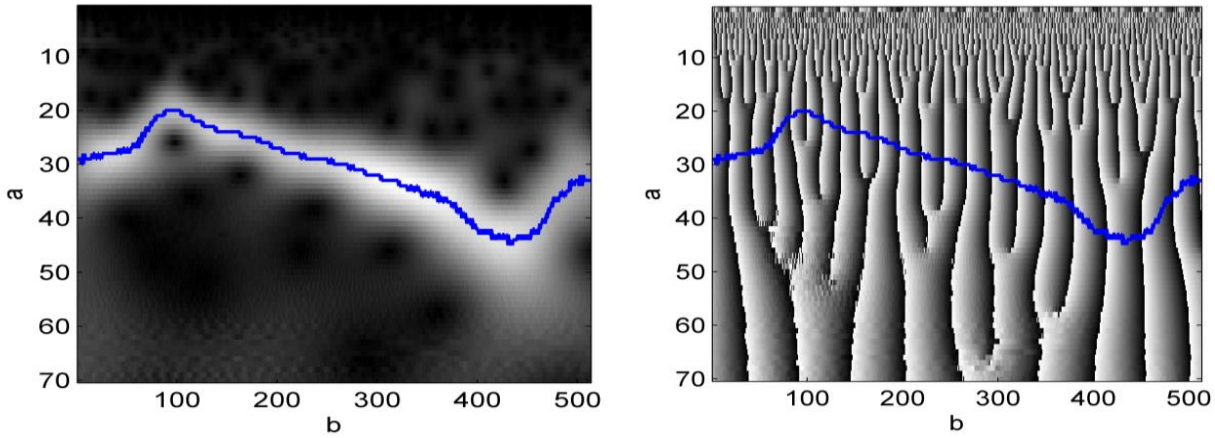


Figure VI-8 : Intensité sur la ligne horizontale située à 1 *mm au dessous du cylindre.*



(c) *(d)*

Figure VI-9 : Scalogramme de la TO montrant la crête d'ondelette relative à la ligne d'intensité représentée par la Figure VI-8.

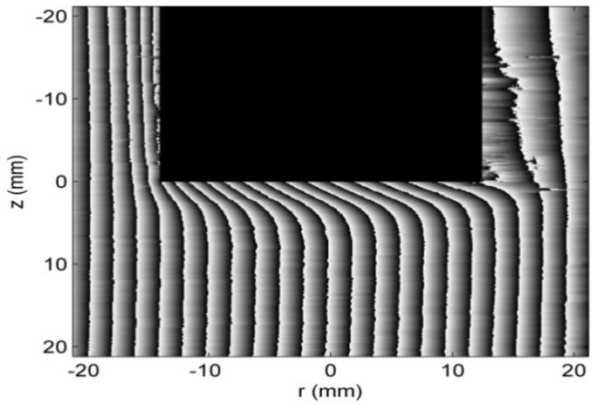


Figure VI-10 : Phase repliée.

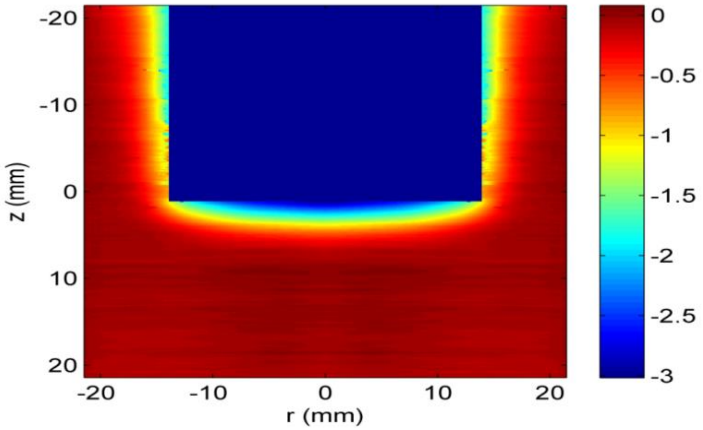


Figure VI-11 : Carte de phase modulo 2π issue d'une analyse de franges de l'interferogramme présenté sur la Figure VI-5a.

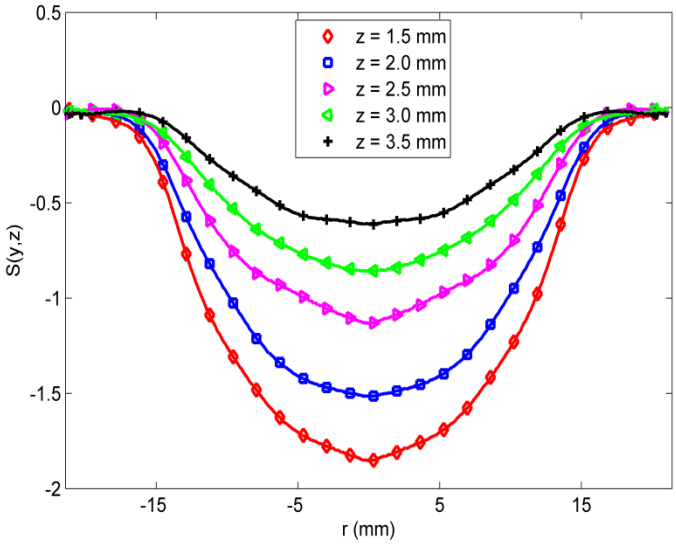


Figure VI-12 : Distribution $S(y,z)$ de l'ordre des franges au dessous du cylindre.

Finalement, la Figure VI-13 montre le résultat de l'inversion de la TA en appliquant la méthode PPP avec $p = 20$ par le tracé de la distribution de la température $T(r, z)$ pour plusieurs lignes au dessous du cylindre.

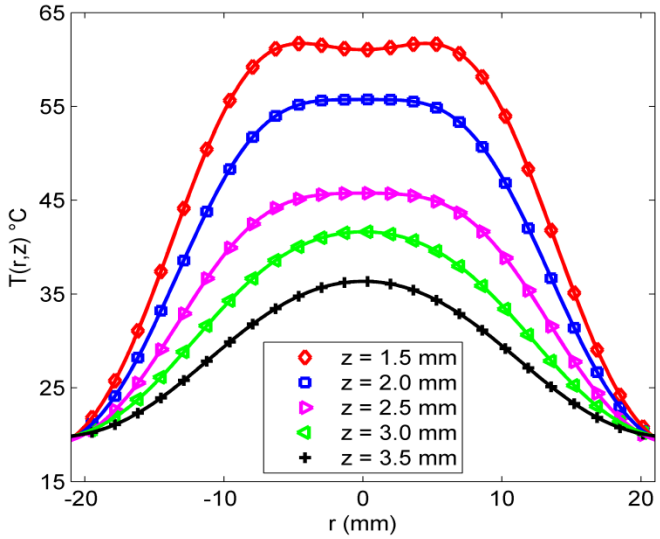


Figure VI-13 : Profils de température en différentes cotes au-dessous du cylindre.

Au regard des profils de température (Figure VI-13), on peut dire que la méthode PPP procure des résultats très satisfaisants. Ceci est dû premièrement à sa capacité de lissage des profils des mesures par un polynôme qui décrit parfaitement les profils de l'ordre d'interférence et préserve leur symétrie. En outre, l'inversion de ce polynôme est effectuée d'une manière analytique ce qui élimine toute erreur d'origine numérique.

VI-4.2 Validation du processus d'analyse

VI-4.2.1 Validation qualitative

A partir de la cartographie $S(y, z)$ de l'ordre d'interférence dû à l'effet thermique, nous avons calculé l'intensité par l'expression :

$$I(y, z) = cos[\, 2\pi S(y, z)] \qquad \text{(VI.1)}$$

Le résultat de cette opération matérialise les franges sombres et brillantes. Nous avons trouvé qu'il est judicieux de comparer ces franges avec celles de l'interférogramme en teinte plate. La Figure VI-14 représente cette comparaison qui démontre une bonne similitude des images de franges respectivement recalculées et obtenues expérimentalement. Un léger

décalage apparaît pour la frange sombre ($S = -0.5$) située au voisinage de la couche limite thermique. Ceci s'explique par le rapport signal/bruit qui devient faible dans cette région.

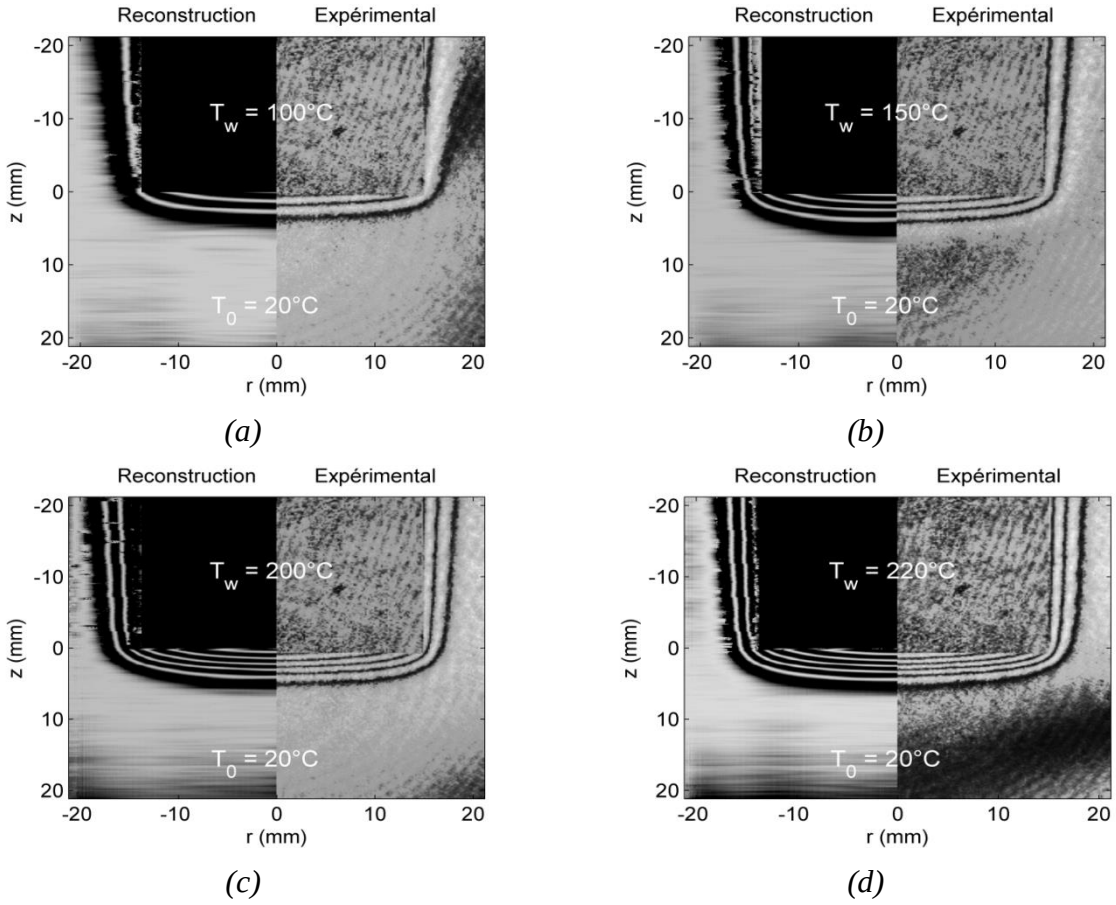


Figure VI-14 : Chacune de ces images présente dans sa moitié de gauche les franges reconstruites par traitement et dans l'autre moitié les franges de l'interférogramme en teinte plate.

