



HAL
open science

**Les difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées
par l'emploi dans les textes mathématiques de certains
adjectifs marqueurs de variance (exemples
principalement empruntés dans des manuels du second
degré)**

Rakatovoavy Farasololalao

► **To cite this version:**

Rakatovoavy Farasololalao. Les difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi dans les textes mathématiques de certains adjectifs marqueurs de variance (exemples principalement empruntés dans des manuels du second degré). Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Paris VII - Denis Diderot, 1983. Français. NNT : . tel-02193780

HAL Id: tel-02193780

<https://theses.hal.science/tel-02193780>

Submitted on 24 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université paris 7

THESE DE 3^{ème} CYCLE
EN
DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

PRESENTEE PAR RAKOTOVOAVY Farasololalao

SUR LE SUJET :

DIFFICULTES LINGUISTIQUES ET PEDAGOGIQUES SOULEVEES
PAR L'EMPLOI, DANS LES TEXTES MATHEMATIQUES, DE
CERTAINS ADJECTIFS MARQUEURS DE VARIANCE.
(Exemplés principalement empruntés aux manuels
du Second Degré)

SOUTENUE LE 26 JANVIER 1983 DEVANT LE JURY :

André REVUZ	<i>Président</i>
Daniel LACOMBE	<i>Rapporteur</i>
Josette ADDA	<i>Examineur</i>
Jérôme CHASTENET de GERY	<i>Examineur</i>
Oswald DUCROT	<i>Examineur</i>
Bernard JAULIN	<i>Examineur</i>

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Daniel LACOMBE qui m'a permis de réaliser cette thèse. Je le remercie d'avoir bien voulu diriger mes recherches, de l'aide constante qu'il a apportée, de la disponibilité et de la patience dont il a fait preuve pendant toute la durée de cette étude.

Je remercie vivement Monsieur André REVUZ qui a bien voulu me faire l'honneur de présider ce jury, Mademoiselle Josette ADDA, Messieurs Jérôme CHASTENET de GERY et Bernard JAULIN qui ont accepté de lire ma thèse et de faire partie de ce jury.

Je remercie spécialement Monsieur Oswald DUCROT d'avoir accepté de se joindre aux membres de ce jury.

Par ailleurs je voudrais m'excuser pour la frappe non parfaite de cette thèse, notamment pour la typographie qui n'est pas très riche. Et à ce propos je remercie en particulier Monsieur Bernard DUMONT de l'aide considérable qu'il a manifestée.

Enfin j'adresse mes remerciements à Madame CHARRIOT, à Monsieur MAY et à l'IREM de PARIS-SUD pour la réalisation matérielle de ce travail.

. INTRODUCTION	p. 1
. CHAPITRE 0: PRELIMINAIRES	
0.1.: Traitement des textes cités	p. 6
0.1.1.: Marque des citations ([...])	p. 6
0.1.2.: Corrections	p. 6
0.1.3.: Critiques	p. 9
0.2.: Terminologie	p. 9
0.2.1.: Mutifications	p. 9
0.2.2.: Ordre des opérations	p. 11
0.2.3.: Niveau épimathématique	p. 13
0.3.: Plan du travail	p. 16
. CHAPITRE 1: LES MARQUEURS ET LEURS ROLES	
1.1.: Généralités sur les Marqueurs	p. 20
1.1.1.: Liste des Marqueurs	p. 20
1.1.2.: Cas des participes passés	p. 21
1.1.3.: Possibilités et contraintes syntaxiques	p. 21
1.1.4.: Possibilité de supprimer un Marqueur	p. 22
1.1.5.: L'adverbe [arbitrairement]	p. 22
1.2.: Expressions ressemblant à des Marqueurs	p. 23
1.2.1.: Cas de [donné]	p. 23
1.2.2.: Cas de [variable] substantif	p. 25
1.3.: Les rôles des Marqueurs	p. 27
1.3.1.: Renforceur/indicateur de mutification	p. 27
1.3.2.: Renforceur/indicateur d'ordre de mutification	p. 31
1.3.3.: Annulateur de restriction	p. 33
1.4.: Remarques générales sur les Marqueurs	p. 33
1.4.1.: On peut trouver les Marqueurs à tous les niveaux scolaires	p. 33
1.4.2.: A quel moment sont apparus les Marqueurs	p. 34
1.4.3.: Dans quels passages mathématiques on trouve les Marqueurs	p. 34

1.4.4.:	Nature épimathématique des Marqueurs	p. 34
1.4.5.:	Marqueurs et articles	p. 35
1.4.6.:	Un Marqueur peut-il jouer tous les rôles?	p. 36
. CHAPITRE 2: RECENSEMENT DES PLACES ET DES ROLES DES VARIABLES SUSCEPTIBLES DE RECEVOIR DES MARQUEURS		
2.1.:	Présentation simple	p. 38
2.2.:	Mutification immédiate	p. 39
2.2.1.:	\forall -quantification	p. 39
2.2.2.:	\exists -quantification	p. 41
2.2.3.:	Mutification ensembliste	p. 43
2.2.4.:	Mutification fonctionnelle	p. 48
2.3.:	Mutification différée	p. 50
2.3.1.:	Mutification différée et présentation	p. 50
2.3.2.:	Le cas de la PUD	p. 51
2.3.3.:	Mutification ensembliste différée	p. 65
2.3.4.:	La mutification différée dans les exercices	p. 66
2.4.:	Allusion épimathématique à une mutification	p. 68
2.4.1.:	Rappel d'une mutification antérieure	p. 68
2.4.2.:	Démonstration allusive d'un résultat plus fort	p. 69
. CHAPITRE 3: ETUDE DETAILLEE DE LA STRUCTURE DES PHRASES ENTIERES DE PUD CONTENANT UN SEUL VERBE CARACTERISTIQUE SITUE AU DEBUT		
3.1.:	Etude de V	p. 71
3.2.:	Etude de L	p. 71
3.2.1.:	Cas où L est présent	p. 72
3.2.2.:	Cas où on n'a pas de L	p. 75
3.3.:	Etude de R	p. 75
3.3.1.:	Définition de R	p. 75
3.3.2.:	R nominal	p. 78
3.3.3.:	R adjectival	p. 92
3.3.4.:	Cas où R est absent	p. 94

. CHAPITRE 4:	ILLUSTRATIONS SUPPLEMENTAIRES	p. 96
4.1.:	Exemples illustrant les différents rôles des Marqueurs	p. 97
4.2.:	Le cas des équations	p. 116
. CHAPITRE 5: QUELQUES REMARQUES COMPARATIVES AVEC L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR		
5.1.:	Remarques générales	p. 120
5.2.:	Quelques illustrations	p. 121
5.2.1.:	Renforceur/indicateur de mutification	p. 121
5.2.2.:	Renforceur/indicateur d'ordre de mutification	p. 124
5.2.3.:	Annulateur de restriction	p. 125
5.2.4.:	Usage de \lceil arbitrairement \rceil , propre au Supérieur	p. 125
. CHAPITRE 6: ETUDE COMPARATIVE DE LA FREQUENCE DES MARQUEURS DANS LES MANUELS DU SECONDAIRE		
6.1.:	Etude de manuels de différents niveaux d'une même collection	p. 128
6.2.:	Etude de manuels de même niveau mais édités à des années différentes, d'une même collection	p. 131
6.3.:	Etude de manuels de même niveau, mais de collections différentes	p. 132
6.4.:	Etude de manuels de même niveau dans deux collections dont l'une a pris la suite de l'autre chez le même éditeur	p. 135
. CONCLUSIONS		p. 138

INTRODUCTION

L'idée de l'étude que voici est née à la suite d'un mauvais souvenir du temps où j'étais encore élève de lycée.

Considérons en effet les textes suivants :

1. [Soit a un réel. Résoudre l'équation $2x + a = 3a + 1$.]
2. [Soit a un réel donné. Résoudre l'équation $2x + a = 3a + 1$.]
3. [Soit a un réel quelconque. Résoudre l'équation $2x + a = 3a + 1$.]
4. [Soit a un réel donné quelconque. Résoudre l'équation $2x + a = 3a + 1$.]
5. [Soit a un réel quelconque donné. Résoudre l'équation $2x + a = 3a + 1$.]

Il s'agit dans les cinq cas de trouver la réponse $x = \frac{2a + 1}{2}$. Ainsi, en mathématique, les cinq phrases :

- [Soit a un réel.]
- [Soit a un réel donné.]
- [Soit a un réel quelconque.]
- [Soit a un réel donné quelconque.]
- [Soit a un réel quelconque donné.]

peuvent signifier la même chose.

Je me rappelle avoir été profondément troublée par ce genre de synonymie. Pour moi, [donné] signifiait fixé, en ce sens que la valeur devait être effectivement donnée. Le mot [quelconque], par contre, signifiait qu'aucune restriction n'était faite et que je pouvais prendre n'importe lequel parmi les nombres réels. Ainsi déjà, voir une même signification entre la phrase [Soit a un réel donné] et la phrase [Soit a un réel quelconque.] m'était très difficile : comment un nombre qui est [donné], c'est à dire fixé, ne variant pas, peut-il être [quelconque], c'est à dire n'importe lequel. Mais alors, quand je rencontrais des phrases telles que les exemples 4 et 5 où l'on rencontre les mots [donné] et [quelconque] à la fois, c'était vraiment la panique, l'angoisse. Déjà le problème de l'abstraction se posait pour moi : penser à un nombre quelconque, on ne sait pas lequel exactement.

Mais en plus, ce [donné] qui est présent et qui signifie "déterminé", "connu", "on

sait lequel exactement", me déroutait complètement. Pour moi, il y avait indéniablement une contradiction dans de telles phrases où les deux mots à la fois apparaissaient pour un même objet.

On devine assez facilement alors le malaise que je ressentais devant de tels textes.

Des cinq phrases citées au début, je préférais la première, c'est à dire celle où l'on ne trouvait ni l'un ni l'autre des mots [quelconque] et [donné]. Et je ne pouvais pas me tromper pour le nombre à chercher car, de toute façon, dès qu'on voit une lettre [x] qui apparaît, c'est cet [x] là qu'il faut trouver ! (N'est-ce pas là en effet une convention en mathématique scolaire?!). Ainsi, la phrase [Soit a un réel] était très claire pour moi.

D'autre part : si on considère l'exercice cité au début de ces pages, une fois traité, il se résume comme suit :

$$\forall a \left[\forall x \left[(2x + a = 3a + 1) \Leftrightarrow (x = \frac{2a + 1}{2}) \right] \right]$$

Or, quand le texte de présentation de l'exercice est du second type, c'est à dire où on voit apparaître le mot [donné] : [Soit a un nombre réel donné. Résoudre ...], je ne voyais pas du tout cette quantification universelle sur [a].

Comment d'ailleurs pouvait-il en être autrement puisque pour moi, [a] étant donné, il était donc fixé, connu, unique donc car il devait avoir une valeur bien déterminée (et je trouvais d'ailleurs bizarre qu'on ne dît pas carrément quelle était cette valeur!).

Il allait de soi alors que s'il fallait se resservir du résultat de cet exercice pour une autre question d'un problème, moi je ne réussissais pas souvent, et encore moins si dans la suite du problème en question le [a] devient [b] par exemple (ça arrive!).

Et on imagine bien alors combien les conséquences d'une telle incompréhension pouvaient être graves, puisque je ne voyais pas le caractère lié, cohérent, des mathématiques que je faisais. N'est-ce pas là une des raisons qui font que les élèves se détournent des mathématiques?

Et puis, plus tard, j'ai commencé à donner des cours particuliers de mathématiques. Je m'aperçus alors que mon cas n'était pas isolé, mais qu'au contraire la plupart de mes élèves ressentait aussi cette gêne, ce malaise, devant des exercices où il fallait voir une quantification universelle sur les lettres, cette quantification étant plus ou moins implicite.

Remarque : La difficulté de la quantification implicite avec des lettres se retrouve même dans les textes où on n'a pas les mots comme [donné], [quelconque], mots que nous appellerons par la suite des Marqueurs. Et cette difficulté n'est pas toujours diminuée par ces Marqueurs, mais au contraire peut être augmentée. On peut relier la difficulté des Marqueurs à la difficulté générale de l'emploi des lettres.

Ainsi devant un exercice du type suivant :

6- [Calculer $2(a + b) - c + 4(a + b - c)$ où a, b, c sont des réels.] combien de fois j'ai vu des élèves, de la classe de Quatrième à la Terminale A, désespérés. Voici entre autres ce qu'ils me disaient:

- "On ne peut pas calculer car on ne connaît pas a, b, c."
- "Quels nombres sont a, b, c, ils ne donnent pas de valeurs."

Et puis, devant le même exercice mais auquel on a ajouté le mot [quelconque] dans le texte:

7- [Calculer $2(a + b) - c + 4(a + b - c)$ où a, b, c sont des réels quelconques.] les mêmes remarques des élèves se retrouvaient. Mais certains élèves alors, pour traiter l'exercice, donnaient des valeurs à [a], [b], [c], des valeurs quelconques de leur choix.

Peut-être que, dans ces exemples en particulier, la difficulté vient du verbe "calculer". En Sixième et en Cinquième, effectivement, on calcule sur des chiffres.

Mais même devant des exercices où on ne voit pas le mot "calculer", dès que l'on travaille sur des lettres (ce qui est le cas en général), les élèves réagissent comme je l'ai dit précédemment. Par exemple, devant des énoncés comme :

8- Soient a et b deux nombres décimaux relatifs tels que : $a > b$. Comparez les nombres décimaux relatifs $a(a - b)$ et $b(a - b)$.

(Monge - 4ème - 1979 - P. 39)

la question qu'ils se posent est : comment peut-on comparer ces nombres puisque l'on ne connaît pas les valeurs de a et de b ? L'idée qu'il faut "discuter" justement sur ces valeurs (et montrer que le résultat de la comparaison ne dépend pas de ces valeurs, du moment qu'elles vérifient $a > b$) ne leur vient pas naturellement en tête.

C'est ainsi qu'un mauvais souvenir que j'ai du temps où j'étais élève moi-même, et plus tard les réactions toujours semblables de mes élèves, m'ont amenée à vouloir en savoir plus long sur une certaine forme d'expression de la quantification, ou plus exactement de la mutification des variables, et surtout l'usage en mathématique de certains mots, que j'appellerai donc par la suite Marqueurs, tels que $\overline{\text{quelconque}}$ ou $\overline{\text{donné}}$.

Ces mots jouent-ils un rôle dans un texte mathématique? Si oui, lequel? Sont-ils toujours nécessaires? Utiles? Quelles significations ont-ils? A quelle fréquence sont-ils employés? Celle-ci est-elle fonction de la classe? Ces Marqueurs sont-ils régis par certaines règles syntaxiques?

C'est dans l'espoir de trouver une réponse à toutes ces questions que j'ai effectué le travail qui va suivre.

Pour entreprendre l'étude que je me suis proposée de faire, j'ai pensé que regarder les textes mis à la disposition des élèves serait un bon moyen.

J'ai alors pour cela consulté les manuels en usage dans les classes du Second Degré.

Les classes de Sixième et de Cinquième étant surtout des classes d'observation,

j'ai choisi de regarder les livres à partir de la classe de Quatrième, où l'initiation au raisonnement mathématique commence, jusqu'en Terminale.

D'autres études auraient pu être faites en même temps, telle que l'observation du langage oral des professeurs et des élèves dans les classes par exemple, ou encore le langage écrit des élèves, mais ma situation ne me permettant que des moyens très limités, j'ai dû me contenter de la lecture des manuels.

Remarquons enfin que, tant sur le problème précis qui me préoccupait que sur des problèmes analogues, je n'ai trouvé pratiquement aucune référence bibliographique. En dehors du cours (non publié) de D. LACOMBE, qui a servi de base à mes analyses, le seul article intéressant est celui de Bernard PARZYSZ, intitulé "Comment s'expriment en français les quantifications mathématiques", paru dans les éditions de l'IREM de Paris 7; et encore ce dernier article m'a laissée insatisfaite sur de nombreux points. (cf. "Comment s'expriment en français les quantifications mathématiques. (Réflexions basées sur une étude de quelques manuels de Quatrième)" par B. PARZYSZ, in Groupe français-mathématiques. Volume 2. IREM. Publication septembre 1980.)

CHAPITRE 0 : PRELIMINAIRES

0.1: Traitement des textes cités.

0.1.1 : Marque des citations.

On trouvera beaucoup de citations d'auteurs dans ce travail. Elles se distingueront du texte global par des encadrements: $\Gamma \dots \Gamma$. Notons, à propos de ces citations, que la typographie des auteurs ne pourra être reproduite ici par faute de moyens.

A l'intérieur même de ces citations, nous soulignerons d'un trait les parties destinées à être plus particulièrement analysées.

Pour la clarté, les mots (éventuellement réduits à une lettre) qui en dehors des citations sont étudiés dans mon discours seront également encadrés par les crochets $\Gamma \dots \Gamma$.

La référence des citations est notée entre parenthèses à la fin de ces citations. S'il n'y a pas de référence, l'exemple est imaginé.

0.1.2 : Corrections.

0.1.2.1 : Ponctuation.

Il peut arriver que des fautes de ponctuation soient relevées dans les citations. La ponctuation peut être trop forte, ou au contraire insuffisante. Dans ces deux cas elle sera rectifiée. Pour distinguer une ponctuation rectifiée d'une ponctuation originale, on trouvera un astérisque * derrière un signe changé.

Citons quelques exemples ici:

- (0)1. Γ Soit un cercle C de centre O et de rayon r. On considère un diamètre $[A, B]$.
a) Le point M étant un point quelconque du plan \odot Montrer que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = OM^2 - r^2$
(ce nombre est la puissance de M par rapport au cercle C).
(QR - 2^e CT - 1977 - p. 303)

Manifestement, le point qui a été encerclé est grammaticalement incorrect. Cette ponctuation est trop forte, on devrait trouver une virgule à la place du point.

Si une telle citation devait figurer dans ce travail, on la trouverait sous la forme corrigée que voici:

[Soit un cercle C de centre O et de rayon r. On considère un diamètre [A,B].
a) Le point M étant un point quelconque du plan,* montrer que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = OM^2 - r^2$
(ce nombre est la puissance de M par rapport au cercle C).]

Voyons cet autre exemple:

(0)2. [Soit x un nombre réel non nul on a $x x^{-1} = 1$ donc:

$$|x| |x^{-1}| = 1,$$

c'est à dire:

$$\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|};$$

on en déduit que l'on a quels que soient x de \mathbb{R} et y de \mathbb{R}^* :

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \left| x \times \frac{1}{y} \right| = |x| \left| \frac{1}{y} \right| = |x| \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|} . \quad \text{]}]$$

(QR - 2^e CT - 1977 - p. 39)

Dans cet exemple, en revanche, les ponctuations sont nettement insuffisantes. Il y a certainement un point et une virgule à rajouter, et probablement le point-virgule de l'auteur à changer en point.

Cette citation sera donc reproduite comme suit:

[Soit x un nombre réel non nul.* On a $x x^{-1} = 1$,* donc:

$$|x| |x^{-1}| = 1,$$

c'est-à-dire:

$$\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} . \quad *$$

On en déduit que l'on a quels que soient x de \mathbb{R} et y de \mathbb{R}^* :

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \left| x \times \frac{1}{y} \right| = |x| \left| \frac{1}{y} \right| = |x| \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|} . \quad \text{]}]$$

Le point et la virgule rajoutés rendent les phrases correctes.

Quant au point-virgule qui a été changé en point, c'est pour rendre la lecture plus facile. En effet, on introduit dans la première partie de cet exemple une variable [x] dont le champ de quantification (différée) s'arrête au point-virgule de l'auteur. Ensuite, la variable qui joue le rôle de ce même [x] change de nom, devient [y], et on donne le nom [x] à une autre variable qui n'a aucun lien avec le [x] du début. Ce nouvel [x] joue un rôle tout à fait différent du premier. Un tel phénomène est certainement gênant, bien que parfaitement correct. On pourrait même ajouter que c'est instructif en ce sens que le lecteur est amené à faire beaucoup plus attention et à ne pas se laisser aller à certaines habitudes ou certains automatismes.

Il manque encore, pour être tout à fait correct, une virgule dans la dernière phrase, juste avant l'expression [quels que soient]; mais cette virgule n'est pas suffisamment importante pour qu'il soit nécessaire de modifier la typographie en la rajoutant.

Précisons que la ponctuation peut avoir été changée, mais qu'aucune n'a été totalement supprimée.

0.1.2.2: Fautes d'impression.

Tout ce qui semble relever d'une simple faute d'impression sera corrigé sans même le signaler.

Il nous est arrivé par exemple de trouver à la place du symbole [→] (pour une mu-tification fonctionnelle. cf. 2.2.4) le symbole incomplet [→]. La correction a été faite sans aucun signe particulier pour la signaler.

0.1.2.3: Autres "fautes".

Il arrive que les auteurs étudiés commettent des "incorrections" qui ne sont ni des erreurs de ponctuation ni des fautes d'impression.

Exemple:

(0)3. [Deux éléments quelconques a₁ et a₂ de F₂ tels que { a₁, a₂ } soit libre forment une base de F₂.]

(QR - 1^{ère} CDE - Tome 2 - 1970)

De deux choses l'une:

- ou bien l'adjectif [libre] s'applique à un système (c-à-d. un p-uplet) de vecteurs,
- ou bien il s'applique à un ensemble de vecteurs.

Dans le premier cas, la notation $\{a_1, a_2\}$ est incorrecte et devrait être remplacée par (a_1, a_2) .

Dans le deuxième cas, c'est le théorème lui-même qui est faux: si $[a_1 = a_2 \neq 0]$, la partie $\{a_1, a_2\} = \{a_1\}$ est libre mais ne constitue pas une base.

En pareil cas, si le texte est accompagné de la référence de l'auteur, nous ne nous permettrons aucune correction. Inversement, si nous effectuons une correction nous supprimerons la référence et considérerons le texte corrigé comme un exemple imaginé.

Remarque: sur d'autres écritures contestables non corrigées, voir par exemple p.101.

0.1.3 : Critiques.

Dans tout ce qui concerne directement ou indirectement le sujet de cette étude, à savoir les Marqueurs, nous ne nous interdisons pas de critiquer les auteurs, aussi bien du point de vue pédagogique que linguistique.

Mais en revanche, sur tous les autres aspects du texte (structure générale et style, valeur mathématique, valeur pédagogique, aspects linguistiques non liés aux Marqueurs, etc ...) notre propos n'est pas d'effectuer un examen critique, ni même descriptif.

0.2. Terminologie.

Nous emprunterons une grande partie de notre terminologie au cours (non publié) de Daniel LACOMBE: "Langage mathématique et langage naturel". La plupart des termes que nous utiliserons ("présentation", "mutification différée", "contraction adjectivante", etc ...) seront définis au moment où nous les introduirons. Nous nous bornons maintenant à quelques termes généraux dont nous aurons besoin dès le début.

0.2.1. Mutifications.

0.2.1.1. Lettres parlantes et lettres muettes.

Soit $[x]$ une lettre, représentant un élément "variable" d'un ensemble fixe (généralement indiqué dans le contexte), et soit E une expression mathématique contenant $[x]$.

On sait que, dans E, $[x]$ peut être:

- soit parlante (on dit aussi libre),
- soit muette (on dit aussi liée).

L'exemple habituel en cette matière est fourni par la notation classique pour l'intégrale définie : dans l'expression

$$\int_a^x \sin(at^2) dt$$

les lettres $[a]$ et $[x]$ sont parlantes tandis que la lettre $[t]$ est muette; en revanche, dans l'expression $[\sin(at^2)]$ prise isolément, les lettres $[a]$ et $[t]$ sont toutes deux parlantes.

0.2.1.2. Occurrences parlantes et occurrences muettes.

Pour être tout à fait précis, on sait que, si on considère les diverses occurrences d'une même lettre dans une même expression, certaines de ces occurrences peuvent être parlantes et certaines muettes.

Ainsi dans l'expression (considérée comme équivalente à la précédente)

$$\int_a^x \sin(ax^2) dx$$

l'occurrence de $[x]$ "en haut du signe somme" est parlante, tandis que celle "sous le signe somme" est muette ainsi que celle qui suit le "symbole différentiel" $[d]$.

Bien que logiquement irréprochables (avec des conventions adéquates), les expressions de ce genre, où une même lettre possède à la fois des occurrences parlantes et des occurrences muettes, présentent certains dangers pédagogiques (mais aussi parfois certains avantages). En fait, on ne les rencontre presque jamais dans les manuels du Secondaire; nous n'aurons donc pas à nous en préoccuper.

0.2.1.3. Signes mutifiants et mutifications.

En reprenant l'exemple de l'intégrale définie en notations classiques, nous dirons que le signe double $\int \dots d \dots$ (signe "somme" associé au symbole $[d]$) est mutifiant pour la lettre qui suit $[d]$, c'est-à-dire qu'il transforme une expression où cette lettre était parlante en une nouvelle expression (l'intégrale définie) où cette lettre est devenue muette. L'opération mathématico-linguistique correspondante est une mutification.

Un signe mutifiant peut revêtir la forme d'un symbole, mais aussi celle d'un syntagme employant des mots du langage usuel. Ainsi, les deux expressions

$$\lceil \{ x \in \mathbb{R} / x^2 + 3 < 4x \} \rceil$$

$$\lceil \text{l'ensemble des nombres réels } x \text{ tels que } x^2 + 3 < 4x \rceil$$

sont synonymes (et désignent toutes deux l'intervalle]1,3[). Ces deux expressions renferment une même mutification, exprimée dans le premier cas par le symbole multiple $\lceil \{ \dots / \dots \} \rceil$ et dans le second cas par le syntagme $\lceil \text{l'ensemble des } \dots \text{ tels que } \dots \rceil$.

0.2.1.4. Quantifications

Les mutifications les plus connues et les plus usitées sont les quantifications, et principalement les deux suivantes:

- la quantification universelle, que (pour abrégé) nous appellerons V-quantification, qui s'exprime aussi bien par le symbole $\lceil \forall \rceil$ que par des syntagmes tels que $\lceil \text{pour tout} \rceil$, $\lceil \text{quel que soit} \rceil$, etc... ;

- la quantification existentielle, que nous appellerons ∃-quantification, qui s'exprime aussi bien par le symbole $\lceil \exists \rceil$ que par des syntagmes tels que $\lceil \text{pour (au moins) un} \rceil$, $\lceil \text{il existe (au moins) un } \dots \text{ tel que } \dots \rceil$, etc...

On peut utiliser d'autres quantifications, par exemple:

- $\lceil \exists! \rceil$, qui s'exprime aussi par $\lceil \text{il existe un et un seul } \dots \text{ tel que } \dots \rceil$;

- $\lceil \text{il existe au moins deux } \dots \text{ (différents) tels que } \dots \rceil$;

- $\lceil \text{il existe au plus trois } \dots \text{ tels que } \dots \rceil$;

- $\lceil \text{il existe une infinité de } \dots \text{ tels que } \dots \rceil$;

- $\lceil \text{pour tous les } \dots \text{ sauf un nombre fini} \rceil$;

- $\lceil \text{pour presque tous les } \dots \rceil$;

etc...

0.2.2. Ordre des opérations.

Dans ce travail, nous aurons très fréquemment à nous demander si telle mutification (par exemple une V-quantification sur une lettre $\lceil x \rceil$) doit se situer "avant" ou "après" telle autre (par exemple une ∃-quantification sur $\lceil y \rceil$). A quel ordre ferons-nous-référence?

0.2.2.1. Ambiguïté classique

On sait que, dans les notations fonctionnelles les plus usitées, l'"ordre d'écriture" est opposé à l'"ordre chronologique" (c'est-à-dire l'ordre de construction allant des éléments simples aux éléments composés). A partir du moment où on a décidé de noter $\lceil f(x) \rceil$ l'image de l'élément x par la fonction f, on est obligé de désigner par $\lceil g(f(x)) \rceil$ l'objet obtenu en appliquant à l'élément x "d'abord" la fonction f et "ensuite" la fonction g ; d'où aussi la quasi-obligation de désigner par $\lceil g \circ f \rceil$ l'application composée ainsi définie.

0.2.2.2. Convention

L'ordre auquel nous ferons référence sera par convention l'ordre d'écriture, à condition qu'il s'agisse d'une écriture

(a) absolument correcte (par exemple, aucune quantification ne doit rester à l'état implicite),

(b) où, pour chaque opération, le signe (symbole ou syntagme) représentant l'opération est placé avant l'expression représentant l'opérande.

La règle (b) s'applique au cas où l'opération considérée est une mutification, et en particulier une quantification. En d'autres termes, dire que dans une certaine phrase P (interprétée d'une certaine façon), une certaine mutification M_1 se situe "logiquement" avant une autre mutification M_2 , cela signifie que:

(1) dans une "formalisation" p de P, où M_1 et M_2 seraient représentées respectivement par les symboles m_1 et m_2 , m_1 serait écrit "à gauche" de m_2 ;

(2) le champ de M_1 (c'est-à-dire la portion de P où M_1 s'applique) englobe le champ de M_2 : on dit alors parfois que M_1 "domine" M_2 dans P ;

(3) lors de la construction progressive de p, m_1 est appliquée "après" m_2 : on dit parfois que m_2 a reçu "priorité" sur m_1 .

Pour prendre un exemple classique (qui n'est pas au programme de l'Enseignement Secondaire), la continuité (resp. convergence) uniforme s'obtient à partir de la continuité (resp. convergence) simple en faisant passer une certaine quantification existentielle avant une certaine quantification universelle qui la précédait.

0.2.3. Niveau épimathématique.

0.2.3.1. Métadiscours en mathématique.

Dans un texte mathématique, on rencontre couramment des phrases comme celles-ci:

- (A) [Dans l'équation $f(x) = 0$, remplaçons x par y sint]
- (B) [L'équation $f(x) = 0$ se résout facilement en posant $x = y$ sint]
- (C) [Dans ce qui suit, les lettres a, b, c représentent des nombres réels strictement positifs]
- (D) [Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs]
- (E) [La propriété suivante constitue un cas particulier d'un théorème général que nous démontrerons plus loin]
- (F) [La démonstration que nous allons donner est assez délicate]
- (G) [Ce théorème est dû à Georges DUPONT]

Ces phrases ne constituent manifestement pas des assertions d'ordre mathématique (en particulier, (A) et (D) ne sont même pas des assertions du tout). On peut - au moins superficiellement - considérer qu'elles constituent des discours portant sur le discours purement mathématique, autrement dit des "métadiscours".

