HAL
open science

Etude des courants océaniques transitoires de grande échelle : structure verticale, interaction avec la topographie et le courant moyen, forçage par instabilité barocline

Antoine Hochet

To cite this version:

Antoine Hochet. Etude des courants océaniques transitoires de grande échelle : structure verticale, interaction avec la topographie et le courant moyen, forçage par instabilité barocline. Autre. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2015. Français. NNT : 2015BRES0015 . tel-02165964

HAL Id: tel-02165964

https://theses.hal.science/tel-02165964v1

Submitted on 26 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université de bretagne occidentale

THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE
sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne
pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE
Mention Physique
École Doctorale des Sciences de la Mer

présentée par
Antoine Hochet

Préparée à
l'Institut Universitaire Européen de la Mer

Étude des courants océaniques transitoires de grande échelle : structure verticale, interaction avec la topographie et le courant moyen, forçage par instabilité barocline.

Thèse soutenue le 13 mars 2015
devant le jury composé de :

Rémi Tailleux
Professeur à l'Université de Reading, Grande-Bretagne / *Rapporteur*

Jérôme Sirven
Maître de conférence à l'UPMC, Paris / *Rapporteur*

Alain Colin de Verdière
Professeur à l'UBO à Brest / *Directeur de thèse*

Robert Scott
Maître de Conférence à l'UBO à Brest / **Co-Directeur de thèse**

Julien Le Sommer
Chargé de recherche CNRS au LGGE, Grenoble / *Examinateur*

Xavier Carton
Professeur à l'UBO à Brest / **Président du Jury**

Remerciements

Je souhaite remercier Rémi Tailleux et Jérôme Sirven qui ont généreusement accepté d'être les rapporteurs de ma thèse.
Merci à Xavier Carton et Julien Le Sommer d'avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse.
Et enfin, merci à mes deux directeurs de thèse Alain Colin de Verdière et Robert Scott pour leurs soutien et conseils.

Table des matières

1 Introduction **7**

1.1 Introduction . . . 7
1.2 Interprétation du signal observé dans l'altimétrie satellitaire . . . 9
1.3 Mécanisme des ondes de Rossby . . . 10
1.4 Relation de dispersion, structure verticale, vitesse de phase, vitesse de groupe . 11
1.5 Sources du forçage des ondes de Rossby . . . 13
1.6 Validité des équations linéarisées autour d'un état de repos et d'une topographie nulle . . . 13
1.6.1 Analyse dimensionnelle . . . 14
1.6.2 Prise en compte de la topographie et du champ moyen dans le calcul des vitesses de phase des ondes de Rossby . . . 17
1.6.3 Comparaison des vitesses de phase modifiées et non modifiées par le courant moyen et la topographie . . . 19
1.6.4 β dispersion . . . 21
1.6.5 Où peut-on négliger les non-linéarités ? . . . 22
1.7 Les ondes de Rossby vues dans les données altimétriques . . . 22
1.7.1 Méthode . . . 23
1.7.2 Données utilisées . . . 24
1.7.3 Résultats . . . 24

2 Structure verticale des anomalies de grandes échelles **29**

2.1 Introduction . . . 29
2.2 Modèle et solutions analytiques . . . 34
2.2.1 Solution analytique pour une fréquence de flottabilité constante . . . 36
2.2.2 Comment retirer les modes résonnants ? . . . 38
2.2.3 Interprétation du modèle pour $\lambda^2 > 0$ en termes de distance aux relations de dispersion . . . 40
2.2.4 Un océan à M couches . . . 40
2.2.5 Exemple : l'océan à deux couches . . . 41
2.3 Évaluation du modèle . . . 42
2.3.1 Utilisation d'un modèle numérique idéalisé (MICOM) pour évaluer le modèle théorique et étudier les influences de la latitude et de l'intensité du vent . . . 42
2.3.2 Test du modèle linéaire grâce à des données altimétriques d'AVISO et à une base de données de courantomètres . . . 49
2.4 Projection sur les modes verticaux traditionnels . . . 53
2.5 Excitation des modes libres traditionnels, variation avec la latitude . . . 54
2.6 Conclusion . . . 55
2.7 Idées de méthodes pour calculer la structure verticale . . . 56
2.7.1 Méthode des EOF (Empirical Orthogonal Functions) . . . 57
2.7.2 Projection des anomalies de pression en surface sur les modes de bassin 58

3 Relation de dispersion des ondes de Rossby dans un champ spatialement variable **69**
3.1 Introduction . . . 69
3.1.1 Influence de la topographie sur les ondes libres . . . 70
3.1.2 Influence du courant moyen . . . 73
3.2 Équations et méthode de résolution . . . 75
3.2.1 Équations . . . 75
3.2.2 Méthode de résolution . . . 77
3.3 Études dans des cadres idéalisés . . . 78
3.3.1 Couplage vertical . . . 78
3.3.2 Influence d'une topographie zonale sur la propagation des ondes de Rossby 79
3.3.3 Influence d'un courant moyen zonal variant méridionalement sur les ondes de Rossby . . . 93
3.4 Calcul sur des données réelles dans une zone de l'Atlantique Nord . . . 96
3.4.1 Méthode . . . 96
3.4.2 Comparaison objective de l'énergie décrite par les modes propres . . . 98
3.4.3 Traitement sur les données altimétriques . . . 99
3.4.4 300 ° - 330 ° 20 ° - 30 ° N . . . 100
3.5 Conclusion . . . 100

4 Instabilité de grande échelle et modes de Green **105**
4.1 Introduction . . . 105
4.2 Modèles idéalisés de l'instabilité de Green . . . 106
4.2.1 Étude des modes de Green dans des modèles à couches . . . 107
4.2.2 Calcul sur une stratification continue . . . 116
4.3 Calcul des modes instables grande échelle sur des données réelles de courant moyen 121
4.3.1 Etude de zones particulières . . . 127
4.4 Modification des modes instables par un champ moyen inhomogène . . . 129
4.4.1 Modification par un courant moyen variable . . . 129
4.4.2 Modification par la topographie . . . 132
4.5 Conclusion et perspectives . . . 136

5 Conclusions et perspectives **143**

A **147**

B **149**

C **151**

D **153**

Bibliographie **157**

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 Introduction **7**
1.2 Interprétation du signal observé dans l'altimétrie satellitaire . . . **9**
1.3 Mécanisme des ondes de Rossby **10**
1.4 Relation de dispersion, structure verticale, vitesse de phase, vitesse de groupe **11**
1.5 Sources du forçage des ondes de Rossby **13**
1.6 Validité des équations linéarisées autour d'un état de repos et d'une topographie nulle **13**
1.6.1 Analyse dimensionnelle 14
1.6.2 Prise en compte de la topographie et du champ moyen dans le calcul des vitesses de phase des ondes de Rossby 17
1.6.3 Comparaison des vitesses de phase modifiées et non modifiées par le courant moyen et la topographie 19
1.6.4 β dispersion 21
1.6.5 Où peut-on négliger les non-linéarités ? 22
1.7 Les ondes de Rossby vues dans les données altimétriques **22**
1.7.1 Méthode 23
1.7.2 Données utilisées 24
1.7.3 Résultats 24

1.1 Introduction

Depuis le début des années quatre-vingt-dix et la mise en orbite du satellite TOPEX/Poseidon, nos connaissances des courants océaniques transitoires de grande échelle ont grandement augmenté. La nature de ces courants les rend compliqués à observer depuis le sol : leurs périodes sont supérieures à quelques mois, leur élévation en surface n'est que de quelques centimètres sur parfois plusieurs milliers de kilomètres. L'altimètre placé sur le satellite est capable de mesurer les différences de hauteur avec une précision d'environ deux centimètres, ce qui permet de produire, après quelques traitements effectués par AVISO, la carte présentée sur la figure (1.1). Cette carte représente les anomalies d'élévation de surface, c'est-à-dire l'élévation de surface retranchée de sa moyenne. L'amplitude des anomalies varie géographiquement, les courants de bords Ouest, le Gulf Stream ou le Kuroshio entre autres, le courant circumpolaire, l'équateur, sont des zones où elle est notablement élevée. Les échelles spatiales des anomalies visibles ici sont variables, certaines sont situées entre 100 et 200 km de longueur, ce sont les tourbillons de méso-échelle, d'autres sont beaucoup plus grandes, ce sont celles qui nous intéressent. De nombreuses études, dont nous détaillerons le contenu plus bas, se sont évertuées à extraire de

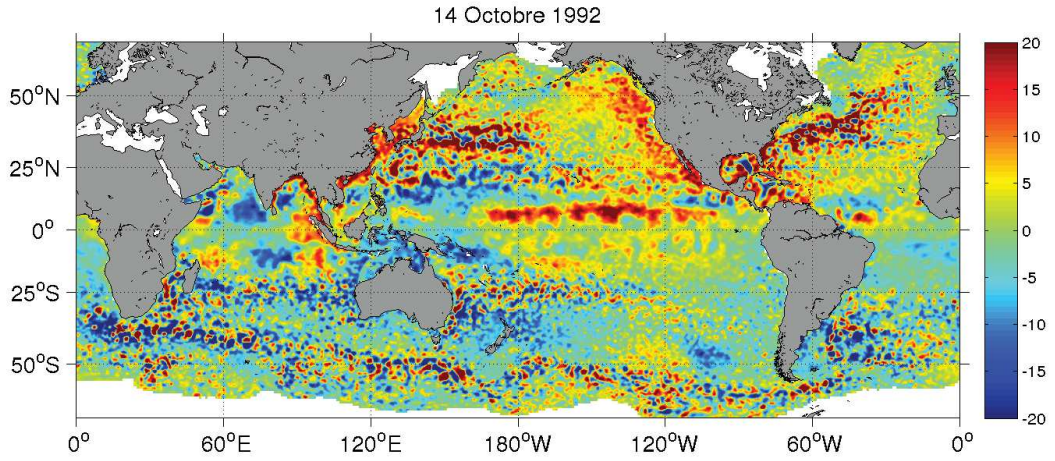

FIGURE *1.1 – Anomalies de hauteur de surface (en cm) données par AVISO pour le 14 octobre 1992.*

ces données les caractéristiques de ces anomalies, c'est-à-dire leur taille, vitesse de déplacement, période, origine etc. Ces courants sont généralement expliqués théoriquement par les ondes de Rossby qui doivent leurs existences aux variations latitudinales de la force de Coriolis. Cette théorie, développée dans les années 40 pour l'atmosphère n'avait jamais pu être correctement vérifiée dans l'océan, du fait des difficultés d'observations citées ci-dessus. La confrontation de ces observations avec la théorie des ondes de Rossby a permis dans un premier temps de l'évaluer, puis de l'améliorer sensiblement en ajoutant localement l'effet d'une topographie et d'un courant moyen. Si du travail a été fait, il reste encore du chemin avant de pouvoir prétendre expliquer correctement les observations de l'altimétrie satellitaire. L'un des objectifs général de cette thèse est de contribuer à la compréhension de ces observations altimétriques.
La connaissance des propriétés de ces anomalies en surface s'est nettement améliorée depuis l'arrivée des satellites, mais celle de leur structure verticale reste très faible, principalement parce qu'elle n'a été observée que ponctuellement grâce à des données d'instruments placés sur des mouillages. Comment pouvons nous dans ce cas accroitre nos connaissances ?
L'océanographie physique fait partie des sciences pour lesquelles les équations qui modélisent le système sont connues et ne sont plus sujettes à débat (en tout cas en océanographie) : ce sont les équations de Navier-Stokes. Par conséquent, pour comprendre les courants marins, il est aussi possible de les résoudre, ou du moins d'en chercher des solutions approchées. Pour cela, deux approches sont possibles. La première consiste à les résoudre en faisant le moins d'approximations possible de manière à ce que la solution soit proche de la réalité, c'est ce que font les modèles numériques dits "réalistes". Cette approche peut être vue comme une manière de pallier au manque de données, ses résultats dépendent de la fiabilité du modèle numérique ; sa fiabilité est déterminée par la confrontation des solutions calculées avec les données mais cette confrontation peut parfois justement être limitée par le manque de données. La deuxième approche consiste à identifier, par des analyses dimensionnelles ou grâce à des modèles numériques simplifiés, les termes des équations responsables du phénomène étudié. Cette approche permet généralement de comprendre plus facilement la dynamique en jeu (les équations ou les configurations sont plus simples), c'est celle que nous utiliserons en particulier pour étudier la structure verticale des anomalies mais aussi tout le long de cette thèse
Ces anomalies se propagent dans un milieu rendu non homogène par les variations du courant moyen et de la topographie. La théorie des ondes de Rossby, souvent associée à ces anomalies, a été modifiée par divers auteurs dont nous détaillerons le travail plus bas, pour prendre en compte les effets de ces deux champs. Les anomalies observées ont parfois des échelles spatiales de l'ordre des variations de la topographie ou du courant moyen. Cependant, la plupart de ces études ont été réalisées en supposant une différence d'échelle entre les ondes et les variations

du milieu dans lequel elles se propagent. Nous tenterons d'étudier dans des cadres idéalisés mais aussi sur des données réelles, comment les ondes de Rossby peuvent être modifiées par ces champs lorsque cette approximation n'est plus faite. Étant donné le degré d'idéalisation employé pour développer cette théorie, sa comparaison avec les observations n'est pas simple. La plupart des auteurs se contentent par conséquent de la comparaison des vitesses de phase observées et prédites par la théorie. Nous tenterons de développer une méthode d'évaluation des différentes théories plus rigoureuse.
Les forçages de ces ondes, c'est-à-dire leurs sources d'énergies, sont le plus souvent associés, dans la littérature, aux variations du vent et aux ondes se propageant le long des frontières Est. Dans l'océan l'instabilité barocline est reconnue depuis quelques années comme étant la source d'énergie principale de la variabilité à méso-échelle (100-200 km). Ce processus est capable d'extraire l'énergie contenue dans les courants moyens, forcés par du vent ou des flux de chaleur ; cette énergie crée des mouvements transitoires qui, à ces échelles, se traduisent par des tourbillons. Bien que ce processus introduise préférentiellement de l'énergie à méso-échelle, de l'énergie est aussi libérée, dans certaines configurations à des échelles plus grandes. Nous considérerons cette possibilité dans des cadres idéalisés dans un premier temps puis sur des données réelles.
Bien que l'incompréhension d'un phénomène observé justifie à elle seule son étude, mieux connaitre ces courants transitoires de grandes échelles pourrait permettre de mieux comprendre la variabilité climatique inter-annuelle. Leurs échelles de temps en font, en effet, des candidats potentiels pour expliquer la variabilité du climat à ces fréquences. Il n'est pas inutile de rappeler ici que si les modèles climatiques sont capables de prédire correctement les variations climatiques au delà d'une centaine d'années, les périodes plus courtes, entres quelques mois et plusieurs dizaines d'années sont très mal prédites. Mieux connaitre les phénomènes à ces périodes, c'est potentiellement mieux prédire les variations climatiques.
Pour résumer, les questions auxquelles nous essayerons de répondre sont :
Quelle est la structure verticale des anomalies observées dans l'altimétrie de surface ? La théorie des ondes de Rossby se propageant dans des milieux variables peut-elle expliquer ces observations ? Puis l'instabilité barocline est-elle une source de forçage de ces anomalies ?
Dans ce premier chapitre, dénommé simplement "introduction" les sujets développés dans les chapitres suivant sont introduits et les problématiques associées expliquées. Pour cela, quelques rappels sur la théorie des ondes de Rossby seront faits, puis une tentative d'évaluation des équations linéarisées autour d'un état de repos, et enfin un bref état de l'art sur les ondes de Rossby dans les observations. Le deuxième chapitre, intitulé "structure verticale des courants transitoires de grande échelle" s'intéresse à la prédiction des courants de subsurface à partir de la connaissance des courants en surface et de la stratification moyenne. Le troisième chapitre "Relation de dispersion des ondes de Rossby dans un champ spatialement variable" étudie la propagation des ondes de Rossby en présence de courant moyen et topographie variant sur des échelles équivalentes et évalue cette théorie à l'aide des données altimétriques. Enfin, le dernier chapitre "Instabilité de grande échelle et modes de Green" étudie la possibilité d'un forçage de ces anomalies par instabilité barocline et tente de mettre en relation le calcul local des instabilités avec les modes de bassin basse fréquence obtenus dans des modèles réalistes.

1.2 Interprétation du signal observé dans l'altimétrie satellitaire

Comment comprendre la variabilité obtenue dans les données altimétriques ? Quelques-unes des différentes interprétations des observations altimétriques sont regroupées dans Wunsch [2010] :

1. le signal est composé d'ondes de Rossby libres, éventuellement modifiées par le courant moyen ou la topographie. C'est l'hypothèse de Chelton et Schlax [1996] qui compare les observations avec les vitesses de phase théoriques des ondes de Rossby puis celle de

Killworth *et al.* [1997] qui inclue le courant moyen dans le calcul des vitesses de phase.

2. Le signal est le résultat de l'instabilité du courant moyen. L'analyse d'instabilité se fait en calculant le mode qui croît linéairement le plus rapidement. Par exemple l'article de Qiu *et al.* [2008] semble montrer qu'il est effectivement possible d'observer les modes instables dans l'altimétrie satellitaire.
3. Le signal est composé de courants forcés par des flux de chaleur ou du vent.
4. Le signal est interprété comme un champ turbulent dont la source d'énergie peut être l'instabilité des courants (moyens ou non). Par exemple voir l'article Le Traon *et al.* [2008].
5. Les ondes de Rossby sont instables et le résultat de cette instabilité est ce qui est observé dans l'altimétrie. LaCasce et Pedlosky [2004] montre que les ondes sont instables aux moyennes et hautes latitudes mais qu'elles résistent aux instabilités à basse latitude grâce à leurs vitesses de propagation plus élevées.

Toutes ces interprétations sont sans doute vraies sous certaines conditions (notamment géographiques, d'échelles de temps et d'espace). L'échelle de Rhines $L_R = \sqrt{\frac{U}{\beta}}$ est souvent donnée comme une limite séparant les mouvements turbulents (le point 4) des ondes (point 1). Nous nous intéresserons dans ce qui suit, aux ondes libres (point 1) qui semblent permettre d'expliquer une grande partie de la variabilité à grande échelle.

1.3 Mécanisme des ondes de Rossby

L'océan peut être considéré, au premier ordre, comme étant en équilibre géostrophique, c'est-à-dire que les gradients de pression sont équilibrés par la force de Coriolis :

$$f_0 u_g = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.1}$$

$$f_0 v_g = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.2}$$

Or, cet équilibre ne permet pas d'expliquer les variations temporelles du flot. Les équations sont dégénérées : elles satisfont automatiquement la condition de non divergence horizontale $\partial_x u + \partial_y v = 0$. Cette non divergence implique une vitesse verticale constante ($\partial_z w = 0$), la présence d'un fond plat, la nullité de cette constante. Pour que le flot puisse évoluer temporellement, les départs de la géostrophie doivent être autorisés. Pour cela $\vec{u}$, le vecteur vitesse, est décomposé en partie géostrophique et agéostrophique : $\vec{u} = \vec{u}_g + \vec{u}_a$. Les équations au deuxième ordre sont :

$$\partial_t v_g + \beta y u_g + f_0 u_a = 0 \tag{1.3}$$

$$\partial_t u_g - \beta y v_g - f_0 v_a = 0 \tag{1.4}$$

Cette fois, la divergence de $u = u_g + u_a$ n'est plus nulle, elle peut être séparée en deux termes :

$$\partial_x u + \partial_y v = \mathrm{div}_\beta + \mathrm{div}_{isallobarique} \tag{1.5}$$

$\mathrm{div}_\beta = -\frac{\beta}{f_0} v_g$ traduit le fait que pour un gradient de pression fixe, la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude implique une vitesse plus grande vers l'équateur. L'amplitude de ce terme est d'autant plus grande que les vitesses méridionales géostrophiques sont élevées. Le deuxième terme $\mathrm{div}_{isallobarique} = \frac{\partial_t \zeta_g}{f_0}$ où $\zeta_g = \partial_x v_g - \partial_y u_g = \frac{1}{f_0 \rho_0}\partial_t(\nabla^2 p)$ est la divergence du courant isallobarique (contour des taux de variations de la pression) dirigé parallèlement aux isallobares, vers les valeurs faibles. La divergence de la partie en β est équilibrée par la divergence de la partie isallobarique dans le cas d'un fluide homogène. Pour un fluide non homogène, la vitesse verticale est reliée à la pression par l'équilibre hydrostatique et la conservation de la

densité en l'absence de sources, puits ou de termes diffusifs, ce qui donne : $w = \frac{1}{N^2\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t}$. En utilisant cette formule, on peut obtenir une équation pour la pression uniquement :

$$\partial_t \left(\frac{1}{\rho_0 f_0} \nabla_H^2 p' + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{\rho_0 N^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right) + \beta \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{1.6}$$

La non divergence de la vitesse géostrophique permet d'introduire une fonction courant ψ telle que $u_g = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ce qui entraine $\psi = \frac{p'}{f_0 \rho_0}$. (1.6) devient :

$$\partial_t \left(\nabla_H^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{1.7}$$

Les termes non linéaires peuvent être ajoutés simplement à l'équation (1.7) en les supposant du deuxième ordre : $u.\overrightarrow{\text{grad}}(u) \sim \epsilon$. Les conditions aux limites verticales sont données par la conservation de la densité en surface et au fond : $\frac{d\rho}{dt} = 0$ en $z = 0$ et $-H$. En supposant l'existence d'un "toit rigide" en surface et d'un fond plat (pas de topographie) la condition :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} = 0 \tag{1.8}$$

s'applique en surface et au fond.
Dans la section qui suivra, seule la partie linéaire de ces équations (l'équation (1.7)) nous intéressera.

1.4 Relation de dispersion, structure verticale, vitesse de phase, vitesse de groupe

Pour des anomalies de faibles amplitudes et grâce à une séparation de variables entre l'horizontale et la verticale, la solution de (1.7) peut être recherchée sous la forme d'un mode de Fourier : $\psi = F(z) \exp(i(kx + ly - \omega t))$. La relation de dispersion suivante est ainsi obtenue :

$$\omega_j = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + 1/R_j^2} \tag{1.9}$$

avec j $\in \mathbb{N}$ et R_j, le rayon de déformation du j-ème mode vertical, est calculé comme l'inverse de la racine carrée de la j-ème valeur propre du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}\left(\frac{f_0^2}{N^2}\frac{dF_j}{dz}\right) + \frac{1}{R_j^2}F = 0 \\ \frac{dF}{dz}(z = -H) = 0 \\ \frac{dF}{dz}(z = 0) = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Les relations de dispersion des quatre premiers modes verticaux sont dessinés sur la figure (1.2) lorsque $l = 0$. Les courbes des modes baroclines passent par un maximum lorsque $k^2 = 1/R_j^2$. Le mode barotrope voit sa fréquence tendre vers l'infini en zéro, ceci étant une conséquence de l'approximation du toit rigide. La structure verticale $F_j(z)$ est le vecteur propre associé à la valeur propre $1/R_j^2$ et dépend uniquement du paramètre de Coriolis f_0 et de la fréquence de Brunt-Väisälä $N^2(z)$. La figure (1.3) reproduit les quatre premiers modes verticaux, calculés pour une stratification issue des données World Ocean Atlas (WOA) à 30° Ouest et 20° Nord (dans l'Atlantique Nord).
À partir de la relation de dispersion (1.9), les vitesses de phase zonales et méridionales $\vec{c} = (c_x, c_y)$ sont facilement calculées :

$$c_x = -\frac{\beta}{k^2 + l^2 + 1/R_i^2} \tag{1.11}$$

$$c_y = \frac{-\beta k/l}{k^2 + l^2 + 1/R_i^2} \tag{1.12}$$

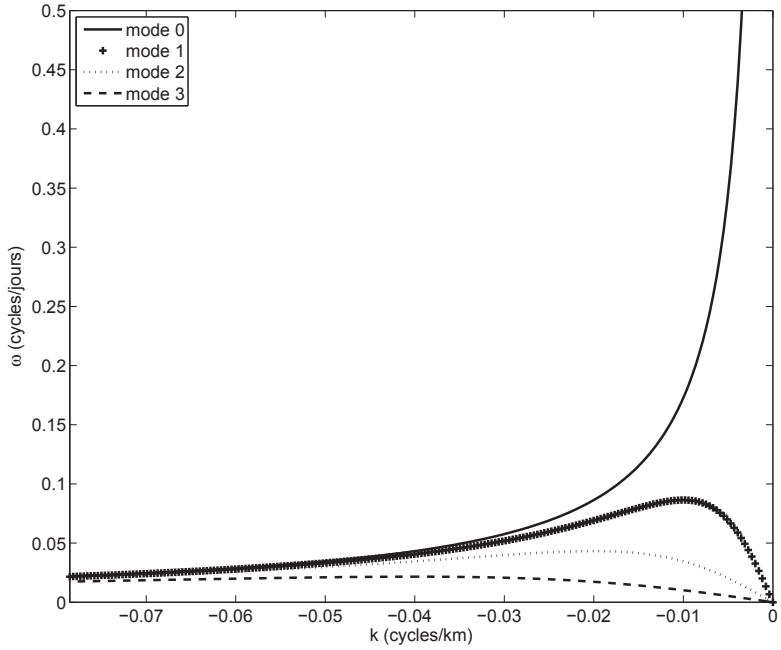

FIGURE *1.2 – Relations de dispersion pour les quatre premiers modes verticaux. $l = 0$ cycles/km.*

L'une des propriétés les plus importantes de ces ondes est que leur vitesse de phase zonale est toujours dirigée vers l'ouest (car $c_x < 0$). La vitesse de phase méridionale peut être dirigée vers le nord ou le sud : le signe de c_y dépend du rapport k/l. Il faut noter que c_y est beaucoup plus petite que c_x lorsque les échelles zonales L_x sont beaucoup plus grandes que les échelles méridionales L_y.
La vitesse de groupe $\vec{c}_g = (c_{gx}, c_{gy}) = (\frac{\partial\omega}{\partial k}, \frac{\partial\omega}{\partial l})$:

$$c_{gx} = -\frac{\beta(-k^2 + l^2 + 1/R_i^2)}{\left(k^2 + l^2 + 1/R_i^2\right)^2} \tag{1.13}$$

$$c_{gy} = -\frac{\beta 2l}{\left(k^2 + l^2 + 1/R_i^2\right)^2} \tag{1.14}$$

La vitesse de groupe est la vitesse à laquelle l'énergie est transportée par un paquet d'ondes. La figure (1.4) montre le cercle $\omega(k, l) =$ constante et l'hyperbole (en noir) qui sépare les vitesses de groupe dirigées vers l'ouest de celles dirigées vers l'est. La vitesse de groupe (flèche rouge) est la normale au cercle, dirigée vers son centre. De cette figure on peut déduire que pour une fréquence ω donnée, l'énergie se déplace vers l'ouest lorsque k est suffisamment petit. Le vecteur représentant la vitesse de phase est dessiné en vert. Sur la figure (1.5) la période minimum autorisée par la théorie des ondes de Rossby en fonction de la latitude est montrée, elle vaut :

$$\omega_{max} = \frac{2\pi}{T_{min}} = \frac{\beta R_d}{2} \tag{1.15}$$

où R_d est le rayon de déformation, il est obtenu par une moyenne zonale du rayon de déformation dans l'Atlantique Nord tiré de l'atlas de D. Chelton [Chelton *et al.*, 1998]. On renvoie le lecteur intéressé par plus de précisions sur ces ondes vers le livre de Gill [1982].

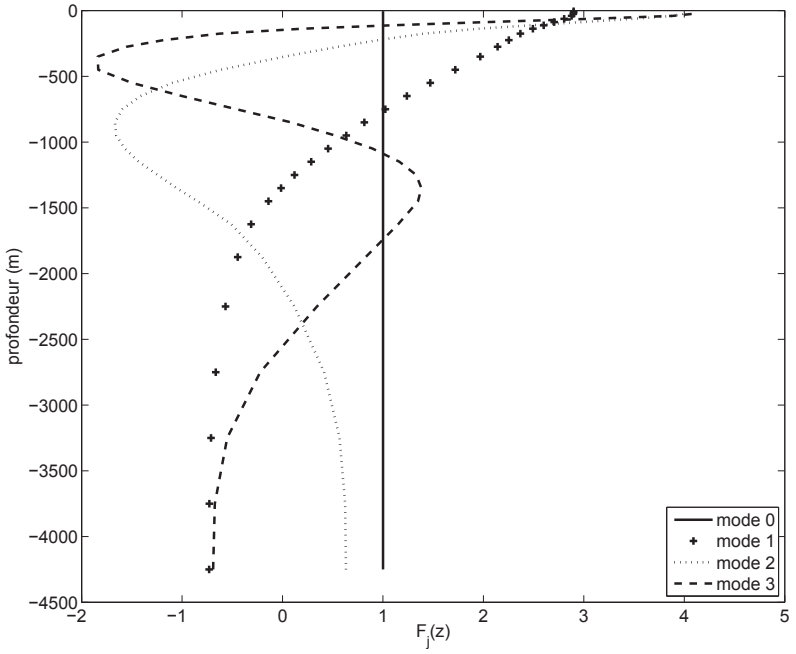

FIGURE *1.3 – Modes verticaux calculés pour une stratification située dans l'Atlantique Nord à* 30° *Ouest et* 20° *Nord.*

1.5 Sources du forçage des ondes de Rossby

Les ondes de Rossby peuvent être forcées de plusieurs manières. Les changements de vent, ou les ondes se propageant le long de la frontière Est, (comme les ondes de Kelvin) sont généralement les deux mécanismes évoqués dans la littérature pour expliquer le forçage de ces ondes. White et Saur [1983] Fu et Qiu [2002] étudient le rôle respectif de ces deux forçages, en essayant de reproduire le signal altimétrique du Pacifique Nord grâce à un modèle linéaire à deux couches, forcé par des données réalistes de vent et par les mouvements de la frontière Est. Les résultats montrent globalement que les mouvements de la frontière Est sont responsables de la variabilité observée à basse latitude alors que le vent est responsable de la variabilité à moyenne et haute latitude. Les mécanismes d'interaction des ondes de Kelvin avec les ondes longues de Rossby le long d'une frontière Est ont été étudiés, par exemple par Clarke [1983] et Clarke et Shi [1991], qui calculent le long de chaque côte la fréquence critique à partir de laquelle les ondes sont piégées le long de la côte. Pour chaque latitude, la théorie linéaire donne une gamme de fréquences pour laquelle des ondes de Rossby baroclines existent : $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$ avec $\omega_{\max} = \beta R_d/2$. R_d diminuant avec la latitude, les possibilités d'existence des ondes de Rossby baroclines sont plus faibles à haute qu'à basse latitude et on peut donc penser que pour un forçage en bruit blanc, les ondes baroclines seront plus nombreuses aux basses latitudes.
Les tourbillons [Flierl, 1984] et l'instabilité barocline de grande échelle [Green, 1960] peuvent aussi être à l'origine d'ondes de Rossby. On étudiera cette dernière possibilité dans le quatrième chapitre à travers l'étude de la stabilité de la circulation moyenne à grande échelle.

1.6 Validité des équations linéarisées autour d'un état de repos et d'une topographie nulle

Dans ce paragraphe, nous allons évaluer la validité des équations linéarisées autour d'un état de repos. Colin de Verdière et Tailleux [2005] montrent dans le cadre de l'approximation

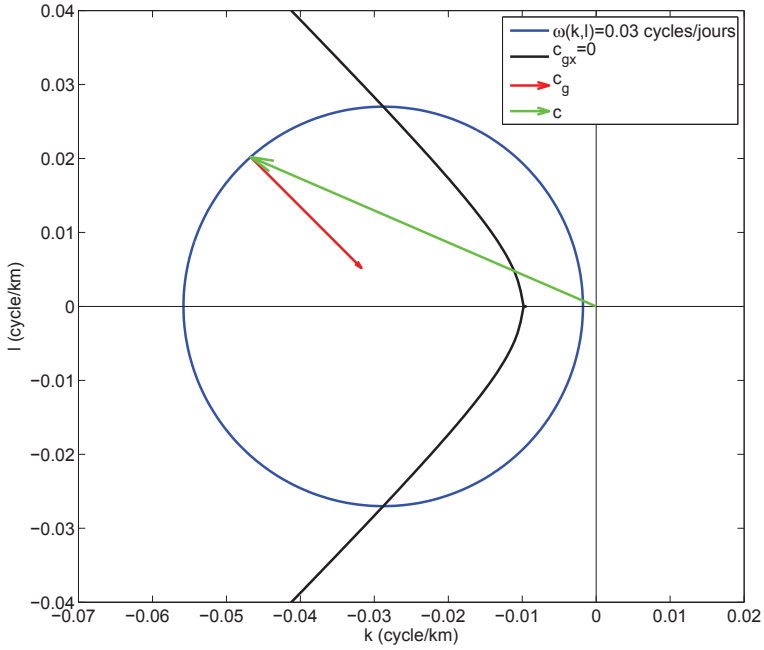

FIGURE *1.4 – le cercle bleu représente l'équation $\omega(k,l) = 0.03$ cycles/jours pour le premier mode barocline ; les lignes noires $k = l$ la séparation entre une vitesse de phase vers le sud ou une vitesse de phase vers le nord et la flèche rouge la vitesse de groupe, dirigée vers le centre du cercle. Cette figure est adaptée de Pedlosky [1982] page 125*

des ondes longues que l'influence d'un courant barocline sur les ondes de Rossby baroclines est contrôlée par le nombre adimensionnel $R^2 = \beta \frac{N^2 h}{f^2 U_z}$. Ce nombre mesure le rapport de β avec son équivalent topographique créé par les pentes fU_z/N^2 des surfaces de densité moyenne. À basse latitude ($< 30\,°$), lorsque R^2 est grand, le courant moyen a peu d'influence sur ces ondes alors qu'à haute latitude ($> 30\,°$) R^2 diminue, ce qui suggère une influence du courant moyen sur les ondes.

1.6.1 Analyse dimensionnelle

Pour mesurer l'importance de la topographie et du courant moyen sur les anomalies de grande échelle, un modèle à deux modes verticaux est utilisé. Les modèles avec un nombre réduit de modes verticaux sont plus adaptés que les modèles à nombres de couches réduites pour la comparaison avec un océan réaliste. En effet, la définition des modes se fait simplement à partir de la connaissance de la stratification de la zone à modéliser, alors que le choix de la hauteur des couches (dans le cas où leur nombre est réduit) est un problème plus compliqué comme le montre Flierl [1978] pour un modèle à deux couches.
Les équations quasi-géostrophiques projetées sur les modes verticaux s'écrivent [Flierl, 1978] :

$$\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2 - \lambda_k\right] + \beta\frac{\partial}{\partial x}\}\alpha_k + \sum_{i,j} J\left(\alpha_i, \left[\nabla^2 - \lambda_j\right]\alpha_j\right)\zeta_{i,j,k} = -\frac{f_0}{H}F_k(-H)\sum_i J\left(\alpha_i, b\right)F_i(-H) \tag{1.16}$$

où $\zeta_{i,j,k} = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} F_i(z)F_j(z)F_k(z)dz$; $b(x,y)$ est la topographie ; $\alpha_k(x,y,t) = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} F_k(z) * \psi(x,y,z,t)dz$ est la projection de ψ sur le k-ième mode vertical ; avec $F_i(z)$ le i-ème mode vertical (vecteur propre de l'équation (1.10)) satisfaisant la condition de normalisation :

$$\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} F_i(z)F_j(z)dz = \delta_{ij}$$

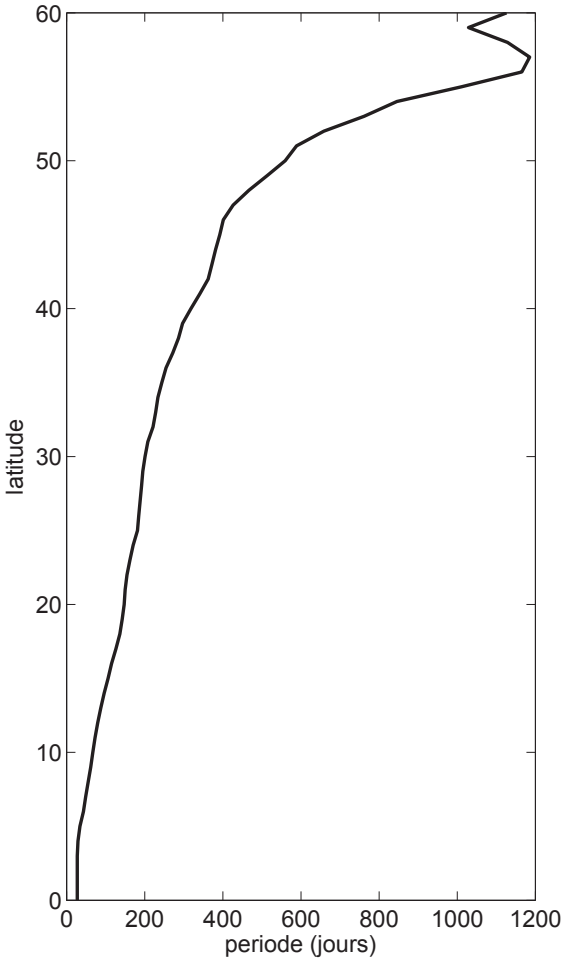

FIGURE *1.5 – Période minimum autorisée par la théorie des ondes de Rossby en fonction de la latitude. Les périodes possibles se situent à droite de la courbe noire. Le calcul de la période (à partir de la formule (1.15)) se fait grâce à une moyenne zonale du rayon de déformation dans l'Atlantique Nord donné par l'atlas de D. Chelton [Chelton* et al.*, 1998]*

, avec H la profondeur de l'océan.
Par simplicité mais aussi parce que les deux premiers modes verticaux retiennent la majorité de la variabilité [Wunsch, 1997], seuls les deux premiers modes du modèle : $k = 0$ ou $k = 1$ sont utilisés, tous les autres sont supposés nuls. L'ordre de grandeur du terme de topographie est tout d'abord comparé avec celui de l'advection méridionale de vorticité planétaire (le terme en β) pour l'équation du premier mode barocline. Puis, l'ordre de grandeur du courant moyen est comparé avec l'advection méridionale de vorticité planétaire.

Influence de la topographie sur les anomalies

Pour évaluer l'influence de la topographie sur les anomalies contenues dans le premier mode barocline, les grandeurs respectives des termes $\frac{f_0}{H} F_k(-H) \sum_i J(\alpha_i, b) F_i(-H)$ et $\beta \partial_x \alpha_k$ sont comparées.
Pour simplifier les calculs, les approximations suivantes sont effectuées :

1. $k \sim l$ l'échelle zonale et l'échelle méridionale ont la même grandeur ;
2. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ les amplitudes des modes barotrope et barocline sont les mêmes.

l'influence de la topographie devient alors :

$$\frac{f_0}{H}|F_1(-H)|\left[k_{batp} * |F_0(-H)| + k_{bacl} * |F_1(-H)|\right]\left(|\partial_x b| + |\partial_y b|\right)\alpha$$

et l'effet β : $\beta k_{bacl}\alpha$.
k_{batp} et k_{bacl} sont les nombres d'ondes typiques des ondes barotrope et barocline. $|F_0(-H)|k_{batp}$ ne peut généralement pas être négligé devant $|F_1(-H)|k_{bacl}$ si k_{bacl} et k_{batp} sont du même ordre de grandeur.
Le rapport des deux termes donne, dans l'équation concernant le coefficient du premier mode barocline :

$$\frac{f_0}{H}|F_1(-H)|\left[\frac{k_{batp}}{k_{bacl}} * |F_0(-H)| + |F_1(-H)|\right]\left(|\partial_x b| + |\partial_y b|\right) \tag{1.17}$$

Le logarithme en base 10 de ce coefficient est représenté sur la figure (1.6) pour $k_{bacl} = k_{batp} = \frac{\pi}{1000km}$. Le résultat montre globalement que la topographie peut être négligée à basse latitude et loin des grands monts sous-marins.

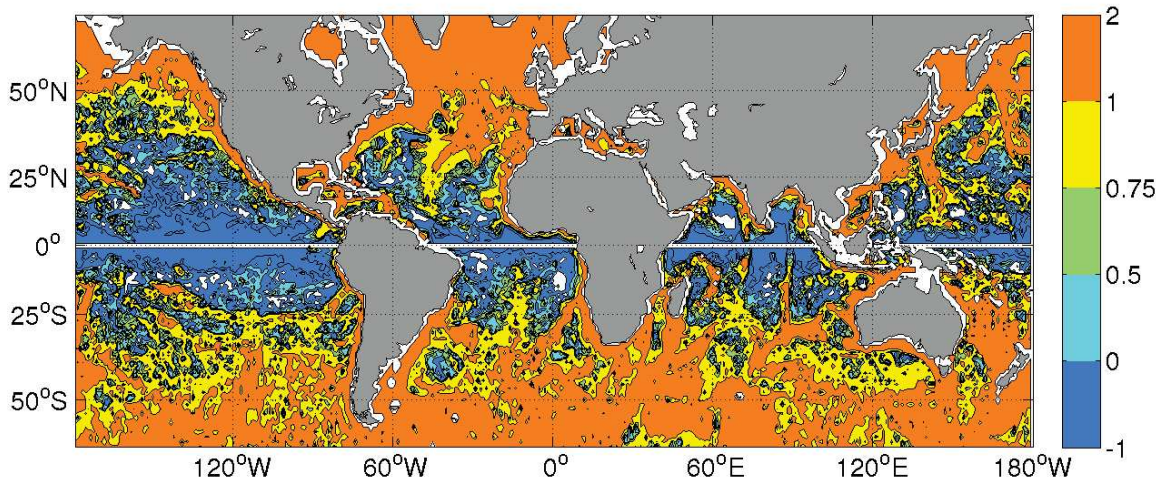

FIGURE *1.6 – Logarithme en base 10 du nombre adimensionnel représentant le rapport des termes dus à la topographie sur l'advection méridionale de vorticité planétaire dans les équations (1.16). Si le logarithme vaut 0, les deux nombre sont du même ordre, < 0 (> 0) le teme β domine (est dominé) par la topographie.*

Influence du courant moyen sur les anomalies

Pour évaluer l'effet du courant moyen sur les anomalies, le terme $\sum_{i,j} J\left(\alpha_i, \left[\nabla^2 - \lambda_j\right]\alpha_j\right)\zeta_{i,j,k}$ est comparé à $\beta\partial_x\alpha_k$. En reprenant les même notations que précédemment et les mêmes hypothèses, le rapport de ces deux termes donne :

1. influence des vitesses moyennes sur les anomalies de vorticité potentielle :

$$\begin{aligned}(|\overline{u_0}| + |\overline{v_0}|)\left(|\zeta_{001}|k_{batp}^3 + |\zeta_{011}|k_{bacl}(k_{bacl}^2 + |\lambda_1|)\right)/(\beta k_{bacl}) + \\ (|\overline{u_1}| + |\overline{v_1}|)\left(|\zeta_{101}|k_{batp}^3 + |\zeta_{111}|k_{bacl}(k_{bacl}^2 + |\lambda_1|)\right)/(\beta k_{bacl})\end{aligned} \tag{1.18}$$

$\overline{u_0}$, $\overline{u_1}$, $\overline{v_0}$, $\overline{v_1}$ sont les projections de la vitesse moyenne zonale u et méridionale v sur le mode barotrope (0) et le premier mode barocline (1).

2. influence de la vorticité potentielle moyenne sur les anomalies de vitesse. On suppose de plus ici que R_1, le rayon de déformation, est beaucoup plus petit que les échelles horizontales du champ moyen, de sorte que l'on peut négliger les termes en ∇^2 devant les termes en λ_1. Le résultat est :

$$|\lambda_1| \left(|\bar{u_1}| + |\bar{v_1}|\right) \left(k_{batp}|\zeta_{011}| + k_{bacl}|\zeta_{111}|\right) / (\beta k_{bacl}) \tag{1.19}$$

Le courant moyen est tiré d'une base de données globale, construite par Alain Colin de Verdière et Michel Ollitrault, à partir des données des vitesses à 1000 m ARGO et de la stratification de l'atlas WOA 2011. Davantages d'informations sont disponibles dans l'article Ollitrault et Colin de Verdière [2014].
Après le calcul de la projection du courant moyen sur chaque mode vertical, puis des ζ_{ijk}, la somme des termes (1.18) et (1.19) est évaluée en choisissant $k_{batp} = k_{bacl} = \frac{\pi}{1000}$ cycles/km. Le résultat de ce calcul est présenté sur la figure (1.7). La figure montre que, comme pour la topographie, le champ moyen est négligeable à basse latitude, aux latitudes inférieures à environ 30 ° et là où le courant moyen est suffisamment faible.

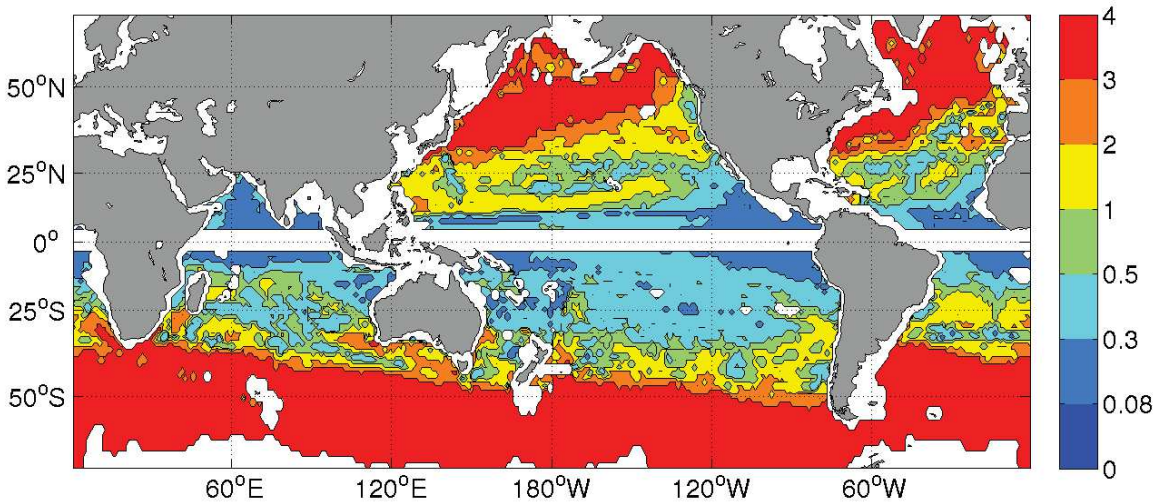

FIGURE *1.7 – Nombre adimensionnel représentant le rapport des termes dus au courant moyen sur l'advection méridionale de vorticité planétaire dans les équations (1.16). Un rapport supérieur à 1 indique que les termes représentant le courant moyen ont une amplitude supérieure à ceux qui représentent l'advection de vorticité planétaire. Un rapport inférieur à 1 indique l'inverse.*

1.6.2 Prise en compte de la topographie et du champ moyen dans le calcul des vitesses de phase des ondes de Rossby

Dans la littérature, la prise en compte de la topographie et du champ moyen s'est surtout faite dans le cadre particulier des ondes de Rossby baroclines, notamment dans une série d'articles de Peter Killworth, dont nous allons présenter certains aspects ici. Les éléments déclencheurs de ces études sont d'une part l'observation dans l'altimétrie satellitaire d'anomalies

se déplaçant vers l'ouest et d'autre part la différence observée entre la vitesse de propagation de ces anomalies et la vitesse prédite par la théorie linéaire des ondes de Rossby (article de Chelton et Schlax [1996]). Dans l'article Killworth *et al.* [1997], les vitesses de phase des ondes de Rossby baroclines sont calculées en présence d'un courant moyen avec l'approximation des ondes longues. À partir de solutions analytiques l'auteur montre comment un courant moyen se projetant sur le deuxième mode barocline peut augmenter la vitesse de phase vers l'ouest aux latitudes supérieures à 30 ° N et à 25 ° S en moyenne (voir la figure 12 de cet article). L'ajout de ce courant moyen semble réduire les différences entre les observations et la théorie (voir sa figure 1b) bien que des études plus récentes sur les observations (par exemple Polito et Liu [2003]) ont montré que la valeur des vitesses vers l'ouest de cette étude était probablement surestimée.
Le courant moyen zonal introduit, en plus d'un simple effet Doppler, l'effet d'une pente due à l'inclinaison des surfaces isopycnes dans l'équation (1.7) [Colin de Verdière et Tailleux, 2005]. Cette pente peut être calculée à partir du vent thermique :

$$f_0 \frac{dU}{dz} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y} \tag{1.20}$$

En utilisant $N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho}{dz}$, la pente latitudinale des surface isopycnes devient :

$$\text{pente}(z) = -f_0 \frac{U_z}{N^2} \tag{1.21}$$

Le terme $f_0 \frac{\partial}{\partial z}\text{pente}(z)$ crée un effet équivalent à celui de la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude (l'effet β) avec, en plus, une dépendance en z. En posant

$$\beta^*(z) = \beta + f_0 \frac{\partial}{\partial z}(\text{pente(z)})$$

l'équation (1.7), en présence d'un courant zonal moyen s'écrit :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2(z)} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) + \beta^*(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{1.22}$$

Killworth et Blundell [1999] étudient l'effet d'une topographie méridionale sur la vitesse de ces ondes, en utilisant la condition $w = J(\psi, \text{topo}(x, y))$ au fond. Ils concluent que la topographie ne peut pas être responsable des différences observées globalement bien qu'elle ait un impact localement. En contradiction avec cette étude, Tailleux et McWilliams [2000] dans un modèle à deux couches, puis Tailleux et McWilliams [2001] dans le cadre plus général d'un océan stratifié continûment montrent que la topographie peut augmenter la vitesse de phase des ondes d'un facteur H/H2 dans le cas du deux couches, d'un facteur $1 + \frac{N_b}{\overline{N}}$ dans le cas continu avec N_b la fréquence de Brunt-Väisälä au fond et $\overline{N}$ sa moyenne sur la verticale. Le mécanisme responsable de cette accélération est la décorrélation de l'anomalie de pression au fond avec l'anomalie de pression en surface. Cependant, le phénomène à l'origine de ce mécanisme n'est pas clairement connu et pourrait être lié à une forte pente de la topographie, mais aussi aux non-linéarités, à la faible stratification des flots abyssaux, aux tourbillons, à la topographie de petite échelle etc. On reviendra sur l'effet de la topographie sur les ondes libres de Rossby dans le chapitre trois.
Dans Killworth et Blundell [2004] puis Killworth et Blundell [2005], l'approximation "ondes longues" jusqu'alors utilisée est relaxée, les relations de dispersion pour les ondes de Rossby baroclines sont alors calculées localement en présence d'un courant moyen et d'une topographie pour un ensemble de nombres d'ondes (k, l). Les ondes les plus longues calculées de cette manière semblent être en accord avec les observations comme le montre la comparaison de leurs calculs avec les estimations de Osychny et Cornillon [2004] figure (1.8) tirée de leur article.

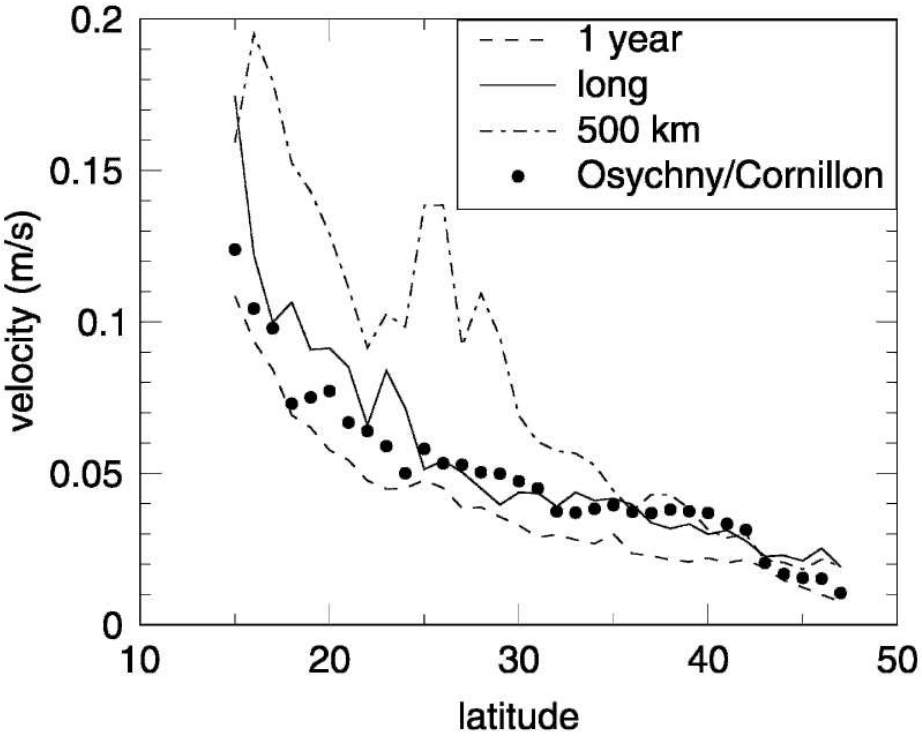

FIG. 17. Comparison of estimated phase speeds by Osychny and Cornillon (2004) (black dots) and predicted speeds showing dashed line: 1-yr period, solid line: long waves, and dash–dotted line: 500-km-wavelength waves.

FIGURE *1.8 – tirée de Killworth et Blundell [2005]. Comparaison des vitesses des ondes de Rossby estimées depuis AVISO par Osychny et Cornillon [2004] avec les calculs locaux en présence de courant moyen et de topogaphie*

1.6.3 Comparaison des vitesses de phase modifiées et non modifiées par le courant moyen et la topographie

Une autre manière d'évaluer l'effet du courant moyen ou de la topographie sur les ondes est de comparer les vitesses de phase calculées avec ou sans ces champs. Le calcul des vitesses de phase en présence de ces deux champs a déjà été effectué, notamment par Killworth *et al.* [1997] Killworth et Blundell [2003a] Killworth et Blundell [2003b],etc. Mais des cartes globales comparant ces vitesses de phase n'ont, à notre connaissance, jamais été publiées.
Ce calcul nécessite plusieurs hypothèses dont l'une des plus importantes est la séparation d'échelle entre les anomalies et le champ moyen ou la topographie. Cette hypothèse de séparation permet de supposer que le champ moyen et la topographie varient très peu sur les échelles spatiales des anomalies et donc d'effectuer un calcul local. Pour ce calcul, les équations quasi-géostrophiques linéarisées autour d'un état moyen "local" sont utilisées.
En négligeant les variations horizontales du champ moyen par rapport au stretching sur la

verticale les équations s'écrivent :

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}+V\frac{\partial}{\partial y}\right\}\left(\nabla^2\psi+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)$$
$$+\left(\beta-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \quad (1.23)$$

Puis les conditions aux limites sur la verticale :
en surface :

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}+V\frac{\partial}{\partial y}\right\}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial x}U_z+\frac{\partial\psi}{\partial y}V_z=0 \quad (1.24)$$

au fond :

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}+V\frac{\partial}{\partial y}\right\}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial x}U_z+\frac{\partial\psi}{\partial y}V_z+wN^2(-H)=0 \quad (1.25)$$

avec $w=J(\psi,\mathrm{topo}(x,y))$.
L'approximation suivante consiste à supposer que l'échelle horizontale des ondes est grande par rapport au rayon de déformation (approximation des ondes longues) pour ne garder que le terme $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$ dans $\left(\nabla^2\psi+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)$. Le courant moyen méridional V est ensuite négligé par rapport au courant moyen zonal U. Et enfin, le nombre d'onde méridional est supposé nul : $l=0$ ce qui permet de simplifier grandement le calcul : les équations, divisées par k deviennent indépendantes des nombres d'ondes horizontaux.
Ensuite, en supposant que U et V ne dépendent que de la profondeur, on peut chercher ψ sous la forme d'un mode de Fourier $\psi=F(z)\exp\left(i(kx+ly-\omega t)\right)$. Les équations deviennent alors :

$$U\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right)+\left(\beta-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)F(z)=c_x\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial F}{\partial z}\right) \quad (1.26)$$

$$U\frac{\partial F}{\partial z}+U_zF(z)=c_x\frac{\partial F}{\partial z},z=0 \quad (1.27)$$

$$U\frac{\partial F}{\partial z}+\left(U_z+N^2(-H)\frac{\partial\mathrm{topo}}{\partial y}\right)F(z)=c_x\frac{\partial F}{\partial z},z=-H \quad (1.28)$$

où $c_x=\frac{\omega}{k}$ est la vitesse de phase zonale. En appliquant une discrétisation adéquate sur la verticale, le problème aux valeurs propres généralisé suivant est obtenu :

$$Av_j=c_{xj}Bv_j \quad (1.29)$$

pour chaque position géographique. j est le numéro du mode, il y en a autant que de points sur la verticale. A est la matrice de dimension $N_z\times N_z$ qui contient tous les termes n'impliquant pas de dérivée temporelle et B une matrice de même taille qui contient tous les termes restants. Le vecteur v_j contient le j-ème mode vertical et la valeur propre c_{xj} qui lui est associée est la vitesse de phase zonale que l'on cherche.
Le calcul est effectué sur l'ensemble du globe avec une résolution de 1 °. Les données de courant moyen sont obtenues à partir des mesures des balises ARGOs contenues dans l'atlas ANDRO et ont été introduites plus haut. La topographie est celle de l'atlas ETOPO1 ramenée à une résolution de 1 ° par un filtre Gaussien. Enfin, les données de stratification sont extraites de l'atlas WOA 2011. Dans ce qui suit les vitesses de phase du premier mode barocline avec un courant moyen et avec une topographie sont comparées à la vitesse de phase calculée en l'absence de ces deux champs.

Vitesse de phase avec courant moyen

La figure (1.9) montre le rapport des vitesses de phase du premier mode barocline calculées avec et sans courant moyen. Un rapport de 1 indique qu'il n'y a pas de différence, supérieur

à 1 que la valeur absolue de la vitesse de phase modifiée est supérieure à celle non modifiée et inférieur à 1 qu'elle est inférieure. La carte montre que les différences entre les vitesses de phase avec et sans courant moyen deviennent très importantes à haute latitude, au-dessus de 30 ° environ. Sous cette latitude, l'effet du courant moyen sur les vitesses de phase semble pouvoir être négligé.

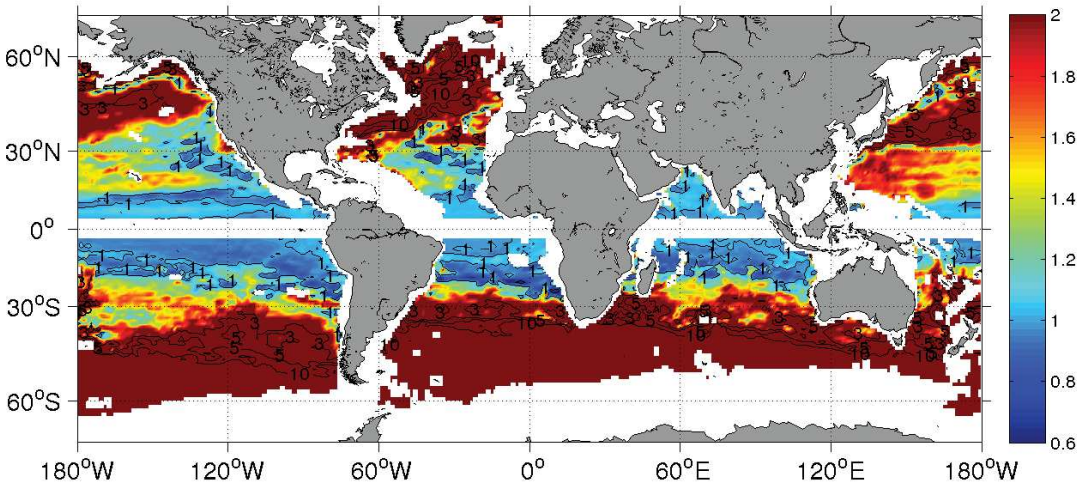

FIGURE *1.9 – Rapport de la vitesse de phase zonale modifiée par le courant moyen sur la vitesse de phase sans courant moyen.*

Vitesse de phase avec topographie

Ici on étudie l'effet de la topographie sur les vitesses de phase du premier mode barocline. Le rapport des vitesses de phase modifiées par la topographie sur celles sans topographie est montré figure (1.10). Il en ressort la même conclusion que précédemment : à basse latitude la topographie a peu d'influence alors qu'à haute latitude (au-dessus de 25 $-$ 30 °N) son influence modifie complètement la vitesse de phase. Les modifications sont plus importantes le long des monts sous-marins. Mais attention, le calcul suppose ici $l = 0$, par conséquent, les pentes zonales ne jouent pas de rôle, il est possible que leur prise en compte modifie la carte (1.10).

Pour conclure cette partie, la comparaison des ordres de grandeur des termes des équations du mouvement (1.16) et la comparaison des vitesses de phase du premier mode barocline en présence ou non de courant moyen et topographie nous renseignent sur les régions de validité des équations de la théorie simple (sans courant moyen et sans topographie). Les résultats de ces calculs suggèrent que la topographie et le courant moyen ont une influence moins importante sur les ondes de Rossby baroclines à basse latitude qu'à haute latitude. Les cartes révèlent que ce résultat doit être modulé en fonction de la présence ou non de monts sous marins et de forts courants océaniques.

1.6.4 β dispersion

Dans l'équation (1.7), la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude est approximée par β, autour d'une latitude ϕ_0 on a :

$$2\Omega \sin(\phi - \phi_0) = 2\Omega \sin(\phi_0) + 2\Omega \cos(\phi_0)(\phi - \phi_0) = 2\Omega \sin(\phi_0) + \beta y \tag{1.30}$$

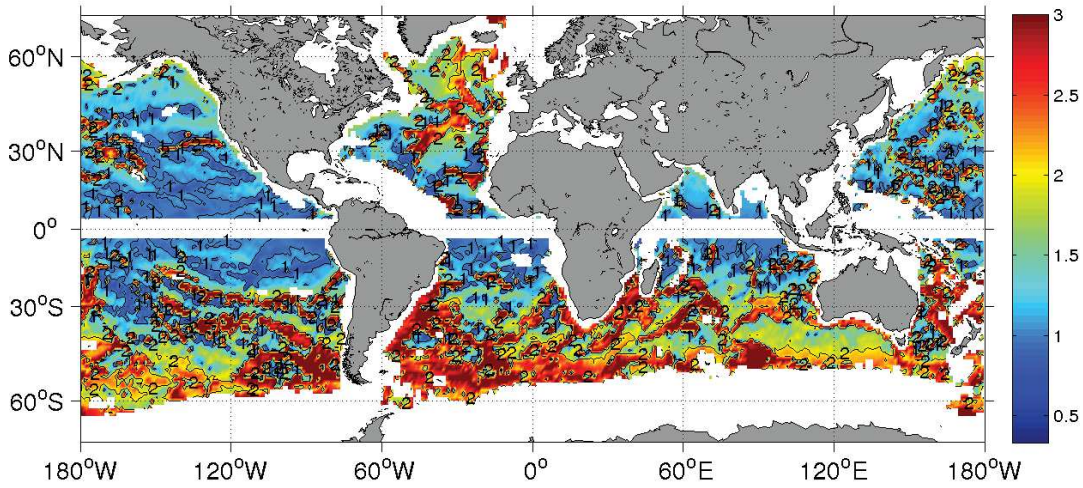

FIGURE *1.10 – Rapport de la vitesse de phase zonale modifiée par la topographie méridionale sur la vitesse de phase sans topographie.*

avec $\beta = 2\Omega\cos(\phi_0)/R_t$ et $y = (\phi - \phi_0) * R_t$. R_t et Ω sont respectivement le rayon et la vitesse de rotation de la Terre. Cette approximation est valable à condition que $\beta L_y << f_0$. Schopf *et al.* [1981] montrent que des ondes de Rossby avec des échelles méridionales L_y très grandes subissent l'influence de la variation méridionale du paramètre de Coriolis, les vitesses de phase au Sud étant beaucoup plus rapides que celles du Nord (dans l'hémisphère Nord). Une onde de Rossby se propageant depuis la frontière Est aura une trajectoire incurvée vers l'équateur, des zones d'ombres (des zones où les ondes de Rossby ne se propageront pas) et des caustiques (les trajectoires des ondes se croisent en certain points au niveau de l'équateur) peuvent aussi exister dans ces conditions.

1.6.5 Où peut-on négliger les non-linéarités ?

Dans les équations étudiées jusqu'ici, les termes non-linéaires ont été supposés négligeables par rapport aux autres. Dans ce paragraphe, on tente de quantifier l'effet de ces termes en calculant l'échelle de Rhines $L_\beta = \sqrt{\frac{\beta}{U}}$ pour laquelle les termes non-linéaires équilibrent les termes d'advection méridionale de vorticité planétaire. Les mouvements avec des échelles plus grandes que L_β ne devraient donc pas être soumis aux non-linéarités. Pour estimer U, on fait l'hypothèse que la vitesse en surface est un maximum sur la verticale (ce qui n'est pas forcément vrai partout) et la formule suivante est utilisée : $U = \sqrt{\overline{u^2} + \overline{v^2}}$ où $\bar{..}$ est la moyenne temporelle, u et v sont les anomalies de vitesses géostrophiques calculées à partir de AVISO. La figure (1.11) montre l'échelle de Rhines ainsi calculée. Sans surprise, les valeurs les plus élevées se trouvent près des courants de bord ouest, dans le courant circumpolaire et près de l'équateur. En dehors de ces zones, les non-linéarités peuvent être raisonnablement négligées pour des échelles supérieures à 500 km.

1.7 Les ondes de Rossby vues dans les données altimétriques

Même si cette thèse s'intéresse plutôt à la dynamique derrière les anomalies d'élévation de surface qu'à leur description, il n'est pas inintéressant de faire un bref résumé de la littérature

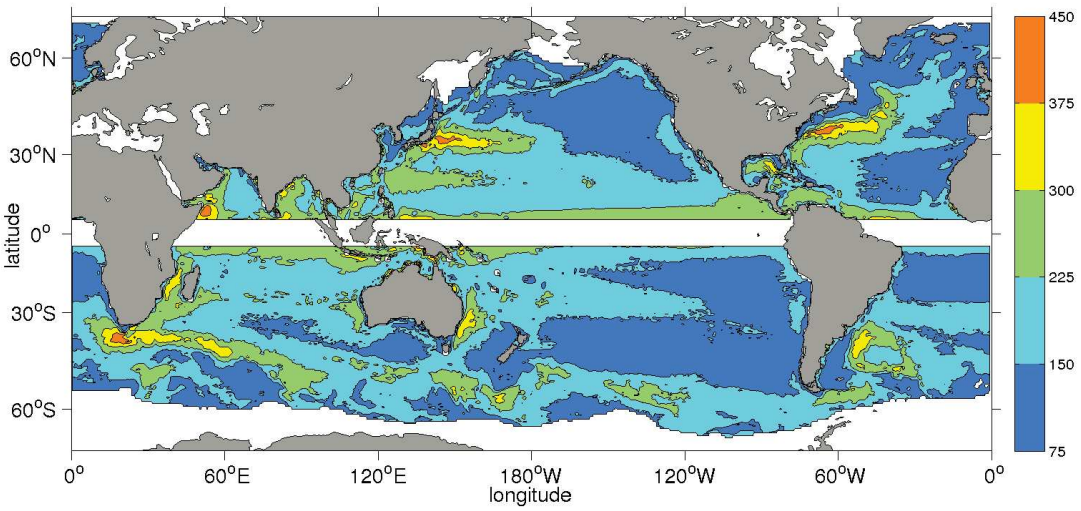

FIGURE *1.11 – Échelle de Rhines (en km) calculée à partir des anomalies de vitesses géostrophiques de surface déduites d'AVISO.*

sur ce qui est observé, à grande échelle, dans les données satellitaires. Après avoir donné un aperçu des méthodes employées pour extraire les propriétés des ondes, on décrira quelques-unes de leurs caractéristiques.

1.7.1 Méthode

Différentes méthodes sont utilisées pour extraire des données les propriétés des ondes de Rossby et sont présentées dans ce qui suit. Le diagramme de Hovmöller et la transformée Radon permettent uniquement de calculer les vitesses de phase tandis que les transformées de Fourier, en ondelettes, ou les filtres, permettent d'obtenir plus de détails sur leurs caractéristiques (longueur d'onde, période...).
Pour résumer, les méthodes les plus utilisées sont :

- *Diagrame de Hovmöller* : Sur une ligne de latitude constante, on dessine l'anomalie de hauteur de surface en fonction du temps et de la longitude. Les ondes qui se propagent sont alors visibles sous la forme de lignes inclinées. L'angle que ces lignes font avec l'axe des abscisses donne la vitesse de phase. Cependant, cette méthode ne permet pas de distinguer les différentes ondes qui constituent le signal et ne donne que la vitesse de phase de l'onde avec l'amplitude la plus forte. Elle est très simple à utiliser et à interpréter. Elle nécessite de supposer que $l = 0$.
- *Transformée de Fourier 2D* : Simple à mettre en oeuvre le long d'une ligne de latitude constante grâce aux transformées de Fourier rapide (FFT). Cette méthode est facile à interpréter : les auteurs ajoutent les relations de dispersion théoriques sur le même diagramme afin de les comparer. Par exemple Osychny et Cornillon [2004] et Maharaj *et al.* [2007] l'utilisent. Il faut supposer que $l = 0$, et c'est une analyse globale : elle ne permet pas de différencier des zones géographiques ou des périodes de temps. L'un des avantages de cette transformée est que les modes de Fourier sont orthogonaux.
- *Transformée de Fourier 3D* : Comme précédemment, elle est assez simple à mettre en

oeuvre grâce aux FFT mais nécessite le choix (plus ou moins arbitraire) d'une zone rectangulaire où le calcul est réalisé. Elle est utilisée notamment par Zang [2000]. Mais elle est assez compliquée à interpréter à cause de la troisième dimension qui complique la visualisation des résultats. L'avantage par rapport aux précédentes méthodes est que la longueur d'onde méridionale n'est pas supposée nulle.

- *Transformée de Radon 2D et 3D* : La transformée de Radon 2D projette les données temps longitude sur des lignes à angle constant. Elle permet uniquement de calculer les vitesses de phase des ondes, mais donne des vitesses de phase des différentes ondes qui composent le signal. Comme la transformée de Fourier, c'est une analyse globale qui ne permet pas d'étudier la variabilité géographique des ondes. Hill *et al.* [2000] l'utilisent en combinaison avec une transformée de Fourier 2D sur des données de température. [Challenor *et al.*, 2001] pour la transformée 3D.
- *Filtre FIR (finite impulse response)* : peut être utilisé pour séparer les différents composants du signal (ondes propagatrices et non propagatrices, propagation vers l'est ou vers l'ouest, période de 1 mois, 2 mois...) par exemple dans Polito et Liu [2003].
- *Transformée en ondelettes* : la transformée en ondelettes donne à la fois des informations sur le contenu spectral du signal (comme la fft) mais aussi sur la variation spatiale et temporelle de son amplitude. Cependant, elle est généralement utilisée sous une forme non-orthogonale (il existe des bases orthogonales construites par Claude Basdevant du LMD). Elle est utilisée par exemple par Zang [2000] dans la partie annexe de sa thèse, et par Wang *et al.* [1998].

1.7.2 Données utilisées

Les ondes de Rossby semblent être visibles dans les données altimétriques (par exemple Chelton et Schlax [1996]), les données de température [Hill *et al.*, 2000] mais aussi dans les données de couleurs [Cipollini *et al.*, 2001], démontrant l'impact de ces ondes sur l'activité biologique.
Les données altimétriques sont majoritairement utilisées pour la détection des ondes car elles donnent une information intégrée sur la verticale tandis que la température de surface, peut, dans certains cas, ne donner qu'une information concernant la surface. C'est le cas par exemple si la couche de mélange est très peu profonde, Isern-Fontanet *et al.* [2008] le montrent quand ils testent une méthode basée sur la température de surface pour reconstruire la circulation en profondeur (eSQG Lapeyre et Klein [2006]). La couleur de l'océan est liée à la concentration en chlorophylle en surface et est affectée par les ondes de Rossby. Cette influence des ondes de Rossby sur la chlorophylle serait plutôt due à des mécanismes physiques (advection horizontale, concentration de la chlorophylle environnant l'onde) qu'à des mécanismes biologiques (montée de nutriments en surface qui ensuite nourrissent la chlorophylle) Killworth *et al.* [2004] et Dandonneau *et al.* [2003] sont des références sur ce sujet.

1.7.3 Résultats

Vitesses de phase

Les anomalies observées ont des vitesses de phase dirigées vers l'ouest à pratiquement toutes les latitudes mais des valeurs plus importantes que celles prédites par les équations linéarisées autour d'un état de repos et sans topographie [Chelton et Schlax, 1996]. Grâce à une analyse spectrale, Wang *et al.* [1998] mettent en évidence, à 25 ° dans le Pacifique Sud, deux ondes différentes : une avec une longueur d'onde de 40 ° et une période de 2 ans et une autre avec une longueur d'onde de 16 ° et une période de 9 mois.
La possibilité de distinguer les différents composants du signal permet de relativiser la différence entre les observations et la théorie, Zang et Wunsch [1999] montrent que 10 à 40 % de l'énergie peut être expliquée par la théorie simple (sans courant moyen et avec un fond plat)

des ondes de Rossby. Les différences de vitesses de phase mesurées dépendent beaucoup de la méthode utilisée pour leur extraction, le coefficient comparant les observations à la théorie peut varier selon les articles d'environ 1.25 [Polito et Liu, 2003] à 2 [Chelton et Schlax, 1996]. On peut cependant accorder plus de crédit à la méthode utilisée dans Polito et Liu [2003] qui permet de distinguer les différentes composantes du signal de surface. Sous 30 ° les auteurs trouvent que les vitesses de phase observées correspondent globalement plutôt bien à la théorie mais qu'au-dessus de cette latitude, il existe partout une différence d'au moins 25 %. Les différences avec les observations dépendent aussi de la période et de la longueur d'onde, les résultats de Zang et Wunsch [1999] et de Osychny et Cornillon [2004] suggèrent que les ondes courtes ont généralement des fréquences plus élevées que la théorie alors que les ondes longues ont des fréquences bien estimées par cette théorie. Ils en déduisent que lorsque la proportion des ondes courtes dans le champ total des ondes de Rossby augmente, la différence moyennée sur toutes les longueurs d'ondes entre la théorie et les observations augmente aussi.
La plupart des auteurs (par exemple Chelton et Schlax [1996], Polito et Liu [2003]) trouvent que les vitesses de phase observées diminuent avec la latitude, en accord avec la théorie linéaire des ondes de Rossby baroclines. Cependant, Osychny et Cornillon [2004] montrent que la décroissance des vitesses de phase avec la latitude est plutôt moins rapide que ce qui est prédit par la théorie. Ils trouvent de plus qu'elles sont quasiment uniformes entre 30 ° et 40 ° N dans la partie Ouest de l'Atlantique Nord.
Fu [2004] compare les fréquences des anomalies se déplaçant vers l'ouest pour différentes latitudes avec les fréquences critiques des ondes de Rossby baroclines ($\omega_c = \frac{\beta c_1}{2f}$). Il montre que la plupart de leur variabilité a des fréquences inférieures à la fréquence critique, en adéquation avec la théorie linéaire. Cependant, une partie non négligeable du signal se déplace vers l'ouest à des fréquences plus élevées que la fréquence critique. L'auteur suggère que l'ajout du courant moyen, comme décrit par la théorie de Killworth *et al.* [1997] permet d'expliquer ces observations.