VI-4.2.2 Validation quantitative

L'évaluation de la précision du traitement des franges ne peut se faire que si l'on connait a priori le profil à mesurer. On peut toutefois vérifier la validité des mesures par comparaison de l'ordre des franges extrait numériquement avec celui lu directement à partir de l'interférogramme en teinte plate. En effet, sur ce dernier les franges sombres sont les isovaleurs (demi-entier) de l'ordre d'interférence (voir Figure VI-5, images a et b). En procédant ainsi, nous avons tracé sur la Figure VI-15 l'évolution de l'ordre des franges sur l'axe du cylindre ($r = 0$) en fonction de z en reportant les valeurs tirées à partir de

l'interférogramme en teinte plate par la méthode de comptage manuel des franges (§ I-7 ; p 40).

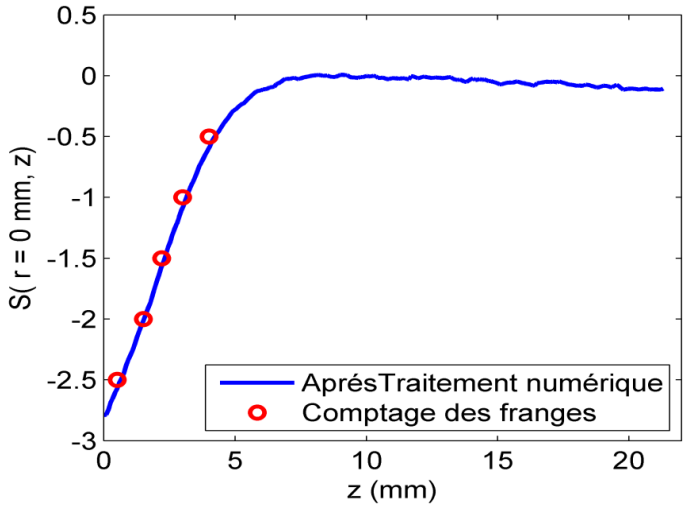


Figure VI-15 : Comparaison entre l'ordre des franges extrait numériquement et celui par comptage manuel des franges.

	Figure VI-5 (b)	**Figure VI-5 (d)**	**Figure VI-5 (f)**	**Figure VI-5 (h)**
$\boldsymbol{\sigma}$	2.510^{-2}	5.10^{-1}	7.510^{-2}	4.10^{-2}

Tableau VI-2 : Ecart quadratique moyen calculé par comparaison entre la cartographie reconstruite de l'ordre de frange et la lecture des interférogrammes en teinte plate (a), (b), (c) et (d).

Le Tableau VI-2 donne l'écart quadratique moyen obtenu entre l'ordre obtenu après traitement de l'ensemble des interférogrammes avec franges de fond et celui lu à partir de l'interférogramme en teinte plate de la Figure VI-5. Les faibles valeurs de σ valident les mesures effectuées. Comme nous l'avons signalé auparavant, pour certains interférogrammes l'erreur est peut être importante au niveau de la frontière de la couche limite (dernière frange). Cependant, cette erreur singulière n'a pas beaucoup d'influence sur le calcul de la température.

VI-5 Corrélation expérimentale

Dans cette section, nous montrons que notre démarche de dépouillement numérique des films interférométriques et de la résolution du problème inverse peut aussi se valider sur le plan thermique. En effet, la configuration de la convection naturelle au dessous d'un cylindre

chauffé a fait l'objet de très nombreuses études numériques et expérimentales avec plus d'abondance de la première catégorie. On peut alors comparer le résultat final de la métrologie thermique adoptée dans ce travail avec ceux trouvés dans la littérature. La comparaison des profils de température n'est pas toujours possible car il est difficile de trouver des mesures avec exactement la même configuration expérimentale (mêmes diamètre et température du cylindre, même fluide,…). La comparaison avec une corrélation expérimentale existante donnant la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh nous semble plus judicieuse et adéquate. En effet, ce genre de relation empirique permet de s'affranchir de la configuration étudiée en généralisant le résultat par le biais des nombres adimensionnels. Avant de rentrer dans le vif du sujet, il convient de donner quelques définitions concernant les groupements adimensionnels qui sont d'un emploi courant dans la thermique et la mécanique des fluides.

Pour un écoulement de convection naturelle au voisinage d'une surface solide, on utilise généralement trois nombres adimensionnels. Ainsi, la combinaison du coefficient d'échange de chaleur par convection h, d'une longueur caractéristique L et de la conductivité thermique du fluide k, on définit le nombre de Nusselt (Nu) par :

$$Nu = \frac{hR}{k} \tag{VI.2}$$

Ce nombre, qui est une quantité adimensionnelle, peut être interprété comme étant le rapport du gradient de température dans le fluide en contact immédiat avec la surface sur le gradient de température de référence $(T_W - T_0)/L$. En pratique, le nombre de Nusselt est une mesure accessible à partir du coefficient d'échange une fois la valeur de ce dernier est connue.

Conformément aux études de transfert de chaleur en convection naturelle sous une plaque circulaire, le rayon de cette dernière est pris comme longueur caractéristique [122]. h peut être évalué par :

$$h = \frac{-k_w \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}}{\frac{(T_w - T_0)}{R}} \tag{VI.3}$$

k_w est la conductivité thermique du gaz à la température T_w.

Dans le cas d'un système en convection naturelle, le mouvement est caractérisé aussi par le nombre de Grashof (Gr) défini par :

$$Gr = \frac{\Delta T R^3 \beta g}{\nu^2} \qquad \text{(VI.4)}$$

où $\Delta T = T_W - T_0$ est la différence de température caractéristique entre la surface du cylindre et l'air ambiant, β et ν sont respectivement le coefficient de dilatation volumique et la viscosité cinématique du gaz,

On définit également le nombre de Rayleigh (Ra) par :

$$Ra = Pr\ Gr = \frac{\Delta T R^3 \beta g}{\nu \alpha} \qquad \text{(VI.5)}$$

où Pr est le nombre de Prandtl, caractéristique de chaque gaz. Il est défini par:

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ avec $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$

avec :

α : diffusivité thermique,

k : conductivité thermique,

ρ : masse volumique,

C_p : chaleur spécifique à pression constante.

Le tableau suivant résume l'ensemble des paramètres physiques avec leurs valeurs pour l'air à la température $T_0 = 20\ °C$.

$g = 9.810\ m\ s^{-2}$
$\rho = 1.198\ \ kg\ m^{-3}$
$\beta = 3.400 \times 10^{-3}\ K^{-1}$
$\alpha = 2.101 \times 10^{-5}\ m^2 s^{-1}$
$\nu = 1.789 \times 10^{-5}\ \ m^2 s^{-1}$
$k = 2.620 \times 10^{-2}\ \ W\ m^{-1} K^{-1}$
$C_p = 1005\ J\ kg^{-1} K^{-1}$.

Tableau VI-3 : Grandeurs physiques à la température $20\ °\ C$ pour le calcul des nombres adimensionnels.

Dans un premier temps, on effectue un enregistrement d'une série de différents interférogrammes où nous avons fait varier plusieurs conditions expérimentales (voir Tableau VI-1). Pour chaque cas, on procède à la reconstitution du champ de température $T(r, z)$. La Figure VI-16 montre des exemples d'interférogrammes avec leur champ de température correspondant reconstruit. On en déduit les profils axiaux $T(r = cte, z)$ qui seront ensuite

différentiés numériquement au point $z = 0$ pour trouver le gradient axial au voisinage de la surface. On détermine le coefficient d'échange par convection à l'aide de la relation (VI.3) et en suite on remonte au nombre de Nusselt local puis moyenné sur toute la surface du disque. L'ensemble des résultats trouvés du nombre de Nusselt moyen vont être corrélés à la variation correspondante du nombre de Rayleigh. L'expression mathématique de puissance $Nu = C.Ra^n$ est couramment utilisée en thermique puisqu'elle facilite l'exploitation des résultats dans les applications pratiques. Un excellent résumé des corrélations expérimentales et théoriques relatives à la convection naturelle sous une plaque circulaire horizontale est présenté par Radziemska et Lewandowski [123]. La moyenne de ces résultats stipule que le nombre de Nusselt varie en une puissance de $1/5$ en fonction du nombre de Rayleigh :$Nu = 0.675Ra^{1/5}$.

Référence	**Corrélation**
[124]	$0.906\ Ra^{1/5}$
[125]	$0.680\ Ra^{1/5}$
[126]	$0.506\ Ra^{1/5}$
[127]	$0.613\ Ra^{1/5}$
[123]	$0.675\ Ra^{1/5}$

Tableau VI-4 : Corrélations $Nu = C\ Ra^n$.

.