Il serait donc tentant de ranger toutes les phrases de cette sorte sous une rubrique "métamathématique". Mais cette terminologie serait inadéquate pour au moins deux raisons:

- (1) en logique, le mot "métamathématique" revêt une signification assez différente (qu'il est inutile de définir ici);
- (2) les phrases (A), ..., (G) ci-dessus ne sont pas toutes de même nature sémantique (il suffit de comparer par exemple (A) et (G)).

Il faudra donc une terminologie plus précise.

Remarquons au passage que, dans un texte mathématique contrairement à ce qui se passe dans le langage écrit usuel, aucune marque spéciale ("...", ou [...], ou opposition typographique) ne sépare en général les métadiscours du discours proprement mathématique. Par exemple, on ne trouvera presque jamais la version suivante de la phrase (A):

[Dans l'équation " $f(x) = 0$ ", remplaçons " x " par " y sint"]

De même, des phrases comme:

[les lettres a, b, c désignent des nombres réels]

[a, b, c désignent des nombres réels]

[a, b, c sont des nombres réels]

sont pratiquement interchangeables dans un texte mathématique, quelqu'illogique que ce-la puisse paraître (une lettre n'est pas un nombre, et un nombre n'est pas supposé se désigner lui-même).

0.2.3.2. Définition sommaire.

Nous dirons que, dans un endroit donné d'un texte mathématique donné, un certain syntagme (éventuellement réduit à un seul mot, éventuellement étendu à une phrase entière, tous les intermédiaires étant possibles) se situe au niveau épimathématique, lorsque ce syntagme ne désigne aucun objet mathématique (en considérant les fonctions, les prédicats, les opérations telles que les quantifications, les valeurs de vérité, etc ... comme des objets mathématiques), mais fournit au lecteur une indication sur la manière dont il convient de compléter, de rectifier et de relier entre elles les portions strictement mathématiques du texte environnant ce syntagme, de façon à obtenir soit une proposition mathématique correcte et complète, soit une démonstration mathématique convenablement mise en forme.

Cette définition s'applique manifestement aux phrases (A) à (D) ci-dessus, plus difficilement à la phrase (E), certainement pas aux phrases (F) et (G).

C'est également au niveau épimathématique que se situent les mots tels que [donc], [par conséquent], [d'où], [car], [en effet], [puisque], [comme], [or], [mais], [par ailleurs], etc ... qui n'expriment aucune opération mathématique (et en particulier aucun connecteur), mais permettent au lecteur de reconstituer la structure (ou "arbre") de la démonstration.

Remarquons par ailleurs qu'une phrase peut se situer globalement au niveau épimathématique tout en contenant des syntagmes qui se situent au niveau mathématique, et inversement.

Un texte mathématique apparaît donc comme un mélange d'expressions d'ordre mathématique et d'ordre épimathématique (sans compter celles qui se situent à d'autres niveaux). Mais la distinction taxonomique ne constitue qu'un point de départ: la véritable étude linguistique consiste à découvrir, pour chaque expression épimathématique, le rôle qu'elle joue, c'est-à-dire à analyser les indications qu'elle fournit au lecteur.

0.2.3.3. Critères sommaires de distinction.

Malgré la remarque précédente, il est important de pouvoir distinguer rapidement les divers niveaux de langage qui s'enchevêtrent dans un texte mathématique, en essayant de limiter le plus possible les difficultés et les cas douteux.

Commençons par le problème le plus simple: celui d'une phrase entière.

Soit P une phrase d'un texte mathématique. Si P se situe au niveau strictement mathématique, alors les conditions suivantes doivent être satisfaites:

(a) Si P (ou tout au moins sa structure de base) est exprimée en langage usuel, elle apparaît comme étant grammaticalement de type "assertif" (ou "déclaratif") et non pas "impératif" ou "optatif" (le type "interrogatif" - qui correspond généralement aux énoncés d'exercices - constitue un cas à part, cf. 2.3.4.)

(b) Si P contient des syntagmes exprimés en langage usuel, on peut les éliminer et former une phrase P', synonyme de P, entièrement exprimée en langage symbolique (à condition éventuellement d'introduire des symboles adéquats) : c'est ce qu'on appelle parfois "formaliser" P.

(c) Pour chaque lettre (ou occurrence d'une lettre) figurant dans P, on doit pouvoir dire si cette lettre (cette occurrence) est parlante ou muette dans P.

(d) Si on attribue une "valeur fixe" à chacune des lettres parlantes figurant dans P (ou, comme on dit parfois, si on remplace chaque variable par une "constante"), on obtient sans ambiguïté l'une des deux valeurs Vrai, Faux.

(e) On peut prendre la négation de P (et la phrase obtenue est encore au niveau mathématique).

Ces critères montrent à l'évidence que les phrases (A), ... , (G) ci-dessus ne se situent pas au niveau mathématique. Mais, pour chacune d'entre elles, cela ne suffit pas à prouver qu'elle est au niveau épimathématique: il faudrait pour cela déterminer son rôle. Et, bien entendu, il existe des cas où les critères ci-dessus sont d'une application délicate ou douteuse.

Lorsque, au lieu d'une phrase entière, on a affaire à un syntagme plus restreint, éventuellement réduit à un mot, les critères précédents ne s'appliquent pas. Mais on peut en trouver d'autres du même genre.

Ainsi, les adjectifs [rationnel] et [irrationnel], lorsqu'ils concernent des nombres réels, sont d'ordre strictement mathématique: l'ensemble \mathbb{R} se divise en deux sous-ensembles complémentaires, l'ensemble des réels rationnels et l'ensemble des réels irrationnels.

En revanche, \mathbb{R} ne se divise pas entre "l'ensemble des nombres réels fixes" et "l'ensemble des nombres réels variables", pas plus qu'entre "l'ensemble des nombres réels quelconques" et "l'ensemble des nombres réels particuliers". D'autre part, si on essaie de remplacer une occurrence de l'adjectif [fixe] ou de l'adjectif [variable] par une expression quantifiante (telle que [tout] ou [au moins un]), la phrase obtenue est en général incorrecte ou absurde. On en conclut que les mots [fixe], [variable], [quelconque], [particulier] ne sont pas d'ordre mathématique. Et, en analysant leurs rôles (ce qui sera fait plus loin pour certains d'entre eux), on verrait que ces mots sont d'ordre épimathématique.

0.2.3.4. Fonctions épimathématiques des Marqueurs.

De ce qui précède, on peut déjà déduire que les mots qui font l'objet de ce travail, ceux que nous avons indiqués dans l'Introduction et que nous qualifierons plus loin de "Marqueurs", sont d'ordre essentiellement épimathématique.

Toutefois, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, cette conclusion n'offre en soi que peu d'utilité. Ranger une expression dans la catégorie "épimathématique" ne présente un intérêt que lorsqu'on est en mesure d'indiquer la fonction épimathématique exercée par cette expression (à l'endroit considéré du texte considéré). C'est donc à un recensement et à une classification des rôles épimathématiques joués par les Marqueurs que nous allons essayer de procéder dans les chapitres suivants.

0.3: Plan du travail.

Rappelons qu'il s'agit d'une étude linguistique de textes écrits (manuels). L'étude porte essentiellement sur des manuels du Secondaire (dont on trouvera la liste à la fin de ce paragraphe) à partir de la classe de Quatrième jusqu'en Terminale.

Pour une étude comparative, des livres et articles destinés à l'Enseignement Supérieur ont été également consultés (on en trouvera également la liste à la fin de ce paragraphe).

Comme dans tout ouvrage de linguistique, nous avons fait largement appel à des exemples imaginés. La distinction entre correct, incorrect et douteux, telle que nous l'avons faite sur ces exemples imaginés, nous semble conforme à un certain consensus observable dans le milieu mathématique; mais la notion de "locuteur compétent" offre les mêmes difficultés à propos de la langue mathématique qu'à propos des autres langues.

Le recensement de ce que par convention on appellera Marqueur et la classification de leurs rôles seront effectués au chapitre 1. Cette analyse nous conduira à étudier un certain nombre de problèmes linguistiques annexes qui font l'objet des chapitres 2 et 3.

La théorie générale ainsi esquissée aux chapitres 1, 2 et 3 est appliquée, dans le chapitre 4, à des exemples supplémentaires qui nous paraissent particulièrement intéressants.

Le chapitre 5 correspond à l'étude comparative du Secondaire et du Supérieur.

Le chapitre 6 correspond à l'étude comparative de la fréquence des Marqueurs dans les manuels du Secondaire.

Nous essaierons de montrer dans la Conclusion que si ce travail est en soi purement linguistique, les recherches dans cette voie peuvent aussi avoir des conséquences, peut-être importantes, sur le plan pédagogique.

LISTE DES MANUELS DU SECONDAIRE

- . Collection Queysanne-Revuz (notée QR):
 - quatrième: 1973 - 1979.
 - troisième: 1974.
 - seconde CT: 1970 (tome 2) - 1974 - 1977.
 - première CDE: 1970 (tome 2) - 1974 (tome 2).
 - terminale CDE: 1974 (tome 2).

- . Collection Monge:
 - quatrième: 1979.
 - seconde CT: 1968 - 1974.
 - première CDE: 1974.
 - terminale: CDE. 1974 - CE. 1976 (tome 1) - D. 1977 - CE. 1978 (tome 1).

- . Collection Aleph:
 - seconde ACT: 1976 (Aleph₁ - Analyse).
 - première: CDE. 1970 (Aleph₀ - Géométrie I) - AB. 1974 (Aleph₁) - CDE. 1978 (Aleph₁ - Analyse).
 - terminale CE: 1975 (Aleph₁ - Analyse).

- . Collection Gourion - Lixi - Novelli (notée GN):
 - terminale CE: 1978 (Géométrie) - 1979 (Nombres, Analyse, Probabilités) 1980 (Algèbre).

- . Collection Corrieu - Gourion - Goutodier - Lixi - Rougeau (notée C.G.G.L.R.):
 - troisième: 1980.

- . Collection Mauguin:
 - quatrième: 1979.

- . Collection Gallion:
 - quatrième: 1979.

- . Collection Renée Polle:
 - quatrième: 1979.

- . Collection A. Deledicq:
 - quatrième: 1979.

- . Collection Vissio:
 - première ABCDE: 1970 (Analyse et Algèbre).

- . Collection Decretton et Poret:
 - terminale CE: 1976 (Algèbre).

- . Collection E. Riche:
 - première AB: 1972.

- . Collection Bordas:
 - première CDE: 1974.

- . Collection Durrande:
 - terminale CDE - Tome 2 - Le problème mathématique. 1974.

LISTE DES LIVRES DU SUPERIEUR.

- . Les oeuvres d'Euclide. Traduction de François Peyrard en 1818. Edition de 1966.
- . Eléments d'analyse. J. Dieudonné. Tome 1. Edition 1971.
- . Algèbre - S. Mac Lane et G. Birkhoff. Tome 1. Edition 1970
- . Théorie élémentaire des fonctions analytiques. H. Cartan. Edition 1975.
- . Calcul différentiel. H. Cartan. Edition 1971.
- . Seminaire Choquet. Recueil périodique. Juillet 1965.
- . Eléments de mathématiques. Bourbaki. Fascicule 20. Edition 1970.
- . Les C^{*}-algèbres et leurs représentations. J. Dixmier. Edition 1974.

CHAPITRE I : LES MARQUEURS ET LEURS ROLES

Le terme de "marqueur" est utilisé en linguistique pour des notions très diverses. Les mots que nous étudions dans ce travail constituent une catégorie très particulière et très restreinte de marqueurs, que l'on pourrait appeler marqueurs de variance. C'est par convention et pour alléger l'écriture que nous appellerons simplement Marqueurs les marqueurs de variance que nous étudions.

1.1. Généralités sur les Marqueurs.

1.1.1. Liste des Marqueurs.

Ces Marqueurs sont des adjectifs. Les syntagmes nominaux auxquels ils s'appliquent servent à nommer des "variables" (cf. 0.2.1.1) presque toujours représentés par des lettres.

Les Marqueurs que nous étudierons sont les suivants :

- [quelconque]
- [arbitraire]
- [donné]
- [fixé]
- [fixe]
- [choisi]
- [variable].

Cette liste est relativement arbitraire. On pourrait y ajouter les adjectifs suivants :

- [particulier], qui est susceptible de s'opposer à [quelconque].
- [constant], qui est susceptible de s'opposer à [variable].
- [même], qui est susceptible dans certains cas de remplacer [fixe] (comme on le voit par la quasi-équivalence des deux phrases suivantes :
 - * [Les courbes C_t passent par un point fixe.]
 - * [Les courbes C_t passent par un même point].
- et sans doute un certain nombre d'autres.

On pourrait peut-être aussi considérer comme Marqueur l'adjectif [certain], sinon au pluriel (sans article) où il semble jouer simplement un rôle de \exists -quantification, du moins au singulier (avec l'article [un]).

Dans les manuels que nous avons étudiés, à l'exception d'un exemple portant sur [particulier] (cf. exemple n° (4)19), nous n'avons pas rencontré de cas où ces Marqueurs supplémentaires seraient utilisés de façon intéressante.

1.1.2. Cas des participes passés.

Dans la liste précédente, certains Marqueurs sont des participes passés de verbes transitifs (on sait que de tels participes passés peuvent être considérés comme des adjectifs). C'est le cas de [donné], [fixé], et [choisi].

On retrouvera les verbes correspondants [donner], [fixer] et [choisir] sous leur forme active dans certaines phrases typiques, par exemple :

(1)1. [Donnons-nous deux réels a et b.]

Ces phrases (tout comme celles qui commencent par [Soit]) expriment une certaine opération (la présentation-quantification universelle différée que nous étudierons plus loin). Cette opération particulière est de nature épimathématique, mais elle est tout à fait distincte des divers rôles (également épimathématiques) que peuvent jouer les Marqueurs.

1.1.3. Possibilités et contraintes syntaxiques.

On peut avoir deux Marqueurs s'appliquant au même syntagme nominal, par exemple :

(1)2. [Soit a et b deux nombres réels donnés quelconques].

Mais on ne peut pas, dans n'importe quel contexte, superposer n'importe quels Marqueurs; toutefois, il semble difficile de donner a priori une liste exhaustive des exclusions mutuelles. Ainsi on ne peut pas exclure a priori des phrases comme :

[Soit h un nombre réel fixe choisi à l'avance.] ni même, en dépit de l'opposition apparente,

[Si les points fixes du faisceau de cercles (F) varient en décrivant le cercle (C),...] en fait l'adjectif [fixes] intervient ici dans le bloc "points fixes d'un faisceau" qui pourrait être remplacé par "points de base d'un faisceau", on n'est donc pas, à proprement parler, en présence d'un Marqueur (sur des cas analogues, cf. 1.2.).

Mais il y a d'autres contraintes, dont certaines portent sur un Marqueur seul.

Ainsi on peut écrire :

- [Un point M étant choisi,.....] ,

mais non(semble-t-il) :

- [Soit M un point choisi.]

De même on peut écrire :

- [Soit O un point fixé du plan P.] ,

aussi bien que :

- [Soit O un point fixe du plan P.]

Mais on n'écrira pas :

- [Montrer que les droites $\Delta_{\lambda, \mu}$ passent par un point fixé.] alors qu'on écrit :

- [Montrer que les droites $\Delta_{\lambda, \mu}$ passent par un point fixe.]

1.1.4. Possibilité de supprimer un Marqueur.

Les Marqueurs, qui sont des adjectifs, interviennent beaucoup plus souvent en situation d'épithète qu'en situation d'attribut. Il en résulte que, dans la plupart des cas, la correction syntaxique de la phrase est préservée lorsqu'on supprime un ou plusieurs Marqueurs. Le problème sémantique que nous étudierons est de savoir si cette suppression des Marqueurs transforme - ou même éventuellement détruit - la signification d'une phrase.

L'effet sur la phrase de la suppression du Marqueur nous renseignera ainsi sur le rôle (épimathématique) joué par ce Marqueur.

1.1.5. L'adverbe [arbitrairement].

Dans notre convention terminologique, l'adverbe [arbitrairement] n'est pas un Marqueur. Mais il joue un rôle tout à fait analogue. On le rencontre dans deux cas :

1er cas : il se superpose à un Marqueur participe passé : [donné], [fixé], ou [choisi].

2ème cas : il s'applique à la forme active des verbes [donner], [fixer], [choisir] qui, comme on l'a dit, interviennent dans des phrases typiques exprimant une opération épimathématique particulière.

Le premier cas est (comme pour les Marqueurs adjectivaux entre eux), soumis à certaines limitations : on peut écrire [arbitrairement fixé] mais non pas [arbitrairement fixe].

Ce dernier exemple montre que les contraintes de superposition de l'adverbe [arbitrairement] ne sont pas exactement les mêmes que celles de l'adjectif [arbitraire], puisqu'on peut parfaitement écrire : [Soit A un point fixe arbitraire].

Lorsque, dans les exemples, nous rencontrerons l'adverbe [arbitrairement], nous l'étudierons comme s'il s'agissait d'un Marqueur.

1.2. Expressions ressemblant à des Marqueurs.

Il existe des cas où l'on rencontre les mots [donné] et [variable] sans qu'ils aient le rôle de Marqueur au sens où on l'entend dans ce travail. Voici ces cas.

1.2.1. Cas de [donné].

1.2.1.1. Syntagme [étant donné].

Ce syntagme, qui intervient presque toujours en début de phrase, constitue un bloc indécomposable jouant à peu près le rôle d'une préposition (il s'applique à un syntagme nominal et précède ce syntagme). D'ailleurs certains auteurs utilisent cet-

te locution de façon invariable, c'est-à-dire sans accord en genre et en nombre de l'adjectif [donné].

Comme nous le verrons dans la suite au chapitre 3, lorsque le syntagme [étant donné] s'applique à une ou plusieurs variables, il joue le même rôle épimathématique que des locutions comme [Soit], c'est-à-dire ce que nous appelons une présentation-quantification universelle différée ou PUD ; il y a toutefois une différence syntaxique très importante sur laquelle nous reviendrons : [Soit] étant un verbe, [Soit + syntagme nominal] constitue une phrase, tandis que [étant donné + syntagme nominal] n'en constitue pas une, mais seulement un membre de phrase jouant à peu près le rôle grammatical de "complément circonstanciel" (ce qui nous posera certains problèmes). (cf. 2.3.2.2.)

Par ailleurs le syntagme propositionnel [étant donné] peut s'appliquer à un syntagme nominal mis sous la forme d'une proposition subordonnée précédée de la conjonction [que]. On obtient la locution [étant donné que] qui est à peu près équivalente à [vu que], [puisque], [comme]. Il est donc évident que dans la locution conjonctive [étant donné que], l'adjectif [donné] ne peut être considéré comme un marqueur de variance.

Par contre dans une phrase comme :

(1)3. [Les nombres a, b, et c étant donnés, nous allons étudier la variation du trinôme $ax^2 + bx + c$ lorsque x décrit \mathbb{R}],

nous pouvons considérer que l'adjectif [donnés] est un Marqueur. D'ailleurs, dans ce cas, les mots [étant donnés] suivent le syntagme nominal auquel ils s'appliquent au lieu de le précéder, et l'adjectif [donnés] porte obligatoirement la marque du pluriel.

1.2.1.2. Syntagme [donné sous forme].

C'est là un autre usage de l'adjectif [donné] que l'on rencontre dans les manuels ou les textes de mathématiques, et qui n'a rien à voir, là non plus, avec le Marqueur qui nous intéresse. Citons un exemple :

(1)4. [Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes quelconques donnés sous forme algébrique.]

(Monge - Term D - 1977 - P. 126)

L'adjectif [donnés] intervient dans le bloc [donnés sous forme]. Il peut être remplacé par d'autres mots, tels que [écrits] ou [mis] par exemple. Et dans ce sens, il n'a pas le rôle d'un Marqueur. Par ailleurs, on peut avoir l'exemple suivant, avec le bloc [mis sous forme] et cette fois-ci le mot [donné] jouant le rôle de Marqueur :

(1)5. [Soient $z = a + ib$ et $z' = a + ib'$ deux nombres complexes quelconques donnés, mis sous forme algébrique.]

1.2.2. : Cas de [variable] substantif.

Le mot [variable] se rencontre très souvent dans un texte mathématique. Mais parmi les différents usages qu'on en fait, [variable] n'est pas toujours un Marqueur, tel qu'on l'entend ici. C'est ce qui se passe quand ce mot est employé comme substantif. On peut noter trois usages dans ce cas.

1.2.2.1. : Usage métalinguistique général.

L'exemple qui va suivre illustre bien cet usage.

(1)6. [Dans la désignation d'une fonction, on utilise une lettre, qu'on appelle la variable, et qui n'est pas nécessairement la lettre x ; les fonctions monômes :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^n \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto at^n \end{array}$$

sont égales.]

(QR - 4ème - 1973 - P. 137.)

Cet usage du substantif [variable] est en fait celui que nous effectuons dans

tout cet ouvrage. C'est bien un usage métalinguistique, au sens usuel du terme, puisqu'il intervient dans un discours portant sur le langage.

1.2.2.2. : Syntagme [variable décrivant].

Considérons l'exemple suivant :

(1)7. [Soit x une variable décrivant Z ; considérons les fonctions propositionnelles suivantes :

(1) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1,$

(2) $3x + 12 = 0,$

(3) $x^2 + 1 = 0.$

(QR - 2e CT - 1974 - P.11)

Habituellement, on définit une fonction en un seul bloc par des formes telles que :

" la fonction : $x \mapsto \dots$ " ou "la fonction qui à chaque x associe ...", par exemple.

Or dans notre exemple (1)7 ci-dessus, cette définition de fonction se fait en deux morceaux. Le premier morceau [Soit x une variable décrivant Z] indique uniquement quelle est la lettre mutifiée et quel est son domaine de variation, tandis que la valeur de la fonction n'est donnée que dans le second morceau de la phrase.

Dans la suite, nous verrons que la première phrase peut être considérée comme une présentation-mutification fonctionnelle différée (cf. 2.2.4. et 2.3.)

Bien qu'il soit employé dans cet exemple comme un substantif, le mot [variable] intervient ici d'une façon très voisine de son emploi comme Marqueur. D'ailleurs on pourrait très bien écrire :

[Soit x variable décrivant Z .]

avec [variable] employé comme adjectif.

Dans cet exemple (1)7, il semble que le mot clé soit le participe présent [décrivant].

1.2.2.3. : Syntagme [fonction de... variable(s)...

Considérons les expressions :

- [fonction d'une (ou plusieurs) variable(s)]

- [fonction de variable réelle.]

Dans ce cas, le substantif [variable] n'a rien à voir avec le Marqueur. Il intervient pour apporter une précision concernant la fonction considérée : nombre d'arguments, ensemble(s) de "départ".

Dans cette rubrique nous rangeons aussi des expressions comme [fonction de la variable x], qui, en toute rigueur, sont incorrectes (la variable n'a pas à s'appeler nécessairement x) et appartiennent à un certain "vieux style".

1.3. : Les rôles des Marqueurs.

On peut distinguer essentiellement trois rôles différents, qui sont :

- 1° - renforceur/indicateur de mutification.
- 2° - renforceur/indicateur d'ordre de mutification.
- 3° - annulateur de restriction.

On peut déjà prévoir que l'usage des Marqueurs dans les premier et troisième rôles peut faciliter la lecture mais que l'on doit pouvoir s'en passer. En fait, on trouverait des phrases semblables dans des contextes identiques avec des Marqueurs ou sans Marqueurs.

Par contre, dans le second rôle, la présence des Marqueurs est souhaitable (bien qu'elle ne soit pas toujours indispensable) : on sait combien l'ordre des mutifications est important dans une phrase mathématique.

Voyons séparément ces rôles.

1.3.1. : Renforceur/indicateur de mutification.

En général, la mutification est une quantification, et le plus souvent une quantification universelle.

D'autre part, par rapport à une mutification, un Marqueur peut agir soit comme indicateur, soit comme simple renforceur :

- il agit comme indicateur si c'est véritablement lui qui indique la présence d'une mutification et sa nature ;
- il agit seulement comme renforceur si les indications concernant la mutification en question étaient déjà fournies dans le reste de la phrase ou dans les phrases précédentes.

Cette distinction est évidemment assez subtile et relativement subjective. Elle peut s'effectuer en supprimant le Marqueur : si on n'est pas gêné, alors le Marqueur sera considéré comme un simple renforceur de mutification ; si on est gêné, alors le Marqueur sera considéré comme un indicateur de mutification (et l'analyse de "ce qui gêne" renseignera sur la mutification implicite dont le Marqueur signalait la présence).

Remarquons que, dans notre terminologie, le rôle d'indicateur est "plus fort" que celui de renforceur.

1.3.1.1. : Exemples avec des Marqueurs renforceurs de mutification.

(1)8. [Deux éléments quelconques a_1 et a_2 de F_2 tels que (a_1, a_2) soit libre forment une base de F_2 .]

(Remarque sur cet exemple cf. 0.1.2.3.)

Le Marqueur [quelconque] dans cet exemple est un renforceur de \forall -quantification. En effet, si on le supprimait, le sens de la phrase n'en serait pas du tout modifié.

La formalisation de cet exemple est :

$$[(\forall a_1 \in F_2) (\forall a_2 \in F_2) [(a_1, a_2) \text{ libre} \Rightarrow (a_1, a_2) \text{ est une base de } F_2]]$$

Remarquons par ailleurs que, dans cet exemple, [quelconque] n'est certainement pas un annulateur de restriction (cf. ci-dessous 1.3.3.) puisque la phrase contient précisément une restriction portant sur [a₁] et [a₂], à savoir que [(a₁, a₂)] soit libre.

(1)9. [Propriété :

Soient a et b deux réels quelconques. Pour tout entier impair n, supérieur ou égal à 3, on a :

$$a^n + b^n = (a + b) (a^{n-1} - a^{n-2} b + \dots - a b^{n-2} + b^{n-1}).$$

(Monge - Term D - 1977 - P.26)

Dans cet autre exemple, [quelconques] est aussi un renforceur de \forall -quantification. Cette \forall -quantification, qui porte sur [a] et [b], est "différée" puisqu'elle s'exerce dans la seconde phrase : il s'agit donc de ce que nous appellerons une PUD (cf. 2.3.2.). Par contre, la \forall -quantification sur [n] est explicite et figure exactement à l'endroit où elle doit s'exercer, c'est à dire au début de la seconde phrase.

1.3.1.2. : Exemples avec des Marqueurs indicateurs de mutification.

(1)10. [Propriété :

Deux éléments quelconques de \mathbb{D} sont comparables pour la relation \geq dans \mathbb{D} .]

(Monge - 4e - 1979 - P.35)

La suppression du Marqueur [quelconque] peut effectivement gêner. On pourrait par exemple penser à une \exists -quantification des deux éléments en question dans cette propriété. La présence de [quelconque] dans la phrase lève cette ambiguïté et rétablit la \forall -quantification. [quelconque] est donc bien ici un indicateur de \forall -quantification.

Dans des cas de ce genre, la présence de Marqueurs est utile (du moins en l'absence d'autres procédés indicateurs de quantification).

(1) 11. $\boxed{\text{L'intersection d'un nombre quelconque de sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel } E \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

(QR - 2e CT - 1977 - P.173)

Dans cet autre exemple, un phénomène linguistique intervient à propos du Marqueur $\boxed{\text{quelconque}}$. En effet, du fait que l'expression "un nombre de" ne se dit pas en français (contrairement à l'anglais où on dit bien "a number of"), la présence de l'adjectif $\boxed{\text{quelconque}}$ est grammaticale; on ne peut pas l'enlever.

Notons cependant que l'on peut remplacer "un nombre quelconque de " par d'autres mots, tels que "plusieurs" par exemple. L'expression "un certain nombre de" est possible également, mais alors dans ce cas, on aurait une ambiguïté : on pourrait l'interpréter comme une \exists -quantification au lieu de la \forall -quantification voulue.

Le Marqueur $\boxed{\text{quelconque}}$ est donc bien, ici, un indicateur de \forall -quantification.

Remarquons aussi que, dans cet exemple, $\boxed{\text{quelconque}}$ est un Marqueur pour une variable non nommée (c'est à dire non désignée par une lettre). Et dans un tel texte, il faut voir en fait une double \forall -quantification. Ceci apparait clairement quand on écrit la phrase en langage formalisé, par exemple sous la forme :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall v_1 \in \mathcal{F}(E)) \dots (\forall v_n \in \mathcal{F}(E)) \boxed{v_1 \cap \dots \cap v_n \in \mathcal{F}(E)}$$

On a d' une part une \forall -quantification sur le nombre \boxed{n} de sous-espaces vectoriels, et d'autre part une \forall -quantification sur les n sous-espaces vectoriels eux-mêmes.

Bien entendu, on pourrait aussi adopter une formalisation comme la suivante :

$$(\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{F}(E) / \mathcal{F} \text{ fini}) (\bigcap_{v \in \mathcal{F}} v \in \mathcal{F}(E)),$$

mais dans le Secondaire on emploierait plutôt la formalisation avec deux \forall -quantifications séparées.

1.3.2. : Renforceur/indicateur d'ordre de mutification

C'est vraisemblablement dans ce rôle que le Marqueur peut tenir la place la plus importante.

Rappelons tout d'abord que nous avons défini (cf. 0.2.2) l'ordre des opérations dans une phrase comme étant l'ordre (au sens de l'"ordre de l'écriture", c'est-à-dire de gauche à droite) dans lequel les signes représentant ces opérations interviendraient dans la traduction formalisée de cette phrase, avec les conventions classiques.

Comme précédemment, la distinction entre indicateur et renforceur peut s'effectuer en supprimant le Marqueur ; suivant que la gêne ressentie devant la phrase obtenue est plus ou moins grande, le Marqueur sera considéré comme jouant un rôle d'indicateur ou de renforceur.