Différences Est-Ouest dans l'Atlantique Nord

Osychny et Cornillon [2004] montrent que dans l'Atlantique Nord, les anomalies ont une amplitude plus importante à l'Ouest du bassin qu'à l'Est. Leurs résultats suggèrent que, bien que la dorsale médio-atlantique ait effectivement un effet sur les ondes créés dans la partie Est du bassin et se propageant vers l'ouest, cette topographie ne semble pas être la source des ondes observées dans la partie Ouest ce qui est en contradiction avec plusieurs autres études (par exemple celle réalisée par Barnier [1988]). Compte tenu de l'orientation des vecteurs d'ondes observés, la source se trouverait au niveau des grands bancs de Terre-neuve et résulterait de l'interaction du Gulfstream avec sa topographie.

Variations des caractéristiques des anomalies observées avec la latitude

Osychny et Cornillon [2004] sépare l'Atlantique Nord en trois régions. Au nord de 41 ° le spectre d'énergie possède des maximums pour des périodes entre 1,5 à 2 ans et des longueurs d'ondes de 10 ° à 15 °. Entre 25 ° et 41 °N le signal est plus riche (la gamme de fréquences et de nombres d'ondes est plus importante), les périodes sont, dans le nord de la zone, de 9 à 11 mois et dans le sud de 6 à 8 mois. Les longueurs d'ondes diminuent avec la latitude, elles se trouvent autour de 10 ° à 13 ° au Nord de la zone et de 7 ° à 10 ° au sud. Puis la dernière région est située au Sud de 25 ° N où les périodes de 1 an dominent et les longueurs d'ondes sont de 15 ° à 20 ° de longitude à 25 ° N et de plus de 40 ° de longitude au sud de 15 ° N. Cipollini *et al.* [1997] montre qu'il existe dans l'Atlantique une bande de latitude entre 33 ° 34 ° où la propagation des ondes de Rossby est intensifiée. Cette intensification serait due au courant des Açores, les vitesses de phase observées pour cette zone correspondent en effet à celles calculées à partir de la théorie décrite dans Killworth *et al.* [1997] qui prend en compte l'effet du courant

moyen. Pour résumer, les périodes diminuent d'abord avec la latitude de 2 ans jusqu'à 6 mois vers 30 °N puis restent ensuite autour de 1 an au sud de cette latitude. Les longueurs d'ondes diminuent jusqu'à 30 °N puis augmentent jusqu'à des valeurs très importantes sous 15 °N.
Fu [2004] étudie les différences entre les anomalies se propageant vers l'ouest et celles se propageant vers l'est pour chaque bassin océanique. Il montre que la proportion des anomalies se propageant vers l'ouest par rapport aux autres est maximum entre 5 ° et 30 ° et qu'un pic d'énergie existe aux périodes annuelles. L'énergie de ces anomalies annuelles varie avec la latitude. Elle possède deux maximums à 38 ° et sous 15 ° dans le Pacifique Nord ; sous 15 ° et aux alentours de 32 ° dans le Pacifique Sud puis sous 15 ° dans le sud de l'océan Indien. En dehors de ces périodes annuelles, l'énergie augmente avec les périodes considérées dans tous les bassins.

Nombre d'onde méridien

Dans la plupart des études citées précédemment, le nombre d'onde méridien est supposé nul. Anderson et Gill [1975], en étudiant le spin-up d'un océan stratifié, supposent les échelles méridionales imposées par le vent ce qui les mène à une valeur de $l^2 = 10^{-12}\mathrm{m}^{-2}$ qu'il faut comparer à l'inverse au carré du rayon de déformation : $f_0^2/c^2 = 10^{-9}\mathrm{m}^{-2}$ (en utilisant leurs notations). Négliger l est donc, dans leur cas, plutôt justifié tant que la latitude reste suffisamment élevée. Cependant Schopf *et al.* [1981] montre que la variation du rayon de déformation avec la latitude implique une augmentation de l pour une onde se propageant depuis le bord Est. À 25 ° N l^2 devient du même ordre que f_0^2/c^2 deux ans après sa formation. Tulloch *et al.* [2009] montrent que l'absence de l'hypothèse $l = 0$ permet de mieux expliquer la variabilité sous 30 ° N. Glazman et Weichman [2005] suggèrent, après une analyse des données altimétriques, que le vecteur d'onde fait un angle entre 50 et 80 ° avec la direction zonale. De même, les résultats de Osychny et Cornillon [2004] suggèrent que dans l'Atlantique Nord, dans la partie Est du bassin les vecteurs d'ondes sont dirigés vers le Nord-Ouest alors que dans la partie Ouest elles sont dirigées vers le Sud-Ouest. Les ondes auraient une cohérence méridionale sur 10 ° de latitude au sud de 35 ° et de 15 ° de latitude à l'Est du bassin.

Classement en modes verticaux des fréquences et nombres d'ondes

Certains auteurs identifient la présence de modes plus aigus que le premier mode barocline, c'est par exemple le cas pour l'étude de Maharaj *et al.* [2007] sur le Pacifique Sud. Cependant la méthode utilisée dans cet article pour calculer l'énergie présente dans chaque mode vertical est discutable. En effet, de manière assez arbitraire, les frontières entre chaque modes sont définies par les courbes équidistantes de celles des relations de dispersion. Par exemple, l'énergie contenue dans le deuxième mode barocline est obtenue par l'intégration du spectre d'énergie entre les bornes formées d'un côté par la courbe qui sépare le mode 1 et le mode 2 et de l'autre par celle qui sépare le mode 2 et le 3. Ce qui suit montrera que la théorie linéaire (avec ou sans topographie et courant moyen) telle que décrite plus haut explique uniquement ce qui est situé le long des relations de dispersion. D'autres facteurs comme le forçage, la variation spatiale des champs moyens et de la topographie, les non-linéarités doivent être pris en compte pour expliquer l'énergie située entre ces modes. Dans ce même article, les auteurs évaluent la théorie présentée dans Killworth *et al.* [1997] et la théorie linéaire simple. Leur méthode consiste à faire la somme de l'énergie située entre les courbes du premier mode barocline et celle du quatrième. Si sur une zone donnée, la somme est plus grande pour une théorie que pour l'autre alors cette théorie est désignée comme étant celle qui explique le plus de variabilité. Sur la zone étudiée (Pacifique Sud), la théorie de Killworth décrit 60% du spectre d'énergie en plus que la théorie simple. On peut se demander si ce chiffre n'est pas en partie ou complètement dû au fait que l'espace séparant les courbes des relations de dispersion est généralement plus important dans

le cas de la théorie de Killworth que dans le cas de la théorie simple.

Chapitre 2

Structure verticale des anomalies de grandes échelles

Sommaire

2.1 Introduction **29**
2.2 Modèle et solutions analytiques **34**
2.2.1 Solution analytique pour une fréquence de flottabilité constante 36
2.2.2 Comment retirer les modes résonnants ? 38
2.2.3 Interprétation du modèle pour $\lambda^2 > 0$ en termes de distance aux relations de dispersion 40
2.2.4 Un océan à M couches 40
2.2.5 Exemple : l'océan à deux couches 41
2.3 Évaluation du modèle **42**
2.3.1 Utilisation d'un modèle numérique idéalisé (MICOM) pour évaluer le modèle théorique et étudier les influences de la latitude et de l'intensité du vent 42
2.3.2 Test du modèle linéaire grâce à des données altimétriques d'AVISO et à une base de données de courantomètres 49
2.4 Projection sur les modes verticaux traditionnels **53**
2.5 Excitation des modes libres traditionnels, variation avec la latitude **54**
2.6 Conclusion **55**
2.7 Idées de méthodes pour calculer la structure verticale **56**
2.7.1 Méthode des EOF (Empirical Orthogonal Functions) 57
2.7.2 Projection des anomalies de pression en surface sur les modes de bassin 58

Cette partie est fortement inspirée de l'article Hochet *et al.* [in press] intitulé "The vertical structure of large scale unsteady currents".

2.1 Introduction

Bien que les caractéristiques des ondes de Rossby en surface aient été largement étudiées grâce aux avancées de l'altimétrie satellitaire (voir la partie précédente), leur structure verticale est très mal connue. La principale raison de cette méconnaissance est la difficulté d'obtenir des observations en profondeur pour des ondes dont les longueurs d'onde peuvent atteindre plusieurs centaines de kilomètres et les périodes plusieurs années. Depuis plus de vingt ans, l'altimétrie satellitaire fournit continûment des données sur l'ensemble du globe, le jeu de données utilisé ici (AVISO) est échantillonné tous les 7 jours. Étant donné la richesse de ces données (qui n'a pour l'instant pas vraiment d'équivalent), il est très tentant de les utiliser, combinées aux équations de la mécanique des fluides, pour étudier les courants sous la surface. Avant d'être

capable d'obtenir ces courants sur toute la profondeur il est nécessaire de comprendre ce qui relie les courants de surface (champ à deux dimensions donné par l'altimétrie) aux courants en profondeur. Les informations que l'on possède sur la structure verticale de l'océan proviennent principalement de mesures ponctuelles réalisées en bateau, des balises ARGO et des courantomètres déployés de manière très hétérogène dans l'océan. Les mesures réalisées en bateau donnent des informations sur des périodes très courtes et ne peuvent donc pas nous intéresser. Les mesures ARGO bien que globales, sont lagrangiennes ce qui rend très compliqué l'extraction de courants en un point donné. Les courantomètres, répartis régulièrement le long d'une ligne de mouillage, peuvent, quant à eux, fournir des informations précieuses sur la structure verticale, même si leurs enregistrements sont généralement trop courts pour étudier correctement les grandes échelles (rarement plus d'un an). Nous tenterons d'utiliser ces courantomètres pour évaluer nos calculs. Pour cela, nous utiliserons une base de données, constituée de plus de 50 000 enregistrements, construite par D. Furnival et R. Scott (des renseignements sur cette base peuvent être trouvés dans Wright *et al.* [2013]). Les données des courantomètres ont notamment mené Wunsch [1997] à conclure que les moyennes journalières des courants étaient globalement dominées par le mode barotrope et le premier mode barocline. Pour cela, 107 mouillages inégalement répartis dans tous les océans de la planète ont été utilisés. La deuxième conclusion de cette étude, souvent citée dans la littérature, est que l'altimétrie représente principalement le premier mode barocline. Ce résultat est déduit d'une part de la forme des modes verticaux et d'autre part de l'équipartition d'énergie contenue dans le mode barotrope et le mode barocline (déduit des courantomètres). En faisant cette hypothèse d'équipartition de l'énergie entre les deux premiers modes verticaux, on peut facilement obtenir des cartes montrant le rapport en surface du mode barotrope et du premier mode barocline. Le résultat de ce calcul est reporté sur la figure (2.1), le calcul des modes verticaux s'est fait à partir des données de stratification du World Ocean Atlas (WOA). Si la surface semble globalement dominée par le premier mode barocline, ce constat doit être modulé en fonction de la latitude et de la région, notamment à haute latitude où les amplitudes des deux modes données par ce calcul sont équivalentes.

Récemment, Scott et Furnival [2012] ont testé trois stratégies pour extrapoler les vitesses géostrophiques de surface sous la surface. La première utilise seulement un mode vertical (le mode barotrope ou le premier mode barocline), la deuxième une combinaison de ces deux modes, et la troisième un nouvel ensemble de fonctions appelé "Dirichlet basis function" basé sur les modes verticaux avec des conditions de Dirichlet aux bords. Les deux premières stratégies donnent de mauvaises prédictions sous 400 m tandis que les prédictions de la troisième sont plus satisfaisantes et donnent des résultats convenables jusqu'à 800 mètres. Les auteurs montrent que la projection de l'énergie cinétique sur chaque mode vertical change beaucoup avec le temps et l'espace (leur figure est reproduite en (2.2)). Par conséquent, un modèle capable d'extrapoler le signal de surface sous la surface devra être capable de reproduire ce phénomène.
Dans le cadre différent de la méso-échelle (voir la partie (1.2) plus haut pour l'interprétation de ce qui est visible dans l'altimétrie de surface) d'autres auteurs ont tenté d'élaborer des méthodes pour reconstruire le champ 2D de surface en champ 3D. C'est le cas de Lapeyre et Klein [2006], qui utilisent le champ de densité en surface et la stratification moyenne pour reconstruire les vitesses géostrophiques sous la surface à partir de l'inversion de la vorticité potentielle quasi-géostrophique. Leur méthode consiste à, dans un premier temps, séparer la fonction courant en une composante "intérieure" et une composante "surface" $\psi = \psi_{int} + \psi_{surf}$. La composante intérieure n'a pas d'anomalies de densité en surface mais est forcée par une vorticité potentielle non nulle, elle obéit à :

$$\nabla^2 \psi_{int} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi_{int}}{\partial z}\right) = Q \tag{2.1}$$

$$f_0 \frac{\partial \psi_{int}}{\partial z} = 0 \tag{2.2}$$

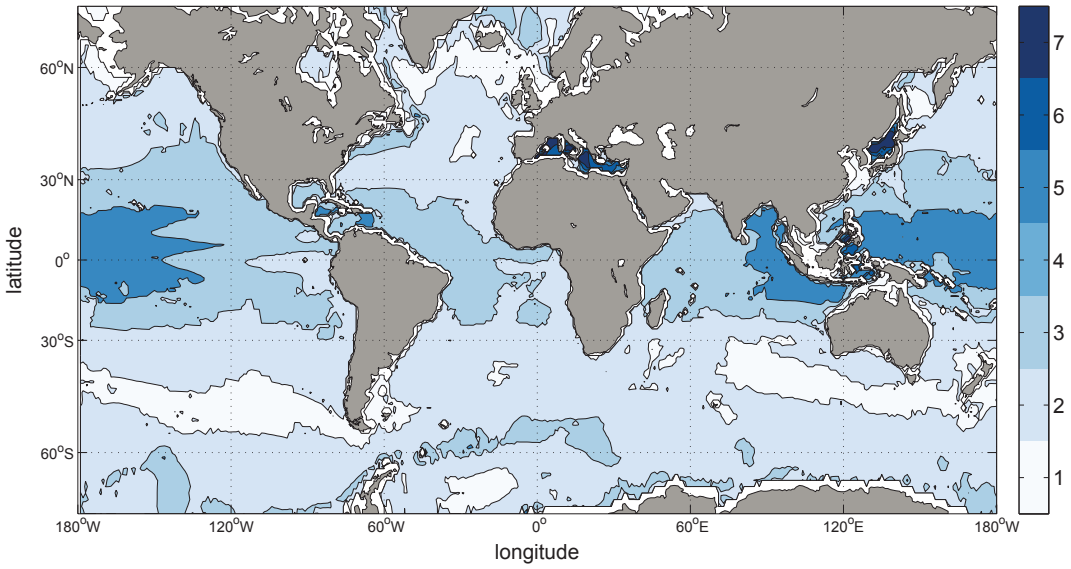

FIGURE *2.1 – Rapport en surface du premier mode barocline sur le mode barotrope en supposant une équipartition d'énergie entre ces deux modes. Lorsque le rapport est supérieur à 1, le mode barocline domine en surface, lorsqu'il est inférieur à 1 c'est le mode barotrope qui domine.*

et la composante "surface" est forcée en surface par des anomalies de densité alors que sa vorticité potentielle à l'intérieur est nulle.

$$\nabla^2 \psi_{surf} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi_{surf}}{\partial z}\right) = 0 \tag{2.3}$$

$$f_0 \frac{\partial \psi_{surf}}{\partial z} = b_{z=0} \tag{2.4}$$

Au fond $\frac{\partial \psi}{\partial z}(z = -H) = 0$ (ici les auteurs doivent supposer que $\partial_z \psi_{int} = 0$ et $\partial_z \psi_{surf} = 0$ au fond sinon les deux problèmes ne sont plus indépendants). La partie ψ_{surf} peut être résolue numériquement directement, il faut en revanche obtenir Q avant de résoudre l'équation pour ψ_{int}. Les auteurs font alors plusieurs approximations en partant de l'équation de conservation de la vorticité potentielle :

$$\frac{DQ'}{Dt} = -v' \frac{\partial \overline{Q}}{\partial y}$$

avec $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y} = \beta - \partial^2_{yy}\overline{u} + \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \overline{b}}{\partial y}\right)$. Les termes de gradient méridional de vorticité planétaire et de vorticité relative sont négligés devant le terme associé à la pente méridionale des isopycnes moyennes. Cette hypothèse devrait exclure les basses latitudes (environ sous 30 °) où ce terme n'est plus négligeable devant β [Colin de Verdière et Tailleux, 2005]. L'hypothèse suivante est la séparabilité de la flottabilité : $b(y, z) = b_s(y)F(z)$ ce qui permet finalement d'écrire $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y} \simeq \frac{1}{f_0}\alpha(z)\frac{\partial \overline{b_s}}{\partial y}$ avec $\alpha(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}F(z)\right)$. Puis en supposant que les vitesses qui advectent le vorticité potentielle à la profondeur z et la flottabilité en surface sont les mêmes, les auteurs déduisent que $Q'(x, y, z) \simeq \frac{1}{f_0}\alpha(z)b'_s(x, y)$, ce qui leur permet de résoudre le problème. Ils font en fait l'hypothèse d'une vorticité potentielle intérieure reliée aux anomalies de densité en surface. C'est la validité de cette hypothèse qui va en partie déterminer la capacité du modèle

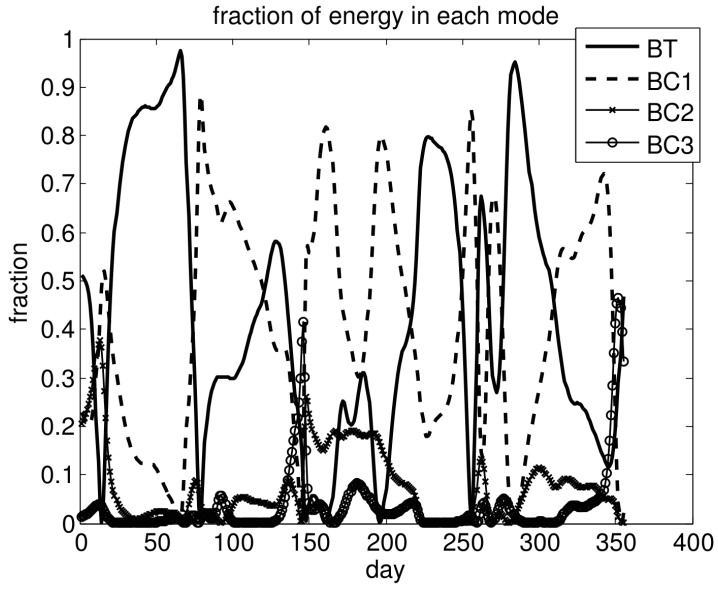

FIG. 6. Time series of the fraction of energy in the first four traditional modes. Solid line is barotropic, dashed line is 1st baroclinic, x's is 2nd baroclinic, o's is 3rd baroclinic. Same data as used to construct Fig. 3.

FIGURE *2.2 – Figure tirée de Scott et Furnival [2012]*

à correctement reconstruire les courants sous la surface. Isern-Fontanet *et al.* [2008] montrent que la méthode fonctionne correctement lorsque la couche de mélange a une profondeur élevée, ce qui arrive par exemple après une tempête, mais que dans le cas contraire, les prédictions sont beaucoup moins bonnes.
Ponte et Klein [2013] utilisent la hauteur d'eau en surface pour calculer la vorticité potentielle intérieure : $q'(x, y, z) = \alpha(z, z_0)q'(x, y, z_0)$ en supposant que la structure verticale de q' est donnée par $\alpha(z, z_0) = \frac{\overline{q_y}(z)}{\overline{q_y}(z_0)}$. Le terme en β n'est pas négligé ; le champ qui advecte les anomalies de vorticité potentielle est supposé indépendant de la profondeur, ce qui doit limiter la validité des prédictions à certains endroits de l'océan. Les hypothèses de ces études indiquent clairement que les auteurs s'intéressent à des échelles plus petites et plus courtes (méso et sous-méso échelle) que les nôtres. Pour ce qui est des échelles temporelles, ces méthodes effectuent la reconstruction à chaque pas de temps, indépendamment des autres pas de temps, et ne prennent donc pas en compte l'évolution temporelle des anomalies. Il est néanmoins intéressant de regarder comment ces modèles calculent la structure verticale d'une onde de Rossby observée en surface afin de mieux comprendre leur fonctionnement.
On suppose qu'on observe en surface une onde de Rossby barocline représentée par :

$$\psi(x, y, z, t) = F_1(z) \exp\left(i(kx + ly - \omega t)\right) \tag{2.5}$$

avec $\omega = \frac{-\beta k}{k^2+l^2+1/R_1^2}$ où R_1 est le rayon de déformation du premier mode barocline et $F_1(z)$ le mode barocline. En surface les anomalies de densité créées par cette onde sont nulles car $dF_1(z)/dz = 0$, par conséquent la solution ψ_{surf} telle que décrite par l'équation (2.3) et la condition en surface (2.4) est nulle. Reste la solution intérieure ψ_{int}. Le modèle présenté dans Lapeyre et Klein [2006] ne permet pas de calculer la solution ψ_{int} car d'une part l'effet β est négligé par rapport aux pentes méridionales des isopycnes (notre onde de Rossby se propage dans un fluide au repos) et d'autre part les auteurs relient la vorticité potentielle intérieure aux anomalies de densité en surface (qui sont nulles pour notre onde). L'étude de Ponte et Klein

[2013] permet de calculer ψ_{int}. $\alpha(z) = \frac{\overline{q_y}(z)}{\overline{q_y}(z_0)} = \frac{\beta}{\beta} = 1$ quel que soit z, à partir de là on utilise la formule dérivée de leur paragraphe 4.3 pour obtenir ψ_{int} (la formule n'est pas explicitement donnée dans l'article) :

$$\psi_{int}(x,y,z) = \sum_{(k,l)} \sum_{n} \frac{\alpha_n \left(\frac{g}{f_0}\hat{\eta} - \psi_{surf}(z=0) \right)}{S(K) * (K^2 + \lambda_n^2)} F_n(z) \tag{2.6}$$

où α_n est la projection de $\alpha(z)$ sur le n-ième mode vertical, $S(K) = \sum_n \frac{\alpha_n}{k^2+\lambda_n^2} F_n(z=0)$, $F_n(z)$ est le n-ième mode vertical et λ_n sa valeur propre associée, $K^2 = k^2 + l^2$. La formule (2.6) montre en fait que dans ce modèle la structure verticale est déterminée par celle de $\alpha(z)$ via sa projection sur les modes verticaux (c'est-à-dire par la structure verticale de la circulation moyenne) et par le contenu en terme de nombre d'onde du signal de surface.
Dans le cas de notre onde de Rossby, $\alpha(z)$ se projette uniquement sur le mode barotrope, $\psi_{surf} = 0$, ψ_{int} devient :

$$\psi_{int}(x,y,z,t) = \frac{\alpha_0 \exp\left(i(kx + ly - \omega t)\right)}{\frac{\alpha_0}{k^2+l^2} * (k^2 + l^2)} F_0(z) = F_0(z) * \exp\left(i(kx + ly - \omega t)\right) \tag{2.7}$$

La structure verticale calculée est barotrope alors qu'elle devrait être barocline démontrant (s'il le fallait étant donné les hypothèses effectuées) que ces modèles ne sont pas appropriés pour le calcul de la structure verticale des mouvements à grandes échelles. Le modèle que l'on va développer ci-dessous sera par conséquent complémentaire de ces études qui semblent apporter des résultats plutôt satisfaisants aux petites échelles.
Dans cette lignée, Wang *et al.* [2013] projettent l'anomalie d'élévation de surface sur le mode barotrope et le premier mode barocline pour reconstruire la vorticité potentielle intérieure. Pour cela, ils imposent une anomalie de pression au fond nulle (sans doute inspirés par l'article de Tailleux et McWilliams [2001]), ce qui peut paraître assez arbitraire, et ne donnent malheureusement pas de pistes pour comprendre comment cette hypothèse affecte leurs résultats. Dans leur modèle, l'onde de Rossby décrite par l'équation (2.5) a une structure verticale donnée par la solution de l'équation :

$$\begin{cases} A_0 F_0(0) + A_1 F_1(0) = \frac{g}{f_0}\hat{\eta} \\ A_0 F_0(-H) + A_1 F_1(-H) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

où A_0,A_1 sont la projection de $\psi_{int}(z)$ sur les deux premiers modes verticaux, $F_0(z)$ $F_1(z)$ sont les modes verticaux. Pour l'onde de Rossby : $\psi_{surf} = 0$. Pour une fréquence de flottabilité constante, $F_0(0) = F_0(-H) = 1$ et $F_1(0) = -F_1(-H) = 1$. Par conséquent, la structure verticale de l'onde de Rossby est ici composée pour moitié du mode barotrope et pour ce qui reste, du premier mode barocline.

Choix de l'anomalie d'élévation ou de densité de surface comme condition aux limites

Les auteurs des études citées ci-dessus et nous mêmes, sommes confrontés au choix entre deux conditions aux limites en surface. Lapeyre et Klein [2006] utilisent les anomalies de densité en surface, Wang *et al.* [2013] les anomalies d'élévations de surface et Ponte et Klein [2013] montrent que dans le cadre de leurs calculs, ces deux conditions sont quasiment équivalentes. Notre choix s'arrêtera sur l'anomalie d'élévation de surface pour plusieurs raisons :

1. les données de SSH sont facilement disponibles et couvrent l'ensemble du globe depuis 20 ans. Les données de température en surface sont affectées par les nuages et ne sont donc pas disponibles partout ni tout le temps.

2. comme souligné par Isern-Fontanet *et al.* [2008], lorsque la couche de mélange a une faible extension verticale, la densité de surface ne reflète pas correctement les courants sous la surface. Au contraire, l'élévation de surface résulte de l'intégration de la densité sur toute la colonne d'eau et a par conséquent plus de chances de refléter la structure des courants profonds.

Nous utiliserons les équations quasi-géostrophiques linéaires dont les régions de validité ont été étudiées au chapitre précédent pour construire une méthode permettant de reconstruire la fonction courant en profondeur. Ce modèle est valable pour étudier les mouvements avec des fréquences et nombre d'ondes de l'ordre de ceux des ondes de Rossby observées et décrites dans le chapitre précédent. Nous évaluerons ensuite ce modèle grâce à des simulations idéalisées (réalisées grâce au modèle MICOM) puis à des mesures in-situ de courantomètres.

2.2 Modèle et solutions analytiques

Nous sommes intéressés par les longues périodes (>30 jours) et les grandes échelles spatiales (>100 km). Si la dissipation, la friction sur le fond, le forçage par le vent et par la chaleur sont négligés ; si on suppose que la flottabilité moyenne dépend uniquement de la profondeur et que la variation du paramètre de Coriolis peut être approximée par un plan β, l'équation pour la conservation de la vorticité potentielle est :

$$\frac{D}{Dt}[\nabla^2\psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z})] = 0 \tag{2.9}$$

où ψ est la fonction courant, f_0 le paramètre de Coriolis local, β sa variation méridionale, (x, y, z) les directions zonale, méridionale, verticale, t le temps, N la fréquence de flottabilité. $\frac{D}{Dt}(.) = \partial_t(.) + u\partial_x(.) + v\partial_y(.)$ avec (u, v) les directions zonale et méridionale des vitesses géostrophiques. La version linéaire de l'équation (2.9) va être utilisée et est valable tant que le nombre de vorticité Rossby $R_\beta = \frac{U}{\beta L^2}$ est petit, où U est l'ordre de grandeur de la vitesse, l'échelle de variation de U. Pour résoudre cette équation, il faut des conditions aux limites en surface et au fond. On choisit de faire l'hypothèse d'un fond plat, ce qui implique pour ψ :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}(z = -H) = 0 \tag{2.10}$$

où H est la profondeur de l'océan (une constante). En surface, on suppose qu'on connaît l'élévation de surface $\eta(x, y, t)$ à partir de laquelle on obtient ψ :

$$\psi(x, y, z = 0, t) = \frac{g}{f_0}\eta(x, y, t) \tag{2.11}$$

Pour résoudre la version linéaire de (2.9), la tradition océanographique commence par exprimer la solution en fonction des modes verticaux, puis résout l'équation sur l'horizontale pour chaque mode. Philander [1978] fait remarquer qu'il est aussi possible de commencer par exprimer la solution en termes de modes horizontaux puis, dans un deuxième temps, de résoudre l'équation pour la structure verticale. Puisqu'il n'y a pas de frontière en haut de l'atmosphère, les modes verticaux n'existent pas et cette deuxième approche a été largement utilisée pour calculer la réponse stratosphérique à un forçage créé par des perturbations troposphériques en dessous (voir par exemple Andrews *et al.* [1987]). Cette approche a motivé notre étude dans laquelle on tente de calculer comment les anomalies de hauteurs d'eau observées sont reliées à l'océan profond. Nous ne considérons pas ici les conditions aux limites latérales que doivent satisfaire les modes horizontaux le long des côtes parce que d'une part la plupart de nos hypothèses (faible courant moyen, linéarité...) ne sont pas valables dans les courants de bord ouest et, d'autre part, l'inclusion des côtes augmenterait considérablement la complexité du problème.

On développe ici une théorie pour l'intérieur de l'océan, éloigné des côtes, une hypothèse qui nous permet d'utiliser en première approximation une simple décomposition de Fourier dans les directions zonale et méridionale. En supposant par conséquent que les frontières horizontales de notre domaine d'étude sont périodiques, on peut décomposer l'élévation de surface de la manière suivante :

$$\eta(x,y,t) = \sum_{(k,l,\omega)} \alpha_{(k,l,\omega)} \exp[i(kx + ly + \omega t)] \tag{2.12}$$

où (k,l) sont les longueurs d'ondes zonale et méridionale et ω la fréquence. $\alpha_{(k,l,\omega)}$ est le coefficient de Fourier associé avec (k,l,ω). On cherche ψ sous la forme suivante :

$$\psi(x,y,z,t) = \sum_{(k,l,\omega)} F(z)_{(k,l,\omega)} \exp[i(kx + ly + \omega t)] \tag{2.13}$$

Puis, en insérant (2.13) dans la version linéaire de l'équation (2.9), le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} F(z=0) = \frac{g}{f_0}\alpha_{(k,l,\omega)} \\ \frac{d}{dz}\left[\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{dF}{dz}\right] + \lambda^2 F(z) = 0 \\ \frac{dF}{dz}(z=-H) = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

où $\lambda^2 = -\left(k^2 + l^2\right) + \beta\frac{k}{\omega}$. La nature de la solution dépend du signe de λ^2. Pour mieux comprendre, supposons que $N(z)$ est constante, ce qui permet d'obtenir une solution analytique. Si $\lambda^2 < 0$ alors F aura la forme d'une exponentielle, piégée en surface alors que pour $\lambda^2 > 0$, F oscille. Pour $\lambda^2 = 0$, F a une structure verticale barotrope. Supposons en plus que $l = 0$; une onde se propage zonalement avec une vitesse de phase c où $\omega = -kc$. L'onde se propage vers l'ouest si $c < 0$, vers l'est si $c > 0$. c intervient dans λ de la manière suivante : $\lambda^2 = -k^2 - \frac{\beta}{c}$. Si l'onde se déplace vers l'est, elle est piégée à la surface car $\lambda^2 < 0$, alors que si sa direction est vers l'ouest, elle est piégée à la surface seulement si $|c| > \frac{\beta}{k^2}$ et a une structure oscillante autrement. Pour résumer, d'après ce modèle, les seules anomalies à avoir une structure oscillante sont celles qui se déplacent vers l'ouest à une vitesse suffisamment faible, c'est à l'intérieur de ce régime que l'on trouve les ondes libres de Rossby décrites dans le premier chapitre. La figure (2.3) montre dans l'espace de Fourier la variation du signe de λ^2 avec k et ω (l, le nombre d'onde méridional, est toujours supposé nul).

Comment est répartie la proportion de l'énergie dans λ^2 en fonction de la latitude dans les données altimétriques ?

Pour répondre à cette question, on définit plusieurs zones à des latitudes différentes dans l'océan Pacifique et l'océan Atlantique comme indiqué sur la figure (2.4). Dans chacune de ces zones, le signal altimétrique est extrait puis traité (ce traitement sera détaillé plus tard) avant de calculer son spectre d'énergie. On calcule ensuite la proportion de l'énergie située dans la région $\lambda^2 > 0$ par rapport à celle située dans la région $\lambda^2 < 0$, le résultat de ce calcul est reporté sur la figure (2.5) pour quatre régions : Pacifique Nord et Sud, Atlantique Nord et Sud. Les résultats montrent que l'énergie contenue dans $\lambda^2 > 0$ est inférieure à la moitié du total aux latitudes inférieures à environ 25 ° et supérieure ensuite. La proportion augmente avec la latitude pour toutes les régions considérées et atteint un maximum autour de 30 °. Elle commence ensuite à diminuer aux latitudes plus élevées. Le calcul n'est pas effectué aux latitudes supérieures à 35 ° car les hypothèses réalisées réduisent la fiabilité du modèle aux hautes latitudes. Ces résultats pourraient suggérer que les ondes de Rossby (qui correspondent à la partie $\lambda^2 > 0$) ont un maximum d'énergie vers 30 ° ce qui n'est pas en contradiction avec la littérature sur le sujet (voir le premier chapitre). Le résultat un peu plus surprenant est que l'énergie contenue dans $\lambda^2 > 0$ ne représente pas la majorité du signal, suggérant que la part

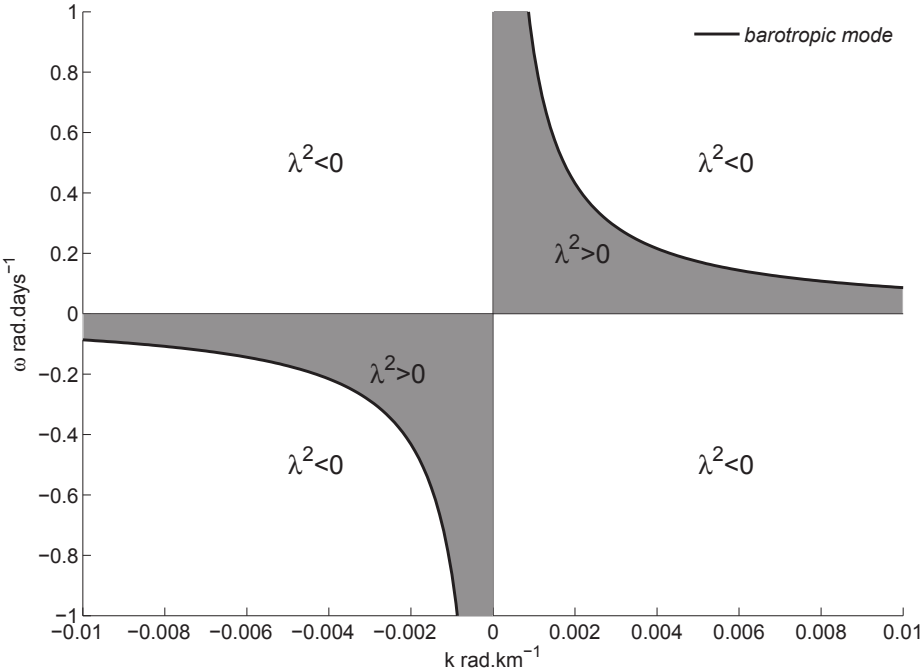

FIGURE *2.3 – Signe de λ en fonction de k et ω. $l = 0$.*

des mouvements forcés (ceux pour lesquels $\lambda^2 < 0$) est importante.

2.2.1 Solution analytique pour une fréquence de flottabilité constante

La solution de (2.14) pour N constante n'est certainement pas très réaliste mais permet de bien comprendre le système que nous étudions. La solution est :
pour $\lambda^2 < 0$, $\mu^2 = -\lambda^2$:

$$F(z) = \frac{g}{f_0}\alpha_{(k,l,\omega)}[\cosh\left(\frac{N}{f_0}\mu z\right) + \tanh\left(\frac{N}{f_0}\mu H\right)\sinh\left(\frac{N}{f_0}\mu z\right)] \tag{2.15}$$

pour $\lambda^2 > 0$:

$$F(z) = \frac{g}{f_0}\alpha_{(k,l,\omega)}[\cos\left(\frac{N}{f_0}\lambda z\right) - \tan\left(\frac{N}{f_0}\lambda H\right)\sin\left(\frac{N}{f_0}\lambda z\right)] \tag{2.16}$$

Lorsque $\lambda^2 > 0$, le système (2.14) n'a pas de solution là où $\frac{N}{f_0}\lambda H = \frac{\pi}{2}[\pi]$. Les données en surface excitent des résonances satisfaisant $\psi = 0$ en surface et $\partial_z\psi = 0$ au fond. À ces échelles, l'approximation du toit rigide ($\frac{N^2H}{g} << 1$) est normalement très bonne. Or, ici, la vitesse verticale ne disparaît pas à la surface et peut même devenir infiniment grande lorsque $\frac{N}{f_0}\lambda H \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. Il est intéressant d'essayer de comprendre ce que ces modes traduisent. La clef de la compréhension est d'imaginer un océan obéissant aux équations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}(z=0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\right) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}(z=-H) = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

La condition en surface $\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}(z=0) = 0$ vient de l'approximation du toit rigide $\frac{N^2H}{g} << 1$ qui néglige le terme $N^2(0)\frac{d\eta}{dt}$ devant la conservation de la flottabilité $\frac{db}{dt}$. La négligence des

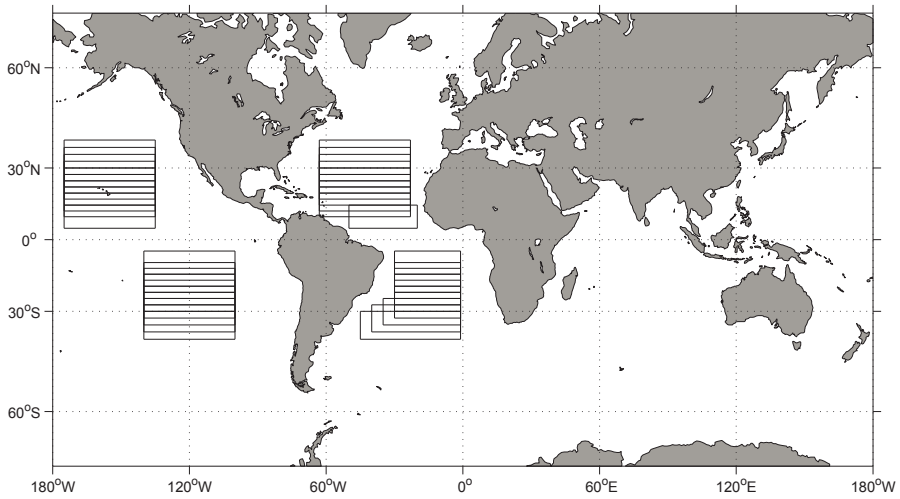

FIGURE *2.4 – Zones étudiées (rectangles noirs) pour le calcul de la proportion d'énergie contenue dans* $\lambda^2 > 0$ *et* $\lambda^2 < 0$*. Les zones font toutes* $10\,^\circ$ *de latitude, leur longitude dépend de leur emplacement.*

termes non linéaires donne par la suite $\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}(z=0)=0$. Les mouvements de cet océan seront concentrés, dans l'espace de Fourier, le long des relations des différents modes verticaux, les autres mouvements n'étant pas autorisés. Pourtant, dans l'océan réel de tels mouvements existent. Pour permettre au système (2.17) de créer des mouvements qui ne sont pas le long des relations de dispersion, il faut y ajouter quelque chose (topographie, forçage, non-linéarités, influence du champ moyen...). C'est ce qui est fait implicitement dans le système (2.14) : les vitesses verticales non nulles à la surface sont autorisées (on peut montrer que, généralement, $w(z=0)\neq 0$ pour $\lambda^2>0$). Ces vitesses non nulles à la surface peuvent être imposées dans le système (2.17) avec, par exemple, une vitesse verticale créée par un forçage par le vent via un pompage d'Ekman. Ce qui se traduit dans le système (2.17) par la condition en surface : $f_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}=N^2(0)w_{ekman}$ où w_{ekman} est la vitesse verticale à la base de la couche d'Ekman (qui est approximée comme étant à la surface pour simplifier). Plus d'informations sur les vitesses verticales créées par le vent peuvent être trouvées dans le livre de Pedlosky [1982]. La vitesse verticale donnée par notre modèle lorsque $\lambda^2>0$ est obtenue en dérivant la formule (2.16) :

$$w(z=0)=\frac{\omega g\alpha_{(k,l,\omega)}\lambda}{Nf_0}\tan\left(\frac{N}{f_0}\lambda H\right) \tag{2.18}$$

et peut être associée à un forçage en vent. Ce forçage est nul le long des relations de dispersion, en effet, dans ce cas, $\frac{N}{f_0}\lambda H\equiv 0[\pi]$ et par conséquent $\tan\left(\frac{N}{f_0}\lambda H\right)=0$. Au contraire, pour des mouvements situés le long de la ligne $\frac{N}{f_0}\lambda H\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ le forçage doit être infiniment grand, ce qui n'est pas réaliste.

Ceci montre simplement que si des ondes forcées existent, leurs fréquences et nombres d'ondes ne peuvent pas se trouver près des courbes $\frac{N}{f_0}\lambda H\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$, elles doivent au contraire se rapprocher des relations de dispersion des modes libres. On peut aussi l'interpréter comme cela : d'abord, pour un forçage donné, l'amplitude de l'élévation de hauteur est plus grande si ce forçage est proche des relations de dispersion puis, dans l'autre sens, pour une amplitude d'élévation de hauteur donnée le forçage devient irréaliste près des courbes $\frac{N}{f_0}\lambda H\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$. Le système (2.14), gardé tel quel, donnera donc, à cause des résonances, une solution dominée par des modes aux vitesses verticales de surface irréalistes.

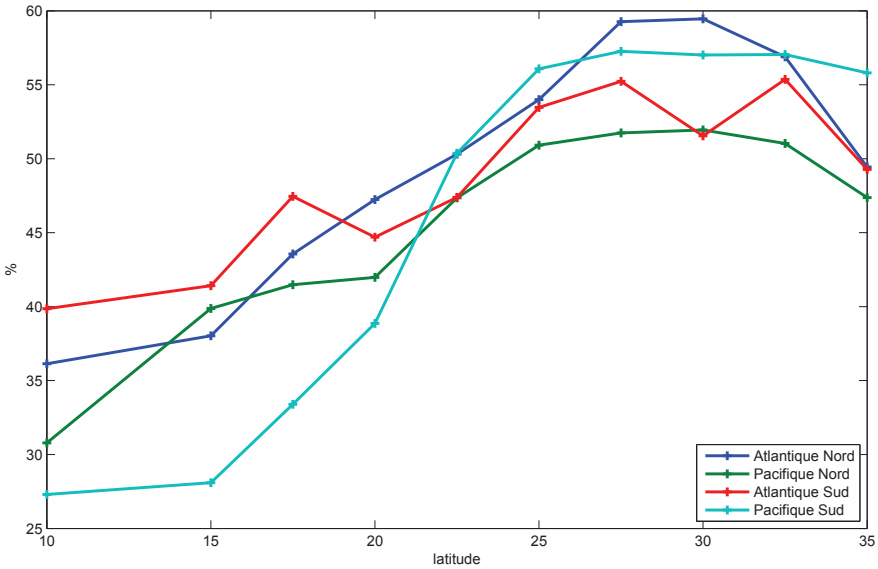

FIGURE *2.5 – Proportion de l'énergie dans $\lambda^2 > 0$ par rapport au total pour quatre régions différentes : l'Atlantique Nord et Sud, le Pacifique Nord et Sud.*

2.2.2 Comment retirer les modes résonnants ?

La principale difficulté de cette méthode est par conséquent de retirer les résonances de ces modes. Traditionnellement, de la friction, de la dissipation sont utilisées, comme dans Matsuno [1970], pour retirer les singularités aux résonances. On essaye donc dans un premier temps d'ajouter de la friction sur le fond en modifiant la condition en $z = -H$ de la manière suivante :

$$\frac{dF}{dz}(z = -H) = i\frac{rN^2(-H)}{\omega f_0}(k^2 + l^2)F(z = -H) \tag{2.19}$$

où r est le coefficient de friction. Ce qui mène à la solution, lorsque $\lambda^2 > 0$:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{g}{f_0}\alpha_{(k,l,\omega)} \cos\left(\frac{N}{f_0}\lambda z\right) \\ &+ \frac{g}{f_0}\alpha_{(k,l,\omega)}\left(R^2(k,l) - \left(\frac{N}{f_0}\lambda\right)^2\right)\frac{\sin\left(\frac{N}{f_0}\lambda H\right)\cos\left(\frac{N}{f_0}\lambda H\right)}{(\frac{N}{f_0}\lambda)^2\cos^2\left(\frac{N}{f_0}\lambda H\right) + R^2(k,l)\sin^2\left(\frac{N}{f_0}\lambda H\right)}\sin\left(\frac{N}{f_0}\lambda z\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

où $R(k,l,\omega) = \frac{r}{\omega f_0}\left(k^2 + l^2\right)N^2(-H)$. R est grand lorsque $\frac{k^2+l^2}{\omega}$est grand aussi, dans ce cas, le dernier terme de $F(z)$ devient $\frac{\cos\left(\frac{N}{f_0}\lambda H\right)}{\sin\left(\frac{N}{f_0}\lambda H\right)}\sin\left(\frac{N}{f_0}\lambda z\right)$ et les modes résonnants ré-apparaissent pour $\frac{N}{f_0}\lambda H \equiv 0[\pi]$. Cette méthode n'élimine pas les modes résonants mais les déplace à d'autres fréquences.

Le deuxième essai consiste à ajouter de la dissipation à l'aide de viscosité latérale. Dans ce cas, l'équation centrale du système (2.14) s'écrit :

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{dF}{dz}\right] + \left(\lambda^2 + i\nu\frac{k^2 + l^2}{\omega}\right)F = 0 \tag{2.21}$$

où ν est le coefficient de dissipation. La solution de cette équation est une sinusoïde amortie qui enlève les modes résonnants à condition d'y inclure un ν suffisamment grand (le coefficient est cherché expérimentalement). La valeur nécessaire pour obtenir des solutions réalistes

est généralement beaucoup trop grande par rapport à ce qu'on peut trouver dans le monde réel. Une autre option, par exemple utilisée par Matsuno [1970], est d'introduire une petite fréquence imaginaire, c'est-à-dire de remplacer ω par $\omega + i\epsilon$ où ϵ est un coefficient petit. Ces deux méthodes sont en fait des manières indirectes de filtrer les données en surface et c'est pour cette raison qu'un filtre a aussi été testé. Le filtre est construit dans l'espace de Fourier et retire les fréquences et nombres d'ondes proches des modes résonnants tout en gardant ceux qui se trouvent proche des relations de dispersion. Le filtre est défini comme suit :

$$\begin{cases} \text{filter}(k,l,\omega) = \cos^4\left(\frac{|\lambda^2-\lambda_{BT}^2|}{|\lambda_{BT}^2-\lambda_{SP}^2|}\frac{\pi}{2}\right), \text{ for } \lambda^2 \in [\lambda_{SP}^2, \lambda_{BT}^2] \\ \text{filter}(k,l,\omega) = \cos^4\left(\frac{|\lambda^2-\lambda_{BC}^2|}{|\lambda_{BC}^2-\lambda_{SP}^2|}\frac{\pi}{2}\right), \text{ for } \lambda^2 \in [\lambda_{BC}^2, \lambda_{SP}^2] \\ \text{filter}(k,l,\omega) = 1, \text{ otherwise} \end{cases} \tag{2.22}$$

avec $\lambda^2 = -(k^2+l^2) + \frac{\beta k}{\omega}$, $\lambda_{BT}^2 = 0$, $\lambda_{BC} = \frac{\pi f_0}{NH}$ and $\lambda_{SP} = \frac{\pi f_0}{2NH}$. Le coefficient 4 présent dans la puissance du cosinus est choisi de manière empirique pour minimiser les différences entre les prédictions calculées par notre modèle et les sorties des simulations numériques. Afin que la solution calculée soit réaliste, les différentes techniques présentées ici doivent retirer pratiquement toute l'énergie située entre les courbes des modes verticaux. Or cette énergie représente (dans un océan réel) la majorité de l'énergie, comme l'a montré par exemple l'étude de Zang et Wunsch [1999]. Le filtre présenté ci-dessus et les méthodes liées à la friction ou à la dissipation se sont révélées retirer jusqu'à 70 % de l'énergie à certaines latitudes. Le problème est que le système (2.14) présente des résonances "déphasées" de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à celles du système naturel (2.17) (pour N constante, le système (2.14) a des résonances pour $\frac{N}{f_0}\lambda H = \frac{\pi}{2}[\pi]$ alors que les résonances de (2.17) apparaissent pour $\frac{N}{f_0}\lambda H = 0[\pi]$). Ainsi, en ajoutant ou en filtrant les données, on empêche le système (2.14) de se comporter singulièrement sur les fréquences résonantes mais sa réponse reste maximum autour des fréquences résonantes déphasées. Une méthode complètement différente (après beaucoup de tâtonnements) a donc été envisagée et va être présentée dans ce qui suit.

La méthode que nous présentons ici consiste à garder la condition $\frac{\partial\psi}{\partial z}(z=-H) = 0$ là où $\lambda^2 < 0$ et à utiliser $\frac{\partial\psi}{\partial z}(z=0) = 0$ là où $\lambda^2 > 0$. Pour $\lambda^2 > 0$, la solution analytique devient dans ce cas :

$$F(z) = \frac{g}{f_0}\alpha_{(k,l,\omega)}\cos\left(\frac{N}{f_0}\lambda z\right) \tag{2.23}$$

et les modes résonnants n'existent plus. La condition $\frac{\partial\psi}{\partial z}(z=0) = 0$ impose des anomalies de densité nulles à la surface et fait l'hypothèse que la variabilité de l'élévation de hauteur n'est pas directement forcée (car $w(z=0)=0$) quand $\lambda^2 > 0$. Au fond, $(z=-H)$ la vitesse verticale est maintenant non nulle sauf le long des relations de dispersion des ondes de Rossby $\frac{N}{f_0}\lambda H \equiv 0[\pi]$. Cette vitesse verticale au fond vaut $w_{bottom} = -\frac{f_0}{N_0^2}\omega\frac{dF}{dz}(z=-H) - \frac{g}{f_0}\alpha_{(k,l,\omega)}\frac{\omega}{N_0}\lambda\sin\left(\frac{N_0}{f_0}\lambda H\right)$ et peut être rationalisée par exemple par l'effet d'une topographie, pour laquelle les vitesses verticales sont données par $w = J(\psi, \text{topo}(x,y))$, $topo(x,y)$ est la topographie. Toute l'énergie située en dehors des relations de dispersion des modes verticaux traditionnels (pour lesquels $\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$ au fond) peut être vue, dans notre modèle, comme des modes libres modifiés par la topographie.

Pour $\lambda^2 < 0$ on garde la condition de vitesse verticale nulle au fond et on autorise en surface les anomalies de densité qui serait nulles si la condition $\frac{\partial\psi}{\partial z}(z=0) = 0$ était gardée. Rappelons que pour l'océan linéaire décrit par le système (2.17), l'une des façons d'obtenir des anomalies en dehors de la zone des ondes de Rossby ($\lambda^2 > 0$) est d'imposer un forçage externe, ici modélisé par une vitesse verticale non nulle en surface. On peut aussi montrer qu'en gardant la condition $\frac{\partial\psi}{\partial z}(z=0) = 0$ en surface pour $\lambda^2 < 0$, la solution obtenue est $F(z) = \frac{g}{f_0}\alpha_{(k,l,\omega)}\cosh\left(\frac{N}{f_0}\lambda z\right)$ et devient très (trop) grande en $z=-H$. Lorsque $\lambda^2 << 0$ la solution donnée par (2.15) devient très proche de la solution linéaire SQG (Surface Quasi-Geostrophic) : le mode piégé en surface

$\exp\big((k^2+l^2)z\big)$. Pour un champ en surface composé d'un large spectre de longueurs d'ondes, l'océan agit donc comme un filtre passe bas (dans cette limite SQG) : les petites longueurs d'ondes disparaissent beaucoup plus vite avec la profondeur que les grandes.

2.2.3 Interprétation du modèle pour $\lambda^2 > 0$ en termes de distance aux relations de dispersion

Les modes verticaux traditionnels, obtenus en supposant que $\partial_z \psi = 0$ en surface et au fond sont :

$$\phi_n(z) = \cos\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \tag{2.24}$$

où $n \in \mathbb{N}$ désigne le numéro du mode. La projection de (2.23) sur ces modes donne :
pour $\lambda \frac{N}{f_0} \neq \frac{n\pi}{H}$

$$\gamma_n = \frac{2}{H}\int_{-H}^{0} F_{\cos}(z)\cos\left(\frac{n\pi z}{H}\right)dz = \frac{g}{f_0}\alpha_{(k,l,\omega)}(-1)^n \frac{2\frac{N}{f_0}\lambda H \sin\left(\frac{N}{f_0}\lambda H\right)}{(\frac{N}{f_0}\lambda H)^2 - (n\pi)^2} \tag{2.25}$$

et pour $\lambda \frac{N}{f_0} = \frac{n\pi}{H}$

$$\gamma_n = \frac{g}{f_0}\alpha_{(k,l,\omega)} \tag{2.26}$$

où γ_n est la projection de F sur le n-ième mode ϕ_n. Le pourcentage de la structure verticale dans chaque mode vertical est $\frac{|\gamma_n|}{\sum_{n=0}^{\infty}|\gamma_n|}$ et le maximum est atteint lorsque $\lambda \frac{N}{f_0} = \frac{n\pi}{H}$. Autrement dit, plus le point (k, l, ω) est proche de la relation de dispersion du mode n, plus sa structure verticale sera proche du mode n. Imaginons maintenant que l'on observe dans l'élévation de surface, une anomalie de longueur d'onde et fréquence (k_0, l_0, ω_0). Puisque le signal est à large bande, il est probable que $\forall i \in \mathbb{N}, \omega_0 \neq \frac{\beta k_0}{k_0^2+l_0^2+R_i^{-2}}$ (R_i est le rayon de déformation du mode i). Dans ce cas, notre modèle donnera une structure verticale qui sera une combinaison linéaire des modes verticaux traditionnels et cette structure verticale dépendra de la distance entre (k_0, l_0, ω_0) et les courbes $\omega_i = \frac{\beta k}{k^2+l^2+R_i^{-2}}$ des relations de dispersion.

2.2.4 Un océan à M couches

Pour considérer une stratification plus réaliste, un modèle à couches est construit avec les idées décrites ci-dessus. Une dérivation des équations quasi-géostrophiques à couches peut être trouvée à partir de la page 220 de Vallis [2006], ces équations donnent la vorticité dans la couche i de la façon suivante :

$$q_i = \nabla^2\psi_i + \frac{f_0^2}{H_i}\left(\frac{\psi_{i-1}-\psi_i}{g'_{i-1}} - \frac{\psi_i - \psi_{i+1}}{g'_i}\right) \tag{2.27}$$

dans la couche de surface :

$$q_1 = \nabla^2\psi_1 + \frac{f_0^2}{H_1}\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{g'_1}\right) \tag{2.28}$$

dans la couche de fond M :

$$q_M = \nabla^2\psi_M + \frac{f_0^2}{H_M}\left(\frac{\psi_{M-1}-\psi_M}{g'_{M-1}}\right) \tag{2.29}$$

où $H_1, H_2, ...H_M$ sont les épaisseurs de chaque couche et $g'_i = g\frac{\Delta\rho_i}{\rho_0}$ avec $\Delta\rho_i$ la différence de densité entre les couches i et $i+1$.

Pour chaque couche, les équations linéaires quasi-géostrophiques donnent :
dans la couche i

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0 \tag{2.30}$$

en surface :

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \frac{f_0}{H_1} w_{top} = 0 \tag{2.31}$$

et dans la couche de fond M :

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{f_0}{H_M} w_{bottom} = 0 \tag{2.32}$$

où w_{top} et w_{bottom} sont les vitesses verticales à la surface et au fond. Comme expliqué dans la section précédente on suppose que $w_{top} = 0$ où $\lambda^2 > 0$ et $w_{bottom} = 0$ où $\lambda^2 < 0$.
ψ_1 est connu, les inconnues sont ψ_j, $j \in [\![2, M]\!]$. Comme précédemment, la fonction courant, ψ est décomposée sur les modes de Fourier : $\psi_j(x, y, t) = \sum_{(k,l,\omega)} \alpha^j_{(k,l,\omega)} \exp\left(i(kx + ly + \omega t)\right)$, et, en utilisant les équations (2.27) (3.12) (3.14) et (2.30) (2.31) (2.32), le système suivant est obtenu pour les α^i et w_{bottom} or w_{top} :

$$\begin{cases} [-K^2 - \frac{f_0^2}{H_1 g_1'} + \frac{k\beta}{\omega}]\alpha^1 + \frac{f_0^2}{H_1 g_1'}\alpha^2 - \frac{f_0}{H_1} w_{top} = 0 \\ \frac{f_0^2}{H_j g_{j-1}'}\alpha^{j-1} + [-K^2 - \frac{f_0^2}{H_j}(\frac{1}{g_{j-1}'} + \frac{1}{g_j'}) + \frac{k\beta}{\omega}]\alpha^j + \frac{f_0^2}{H_j g_j'}\alpha^{j+1} = 0, i \in \{2, 3, ..., N-1\} \\ \frac{f_0^2}{H_M g_{M-1}'}\alpha^{M-1} + [-K^2 - \frac{f_0^2}{H_M g_{M-1}'} + \frac{k\beta}{\omega}]\alpha^M + \frac{f_0}{H_M} w_{bottom} = 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

où $K^2 = k^2 + l^2$.
Ce système à M équations possède M inconnues, parmi lesquelles se trouvent w_{top} ou w_{bottom} selon le signe de λ^2. Quand $\lambda^2 > 0$, on impose $w_{top} = 0$ et on résout le système (2.33). Puisque w_{bottom} est seulement présent dans la dernière équation, les $M - 1$ premières peuvent être résolues indépendamment de la première. Quand les valeurs de α_i $i \in [\![1, M]\!]$ sont connues, la dernière équation est utilisée pour obtenir w_{bottom}, cependant ce calcul n'est pas fait en pratique car nous ne sommes intéressés que par la fonction courant ψ. De manière similaire, lorsque $\lambda^2 < 0$, on impose $w_{bottom} = 0$ et les $M - 1$ dernières équations sont résolues indépendamment de la première. Puis w_{top} peut être calculé grâce à l'équation de la couche de surface.
Pour bien comprendre comment le calcul est réalisé en pratique, on montre dans le paragraphe suivant l'exemple de sa réalisation sur un océan à deux couches.

2.2.5 Exemple : l'océan à deux couches

Dans le cas du modèle à couches, les valeurs positives de λ^2 ont une limite supérieure qui est imposée par le mode barocline le plus élevé. La vitesse verticale nulle en surface est donc imposée lorsque $0 < \lambda^2 < \lambda^2_{haut}$ où λ^2_{haut} est l'inverse au carré du rayon de déformation du mode vertical le plus grand admis par le modèle (en l'occurrence il s'agit ici du premier mode barocline). L'analogie avec le cas d'une stratification continue permet de comprendre facilement l'existence d'une borne supérieure pour λ^2. Dans le cas continu, il y a un nombre infini de modes verticaux avec des rayons de déformation qui diminuent vers 0 et qui font par conséquence tendre λ^2_{haut} vers l'infini. Dans le cas du deux couches, $w_{top} = 0$ lorsque $0 < \lambda^2 < \frac{f_0^2}{g_1'}\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}\right)$ et $w_{bottom} = 0$ autrement.
Lorsque $0 < \lambda^2 < \frac{f_0^2}{g_1'}\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}\right)$, α^2 est obtenu grâce à la formule :

$$\alpha^2 = -\frac{H_1 g_1'}{f_0^2}[-K^2 - \frac{f_0^2}{H_1 g_1'} + \frac{k\beta}{\omega}]\alpha^1 \tag{2.34}$$

et w_{bottom} avec :

$$w_{bottom} = -\frac{H_2}{f_0}\left(\frac{f_0^2}{H_2 g_1'}\alpha^1 + [-K^2 - \frac{f_0^2}{H_2 g_1'} + \frac{k\beta}{\omega}]\alpha^2\right) \tag{2.35}$$

Autrement,

$$\alpha^2 = -\frac{H_1 g_1'}{f_0^2}\frac{\alpha^1}{-K^2 - \frac{f_0^2}{H_1 g_1'} + \frac{k\beta}{\omega}} \tag{2.36}$$

et w_{top}

$$w_{top} = \frac{H_1}{f_0}\left(\frac{f_0^2}{H_1 g_1'}\alpha^2 + [-K^2 - \frac{f_0^2}{H_1 g_1'} + \frac{k\beta}{\omega}]\alpha^1\right) \tag{2.37}$$

2.3 Évaluation du modèle

2.3.1 Utilisation d'un modèle numérique idéalisé (MICOM) pour évaluer le modèle théorique et étudier les influences de la latitude et de l'intensité du vent

Dans le but d'évaluer le fonctionnement du modèle linéaire décrit dans la section précédente, nous utilisons des simulations shallow-water idéalisées réalisées à l'aide du modèle MICOM [Bleck et Boudra, 1986]. Inspirés par l'article de Rhines et Holland [1980], nous simulons un double gyre forcé par un vent zonal variant avec la latitude. Ce vent est représenté par une tension zonale $\tau_x(y)$ que l'on choisit comme suit :

$$\tau_x(y) = \cos\left(2\frac{\pi}{L_y}y\right) \tag{2.38}$$

Avec y la latitude, L_y la taille méridionale du bassin et τ_0 l'amplitude de la tension de vent en (N/m^2). La configuration du modèle adopte les paramètres suivants : friction de fond, 5 couches avec $(H1, H2, H3, H4, H5) = (300, 400, 600, 800, 1900)$ m, résolution de 20 km, bassin carré de 4000x4000 km^2 et un spin-up de 5000 jours. La figure (2.6) montre la variation temporelle de l'énergie cinétique totale en fonction du temps pour une simulation avec les paramètres décrits plus haut. La figure révèle l'existence de périodes de l'ordre de quelques années, caractéristiques des ondes de Rossby. Les sorties des simulations sont des moyennes sur 7 jours. L'océan est forcé par un vent indépendant du temps, il est donc naturel de se demander d'où vient la variation temporelle des courants simulés.
La source ultime d'énergie est l'instabilité barocline, dont le mécanisme permet d'extraire de l'énergie du champ moyen pour créer des courants temporellement variables. Cette instabilité est plus forte dans la couche limite de bord ouest, là où les courants moyens sont plus intenses. L'instabilité crée des tourbillons qui interagissent avec la frontière Est pour former des ondes de Kelvin comme le montre par exemple l'article de Milliff et McWilliams [1994] où est étudié l'interaction d'un tourbillon avec une frontière Est. Une explication du phénomène qui suit peut être trouvée par exemple dans l'article de Cessi et Primeau [2001] : les ondes de Rossby se propageant vers l'ouest depuis la frontière Est créent des ondes de Kelvin le long de leur frontière Ouest qui créent, à leur tour, des ondes de Rossby à l'Est. En l'absence d'autre source d'énergie (c'est-à-dire d'instabilité barocline ici), ces modes sont créés lors du spin-up du bassin et sont lentement dissipés par la dissipation et la friction sur le fond. Dans notre cas, les ondes de Kelvin sont continuellement forcées par l'interaction des tourbillons avec la frontière ouest, eux mêmes créés par instabilité barocline. L'onde de Kelvin se déplace ensuite le long de la frontière avec la côte sur sa droite, c'est-à-dire vers le Sud le long de la frontière est, vers l'est le long de la frontière Sud, vers le Nord à l'Est et vers l'ouest au Nord. Lors de son parcours sur la frontière Est que l'on peut voir sur la figure (2.7), l'onde force des ondes de Rossby.

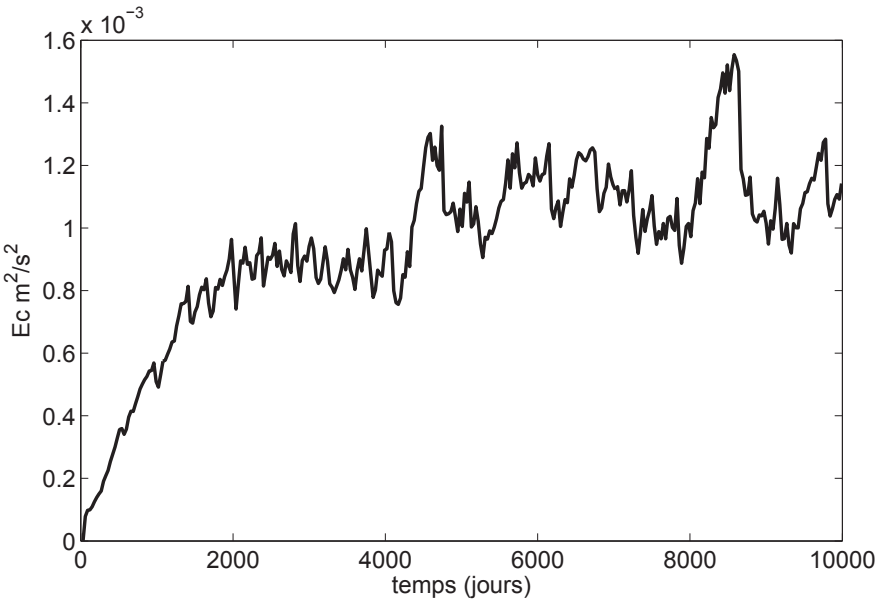

FIGURE *2.6 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour la simulation du double gyre.*

Ce processus est décrit par exemple dans l'article de Grimshaw et Allen [1988] où les auteurs montrent, pour une frontière Est, l'existence d'une latitude critique associée à la fréquence ω de l'onde de Kelvin au Nord de laquelle l'onde de Kelvin ne créé plus d'onde de Rossby.
La structure verticale des anomalies présentes dans ces simulations dépend de la friction sur

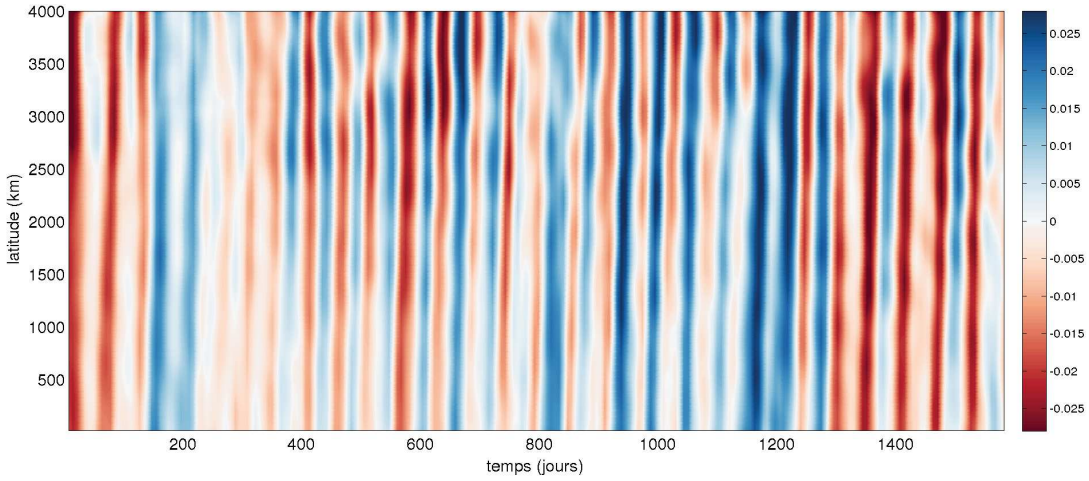

FIGURE *2.7 – Diagramme de Hovmöller montrant l'évolution temporelle de l'anomalie de hauteur d'eau (en m) le long de la frontière est.*

le fond, de l'intensité du vent, de la latitude et du flot moyen. On choisit le coefficient de la loi de friction pour que les anomalies aient en moyenne une partition d'énergie de 45 %, 45% et 10% dans, respectivement, le mode barotrope, le premier mode barocline et les modes verticaux restant (deuxième, troisième et quatrième). Cette proportion se rapproche de celle trouvée dans les mesures des courantomètres par Wunsch [1997].
Sur la figure (2.8), la moyenne temporelle de la fonction courant ψ dans la première couche est représentée. Deux gyres sont formés et créent un jet central dirigé vers l'est. La partie droite de cette figure représente la variation avec la latitude de la tension de vent forçant la couche de surface.

Le calcul décrit ci-dessus nécessite la sélection d'une zone rectangulaire où les variables du problème seront projetées sur des modes de Fourier. Un exemple de zone utilisée est reproduit sur la figure (2.8). La taille de la zone est choisie pour maximiser la corrélation entre les

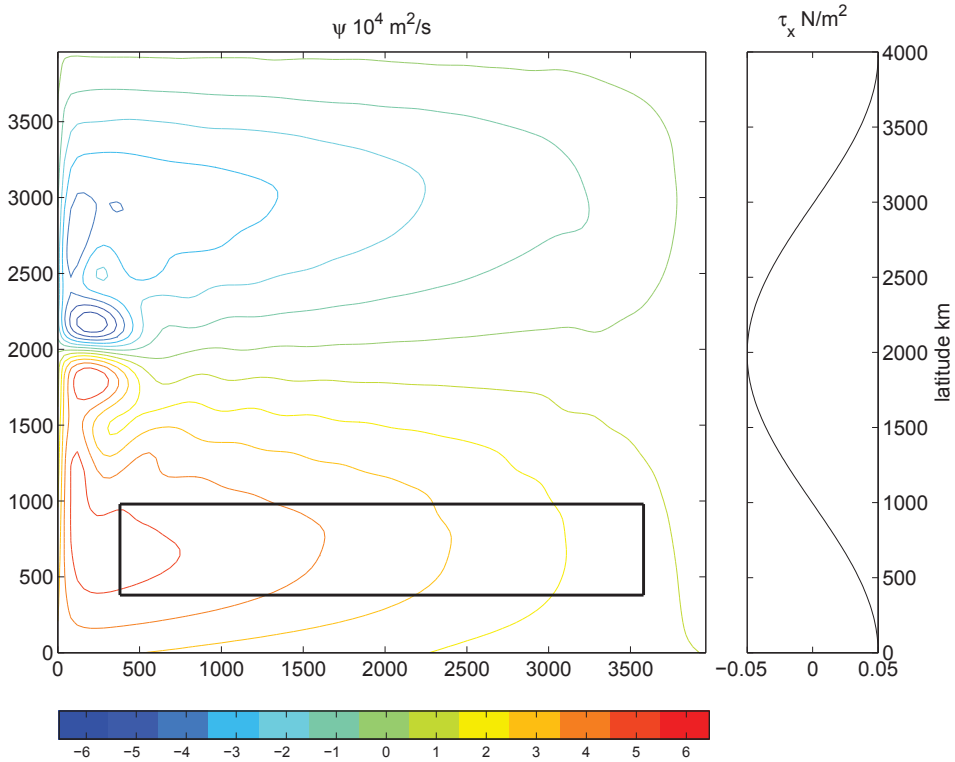

FIGURE *2.8 – À gauche, les contours de la moyenne temporelle de ψ à la surface calculée par la simulation numéro 5 ($\tau_x = 0.5N/m^2$). Des valeurs positives (négatives) indiquent une circulation horaire (anti-horaire). Le rectangle noir montre un exemple de zone dans laquelle est calculée la structure verticale. À droite la tension de vent zonal (N/m^2) en fonction de la latitude.*

résultats du modèle et la reconstruction, elle doit être suffisamment grande pour capturer les longueurs d'onde nécessaires au modèle mais pas trop grande pour éviter d'obtenir des nombres d'ondes qui ne reflètent pas la dynamique de la zone étudiée. Ce problème est en fait dû à la méthode que nous utilisons qui est globale et fait donc l'hypothèse d'une homogénéité sur la zone étudiée. La taille méridionale doit être suffisamment petite pour satisfaire l'approximation du plan β. On trouve finalement pour nos simulations qu'une zone de 3000 km sur 1000 km maximise les corrélations. Après avoir retiré la moyenne temporelle, la transformée de Fourier tri-dimensionnelle est appliquée sur la hauteur d'eau extraite de la zone d'intérêt. $\hat{\eta}(k, l, \omega)$ est donc obtenu. Puis, pour chaque fréquence et nombre d'onde, la structure verticale $F_{(k,l,\omega)}(z)$ est calculée et enfin une transformée de Fourier inverse est appliquée à chaque profondeur afin de reconstruire la fonction courant dans l'espace physique. La figure (2.9) présente la proportion de l'énergie dans chaque mode vertical calculé par notre modèle. La proportion d'énergie du mode n est la plus élevée près de la relation de dispersion du mode n.