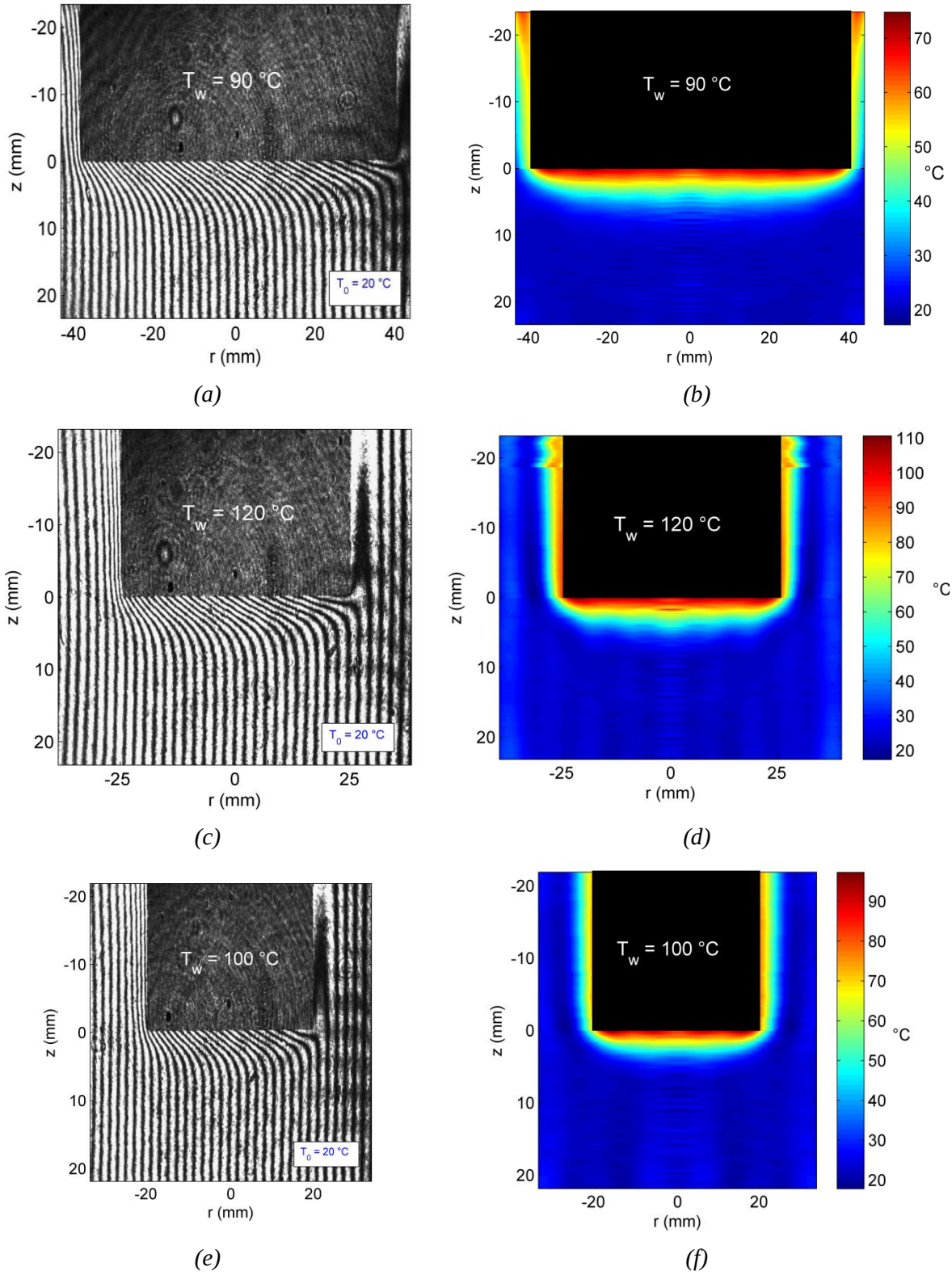


Figure VI-16 : Interferogrammes réels (a, c et e) respectivement pour le couple de rayons et le nombre de Rayleigh $(R = 40\,mm,\ Ra = 4.4\,10^5)$; $(R = 25\,mm,\ Ra = 9.8\,10^4)$ *et* $(R = 20\,mm,\ Ra = 1.3\,10^5)$ *avec leurs champs de température correspondants (b, d, et f).*

Les valeurs expérimentales du nombre de Nusselt ont été tracées en fonction du nombre Ra sur la Figure VI-17. Nous avons cherché les paramètres C et n en effectuant un ajustement au sens des moindres carrés. Les résultats expérimentaux ont été corrélés sous la forme $Nu = 0.552\, Ra^{\frac{1}{5}}$ avec un degré de confiance qui vaut 95%. Dans le même graphe de la Figure VI-17, nous avons représenté également des corrélations proposées dans des travaux existants dans la littérature. Nous constatons le bon accord de la corrélation proposée avec la corrélation moyenne des résultats trouvés dans la littérature.

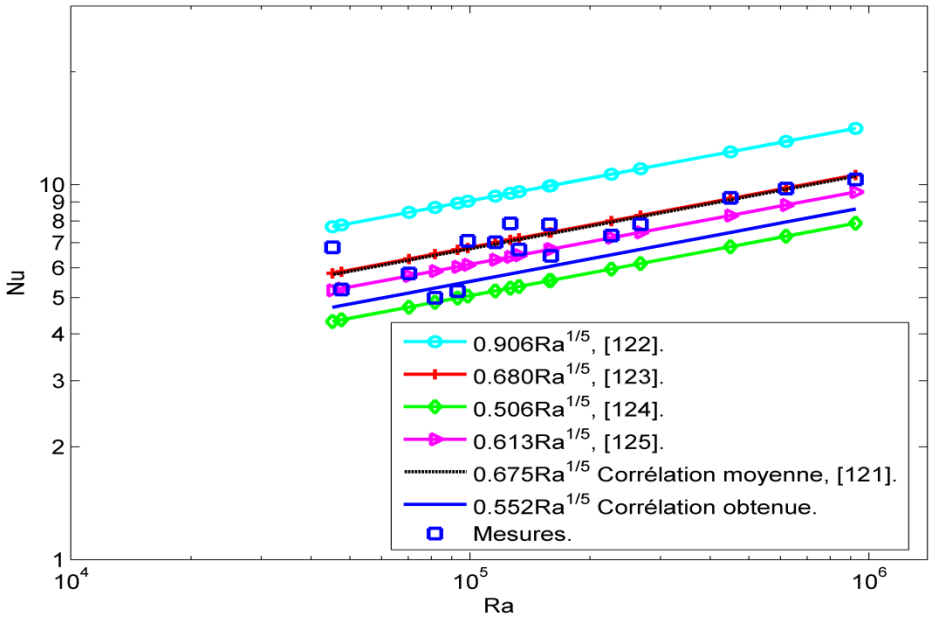


Figure VI-17 : Comparaison des corrélations.

VI-6 Analyse des incertitudes

Comme toutes autres méthodes de mesure expérimentales, une analyse des incertitudes doit être effectuée afin d'évaluer les intervalles de confiance et la crédibilité des grandeurs mesurées. En interférométrie holographique, deux types d'erreur sont les sources de ces incertitudes : les erreurs systématiques qui sont inhérentes à la méthode utilisée et les erreurs liées aux traitements des interférogrammes.

VI-6.1 Les erreurs systématiques

Dans cette catégorie de sources d'erreurs on cite le phénomène de la diffraction qui nous empêche de réaliser les mesures tout près du bord du cylindre. Ensuite, il y a aussi la réfraction du faisceaux lumineux due a la variation de l'indice de réfraction tout au long du chemin optique.

- **Diffraction**

Très prés de la paroi du cylindre, la figure d'interférence est modifiée par le phénomène de la diffraction du faisceau d'étude par les bords de l'obstacle.

La théorie de diffraction de Fresnel [128] permet d'évaluer l'épaisseur de cette zone à partir de la formule suivante :

$$d = 1.22\sqrt{\frac{l\,\lambda}{2}} \qquad \text{(VI.6)}$$

où l est la distance où l'image de diffraction est visualisée. Dans notre expérience, la mise au point de la caméra est effectuée au plan central du cylindre, cette distance est prise égale au rayon de celui-ci. Dans le cas de $R = 40\,mm$, on ne peut effectuer des mesures précises au voisinage du cylindre qu'en dehors de la distance $d = 0.1\,mm$.

- **La réfraction**

Le phénomène de la réfraction qui est induit par le gradient de l'indice de réfraction génère deux types d'erreurs : 1) la déviation du faisceau lumineux donnant naissance à une erreur dans la position des franges. D'après Lira et Vest [128], ces erreurs peuvent être minimisées en se focalisant sur le plan central de l'objet. 2) L'extension du chemin optique par le fait que la trajectoire des rayons lumineux n'est pas rectiligne contrairement à ce qui a été supposé dans la détermination de l'équation de l'interférogramme. Dans notre cas, les différences de la température ne dépassent pas $200°\mathrm{C}$. De plus, les diamètres des cylindres utilisés varient de $30\,mm$ à $80\,mm$. On peut calculer les angles maxima de déviations pour un cylindre de $80\,mm$ de diamètre porté à la température $160°C$ par les deux équations abéliennes suivantes :

$$\varepsilon_z(y,z) = 2\int_{y}^{R_0(z)} \frac{g(r,z)}{\sqrt{r^2 - y^2}}\, rdr \qquad \text{(VI.7)}$$

$$\varepsilon_y(y,z) = 2y\int_{y}^{R_0(z)} \frac{\partial\delta(r,z)}{\partial r}\frac{dr}{\sqrt{r^2 - y^2}} \qquad \text{(VI.8)}$$

Les valeurs trouvées sont $\varepsilon_z \approx 2.10^{-5}$ rad, $\varepsilon_y \approx 6.10^{-4}$ rad. Ces valeurs sont très faibles de sorte que les erreurs dues à la réfraction peuvent être négligées et n'auront pas de grande influence sur notre métrologie [129].

VI-6.2 Erreurs dues au traitement

Ce genre d'erreurs est lié à l'ensemble des opérations effectuées dans les processus du traitement de l'interferogramme. L'incertitude de la détermination de l'ordre est estimée à 1%. Cette précision élevée est garantie par l'utilisation de la TO connue par son efficacité dans le filtrage du bruit.

La précision sur la dernière étape du calcul de la température qui est l'inversion de l'ordre par l'équation d'Abel par la technique PPP a été minutieusement discutée dans le chapitre V. La Performance de cette méthode nous permet de négliger les incertitudes de calcul dans ce processus dans les conditions expérimentales considérées.