Dans ce paragraphe, pour mieux comprendre cette nuance entre indicateur et renforceur, il nous a paru bon de donner les exemples avec des Marqueurs indicateurs d'ordre de mutification avant ceux des Marqueurs renforceurs de cet ordre.

1.3.2.1. : Exemples avec des Marqueurs indicateurs d'ordre de mutification

(1) 12. $\boxed{\text{Théorème : Il existe un plan, et un seul, contenant un point donné et parallèle à un plan donné.}}$

(Aleph₀ - 1ère CDE - Géom I - 1970 - P. 201)

On s'aperçoit que, tel que le théorème est écrit, il y a interversion de l'ordre de quantification des variables. En effet, la traduction de ce théorème en langage formalisé est ;

$$\forall A \forall P \exists ! P' (A \in P' \text{ et } P // P')$$

Et c'est grâce aux deux Marqueurs $\boxed{\text{donné}}$ que l'on est sûr que c'est là la bonne traduction du théorème. Ils rétablissent le bon ordre de quantification des variables, qui est essentiel pour la compréhension du texte. Si on supprimait les

deux occurrences du mot [donné], la phrase obtenue pourrait avoir de fausses interprétations, telle que la suivante :

$$\exists ! P' \exists A \exists P (A \in P' \text{ et } P // P').$$

De même considérons la phrase:

(1)13. [Toutes les courbes C_t passent par un point fixe]. Sa formalisation est :
 $\exists M \forall t (M \in C_t).$

Ici, aussi, l'ordre des quantifications a été inversé. Si on supprime l'adjectif [fixe], la phrase devient incompréhensible.

Dans des cas comme ceux-ci, on se rend bien compte de l'utilité d'une indication portant sur l'ordre de quantification des variables. Et la présence d'un Marqueur ayant ce rôle d'indicateur d'ordre est à notre avis fort souhaitable (du moins en l'absence d'autres procédés, tels que par exemple des quantifications explicites figurant à leur place correcte).

1.3.2.2. : Exemple avec un Marqueur renforceur d'ordre de quantification.

Considérons maintenant la phrase suivante :

(1)14. [Il existe un point fixe appartenant à toutes les courbes C_t].
qui a exactement le même sens que le dernier exemple du paragraphe précédent. Mais ici l'ordre logique des quantifications n'a pas été inversé. Aussi la suppression de l'adjectif [fixe], bien que peut-être un peu gênante, ne semble pas aussi catastrophique que dans l'exemple précédent : pour un lecteur mathématicien, la phrase conserve sa signification.

Nous dirons donc que, dans un tel cas, le Marqueur [fixe] est seulement renforceur de l'ordre de quantification.

Remarquons que la gêne légère ressentie ici après la suppression du mot [fixe]

serait, nous semble-t-il, encore atténuée si l'expression [appartenant] était remplacée par [commun]. Cela donnerait :

[Il existe un point commun à toutes les courbes C_t].

1.3.3. : Annulateur de restriction.

En d'autres termes, le Marqueur joue ici le rôle d'un renforceur de l'absence de condition particulière.

Exemple :

(1)15. [Soit a un réel quelconque et b un réel positif. On peut écrire :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \sqrt{b}}{b}.$$

(C.G.G.L.R. - 3ème 1980 - P. 29)

Manifestement, dans cet exemple, l'adjectif [quelconque] s'oppose à l'adjectif [positif]. On ne veut aucune restriction sur le réel [a], contrairement au réel [b] à qui on impose d'être positif. D'où le rôle annulateur de restriction de [quelconque]. Ici, le Marqueur [quelconque] n'a pas le rôle de renforceur de \forall -quantification. Si on avait voulu renforcer la \forall -quantification (dans ce cas une PUD), on aurait dû former la phrase suivante :

[Soit a un réel quelconque quelconque et b un réel positif quelconque.]

Ce rôle d'annulateur de restriction se rencontre assez fréquemment.

1.4. : Remarques générales sur les Marqueurs.

1.4.1. : On peut trouver des Marqueurs à tous les niveaux scolaires.

Comme je l'ai annoncé auparavant, j'ai donc consulté pour ce travail des manuels du Secondaire à partir de la classe de Quatrième jusqu'en Terminale. Dans tous ces manuels, sans exception, on note la présence de Marqueurs.

En particulier, les Marqueurs [quelconque] et [donné] se retrouvent partout. Quant aux autres Marqueurs, leur usage dépend des auteurs. Pour plus de détails sur ce point, cf. chapitre 6.

1.4.2. : A quel moment sont apparus les Marqueurs.

On peut se demander à partir de quel moment historique les Marqueurs ont fait leur apparition dans les textes mathématiques. C'est une question à laquelle je ne saurais répondre exactement, mais pour information, on en trouve déjà dans la traduction des Oeuvres d'Euclide par François Peyrard, éditée en 1818. Voici quelques citations tirées de ce livre.

(1) 16. [Soit le parallélogramme AF ; par le point B menons la droite EZ perpendiculaire à BF , prolongeons AA ; faisons BZ égal à BA ; achevons les rectangles FE , FZ , et d'un point H quelconque de AB menons $H\theta$ perpendiculaire à BF .]
(PV - Préface).

(1) 17. [Dans $\Gamma\Delta$ prenons un point donné H ; faisons HA égal à EZ , et du centre H , et de la distance HA , décrivons le cercle ΔB ;]
(P. 351)

1.4.3. : Dans quels passages mathématiques on trouve les Marqueurs.

On peut trouver des Marqueurs dans tout genre de passage mathématique, c'est-à-dire aussi bien dans les démonstrations, dans les textes d'exercices, que dans les énoncés de théorèmes ou de définitions.

1.4.4. : Nature épimathématique des Marqueurs.

Bien que sommaire, l'analyse que nous venons de faire des rôles joués par les Marqueurs confirme ce qui avait été indiqué précédemment (0.2.3.4), à savoir que ces rôles sont d'ordre épimathématique et non pas mathématique.

Un Marqueur n'exprime aucune propriété mathématique de l'objet représenté

par la lettre à laquelle ce Marqueur est appliqué.

On ne peut pas non plus dire qu'un Marqueur exprime une opération logico-mathématique (par exemple une quantification), comme c'est le cas par exemple pour l'adjectif [tout] : c'est pourquoi nous avons seulement employé à propos des Marqueurs des verbes comme indiquer et renforcer.

La présence d'un Marqueur dans une phrase ou une suite de phrases peut servir de guide pour construire une formalisation. Mais, dans l'expression symbolique obtenue, aucun symbole ou groupement de symboles ne constitue à proprement parler la traduction du Marqueur considéré. Nous verrons même que les Marqueurs se rencontrent avec une fréquence spécialement élevée dans des phrases qui n'admettent aucune formalisation séparée (et sont par conséquent tout entières au niveau épimathématique) : celles qui expriment une mutification différée (cf. ci-dessous 2.3.).

On peut prévoir aussi le phénomène suivant (qui sera confirmé dans la suite de ce travail) : quand une phrase exprime complètement, avec précision et dans l'ordre convenable, toutes les opérations qui interviennent dans son contenu mathématique, alors la présence de Marqueurs est très peu utile (et, en fait, assez rare). En particulier on ne trouve jamais de Marqueur lorsque les opérations considérées sont exprimées sous forme symbolique : on n'écrit pas [$\forall x$ donné] ni [$\exists x$ quelconque].

1.4.5. : Marqueurs et articles.

L'utilité des Marqueurs, dans les phrases dépourvues de quantifications explicites, est renforcée par le fait (indiqué par D. LACOMBE) que l'article, aussi bien dans le français des textes mathématiques que dans le français usuel, n'a par lui-même aucun rôle quantificateur ou presque.

L'article indéfini [un], [une], [des] doit, suivant le contexte, être remplacé soit par une \forall -quantification, soit par une \exists -quantification, soit (avec la copule [être]) par une appartenance sans aucune quantification. Les phrases suivantes :

(1)18. [Un nombre réel positif est toujours supérieur à un nombre réel négatif],

(1)19. [Un nombre réel positif est toujours le carré d'un nombre réel négatif],

(1)20. [x est un entier] (d'ailleurs équivalente à [x est entier]).

se formalisent respectivement (pour un auditeur ou lecteur averti) par les expressions symboliques suivantes (où il est entendu que les lettres [x], [y], représentent des nombres réels) :

$$(\forall x \geq 0)(\forall y \leq 0)(x > y),$$

$$(\forall x \geq 0)(\exists y \leq 0)(x = y^2),$$

$$x \in \mathbb{Z}.$$

L'article défini ([le], [la], [les], [au], [du], [aux], [des]) marque parfois une \forall -quantification assez spéciale (cf. 2.3.2.5. et 3.3.2.1.2.), mais il peut aussi accompagner une \forall -quantification banale et être interchangeable avec l'article indéfini.

Dans la définition de la continuité, les deux phrases suivantes :

(1)21. [Une fonction réelle f, définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , sera dite continue en un point x_0 de I si ...]

(1)22. [La fonction réelle f, définie sur l'intervalle I de \mathbb{R} , sera dite continue au point x_0 de I si ...]

sont équivalentes et se formalisent toutes deux par

$$(\forall I) (\forall f \in \mathbb{R}^I) (\forall x_0 \in I) (f \text{ est continue en } x_0 \iff \dots)$$

(Remarquons qu'en français, dans ce genre de contexte, l'article défini appelle la préposition [à] tandis que l'article indéfini et l'absence d'article appellent la préposition [en]).

1.4.6. ; Un Marqueur peut-il jouer tous les rôles?

Tout Marqueur n'est pas susceptible de jouer tous les rôles qu'un Marqueur

peut avoir. Tous peuvent jouer le rôle de renforceur de mutification. Mais par exemple, dans le rôle d'annulateur de restriction on ne trouve que [quelconque], [arbitraire] et la forme adverbiale [arbitrairement]. Inversement, pour indiquer une antériorité de mutification, il semble qu'aucun de ces trois Marqueurs sus-cités ne soit approprié (dans l'expression [arbitrairement fixé], [arbitrairement] est annulateur de restriction et c'est [fixé] qui indique l'antériorité).

Ces points seront examinés dans les chapitres suivants et repris dans la conclusion.

CHAPTITRE 2 : RECENSEMENT DES PLACES ET DES ROLES DES VARIABLES SUSCEPTIBLES DE RECEVOIR DES MARQUEURS.

Il n'existe pas de formes déterminées de phrases, ni de rôles précis de variables, où on voit apparaître obligatoirement les Marqueurs. Cependant on peut recenser les places et les rôles des variables qui sont susceptibles de recevoir des Marqueurs. C'est l'objet de ce chapitre.

On pourra par conséquent y trouver des exemples aussi bien avec Marqueurs que sans Marqueurs.

Notons que ce recensement est probablement incomplet car il se limite aux manuels que j'ai pu consulter. Les Marqueurs interviennent dans trois cas :

1er cas : dans une présentation simple de variables.

2ème cas : dans une mutification immédiate de variables.

3ème cas : dans une présentation accompagnée d'une mutification différée de variables.

Comme on l'a déjà remarqué, quand les mutifications sont explicites, et que leur ordre est clairement apparent, il n'y a guère besoin de Marqueurs. Et dans ce cas, en fait, on n'en rencontre pas beaucoup.

2.1.: Présentation simple.

Dans une Présentation simple, on exhibe des lettres, ou des catégories de lettres, en convenant qu'elles représenteront des objets mathématiques d'espèces déterminées. Ces lettres vont jouer ultérieurement, en des endroits non encore déterminés du texte, des rôles de variables. Ces variables seront bien entendu mutifiées, mais les diverses mutifications qu'elles subiront sont encore indéterminées au moment de la présentation.

Voici quelques exemples de Présentation simple.

(2)1. Dans la suite, on désignera un vecteur par une lettre latine : u, v, w... et un scalaire par une lettre grecque $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

(2)2. Nous convenons de noter un vecteur, c'est à dire un élément de \mathcal{V} , par une lettre surmontée d'une flèche.

Par exemple, nous écrivons : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{i}, \vec{j}, \dots$

Nous lisons : "vecteur u", ou "u flèche".

(Monge - 4ème - 1979 - P.268)

2.2. Mutification immédiate.

Nous dirons qu'une expression, en langage naturel ou symbolique, exprime (ou indique, ou renforce) une mutification immédiate lorsque cette mutification s'exerce uniquement sur la phrase contenant cette expression (ou sur un morceau de cette phrase), mais non pas au-delà. Si la mutification s'exerce sur la phrase où figure l'expression considérée et aussi sur une ou plusieurs phrases ultérieures, elle sera dite prolongée. Si elle s'exerce seulement sur des phrases ultérieures, et non pas dans la phrase où elle figure, elle sera dite différée.

Comme on s'en doute, la distinction entre ces trois types peut parfois être délicate. En fait nous étudierons surtout les deux cas extrêmes : mutification immédiate et mutification différée. La mutification prolongée sera surtout examinée dans la rubrique "Cas douteux".

Remarquons toutefois que les règles d'écriture du langage symbolique font qu'une mutification exprimée dans ce langage est nécessairement immédiate; il en résulte que seules sont formalisables les mutifications de ce type. Inversement, les expressions indiquant une mutification différée se placent nécessairement au niveau épimathématique.

2.2.1. \forall quantification.

Cette \forall -quantification immédiate peut être faite de façon explicite, ou au

contraire plus ou moins implicite. Dans les deux cas, la présence de Marqueurs est possible.

2.2.1.1. : \forall -quantification explicite.

La \forall -quantification explicite s'exprime comme chacun sait par des mots ou expressions typiques tels que [quel que soit], [chaque], et diverses formes contenant [tout] ou [tous]. Comme on l'a remarqué déjà, la présence de Marqueurs dans ce cas est plutôt rare, mais pas impossible.

En voici un exemple :

(2)3. [b) H_1 étant un énoncé vrai, déduire de a) que H_n est vrai quel que soit l'entier naturel donné n]

(QR - 2è CT - 1977 - P. 120)

On trouve dans cet exemple, le Marqueur [donné] dans son rôle de renforceur de mutification.

Il ne faut pas oublier la forme symbolique " \forall " qui sert à exprimer explicitement la quantification universelle. Cependant, comme on l'a signalé dans le chapitre précédent, on ne trouve jamais de Marqueur associé à ce symbole (cf. 1.4.4.).

2.2.1.2. : \forall -quantification plus ou moins implicite.

On aurait un peu plus besoin de mettre des Marqueurs dans ce cas que dans le cas précédent. Voyons quelques exemples de cette \forall -quantification plus ou moins implicite.

(2)4. [Deux éléments de \mathbb{D} sont toujours comparables pour la relation \geq dans \mathbb{D} .]

La \forall -quantification dans cet exemple se devine grâce au mot [toujours], on peut dire qu'elle est semi-implicite. Cependant, la présence d'un Marqueur renfor-

ceur de mutification comme [quelconques] serait peut-être souhaitable pour éviter toute ambiguïté.

(2)5. [Soit a un réel positif. Alors on a :
pour x et y réels, $ax > ay \iff x > y$.]

Il y a une \forall -quantification implicite de [x] et [y]. On peut très bien ajouter [quelconques] pour renforcer cette \forall -quantification (il serait d'ailleurs tout aussi simple d'exprimer explicitement la \forall -quantification : [quels que soient les réels x et y, \dots])

(2)6. : [Théorème :

Il existe une droite, et une seule, contenant deux points distincts de l'espace.]
(Aleph₀ - 1ère CDE - Géom I - P. 157)

La quantification universelle qui porte sur les deux points distincts est totalement implicite. Sans doute il y aurait-il eu besoin ici d'un Marqueur comme [quelconques] pour la renforcer, afin d'éviter une interprétation fautive consistant en une quantification existentielle.

Un autre point important à signaler, à propos de cet exemple, concerne l'ordre des quantifications des variables. Pour cela, on peut se reporter à un exemple analogue (mais avec le Marqueur [donné]), qu'on a déjà vu en 1.3.2.1.

2.2.2. : \exists -quantification.

Dans ce cas aussi, la \exists -quantification peut être faite de façon explicite ou plus ou moins implicite.

2.2.2.1. : \exists -quantification explicite.

Elle s'exprime généralement par l'expression [il existe], parfois par [il y a].

Exemple :

(2)7. [Fixons un entier relatif y et un entier strictement positif x ; il existe

alors un entier naturel n tel que :
($nx > y$).

Ce résultat est connu sous le nom de théorème d'Archimède .
(Aleph₁ - Algèbre - Term CE - 1975 - P. 58)

Bien entendu, la quantification existentielle est parfois exprimée par la forme symbolique \exists ; dans ce cas on ne trouve pas de Marqueurs (cf. 1.4.4.).

2.2.2.2. : \exists -quantification plus ou moins implicite.

Il existe certaines expressions qui peuvent suggérer une \exists -quantification. C'est le cas par exemple de \lceil de la forme \lceil , il est possible de trouver \lceil . Mais de telles expressions ne se rencontrent pas systématiquement chaque fois que l'on a une quantification existentielle.

Voyons quelques exemples de \exists -quantification plus ou moins implicite.

(2)8. \lceil Soit F le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel E , engendré par a et b .

Pour que x appartienne à F , il suffit que x soit de la forme $a u + b v$, avec u et v quelconques dans \mathbb{R} .

Dans cet exemple, on trouve le Marqueur \lceil quelconques \lceil comme renforceur d'une \exists -quantification. Ceci contredit peut-être Bernard PARZYSZ qui, dans son article déjà cité (cf. fin de l'introduction) semble soutenir que \lceil quelconque \lceil accompagne toujours une \forall -quantification.

(2)9. \lceil Résoudre, à l'aide de l'exercice n° 1-64 (P. 35), l'équation définie sur \mathbb{N} par $x^y = y^x$.

Supposons : $x > y > 0$.

..... D'après l'unicité de la décomposition, p^{ky} figure dans x^y ,

et l'on a donc :

$(my \leq ky) \Rightarrow (m \leq k)$.

Cette relation étant vraie pour tout diviseur premier de y , on peut en déduire

que y divise x ; d'où l'égalité :

$x = ny$.
.....

(Aleph₁ - Algèbre - Term CE - 1975 - P. 100)

Dans cet exemple (d'ailleurs assez mal rédigé), la \exists -quantification sur $\lceil n \rceil$ est complètement implicite.

2.2.3. : Mutification ensembliste.

Il y a deux types de mutification ensembliste. D'une part la mutification qu'on appellera mutification ensembliste-compréhension, et d'autre part la mutification qu'on appellera mutification ensembliste-image.

2.2.3.1. : Mutification ensembliste-compréhension.

C'est la mutification dont voici les différentes formes usuelles possibles de formalisation rigoureuse.

a) $\{ x / x \in E / \mathcal{R} \}$.

où \mathcal{R} est un énoncé contenant x (et éventuellement d'autres lettres jouant le rôle de paramètres). Notons qu'à la place des barres obliques, on peut trouver des barres verticales " | ", des points-virgules " ; ", ou encore des deux-points " : ", ou peut-être encore d'autres signes. Mais pour simplifier, nous n'utiliserons ici que la barre oblique.

Cette forme a) est parfois abrégée en :

b) $\{ x / x \in E \text{ et } \mathcal{R} \}$, ou encore en :

c) $\{ x \in E / \mathcal{R} \}$.

Parfois, par abus de langage, on omet d'indiquer le référentiel de base :

d) $\{ x / \mathcal{R} \}$.

Le référentiel de base peut être bien entendu simple comme ci-dessus, ou au contraire multiple. Ainsi on a aussi :

$\{ (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n / \mathcal{R} \}$.

Comme dans les cas des quantifications formalisées, avec cette écriture symbolique, on ne trouvera pas de Marqueurs.

Dans le langage usuel, les expressions que l'on rencontre pour une telle mutification sont du genre :

- L'ensemble des éléments x de E tels que \mathcal{R} .
- L'ensemble des x tels que \mathcal{R} .

Donnons ici un exemple de mutification ensembliste-compréhension.

(2) 10. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient l'inégalité :

$$x - 1 \leq 3x + 5$$

(Monge - 2ème CT - 1974 - P. 36)

2.2.3.2. : Mutification ensembliste-image.

Voici les différentes formes usuelles possibles de formalisation rigoureuse d'une telle mutification:

a) $\{y / x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n \mid \mathcal{R}\}$.

où y est une expression contenant les variables x_1, \dots, x_n (plus, éventuellement, des paramètres) et désignant un élément (dépendant de x_1, \dots, x_n) d'un certain ensemble F ; \mathcal{R} est un énoncé portant sur ces variables (et pouvant également contenir des paramètres).

Cette forme a) est parfois abrégée en :

b) $\{y / x_1 \in E_1 \text{ et } \dots \text{ et } x_n \in E_n \text{ et } \mathcal{R}\}$

Lorsque \mathcal{R} est identiquement vrai on a la notation :

c) $\{y / x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}$

Bien entendu, y n'est pas toujours explicitement écrite sous la forme $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Si on désigne par φ l'application : $(x_1, \dots, x_n) \mapsto y$ de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F,

on a, avec l'abus de langage usuel qui note par φ l'extension de φ aux parties (application de $\mathcal{P}(E_1 \times \dots \times E_n)$ dans $\mathcal{P}(F)$):

$$\{y / x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\} = \varphi(E_1 \times \dots \times E_n)$$

et

$$\{y / x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n / \mathcal{R}\} = \varphi(\{(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n / \mathcal{R}\}).$$

Ceci met en évidence le rapport entre l'écriture fonctionnelle (avec φ) et l'écriture ensembliste-image.

Et ici aussi, on ne trouvera pas de Marqueurs avec la forme d'écriture symbolique de la mutification.

Dans le langage usuel, les modes d'expressions d'une mutification ensembliste-image sont très variées (souvent ambigus et entachés d'abus de langage). On peut dire par exemple, pour exprimer la notation c) ci-dessus:

- L'ensemble des valeurs prises par y lorsque (x_1, \dots, x_n) décrit $E_1 \times \dots \times E_n$.

Voici un exemple de mutification ensembliste-image :

(2) 11. L'ensemble des valeurs prises par l'expression $6x - 2y$ lorsque x et y sont deux entiers relatifs quelconques qui décrivent \mathbb{Z} est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Dans cet exemple, on retrouve quelconques dans son rôle de renforceur de mutification.

2.2.3.3. : Cas douteux.

Il est souvent difficile de faire la distinction entre :

- d'une part une mutification ensembliste-image,
- d'autre part une mutification ensembliste-compréhension comportant une \exists -quantification.

En effet, si y est une expression contenant x , les deux notations ensemblistes

$$\{y / x \in E\} \text{ et } \{y / (\exists x \in E)(y = y)\}$$

sont équivalentes.

Il en est de même, dans le cas plus général, pour les deux notations :

$$\{y / x \in E_1, \dots, x_n \in E_n / \mathbb{R}\} \text{ et } \{y / (\exists x_1 \in E_1) \dots (\exists x_n \in E_n) (\text{Ret } y = y)\}$$

Donnons quelques exemples de cas douteux.

(2) 12. \overline{F} est l'ensemble des éléments de la forme $\alpha a + \beta b$ où α et β sont des nombres réels quelconques.

(QR - 2e CT - 1977 - P. 171)

L'expression $\overline{\text{de la forme}}$ suggère généralement une \exists -quantification. Cependant dans cet exemple on peut formaliser de deux façons différentes.

La première traduction symbolique est :

$$F = \{ \alpha a + \beta b / \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \}$$

où la mutification est simplement ensembliste-image.

L'autre traduction est :

$$F = \{ x / (\exists \alpha \in \mathbb{R}) (\exists \beta \in \mathbb{R}) (x = \alpha a + \beta b) \}$$

où la mutification ensembliste-compréhension s'accompagne de quantifications existentielles. Le Marqueur $\overline{\text{quelconques}}$ apparaît donc comme un renforceur de mutification, sans qu'on puisse exactement décider de quelle mutification il s'agit (cf. article de PARZYSZ déjà cité).

(2) 13. On donne un point O de A_2 et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} (\vec{w} \neq \vec{0})$ de \mathcal{V}_2 , plan vectoriel associé au plan affine A_2 . Trouver l'ensemble des points M de A_2 tels que :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u} - 2\vec{v} + \lambda \vec{w}, \lambda \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

(QR - 2ème CT - 1977 - P. 260)

Dans cet autre exemple, on ne retrouve pas les formes typiques qui suggèrent

une \exists -quantification, mais on sent tout de même que celle-ci est présente à propos de $\overline{\lambda}$. Comme dans l'exemple précédent, on a voulu faire sur $\overline{\lambda}$ une mutification

ensembliste. On peut, ici aussi, écrire l'ensemble cherché de deux façons :

$$- \{ M / (\exists \lambda \in \mathbb{R}) (\overrightarrow{OM} = \vec{u} - 2\vec{v} + \lambda \vec{w}) \}$$

(mutification ensembliste-compréhension avec quantification existentielle).

$$- \{ \vec{u} - 2\vec{v} + \lambda \vec{w} / \lambda \in \mathbb{R} \}$$

(mutification ensembliste-image).

2.2.3.4. : Mutification ensembliste et \forall -quantification.

Comme le remarque D. LACOMBE dans son cours, beaucoup d'élèves et d'étudiants (voire certains enseignants) semblent confondre les mutifications ensemblistes (en compréhension ou en image) avec des \forall -quantifications; il n'est pas impossible que B. PARZYSZ, dans l'article déjà cité, commette une confusion de ce genre.

La raison en est sans doute que les expressions en langage naturel qui traduisent les mutifications ensemblistes contiennent parfois le mot $\overline{\text{tous}}$. Ainsi, l'écriture symbolique :

$$\{ x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1 \}$$

se traduit parfois par :

$$\overline{\text{L'ensemble de tous les réels } x \text{ tels que } 0 \leq x \leq 1}$$

(dans ce qui va suivre, cet ensemble sera désigné par E).

De même, l'écriture symbolique

$$\{ x^2 - 2x + 2 / 0 \leq x \leq 3 \}$$

se traduit parfois par :

$$\overline{\text{L'ensemble des valeurs prises par } x^2 - 2x + 2 \text{ lorsque } x \text{ prend toutes les valeurs réelles comprises (au sens large) entre 0 et 3}}$$

(dans ce qui va suivre, cet ensemble sera désigné par F).

Mais il s'agit seulement d'une apparence.

En effet, lorsqu'on dit par exemple que la réunion "correspond" à la disjonction $\overline{\text{ou}}$ et que l'intersection "correspond" à la conjonction $\overline{\text{et}}$, on a en vue les équivalences suivantes, valables pour tout x :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B).$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B).$$

Pour conserver la même signification au mot "correspond" dans le cas des ensembles E et F définis ci-dessus, il faut considérer les équivalences suivantes, valables pour tout x réel :

$$x \in E \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$y \in F \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 3) (y = x^2 - 2x + 2).$$

On voit donc que (premier cas) la mutification ensembliste-compréhension ne correspond à aucune quantification et que (deuxième cas) la mutification ensembliste-image correspond à une quantification existentielle et non pas universelle. Bien entendu, dans les deux cas, il y a en plus une \forall -quantification préalable sur $\lceil x \rceil$; mais ceci est également valable pour l'union et l'intersection, dont personne ne songe à dire qu'elles correspondent à une quantification universelle.

De la même façon, l'union généralisée correspond à une quantification existentielle puisque, pour tout x,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I) (x \in A_i)$$

Néanmoins, l'écriture $\bigcup_{i \in I} A_i$ se traduit parfois par \lceil l'union de tous les A_i \rceil ou par \lceil l'union des A_i pour toutes les valeurs i dans I \rceil , sans qu'il y ait pour autant la moindre \forall -quantification sur $\lceil i \rceil$ dans la définition.

2.2.4. : Mutification fonctionnelle.

C'est la mutification qui correspond à la flèche fonctionnelle $\lceil \mapsto \rceil$ dans la notation la plus récente), parfois accompagnée de la flèche $\lceil \rightarrow \rceil$.

L'usage de ces flèches est imparfaitement codifié et donne lieu à de nombreux abus de langage.

Une possibilité (parmi d'autres) de convention rigoureuse consiste à poser par définition que l'écriture :

$$\lceil \text{l'application } E \rightarrow F, x \mapsto y \rceil$$

où y est une expression (contenant en général x, plus éventuellement d'autres lettres jouant le rôle de paramètres) désignant un élément de F, a la signification suivante :

$$\lceil \text{l'application de E dans F qui à chaque élément x de E associe l'élément } y \rceil.$$

Lorsque E et F sont clairement fixés par le contexte, on peut se borner à écrire :

$$\lceil \text{l'application } x \mapsto y \rceil$$

ou simplement : $\lceil x \mapsto y \rceil$

Ainsi que D. LACOMBE le remarque dans son cours, avec cette convention, $\lceil x \mapsto y \rceil$ apparaît comme un syntagme nominal et se manipule comme tel, par exemple dans la phrase :

\lceil L'application $x \mapsto \sin(x^2)$ est continue puisqu'elle est la composée des applications $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sin x$ \rceil .

Voyons quelques exemples de cette mutification fonctionnelle.

(2)14. \lceil On appelle application identique dans un ensemble A, l'application dans A qui, à chaque élément a de A, associe l'élément a lui-même. \rceil
(Monge - 4ème - 1979 - P. 7)

(2)15. \lceil Soit (G, .) un groupe, e l'élément neutre de la loi notée. .
1°) a étant un élément de G, on désigne par f_a l'application de G dans G telle que, x étant un élément quelconque de G, $f_a(x) = a x a^{-1}$.
Montrer que f_a est un isomorphisme de (G, .) sur (G, .) \rceil .
(Le problème de mathématique - Term CDE - Tome 2 - Collection Durrande - 1974 P. 18)

Dans une mutification fonctionnelle, quand on trouve le mot \lceil chaque \rceil , comme dans l'exemple (2)14 ci-dessus, on n'a aucune tentation de mettre des Marqueurs : en effet, \lceil chaque \rceil peut être considéré comme l'expression explicite (en langage naturel) de la mutification $\dots \mapsto \dots$. Par contre, avec simplement \lceil un \rceil on peut être

tenté de renforcer la mutification par un Marqueur tel que [quelconque] comme le montre l'exemple (2)15.

Bien entendu, comme dans le cas de toutes les mutifications exprimées par un symbole, on n'utilise pas de Marqueur avec le signe \mapsto .