Résultats

Tout d'abord, pour mieux comprendre comment la méthode fonctionne, écrivons :

$$\psi_1 = a_1\chi_0(\text{layer} = 1) + a_2\chi_1(\text{layer} = 1) + a_3\chi_2(\text{layer} = 1) + a_4\chi_3(\text{layer} = 1) + a_5\chi_4(\text{layer} = 1) \tag{2.39}$$

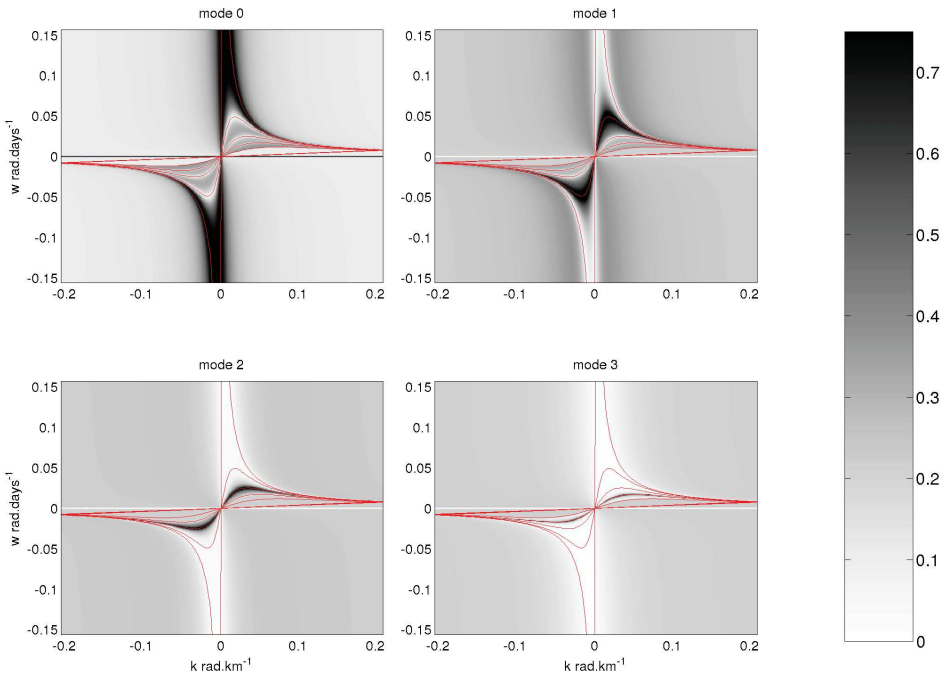

FIGURE *2.9 – Pourcentage de l'énergie dans chaque mode calculé par le modèle linéaire pour les quatre premiers modes verticaux. En rouge les courbes des relations de dispersion des 5 modes verticaux du modèle sont montrées.*

où $(\chi_0, ..., \chi_4)$(layer = 1) sont les modes verticaux traditionnels évalués à la surface, et $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_4)$ la projection de ψ sur ces modes. Si on suppose qu'à la surface le signal est complètement représenté par le premier mode barocline alors $\psi_1 = a_2\chi_1$ (c'est ce qui est souvent supposé dans la littérature Chelton et Schlax [1996]) on trouve alors que la corrélation entre la prédiction $\frac{\psi}{a_1}$ et le premier mode barocline donné par le modèle numérique est très bas : une moyenne de 0.2. En fait rien ne dit, a priori, quel mode vertical représente le mieux la fonction courant de surface ψ_1, d'autant plus qu'elle peut être représentée par une combinaison linéaire de plusieurs modes verticaux (et c'est généralement le cas). À la différence de nombreuses études précédentes, notre méthode ne fait pas d'hypothèse sur la structure verticale associée à ψ_1. Les coefficients, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ sont calculés par notre modèle en fonction de la position de ψ_1 dans l'espace de Fourier comme montré dans la figure (2.9) : ψ_1 est principalement contenu dans χ_0 près du mode barotrope, principalement dans χ_1 près du premier mode barocline...
La structure verticale est d'abord estimée pour une simulation avec un vent d'intensité moyenne (simulation numéro 5 du tableau). La méthode est évaluée dans le gyre sud de la simulation, à une latitude où nos hypothèses devraient tenir. La figure (2.11) montre les corrélations temporelles obtenues couche par couche pour la zone étudiée. La corrélation est toujours supérieure à 0.7 ce qui montre la capacité du modèle à prédire correctement les courants sous la surface. Comme prévu, les corrélations sont plus faibles le long des frontières de la zone à cause de notre hypothèse de périodicité. Au bas de cette même figure (2.11), les séries temporelles de la prédiction et des données de fonction courant sont comparées et confirment que les amplitudes sont correctes.

Pour justifier un peu plus le choix de la taille méridionale de la zone étudiée, le calcul est effectué sur des zones de deux tailles différentes.
La figure (2.10) montre la corrélation temporelle pour la projection de ψ sur le premier mode barocline calculé pour ces deux zones sur les sorties de la simulation numéro 11. La première zone a une grande extension méridionale (3500 km) alors que celle de la deuxième est plus

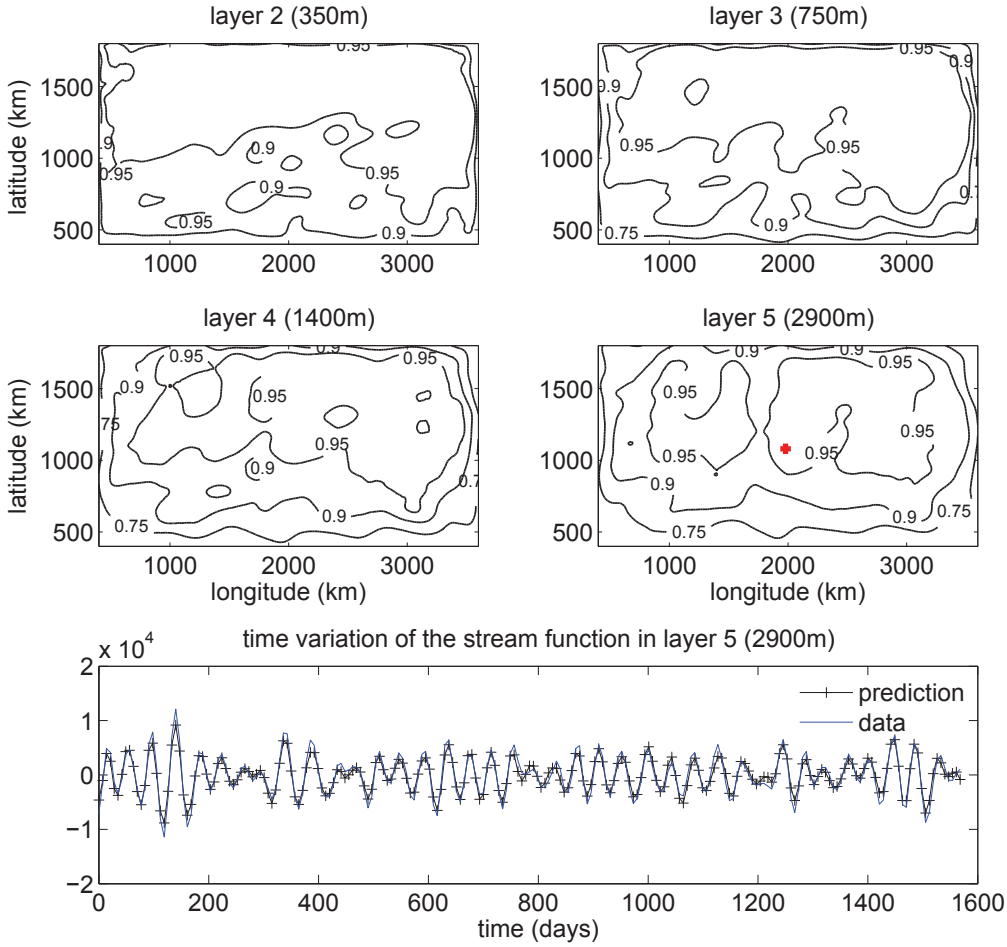

FIGURE *2.10 – Résultats de la comparaison entre notre prédiction et les données de la simulation numéro 5. Les quatre premières figures représentent la corrélation temporelle pour les quatre couches sous la couche de surface. En bas, la série temporelle de la fonction courant du modèle est comparée à celle de la prédiction au milieu du bassin, dans la dernière couche. Une croix rouge indique la position de cette série temporelle dans la couche 5.*

petite (1000 km). La grande zone donne des corrélations correctes (> 0.6) autour de la latitude centrale (2000 km) mais des corrélations faibles (<0.5) dans les parties Nord et Sud. Ces basses corrélations sont très certainement dues à l'approximation du plan β faite par notre modèle qui impose des vitesses de phase indépendantes de la latitude. Pour la zone d'extension méridionale plus faible, les corrélations sont beaucoup plus fortes, autour de 0.8 (sauf dans la partie sud à cause de la présence de la frontière Sud du bassin), car dans ce cas l'approximation des vitesses de phase constantes avec la latitude tient. Cette figure démontre donc la nécessite d'effectuer le calcul dans des zones avec des petites extensions méridionales pour bien représenter les vitesses de phase sur la zone. Deuxièmement, la figure démontre que le modèle arrive à extraire correctement le signal qui appartient au premier mode barocline des anomalies de hauteur d'eau de surface.

Effet de la latitude

La méthode fonctionne mieux lorsque les anomalies se trouvent dans le mode vertical le plus grave (le mode barotrope). En effet, les modes verticaux graves se propagent plus vite que les aigus (car $c_i \approx \beta Rd_i$ et le rayon de déformation, Rd_i diminue quand le numéro du mode

num	τ_x	f_0	β	r	N_x	N_y	Spin up	N_t
1	0.01	6e-5	2e-11	0.001	200	200	5000	3000
2	0.02	6e-5	2e-11	0.001	200	200	5000	3000
3	0.03	6e-5	2e-11	0.001	200	200	5000	3000
4	0.04	6e-5	2e-11	0.001	200	200	5000	3000
5	0.05	6e-5	2e-11	0.001	200	200	5000	3000
6	0.06	6e-5	2e-11	0.001	200	200	5000	3000
7	0.07	6e-5	2e-11	0.001	200	200	5000	3000
8	0.08	6e-5	2e-11	0.001	200	200	5000	3000
9	0.09	6e-5	2e-11	0.001	200	200	5000	3000
10	0.1	6e-5	2e-11	0.001	200	200	5000	3000
11	0.05	6e-5	2e-11	0.001	200	300	5000	3000

TABLE *2.1 – Paramètres des simulations MICOM utilisées. Le temps de spin-up est en jours, N_t est le nombre de jours d'intégration après le temps de spin-up. Les paramètres qui ne changent pas d'une simulation à l'autre sont : la résolution $\Delta X = 20km$, l'épaisseur des cinq couches* $(H1, H2, H3, H4, H5) = (300, 400, 600, 800, 1900)$ *mètres.*

vertical augmente) et sont, par conséquent moins influencés par les non-linéarités. En modifiant la latitude ou l'intensité du forçage en vent, la proportion des anomalies de hauteur d'eau dans chaque mode est aussi changée. Par conséquent, pour comparer l'influence des paramètres (la latitude ou l'intensité du vent) sur les résultats du modèle, il faut calculer les corrélations entre notre modèle et les sorties du modèle numérique pour chaque mode vertical plutôt que pour chaque couche.

Le rôle de la latitude sur la prédiction est étudié sur la simulation numéro 11 qui possède un forçage en vent relativement fort ($\tau_x = 0.05N/m^2$). Cette simulation a une grande extension méridionale (6000 km) ce qui permet d'étudier la validité de la prédiction sur le gyre sud pour des latitudes situées entre 18 ° et 30 °. La zone a une taille constante mais est déplacée méridionalement pour évaluer les résultats à chaque latitude. La figure (2.12) montre la moyenne spatiale des corrélations temporelles entre la prédiction et les sorties. Les corrélations étant plus faibles le long des frontières, la moyenne spatiale des corrélations sur toute la zone sera plus faible que les corrélations au centre. Sur la figure (2.12), la corrélation associée au premier mode barocline est plutôt élevée et décroit lentement jusqu'à 26 ° de latitude puis décroit ensuite plus rapidement. La corrélation associée au mode barotrope est élevée jusqu'à 30 ° et décroit par la suite. La décroissance de ces corrélations et les corrélations élevées du mode barotrope peuvent être expliquées de la manière suivante :

1. Les ondes de Rossby du premier mode barocline ont des vitesses de phase inférieures à celles du mode barotrope (pour des anomalies de tailles équivalentes) et sont donc plus influencées par les non-linéarités. En effet, $\epsilon = \frac{U}{\beta R_{d1}^2}$ est le nombre adimensionnel qui contrôle la non-linéarité de l'onde (R_{d1} est le rayon de déformation) βR_{d1}^2 est de l'ordre de grandeur de la vitesse de phase pour une onde longue du premier mode barocline. Par conséquent, ϵ est plus petit pour des vitesses de phase élevées (et aussi pour des basses latitudes) ;
2. Quand la latitude augmente, le courant moyen voit son influence sur les anomalies augmenter. Le nombre adimensionnel qui contrôle cet effet est : $R^2 = \frac{\beta N^2 h}{f^2 U_z}$ qui est le rapport de β avec son équivalent topographique créé par les pentes fU_z/N^2 des surfaces d'isopycnes (voir Colin de Verdière et Tailleux [2005]) ;
3. Dans le gyre sud de nos simulations, le courant moyen a une intensité plus forte au milieu du bassin là où les courants de bord ouest s'étendent vers l'intérieur. Cette situation est analogue à celle du gyre sud de l'océan Atlantique.

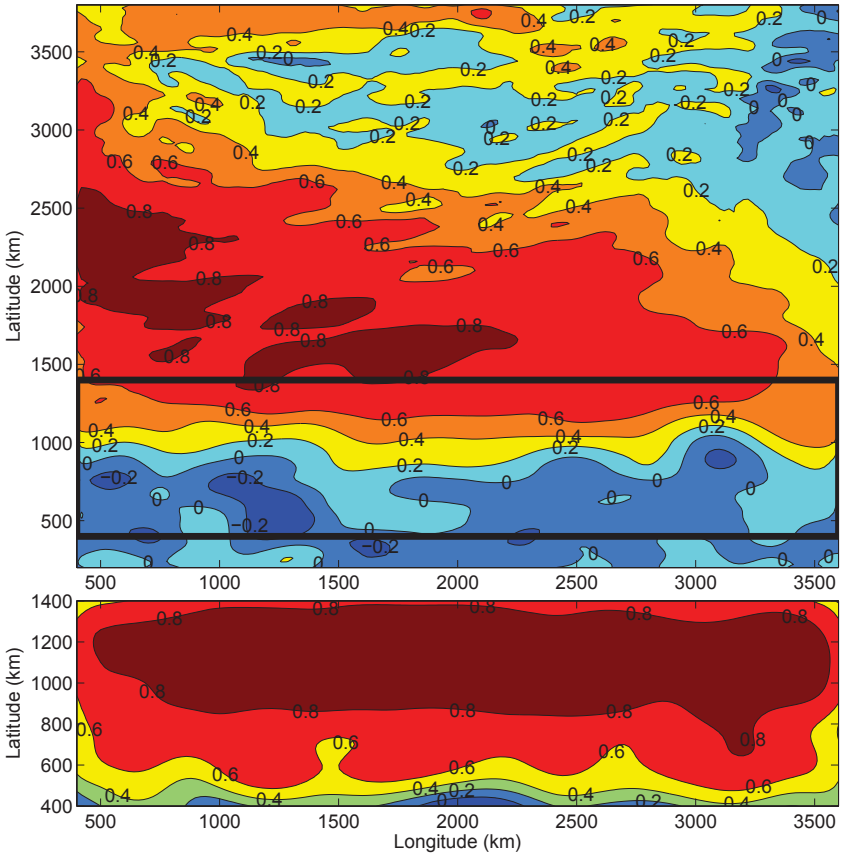

FIGURE *2.11 – Résultats de la comparaison entre la projection de la fonction courant sur le premier mode barocline des données de la simulation numéro 5 et des résultats de notre prédiction. En haut, la corrélation temporelle est calculée dans une grande zone de 3500×3200 km. En bas, la corrélation temporelle est calculée dans une zone avec une petite extension méridionale 1000×3200 km. La zone rectangulaire utilisée pour calculer la corrélation de la figure du bas est reportée sur celle du haut sous la forme d'un rectangle noir.*

Pour les modes baroclines plus élevés, les prédictions sont beaucoup moins bonnes car leurs vitesses de phase sont beaucoup plus faibles ; les modes sont ainsi très influencés par les non-linéarités. Une deuxième raison qui peut en partie expliquer les faibles corrélations des modes verticaux élevés est le faible temps d'intégration (3000 jours) comparé aux très longues périodes de ces modes : par exemple 300 jours pour le deuxième mode barocline au milieu du bassin. Cela pourrait créer des problèmes d'échantillonnage.

Effet de l'intensité du vent

On étudie dans ce paragraphe l'effet de l'intensité du vent sur la capacité du modèle à prédire la structure verticale correctement. La région analysée est la même mais des simulations avec des tensions de vent différentes, comprises entre $\tau_x = 0.01$ et $\tau_x = 0.1N/m^2$ sont utilisées. Les différents paramètres des simulations sont résumés dans le tableau (2.1). Les effets d'une augmentation de l'intensité du vent sont :

1. l'intensification des courants moyens et l'accroissement de leur influence sur les anomalies
2. l'intensification de l'amplitude des anomalies et donc des non-linéarités.

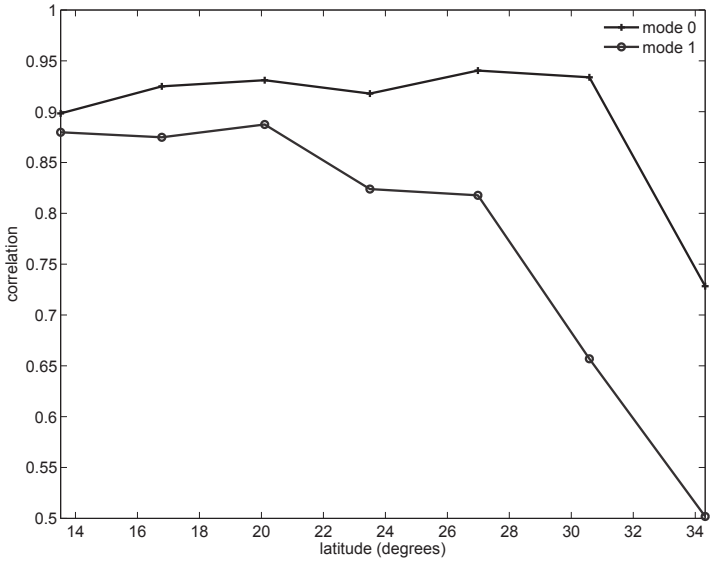

FIGURE *2.12 – Moyenne spatiale de la corrélation temporelle pour différentes latitudes ; La taille zonale et méridionale de la zone est constante 1000×3000 km. Les deux courbes sont les deux premiers modes verticaux, les croix le mode barotrope, les cercles le premier mode barocline.*

La moyenne spatiale des corrélations temporelles pour une zone de taille constante et pour différentes intensités de vent est reportée sur la figure (2.13). La figure montre que la capacité de notre méthode à prédire la structure verticale décroit avec l'intensification du vent pour le mode barocline mais semble rester à peu près constante pour le mode barotrope.

En conclusion, nous avons identifié deux paramètres qui peuvent influencer la capacité du modèle à reproduire les courants sous la surface : la latitude et l'intensité du vent. La prédiction est meilleure aux basses latitudes et là où le vent (par conséquent les non-linéarités et le courant moyen) n'est pas trop fort. Dans l'océan, la turbulence géostrophique est concentrée près de la frontière Ouest, là où le courant moyen est intense. Cependant, sous ces régions, (30 ° semble être une limite raisonnable) le courant moyen et la turbulence sont faibles et par conséquent, notre modèle sera capable de prédire correctement la structure verticale. Clairement, les hypothèses des équations quasi-géostrophiques linéarisées autour d'un état de repos, à l'origine de notre modèle sont très idéalisées et loin de reproduire toutes les propriétés de l'océan réel. On peut citer par exemple la couche de mélange, la topographie ou le forçage variable du vent et de la chaleur parmi les éléments de dynamique que notre modèle ne peut pas reproduire. Par conséquent, dans la partie suivante, le modèle sera testé sur des données réelles.

2.3.2 Test du modèle linéaire grâce à des données altimétriques d'AVISO et à une base de données de courantomètres

Pour évaluer la méthode avec des données réelles, une base de données de courantomètres est utilisée. Cette base regroupe des données provenant d'institutions variées, rassemblées par D. Furnival et R. Scott. La figure (2.14) montre les positions des mouillages qui interceptent dans le temps les mesures d'AVISO (c'est-à-dire après octobre 1992) ; plus d'informations sur cette base de données peuvent être trouvées dans l'article de Wright *et al.* [2013]. On peut déjà noter que la plupart des mouillages se trouvent malheureusement pour notre étude, proches des côtes.

Les mesures d'élévation de hauteur sont fournies par AVISO, des renseignements sur les traitements appliqués à ces données sont disponibles dans Le Traon et Ogor [1998] et Le Traon *et al.* [1998]. La fréquence de Brunt-Väisälä est tirée du World Ocean Atlas (WOA).

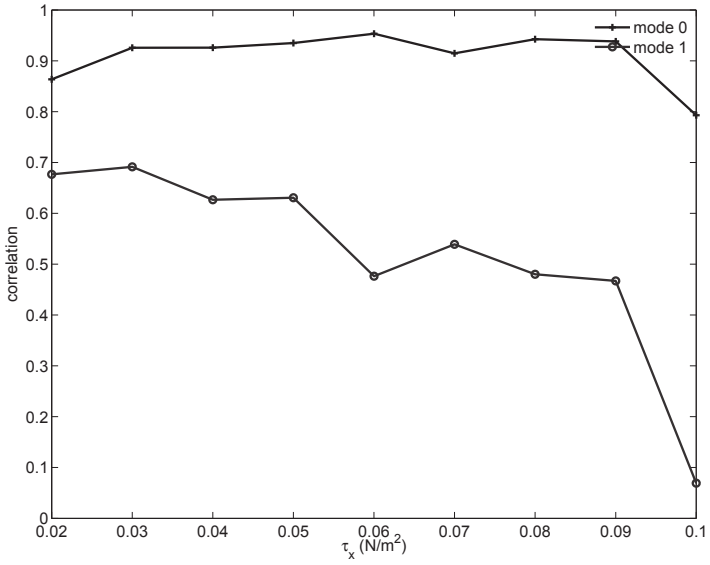

FIGURE *2.13 – Moyenne spatiale de la corrélation temporelle pour différentes intensités de vent. La taille zonale et méridionale de la zone est constante 1000×3000 km. Les deux courbes sont les deux premiers modes verticaux, les croix le mode barotrope, les cercles le premier mode barocline.*

La méthode utilisée pour calculer la structure verticale est similaire à celle décrite dans les parties précédentes. La première étape consiste à sélectionner une zone rectangulaire où la hauteur de surface est extraite des données AVISO. La moyenne spatiale de $N^2(x, y, z)$ est calculée sur la zone pour satisfaire les hypothèses réalisées lors de la dérivation des équations quasi-géostrophiques, $\overline{N^2}(z)$ est obtenu (la barre signifiant la moyenne spatiale sera omise dans ce qui suit). La moyenne temporelle sur les 20 années de données est ensuite retirée de la hauteur d'eau, tout comme le signal de bassin qui lui est retiré en soustrayant le plan minimisant le carré des écarts aux données à chaque pas de temps. La condition en surface, $\psi(z = 0)$ est obtenue grâce à l'équilibre géostrophique : $\psi(z = 0) = \frac{g}{f_0}\eta$, puis la transformée de Fourier en trois dimensions de $\psi(z = 0)$ est calculée avant d'appliquer la méthode décrite ci-dessus. Le signal est ensuite reconstruit dans l'espace physique grâce à une transformée de Fourier inverse appliquée à chaque profondeur. La résolution verticale choisie pour ψ est la même que celle des données $N^2(z)$.
Pour comparer ce calcul avec les données réelles des courantomètres, la vitesse géostrophique est ensuite calculée à partir de la fonction courant : $(u, v) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$. La figure (2.15) montre un instantané d'une section de la vitesse méridionale à la latitude (° 25 N) calculée dans la zone 4 (la zone 4 est située dans l'Atlantique Nord, voir figure (2.14)). À la surface, la vitesse est donnée par l'altimétrie, sous la surface par notre modèle. Des structures barotropes apparaissent à certains endroits et des structures intensifiées à la surface à d'autres.
Pour comparer ce calcul avec les mesures des courantomètres, il est nécessaire de les placer sur la même grille spatiale et temporelle. Un filtre passe-bas doit ensuite être appliqué sur les données des courantomètres pour garder uniquement les fréquences sous inertielles. On procède dans cet ordre :

1. Les vitesses u et v de notre modèle sont interpolées à l'emplacement des courantomètres (longitude, latitude, profondeur)

2. les courants des courantomètres sont moyennés chaque jour, leur moyenne temporelle totale est retirée. Un filtre basse-bas retire ensuite les périodes inférieures à 7 jours, le résultat est interpolé sur la grille temporelle d'AVISO ;

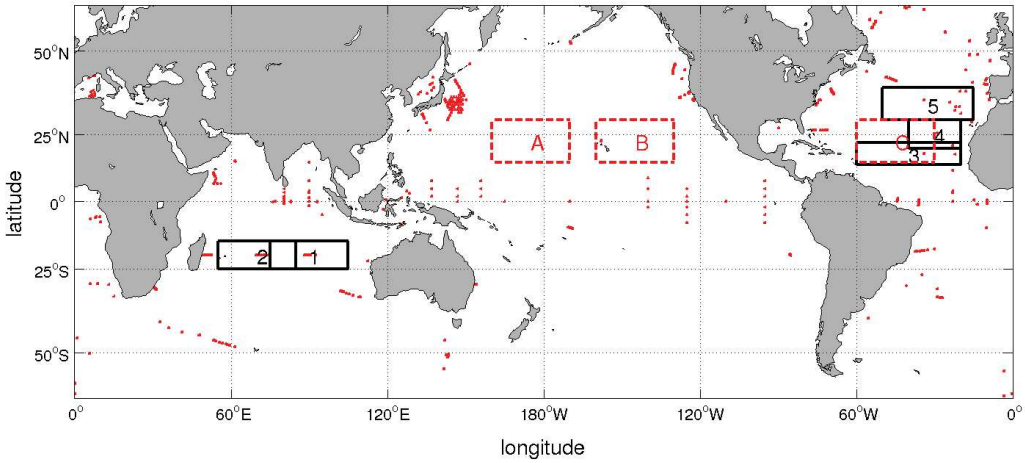

FIGURE *2.14 – Position de chaque mouillage avec des longueurs d'enregistrement plus longues que 200 jours et qui interceptent la période d'enregistrement d'AVISO (c'est-à-dire de Octobre 1992 à nos jours). Les rectangles noirs numérotés représentent les zones étudiées. Les trois rectangles rouges A, B et C sont utilisés pour la projection de l'énergie totale sur les modes verticaux.*

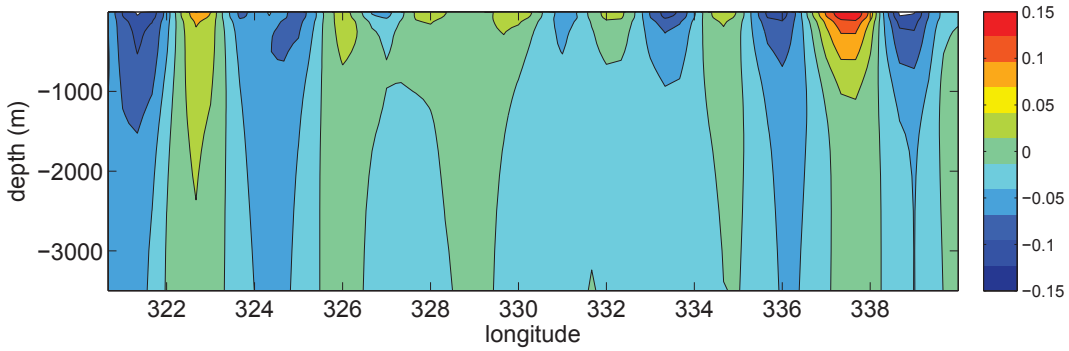

FIGURE *2.15 – Instantané d'une section de vitesse méridionale (m/s) calculée dans la zone 4 (voir l'emplacement de la zone 4 sur la figure (2.14)) à 25° N.*

3. un filtre passe-bas est ensuite appliqué sur les données des courantomètres et d'AVISO pour retirer toutes les périodes inférieures à 20 jours.

Nous utiliserons plusieurs stratégies pour comparer les données réelles et les calculs de la prédiction : calculs de corrélations temporelles, calculs de différences (d'après la formule présentée ci-dessous) et comparaisons visuelles des séries temporelles. Les différentes régions d'études sont présentées sur la figure (2.14) mais nous ne montrerons ici que les résultats des zones 4 et 5.
Les différences sont obtenues par cette formule :

$$diff(f_1, f_2) = \frac{\overline{(f_1(t) - f_2(t))^2}}{\overline{f_1(t)^2} + \overline{f_2(t)^2}} \tag{2.40}$$

où f_1 et f_2 sont les deux variables pour lesquelles la différence est calculée.

Résultats

Zone 4 :

La zone 4 est située dans l'océan Atlantique à une latitude plutôt faible 25 ° N et sur la partie Est du bassin où les courants moyens ont une intensité faible. Des anomalies se propageant vers l'ouest ont été reportées par de nombreuses études, par exemple par Osychny et Cornillon [2004]. La topographie, reportée sur le haut de la figure (2.16) est plutôt plate. Cette figure contient aussi la position des mouillages disponibles. Nous analyserons ici uniquement celui situé au centre de la zone (le numéro 1) qui possède une résolution verticale appréciable : 12 instruments sur la verticale répartis 10 à 3500 mètres. Malheureusement, la durée d'enregistrement est un peu courte : 244 jours. Les périodes plus longues que 100 jours sont donc difficilement testables.
Sur cette zone, l'altimétrie donne une proportion d'énergie dans $\lambda^2 < 0$ de 54 % par rapport au total ce qui indique une quasi équipartition entre les mouvements forcés ($\lambda^2 > 0$) et les mouvements libres (c'est-à-dire les ondes de Rossby pour notre modèle). Les corrélations obtenues pour les vitesses zonale et méridionale sont montrées en bas de la figure (2.16). Elles sont supérieures à 0.8 dans les 500 premiers mètres et décroissent lentement pour la vitesse zonale mais plutôt rapidement pour la vitesse méridionale.
La corrélation dans la direction zonale est pratiquement toujours supérieure (quel que soit le courantomètre étudié) à celle de la direction méridionale. La comparaison des séries temporelles pour quelques profondeurs est reportée sur la figure (2.17). Les prédictions semblent suivre plutôt correctement les données à 300, 310 et 750 m pour la vitesse zonale et à 300 m pour la vitesse méridionale. Cependant, la prédiction est moins bonne aux autres profondeurs.

Zone 5

La zone 5 se situe toujours dans l'océan Atlantique, mais à une latitude plus élevée que la zone 4. La topographie, visible en haut de la figure (2.18) n'est pas plate : la dorsale médio-Atlantique coupe le milieu de la zone. Par conséquent, la capacité du modèle à reproduire les courants sous la surface sera moins bonne ici.
L'altimétrie donne une proportion de l'énergie dans $\lambda^2 > 0$ de 49 % par rapport au total, indiquant comme pour la zone 4 une quasi équipartition entre l'énergie contenue dans les mouvements forcés et les ondes libres de Rossby. Les figures (2.20), (2.21), (2.22), (2.24) regroupent les valeurs des corrélations calculées. La période d'enregistrement du mouillage numéro 1, d'une durée de 254 jours, est toujours un peu courte pour cette étude. Ce mouillage possède 6 instruments dans les 200 premiers mètres. Les données disponibles sont relativement bien prédites par notre modèle puisque les corrélations pour les vitesses zonales et méridionales sont toujours supérieures à 0.8. Les séries temporelles sont montrées sur la figure (2.19) et révèlent que les grandes longueurs d'ondes sont bien prédites alors que les plus petites le sont beaucoup moins bien.
Le mouillage numéro 2 (2.20) a 5 instruments juste au-dessus de la dorsale médio Atlantique à une profondeur de 2000 m et souligne l'importance de la topographie près du plancher océanique puisque les corrélations obtenues sont quasiment nulles.
Le mouillage 3 est situé dans la partie Sud-Est de la zone, il a 3 instruments de 500 à 3500 mètres ; le dernier d'entre-eux est très proche du fond. La durée d'enregistrement est de 287 jours. Les corrélations, reportées sur la figure (2.21) sont faibles pour les deux instruments situés sous 1000 m. Ces faibles corrélations peuvent être expliquées par la position très au sud du mouillage dans la zone (il est en effet proche de la frontière). Le mouillage 4 est situé approximativement 3 degrés au Nord Ouest du mouillage 3 et a trois instruments répartis de 500 à 3500 mètres et possède une période d'enregistrement de 292 jours. Les corrélations, figure (2.22), montrent que la prédiction est correcte de 500 à 1000 m. La série temporelle de la figure

(2.23) indique que les longues périodes sont bien prédites pour le courantomètre situé à 500 m. Toutefois, les prédictions des vitesses méridionales sont plutôt faibles, surtout à 3500 m.
Le mouillage numéro 5, situé dans la partie est de la zone et possède trois instruments à 500, 1000 et 3500 mètres, sa période d'enregistrement est de 291 jours. Les corrélations calculées et reportées sur la figure (2.24) semblent être correctes à 1000 mètres mais les séries temporelles (2.25) montrent que la variabilité est plutôt mal prédite pour les vitesses zonales et méridionales, excepté peut-être pour la vitesse méridionale à 500 m.

Pour conclure cette partie, bien qu'il n'y ait qu'un très petit nombre de courantomètres placés dans des endroits qui conviennent à notre étude (basses latitudes, faible courant moyen éloignement des côtes, périodes longues) la comparaison montre que la méthode est capable, dans des conditions favorables, de reproduire les courants sous la surface et parfois même jusqu'à des profondeurs surprenantes. Comme prévu, aux hautes latitudes, près des frontières, le modèle ne peut pas donner de résultats corrects à cause de nos hypothèses.

2.4 Projection sur les modes verticaux traditionnels

Le calcul effectué plus haut permet d'obtenir $\psi(x, y, z, t)$, il est par conséquent facile de calculer la projection de l'énergie cinétique totale sur les modes verticaux traditionnels. Ces modes verticaux sont obtenus par la résolution de l'équation suivante :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{d\phi}{dz}(z)\right) + \lambda^2\phi(z) = 0 \tag{2.41}$$

avec les deux conditions aux limites $\frac{d\phi}{dz} = 0$ à $z = 0$ et $z = -H$. Ensuite, on écrit $[u, v](x, y, z, t) = \sum_n [\alpha_n^u, \alpha_n^v](x, y, t)\phi_n(z)$ et on obtient la projection de l'énergie cinétique totale sur le mode n comme étant :

$$\overline{KE_{tot}^n} = 0.5\left(\overline{(\alpha_n^u)^2} + \overline{(\alpha_n^v)^2}\right) \tag{2.42}$$

La propriété d'orthonormalité suivante a été utilisée : ϕ_n : $\int_{-H}^{0} \phi_i(z)\phi_j(z)dz = \delta_{ij}H$, la barre indiquant une moyenne temporelle et spatiale. Le calcul est effectué dans trois zones différentes (A, B et C) de tailles égales situées dans l'Atlantique et dans le Pacifique (ces zones sont reportées sur la figure (2.14)) centrées à 22.5 ° N où notre modèle devrait donner des résultats corrects. Les résultats obtenus sont ensuite moyennés sur ces trois zones et la distribution de l'énergie cinétique suivante est obtenue : 67 %, 25%, 5 % pour le mode barotrope et les deux premiers modes baroclines.
Le calcul est aussi réalisé à différentes latitudes et montre que la proportion de l'énergie dans chaque mode est dépendante de la latitude. Le pourcentage de l'énergie dans le mode barotrope augmente par exemple de 55 % à −10 ° S jusqu'à 80 % à −15 ° S dans l'Atlantique sud et décroit dans le premier mode barocline de 30 % à 16%. Une variation similaire est obtenue dans l'Atlantique Nord. L'augmentation de la proportion d'énergie dans le mode barotrope avec la latitude est en accord avec une étude réalisée par Ollitrault et Colin de Verdière [2014] qui suggère, grâce à des comparaisons d'énergie cinétique en surface et à 1000 m (obtenue par les déplacements des flotteurs ARGO) que les anomalies sont plus barotropes aux hautes latitudes. Une interprétation dynamique de ce phénomène pourrait éventuellement être celle de LaCasce et Pedlosky [2004] qui montrent que les ondes de Rossby baroclines sont sujettes à l'instabilité barocline qui peut rendre leur structure verticale barotrope. L'effet décrit par ces auteurs augmente avec la latitude car le temps de propagation des ondes baroclines augmente et, par conséquent, augmente l'influence des non-linéarités.

Atlantique	échelle de temps (jours)		échelle zonale(km)		échelle méridionale (km)	
latitude	BT	BC	BT	BC	BT	BC
20	500	500	5000	2000	600	600
25	1000	600	5000	2000	400	400
30	500	500	1200	800	600	600

Pacifique	échelle de temps (jours)		échelle zonale (km)		échelle méridionale (km)	
latitude	BT	BC	BT	BC	BT	BC
20	250	250	2000	1000	400	600
25	500	1000	4000	4000	600	600
30	500	2000	4000	4000	400	600

TABLE *2.2 – Échelle zonale (km), méridionale (km) et temporelle (jours) estimée à partir du maximum d'énergie contenu dans le mode barotrope (BT) et le premier mode barocline (BC). Différentes latitudes dans l'Atlantique Nord (en haut) et le Pacifique Nord (en bas) sont montrées.*

2.5 Excitation des modes libres traditionnels, variation avec la latitude

Identifier la présence d'ondes libres (les ondes qui satisfont $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ en $z = 0$ et en $z = -H$) dans l'altimétrie est intéressant car cela permet d'évaluer la validité du modèle traditionnel des ondes de Rossby. Pour décider si une combinaison (k, l, ω) appartient ou non à une onde libre, la proximité avec les courbes des relations de dispersion doit être évaluée. Dans ce but, on définit un coefficient de tolérance ϵ de telle manière que $Ec(k, l, \omega)$ est attribué au mode i si $\lambda_i - \epsilon < \lambda < \lambda_i + \epsilon$ où $\lambda^2 = -(k^2 + l^2) + \frac{\beta k}{\omega}$, λ_i est l'inverse au carré du rayon de déformation du mode i, on choisit $\epsilon = 1/10 * 1/R_1^2$ un dixième de l'inverse du rayon de déformation au carré. Cette faible valeur de ϵ permet d'attribuer au mode n uniquement l'énergie qui est proche du mode n (contrairement à Maharaj *et al.* [2007] qui attribue $E(k, l, \omega)$ au mode n s'il est situé entre les courbes du modes n et $n + 1$). En pratique, on calcule uniquement l'énergie contenue dans le mode barotrope et le premier mode barocline puisque ce qui est contenu dans les modes plus élevés représente une partie négligeable de l'énergie totale (< 1 %). Le calcul est effectué dans l'Atlantique et le Pacifique Nord pour différentes latitudes. Les résultats sont montrés sur la figure (2.26) et soulignent le petit pourcentage d'énergie (20 %) contenue dans les modes libres. Dans l'océan Pacifique, l'énergie dans le mode barotrope libre est constante avec la latitude. Dans l'Atlantique, le pourcentage reste constant (10 %) sous la latitude 25 ° N et augmente ensuite pour atteindre 16 % à 32 °. L'énergie dans le premier mode barocline augmente doucement avec la latitude dans le Pacifique. Dans l'Atlantique, elle augmente sous 25 ° et décroit par la suite. Les échelles de temps ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) et les échelles de longueur ($L = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2+l^2}}$) du maximum d'énergie dans chaque mode libre sont reportées sur le tableau (2.2). Dans l'océan Pacifique, ce maximum pour le mode barotrope a des échelles de temps et d'espace qui ne varient pas beaucoup avec la latitude alors que l'échelle de temps des ondes baroclines augmente avec la latitude. Dans l'océan Atlantique, l'échelle de longueur reste plus ou moins indépendante de la latitude pour les deux modes (autour de 500 km) et l'échelle de temps est plus grande autour de 25 ° N (1000 jours) qu'à 20 ° et 30 ° N (500 jours). Les longueurs d'ondes méridionales étant beaucoup plus petites que les longueurs d'ondes zonales, ces ondes libres transportent l'énergie vers l'ouest.

2.6 Conclusion

La structure verticale des ondes de Rossby a été étudiée à l'aide d'un modèle linéaire basé sur les équations quasi-géostrophiques. Dans la première partie de l'étude, on montre comment il est possible de résoudre les équations quasi-géostrophiques linéaires pour calculer la structure verticale des anomalies de surface. La méthode présentée consiste à sélectionner une zone rectangulaire d'anomalie de hauteur d'eau, puis à décomposer le signal sur chaque mode de Fourier. La structure verticale est ensuite calculée pour chaque fréquence et nombre d'onde du signal de surface (k, l, ω) puis reconstruite dans l'espace physique pour donner la fonction courant à toutes les profondeurs. La principale difficulté de cette méthode est de retirer les modes résonnants qui surgissent inévitablement dans un système linéaire sans friction. La méthode adoptée ici, après plusieurs essais, consiste à utiliser la condition $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ en surface lorsque $\lambda^2 > 0$, pour les fréquences qui sont potentiellement soumises à des résonances. Cette condition fait implicitement l'hypothèse que les anomalies de densité sont nulles en surface, dans le domaine des ondes de Rossby, ce qui peut sembler étrange sachant que plusieurs études (par exemple White [1977] ou Hill *et al.* [2000]) ont montré que des ondes de Rossby sont détectables dans les mesures de température de surface. Un article récent de O'Brien *et al.* [2013] suggère que les anomalies de densité sont formées par l'advection horizontale des champs de densité de grande échelle plutôt que le résultat d'un mécanisme vertical.
Cependant, l'hypothèse d'anomalies nulles à la surface est valable tant que les effets de l'interaction des ondes de Rossby avec le champ moyen sont petits. L'effet du champ moyen sur la condition de surface peut être vu à travers l'équation suivante :

$$\partial_t \psi'_z + J\left(\overline{\psi}, \psi'_z\right) + J\left(\psi', \overline{\psi_z}\right) = 0 \tag{2.43}$$

où la barre signifie la moyenne temporelle. Le premier terme de cette équation domine le second si l'échelle de temps est plus courte que l'échelle advective et domine le troisième si le nombre adimensionnel : $\frac{\beta R_d^2}{H_{bc}\frac{U}{H_{mean}}} >> 1$ (ce nombre est obtenu en supposant que l'onde est longue et a une structure verticale de premier mode barocline), R_d est le rayon de déformation, H_{bc} l'échelle verticale de l'onde, U l'ordre de grandeur du courant moyen et H_{mean} son échelle verticale. Par exemple, aux basses latitudes $\beta \sim 2e-11\ s^{-1}m^{-1}$ $R_d \sim 100e3\ m$, $H_{bc} \sim 1000\ m$, $U \sim 0.01m/s$ $H_{mean} \sim 1000m$ donne $\frac{\beta R_d^2}{H_{bc}\frac{U}{H_{mean}}} \sim 20$. Selon ce nombre adimensionnel, l'effet de l'advection de la densité moyenne par les vitesses créées par l'onde augmente avec la latitude mais est négligeable à basse latitude.
Après cette partie décrivant notre méthode de résolution, le calcul de la structure verticale a tout d'abord été testé sur des simulations de double gyre forcé par le vent. Le modèle donne de bonnes prédictions aux basses latitudes situées entre 10 et 30 degrés et là où les non-linéarités sont faibles. Cette dépendance à la latitude peut être expliquée par la décroissance des vitesses de phase des ondes de Rossby quand la latitude augmente, et donc par le rôle croissant des non-linéarités.
Le modèle est ensuite comparé à des données réelles (altimétrie et courantomètres) et se révèle capable dans certains cas de reproduire les courants océaniques sous la surface. Le modèle permet de calculer la répartition de l'énergie cinétique totale dans les différents modes verticaux, approximativement, 67% 25% et 5% de l'énergie est contenue dans le mode barotrope et les deux premiers modes baroclines. La proportion dans le mode barotrope augmente avec la latitude. Wunsch [1997] calcule une répartition de l'énergie de 45% dans le mode barotrope et 45% dans le premier mode barocline ; la différence avec nos résultats peut être expliquée par les arguments suivants :

- Notre étude se concentre sur des zones de basses latitudes (< 30 °N or S) loin des côtes. La plupart des courantomètres utilisés par Wunsch [1997] se trouvent à des latitudes supérieures à 30 °(65%). La dynamique est très probablement différente à haute et à basse latitude.

– Les échelles de temps de Wunsch [1997] sont comprises entre deux jours (inverse de la fréquence de Nyquist) et plusieurs semaines. Dans notre étude, les échelles de temps sont situées entre deux semaines et plusieurs années. La proportion d'énergie dans les modes verticaux dépend probablement des échelles de temps considérées.
– La projection des résultats est faite, ici, sur les modes verticaux traditionnels (pour lesquels $\frac{\partial \psi}{\partial z}(z = 0) = 0$) pour pouvoir être comparés aux études précédentes. Mais la structure verticale calculée dans cette étude ne fait pas l'hypothèse de vitesse verticale nulle (pour $\lambda^2 < 0$) en surface et pourrait donc être mal représentée par ces modes verticaux traditionnels. Smith et Vanneste [2013] ont trouvé une base qui pourrait régler ce problème.

Dans Scott et Furnival [2012], la structure verticale était indépendante des propriétés de la surface, entrainant des mauvaises prédictions sous 600 mètres. La principale nouveauté de la méthode est de "lire" la structure verticale des anomalies de pression dans leur champ de surface. La seconde nouveauté est l'utilisation conjointe de deux jeux de données réelles (AVISO et courantomètres) pour évaluer le modèle.

De nombreux auteurs ont mis en avant les différences de vitesses de phase entre ce qui est prédit par la théorie et ce qui est observé. La question de la validité des équations qui décrivent les ondes de Rossby est fréquemment questionnée dans la littérature (un des premiers à avoir posé cette question est Killworth *et al.* [1997]). Ici, l'approche est différente. La vitesse de phase est lue dans les données altimétriques et la structure verticale est prédite à partir de cette vitesse. Dans les régions où notre modèle est valide, la structure verticale est plutôt barotrope, en contradiction avec l'hypothèse d'une structure verticale entièrement barocline (faite par exemple dans Chelton et Schlax [1996]). Dans la plupart des études sur les ondes de Rossby, le nombre d'onde méridional est supposé nul (c'est le cas par exemple dans Chelton et Schlax [1996] ou Osychny et Cornillon [2004]), cette hypothèse pourrait ne pas être valide puisque dans les zones que nous avons étudiées, les anomalies ont plus ou moins les mêmes tailles méridionales ou zonales.Uposneg.pdf Une petite partie de l'énergie cinétique seulement peut être attribuée aux ondes libres dans le Pacifique et dans l'Atlantique (20%). La période des ondes se situe entre 500 et 1000 jours avec des longueurs d'ondes entre 250 et 2000 km, les valeurs sont similaires pour les ondes barotropes et baroclines.

La plupart de l'énergie ne se trouve pas le long des relations de dispersion des ondes de Rossby (ce résultat est comparable à celui de Wunsch [2010] stipulant que l'énergie se trouve le long d'une ligne "non-dispersive") et cela pose donc la question de la dynamique derrière cette distribution. Des ondes forcées pourraient être une réponse, mais l'équation (2.16) montre que le forçage doit être déraisonnablement fort pour produire de l'énergie loin des relations de dispersion. Quoi qu'il en soit, il est indispensable de mieux comprendre la dynamique des anomalies observées avant de pouvoir calculer leur structure verticale. Cette question sera l'une des questions abordées dans le prochain chapitre de cette thèse.

Avant de passer au chapitre suivant, un petit paragraphe expose succinctement les différentes idées à explorer pour améliorer le calcul de la structure verticale des anomalies de grandes échelles.

2.7 Idées de méthodes pour calculer la structure verticale

La partie précédente a permis de démontrer qu'il est possible, à partir des données de surface et des données de la circulation moyenne de calculer la circulation de grande échelle sous la surface dans certaines régions. Pour pouvoir étendre la zone où le calcul est valide, il faudra impérativement prendre en compte le courant moyen et la topographie puis retirer la périodicité spatiale. Les méthodes suivantes seront développées seulement sous formes d'idées car généralement leur apport sur la compréhension de la dynamique est limité par rapport à la complexité de leur mise en place.

2.7.1 Méthode des EOF (Empirical Orthogonal Functions)

L'idée derrière cette méthode est d'utiliser une simulation numérique réaliste d'un bassin et de calculer statistiquement (à l'aide d'EOFs) comment l'anomalie de hauteur en surface est reliée aux anomalies de pression en profondeur. Le principal avantage des EOFs est que seulement un petit nombre d'entre elles est nécessaire pour représenter la majorité de la variabilité du signal (typiquement moins d'une dizaine). Une fois ces EOFs calculées et orthonormalisées en surface (on comprendra plus tard pourquoi), l'anomalie de hauteur observée par satellite est projetée sur la surface des EOFs orthonormées en surface et l'anomalie de pression reconstruite en profondeur. On montre dans ce qui suit un exemple sur une simulation QG 2 couches avec 50 points dans les directions zonale et méridionale.
Le calcul des EOFs associées à ψ' se fait en construisant une matrice M contenant dans les lignes tous les points du bassin (en premier la couche de surface puis la couche de fond) pour chaque pas de temps et dans les colonnes la variation temporelle de chaque point. La moyenne temporelle et spatiale de M est retirée, puis la matrice de covariance est calculée $F = {}^tM * M$. Les EOFs sont les vecteurs propres de cette matrice. Les 150 premiers vecteurs (sur les 5000=50*50*2) permettent de représenter 99,99% de la variabilité, c'est donc uniquement à ceux-ci que l'on va s'intéresser. Ces vecteurs sont orthonormés par construction, mais ici on s'intéresse à l'orthonormalisation de la première couche pour pouvoir y projeter l'anomalie de hauteur observée, il faut par conséquent les rendre orthogonaux.
Pour cela, on utilise l'algorithme de Gram-Schmidt qui définit la nouvelle base orthogonale de la manière suivante :

$$e_1^* = e_1 \tag{2.44}$$
$$e_2^* = e_2 - \mathrm{proj}_{e*_1}(e_2) \tag{2.45}$$
$$... \tag{2.46}$$
$$e_k^* = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{e_j^*}(e_k) \tag{2.47}$$

avec $\mathrm{proj}_u(v) = \frac{(u|v)}{(u|u)}u$ et $(u|v) = (u_S|v_S)$ le produit scalaire de u et v en surface et k la dimension de l'espace, ici $k = 150$. Les vecteurs $(e_1^*, e_2^*, ...e_k^*)$ ainsi obtenus sont ensuite normés. On peut se convaincre qu'en projetant sur ces modes orthonormés en surface, on obtiendra exactement les même résultats qu'en utilisant les modes classiques, orthonormés sur la surface et le fond :
On suppose qu'on a une base de vecteur $\mathcal{E}$=$(e_1, e_2, ..., e_k)$ orthonormée avec $e_i = \begin{pmatrix} e_S \\ e_D \end{pmatrix}_i$ où e_S est la partie en surface du vecteur et e_D la partie sous la surface. La base $\mathcal{E}$ est orthonormée pour le produit scalaire qui prend en compte la surface et le fond, c'est-à-dire que $(e_i|e_j) = (e_{Si}|e_{Sj}) + (e_{Di}|e_{Dj}) = \delta_{ij}$. Mais nous voulons que $(e_{Si}|e_{Sj}) = \delta_{ij}$, on y arrive en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt grâce auquel on obtient la nouvelle base $\mathcal{E}^*$=$(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ orthonormée en surface. Soit $v = \begin{pmatrix} v_S \\ v_D \end{pmatrix} = \sum_i \lambda_i e_i$, en surface $v_S = \sum_i \lambda_i e_{Si}$. Puisque $\mathcal{E}^*$ est une base orthonormée en surface : $v_S = \sum_i \nu_i e_{Si}^*$ avec $\nu_i = (v_s|e_{Si}^*)$. Montrons que $v_D = \sum_i \nu_i e_{Di}^*$. La relation de $\mathcal{E}^*$ à $\mathcal{E}$ s'écrit $e_j^* = \sum_i p_{ij} e_i$, où $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = (p_{ij})_{i,j=1}^k$ est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$. On en déduit que $\lambda_i = \sum_j \nu_j p_{ij}$. Au fond on a $v_D = \sum_i \lambda_i e_{Di} = \sum_i \sum_j \nu_j p_{ij} e_{Di} = \sum_j \nu_j e_{Dj}^*$. Donc la projection de v_S sur cette nouvelle base $\mathcal{E}^*$ orthonormée en surface donne bien v_D au fond.
On montre sur la figure suivante (2.27) l'EOF orthonormée en surface du maximum de variabilité pour la simulation QG 2 couches décrite plus haut. Le calcul de ψ_2 à partir de ψ_1 se fait ensuite en suivant ces étapes :

1. on calcule $\psi_1' = \psi_1 - \overline{\psi_1}$

2. on transforme ψ_1' en matrice M avec dans les colonnes la variation temporelle et dans les lignes la variation spatiale
3. on projette M sur la surface des EOFs orthogonalisées calculées précédemment, selon la formule : $\text{proj}(i) = M * \text{EOF}(1 : \text{ind}_{\text{couche1}}, i)$.
4. on reconstruit ψ_2' grâce à l'opération $\text{proj}(i) * \text{EOF}(\text{ind}_{\text{couche1}} + 1 : \text{ind}_{\text{couche2}}, i)$

Sur la figure (2.28) des images instantanées de ψ_2' reconstruit et vrai sont comparées puis les séries temporelles d'un courantomètre situé au milieu du bassin sont montrées. Les résultats sont très ressemblants, ce qui n'est pas très étonnant étant donné que les calculs sont faits sur le champ qui a servi à calculer les EOFs. L'objectif de cette technique est de calculer les EOFs grâce à un champ de pression obtenu à partir d'une simulation numérique, puis de projeter l'élévation de surface mesurée par les satellites pour reconstruire la solution sous la surface. La qualité de cette reconstruction dépendra énormément de la qualité du modèle numérique utilisé pour calculer les EOFs.
Malheureusement, cette méthode statistique ne permet pas d'éclairer la physique qui contrôle la structure verticale puisqu'elle se résume à recopier statistiquement les configurations verticales observées dans les sorties d'un modèle numérique.

2.7.2 Projection des anomalies de pression en surface sur les modes de bassin

La première étape de cette méthode nécessite le calcul des modes de bassin, par exemple en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} J\left(\overline{\psi}, \nabla^2\psi + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right) + J\left(\psi, \nabla^2\overline{\psi} + \overline{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}\right) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = \\ \lambda\left(\nabla^2\psi + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

avec des conditions aux limites appropriées aux frontières, par exemple $\left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}(\psi)\right).\vec{n} = 0$.
Ce calcul est plus ou moins compliqué, en fonction des hypothèses effectuées.
Les modes propres ainsi obtenus, que l'on note $\Psi^\lambda(x, y, z)$ associés à leur valeur propre λ, ne sont pas orthogonaux. En surface, les modes peuvent être orthonormalisés, comme pour la méthode des EOFs précédemment étudiée, par l'algorithme de Gram-Schmitt Ψ^λ. Une fois cette base orthonormée obtenue, les anomalies de pression observées sont projetées dessus et la structure verticale reconstruite.
Cette méthode donne seulement la structure verticale de ce qui se projette sur la base : une partie du signal, celui soumis aux non-linéarités ou à un forçage atmosphérique par exemple (en fait à tout ce qui ne satisfait pas aux hypothèses effectuées pour calculer les modes de bassin) ne pourra pas être représenté par cette base et sa structure verticale ne sera donc pas calculée.

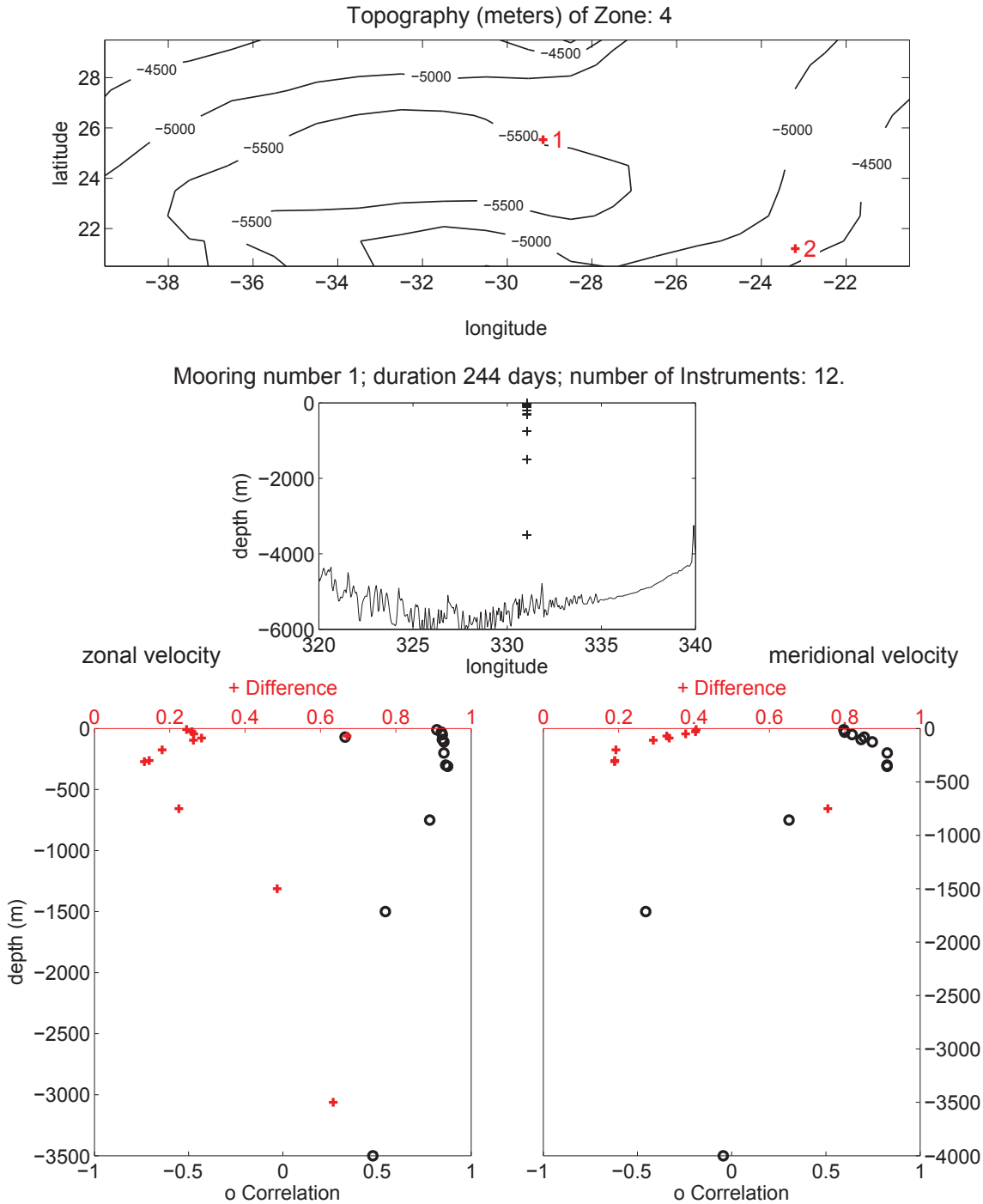

FIGURE *2.16 – En haut la topographie de la zone 4 avec la position de chaque mouillage sur la zone. Au milieu : le mouillage numéro 1 avec la topographie zonale à la latitude du mouillage, les croix rouges représentent la profondeur de chaque instrument. La longueur de l'enregistrement est de 244 jours. En bas, la corrélation entre la prédiction du modèle et les données des courantomètres pour la vitesse zonale (à gauche) et la vitesse méridionale (à droite) du mouillage numéro 1 de la zone 4. Les différences calculées avec l'équation (2.40) sont aussi montrées sur ces graphiques (croix rouges)*

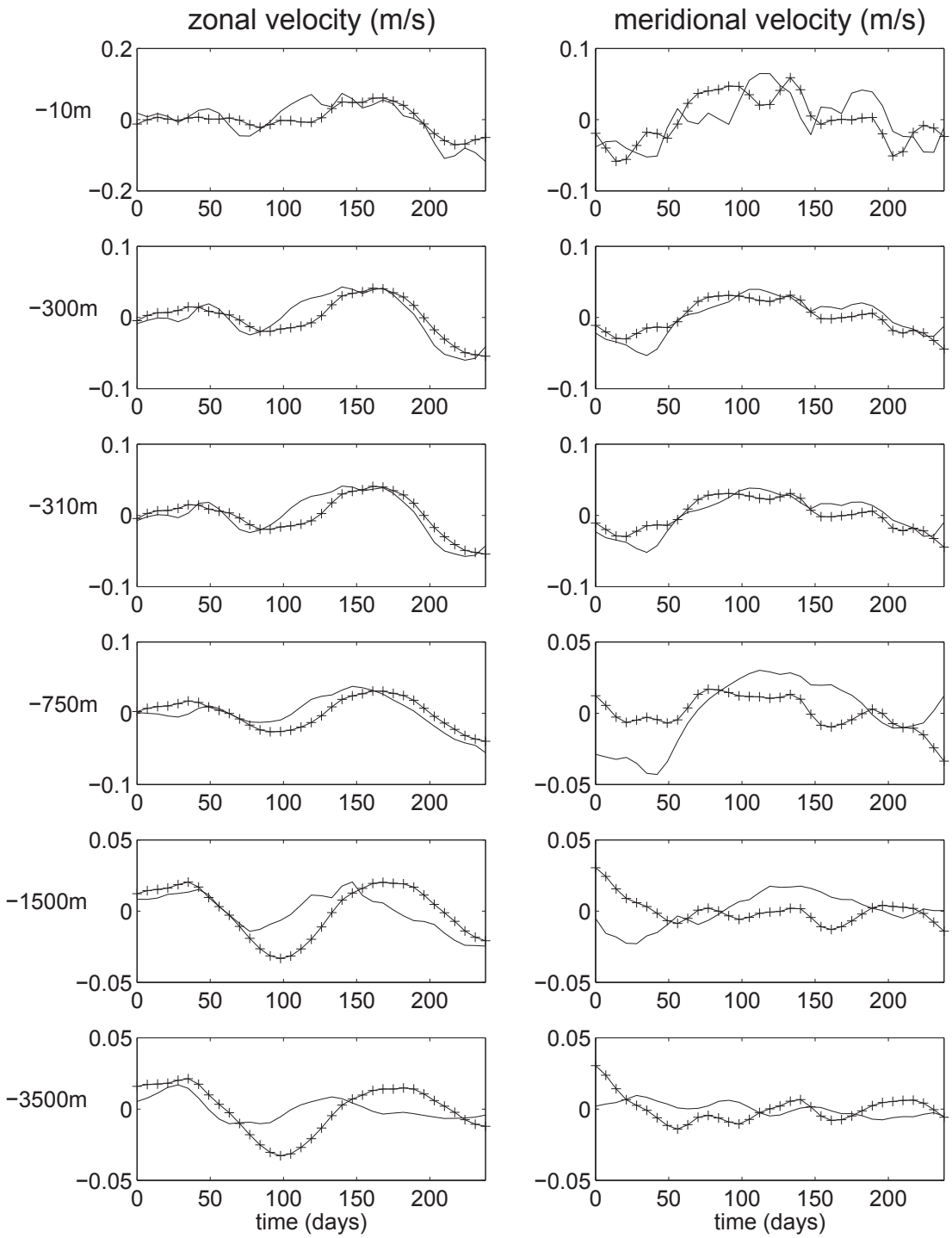

FIGURE *2.17 – Zone 4, mouillage numéro 1. Séries temporelles de la prédiction (croix) et données des courantomètres (lignes) à différentes profondeurs pour la vitesse zonale (gauche) et méridionale (droite)*

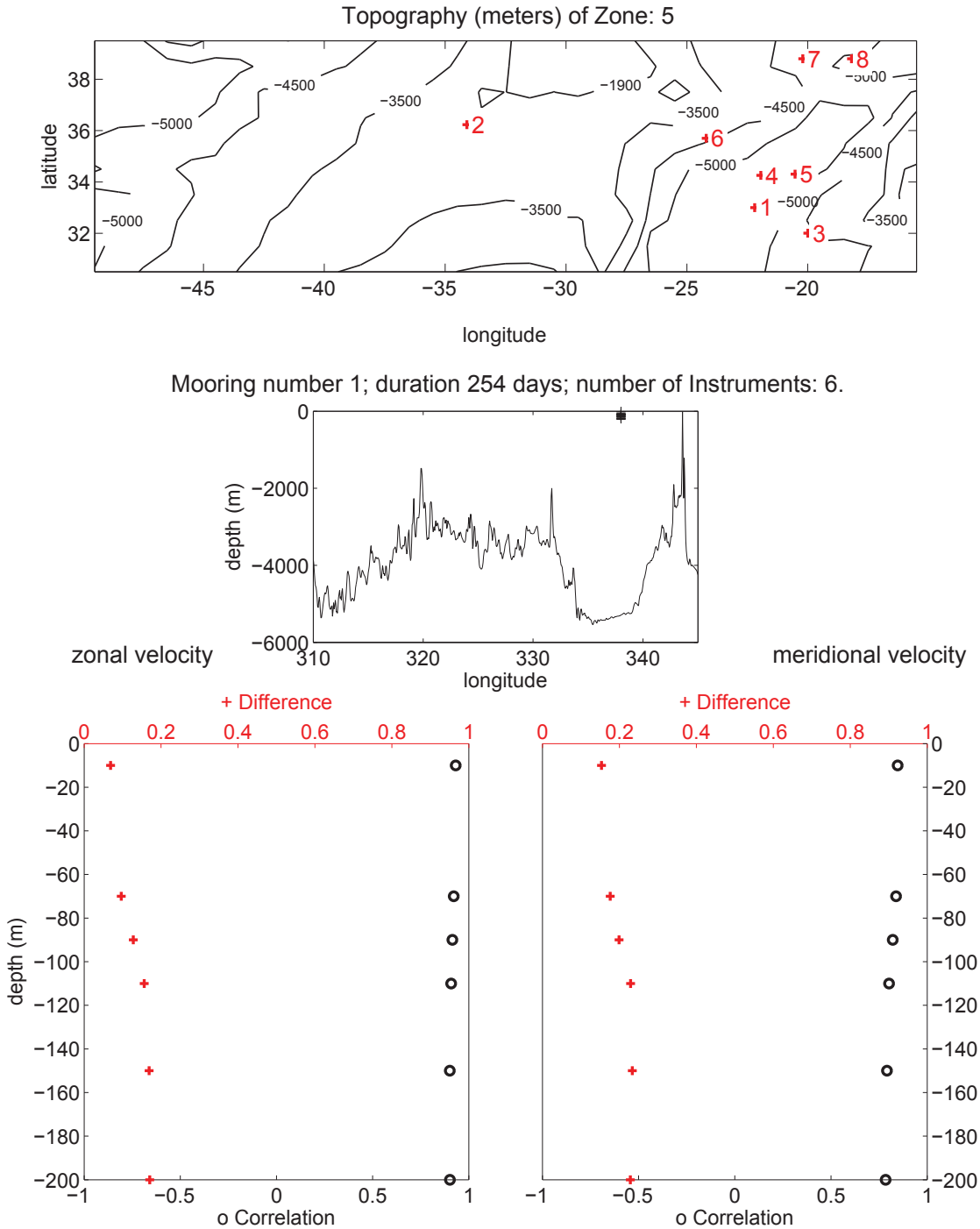

FIGURE *2.18 – En haut la topographie de la zone 5 avec la position de chaque mouillage sur la zone. Au milieu : le mouillage numéro 1 avec la topographie zonale à la latitude du mouillage, les croix rouges représentent la profondeur de chaque instrument. La longueur de l'enregistrement est de 254 jours. En bas, la corrélation entre la prédiction du modèle et les données des courantomètres pour la vitesse zonale (à gauche) et la vitesse méridionale (à droite) du mouillage numéro 1 de la zone 5. Les différences calculées avec l'équation (2.40) sont aussi montrées sur ces graphiques (par des croix rouges)*

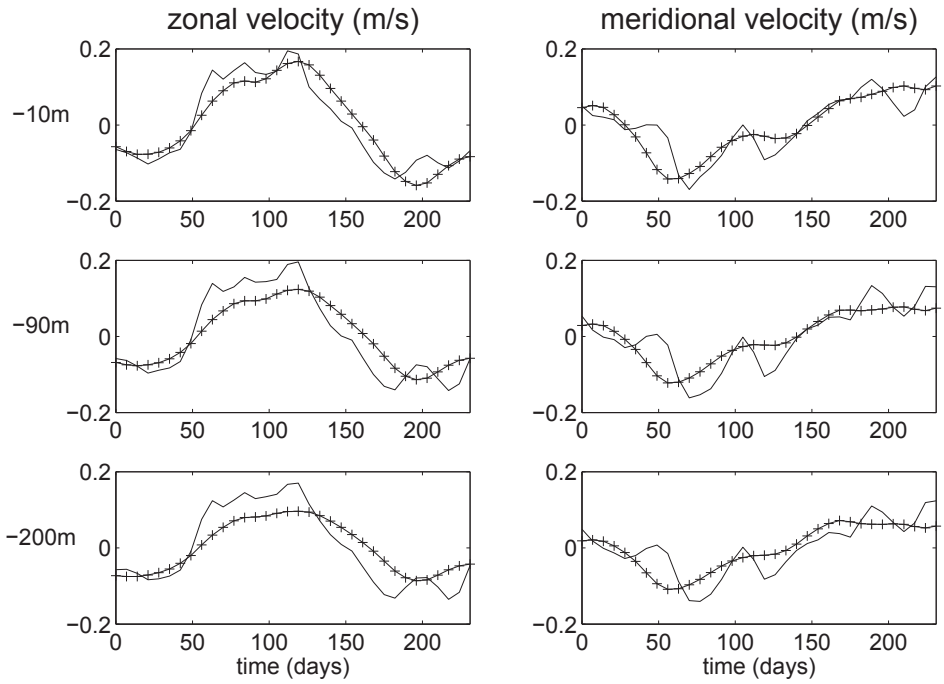

FIGURE *2.19 – Zone 5, mouillage numéro 1. Séries temporelles de la prédiction (croix) et données des courantomètres (lignes) à différentes profondeurs pour la vitesse zonale (gauche) et méridionale (droite)*

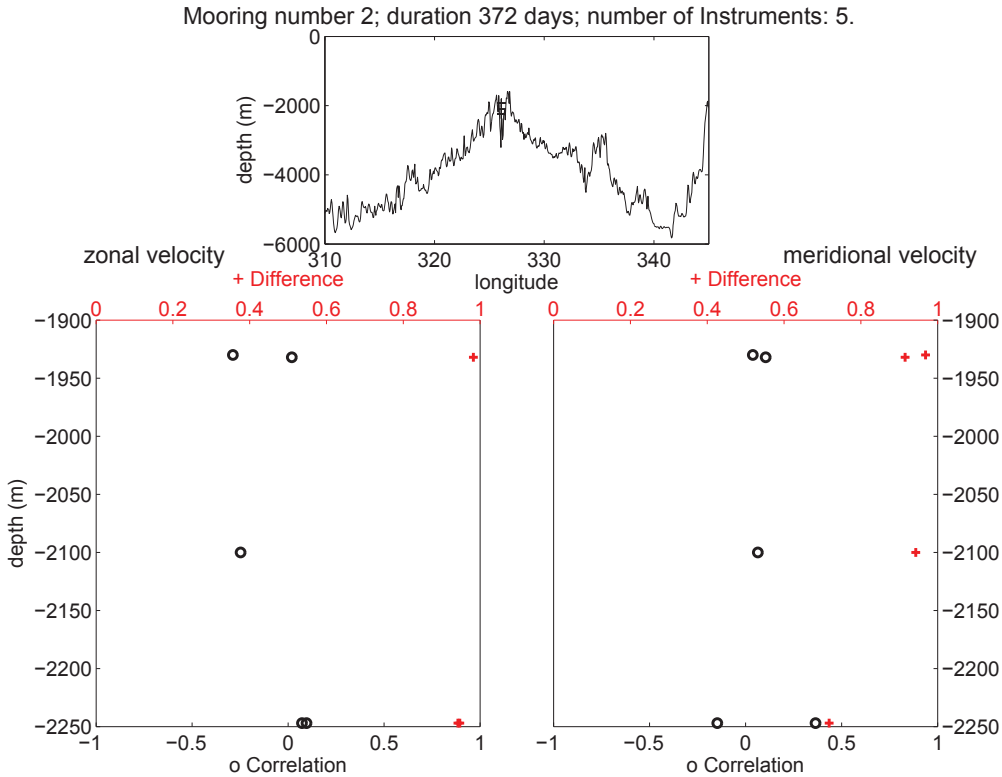

FIGURE *2.20 – En haut : mouillage numéro 2 de la zone 5, et topographie zonale à la latitude du mouillage. Les croix rouges représentent la profondeur de chaque instrument. La longueur de l'enregistrement est de 372 jours. En bas, la corrélation entre la prédiction du modèle et les données des courantomètres pour la vitesse zonale (à gauche) et la vitesse méridionale (à droite) du mouillage numéro 2 de la zone 5. Les différences calculées avec l'équation (2.40) sont aussi montrées sur ces graphiques (par des croix rouges)*

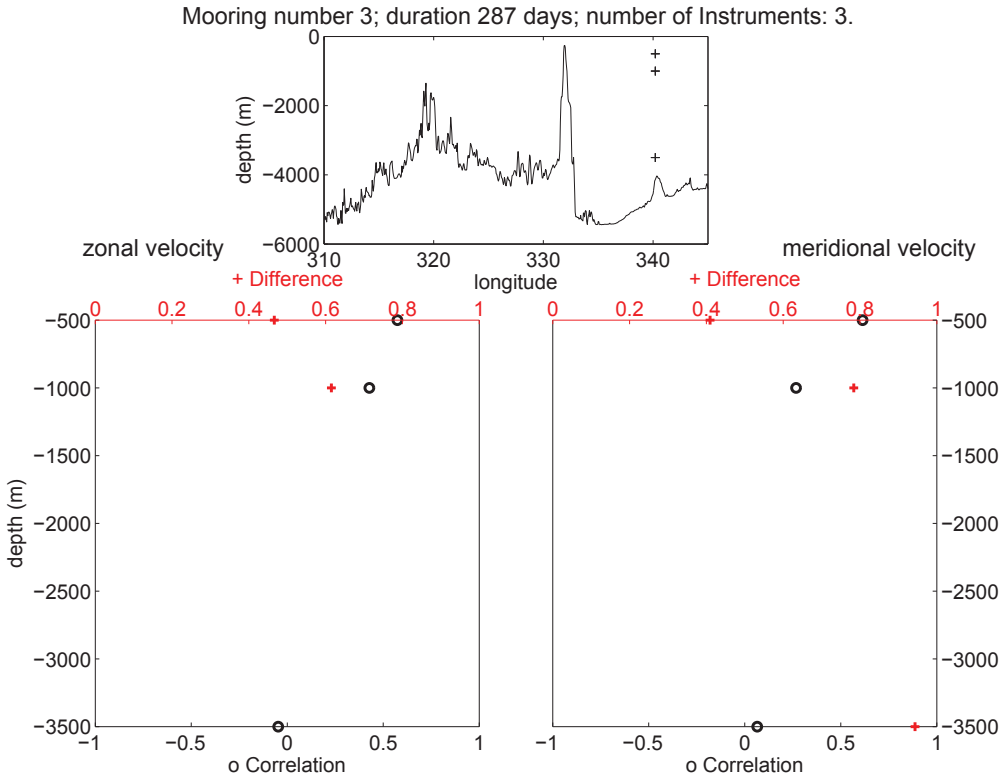

FIGURE *2.21 – En haut : mouillage numéro 3 de la zone 5, et topographie zonale à la latitude du mouillage. Les croix rouges représentent la profondeur de chaque instrument. La longueur de l'enregistrement est de 287 jours. En bas, la corrélation entre la prédiction du modèle et les données des courantomètres pour la vitesse zonale (à gauche) et la vitesse méridionale (à droite) du mouillage numéro 3 de la zone 5. Les différences calculées avec l'équation (2.40) sont aussi montrées sur ces graphiques (par des croix rouges)*