Les sources d'incertitudes les plus larges sont dues essentiellement aux fluctuations des franges causées par les courants de convection dans la salle d'expérience. Afin d'évaluer l'amplitude de ces fluctuations, une étude statistique a été réalisée sur plusieurs interferogrammes prises dans les mêmes conditions opératoires. Elle consiste à déterminer la déviation standard sur la température moyenne mesurée. Ceci nous a conduit à estimer l'erreur relative sur la mesure de température ne dépassant pas 5%. De la même manière, l'erreur relative sur la détermination du coefficient d'échange thermique h est de l'ordre de 3.6%.

Pour estimer les incertitudes sur le calcul du nombre de Nusselt moyen, nous appliquons la relation suivante [129]:

$$\delta Nu = \sqrt{\left(\frac{\partial Nu}{\partial R}\Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial Nu}{\partial R}\Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial Nu}{\partial k_w}\Delta k_w\right)^2} \qquad \text{(VI.7)}$$

L'erreur sur le calcul de k_w est négligée, tandis que l'erreur sur R est déterminée par l'usinage du cylindre, soit $\Delta R = 0.025mm$. Les résultats de cette analyse ont abouti à une incertitude maximale sur le calcul du nombre de Nusselt qui est de l'ordre de 3.2%. L'erreur relative sur le calcul du nombre de Rayleigh est 2.6%.

VI-7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré, l'adéquation des algorithmes développés dans les chapitres précédents de cette thèse pour la reconstitution du champ de température axisymétrique.

La démarche d'analyse des franges (la démodulation de la phase par TO, en utilisant l'algorithme direct maximum conjointement à l'ondelette mère de Morlet et le dépliement de cette phase par l'algorithme d'Arevalillo Herráez) a été validée expérimentalement. Cette validation est soutenue qualitativement et quantitativement par la méthode de comptage des franges sur les interferogrammes en teinte plate. L'erreur, lorsqu'elle est appréciable, est localisée près de la frontière de la couche limite où l'ordre des franges tend vers 0. Cependant, cette erreur n'a pas beaucoup d'effet sur la reconstitution de champ de température puisque seules les valeurs près du centre ont une influence considérable sur le calcul de la transformée d'Abel.

Par ailleurs, nous avons mis à l'épreuve la méthode PPP pour la résolution de la TA inverse en partant des données expérimentales. Les profils de température que procure cette méthode révèlent sa capacité de vaincre les problèmes intrinsèques de l'inversion de la TA. L'ensemble de cette métrologie thermique englobant le dépouillement numérique des films interférométriques et la résolution du problème inverse a été validée sur le plan thermique. Nous avons proposé une corrélation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh sous la forme d'une loi en puissance de $1/5$. Nous avons constaté un bon accord du résultat avec la corrélation moyenne issue de plusieurs études dans la bibliographie.

L'ensemble des résultats trouvés dans ce chapitre démontrent encore une fois de plus les avantages que peut offrir la technique d'interférométrie holographique en tant qu'outil de

diagnostic dans les écoulements fluides. En complétant cet outil par la mise au point des algorithmes dépouillement des franges par la TO et la proposition d'une nouvelle technique pour la résolution du problème inverse a renforcé considérablement la rapidité, la précision et la fiabilité de cette métrologie.

Conclusions & perspectives

Au terme de cette étude de développement des algorithmes pour la reconstruction tomographique du champ de température, il est important de faire un regard critique en mettant en exergue ce qui les distingue fondamentalement. C'est ce que nous ferons succinctement en guise de cette conclusion.

Nous avons défini la problématique associée à la reconstruction tomographique du champ de la température et inventorié les outils du traitement des images de franges pour finalement ne retenir que la méthode fondée sur la transformée en ondelettes pour la démodulation des interférogrammes. Nous avons également montré dans le chapitre II que les résultats de la démodulation de la phase passent à travers l'estimation de la crête d'ondelettes qui est la pièce maîtresse pour la réussite de cette opération. Nous avons aussi exposé d'une manière pratique le cadre statistique gouvernant la modélisation du bruit de speckle en vue de le simuler avec une signature bien définie et proche de la réalité.

Nous avons étudié et discuté la mise en ouvre des algorithmes pour réussir l'analyse de nos images de franges en se basant sur des profils synthétisés numériquement. Ces algorithmes se divisent en deux groupes, ceux basés sur l'usage du scalogramme d'amplitude de la TO et ceux basés sur l'utilisation du scalogramme d'argument. On a déjà vu que l'algorithme du maximum direct se démarque plus avantageusement par sa facilité et sa simplicité. il n'y a nul besoin de l'algorithme de Liu pour réduire l'influence du bruit de speckle. Ce dernier est beaucoup influant dans le scalogramme des amplitudes contrairement au scalogramme des arguments. En partant de ce constat, l'estimation de la crête à partir du scalogramme des arguments doit être vue sous un angle différent de celui de l'algorithme du groupe de Marseille.

L'algorithme de Liu fait intervenir deux constantes dans l'expression de la fonction coût, qui sont choisies égales à 1. En revanche, dans le cadre d'estimation de la crête d'ondelettes par cet algorithme, on a constaté une influence de ces constantes non seulement sur l'estimation de la crête mais aussi sur sa complexité temporelle. On en conclut qu'il sera intéressant de trouver un moyen pour cerner le choix des valeurs optimales pour ces constantes de pondération.

En ce qui concerne les algorithmes de dépliement, la phase thermique extraite par TO, n'est connue qu'à 2π en modulo. La correction de cette ambigüité d'origine mathématique sur la mesure est un problème bien connu en traitement de signal. Les algorithmes présentés dans ce manuscrit relatifs à ce problème découlent tous de celui d'Itoh. Ce dernier est pionnier dans la conception des algorithmes de dépliement présentés d'une manière non exhaustive dans ce travail. Nos objectifs étaient de lever l'ambigüité sur la mesure, de cerner la non vérification permanente de la condition d'Itoh et de limiter la propagation d'erreur. Les algorithmes (Itoh 1-D, Itoh 2-D, de Goldstein 2-D et celui d'Arevalillo Herráez 2-D) sont validés et comparés entre eux premièrement sur des données synthétiques. La comparaison faite nous a conduit à adopter l'algorithme d'Arevalillo Herráez. Ce dernier algorithme a été construit par une analogie heuristique simple de l'algorithme d'Itoh et celui de Goldstein. Toutefois, de son application pour le dépliement de la phase simulée à partir du champ de la température, ainsi que sur celle issue des interférogrammes réels, nous avons constaté l'apparition dans certains cas des zones erronées plus au moins consistantes localisées principalement aux voisinages des frontières horizontales du cylindre. Ces taches qui sont dues probablement aux faibles valeurs de la phase dans ces zones (faible rapport signal/bruit). En effet, notre préférence, pour ces algorithmes qui ne se dotent d'aucune propriété de filtrage, est fondée sur le fait que la transformée en ondelettes filtre suffisamment pour ne pas faire recours à d'autres filtres supplémentaires.

Nous avons proposé deux classes d'algorithmes concernant la reconstitution du champ de la température 3-D par inversion de la transformée d'Abel. La première classe intéresse l'interférométrie tandis que la deuxième classe concerne la déflectométrie de moiré. Dans chacune des deux classes, l'algorithmique mise en œuvre est élaborée d'une manière à offrir des techniques de résolution généralisable à d'autres applications.

Ainsi, nous avons proposé deux nouvelles méthodes : la première est la méthode PPP qui, à travers son application, nous avons pu corriger non seulement le problème de la singularité de TA mais aussi de pouvoir reconstruire le champ de température avec précision et complexité temporelle acceptable. La deuxième est la méthode AFH qui est purement numérique et innovatrice. Dans son fondement, le calcul de l'inversion est porté de l'espace habituel à l'espace de Fourier permettant ainsi de lever la singularité intrinsèque de la TA.

L’intérêt majeur de cette méthode est la présence d’un paramètre permettant d’agir simultanément sur la précision et le filtrage du bruit.

L’ensemble des algorithmes développés dans cette thèse et qui ont été jugés fiables et précis ont été testés sur des images issues de l’expérience. Nous avons été amenés à conduire une expérimentation utilisant l’interférométrie holographique pour produire des figures d’interférences. Nous nous sommes rendu compte de la difficulté à se procurer du matériel scientifique, de faire les réglages optiques et de la sensibilité de l’interférométrie holographique. En outre, les erreurs inhérentes à cette technique, le problème de l’instabilité des franges suite aux perturbations des courants d’air dans la salle est à prendre en considération; Nous avons surmonté ses conséquences en sélectionnant les images de franges aptes au traitement mathématico-numérique présenté dans cette thèse. Le chainage algorithmique proposé s’est révélé très adéquat et que les champs de température trouvés en traitant une large gamme d’interférogrammes est en très bon accord avec les résultats de la simulation présentés dans le chapitre V. Nous avons validé la métrologie thermique dans sa globalité par la bonne concordance de la corrélation proposée décrivant le transfert de chaleur avec celles existantes dans la littérature.

Les perspectives de recherches envisageables ainsi que les extensions possibles sont essentiellement basées sur les travaux déjà effectués ou en cours. Les outils numériques développés dans le cadre de ce travail de thèse nécessitent des améliorations.

1. L'application de l'analyse par transformée en ondelettes pour la démodulation des images de franges est très fructueuse puisqu’elle engendre implicitement le filrage dans la mesure de l’ordre de phase. Il serait alors intéressant d’extrapoler la démodulation à deux dimensions pour gagner en temps d’exécution des différentes opérations et rendre l’instrument moins supervisé.

2. L’approche par gradient de phase engendre encore des imprécisions dues essentiellement à la méconnaissance des constantes d’intégration. Le traitement de plusieurs interférogrammes d’un même phénomène physique mais avec des porteuses différentes (interfrange variable) pourrait apporter une solution à ce problème et une amélioration de cette technique. L’essai de cette approche avec d’autres ondelettes

mère réelles peut constituer une autre voie à suivre pour s'affranchir de cet inconvénient.

3. Il convient aussi d'apporter quelques améliorations à l'algorithme du groupe de Marseille qui est, à notre connaissance, le seul trouvé dans la littérature pour l'extraction de la crête d'ondelette à partir du scalogramme des arguments. En effet, le résultat procuré par cet algorithme est tributaire de la valeur initiale du paramètre d'échelle et de la tolérance fixée par l'utilisateur.