On écrit :

[la fonction $x \mapsto x^3$ est impaire].

Mais on ne trouvera pas :

[la fonction x quelconque $\mapsto x^3$ est impaire].

2.3. : Mutification différée.

Cette notion a déjà été définie en 2.2.

2.3.1. : Mutification différée et présentation.

Une phrase contenant une mutification différée doit nécessairement indiquer les variables, c'est-à-dire en général les lettres qui seront ultérieurement mutifiées. Or, dans la majorité des cas, ces lettres n'ont pas fait l'objet d'une présentation (cf. 2.1.) antérieure ; autrement dit, le lecteur n'est pas supposé savoir quelles sortes d'objets mathématiques sont représentés par ces lettres ; cette indication devra par conséquent être fournie à l'intérieur de la phrase considérée. On voit donc qu'une mutification différée s'accompagne presque toujours d'une présentation de variables, le tout formant un bloc que nous appellerons présentation-mutification différée.

Le cas le plus fréquent est celui de la présentation-quantification universelle différée notée PUD dans ce travail.

Afin de mieux voir ce qui se passe dans le cas d'une mutification différée, considérons l'exemple (1)9 déjà vu auparavant.

(1)9. Propriété : Soient a et b deux réels quelconques.

Pour tout entier impair n, supérieur ou égal à 3, on a :
 $a^n + b^n = (a + b) (a^{n-1} - a^{n-2} b + \dots - a b^{n-2} + b^{n-1})$.

(Monge - Term D - 1977 - P. 26)

Dans la première phrase, il n'est pas possible de \forall -quantifier explicitement les lettres [a] et [b] ; cela n'aurait aucun sens de le faire, puisqu'une \forall -quantification explicite n'est possible que dans un énoncé mathématique complet.

En fait la première phrase :

[Soient a et b deux réels quelconques] indique que :

- d'une part, les lettres [a] et [b] désigneront des nombres réels (c'est la partie présentation),
- d'autre part, ces lettres devront être considérées comme \forall -quantifiées dans la seconde phrase (c'est la partie mutification différée).

Pour obtenir en une seule phrase un résultat clair et complet, on devrait écrire :

[Pour tous réels a et b, pour tout entier impair n supérieur ou égal à 3, on a :
 $a^n + b^n = (a + b) (a^{n-1} - a^{n-2} b + \dots - a b^{n-2} + b^{n-1})$].

Il n'y a aucune formalisation possible de la première phrase seule ; elle est nécessairement épimathématique (un autre argument sera donné ci-dessous en 2.3.2.1.).

On retrouve dans cet exemple (1)9 le Marqueur [quelconques] comme renforceur de PUD.

2.3.2. : Le cas de la PUD.

Une PUD se rencontre très souvent dans un texte mathématique. Elle peut se présenter de deux façons différentes : soit occupant une phrase entière séparée (c'est ce qui se produit dans la majorité des cas), soit occupant seulement un morceau de phrase.

2.3.2.1. : PUD exprimée par une phrase entière.

La plupart de ces phrases commencent par certaines formes actives de verbes typiques dont voici la liste :

- [Soit] (qui, selon les auteurs, s'accorde en nombre ou reste invariable).
- [On désigne], [Désignons].
- [On donne], [On se donne], [Donnons-nous].
- [On considère], [Considérons].
- [Choisissons].

- [Fixons]
- [On suppose], [Supposons].
- [Prenons].

On retrouve dans cette liste les verbes d'où proviennent certains des Marqueurs, comme [donné], [fixé], [fixe], [choisi].

Pour simplifier, on désignera dans la suite ces formes actives par la lettre V (première lettre du mot "Verbe").

Notons que parmi ces V, [Soit] est celui que les auteurs utilisent le plus souvent (on le trouve d'ailleurs dans tous les manuels étudiés), tandis que les formes avec les verbes [fixer], [choisir], [prendre], et [supposer] sont beaucoup plus rares (en tout cas dans les manuels du Secondaire).

Le caractère épimathématique de ces phrases de PUD est marqué entre autres par le fait qu'il est impossible d'en prendre la négation. De façon plus précise, si on forme la négation syntaxique usuelle d'une de ces phrases (avec [ne... pas]), la phrase obtenue est dépourvue de toute signification dans un texte mathématique.

Voici quelques exemples de ces phrases de PUD commençant par V.

(2)16. [Conséquences :

Soit a, b, c des réels positifs. On peut écrire :

$$\sqrt{a b c} = \sqrt{(a b) c} = \sqrt{(a b)} \sqrt{c} = \sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{c}.$$

(C.G.G.L.R. - 3ème - 1980 - P.28)

(2)17. [Désignons par p une proposition quelconque.

Au lieu de dire :

"p est vraie".

nous dirons souvent :

"on a p", nous avons p, "on peut écrire p".

(QR - 2eCT - 1977 - P.6)

Le Marqueur [quelconque] est ici un renforceur de PUD.

(2)13. [On donne un point O de A₂ et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ($\vec{w} \notin 0$) de \mathcal{V}_2 , plan vectoriel associé au plan affine A₂. Trouver l'ensemble des points M de A₂ tels que :

$$\vec{OM} = \vec{u} - 2\vec{v} + \lambda \vec{w}, \lambda \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

(QR - 2e CT - 1977 - P. 260)

(2)18. [Choisissons une base (i, j) de \mathcal{V}_2 et considérons les vecteurs de \mathcal{V}_2 :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x \vec{i} + y \vec{j} \\ \vec{v}' &= x' \vec{i} + y' \vec{j}. \end{aligned}$$

(QR - 2e CT - 1977 - P. 184)

Dans cet exemple, il y a une PUD sur huit variables liées par des conditions: [i] et [j] doivent former une base, et les autres [v], [x], [y], [v'], [x'], [y'] sont liées par des relations d'égalité.

(2)19. [Familles de bijections φ_A de A₃ sur \mathcal{V}_3 .

Fixons un point A de A₃ ; quel que soit M, au couple (A,M) donc à M, puisque A est fixé, est associé le vecteur \vec{AM} ; nous définissons ainsi une application

$$\varphi_A : A_3 \rightarrow \mathcal{V}_3 \\ M \mapsto \vec{AM} = \vec{u}.$$

(QR - 1ère CDE - Tome 2 - 1974 - P.88)

(2)20. [On suppose a, b, c strictement positifs.

Simplifier :
$$\frac{\sqrt{a^3 b^5 c}}{\sqrt{a b^2 c}}.$$

(C.G.G.L.R. - 3ème - 1980 - P.32)

Quand plusieurs variables sont à présenter dans une seule phrase, il peut se produire les différents cas suivants :

1er cas : V peut être considéré comme "mis en facteur".

(2)21. [Soient p vecteurs x_1, \dots, x_p d'un espace vectoriel réel (E, +, .) et p réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

2ème cas : V peut être répété :

(2)22. $\boxed{\text{Soit } a \text{ un réel et soit } p \text{ un entier}}$.

3ème cas : On peut avoir des V différents, comme le montre l'exemple (2)18 ci-dessus.

Mais il y a aussi les phrases entières de PUD ne commençant pas par les V que l'on a cités précédemment. En voici quelques exemples :

(2)23. $\boxed{\text{Dans les exercices suivants } a, b, c, x, y \text{ sont des nombres réels quelconques.}}$

Calculer :

- 1) $5x + 3(a + b) - 2(y - a + c)$
- 2) $4(x - 2y + 3c) + 3(b - a) - (y + x - 2b + c)$
- 3) $-(3a - 2x + y) + 4(-2a + 3y - 5a)$.

Il s'agit dans cet exercice d'enlever les parenthèses et de simplifier les expressions. Par exemple, pour la première expression, il fallait arriver à :

$$5x + 3(a + b) - 2(y - a + c) = 5x + 5a + 3b - 2y - 2c$$

Le contenu de l'exercice montre que les lettres $[a]$, $[b]$, $[c]$, $[x]$, $[y]$, seront \forall -quantifiées implicitement dans les réponses. On a donc bien une PUD et non une Présentation simple de variables.

Voici un autre exemple :

(2)24. $\boxed{\text{Dans un quadrilatère ABCD, les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.}}$

Démontrer que :

$$d^2(A,B) + d^2(C,D) = d^2(A,D) + d^2(B,C)$$

(C.G.G.L.R. - 3ème 1980 - P.139)

Un texte comme celui-là est bien ambigu. Par la phrase de PUD, l'auteur a voulu dire : $\boxed{\text{Soit un quadrilatère ABCD tel que les droites (AC) et (BD) soient orthogonales}}$.

Or telle qu'elle est donnée ici, cette phrase de PUD peut être interprétée fausement, au moins de deux façons:

1ère interprétation : $\boxed{\text{Les diagonales d'un quadrilatère sont orthogonales}}$ (où $\boxed{\text{un}}$ suggère une \forall -quantification).

C'est à dire que l'on considère la phrase non comme une PUD, mais comme une affirmation quantifiée universellement, affirmation qui serait évidemment fausse.

2ème interprétation : $\boxed{\text{Il existe un quadrilatère dont les diagonales sont orthogonales}}$.

Cette proposition est vraie, mais ce n'est certainement pas ce que l'auteur a voulu dire.

2.3.2.2. : PUD exprimée par un membre de phrase.

On ne retrouve pas dans ce cas des formes aussi typiques. Mais on peut quand même signaler des expressions qui interviennent fréquemment pour introduire une PUD dans un membre de phrase. Ainsi on peut noter :

- l'expression $\boxed{\text{Etant donné}}$ que l'on trouve généralement en début de phrase (sur cette expression, cf. 1.2.1.1.).
- le mot $\boxed{\text{Si}}$ qui est généralement en début de phrase aussi (et qui en pareil cas n'exprime pas vraiment une implication).
- l'usage du participe présent : $\boxed{\text{étant}}$, $\boxed{\text{désignant}}$, $\boxed{\text{appartenant}}$, etc..., que l'on peut trouver tantôt en début, tantôt en milieu, tantôt en fin de phrase.
- d'autres mots comme $\boxed{\text{où}}$, $\boxed{\text{avec}}$, ...
- l'emploi d'une proposition incise entre parenthèses ou entre virgules.
- ...et d'autres encore sûrement, mais il est impossible d'en faire ici une liste exhaustive. Donnons simplement un exemple.

(2)25. $\boxed{\text{Etant donnés deux espaces vectoriels } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ on munit l'ensemble } E_1 \times E_2 \text{ de l'addition : } (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \text{ et de la multiplication externe : } \alpha (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \text{ où } x_1 \text{ et } y_1 \text{ sont des éléments quelconques de } E_1, x_2 \text{ et } y_2 \text{ des éléments quelconques de } E_2 \text{ et } \alpha \text{ un nombre réel quelconque.}}$
Démontrer que l'on définit ainsi un espace vectoriel sur \mathbb{R} , appelé espace vec-

toriel produit de E_1 et E_2 noté $E_1 \times E_2$.
 (QR - 1ère CDE - Tome 2 - 1974)

Il y a ici une PUD sur les espaces vectoriels E_1 et E_2 . Si, pour éviter tout abus de langage, on convenait de désigner respectivement par $+_1, \cdot_1$ et par $+_2, \cdot_2$ les lois d'espace vectoriel sur E_1 et E_2 , et si on convenait de noter par $+_1 \times +_2, \cdot_1 \times \cdot_2$ les lois définies sur $E_1 \times E_2$ par la première phrase du texte, alors le théorème qu'on demande de démontrer prendrait la forme :

$(E_1, +_1, \cdot_1)$ espace vectoriel, $(E_2, +_2, \cdot_2)$ espace vectoriel,
 $(E_1 \times E_2, +_1 \times +_2, \cdot_1 \times \cdot_2)$ est un espace vectoriel

2.3.2.3. : Cas d'hésitation entre une PUD et une \forall -quantification simple.

Lorsque la PUD constitue une phrase entière, avec V comme verbe principal, son caractère spécifique (et épimathématique) ne fait aucun doute. Par contre, lorsque la PUD n'occupe qu'un membre de phrase, on peut être tenté de la confondre avec une simple \forall -quantification plus ou moins implicite. La distinction est délicate, et peut parfois paraître arbitraire.

Trois critères sont utilisables (indépendamment).

a) 1er critère d'appréciation.

Si le domaine de \forall -quantification des variables introduites dans le membre de phrase considéré s'étend au-delà de la phrase entière, on pourrait considérer qu'il s'agit d'une PUD ; cela reviendrait à assimiler la mutification prolongée (cf. 2.2.) à une mutification différée, lorsqu'elle s'accompagne d'une présentation.

Exemple :

(2)26. Etant donnés deux nombres réels quelconques x et y, on a :

- $|x + y| = |x| + |y|$ si x et y sont de même signe,
 - $|x + y| = |x| - |y|$ si x et y sont de signe contraire avec $|x| \geq |y|$
 - $|x + y| = |y| - |x|$ si x et y sont de signe contraire avec $|x| < |y|$
- On en déduit que, dans chacun de ces trois cas,
 $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Vu que la \forall -quantification sur $[x]$ et $[y]$ s'étend aussi sur la deuxième phrase, le membre de phrase souligné pourrait être considéré comme une PUD.

Comme on s'en doute, ce critère est loin d'être parfait. En effet, il arrive qu'on puisse encore hésiter entre deux interprétations : celle d'une PUD dans la première phrase, et celle qui consisterait à voir dans chacune des phrases successives une \forall -quantification implicite (sur les mêmes variables, introduites dans la première phrase). Ce pourrait être le cas pour les deux exemples suivants :

(2)27. Si u et v sont des vecteurs de E, on a
 $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 u \cdot v$.

Les vecteurs u et v sont donc orthogonaux si, et seulement si, ils satisfont à la relation

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

(Bordas - 1ère CDE - 1974 - P.211)

(2)28. A tout nombre réel non nul x on peut associer le nombre réel $\frac{a}{x}$, a étant un nombre réel.

Si a = 0 alors $\frac{a}{x} = 0$. Dans toute la suite nous supposons a non nul sans le répéter.

Théorème :

L'application f de \mathbb{R}^* vers \mathbb{R}^* définie pour tout x non nul par :

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

est une bijection involutive de \mathbb{R}^* sur \mathbb{R}^*

(QR - 2e CT - 1977 - P. 101)

Remarquons que ce dernier exemple est relativement compliqué. En particulier, une condition restrictive supplémentaire est introduite dans la troisième phrase.

b) 2ème critère d'appréciation

L'usage de mots à coloration nettement épimathématique fait penser à une PUD plus qu'à une simple \forall -quantification. C'est le cas pour le mot désigner (sur ce mot, cf. 0.2.3.1). Avec ce critère, nous classifierions comme PUD la phrase suivante :

(2)29. $\boxed{A \text{ et } B \text{ désignant deux points de l'espace } E, \text{ on a } \vec{A} \vec{B} = 0 \iff A = B.}$

(Aleph₀ - 1ère CDE - 1970 - P. 126)

tandis que la phrase tout à fait analogue:

(2)30. $\boxed{A \text{ et } B \text{ étant deux points de l'espace } E, \text{ on a } \vec{A} \vec{B} = 0 \iff A = B.}$

serait considérée comme renfermant seulement une \forall -quantification (implicite) sur les lettres \boxed{A} et \boxed{B} .

c) 3ème critère d'appréciation.

La nécessité de "présenter" des variables, c'est-à-dire d'indiquer à quelle(s) catégorie(s) mathématique(s) appartiennent les objets représentés par ces lettres, provient du fait que la plupart des expressions mathématiques n'offrent aucun sens lorsque les lettres qui y figurent représentent des objets n'appartenant pas à certaines catégories déterminées.

Ainsi, dans un texte de l'Enseignement Secondaire, $\boxed{\frac{x y}{x + y}}$ n'a de sens que si \boxed{x} et \boxed{y} représentent des nombres réels (ou peut-être complexes) tels que leur somme soit non-nulle.

De même, $\boxed{X \cup Y}$ n'a de sens que si \boxed{X} et \boxed{Y} représentent des ensembles (or les manuels de l'Enseignement Secondaire ne se placent jamais dans le cadre d'une "théorie générale des ensembles" où tous les objets considérés seraient des ensembles).

En appliquant ce principe à un membre de phrase dont on se demande s'il constitue une PUD ou une simple \forall -quantification, on obtient le critère suivant : si les conditions exprimées dans ce membre de phrase sont indispensables pour que le reste de la phrase (et éventuellement les phrases suivantes) présente une signification, alors on a affaire à une présentation, et par conséquent à une PUD.

Ainsi dans l'exemple suivant :

(2)31. $\boxed{\text{THEOREME : Etant donné deux entiers relatifs } a \text{ et } b, \text{ la somme } a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{Z}, +)}$.

(GN - Term CE - 1979 - P.52)

pour que l'expression $\boxed{a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}}$ présente une signification et désigne un sous-ensemble de \mathbb{Z} , il est nécessaire que \boxed{a} et \boxed{b} représentent des éléments de \mathbb{Z} .

De même, dans l'exemple suivant

(2)32. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ définie pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^* \text{ par } f(x) = \frac{a}{x}, \text{ où } a \text{ est un nombre réel non nul, est une fonction impaire.}}$

(QR - 2ème CT - 1977 - P. 100)

l'expression $\frac{a}{x}$ n'a de sens que si \boxed{a} représente un nombre réel.

Remarquons que dans ce dernier exemple, tant pour la signification que pour la validité du théorème, la condition $\boxed{a \text{ non nul}}$ ne joue aucun rôle. Et notons aussi que l'absence totale de ponctuation dans le texte original est un peu gênante.

Par contre, dans l'exemple suivant:

(2)33. $\boxed{\text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ sont deux vecteurs quelconques non nuls de } E_2, \text{ on a l'équivalence } \vec{u}' = f(\vec{u}) \iff \|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\| \text{ et } \text{angle}(\vec{u}, \vec{u}') = \text{angle } f.}$

(Monge - Term. D - 1977 - P. 73)

on peut considérer qu'il y a seulement une \forall -quantification implicite sur $\boxed{\vec{u}}$ et $\boxed{\vec{u}'}$ (ce qui, comme on sait, est très fréquent devant une implication ou une équivalence), \forall -quantification renforcée par le Marqueur $\boxed{\text{quelconques}}$. En effet, la catégorie typographique des "lettres fléchées" a été présentée au lecteur en début de chapitre dans l'ouvrage dont ce texte est extrait (cf. ci-dessus 2.1.) et on sait par conséquent déjà que les lettres $\boxed{\vec{u}}$ et $\boxed{\vec{u}'}$ représentent des vecteurs de E_2 .

Les exemples précédents montrent que les trois critères d'appréciation fournis ci-dessus sont d'une application délicate (voire quelque peu scolastique).

2.3.2.4. : Conditions restrictives incorporées aux PUD.

Il peut arriver qu'une PUD portant sur certaines lettres comprenne uniquement l'indication du (ou des) référentiel(s) que doivent décrire les éléments variables représentés par ces lettres. Il en est ainsi dans :

(2)34. \lceil Soit a et b deux nombres réels \rceil .

Mais, comme on l'a vu dans les exemples précédents, une PUD comporte très souvent des conditions restrictives supplémentaires portant sur ces variables. C'est le cas pour :

(2)35. \lceil Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ \rceil

Nous reviendrons sur ce point en 3.3.1.

Bien entendu, les conditions restrictives considérées peuvent faire intervenir des lettres précédemment soumises à une PUD antérieure. Par exemple :

(2)36. \lceil Soit \vec{u} un vecteur non nul.

.....
Considérons maintenant deux nombres réels positifs a, b tels que $a < \|\vec{u}\| < b$.

Les domaines de \forall -quantification différée des diverses variables peuvent ainsi s'imbriquer les uns dans les autres ; on reviendra plus loin sur ce phénomène (cf. 2.3.2.6.).

2.3.2.5. : Les PUD-Singleton.

En général, dans une PUD comportant des conditions restrictives, rien n'indique a priori la cardinalité du référentiel ainsi restreint (ou référentiel net).

En particulier, il est parfaitement possible que ce référentiel net se révèle a posteriori être vide. Par exemple, une démonstration "par l'absurde" de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ peut commencer par

\lceil Soit p et q deux entiers non nuls tels que $p^2 = 2q^2$ \rceil .

Un cas spécial intéressant est celui où le référentiel net a pour cardinal 1 :

nous parlerons alors de PUD -Singleton. Dans ce cas, lorsque l'existence et l'unicité de l'élément considéré (soumis aux conditions restrictives) sont déjà connues du lecteur (soit qu'elles aient été démontrées, soit qu'elles soient considérées comme évidentes), on utilise généralement l'article défini singulier : \lceil le \rceil ou \lceil la \rceil :

(2)37. \lceil Soit x_0 la racine positive de l'équation $x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0$. \rceil

(2)38. \lceil Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $\forall x, f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 1$. \rceil .

Autrement dit, dans le discours mathématique comme dans le discours usuel, l'utilisation de l'article défini singulier comporte une présupposition d'existence et d'unicité (du moins dans l'usage qui est indiqué ici : dans la langue usuelle l'article défini singulier possède aussi un usage "générique" ; et dans la langue mathématique, il possède aussi un usage "pseudo-défini" qui sera indiqué ci-dessous en 3.3.2.1.2.).

Comme le remarque D. LACOMBE dans son cours, il y a là une différence avec l'article défini pluriel \lceil les \rceil :

- dans la langue usuelle, \lceil les \rceil comporte une présupposition d'existence (et même de pluralité) : on ne dit pas \lceil les enfants de Jean sont (tous) blonds \rceil lorsqu'on ne sait pas déjà que Jean possède plusieurs enfants ;
- par contre, dans la langue mathématique, \lceil les \rceil ne comporte aucune présupposition de ce genre : la définition de $\lceil A \subset B$ \rceil par \lceil les éléments de A appartiennent (tous) à B \rceil comprend le cas où A est vide.

C'est sans doute là l'une des sources des difficultés pédagogiques multiples concernant l'ensemble vide.

2.3.2.6. : Imbrication des champs de \forall -quantification des différentes variables.

Il est bien souvent nécessaire dans un texte mathématique d'introduire succes-

sivement plusieurs PUD de variables. Ainsi, les champs de \forall -quantification des différentes variables entrant en jeu peuvent s'imbriquer. Ce qui constitue sans doute une difficulté supplémentaire pour les élèves. Il faut distinguer les différents rôles de ces variables, voir comment elles sont reliées entre elles, reconnaître où s'arrête le champ de \forall -quantification de chacune des variables. Certaines de ces variables peuvent jouer le rôle de variables auxiliaires, et ne figureront pas dans le résultat final auquel on veut parvenir. Quel que soit pourtant le rôle des variables, qu'elles soient auxiliaires ou qu'elles interviennent dans le principal résultat, des Marqueurs peuvent s'y appliquer.

Voyons donc quelques exemples de PUD où les champs de \forall -quantification des variables s'imbriquent.

(2)39. Soit M le milieu du segment $[A, B]$ ou du bipoint (A,B). Les bipoints (A,M)

et (M,B) sont équipollents car le bipoint (A,B) et le bipoint (M,M) ont même milieu M (cf. 6. 2a).

Donc $\vec{AM} = \vec{MB}$ c'est-à-dire

$$-\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{0}$$

$$(1) \quad \boxed{\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}}$$

Considérons un point O quelconque du plan :

On a (1) si et seulement si :

$$(\vec{OA} - \vec{OM}) + (\vec{OB} - \vec{OM}) = \vec{0}$$

$$\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OM} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})}$$

(C.G.C.L.R. - 3ème - 1980 - P. 60-61)

La PUD sur le segment $[A, B]$ est valable jusqu'à la fin de l'exemple.

La PUD sur le point $[O]$ intervient pour avoir le second résultat.

Dans cet exemple, toutes les variables interviennent dans les résultats.

Si on formalisait complètement ceux-ci, on aurait :

1er résultat : $\forall A \forall B \forall M (M \text{ milieu de } (A,B) \iff \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0})$.

2ème résultat : $\forall A \forall B \forall M \forall O (M \text{ milieu de } (A,B) \iff \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}))$

Dans cet exemple, on veut démontrer la surjectivité de la fonction vectorielle de Leibniz associée aux points A_1, \dots, A_n d'un espace affine \mathcal{E} (lui-même associé à un espace vectoriel réel E) et aux réels a_1, \dots, a_n , avec la condition

$$\sum_{i=1}^n a_i \neq 0.$$

$$f : \mathcal{E} \rightarrow E$$

$$M \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \vec{MA}_i$$

(2)40- Cherchons si f est surjective.

Soit \vec{u} un vecteur quelconque de E ; cherchons s'il existe un point M de \mathcal{E} , tels que $f(M) = \vec{u}$.

Soit O un point quelconque de \mathcal{E} ; on a :

$$f(M) = \vec{u} \iff (f(O) + (\sum_{i=1}^n a_i) \vec{MO} = \vec{u}) \iff$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} (f(O) - \vec{u})$$

Il existe donc un point unique M de \mathcal{E} tel que : $f(M) = \vec{u}$; par suite f est surjective. (Monge - Term D - 1977 - P. 105)

Dans cet exemple, $[O]$ est une variable auxiliaire. Son champ de \forall -quantification s'imbrique à l'intérieur de celui de la variable $[\vec{u}]$, et s'arrête avant l'énoncé du résultat final auquel on voulait parvenir : la surjectivité de l'application $[f]$. $[O]$ ne figurera pas dans ce résultat final. Si on formalisait ce dernier on aurait

$$\forall \vec{u} \exists ! M (f(M) = \vec{u}).$$

Remarquons que l'auteur a démontré ici non seulement la surjectivité, mais aussi la bijectivité de l'application $[f]$.

Remarquons d'autre part que, dans le passage qui constitue le champ de \forall -quantification de $[O]$, la variable $[M]$ est \forall -quantifiée (et non pas \exists -quantifiée comme pourrait le laisser croire les deux phrases qui encadrent ce passage) de façon totalement implicite (on sait que c'est fréquemment le cas avec des implications (\implies))

ou avec des équivalences (\Leftrightarrow)).

Exemple :

(2)41. Soit deux axes (D, \vec{i}) et (D', \vec{i}') . Considérons deux repères (O, I) et (O', I') de D et D' tels que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{O'I'} = \vec{i}'$.

Soit A et B des points quelconques de D . Appelons p la projection du plan P sur la droite D' . Soit $O_1 = p(O)$, $I_1 = p(I)$, $A_1 = p(A)$, $B_1 = p(B)$.

La propriété de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{AB}{OI} = \frac{A_1 B_1}{O_1 I_1}$$

Supposons $A \neq B$, alors

$$\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{O_1 I_1}{OI} = \frac{O_1 I_1}{I} = \frac{O_1 I_1}{I}$$

Donc :

Théorème

Soit deux axes (D, \vec{i}) et (D', \vec{i}') . Quels que soient les points A et B , distincts, de D , de projections orthogonales respectives A_1 et B_1 sur D' , le quotient $\frac{A_1 B_1}{AB}$ ne dépend pas du choix des points A et B .

Ce quotient est appelé rapport de projection orthogonale de l'axe (D, \vec{i}) sur l'axe (D', \vec{i}') .

(C.G.G.L.R. - 3ème - 1980 - P. 125-126).

Remarque : pour être tout à fait correct, on devrait avoir respectivement après le morceau deux repères (O, I) et (O', I') de D et D' .

Cet exemple est nettement plus compliqué que les précédents, pour les raisons

suivantes :

- a) le nombre total des PUD est plus élevé ;
- b) la plupart de ces PUD sont soumises à des conditions restrictives (faisant intervenir les variables antérieurement PUD-ifiées) ;
- c) certaines de ces PUD sont des PUD-Singletons : c'est le cas pour les lettres \boxed{p} , $\boxed{O_1}$, $\boxed{I_1}$, $\boxed{A_1}$ (deux fois), $\boxed{B_1}$ (deux fois) ;
- d) le passage considéré se divise en trois parties : Démonstration (du théorème), Théorème, Définition (du "rapport de projection orthogonale").

Sur ce dernier point deux remarques s'imposent :

- α) dans l'énoncé du théorème, on "repart à zéro" pour les PUD.
- β) bien que l'énoncé littéral de la définition ne contienne pas les lettres \boxed{A} , \boxed{B} , $\boxed{A_1}$, $\boxed{B_1}$, ces variables y sont néanmoins présentes par l'intermédiaire

du démonstratif \boxed{ce} qui renvoie au quotient $\frac{\boxed{A_1 B_1}}{AB}$.

Remarque : Les imbrications de champs sont encore plus compliquées dans les textes d'enseignement supérieur ou de recherche. Mais les lecteurs de tels textes y sont probablement beaucoup plus habitués, si bien que les difficultés se surmontent plus aisément.

2.3.3. : Mutification ensembliste-différée.

On peut rencontrer des mutifications différées autres que la PUD. Considérons en effet l'exemple suivant :

- (2)42. Un triangle (A, B, C) est tel que A et B sont fixes et C décrit une droite D . Quels sont les ensembles décrits par :
- a) le milieu A' de (B, C) ,
 - b) le milieu B' de (A, C) ,
 - c) le centre de gravité G du triangle (A, B, C) .

(QR - 2ème CT - 1977 - P. 261)

Sur les variables \boxed{A} , \boxed{B} , et \boxed{D} il y a une PUD. Par contre la mutifica-

tion, différée aussi, sur $\lceil C \rceil$ n'est pas une \forall -quantification. En effet, quand on écrit les réponses aux questions demandées en langage formalisé, on voit nettement que cette mutification sur $\lceil C \rceil$ est une mutification ensembliste (et dans cet exemple en particulier, une mutification ensembliste-image, le mot clé étant $\lceil \text{décrit} \rceil$)

Ces réponses sont du type :
 $\lceil (\forall B \in \mathcal{P}) (\forall D \in \mathcal{D}) (\{ m(B,C) / C \in D \} \text{ est une droite parallèle à } D) \rceil$
 (où \mathcal{P} désigne le plan, \mathcal{D} l'ensemble des droites du plan, $m(B,C)$ le milieu des points B et C).

Il serait préférable de mettre dans la première phrase de cet exemple $\lceil D \text{ fixe} \rceil$; la présentation serait plus homogène.

2.3.4. : La mutification différée dans les exercices.