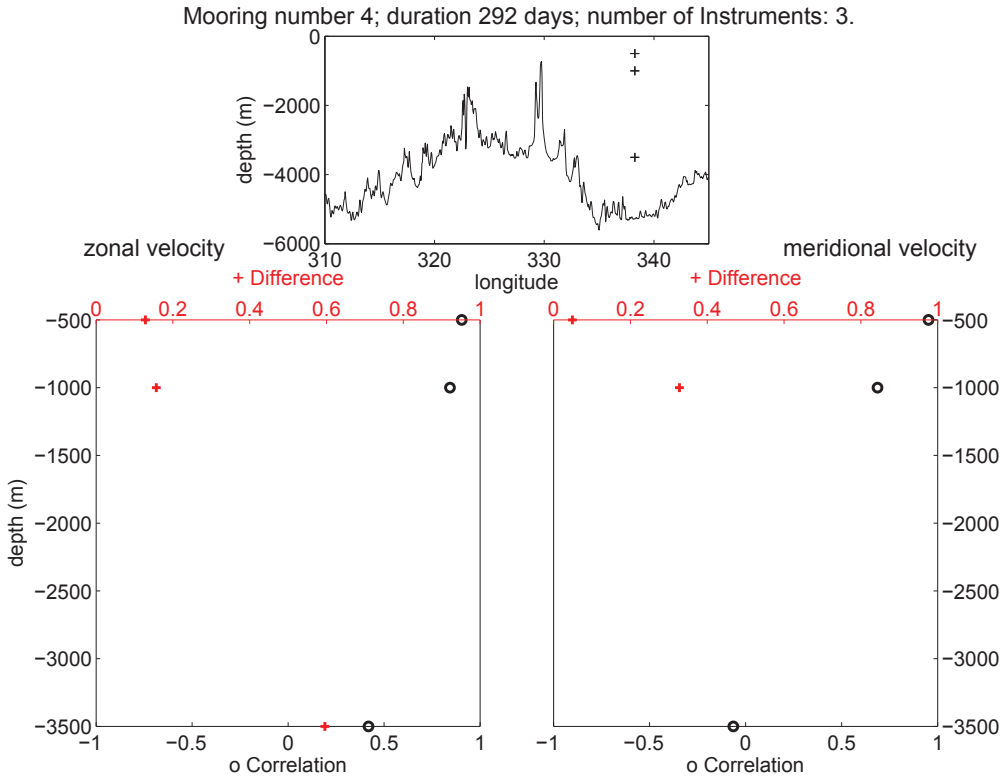

FIGURE *2.22 – En haut : mouillage numéro 4 de la zone 5, et topographie zonale à la latitude du mouillage. Les croix rouges représentent la profondeur de chaque instrument. La longueur de l'enregistrement est de 292 jours. En bas, la corrélation entre la prédiction du modèle et les données des courantomètres pour la vitesse zonale (à gauche) et la vitesse méridionale (à droite) du mouillage numéro 4 de la zone 5. Les différences calculées avec l'équation (2.40) sont aussi montrées sur ces graphiques (par des croix rouges)*

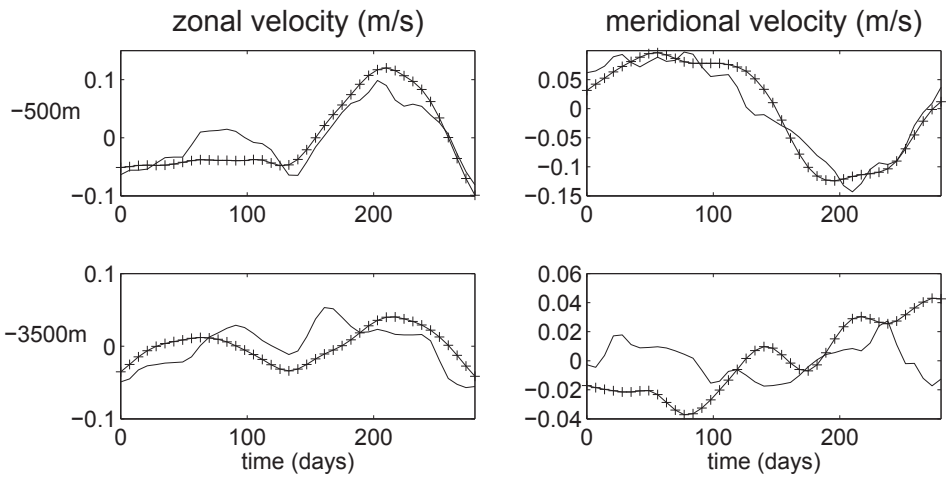

FIGURE *2.23 – Zone 5, mouillage numéro 4. Séries temporelles de la prédiction (croix) et données des courantomètres (lignes) à différentes profondeurs pour la vitesse zonale (gauche) et méridionale (droite)*

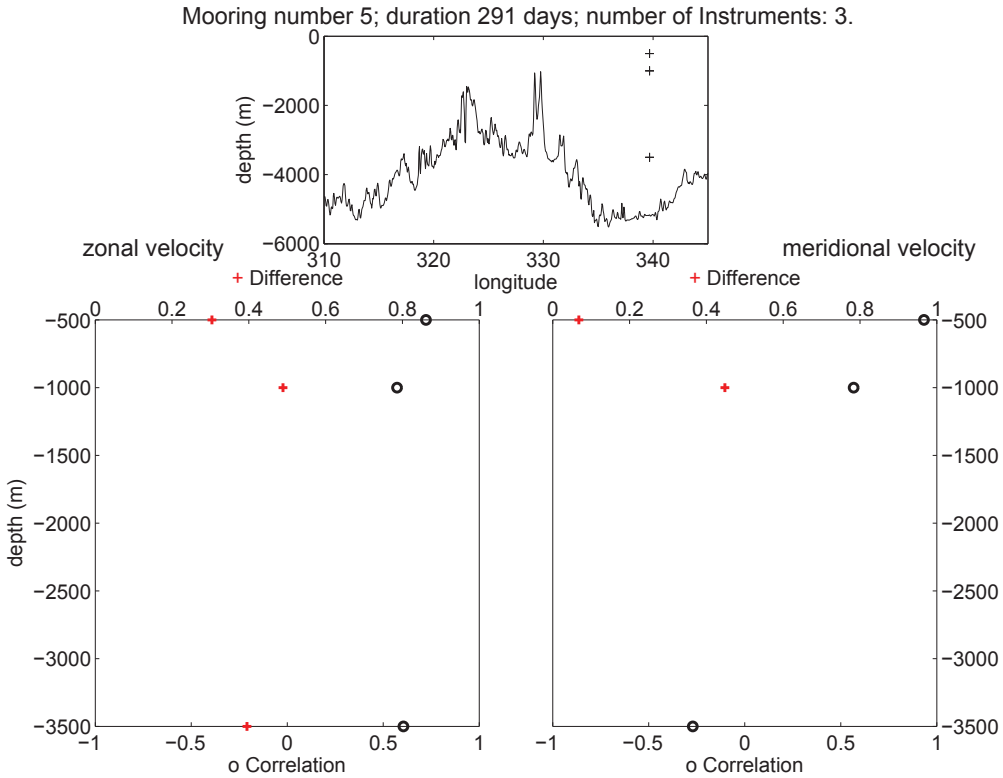

FIGURE *2.24 – En haut : mouillage numéro 5 de la zone 5, et topographie zonale à la latitude du mouillage. Les croix rouges représentent la profondeur de chaque instrument. La longueur de l'enregistrement est de 291 jours. En bas, la corrélation entre la prédiction du modèle et les données des courantomètres pour la vitesse zonale (à gauche) et la vitesse méridionale (à droite) du mouillage numéro 5 de la zone 5. Les différences calculées avec l'équation (2.40) sont aussi montrées sur ces graphiques (par des croix rouges)*

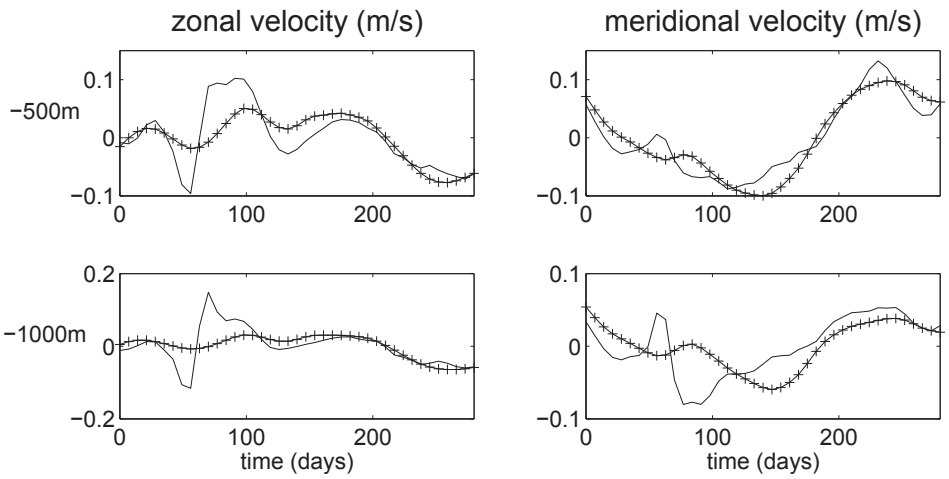

FIGURE *2.25 – Zone 5, mouillage numéro 5. Séries temporelles de la prédiction (croix) et données des courantomètres (lignes) à différentes profondeurs pour la vitesse zonale (gauche) et méridionale (droite)*

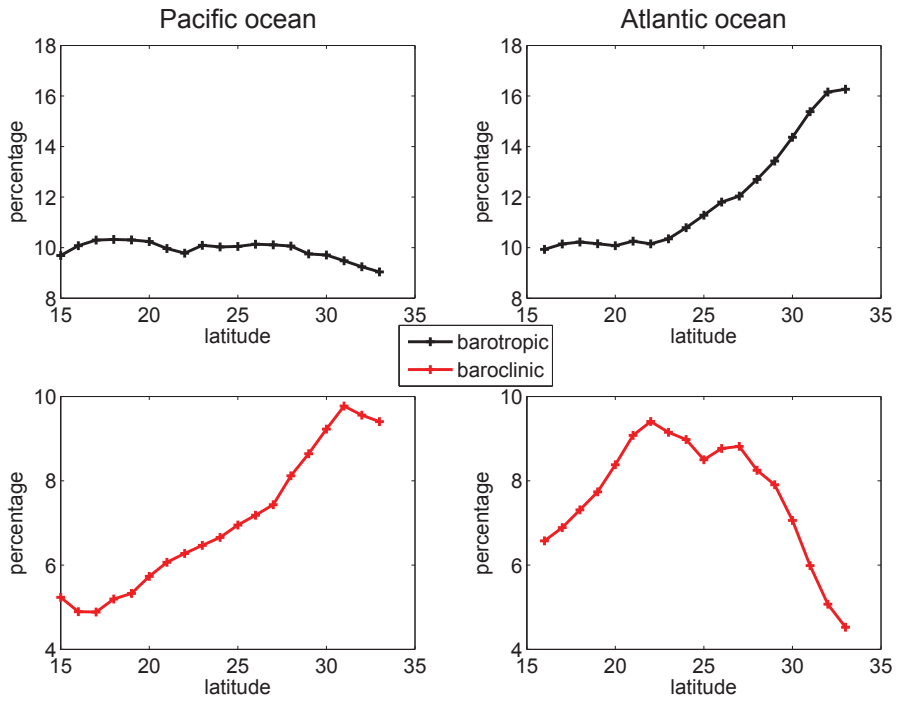

FIGURE *2.26 – Pourcentage d'énergie pouvant être attribué au mode barotrope (en haut) et au premier mode barocline (en bas) en fonction de la latitude. Les calculs pour l'océan Pacifique sont montrés à gauche (*170 ° 220 °*) et pour l'océan Atlantique à droite (*290 ° 340 °*)*

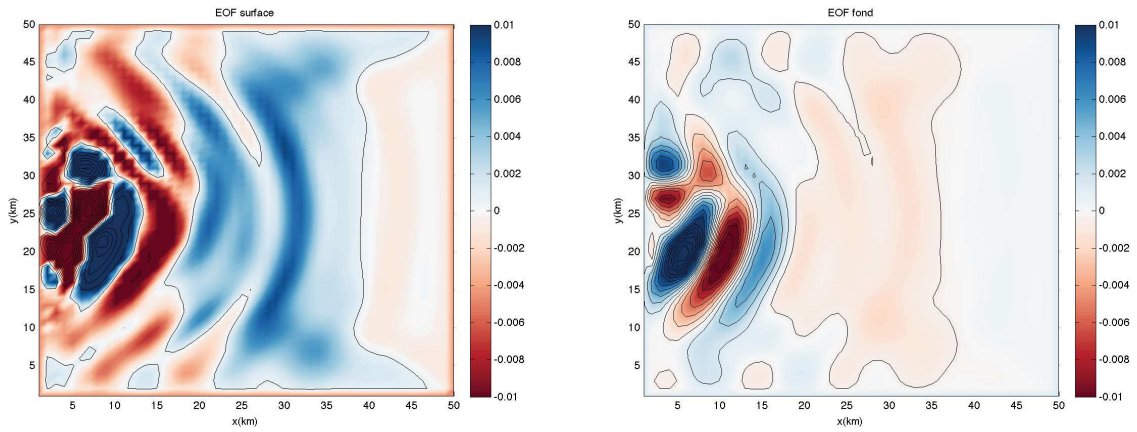

FIGURE *2.27 – EOF orthonormalisée représentant le maximum de variabilité ; la couche de surface est à gauche et celle de fond à droite.*

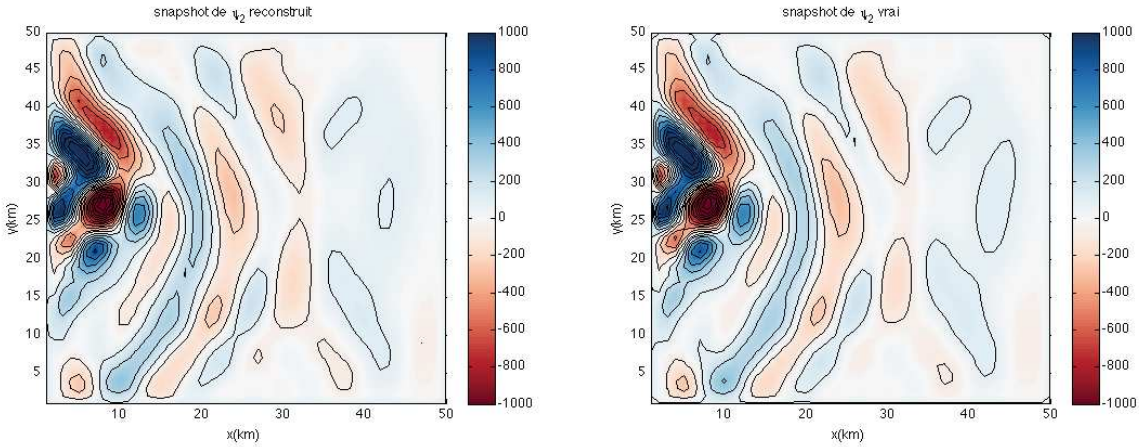

FIGURE *2.28 – snapshot de ψ_2' (m^2/s) reconstruit à gauche et ψ_2' vrai à droite.*

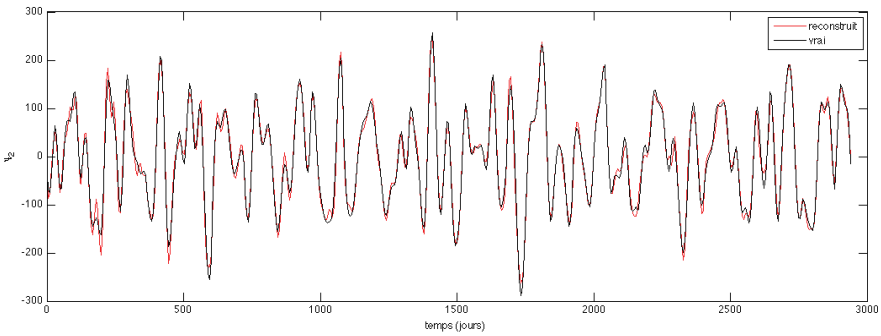

FIGURE *2.29 – Comparaison des séries temporelles de ψ_2' (m^2/s) reconstruit (rouge) et vrai (noir) au milieu du bassin*

Chapitre 3

Relation de dispersion des ondes de Rossby dans un champ spatialement variable

Sommaire

3.1 Introduction . . . 69
3.1.1 Influence de la topographie sur les ondes libres . . . 70
3.1.2 Influence du courant moyen . . . 73
3.2 Équations et méthode de résolution . . . 75
3.2.1 Équations . . . 75
3.2.2 Méthode de résolution . . . 77
3.3 Études dans des cadres idéalisés . . . 78
3.3.1 Couplage vertical . . . 78
3.3.2 Influence d'une topographie zonale sur la propagation des ondes de Rossby . . . 79
3.3.3 Influence d'un courant moyen zonal variant méridionalement sur les ondes de Rossby . . . 93
3.4 Calcul sur des données réelles dans une zone de l'Atlantique Nord 96
3.4.1 Méthode . . . 96
3.4.2 Comparaison objective de l'énergie décrite par les modes propres . . . 98
3.4.3 Traitement sur les données altimétriques . . . 99
3.4.4 300° - 330° 20° - 30° N . . . 100
3.5 Conclusion . . . 100

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, le calcul de la structure verticale a été réalisé à partir de la condition de pression en surface. L'énergie située en dehors des courbes des relations de dispersion était expliquée soit par l'effet d'une topographie agissant sur les modes libres ($\lambda^2 > 0$), soit par l'effet d'un forçage extérieur dans le cas des modes piégés en surface ($\lambda^2 < 0$). Cette partie s'intéresse uniquement aux ondes libres, cette fois ci modifiées par la topographie et le courant moyen variables dans les trois dimensions de l'espace, puis finalement à leur comparaison avec les observations de surface.
Ce chapitre est motivé en partie par l'observation de la présence d'énergie spectrale autour d'une ligne "non dispersive" [Wunsch, 2010] dans les données altimétriques, alors que la théorie linéaire simple (avec fond plat, sans forçage etc) prédit la présence d'énergie spectrale le long de la relation de dispersion du premier mode barocline. La figure (3.1) extraite de l'article Wunsch

[2009] montre le spectre d'énergie le long de la ligne 27° N dans le Pacifique et les relations de dispersion du mode barotrope et du premier mode barocline. L'échelle logarithmique de la figure de droite laisse penser que le spectre ne se situe pas du tout le long de la relation de dispersion du premier mode barocline, en réalité, la différence entre la position de l'énergie et celle des relations de dispersion est plus limitée. On peut le voir par exemple sur les cartes de Maharaj *et al.* [2007] reproduites sur la figure (3.2), qui montrent la comparaison des relations de dispersion avec les différentes théories des articles de Killworth [Killworth et Blundell, 1999, 2004, 2005, Killworth *et al.*, 1997] pour quelques zones dans le Pacifique Sud. Ces cartes montrent que les courbes des relations de dispersion modifiées par la topographie et le courant moyen semblent effectivement se trouver au centre d'un patch d'énergie spectrale. Cependant il est clair que la plupart de l'énergie ne peut pas être expliquée par ces courbes puisque théoriquement, seule l'énergie située exactement sur ces courbes est autorisée. Dans ce cas, comment expliquer la répartition de l'énergie observée dans l'altimétrie ?
Plusieurs hypothèses peuvent être faites :

1. des erreurs de mesures pourraient expliquer la présence d'énergie autour des relations de dispersion mais cela peut difficilement expliquer entièrement la distribution de l'énergie telle que montrée sur la figure (3.2) ;
2. des ondes forcées par l'atmosphère en dehors des courbes des relations de dispersion. Mais d'après les conclusions du chapitre précédent, les équations linéaires prédisent qu'un forçage est efficace uniquement le long des courbes des relations de dispersion. Par conséquent, s'il y avait des ondes forcées, elles se situeraient le long des relations de dispersion ;
3. les observations pourraient être en fait de la turbulence : l'instabilité barocline crée de la turbulence, une cascade inverse en augmente les échelles spatiales. Scott et Wang [2005] montrent des preuves de l'existence d'une cascade inverse dans l'océan. Mais, les échelles que l'on étudie sont plus grandes que l'échelle de Rhines et par conséquent les mouvements associés devraient plutôt avoir une dynamique d'ondes ;
4. les ondes de Rossby pourraient être instables. Isachsen *et al.* [2007] montre dans un modèle shallow-water à deux couches que les ondes de Rossby sont toujours instables et que de l'énergie peut, par conséquent, se trouver en dehors des relations de dispersion. Mais les auteurs montrent aussi qu'à basse latitude, elles sont capables de traverser le bassin sans être affectées par ces instabilités car leurs vitesses de propagations sont suffisamment élevées.
5. les ondes libres ont parfois des échelles horizontales de l'ordre de 1000 km, le courant moyen et la topographie peuvent aussi varier sur des échelles de ces ordres. L'influence de ces champs spatialement variables pourrait modifier les relations de dispersion des ondes libres et expliquer une partie de l'énergie visible dans l'élévation de surface. C'est l'hypothèse que nous nous proposons d'étudier ici.

3.1.1 Influence de la topographie sur les ondes libres

La modification locale des ondes de Rossby par un champ moyen $(U(z), V(z))$ et par une topographie à pente constante a longuement été étudiée par divers auteurs et un aperçu en a été donné dans l'introduction du chapitre précédent. Dans ce paragraphe, on présente les études sur le sujet en mettant l'accent sur celles qui explorent l'effet des variations spatiales de la topographie sur les ondes de Rossby.

L'influence de la topographie sur les ondes de Rossby est un sujet compliqué parce que son inclusion introduit des coefficients non constants dans les équations aux dérivées partielles, ce qui complique grandement leur résolution. D'autre part, les échelles horizontales de la topographie sont très variées puisqu'elles couvrent des longueurs de quelques centimètres pour les plus petites roches, jusqu'à plusieurs milliers de kilomètres pour les dorsales océaniques. La carte

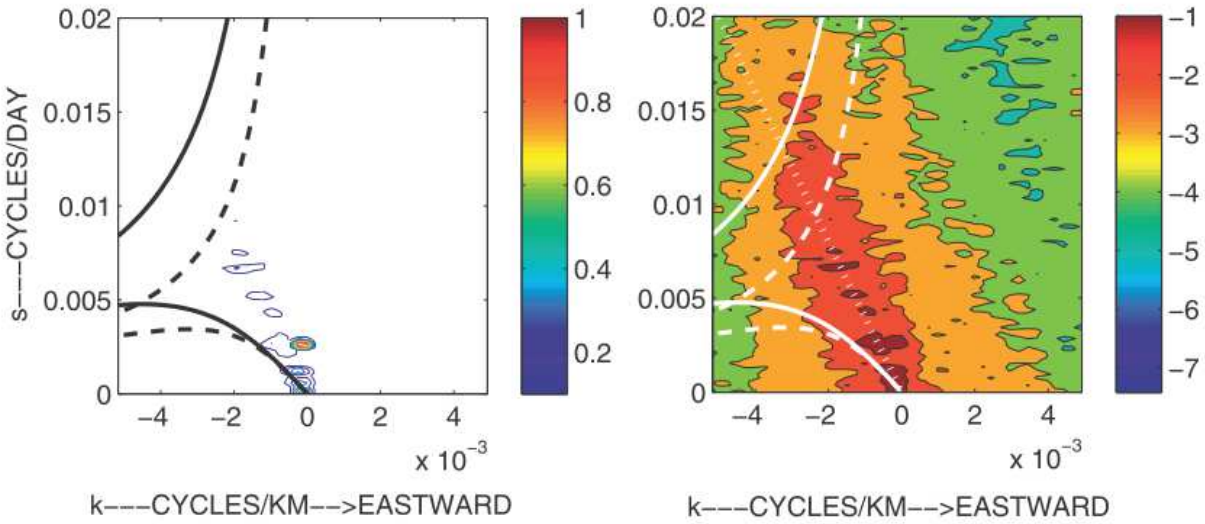

FIG. 5. Normalized frequency–wavenumber spectrum as estimated for the eastern subregion in Fig. 1 (from Wunsch 2009) along 27°N. (left) The power linearly and (right) its logarithm. Normalization renders the maximum value as 1 so that only the shape is significant here. Dashed lines show the linear Rossby wave dispersion relationship in the barotropic and first baroclinic modes, with the meridional wavenumber $l = 0$, and the dashed–dotted lines assume $l = k$ for unit aspect ratio.

FIGURE *3.1 – Figure extraite de Wunsch [2009]*

(3.3) montre la topographie (d'après l'atlas de la NOAA) d'une zone située dans l'Atlantique Nord. La dorsale medio-Atlantique, orientée le long d'un axe Sud-Sud-Ouest, Nord-Nord-Est domine le signal mais de nombreuses autres échelles sont présentes.

Pour pouvoir comprendre comment les ondes interagissent avec la topographie, il est par conséquent nécessaire de faire des simplifications, d'en utiliser des représentations idéalisées. Les auteurs adoptent différentes stratégies : certains étudient l'effet d'une topographie aux échelles beaucoup plus petites que celles des ondes, c'est le cas par exemple de Rhines et Bretherton [1973], d'autres comme Killworth et Blundell [1999], l'effet d'une topographie aux échelles beaucoup plus grandes que celle des ondes et enfin d'une topographie aux mêmes échelles que les ondes, c'est le cas de Samelson [1992].

Rhines [1970] montre qu'une pente constante introduit deux types d'ondes : des ondes de Rossby topographiques piégées près du fond et des ondes de Rossby modifiées, avec une structure verticale oscillante. Les ondes de Rossby topographiques, par nature non observables en surface, ne nous intéressent pas ici. Straub [1994] calcule les relations de dispersion pour une fréquence de Brunt-Väisälä constante et différentes orientations de pente. La pente modifie à la fois la fréquence et la structure verticale de l'onde, ces modifications dépendent de l'intensité et de l'orientation de la pente. L'auteur montre que, bien que les relations de dispersion puissent être fortement modifiées, le signe de la fréquence reste toujours le même : l'onde se propage vers l'ouest (ce qui n'est pas forcément le cas des ondes piégées au fond). Veronis [1981] explique les mécanismes derrière la modification des ondes de Rossby par une pente Nord-Sud. En l'absence de pente et pour une fréquence de Brunt-Väisälä constante, le premier mode barocline s'annule (il change de signe) à mi profondeur. Lorsque la pente devient grande, le déplacement vertical requis pour satisfaire la condition au fond ($w = \alpha v$, avec α la pente) peut éventuellement devenir plus grand que ce que la stratification admet. Dans ce cas, la profondeur où le premier mode barocline change de signe augmente jusqu'à éventuellement atteindre le fond et permettre $\alpha v(z = -H) = 0 = w(z = -H)$. La structure verticale est alors simplement la première moitié du premier mode barocline d'un océan sans topographie avec une profondeur deux fois plus grande. Les vitesses de phase des ondes longues de cette topographie seront donc

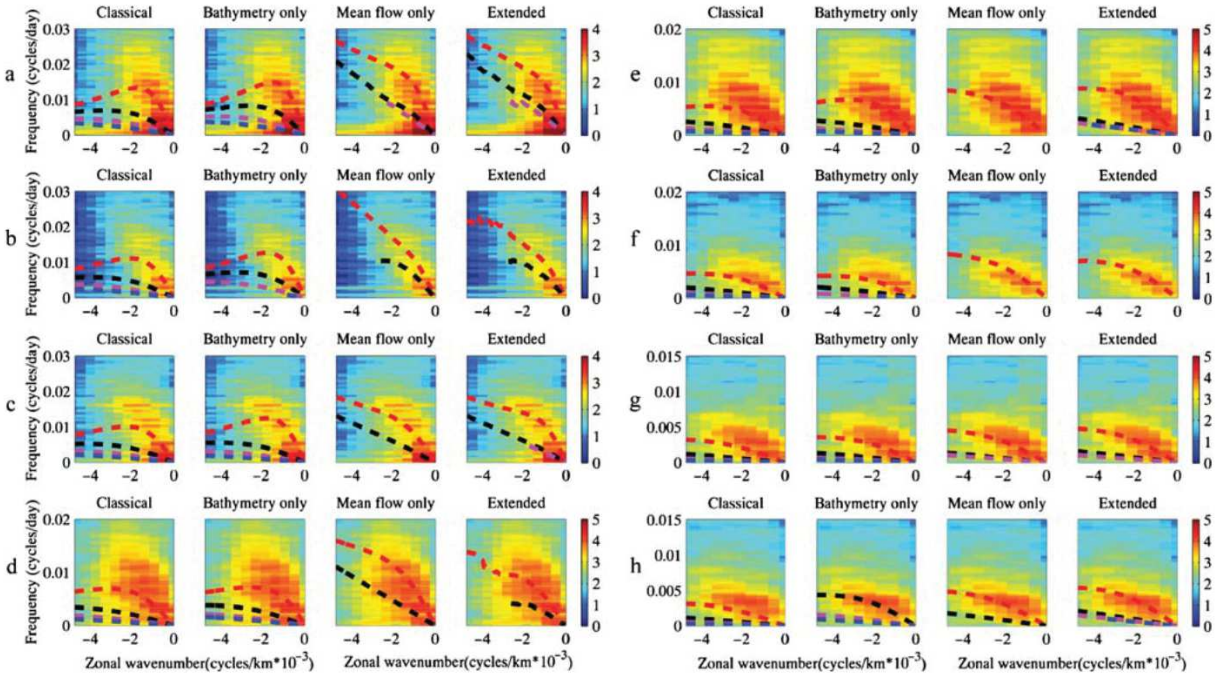

Fig. 6 Frequency–wavenumber plots with dispersion curves for various configurations at **a** 13°S, 177°W, **b** 13°S, 110°W, **c** 16°S, 147°W, **d** 24°S, 160°W,**e** 29°S, 170°E, **f** 30°S, 115°W, **g** 38°S, 115°W, and **h** 38°S, 90°W. Modes 1, 2, 3, and 4 are in *red*, *black*, *magenta*, and *blue*, respectively. Units are in $\log_{10}(\mathrm{m}^2\,\mathrm{deg}^2\,\mathrm{day}^2)$

FIGURE *3.2 – Figure extraite de Maharaj* et al. *[2007]*

quatre fois plus grandes qu'en l'absence de topographie : $c = 4 \times \frac{\beta}{(\frac{\pi f_0}{H N_0})^2}$.

Anderson et Killworth [1977] étudient l'influence d'une topographie zonale sur le spin-up d'un océan à deux couches. Leur méthode consiste à calculer les modes de bassin modifiés par cette topographie. Ils déduisent de leur méthode que la topographie est surtout ressentie par le mode barotrope, le mode barocline étant principalement modifié de manière indirecte par ce dernier.

La plupart de ces articles utilisent l'hypothèse de topographies avec des échelles horizontales grandes ou petites par rapport à celles des ondes. Cette hypothèse est relaxée par Samelson [1992] qui étudie l'effet d'une topographie sinusoïdale dans les directions zonale et méridionale variant sur l'échelle des ondes de Rossby. L'auteur montre numériquement qu'une topographie peut créer des ondes piégées en surface avec des fréquences plus élevées que le maximum autorisé par un fond plat mais qu'il n'existe pas de relation simple reliant l'amplitude de la topographie à l'intensification en surface.

Plus récemment, un certain regain d'intérêt pour le sujet des ondes de Rossby modifiées par la topographie a eu lieu après la découverte de différences entre les vitesses de phase des ondes observées et théoriques. Killworth et Blundell [1999] suggèrent que l'ajout d'une topographie augmente la fréquence à l'Ouest des dorsales océaniques mais que son inclusion dans la théorie des ondes de Rossby ne peut pas expliquer les vitesses de phase observées plus rapides que celles de la théorie. Cependant leur méthode de calcul des raies semble ne pas toujours sélectionner le mode se déplaçant le plus rapidement vers l'ouest comme le montre Tailleux [2003]. En contradiction avec cette étude, Tailleux et McWilliams [2000] dans un modèle à deux couches, puis Tailleux et McWilliams [2001] dans le cas d'une stratification continue montrent comment la décorrélation des fluctuations de la pression de fond avec la dynamique des ondes en surface peut augmenter la vitesse de phase. Leur hypothèse de décorrélation se traduit très simplement :

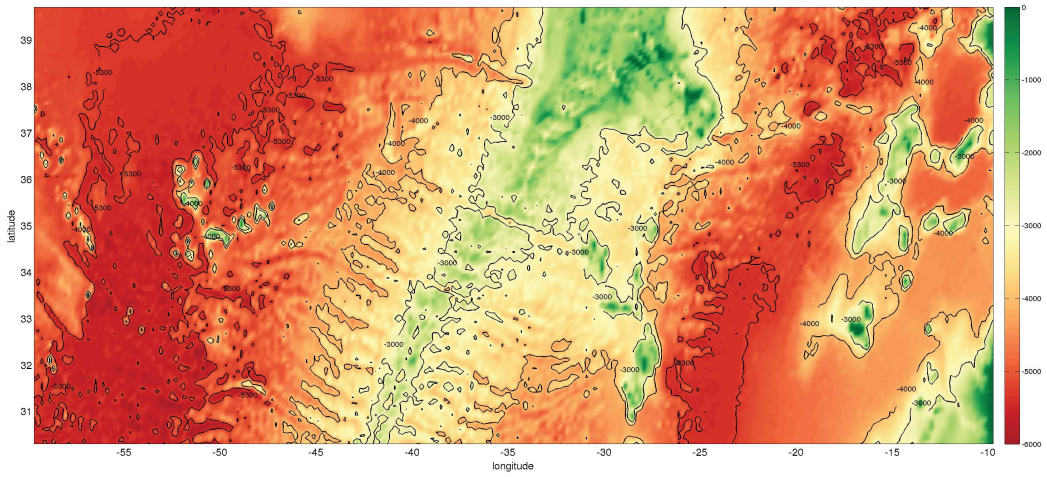

FIGURE *3.3 – Topographie d'une zone de l'Atlantique Nord, d'après ETOPO1*

la condition de vitesse verticale nulle au fond est remplacée par une condition d'anomalie de pression nulle. Pour trouver les vitesses de phase, les auteurs remplacent donc le problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \dfrac{dF_{Ni}}{dz}(z=0)=0 \\ \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{f_0^2}{N^2(z)}\dfrac{dF_{Ni}}{dz}\right)+\lambda_{Ni}^2F_{Ni}(z)=0 \\ \dfrac{dF_{Ni}}{dz}(z=-H)=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

par

$$\begin{cases} \dfrac{dF_{Di}}{dz}(z=0)=0 \\ \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{f_0^2}{N^2(z)}\dfrac{dF_{Di}}{dz}\right)+\lambda_{Di}^2F_{Di}(z)=0 \\ F_{Di}(z=-H)=0 \end{cases} \tag{3.2}$$

On peut montrer (en annexe A) que dans ce cas $0 < \lambda_{D1}^2 < \lambda_{N2}^2$, c'est-à-dire que le rayon de déformation calculé avec la condition de Dirichlet au fond est plus grand que celui calculé avec la condition de Neumann ($\lambda = 1/R_d$). Par conséquent, les vitesses de phase seront plus importantes dans le cas Dirichlet que dans le cas Neumann. Les auteurs invoquent différents mécanismes qui pourraient être responsables de cette décorrélation mais le seul pour lequel des études poussées existent est, comme nous l'avons vu plus haut, la topographie.

3.1.2 Influence du courant moyen

La plupart des études de l'influence du courant moyen sur les ondes de Rossby utilisent l'hypothèse des échelles horizontales des ondes bien plus petites que l'échelle de variation du courant moyen. Cette hypothèse permet de négliger les variations horizontales de U et V ce qui simplifie grandement le calcul. La carte du courant zonal moyen en surface présentée figure (3.4), construite à partir de la base de données ANDRO (des informations sur cet Atlas peuvent être trouvées dans Ollitrault et Rannou [2013] et Ollitrault et Colin de Verdière [2014]), nous renseigne sur les variations spatiales du courant moyen. L'hypothèse de différences d'échelles entre les ondes et le champ moyen est sans doute justifiable pour des petites longueurs d'ondes,

néanmoins, pour les plus grandes longueurs d'ondes, qui peuvent atteindre parfois 1000 km, l'hypothèse devient beaucoup plus discutable.

De rares auteurs étudient l'influence du flot moyen sur les ondes sans faire l'hypothèse de

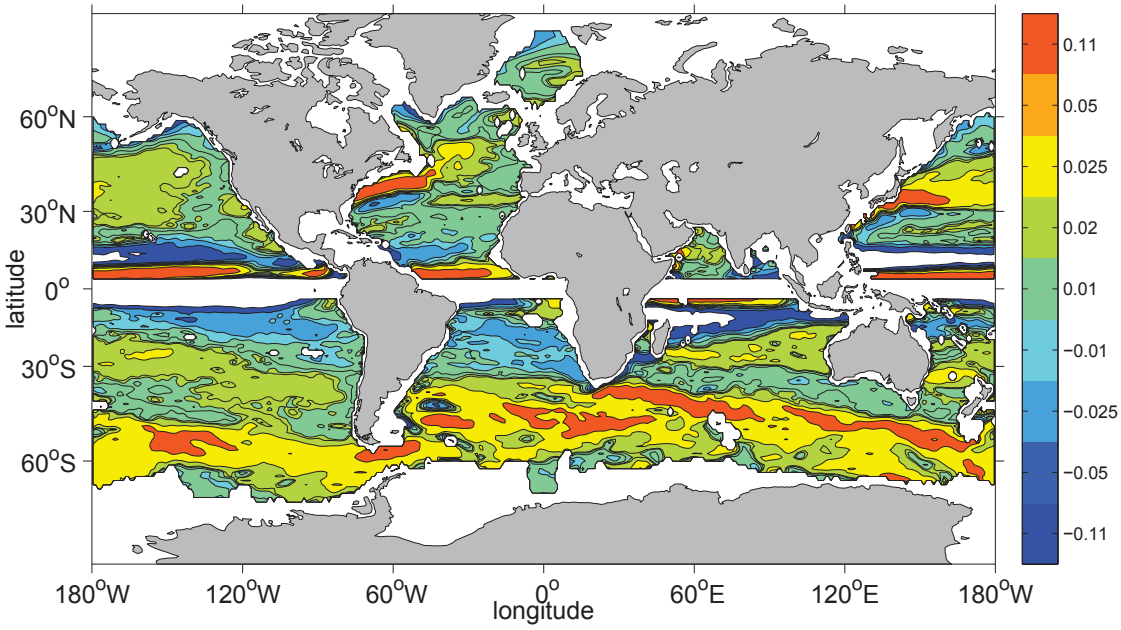

FIGURE *3.4 – Vitesse zonale moyenne en surface (m/s) d'après un Atlas construit à partir des données ARGOs.*

séparation d'échelles. C'est le cas de Killworth [1979] qui analyse l'impact de courants zonaux variant avec la latitude sur la propagation latitudinale des ondes de Rossby. Il montre dans des cas idéalisés, que la propagation Nord-Sud de l'onde peut être grandement atténuée, voire supprimée par les variations méridionales du courant moyen.

Plus récemment, l'effet d'un courant moyen sur les ondes de Rossby a surtout été étudié localement, notamment par Killworth *et al.* [1997] dans le but d'expliquer la valeur des vitesses de phase observées dans l'altimétrie. Il montre que le courant moyen contenu dans le premier mode barocline n'a quasiment pas d'effet sur les ondes longues, ce qui est traditionnellement appelé le "non doppler effect" Held [1983] (la démonstration de Killworth dans le cas continu n'est plus strictement valable lorsque l'approximation des ondes longues est relaxée). Il montre aussi que le courant barotrope n'est pas assez intense pour modifier la vitesse de propagation des ondes baroclines de manière significative sauf dans le courant circumpolaire, ce qui pourrait expliquer les vitesses de phase vers l'est qui y sont observées. Et, enfin, que c'est l'effet de la projection du flot moyen sur le deuxième mode barocline qui modifie la vitesse de phase des ondes. Dewar [1998] étudie dans un modèle trois couches, sous l'approximation des ondes longues, l'effet d'un champ moyen. Il démontre, en accord avec Killworth *et al.* [1997], que c'est la projection du courant moyen sur le deuxième mode barocline qui influence la vitesse de propagation et que par conséquent, dans un gyre subtropical anticyclonique, la correction de la vitesse de phase est cyclonique : accélérée au nord, décélérée au sud. L'intérêt de son étude est aussi de montrer que cet effet nécessite au minimum trois couches sur la verticale pour exister.

Ces différentes études démontrent que le courant moyen et la topographie sont tous les deux capables de modifier les caractéristiques des ondes de Rossby. Comme le note Tailleux [2003], le problème n'est pas linéaire : si ψ_{topo} et ψ_{mean} sont respectivement les solutions des problèmes avec topographie seulement et avec courant moyen seulement, $\psi_{\text{topo}} + \psi_{\text{mean}}$ ne sera

pas forcément la solution du problème avec ces deux champs. Pour étudier leurs influences sur les ondes de Rossby, il est donc nécessaire de regarder leurs rôles conjointement.
C'est ce qui est fait dans les articles de Killworth et Blundell [2003a,b] sous l'approximation des ondes longues puis de manière plus générale dans Killworth et Blundell [2004, 2005]. Leur méthode consiste à résoudre un problème aux valeurs propres local, pour lequel ils négligent les variations horizontales des champs moyens. La comparaison entre les vitesses de phase observées et calculées semble être largement améliorée par l'inclusion de ces deux champs (voir la figure 17 de Killworth et Blundell [2005] reproduite ici figure (1.8)).
Si ces théories permettent d'expliquer la plupart des vitesses de phase observées, c'est-à-dire la vitesse de propagation du maximum d'énergie (voir par exemple la méthode utilisée dans Osychny et Cornillon [2004]), elles ne permettent pas d'expliquer la répartition de l'énergie telle qu'observée par exemple sur la figure (3.2). C'est précisément l'une des questions que nous aborderons dans ce chapitre : l'inclusion de la topographie et du courant moyen variables spatialement est-elle capable d'expliquer la répartition de l'énergie spectrale telle qu'observée dans l'altimétrie ? Pour y répondre nous développerons dans une première partie un calcul permettant d'inclure leurs effets sur les ondes de Rossby. Dans une deuxième partie, ce calcul est étudié dans des cadres idéalisés. On s'attardera en particulier sur les effets d'un changement de pente de la topographie puis sur les variations latitudinales d'un courant moyen. La dernière partie est consacrée au calcul des modes propres sur une zone de l'Atlantique Nord et à leur comparaison avec les données satellitaires.

3.2 Équations et méthode de résolution

3.2.1 Équations

Notre but est de décrire le comportement d'ondes aux amplitudes faibles (de sorte que les non-linéarités peuvent être négligées) en présence de courant moyen et de topographie. Le chapitre précédent se concentrait sur les échelles spatiales et temporelles bien capturées par les équations quasi-géostrophiques. Les échelles étudiées ici sont les mêmes : de l'ordre de 1000 km horizontalement et plus longues que quelques mois. Les équations quasi-géostrophiques sont linéarisées autour d'un état moyen $(U, V)(x, y, z)$ et d'une topographie topo(x,y).
Une hypothèse classique des équations quasi-géostrophiques à couches est de supposer les variations d'épaisseur de chaque couche petites par rapport à leur hauteur totale : en décomposant l'épaisseur de la couche i de la manière suivante : $h_i = H_i + \eta_{i-1} - \eta_i$, avec H_i l'épaisseur au repos et η_{i-1}, η_i les dénivellations des interfaces supérieures et inférieures, l'hypothèse est que η_{i-1} et η_i sont très petits devant H_i. Plusieurs raisons nous poussent à ne pas faire cette hypothèse pour ce qui concerne le courant moyen et la topographie. La première est que la topographie au-dessus de certaines zones, notamment pour les régions qui nous intéressent, au niveau des dorsales océaniques, peut parfois atteindre 2 à 3 km de hauteur (voir par exemple la figure (3.3)) et ne peut donc pas être négligée devant la hauteur de la couche ; la deuxième est que pour des variations de plusieurs milliers de kilomètres sur la longitude (on choisira des zones de 2000-3000 km de longitude, pas plus de 1000 km de latitude pour respecter l'approximation du plan β : $\beta L << f_0$), les variations des épaisseurs de couches dues aux courants moyens peuvent être de l'ordre de l'épaisseur de la couche. La figure (3.5) illustre cela en montrant les variations d'épaisseurs de ce qu'on définit comme couche de surface (notre méthode de calcul sera exposée en détail dans une partie ultérieure, mais on peut déjà dire que l'épaisseur est contrôlée par les surfaces d'isodensités). Au Nord-Est de la zone, l'épaisseur est de moins de 40 mètres, au Sud-Ouest elle est de plus de 140 mètres : les variations sont plus grandes que la moitié de l'épaisseur moyenne de la couche. En revanche, l'hypothèse des anomalies de dénivellations, représentées par η'_i et η'_{i-1}, très inférieures à l'épaisseur au repos (sans anomalie mais avec du courant moyen) $H_i(x, y)$ est gardée.

Les notations suivantes seront ci-dessous utilisées : $H_i(x, y)$ est l'épaisseur de la couche

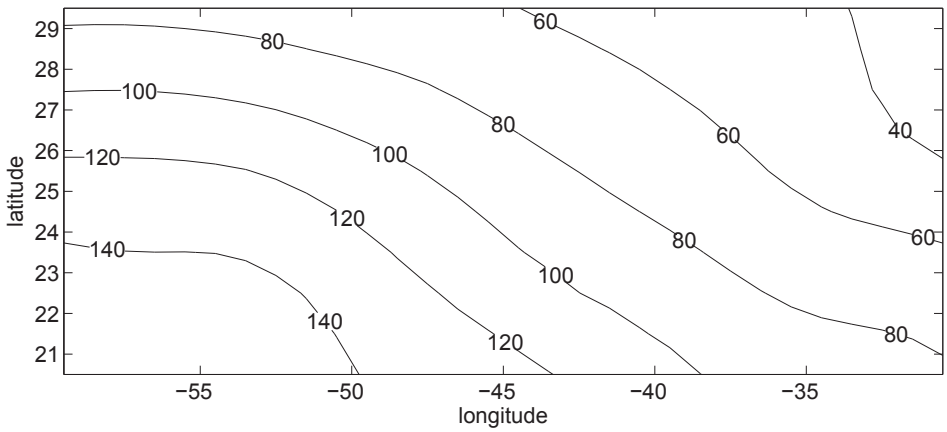

FIGURE *3.5 – Variation horizontale de l'épaisseur de la première couche d'une zone rectangulaire de l'Atlantique Nord, en mètres. La méthode de calcul est présentée plus bas, les données proviennent du World Ocean Atlas 2013 (NOAA).*

i ; f_0 et β sont, respectivement, le paramètre de Coriolis et sa variation linéaire avec la latitude ; $g'_i = g\frac{\rho_{i+1}-\rho_i}{\rho_0}$ est la gravité réduite à l'interface entre la couche i et $i+1$ et ρ_i ρ_{i+1} les densités des couches i et $i+1$. Le courant moyen peut être lié à l'épaisseur de chaque couche grâce à la formule suivante : $\overline{\eta_i} = \frac{f_0}{g'_i}\left(\overline{\psi_{i+1}} - \overline{\psi_i}\right)$ où η_i est l'interface entre les couches i et $i+1$: $H_i(x,y) = \overline{H_i(x,y)} + \eta_{i-1} - \eta_i$. $\overline{H_i(x,y)}$ est l'épaisseur moyenne, donnée par $H_i(x,y) = H_i + \overline{\eta_{i-1}} - \overline{\eta_i}$. Soient N_k, N_l, N_z les nombres de points dans les directions zonale, méridionale et verticale.
On dérive ci-dessous les équations que l'on va utiliser et notamment l'effet des variations d'épaisseurs des couches sur les anomalies. Une démonstration pour une stratification continue peut être trouvée dans Pedlosky [1982].
La vorticité potentielle des équations shallow-water est décomposée en termes moyen et anomalie $q_i = Q_i + Q'_i$, l'équation linéarisée de la conservation de q_i dans la couche i est :

$$\frac{\partial}{\partial t}Q'_i + \overrightarrow{U_i}.\overrightarrow{\nabla}Q'_i + \overrightarrow{u'_i}.\overrightarrow{\nabla}\overline{Q_i} = 0 \tag{3.3}$$

avec U_i et u'_i respectivement la vitesse moyenne et l'anomalie de vitesse dans la couche i. La vorticité potentielle moyenne dans la couche i s'écrit :

$$\overline{Q_i} = \frac{\overline{\zeta_i} + f}{H_i} \tag{3.4}$$

L'épaisseur de la couche i s'écrit $h_i = \overline{H_i} + \eta'_{i-1} - \eta'_i$, en linéarisant grâce à $|\eta'_i(x,y)|$et $|\eta'_{i-1}(x,y)| << \overline{H_i(x,y)}$ l'anomalie de vorticité potentielle dans la couche i s'écrit :

$$Q'_i = \frac{1}{H_i}\left(\zeta_i - \frac{f_0}{H_i}\left(\eta'_{i-1} - \eta'_i\right)\right) \tag{3.5}$$

Finalement, en supposant qu'à l'ordre 0 l'équilibre est géostrophique et par conséquent non divergeant (les excursions méridionales sont supposées petites), on introduit une fonction courant $\psi_i(x,y,t)$ qui donne : $\zeta_i = \nabla^2\psi_i$, $\eta_i = \frac{f_0}{g'_i}\left(\psi_{i+1} - \psi_i\right)$. Ces relations permettent de relier la fonction courant à Q'_i de la manière suivante :

$$Q'_i = \frac{1}{H_i}\left(\nabla^2\psi_i + \frac{f_0^2}{H_i}\left(\frac{(\psi_{i-1} - \psi_i)}{g'_{i-1}} - \frac{(\psi_i - \psi_{i+1})}{g'_i}\right)\right) \tag{3.6}$$

dans la couche de fond :

$$Q'_N = \frac{1}{H_N}\left(\nabla^2\psi_N + \frac{f_0^2}{H_N}\left(\frac{(\psi_{N-1}-\psi_N)}{g'_{N-1}}\right)\right) \tag{3.7}$$

et dans la couche de surface :

$$Q'_1 = \frac{1}{H_1}\left(\nabla^2\psi_1 + \frac{f_0^2}{H_1}\left(\frac{(\psi_2-\psi_1)}{g'_1}\right)\right) \tag{3.8}$$

où un toit rigide a été utilisé. L'approximation du toit rigide semble changer radicalement la forme de la solution pour le mode barotrope lorsque l'approximation des ondes longues est faite (voir la figure 1 de Tailleux [2003]). Ici, cette approximation n'est pas faite, mais l'effet du toit rigide devrait se faire ressentir seulement aux échelles plus grandes que le rayon de déformation du mode barotrope. De plus, les vitesses de phase de ces modes (pseudo-barotropes modifiés par la topographie avec surface libre) sont beaucoup trop élevées pour être visibles dans l'altimétrie satellitaire. Le paragraphe suivant expose notre méthode de résolution.

3.2.2 Méthode de résolution

Notre but est de construire, à l'aide de ces équations, deux matrices M et B de taille $(N_kN_lN_z, N_kN_lN_z)$ et de résoudre le problème aux valeurs propres généralisé :

$$Mv = \lambda Bv \tag{3.9}$$

où v est un vecteur propre associé à sa valeur propre λ. $\psi_i(x,y,t)$, la fonction courant dans chaque couche est décomposée comme ceci :

$$\psi_i(x,y,t) = \Psi_i^\lambda(x,y)\exp(j\lambda t) \tag{3.10}$$

$\Psi_i^\lambda(x,y)$ correspond au vecteur v du problème (3.9), i est l'indice de la couche. Une méthode spectrale est utilisée, le vecteur propre est décomposé de la manière suivante : $\Psi_i^\lambda(x,y) = \sum_{k,l}\alpha_{k,l,i}^\lambda \exp(j(kx+ly))$. Les conditions aux limites sont donc ici doublement périodiques en longitude et latitude, ce qui permet de s'affranchir des complications dues aux côtes, mais qui ne peut être valable que dans l'océan intérieur, loin des bords.
De la même manière, les termes reliés au courant moyen et à la topographie sont décomposés sur des modes de Fourier. La matrice B est construite à partir de tous les termes avec une dérivée temporelle, la matrice M contient tous les termes restants. Avec cette méthode, la multiplication des termes moyens se fait dans l'espace physique, il faut donc tout d'abord les isoler des autres. Par exemple, $\vec{\nabla}Q'_i$ est écrit :

$$\vec{\nabla}Q'_i = \zeta'_i\nabla\left(\frac{1}{H_i}\right) - 2\left(\nabla\left(\frac{1}{H_i}\right)\frac{f_0}{H_i}\right)(\eta'_{i-1}-\eta'_i) + \frac{1}{H_i}\nabla(\zeta'_i) - \frac{f_0}{H_i^2}\nabla(\eta'_{i-1}-\eta'_i) \tag{3.11}$$

les termes agissant sur un champ qui est une donnée du problème, c'est-à-dire : $\nabla\left(\frac{1}{H_i}\right)$, $\left(\nabla\left(\frac{1}{H_i}\right)\frac{f_0}{H_i}\right)\frac{1}{H_i}$ et $\frac{f_0}{H_i^2}$, sont calculés dans l'espace physique avant d'être décomposés dans l'espace de Fourier.
Ci-dessous le calcul des termes impliquant des multiplications, tel que $U(x,y)\frac{\partial}{\partial x}q(x,y,t)$, est expliqué à l'aide d'un exemple. Pour simplifier, on suppose que $U(x,y)$ est contenu dans un seul mode de Fourier, $U(x,y) = \exp(j(mx+ny))$. Le résultat de la multiplication de U par q est alors :

$$U(x,y)\frac{\partial}{\partial x}q(x,y,t) = \sum_{(k,l,\omega)} k\hat{q}_{(k,l,\omega)}\exp(j((m+k)x+(n+l)y))$$

Pour projeter sur le mode de Fourier $\exp(j(ax+by+\omega t))$, il faut trouver le couple (k,l) qui satisfait $k=a-m$ et $l=b-n$. Ce calcul est effectué pour tous les nombres d'ondes de $U(x,y)$ mais, en pratique, les champs moyens variant sur des échelles assez grandes, on utilise seulement les fréquences les plus graves ce qui réduit significativement le nombre d'opérations à effectuer.
L'une des conséquences de la prise en compte d'un champ moyen (courant moyen ou topographie) variant horizontalement est le couplage horizontal et vertical des ondes, cet aspect sera discuté dans le paragraphe suivant.

3.3 Études dans des cadres idéalisés

Cette partie analyse l'effet des variations horizontales et verticales du courant moyen et de la topographie dans des cadres idéalisés. Le premier paragraphe traite de l'influence d'un champ moyen $U(z)$, dépendant uniquement de la profondeur, sur la structure verticale des ondes de Rossby. Le deuxième étudie le couplage zonal des ondes à l'aide d'une topographie sinusoïdale dans un modèle à deux couches. L'accent est mis sur l'influence de l'hypothèse des variations d'interfaces non négligeables par rapport aux hauteurs des couches introduite dans le paragraphe précédent. Dans le dernier paragraphe l'influence d'un courant moyen variant avec la latitude et la profondeur sur le couplage méridional et vertical est décrite.

3.3.1 Couplage vertical

Ce paragraphe étudie l'influence d'un courant moyen zonal avec une dépendance en z sur la structure verticale des ondes de Rossby. On s'intéresse ici uniquement au premier mode barocline puisque c'est sur ce mode que s'est concentré la majeure partie des études sur le sujet (par exemple Chelton et Schlax [1996], Killworth *et al.* [1997]). Le terme premier mode "pseudo-barocline" est utilisé, à partir de cette ligne, car le courant moyen modifie sa structure verticale qui peut ne plus ressembler à celle du premier mode barocline. Dans ce cas, comment choisissons-nous le premier mode pseudo-barocline ? Le problème aux valeurs propres donne autant de valeurs propres qu'il y a de niveaux sur la verticale, le premier mode pseudo-barocline est défini comme étant le mode possédant la deuxième plus grande valeur propre. Dans le cas d'un courant moyen zonal sans topographie et sans variations horizontales, les équations (3.3) se simplifient en :
dans la première couche :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\psi_1+\frac{f_0^2}{H_1}\frac{\psi_2-\psi_1}{g_1'}\right)+\left(\beta+\frac{f_0^2}{H_1}\left(\frac{U_1-U_2}{g_1'}\right)\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0 \tag{3.12}$$

dans la couche i :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_i\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\psi_i+\frac{f_0^2}{H_i}\left(\frac{\psi_{i-1}-\psi_i}{g_{i-1}'}-\frac{\psi_i-\psi_{i+1}}{g_i'}\right)\right)+ \\ \left(\beta+\frac{f_0^2}{H_1}\left(\frac{U_i-U_{i-1}}{g_{i-1}'}-\frac{U_{i+1}-U_i}{g_i'}\right)\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0 \tag{3.13}$$

dans la couche de fond :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_N\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\psi_N+\frac{f_0^2}{H_N}\frac{\psi_{N-1}-\psi_N}{g_{N-1}'}\right)+\left(\beta+\frac{f_0^2}{H_N}\left(\frac{U_N-U_{N-1}}{g_{N-1}'}\right)\right)\frac{\partial\psi_N}{\partial x}=0 \tag{3.14}$$

$U(z)$ est la vitesse zonale à la longitude 315 ° et la latitude 30 ° N extraite d'un atlas construit par Alain Colin de Verdière et Michel Ollitrault à partir des données ARGO (Ollitrault et

Colin de Verdière [2014]). Plus de détails sur les données et notre méthode de calcul des couches seront donnés dans la dernière partie. Le premier mode pseudo-barocline ainsi calculé est projeté sur les modes verticaux traditionnels et la variation de la proportion dans chaque mode en fonction du nombre d'onde k est reportée sur la figure (3.6). Le nombre d'onde méridional utilisé ici est fixe : $l = \frac{2\pi}{500}$ rad/km et la structure verticale est reproduite sur la partie droite de la figure (3.6). La figure montre que la structure verticale du premier mode

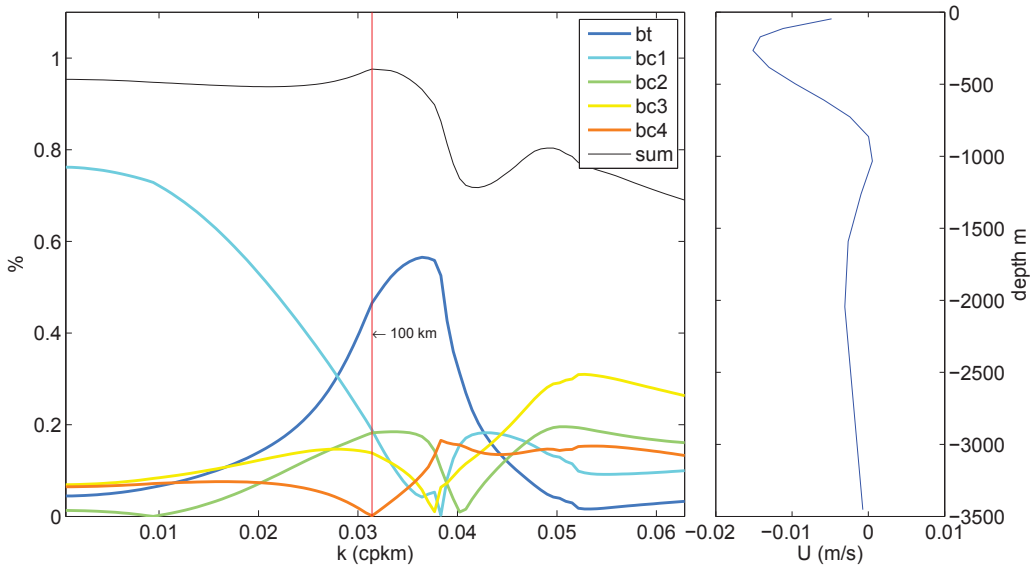

FIGURE *3.6 – À gauche : projection du premier mode pseudo-barocline sur les modes verticaux traditionnels en fonction du nombre d'onde k, $l = 6.10^{-3}$ rad/km. À droite : variation avec la profondeur du courant moyen zonal.*

pseudo-barocline est pratiquement entièrement contenue dans le premier mode barocline aux grandes longueurs d'ondes (mais pas complètement) : 80%. Le reste se répartit de manière égale entre le mode barotrope, les troisième et quatrième modes baroclines. Le pourcentage du premier mode pseudo-barocline dans le premier mode barocline diminue en même temps que la longueur d'onde, jusqu'à être dépassé par le mode barotrope pour des longueurs d'ondes légèrement supérieures à 100 km. Cela suggère que la structure verticale le long des relations de dispersion modifiées par le courant, par exemple celles montrées dans l'article de (Maharaj *et al.* [2007]) et reproduites sur la figure (3.2), évolue avec la longueur d'onde : pour des grandes longueurs d'ondes elle est effectivement contenue dans le premier mode barocline, mais devient plus barotrope aux échelles plus petites.

3.3.2 Influence d'une topographie zonale sur la propagation des ondes de Rossby

Dans ce paragraphe, on étudie l'influence d'une topographie sur les ondes libres dans un modèle à deux couches sans courant moyen.
Tailleux et McWilliams [2000] étudient la propagation des ondes de Rossby longues dans un modèle à deux couches avec une topographie méridionalement puis zonalement variable. Leur méthode consiste à dériver des solutions asymptotiques du problème. Ils montrent que l'ajout d'une topographie méridionalement variable augmente la vitesse de phase des ondes baroclines d'un facteur $\frac{H}{H_2}$ où H est la hauteur totale de l'océan et H_2 celle de la deuxième couche.
L'effet d'une topographie zonalement variable est plus compliquée : si les contours de l'anomalie de pression sont parallèles à $\frac{f}{H}$ alors l'énergie du mode barocline diminue, elle est transférée au mode barotrope. Si, au contraire, les contours ne sont pas alignés avec $\frac{f}{H}$, un transfert

d'énergie s'effectue du mode barotrope, forcé par le vent, vers le mode barocline et les vitesses de phase augmentent d'un facteur $\frac{H}{H_2}$ exactement comme pour une topographie méridionale. Ce mécanisme pourrait expliquer la création d'ondes de Rossby baroclines au-dessus d'une dorsale par conversion des mouvements barotropes forcés par le vent. Les auteurs insistent sur l'importance de la conversion d'énergie entre les modes verticaux induite par la topographie. Ils notent par ailleurs que l'approximation WKB ne peut pas reproduire cet effet. On s'intéresse ici aux modes propres d'un modèle à deux couches où une dorsale Gaussienne est incluse. Les équations dérivées ci-dessous sont équivalentes à celles utilisées dans Tailleux et McWilliams [2000] si l'approximation des ondes longues est relaxée.
Dans la première couche, la conservation de la vorticité potentielle donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi_1 + \frac{f_0^2}{H_1}\frac{\psi_2-\psi_1}{g_1'}\right) + \beta\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = 0 \tag{3.15}$$

et dans la couche de fond :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{H_2(x)}\left(\nabla^2\psi_2 + \frac{f_0^2}{H_2(x)}\frac{\psi_1-\psi_2}{g_1'}\right)\right) + \frac{\beta}{H_2(x)}\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_0}{H_2(x)}\right) = 0 \tag{3.16}$$

avec $H_2(x) = H2 - \text{topo}(x)$. Cette équation (3.16) sera comparée avec :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi_2 + \frac{f_0^2}{H_2}\frac{\psi_1-\psi_2}{g_1'}\right) + \beta\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{f_0}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\text{topo}(x)}{\partial x} = 0 \tag{3.17}$$

qui est l'équation QG classique, utilisant l'hypothèse $|\text{topo}(x)| << H_2$. Le calcul est effectué en respectant la description faite dans les paragraphes précédents. La résolution de ce problème donne N_kN_z vecteurs propres

$$\sum_{(k)} \hat{\psi}_i(k,z)\exp(j(kx+\omega_i t))$$

associés avec N_kN_z valeurs propres ω_i, où i est l'indice de la valeur propre. L'introduction d'une topographie variant avec la latitude dans les équations couple les ondes dans la direction zonale : les modes propres sont maintenant composés de plusieurs nombres d'ondes. Pour représenter les vecteurs propres, plusieurs choix s'offrent à nous. Le premier est de montrer la reconstruction dans l'espace physique de quelques modes (il y en a beaucoup trop pour pouvoir tous les représenter), ce qui a l'avantage d'être assez visuel mais le désavantage de ne pas donner de vue globale des modes propres. Le deuxième est de représenter les modes dans l'espace de Fourier dans le but d'obtenir un résultat équivalent aux courbes des relations de dispersion disponibles dans le cas d'un champ moyen nul. Pour ce faire, chaque mode propre possédant plusieurs nombres d'ondes, il faut choisir d'en dessiner seulement quelques-uns, ceux qui sont le plus proche du maximum de la norme $\max_k |\hat{\psi}_i(k,z)|$. On choisit dans un premier temps de montrer les nombres d'ondes qui satisfont $|\hat{\psi}_i(k,z)| > 0.8 \times \max_k |\hat{\psi}_i(k,z)|$. Cette méthode a l'avantage de montrer où se situent les modes dans l'espace de Fourier mais nécessite pour cela de faire un choix arbitraire (le 80%) pour définir la limite entre les modes qui sont montrés et ceux qui ne le sont pas.

Les deux couches du modèle ont des profondeurs égales $H1 = H2 = 2000$ m puisqu'il s'agit de la meilleure configuration pour étudier l'effet de la topographie [Flierl, 1978]. l, le nombre d'onde méridien, est constant et vaut $\frac{2\pi}{1000}$ rad/km et L_x la taille zonale du bassin vaut 8000 km. La figure (3.11) montre la relation de dispersion calculée avec une topographie gaussienne au centre du bassin, de la forme :

$$\text{topo}(x) = H_{\text{topo}}\exp\left(\left(\frac{x-x_0}{L_{\text{topo}}}\right)^2\right) \tag{3.18}$$

avec ici $H_{\text{topo}} = 1800$ m, $L_{\text{topo}} = 4000km$ et x_0 le centre du bassin. Pour les grandes longueurs d'ondes, des modes suivent la relation de dispersion obtenue en supposant que le mouvement de la couche de fond est nul : $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+\frac{f_0^2}{g'H_1}}$, en accord avec la plupart des articles (par exemple Tailleux et McWilliams [2000]) sur l'influence d'une forte topographie sur la vitesse des ondes de Rossby baroclines. Pour des longueurs d'ondes plus petites, des modes sont situés entre la courbe du premier mode barocline et celle du mode intensifié en surface, mais aussi entre le mode barotrope et le mode intensifié en surface. La présence de ces modes entre ces courbes suggère l'existence d'un couplage entre les modes barotropes et baroclines réduisant les vitesses de phase barotropes ou augmentant les vitesses de phase baroclines. Aux petites longueurs d'ondes, la topographie semble avoir moins d'influence.
Cela peut être expliqué à l'aide du nombre adimensionnel qui compare l'advection méridionale de vorticité planétaire à l'effet de la topographie : $R = \frac{f_0}{H_2\beta}\frac{l}{k}\frac{\partial \text{topo}}{\partial x}$. Quand $R << 1$ l'effet β domine celui de la topographie, R diminuant avec k, la topographie a moins d'effet sur les petites longueurs d'ondes.
Pour mieux comprendre les relations de dispersion obtenues sur la figure (3.11), on peut regarder successivement l'effet, sur les ondes de Rossby, d'une pente dirigée vers l'est puis vers l'ouest. Des propriétés des ondes modifiées par une pente dans un modèle à deux couches sont démontrées dans l'annexe D. D'après ces propriétés, lorsque la pente est croissante vers l'est et que le nombre d'onde méridional est positif, les fréquences modifiées sont inférieures aux fréquences sur le fond plat et l'une des solutions, un mode barotrope modifié, est situé entre le mode barotrope $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2}$ et le mode barocline intensifié en surface $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+F_1}$. La deuxième solution est un mode topographique, piégé dans la couche de fond si la pente est importante, et donc probablement invisible en surface. Lorsque la pente est croissante vers l'ouest, les fréquences des modes modifiés sont supérieures aux fréquences sur le fond plat (toujours si $l > 0$), un mode barocline modifié a sa courbe de relation de dispersion située entre le mode barolcine $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+F_1+F_2}$ et $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+F_1}$. La deuxième solution est aussi un mode topographique probablement peu visible en surface (ces modes ne sont pas visibles sur la figure (3.11) parce que leurs fréquences (en valeur absolue) sont trop grandes). Lorsque la pente augmente, ces deux modes, barotrope et barocline modifiés, se rapprochent de $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+F_1}$. Si la topographie gaussienne est approximée par deux pentes de signes opposés, alors la figure (3.11) s'explique bien grâce aux propriétés dérivées ci-dessus. La courbe sous $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+F_1}$ est un mode barocline modifié par la partie Est de la dorsale alors que la courbe située au dessus est un mode barotrope modifié par la partie Ouest de la dorsale.

Lorsque la hauteur de la topographie augmente, le contenu spectral des modes devient de plus en plus riche jusqu'à recouvrir une large partie de l'espace (k, ω). Au contraire, en utilisant l'équation (3.17) et en faisant tendre la topographie vers de très grandes valeurs (qui ne sont donc pas réalistes puisqu'elles dépassent la hauteur de la deuxième couche), les modes se regroupent autour de la courbe $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+\frac{f_0^2}{g'H_1}}$ (voir figure (3.8))

La figure (3.9) montre la structure spatiale du mode le plus intensifié en surface pour une topographie de 400 m de haut. Le mode a une amplitude quasiment nulle en dehors de la partie ouest de la topographie, et les signes des fonctions courant des deux couches sont opposés. La figure (3.10) montre que sa projection sur les modes verticaux traditionnels varie avec la longitude, ce qui est aussi le cas de tous les autres modes calculés ici. Ce mode piégé sur la topographie est un exemple typique d'un cas où le changement de milieu dans lequel l'onde se propage modifie considérablement la forme de la solution. On s'attarde donc sur la dynamique de ce mode dans le paragraphe ci-dessous.