4. L'amélioration de l'extraction de la crête d'ondelette à partir du scalogramme d'amplitude par les algorithmes génétiques.

5. L'application et l'essai d'autres algorithmes de dépliement de phase sur les interférogrammes afin de voir leur aptitude à supprimer les bruits résiduels dans les zones où les algorithmes testés dans ce travail ont montré une certaine faiblesse.

6. L'amélioration de la méthode PPP en introduisant un test statistique en faisant appel au critère d'Akaike pour une estimation plus fiable et déterministe du degré de polynôme.

7. L'amélioration de la méthode LO en essayant de résoudre le problème de la singularité dû aux termes impairs contenus dans les polynômes de Legendre. On peut également généraliser ce concept d'analyse multi-résolution par transformée en ondelettes à d'autres polynômes orthogonaux du genre Tchebychev, Hermite ou autres.

8. Généralisation des méthodes basées sur la transformée de Hankel pour la reconstruction tomographique d'un objet non symétrique.

9. Il serait très utile d'implémenter l'ensemble de ces algorithmes dans un seul logiciel avec une interface conviviale permettant de commander et gérer l'interféromètre pour le rendre un outil autonome délivrant des mesures quasi-instantanées.

10. Finalement, nous proposons également de passer à l'interférométrie holographique numérique. En effet, l'holographie argentique englobe des taches fastidieuses notamment en ce qui concerne le développement de la plaque photosensible. La restitution de l'hologramme par une technique numérique employant la transformation en ondelettes peut être envisageable dans ce type de métrologie.

Bibliographie

[1] K. Hibino, B. F. Oreb, D. I. Farrant et G. Lark, «Phase-shifting algorithms for nonlinear and spatially nonuniform phase shifts,» *Optical Society of America,* vol. 14(4), pp. 918-30, 1997.

[2] M. Takeda, H. Ina et S. Kobayashi, «Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry,» *Optical Society of America,* vol. 72(1), pp. 156-60, 1982.

[3] K. Itoh, «Analysis of the Phase Unwrapping Algorithm,» *Applied Optics,* vol. 21(14), pp. 2470-86, 1982.

[4] M. Elfagrich et H. Chehouani, «A simple Abel inversion method of interferometric data for temperature measurement in axisymmetric medium,» *Optics and Lasers in Engineering,* vol. 50(3), pp. 336-44, 2012.

[5] H. Chehouani et M. ElFagrich, «Adaptation of the Fourier–Hankel method for deflection tomographic reconstruction of axisymmetric field,» *Applied Optics,* vol. 52(3), pp. 439-48, 2013.

[6] M. Goldstein, A. Zebker et L. Werner, «Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping,» *Radio Science,* vol. 23(4), pp. 713-20, 1988.

[7] A. Herráez, R. Burton, J. Lalor et A. Gdeisat, «Fast Two-Dimensional Phase-Unwrapping Algorithm Based on Sorting by Reliability Following a Non continuous Path,» *Applied Optics,* vol. 41(35), pp. 7437-44, 2002.

[8] V. W. Merzkirch, Flow Visualization, New York: Academic Press, 1974.

[9] W. Hauf et U. Grigull, Optical methods in heat transfer. In: Advances in heat transfer, London: Academic Press, 1970.

[10] E. Kern, Z. Bar, I. Glatt et O. Kafri, «Measurement of temperature distribution of flames by moiré deflectometry,» *Applied Optics,* vol. 20, p. 4263–66, 1981.

[11] B. A. VanDerWege, C. J. O'Brien et S. Hochgreb, «Quantitative shearography in axisymmetric gas temperature measurements,» *Optics and Lasers in Engineering,* vol. 31, pp. 21-39, 1999.

[12] J. R. Camacho, F. N. Beg et P. Lee, «Comparison of sensi-tivities of Moire deflectometry and interferometry to measure electron densities in z-pinch plasmas,» *Applied Physics,* vol. 40, pp. 2026-32, 2007.

[13] M. Goharkhaha, M. Ashjaeea et K. Madanipour, «Investigation of the accuracy of different methods of interferogram analysis for calculation of local free convection heat transfer coefficient on axisymmetric objects,» *Experimental Thermal and Fluid Science,* vol. 33, pp. 1188-196, 2009.

[14] M. Diaz-Salgado., Analyse par interferometrie holographique du champ thermique d'un réacteur de dépôt chimique en phase gazeuse, Perpignan: Université de Perpignan, 1987.

[15] H. Chehouani, Thèse de doctorat de l'université, Option Energétique, Perpignan: Université de Perpignan, 1990.

[16] M. Vest, Holographic Interferometry, J. Wiley, Éd., New York: deuxiéme édition de Akira Tonomura, 1979.

[17] O. Kafri, «Non coherent Method for Mapping Phase Objects,» *Optics letters,* vol. 5(12), pp. 555-7, 1980.

[18] Z. W. Zhong et Y. G. Lu, «Measurements of surface deformations and strains using an AFM moiré method,» *Measurement,* vol. 38(1), pp. 34-1, 2005.

[19] R. L. Xiong et H. Xue, «Temperature measurement in the swirl chamber of an IDI engine using Moire deflectometry,» *Applied Thermal Engineering,* vol. 19(5), pp. 543-554, 1999.

[20] A. El motassadeq, Contribution à la valorisation des techniques optiques de shearographie et de déflectométrie pour la mesure du champ de température dans un milieu semi-transparent à symétrie axiale, FSTG - Marrakech, 2007.

[21] D. Gabor, «A new microscopic principle,» *Nature,* vol. 161(4098), pp. 777-8, 1948.

[22] J. D. Briers, «Review the interpretation of holographic interferograms,» *Optical and Quantum Electronics,* vol. 8(6), pp. 469-501, 1976.

[23] S. L. Jackson et U. Shumlak, «Abel inversion of a holographic interferogram for determination of the density profile of a sheared-flow Z pinch,» *Review Of Scientific Instruments,* vol. 77(8), pp. 502-10, 2006.

[24] P. H. Chan, P. J. Bryanston-Cross et S. C. Parker, «Spatial Phase Stepping Method of Fringe-Pattern Analysis,» *Optics and Lasers in Engineering,* vol. 23(5), pp. 343-54, 1995.

[25] D. J. Bone, H. A. Bachor et R. J. Sandeman, «Fringe-Pattern Analysis Using a 2-D Fourier Transform,» *Applied Optics,* vol. 25(10), pp. 1653-60, 1986.

[26] A. Dursun, S. Ozder et N. Ecevit, «Continuous wavelet transformanalysis of projected fringe patterns,» *Measurement Science and Technology,* vol. 15(9), pp. 1768-72, 2004.

[27] R. A. Carmona, W. L. Hwang et B. Torresani, «Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms,» *IEEE Transactions on Signal Processing,* vol. 45(10), pp. 2586-90, 1997.

[28] M. Gdeisat, D. Burton et M. Lalor, «Spatial carrier fringe pattern demodulation by use of a two-dimensional continuous wavelet transform,» *Applied Optics,* vol. 45(34), pp. 872-232, 2006.

[29] J. Zhong et J. Weng, «Phase retrieval of optical fringe patterns from the ridge of a wavelet transform,» *Optics Letters,* vol. 30(19), pp. 256-62, 2005.

[30] R. M. Goldstein, H. A. Zebken et C. L. Werner, «Satellite radar interferometry : Two-dimensional phase unwrapping,» *Radio Science,* vol. 23(4), pp. 713-20, 1988.

[31] D. C. Ghiglia et M. D. Pritt, Two-Dimensional Phase Unwrapping : Theory, Algorithms and Software, New York: Wiley-Interscience, 1998.

[32] J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White et D. J. Brangaccio, «Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing

Optical Surfaces and Lenses,» *Applied Optics,* vol. 13(11), pp. 2693-703, 1974.

[33] P. Hariharan, B. F. Oreb et T. Eiju, «Digital Phase-Shifting Interferometry : A Simple Error-Compensating Phase Calculation Algorihtm,» *Applied Optics,* vol. 26(13), pp. 2504-506, 1987.

[34] C. J. Wyant et K. reath, « Advances in Interferometric Optical Profiling.,» *International Journal of Machine Tools Manufacturing,* vol. 32(65), pp. 5-10, 1992.

[35] K. Creath, Interferogram Analysis : Digital Fringe Pattern Measurement Techniques, Bristol and Philadelphia : Institute of Physics Publishing, 1993.

[36] M. Takeda, H. Ina et S. Kobayashi, «Fourier-transform of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry,» *Optical Society of America,* vol. 72 (1), pp. 156-60, 1982.

[37] A. P. Calderón, «Intermediate spaces and interpolation, the complex method,» *Studia Mathematica,* vol. 24, pp. 13-90, 1964.

[38] A. Grossmann et J. Morlet, «Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets, of constant shape,» *Society for Industrial and Applied Mathematics,* vol. 15(4), pp. 723-36, 1984.

[39] P. Goupillaud, A. Grossmann et J. Morlet, «Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis,» *Geoexploration,* vol. 23(1), pp. 85-102, 1984.

[40] S. Mallat, «A Theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation,» *IEEE Trans on Pattern Anla and Machine Intell,* vol. 11(7), pp. 674-93, 1989.

[41] S. Mallat, Une exploration des signaux en Ondelettes, Palaiseau: Ecole Polytechnique, 2000.

[42] J. Zhong et J. Weng, «Spatial carrier-fringe pattern analysis by means of wavelet transform : wavelet transform profilometry,» *Applied Optics,* vol. 43(26), pp. 4993-8, 2004.

[43] H. Liu, A. Cartwright et C. Basaran, «Moiré interferogram phase extraction : a ridge detection algorithm for continuous wavelet transforms,» *Applied Optics,* vol. 43(4), pp. 850-57, 2004.

[44] A. Federico et G. Kaufmann, «Phase retrieval in electronic speckle interferometry using the continuous wavelet transform,» *SAR Image Analysis, Modeling, and Techniques,* vol. 45(34), pp. 8722-32, 2001.

[45] P. Tomassino, A. Giulietti, L. Gizzi, M. Galimberti, D. Giuilietti, M. Borghesi et O. Willi, «Analyzing laser plasma interferograms with a continuous wavelet transform ridge extraction technique : the method,» *Applied Optics,* vol. 40(35), pp. 6561-8, 2001.