On rencontre la PUD dans tout genre de passage mathématique (démonstration, théorème, définition, exercice).

Cependant, certaines des PUD que l'on rencontre dans les textes d'exercices ont un caractère tout à fait particulier : le champ de \forall -quantification des variables correspondantes est virtuel ; il ne se trouve pas dans l'énoncé de l'exercice, mais devra se situer sur la feuille de l'élève, dans sa rédaction. Le texte de l'exercice comporte, pour ces variables, des consignes sur la façon dont l'élève aura à rédiger, et ces consignes sont assez impératives : un professeur ne trouverait pas toujours agréable que l'élève donne aux variables des noms autres que ceux qui sont fixés dans l'énoncé de l'exercice.

On a déjà vu trois exemples (cf. (2)23. (2)24. (2)25.) de PUD dans des énoncés d'exercices. En voici quelques autres.

(2)43. $\lceil \text{On considère deux plans distincts } P \text{ et } Q. \rceil$

En combien de régions l'espace est-il partagé par ces deux plans ? $\lceil \rceil$
 (Monge - 2ème CT - 1974 - P. 245)

Dans la réponse rédigée par l'élève, $\lceil P \rceil$ et $\lceil Q \rceil$ devront être considérées comme

quantifiées universellement avec la restriction $\lceil P \neq Q \rceil$.

Cette réponse est :

$\lceil P // Q \iff (P, Q) \text{ partage l'espace en trois régions.} \rceil$

$\lceil \neg(P // Q) \iff (P, Q) \text{ partage l'espace en quatre régions.} \rceil$

(2)44. $\lceil \text{Soient deux vecteurs orthogonaux } \vec{u} \text{ et } \vec{v}. \text{ Que peut-on dire de } a\vec{u} \text{ et } b\vec{v} \text{ (} a \text{ et } b \text{ réels donnés)} \rceil$

(C.G.G.L.R. - 3ème - 1980 - P.143)

Remarquons que dans cet exemple on trouve simultanément deux formes de PUD : la phrase entière séparée pour $\lceil \vec{u} \rceil$ et $\lceil \vec{v} \rceil$, et le membre de phrase entre parenthèses pour $\lceil a \rceil$ et $\lceil b \rceil$.

La réponse attendue serait, sous forme complète :

$$\lceil \forall \vec{u} \forall \vec{v} \forall a \forall b (\vec{u} \perp \vec{v} \implies a\vec{u} \perp b\vec{v}) \rceil$$

On retrouve dans cet exemple le Marqueur $\lceil \text{donnés} \rceil$ comme renforceur de \forall -quantification. Son absence n'aurait pas été gênante.

Un dernier exemple de PUD dans un exercice :

(2)45. $\lceil \text{Soit un cercle } C \text{ de centre } O \text{ et de rayon } r. \text{ On considère un diamètre } \lceil A, B \rceil. \rceil$

a) $\lceil \text{Le point } M \text{ étant un point quelconque du plan,}^* \text{ montrer que } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = OM^2 - r^2 \rceil$
 (ce nombre est la puissance de M par rapport au cercle C).

b) $\lceil \text{le nombre réel } k \text{ étant donné,}^* \text{ quel est l'ensemble des points } M \text{ tels que } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = k \text{ ?} \rceil$.

(QR - 2e CT - 1977 - P. 303)

Les variables $\lceil C \rceil$, $\lceil O \rceil$, $\lceil r \rceil$, $\lceil A \rceil$ et $\lceil B \rceil$ devront être \forall -quantifiées (avec des restrictions) dans les réponses aux questions a) et b). $\lceil M \rceil$ sera également \forall -quantifié dans la réponse à la question a), ainsi que $\lceil k \rceil$ dans la réponse à la question b).

Remarquons que la question b) de cet exemple contient une mutification ensembliste portant sur $\lceil M \rceil$. Mais cette mutification est immédiate et totalement expli-

cite ; elle n'entre donc pas dans notre présente rubrique. C'est aussi pour cette raison que, dans cet exemple, nous avons considéré la PUD sur \boxed{M} comme s'étendant seulement au a) (et à sa réponse éventuelle).

La mutification différée qui doit s'exercer dans la réponse d'un exercice n'est pas nécessairement une \forall -quantification : dans l'exemple (2)42 ci-dessus, il s'agit d'une mutification ensembliste-image.

2.4. : Allusion épimathématique à une mutification.

Il y a encore une autre place, différente de celles que l'on a vues jusqu'à présent, dans laquelle on peut trouver des Marqueurs. Elle se rencontre dans un passage de commentaire épimathématique, où l'on fait allusion à une mutification. Cette allusion peut être effectuée dans le but de rappeler une mutification antérieure, ou encore dans le but de démontrer un résultat plus fort que celui qui a déjà été obtenu. Voyons séparément ces deux cas.

2.4.1. : Rappel d'une mutification antérieure.

Exemple :

(2)46. $\boxed{\text{Le point } 0 \text{ étant un point quelconque donné, considérons l'application } \varphi_0 \text{ de } E \text{ dans } V \text{ qui à tout point } M \text{ de } E \text{ associe } \vec{v} = \varphi_0(M) = \vec{OM}. \text{ Cette application est bijective puisque, } \vec{v} \text{ étant donné dans } V, \varphi_0(M) = \vec{v} \text{ équivaut à } \vec{OM} = \vec{v} \text{ et, d'après (2), } M \text{ existe et est unique.}}$

Puisque 0 est un point quelconque de E, nous pouvons conclure donc que l'espace affine E peut être associé d'une infinité de façons à V par des bijections telles que φ_0 .

Le commentaire épimathématique que l'on a dans la dernière phrase rappelle la \forall -quantification sur la variable $\boxed{0}$ qui a été effectuée (sous forme de PUD) dans les deux premières phrases.

2.4.2. : Démonstration allusive d'un résultat plus fort.

Exemple :

(2)47. $\boxed{\text{Soit la fonction définie par :}}$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* & k(x) = x \cos \frac{1}{x} \\ & k(0) = 0. \end{cases}$$

Posons $x_0 = 0$. On a alors :

$$|k(x) - k(x_0)| = \left| x \cos \frac{1}{x} \right|$$

$$\text{Mais : } \forall x \in \mathbb{R} \quad |\cos x| \leq 1.$$

Il en résulte que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |k(x) - k(x_0)| \leq |x|.$$

Par suite :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad |x - 0| < \epsilon \implies |k(x) - k(0)| < \epsilon.$$

On en conclut que la fonction k est continue en $x_0 = 0$.

Dans cette démonstration, on a choisi $\alpha = \epsilon$; n'importe quelle valeur inférieure à ϵ convient également.

(Aleph₁ - Analyse - Term CE).

Dans cet exemple, on fait la démonstration de la continuité au point $\boxed{x_0}$ de la fonction \boxed{k} , en utilisant la définition bien connue de la continuité qui fait intervenir le $\boxed{\epsilon}$ et le $\boxed{\alpha}$:

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (\forall x \in D_k) \quad (|x - x_0| < \alpha \implies |k(x) - k(x_0)| < \epsilon)).$$

Dans le commentaire épimathématique qui fait suite à cette démonstration et qui est enclenché par le mot choisi, on a voulu montrer le résultat plus fort suivant:

$$\boxed{(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ / \alpha < \epsilon) \quad (\forall x \in D_k) \quad (|x - x_0| < \alpha \implies |k(x) - k(x_0)| < \epsilon))}$$

où on a une \forall -quantification sur $\boxed{\alpha}$, au lieu d'une \exists -quantification.

CHAPITRE 3 : ETUDE DETAILLEE DE LA STRUCTURE DES PHRASES ENTIERES DE PUD CONTENANT UN SEUL VERBE CARACTERISTIQUE SITUE AU DEBUT.

Dans le chapitre 2 nous avons effectué une analyse logique, un peu sommaire, des types de phrases où des Marqueurs sont susceptibles d'apparaître. Il serait intéressant d'effectuer une analyse linguistique détaillée de ces phrases. Faute de place et de temps, nous avons dû borner cette analyse à une seule catégorie de phrases, où nous avons déjà vu que les Marqueurs sont particulièrement fréquents : les phrases entières de PUD (cf. 2.3.2.1.) et plus spécialement celles de ces phrases qui contiennent un seul V (sur cette notation V cf. 2.3.2.1.) situé au début de la phrase.

Cette catégorie est même encore trop vaste pour une étude syntaxique complète et rigoureuse : pour analyser complètement l'ordre des places des différents composants, nous nous sommes limitée à une sous-catégorie particulière. Bien entendu, nos classifications et nos résultats s'étendraient sans grande difficulté à des cas voisins : par exemple le cas (cf. exemples (2)18 et (2)22 ci-dessus) de la forme $[P_1 \text{ et } P_2]$ où chacune des deux $[P_i]$ serait une phrase de PUD commençant par un V (qui ne serait d'ailleurs pas nécessairement le même dans les deux).

Mis à part V que l'on suppose donc se trouver en début de phrase, les autres composants des phrases qui nous intéressent peuvent être :

- le nom (à savoir une lettre) que l'on donnera à chacune des variables introduites dans la phrase de PUD; on désignera par L cette lettre (s'il n'y a qu'une seule variable) ou le système de ces lettres (s'il y en a plusieurs);
- le syntagme global indicateur du référentiel net de ces variables ("net" signifiant : compte tenu des conditions restrictives éventuelles, cf. 2.3.2.4.) ; on le notera R,
- éventuellement les Marqueurs.

Regardons de près chacun des composants V, L et R.

3.1. Etude de V.

Rappelons ici la liste de ce qu'on appelle V :

- [Soit]
- [On désigne], [Désignons]
- [On donne], [On se donne], [Donnons-nous]
- [On considère], [Considérons]
- [Choisissons]
- [Fixons]
- [Prenons]
- [On suppose], [Supposons] (sans proposition subordonnée, uniquement sous des formes comme [On suppose x réel positif]) .

Parmi ces V, [Soit] est celui qui est le plus employé. Tous les auteurs des manuels et livres consultés l'utilisent (aussi bien dans le Secondaire que dans le Supérieur).

[Soit] est aussi particulier par le fait que, selon les auteurs, il peut s'accorder en nombre ou rester invariable. En exemple, on peut citer les auteurs de la collection Monge qui l'utilisent accordé, ceux de la collection Queysanne-Revuz qui le laissent invariable. Voici deux exemples tirés de ces deux collections sus-citées.

(3)1. [Soient x et y deux nombres rationnels .]
(Monge - 4ème - 1979 - P. 115).

(3)2. [Soit les points A (x₀, y₀) et B (x₁, y₁). *]
(QR - 2è CT - 1977 - P. 251)

3.2. : Etude de L.

Comme chacun sait, on utilise la plupart du temps des lettres pour représenter ou nommer les objets mathématiques "variables". Généralement ce sont des lettres latines ou grecques que l'on trouve, et on les rencontre aussi bien en caractère majuscule

qu'en caractère minuscule. Parfois ces lettres sont en plus indicées. C'est le système constitué par les lettres qui figurent dans la phrase de PUD considérées que l'on notera L dans la suite.

Dans les phrases de PUD qui nous intéressent, L pourtant ne figure pas toujours. C'est-à-dire qu'il peut parfois arriver que les variables ne soient pas nommées (cf. 3.2.2.). Notons tout de même que ce dernier cas est relativement rare.

3.2.1. : Cas où L est présent.

3.2.1.1. : Remarque.

Comme on peut présenter, dans une phrase de PUD, autant de variables que cela est nécessaire, il est donc possible que L contienne une ou plusieurs lettres. Quand L contient plusieurs lettres, celles-ci peuvent être :

- soit "séparées" comme dans:

(3)3. \lceil Considérons trois nombres réels \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} , \rceil

- soit "groupées" comme dans:

(3)4. \lceil Soit un triangle \underline{ABC} , \rceil

ou dans:

(3)5. \lceil Soit $\underline{(a, b)}$ un couple de nombres réels \rceil

En fait, dans le cas du groupement, il faut voir, pour chacune des lettres composant ce groupement, une \forall -quantification différée, avec éventuellement des conditions restrictives liant ces lettres. Ainsi pour l'exemple (3)4 ci-dessus, il faut voir une \forall -quantification sur trois points $\lceil A \rceil$, $\lceil B \rceil$, $\lceil C \rceil$ (peut-être liés par la condition "former un véritable triangle", c'est-à-dire être non alignés).

Dans le cas où L est présent dans une phrase de PUD, il ne sert pas toujours pour autant ; autrement dit, il peut arriver que les lettres introduites dans la

PUD ne soient pas reprises dans le texte qui suit. C'est ainsi qu'il existe deux sortes de L : l'utile et l'inutile.

3.2.1.2. : L utiles.

Ces L utiles sont ceux avec lesquels on opère dans le texte qui fait suite à la phrase de PUD. Donnons ici quelques exemples où les L sont utiles.

(3)6. \lceil Soient \underline{x} et \underline{y} deux réels quelconques. Le réel $\underline{a^x}$ est strictement positif.

On a : $(\underline{a^x})^{\underline{y}} = e^{\underline{y} \text{ Log } \underline{a^x}} = e^{\underline{xy} \text{ Log } \underline{a}}$ et

$$\underline{a^{\underline{xy}}} = e^{\underline{xy} \text{ Log } \underline{a}}$$

On a donc : $\underline{a^{\underline{xy}}} = (\underline{a^x})^{\underline{y}}$

(Monge - Term D- 1977 - P.413)

Dans cet exemple, on s'est servi des lettres $\lceil x \rceil$ et $\lceil y \rceil$ pour effectuer la démonstration et énoncer le théorème, la lettre $\lceil a \rceil$ ayant fait l'objet d'une PUD antérieure comportant la condition $\lceil a > 0 \rceil$.

(3)7. \lceil Définition : Soit \underline{a} un nombre réel. On dit que \underline{a} est positif si $\underline{a} \geq 0$; on dit que \underline{a} est négatif si $\underline{a} < 0$. \rceil

Ici aussi, la lettre $\lceil a \rceil$ est utilisée dans la définition.

3.2.1.3. : L inutiles.

Ces L inutiles sont donc des L dont on ne se sert pas dans le texte qui suit la phrase de PUD ; plus exactement, ce sont des L qui n'apparaissent que dans la phrase de PUD. Ils ne sont pas du tout nécessaires. Voici quelques exemples.

(3)8. \lceil Théorème :

Soit une application affine

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b$$

Si $a = 0$, l'application affine est constante sur \mathbb{R} .

Si $a > 0$, l'application affine est croissante sur \mathbb{R} .

Si $a < 0$, l'application affine est décroissante sur \mathbb{R} .

(C.G.G.L.R. - 3ème - 1980 P. 94)

Dans cet exemple, le nom f que l'on a donné à la fonction est totalement inutile, puisqu'on ne s'en sert pas pour formuler le théorème.

On aurait très bien pu s'en passer, et on aurait évité ainsi de donner certaines habitudes (pas toujours bonnes) aux élèves, comme d'appeler automatiquement f une application.

De plus, l'article défini l dans l application affine est peu précis. On ne sait pas à quoi il renvoie. S'agit-il d'application affine en général ?

En fait on devrait avoir plutôt l'une ou l'autre des deux rédactions suivantes :

1ère rédaction : Soit l application affine

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b.$$

Si $a = 0$, cette application affine est constante sur \mathbb{R} .

Si $a > 0$, cette

2ème rédaction : Soit f application affine

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b.$$

Si $a = 0$, f est constante sur \mathbb{R} .

Si $a > 0$, f

Remarquons que, dans cet exemple (3)8, la PUD sur a et b est implicite.

Dans l'exemple (2)43 vu auparavant et que nous ré-écrivons ici :

On considère deux plans distincts P et Q . En combien de régions l'espace est-il partagé par ces deux plans?

(Monge - 2e CT - 1974 - P. 245)

a priori, il n'y a aucune nécessité à donner les noms P et Q . On pourrait très bien traiter cet exercice sans L .

Cependant, le cas des exercices est un peu différent. En général, on traite un exercice avec des L . Et imposer ces L , plutôt que d'en laisser le choix aux élèves peut faciliter la correction (cf. 2.3.4.).

3.2.2. : Cas où on n'a pas de L.

Les phrases de PUD sans L sont plutôt rares. Celles que nous avons rencontrées sont dans des énoncés d'exercices. En voici un exemple.

(3)9. Soient trois points non alignés. Quel est le nombre de droites qui passent par deux quelconques de ces points?

(Monge - 2e CT - 1974 - P. 142)

L'absence de L est souvent compensée dans la suite du texte par l'usage d'un adjectif démonstratif : dans notre exemple, cet adjectif est ces .

Remarque : C'est un exemple où on trouve le Marqueur $quelconque$ et dans lequel il semble que celui-ci aide particulièrement à la compréhension du texte (en jouant le rôle d'un indicateur de postériorité de mutification). On trouvera l'analyse détaillée d'un exemple analogue à celui-là dans le chapitre 4 (exemple (4)22).

3.3. : Etude de R.

3.3.1. : Définition de R.

Dans tout ce qui va suivre, R désignera le syntagme global qui indique le référentiel net des variables considérées.

Ainsi, dans l'exemple suivant :

(3)10. $\boxed{\text{Soit } a \text{ et } b \text{ des réels positifs tels que } a < b.}$

R est toute la partie soulignée. Le substantif qui indique le référentiel brut des variables sera aussi appelé substantif principal. Dans l'exemple sus-cité, ce substantif principal est $\boxed{\text{réels}}$.

Ce référentiel net R peut être simple (portant sur une variable) ou multiple (portant sur plusieurs variables).

Ce syntagme R est toujours nominal avec article, mais peut être parfois adjectival comme on pourra le voir par la suite.

Ainsi dans les exemples que voici :

(3)11. $\boxed{\text{Soit } a \text{ et } b \text{ des réels distincts.}}$

(3)12. $\boxed{\text{Soit } a \text{ et } b \text{ réels distincts.}}$

R est nominal dans (3)11, adjectival dans (3)12.

Dans ce cas particulier où on a le mot $\boxed{\text{réels}}$, qui est aussi bien un substantif qu'un adjectif, c'est la présence de l'article $\boxed{\text{des}}$ qui nous permet de faire la distinction.

Le syntagme R désignant le référentiel net peut se décomposer, avec parfois un certain arbitraire en :

- d'une part la donnée d'un ou plusieurs référentiels bruts (chaque référentiel brut correspondant à une des lettres composant L),
- d'autre part la donnée de conditions restrictives supplémentaires qui peuvent porter, soit sur chaque variable séparément, soit sur le système global des variables.

Dans l'énoncé de ces conditions supplémentaires, il peut y avoir reprise ou non des éléments de L.

Dans l'exemple suivant :

(3)13. $\boxed{\text{Soit } a \text{ et } b \text{ des réels tels que } a < b.}$

il y a reprise des lettres \boxed{a} et \boxed{b} , et la condition restrictive ne porte pas sur chaque variable séparément mais sur le couple (a,b).

Quand L contient plusieurs lettres et qu'il y a des conditions restrictives sans reprise de ces lettres, il y a très fréquemment emploi d'un adjectif au pluriel.

Exemples :

(3)14. $\boxed{\text{Soit } a \text{ et } b \text{ des réels positifs.}}$

(3)15. $\boxed{\text{Soit } a \text{ et } b \text{ des réels distincts.}}$

Ces exemples montrent qu'il faut distinguer (suivant D. LACOMBE) deux usages de l'adjectif pluriel :

Dans le (3)14, l'adjectif pluriel $\boxed{\text{positifs}}$ exprime un prédicat à une place, appliqué séparément à \boxed{a} et à \boxed{b} , et la phrase considérée équivaut à :

(3)14'. $\boxed{\text{Soit } a \text{ et } b \text{ des réels tels que } a \text{ est positif et } b \text{ est positif.}}$

ou

(3)14". $\boxed{\text{Soit } a \text{ un réel positif et } b \text{ un réel positif.}}$

Par contre, (3)15 n'équivaut pas à (3)15' ni à (3)15" :

(3)15'. $\boxed{\text{Soit } a \text{ et } b \text{ des réels tels que } a \text{ est distinct et } b \text{ est distinct.}}$

(3)15". $\boxed{\text{Soit } a \text{ un réel distinct et } b \text{ un réel distinct.}}$

dans ce cas, l'adjectif pluriel [distincts] exprime un prédicat à deux places appliqué globalement au couple (a,b).

Dans ce dernier cas, l'adjectif [distincts] détermine une condition restrictive et le référentiel net qu'il détermine (\mathbb{R}^2 - diagonale) n'est pas un produit direct.

Ceci nous montre que la considération uniquement syntaxique du syntagme est insuffisante pour déterminer sa structure logique.

Remarquons à ce propos que la grammaire française et les usages mathématiques permettent certaines constructions "illogiques". Ainsi la phrase [Soit a et b des réels positifs distincts.] est acceptée dans tous les textes mathématiques alors qu'elle accole deux adjectifs épithètes dont les fonctions sont fondamentalement différentes.

Remarque : Sémantiquement, ce syntagme R est presque toujours mathématique, mais il peut arriver (rarement) qu'il soit "métamathématique".

En effet, considérons l'exemple (2)17 vu auparavant :
- [Designons par p une proposition quelconque. Au lieu de dire :
" p est vraie "
nous dirons souvent :
"on a p", "nous avons p", "on peut écrire p".]
(QR - 2e CT - 1977 - P.6)

R, qui est ici [une proposition], est métamathématique, car l'auteur n'a jamais défini mathématiquement ce qu'est une proposition. Il n'a jamais parlé de " l'ensemble des propositions".

Voyons maintenant les différentes possibilités de R.

3.3.2. : R nominal.

R est dit nominal quand il y a un substantif principal indicateur du référentiel

brut des variables.

Notons que ce substantif principal peut être constitué d'un seul mot, ou d'un groupe de mots non séparables pour des raisons de sémantique mathématique ; en exemple de ce dernier cas on peut citer :

- espace vectoriel.
- groupe topologique.

Quand R est nominal, il est souvent avec article, mais peut être parfois aussi sans article. Voyons séparément ces deux cas.

3.3.2.1. : Articles.

Note : c'est uniquement par pure convention grammaticale que nous appellerons certains mots, dont on verra la liste plus bas, "article". Cette appellation est bien commode, en effet, puisque ces mots jouent exactement le même rôle qu'un article (on y trouve entre autres de vrais articles). Le terme exact pour désigner cette catégorie de mots serait plutôt "déterminant". Nous ne nous occupons ici que d'un type très particulier de déterminants ; et c'est ce type particulier que, par abus de langage, nous désignerons par le terme d'"articles".

Pour le problème qui nous intéresse, nous séparerons nos "articles" en deux classes : les "indéfinis" et les "définis".

3.3.2.1.1. : Les articles indéfinis.

Voici les différents articles indéfinis que l'on peut trouver devant le substantif principal dans une PUD:

- singulier: [un], [une], [un certain], [l'un], [l'une], ...
- pluriel: [deux], [trois], ..., [n], ..., [p], ..., [plusieurs], [certains], [des], ...

Remarquons que les articles [deux], [trois], ... ne signifient pas toujours [deux distincts], [trois distincts], ... Quand on trouve une phrase telle que

[Soit trois réels a, b, c quelconques], on peut très bien avoir trois réels égaux.

Dans la plupart des cas, ça n'a rien à voir avec le cardinal. Et ce fait peut poser des problèmes puisque dans le langage naturel usuel, [deux] signifie [deux différents], [trois] signifie [trois différents], etc...

Quant aux articles constitués dans notre convention par des lettres telles que [n], [p], ..., ils désignent généralement des entiers naturels. Leur usage est fréquent en mathématique. Ils sont particuliers en ce sens qu'ils suggèrent une double \forall -quantification (cf. (1)11). Considérons en effet l'exemple suivant :

(3)16. [Définition : Soient p vecteurs x_1, x_2, \dots, x_p d'un espace vectoriel réel (E, +, .) et p réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$. On appelle combinaison linéaire des p vecteurs x_1, x_2, \dots, x_p affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ le vecteur x de E défini par :

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p$$

(Monge - 2e CT - 1974 - P. 41 milieu de la page).

Il y a d'une part une \forall -quantification sur l'entier [p], et d'autre part une \forall -quantification sur les p-uplets de vecteurs et de scalaires. Si l'on veut formaliser ce genre d'expression, on peut s'y prendre de deux façons. La première formalisation, parfaitement rigoureuse mais lourde, est la suivante:

$$\left(\forall p \in \mathbb{N}^* \right) \left(\forall \xi \in E^p \right) \left(\forall \varphi \in \mathbb{R}^p \right) \left(x \text{ est combinaison linéaire de } \xi \text{ affecté de } \varphi \right) \iff x = \sum_{i=1}^p \text{pr}_i^p(\varphi) \cdot \text{pr}_i^p(\xi)$$

où pr_i^p désigne la ième projection du p-uplet.

La seconde formalisation est impropre mais commode :

$$\left[\forall p \in \mathbb{N}^* \forall x_1 \dots \forall x_p \forall \alpha_1 \dots \forall \alpha_p \left(x \text{ est combinaison linéaire de } x_1, \dots, x_p \text{ affecté de } \alpha_1, \dots, \alpha_p \right) \right]$$

$$\text{tés de } \alpha_1, \dots, \alpha_p \iff x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$$

Mais de toute façon, dans les deux formalisations, on voit bien apparaître la \forall -quantification sur [p] et la \forall -quantification sur les p-uplets ; c'est-à-dire qu'il y a bien une double \forall -quantification dans ce cas d'article indéfini.

Donnons quelques exemples de phrases où R est nominal avec article indéfini:

(3)17. [Soit \vec{u} un vecteur de E. L'application $\varphi_{\vec{u}}$ de \mathbb{R} dans E définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \varphi_{\vec{u}}(x) = x \vec{u}$ est une application linéaire.] (Aleph₁ - Term CE - 1975)

(3)18. [Soit a et b des réels donnés. Cherchons à résoudre dans \mathbb{R} l'équation d'inconnue x : $a + x = b$.] (QR - 2e CT - 1977 - P.24)

(3)19. [Définition : Considérons deux réels a et b pour lesquels nous avons : $a < b$. On appelle intervalle fermé d'extrémités a et b, et l'on note $[a, b]$, l'ensemble des réels x qui vérifient : $a \leq x \leq b$.] (Monge - 2e CT - 1974 - P. 26)

(3)20. [Soit F, G, H... plusieurs sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E sur \mathbb{R} . Considérons l'intersection I de tous ces sous-espaces vectoriels ; ...] (QR - 2e CT - 1977 - P. 173)

(3)21. [Considérons p vecteurs x_1, \dots, x_p d'un espace vectoriel (E, +, .) et p réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.] (Monge - 2e CT - 1974 - P. 41 - en milieu de la page quelques lignes avant la définition de l'exemple (3)16).

(3)22. [Soit x_0 l'une des racines de l'équation $f(x) = 0$.]

3.3.2.1.2. Les articles définis.

Voici les articles définis que l'on peut trouver devant le substantif dans une phrase entière de PUD:

- singulier: [le], [la], [ce], [cet], [cette], ...

- pluriel: [les], [les deux], [les trois], ..., [les n], [les p], [ces], ...

Remarque : bien entendu, [ce], [cet], [cette], [ces] sont grammaticalement des adjectifs démonstratifs. Mais nous avons signalé que notre emploi du mot "article" constituait un abus de langage. Et on verra dans quelques lignes que, pour notre problème, ces démonstratifs jouent bien le même rôle que des articles définis.

Parmi les articles définis, on doit distinguer deux cas :

1er cas : l'article vraiment défini.

2ème cas : l'article pseudo-défini.

1er cas : un article défini est dit vraiment-défini quand il indique la totalité des éléments du référentiel net. Dans le cas où l'article en question est au singulier, la phrase constitue ce que nous avons appelé une PUD-Singleton (cf. 2.3.2.5.)

Exemples :

(3)23. [Soit M le milieu du segment [A,B] ou du bipoint (A,B).]
(C.G.G.L.R. - 3ème - 1980 - P. 60)

(3)24. [Considérons un point O et la symétrie centrale s de centre O].
(Monge - 4ème - 1979 - P. 230)

(3)25. [Soit x_0 la racine positive de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$.]

Dans l'exemple suivant, [les] a une valeur de vraiment-défini :

(3)26. [Soit x_1, x_2, x_3 les racines de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.]

[Les deux], [les trois], ..., ont une valeur de vraiment-défini quand, dans la phrase considérée, [les] a une valeur de vraiment-défini.

(3)27. [Soit x_1, x_2, x_3 les trois racines de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.]

[ce], [cet], [cette], [ces] sont toujours des vraiment-définis.

(3)28. [L'équation $x^2 - x - 2 = 0$ admet deux racines réelles. Soit x_1 et x_2 ces racines.]

On pourrait aussi bien écrire :

(3)28'. [Soit x_1 et x_2 les deux racines de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$.]

La différence entre les exemples (3)28 et (3)28' est que la première phrase de (3)28 exprime explicitement ce qui, dans (3)28', est à l'état de présupposition (cf. 2.3.2.5.) . Comme pour l'article vraiment-défini au singulier (qui correspond au cas $n = 1$) l'article vraiment-défini [les n] implique la présupposition d'une cardinalité égale à n.

2ème cas : un article défini est dit pseudo-défini quand il a en fait la valeur d'un article indéfini, c'est-à-dire peut à la même place être remplacé par un article indéfini sans changer le sens de la phrase.

Les articles définis qui peuvent être des pseudo-définis sont [le], [la], [les], [les deux], [les trois], ...

Exemples:

(3)29. [Soit les propositions p, q, r. La proposition (p et q) est vraie uniquement si p et q sont toutes les deux vraies. La proposition [(p et q) et r] est vraie uniquement si (p et q) est vraie et si r est vraie, donc, uniquement si p, q, r sont vraies simultanément.]

(QR - 2e CT - 1977 - P.8)

On pourrait très bien remplacer [les] ici par [trois], par exemple, ou par [des] Le sens de la phrase n'en serait nullement changé.

Revoyons l'exemple (2)13 que voici :

On donne un point O de A_2 et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ($\vec{w} \neq \vec{0}$) de \mathcal{V}_2 , plan vectoriel associé au plan affine A_2 . Trouver l'ensemble des points M de A_2 tels que : $\vec{OM} = \vec{u} - 2\vec{v} + \lambda\vec{w}$, λ décrivant \mathbb{R} .