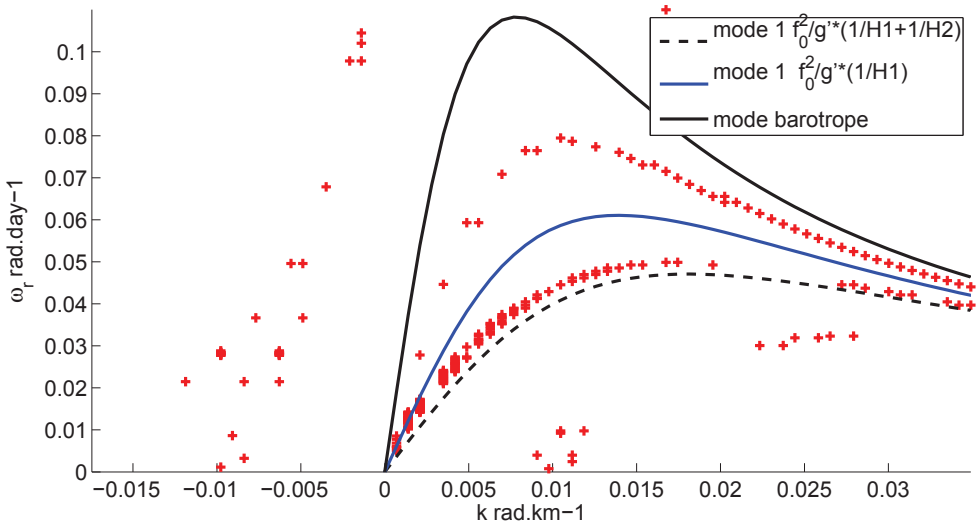

FIGURE *3.7 – Croix rouges : relations de dispersion calculées grâce à l'équation (3.16) dans un modèle à deux couches en présence d'une topographie gaussienne de 1800 mètres de hauteur. Les courbes noires et la courbe bleue montrent les relations de dispersion du mode barotrope, du mode barocline et du mode barocline intensifié en surface.*

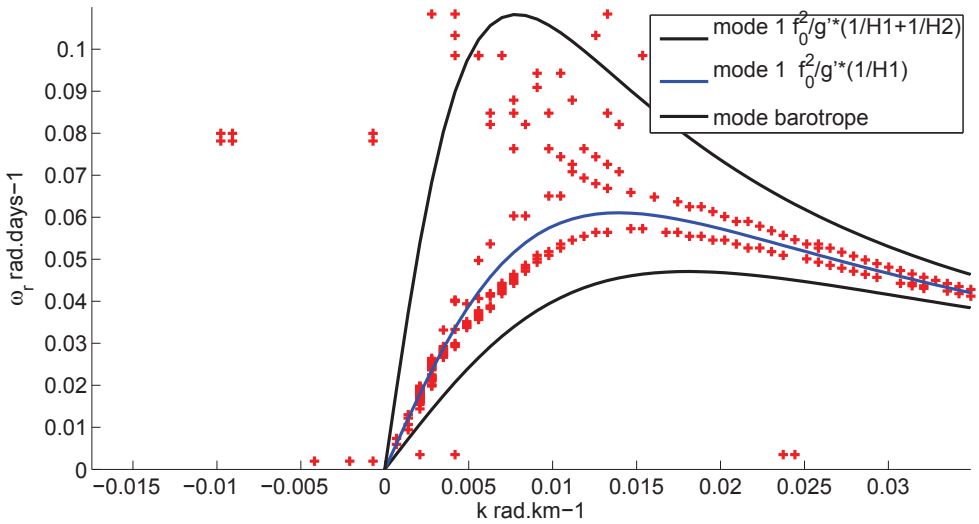

FIGURE *3.8 – Croix rouges : relations de dispersion calculées grâce à l'équation (3.17) dans un modèle à deux couches en présence d'une topographie gaussienne de 4000 mètres de hauteur. Les courbes noires et la courbe bleue montrent les relations de dispersion du mode barotrope, du mode barocline et du mode barocline intensifié en surface.*

Ondes de Rossby piégées sur une topographie en pente

Le but de ce paragraphe est de comprendre le mécanisme du mode décrit par la figure (3.9). Wang et Koblinsky [1994] calculent la transmission de l'énergie par une onde de Rossby lorsqu'une topographie en marche d'escalier se situe sur son parcours. On s'inspire de leur méthode pour calculer l'interaction d'ondes de Rossby avec un fond en pente dans diverses configurations avec un modèle à une ou deux couches. La topographie du modèle utilisé ci-dessous est plate sauf entre 0 et x_0 où une pente croissante vers l'est modifie les caractéristiques des ondes

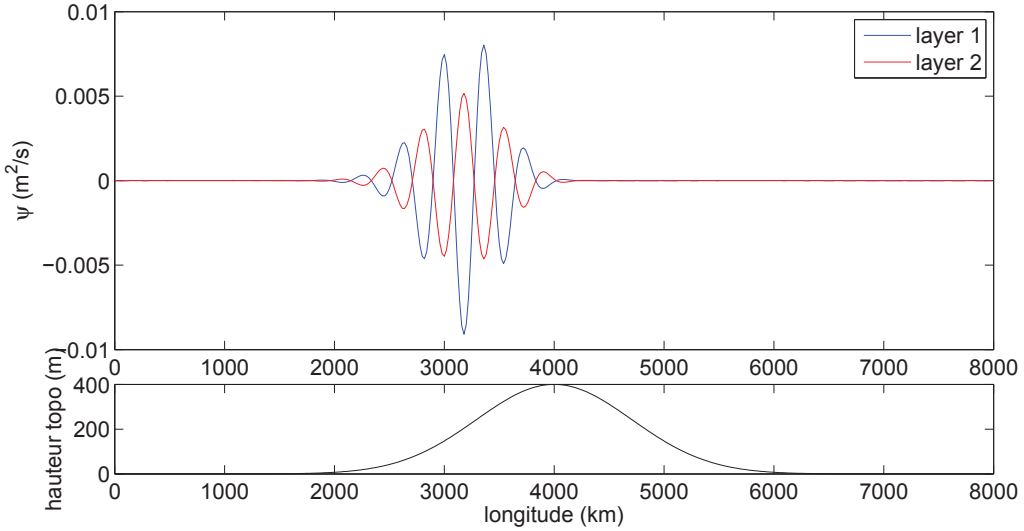

FIGURE *3.9 – En haut : partie réelle de la structure spatiale du mode le plus intensifié en surface. En bleu, la fonction courant dans la première couche (multipliée par* $\frac{H1}{H1+H2}$*), en rouge celle de la deuxième couche (multipliée par* $\frac{H2}{H1+H2}$*). En bas : la topographie utilisée pour ce calcul.*

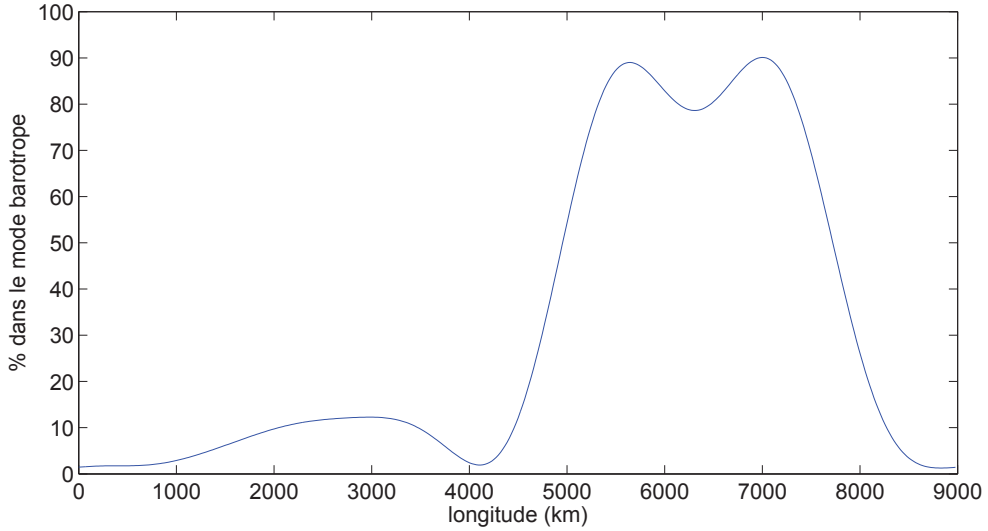

FIGURE *3.10 – Pourcentage du mode le plus intensifié en surface dans le mode barotrope (le reste est dans le premier mode barocline) en fonction de la longitude (km)*

de Rossby :

$$\begin{aligned} h(x) &= 0, x < 0 \\ h(x) &= \alpha x, 0 \leq x < x_0 \\ h(x) &= \alpha x_0, x_0 \leq x \end{aligned} \tag{3.19}$$

On choisit d'utiliser une seule pente (alors qu'une Gaussienne est a priori mieux représentée par deux pentes) parce que le mode de la figure (3.9) semble se trouver au-dessus d'un seul des deux côtés de la topographie.
Les ondes piégées sur une telle topographie ont déjà été étudiées par Longuet-Higgins [1968], sans effet β et pour un océan homogène. L'auteur montre que ces ondes existent lorsque la condition nécessaire suivante, sur leurs périodes T, est vérifiée : $T > \frac{2\pi}{f}$, d'autres conditions,

plus fines, dépendant de la valeur de la pente sont ensuite dérivées. Sous ces conditions, le nombre de modes piégés est infini. Des expériences en cuves [Caldwell et Longuet-Higgins, 1971] ont pu reproduire ces ondes piégées, appellées “double Kelvin waves”. Cette configuration (fond plat, pente, fond plat) est retrouvée dans un article de Rhines [1969], toujours pour un fluide homogène et sans effet β. On montre ci-dessous que l'effet β impose une limite supérieure sur la période des ondes piégées et modifie la limite inférieure, ce qui n'autorise qu'un nombre fini de modes (très peu pour les paramètres choisis ici). Ces deux études [Longuet-Higgins, 1968, Rhines, 1969] étant réalisées pour un océan homogène, on ajoute l'effet d'une stratification, grâce à un modèle à deux couches, par la suite.
L'équation pour une seule couche en présence de topographie est :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi\right) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{f_0}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}\alpha_x = 0 \tag{3.20}$$

avec pour relation de dispersion $\omega = \frac{\beta k - \alpha_x \frac{f_0}{H} l}{k^2+l^2}$. Les fréquences maximum et minimum autorisées par ces ondes sont :

$$w_{\max} = \frac{\sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2\right)l^2}}{l^2 + \frac{\left(\alpha l + \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)l^2}\right)^2}{\beta^2}} \tag{3.21}$$

et le minimum :

$$w_{\min} = -\frac{\beta^2\sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2\right)l^2}}{2l\left(\alpha^2 l + \beta^2 l - \alpha\sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2\right)l^2}\right)} \tag{3.22}$$

ces relations se simplifient en $w_{\max} = \frac{\beta}{2l}$ et $w_{\min} = -\frac{\beta}{2l}$ lorsque le fond est plat. Les relations de dispersion sur la pente et en dehors de la pente se trouvent sur la figure (3.11). Les fréquences des modes avec topographie sont plus faibles que celles avec fond plat (ce qui est facilement compréhensible en regardant la relation de dispersion de ces modes). Sur cette même figure, la ligne horizontale représente les fréquences qui vont nous intéresser ici : elles sont inférieures au minimum autorisé sans topographie mais autorisées en sa présence.
On voit donc que pour certaines valeurs de la fréquence ω, une onde de Rossby peut exister

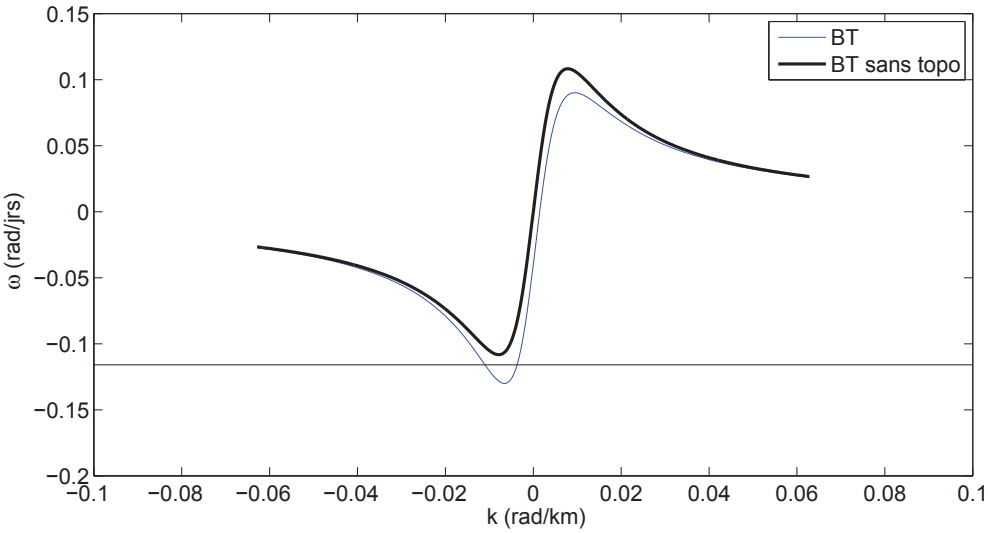

FIGURE *3.11 – Relation de dispersion du mode barotrope ($l \neq 0$) avec (courbe bleue) et sans topographie (courbe noire). Le trait horizontal noir représente la fréquence considérée.*

sur la pente mais pas sur le fond plat. Ce n'est pas le cas lorsque $\omega > 0$ (pour $l > 0$ et $\alpha_x > 0$) : les ondes qui existent sur la topographie existent toujours sur le fond plat. Pour

une fréquence donnée, la solution sur la topographie consiste en une onde courte et une onde longue, alors que sur le fond plat, une onde atténuée exponentiellement apparait de chaque côté de la topographie. Il faut deux conditions à chaque limite en $x = 0$ ou en $x = x_0$, la première est la continuité de la pression :

$$[\psi_i]_{x_0^-}^{x_0^+} = 0 \tag{3.23}$$

où i est le numéro de la couche. La deuxième condition s'obtient en intégrant zonalement l'équation de la vorticité potentielle :

$$\left[\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t \partial x}\right]_{x_0^-}^{x_0^+} = 0 \tag{3.24}$$

on a utilisé ici que $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx \to 0$ pour $\delta \to 0$ et que $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\frac{dg}{dx}(x)dx \to f(0)\left(g(0+) - g(0-)\right)$ pour $\delta \to 0$ si f est continue en 0.
Sur la pente la fonction courant est :

$$\psi_m = A\exp\left(k_l x + ly + \omega t\right) + B\exp\left(k_c x + ly + \omega t\right) \tag{3.25}$$

avec $k_c = -\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha l\omega - 4l^2\omega^2}}{2\omega}$ $k_l = -\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha l\omega - 4l^2\omega^2}}{2\omega}$ $(\omega < 0)$, à l'Ouest :

$$\psi_W = W\exp\left(k_w x + ly + \omega t\right) \tag{3.26}$$

avec $k_w = \frac{\beta}{2\omega} - \frac{\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 - 4l^2}}{2}$ et, à l'Est :

$$\psi_E = E\exp\left(k_e x + ly + \omega t\right) \tag{3.27}$$

avec $k_e = \frac{\beta}{2\omega} + \frac{\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 - 4l^2}}{2}$. k_e et k_w ont une partie imaginaire puisque ω est plus petit que $\omega_{\min}$ sur fond plat. Les quatre conditions aux limites en 0 et x_0 permettent d'obtenir un système linéaire du type :

$$M\begin{pmatrix} W \\ A \\ B \\ E \end{pmatrix} = 0 \tag{3.28}$$

Une solution existe uniquement si le déterminant est nul. Le déterminant nul donne les valeurs de ω possibles, $\det(M)$ est dessiné en fonction de ω sur la figure (3.12) pour une pente de 100 mètres de hauteur sur une longueur de 1000 km. Les deux lignes verticales représentent la fréquence minimum en présence d'une topographie (ligne rouge) et sans topographie (ligne bleue), il y a trois solutions entre ces deux limites. La fonction courant calculée pour l'une de ces fréquences est dessinée sur la figure (3.13). Il s'agit bien d'une onde piégée sur la topographie puisque son amplitude est maximum au-dessus de la pente et décroit exponentiellement lorsque la longitude s'en éloigne. Les solutions de $\det(M) = 0$ dépendent bien entendu de la pente, Longuet-Higgins [1968], par exemple figure 5, regarde l'effet de la variation de cette pente (dans le cadre de ses hypothèses) sur les fréquences. Si $\omega > 0$ et $l > 0$, ce type de mouvement ne peut pas exister avec une pente croissante vers l'est puisque une telle pente diminue les fréquences possibles : la fréquence maximum sur la topographie est inférieure à la fréquence maximum sans topographie. En revanche, si la pente est croissante vers l'ouest (ce qui équivaut à changer le signe de l) alors des ondes piégées sur la topographie existent. C'est pour cette raison que l'on peut se permettre, dans ce cas, d'approximer la dorsale Gaussienne par une seule pente : les ondes piégées ne peuvent pas exister sur les deux pentes en même temps.

Flux d'énergie sur la pente

Au dessus de la pente, l'amplitude de l'onde courte est toujours égale à celle de l'onde longue, par conséquent les flux d'énergie vers l'ouest et vers l'est sont égaux (Pedlosky [1982] montre dans le cas d'un fond plat, qu'une onde courte et une onde longue de même fréquence et amplitude ont le même flux d'énergie à la page 123-124, on peut facilement démontrer la même chose dans un modèle à une couche lorsque le fond est en pente). L'énergie est donc conservée entre l'onde longue et l'onde courte : elle reste sur la topographie. Le fond en pente agit donc comme un guide d'onde, transportant l'énergie méridionalement. La vitesse de groupe méridionale renseigne sur la direction de propagation de l'énergie :

$$c_{gy} = -\frac{-\frac{f_0\alpha}{H}(k^2 - l^2) - 2\beta kl}{(k^2 + l^2)^2} \tag{3.29}$$

Dans le cas étudié ici, l'effet de la pente étant négligeable par rapport à celui de l'effet β, le signe de c_{gy} dépend du signe de kl qui est ici négatif. L'énergie se propage donc vers le sud.

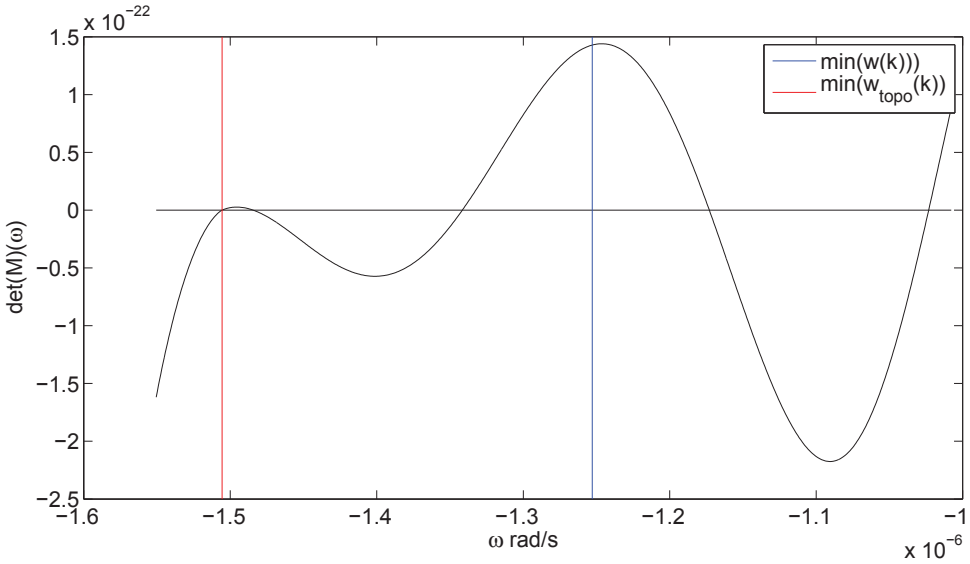

FIGURE *3.12 – déterminant de M en fonction de ω pour une pente de 100 m sur 1000 km*

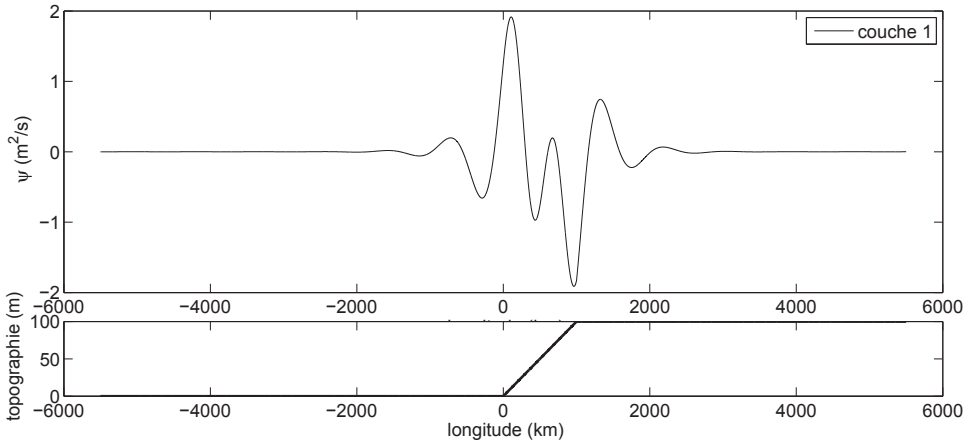

FIGURE *3.13 – En haut : amplitude zonale d'un mode piégé au dessus de la pente, la fréquence de ce mode annule le déterminant montré sur la figure (3.12). En bas : topographie associée à ce mode.*

Réflexion à l'interface entre la pente et le fond plat

Lors de la réflexion d'une onde longue sur une frontière solide ouest, (voir par exemple Pedlosky [1982]) la totalité de l'énergie est réfléchie sous la forme d'une onde de Rossby courte, dont l'amplitude est la même que celle de l'onde incidente mais dont la phase est renversée de 180°. Dans ce cas, l'amplitude et la phase de l'onde réfléchie sont donc indépendantes de la fréquence de l'onde incidente.
Ce n'est plus le cas lorsque la frontière est remplacée par la limite entre un fond plat et une pente. Imaginons qu'une onde longue se propage vers l'ouest au dessus d'une pente. Lorsqu'elle rencontre l'interface qui sépare la pente du fond plat, deux ondes sont créées. La première, l'onde transmise est atténuée exponentiellement puisque la fréquence considérée est inférieure au minimum autorisé sur fond plat. La deuxième, l'onde réfléchie, est une onde de Rossby courte se déplaçant vers l'est au dessus de la pente. Comment varient l'amplitude et la phase de l'onde barotrope piégée le long de la frontière et de l'onde barotrope courte réfléchie en fonction de la fréquence ? La figure (3.14) répond à cette question en montrant leurs variations pour ω variant entre la fréquence minimum en présence de topographie et sans topographie.

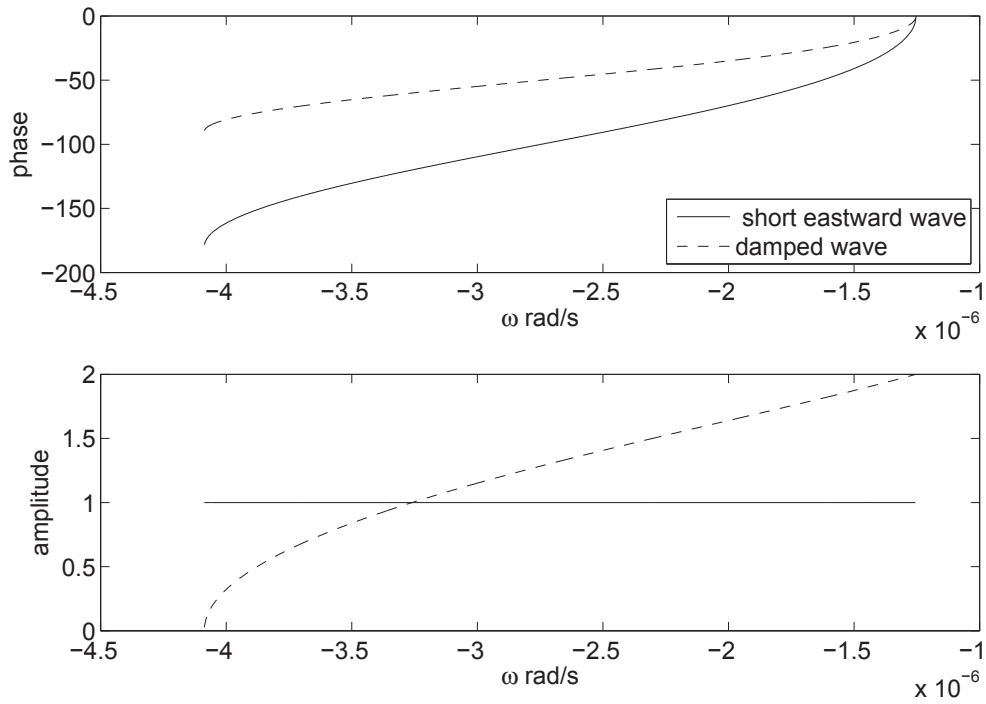

FIGURE *3.14 – Phase (en haut) et amplitude (en bas) de l'onde barotrope piégée à l'Ouest de la topographie (pointillés) et de l'onde barotrope courte réfléchie (ligne noire) en fonction de la fréquence ω*

Calcul dans un modèle à deux couches

On peut effectuer le même type de calcul dans un modèle à deux couches et retrouver les modes observés sur la figure (3.9). Ici la topographie est choisie plate sur les 5000 premiers kilomètres, de pente 100 m/1000 km pendant 2000 km puis plate à nouveau. En observant les relations de dispersion des modes barocline et barotrope avec et sans topographie sur la figure (3.15), on se rend compte que l'équivalent de la configuration précédente avec une onde barocline piégée sur la topographie et pas d'onde sur le fond plat n'est pas possible : des ondes barotropes seront toujours excitées au-dessus du fond plat. En revanche, des ondes barotropes

piégées sur la topographie peuvent toujours exister.
On s'intéresse ci-dessous aux configurations où les modes baroclines existent uniquement sur la topographie et aux ondes barotropes qui les accompagnent. Sur la topographie, quatre ondes

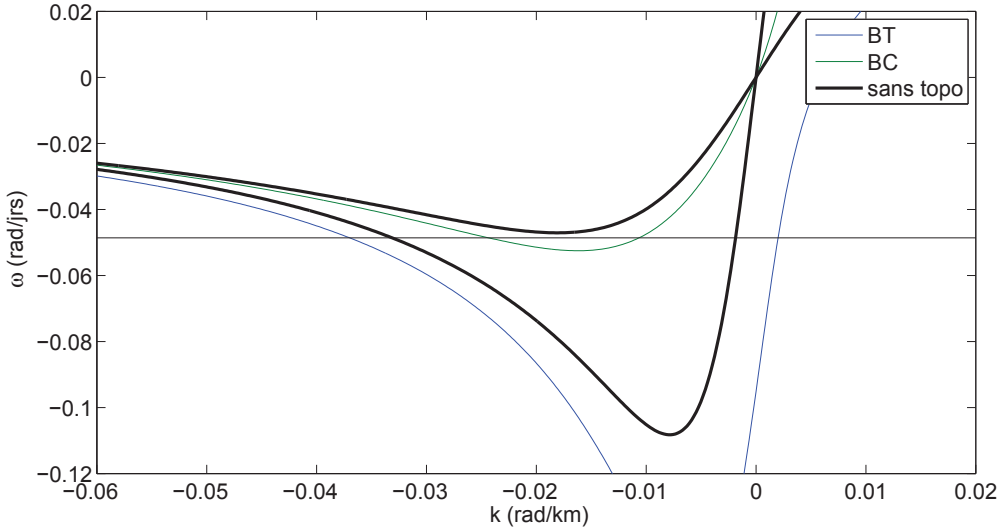

FIGURE *3.15 – Relation de dispersion des modes barotrope et barocline dans un modèle à deux couches avec et sans topographie. La topographie est plate sur les 5000 premiers kilomètres, en pente (100m/1000km) sur 2000 km puis plate à nouveau.*

sont présentes : deux ondes barotropes longues et courtes aux cotés de deux ondes baroclines longues et courtes :

$$\begin{aligned}\psi_{\text{pente}} = A_{\text{BT}} F^*_{\text{BT}}(z) \exp\left(i(k^*_{\text{BT}} x + ly + \omega t)\right) + B_{\text{BT}} F_{\text{BT}}(z) \exp\left(i(k_{\text{BT}} x + ly + \omega t)\right) + \\ C_{\text{BC}} F^*_{\text{BC}}(z) \exp\left(i(k^*_{\text{BC}} x + ly + \omega t)\right) + D_{\text{BC}} F_{\text{BC}}(z) \exp\left(i(k_{\text{BC}} x + ly + \omega t)\right)\end{aligned} \tag{3.30}$$

avec k^*_{BT}, k_{BT} les nombres d'onde zonaux de l'onde barotrope courte et longue sur la pente puis k^*_{BC}, k_{BC} ceux de l'onde barocline. Ces différents nombres d'ondes sont reliés à la fréquence ω par les formules indiquées dans l'annexe (B) et sont obtenues en inversant les relations de dispersion en présence d'une pente. Les $F^*_{\text{BT}}(z)$, $F^*_{\text{BT}}(z)$, $F^*_{\text{BC}}(z)$, $F^*_{\text{BC}}(z)$ sont les structures verticales des modes sur la pente, elles dépendent des nombres d'ondes auxquels elles sont associées de la manière suivante :

$$F^*_{\text{BT}}(z) = \left(\frac{1}{-\frac{1}{\text{F}} - (k^*_{\text{BT}})^2 - l^2 + \frac{\beta k}{\omega} - \text{F}} \right) \tag{3.31}$$

$$F_{\text{BT}}(z) = \left(\frac{1}{-\frac{1}{\text{F}} - (k_{\text{BT}})^2 - l^2 + \frac{\beta k}{\omega} - \text{F}} \right) \tag{3.32}$$

et pour les modes baroclines :

$$F^*_{\text{BC}}(z) = \left(\frac{1}{-\frac{1}{\text{F}} - (k^*_{\text{BC}})^2 - l^2 + \frac{\beta k}{\omega} - \text{F}} \right) \tag{3.33}$$

$$F_{\text{BC}}(z) = \left(\frac{1}{-\frac{1}{\text{F}} - (k_{\text{BC}})^2 - l^2 + \frac{\beta k}{\omega} - \text{F}} \right) \tag{3.34}$$

Avec $F_1 = F_2 = F = \frac{f_0^2}{g'H}$, et $H_1 = H_2 = H = 2000$ m l'épaisseur des deux couches.
Au-dessus d'un fond plat les structures verticales sont indépendantes du nombre d'onde et

valent pour le mode barotrope $F^p_{\mathrm{BT}}(z) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et pour le mode barocline $F^p_{\mathrm{BC}}(z) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Toutes les structures verticales calculées ici sont ensuite normalisées grâce au produit scalaire :

$$\mathrm{proj}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = (H_1 x_1 y_1) + H_2 x_2 y_2)\,/(H_1 + H_2) \tag{3.35}$$

Les différentes configurations possibles à l'Ouest et à l'Est sont résumées sur la figure (3.16). Il y en a quatre : la première transporte l'énergie vers l'est sous forme d'onde courtes, la deuxième vers l'ouest sous forme d'ondes longues et les deux dernières nécessitent une divergence ou une convergence de l'énergie zonalement et ne sont donc pas réalistes physiquement (de plus il est possible de montrer que le système n'admet pas de solution sous cette configuration).

La première configuration de la figure (3.16) est présentée ci-dessous. Au-dessus du fond plat,

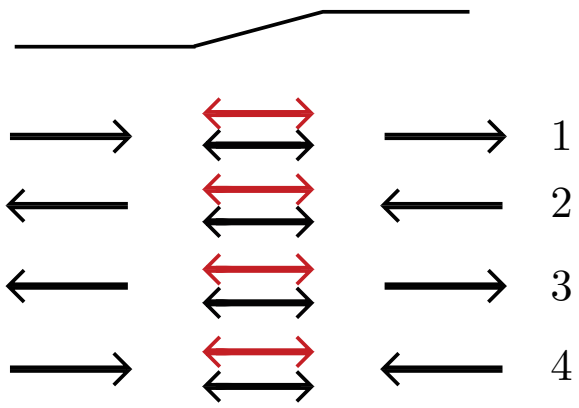

FIGURE *3.16 – En rouge, le sens de propagation de l'énergie des ondes baroclines, en noir, des ondes barotropes. à gauche, les flèches représentent le sens de propagation des ondes barotropes à l'Ouest de la topographie, au milieu, au-dessus de la topographie et à droite à l'Est de la topographie. Pour la topographie étudiée, lorsque la flèche est dirigée vers la gauche les ondes sont longues, lorsqu'elle est vers la droite les ondes sont courtes. Les quatre possibilités sont numérotées sur la droite. Les troisième et quatrième cas impliquent respectivement une convergence et une divergence de l'énergie et ne sont donc pas réalistes.*

l'énergie est transportée vers l'ouest sous la forme d'ondes longues :

$$\psi_{\mathrm{ouest}} = O_{\mathrm{BT}} F^p_{\mathrm{BT}}(z) \exp\left(i(k^{*p}_{\mathrm{BT}} x + ly + \omega t)\right) + O_{\mathrm{BC}} F^p_{\mathrm{BC}}(z) \exp\left(i(k^*_{\mathrm{BC}} x + ly + \omega t)\right) \tag{3.36}$$

$$\psi_{\mathrm{est}} = E_{\mathrm{BT}} F^p_{\mathrm{BT}}(z) \exp\left(i(k^{*p}_{\mathrm{BT}} x + ly + \omega t)\right) + E_{\mathrm{BC}} F^p_{\mathrm{BC}}(z) \exp\left(i(k_{\mathrm{BC}} x + ly + \omega t)\right) \tag{3.37}$$

avec :

$$k^{*p}_{\mathrm{BT}} = \frac{\beta}{2\omega} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 - 4l^2}$$

$$k^*_{\mathrm{BC}} = \frac{\beta}{\omega} - i\sqrt{-\left(\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 - 4(l^2 + F_1 + F_2)\right)}$$

et :

$$k_{\mathrm{BC}} = \frac{\beta}{\omega} + i\sqrt{-\left(\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 - 4(l^2 + F_1 + F_2)\right)}$$

En résolvant, comme dans le paragraphe précédent, le système linéaire associé à ces ondes :

$$M \begin{pmatrix} O_{\mathrm{BT}} \\ O_{\mathrm{BC}} \\ A_{\mathrm{BT}} \\ B_{\mathrm{BT}} \\ C_{\mathrm{BC}} \\ D_{\mathrm{BC}} \\ E_{\mathrm{BT}} \\ E_{\mathrm{BC}} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.38}$$

on obtient les valeurs possibles de ω montrées sur la figure (3.17) et la structure spatiale de la solution figure (3.18). Sur la pente, les ondes baroclines dominent le signal mais décroissent exponentiellement vers le fond plat. L'inclusion d'un fond en pente modifie donc le spectre de l'onde le long de son parcours mais aussi sa structure verticale qui est entièrement barotrope sur le fond plat et très barocline sur le fond en pente.

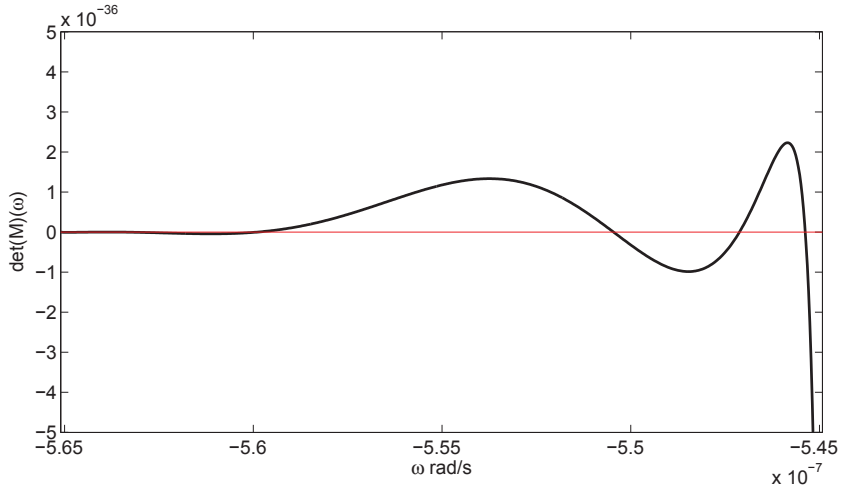

FIGURE *3.17 – En noir, le déterminant associé au système linéaire (3.38), en rouge la ligne det(M)=0. Bien que ce soit difficilement visible sur cette figure, il y a 6 solutions sur l'intervalle considéré.*

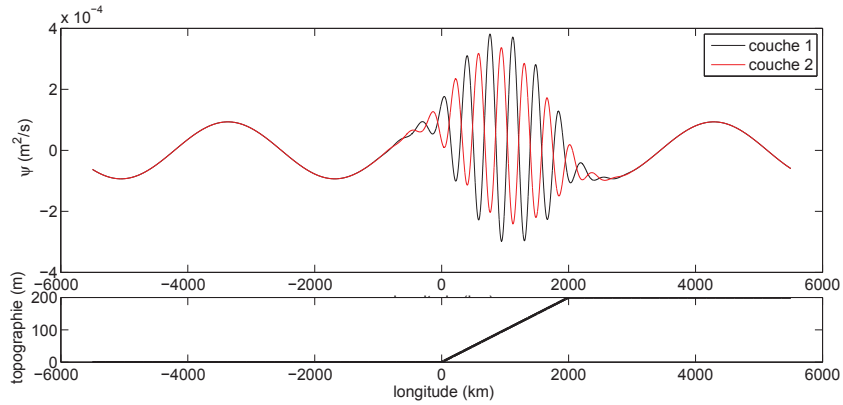

FIGURE *3.18 – Structure spatiale de la solution dans le cas où les ondes barotropes sur le fond plat transportent l'énergie vers l'ouest. En noir la fonction courant dans la première couche, en rouge dans la deuxième. La topographie est dessinée sur le graphique du bas.*

Reflection totale d'une onde barotrope courte

Ce paragraphe décrit la réflexion totale d'une onde courte barotrope par la topographie en pente, avec la création sur la topographie de deux ondes baroclines courte et longue. La solution au-dessus de la pente est toujours la même (3.30), en revanche à l'Ouest sur le fond plat, il y a cette fois trois ondes : deux ondes barotropes courte et longue et une onde barocline piégée près de la topographie. La solution au-dessus de cette zone est alors :

$$\begin{aligned}\psi_{\text{ouest}} = O^*_{\text{BT}} F^p_{\text{BT}}(z) \exp\left(i(k^{*p}_{\text{BT}} x + ly + \omega t)\right) + O_{\text{BT}} F^p_{\text{BT}}(z) \exp\left(i(k^p_{\text{BT}} x + ly + \omega t)\right) + \\ O_{\text{BC}} F^p_{\text{BC}}(z) \exp\left(i(k^*_{\text{BC}} x + ly + \omega t)\right)\end{aligned} \tag{3.39}$$

À l'est l'amplitude de l'onde barotrope est nulle : il n'y a pas de transmission. Par conséquent, il ne reste plus que l'onde barocline piégée près de la topographie :

$$\psi_{\text{est}} = E_{\text{BC}} F^p_{\text{BC}}(z) \exp\left(i(k_{\text{BC}} x + ly + \omega t)\right) \tag{3.40}$$

Le déterminant nul du système linéaire associé donne les valeurs possibles pour ω, l'une des solutions est montrée sur la figure (3.19). À l'Ouest, sur le fond plat, une onde courte barotrope transporte l'énergie vers l'est alors qu'une onde longue barotrope la transporte vers l'ouest. Les amplitudes de ces deux ondes étant les mêmes, les flux d'énergie vers l'est et vers l'ouest sont égaux. Sur la topographie, l'amplitude des ondes baroclines dépasse largement celle des ondes barotropes. Ces dernières sont complètement réfléchies à l'interface Est entre le fond plat et la pente. Sur le fond plat, le flux d'énergie vers l'est est égal à celui dirigé vers l'ouest. Sur la pente, le flux d'énergie pour une onde $\psi = AG(z) \exp\left(i(kx + ly + \omega t)\right)$ est :

$$\text{Flux} = \frac{A^2}{4} \begin{pmatrix} -k\omega + \frac{\beta}{2} \\ -l\omega - \frac{\alpha f_0}{2H_2} G(2)^2 \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

où la première dimension est dans la direction zonale ($-\vec{i}$ car on a choisi la convention $+\omega$) et la deuxième dans la direction méridionale ($-\vec{j}$). Cette formule permet de calculer le flux d'énergie sur la pente. De la même manière que sur le fond plat, le flux est/ouest est nul, ce qui confirme que l'onde est bien réfléchie. Si l'on s'intéresse uniquement au flux vers l'est (ou au flux vers l'ouest), on montre que le flux sur le fond plat est largement inférieur (14× zonalement 50× méridionalement) au flux sur la pente (constitué par l'onde barotrope courte et l'onde barocline courte). De plus, le flux de l'onde barocline sur la pente est beaucoup plus important que celui du mode barotrope. Ce résultat suggère que lors de la mise en place de ce mode (à t=0 une onde barotrope courte part de la frontière Est), il y a dans un premier temps une accumulation de l'énergie sur la pente, due à une transmission réduite à l'Est (et donc à une convergence de l'énergie au centre). Ce phénomène continue jusqu'à ce que l'énergie accumulée soit suffisante pour réfléchir entièrement l'onde barotrope courte sous la forme d'une onde barotrope longue à l'Ouest. Le flux d'énergie méridional est dirigé vers le sud partout, mais de manière beaucoup plus forte au-dessus de la pente. La topographie pourrait donc constituer une zone où le transport méridional d'énergie serait particulièrement important. Du fait de la symétrie du problème, ce résultat est reproductible pour une onde barotrope longue partant de la frontière Est.
Ce paragraphe a illustré comment un simple changement de pente dans la topographie est capable de modifier complètement la forme de la solution. Dans le paragraphe suivant, nous revenons au calcul d'une topographie Gaussienne dans le but d'illustrer la différence entre les équations (3.16) et (3.17) c'est-à-dire avec ou sans variations d'épaisseur dans la couche de fond.

Effet de l'utilisation d'une couche à profondeur variable

Pour comparer l'effet de l'utilisation de l'équation (3.16) ou (3.17) dans la deuxième couche, c'est-à-dire de l'influence de l'hypothèse $|\text{topo}(x, y)| << H_2$, on calcule l'effet de la topographie

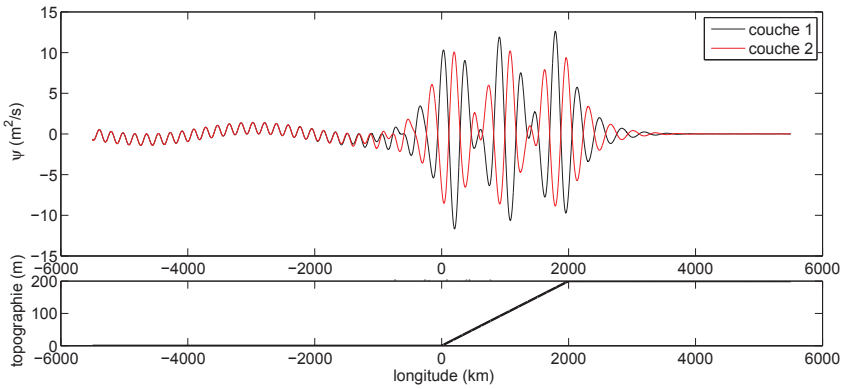

FIGURE *3.19 – Structure spatiale de la solution dans le cas où une onde barotrope courte est entièrement réfléchie par la topographie. En noir la fonction courant dans la première couche, en rouge dans la deuxième. La topographie est dessinée sur le graphique du bas.*

sur l'intensification en surface pour différentes valeurs de H_{topo}. L'intensification en surface est rationalisée par le calcul du rapport de l'énergie cinétique de la couche 1 sur celle de la couche 2. Le résultat est montré pour les deux équations sur la figure (3.20). Les différences entre les deux équations apparaissent pour une topographie supérieure à environ 1200 mètres. L'erreur faite lors de l'hypothèse topo $<< H_2$ est de l'ordre de $\left(\frac{|\text{topo}|}{H_2}\right)^2$ (lorsque x est proche de 0, $\frac{1}{1-x} \sim 1 + x + O(x^2)$). Cette figure montre aussi que l'intensification en surface augmente avec la hauteur de la topographie, bien que, dans le cas où l'épaisseur de la deuxième couche est variable, elle diminue brusquement à partir de 1800 mètres. On s'attend en effet à un changement de comportement drastique de la solution lorsque l'épaisseur de la couche se rapproche de 0 au niveau de la topographie puisque la couche inférieure se rapproche alors d'un bassin séparé en deux parties.

Ce calcul montre l'intérêt de l'utilisation d'une équation avec une épaisseur de couche variable dans le cas d'une topographie supérieure à environ la moitié de la hauteur de la couche. On s'attend à ce que les variations d'épaisseurs de couches jouent un rôle important proche de la surface, là où les variations de profondeur des interfaces sont de l'ordre des épaisseurs. L'effet d'une topographie zonale est de coupler zonalement et verticalement les ondes entre elles de sorte que les modes propres du système sont composés de différentes longueurs d'ondes et ont une structure verticale mixte entre le mode barotrope et le mode barocline. Plus la topographie est importante, plus des modes intensifiés en surface apparaissent. Ces modes sont associés à des fréquences plus élevées que le premier mode barocline sans topographie et tendent à se rapprocher de la courbe $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+\frac{f_0^2}{g'H_1}}$. Au contraire, les modes pseudo-barotropes voient leurs fréquences diminuer et se rapprocher de cette même courbe. Nous avons de plus montré que les modes piégés au-dessus d'une topographie Gaussienne pouvaient être expliqués simplement grâce à un fond en pente. En effet, les ondes de Rossby ne peuvent exister que pour une gamme de fréquences bien définie. L'inclusion d'un champ tel qu'une topographie en pente modifie les caractéristiques de la gamme de fréquences acceptées. Si ce champ est variable horizontalement, il peut donc exister des zones où certaines fréquences d'ondes de Rossby sont admises alors qu'elles ne le sont pas ailleurs. C'est ce principe qui est à l'oeuvre dans l'existence des ondes piégées sur la topographie. Pour des fréquences négatives et une pente croissante vers l'est, la fréquence minimum autorisée sur la pente est inférieure à celle autorisée sur un fond plat de sorte qu'aux fréquences inférieures au minimum du fond plat, des ondes se propagent sur la pente alors que la réponse sur le fond plat est constituée d'ondes exponentiellement atténuées. Que se passe t-il lorsque la stratification est continue sur la verticale ?

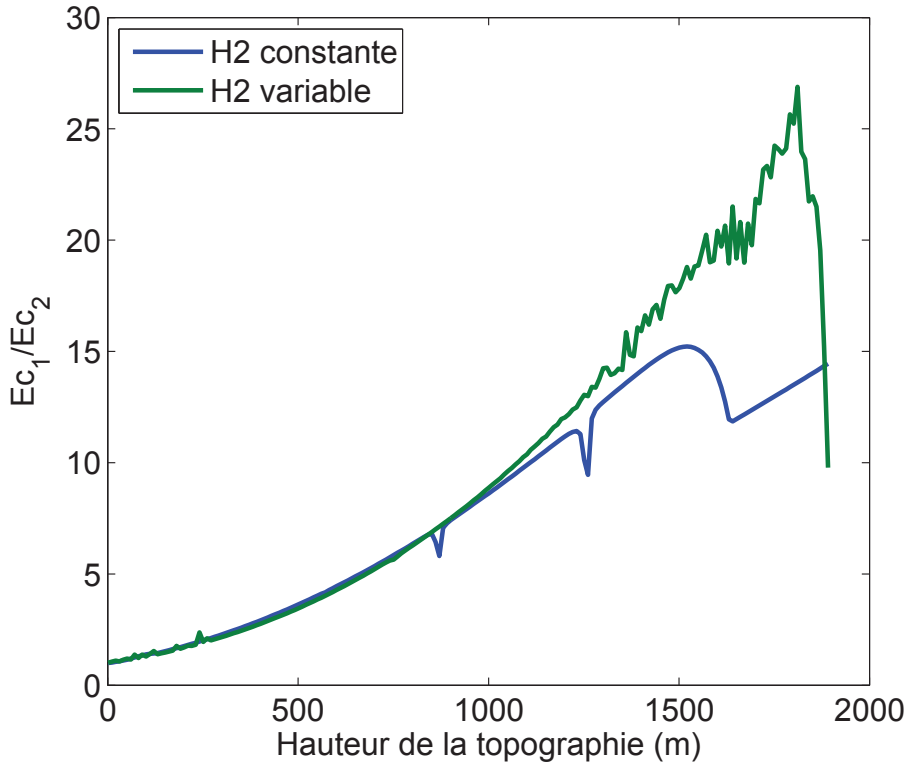

FIGURE *3.20 – Maximum du rapport de l'énergie cinétique de la première couche sur l'énergie cinétique de la deuxième calculé pour différentes hauteurs de topographie grâce à l'équation (3.16) (courbe verte) ou à l'équation (3.17) (courbe bleue)*

Dans le cas du modèle à deux couches, les ondes piégées apparaissent lorsque $\omega \in [\omega^{BC1}_{\text{min topo}}, \omega^{BC1}_{\text{min}}]$ avec $\omega^{BC1}_{\text{min}} < 0$ et $\omega^{BC1}_{\text{min topo}} < 0$, les fréquences minimales d'existence des ondes de Rossby du premier mode barocline sans et avec topographie (pour $l > 0$ et $\frac{dh}{dx} > 0$). Avec un modèle à stratification continue sur la verticale, les ondes baroclines piégées apparaissent cette fois lorsque $\omega \in [\omega^{BC1}_{\text{min topo}}, 0]$: il n'y a plus de borne supérieure mais le mode piégé peut appartenir à un mode vertical plus élevé.

3.3.3 Influence d'un courant moyen zonal variant méridionalement sur les ondes de Rossby

Le couplage méridional est étudié dans un modèle à deux couches. Dans la couche supérieure un courant moyen zonal, méridionalement variable, influence la propagation des ondes, alors que la couche inférieure est au repos : $\vec{U} = (U_1(y), 0)$. Le flot peut donc être instable aux longueurs d'ondes suffisamment petites, mais on s'occupe dans ce paragraphe uniquement des modes stables. On suppose par simplicité que les variations de hauteur de couches sont faibles devant leurs épaisseurs, il suffit pour cela que la première couche soit suffisamment épaisse. Le terme $-\partial_{yy}(U_1(y))$ est négligé devant β : en choisissant $L_y \sim 5.10^5$ m et $U_1 \sim 5cm/s \frac{\partial^2_{yy}U}{\beta} \sim 2.10^{-2}$. Le même type de problème est étudié par Killworth [1979] sous l'approximation WKB, avec une stratification continue sur la verticale pour un courant zonal barotrope puis barocline. Il montre comment le nombre d'onde méridional d'une onde de Rossby peut être modifié par le courant moyen lors de sa propagation Nord-Sud. Ici on se concentre sur la répartition de l'énergie spectrale dans l'espace (l, ω).
Les équations que nous utilisons sont :

dans la première couche :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\psi_1+\frac{f_0^2}{H_1}\frac{\psi_2-\psi_1}{g_1'}\right)+\left(\beta+\frac{f_0^2}{H_1}\left(\frac{U_1(y)}{g_1'}\right)\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0 \tag{3.42}$$

dans la deuxième :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi_2+\frac{f_0^2}{H_2}\frac{\psi_1-\psi_2}{g_1'}\right)+\left(\beta+\frac{f_0^2}{H_2}\left(\frac{-U_1(y)}{g_1'}\right)\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=0 \tag{3.43}$$

La forme de la vitesse zonale utilisée est : $U_1(y)=u_{\text{mean}}\cos(k_U y)$. L'extension méridionale du bassin vaut : $L_y=1000$ km. La figure (3.21) montre la relation de dispersion dans le cas où $u_{\text{mean}}=0.05$ m/s et $k_U=\frac{4\pi}{L_y}$. Sur cette figure les courbes des relations de dispersion des modes barotrope et barocline dans le cas où $U_1(y)=-0.05$ m/s et $U_1(y)=0.05$ m/s sont superposées. Lorsque le courant moyen est dirigé vers l'est $U_1>0$, la fréquence du mode pseudo-barocline diminue partout mais plus fortement aux petites longueurs d'ondes. Elle devient même négative lorsque le courant est assez fort, ce qui se traduit par une vitesse de phase zonale dirigée vers l'est [1]. La fréquence du mode pseudo-barotrope est pratiquement inchangée aux petites longueurs d'ondes mais diminue aux grandes longueurs d'ondes. Lorsque le courant moyen est dirigé vers l'ouest les fréquences du mode pseudo-barotrope augmentent aux petites longueurs d'ondes et celles du mode pseudo-barocline augmentent aux grandes longueurs d'ondes. Killworth *et al.* [1997] montre que sous l'approximation des ondes longues, la propagation de l'onde du premier mode barocline est influencée uniquement par le courant moyen qui ne se projette pas sur le premier mode barocline. Ici l'approximation des ondes longues n'est pas faite, par conséquent, la totalité du champ moyen influence la propagation des ondes mais, aux grandes longueurs d'ondes, il faut s'attendre à ce que la partie barotrope du champ moyen ait beaucoup plus d'influence que sa partie barocline.

La figure (3.21) montre que certains modes calculés avec $U(y)=u_{\text{mean}}\cos(k_U y)$ semblent

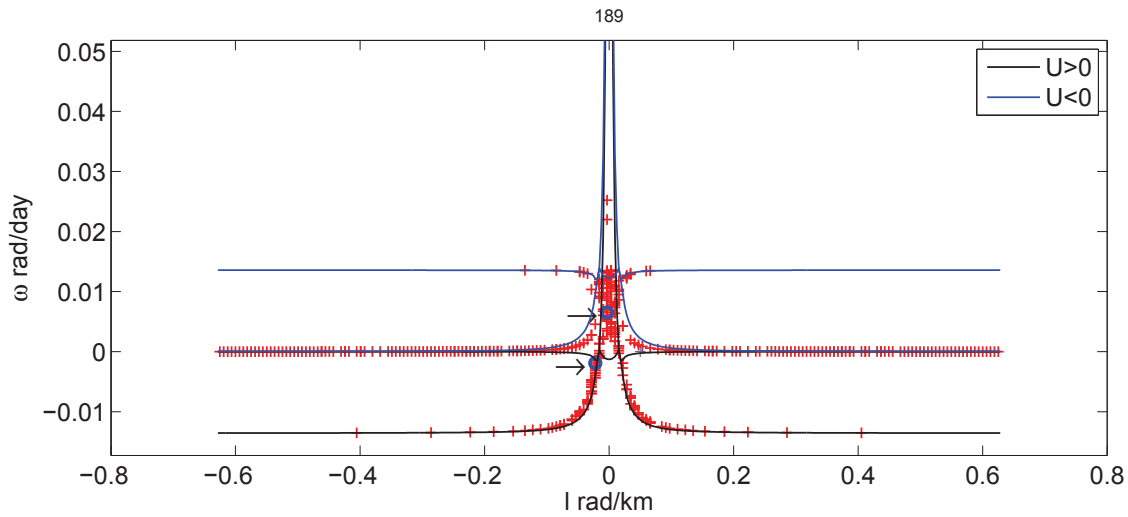

FIGURE *3.21 – Croix rouges : emplacements dans l'espace de Fourier des modes calculés en présence d'un courant moyen méridionalement variable, dans un modèle à deux couches. Les courbes bleues et noires représentent les relations de dispersion calculées analytiquement pour $U>0$ et $U<0$.*

suivre l'une ou l'autre de ces relations de dispersion (avec $U>0$ et $U<0$). La visualisation de la structure spatiale d'un mode sur la branche des fréquences négatives (obtenue pour $U>0$) marqué par une flèche noire et un rond bleu (sur la figure (3.21)) montre que l'amplitude de ψ_1 et ψ_2 est quasiment nulle là où $U<0$. Certains modes suivent donc la relation de dispersion obtenue pour $U<0$ en adoptant une structure méridionale nulle là où $U>0$. Le même

1. Nous n'avons pas utilisé la convention $\exp(i(kx-\omega t))$. Par conséquent, $c_x=-\frac{\omega}{k}$

phénomène apparait pour $U < 0$. Le courant moyen méridionalement variable n'implique pourtant pas une séparation systématique des zones avec des signes opposés : l'amplitude du mode à fréquence élevé indiqué sur la figure (3.23) est à peu près constante méridionalement. Les structure spatiales des fonctions courant dans les couches 1 et 2 de ces modes indiquent qu'il s'agit d'un mode barotrope légèrement modifié.

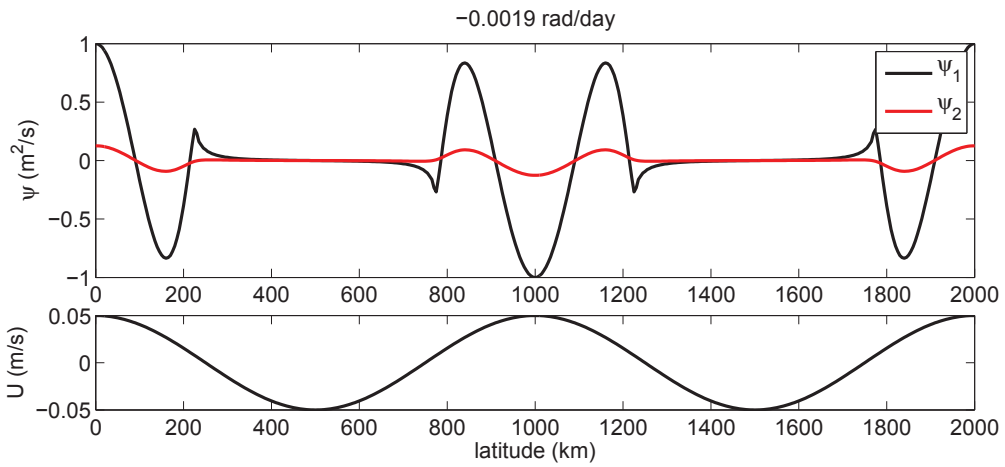

FIGURE *3.22 – En haut, structure spatiale du mode indiqué par une flèche noire sur la figure (3.21) pour $\omega < 0$. En noir, ψ_1 dans la première couche, en rouge ψ_2 dans la deuxième couche. En bas, la structure méridionale du courant moyen associé.*

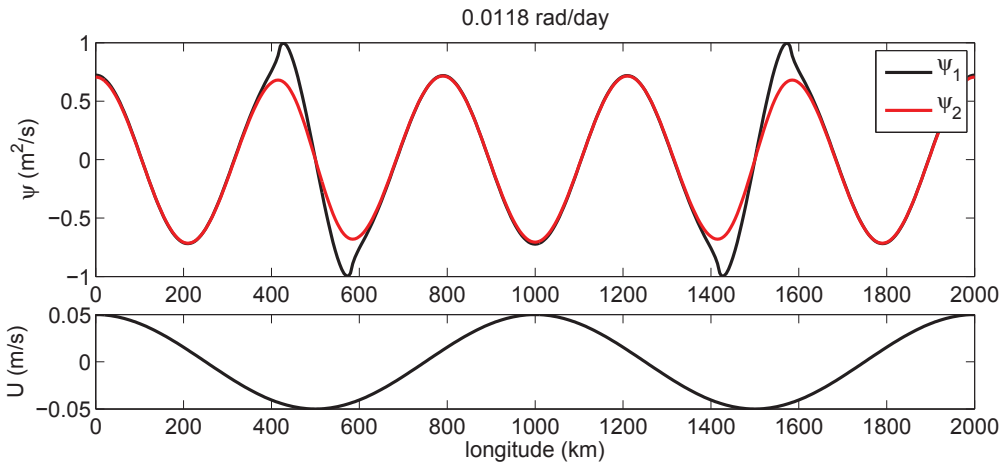

FIGURE *3.23 – En haut, structure spatiale du mode indiqué par une flèche noire sur la figure (3.21) pour $\omega > 0$. En noir, ψ_1 dans la première couche, en rouge ψ_2 dans la deuxième couche. En bas, la structure méridionale du courant moyen associé.*

Pour résumer, l'introduction d'un courant moyen méridionalement variable provoque d'une part l'apparition d'un couplage méridional des ondes et d'autre part d'un couplage vertical.

Dans cette partie, nous avons montré, à l'aide de configurations idéalisées, comment l'inclusion d'une topographie ou d'un champ moyen variables horizontalement et verticalement peut modifier la répartition de l'énergie dans l'espace (k, l, ω). Il faut retenir que :

1. L'inclusion d'un courant moyen et d'une topographie change la structure verticale des modes. Plus la longueur d'onde est petite plus cet effet est important, le long d'une relation de dispersion, la structure verticale est donc variable.

2. L'inclusion d'une topographie modifie la fréquence, la structure verticale et horizontale des modes. Dans le cas étudié ici, les relations de dispersion des modes pseudo-barotrope et barocline se rapprochent de la courbe $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+F_1}$ lorsque la topographie augmente, jusqu'à en devenir très proche si les variations d'épaisseurs de couches sont linéarisées. Lorsque la linéarisation n'est pas effectuée, l'augmentation de la hauteur de la topographie est limitée par la hauteur de la couche. L'étude des ondes piégées sur la topographie révèle que l'inclusion d'un champ horizontalement variable peut entrainer la création de zones où certaines ondes sont admises alors qu'elles ne le sont pas ailleurs. Lors de son parcours dans un champ variable horizontalement, une onde de Rossby peut changer brusquement de propriété, par exemple, nous avons montré de quelle manière l'énergie d'une onde barotrope courte peut être transmise à des ondes pseudo-baroclines courtes et longues au-dessus d'une topographie (leur structure verticale dépend en fait de l'intensité de la pente, plus la pente est forte plus le mode pseudo-barocline aura une projection importante sur le mode barotrope).
3. Enfin, un courant zonal variant avec la latitude entraine un couplage des modes méridionalement et verticalement. Les modes peuvent être classés en deux catégories. La première contient les modes aux longueurs d'ondes équivalentes à celle du courant moyen et par conséquent influencés par ses variations. La deuxième, les modes aux longueurs d'ondes plus petites, suivant les relations de dispersion obtenues pour un courant moyen constant vers l'est ou l'ouest. Le système réagit, dans ce cas, en séparant les zones où la vitesse zonale est vers l'est de celles où elle est vers l'ouest : les modes qui suivent les relations de dispersion calculées pour U(y)=U<0 ont une amplitude nulle là où U>0 et inversement. Ces modes sont comparables aux modes piégés sur la topographie étudiés plus haut : l'inclusion d'un courant moyen modifie la gamme de fréquences où des ondes de Rossby peuvent exister. Les modes piégés se trouvent aux fréquences admises seulement pour un certain type de champ moyen.

3.4 Calcul sur des données réelles dans une zone de l'Atlantique Nord

Dans cette partie, on explique dans un premier temps la méthode employée pour extraire le champ moyen et la topographie, puis, dans un deuxième temps, le calcul décrit plus haut est mis en pratique sur une zone de l'Atlantique Nord.

3.4.1 Méthode

Le courant moyen est obtenu à 1000 mètres de profondeur grâce aux informations contenues dans l'atlas ANDRO qui regroupe les données traitées des flotteurs ARGOs. Des informations sur ANDRO peuvent être trouvées dans Ollitrault et Rannou [2013] et sur le calcul des vitesses moyennes à 1000 m dans Ollitrault et Colin de Verdière [2014]. La résolution horizontale de cette base de données est de 1°. Sur la verticale, les données des flotteurs sont extrapolées grâce à la relation du vent thermique et à un atlas de stratification (WOA 2011) qui possède 33 niveaux sur la verticale. On décrit dans ce qui suit la méthode utilisée pour extraire de cet Atlas les données utiles à notre problème, en particulier la manière dont les couches sont calculées.
La première étape consiste à choisir une zone rectangulaire où la projection sur les modes de Fourier peut être calculée. Puis, les interfaces de densités sont définies, l'épaisseur de chaque couche est calculée comme la différence de profondeur entre ces interfaces. Les vitesses zonales et mériodionales sont interpolées sur la verticale pour être placées au milieu des couches. Les interfaces sont trouvées à partir des anomalies spécifiques de volumes (sva) définies comme

suit :

$$\text{sva} = \frac{1}{\rho(S,T,p)} - \frac{1}{\rho(S_{ref},T_{ref},p)}$$

avec $Tref = 20\,°\text{C}$ et $S_{ref} = 37.0$ psu. Cette formule permet de se débarrasser de l'effet de la pression sur la densité et produit une fonction monotone et décroissante. Les anomalies spécifiques sont ajustées empiriquement pour chaque zone afin de donner approximativement 10 couches d'épaisseur croissante avec la profondeur. g'_i, la gravité réduite entre chaque couche est obtenue grâce à une régression linéaire entre $f_0 \frac{dU}{dz}$ à l'interface i et $\frac{\partial \eta_i}{\partial y}$ (c'est-à-dire la relation du vent thermique). Le même procédé est appliqué entre $f_0 \frac{dV}{dz}$ et $\frac{\partial \eta_i}{\partial x}$ pour vérifier que la gravité réduite calculée à partir de U est correcte. La figure (3.24) montre une section zonale des profondeurs des couches et de la topographie à 25 ° dans l'Atlantique (longitude 300 ° 330 °). La topographie provient de l'Atlas ETOPO1 sur lequel un filtre Gaussien a été appliqué pour obtenir une résolution égale à celle du courant moyen (1 °).

À partir de cette étape, on possède les champs $(U_i, V_i)(x, y)$, $H_i(x, y)$ et g'_i (où i est le numéro

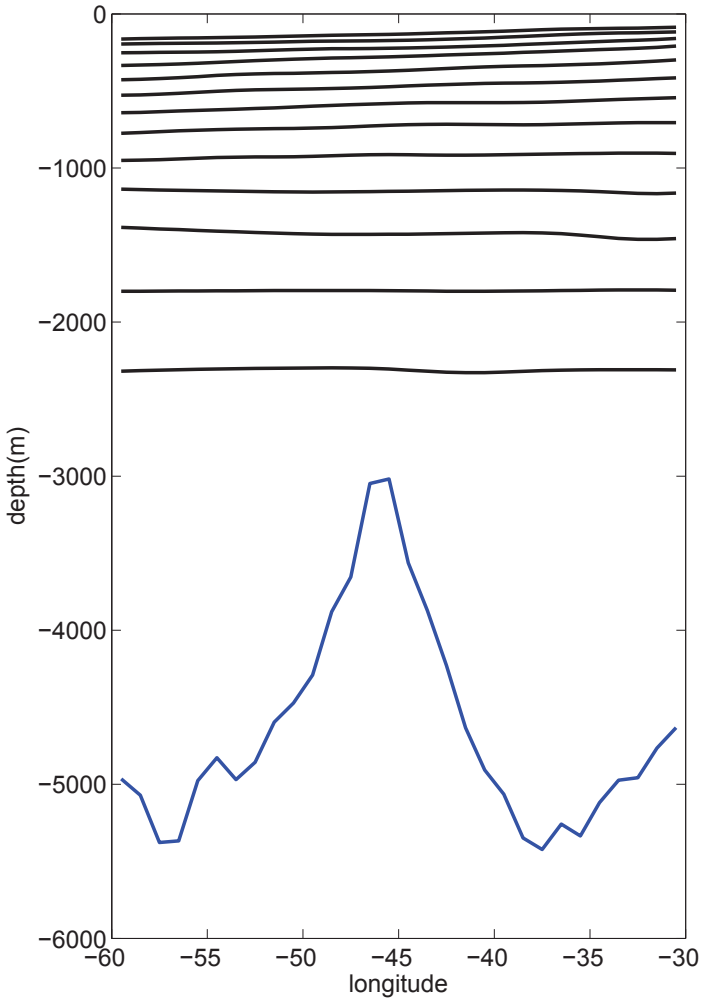

FIGURE *3.24 – Coupe zonale de la profondeur des couches pour une zone située dans l'Atlantique Nord à 25 ° de latitude. La courbe bleue montre la coupe zonale de la topographie.*

de la couche) dans des zones rectangulaires, la fonction courant $\psi'(x, y, z, t)$ peut être obtenue par la méthode décrite plus haut et comparée en surface avec l'altimétrie. La taille des zones est

choisie empiriquement pour que l'accord entre l'altimétrie et le calcul des modes soit le meilleur possible : la taille zonale des rectangles doit être assez grande pour représenter correctement les grandes longueurs d'ondes zonales mais suffisamment petite méridionalement pour satisfaire l'approximation du plan β. Le calcul donne $N_k N_y N_z$ vecteurs propres $\Psi_z^q(x,y)$ et leur fréquence ω_q associée, q étant l'indice du mode. Pour visualiser les résultats, les modes sont projetés sur les modes verticaux traditionnels :

$$\sum_{k,l,m} \widehat{\Psi}^q(k,l,m) F_m(z) \exp\left(j(kx+ly)\right) \exp(j\omega_q t) \tag{3.44}$$

En supposant que le mode pseudo-barocline a sa structure verticale majoritairement contenue dans le premier mode barocline, on dessine, pour chaque ω_q, $|\psi^q(k,l,2)|^2$ (où le 2 désigne le premier mode barocline) seulement si la propriété : $|\psi^q(k,l,2)|^2 > 0.8 \max_{k,l} |\psi^q(k,l,2)|^2$ est satisfaite. Pour comprendre comment chaque champ influence la propagation des ondes, les calculs suivants sont effectués :

- avec topographie et courant moyen ;
- avec topographie sans courant moyen ;
- sans topographie avec courant moyen.

Ces figures devraient permettre de donner un point de vue global sur l'emplacement des modes dans l'espace de Fourier et de comparer visuellement leur emplacement avec celui de l'énergie. Cependant, l'évaluation objective de la capacité des modes à décrire l'énergie observée n'est pas facilement effectuée avec ces figures. Le problème de l'évaluation de la capacité de la théorie à décrire le spectre observé a déjà été posé dans la littérature. Par exemple, Zang et Wunsch [1999] utilisent un intervalle de confiance de 95% pour décider ce qui appartient ou pas aux courbes de relation de dispersion. Osychny et Cornillon [2004] calculent le rayon de déformation qui maximise la somme de l'énergie le long de la courbe $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+1/Rd^2}$ puis le comparent avec la théorie. Maharaj *et al.* [2007] définit l'énergie qui appartient au premier mode barocline comme tout ce qui est situé entre la médiane du premier mode barocline et du deuxième pour la limite inférieure et son symétrique par rapport au premier mode barocline pour la limite supérieure. Ces méthodes possèdent toutes un certain degré d'arbitraire, et peuvent, de plus, difficilement être appliquées à notre calcul de modes propres. Ci-dessous, une méthode capable d'évaluer objectivement la quantité d'énergie décrite par les ondes libres est proposée.

3.4.2 Comparaison objective de l'énergie décrite par les modes propres

La méthode consiste à séparer le signal altimétrique en ce qui peut être décrit par les ondes libres et ce qui ne peut pas l'être :

$$\mathrm{SSH}(x,y,t) = \mathrm{SSH}_{\mathrm{Rossby}}(x,y,t) + \mathrm{reste}(x,y,t)$$

puis à comparer l'énergie contenue dans $\mathrm{SSH}_{\mathrm{Rossby}}(x,y,t)$ avec $\mathrm{SSH}(x,y,t)$. Les modes propres sont donnés par la somme de leurs coefficients de Fourier :

$$\psi^q(x,y,z,t) = \sum_{(k,l)} \alpha^q_{k,l,z} \exp\left(i(kx+ly)\right) \exp\left(i\omega_q t\right) \tag{3.45}$$

avec $q \in 1,2,...N_k N_l N_z$. C'est sur l'expression de ces modes en surface que l'on veut projeter la SSH, c'est-à-dire sur

$$\psi^q(x,y,0,t) = \sum_{(k,l)} \alpha^q_{k,l,z=0} \exp\left(i(kx+ly)\right) \exp\left(i\omega_q t\right) \tag{3.46}$$

ω_q, la fréquence des modes propres n'appartient pas à la grille temporelle de AVISO, il faut donc la projeter sur les modes de Fourier temporels de la grille :

$$\psi^q(x,y,0,t) = \sum_{(k,l,\omega)} \gamma^{(q)}_{(k,l,\omega)} \exp\left(i(kx+ly+\omega t)\right) \tag{3.47}$$

où (k,l,ω) sont les longueurs d'ondes et fréquences calculées à partir de la grille AVISO. Pour projeter le signal altimétrique (ou plutôt $\psi_{surf} = \frac{f_0}{g} ssh$) sur ces modes, il faut tout d'abord en extraire une base orthonormale. On utilise pour cela l'algorithme de Gram-Schmidt et le produit scalaire suivant :

$$(\psi_q, \psi_p) = \sum_{(k,l,\omega)} \gamma^{(q)}_{(k,l,\omega)} \overline{\gamma^{(p)}_{(k,l,\omega)}} \tag{3.48}$$

où les barres horizontales signifient la partie conjuguée et où $\gamma^{(q)}_{(k,l,\omega)}$ et $\gamma^{(p)}_{(k,l,\omega)}$ sont respectivement les coefficients de Fourier de ψ_q et ψ_p.On appelle $F^*_q, q = 1,2,...,N_k N_l N_z$ les vecteurs de la base orthonormale. L'étape suivante est de projeter la ssh sur cette base (3.48). Pour cela, la ssh est tout d'abord projetée sur les modes de Fourier :

$$\psi_{\text{surf}}(x,y,t) = \frac{f_0}{g}\text{SSH}(x,y,t) = \sum_{(k,l,\omega)} \widehat{\eta}(k,l,\omega) \exp\left(i(kx+ly+\omega t)\right) \tag{3.49}$$

et ensuite sur la base orthonormale :

$$\text{proj}(q) = (\psi_{\text{surf}}(x,y,t), F^*_q(x,y,t)) \tag{3.50}$$

on obtient alors que :

$$\text{SSH}_{Rossby}(x,y,t) = \sum_q proj(q) F^*_q(x,y,t) \tag{3.51}$$

Pour comparer le calcul précédent à la théorie classique des ondes de Rossby, on effectue de la même manière la projection sur les modes de Rossby de la théorie classique :

$$\psi_R(x,y,t) = \exp\left(j\left(kx+ly+\frac{\beta k}{k^2+l^2+1/R_i^2}t\right)\right) \tag{3.52}$$

pour (k,l) sur la grille AVISO, et $i \in [1, N_z]$ l'indice des modes verticaux, N_z le nombre de modes. Le résultat converge avec seulement deux modes verticaux ($N_z = 2$) parce qu'il n'y a pratiquement pas d'énergie le long des relations de dispersion des modes baroclines plus élevés (du moins sans courant moyen ni topographie variables). Puis l'énergie décrite par ces fonctions est comparée à l'énergie totale. Ce calcul s'avère très strict : le pourcentage calculé est généralement beaucoup plus faible que ce qui est obtenu par d'autres méthodes. Une des explications est qu'il n'y a pas ici de tolérance sur l'erreur de la mesure contrairement au calcul de Zang et Wunsch [1999] ou même de celui réalisé dans le chapitre deux. L'intérêt de la méthode décrite ici réside plutôt dans la capacité à comparer facilement plusieurs théories (par exemple avec ou sans courant moyen et topographie) entre elles.

3.4.3 Traitement sur les données altimétriques

Les données altimétriques sont obtenues par AVISO [Le Traon *et al.*, 1998]. Pour chaque zone rectangulaire, on applique les étapes suivantes : la moyenne temporelle de la SSH est retirée du signal, la tendance est retirée en soustrayant le plan minimisant les différences pour chaque pas de temps et finalement un fenêtrage de Hanning est appliqué dans les trois dimensions. Après ces traitements, une transformée de Fourier trois dimensions est calculée.

3.4.4 300° - 330° 20° - 30° N

Cette zone est située dans l'Atlantique Nord, centrée au-dessus de la dorsale. La dorsale a une hauteur d'environ 2000 m et s'étale sur plus de 1000 km comme montré sur la section verticale de la figure (3.24). La vitesse moyenne en surface, montrée figure (3.25), est dirigée vers l'est au nord de la zone et vers l'ouest au sud. Les couches de surface plongent vers l'ouest, augmentant la profondeur de la première couche (figure (3.5)).
Les figures (3.26),(3.27) et (3.28) montrent le contour $0.5 \times \max_{(k,l)} \Psi^j_{(k,l=0)} F_1(z=0)$ du mode

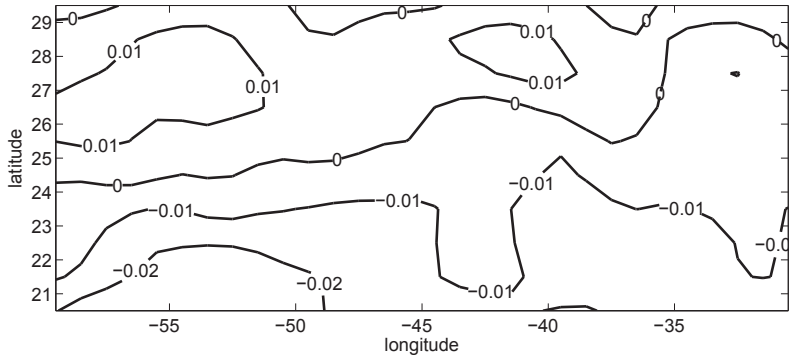

FIGURE *3.25 – Courant zonal moyen (m/s) en surface sur la zone d'étude.*

j projeté sur le premier mode barocline pour, respectivement, le courant moyen sans topographie, la topographie uniquement, la topographie et le courant moyen. Les figures sont assez compliquées à interpréter mais suggérent que la topographie augmente les fréquences, surtout aux nombres d'ondes zonaux de l'ordre de 0.01 cpkm, alors que l'inclusion du courant moyen seul ne produit pas cet effet. Cela pourrait expliquer l'énergie spectrale située au-dessus de la relation de dispersion du premier mode barocline. Pour $l = 0$ et $k = 0$, notre calcul ne peut pas donner de $\hat{\Psi}(k, l, \omega)$ (car dans ce cas il n'y a pas de variation horizontale) d'où l'absence de données sur les figures (3.26),(3.27) et (3.28) pour $k = 0$. Aux plus petites longueurs d'ondes, ce calcul ne semble pas être en mesure d'expliquer l'énergie située sous la courbe de la relation de dispersion de l'onde sans topographie ni courant moyen. S'agirait-il de la trace d'un mode vertical plus élevé ?
Le calcul du pourcentage d'énergie expliqué par les modes libres, exposés ci-dessus, donne seulement 3% lorsqu'aucun champ moyen n'est pris en compte dans le calcul, 10 % lorsque la topographie et le courant moyen sont ajoutés, 4% pour le courant moyen sans topographie et 5% avec uniquement la topographie. Ces résultats suggèrent d'une part que la part d'énergie expliquée par les ondes libres est plutôt faible sur cette zone, d'autre part que l'inclusion d'une topographie et d'un courant moyen variables augmentent la part de l'énergie expliquée par les ondes libres.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'effet d'un environnement spatialement variable sur les ondes de Rossby libres. Pour cela, les équations quasi-géostrophiques à couches, linéarisées autour d'un état moyen, sont utilisées et modifiées pour rendre compte de l'effet de la variation des hauteurs des couches dues à la topographie ou au courant moyen. Cet effet n'est plus négligeable lorsque la topographie de la dernière couche est importante et lorsqu'en surface les variations horizontales de la densité moyenne deviennent trop grandes.
L'étude idéalisée de quelques cas simples a ensuite permis d'éclairer les mécanismes d'influence de ces champs sur les ondes. Un courant moyen verticalement variable introduit un couplage entre les modes verticaux. Plus la longueur d'onde est faible plus le couplage est important.