[46] A. Dursun, Z. Sarac, H. Topkara, S. Ozder et N. Ecevit, «Phase recovery from interference fringes by using S-transform,» *Measurement,* vol. 41(4), p. 403–11, 2008.

[47] M. Afifi, M. Fassi-Fihri, M. Marjane, K. Nassim, M. Sidki et S. Rachafi, «Paul wavelet-based algorithm for optical phase distribution evaluation,» *Optical*

Communication, vol. 211(1), pp. 47-51, 2002.

[48] E. M. Barj, M. Afifi, A. A. Idrissia, S. Rachafi et K. Nassim, «A digital spatial carrier for wavelet phase extraction,» *Optik,* vol. 116, pp. 507-10, 2005.

[49] Q. Lin, J. Vesecky et H. A. Zebker, «New approaches in Interferometric SAR Data Processing,» *IEEE Tans. On Geoscience and Remote Sensing,* vol. 30(3), pp. 560-67, 1992.

[50] D. C. Ghiglia et L. A. Romero, «Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods,» *Journal of Optical Society of America,* vol. 11(1), pp. 107-17, 1994.

[51] G. Bo, S. Dellepiane et P. C. Smits, «Weighted multiresolution phase unwrappimg method,» *SAR Image Analysis, Modeling, and Techniques,* vol. 17(4), pp. 146-54, 1998.

[52] S. Stramaglia, G. Nico et G. Pasquariello, «Phase Unwrapping Method based on stochastic relaxation . Proceedings of Image Processing, Signal processing and SAR for remote sensing,» *Applied Remote Sensing,* vol. 32(17), pp. 4-12, 1997.

[53] J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale: University Press, 1923.

[54] S. Helgason, Radon Transform, Cambridge: Publisher's Kind , 1999.

[55] G. Backus et F. Gilbert, «Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data,» *Philosophical Transactions of the Royal Society,* vol. 266(1173), pp. 123-92, 1970.

[56] G. T. Herman, Ihe fundamentals of computerized tomography, New York: Academic Press, 1980.

[57] J. Radon, «Uber die bestimmung von functionen durch ihre integralwerte langs gewisser mannigfaltigkeiten,» *Berichte Sashsische Akademie der Wissenshaften Leipzig,* vol. 69, pp. 262-77, 1917.

[58] R. N. Bracewell, «Strip Integration in Radio Astronomy,» *Australian Journal of Physics,* vol. 9(2), pp. 198-201, 1956.

[59] S. R. Deans, The Radon Transform and Some ofIts Applications, New York: Wiley-Interscience, 1983.

[60] A. M. Cormack, «Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications I, II,» *Applied Physics,* vol. 35(10), pp. 2722-7, 1964.

[61] R. N. Bracewell, The Fourier Transform and its Applications, Boston: Troisiéme édition, Mc Graw-Hill International Editions, 2000.

[62] G. Herglotz, «Uber das Benndorfsche Problem der Fortpfianzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen,» *Zeitschr fiir Geophys,* vol. 8, pp. 145-7, 1907.

[63] E. Wiechert, «Bestimmung der weges der erdbebenwellen im erdinnern,» *Theoretisches Phys Z,* pp. 294-304, 1910.

[64] M. P. Freeman et S. Katz, «Determination of a radiance-coefficient profile from the observed asymmetric radiance distribution of an optically thin radiating

medium.,» *Journal of the Optical Society of America,* vol. 53(10), pp. 1172-9, 1963.

[65] J. M. Mermet et J. P. Robin, «Etude de l'inversion d'Abel en vue de la mesure de la répartition de la température dans un plasma inductif,» *Revue internationale des hautes températures et des réfractaires,* vol. 10, pp. 133-9, 1973.

[66] C.-Y. George Chan et G. M. Hieftje, «A LabVIEW program for determining confidence intervals of Abel-inverted radial emission profiles,» *Spectrochimica Acta Part B,* vol. 60(11), pp. 1486 -501, 2005.

[67] C. J. Cremers et R. C. Birkebak, «Application of the Abel integral equation to spectrographic data,» *Appliedl Optics,* vol. 5(6), p. 1057–64, 1966.

[68] V. Dribinski, A. Ossadtchi, V. Mandelshtam et H. Reisler, «Reconstruction of Abel-transformable images: the Gaussian basis-set expansion Abel transform method,» *Review of Scientific Instruments,* vol. 73(7), pp. 2634-42, 2002.

[69] O. Bendinelli, «Abel Integral Equation Inversionand Deconvolutionby Multi-Gaussian Approximation,» *Astrophysical Journal,* vol. 366, pp. 599-604, 1991.

[70] L. M. Ignjatovic et A. A. Mihajlov, «The realization of Abel's inversion in the case of discharge with undetermined radius,» *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfere,* vol. 72(5), pp. 677-89, 2002.

[71] T. J. Asaki, R. Chartrand, K. R. Vixie et K. R. Wohlberg, «Abel inversion using total-variation regularization Inverse Problems,» *IOP Publishing,* vol. 21, pp. 1895-903, 2005.

[72] M. Buie, T. Pender, J. Holloway, T. Vincent, P. Ventzek et M. Brake, «Abel's inversion applied to experimental spectroscopic data with off axis peaks,» *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer,* vol. 55(2), pp. 231-43, 1996.

[73] R. Alvarez, A. Rodero et M. C. Quintero, «An Abel inversion method for radially resolved measurements in the axial injection torch,» *Spectrochim Acta Part B,* vol. 57(11), p. 1665–80, 2002.

[74] V. Dribinski, A. Ossadtchi, H. Mandelshtam et V. A. Reisler, «Reconstruction of Abel-transformable images: the Gaussian basis-set expansion Abel transform method,» *Review of Scientific Instruments,* vol. 73(7), pp. 2634-42, 2002.

[75] K. Tatekura, «Determination of the index profile of optical fibers from transverse interferograms using Fourier theory,» *Applied Optics,* vol. 22(3), pp. 460-3, 1983.

[76] M. Kalal et K. A. Nugent, «Abel inversion using fast Fourier transforms,» *Appied Optics,* vol. 27(10), p. 1956–9, 1988.

[77] S. Jaffe, J. Larjo et R. Hernberg, «Abel inversion using fast Fourier transform,» *Xth International Symposium on Plasma Chemistry- Bochum,* vol. 1(21), pp. 1-6, 1991.

[78] K. Amaratunga, J. R. Williams, S. Qian et J. Weiss, «Wavelet-Galerkin solutions for one dimensional partial differential equations,» *International Journal for*

Numerical Methods in Engineering, vol. 37(16), pp. 2703-16, 1994.

[79] A. Avudainayagam et C. Vani, «Wavelet-Galerkin method for integro-differential equations,» *Applied Numerical Mathematics,* vol. 32(3), pp. 247-54, 2000.

[80] S. A. Yousefi, «Numerical solution of Abel's integral equation by using Legendre wavelets,» *Applied Mathematics and Computation,* vol. 175(1), pp. 574-80, 2006.

[81] M. Shuiliang, G. Hongming, G. Zhang et W. Lin, «Abel inversion using Legendre wavelets expansion,» *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfe,* vol. 107(1), pp. 61-71, 2007.

[82] M. Shuiliang, G. Hongming, W. Lin et G. Zhang, «Abel inversion using Legendre polynomials approximations,» *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer,* vol. 109(10), pp. 1745-57, 2008.

[83] R. Gorenflo et Y. Kovetz, «Solution of an Abel-type integral equation in the presence of noise by quadratic programming,» *Numer. Math,* vol. 8(4), pp. 392-406, 1966.

[84] K. E. Atkinson, «The numerical solution of an Abel integral equation by a product trapezoidal method,» *Society for Industrial and Applied Mathematics,* vol. 11(1), pp. 97-101, 1974.

[85] C. J. Dasch, «One-dimensional tomography: a comparison of Abel, onion-peeling, and filtered back projection methods,» *Applied Optics,* vol. 31(8), pp. 1146-52, 1992.

[86] S. Kolhe et K. Agrawal, «Abel inversion of deflectometric data: comparison of accuracy and noise propagation of existing techniques,» *Applied Optics,* vol. 48(20), pp. 3894-902, 2009.

[87] R. Rubinstein et P. S. Greenberg, «Rapid inversion of angular deflection data for certain axisymmetric refractive index distributions,» *Applied Optics,* vol. 33(7), pp. 1141-4, 1994.

[88] A. Serir et B. Sansal, «Réduction du chatoiement par filtrage géométrique et Statistique,» *Télédétection,* vol. 2(4), pp. 279-89, 2002.

[89] D. Gabor, «Theory of communication,» *Radio section,* vol. 93(3), pp. 429-57, 1945.

[90] B. Torrésani, Analyse continue par ondelettes, Paris: CNRS , 1995.

[91] P. Tomassini, A. Giuliett, L. A. Gizzi, M. Galimberti, D. Giuliet, M. Borghesi et O. Willi, «Analyzing laser plasma interferograms with a continuous wavelet transform ridge extraction technique: the method,» *Appied Optics,* vol. 40(35), pp. 6561-8, 2001.

[92] J. Ville, «Théorie et applications de la notion de signal analytique,» *Câbles et transmissions,* vol. 2(1), pp. 61-74, 1948.

[93] N. Delprat, B. Escudie, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, P. Tchamitchian et B. torresani, «Asymptotic Wavelet and Gabor analysis: Extraction of instantaeous frequencies,» *Information Theory,* vol. 38(2), pp. 644-64, 1992.

[94] I. Newton, Optiks, New York: Dover Press, 1952.

[95] J. Liang, D. R. Williams et D. T. Miller, «Supernormal Vision and High-resolution Retinal Imaging Through Adaptive Optics,» *Optical Society of America,* vol. 14(11), pp. 2884-92, 1997.

[96] M. Essenpreis, «Correlation between blood glucose concentration in diabetics and noninvasively measured tissue optical scattering coefficient,» *Optics Letters,* vol. 22(3), pp. 190-92, 1997.

[97] J. W. Goodman, Statistical Properties of Laser Speckle Patterns, vol. 9, New York: J. C. Dainty, 1984, pp. 9-75.