(QR - 2e CT - 1977 - P. 260)

Dans cet exemple, on peut noter l'usage dans une même phrase de PUD de l'article indéfini [un] (pour le point [O]) et de l'article défini (ou plus exactement pseudo-défini) [les] pour exprimer en fait exactement la même idée.

Ceci me paraît d'un très mauvais style car, comme on connaît les deux valeurs que peut prendre l'article [les] (à savoir vraiment-défini et pseudo-défini), de telles phrases sont susceptibles de troubler le lecteur (notamment l'élève). Il me semble plus simple, et surtout plus naturel, dans ce cas, d'utiliser l'article indéfini [trois] à la place de [les]. Aucun risque d'ambiguïté ne serait alors possible. Ici, l'usage de [les] avec [un] peut masquer la quantification universelle différée qui porte sur [u], [v] et [w].

Pourtant un tel style est utilisé assez fréquemment dans les manuels du Secondaire.

3.3.2.1.3. : Ordre des places des différents composants dans le cas de R nominal avec article.

Les composants L et R de la phrase de PUD (le composant V se trouvant toujours en début de phrase) sont en général soumis à des contraintes de place. Ces contraintes peuvent dépendre soit du V, soit de l'article quand R est nominal avec article.

Etudions donc les différentes possibilités.

3.3.2.1.3.a) Avec le V [Soit] :

a-1) avec article indéfini.

On peut avoir l'ordre VRL :

(3)30. [Soit un nombre réel x.]
ou l'ordre VLR :

(3)31. [Soit x un nombre réel.]

(3)32. [Soit x_0 une racine de l'équation $f(x) = 0$.]

Dans certains cas où le syntagme qui donne R est long, on ne peut plus avoir l'ordre VRL. La phrase : [Soit une racine de l'équation $f(x) = 0$, x_0 .] est impossible sans la virgule, et pratiquement difficile avec la virgule. Ce que l'on peut faire alors, c'est de mettre L à l'intérieur de R, après le substantif principal. C'est-à-dire pour la phrase ci-dessus :

(3)33. [Soit une racine x_0 de l'équation $f(x) = 0$.]

Cet ordre sera noté $V R_L$ (le L en indice signifie que L est à l'intérieur de R, après le substantif principal).

a-2) avec article pseudo-défini.

On n'a pas dans ce cas l'ordre VLR. On ne pourrait pas écrire : [Soit x le nombre réel.]

Car cela supposerait qu'il n'existe qu'un seul nombre réel.

On a nécessairement l'ordre VRL :

(3)34. [Soit le nombre réel x.]
ou l'ordre VR_L :

(3)35. [Soit la racine x_0 de l'équation $f(x) = 0$.]

Dans cet exemple (3)35 on n'a pas besoin de supposer l'unicité, ni même l'exis-

tence de la racine. L'exemple (3)35 signifie la même chose que l'exemple (3)32 ci-dessus.

a-3) avec article vraiment-défini.

Dans ce cas, L doit se trouver avant R. On doit avoir l'ordre VLR.

(3)36. [Soit M le milieu de (A,B).]

(3)37. [Soit x_0 la racine de l'équation $f(x) = 0$.]

Dans l'exemple (3)37, l'existence et l'unicité de la racine sont présumées.

3.3.2.1.3. - b) Avec les V [Considérons], [On considère], [Prenons]:

b-1) avec article indéfini :

Avec ces V, on a VRL, ou VR_L , et jamais VLR. En effet, on écrit :

(3)38. [Considérons un nombre réel x.]

(3)39. [Prenons une racine x_0 de l'équation $f(x) = 0$.]

Mais on n'écrirait pas :

[Considérons x un nombre réel]

[Prenons x_0 une racine de l'équation $f(x) = 0$.]

On pourrait certes écrire :

[Prenons pour x_0 une racine de l'équation $f(x) = 0$.]

Mais alors il ne s'agirait plus d'une PUD (mais d'une condition supplémentaire imposée à une variable x_0 qui aurait déjà fait l'objet d'une PUD antérieure).

b-2) avec article défini :

Dans le cas d'un article pseudo-défini et aussi d'un article vraiment-défini,

on a pareillement les ordres VRL ou VR_L , et jamais VLR (pour la même raison qu'au paragraphe b-1) ci-dessus).

Dans le cas de ces V avec article défini, seul le contexte indique que l'article est pseudo-défini ou vraiment défini. Un auteur conscient de cela devrait alors mettre un article indéfini à la place du pseudo-défini, ou alors renforcerait le pseudo-défini par un Marqueur tel que [quelconque] par exemple.

Ainsi dans l'exemple suivant :

(3)40. [Considérons la racine x_0 de l'équation $f(x) = 0$.]

Seul le contexte (à savoir la connaissance préalable éventuelle de l'existence et de l'unicité de la racine) permettra de faire la distinction pour [la] entre un pseudo-défini et un vraiment-défini.

3.3.2.1.3.-c) Avec les V venant de [Donner], [Fixer] et [Choisir]:

c-1) avec article indéfini :

Avec ces V, on a les ordres VRL ou VR_L , et jamais VLR.

On écrit :

(3)41. [Donnons-nous un nombre réel x.]

(3)42. [Fixons un point M du plan.]

(3)43. [Choisissons une base (\vec{i}, \vec{j}) .]

Mais on n'écrirait pas :

[Donnons-nous x un nombre réel.]

Tout au plus écrirait-on, avec une virgule et sans article:

(3)44. [Donnons-nous x, nombre réel supérieur à 1].

c-2) avec article pseudo-défini :

Là-aussi, on a les ordres VRL ou VR_L , et jamais VLR.

(3)45. [Donnons-nous le nombre réel x.]

(3)46. [Fixons le point M du plan.]

(3)47. [Choisissons la base (\vec{i}, \vec{j}) .]

On n'écrit pas :

[Donnons-nous x le nombre réel.]

Même avec une virgule, on n'écrit pas :

[Donnons-nous x, le nombre réel.]

cela supposerait qu'il n'existe qu'un seul nombre réel.

c-3) avec article vraiment-défini.

Avec ces V, on ne peut pas trouver un article vraiment-défini. En effet, puisque l'on considère, dans le cas du vraiment-défini la totalité des éléments d'un référentiel, ces objets sont déjà, par nature, "donnés" et "fixés". On ne peut ni se les "donner", ni se les "fixer", ni les "choisir". Ainsi, quand on rencontre un article-défini avec ces V, on est sûr que c'est un pseudo-défini.

3.3.2.1.3.-d) Avec les V [On désigne], [Désignons] :

d-1) avec article indéfini :

On n'a pas l'ordre VR_L avec ces V. En effet, à cause de la préposition [par] qui accompagne toujours le verbe [désigner], on ne peut pas couper R pour y introduire L. On n'écrit pas :

[Désignons une racine par x_0 de l'équation $f(x) = 0$.]

Ce que l'on peut avoir ici, ce sont les ordres VLR ou VRL.

(3)48. [Désignons par x un nombre réel.] (VLR)

Pour une PUD, avec l'ordre VRL, on n'écrit sans doute pas :

[Désignons un nombre réel par x.]

ce qui a l'air d'une présentation simple.

Mais on peut, semble-t-il, écrire :

(3)49. [Désignons l'une de ces racines par x_0 .] (VRL)

d-2) avec article pseudo-défini.

Avec ces V, il n'y a jamais d'article pseudo-défini. On n'écrit pas par exemple dans une phrase de PUD :

[Désignons par x le nombre réel.]

d-3) avec article vraiment défini.

On a les ordres VLR et VRL.

(3)50. [Désignons par M le milieu de $[A, B]$.] (VLR)

(3)51. [Désignons cette racine par x_0 .] (VRL)

(3)52. [Désignons par x_0 la racine de l'équation $f(x) = 0$.] (VLR)

3.3.3.1.3. e) Avec les V [Supposons], [On suppose.]

Dans une PUD, il semble que ces verbes s'emploient le plus souvent sans article.

Cependant, il semble que l'on peut écrire pour une PUD :

(3)53. [Supposons donnée une fonction f holomorphe.]

(usage fréquent dans le supérieur)

où comme on peut le constater R est nominal avec article.

Mais on n'écrit pas :

Supposons une fonction f holomorphe donnée.

Autrement dit, quand on a la suite de mots :

Supposons suivi d'un syntagme adjectival (en particulier donné) suivi d'un syntagme nominal, alors ce syntagme adjectival joue le rôle grammatical d'un attribut du syntagme nominal et non pas d'un épithète. Comme en français usuel, dans :

Supposons Pierre recalé, recalé s'interprète comme attribut et cette phrase est équivalente à :

Supposons que Pierre est recalé.

Dans le cas où on peut rouver R nominal avec article, cet article peut être indéfini ou défini.

e-1) avec article indéfini.

On a les ordres VRL (exemple (3)54 ci-dessous), VR_L (exemple (3)53 ci-dessus).

(3)54. Supposons donnée une fonction holomorphe f.

On n'a pas l'ordre VLR. On n'écrit pas :

Supposons donnée f une fonction holomorphe.

(du moins sans virgule après f).

e-2) avec article pseudo-défini.

On a l'ordre VRL.

(3)55. Supposons donnée la fonction holomorphe f.

L'ordre VR_L est plutôt gênant ; on n'écrit pas :

Supposons donnée la fonction f holomorphe.

De même on n'a pas l'ordre VLR. On n'écrit pas :

Supposons donnée f la fonction holomorphe.

e-3) avec article vraiment-défini.

Il nous semble que ce cas ne se présente jamais. On n'écrit :

ni Supposons M le milieu de A, B. (VLR)

ni Supposons le milieu M de A, B. (VR_L)

ni Supposons le milieu de A, B M. (VRL)

Par contre, on peut bien entendu avoir

Supposons que M soit le milieu de A, B.

Mais dans ce cas, M a été antérieurement défini, c'est-à-dire a déjà fait l'objet d'une PUD).

3.3.2.1.4. : Remarques sur les contraintes dans le cas de R nominal avec article.

a) Comme on l'a vu séparément pour chaque verbe, lorsqu'on a un article pseudo-défini, L est toujours soumis à la contrainte de se trouver après le substantif principal. C'est-à-dire que l'on n'a jamais l'ordre VLR.

b) Avec les articles indéfinis et pseudo-définis, on peut avoir des Marqueurs dans les phrases de PUD.

Mais, bien évidemment, ces Marqueurs (qui sont, rappelons-le, des marqueurs de variance) n'ont plus leur place quand on se trouve avec un article vraiment-défini : dans ce cas en effet il n'y a aucune possibilité de variance. On ne peut pas écrire :

Soit M le milieu quelconque de AB.

ni Soient x₁, x₂, x₃ les trois racines quelconques de l'équation x³ - 2x² - x + 2 = 0.

Bien entendu, on peut écrire

Soit x₀ l'une quelconque des trois racines de l'équation x³ - 2x² - x + 2 = 0.

où des est vraiment-défini (contraction de de les), mais dans ce cas le Marqueur quelconque est lié à l'article indéfini l'une.

3.3.2.2. : R nominal sans article.

Dans ce cas, il y a également une contrainte de place. L est avant le substantif principal. On a donc l'ordre : VLR.

Donnons quelques exemples de ces phrases de PUD où R est nominal sans article.

(3)56. Soit E espace vectoriel sur \mathbb{R} . Rien ne nous empêche de prendre pour E l'ensemble \mathbb{R} lui-même.
(QR - 2e CT - 1977 - P. 163)

(3)57. Soit a et b éléments de \mathbb{R} . Montrons que l'on a :
opp $(a - b) = b - a$.
(Monge - 4ème - 1979)

3.3.3. : R adjectival.

C'est donc le cas où dans le syntagme qui donne le référentiel net des variables, il n'y a pas de substantif principal indicateur du référentiel brut, et où par conséquent R est réduit à un adjectif ou, plus généralement, à un syntagme adjectival.

Dans ce cas, on n'a qu'un seul ordre possible : VLR.

Voyons quelques exemples.

(3)58. Soit θ réel. Des relations $e(\theta) = e(\theta + 0)$ et $e(\theta + 0) = e(\theta) \circ e(0)$, on déduit
 $e(\theta) = e(\theta) \circ e(0)$.
(Mathématiques - 1ère CDE - Bordas - 1974 - P. 326)

Remarque : cet exemple montre bien que, du fait que certains adjectifs, comme réel peuvent aussi être utilisés comme substantifs, il peut arriver qu'on hésite entre le cas R nominal sans article et le cas R adjectival.

C'est dans cette catégorie que l'on trouvera souvent les phrases de PUD com-

mençant par les V Supposons ou On suppose. En effet, comme on l'a indiqué auparavant (cf. 3.3.2.1.3.e), ces verbes s'emploient plutôt sans article.

On écrit :

(3)59. Supposons x réel.

Cette phrase n'a de sens que dans deux cas. Ou bien ce n'est pas une PUD mais, c'est une condition supplémentaire imposée à un $\lceil x \rceil$ qui a été déjà présenté, par exemple comme un nombre complexe ; ou bien c'est une PUD, mais dans un contexte où en l'absence d'indication, $\lceil x \rceil$ serait considéré comme un nombre complexe.

Revoyons l'exemple (2)20 que l'on a vu dans les paragraphes précédents.
On suppose a, b, c, strictement positifs.

Simplifier :
$$\frac{\sqrt{a^3 b^5 c}}{\sqrt{a b c}}$$

(C.G.G.L.R. - 3ème - 1980 - P. 32)

C'est une PUD dans un contexte où en l'absence d'indication, $\lceil a \rceil$, $\lceil b \rceil$ et $\lceil c \rceil$ seraient des réels "quelconques". Mais on n'écrirait pas dans ce même contexte : On suppose a, b, c réels.

Autrement dit, il semble que dans la phrase de l'exemple (2)20, la partie essentielle c'est la restriction.

Le syntagme adjectival pour cet exemple (2)20 est composé d'un adjectif et d'un adverbe.

Dans les exemples (3)59 et (2)20 ci-dessus, les adjectifs employés indiquent que les référentiels sont respectivement \mathbb{R} et \mathbb{R}_+^* .

(3)60. Soit x et y appartenant à \mathbb{Z} . Montrons que $x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Dans cet exemple, le syntagme adjectival est constitué par un participe présent accompagné d'un complément.

(3)61. $\boxed{\text{Soit } x \text{ tel que } 2 < x < 3.}$

Ici le syntagme adjectival est constitué par $\boxed{\text{tel que}}$ suivi d'une proposition.

(3)62. $\boxed{\text{Soit } x \in A_1 \cup A_2. \text{ Démontrer que } f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2).}$
(Vissio- 1ère CDE - 1970)

(3)63. $\boxed{\text{Plus précisément, donnons-nous } \alpha > 0 \text{ quelconque. Cherchons } x > 0 \text{ tel que...}}$
(QR - 2e CT - 1977 - P. 104)

Dans les exemples (3)62 et (3)63, il y a une contraction adjectivante.

Dans l'exemple (3)62, $\boxed{\text{Soit } x \in A_1 \cup A_2}$ est une contraction de $\boxed{\text{Soit } x \text{ tel que } x \text{ appartient à } A_1 \cup A_2}$. Le symbole $\boxed{\in}$ qui se lit normalement $\boxed{\text{appartient à}}$, devient $\boxed{\text{appartenant à}}$ dans la phrase considérée, autrement dit devient un participe présent, c'est-à-dire un cas particulier d'adjectif.

Dans l'exemple (3)63 aussi, on a une contraction adjectivante. En effet, le symbole $\boxed{> 0}$ qui se lit normalement $\boxed{\text{est positif}}$ devient adjectif par suppression de la copule $\boxed{\text{est}}$ quand il se lit $\boxed{\text{positif}}$ comme dans $\boxed{\text{donnons-nous } \alpha > 0}$.

Dans l'exemple (3)61, il y a une contraction puisque $\boxed{2 < x < 3}$ équivaut à $\boxed{2 < x \text{ et } x < 3}$. Mais cette contraction n'est pas adjectivante, puisque l'expression $\boxed{2 < x < 3}$ se lit normalement $\boxed{x \text{ est compris entre } 2 \text{ et } 3}$. Il n'y a donc pas dans ce cas suppression de la copule $\boxed{\text{est}}$, mais il y a formation d'un syntagme adjectival grâce aux mots $\boxed{\text{tel que}}$ (suivis, comme il est normal dans cet emploi, d'une proposition complète comportant un verbe sous forme active).

3.3.4. : Cas où R est absent.

Il arrive parfois dans une phrase de PUD que le syntagme donnant le référentiel soit inexistant.

En voici un exemple :

(3)64. $\boxed{\text{On donne } \vec{a} \text{ et } \vec{b}. \text{ Résoudre l'équation d'inconnue } \vec{x} :}$
 $2\vec{x} - (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{x}.$
(C.G.G.L.R. - 3ème - 1980 - P. 62)

Il faut tout de même avouer que dans le cas où R est absent, il n'est pas toujours facile pour les élèves de deviner le référentiel. Dans l'exemple ci-dessus, la tâche est relativement facile car la catégorie typographique de $\boxed{\vec{a}}$ et $\boxed{\vec{b}}$ indique que l'on a affaire à des vecteurs. Mais en est-il toujours ainsi? En tout cas, il me semble qu'une présentation simple par catégorie typographique est nécessaire au préalable si on veut ensuite écrire de telles phrases de PUD.

Fort heureusement, ce cas de R absent est plutôt rare.

CHAPITRE 4 : ILLUSTRATIONS SUPPLEMENTAIRES.

Dans ce chapitre on trouvera des exemples réels, tous avec des Marqueurs, illustrant les différents rôles de ces derniers, à savoir :

- renforceur/indicateur de mutification.
- renforceur/indicateur de l'ordre de mutification.
- annulateur de restriction.

Les Marqueurs considérés joueront ces rôles aux côtés de variables dont la place et la fonction ont été recensés dans le chapitre 2.

Dans cette partie, on ne trouvera pas de classification des exemples, car, comme on pourra le constater, cela ne serait pas toujours possible. En effet le rôle d'un même Marqueur dans une phrase peut être unique ou multiple, et parfois même difficile à distinguer.

Par ailleurs, dans beaucoup de ces exemples, plusieurs Marqueurs figurent à la fois avec des rôles différents.

Nous commencerons par donner des illustrations avec un seul Marqueur, puis ensuite avec deux ou plusieurs.

Rappelons que tous ces exemples sont tirés de manuels du Secondaire, sauf l'exemple (4)15 que nous avons pris dans un livre du Supérieur.

Rappelons de même la nuance entre un rôle renforceur et un rôle indicateur. Un Marqueur est renforceur si on ne ressent aucune gêne quand on le supprime. Sinon il est indicateur. Parmi les premiers exemples que nous citerons ici, on pourra distinguer nettement cette nuance.

En fin de chapitre, on trouvera une étude à part du cas particulier des équations.

4.1. : Exemples illustrant les différents rôles des Marqueurs.

(4)1. \lceil Le produit λf du réel quelconque λ par un élément quelconque f de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est défini par :

$$\forall x \in A \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \rceil$$

(Monge - Term CE - 1976)

On pourrait très bien dans cet exemple supprimer les \lceil quelconque \rceil sans que cela gêne la lecture. Ce sont ici des renforceurs de la \forall -quantification implicite sur $\lceil \lambda \rceil$ et $\lceil f \rceil$.

Remarquons l'usage tantôt de l'article pseudo-défini \lceil du \rceil (mis pour \lceil de \rceil) et tantôt de l'article indéfini \lceil un \rceil pour exprimer la même idée. En fait on pourrait aussi bien écrire :

\lceil Le produit λf d'un réel quelconque λ par un élément quelconque f de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est défini par \rceil

Et cela aurait été même mieux à mon avis, puisqu'on éviterait une gêne éventuelle provenant de l'emploi de deux articles de natures différentes dans une même phrase pour dire exactement la même chose.

(4)2. \lceil Soit α, β deux réels quelconques et x, y deux éléments quelconques de I . Les éléments x, y appartiennent donc à chacun des sous-espaces F, G, H, \dots ; il en est de même de $\alpha x + \beta y$.^{*} Donc nous avons :

$$\lceil (\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) (\forall (x, y) \in I^2) \alpha x + \beta y \in I. \rceil$$

(QR - 2è CT - 1977 - P. 173)

(Dans cet exemple, I désigne l'intersection de plusieurs sous-espaces vectoriels F, G, H, \dots , d'un même espace vectoriel E).

Les Marqueurs \lceil quelconques \rceil sont ici des renforceurs de la PUD qui constitue la première phrase. Le champ de cette PUD s'arrête au $\lceil \cdot \cdot \cdot \rceil$ (qui dans le texte original est en fait une virgule), puisqu'on repart à zéro pour les quantifications universelles.

(4)3. - [Soit $x = \alpha a + \beta b$, $x' = \alpha' a + \beta' b$ des éléments quelconques de F . Nous avons quels que soient x, x' de F et λ de \mathbb{R} :

$$x + x' = (\alpha a + \beta b) + (\alpha' a + \beta' b) = (\alpha + \alpha') a + (\beta + \beta') b \in F$$

$$\lambda x = \lambda(\alpha a + \beta b) = (\lambda \alpha) a + (\lambda \beta) b \in F. *$$

Donc F est stable par combinaisons linéaires.]

(QR - 2è CT - 1977 - P. 171)

Il y a ici quelque chose de bizarre, d'insolite : la reprise de la \forall -quantification des variables $[x]$ et $[x']$. La PUD constituée par la première phrase, et renforcée par le Marqueur [quelconque], est annulée par cette reprise avant même d'avoir servi. C'est un bien mauvais style à mon avis.

Remarquons aussi que les lettres $[\alpha], [\beta], [\alpha'], [\beta']$ sont soumises à une PUD implicite (avec les conditions restrictives imposées par les égalités).

(4)4. - [Quels que soient α de \mathbb{R} et x de E on a donc $\alpha x = \alpha 0_E = 0_E$. Réciproquement soit α de \mathbb{R} et x de E tels que $\alpha x = 0_E$. Si $\alpha = 0$, x peut être un élément quelconque de E , comme nous venons de le voir...]

(QR - 1ère CDE - T2 - 1974 - P. 14)

Dans le cas présent, il est vraiment gênant d'enlever [quelconque]. En effet, ce Marqueur ici n'est pas seul. Il y a le verbe [peut], [pouvoir] est très fréquemment employé avec une nuance existentielle. Comme c'est le cas par exemple dans des phrases que l'on rencontre souvent, telles que $[x \text{ peut se mettre sous la forme...}]$, $[on \text{ peut trouver } \eta \text{ tel que ...}]$, etc... Or, dans le cas ci-dessus, [pouvoir] est universel. On ne peut pas remplacer ici [peut être] par [est], car le mot [peut] sous-entend [pour satisfaire à l'équation ci-dessus]; [quelconque] et [peut] sont ici inséparables. On se trouve là devant un cas, pas très fréquent il faut le reconnaître, où le Marqueur [quelconque] est vraiment indispensable pour insister sur une \forall -quantification.

Si on veut faire apparaître clairement cette \forall -quantification, il suffit d'écrire la phrase en langage formalisé :

$$\alpha = 0 \Rightarrow (\forall x) (\alpha x = 0_E).$$

(4)5. - [I. Congruences modulo α .

k désigne un entier relatif et α un réel strictement positif donné.

1. Définition.

Considérons la relation \mathcal{R} définie dans l'ensemble des réels :

$$a \mathcal{R} a' \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a - a' = k\alpha.$$

Cette relation est réflexive, symétrique, transitive.

La relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence définie dans \mathbb{R} . Pour exprimer que :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = k\alpha$$

on note : $a \equiv b \pmod{\alpha}$

on lit " a est congru à b , modulo α ".]

(E Riche - 1ère AB - 1972 - P.285)

Comme on peut le constater, dans la phrase [k désigne un entier relatif et α un réel strictement positif donné], il y a une Présentation simple de [k] (qui sera ensuite quantifié existentiellement de façon explicite) et par contre une PUD de [α]. Ce qui différencie la présentation des deux variables est la présence du Marqueur [donné]. On peut en déduire que ce Marqueur est ici un indicateur de \forall -quantification différée.

En effet, avec cette forme de présentation pour [k] et [α], on s'attendrait aussi à une PUD pour [k]; c'est ce qui se passe presque toujours. Par conséquent, si on n'avait pas [donné], on serait conduit à une même interprétation pour les deux variables.

Ainsi [donné] a ici un rôle bien net : indicateur de PUD. Mais est-ce que les élèves le comprennent? A mon avis, il aurait été mieux de séparer les présentations des deux variables. La lecture en aurait été sûrement facilitée.

(4)6. - [Montrer que l'ensemble des triplets $(x, y, 2x + 5y)$ où x et y sont des nombres réels arbitraires, est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .]

(QR - 2è CT - 1977 - P. 189)

Dans cet exemple, [arbitraires] est un renforceur de mutification ensembliste-image. La formalisation de ceci est, en effet :

$$\{ (x, y, 2x + 5y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^3)$$

(4)7. \overline{F} est l'ensemble des polynômes f définis par $f(x) = k(x^2 + 1)$, où k est un nombre réel quelconque qui décrit \mathbb{R} .
(QR - 1ère CDE - Tome 2 - 1974 - P. 17)

Dans cet exemple $\overline{\text{quelconque}}$ est un renforceur de la \exists -quantification qui intervient dans la mutification ensembliste-compréhension.

L'écriture formalisée de ce passage est :

$$\{ f / \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k(x^2 + 1) \} = \overline{F}$$

Le Marqueur $\overline{\text{quelconque}}$ s'applique à \overline{k} , mais pas à \overline{f} .

Remarquons que cette écriture formalisée pourrait être remplacée par l'écriture suivante, qui ne contient pas \overline{f} :

$$\{ x \mapsto k(x^2 + 1) / k \in \mathbb{R} \}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\overline{\text{L'ensemble des polynômes de la forme } x \mapsto k(x^2 + 1) \text{ où } k \text{ décrit } \mathbb{R}}$$

voire (par abus de langage)

$$\overline{\text{L'ensemble des polynômes de la forme } k(x^2 + 1), \text{ où } k \text{ décrit } \mathbb{R}}$$

On obtient alors une mutification ensembliste-image (on se retrouve dans le cas signalé au paragraphe 2.2.3.3.).

(4)8. $\overline{\text{Théorème}}$:

Une fonction vectorielle F n'est pas continue en un point x_0 de son ensemble de définition si et seulement si :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathcal{D} \mid |x - x_0| < \alpha \text{ et } \|F(x) - F(x_0)\| \geq \varepsilon.$$

Exemple :

Soit $A = [1, +\infty[$. Considérons la fonction F de \mathbb{R} dans l'espace vectoriel euclidien \overrightarrow{E} , définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & x \in A \implies F(x) = \vec{u} \\ & x \notin A \implies F(x) = \vec{v} \end{cases}$$

où \vec{u} et \vec{v} désignent deux vecteurs distincts de \overrightarrow{E} .

Soit $x_0 = 1$. On a alors $F(x_0) = \vec{u}$.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} étant distincts, leur distance est non nulle.

$$\text{Posons } \rho = \frac{\|\vec{u} - \vec{v}\|}{3}$$

Soit $\varepsilon = \frac{\rho}{3}$. Quel que soit le réel positif non nul α , l'intervalle $]1-\alpha, 1+\alpha[$

contient par exemple $1 - \frac{\alpha}{2}$, élément de \overline{A} , dont l'image par F est \vec{v} , et donc n'appartient pas à la boule ouverte $B(\vec{u}, \varepsilon)$.

$$\left| \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 \right| < \alpha \text{ et } \|F(1 - \frac{\alpha}{2}) - F(1)\| = \|\vec{v} - \vec{u}\| > \varepsilon.$$

Là encore, le choix de ε et celui de x sont dans une large mesure arbitraires (il suffit que :

$$\varepsilon < \|\vec{u} - \vec{v}\| \text{ et } 1 - \alpha < x < 1).$$

(Aleph₁ - Analyse - Term CE - P. 27)

Remarque: La notation $\overline{F(x)}$ est totalement illégitime puisque \overline{F} a déjà été présentée comme une application de \mathbb{R} dans \overrightarrow{E} ; si l'auteur l'avait voulu, il aurait pu noter \overline{F} cette application, ce qui aurait conduit à la notation $\overline{F}(x)$.

Dans cet exemple, le Marqueur $\overline{\text{arbitraires}}$ intervient dans un commentaire épimathématique pour suggérer un résultat plus fort (cf. 2.4.) que celui qui est demandé. Ce résultat plus fort est :

$$(\forall \varepsilon < \|\vec{u} - \vec{v}\|) (\forall \alpha > 0) (\forall x / 1 - \alpha < x < 1) (|x - x_0| < \alpha \text{ et } \|F(x) - F(x_0)\| \geq \varepsilon).$$

Les variables qualifiées d'arbitraires sont \forall -quantifiées. (Dans le résultat demandé, ces mêmes variables n'étaient que \exists -quantifiées).

Il serait difficile de supprimer le Marqueur $\overline{\text{arbitraires}}$ puisque c'est lui qui donne son sens à la phrase.

Cet exemple est analogue à celui de 2.4.2. (exemple (2)47).

On voit donc qu'à côté des rôles d'indicateur et de renforceur, un Marqueur peut jouer celui de "suggerneur".

(4)9. $\overline{\text{Théorème}}$: Soit \mathbb{R} considéré comme espace vectoriel sur lui-même.

Quel que soit le nombre réel donné a , il existe une application linéaire unique f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telle que $f(1) = a$.

(QR - 2è CT - 1977 - P. 197.)

(4)10. $\overline{\text{On sait}}$ qu'une application f de E vers F est surjective si et seulement si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E , c'est-à-dire si et seulement si, quel que soit b donné de F , l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution.

(QR - 2è CT - 1977 - P. 24)

Dans ces exemples (4)9 et (4)10, l'absence des Marqueurs $\overline{\text{donné}}$ ne gênerait

sûrement pas beaucoup. Ces Marqueurs ont ici pour rôle de renforcer l'antériorité de la \forall -quantification (portant respectivement sur $\lceil a \rceil$ et $\lceil b \rceil$ par rapport à la \exists -quantification (portant respectivement sur $\lceil f \rceil$ et $\lceil x \rceil$).