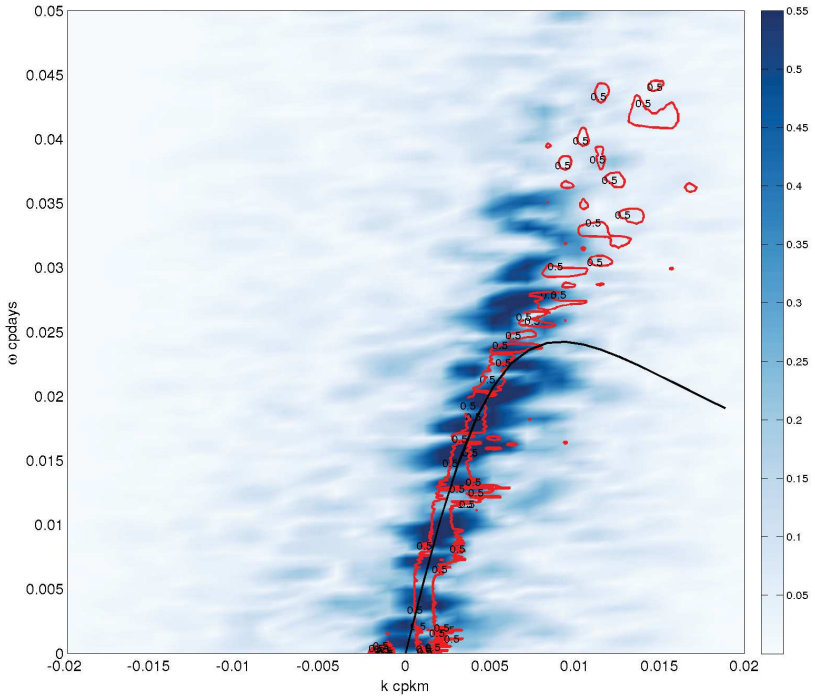

FIGURE *3.26 – En bleu : énergie spectrale (normalisée par son maximum) observée par l'altimétrie sur la zone en fonction de* (k, ω) *et pour* $l = 0$*. En rouge le contour* $0.5 \times \max_{(k,l)} \Psi^j_{(k,l=0)} F_1(z = 0)$ *des modes calculés avec courant moyen mais sans topographie. La courbe noire représente la relation de dispersion du premier mode barocline calculée à partir de la moyenne horizontale de la stratification sur la zone.*

Par conséquent, la structure verticale change le long d'une relation de dispersion en présence de courant moyen. L'étude de Killworth *et al.* [1997] semble suggérer que sous l'approximation des ondes longues, le courant a très peu d'effet sur la structure verticale des modes, ce qui n'est pas en contradiction avec notre résultat puisque lorsque la longueur d'onde augmente, la structure verticale du mode étudié se rapproche de celle obtenue sans courant moyen.
Une topographie zonalement variable dans un modèle à deux couches est ensuite étudiée. Son effet est de diminuer les fréquences du mode pseudo-barotrope et d'augmenter celles du mode pseudo-barocline. Ce calcul a mis en évidence l'existence d'ondes piégées sur les pentes Est et Ouest de la topographie Gaussienne. Cet effet est rationalisé grâce au calcul des mode propres au-dessus d'un fond comportant d'Ouest en Est une zone plate, une zone en pente et à nouveau une zone plate. Ces ondes, piégées sur la topographie transportent l'énergie méridionalement vers le Nord ou le Sud selon la direction de la pente, son inclinaison et selon le nombre d'onde méridional l. Plus globalement, l'inclusion d'une topographie modifie à la fois la structure verticale et la structure spatiale des ondes lors de leur propagation.
Enfin, l'effet d'un courant zonal moyen variant avec la latitude est analysé dans un modèle à deux couches. Comme pour la topographie, deux types d'ondes existent. Premièrement celles qui ont des échelles de variations comparables à celle du courant moyen. Dans ce cas les modes interagissent avec l'ensemble du champ moyen et adaptent leur structure méridionale en conséquence. Les modes sont alors composés de plusieurs nombres d'ondes méridionaux. Deuxièmement, les ondes avec des échelles beaucoup plus petites que les échelles de variation du courant moyen. Les modes suivent dans ce cas soit les relations de dispersion obtenues pour $U > 0$ ou celles obtenues pour $U < 0$ où U est l'amplitude de la variation méridionale du courant moyen $U(y) = U \cos(k_u y)$.

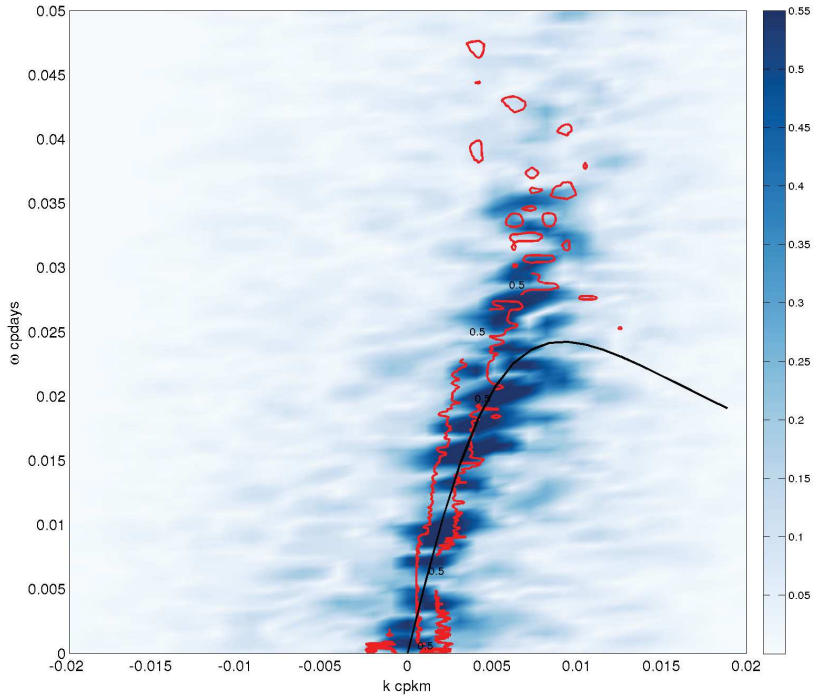

FIGURE *3.27* – *En bleu : énergie spectrale (normalisée par son maximum) observée par l'altimétrie sur la zone en fonction de* (k, ω) *et pour* $l = 0$. *En rouge le contour* $0.5 \times \max_{(k,l)} \Psi^j_{(k,l=0)} F_1(z = 0)$ *des modes calculés sans courant moyen mais avec topographie. La courbe noire représente la relation de dispersion du premier mode barocline calculée à partir de la moyenne horizontale de la stratification sur la zone.*

Dans une dernière partie, le calcul complet pour la topographie et le champ moyen a été effectué sur une zone de l'Atlantique Nord. Le diagramme (k, ω) des modes calculés montre qu'ils semblent suivre plutôt correctement les observations et reproduisent bien la répartition de l'énergie spectrale observée aux grandes longueurs d'ondes. Tandis qu'aux longueurs d'ondes plus petites, le calcul explique moins bien l'énergie observée. Ce type de visualisation ne permettant pas de quantifier objectivement l'énergie expliquée par ces modes, nous avons développé une méthode dont le but est de calculer le rapport de l'énergie dans les ondes libres de Rossby sur l'énergie totale. Bien que le pourcentage de l'énergie spectrale expliqué par les modes calculés soit plutôt faible (à peu près 10%), les résultats montrent que l'inclusion de la topographie et du courant moyen augmente la proportion explicable par les ondes de Rossby libres, puisque sans cette inclusion, elle est autour de 3 %.
On ne peut pour autant pas conclure que le reste de l'énergie spectrale n'appartient pas à cette dynamique. En effet, le calcul effectué ici utilise plusieurs approximations susceptibles de réduire le pourcentage d'énergie expliqué par ces modes. La première est l'omission du rôle des frontières, qui se fait en supposant que le signal est doublement périodique en longitude et en latitude. Les frontières pourraient jouer un rôle important, en permettant l'existence de processus rapides et agéostrophiques transportant de l'énergie du bord ouest vers le bord est. Ce sont ces processus qui sont essentiels dans les modes faiblement atténués de [Cessi et Primeau, 2001]. La deuxième hypothèse susceptible d'influencer le résultat pourraient être liée à d'éventuelles erreurs dans les mesures de courant moyen. La base de courant moyen utilisée ici est construite grâce à des moyennes sur les mesures des flotteurs ARGO. Cette moyenne est donc plus ou moins précise en fonction du nombre de jours utilisé pour la construire. La figure (3.29), extraite de Ollitrault et Colin de Verdière [2014] donne une idée du nombre de

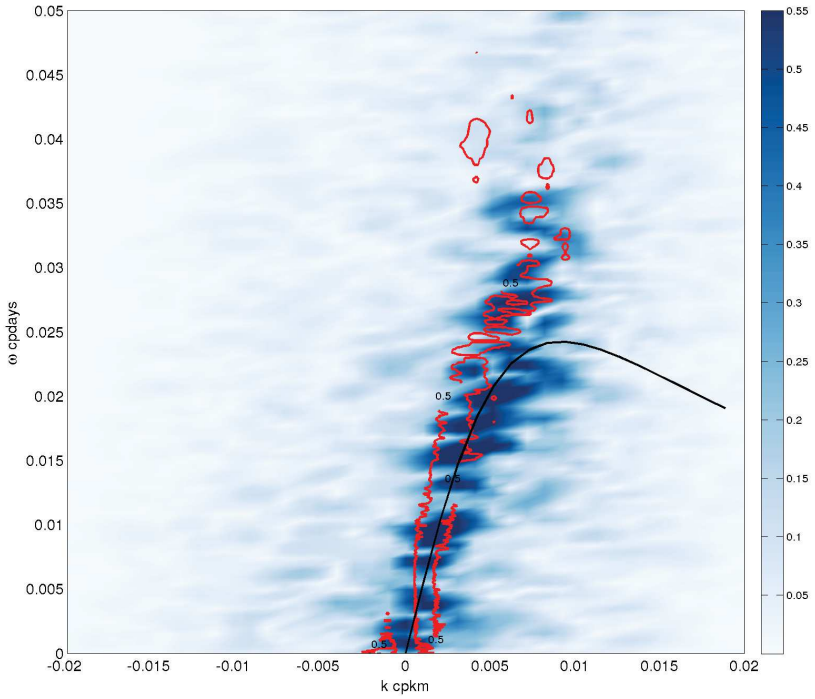

FIGURE *3.28 – En bleu : énergie spectrale (normalisée par son maximum) observée par l'altimétrie sur la zone en fonction de* (k, ω) *et pour* $l = 0$*. En rouge le contour* $0.5 \times \max_{(k,l)} \Psi^j_{(k,l=0)} F_1(z = 0)$ *des modes calculés avec courant moyen et topographie. La courbe noire représente la relation de dispersion du premier mode barocline calculée à partir de la moyenne horizontale de la stratification sur la zone.*

flotteurs utilisés pour calculer la moyenne en fonction de la latitude et la longitude. Il serait intéressant d'effectuer une étude de sensibilité sur le calcul de ce chapitre afin de déterminer si un changement dans le courant moyen entraine de gros changements dans la structure de la solution.

Dans le chapitre deux, la structure verticale des données observées en surface dans le domaine des ondes de Rossby libres est calculée à partir des équations QG linéarisées autour d'un état de repos. Elle dépend alors de la distance dans l'espace de Fourier, entre l'observation située à (k, l, ω) et les courbes des relations de dispersion des ondes de Rossby. Le fait que, généralement, les observations ne se situent pas exactement sur les relations de dispersion est expliqué par l'influence de la topographie sur les modes libres. Dans la mesure où les résultats de ce chapitre sur la zone de l'Atlantique Nord semblent montrer que c'est la topographie qui influence le plus la forme des modes en surface, les calculs réalisés ici ne sont pas en complète contradiction avec ceux du chapitre deux.

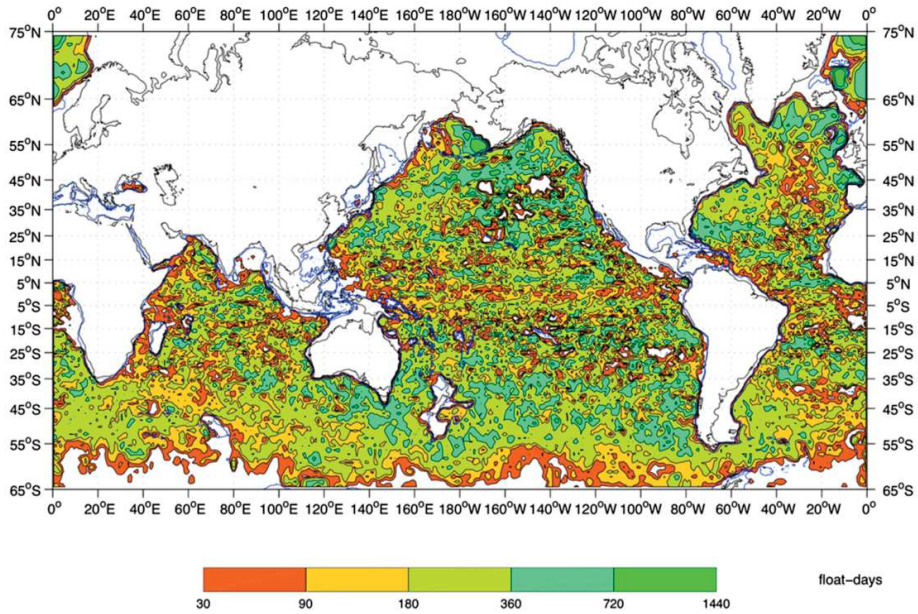

FIG. 2. Float-day numbers within 150-km-diameter disks, for the 950–1150 dbar interval. Only displacements whose duration is comprised between 4 and 17 days are considered.

FIGURE *3.29 – Figure extraite de Ollitrault et Colin de Verdière [2014]*

Chapitre 4

Instabilité de grande échelle et modes de Green

Sommaire

4.1 Introduction 105
4.2 Modèles idéalisés de l'instabilité de Green 106
4.2.1 Étude des modes de Green dans des modèles à couches 107
4.2.2 Calcul sur une stratification continue 116
4.3 Calcul des modes instables grande échelle sur des données réelles de courant moyen 121
4.3.1 Etude de zones particulières 127
4.4 Modification des modes instables par un champ moyen inhomogène 129
4.4.1 Modification par un courant moyen variable 129
4.4.2 Modification par la topographie 132
4.5 Conclusion et perspectives 136

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie les instabilités baroclines de la circulation moyenne, en se concentrant sur les échelles de temps longues (supérieures à quelques mois) et les grandes échelles d'espace (supérieures à 500 km).

La variabilité du climat aux échelles inter-annuelles à inter-décennales est surtout due à sa variabilité naturelle, c'est-à-dire non anthropogénique. Ces échelles de temps sont globalement mal prédites par les modèles climatiques principalement à cause de la nature chaotique de la variabilité présente à ces échelles. La circulation océanique à basse fréquence joue probablement un rôle important étant donné la capacité de stockage de chaleur très importante et les longs temps d'ajustement de l'océan. Dans les modèles d'océans idéalisés, la variabilité à basse fréquence apparait spontanément sous la forme d'onde de Rossby instables [Colin de Verdière et Huck, 1999] et certaines expériences dans des modèles couplés avec l'atmosphère montrent que ces modes persistent [Buckley *et al.*, 2012] dans des configurations plus complexes. Les échelles de temps inter-annuelles sont liées à la propagation des ondes de Rossby longues étudiées dans les chapitres précédents. Les ondes longues transportent de l'énergie vers l'ouest à une vitesse qui dépend principalement de la latitude, du courant moyen [Killworth et Blundell, 2007] et de la topographie [Tailleux et McWilliams, 2000]. Ces modes peuvent être forcés par le vent, par des mouvements le long de la frontière Est mais aussi par instabilité barocline. C'est cette dernière possibilité que nous étudierons dans ce chapitre.

Les théories de l'instabilité barocline mettent habituellement en avant les modes aux croissances les plus fortes : les modes de Charney [1947]. Par exemple, Smith [2007] calcule leurs taux de croissance sur des données océaniques réelles et conclut que ces derniers sont compris entre 1 et 100 jours pour des échelles spatiales inférieures à 100 km. Gill *et al.* [1974] montrent que ce sont ces instabilités qui constituent le principal forçage des tourbillons de méso-échelle. Ici, les échelles spatiales qui nous intéressent sont beaucoup plus grandes, supérieures à 500 km et les périodes plus longues, supérieures à quelques mois. Étant données les importantes différences entre ces échelles, il n'est pas impossible que l'instabilité barocline des modes de Charney coexiste avec une instabilité grande échelle. Certaines études, par exemple Huck *et al.* [2015] montrent que les instabilités aux grandes échelles observées dans les modèles océaniques persistent lorsque la résolution est augmentée, ce qui suggère que les tourbillons n'empêchent pas la variabilité basse fréquence d'exister. Nos principales connaissances sur le mécanisme de l'instabilité barocline des grandes échelles proviennent de calculs effectués localement. L'un des premiers auteurs à avoir démontré l'existence de ces modes est Green [1960] en résolvant numériquement les équations quasi-géostrophiques en présence d'un courant moyen zonal et d'effet β. Puis Colin de Verdière [1986] montre l'existence d'une instabilité barocline dans les équations géostrophiques planétaires. Dans les modèles à couches, Colin de Verdière et Huck [1999] puis Liu [1999] démontrent que ces instabilités ne peuvent exister que lorsqu'au moins deux modes baroclines existent, c'est-à-dire pour un minimum de deux couches et demie. La première partie de ce chapitre sera consacrée à la présentation de ces calculs.
Si les calculs idéalisés permettent de comprendre plus facilement les mécanismes derrière la dynamique étudiée, il n'est parfois pas simple d'extrapoler ces résultats à la complexité de l'océan. Pour remédier à ce problème, le calcul des modes instables de grande échelle sera réalisé sur une stratification et un courant moyen issus de données réelles de l'ensemble du globe. Killworth et Blundell [2007] effectuent un calcul d'instabilité similaire et concluent que les modes instables obtenus ne peuvent pas être responsables des anomalies observées en surface, parce que leurs vitesses de phase sont beaucoup plus faibles que celles des observations. Un scénario différent, mais probable, est que les instabilités produisent localement des anomalies qui sont ensuite radiées sous la forme d'ondes de Rossby. On discutera cet article en introduction de ce calcul. Les modes instables ayant des échelles non négligeables par rapport aux variations des champs dans lesquels ils existent, l'analyse locale a de grandes chances de ne pas donner les mêmes résultats que l'analyse globale. La dernière partie de ce chapitre étudiera l'impact d'un courant moyen variable et d'une topographie en pente sur ces instabilités. Jusqu'à cette dernière partie, l'analyse locale sera appliquée. Nos connaissances actuelles sur ce sujet sont partagées entre d'un côté l'analyse locale et de l'autre des calculs globaux tels que celui réalisé par Sévellec et Fedorov [2013] grâce à des simulations réalistes. La première peut être critiquée pour son manque de réalisme, la deuxième parce qu'elle permet difficilement de comprendre la dynamique sous-jacente. Ce chapitre est un premier pas vers la compréhension du lien entre ces deux approches.

4.2 Modèles idéalisés de l'instabilité de Green

Pour permettre de comprendre facilement comment de l'énergie potentielle peut être extraite de la circulation moyenne pour créer de l'énergie cinétique, de nombreux auteurs ont proposé des modèles simplifiés de ce processus. La philosophie derrière ces différents modèles est de simplifier au maximum les équations pour ne garder que ce qui provoque effectivement le phénomène étudié. Si les résultats ne seront certainement pas réalistes, la compréhension des mécanismes est généralement grandement facilitée.
L'un des premiers à avoir proposé une explication à l'instabilité barocline est Eady [1949], qui étudie sur un plan f l'effet d'un courant moyen zonal cisaillé sur la verticale. La fréquence de

Brunt-Väisälä est constante, en surface et au fond la vitesse verticale est nulle. Les équations ainsi simplifiées admettent une solution analytique et il est alors possible de montrer qu'une instabilité linéaire a lieu pour des échelles spatiales suffisamment grandes (il existe une échelle à partir de laquelle il n'y a plus d'instabilité barocline). Le temps de croissance de ces modes est de l'ordre de grandeur de $\frac{\sqrt{R_{ic}}}{f}$, avec R_{ic} le nombre de Richardson (qui mesure le rapport de l'énergie potentielle sur l'énergie cinétique), appelé l'échelle de temps d'Eady et leur échelle spatiale est de l'ordre de R_d où R_d est le rayon de déformation.
L'examen de la structure verticale de ces modes révèle le comportement suivant : une onde en surface interagit avec une onde en profondeur et elles se renforcent mutuellement. Les modes instables existent si la vitesse méridionale associée à l'onde de fond est corrélée à l'anomalie de température créée par l'onde de surface et si l'anomalie de vitesse méridionale en surface est corrélée à l'anomalie de température en surface.
Ce phénomène est reproductible dans un modèle à deux couches avec un courant moyen zonal de signes opposés dans la première et la deuxième couche. Ce modèle permet d'ajouter facilement l'effet β et montre que son introduction créé une limite supérieure sur la taille des modes instables. Les modes sont instables si leur taille n'est ni trop grande ni trop petite. En ajoutant une demi-couche, des modes instables grandes échelles apparaissent, il n'y a alors plus de limite supérieure sur la taille des modes instables, ce sont les modes de Green [Green, 1960]. Si la stratification est continue sur la verticale et l'effet β pris en compte, toutes les échelles spatiales sont instables. Dans le paragraphe suivant, on explique dans un premier temps pourquoi un modèle à deux couches n'est pas suffisant pour obtenir des instabilités de grande échelle. Puis, dans un deuxième temps on montre que le mécanisme à l'origine des modes de Green est identique à celui qui mène aux modes de Charney.

4.2.1 Étude des modes de Green dans des modèles à couches

Les modèles à couches permettent de faciliter la compréhension de la dynamique étudiée en réduisant le nombre de degrés de liberté sur la verticale.
Les modes de Green ayant des échelles horizontales très grandes, l'approximation des ondes longues peut généralement être effectuée afin de simplifier les équations. Dans un modèle à deux couches avec une vitesse zonale moyenne dans la couche supérieure et dans la couche inférieure $(U, -U)$, les équations sont :

$$\begin{cases} \left(U\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(F(\psi_2 - \psi_1)) + (\beta + 2UF)\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \\ \left(-U\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(F(\psi_1 - \psi_2)) + (\beta - 2UF)\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

ici, les deux couches ont la même profondeur $H1 = H2 = H/2 = 200$ m. En cherchant ψ sous la forme $\psi_i = \alpha_i \exp(i(kx + ly + \omega t)$, la solution suivante pour ω est obtenue :

$$\omega = \frac{\beta k}{2F} \tag{4.2}$$

qui est en fait la relation de dispersion des ondes de Rossby, sous l'approximation des ondes longues, dans le cas où le courant moyen est nul. C'est une illustration de ce qui est appelé le "non-Doppler effect" (par exemple dans [Killworth *et al.*, 1997]) : un courant moyen barocline n'a pas d'influence sur les ondes de Rossby baroclines lorsque l'approximation des ondes longues est effectuée. Il n'y a pas d'instabilité possible dans ce cas. En introduisant un courant moyen barotrope, la fréquence des ondes de Rossby baroclines est cette fois modifiée mais reste toujours réelle et donc stable. L'approximation des ondes longues empêche, en effet, la variation temporelle du mode barotrope : en additionnant les deux équations du système (4.1), on obtient $\frac{\partial}{\partial x}(\psi_1 + \psi_2) = 0$ et si $k \neq 0$, l'anomalie de pression ne se projette pas sur le mode barotrope. Or l'instabilité nécessitant l'interaction d'au moins deux ondes, elle ne peut avoir lieu.

On peut se demander si ce résultat tient toujours sans l'approximation du toit rigide puisque dans ce cas le mode barotrope existe même sous l'approximation des ondes longues. Sans cette approximation, le système (4.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(U_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(F(\psi_2 - \psi_1) + F_0\psi_1) + (\beta + F(U_1 - U2) - F_0 U_1)\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \\ \left(U_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(F(\psi_1 - \psi_2)) + (\beta + F(U_2 - U_1))\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \tag{4.3}$$

avec $F_0 = \frac{f_0^2}{gH_1}$ et (U_1, U_2) les vitesses zonales dans les couches 1 et 2. Ce terme est généralement négligé parce qu'il est très inférieur à F, Tailleux [2003] suggère que son inclusion peut grandement modifier la forme de la solution. En introduisant toujours la même forme pour ψ, une équation pour ω est obtenue :

$$\beta k^2(\beta - F(U_1 + U_2)) + k(\beta(-2F + F_0) - FF_0U_1)\omega - FF_0\omega^2 = 0 \tag{4.4}$$

cette équation admet des solutions imaginaires uniquement si son déterminant est négatif, c'est-à-dire si :

$$\beta^2(4F^2 + F_0^2) + F^2F_0^2U_1^2 - 2\beta FF_0(F_0U_1 + 2FU_2) < 0 \tag{4.5}$$

Pour U_1 fixe, U_2 doit donc être positif et suffisamment grand pour que le dernier terme de (4.5) dépasse les autres. Les vitesses minimums pour lesquelles l'instabilité peut avoir lieu sont atteintes lorsque :

$$U_1 = \frac{\beta}{F} \text{ et } U_2 = \frac{\beta}{F_0} \tag{4.6}$$

En choisissant $g' = 0.02\,\mathrm{m/s^2}$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ et une latitude de $30\,^\circ$ N, la vitesse dans la deuxième couche U_2 doit être supérieure à $74\,\mathrm{m/s}$ pour qu'il y ait une instabilité, ce qui est loin d'être réaliste dans l'océan. Cette vitesse varie comme $\frac{\beta}{f_0}$et diminue donc avec la latitude. Cependant, à haute latitude, la vitesse minimum pour U_2 reste aux alentours de $8\,\mathrm{m/s}$ ce qui est toujours beaucoup trop élevé. Dans les calculs qui suivront, l'approximation du toit rigide sera donc faite.

On présente ci-dessous un calcul dont une partie peut être retrouvée dans Liu [1999].

Le terme de "demi" couche va être utilisé dans ce qui suit. Il s'agit en fait de supposer que le mouvement dans la couche la plus profonde d'un modèle à M couches est nul, le modèle devient un $M - 1$ couches et demie.

L'ajout d'une demi-couche à (4.3) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(U_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(F(\psi_2 - \psi_1)) + (\beta + F(U_1 - U_2))\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \\ \left(U_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(F(\psi_1 - 2\psi_2)) + (\beta + F(2U_2 - U_1))\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \tag{4.7}$$

L'introduction de $\psi_i = \alpha_i \exp(i(kx + ly + \omega t))$, donne l'équation suivante pour la fréquence ω :

$$\beta k^2(\beta - F(U_1 + U_2)) + Fk(-3\beta + FU2)\omega + F^2\omega^2 = 0 \tag{4.8}$$

les solutions sont imaginaires si le déterminant de (4.8) est négatif, c'est-à-dire si $\Delta < 0$ avec

$$\Delta = (5\beta^2 + \beta F(4U_1 - 2U_2) + F^2U_2^2)F^2 \tag{4.9}$$

L'équation $(5\beta^2 + \beta F(4U_1 - 2U_2) + F^2U_2^2) = 0$ est celle d'une parabole dans la base $(\vec{j}, -\vec{i})$, elle peut en effet s'écrire :

$$U_1 = \frac{1}{4\beta F}\left((FU_2 - \beta)^2 + 4\beta^2\right) \tag{4.10}$$

Par conséquent, les instabilités ont lieu lorsque $U_1 < -\frac{\beta}{F}$ et $|U_2 - \frac{\beta}{F}| < \sqrt{-\frac{U_1F}{\beta} - 1}$. La figure (4.1) montre le temps de croissance en fonction de U_1 et U_2 lorsque la longueur d'onde est de 1000 km. Les deux modes verticaux en l'absence de courant moyen sont tracés sur cette

même figure : l'axe du premier mode barocline a pour équation $U_2 = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})U_1$ et celui du deuxième $U_2 = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})U_1$. Ces deux axes sont reportés sur la figure ((4.1)). Les modes sont instables lorsque la vitesse zonale en surface U_1 est suffisamment intense vers l'ouest. Si $U_2 = 0$ les instabilités existent seulement si $U_1 < -\frac{5}{4}\frac{\beta}{F}$. Plus la vitesse zonale en surface est élevée vers l'ouest plus le temps de croissance est réduit.
À 30 degrés de latitude, le temps de croissance est d'environ 150 jours pour une vitesse en surface de l'ordre de 1 cm/s, 100 jours lorsque la vitesse atteint 10 cm/s. La dépendance avec la latitude de ce temps de croissance est montrée sur la figure (4.2) lorsque la vitesse est de -2 cm/s dans la première couche et nulle dans la deuxième. Dans un premier temps, plus la latitude diminue, plus les anomalies grandissent rapidement, puis, à partir d'une certaine latitude (aux environs de 20° ici), les temps de croissance augmentent. Lorsque $U_2 = 0$, le flot est instable si $U_1 < -\frac{5}{4}\frac{\beta}{F} = U_{1min}$. Quand la latitude diminue, U_{1min} diminue aussi et atteint à partir d'une certaine latitude (20° N) -2cm/s : il n'y a plus d'instabilité. Les zones instables dans l'espace (U_1, U_2) sont généralement plus instables aux basses latitudes, sauf si la limite entre la stabilité et l'instabilité se rapproche d'elles. Pour mieux comprendre, la figure (4.3) montre la latitude du maximum de croissance en fonction de U_1 et U_2. Plus la valeur absolue des vitesses considérées sont élevées, plus la latitude du maximum de croissance est basse. Pour des valeurs de courant moyen raisonnables, on s'attend donc à ce que ces instabilités aient lieu à basse latitude. On remarque, sur la figure (4.3), que les instabilités n'ont lieu que lorsque le courant moyen se projette négativement sur les modes verticaux, l'explication sera donnée dans la suite de ce chapitre.

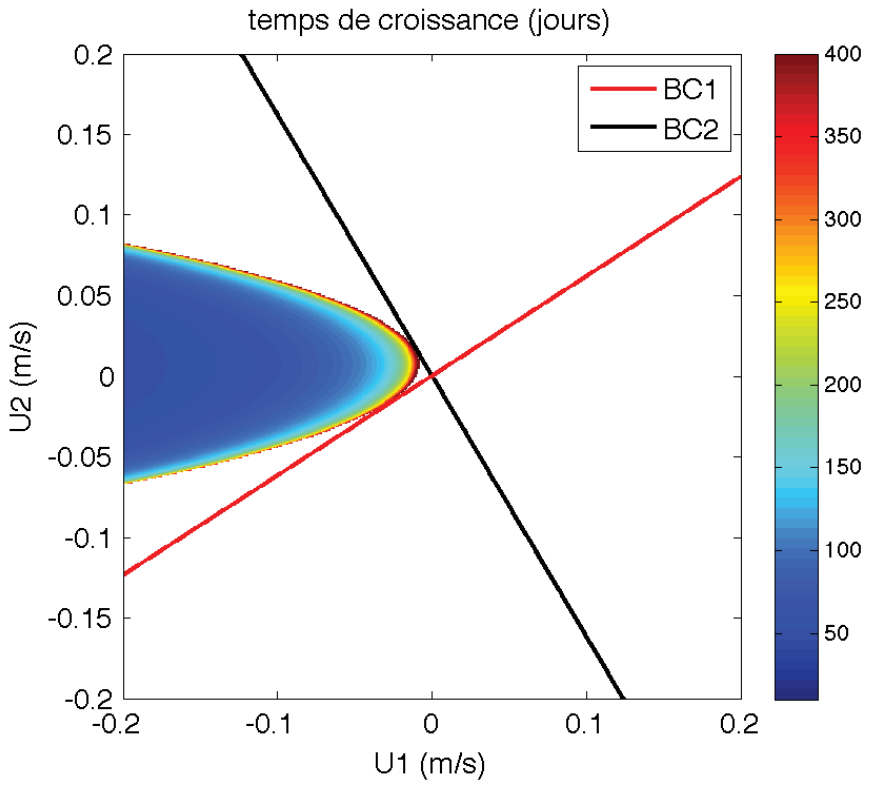

FIGURE *4.1 – Temps de croissance (jours) des modes grandes échelles dans un modèle à deux couches et demie en fonction des vitesses moyennes dans la première (U_1) et deuxième couche (U_2). L'échelle horizontale considérée est 1000 km et la latitude est 30° N. Les deux droites correspondent au premier mode barocline (rouge) et au deuxième (noir). $H_1 = H_2 = 200$ m $g' = 0.01\,\mathrm{m/s^2}$*

Pour comprendre le mécanisme derrière cette instabilité, on cherche dans ce qui suit à relier les anomalies de température aux anomalies de pression. En écrivant $v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}$, $v_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}$ et $\tau_1 = \psi_1 - \psi_2$, $\tau_2 = \psi_2$ avec τ_1 et τ_2 les anomalies de température entre les couches 1 et 2 et

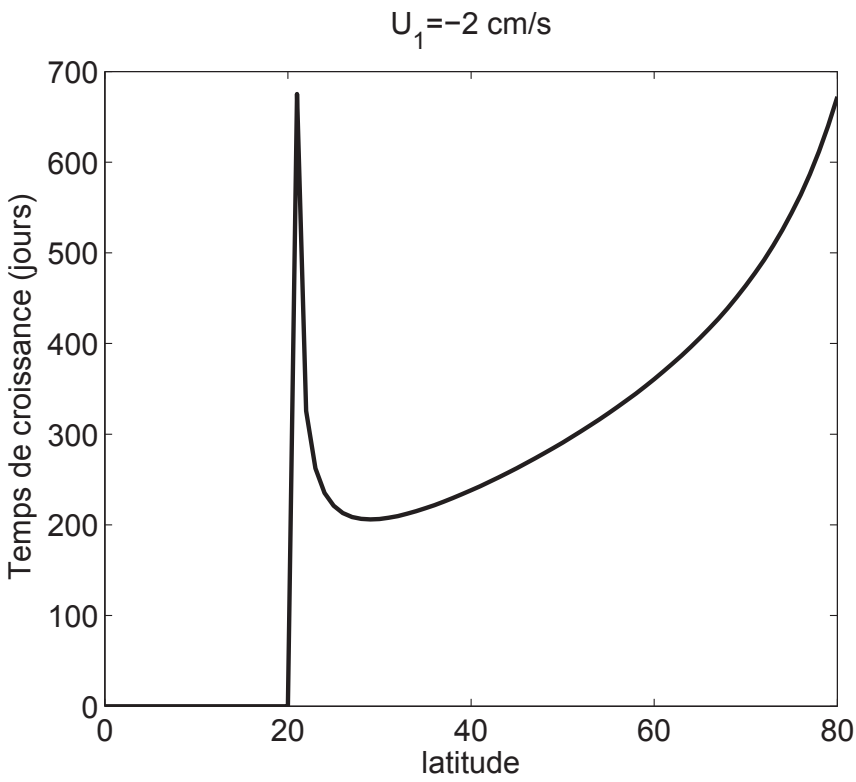

FIGURE *4.2 – Temps de croissance (jours) des modes grandes échelles dans un modèle à deux couches et demie en fonction de la latitude pour une vitesse zonale dans la première couche de* $-0.02\,\mathrm{m/s}$ *et nulle dans la deuxième. L'échelle horizontale considérée est 1000 km,* $g' = 0.01\ m/s^2$ $H1 = H2 = 200$ *m.*

entre les couches 2 et 3. Les équations pour τ_1 et τ_2 sont :

$$\begin{cases} F\frac{\partial \tau_1}{\partial t} = (\beta - FU_2)(v_1 - v_2) + (\beta + F(U_1 - U_2))\, v_2 \\ F\frac{\partial \tau_2}{\partial t} = \beta(v_1 - v_2) + 2\beta v_2 \end{cases} \tag{4.11}$$

Pour que τ_1 et τ_2 aient une croissance (ou une décroissance) exponentielle, il faut donc que $\beta(v_1 - v_2)$ soit en phase avec τ_2 et que $(\beta + F(U_1 - U_2))\, v_2$ soit en phase avec τ_1. Puisque nous avons vu plus haut que lors d'une instabilité $(\beta + F(U_1 - U_2)) < 0$, il faut donc $\overline{\tau_1 v_2} < 0$ et $\overline{\tau_2(v_1 - v_2)} > 0$, où la barre horizontale représente la moyenne sur une longueur d'onde. On peut montrer que $-\overline{\tau_1 v_2} = \overline{\tau_2(v_1 - v_2)} = \overline{\tau_2(v_1)}$ (car $\overline{\psi_2 \partial_x(\psi_1)} = -\overline{\psi_1 \partial_x(\psi_2)}$). Pour qu'il y ait un mode croissant il faut donc simplement $\overline{\tau_2(v_1)} > 0$.
La vitesse de phase du mode le plus rapide vers l'ouest (normalisée par la vitesse de phase du premier mode barocline en l'absence de courant moyen) est représentée sur la figure (4.4) en fonction de U_1 et U_2. Pour des valeurs situées dans la zone d'instabilité, la vitesse de phase (commune) des deux modes ne dépend que de la vitesse moyenne dans la deuxième couche, $U2 : C = \frac{-3\beta}{2F} + \frac{U_2}{2}$. Lorsque le courant moyen n'est pas instable, Liu [1999] montre que l'un des deux modes baroclines satisfait approximativement le "non doppler shift" alors que le deuxième est advecté par U_2. Cet effet peut être observé sur la figure (4.4). Lorsque U_2 est suffisamment intense vers l'ouest, les isolignes de vitesse de phase sont alignées avec celles de U_2 alors que pour $U_2 > 0$ et $U_1 > 0$ les vitesses de phase restent proches de celles du mode barocline sans courant moyen. Liu [1999] utilise ensuite cet argument pour expliquer pourquoi l'instabilité a lieu uniquement lorsque le courant moyen dans la première couche est vers l'ouest. Pour que les deux ondes baroclines soient couplées, il faut qu'elles aient des vitesses de phase égales. Pour un flot vers l'ouest, l'un des modes est advecté vers l'ouest alors que l'autre garde à peu près la même vitesse de phase. Si le flot vers l'ouest est suffisamment fort, les deux modes

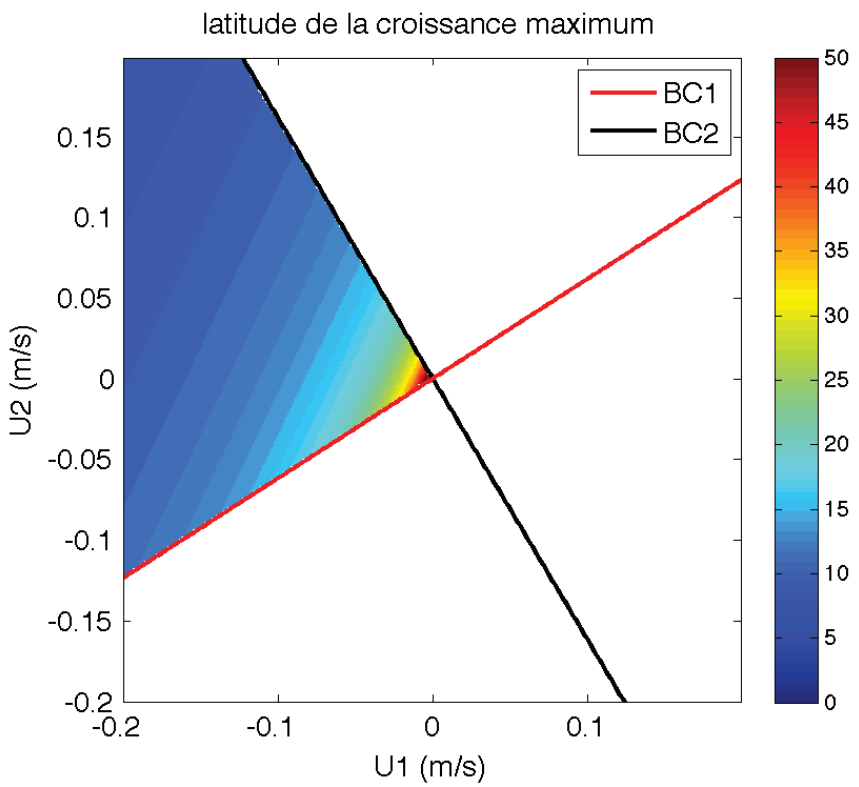

FIGURE *4.3 – Latitude où la croissance est maximum en fonction de U_1 et U_2 et pour $g' = 0.01\ m/s^2$ $H1 = H2 = 200\ m$. Les axes des deux modes verticaux sont tracés en rouge (BC1) et noir (BC2).*

peuvent atteindre des vitesses comparables. Au contraire si le flot est dirigé vers l'est, le mode advectif se propagera vers l'est alors que celui qui n'est pratiquement pas influencé par le courant moyen gardera une vitesse de phase vers l'ouest : les deux modes ne peuvent pas se coupler. Pour le démontrer, Liu [1999] calcule les limites asymptotiques des vitesses de phase lorsque $(U_1, U_2) \to \infty$: et $0 < \frac{U_2}{U_1} < 1$ avec $\frac{U_2}{U_1} = \alpha$ α étant une constante. Les vitesses U_1 et U_2 sont donc dirigées dans le même sens.

$$C_{pm} = -\frac{3\beta - FU_2 \pm \sqrt{5\beta^2 + 4\beta FU_1 - 2\beta FU_2 + F^2U_2^2}}{2F} \tag{4.12}$$

Pour $U_2 > 0$, les limites asymptotiques sont : $C_p \sim -\frac{\beta}{F}(1+\alpha) < 0$ et $C_m \sim U_2 + \frac{\beta}{F}(\alpha - 2)$. Pour $U_2 < 0$ $C_m \sim -\frac{\beta}{F}(1+\alpha) < 0$ et $C_p \sim U_2 + \frac{\beta}{F}(\alpha - 2)$ (le changement de signe intervient parce que $\sqrt{U_2^2} = |U_2|$). L'un des deux modes se déplace donc à la vitesse U_2 alors que l'autre a une vitesse de phase négative.
Cette démonstration n'est pas entièrement satisfaisante parce que l'hypothèse $U_1U_2 > 0$ est en contradiction avec le fait qu'il existe une instabilité lorsque $U_1 < 0$ et $U_2 > 0$. Liu avance l'argument que la vitesse de phase du deuxième mode barocline doit être accélérée vers l'ouest par le courant moyen pour atteindre celle du premier mode barocline. Les vitesses étant alors comparables, les modes peuvent se coupler et créer une instabilité. L'effet inverse est-il possible ? Est-ce que le premier mode barocline peut être ralenti par un courant moyen jusqu'à ce que sa vitesse de phase soit du même ordre que celle du deuxième ? Pour répondre à ces questions, une équation exprimant la modification de la vitesse de phase des deux modes baroclines par un courant moyen est dérivée ci-dessous.
Tout d'abord, précisons que pour qu'il y ait une instabilité, il faut que les vitesses de phase des deux modes verticaux soient les mêmes. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante puisque lorsque le déterminant est nul $\Delta = 0$ (4.9) les deux modes (il n'y en a en fait plus

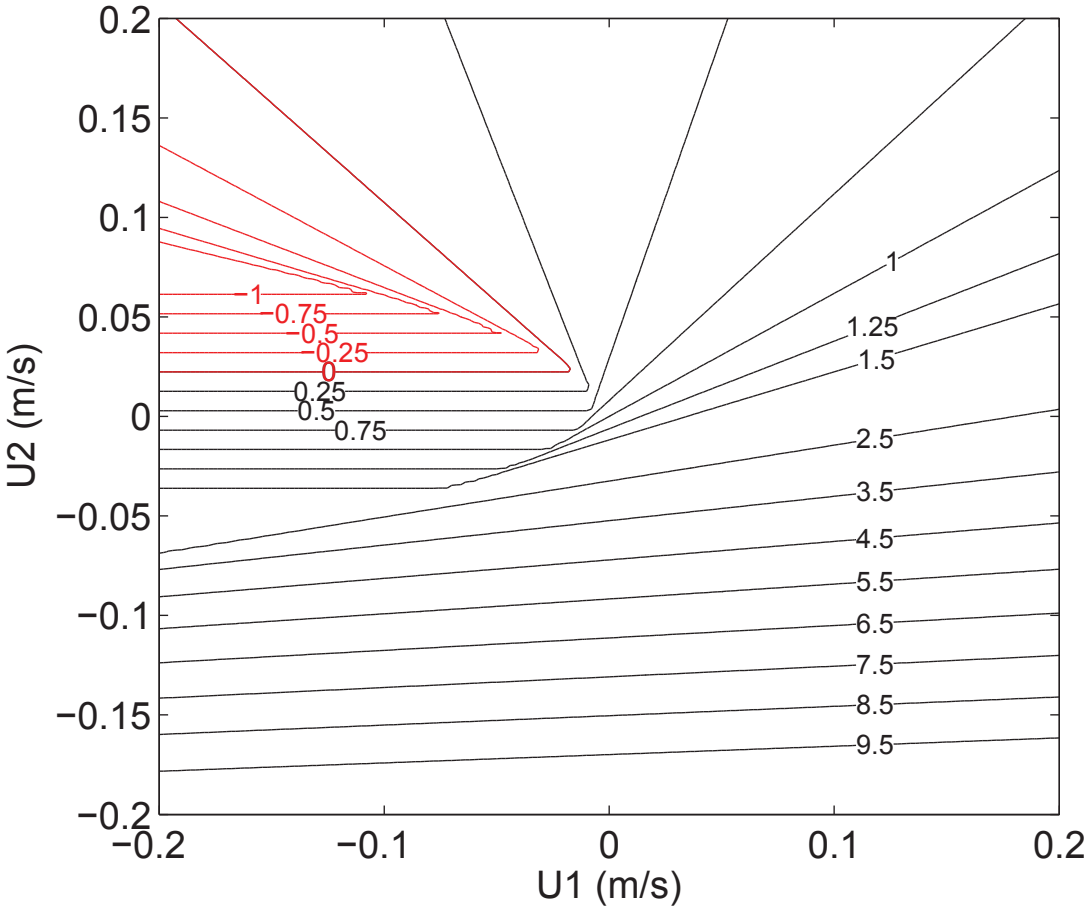

FIGURE *4.4 – Vitesse de phase du mode le plus rapide vers l'ouest normalisée par la vitesse de phase du mode barocline (sans courant moyen). En noir les valeurs positives (donc vers l'ouest puisque dans le même sens que le mode barocline) en rouge les valeurs négatives.*

qu'un) ont la même vitesse de phase mais ne sont pas instables. Il s'agit des modes situés sur la parabole décrite par l'équation (4.10).
Les modes verticaux en l'absence de courant moyen sont appelés dans ce qui suit $G_1(z)$ et $G_2(z)$. Ces deux modes sont tracés sur la figure (4.1), ils sont orthogonaux et forment une base dans laquelle peuvent s'exprimer de manière unique l'ensemble des anomalies possibles. ψ est donc décomposé de la manière suivante : $\begin{pmatrix}\psi_1(x,y,t)\\ \psi_2(x,y,t)\end{pmatrix} = a(x,y,t)*G_1(z)+b(x,y,t)*G_2(z)$ où a et b sont les coordonnées de ψ dans cette base. En choisissant d'étudier l'effet d'un courant moyen selon $G_i(z)$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix} = U_{BCi} * G_i(z)$, l'équation ci-dessous est obtenue :

$$\begin{cases} (U_{BCi}G_i(1)+c)\,(F(\alpha_2-\alpha_1)) + (\beta + U_{BCi}F\,(G_i(1)-G_i(2)))\,\alpha_1 = 0 \\ (U_{BCi}G_i(2)+c)\,(F(\alpha_1-2\alpha_2)) + (\beta + U_{BCi}F\,(2G_i(2)-G_i(1)))\,\alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

Avec α_i les projections des fonctions courant ψ_i sur les modes de Fourier. En utilisant la propriété suivante :

$$c_i \begin{pmatrix} F\,(G_i(2)-G_i(1)) \\ F\,(G_i(1)-2G_i(2)) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} G_i(1) \\ G_i(2) \end{pmatrix} = 0 \tag{4.14}$$

l'équation (4.13) devient :

$$\begin{cases} (U_{BCi}G_i(1)+c)\,(F(\alpha_2-\alpha_1))+\beta\left(1+\frac{U_{BCi}}{c_i}G_i(1)\right)\alpha_1=0 \\ (U_{BCi}G_i(2)+c)\,(F(\alpha_1-2\alpha_2))+\beta\left(1+\frac{U_{BCi}}{c_i}G_i(2)\right)\alpha_2=0 \end{cases} \tag{4.15}$$

En décomposant ψ sur chaque mode comme indiqué plus haut, le système devient :

$$\begin{cases} (U_{BCi}G_i(1)+c)\,\beta\left(-\frac{a}{c_1}G_1(1)-\frac{b}{c_2}G_2(1)\right)+\beta\left(1+\frac{U_{BCi}}{c_i}G_i(1)\right)(aG_1(1)+bG_2(1))=0 \\ (U_{BCi}G_i(2)+c)\,\beta\left(-\frac{a}{c_1}G_1(2)-\frac{b}{c_2}G_2(2)\right)+\beta\left(1+\frac{U_{BCi}}{c_i}G_i(2)\right)(aG_1(2)+bG_2(2))=0 \end{cases} \tag{4.16}$$

Puis, en divisant par β et en projetant ces deux équations sur $G_i(z)$:

$$\left(-\frac{c}{c_i}+1\right)a+b\sum_{j=1,2}G_i(j)G_1(j)G_2(j)U_{BCi}\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)(-1)^{i+1}=0 \tag{4.17}$$

puis sur $G_{3-i}(z)$:

$$0+b(1-\frac{c}{c_{3-i}})+b\sum_{j=1,2}G_{3-i}(j)G_1(j)G_2(j)U_{BCi}\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)(-1)^{i+1}=0 \tag{4.18}$$

Les deux équations (4.17) et (4.18) constituent un système de deux équations à deux inconnues qui a une solution uniquement si son déterminant est nul. L'équation du second degré qui en résulte donne deux solutions pour c, la première est $c=c_i$ c'est-à-dire qu'une des deux ondes n'est pas affectée par le courant moyen dans le mode i : c'est le non Doppler shift. L'autre solution est :

$$c=c_{3-i}+U_{BCi}\left(\frac{c_{3-i}}{c_i}-1\right)\sum_{j=1,2}G_i(j)G_1(j)G_2(j) \tag{4.19}$$

Il est possible de dériver la même équation pour deux modes verticaux plutôt que deux couches et demie, on obtient alors la même formule (4.19) mais avec $\int\limits_{z=-H}^{0}G_i(z)G_1(z)G_2(z)dz$ à la place de $\sum\limits_{j=1,2}G_i(j)G_1(j)G_2(j)$. Pour en revenir à l'équation (4.19), puisque $G_1(1)>0$ $G_1(2)>0$ et $G_2(1)>0$ $G_2(2)<0$, la quantité $\sum\limits_{j=1,2}G_2(j)G_1(j)G_2(j)$ est positive et puisque $G_1(1)G_1(1)G_2(1)>-(G_1(2)G_1(2)G_2(2))$, la quantité $\sum\limits_{j=1,2}G_1(j)G_1(j)G_2(j)$ est aussi positive. L'instabilité ne peut avoir lieu que si les deux ondes ont des vitesses de phase égales, ce qui nous donne la vitesse U_{BC1} :

$$U_{BC1}=\frac{c_1-c_2}{\left(\frac{c_2}{c_1}-1\right)\sum\limits_{j=1,2}G_1(j)G_1(j)G_2(j)} \tag{4.20}$$

Et puisque $c_1>c_2$, $\frac{c_1-c_2}{\left(\frac{c_2}{c_1}-1\right)}<0$, U_{BC1} doit être négatif pour que l'onde du deuxième mode pseudo-barocline puisse avoir une vitesse de phase égale à c_1. De même pour une onde modifiée par U_{BC2} :

$$U_{BC2}=\frac{c_2-c_1}{\left(\frac{c_1}{c_2}-1\right)\sum\limits_{j=1,2}G_1(j)G_1(j)G_2(j)} \tag{4.21}$$

le même type de raisonnement mène à la conclusion que $U_{BC2}<0$. Cependant, pour un courant moyen situé sur les droites des modes verticaux sans courant moyen (c'est-à-dire que $U_{BC1}=0$ ou $U_{BC2}=0$), il ne peut pas y avoir véritablement d'instabilité, en effet, (4.20) et (4.21) sont

situés sur la parabole correspondant au déterminant nul (4.9). La figure (4.1) illustre cette propriété : lorsque U_{BC2} satisfait (4.21) et U_{BC1} (4.20), les deux droites sont adjacentes à la zone d'instabilité. Par conséquent, pour qu'il y ait une instabilité il faut que la projection du courant moyen soit non nulle sur les deux modes, s'il se projette uniquement sur l'un des deux modes, le déterminant s'annulera mais ne sera jamais négatif. La deuxième conclusion de ce calcul est que, comme le fait remarquer Liu, pour accélérer une onde du deuxième mode pseudo-barocline il faut effectivement un courant moyen (sur le premier mode barocline) vers l'ouest dans la première couche. Mais, deuxième possibilité, pour décélérer une onde du premier mode barocline il faut aussi un courant moyen (sur le deuxième mode barocline) vers l'ouest dans la première couche. Cette deuxième possibilité fait écho au résultat de Dewar [1998] montrant que les corrections des vitesses de phase du premier mode barocline sont dans le sens inverse du courant moyen de surface.

Structure verticale des modes instables

Les figures (4.5) et (4.6) montrent respectivement le déphasage et l'amplitude dans la deuxième couche du mode croissant. Pour une vitesse U_1 en surface donnée, le maximum de croissance est obtenu lorsque $U_2 = \frac{\beta}{F}$ et correspond à un déphasage de $90\,^\circ$ avec la surface. Le mode croissant peut être intensifié en surface si l'amplitude de U_1 est suffisamment élevée ou bien intensifié dans la deuxième couche si son amplitude est faible, proche de $-\frac{\beta}{F}$. La structure verticale de ces modes dépend donc de l'intensité du courant moyen, mais puisqu'ils ne peuvent pas se projeter sur le mode barotrope leur structure verticale est par conséquent potentiellement moins grave que celle des modes de Charney.

Pour résumer, dans un modèle à deux couches et demie, l'instabilité de grande échelle ne peut

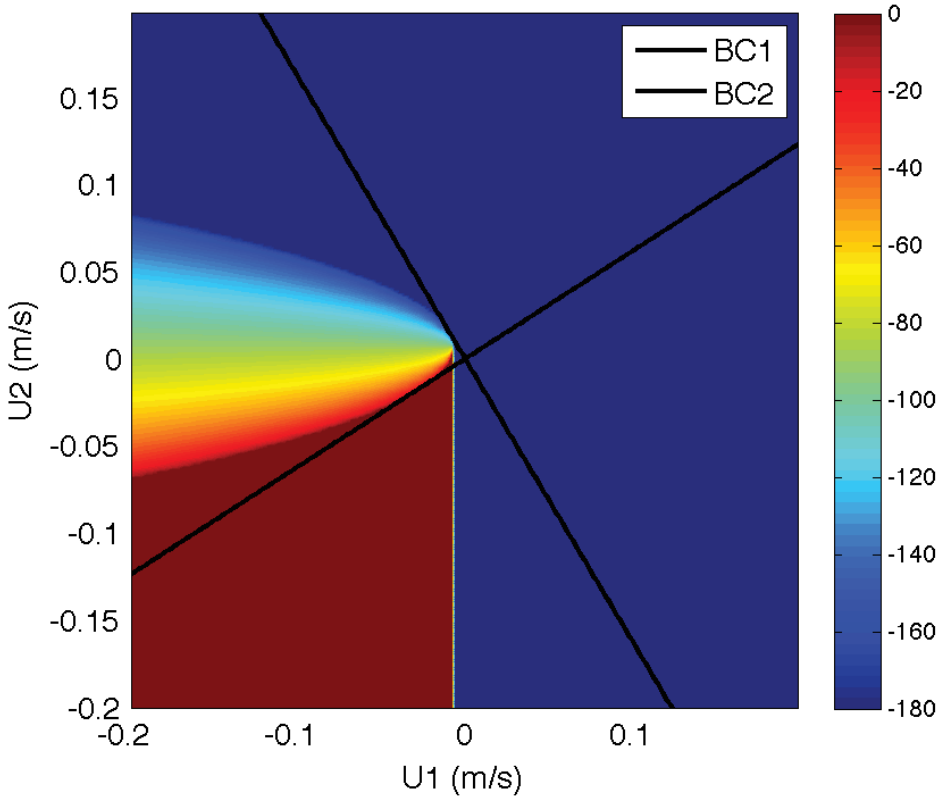

FIGURE *4.5 – Déphasage entre la première couche et la deuxième en fonction de U_1 et de U_2.*

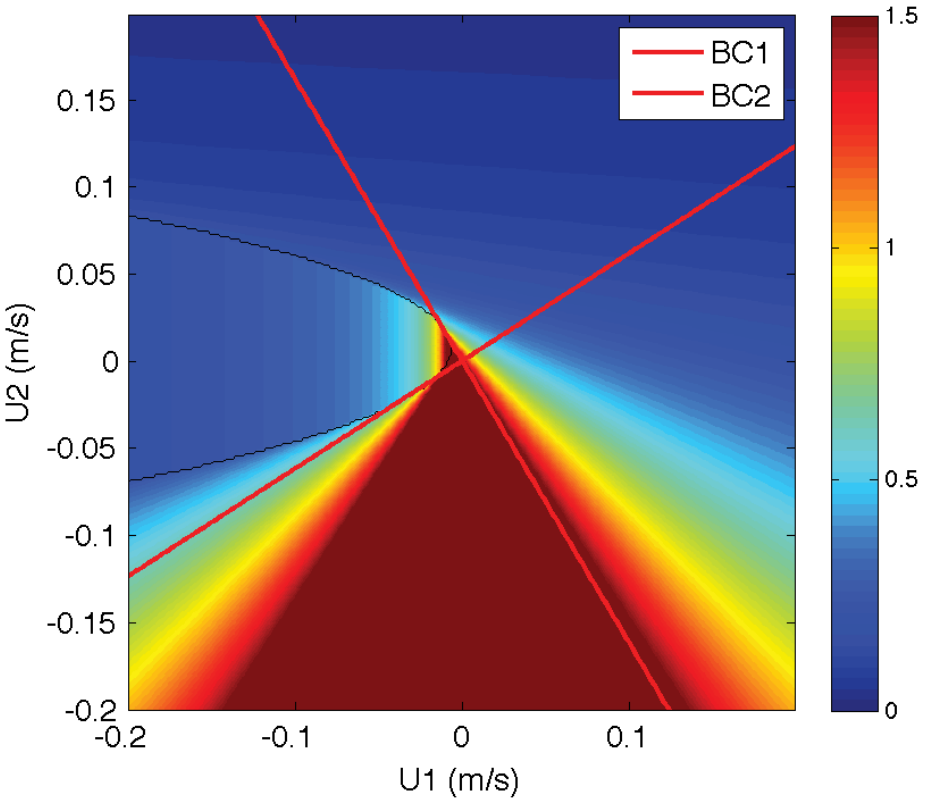

FIGURE *4.6 – Amplitude du mode croissant dans la deuxième couche en fonction de U_1 et U_2 pour une amplitude de 1 dans la première couche.*

avoir lieu que si la vitesse moyenne en surface est dirigée vers l'ouest. La vitesse sous la surface peut, quant à elle, être dirigée vers l'est ou vers l'ouest. Dans le modèle, la vitesse de phase des modes instables dépend de la vitesse moyenne dans la deuxième couche. Elle peut être inférieure ou supérieure à la vitesse de phase du mode barocline sans courant moyen, mais est inférieure lorsque les vitesses dans la deuxième couche sont faibles. Pour une vitesse moyenne équivalente, l'instabilité est plus forte à basse qu'à haute latitude. Ce modèle à deux couches et demie suggère donc que les zones d'instabilité grande échelle seront situées à basse latitude dans les zones de courants moyens vers l'ouest. Cependant, il est possible d'imaginer qu'en ajoutant une couche supplémentaire, l'interaction des trois modes baroclines puisse donner des modes instables même quand le courant moyen est vers l'est. C'est cette possibilité que nous allons examiner dans le paragraphe suivant à l'aide d'un modèle à trois couches et demie.

Modèle à trois couches et demie, instabilité et structure verticale des modes instables

Avec l'ajout d'une couche supplémentaire, les possibilités d'instabilité deviennent beaucoup plus riches. En copiant le raisonnement élaboré dans le paragraphe précédent, pour un courant moyen entièrement contenu dans le premier mode barocline par exemple, les vitesses de phase des trois modes peuvent être similaires si : le mode BC2 ou le mode BC3 sont accélérés vers le BC1 qui lui reste le même, ou bien si le mode BC2 et le mode BC3 se rapprochent. Il y a trois modes verticaux, le nombre total de possibilités serait donc de neuf.
La figure (4.7) montre le temps de croissance des modes instables dans un modèle à trois couches et demie lorsque le courant moyen se projette sur le premier et deuxième mode barocline, c'est-à-dire $U = a * U_{BC1}(z) + b * U_{BC2}(z)$ où (a, b) sont des paramètres que l'on fait varier. Puisque

les valeurs de $U_{BC1}(1)$ et $U_{BC2}(1)$ dans la première couche sont normalisées, la figure (4.7) montre que le flot peut cette fois être instable même lorsque le courant moyen en surface est vers l'est.

Pour étudier cette possibilité (et l'effet des modes baroclines supérieurs) la partie suivante

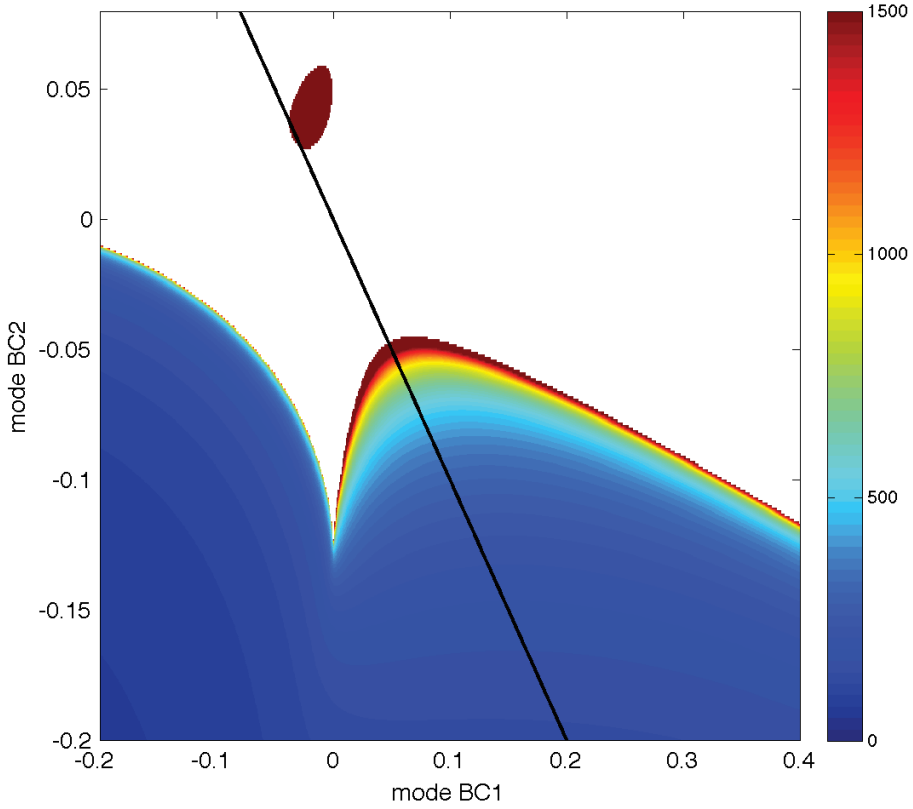

FIGURE *4.7 – Croissance des modes instables (en jours) pour un modèle à trois couches et demie et une vitesse moyenne donnée par* $U = a * U_{BC1}(z) + b * U_{BC2}(z)$ *où* $U_{BC1}(z)$ *est le 1 er mode barocline et* $U_{BC2}(z)$ *le deuxième, les deux vitesses sont normalisées en surface. (a,b) sont les abscisses et ordonnées indiquées sur la figure. La droite noire sépare les vitesses en surface dirigées vers l'est (à droite de cette courbe) de celle dirigées vers l'ouest (à gauche).*

s'intéresse aux modes instables de grande échelle lorsque la stratification est continue sur la verticale.

4.2.2 Calcul sur une stratification continue

Pour effectuer le calcul des modes instables sur une stratification continue, l'équation suivante est discrétisée verticalement :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x} + V(z)\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\nabla^2\psi + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right) + \left(\beta - \frac{d}{dz}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{dU}{dz}\right)\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{d}{dz}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{dV}{dz}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \tag{4.22}$$

avec la condition au fond :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(-H)\frac{\partial}{\partial x} + V(-H)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dV}{dz}(-H) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dU}{dz}(-H) = 0 \tag{4.23}$$

et la condition en surface :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(0)\frac{\partial}{\partial x} + V(0)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dV}{dz}(0) - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dU}{dz}(0) = 0 \tag{4.24}$$

Les deux conditions aux limites ont été dérivées sous les approximations du toit rigide et du fond plat. L'approximation des ondes longues n'est plus faite pour permettre de comparer les modes grandes échelles avec les modes de Charney. Dans un premier temps, la vitesse méridionale est choisie nulle et la vitesse zonale est celle utilisée dans Gill *et al.* [1974] :

$$U(z) = U_0 * \left(0.5 + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{z - zo}{h_u}\right)\right) \tag{4.25}$$

où $z_0 = -700$m, $h_u = 350$m et U_0 l'amplitude de U. L'allure de $U(z)$, pour $U_0 = -0.1$ m/s, est dessinée sur la figure (4.8) à côté de celle de $N^2(z)$, la fréquence de Brunt-Väisälä dont la formule est empruntée au même article :

$$N(z) = 10^2 f_0 \exp\left(\frac{z}{2d}\right) \tag{4.26}$$

f_0 est le paramètre de Coriolis, $d = 900$m. Ces formules de U et N sont censées représenter des profils typiques de la vitesse moyenne et de la fréquence de Brunt-Väisälä des latitudes moyennes.
Le taux de croissance des modes instables obtenus en résolvant l'équation (4.22) à l'aide des formules de U et N données plus haut est représenté sur la figure (4.8). La latitude est 30 ° N. Le résultat est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et des abscisses, les modes qui croissent le plus vite correspondent à un nombre d'onde méridien nul $l = 0$. Deux types de modes peuvent être distingués : les modes de Charney qui ont le taux de croissance le plus élevé mais des échelles spatiales relativement faibles, et les modes de Green aux échelles spatiales plus grandes et aux taux de croissance plus faibles. Les maximums de croissance de ces deux modes sont indiqués par des flèches sur la figure (4.9). La structure verticale du mode de Green est montrée sur la figure (4.10) tandis que celle du mode de Charney est sur la figure (4.11). Le mode de Charney est plutôt intensifié autour d'une profondeur de 1000 m. Alors que le mode de Green a, quant à lui, une structure verticale avec un minimum d'amplitude autour de 1000 m, ressemblant à un premier mode barocline.

Quelle est l'influence de la direction de U sur la croissance des modes instables ?