[98] L. I. Goldfischer, «Autocorrelation Function and Power Spectral Density of Laser - Produced Speckle Patterns,» *Optical Society of America,* vol. 55(3), pp. 247-53, 1965.

[99] D. D. Duncan, J. Kirkpatrick et K. Wang, «Statistics of local speckle contrast,» *Journal of the Optical Society of America A,* vol. 25(1), pp. 9-15, 2008.

[100] T. L. Alexander, J. E. Harvey et A. R. Weeks, «Average speckle size as a function of intensity threshold level: comparison of experimental measurements with theory,» *Applied Optics,* vol. 33(35), pp. 8240-50, 1994.

[101] D. C. Champeney, Fourier transforms and their physical applications, London: Academic Press, 1973.

[102] A. Buades, B. Coll et J. M. Morel, «A review of image denoising algorithms, with a new one,» *Simul,* vol. 4, pp. 490-530, 2005.

[103] W. Chen, S. Li, Y. Ca et Y. Zhao, «Analysis onfringe pattern demodulation by use of 2-DCWT,» *Optik - International Journal for Light and Electron Optics,* vol. 122(19), pp. 1739-46, 2011.

[104] X. Colonna De Lega, Application to dynamic deformation measurements by holographic and speckle interferometry, Lausane: École polytechnique fédérale de Lausanne, 1997.

[105] K. Qian, «Two-dimensional windowed Fourier transform for fringe pattern analysis: Principles, applications and implementations,» *Optics and Lasers in Engineering,* vol. 45(2), pp. 304-17, 2007.

[106] W. Lu-shen et P. Qing-jin, «Research and development of fringe projection-based methods in 3D shape reconstruction,» *Journal of Zhejiang University Science A,* vol. 7(6), pp. 1026-36, 2006.

[107] E. Anderson, Z. Ba, C. Bischof, L. S. Blackford et J. Demmel, «Users Guide Matlab,» SIAM LAPACK, 1999.

[108] D. C. Ghiglia et M. Pritt, Two-dimensional phase unwrapping :theory, algorithms and software, New York: John Wiley and Son, 1998.

[109] S. Zehra, A. Dursun, S. Yerdelen et F. Necati, «Calculation of Refractive Index Changes from Thermal Lens Fringes using Continuous Wavelet Algorithm,» *Optics & Laser Technology,* vol. 39, pp. 769-73, 2007.

[110] E. M. Barja, M. Afifi, A. Idrissi, S. Rachafi et K. Nassim, «Wavelet phase evaluation extended to digital speckle shearing interferometry,» *Revue de Mécanique Appliquée et Théorique* , vol. 1(6), pp. 417-24, 2004.

[111] H. M. Eng, I. M. Hanke et A. Neubauer, Regularization of Inverse Problems, Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[112] M. Shuiliang, G. Hongming et W. Lin, «Modified Fourier–Hankel method based on analysis of errors in Abel inversion using Fourier transform techniques,» *Applied Optics,* vol. 47(9), pp. 1350-8, 2008.

[113] M. Deutsch, «Abel inversion with a simple analytic representation for experimental data,» *Applied Physics Letters,* vol. 42(273), pp. 237-9, 1983.

[114] A. EL MOTASSADEQ, Contribution à la valorisation des techniques optiques de shearographie et de déflectométrie pour la mesure du champ de température dans un milieu semi-transparent à symétrie axiale, FSTG - Marrakech, 2007.

[115] C. J. Dasch, «One-dimensional tomography: a comparison of Abel, onion-peeling, and filtered back projection methods,» *Appied Optics,* vol. 31(8), p. 1146–52, 1992.

[116] R. Bracewell, the Fourier transform and its applications, Stonford: McGraw-Hill, 1965.

[117] G. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Birmingham: Cambridge University Press, 1922.

[118] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky et S. H. Nawa, Signals and Systems, Prentice Hall, 1996.

[119] S. P. Kolhe, «Statistical Tomography For Scalar Turbulence Measurements Using,» University of Alabama, Alabama, 2009.

[120] R. A. Horn et C. R. Johnson, Matrix analysis, Cambridge University Press, 1990.

[121] W. Yu et D. Yun, «Talbot and Fourier moiré deflectometry and its applications in engineering evaluation,» *Optics and Lasers in Engineering,* vol. 25, pp. 163-77, 1996.

[122] J. F. Sacadura, Initiation aux transferts thermiques, Paris: Technique et socumentation, 1978.

[123] E. Radziemska et W. M. Lewandowski, «Heat transfer by natural convection from an isothermal downward-facing round plate in unlimited space,» *Applied Energy,* vol. 68(4), pp. 347-66, 2001.

[124] W. Lewandowski, E. Radziemska, H. Bieszk et T. Seramak, «Convective heat transfer from isothermal round plate facing downwards,» X Sympozjum Wymiany Ciepa i Masy, Swieradow, 1998.

[125] E. Radziemska, Theoretical, experimental, visualizational and numerical study of the mechanism of convective heat losses from , round bottoms of tanks and other devices, Gdansk: Technical University, 1999.

[126] T. Fujii, H. Honda et I. Morioka, «A theoretical study of natural convection heat transfer from downward-facing horizontal surfaces with uniform heat flux,» *International Jornal of Heat Mass Transfer,* vol. 16, pp. 611-27, 1973.

[127] V. Kadambi et R. Drake, «Free convection heat transfer from horizontal surfaces for prescribed variations in surface temperature and mass flow through the surface,» Princeton University, 1960.

[128] I. H. Lira et C. M. Vest, «Refraction correction in holographic interferometry and,» *Applied Optics*, vol. 26(18), pp. 3919-28, 1987.

[129] R. J. Moffat, «Describing the Uncertainties in Experimental Results,» *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 1, pp. 3-17, 1988.

[130] H. T. Niu, C. Quan et C. J. Tay, «Temporal Paul wavelet analysis for phase retrieval using shadow moiré technique,» *Proc of SPIE*, vol. 7155, 2008.

Annexe A : Transformée d'Abel

Cette annexe présente la démonstration donnée par Bracewell [61] (p 352), montrant le passage de la transformée d'Abel vers son inverse.

$$\varphi(y) = 2\int_x^{\infty} r\frac{f(r)}{\sqrt{r^2 - y^2}}dy \tag{A.1}$$

On pose

$$\zeta = y^2,\ \ \rho = r^2, \varphi(y) = \Phi(y^2), f(r) = F(r^2)\ et\ K(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\zeta}}\ \ si\ \zeta < 0 \\ 0\ \ si\ \zeta \geq 0 \end{cases} \tag{A.2}$$

ainsi

$\phi(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} \frac{F(\rho)}{\sqrt{\rho-\zeta}}d\rho$, et sous la forme convolutive $\Phi = K \star F$. En passant par la transformée de Fourier, on a $\widehat{\Phi} = \widehat{K}.\widehat{F}$ avec $\widehat{K}(u) = \frac{1}{\sqrt{-2iu}}$, et donc

$$\widehat{F} = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{-2iu}}i2\pi u\widehat{\Phi} = -\frac{1}{\pi}\widehat{K}\widehat{\Phi}'. \tag{A.3}$$

On obtient finalement

$F = -\frac{1}{\pi}K \star \Phi'$, et ainsi $F(\rho) = -\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{\infty} \frac{\Phi'(\zeta)}{\sqrt{\zeta-\rho}}d\zeta$

Par un dernier changement de variables, on conclut l'inversion :

$$f(r) = -\frac{1}{\pi}\int_r^{\infty} \frac{\varphi'(y)}{\sqrt{y^2 - r^2}}dy \tag{A.4}$$

Annexe B : Algorithmes d'estimation de la crête d'ondelettes et de dépliement

- **Algorithme du maximum direct**

Input : $module = \left|\{T_{\psi}[I]\}(a,b)\right|^2$ de taille $C \times L$

Output : La crête a_c de la TO

For $b \longleftarrow 1$ **to** C **do**

$indice \longleftarrow recherche_indice(maximum(module(:,b)))$;

$a_c(b) \longleftarrow indice$;

End

- **Algorithme de Lui**

Input : $module = \left|\{T_\psi[I]\}(a,b)\right|^2$ de taille $C \times L$

Output : $a_c(b)$ la crête de la TO

Initialisation des tablaux

For b $\longleftarrow$ **1** to **C** do

$vecteur \longleftarrow module(:,b);$

$[maximums, positions] \longleftarrow recherche_maximums_relatif(vectur);$

$Indices_b = positions;\ \ Maxima_b = maximums;$

If b> 1 **Then**

For $i \longleftarrow 1$ to $taille(Indices(b))$ do

For $j \longleftarrow 1$ to $taille(Indices(b-1))$ do

$SCost(j) \longleftarrow Cost_{b-1}(j) + (Indices_b(i) - Indices_{b-1}(j))^2 - Maxima_b(i)^2;$

End

$(minimum, pos) \longleftarrow min(SCost);$

$Cos_b t(i) \longleftarrow minimum;$

$IndicesCostMin_b(i) \longleftarrow pos;$

End

Else

$Cost(1) \longleftarrow 0;$

$IndicesCostMin(1) \longleftarrow 0;$

End

End

$a_c(b) \longleftarrow cheminOptimum\big(Cost(b), IndicesCostMin(b)\big);$

- **Algorithme du groupe de Marseille**

Input : $phase = arg\{T_\psi[I]\}(a,b)$ de taille $C \times L$, Δ tolérance, a.
Output : $a_c(b)$ la crête de la TO

$$a_0 \longleftarrow a;\ a_1 \longleftarrow a_0;$$

For $b \longleftarrow 1$ **to** $C-1$ **do**

$\varphi_1 \longleftarrow phase(a_1,b);\ \varphi_2 \longleftarrow phase(a_1,b+1);\ \epsilon \longleftarrow \varphi_2 - \varphi_1;$

If $\epsilon > \pi$ Then

$\epsilon \longleftarrow \epsilon - 2\pi$

End

If $\epsilon < \pi$ Then

$\epsilon \longleftarrow \epsilon + 2\pi$

End

$$a_2 \longleftarrow E\left[\frac{2\pi f_c}{\epsilon}\right];$$

While $\left(\frac{|a_2 - a_1|}{1} > \Delta\right)$ **and** $(a_2 \leq a_{max})$ **do**