Notons que l'on retrouve dans l'exemple (4)10 une habitude, mauvaise à mon avis (bien que tout le monde l'utilise, y compris moi-même dans l'introduction de ce travail) car elle donne bien souvent de fausses idées aux élèves, celle d'appeler automatiquement $\lceil x \rceil$ l'inconnue d'une équation. Normalement, on aurait dû écrire : \lceil l'équation en x $f(x) = b$ admet au moins une solution. \rceil

ou \lceil l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution en x . \rceil

Ainsi, dans cet exemple (4)10, l'adjectif \lceil donné \rceil peut être considéré comme s'opposant virtuellement au substantif \lceil inconnue \rceil . C'est tout à fait normal puisque (cf. ci-dessous 4.2.), lorsqu'il s'agit d'équation, les objets qualifiés de "constants" ou de "donnés" ont pour unique propriété d'être quantifiés avant les objets qualifiés de "variables" ou d'"inconnus".

Il arrive quelquefois que \lceil donné \rceil dans ce rôle de renforceur d'antériorité de mutification soit encore suraccentué par d'autres expressions. Ainsi dans l'exemple qui va suivre, il sera suraccentué par l'expression \lceil à l'avance \rceil .

(4)11. \lceil On dit que f a pour limite le nombre l (ou que f tend vers l , quand $|x|$ tend vers $+\infty$ si et seulement si, quel que soit le nombre strictement positif α donné à l'avance, il est possible de trouver un nombre réel strictement positif β tel que pour tout nombre réel x on ait : $|x| > \beta \implies |f(x) - l| < \alpha$. \rceil
(QR - Term CDE - Tome 2 - 1974 - P. 26)

(4)12. \lceil Théorème : Soit B une base orthonormée et B' une base quelconque. Pour que B' soit orthonormée, il faut et il suffit que la matrice $M_{BB'}$ soit orthogonale. \rceil
(Bordas - 1ère CDE - 1974 - P. 244)

\lceil quelconque \rceil est ici un annulateur de restriction. Manifestement dans cet exemple le Marqueur \lceil quelconque \rceil s'oppose à l'adjectif \lceil orthonormée \rceil . Rappelons qu'un Marqueur annulateur de restriction est un renforceur de

l'absence de conditions particulières. Autrement dit un tel Marqueur signale au lecteur que l'on n'impose aucune condition particulière aux variables concernées (ce qui bien entendu n'empêche pas ces variables de satisfaire éventuellement les conditions imposées aux autres variables intervenant : ainsi dans notre exemple, B' peut très bien être orthonormée). Le théorème se formaliserait ainsi : $(\forall B \text{ orthonormée}) (\forall B') (B' \text{ est orthonormée} \iff M_{BB'} \text{ est orthogonale})$.

Un Marqueur annulateur de restriction n'exclut en fait aucun cas.

Cette remarque montre par ailleurs l'évolution du sens en mathématique du mot \lceil quelconque \rceil . En effet, dans le "vieux" langage mathématique, un triangle \lceil quelconque \rceil n'était (entre autres) ni isocèle (ni a fortiori équilatéral), ni rectangle.

Notons qu'un Marqueur jouant ce rôle d'annulateur de restriction n'est pas absolument indispensable, mais que sa présence peut faciliter la lecture (en empêchant de croire que certaines restrictions imposées à d'autres variables s'appliquent aussi à celles sur lesquelles porté le Marqueur considéré).

Les Marqueurs les mieux appropriés pour ce rôle sont \lceil quelconque \rceil et \lceil arbitraire \rceil .

(4)13. \lceil a et b étant deux réels quelconques : $\forall c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, a \leq b \iff ca \leq cb$. \rceil
(E. Riche) 1ère AB - 1972).

Devant un exemple comme celui-là, on ne peut s'empêcher de poser la question : pourquoi a-t-on traité différemment les variables $\lceil a \rceil$ et $\lceil b \rceil$ d'une part, et la variable $\lceil c \rceil$ d'autre part? Pourquoi n'a-t-on pas tout écrit en langage formalisé? La compréhension en aurait été certainement plus facile.

Si on voulait donner à \lceil quelconque \rceil le rôle de renforceur de \forall -quantification y avait-il besoin de le faire pour $\lceil a \rceil$ et $\lceil b \rceil$?

Mais peut être que \lceil quelconque \rceil est un annulateur de restriction (s'opposant par avance à \lceil strictement positif \rceil), auquel cas sa présence devient compréhensible.

On peut voir par cet exemple que les rôles des Marqueurs ne sont pas toujours nets. Tout comme le fait qu'un Marqueur peut avoir plusieurs rôles à la fois.

(4)14. - [Etant donnés deux vecteurs quelconques \vec{a} et \vec{b} de E' ,* nous allons montrer qu'il existe une application linéaire unique de \mathcal{V}_2 vers E' vérifiant $f(\vec{i}) = \vec{a}$ et $f(\vec{j}) = \vec{b}$.

Si f existe, pour tout $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ de \mathcal{V}_2 on a :
 $f(\vec{v}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = x f(\vec{i}) + y f(\vec{j}) = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Donc si f existe,* elle est unique lorsqu'on se donne \vec{a} et \vec{b} .
 (QR - 2e CT - 1977 - P.199)

Dans cet exemple, [quelconque] a le rôle double de renforceur de PUD et (peut être) d'annulateur de restriction (par opposition à [i] et [j] qui doivent être indépendants).

Mais l'élève appréciera-t-il cette subtilité?

On peut en outre faire deux remarques à propos de cet exemple.

Tout d'abord, on note une incorrection : en effet, on devrait trouver le nom [f] de l'application en question après le morceau de phrase [il existe une application linéaire unique] pour donner tout son sens à la phrase, et à ce qui va suivre.

Ensuite, il est bien curieux qu'à la fin de cette démonstration on reprenne [lorsqu'on se donne \vec{a} et \vec{b}], puisqu'au début on a déjà dit [Etant donnés deux vecteurs quelconques \vec{a} et \vec{b}].

(4)15. - [Puisque les normes $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|_1$ sont équivalentes dans E , on a

$$\frac{1}{\|x - a\|_1} < M \frac{1}{\|x - a\|}$$

M étant un nombre fixe.

(Calcul différentiel - Cartan- 1971 - P. 30)

Ici, [fixe] semble avoir le double rôle d'indicateur de \exists -quantification (son absence pourrait conduire à interpréter par une \forall -quantification) et de renforcer l'antériorité de cette \exists -quantification par rapport à la \forall -quantification implicite

sur [x] et [a].

Nous avons signalé, dans l'introduction de ce travail, qu'il existe des cas où deux Marqueurs différents sont synonymes. Fait qui m'avait énormément gêné du temps où j'étais élève, et qui est une des raisons d'être de cette étude. Ceci est très bien illustré par les exemples qui vont suivre. Il s'agit de passages dans deux manuels d'une même collection, pour une même classe mais édités à des années différentes, et dans lesquels on trouve les présentations suivantes pour un même paragraphe :

(4)16. - [Ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné.

Soit \vec{X} un vecteur quelconque de \mathcal{E}_2 .

Si $\vec{X} = \vec{0}$ tout vecteur de \mathcal{E}_2 est orthogonal à \vec{X}

Si $\vec{X} \neq \vec{0}$ il existe donc \vec{Y} tel que]

(QR - 2e CT - 1974 - P. 289)

(4)17. - [Ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné.

Soit \vec{v} un vecteur donné de \mathcal{E}_2 .

Si $\vec{v} = \vec{0}$, tous les vecteurs de \mathcal{E}_2 sont orthogonaux à \vec{v} .

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$,]

(QR- 2e CT - 1977- P.279)

Manifestement, [quelconque] et [donné] ici sont synonymes. Ce sont dans ces exemples des renforceurs de PUD. Notons que c'est seulement dans ce rôle de renforceur de mutification que ces deux Marqueurs peuvent être synonymes.

(4)18. - [Soit (A,B) un bipoint donné. Nous supposons $A \neq B$. Cherchons s'il existe un point C de la droite (AB) tel que $\vec{CA} = k \vec{CB}$, k étant un nombre réel donné.]

(QR - 2e CT - 1977 - P. 235)

Dans cet exemple, le deuxième Marqueur [donné] renvoie la \forall -quantification différée qui porte sur la variable [k] avant la \exists -quantification sur le point [C]. La réponse à cette question est en effet :

$$\left(\begin{array}{l} (\forall (A,B) / A \neq B) \\ (\vec{CA} = k \vec{CB}) \end{array} \right) (\forall k) \left[(k \neq 1 \iff (\exists! C) (\vec{CA} = k \vec{CB})) \right] \text{ et } (k = 1 \iff \neg (\exists C))$$

Si on supprimait [donné], d'autres interprétations seraient possibles, comme les questions :

- 1- [Est-ce que $(\forall (A,B / A \neq B)) (\exists C) (\forall k) (\overrightarrow{CA} = k \overrightarrow{CB})?$]
à laquelle la réponse serait : non.
- 2- [Est-ce que $(\forall (A,B / A \neq B)) (\exists C) (\exists k) (\overrightarrow{CA} = k \overrightarrow{CB})?$]
à laquelle la réponse serait : oui.

Mais ces interprétations ne sont pas celles que les auteurs voulaient. Le rôle de [donné] est donc ici primordial, comme indicateur d'antériorité pour une \forall -quantification.

Par ailleurs, on peut remarquer que dans cet exemple, on trouve deux fois le Marqueur [donné], avec des rôles différents. Dans la phrase [Soit (A,B) un bipoint donné], il joue le rôle de renforceur de PUD ; son absence n'aurait absolument pas gêné.

De ce point de vue, comparons les Marqueurs [donné] et [quelconque]. Ce dernier joue le rôle de renforceur de mutification par excellence. Peut-il aussi jouer le rôle d'indicateur d'ordre de mutification?

Pour le savoir, remplaçons le second [donné] dans l'exemple ci-dessus par [quelconque]. On aurait donc :
[Soit (A,B) un bipoint donné. Nous supposons $A \neq B$. Cherchons s'il existe un point C de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{CA} = k \overrightarrow{CB}$, k étant un nombre réel quelconque.]

La phrase est alors ambiguë, ou tout au moins peu claire. Nous en déduisons que le Marqueur [quelconque] ne peut pas être un indicateur d'antériorité pour une mutification.

Le problème se pose de savoir si [quelconque] peut être un indicateur ou un renforceur de postériorité. Nous reviendrons sur cette question dans l'exemple (4)19. ci-dessous.

(4)19. - [Soit une application f du plan dans lui-même telle que tout bipoint (M,N)

ait pour image un bipoint (M',N') équipollent à (M,N).

1. Soient A un point particulier d'image A' et M un point quelconque.

Que pouvez-vous dire des bipoints (A,M) et (A',M')?

Quelle égalité vectorielle pouvez-vous écrire?

Que pouvez-vous dire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$?

2. En déduire que f est une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

3. Conclusion : une application f de P dans P qui transforme tout bipoint en un bipoint équipollent est une translation.

(Mauguin - 4ème - 1979 - P. 215).

On a là un exemple avec deux Marqueurs différents, s'appliquant à deux variables différentes à qui on veut faire jouer deux rôles différents. Mais disons tout de suite que ces rôles différents ne vont pas apparaître tout de suite dès la toute première question. En effet, même dans les deux premières questions de cet exercice, [A] et [M] ont un rôle absolument identique. En effet les réponses à ces deux premières questions sont :

- $\forall A \forall M$ (les bipoints (A, M) et (A', M') sont équipollents)
- $\forall A \forall M (\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'})$.

Mais c'est à partir de la question : [Que pouvez-vous dire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$?] que l'on veut faire jouer aux deux variables des rôles différents. Plus exactement on veut faire le passage de :

$$\forall A \forall M (\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}) \text{ à } \exists A \forall M (\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'})$$

qui permettra en même temps de répondre à la question suivante : [En déduire que f est une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.]

A ce moment, [particulier] devient un indicateur d'antériorité de mutification, plus exactement fait passer la \exists -quantification de [A] avant la \forall -quantification de [M]. Sa présence devient utile. Le Marqueur [quelconque], lui, est renforceur de la \forall -quantification sur [M]. Sa présence n'est pas indispensable.

Ce passage de $\forall A \forall M (\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'})$ à $\exists A \forall M (\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'})$ est très subtil. Les élèves, surtout ceux de la classe de Quatrième, comprennent-ils?

Cet exemple nous montre que dans le cas où on a deux variables différentes sur lesquelles portent respectivement un Marqueur tel que [particulier] (qui pourrait d'ailleurs être remplacé par [donné]) et un Marqueur tel que [quelconque], il semble que ce dernier soit un indicateur de postériorité de mutification. Ce qui répondrait au problème que l'on se posait à l'issue de l'exemple (4)18 précédent.

(4)20. - [Dans un repère orthonormé on considère les points A (λ, 0) , B (0, μ), I(λ, μ) où λ et μ sont des paramètres réels liés par la relation λ + μ = ℓ, ℓ étant un nombre strictement positif donné. Ecrire l'équation de la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par I.
Montrer que Δ passe par un point fixe.]
(QR - 2e CT - 1977 - P. 308)

Si l'on n'avait que la première question (équation de la droite Δ_{λ,μ}) l'introduction de la lettre [ℓ], et par conséquent aussi la présence du Marqueur [donné], seraient parfaitement inutiles.

Pour la deuxième question, la formalisation correcte du résultat demandé est $\forall \ell \exists P (\forall \lambda, \mu / \lambda + \mu = \ell) (P \in \Delta_{\lambda, \mu})$.

On voit ainsi :
- d'abord que [donné] renforce une V-quantification et [fixe] une E-quantification,
- ensuite et surtout que ces deux Marqueurs indiquent l'antériorité des quantifications portant sur [ℓ] et [P] par rapport aux V-quantifications sur [λ] et [μ].

On peut se demander s'il y a dans le texte quoi que ce soit qui indique l'antériorité de la quantification sur [ℓ] par rapport à celle sur [P]. Autrement dit, y a-t-il un élément linguistique qui permette d'éliminer a priori la formalisation $\exists P \forall \ell (\forall \lambda, \mu / \lambda + \mu = \ell) (P \in \Delta_{\lambda, \mu})$ qui est pourtant tentante, vu la force habituelle du mot [fixe] ?
La réponse est à notre avis négative : c'est seulement le résultat du calcul qui montre que [P] dépend de [ℓ],

Tout au plus peut-on remarquer que la V-quantification compliquée $\forall \ell (\forall \lambda, \mu / \lambda + \mu = \ell)$ équivaut (indépendamment de l'énoncé qui peut lui faire suite, pour-

vu que cet énoncé ne contienne pas [ℓ]) à la V-quantification beaucoup plus simple $\forall (\lambda, \mu)$. La deuxième formalisation (inexacte) ci-dessus rendrait donc inutile l'introduction de la lettre [ℓ] et de la condition $\lambda + \mu = \ell$. Mais les élèves peuvent-ils s'en rendre compte? Et n'aurait-il pas été préférable de compléter le mot [fixe] par [dépendant seulement de ℓ] ?

(4)21. - [On considère dans le plan P deux points fixes B et C, et une droite fixe Δ ; un point variable A décrit Δ.
a) Trouver, lorsque A varie, l'ensemble des milieux B' des segments [A, C] et l'ensemble des milieux C' des segments [A, B].
b) Trouver, lorsque A varie, l'ensemble des centres de gravité G des triangles ABC.]
(QR - 2e CT - 1974 - P. 268)

Dans cet exemple, qui est une autre version de l'exercice de l'exemple (2)42 au paragraphe 2.3.3., on trouve le Marqueur [variable] en tant que renforceur d'une mutification ensembliste-image différée.

La phrase [un point variable A décrit Δ] n'a aucun sens mathématique à elle seule. Elle sert uniquement pour une présentation et une mutification différée de [A].
Les réponses attendues seront du genre :

[Le milieu B' de [A, C] décrit une droite parallèle à Δ lorsque A décrit Δ.] dans lesquelles l'expression [décrit.... lorsque ... décrit ...] constitue un bloc insécable qui, lui, a un sens mathématique. (On peut d'ailleurs noter l'analogie avec l'expression [... tend vers ... lorsque... tend vers...]) La mutification sur [A] apparaît nettement quand on formalise les réponses aux questions de l'exercice. Ces réponses sont, comme on l'a déjà vu donc au paragraphe 2.3.3., de la forme : $(\forall C \in \mathcal{P}) (\forall \Delta \in \mathcal{D}) (\exists m(A, C) / A \in \Delta)$ est une droite parallèle à Δ. (où P désigne le plan, D l'ensemble des droites du plan et m(A, C) le milieu des points A et C).

Ici, les Marqueurs [fixe(s)], qui s'opposent à [variable], sont des renforceurs d'ordre entre les mutifications différées. Ils marquent l'antériorité de la

mutification sur $\lceil B \rceil, \lceil C \rceil, \lceil A \rceil$ par rapport à la mutification sur $\lceil A \rceil$.

(4)22. - \lceil Soient quatre points distincts tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. Quel est le nombre des droites qui passent par deux quelconques de ces points? \rceil

(Monge - 2e CT - 1974 - P. 142)

C'est un exemple où on a une PUD sans L. On a signalé en 3.2.2. un exemple analogue (exemple (3)9.)

Le premier \lceil quelconque \rceil est un indicateur de \forall -quantification. En effet, si on le supprimait, on pourrait croire que c'est une \exists -quantification que l'on a sur les trois points en question. Ce qui n'est pas le cas. La présence de ce Marqueur à cet endroit nous paraît donc utile.

Le deuxième \lceil quelconque \rceil est encore plus difficile à supprimer. Grammaticalement ce serait possible, mais un lecteur compétent serait gêné, car alors la réponse la plus probable à la question serait: 1. (ce qui n'est sûrement pas la réponse voulue). En fait, ce que l'on demande dans cet exercice c'est de considérer tous les couples de points distincts appartenant à l'ensemble de quatre points donné, et de trouver le nombre des droites obtenues avec tous ces couples de points. Le Marqueur \lceil quelconque \rceil est donc bien ici un indicateur de mutification, mais la nature de cette mutification n'est pas évidente.

On pourrait formaliser de la façon suivante :

Soit \mathcal{P} l'ensemble des points du plan et \mathcal{D} l'ensemble des droites du plan.

Pour une partie quelconque A de \mathcal{P} , désignons par \mathcal{E}_A la condition suivante :

$\text{Card} A = 4$ et $(\forall X \subset A / \text{Card} X = 3) \neg (\exists D \in \mathcal{D}) (X \subset D)$, et par E_A le sous-ensemble suivant de \mathcal{D} : $\{ D \in \mathcal{D} / (\exists X \subset A / \text{Card} X = 2) (X \subset D) \}$

Le problème consiste à déterminer un élément n de \mathbb{N} tel que:

$$(\forall A \subset \mathcal{P} / \mathcal{E}_A) (\text{Card } E_A = n)$$

Une autre formalisation consisterait, pour chaque partie X de \mathcal{P} ayant pour cardinal 2, à désigner par $d(X)$ la droite (unique et bien déterminée) qui inclut X, puis à prendre pour E_A la définition équivalente suivante : $\{ d(X) / \text{Card} X = 2 \text{ et } X \subset A \}$.

On retrouve ainsi (cf. 2.2.3.3.) l'équivalence entre une mutification ensembliste-image et une \exists -quantification incorporée à une mutification ensembliste-compréhension.

On peut constater d'après ces formalisations que le deuxième \lceil quelconque \rceil est avant tout un indicateur de postériorité de mutification. En effet la réponse attendue dans cet exercice est :

$$(\forall A \subset \mathcal{P} / \mathcal{E}_A) \lceil \text{Card} \{ D \in \mathcal{D} / (\exists X \subset A / \text{Card} X = 2) (X \subset D) \} = 6 \rceil$$

Si ce deuxième Marqueur était absent, on aurait été amené à la mauvaise interprétation signalée plus haut, et qui s'écrirait de la manière suivante :

$$(\forall A \subset \mathcal{P} / \mathcal{E}_A) (\forall X \subset A / \text{Card} X = 2) \lceil \text{Card} \{ D \in \mathcal{D} / X \subset D \} = 1 \rceil$$

Ces traductions sont évidemment très lourdes, mais elles suivent de près la démarche linguistique de l'auteur (remarquons d'ailleurs que l'exercice lui-même est relativement lourd pour sa trivialité).

Remarquons par ailleurs que, pour respecter la pensée de l'auteur et le sens de l'énoncé, nous avons du traduire \lceil trois quelconques \rceil (resp. \lceil deux quelconques \rceil) en introduisant des parties de A ayant exactement 3 (resp. 2) pour cardinal; autrement dit, les 3 (resp. 2) éléments considérés doivent être distincts. Autrement dit encore, si nous avons exprimé \mathcal{E}_A sous la forme

$$\lceil \text{Card} A = 4 \text{ et } (\forall X_1, X_2, X_3 \in A) \neg (\exists D \in \mathcal{D}) (X_1 \in D \text{ et } X_2 \in D \text{ et } X_3 \in D) \rceil,$$

le résultat aurait été inexact.

Or, comme nous l'avons déjà indiqué (cf. exemple (4)12), ceci est contraire à l'usage actuel du mot \lceil quelconque \rceil : dans un énoncé comme

\lceil Deux éléments quelconques de \mathbb{R} sont comparables pour la relation \leq \rceil , on n'exclut nullement le cas où ces "deux"éléments "quelconques" sont égaux.

L'importance de cette remarque s'accroît du fait que le début \lceil Soient quatre

points distincts... pourrait laisser croire que le Marqueur [quelconque] a un rôle d'annulateur de restriction et indique que les points en question ne sont pas nécessairement distincts, c'est-à-dire tout le contraire de ce qui est voulu par l'auteur.

Cet exemple (4)22 est difficile à lire. C'est le type même de l'exercice où on mettra sans doute plus de temps à comprendre ce qui est demandé qu'à résoudre l'exercice lui-même.

(4)23. - Théorème et Définition :

Etant donné un point quelconque fixé O de l'espace affine E, l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans le plan P passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 définie par :

$(k_1, k_2) \mapsto M$ où $\vec{OM} = \vec{OA} + k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2$ est une bijection de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur P.

Cette bijection est appelée représentation paramétrique du plan P passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

(QR - 1ère CDE - Tome 2 - 1970 - P. 92)

C'est un exemple où on trouve deux Marqueurs à la fois pour une même variable. D'ailleurs cet exemple montre assez bien que la forme [Etant donné] est bien une locution, et ne peut pas être considérée comme deux mots ayant chacun son rôle (si non on aurait trois Marqueurs pour la même variable).

Par ailleurs, il y a autre chose, bizarre, dans cet exemple. On insiste longuement et lourdement sur la PUD de la variable [O], qui est en fait une variable inefficace dans l'égalité $\vec{OM} = \vec{OA} + k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2$ (laquelle pourrait aussi bien s'écrire $\vec{AM} = k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2$). Par contre, sur les variables [A], \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , qui sont réellement efficaces dans cette égalité, la \forall -quantification est totalement implicite.

On peut aussi remarquer que [P] est une fausse variable puisque le plan [P] est entièrement déterminé par la donnée de [A], \vec{u}_1 , et \vec{u}_2 . La lettre [P] est donc inutile (tout comme le morceau [de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur P] qui est après l'égalité).

On peut enfin noter que l'expression

$\dots M$ où $\vec{OM} = \vec{OA} + k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2$

signifie en fait

[l'unique M tel que $\vec{OM} = \vec{OA} + k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2$]

Il s'agit là d'une mutification spécifique (que nous n'avons pas étudiée dans ce travail) souvent formalisée par le symbole [iota] (ι), avec la convention que l'écriture $\iota x a$ possède un sens lorsque $\exists! x a$ et signifie alors [l'unique x tel que a] (on sait que, si on veut s'affranchir de la condition $\exists! x a$, on peut remplacer [iota] par le symbole [tau] parfois appelé "tau de Bourbaki").

En résumé, on a dans cet exemple la succession suivante de lettres (où "efficace" signifie "efficace dans l'égalité $\vec{OM} = \vec{OA} + k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2$ " et où les mutifications considérées sont évidemment situées en dehors de cette égalité) :
[O] : inefficace, avec pourtant une PUD explicite renforcée par deux Marqueurs ;
[P] : inutile ;
[A], \vec{u}_1 , \vec{u}_2 : efficaces, avec une \forall -quantification totalement implicite ;
[k₁], [k₂] : efficaces, explicitement mutifiées par \mapsto ;
[M] : efficace, avec une \forall -mutification quasi-implicite (à peine marquée par [où]).

Notons que la présence de [O] et la ι -mutification sur [M] pourraient être évitées si on autorisait la notation $[P + \vec{v}]$, où [P] désigne un point et \vec{v} un vecteur : l'application dont on s'occupe serait alors simplement notée $(k_1, k_2) \mapsto A + k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2$.

Toutefois, la présence de [O] et de [M] peut, peut-être, s'expliquer par la nécessité d'introduire ultérieurement un système de coordonnées.

(4)24. - Soit un nombre complexe quelconque de module 1. On peut l'écrire sous la forme $\cos x + i \sin x$, x étant un nombre réel quelconque. Par définition, nous poserons :

$(\forall x \in \mathbb{R}) e^{ix} = \cos x + i \sin x,$

Cet exemple est assez difficile à comprendre. L'auteur voulait établir la surjection de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels dans l'ensemble des nombres complexes de module 1. Mais telles que les phrases sont tournées ici, ceci n'apparaît pas clairement. La première phrase est une PUD renforcée par $\boxed{\text{quelconque}}$ (celui-ci n'est sûrement pas un annulateur de restriction puisqu'il en précède justement une). On ne s'attend pas alors à trouver la deuxième phrase qui est quelque peu embarrassante. En effet, l'expression $\boxed{x \text{ étant un nombre réel quelconque}}$ suggère aussi bien une \forall -quantification qu'une \exists quantification (alors que c'est la \exists -quantification qui convient ici). L'explication vient du fait que les variables sont "dépendantes", et que l'auteur a voulu aller trop vite en disant dans une seule phrase deux choses différentes :

- (1) $(\forall z \in \mathbb{C} / |z| = 1) (\exists x \in \mathbb{R}) (z = \cos x + i \sin x)$
- (2) $(\forall x \in \mathbb{R}) (|\cos x + i \sin x| = 1).$

A notre avis, pour que cet exemple soit bien clair et tout à fait compréhensible, il fallait l'écrire :

$\boxed{\text{Soit un nombre complexe quelconque de module 1. On peut l'écrire sous la forme } \cos x + i \sin x, \text{ où } x \text{ est un nombre réel.}}$

Inversement, x étant un nombre réel quelconque, $\cos x + i \sin x$ est de module 1, et nous poserons la définition : $e^{ix} = \cos x + i \sin x.$

En séparant la \exists -quantification et la \forall -quantification, on verrait bien la surjection.

(4)25. $\boxed{\text{D'une manière générale soient trois décimaux relatifs } x, y, \text{ et } z ; \text{ en les écrivant sous la forme } x = a 10^p, y = b 10^q, z = c 10^q \text{ où } a, b, c, p, q \text{ sont des entiers relatifs quelconques, vous montrerez, à titre d'exercice, le résultat suivant :}}$

Quels que soient x, y, z de \mathbb{D} on a :

$$x(y + z) = xy + xz$$

autrement dit : dans \mathbb{D} la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

(QR - 4ème- Série rouge - 1973 - P. 39)

Dans cet exemple comme dans le précédent le membre de phrase $\boxed{\text{où } a, b, c, p, q \text{ sont des entiers relatifs quelconques}}$ est gênant, et s'explique de la même façon : les variables sont dépendantes.

Ce qui rend cet exemple difficile à comprendre, c'est que cette phrase veut exprimer deux mutifications. En effet, partant de $\forall(x,y,z)$, on arrive à $\exists(a, b, c, p, q)$; mais pour faire le calcul demandé, on raisonne avec $\forall(a,b, c, p, q)$.

Dans ces exemples (4)24 et (4)25, il nous semble que bien peu d'élèves comprendront ce rôle de $\boxed{\text{quelconque}}$ intervenant dans une mutification où on a à la fois une \exists -quantification et une \forall -quantification.

(4)26. $\boxed{\text{Soit } D \text{ et } D' \text{ deux droites parallèles. } D \text{ est définie par un point } A \text{ et un vecteur directeur } \vec{u}. \text{ Soit } A' \text{ un point quelconque de } D'. \text{ Dans la translation de vecteur } \vec{AA'}, \text{ l'image de } D \text{ est la droite définie par } A' \text{ et le vecteur directeur } \vec{u} : \text{ c'est donc } D'. \text{ Puisque } A' \text{ a été choisi arbitrairement, nous pouvons conclure:}}$

Corollaire :

Etant donnés deux droites parallèles D et D' de l'espace affine A_3 , il existe une infinité de translations t telles que $t(D) = D'$; ce sont les translations de vecteurs $\vec{AA'}$ où A est un point quelconque de D et A' un point quelconque de D' .

(QR - 1ère CDE - Tome 2 - 1974 - P. 104)

Dans cet exemple, le Marqueur $\boxed{\text{choisi arbitrairement}}$ est un indicateur dans une allusion épimathématique à une mutification (ce genre de situation a été examiné en 2.4.), plus exactement à une \forall -quantification (comme c'est ce qui se produit le plus souvent).

Si on supprimait $\boxed{\text{choisi arbitrairement}}$, on serait obligé de supprimer toute la partie de phrase $\boxed{\text{Puisque } A' \text{ a été choisi arbitrairement}}$. C'est-à-dire que l'on devrait supprimer toute la partie qui rappelle que l'on a en fait une \forall -quantification différée sur $\boxed{A'}$. Or ceci serait très gênant puisque c'est cette partie même qui constitue la preuve de la phrase contenue dans le corollaire et qui est : $\boxed{\text{il existe une infinité de translations } t \text{ telles que } t(D) = D'.$

Cette partie, où on ne parle que de $\lceil A \rceil$, est suffisante pour prouver qu'il existe une infinité de translations, mais remarquons toutefois que les variables $\lceil A \rceil$ et $\lceil A' \rceil$ jouent exactement le même rôle dans le corollaire.