La figure (4.12) compare les taux de croissance obtenus pour un courant zonal vers l'ouest et vers l'est avec la même intensité (10 cm/s). Les croissances des modes sont beaucoup plus fortes lorsqu'il est dirigé vers l'ouest. On s'intéresse particulièrement aux différences entre les temps de croissance des modes de Green et de Charney puisque c'est généralement l'argument d'une différence élevée qui est utilisé pour ne pas étudier les modes de Green. Si pour un flot vers l'est, les modes de Green ont effectivement des taux de croissance largement inférieurs à ceux des modes de Charney (on peut difficilement distinguer une croissance pour $k < \frac{1}{R_d}$), ce constat semble être beaucoup moins vrai pour un flot vers l'ouest. Le maximum de croissance des modes de Green est, bien que toujours plus faible, du même ordre de grandeur que le taux de croissance des modes de Charney.
Le figure (4.12) montre que le taux de croissance des modes de Green grandit dans un premier temps linéairement avec k, jusqu'à atteindre un maximum autour d'une longueur d'onde de 400 km. La croissance linéaire avec k est facilement explicable. En effet, lorsque les échelles sont suffisamment grandes, l'approximation des ondes longues est raisonnable et lorsque le courant moyen est instable, le taux de croissance vaut simplement $\omega_i = c_i k$. $\omega_i(k)$ est donc une fonction linéaire de k.
L'approximation des ondes longues implique la propriété peu réaliste que les petites échelles

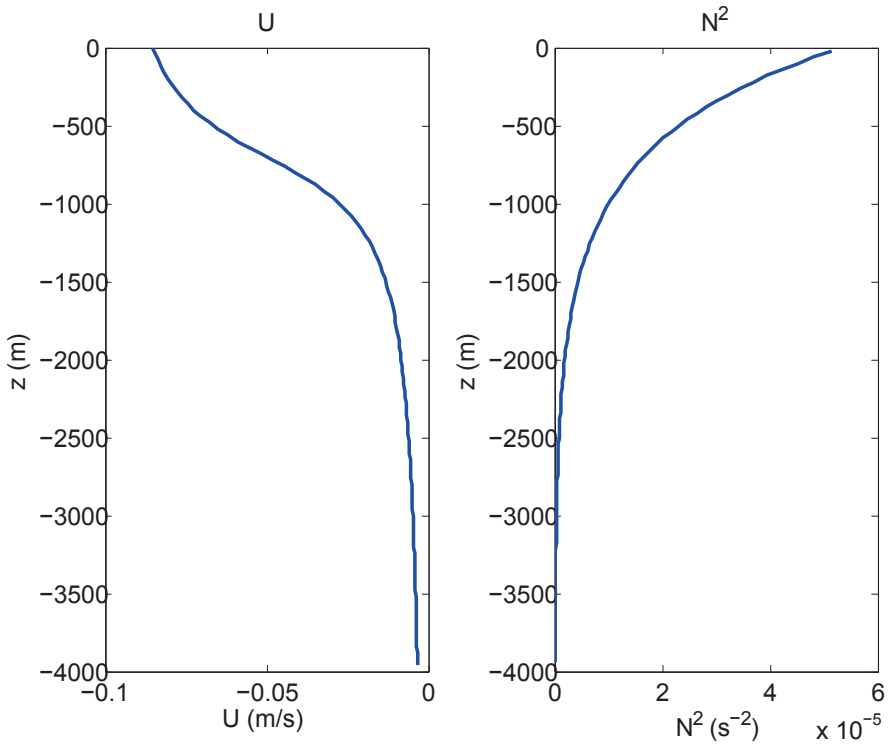

FIGURE *4.8 – Profil de $U(z)$ (gauche) et $N^2(z)$ (droite) utilisés pour le calcul de stabilité linéaire.*

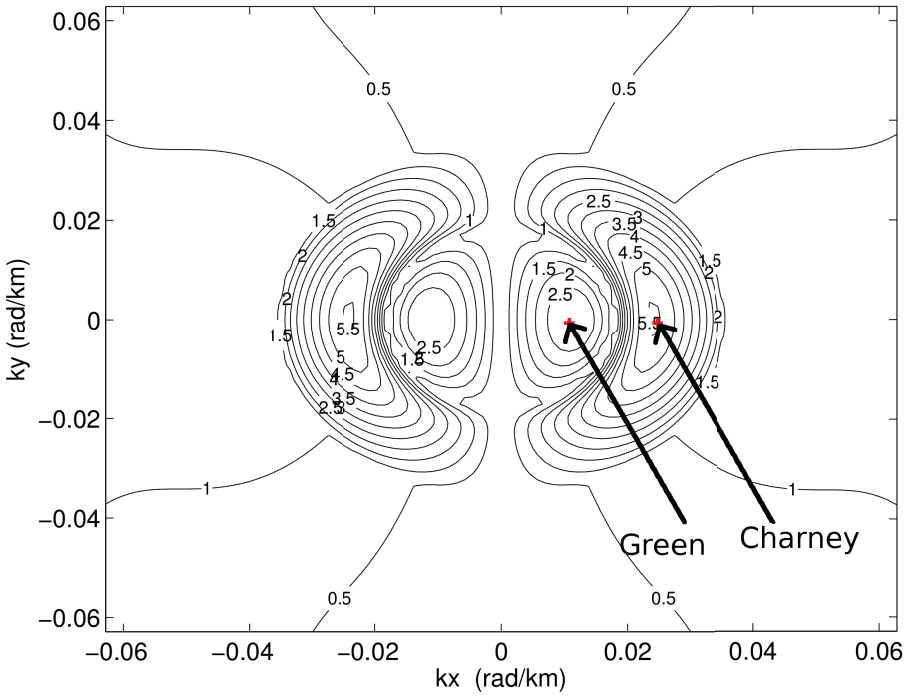

FIGURE *4.9 – Taux de croissance en années^{-1} en fonction des nombres d'ondes horizontaux, calculé pour un courant moyen zonal vers l'ouest (le profil de la figure (4.8). Les deux croix rouges représentent les maximums de croissance des modes de Green et Charney.*

sont toujours favorisées par rapport aux grandes. La dissipation, en agissant préférentiellement sur les petites échelles est ce qui permet aux modes instables de grande échelle d'exister. Cet

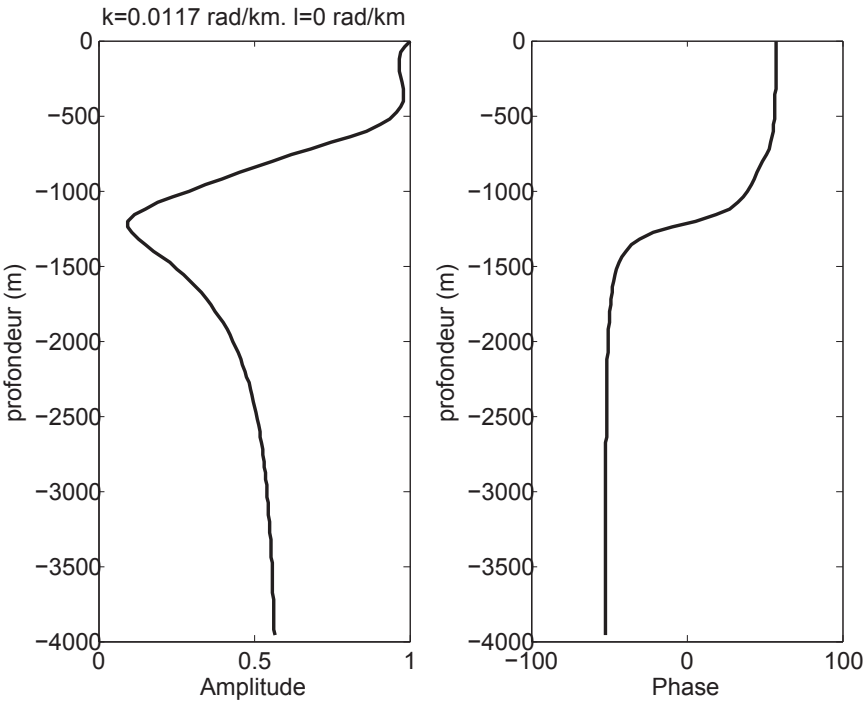

FIGURE *4.10 – Amplitude (gauche) et phase (droite) du mode de Green de la figure (4.9) en fonction de la profondeur. L'amplitude est normalisée par son maximum.*

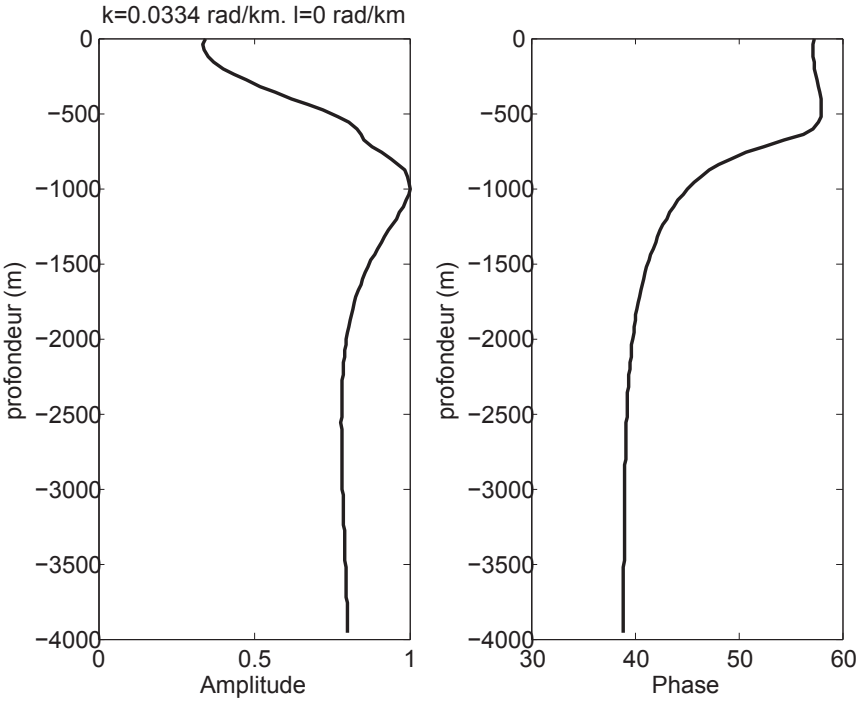

FIGURE *4.11 – Amplitude (gauche) et phase (droite) du mode de Charney de la figure (4.9) en fonction de la profondeur. L'amplitude est normalisée par son maximum.*

effet peut être modélisé par exemple en ajoutant le terme $\kappa_H \nabla^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$ dans le membre de droite de l'équation (4.22). Ce terme de dissipation modifie la fréquence ω calculée sans dissipation en la remplaçant par $\omega_{\text{friction}} = \omega - i(k^2+l^2)\kappa_H$. Le taux de croissance sera d'autant

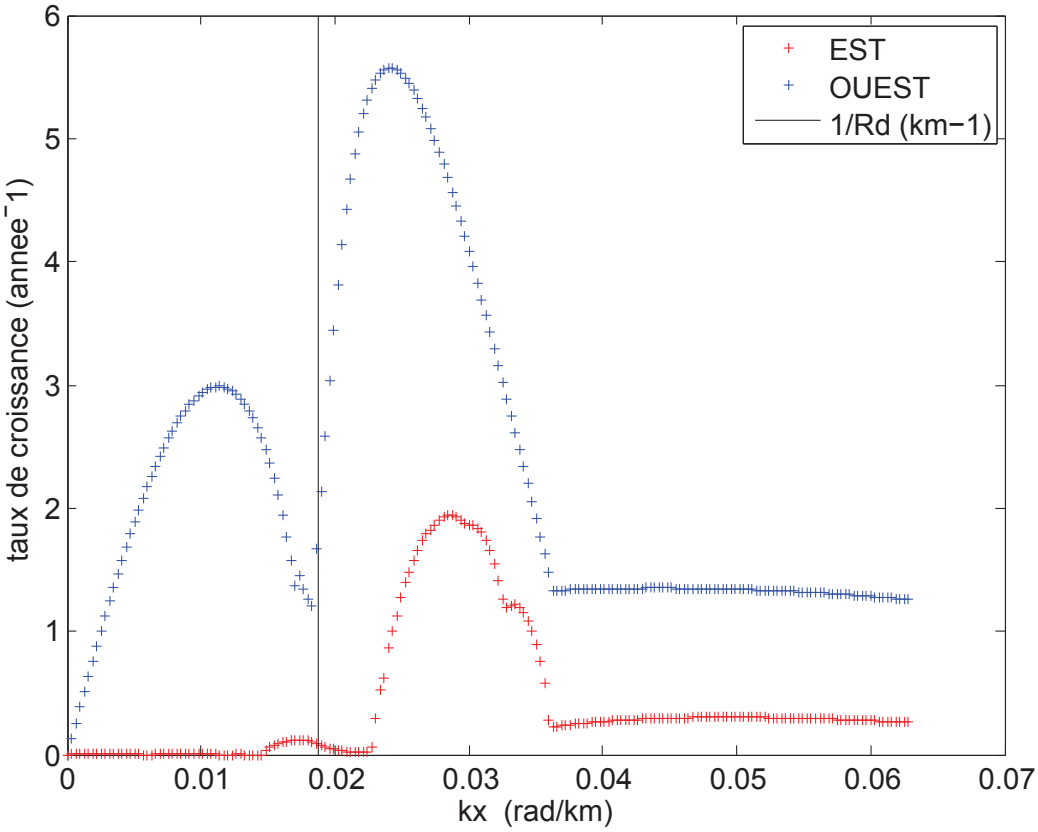

FIGURE *4.12 – Taux de croissance (en années -1) pour un courant moyen zonal vers l'est (en bleu) et vers l'ouest de la même intensité (*0.1 m/s*)*

plus grand que $(k^2 + l^2)$ est petit, la dissipation favorise donc la croissance des grandes échelles spatiales.

Influence de la vitesse méridionale

La figure (4.13) montre l'effet de l'orientation du courant moyen sur le taux de croissance des modes. Une symétrie selon l'axe $\vec{j}$ transforme le taux de croissance obtenu lorsque le courant est dirigé vers le nord en celui obtenu pour un courant moyen vers le sud. Cette symétrie n'est pas étonnante : changer les signes du nombre d'onde l et de la vitesse méridienne V dans (4.22) redonne exactement la même équation. En revanche, l'effet β fait en sorte qu'un changement de signe de U et de k ne redonne pas la même équation :

$$\left(\beta - \frac{d}{dz}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{dU}{dz}\right)\right)k \neq -k\left(\beta + \frac{d}{dz}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{dU}{dz}\right)\right) \tag{4.27}$$

et les solutions calculées en présence d'un courant vers l'ouest ou vers l'est sont par conséquent différentes comme l'atteste la figure (4.13). L'orientation de la vitesse moyenne influence donc d'une part les nombres d'ondes du maximum de croissance mais aussi la valeur de cette croissance. Des études idéalisées, par exemple Arbic et Flierl [2004], ont déjà montré l'importance de l'orientation de la vitesse moyenne sur la turbulence créée par instabilité barocline.

Calculer les modes instables sur des profils idéalisés de courant moyen permet d'illustrer le comportement de l'instabilité mais permet difficilement d'estimer correctement les zones instables ou stables de l'océan. Le paragraphe suivant sera donc dévolu au calcul de la stabilité locale sur des données réelles.

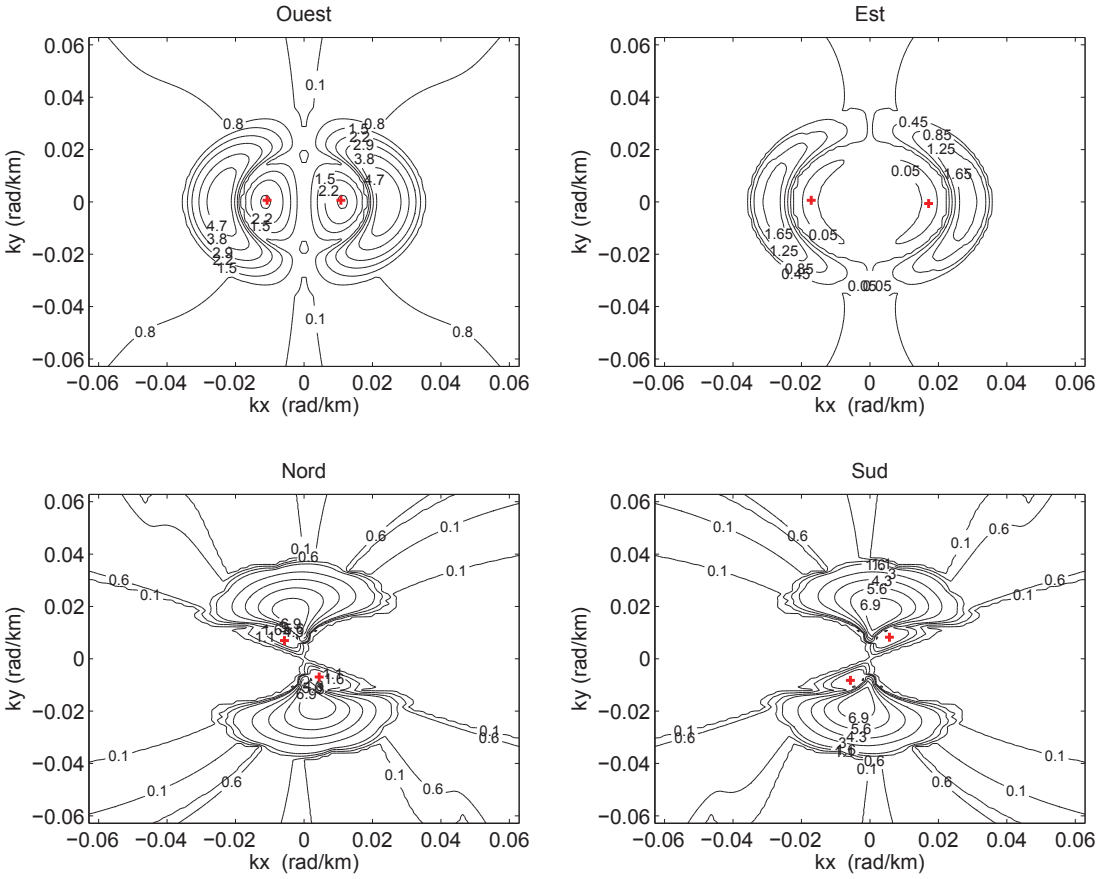

FIGURE *4.13 – Taux de croissance en fonction de l'orientation du courant moyen. De haut en bas, de gauche à droite, le courant moyen est dirigé vers l'ouest, l'est le nord et le sud. Les modes de Green sont indiqués sur chaque sous figure par des croix rouges.*

4.3 Calcul des modes instables grande échelle sur des données réelles de courant moyen

Dans cette section, l'équation (4.22) et ses conditions aux limites en surface (4.45) et au fond (4.24) sont résolues en utilisant des données réelles. La base de données utilisée pour le courant moyen est celle construite par Michel Ollitrault et Alain Colin de Verdière et décrite dans Ollitrault et Colin de Verdière [2014] à partir des données de balises ARGOs généralement situées à 1000 mètres de profondeur. Les courants moyennés à cette profondeur sont ensuite extrapolés sur la verticale grâce à la formule du vent thermique et à une base de données de stratification moyenne (World Ocean Atlas 2011 NOAA). Ces données ont une résolution de 1 degré sur l'horizontale et possèdent 33 niveaux sur la verticale, la hauteur entre chaque niveau variant de 10 m en surface à 500 mètres en profondeur.
En chaque point du globe, le courant moyen et la stratification sont extraits des atlas, puis, U, V, $\frac{dQ}{dy} = \beta - \frac{d}{dz}\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{dU}{dz}$ et $\frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dz}\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{dV}{dz}$ sont calculés. La vorticité relative moyenne étant généralement très inférieure au stretching moyen, elle est négligée. Une fois ces champs calculés, l'équation (4.22) est discrétisée sur la verticale grâce à un schéma numérique centré, puis écrite sous la forme d'une matrice en introduisant $\psi = \alpha(z)\exp\left(i(kx + ly + \omega t)\right)$. (k, l) varient entre $-\frac{2\pi}{600}$ et $\frac{2\pi}{600}$ rad/ km, pour chaque (k, l), la valeur propre obtenue correspondant à la plus forte croissance est stockée dans une matrice $\omega_i(k, l)$. Une fois que ce calcul est terminé,

le mode qui croît le plus vite parmi l'ensemble des (k, l) est sélectionné et stocké. L'opération est répétée sur l'ensemble des points du globe.
Le calcul d'instabilité réalisé à la fin de l'article de Killworth et Blundell [2007] suggère que ces modes ne sont pas responsables des anomalies observées car leurs vitesses de phase sont beaucoup plus faibles que celles des observations. Leur calcul suppose que $l = 0$ et que $k = \frac{2\pi}{500}$ rad/km. On montrera, sur nos données, que ne pas faire ces hypothèses sur les nombres d'onde mène à des résultats sensiblement différents. Une des explications est que le taux de croissance maximum, pour les grandes échelles (ou "grand" reste à définir), ne se trouve pas forcément à $l = 0$ lorsque $V(z) \neq 0$ ni à $k = \frac{2\pi}{500}$ rad/km. De plus, à la longueur d'onde utilisée par Killworth dans son calcul, $k = \frac{2\pi}{500}$, la vorticité relative n'est pas négligeable par rapport au stretching, surtout à basse latitude, là où le rayon de déformation est grand (ou, autrement dit, que l'approximation des ondes longues n'est pas valable). Par conséquent, il n'est pas impossible que la vitesse de phase augmente (ou diminue) lorsque la longueur d'onde augmente (lorsque l'approximation des ondes longues est valable, la vitesse de phase est à peu près constante parce que la fréquence varie linéairement avec la norme de $\vec{k}$ mais dans le cas contraire, elle n'est pas constante). Notre deuxième argument, en plus des calculs qui vont suivre, est qu'il est possible que l'instabilité crée des anomalies qui sont ensuite radiées sous la forme d'ondes de Rossby visibles dans l'altimétrie de surface. Le troisième, comme le montre Tailleux [2012], est que les équations pour la vitesse verticale, utilisées dans cet article, négligent un terme qui ne devrait pas l'être et dont l'omission peut poser problème lorsque l'approximation des ondes longues n'est pas valide.
Un calcul analogue a aussi été réalisé par Smith [2007] mais les modes de grandes échelles ont été éliminés par la sélection systématique des modes avec la plus forte croissance. L'une des difficultés de ce calcul est donc de filtrer les modes de Charney. Nous allons présenter dans ce qui suit deux méthodes de filtrage. La première sélectionne simplement le mode avec la croissance la plus élevée parmi les longueurs d'ondes supérieures à 600 km, la deuxième utilise l'approximation des ondes longues.

Sélection des modes instables avec des longueurs d'ondes supérieures à 600 km

La première technique pour filtrer les modes de Charney expérimentée ici consiste à chercher le mode à croissance maximum parmi les longueurs d'ondes supérieures à 600 km. Les temps de croissance calculés ainsi sont reportés sur la figure (4.14). Les courants de bord ouest, en particulier le Gulfstream, et les régions de basses latitudes sont des zones instables de notre calcul. Certaines zones du courant circumpolaire sont aussi mises en avant par ce calcul alors que leurs vitesses zonales sont généralement dirigées vers l'est. Les croissances les plus rapides sont d'environ une année, parfois moins, et plutôt correctement corrélées à basse latitude avec des courants zonaux en surface vers l'ouest (comparer avec la figure (4.15)). Les échelles spatiales correspondantes, reportées sur la figure (4.18), sont comprises entre 600 et 800 km pour la plupart. Les taux de croissance indiqués sur la carte (4.14) doivent être regardés avec précaution parce qu'ils ne prennent pas en compte l'effet de la dissipation. Ainsi, il est possible qu'en sa présence, le maximum de croissance soit en réalité à des longueurs d'ondes beaucoup plus élevées. Toutefois, l'intérêt de la carte réside surtout dans la sélection des régions stables et instables. Or, la dissipation agissant de manière linéaire, les zones sélectionnées comme étant les plus instables restent valides même en sa présence (si tant est que la dissipation soit la même partout).

Pour comparaison, on montre la carte obtenue en utilisant les hypothèses de Killworth et Blundell [2007] ($k = \frac{2\pi}{500}$ rad/km et $l = 0$) sur la figure (4.16) (la carte de l'article de Killworth ressemble à cette figure, mais est légèrement différente probablement parce que ses données ne sont pas les mêmes). Cette figure montre que sous ces hypothèses, les zones d'instabilités dans l'océan sont largement réduites par rapport à celles de la figure (4.14). On montre aussi

sur la figure (4.17) le rapport des vitesses de phase réelles du mode instable sur celles du 1 er mode pseudo-barocline, défini comme la deuxième plus grande valeur propre en valeur absolue (la première étant le mode barotrope). Le rapport est toujours inférieur à 1 puisque la vitesse de phase du mode pseudo-barocline est un majorant de celle du mode instable. La plupart des valeurs de ce rapport sont très inférieures à 1, mais, dans certaines zones, notemment à basse latitude, les deux vitesses de phase semblent être équivalentes, suggérant la possibilité d'observation directe de ces modes dans l'altimétrie.

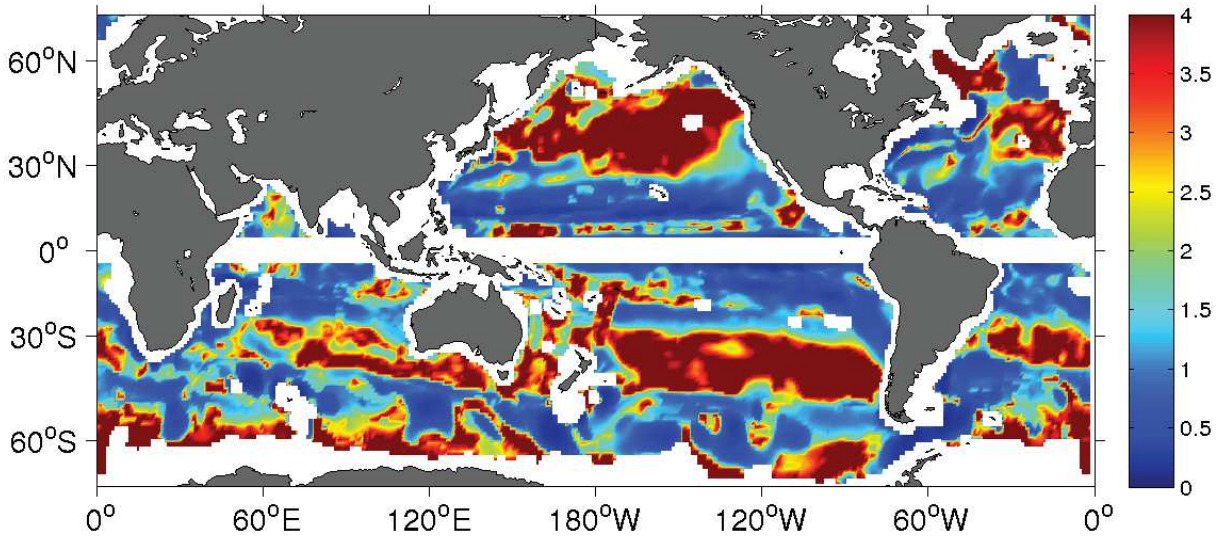

FIGURE *4.14 – Temps (années) de croissance des modes instables de grande échelle calculés sur des données de la circulation moyenne réelles. Les modes de Charney sont filtrés en sélectionnant uniquement les longueurs d'ondes supérieures à 600 km. Les régions bleues indiquent des temps de croissance courts et donc des régions potentiellement plus instables que les régions rouges.*

Sélection des modes instables par l'approximation des ondes longues

L'approximation des ondes longues néglige l'effet de la vorticité relative par rapport à l'effet du stretching. La vorticité relative apparait sous la forme $\nabla^2\psi$ dans la formule de la vorticité potentielle, utilisée dans (4.22), et devient donc simplement, sous l'approximation des ondes longues :

$$q = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \tag{4.28}$$

En supposant que ψ a sa structure verticale majoritairement contenue dans le premier mode barocline, la comparaison de la vorticité relative et du terme de stretching donne une condition sur la validité de l'approximation des ondes longues : $L_H >> R_d$. Puisque le rayon de déformation diminue avec la latitude, pour une échelle L_H donnée, la validité de cette hypothèse augmente aussi avec la latitude. Pour des ondes, la condition devient $k = \frac{2\pi}{\lambda} << 1/Rd$, lorsque le rayon de déformation est de 30 km (ce qui est une valeur typique des latitudes moyennes) la longueur d'onde doit être au moins de 2000 km afin que le terme de stretching soit un ordre de grandeur au-dessus de la vorticité relative. Le calcul précédent, avec des modes instables autour de 800 km n'aurait donc pas pu être réalisé, sous cette approximation, aux basses et moyennes latitudes. Il faut noter que cette approximation dépend de la validité de l'hypothèse sur la structure verticale de ψ. On verra en effet plus bas que la structure verticale du mode le plus instable n'étant pas obligatoirement contenue dans le premier mode barocline, l'erreur

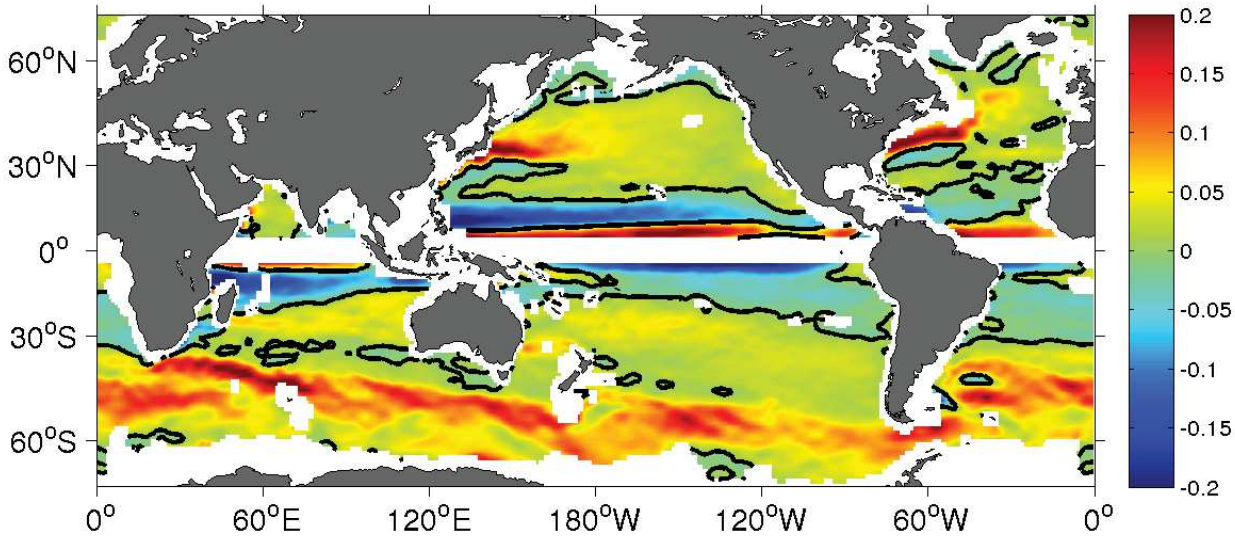

FIGURE *4.15 – Courant moyen zonal en surface, en m/s, d'après l'atlas Ollitrault et Colin de Verdière [2014] et des données de stratification. La ligne noire correspond aux zones de changement de signe du courant moyen.*

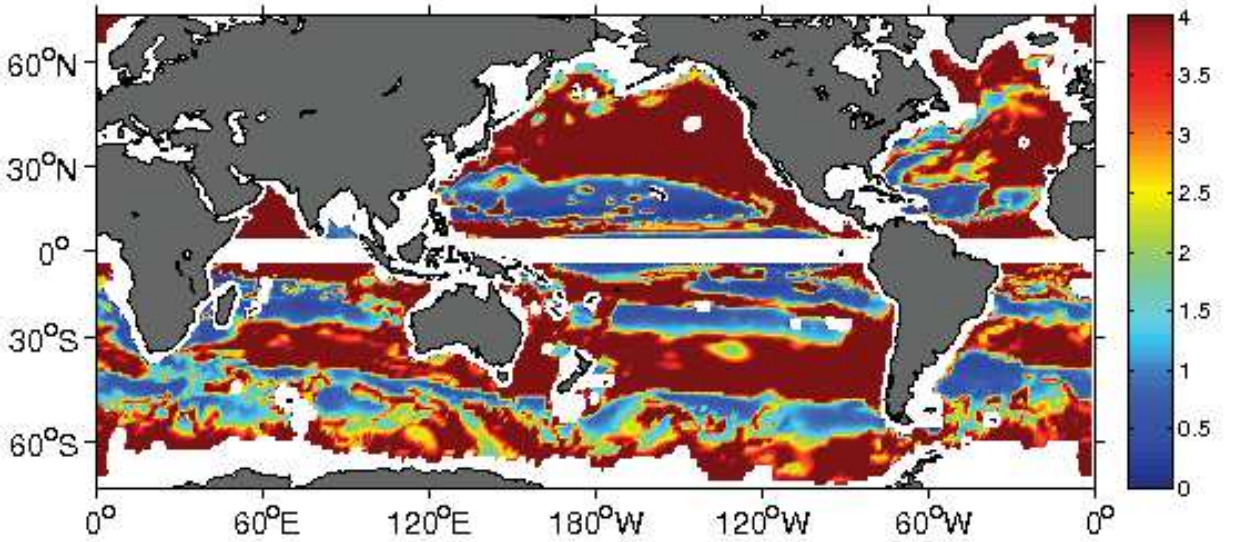

FIGURE *4.16 – Temps (années) de croissance des modes instables de grande échelle calculés sur des données de la circulation moyenne réelles avec* $k = \frac{2\pi}{500}$ *et* $l = 0$.

faite par cette approximation augmente avec la latitude (si la structure verticale est représentée par le premier mode barocline, l'erreur, au contraire, diminue avec la latitude).
Les calculs effectués en début de chapitre avec cette hypothèse dans des cadres idéalisés supposaient un courant méridional V nul, ce qui permettait de retirer la dépendance en k et de résoudre le problème en une seule fois. Ici la présence du courant moyen méridional ne nous permet plus d'utiliser cette méthode. Pour obtenir la vitesse de phase dans la limite des ondes longues, nous allons donc en pratique calculer ω pour un vecteur d'onde de norme $(\sqrt{k^2 + l^2})$ suffisamment faible. Pour prendre en compte l'effet de l'orientation du vecteur d'onde sur la

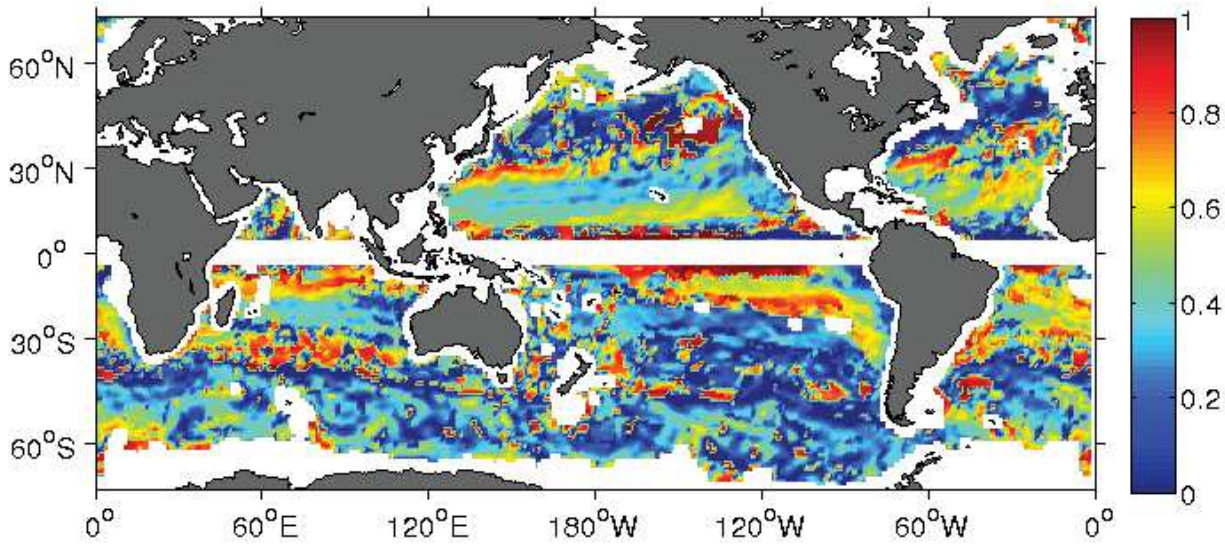

FIGURE *4.17 – Rapports des vitesses de phase des modes instables (ceux montrés sur la figure (4.14)) sur les vitesses de phase des premiers modes pseudo-baroclines, calculés en présence de courant moyen.*

croissance des anomalies, (k, l) est écrit en coordonnées cylindriques : $(k, l) = kr(\cos(\theta), \sin(\theta))$ où kr est la norme (gardée fixe) et θ l'angle variant de 0 à 2π. Le maximum du taux de croissance sur l'angle θ est gardé en mémoire pour chaque position spatiale puis reporté sur la figure (4.19).
Les temps de croissance sont comparables à ceux obtenus précédemment, les modes les plus rapides se trouvent à basse latitude, sous 30 °, et ont des temps de croissance inférieurs à 1 année. D'autres régions sont sélectionnées par ce calcul comme le Gulfstream, le Kuroshio et certaines zones du courant circumpolaire.

Remarque sur la validité de l'approximation des ondes longues

On pourrait s'attendre à ce que les régions les plus instables et les taux de croissance obtenus par ce calcul soient comparables à ceux du calcul précédent à haute latitude. En effet, le rayon de déformation à ces latitudes est d'environ 10 km [Chelton *et al.*, 1998], par conséquent la longueur d'onde à partir de laquelle l'approximation des ondes longues peut être faite n'est plus que de 600km. On s'attarde donc quelques lignes pour tenter de comprendre ce phénomène en montrant que la présence d'un courant moyen implique que les différences des taux de croissance calculés avec et sans l'approximation des ondes longues augmentent avec la latitude.
Les équations dérivées plus haut pour un modèle QG à deux couches et demie en présence d'un courant moyen zonal uniquement dans la première couche sont utilisées. La différence entre les taux de croissance avec et sans l'approximation des ondes longues est :

$$\Delta = \sqrt{-\frac{\left(5\beta^2F^2 + 4\beta F^3U_1 - 2\beta F^2k^2U_1 - 2\beta Fk^4U_1 - 4F^3k^2U_1^2 - 3F^2k^4U_1^2 + 2Fk^6U_1^2 + k^8U_1^2\right)}{4\left(F^2 + 3Fk^2 + k^4\right)2}} - \sqrt{-\frac{(5\beta^2F^2 + 4\beta F^3U_1)}{4F^4}} \tag{4.29}$$

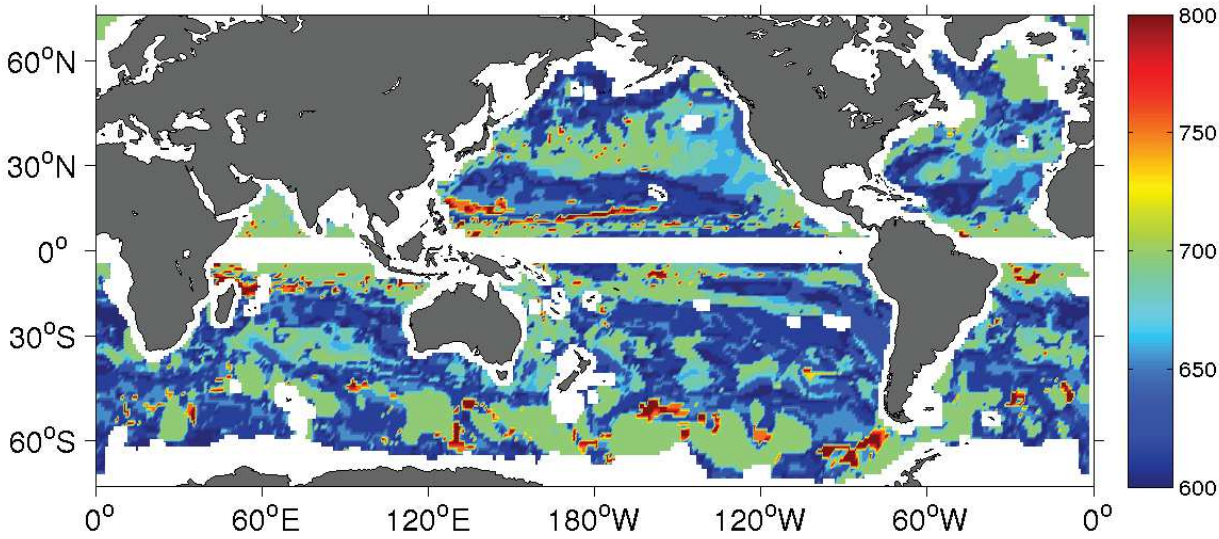

FIGURE *4.18 – Echelle spatiale du mode le plus instable en km.*

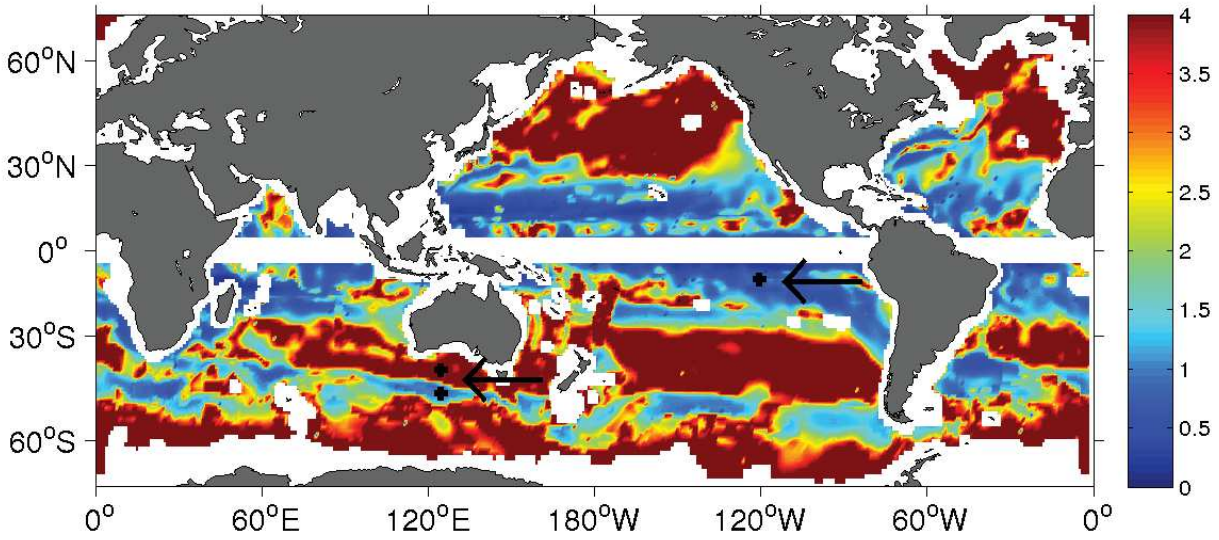

FIGURE *4.19 – Temps (années) de croissance des modes instables de grande échelle calculé sur des données de la circulation moyenne réelles avec l'approximation des ondes longues.* $\frac{1}{T} = kc_i$ *où* $k = \frac{2\pi}{1000}$ *rad/km. Les deux flèches montrent les trois emplacements étudiés (indiqués précisément par des croix noires) dans la section (4.3.1).*

En supposant k petit, on peut effectuer un développement limité de Δ au voisinage de $k = 0$:

$$\Delta(k) = \frac{\left(15\beta^2 + 13\beta F U_1 + 2F^2 U_1^2\right)}{2F^3\sqrt{-\frac{\beta(5\beta+4FU_1)}{F^2}}} k^2 + O[k^4] \tag{4.30}$$

La différence dépend donc de la vitesse moyenne en surface U_1. La figure (4.20) montre cette différence avec $k = 2\pi/2000\ rad/km$ en fonction de la latitude. Pour comparaison, la différence en l'absence de courant moyen est aussi reportée sur la figure. Si en l'absence de courant

moyen les différences diminuent en effet avec la latitude, lorsque le courant est non nul dans la couche de surface, les différences diminuent dans un premier temps aux basses latitudes puis augmentent à partir d'environ 27 ° pour les paramètres choisis ici. Le coefficient du k^2 obtenu dans le développement limité (4.30) capture très bien ces variations comme le montre sa représentation sur la figure (4.20). Dans les raisonnements tenus plus haut sur la comparaison de la taille du rayon du déformation et de l'échelle horizontale des ondes, l'hypothèse que ψ la fonction courant est contenue entièrement dans le premier mode barocline a été faite. Ici, nous sélectionnons le mode avec la plus forte croissance et nous avons vu plus haut que sa structure verticale est dépendante du courant moyen : rien n'indique donc que ψ se projette entièrement sur le premier mode barocline.

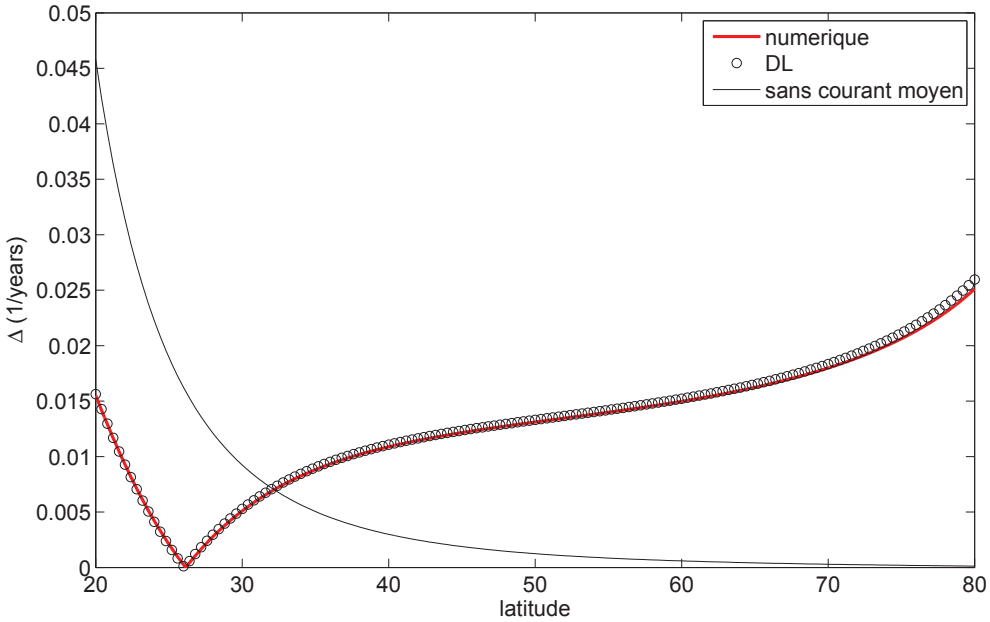

FIGURE *4.20 – Différence entre le taux de croissance calculé avec et sans l'approximation des ondes longues (courbe rouge). La courbe noir représente cette même différence mais en l'absence de courant moyen dans la couche de surface. Les cercles représentent la variation du coefficient de k^2 dans le développement limité (4.30).*

4.3.1 Etude de zones particulières

Dans cette partie on s'intéresse à deux régions particulières situées pour l'une dans le courant circumpolaire et pour l'autre à basse latitude dans un courant en surface vers l'ouest. Ces deux zones semblent être plus instables que les autres sous l'approximation des ondes longues comme le montre la figure (4.20). Pour chaque zone, les vitesses moyennes zonale et méridionale, l'amplitude et la phase du mode le plus instable sont montrées.

Courant circumpolaire

La première zone est située dans le courant circumpolaire, à 124 ° E et à 51 ° S, et correspond à une zone plutôt instable de la figure (4.20). La vitesse zonale moyenne, reportée sur la figure (4.21) est dirigée vers l'est sur l'ensemble de la colonne d'eau avec un maximum de 10 cm/s en surface. La vitesse méridionale est dirigée vers le sud avec une amplitude plus faible de 2.5 cm/s en surface. Le mode le plus instable a une période de croissance de 0.4 année, une amplitude et une phase qui indiquent une structure verticale contenue dans le premier mode barocline :

la structure s'annule une fois vers 1500 m de profondeur. Pour comparaison, on montre ces mêmes champs figure (4.22) à la même longitude mais à une latitude plus faible : 47° S. La vitesse zonale est toujours vers l'est en surface mais change rapidement de signe vers 100 mètres puis redevient vers l'est à partir de 2000 mètres de profondeur. Le mode le plus instable a une structure verticale qui ressemble à un deuxième mode barocline (il change de signe deux fois sur la verticale) et a un temps de croissance beaucoup plus élevé que précédemment : 3.6 ans.

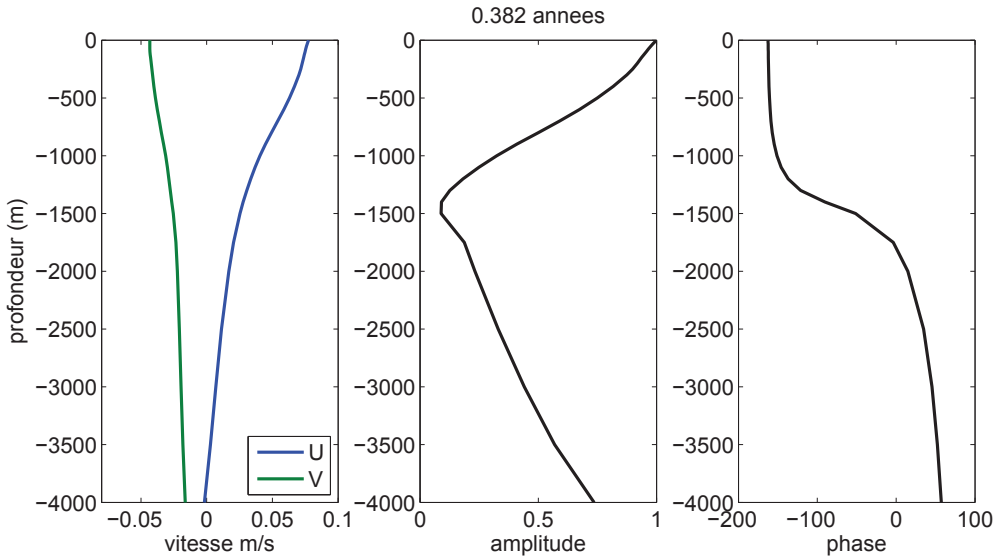

FIGURE *4.21* – 51° *S*, 124° *E*. *À gauche : vitesses moyennes zonales et méridionale. Au centre : amplitude du mode le plus instable en fonction de la profondeur. À droite : phase du mode le plus instable en fonction de la profondeur. La période de croissance de ce mode est de 0.4 année.*

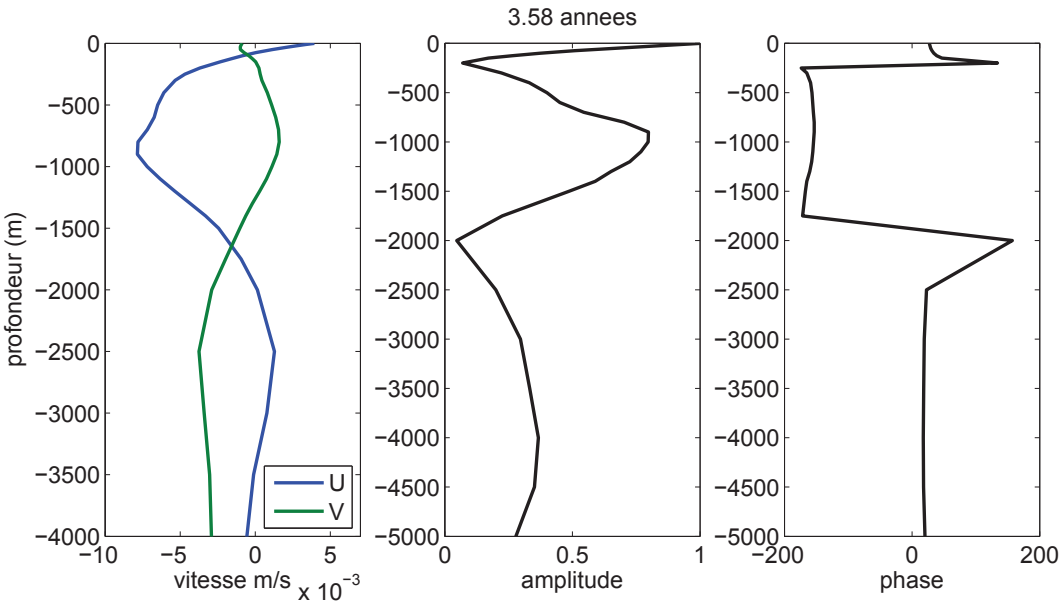

FIGURE *4.22* – 47° *S*, 124° *E*. *À gauche : vitesses moyennes zonales et méridionale. Au centre : amplitude du mode le plus instable en fonction de la profondeur. À droite : phase du mode le plus instable en fonction de la profondeur. La période de croissance de ce mode est de 3.6 années.*

Basse latitude, courant moyen vers l'est

La troisième zone que l'on étudie ici est typique d'une grande partie des régions instables de la figure (4.20) : le courant en surface est dirigé vers l'ouest et la latitude est basse. Le courant moyen zonal, montré sur la figure (4.23), est dirigé vers l'ouest sur toute la profondeur avec un maximum aux alentours de 100 mètres, le courant méridional est quant à lui dirigé vers le nord avec une amplitude quasiment deux fois plus faible que le courant zonal. Le mode le plus instable de cette zone a une amplitude qui suit le premier mode barocline, s'annulant vers 1500 mètres. Le temps de croissance est d'environ 0.3 année.

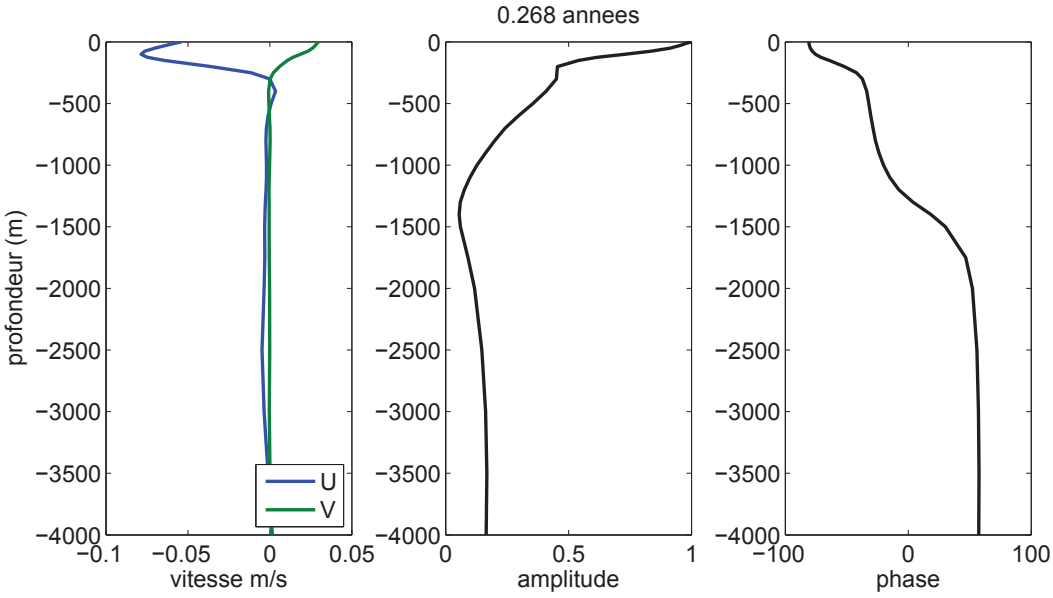

FIGURE *4.23* – 10.5 ° *S,* 120 ° *W. À gauche : vitesses moyennes zonales et méridionale. Au centre : amplitude du mode le plus instable en fonction de la profondeur. À droite : phase du mode le plus instable en fonction de la profondeur. La période de croissance de ce mode est de 0.3 année.*

4.4 Modification des modes instables par un champ moyen inhomogène

Les modes instables calculés précédemment ont des échelles horizontales très grandes, supérieures à 600 kilomètres, et sont donc susceptibles d'être influencées par les variations des champs dans lesquels elles évoluent, ce qui était en partie l'objet du chapitre précédent pour des ondes stables. Nous nous intéresserons plus particulièrement dans ce paragraphe à l'influence de ces variations sur les taux de croissance et tenterons de répondre à la question suivante : si une onde est instable puis stable localement, le changement de stabilité ayant lieu sur des échelles horizontales inférieures à l'échelle du mode instable, quel est l'impact sur la stabilité globale ? Pour répondre à cette question les calculs développés précédemment, notamment celui du chapitre trois, sont réutilisés.

4.4.1 Modification par un courant moyen variable

Dans ce paragraphe on étudie dans un cadre idéalisé l'influence des variations du courant moyen sur les modes baroclinquement instables de grande échelle. Le modèle utilisé a trois couches, les deux premières ont une épaisseur de 200 m, la dernière une épaisseur de 3500m. La différence de densité entre chaque couche est constante et donne une gravité réduite g' de $0.01\,\mathrm{m/s^2}$ aux interfaces. La latitude considérée est 30 ° N. La vitesse moyenne dans la dernière

couche est nulle, dans la deuxième couche U_2 est constante et zonale, dans la première couche $U_1(y)$ est zonale et peut varier avec la latitude y. Les équations dans chacune des couches sont : en surface :

$$\left(U_1(y)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)(F_1(\psi_2-\psi_1))+(\beta+F_1(U_1(y)-U_2))\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\nu\nabla^2\left(F_1(\psi_2-\psi_1)\right) \quad (4.31)$$

dans la couche 2 :

$$\left(U_2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)(F_2(\psi_1-2\psi_2+\psi_3))+(\beta+F_2(-U_1(y)+2U_2))\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=\nu\nabla^2\left(F_2(\psi_1-2\psi_2+\psi_3)\right) \quad (4.32)$$

au fond :

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_3(\psi_2-\psi_3))+(\beta+F_3(-U_2))\frac{\partial\psi_3}{\partial x}=\nu\nabla^2\left(F_3(\psi_2-\psi_3)\right) \quad (4.33)$$

De la dissipation a été ajoutée pour qu'il puisse y avoir une sélection des échelles horizontales. Dans ce qui suit la valeur de ν est fixée à $1000\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Les équations ci-dessus sont résolues grâce à la méthode spectrale décrite dans le chapitre trois. k la longueur d'onde zonale est fixe et vaut $k=\frac{2\pi}{2000}rad/km$, la vitesse zonale dans la couche 2 vaut $U_2=1cm/s$ et est gardée fixe dans ce qui suit. Le flot est instable, pour les paramètres choisis ici, si la vitesse U_1 satisfait :

$$-9.5m/s<U_1<-0.007m/s \quad (4.34)$$

Contrairement au modèle à deux couches et demie, la condition d'instabilité du modèle à trois couches possède une limite inférieure sur U_1 (pour U_2 constante). Pour les paramètres choisis, le taux de croissance augmente jusqu'à ce que U_1 atteigne -4.76 m/s puis diminue pour des valeurs plus faibles de U_1. Si l'on s'intéresse à des valeurs réalistes de U_1, on peut simplement considérer que plus U_1 est intense vers l'ouest plus le flot est instable. En faisant varier $U_1(y)$ avec la latitude, des zones avec des propriétés de stabilité locale différentes sont créées. C'est cet effet sur les taux de croissance des modes globaux que nous allons analyser ici.

La première expérience consiste à utiliser la forme suivante de courant zonal en surface : $U_1(y)=-0.02+0.02\cos(l_u y)\mathrm{m/s}$, avec $l_u=\frac{2\pi}{L_u}$ et L_u la longueur d'onde du courant moyen, de sorte que le courant moyen est parfois localement instable et parfois localement stable. L_y l'extension du domaine sur la latitude est de 7000 km pour 400 points de grille ce qui assure une résolution largement suffisante de 17,5 km.
Le tableau (4.1) regroupe les temps de croissance maximums calculés en fonction de la longueur d'onde du courant moyen. Le temps de croissance augmente lorsque la longueur d'onde diminue et converge vers la valeur que l'on obtiendrait en l'absence de variation méridionale (c'est-à-dire pour $U_1(y)=-0.02m/s$). Ce phénomène peut être rationalisé en étudiant les figures (4.24) et (4.25), sur lesquelles sont montrées la variation latitudinale de la partie réelle du mode le plus instable dans deux cas différents. Le premier, figure (4.24), la longueur d'onde de la vitesse moyenne est de l'ordre de celle du mode instable. Le deuxième, figure (4.25), la longueur d'onde de la vitesse moyenne est beaucoup plus petite que celle du mode instable. La figure (4.24) montre que l'amplitude du mode instable est plus forte là où le courant moyen est le plus instable et plus faible, voire nulle, là où le courant moyen est stable. Lorsque la longueur d'onde du courant moyen diminue, le mode le plus instable adapte sa structure méridionale en diminuant sa longueur d'onde pour que son amplitude soit petite là ou le courant moyen est faiblement instable et grande là où le courant moyen est fortement instable. Mais la friction ajoutée dans les équations agit plus fortement sur les petites longueurs d'ondes et augmente le temps de croissance. C'est ce qui explique l'augmentation du temps de croissance observée dans le tableau (4.1). En continuant à diminuer la longueur d'onde du courant moyen, le mode instable diminue aussi sa longueur d'onde jusqu'au point où la dissipation devient suffisamment importante pour stopper ce processus. Lorsque les échelles du courant moyen

longueur d'onde	temps de croissance (jours)
$L_y/2$	391
$L_y/4$	459
$L_y/8$	597
$L_y/16$	666
∞	675

TABLE *4.1 – Temps de croissance du mode le plus instable pour différentes longueurs d'ondes du champ moyen en surface.* $U_1(y) = -0.02 + 0.02\cos(l_u y)$ *avec* $l_u = \frac{2\pi}{L_u}$. L_y *est la taille méridionale du bassin considéré.*

longueur d'onde	temps de croissance (jours)
$L_y/2$	572
$L_y/4$	636
$L_y/8$	669
$L_y/16$	674
∞	675

TABLE *4.2 – Temps de croissance du mode le plus instable pour différentes longueurs d'ondes du champ moyen en surface.* $U_1(y) = -0.02 + 0.005\cos(l_u y)$ *avec* $l_u = \frac{2\pi}{L_u}$. L_y *est la taille méridionale du bassin considéré.*

sont trop petites de sorte que si le mode instable les suivait il subirait une dissipation trop élevée, le mode le plus instable adopte une nouvelle stratégie. Il se compose maintenant d'un signal de grande longueur d'onde modulé par un signal de petite longueur d'onde qui, lui, correspond aux variations du courant moyen. Un tel mode est représenté sur la figure (4.25). Le signal à grande longueur d'onde qui lui est associé est très semblable au mode le plus instable obtenu lorsque $U_1(y) = -0.02$ m/s en surface comme le montre sa représentation sur la figure (4.26) (à comparer avec la figure (4.25)).
Lorsque la longueur d'onde du courant moyen est suffisamment grande, le mode le plus instable s'adapte à sa structure en adoptant une amplitude faible là où le courant moyen est le moins instable. Le taux de croissance de ce mode peut-il être prédit par le calcul local sur une zone particulière du courant moyen ? Le calcul des modes instables en présence d'un courant moyen d'intensité égale au maximum de $U_1(y) = -0.02 + 0.02\cos(l_u y)$ sur y, (soit $U_1(y) = -0.04$ m/s ici), donne des temps de croissance équivalents, pour des longueurs d'ondes équivalentes, à ceux rassemblés dans le tableau (4.1). Par exemple, le mode instable de $U_1(y) = -0.04$ m/s, qui possède une longueur d'onde proche de $L_y/2$, a un temps de croissance de 370 jours ce qui est comparable aux 391 jours trouvés avec $U_1(y) = -0.02 + 0.02\cos(l_u y)$ et $l_u = \frac{2\pi}{L_y/2}$.

Des résultats similaires sont obtenus pour $U_1(y) = -0.02 + 0.005\cos(l_u y)$ m/s c'est-à-dire pour un courant moyen toujours localement instable. Dans ce cas et comme précédemment, l'amplitude du mode le plus instable est faible là où le courant moyen est faiblement (localement) instable et grande là où le courant moyen est fortement instable. Le tableau (4.2) indique les temps de croissance en fonction de plusieurs longueurs d'ondes du courant moyen.
Pour conclure cette partie, les modes instables peuvent être fortement modifiés par les variations spatiales du courant moyen. Les modifications dépendent de l'échelle horizontale du courant moyen : lorsque l'échelle horizontale des modes est inférieure à celle du courant moyen, l'amplitude est pratiquement nulle là où le courant moyen est le moins localement instable ; lorsque l'échelle horizontale des modes est supérieure à celle du courant moyen, les modes sont composés d'un signal de grande longueur d'onde et modulés par un signal de petite longueur d'onde, à amplitude faible, lié au courant moyen. Les temps de croissance des modes les plus instables sont similaires à ceux obtenus par analyse locale dans les zones les plus instables. Les

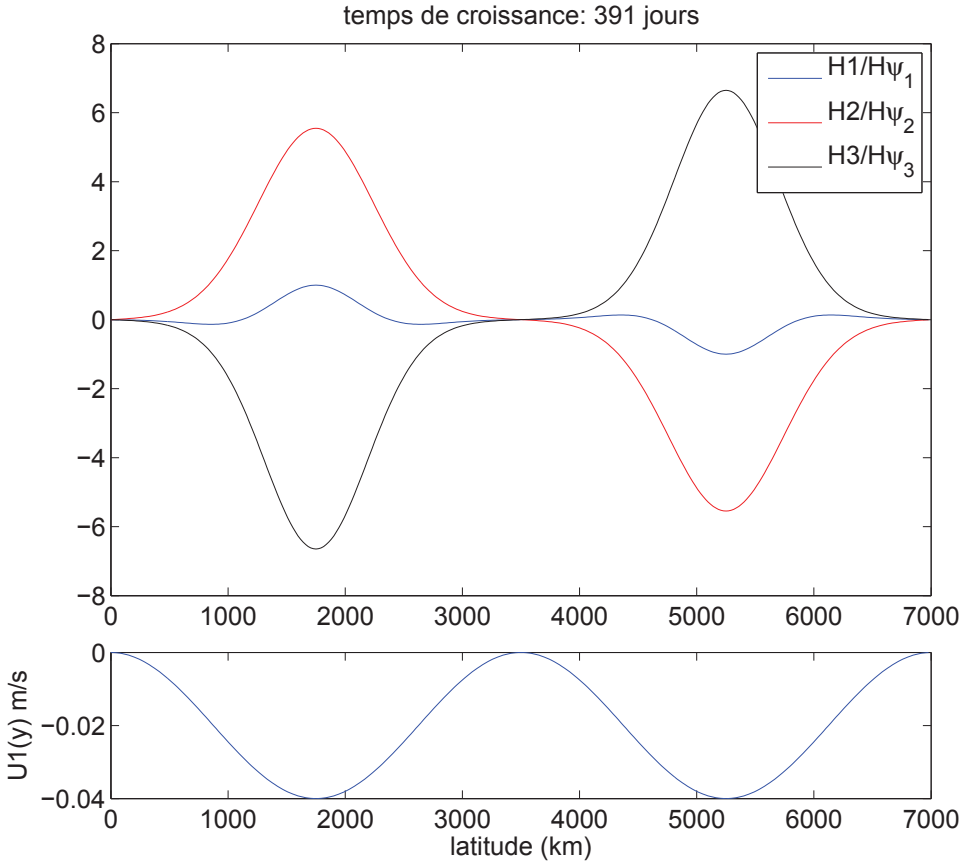

FIGURE *4.24* – *En haut : Partie réelle du mode avec le temps de croissance le plus faible pour les fonctions courant* (m^2/s) *des trois couches. Les trois courbes sont normalisées par le maximum de* $\psi_1 H_1/H$. *En bas : variation latitudinale du courant moyen correspondant.*

modes les plus instables peuvent être décrits comme ceux qui trouvent le meilleur compromis entre la dissipation et la modification latitudinale de leur amplitude pour s'adapter au courant moyen. Cette étude idéalisée suggère que l'approche locale n'est pas sans intérêt puisque, premièrement, les zones où le courant moyen est le plus localement instable correspondent aux zones où l'amplitude des modes instables est la plus forte. Deuxièmement, les temps de croissance des modes les plus instables sont similaires à ceux obtenus par l'analyse locale des zones les plus instables.

4.4.2 Modification par la topographie

La première étape pour comprendre le rôle de la topographie sur ces modes instables de grande échelle est d'étudier l'effet d'un fond en pente. Même si une simple pente ne permet évidemment pas d'inclure toute la complexité de la topographie, les résultats du chapitre précédent suggèrent que cette simplification permet souvent de comprendre aisément certains aspects d'une topographie plus complexe. Le modèle à trois couches est dans cette partie de nouveau mis à profit. La vitesse moyenne est supposée zonale et constante dans les deux premières couches, leurs équations sont alors :
en surface :

$$\left(U_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(F_1(\psi_2 - \psi_1)) + (\beta + F_1(U_1 - U_2))\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \tag{4.35}$$

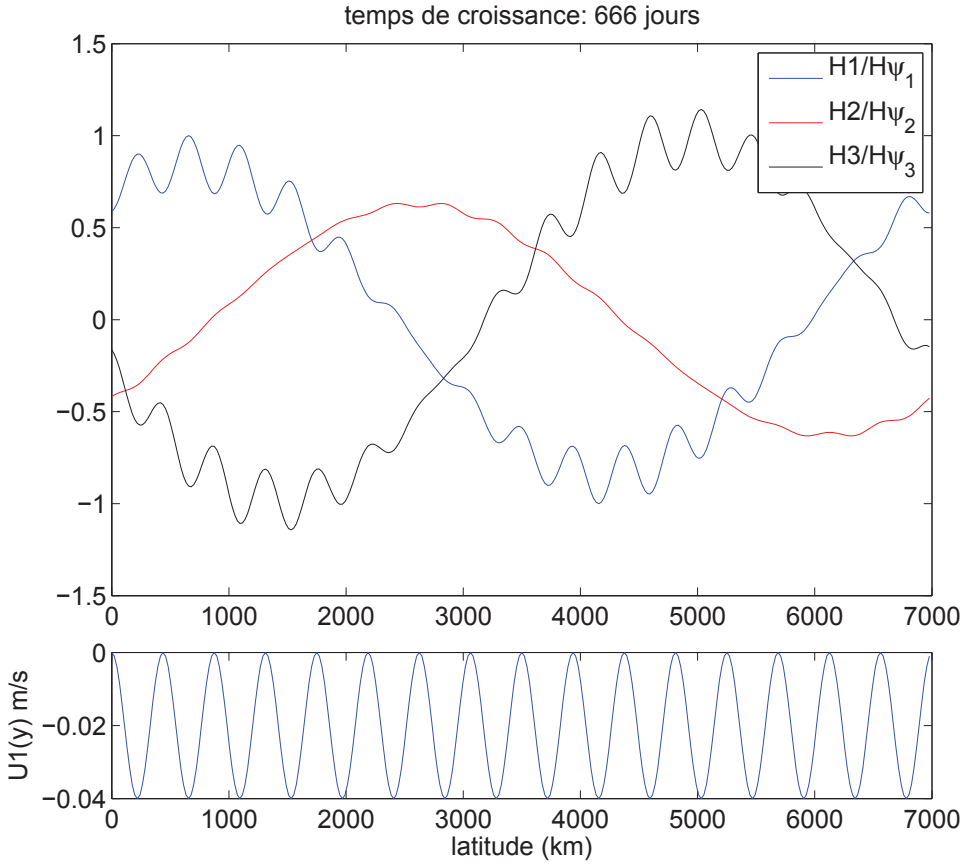

FIGURE *4.25 – En haut : Partie réelle du mode avec le temps de croissance le plus faible pour les fonctions courant (m^2/s) des trois couches. Les trois courbes sont normalisées par le maximum de $\psi_1 H_1/H$. En bas : variation latitudinale du courant moyen correspondant.*

dans la deuxième couche :

$$\left(U_2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)(F_2(\psi_1-2\psi_2+\psi_3))+(\beta+F_2(-U_1+2U_2))\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=0 \tag{4.36}$$

La vitesse moyenne est supposée nulle dans la couche de fond. Pour simplifier encore plus le problème, on suppose dans un premier temps que la topographie est zonale. L'équation qui contrôle la dynamique de la couche de fond est dans ce cas :

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_3(\psi_2-\psi_3))+(\beta+F_3(-U_2))\frac{\partial\psi_3}{\partial x}-\frac{f_0}{H_3}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{4.37}$$

avec h la topographie. La variation de la topographie avec la longitude $\frac{\partial h}{\partial x}$ est supposée constante (c'est une pente) et la dissipation est supposée nulle.
En cherchant ψ sous la forme $\alpha(z)\exp(i(kx+ly+\omega t))$ l'équation (4.37) devient :

$$\omega\,(F_3(\alpha_2-\alpha_3))+(\beta+F_3(-U_2))\,k\alpha_3-l\frac{f_0}{H_3}\alpha_3\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{4.38}$$

la présence du nombre d'onde méridional dû à la topographie nous empêche de simplifier par k et d'obtenir une équation indépendante de k. La stratégie développée dans le paragraphe sur le calcul des taux instables en présence d'un courant moyen réel est réutilisée. Pour cela, le vecteur d'onde $\vec{k}=(k,l)$ est choisi avec une norme suffisamment petite afin que l'approximation des

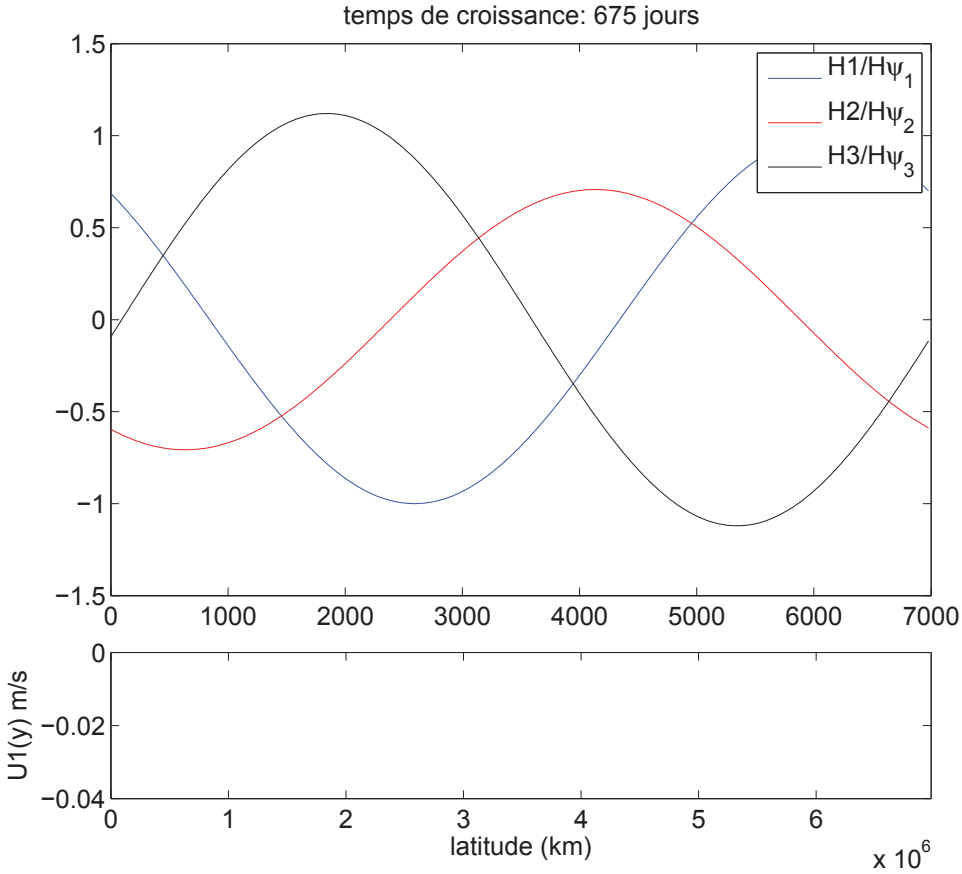

FIGURE *4.26 – En haut : Partie réelle du mode avec le temps de croissance le plus faible pour les fonctions courant (m^2/s) des trois couches. Les trois courbes sont normalisées par le maximum de $\psi_1 H_1/H$. En bas : variation latitudinale du courant moyen correspondant.*

ondes longues soit respectée, puis le rapport $\frac{l}{k}$ est écrit $\frac{l}{k} = \tan(\theta)$ où θ est l'angle que fait le vecteur d'onde avec l'axe des longitudes. L'équation de la couche de fond devient :

$$c_x \left(F_3(\alpha_2 - \alpha_3)\right) + \left(\beta + F_3(-U_2)\right)\alpha_3 - \tan(\theta)\frac{f_0}{H_3}\alpha_3\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{4.39}$$

Pour chaque θ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, le calcul du taux de croissance est effectué puis le maximum parmi ces taux détermine le temps de croissance du mode le plus instable. La première chose que l'on voit est que si le courant moyen est instable en l'absence de topographie alors il le sera aussi en sa présence : pour $\theta = 0$, $\tan(\theta) = 0$. La présence d'une topographie ne peut donc qu'augmenter les possibilités d'instabilités dans ce modèle. Il faut noter que ce n'est pas le cas lorsqu'il y a aussi une pente méridionale puisque k et l ne peuvent pas s'annuler en même temps. Pour nos équations, lorsque k vaut 0 (ou $\theta = \frac{\pi}{2}$), il n'y a pas non plus d'instabilité car l'effet du courant moyen sur les ondes disparait.
Les figures (4.27) et (4.28) montrent les temps de croissance (ici pour une longueur d'onde de 1000 km) en fonction des vitesses zonales dans les couches 1 et 2 pour différentes valeurs de pente. Ces figures révèlent d'une part que l'ajout d'une pente augmente les possibilités d'instabilités : avec une pente de 1000 m sur 1000 km, le flot est instable pour quasiment la moitié des valeurs du courant moyen étudié. D'autre part, son inclusion diminue le temps de croissance des instabilités : pour une pente nulle le minimum est d'environ 150 jours alors qu'avec une pente très forte de 1000 m sur 1000 km (typique d'une dorsale océanique) les temps de croissance peuvent être au moins trois fois plus petits.