$\varphi_1 \longleftarrow phase(a_1,b);\ \varphi_2 \longleftarrow phase(a_1,b+1);\ \epsilon \longleftarrow \varphi_2 - \varphi_1;$

If $\epsilon > \pi$ **Then**

$\epsilon \longleftarrow \epsilon - 2\pi;$

End

If $\epsilon < \pi$ **Then**

$\epsilon \longleftarrow \epsilon + 2\pi;$

End

$$a_2 \longleftarrow E\left[\frac{2\pi f_c}{\epsilon}\right]$$

End

If $0 < a_2 \leq a_{max}$ **Then**

$a_c(b) \longleftarrow a_2;\ \ a_1 \longleftarrow a_2;$

Else

$a_c(b) \longleftarrow a_c(b-1);$

End

End

- **Algorithme d'Arevalillo Herráez**

Input : I_R image de phase repliée de taille $\mathrm{C} \times \mathrm{L}$

Output : I_D image de phase dépliée de taille $\mathrm{C} \times \mathrm{L}$

$i \leftarrow 1;$

While $\left(4^i \leq \frac{C}{2}\right)$ **do**

For $j \leftarrow 1$ to 4^i **do**

On divise l'image en 4^j carres;

I_D^j = Dépliement de l'imagéte $\left(I_R^j\right)$;

End

Raccordement des 4^i imagétes I_D^j;

$i \leftarrow i + 1;$

End

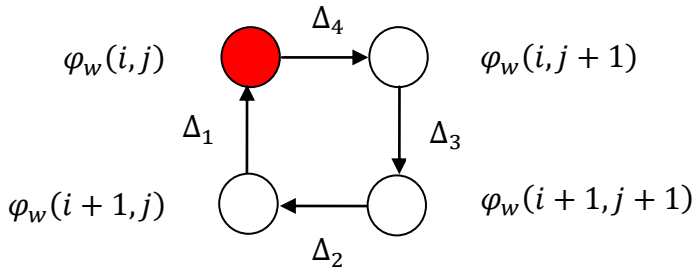
- **Exemple d'application de l'algorithme de Goldstein**

L'algorithme de Goldstein part d'un point initial et procède par intégration de la phase repliée sur des chemins bien choisis faisant appel à la notion des résidus. Afin d'illustrer le fonctionnement de cet algorithme, prenons l'exemple suivant :

Soit la matrice φ_w de taille 4×4 simulant la phase à dépliée

$$\varphi_w = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.8 & 1.2 \\ 0.0 & 0.0 & 1.2 & 1.6 \\ 3.6 & 3.2 & 2.4 & 2.0 \\ 3.2 & 3.2 & 0.0 & 2.4 \end{pmatrix}$$

Tout d'abord on commence par le calcul des différences modulo 2π pour chaque pixel avec ces voisins selon le sens anti-trigonométrique comme il montre la figure ci dessous



Ce calcul va donner lieu à quatre matrices $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4:

$$\Delta_1(i,j) = [\varphi_w(i,j) - \varphi_w(i+1,j) + \pi]\text{modulo } 2\pi - \pi$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.4000 & -0.4000 & -0.4000 \\ 2.6832 & 3.0832 & -1.2000 & -0.4000 \\ 0.4000 & 0.0000 & 2.4000 & -0.4000 \\ -3.0832 & -3.0832 & 0.0000 & 2.4000 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(i,j) = [\varphi_w(i+1,j) - \varphi_w(i+1,j+1) + \pi]\text{modulo } 2\pi - \pi$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0.0000 & -1.2000 & -0.4000 & 1.6000 \\ 0.4000 & 0.8000 & 0.4000 & 2.0000 \\ 0.0000 & -3.0832 & -2.4000 & 2.4000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3(i,j) = [\varphi_w(i+1,j+1) - \varphi_w(i,j+1) + \pi]\text{modulo } 2\pi - \pi$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} -0.4000 & 0.4000 & 0.4000 & 0.0000 \\ -3.0832 & 1.2000 & 0.4000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -2.4000 & 0.4000 & 0.0000 \\ 3.0832 & 0.0000 & -2.4000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_4(i,j) = [\varphi_w(i,j+1) - \varphi_w(i,j) + \pi]\text{modulo } 2\pi - \pi$$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 0.4000 & 0.4000 & 0.4000 & -1.2000 \\ 0.0000 & 1.2000 & 0.4000 & -1.6000 \\ -0.4000 & -2.4000 & 0.4000 & -2.0000 \\ 0.0000 & 3.0832 & 2.4000 & -2.4000 \end{pmatrix}$$

Après, en faisant la somme de ces quatre matrices on obtient une matrice des résidus relatifs à chaque élément de la matrice φ_w. En effet cette matrice ne peut contenir que trois valeurs $2\pi, -2\pi$ et 0.

$$S = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$$

$$S = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 6.2832 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -6.2832 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

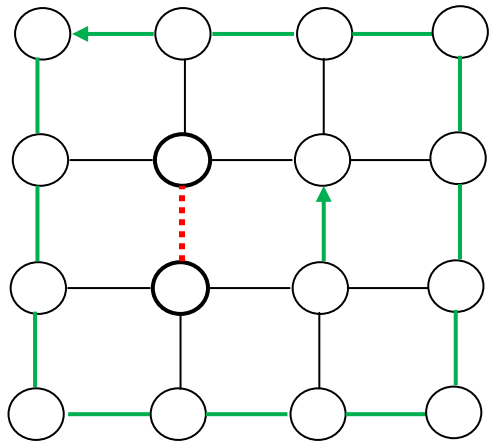
Le calcul de la partie entière de la division des éléments de la matrice S par 2π, donne naissance à la matrice Σ contenant les élément appelés résidus de charge. Une fois obtenue on passe à l'établissement des barrières entre les résidus de charge de signes opposés en construisant un dipôle comme le montre la figue

$$\Sigma_{ij} = E\left[\frac{S_{ij}}{2\pi}\right]$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

: Chemin de dépliement autorisé

: Chemin de dépliement non autorisé



La derniére étape de cet algorithme est de procéder de dépliement en utilisant l'algorithme d'Itoh tout en évitant les barrières déjà établies. Ce qui donne la phase dépliéeφ_U.

$$\varphi_U = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.40 & 0.80 & 1.20 \\ 0.00 & 0.00 & 1.20 & 1.60 \\ -2.68 & 3.2 & 2.40 & 2.00 \\ -3.0.8 & -3.08 & 0.0 & 2.40 \end{pmatrix}$$

Annexe C : Crête de l'ondelette mère de Paul

Cette annexe présente la démonstration donnée par Barj et al. dans la référence [48] de l'estimation de la crête de l'ondelette mère de Paul par l'approche du gradient de la phase.

La transformé en ondelette d'une ligne d'intensité, est donnée par :

$$T_{\psi}[I(z,y)]) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(x,y)\left[1 + V(z,y)cos[my + \varphi(z,y)]\right]\overline{\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)}dy \qquad \text{(C.1)}$$

en exploitant les propriétés de résolution spatiale de la To, on peut faire un développement en série de Taylor au voisinage du point b de la phase.

$$\varphi(z,y) = \varphi(z,b) + (y-b)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z,b) + \cdots \qquad \text{(C.2)}$$

en supposant que les terme $A\ (z,y)$ et $V(z,y)$, varies très lentement de telle sort qu'on peut les considérer comme des constantes, et en raison de la localisation de l'ondelette, on peut s'arrêter au premier ordre du développement de Taylor de la phase. Tenant compte de ces considérations, et en remplacent l'équation (C.2) dans (C.1). Alors la TO d'une ligne d'intensité s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} T_{\psi}[I(z,y)]) = \frac{A(x,b)V(z,b)}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} cos\Big[my + \varphi(z,b) \\ + (y-b)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z,b)\Big]\overline{\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)}dy \end{aligned} \qquad \text{(C.3)}$$

par application de la formule de Parseval on a :

$$T_{\psi}[I(z,y)]) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{I}_s(z,\omega)\overline{\left(\hat{\psi}(a\omega)\right)}\ \exp(i\omega b)d\omega \qquad \text{(C.4)}$$

avec

$$\hat{I}_s(z,\omega) = I(z,b)V(x,b)\pi h(z,b) \qquad \text{(C.5)}$$

$$\begin{aligned} h(z,\omega) = \ \delta(\omega - m1)exp\left[i\left(\varphi(z,b) - b\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z,b)\right)\right] \\ + \delta(\omega - m1)exp\left[-i\left(\varphi(z,b) - b\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z,b)\right)\right] \end{aligned} \qquad \text{(C.6)}$$

et

$$m_1 = m + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z,b) \tag{C.7}$$

finalement l'équation (C.4) devient :

$$\begin{aligned} T_\psi[I(z,y)]) = \frac{A(z,b)V(z,b)\sqrt{a}}{2}\Big\{&\overline{\hat{\psi}(am)}\, exp\big[i\big(bm + \varphi(z,b)\big)\big] \\ &+ \overline{\hat{\psi}(-am)}\, exp\big[-i\big(bm + \varphi(z,b)\big)\big]\Big\} \end{aligned} \tag{C.8}$$

en introduisant la transformée de Fourier de l'ondelette mère de Paul dans l'équation (C.8) on aura :

$$T_\psi[I(z,y)] = \frac{A(z,b)V(z,b)a^{\frac{n+1}{2}} m_1^n \exp(-am)}{(2n)!} exp\big[i\big(bm + \varphi(z,b)\big)\big] \tag{C.9}$$

par la suite, le calcul du scalogramme d'amplitude de la TO donne

$$\big|T_\psi[I(z,y)]\big| = \left(\frac{A(z,b)V(x,b)m_1^n}{(2n)!}\right) a^{n+\frac{1}{2}}\, exp(-am) \tag{C.10}$$

finalement l'ensemble des points formant la crête d'ondelette est

$$a_c(z,b) = \frac{2n+1}{2m_1} \tag{C.11}$$

en remplaçant le terme m_1 par son expression l'équation (C.11) s'écrit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(z,b) = \frac{2n+1}{a_c(z,b)} - m \tag{C.12}$$

par conséquence la phase désirée peut être obtenue par intégration de son gradient.

Remarque : En empruntant la même démarche nous pouvons obtenir l'expression de l'évolution des fréquences locales en fonction de la crête de l'ondelette mère de Morlet