On pose $\gamma = \tan(\theta)\frac{f_0}{H_3}\frac{\partial h}{\partial x}$. Remarquons tout de suite que pour une pente $\frac{\partial h^a}{\partial x}$ différente de $\frac{\partial h}{\partial x}$, il existe un angle θ^a tel que $\tan(\theta^a)\frac{f_0}{H_3}\frac{\partial h^a}{\partial x} = \gamma$, ($\theta^a = \arctan\left(\tan(\theta)\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h^a}{\partial x}}\right)$). Pour ces deux angles associés aux deux pentes $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h^a}{\partial x}$, la vitesse de phase imaginaire c_i sera identique. Toutefois, le taux de croissance est le produit de la vitesse de phase imaginaire et du nombre d'onde donc les taux de croissance sont bien différents pour des pentes différentes.
Avec cette notation (γ), l'équation de la couche de fond devient :

$$c_x\left(F_3(\alpha_2 - \alpha_3)\right) + \left(\beta - F_3(U_2 + \gamma)\right)\alpha_3 = 0 \tag{4.40}$$

Ces figures peuvent être mieux comprises en étudiant l'équation du déterminant nul associé aux équations (4.35), (4.36) et (4.40), qui est une équation du second degré de la forme :

$$ac_x^2 + bc_x + d = 0 \tag{4.41}$$

Pour plus de clarté, les valeurs des coefficients (a, b, d) sont mises dans l'annexe C. Le courant moyen est instable si cette équation admet des solutions complexes, c'est-à-dire si son déterminant est négatif. Son déterminant peut à son tour être écrit sous la forme d'une équation du second degré en γ dont les coefficients dépendent de U_1 et U_2 :

$$\Delta = A1\gamma^2 + A_2\gamma + A_3 \tag{4.42}$$

avec $A_1 = F^2\left(4\beta^2 + 4\beta F U_1 + (FU_2 - \beta)^2\right)$, les valeurs de A_2 et A_3 sont reportées dans l'annexe (C). L'équation $\Delta = 0$ détermine la limite entre les zones stables et instables. Le signe de A_1 détermine le signe des branches de la parabole Δ. L'équation $A_1 = 0$ peut être écrite comme une parabole dans la base $(\vec{j}, \vec{i})$:

$$U_{1lim} = -\frac{(FU_2 - \beta)^2 + 4\beta^2}{4\beta F} \tag{4.43}$$

Pour $U_1 < U_{1lim}$ A_1 est négatif et pour $U_1 > U_{1lim}$ A_1 est positif. La courbe de cette parabole est superposée aux temps de croissance de la figure (4.28). Le signe de A_1 nous donne déjà quelques renseignements sur la solution : si $A_1 < 0$, Δ est soit toujours négatif, pour toutes les valeurs de γ, soit positif entre les racines de $\Delta = 0$. Au contraire si $A_1 > 0$, Δ est soit toujours positif, soit négatif sur un intervalle fermé situé entre les racines de $\Delta = 0$. Cette propriété se traduit par le fait que lorsque $A_1 < 0$ l'intervalle de γ (et donc d'angle θ) pour lequel le flot est instable est beaucoup plus grand que lorsque $A_1 > 0$: pour $A_1 < 0$ le flot sera donc potentiellement beaucoup plus riche en terme de contenu spectral.
On note $\Delta_\gamma = A_2^2 - 4A_3A_1$ le déterminant de l'équation $\Delta = 0$. Si $A_1 < 0$ et $\Delta_\gamma < 0$ alors $\Delta < 0$ et le courant moyen est toujours instable. Si $A_1 > 0$ et $\Delta_\gamma < 0$ alors le courant moyen n'est jamais instable. Lorsque $A_1 > 0$, la solution de l'équation $\Delta_\gamma = 0$ détermine donc la limite entre la région où le flot n'est jamais instable et la région où le flot est instable pour certaines valeurs de γ. Pour U_2 fixe, $\Delta_\gamma = 0$ peut être considérée comme une équation du troisième degré en U_1 :

$$\begin{aligned} F^3U_1^3 + \left(-\beta F^2 - 2F^3U_2\right)U_1^2 \\ + \left(-\beta^2F + 2\beta F^2U_2 - F^3U_2^2\right)U_1 + \left(\beta^3 - 3\beta F^2U_2^2 + 2F^3U_2^3\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Cette équation possède trois solutions : $U_1 = \frac{\beta}{F} - U_2$ $U_1 = -\frac{\beta}{F} + U_2$ $U_1 = \frac{\beta}{F} + 2U_2$ indépendantes de F_3. Ces solutions sont reportées sur la figure (4.28) et semblent bien délimiter les zones stables des zones instables.

Calcul sur les données réelles en présence d'une topographie

Puisque la topographie semble avoir la capacité d'augmenter les possibilités d'instabilités, on refait ici le calcul des modes instables sous l'approximation des ondes longues effectué sur les données réelles. Pour rendre compte de l'effet de la pente, la condition de vitesse verticale nulle au fond doit être modifiée :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U(-H)\frac{\partial}{\partial x}+V(-H)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dV}{dz}(-H)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dU}{dz}(-H)= \\ -\frac{N^2(z=-H)}{f_0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{4.45}$$

La pente locale dans les directions méridionales et zonales est calculée à partir de données de topographie issues de ETOPO1 sur lesquelles un filtre Gaussien a été appliqué pour obtenir une résolution de 1 °. Les pentes zonales et méridionales sont montrées sur la figure (4.29). Le calcul est ensuite effectué, on rappelle que pour chaque position spatiale, le taux de croissance est calculé pour un ensemble de valeurs de l'angle que fait le vecteur d'onde avec l'axe des longitudes. Le maximum parmi ces taux est ensuite attribué à sa position spatiale. Les temps de croissance de ces modes en présence de fond en pente sont reportés sur la figure (4.30). La comparaison avec le calcul sans topographie figure (4.19) montre que globalement, l'ajout d'une pente rend effectivement le courant moyen plus instable comme le suggère l'étude idéalisée réalisée plus haut. En regardant plus en détail la carte (4.30), on peut aussi trouver des zones, telles que le bassin d'Argentine, qui semblent être plus stables quand la topographie est incluse.

4.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons dans une première partie étudié la stabilité locale des modes grandes échelles. Comme souligné par des études précédentes, notamment celles de Colin de Verdière [1986] et Liu [1999], les modes instables de grande échelle n'existent que lorsqu'au moins deux modes baroclines interagissent. Nous avons montré dans un modèle à deux couches et demie (souvent utilisé pour sa simplicité), que les instabilités existent si le courant moyen se projette sur chacun des deux modes. Dans ce modèle, le courant moyen est instable s'il est dirigé vers l'ouest en surface (dans la deuxième couche il peut être dirigé dans les deux sens). En ajoutant une couche et donc un troisième mode vertical, les possibilités d'instabilité s'enrichissent et le flot est cette fois instable même pour certaines valeurs de courant en surface vers l'est. Cependant, l'analyse des temps de croissance montre que les courants vers l'ouest restent plus instables que les courants vers l'est. Cet effet est facilement explicable dans le modèle à deux couches et demie : pour accélérer vers l'ouest le deuxième mode barocline, il faut un courant vers l'ouest et pour décélérer le premier mode barocline, il faut aussi que le courant moyen soit vers l'ouest en surface (il est vers l'est dans la deuxième couche). Ce résultat peu intuitif est aussi reporté par Dewar [1998] qui montre que les corrections à apporter aux vitesses de phase du premier mode barocline sont opposées à la direction du courant de surface.
Étant donnée la richesse des possibilités, la partie suivante s'est attachée au cas plus concret du calcul local des instabilités sur des données réelles.
Le premier calcul est réalisé sans l'approximation des ondes longues mais pour des longueurs d'ondes supérieures à 600 km afin de filtrer les modes de Charney. Les régions les plus instables se situent à basse latitude dans les courants dirigés vers l'ouest. Dans les courants intenses de bord ouest (par exemple le Kuroshio et le Gulfstream), dans le courant circumpolaire et à très haute latitude, notamment dans l'Atlantique Nord, au Sud de l'Islande. Les longueurs d'ondes associées sont de 600 à 800 km et les temps de croissance les plus courts sont de quelques mois.
Le deuxième calcul est réalisé sous l'approximation des ondes longues et met en avant, à basse

latitude, les mêmes régions que le calcul précédent. En revanche, à haute latitude les zones sélectionnées précédemment ne le sont plus, en particulier celle qui se situait sous l'Islande. Les temps de croissance calculés pour une longueur d'onde de 1000 km sont largement plus élevés que ceux du calcul précédent : les modes les plus instables ont des temps de croissance autour de deux ans.
Les résultats de ces calculs sur les données réelles suggèrent qu'à basse latitude, des anomalies de grande échelle pourraient être forcées par une instabilité barocline.
La dernière partie est une étude préliminaire sur l'influence d'un courant moyen méridionalement variable sur la stabilité globale. Les variations méridionales modifient les propriétés de stabilité locales, nous avons montré que le mode le plus instable répondait de deux manières différentes en fonction de l'échelle de variation du courant moyen. Si les variations du courant moyen sont de l'ordre de celles des modes instables alors le mode instable adapte sa structure méridionale : son amplitude est faible là où le courant moyen est faiblement instable et forte là où il est le plus instable. Lorsque les longueurs d'ondes du courant moyen diminuent, les modes qui suivent ces variations sont fortement atténuées à cause de la dissipation. Le mode le plus instable adopte dans ce cas une stratégie différente. Il est composé d'un signal à grande amplitude et grande longueur d'onde (par rapport à celle du courant moyen) et est modulé par un signal à faible amplitude de la même longueur d'onde que le courant moyen. Cette étude suggère que le calcul local des modes instables n'est pas sans intérêt. Lorsque les longueurs d'ondes du courant moyen sont grandes, l'analyse locale pointe vers les zones où le mode global le plus instable a l'amplitude la plus forte et donne le taux de croissance équivalent sur ces régions. Lorsque les longueurs d'ondes du courant moyen sont petites, l'analyse locale donne les taux de croissance correctes si le calcul est effectué sur la moyenne spatiale du courant moyen. Toutefois, Pierrehumbert [1984] montre qu'un courant moyen zonal, zonalement variable ($(U, V) = (U(x), 0)$, d'ailleurs est-ce que l'utilisation d'un courant moyen horizontalement divergent est raisonnable ?), dans un modèle QG à deux couches, créé des modes globalement instables dont les amplitudes maximales ne sont pas situées là où l'analyse locale indique une croissance maximum. La raison de cette différence est que dans notre modèle, qui est un problème méridional, il n'y a pas d'advection par des vitesses méridionales (le problème de Pierrehumbert [1984] est zonal avec une advection par une vitesse zonale).
Finalement, le rôle d'une topographie en pente est étudié. Dans un modèle à trois couches, une pente augmente les possibilités d'instabilité et les taux de croissance. Le calcul sur les données réelles en présence d'une topographie confirme globalement ce résultat bien que quelques régions voient leurs taux de croissance diminuer.

Les modes instables ou les modes les moins atténués issus des simulations réalistes comme celles de Sévellec et Fedorov [2013] dans l'Atlantique Nord, semblent pointer vers une région située au Sud du Groenland. La figure (4.31) reproduit l'anomalie de température du mode le moins atténué obtenu dans cet article. Nos calculs réalisés sous l'approximation des ondes longues ne sélectionnent pas cette zone mais ceux réalisés sans cette approximation montrent qu'une région située à la même latitude mais à une longitude un peu plus à l'est est aussi instable. Est-ce que ces deux zones ont un lien ? Nos résultats ne permettent pas pour l'instant de le dire. Pour comprendre le lien entre le mode le moins atténué obtenu par le calcul global (4.31) et le calcul local, de nombreuses études restent à faire.
La première étape serait de comprendre le rôle des conditions aux limites, le calcul effectué plus haut fait l'hypothèse d'une périodicité spatiale et est par conséquent incapable de reproduire leurs effets. On s'attend à ce que les frontières jouent un rôle important dans la dynamique des modes instables. L'un des mécanismes à étudier est le transfert de l'énergie de la frontière ouest à la frontière est par les mouvements rapides agéostrophiques le long des frontières, comme celui décrit par Cessi et Primeau [2001]. Pour cela le cadre le plus simple est celui d'un bassin rectangulaire avec un nombre de couches réduit. Dans un deuxième temps, ces modes possédant

des échelles spatiales très grandes, l'effet des variations horizontales de la stratification moyenne et latitudinales du paramètre de Coriolis devront aussi être inclus. Pour cela les équations utilisées dans le chapitre précédent pourraient être réutilisées en les modifiant pour prendre en compte l'effet de la variation de la latitude. Elles combinent en effet les équations quasi-géostrophiques avec celles de la géostrophie planétaire tout en se préservant de la complexité des équations primitives.

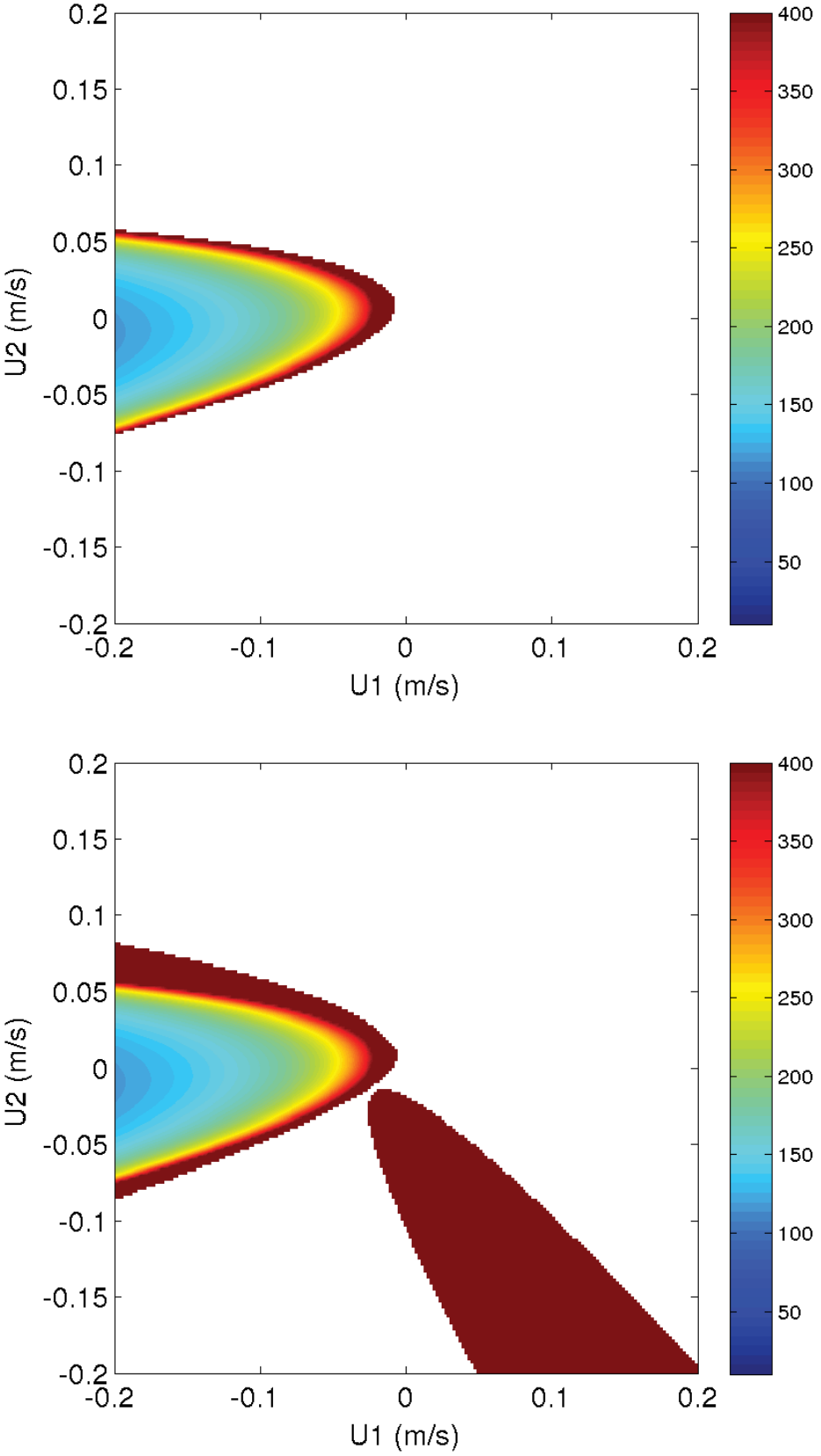

FIGURE *4.27 – Temps de croissance (en jours) des modes instables dans un modèle à 3 couches pour une longueur d'onde de 1000 km en fonction des vitesses zonales dans la couche 1 et 2. En haut la pente est nulle, en bas elle augmente de 10m pour 1000 km.*

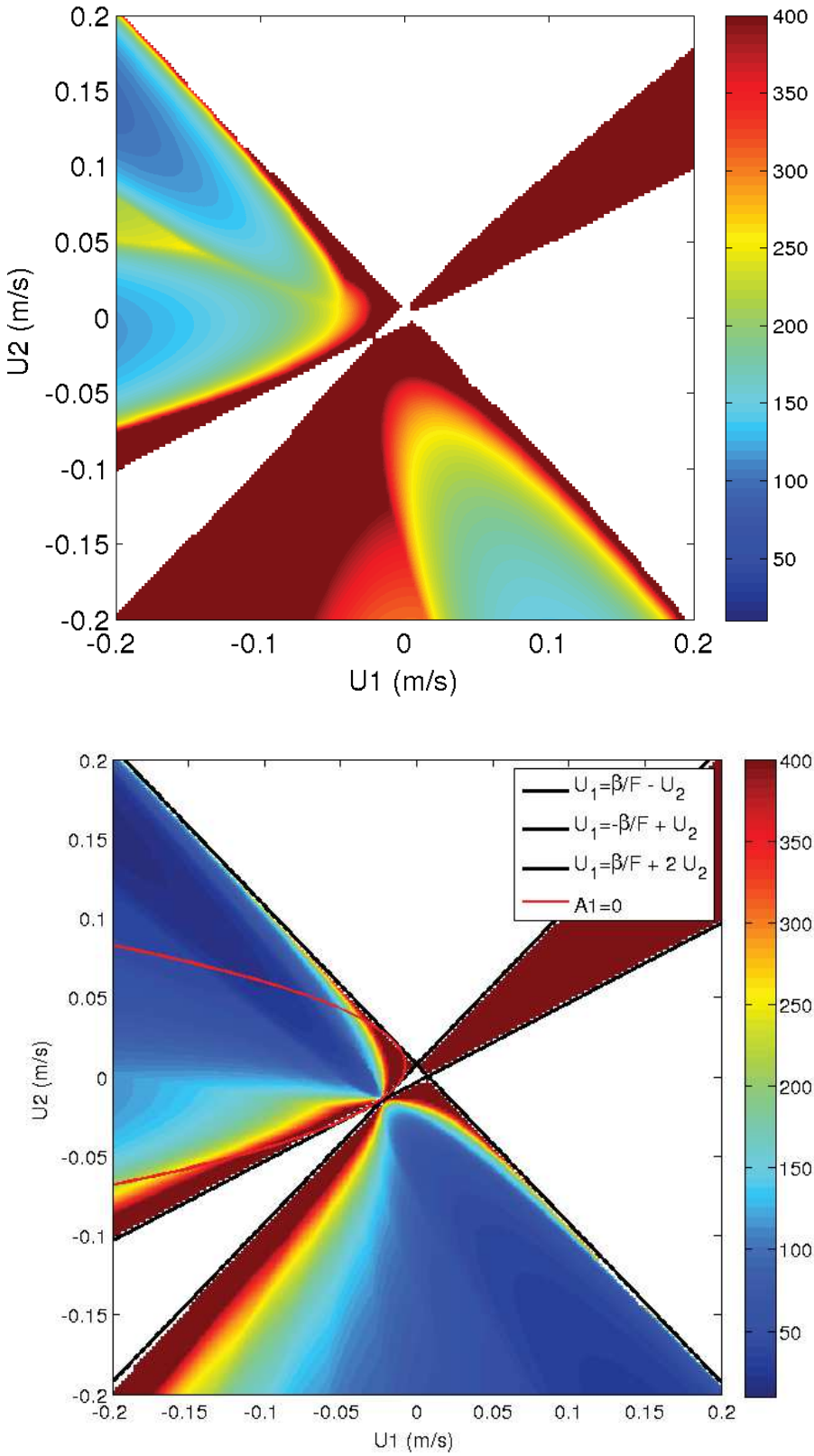

FIGURE *4.28 – Temps de croissance (en jours) des modes instables dans un modèle à 3 couches pour une longueur d'onde de 1000 km en fonction des vitesses zonales dans la couche 1 et 2. En haut la pente augmente de 200m sur 1000 km, en bas elle augmente de 1000 m pour 1000 km. Sur la figure du bas, les lignes noires délimitent les parties stables et instables du domaine, la courbe rouge délimite la parabole d'équation (4.43)*

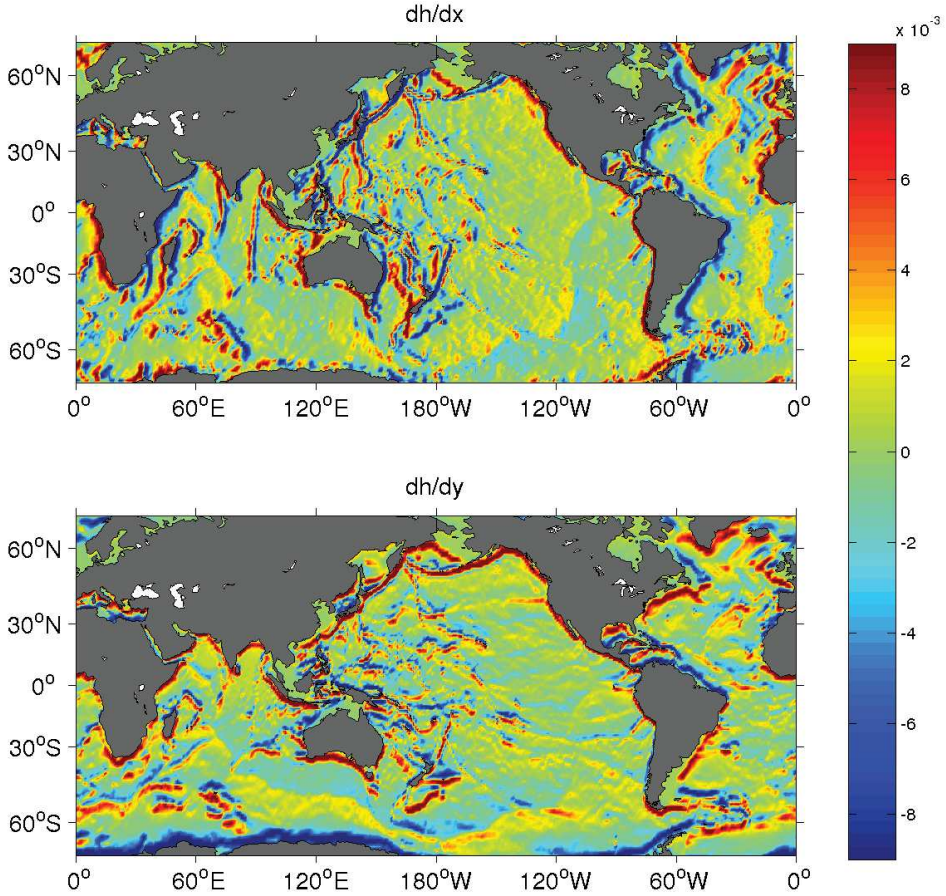

FIGURE *4.29 – Pente zonale en haut et méridionale en bas, calculée à partir d'un filtrage gaussien de ETOPO1 au* 1 °

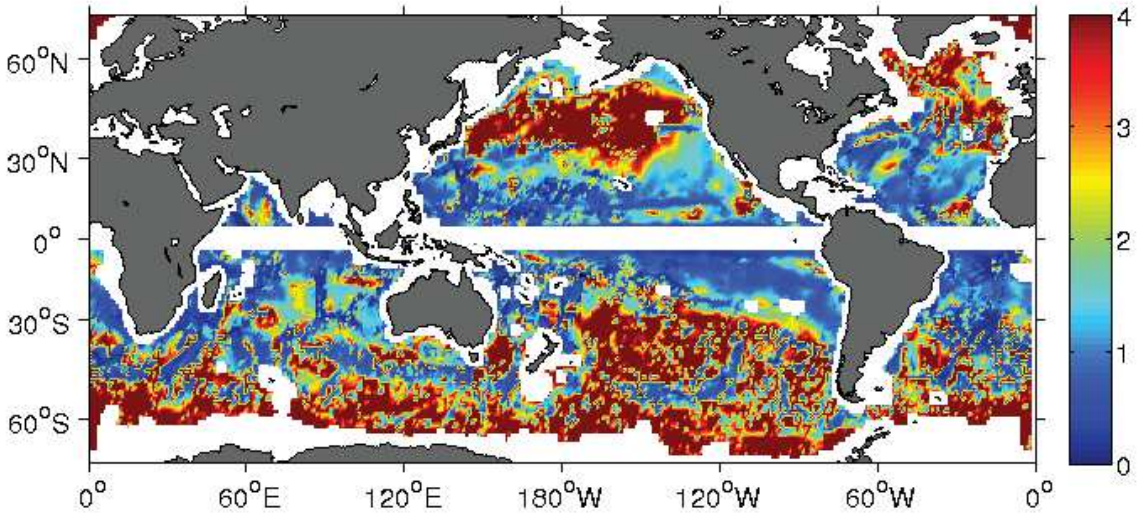

FIGURE *4.30 – Temps (années) de croissance des modes instables de grande échelle calculé sur des données de la circulation moyenne réelles et en présence d'une topographie en pente.* $\frac{1}{T} = kc_i$ *où* $k = \frac{2\pi}{1000}$ *rad/km*

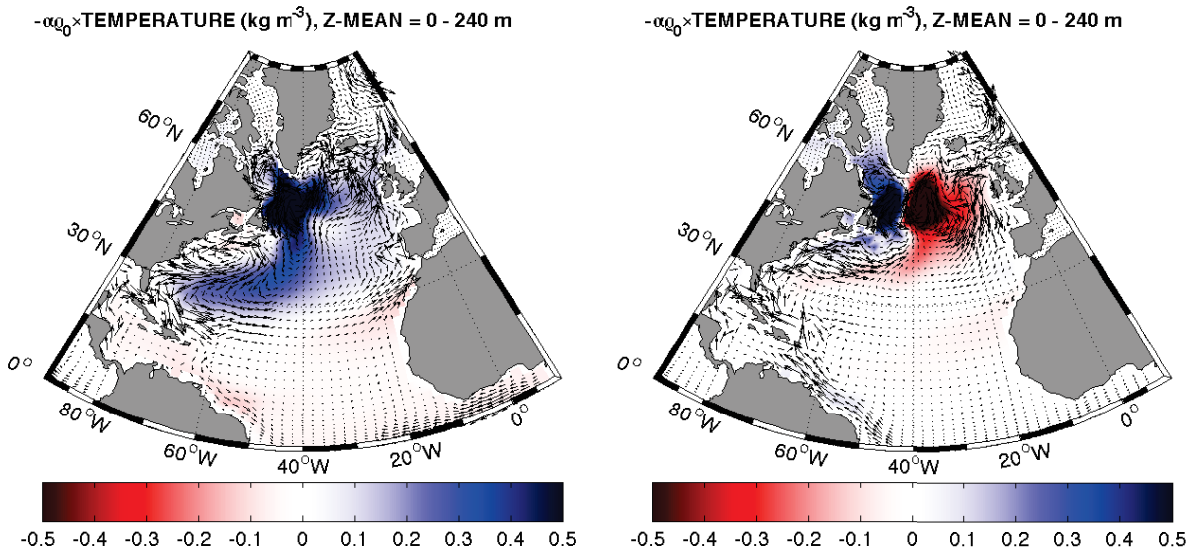

FIGURE *4.31 – Figure extraite de Sévellec et Fedorov [2013]. À gauche partie réelle de l'anomalie de température liée au mode le moins atténué de l'Atlantique Nord, à droite : partie imaginaire. Le mode a un temps d'atténuation de 40 ans et une période de 24 ans.*

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Le premier chapitre introductif de cette thèse a permis de montrer par des considérations dimensionnelles et des comparaisons de vitesses de phase, que l'influence du courant moyen (en accord avec Colin de Verdière et Tailleux [2005]) et de la topographie sur les anomalies de grandes échelles est plus importante aux hautes qu'aux basses latitudes. La théorie des ondes de Rossby, qui suppose un fond plat et une absence de courant moyen, a par conséquent une probabilité plus élevée de représenter correctement les anomalies observées à basse latitude qu'à haute latitude. Ces considérations nous ont menés dans le chapitre suivant à tester la capacité d'un modèle, basé sur les équations quasi-géostrophiques linéarisées autour d'un état de repos, à reproduire les courants sous la surface à partir des courants en surface et de la stratification moyenne. La principale difficulté dans la dérivation de ce modèle est l'existence des modes résonnants lorsque l'élévation de surface se rapproche des modes :

$$\begin{cases} \psi(z=0) = \frac{g}{f_0}\eta(x,y,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi + \frac{d}{dz}\left[\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{d\psi}{dz}\right]\right) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}(z=-H) = 0 \end{cases}$$

qui ne correspondent pas aux modes libres naturels, ceux obtenus avec la condition aux limites $\partial_z\psi(z=0) = 0$ (les modes barotrope et baroclines habituels). Pour retirer ces modes, le modèle adopté utilise différentes conditions aux limites en fonction de l'emplacement dans l'espace spectral (k, l, ω). Lorsque $\lambda^2 = k^2 + l^2 + \beta\frac{k}{\omega} > 0$ alors $\psi(z=0) = \frac{g}{f_0}\eta(x,y,t)$ et $\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$, lorsque $\lambda^2 < 0$ $\psi(z=0) = \frac{g}{f_0}\eta(x,y,t)$ et $\partial_z\psi(z=-H) = 0$. Ce modèle est ensuite testé de deux manières différentes. La première a consisté à appliquer ce calcul sur des simulations idéalisées, réalisées grâce à un modèle aux équations primitives (MICOM) ; les résultats montrent que le modèle est capable de prédire correctement la structure verticale des anomalies de surface, lorsque celle-ci est contenue dans le mode barotrope ou le premier mode barocline. Comme prévu, la prédiction se dégrade avec la latitude et l'augmentation de l'intensité du courant moyen. La deuxième étape de l'évaluation du modèle a consisté à utiliser des données réelles d'altimétrie satellitaire et de stratification moyenne pour le calcul des courants de subsurface puis à leur comparaison avec des mesures de courantomètres. Bien que les données des courantomètres soient trop peu nombreuses et généralement trop courtes pour que cette comparaison soit entièrement satisfaisante, les résultats suggèrent que le modèle est capable de reproduire correctement certains courants lorsque les hypothèses effectuées sont satisfaites. Ces hypothèses consistent principalement en l'éloignement de la zone de calcul des côtes, en une latitude peu élevée (nous avons donné la limite approximative de 30 °), en un courant moyen suffisamment faible et en une topographie pas trop élevée.

Ce travail a soulevé différentes questions, parmi lesquelles figure : comment expliquer l'énergie située en dehors des relations de dispersion ? Cette question est centrale pour pouvoir calculer la structure verticale des anomalies observées. Cette interrogation est l'objet du chapitre suivant, le chapitre trois, qui en examine l'une des explications possibles : la variation horizontale

du courant moyen et de la topographie.
Dans ce but, les équations quasi-géostrophiques linéarisées autour du courant moyen et de la topographie sont utilisées, les modes propres de ces équations sont calculés en supposant des conditions aux limites horizontales périodiques. La première partie de ce chapitre, après la dérivation de ces équations, a consisté à comprendre l'influence des deux champs que sont le courant moyen et la topographie sur les ondes libres de Rossby dans des cadres idéalisés. La topographie peut, dans certains cas, modifier considérablement la forme de la solution comme l'atteste le cas étudié d'un fond en pente précédé et suivi d'un fond plat. Ce calcul a mis en évidence la possibilité d'existence de modes de Rossby piégés au dessus de la topographie pour certaines fréquences, et par conséquent un mécanisme de guide d'onde transportant l'énergie le long des isobathes. Plus généralement, des études décrites dans la littérature et des résultats du chapitre trois ont montré que la topographie peut augmenter la fréquence du mode barocline et diminuer celle du mode barotrope. Puis l'étude idéalisée de la variation méridionale d'un courant moyen zonal dans un modèle à deux couches a mis en lumière ses mécanismes d'interaction avec les ondes de Rossby. Le courant moyen agit de manière différenciée en fonction des longueurs d'ondes des ondes et des siennes. Si les variations du courant moyen sont plus grandes que celles des ondes de Rossby, les modes adoptent, pour certains, une amplitude nulle là où $U(y) < 0$, pour d'autres, là où $U(y) > 0$: les variations du courant moyen créent des régions où certaines ondes peuvent exister alors qu'elles ne le peuvent pas ailleurs. Dans ce cas l'approximation qui consiste à supposer le courant moyen constant sur la zone considérée peut être effectuée. Si, au contraire, les longueurs d'ondes des ondes de Rossby sont du même ordre que celles du courant moyen, la réponse doit absolument être calculée en prenant en compte les variations du champ moyen. Pour récapituler, l'inclusion d'un courant moyen et d'une topographie horizontalement variable sur la zone considérée entraine un couplage dans les trois directions de l'espace : chaque mode propre est constitué de plusieurs longueurs d'ondes et modes verticaux. C'est précisément ce phénomène qui est observé dans les données altimétriques : pour une fréquence donnée, l'énergie spectrale est décrite par un patch continu de longueurs d'ondes, au lieu d'être décrite par un ensemble discret comme c'est le cas lorsque le courant moyen et la topographie ne varient pas horizontalement.
La dernière partie de ce chapitre a consisté à calculer les modes propres sur une zone de l'Atlantique Nord en présence du courant moyen et de la topographie observés. Afin de pouvoir évaluer, de manière objective, l'effet de la prise en compte de ces champs, une méthode consistant à projeter l'élévation de surface sur les modes propres ainsi calculés a été développée. Ce calcul, plutôt strict, montre que sur cette zone, 3% de l'énergie spectrale peut être expliqué grâce à la théorie simple des ondes de Rossby. L'ajout du courant moyen et de la topographie augmente ce pourcentage à environ 10%. Du travail reste à faire sur ce sujet, notamment sur la relaxation de l'hypothèse des conditions aux limites périodiques, mais ce chapitre a montré que les variations du courant moyen et de la topographie comme explications de l'énergie en dehors des relations de dispersion ne pouvaient pas être écartées.
L'une des questions posées dans l'introduction avait pour sujet le forçage des anomalies de grandes échelles et plus particulièrement, le rôle éventuel de l'instabilité barocline. C'est l'objet du dernier chapitre.
Dans un premier temps, la littérature sur ce sujet a été rappelée et complétée. Pour que cette instabilité grande échelle ait lieu, deux modes verticaux doivent agir ensemble. Le mode barotrope étant inexistant à grande échelle si l'approximation des ondes longues est effectuée, (mais nous avons montré que sans cette approximation le résultat restait globalement le même) il faut au minimum deux couches et demie pour que cette instabilité puisse se produire. Dans ce modèle à deux couches et demie, en présence de courant moyen zonal, l'instabilité a lieu lorsque le flot en surface est dirigé vers l'ouest. Dans la deuxième couche, la valeur absolue de la vitesse doit être suffisamment faible. Pour des vitesses U_1 et U_2 données, l'instabilité est plus forte à basse latitude qu'à haute latitude. Ce modèle suggère donc que l'instabilité de grande

échelle aura lieu à basse latitude dans les courants de surface dirigés vers l'ouest. Mais l'ajout d'une couche supplémentaire, et par conséquent l'augmentation des possibilités d'interaction des modes verticaux, a montré que des instabilités, probablement plus faibles, pouvaient aussi apparaitre pour des courants en surface dirigés vers l'est. Afin d'élucider toutes les possibilités, le calcul d'instabilité a été effectué sur des données réelles de courant moyen et de stratification grâce à un modèle continu sur la verticale (bien entendu discrétisé verticalement). Pour filtrer les modes de Charney, qui ont la croissance la plus rapide, la première stratégie a consisté en la sélection des modes d'une longueur d'onde supérieure à 600 km. Les taux de croissance les plus élevés se trouvent effectivement à basse latitude, dans les courants dirigés vers l'ouest, mais aussi dans les courants de bord Ouest, dans le courant circumpolaire et dans une zone au sud de l'Islande. Ces modes ont des longueurs d'ondes comprises entre 600 et 800 kilomètres et des taux de croissance de moins d'un an pour les plus instables. La deuxième stratégie a consisté à utiliser l'approximation des ondes longues. Ce calcul sélectionne les mêmes zones que le calcul précédent à basse latitude, mais à haute latitude, le courant moyen est beaucoup plus stable que ce qui était rapporté par la méthode précédente. Le courant circumpolaire est en revanche toujours sélectionné comme une région instable. La conclusion de ces deux calculs est qu'il n'est pas possible d'exclure la possibilité d'un forçage des anomalies de grande échelle par l'instabilité barocline à basse latitude. Ce calcul étant réalisé localement, c'est-à-dire sans prendre en compte les effets des variations horizontales du courant moyen, la partie suivante a consisté à évaluer, dans un cadre idéalisé, les effets potentiels d'une telle variation. Il a été montré que le calcul local peut renseigner sur les zones où le mode instable global a la plus forte amplitude et donner des taux de croissance équivalents. Finalement, l'effet d'une pente locale est étudié dans un modèle à trois couches. La découverte que l'inclusion de cette dernière enrichissait sensiblement les possibilités d'instabilités nous a menés à réitérer le calcul sur des données réelles en tenant compte de la pente locale. Le résultat de ce calcul montre que la topographie rend globalement l'océan plus instable, bien que certaines zones soient stabilisées.

Néanmoins, de nombreuses questions restent en suspens et plusieurs aspects de ce travail pourraient être améliorés. La principale amélioration doit certainement consister en la relaxation des conditions aux limites périodiques utilisées tout au long de cette thèse. Cette hypothèse permet de simplifier considérablement le problème en ne considérant pas la complexité de la côte mais ne peut être valable que dans un océan intérieur. Notamment, l'effet des processus agéostrophiques se déplaçant le long des frontières (telles que les ondes de Kelvin), l'hétérogénéité des caractéristiques des courants transitoires, ou simplement les réflexions et interactions des courants aux frontières, ne peuvent pas être prise en compte. En particulier, il est clair que les modes globaux calculés par Sévellec et Fedorov [2013] (dont le mode le moins atténué est présenté sur la figure (4.31)) sont hautement influencés par les conditions aux limites.
Le calcul des modes libres dans un cadre réaliste (avec topographie, courant moyen, frontières) pourrait nous renseigner à la fois sur la variabilité basse fréquence associée aux ondes de Rossby (les ondes de Rossby ne sont en fait que les modes propres d'un bassin périodique sans courant moyen ni topographie) et sur la variabilité très basse fréquence comme celle étudiée par Sévellec et Fedorov [2013] dont le lien avec les ondes de Rossby n'est pas forcément très clair. Cependant, calculer les modes propres pour un bassin réaliste n'est certainement pas simple à réaliser, puis, une fois calculés, la compréhension des mécanismes des modes n'est pas assurée étant donné la complexité en jeu. L'un des enseignements de cette thèse est que la compréhension de la dynamique d'un phénomène est grandement facilitée lorsque le cadre est simplifié au maximum. On se propose donc de procéder par étape de complexité croissante avant d'arriver au calcul des modes globaux sur une configuration réaliste. La première étape pourrait consister en l'étude des modes propres d'un modèle quasi-géostrophique à 3 couches, (3 couches pour qu'il puisse exister des modes instables de grande échelle) forcé par un vent constant sans topographie. Les modes ainsi calculés pourraient être comparés aux modes locaux et les mé-

canismes de leur dynamique élucidés. La variabilité observée, projetée sur l'espace créé par les modes propres nous renseignera sur sa part descriptible par les modes libres. Nous avons vu à la fin du chapitre deux que l'un des enjeux de ce calcul est de mieux comprendre la structure verticale des anomalies.

Ces études pourraient permettre d'améliorer sensiblement la réponse, esquissée à la fin du chapitre trois, à la question suivante : quelle partie du signal observé peut être attribuée aux ondes libres du système ? Puis à d'autres questions annexes comme : quel est le rôle de la topographie dans la dynamique de ces modes ? Peuvent-ils expliquer l'intensification du signal à l'ouest des bassins (observée par exemple par Chelton et Schlax [1996]) ? etc. D'un point de vue climatique, une prédiction correcte des variations climatiques sur des échelles de temps décennales ne peut être obtenue que par une compréhension de la dynamique basse fréquence de l'océan et en particulier de ses modes propres de variabilité.

Annexe A

On montre que la deuxième valeur propre du problème de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dF_{Ni}}{dz}(z=0)=0 \\ \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{f_0^2}{N^2(z)}\dfrac{dF_{Ni}}{dz}\right)+\lambda_{Ni}^2F_{Ni}(z)=0 \\ \dfrac{dF_{Ni}}{dz}(z=-H)=0 \end{cases} \tag{A.1}$$

est plus grande que la première valeur propre du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{dF_{Di}}{dz}(z=0)=0 \\ \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{f_0^2}{N^2(z)}\dfrac{dF_{Di}}{dz}\right)+\lambda_{Di}^2F_{Di}(z)=0 \\ F_{Di}(z=-H)=0 \end{cases} \tag{A.2}$$

Le théorème de Sturm Liouville stipule que les valeurs propres sont réelles, et que, si elles sont ordonnées de la manière suivante $\lambda_{D1} < \lambda_{D2} < ...$, les fonctions propres associées $F_{D1}(z), F_{D2}(z), ...$ ont respectivement 0 zéro, 1 zéro, 2 zéros... sur l'intervalle $]-H\,,0[$. Par conséquent, F_{D1} ne s'annulera pas alors que F_{N2} (le 1 er mode barocline) s'annule quelque part sur la verticale. En multipliant (A) par F_{N2}, (B) par F_{D1}, en soustrayant les deux et en intégrant sur la verticale, on obtient :

$$-\frac{f_0^2}{N^2(-H)}F_{N2}(-H)\frac{dF_{D1}}{dz}(-H)+\left(\lambda_D^2-\lambda_N^2\right)\int_{-H}^{0}F_{N2}(z)F_{D1}(z)dz=0 \tag{A.3}$$

En choisissant $F_{D1}(0)>0$ et $F_{N2}(0)>0$ (faire le choix inverse ne change pas le résultat), on déduit du fait que F_{N2} s'annule une fois sur la verticale que $F_{N2}(-H)<0$ puis du fait que F_{D1} soit une fonction monotone ne s'annulant pas sur $]-H\,,0[$, que $\frac{dF_{D1}}{dz}(-H)>0$. Donc la quantité $-\frac{f_0^2}{N^2(-H)}F_{N2}(-H)\frac{dF_{D1}}{dz}(-H)$ est positive. En intégrant sur la verticale (A.1) multiplié par F_{D1}, on obtient :

$$\lambda_{N2}^2\int_{-H}^{0}F_{N2}F_Ddz=\lambda_{N2}^2\int_{-H}^{0}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{dF_{N2}}{dz}\frac{dF_{D1}}{dz}dz \tag{A.4}$$

or F_{N2} et F_{D1} étant deux fonctions monotones avec $F_{N2}(0)>0$ et $F_{D1}(0)>0$, $F_{N2}(-H)<0$ et $F_{D1}(-H)=0$, les deux dérivées du membre de droite sont positives sur toute la profondeur, par conséquent l'intégrale $\int_{-H}^{0}F_{N2}F_Ddz$ est une quantité positive. On en déduit que $\lambda_D^2-\lambda_N^2<0$.

Annexe B

Formules reliant les nombres d'ondes zonaux à la fréquence ω au dessus d'un fond en pente.

$$k^*_{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2H\omega}\left(\beta H - \sqrt{(H\left(\beta^2 H - 2\omega\left(\alpha f_0 l + \mathrm{F1}H\omega + \mathrm{F2}H\omega + 2Hl^2\omega - \Delta\right)\right))}\right) \tag{B.1}$$

$$k_{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2H\omega}\left(\beta H + \sqrt{(H\left(\beta^2 H - 2\omega\left(\alpha f_0 l + \mathrm{F1}H\omega + \mathrm{F2}H\omega + 2Hl^2\omega - \Delta\right)\right))}\right) \tag{B.2}$$

$$k^*_{\mathrm{BT}} = \frac{1}{2H\omega}\left(\beta H - \sqrt{(H\left(\beta^2 H - 2\omega\left(\alpha f_0 l + \mathrm{F1}H\omega + \mathrm{F2}H\omega + 2Hl^2\omega + \Delta\right)\right))}\right) \tag{B.3}$$

$$k_{\mathrm{BT}} = \frac{1}{2H\omega}\left(\beta H + \sqrt{(H\left(\beta^2 H - 2\omega\left(\alpha f_0 l + \mathrm{F1}H\omega + \mathrm{F2}H\omega + 2Hl^2\omega + \Delta\right)\right))}\right) \tag{B.4}$$

$$\Delta = \sqrt{\alpha^2 f_0^2 l^2 + 2\alpha f_0(-\mathrm{F1} + \mathrm{F2})Hl\omega + (\mathrm{F1} + \mathrm{F2})^2 H^2\omega^2} \tag{B.5}$$

Annexe C

On regroupe ici les longues formules obtenues pour l'étude de stabilité du modèle à trois couches en présence d'un courant moyen réalisé dans le chapitre 4. L'équation qui doit être satisfaite pour que le déterminant soit nul est :

$$ac_x^2 + bc_x + d = 0 \tag{C.1}$$

avec

$$a = F(\beta(F + 2F_3) - F\gamma) \tag{C.2}$$

$$b = (-\beta^2(3F + F_3) - F^2\gamma U_2 + \beta F(3\gamma + F_3U_1 + FU_2 + 3F_3U_2)) \tag{C.3}$$

$$c = \beta(\beta - \gamma - F_3U_2)(\beta - F(U_1 + U_2)) \tag{C.4}$$

Le déterminant de cette équation est :

$$\Delta = A_1\gamma^2 + A_2\gamma + A_3 \tag{C.5}$$

avec :

$$A_1 = (5\beta^2F^2 + 4\beta F^3U_1 - 2\beta F^3U_2 + F^4U_2^2) \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned} A_2 = (&-10\beta^3F^2 + 2\beta^3FF_3 - 8\beta^2F^3U_1 - 2\beta^2F^2F_3U_1 \\ &+4\beta^2F^3U_2 + 8\beta^2F^2F_3U_2 + 2\beta F^3F_3U_1U_2 - 2\beta F^4U_2^2 - 2\beta F^3F_3U_2^2) \end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned} A_3 = 5\beta^4F^2 - 2\beta^4FF_3 + \beta^4F_3^2 + 4\beta^3F^3U_1 + 2\beta^3F^2F_3U_1 - 2\beta^3FF_3^2U_1 + \beta^2F^2F_3^2U_1^2 - \\ 2\beta^3F^3U_2 - 8\beta^3F^2F_3U_2 + 2\beta^3FF_3^2U_2 - 2\beta^2F^3F_3U_1U_2 - 2\beta^2F^2F_3^2U_1U_2 + \beta^2F^4U_2^2 + \\ 2\beta^2F^3F_3U_2^2 + \beta^2F^2F_3^2U_2^2 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Annexe D

Le but de cette annexe est de démontrer plusieurs propriétées des ondes de Rossby modifiées par une pente, dans un modèle à deux couches. Les équations considérées sont :

$$\begin{cases} \omega\left((-K^2 - F_1)\alpha_1 + F_1\alpha_2\right) + \beta k\alpha_1 = 0 \\ \omega\left((-K^2 - F_2)\alpha_2 + F_2\alpha_1\right) + \beta k\alpha_2 + \frac{f_0}{H_2}\left(k\alpha_y - l\alpha_x\right) = 0 \end{cases} \tag{D.1}$$

$K^2 = k^2 + l^2$ $F_1 = \frac{f_0^2}{g'H_1}$ $F_2 = \frac{f_0^2}{g'H_2}$; (H_1, H_2) les hauteurs des couches 1 et 2 ; (α_1, α_2) les amplitudes de la fonction courant dans les couches 1 et 2 ; (α_x, α_y) la pente dans les directions zonale et méridionale. On appelle $\omega_1 = \frac{\beta k}{K^2}$ et $\omega_2 = \frac{\beta k}{K^2+F_1+F_2}$ les fréquences des modes barotrope et barocline et $(\omega_{b1}, \omega_{b2})$ les fréquences modifiées par la pente. Des démonstrations équivalentes, dans le cas où $K^2 << 1$, peuvent être trouvées dans Veronis [1981].
Nous allons montrer que :

1. exactement une fréquence modifiée par la pente est contenue entre ω_2 et ω_1, l'autre n'appartient pas à l'intervalle $[\omega_2, \omega_1]$ et peut être considérée comme un mode topographique ;
2. les corrections dues à la pente ont le même signe pour les deux modes verticaux, elle sont positives lorsque $\left(\begin{pmatrix} k \\ l \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{pmatrix}\right).\vec{z} > 0$ et négatives dans le cas contraire. Si le vecteur d'onde est parallèle à la pente, cette dernière n'a pas d'effet sur les ondes.
3. dans certains cas (nous montrerons lesquels) le mode topographique peut avoir une vitesse de phase vers l'est ;
4. lorsque la topographie devient très grande, la solution appartenant à l'intervalle $[\omega_2, \omega_1]$ tend vers $\omega = \frac{\beta k}{k^2+l^2+F_1}$: le mode correspondant est intensifié en surface, les couches 1 et 2 sont découplées. Ce résultat est bien connu de Rhines [1970] Veronis [1981] Tailleux et McWilliams [2000]...

Le système (D.1) a une solution si son déterminant est nul. C'est à dire si :

$$\omega^2 - (\omega_{b1} + \omega_{b2})\omega + \omega_{b1}\omega_{b2} = 0 \tag{D.2}$$

ω_{b1} et ω_{b2} peuvent s'écrire en fonction de ω_1 et ω_2 de la manière suivante :

$$\begin{cases} \omega_{b1}\omega_{b2} = \omega_1\omega_2 + t1 \\ \omega_{b1} + \omega_{b2} = \omega_1 + \omega_2 + t2 \end{cases} \tag{D.3}$$

avec $t1 = \frac{f_0}{H_2}\frac{\beta k}{a}\left(k\alpha_y - l\alpha_x\right)$; $t2 = \frac{f_0}{H_2}\frac{F_1+K^2}{a}\left(k\alpha_y - l\alpha_x\right)$ et $a = K^2(K^2 + F_1 + F_2)$. On écrit ensuite :

$$\begin{cases} \omega_{b1} = \omega_1 + \Delta\omega_1^c \\ \omega_{b2} = \omega_2 + \Delta\omega_2^c \\ \omega_{b1} = \omega_2 + \Delta\omega_2^d \\ \omega_{b2} = \omega_1 + \Delta\omega_1^d \end{cases} \tag{D.4}$$

c'est à dire que $\Delta\omega_1^c$ et $\Delta\omega_2^d$ représentent respectivement la différence entre ω_{b1} et ω_1 et la différence entre ω_{b1} et ω_2. Puis $\Delta\omega_2^c$ et $\Delta\omega_1^d$ la différence entre ω_{b2} et ω_2 et la différence entre ω_{b2} et ω_1. $\Delta\omega_1^c$ et $\Delta\omega_2^c$ sont les deux solutions de l'équation :

$$(\Delta\omega^c)^2 + \Delta\omega^c(-t2 - \omega_2 + \omega_1) - t2\omega_1 + t_1 = 0 \tag{D.5}$$

et $\Delta\omega_1^d$ et $\Delta\omega_2^d$ les solutions de :

$$(\Delta\omega^d)^2 + \Delta\omega^d(-t2 - \omega_2 + \omega_1) - t2\omega_2 + t_1 = 0 \tag{D.6}$$

Ces équations sont obtenues en insérant (D.4) dans (D.3). Les deux solutions de (D.5) sont de même signe si $-t2\omega_1 + t1 > 0$; de même pour (D.6), les solutions sont de même signe si $-t2\omega_2 + t1 > 0$. En effet :

$$\begin{cases} \Delta\omega_1^c\Delta\omega_2^c = -t2\omega_1 + t_1 = \frac{f_0}{H_2 a}\left(k\alpha_y - l\alpha_x\right)\left(\beta k - (F_1 + K^2)\omega_1\right) \\ \Delta\omega_1^d\Delta\omega_2^d = -t2\omega_2 + t_1 = \frac{f_0}{H_2 a}\left(k\alpha_y - l\alpha_x\right)\left(\beta k - (F_1 + K^2)\omega_2\right) \end{cases} \tag{D.7}$$

puisque $|\omega_1| > |\frac{\beta k}{K^2+F_1}|$ et $|\omega_2| < |\frac{\beta k}{K^2+F_1}|$, $\Delta\omega_1^c\Delta\omega_2^c\Delta\omega_1^d\Delta\omega_2^d < 0$ pour n'importe quelles valeurs de $(k, l, \alpha_x, \alpha_y)$. C'est à dire que si $\Delta\omega_1^c\Delta\omega_2^c < 0$ alors $\Delta\omega_1^d\Delta\omega_2^d > 0$ et vice versa. On peut se convaincre (avec des schémas par exemple) que cette propriété impose qu'exactement une des deux fréquences ω_{b1} ou ω_{b2} est située dans l'intervalle $[\omega_2, \omega_1]$ et l'autre en dehors. On a donc $\omega_{b1} < \omega_2 < \omega_{b2} < \omega_1$ ou $\omega_2 < \omega_{b1} < \omega_1 < \omega_{b2}$ (en renommant les fréquences modifiées si besoin). La structure verticale du mode en dehors de l'intervalle $[\omega_2, \omega_1]$ vérifie : $|\alpha_1| \leq \frac{H_2}{H_1}|\alpha_2|$ (l'égalité est obtenue sur le premier mode barocline), plus la distance du point à la courbe $\omega = \frac{\beta k}{K^2+F_1}$ est grande, plus le mode est piégé dans la couche de fond.
La propriété numéro 2 : les corrections sont de même signe, s'obtient facilement grâce à la propriété numéro 1. De cela, on déduit que la relation :

$$\omega_{b1} + \omega_{b2} = \omega_1 + \omega_2 + t2 \tag{D.8}$$

donne le signe de la correction : si $t2 > 0$, elle est positive, les fréquences augmentent, si $t2 < 0$, elle est négative, les fréquences diminuent. Le signe de $t2$ dépend du signe de $k\alpha_y - l\alpha_x = \left(\begin{pmatrix} k \\ l \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{pmatrix}\right).\vec{z}$, qui dépend lui même de l'angle entre le vecteur d'onde et la pente. Par exemple si la pente est dirigée dans la direction zonale, $\vec{i}$, les corrections seront négatives pour $l > 0$ et positives pour $l < 0$.
Puisque l'une des fréquences modifiées appartient à l'intervalle $[\omega_2, \omega_1]$ et possède donc une vitesse de phase dirigée vers l'ouest, la deuxième solution a une vitesse de phase dirigée vers l'est si elle est de signe opposé. C'est à dire si $\omega_{b1}\omega_{b2} = \omega_1\omega_2 + \frac{f_0}{H_2}\frac{\beta k}{a}\left(k\alpha_y - l\alpha_x\right) < 0$ or $\omega_1\omega_2 = \frac{(\beta k)^2}{a}$, par conséquent la condition pour qu'il y ait une vitesse de phase dirigée vers l'est est d'une part que $|\beta k|/|||\vec{k}||(f_0\alpha/H_2)| < 1$ et d'autre part si $k > 0$, $k\alpha_y - l\alpha_x = \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}\right).\vec{z} < 0$ avec $(\alpha_x, \alpha_y) = \alpha(\cos(\phi), \sin(\phi))$ et $\vec{k} = ||\vec{k}||(\cos(\theta), \sin(\theta))$
Et si $k < 0$, une vitesse de phase vers l'est peut être obtenue si $\left(\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}\right).\vec{z} > 0$.
Lorsque la topographie devient très grande, les termes dominants de l'équation (D.2) sont :

$$t1 - t2\omega = 0 \tag{D.9}$$

La solution située entre ω_2 et ω_1 converge donc vers $\omega = \frac{\beta k}{K^2+F_1}$ lorsque la pente (pour n'importe quelle orientation) devient très grande. D'après la propriété 2, si $k\alpha_y - l\alpha_x = \left(\begin{pmatrix} k \\ l \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{pmatrix}\right).\vec{z} < 0$, un mode barotrope modifié converge vers $\omega = \frac{\beta k}{K^2+F_1}$, si $k\alpha_y - l\alpha_x = \left(\begin{pmatrix} k \\ l \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{pmatrix}\right).\vec{z} > 0$ c'est un mode barocline modifié qui converge vers $\omega = \frac{\beta k}{K^2+F_1}$.

Bibliographie

David LT Anderson et Adrian E Gill : Spin-up of a stratified ocean, with applications to upwelling. *In Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, volume 22, pages 583–596. Elsevier, 1975.

David LT Anderson et Peter D Killworth : Spin-up of a stratified ocean, with topography. *Deep Sea Research*, 24(8):709–732, 1977.

David G Andrews, James R Holton et Conway B Leovy : *Middle atmosphere dynamics*. Numéro 40. Academic press, 1987.

Brian K Arbic et Glenn Flierl : Effects of mean flow direction on energy, isotropy, and coherence of baroclinically unstable beta-plane geostrophic turbulence. *Journal of physical oceanography*, 34(1):77–93, 2004.

Bernard Barnier : A numerical study on the influence of the mid-atlantic ridge on nonlinear first-mode baroclinic rossby waves generated by seasonal winds. *Journal of physical oceanography*, 18(3):417–433, 1988.

Rainer Bleck et Douglas Boudra : Wind-driven spin-up in eddy-resolving ocean models formulated in isopycnic and isobaric coordinates. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 91(C6):7611–7621, 1986.

Martha W. Buckley, David Ferreira, Jean-Michel Campin, John Marshall et Ross Tulloch : On the relationship between decadal buoyancy anomalies and variability of the atlantic meridional overturning circulation. *Journal of Climate*, 25(23):8009–8030, 2014/12/04 2012.

DR Caldwell et MS Longuet-Higgins : The experimental generation of double kelvin waves. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 326(1564):39–52, 1971.

Paola Cessi et François Primeau : Dissipative selection of low-frequency modes in a reduced-gravity basin. *Journal of physical oceanography*, 31(1):127–137, 2001.

Peter G Challenor, Paolo Cipollini et David Cromwell : Use of the 3d radon transform to examine the properties of oceanic rossby waves. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 18(9):1558–1566, 2001.

Jule G Charney : The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *Journal of Meteorology*, 4(5):136–162, 1947.

Dudley B Chelton, Roland A DeSzoeke, Michael G Schlax, Karim El Naggar et Nicolas Siwertz : Geographical variability of the first baroclinic rossby radius of deformation. *Journal of Physical Oceanography*, 28(3):433–460, 1998.

Dudley B Chelton et Michael G Schlax : Global observations of oceanic rossby waves. *Science*, pages 234–243, 1996.

Paolo Cipollini, David Cromwell, Peter G Challenor et Stefano Raffaglio : Rossby waves detected in global ocean colour data. *Geophysical Research Letters*, 28(2):323–326, 2001.

Paolo Cipollini, David Cromwell, Matthew S Jones, Graham D Quartly et Peter G Challenor : Concurrent altimeter and infrared observations of rossby wave propagation near 34 n in the northeast atlantic. *Geophysical Research Letters*, 24(8):889–892, 1997.

Allan J Clarke : The reflection of equatorial waves from oceanic boundaries. *Journal of physical oceanography*, 13(7):1193–1207, 1983.

Allan J Clarke et Chuan Shi : Critical frequencies at ocean boundaries. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 96(C6):10731–10738, 1991.

Alain Colin de Verdière : On mean flow instabilities within the planetary geostrophic equations. *Journal of physical oceanography*, 16(11):1981–1984, 1986.

Alain Colin de Verdière et Thierry Huck : Baroclinic instability : An oceanic wavemaker for interdecadal variability. *Journal of physical oceanography*, 29(5):893–910, 1999.

Alain Colin de Verdière et Rémi Tailleux : The interaction of a baroclinic mean flow with long rossby waves. *Journal of physical oceanography*, 35(5):865–879, 2005.

Yves Dandonneau, Andres Vega, Hubert Loisel, Yves Du Penhoat et Christophe Menkes : Oceanic rossby waves acting as a" hay rake" for ecosystem floating by-products. *Science*, 302(5650):1548–1551, 2003.

WK Dewar : On "too fast" baroclinic planetary waves in the general circulation. *Journal of physical oceanography*, 28(9):1739–1758, 1998.

ET Eady : Long waves and cyclone waves. *Tellus*, 1(3):33–52, 1949.

Glenn Flierl : Models of vertical structure and the calibration of two-layer models. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 2(4):341–381, 1978.

Glenn Flierl : Rossby wave radiation from a strongly nonlinear warm eddy. *Journal of Physical Oceanography*, 14(1):47–58, 1984.

Lee-Lueng Fu : Latitudinal and frequency characteristics of the westward propagation of large-scale oceanic variability. *Journal of physical oceanography*, 34(8):1907–1921, 2004.

Lee-Lueng Fu et Bo Qiu : Low-frequency variability of the north pacific ocean : The roles of boundary-and wind-driven baroclinic rossby waves. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 107(C12):13–1, 2002.

Adrian E Gill : *Atmosphere-ocean dynamics*, volume 30. Academic press, 1982.

Adrian E Gill, JSA Green et AJ Simmons : Energy partition in the large-scale ocean circulation and the production of mid-ocean eddies. *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, 21(7):499–528, 1974.

Roman E Glazman et Peter B Weichman : Meridional component of oceanic rossby wave propagation. *Dynamics of atmospheres and oceans*, 38(3):173–193, 2005.

JSA Green : A problem in baroclinic stability. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 86(368):237–251, 1960.

Roger Grimshaw et John S Allen : Low-frequency baroclinic waves off coastal boundaries. *Journal of physical oceanography*, 18(8):1124–1143, 1988.

Isaac M Held : Stationary and quasi-stationary eddies in the extratropical troposphere : Theory. *Large-scale dynamical processes in the atmosphere*, pages 127–168, 1983.

Katherine L Hill, Ian S Robinson et Paolo Cipollini : Propagation characteristics of extratropical planetary waves observed in the atsr global sea surface temperature record. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 105(C9):21927–21945, 2000.

Antoine Hochet, Alain Colin de Verdière et Robert Scott : The vertical structure of large scale unsteady currents. *Journal of Physical Oceanography*, in press.

Thierry Huck, Olivier Arzel et Florian Sévellec : Multidecadal variability of the overturning circulation in presence of eddy turbulence. *Submitted to Journal of Physical Oceanography*, 2015.

PE Isachsen, Joseph H LaCasce et Joseph Pedlosky : Rossby wave instability and apparent phase speeds in large ocean basins. *Journal of physical oceanography*, 37(5):1177–1191, 2007.

Jordi Isern-Fontanet, Guillaume Lapeyre, Patrice Klein, Bertrand Chapron et Matthew W Hecht : Three-dimensional reconstruction of oceanic mesoscale currents from surface information. *Journal of Geophysical Research*, 113(C9):C09005, 2008.

Peter D Killworth : On the propagation of stable baroclinic rossby waves through a mean shear flow. *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers*, 26(9):997–1031, 1979.

Peter D Killworth et Jeffrey R Blundell : The effect of bottom topography on the speed of long extratropical planetary waves. *Journal of physical oceanography*, 29(10):2689–2710, 1999.

Peter D Killworth et Jeffrey R Blundell : Long extratropical planetary wave propagation in the presence of slowly varying mean flow and bottom topography. part i : The local problem. *Journal of physical oceanography*, 33(4):784–801, 2003a.

Peter D Killworth et Jeffrey R Blundell : Long extratropical planetary wave propagation in the presence of slowly varying mean flow and bottom topography. part ii : Ray propagation and comparison with observations. *Journal of physical oceanography*, 33(4):802–821, 2003b.

Peter D Killworth et Jeffrey R Blundell : The dispersion relation for planetary waves in the presence of mean flow and topography. part i : Analytical theory and one-dimensional examples. *Journal of physical oceanography*, 34(12):2692–2711, 2004.

Peter D Killworth et Jeffrey R Blundell : The dispersion relation for planetary waves in the presence of mean flow and topography. part ii : Two-dimensional examples and global results. *Journal of physical oceanography*, 35(11):2110–2133, 2005.

Peter D Killworth et Jeffrey R Blundell : Planetary wave response to surface forcing and instability in the presence of mean flow and topography. *Journal of physical oceanography*, 37(5):1297–1320, 2007.

Peter D Killworth, Dudley B Chelton et Roland A de Szoeke : The speed of observed and theoretical long extratropical planetary waves. *Journal of physical oceanography*, 27 (9):1946–1966, 1997.

Peter D Killworth, Paolo Cipollini, B Mete Uz et Jeffrey R Blundell : Physical and biological mechanisms for planetary waves observed in satellite-derived chlorophyll. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 109(C7), 2004.

JH LaCasce et J Pedlosky : The instability of rossby basin modes and the oceanic eddy field*. *Journal of physical oceanography*, 34(9):2027–2041, 2004.

G Lapeyre et P Klein : Dynamics of the upper oceanic layers in terms of surface quasigeostrophy theory. *Journal of Physical Oceanography*, 36(2):165–176, 2006.

Pierre-Yves Le Traon, Patrice Klein, Bach Lien Hua et G Dibarboure : Do altimeter wavenumber spectra agree with the interior or surface quasigeostrophic theory ? *Journal of Physical Oceanography*, 38(5):1137–1142, 2008.

Pierre-Yves Le Traon, F Nadal et N Ducet : An improved mapping method of multisatellite altimeter data. *Journal of atmospheric and oceanic technology*, 15(2):522–534, 1998.

Pierre-Yves Le Traon et Florian Ogor : Ers-1/2 orbit improvement using topex/poseidon : The 2 cm challenge. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 103(C4):8045–8057, 1998.

Zhengyu Liu : Planetary wave modes in the thermocline : Non-doppler-shift mode, advective mode and green mode. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 125(556):1315–1339, 1999.

MS Longuet-Higgins : Double kelvin waves with continuous depth profiles. *Journal of Fluid Mechanics*, 34(01):49–80, 1968.

Angela M Maharaj, Paolo Cipollini, Neil J Holbrook, Peter D Killworth et Jeffrey R Blundell : An evaluation of the classical and extended rossby wave theories in explaining spectral estimates of the first few baroclinic modes in the south pacific ocean. *Ocean Dynamics*, 57(3):173–187, 2007.

Taroh Matsuno : Vertical propagation of stationary planetary waves in the winter northern hemisphere. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 27(6):871–883, 1970.

Ralph F Milliff et James C McWilliams : The evolution of boundary pressure in ocean basins. *Journal of physical oceanography*, 24(6):1317–1338, 1994.

Robert C O'Brien, Paolo Cipollini et Jeffrey R Blundell : Manifestation of oceanic rossby waves in long-term multiparametric satellite datasets. *Remote Sensing of Environment*, 129:111–121, 2013.

Michel Ollitrault et Alain Colin de Verdière : The ocean general circulation near 1000-m depth. *Journal of Physical Oceanography*, 44(1):384–409, 2014.

Michel Ollitrault et Jean-Philippe Rannou : Andro : An argo-based deep displacement dataset. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 30(4):759–788, 2013.

Vladimir Osychny et Peter Cornillon : Properties of rossby waves in the north atlantic estimated from satellite data. *Journal of physical oceanography*, 34(1):61–76, 2004.

Joseph Pedlosky : Geophysical fluid dynamics. *New York and Berlin, Springer-Verlag, 1982. 636 p.*, 1, 1982.

SGH Philander : Forced oceanic waves. *Reviews of Geophysics*, 16(1):15–46, 1978.

RT Pierrehumbert : Local and global baroclinic instability of zonally varying flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 41(14):2141–2162, 1984.

Paulo S Polito et W Timothy Liu : Global characterization of rossby waves at several spectral bands. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 108(C1), 2003.

Aurelien L Ponte et Patrice Klein : Reconstruction of the upper ocean 3d dynamics from high-resolution sea surface height. *Ocean Dynamics*, 63(7):777–791, 2013.

Bo Qiu, Robert B Scott et Shuiming Chen : Length scales of eddy generation and nonlinear evolution of the seasonally modulated south pacific subtropical countercurrent. *Journal of Physical Oceanography*, 38(7):1515–1528, 2008.

Peter Rhines et Francis Bretherton : Topographic rossby waves in a rough-bottomed ocean. *Journal of Fluid Mechanics*, 61(03):583–607, 1973.

Peter B Rhines : Slow oscillations in an ocean of varying depth part 2. islands and seamounts. *Journal of Fluid Mechanics*, 37(01):191–205, 1969.

Peter B Rhines : Edge-, bottom-, and rossby waves in a rotating stratified fluid. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 1(3-4):273–302, 1970.

Peter B Rhines et W Holland : An example of eddy-induced ocean circulation. *Journal of physical oceanography*, 10:1010–1031, 1980.

RM Samelson : Surface-intensified rossby waves over rough topography. *Journal of marine research*, 50(3):367–384, 1992.

Paul S Schopf, David LT Anderson et Ronald Smith : Beta-dispersion of low-frequency rossby waves. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 5(3):187–214, 1981.

Robert B Scott et Darran G Furnival : Assessment of traditional and new eigenfunction bases applied to extrapolation of surface geostrophic current time series to below the surface in an idealized primitive equation simulation. *Journal of Physical Oceanography*, 42(1):165–178, 2012.

Robert B Scott et Faming Wang : Direct evidence of an oceanic inverse kinetic energy cascade from satellite altimetry. *Journal of Physical Oceanography*, 35(9):1650–1666, 2005.

Florian Sévellec et Alexey V Fedorov : The leading, interdecadal eigenmode of the atlantic meridional overturning circulation in a realistic ocean model. *Journal of Climate*, 26(7):2160–2183, 2013.

K Shafer Smith : The geography of linear baroclinic instability in earth's oceans. *Journal of Marine Research*, 65(5):655–683, 2007.

K Shafer Smith et Jacques Vanneste : A surface-aware projection basis for quasigeostrophic flow. *Journal of Physical Oceanography*, 43(3), 2013.

David N Straub : Dispersive effects of zonally varying topography on quasigeostrophic rossby waves. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 75(2-4):107–130, 1994.

Rémi Tailleux : Comments on "the effect of bottom topography on the speed of long extra-tropical planetary waves". *Journal of physical oceanography*, 33(7):1536–1541, 2003.

Rémi Tailleux : On the generalized eigenvalue problem for the rossby wave vertical velocity in the presence of mean flow and topography. *Journal of Physical Oceanography*, 42(6):1045–1050, 2012.

Rémi Tailleux et James C McWilliams : Acceleration, creation, and depletion of wind-driven, baroclinic rossby waves over an ocean ridge. *Journal of physical oceanography*, 30 (9):2186–2213, 2000.

Rémi Tailleux et James C McWilliams : The effect of bottom pressure decoupling on the speed of extratropical, baroclinic rossby waves. *Journal of physical oceanography*, 31 (6):1461–1476, 2001.

Ross Tulloch, John Marshall et K Shafer Smith : Interpretation of the propagation of surface altimetric observations in terms of planetary waves and geostrophic turbulence. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 114(C2), 2009.

Geoffrey K Vallis : *Atmospheric and oceanic fluid dynamics : fundamentals and large-scale circulation*. Cambridge University Press, 2006.

G Veronis : Dynamics of large-scale ocean circulation. *Evolution of physical oceanography*, pages 140–183, 1981.

Jinbo Wang, Glenn Flierl, Joseph H LaCasce, Julie L McClean et Amala Mahadevan : Reconstructing the ocean's interior from surface data. *Journal of Physical Oceanography*, 43 (8):1611–1626, 2013.

L Wang, C Koblinsky, S Howden et B Beckley : Large-scale rossby wave in the mid-latitude south pacific from altimetry data. *Geophysical research letters*, 25(2):179–182, 1998.

L Wang et C J Koblinsky : Influence of mid-ocean ridges on rossby waves. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 99(C12):25143–25153, 1994.

Warren B White : Annual forcing of baroclinic long waves in the tropical north pacific ocean. *Journal of Physical Oceanography*, 7(1):50–61, 1977.

Warren B White et JFT Saur : Sources of interannual baroclinic waves in the eastern subtropical north pacific. *Journal of Physical Oceanography*, 13(3):531–544, 1983.

Corwin Wright, Robert B. Scott, Brian K. Arbic et Darran G. Furnival : Global observations of ocean-bottom subinertial current dissipation. *Journal of physical oceanography*, 43, 2013.

Carl Wunsch : The vertical partition of oceanic horizontal kinetic energy. *Journal of Physical Oceanography*, 27(8):1770–1794, 1997.

Carl Wunsch : The oceanic variability spectrum and transport trends. *Atmosphere-ocean*, 47 (4):281–291, 2009.

Carl Wunsch : Toward a midlatitude ocean frequency-wavenumber spectral density and trend determination. *Journal of Physical Oceanography*, 40(10):2264–2281, 2010.

Xiaoyun Zang : Spectral description of low frequency oceanic variability. Rapport technique, DTIC Document, 2000.

Xiaoyun Zang et Carl Wunsch : The observed dispersion relationship for north pacific rossby wave motions. *Journal of physical oceanography*, 29(9):2183–2190, 1999.

Étude des courants océaniques transitoires de grande échelle : structure verticale, interaction avec la topographie et le courant moyen, forçage par instabilité barocline

Résumé :

Depuis le lancement du satellite TOPEX/POSEIDON au début des années quatre-vingt-dix, nos connaissances des courants observables à la surface de l'océan se sont grandement développées. Cependant, de nombreuses interrogations les concernant demeurent, l'objectif de cette thèse est donc de contribuer à une meilleure compréhension de leurs dynamiques. Les structures de grande échelle (supérieures à environ 500 kilomètres) sont particulièrement bien représentées par l'altimétrie satellitaire et constituent donc le sujet principal de cette thèse. Nous nous sommes principalement posés les trois questions suivantes : quelle est la structure verticale des courants observés en surface ? Comment expliquer la répartition de l'énergie spectrale associée ?
Et enfin : l'instabilité barocline (de grande échelle) peut-elle être une source d'énergie de ces courants ? Ce qui suit est une brève description des résultats obtenus et de la méthodologie employée.

La première partie de la thèse traite de la structure verticale des anomalies de courant de grande échelle observées dans l'altimétrie. Un modèle simple, se basant sur les équations quasi-géostrophiques linéarisées autour d'un état de repos, est utilisé pour calculer la solution sous la surface à l'aide de données altimétriques et de données de stratification moyenne. Son fonctionnement est évalué, tout d'abord à l'aide de simulations numériques, puis ensuite grâce à une base de données de courantomètres. Le modèle donne des résultats corrects aux basses latitudes, là où le courant moyen et la topographie ont une influence mineure sur les anomalies de grande échelle.

La deuxième partie s'intéresse à la modification des relations de dispersion des ondes de Rossby libres par une topographie et un courant moyen, tous les deux horizontalement et verticalement variables. Des cas idéalisés sont dans un premier temps étudiés afin de mieux comprendre les effets respectifs de chaque champ, puis le calcul est effectué sur une zone de l'Atlantique Nord et comparé à la répartition de l'énergie spectrale telle qu'observée dans l'altimétrie satellitaire. Les résultats suggèrent que l'effet de ces champs variables sur la propagation de ces ondes, comme explication de l'énergie spectrale trouvée en dehors des relations de dispersion (jusque-là calculées pour des champs constants dans la littérature sur le sujet), ne peut pas être écarté.

Dans la dernière partie les modes instables et grande échelle de la circulation moyenne sont étudiés localement, dans des cadres idéalisés. Le calcul local est ensuite effectué, grâce à des données de la circulation moyenne, sur l'ensemble du globe. Les résultats révèlent que les zones les plus instables sont généralement situées aux basses latitudes et possèdent des temps de croissance compatibles avec un forçage des anomalies grande échelle observées à ces latitudes.