Le Marqueur $\lceil \text{quelconque} \rceil$, que l'on trouve trois fois ici, est un renforceur de \forall -quantifications (dont une différée).

4.2. Le cas des équations.

Il existe aussi un cas où l'on rencontre souvent les Marqueurs, et notamment le Marqueur $\lceil \text{donné} \rceil$: il s'agit du cas des équations.

Ce cas des équations est assez particulier en ce sens que l'on y trouve aussi certains mots qui jouent un rôle épimathématique analogue à celui des Marqueurs, à savoir les mots: $\lceil \text{inconnu (e)} \rceil$ (adjectif ou substantif), $\lceil \text{cherché} \rceil$ (ou $\lceil \text{chercher} \rceil$), $\lceil \text{paramètre} \rceil$, $\lceil \text{constant(e)} \rceil$ (adjectif ou substantif), $\lceil \text{équation} \rceil$, $\lceil \text{système} \rceil$, $\lceil \text{résoudre} \rceil$, $\lceil \text{discuter} \rceil$.

Ces mots, ainsi que les Marqueurs $\lceil \text{donné} \rceil$, $\lceil \text{fixé} \rceil$, $\lceil \text{fixe} \rceil$ (ce qui justifie le lien avec le reste de notre travail), peuvent être associés entre eux; ainsi on a les associations:

1. $\lceil \text{inconnue} \rceil$ - $\lceil \text{cherché} \rceil$ (ou $\lceil \text{chercher} \rceil$ - $\lceil \text{résoudre} \rceil$).
2. $\lceil \text{paramètre} \rceil$ - $\lceil \text{constante} \rceil$ - $\lceil \text{fixe} \rceil$ (ou $\lceil \text{fixer} \rceil$), ou $\lceil \text{fixé} \rceil$ - $\lceil \text{donné} \rceil$ - $\lceil \text{discuter} \rceil$.

Beaucoup plus que dans les chapitres précédents, les habitudes de notation font qu'on peut souvent se passer des Marqueurs ou des mots analogues. Par exemple le texte suivant:

(4)27. $\lceil \text{Résoudre et discuter l'équation } (a + 1) x = a^2 - 1. \rceil$
(QR - 2e CT - 1977)

est automatiquement interprété comme demandant de résoudre en $\lceil x \rceil$ et discuter en $\lceil a \rceil$. Autrement dit, c'est par automatisme que $\lceil x \rceil$ est considéré comme "inconnue" et $\lceil a \rceil$ comme "paramètre".

Si on voulait éviter à la fois l'automatisme et l'ambiguïté, on pourrait écrire par exemple:

$\lceil \text{Résoudre et discuter l'équation en } x \rceil$
 $(a + 1) x = a^2 - 1$
où a est un nombre réel donné.

Dans le cas des équations (comme d'ailleurs dans la plupart des autres cas), le Marqueur $\lceil \text{donné} \rceil$ a le double rôle de renforceur de \forall -quantification et d'indicateur-renforceur d'antériorité de mutification.

Ainsi la réponse à l'exercice (4)27 ci-dessus pourrait se formaliser comme conjonction des deux expressions ci-dessous (dont la première représente la "discussion" et la seconde la "résolution"):

$$- \forall a \left[(a \neq -1 \Leftrightarrow \exists! x [(a+1)x = a^2 - 1]) \text{ et } (a = 1 \Leftrightarrow \forall x [(a+1)x = a^2 - 1]) \right]$$

$$- (\forall a \neq -1) [(a+1)x = a^2 - 1 \Leftrightarrow x = a - 1]$$

Remarquons au passage que l'expression $\lceil \text{résoudre et discuter} \rceil$ revêt un ordre assez illogique: on doit en fait discuter avant de résoudre.

De même le théorème classique sur l'équation du second degré dans le domaine réel (partie "discussion") peut se formaliser ainsi:

$$(\forall a \neq 0) \forall b \forall c \left[\exists x (ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow b^2 - 4ac \geq 0 \right]$$

Dans tous ces cas, les "données" ou "constantes" $\lceil a \rceil$, $\lceil b \rceil$, $\lceil c \rceil$ sont tout aussi "variables" que "l'inconnue" $\lceil x \rceil$, mais la \forall -quantification qui les affecte s'applique avant la mutification (universelle, ou existentielle, ou existentielle avec unicité) portant sur $\lceil x \rceil$.

Dans les exemples suivants, rappelons (cf. 2.3.4.) qu'il s'agit d'exercices, et que par conséquent les mutifications sont censées s'exercer sur des énoncés ex -

primés dans la réponse.

(4)28. - [Résolution de l'équation $2\alpha = \beta$, où β est un angle donné de A, α un angle cherché de A.]

(Géométrie - Gourion-Lixi- Term CE - 1978)

(4)29. - [Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad (a, b \text{ nombres réels donnés})$$

(Decreton et Poret - Term CE - 1976)

(4)30. - [Résoudre les équations suivantes, a, b, c, étant des nombres réels :

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a^2 - b^2 &= 0 \\ (a-1)^2 x^2 - (a+b)(a-1)x + ab &= 0 \\ 4c^2 x^2 - 4acx + a^2 - (b+c)^2 &= 0. \end{aligned}$$

(QR - 2e CT - 1977 - P. 68)

Dans l'exemple(4)28 nous avons le maximum d'informations sur chacune des lettres intervenant dans l'équation. Le texte ne peut être plus clair.

Dans l'exemple(4)29, grâce à [donné] qui précise quels sont les paramètres, la lecture du texte est encore relativement facile. [donné] compense l'absence de [inconnue].

Par contre, dans l'exemple(4)30, il n'y a que les habitudes de notation qui entrent en jeu ; on n'a ni [inconnue], ni [donné], (ni quoique ce soit d'équivalent). C'est par automatisme que [x] est considéré comme l'inconnue et les autres lettres comme des paramètres.

Bien évidemment on peut rencontrer aussi d'autres Marqueurs que [donné], parmi les Marqueurs qui nous intéressent pour ce travail, dans les équations. Ainsi voyons l'exemple suivant :

(4)31. - [Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $ax + by = c$ (a, b et c étant trois entiers rationnels quelconques).]

(Algèbre - Term CE - Decreton et Poret - Ed Gamma - 1976)

Le mot [quelconque] peut être un renforceur/indicateur de postériorité de mutification, mais pas du tout renforceur/indicateur d'antériorité de mutification (cf. 4.1.). Ainsi dans cet exemple, son rôle est de renforcer la \forall -quantification sur [a], [b] et [c] (ce qui suggère qu'il faut discuter) et peut-être aussi comme annulateur de restrictions éventuelles. Mais cette interprétation n'est valable qu'à cause des habitudes où [x] et [y] sont les inconnues et [a], [b], [c] les paramètres.

Il aurait très bien pu arriver également que l'on ait [donnés] à la place de [quelconques]. Dans ce cas, [donnés] aurait eu le rôle (que [quelconque] ne pourrait avoir) d'indicateur d'antériorité des \forall -quantifications sur [a], [b] et [c] par rapport aux mutifications sur [x] et [y].

CHAPITRE 5 : QUELQUES REMARQUES COMPARATIVES AVEC L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR.

Il nous a semblé utile de faire ici quelques remarques comparatives sur l'usage des Marqueurs dans le Secondaire et dans l'Enseignement Supérieur.

Pour cela nous avons regardé quelques livres destinés au Supérieur et quelques revues, écrits par des professionnels, afin de voir éventuellement des ressemblances et des différences avec le Secondaire.

5.1. Remarques générales.

La constatation générale est que l'on retrouve dans le Supérieur tous nos Marqueurs avec les mêmes rôles que dans le Secondaire.

Cependant, à propos des phrases de PUD, quelques remarques sont à faire:

a) On note que, contrairement à ce qu'on a vu dans le Secondaire, l'usage du V. [Supposer] est très courant dans le Supérieur. La plupart des auteurs des livres que nous avons pu consulter en tout cas l'emploient.

b) Dans le même ordre d'idée, alors que dans un livre du Secondaire on emploie des V assez variés, ce n'est pas toujours le cas pour un livre du Supérieur. De plus, dans quelques livres du Supérieur on note une sorte d'automatisme pour certaines formes de phrases.

Ainsi, dans Bourbaki (Eléments de mathématiques. Edition 1970) ou encore dans le livre de Jean-Pierre Lafon "Algèbre commutative", quand on rencontre les phrases entières de PUD commençant par le V [Soit], on trouve invariablement l'ordre VLR pour les composants de la phrase (et pas du tout VRL ou VR_L).

c) On a remarqué aussi précédemment que, dans le Secondaire, on ne rencontre que très rarement des phrases de PUD sans que soit mentionné le référentiel des variables. Or cet usage semble être plus fréquent dans le Supérieur.

Ainsi trouve-t'on des phrases telles que:

(5)1. - [Soient μ_1, μ_2].

(5)2. - [Soit $S(X) = \sum_n a_n X^n$; par définition, la série dérivée $S'(X)$ est donnée par la formule

$$S'(X) = \sum_{n>0} n a_n X^{n-1}$$

(Cartan - Théorie élémentaire des fonctions analytiques - p. 14)

d) Pour en revenir aux Marqueurs, comme on l'a constaté dans le Secondaire, [quelconque] et [donné] se rencontrent dans tous les livres du Supérieur.

Il semble que les auteurs du Supérieur emploient plus volontiers le Marqueur [arbitraire] que les auteurs du Secondaire.

Il est rare que, dans le Secondaire, le Marqueur [donné], dans les phrases entières de PUD commençant par V, se trouve juste après V. Or, dans le Supérieur, c'est un fait qui se produit couramment, notamment avec les V [Supposer] et [Soit]. Donnons en quelques exemples:

(5)3. - [Remarque: Soient donnés un ouvert $U \subset R \times E$, un point $(t_0, x_0) \in U$, et une fonction continue $f: U \rightarrow E$.]

(Cartan - Calcul différentiel - p. 114)

(5)4. - [Soit k un entier ≥ 1 . Supposons données k fonctions holomorphes de $k+1$ variables complexes:

$$f_i(x, y_1, \dots, y_k), \quad 1 \leq i \leq k.$$

(Cartan - Théorie élémentaire - p. 214)

Comme dans le Secondaire, l'usage des Marqueurs dans le Supérieur se fait la plupart du temps selon l'inspiration des auteurs. Et cela explique assez bien à notre avis le fait que dans certains livres, ces Marqueurs abondent, alors que dans d'autres il y en a moins.

Mais voyons maintenant des exemples dans le Supérieur illustrant les grands rôles des Marqueurs.

5.2: Quelques illustrations.

5.2.1: Renforceur / indicateur de mutification.

5.2.1.1: Renforceur de quantification.

(5)5 - [Pour deux éléments quelconques x, y de R, ou bien x < y, ou bien y > x.]

(Dieudonné - Analyse - p. 18)

(5)6 - [Si R et S sont des ensembles donnés, leur intersection R ∩ S est l'ensemble des éléments communs à R et S:

$$R \cap S = \{ x / x \in R \text{ et } x \in S \} .]$$

(Mac Lane - Algèbre - p. 3)

Dans ces exemples, [quelconque] et [donnés] sont bien des renforceurs de \forall -- quantifications. Leur suppression ne gênerait sûrement pas la lecture.

(5)7 - [X étant un ensemble quelconque donné, montrer que le dual du module libre à droite $R^{(X)}$ est le module fonctionnel à gauche R^X . (Utiliser le fait que $R^{(X)}$ est libre pour définir les $f: R^{(X)} \rightarrow R$.)]

(Mac Lane - Algèbre - p. 254)

Dans cet exemple, [quelconque] et [donnés] n'ont tous deux qu'un seul rôle identique: celui de renforceur de PUD.

(5)8 - [Démontrer les extensions suivantes de la règle 1 dans tout groupe G:

si $ar = a$ pour un élément quelconque donné, alors $r = u$.]

(Mac Lane - Algèbre - p. 89)

(La règle 1 dont on parle dans cet exemple est la suivante:

[Règle 1: Dans tout groupe G il existe un élément unique u tel que $au = a$ pour tout $a \in G$ et $ua = a$ pour tout $a \in G$.])

On peut noter dans cet exemple une double incorrection. Tout d'abord, pour que la phrase soit mathématiquement correcte, on devrait trouver explicitement: [pour un élément quelconque donné a], car il est impossible a priori de savoir si l'élément en question est [a] ou [r]. De plus, même si l'on admet que l'élément "quelconque" est représenté par [a], on peut se demander si la mutification portant sur [a] est une \exists -quantification (traduction (1)) ou une \forall -quantification (traduction (2)):

$$(1) \forall r ([\exists a (ar = a)] \Rightarrow (r = u))$$

$$(2) \forall r ([\forall a (ar = a)] \Rightarrow (r = u))$$

Dans un cas général la traduction (1) est plus forte que la traduction (2). Malheureusement, dans le cas d'un groupe, (1) et (2) sont équivalentes. Et rien ne nous permet de savoir quelle est l'intention de l'auteur.

[quelconque] et [donnés] ont ici encore le rôle identique de renforceur de quantification.

Avec ces deux derniers exemples, on peut penser que certains auteurs du Supérieur aiment la surabondance, le superflu.

5.2.1.2: Renforceur de mutification ensembliste.

(5)9 - [a) Montrer que si f n'est pas une application $t \mapsto \lambda t + \mu$, l'ensemble de tous les nombres $\frac{f(x) - f(y)}{(x - y)}$ où x et y sont des nombres arbitraires

de $[\alpha, \beta]$ tels que $x \neq y$, est identique à] m, M [.]

(Dieudonné - Analyse - p. 163)

Puisque l'ensemble à considérer est:

$$\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} / x \in [\alpha, \beta], y \in [\alpha, \beta] \text{ et } x \neq y \}$$

Le Marqueur [arbitraires] est bien un renforceur de mutification ensembliste (ici ensembliste-image).

5.2.1.3: Indicateur dans une allusion épimathématique à une mutification.

(5)10 - [donc, d'après (7.1.1), on a $\| \Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_n} \varphi \| = \sigma ((\|x_1\| + \dots + \|x_n\|)^n)$;

cela veut dire qu'étant donné $\epsilon > 0$, il existe η tel que l'on ait

$$(7.1.2) \quad \| \tilde{\varphi}_n(x_1, \dots, x_n) \| \leq \epsilon (\|x_1\| + \dots + \|x_n\|)^n$$

dès que $\|x_1\| + \dots + \|x_n\| < \eta$. Mais alors cette inégalité a lieu pour x_1, \dots, x_n arbitraires, parce que, $\tilde{\varphi}_n$ étant multilinéaire, on a

$$\| \tilde{\varphi}_n(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \| = |\lambda|^n \cdot \| \tilde{\varphi}_n(x_1, \dots, x_n) \| .$$

Ainsi (7.1.2) a lieu quels que soient x_1, \dots, x_n ; comme $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement, on conclut que

$$\tilde{\varphi}_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ pour tous } x_1, \dots, x_n .$$

Donc $\varphi_n \equiv 0$, et φ est de degré $\leq n-1$.]

(Calcul différentiel - Cartan - 1971 - p. 89)

Le Marqueur 'arbitraires' indique que l'on a en fait une \forall -quantification sur $\lceil x_1 \rceil, \dots, \lceil x_n \rceil$.

De même, 'choisi arbitrairement' rappelle la PUD que l'on a sur $\lceil \epsilon \rceil$. Ce rappel facilite la compréhension de la conclusion:

$$\lceil \forall_n (x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ pour tous } x_1, \dots, x_n \rceil.$$

5.2.2: Renforceur / indicateur d'ordre de mutification.

5.2.2.1: Indicateur d'antériorité de \forall -quantification.

(5)11 - 'Etudier la variation des fonctions

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+p}, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-p}, \left(1 + \frac{p}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \left(1 + \frac{p}{x}\right)^{x+1}$$

pour $x > 0$, p étant un nombre positif arbitraire fixé; trouver leurs limites quand x tend vers $+\infty$.

(Dieudonné - Analyse - p. 174)

On a pu constater avec certains exemples vus auparavant ((5)7 et (5)8) que deux Marqueurs différents portant sur une même variable peuvent avoir des rôles identiques.

Mais comme on a pu le vérifier aussi dans le Secondaire, deux Marqueurs différents pour une même variable peuvent avoir chacun un rôle différent. C'est ce qui se passe dans l'exemple (5)11.

Le Marqueur 'arbitraire' est en effet un renforceur de la PUD sur $\lceil p \rceil$ (sa suppression ne changerait en rien le sens de la phrase), tandis que 'fixé' indique l'antériorité de cette \forall -quantification de $\lceil p \rceil$ sur la mutification fonctionnelle (\leftrightarrow) implicite de $\lceil x \rceil$. La réponse attendue (qui comporte une "discussion suivant les valeurs de p ") sera du type: $\forall p$ (p vérifie ... \Rightarrow la fonction $x \mapsto \dots$ vérifie ...).

5.2.2.2: Indicateur d'antériorité de \exists -quantification.

$$(5)12 - \lceil \dots h(x) - h(a) = (g'(f(a)) \cdot f'(a)) \cdot (x-a) + g'(f(a)) \cdot \psi(x-a) + \psi(f(x)-f(a)) \rceil.$$

Pour prouver que h est différentiable au point a et a pour dérivée $g'(f(a)) \cdot f'(a)$, il suffit de montrer que le second et le troisième terme du membre de droite sont tangents à 0, c'est-à-dire

$$(2.2.4) \quad \|g'(f(a)) \cdot \psi(x-a)\| = o(\|x-a\|),$$

$$(2.2.5) \quad \|\psi(f(x)-f(a))\| = o(\|x-a\|).$$

Or (2.2.4) résulte de

$$\|g'(f(a)) \cdot \psi(x-a)\| \leq \|g'(f(a))\| \cdot \|\psi(x-a)\|;$$

(2.2.5) résulte du fait que

$$\|\psi(f(x)) - f(a)\| = o(\|f(x) - f(a)\|)$$

et du fait que, en vertu de (2.2.2), l'inégalité

$$\|f(x) - f(a)\| < M \cdot \|x-a\|$$

(où M est donné $> \|f'(a)\|$) a lieu pour $\|x-a\|$ assez petit, comme cela résulte de (2.2.2).

(Cartan - Calcul différentiel - p. 31-32)

Dans cet exemple, le Marqueur 'donné' a le double rôle d'indicateur de \exists -quantification et d'indicateur de l'antériorité de cette \exists -quantification sur $\lceil M \rceil$ par rapport aux \forall -quantifications sur les variables $\lceil a \rceil$ et $\lceil x \rceil$.

5.2.3: Annulateur de restriction.

(5)13 - 'Nous verrons en 1-5 qu'on peut définir un tel "calcul fonctionnel" pour les éléments normaux d'une C^* -algèbre quelconque (pas nécessairement commutative).

(J. Dixmier - Les C^* -algèbres et leur représentation - p. 9)

Le mot 'quelconque' ici manifestement insiste sur le fait que l'on n'impose aucune condition particulière sur la C^* -algèbre, c'est vraiment un annulateur de restriction.

(5)14 - 'des notations similaires peuvent être utilisées pour l'ensemble des éléments d'une suite quelconque, finie ou infinie.'

(Dieudonné - Analyse - p. 11)

Il est clair dans l'exemple (5)14 que 'quelconque' a un rôle de renforceur de l'absence de condition particulière.

5.2.4: Usage de 'arbitrairement', propre au Supérieur.

Il y a dans le Supérieur un usage du Marqueur de forme adverbiale 'arbitrairement' que l'on ne trouve pas dans le Secondaire. En effet, on avait noté que, dans le Secondaire, 'arbitrairement' était toujours soit accompagné d'un des Marqueurs comme 'donné', 'fixé', 'fixe', ou 'choisi', soit (dans les phrases de PUD) d'une forme active des verbes 'donner', 'fixer' et 'choisir' (comme par exemple: 'Donnons-nous arbitrairement $a > 0$ ')

Dans le Supérieur par contre, on peut trouver "arbitrairement" autrement, et seul notamment.

Voici quelques exemples:

(5)15 - Soient A une partie ouverte de C, a un point isolé de C-A, r un nombre > 0 tel que tous les points de la boule |z-a| < r, sauf a, appartiennent à A. Si f est une application analytique de A dans un espace de Banach complexe E, alors, pour 0 < |z-a| < r, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n}$$

où les deux séries sont convergentes pour 0 < |z-a| < r, et

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x)dx}{(x-a)^{n+1}}, \quad d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (x-a)^{n-1} f(x)dx, \text{ où } \gamma \text{ est le circuit}$$

$$t \mapsto a + re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Ceci résulte immédiatement de (9.14.2) appliqué à la couronne $\rho < |z-a| < r$, où ρ est arbitrairement petit.

(Dieudonné - Analyse - p. 245)

Le mot "arbitrairement" intervient ici dans le bloc "arbitrairement petit". Ce bloc renvoie de façon extrêmement abrégée à un raisonnement qui aurait la structure suivante:

il s'agit de démontrer une égalité de la forme "A = B". A l'aide d'un résultat antérieur, le (9.14.2), on montre une égalité de la forme "A - B = f(\rho)" valable pour tous les ρ tels que $0 < \rho < r$, et où f(\rho) est infiniment petit avec ρ . On en déduit $\forall \epsilon \exists \rho \{ |f(\rho)| < \epsilon \}$, d'où $\forall \epsilon (|A - B| < \epsilon)$, ce qui entraîne bien A = B.

Dans cette démonstration, "rho" serait donc soumis successivement à une quantification universelle et à une quantification existentielle.

(5)16 - Si g est une primitive d'une application continue f de I dans F, alors g a, en tout point $\xi \in I$, une dérivée par rapport à I égale à f(\xi). En effet, il résulte de (8.5.2) que pour tout intervalle $[\xi, \xi + \lambda] \subset I$

$$\|g(\xi + \zeta) - g(\xi) - f(\xi)\zeta\| \leq \zeta \sup_{0 \leq \eta \leq \lambda} \|f(\xi + \eta) - f(\xi)\|$$

pour $0 \leq \zeta \leq \lambda$, et $\sup_{0 \leq \eta \leq \lambda} \|f(\xi + \eta) - f(\xi)\|$ est arbitrairement petit avec λ , par hypothèse.

(Dieudonné - Analyse - p. 168)

Dans cet exemple, le mot "arbitrairement", intervenant dans le bloc "arbitrairement petit avec" (qui semble ici presque équivalent à "infiniment petit avec") indique au lecteur averti un certain nombre de quantifications (sur "lambda" et sur des variables auxiliaires: les "epsilon" de l'Analyse).

Ces usages du mot "arbitrairement" dans le Supérieur sont bien compliqués. On est un peu rassuré en pensant qu'il n'en existe pas de tels dans le Secondaire.

CHAPITRE 6 : ETUDE COMPARATIVE DE LA FREQUENCE DES MARQUEURS DANS LES MANUELS DU SECONDAIRE.

Comme on a pu le constater, la présence des Marqueurs est généralement facultative: il est possible soit de les supprimer purement et simplement, soit d'introduire une expression quantifiante plus explicite qui rend leur présence inutile. On peut alors se demander à quelle fréquence ces Marqueurs apparaissent. Sont-ils fonction de quelque chose?

Pour répondre à ces questions, quelques études statistiques comparatives, extrêmement sommaires, ont été faites ici. Il s'agit de relever le nombre des Marqueurs dans des livres entiers ou quelques chapitres de livres, et de comparer les taux d'apparition des Marqueurs.

Dans les relevés, j'ai distingué les phrases entières séparées de PUD où, comme on l'a indiqué dans les chapitres précédents, on trouve les Marqueurs plus souvent qu'ailleurs.

Quatre types d'études ont été faits:

- Etude de manuels de différents niveaux d'une même collection.
- Etude de manuels de même niveau mais édités à des années différentes, d'une même collection.
- Etude de manuels de même niveau, mais de collections différentes.
- Etude de manuels de même niveau dans deux collections dont l'une a pris la suite de l'autre chez le même éditeur.

6.1: Etude de manuels de différents niveaux d'une même collection.

Les manuels étudiés sont ceux de la collection Queysanne-Revuz, édités en 1974 (sauf le manuel de 4ème qui a été édité au troisième trimestre 1973) ; l'étude est faite sur tout le livre entièrement, de la classe de 4ème à la Terminale CDE.

6.1.1. Terminale CDE. Sur 289 pages.

a) Etude de phrases entières de PUD.

Nombre de PUD sans Marqueurs	Nombre de PUD avec Marqueurs	Total des PUD	Taux de présence des Marqueurs
1 5 3	1 7	1 7 0	1 0 %

b) Moyenne de Marqueurs par page (PUD et autres)

Total du nombre de Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
1 8 9	2 8 9	0 , 6 5

6.1.2: 1ère CDE - Tome 2 - Sur 381 pages.

a) Etude des phrases entières de PUD.

Nombre de PUD sans Marqueurs	Nombre de PUD avec Marqueurs	Total des PUD	Taux de présence des Marqueurs
3 3 0	9 8	4 2 8	2 2 , 9 %

b) Moyenne de Marqueurs par page (PUD et autres)

Total du nombre de Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
3 8 3	3 8 1	1

6.1.3: 2de CT - Sur 344 pages (Edition 1974).

a) Etude des phrases entières de PUD.

Nombre de PUD sans Marqueurs	Nombre de PUD avec Marqueurs	Total des PUD	Taux de présence des Marqueurs
2 7 7	6 8	3 4 5	1 9 , 7 %

b) Moyenne de Marqueurs par page (PUD et autres).

Total du nombre de Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
2 2 9	3 4 4	0 , 6 6

6.1.4: 3ème - Sur 257 pages.

a) Etude des phrases entières de PUD.

Nombre de PUD sans Marqueurs	Nombre de PUD avec Marqueurs	Total des PUD	Taux de présence des Marqueurs
1 5 9	4 8	2 0 7	2 3 , 2 %

b) Moyenne de Marqueurs par page (PUD et autres).

Total du nombre de Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
1 3 9	2 5 7	0 , 5 4

6.1.5: 4ème - Sur 238 pages.

a) Etude des phrases entières de PUD.

Nombre de PUD sans Marqueurs	Nombre de PUD avec Marqueurs	Total des PUD	Taux de présence des Marqueurs
1 2 7	3 9	1 6 6	2 3 , 5 %

b) Moyenne de Marqueurs par page (PUD et autres).

Total du nombre de Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
1 3 7	2 3 8	0 , 5 7

6.1.4: Conclusions.

On constate déjà grâce à ces tableaux que l'usage des Marqueurs n'est pas une fonction simple de la classe (c'est-à-dire n'est ni une fonction croissante, ni décroissante, ni constante).

Dans l'ensemble des tableaux a), le pourcentage reste à peu près invariant de la 4ème à la 1ère (entre 19,7% et 23,5%), et chute brusquement en Terminale (où il n'est plus que de 10%).

Pour les tableaux b), la moyenne par page varie entre 0,54 et 0,66, sauf pour la 1ère où elle est égale à 1.

Dans les deux cas, ces fréquences sont loin d'être négligeables.

6.2: Etude de manuels de même niveau mais édités à des années différentes, d'une même collection.

Les manuels consultés pour cette partie sont trois livres de la classe de seconde de la collection Queysanne-Revuz, édités successivement les années 1970, 1974, 1977. Les tableaux correspondant aux relevés du livre édité en 1974 figurent déjà dans ceux de l'étude précédente (cf: 6.1.3). Il reste donc à donner les tableaux pour les livres édités en 1970 et en 1977.

6.2.1: 2de CT - 1970 - Tome 2 - Sur 335 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
3 4 7	8 0	4 2 7	1 8 , 7 %

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
2 6 0	3 3 5	0 , 7 7

6.2.2: 2de CT - 1977 - Sur 340 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
2 5 8	6 5	3 2 3	2 0 , 1 %

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
2 4 5	3 4 0	0 , 7 2

6.2.3: Conclusions

Pour les tableaux a), on constate que les taux des Marqueurs augmente légèrement suivant l'année d'édition des livres: 18,9% - 19,7% - 20,1%.

Par contre, pour les tableaux b), cette augmentation ne se vérifie pas: 0,77 - 0,66 - 0,72, mais la variation n'est pas très forte.

6.3: Etude de manuels de même niveau, mais de collections différentes.

L'étude ici a été faite pour deux classes, 4ème et 2de, pour une partie traitant un même sujet.

Pour la 4ème, j'ai choisi la partie qui traite des vecteurs et des translations. Selon la collection, cela constitue un ou deux chapitres.

Pour la 2de, j'ai choisi la partie qui traite des espaces vectoriels sur \mathbb{R} et des applications et équations linéaires.

Pour la 4ème, j'ai consulté cinq collections différentes de livres édités tous en 1979: Monge, E.Gallion, Renée Polle, Mauquin et Queysanne-Revuz.

Pour la 2de, j'ai consulté deux collections de livres édités tous deux en 1974: Monge et Queysanne-Revuz.

6.3.1: pour la classe de 4ème.

6.3.1.1: Monge - 4ème - Sur 30 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
1 2 1	5	1 2 6	4 %

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
7	3 0	0 , 2 3

6.3.1.2: E. Gallion - 4ème - 23 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
6 2	7	5 9	1 1 , 8 %

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
1 0	2 3	0 , 4 3

6.3.1.3: Renée Polle - 4ème - 13 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
2 4	5	2 9	1 7 , 2 %

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
1 6	1 9	0 , 8 4

6.3.1.4: Mauquin - 4ème - 18 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
5 4	2	5 6	3 , 6 %

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
4	18	0,22

6.3.1.5: Queysanne-Revuz-Rouquariol - 4ème - 16 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
21	13	34	38,2%

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
26	16	1,62

6.3.1.6: Conclusions

Pour la classe de Quatrième, l'observation de ces tableaux montre bien que l'utilisation des Marqueurs dépend très fortement des auteurs. Le taux des Marqueurs varie d'une collection à l'autre de 3,6% (Mauguin) à 38,2% (Queysanne-Revuz), ce qui est considérable.

De même, la moyenne par page varie de 0,22 à 1,62.

6.3.2: pour la classe de seconde.

6.3.2.1: Queysanne-Revuz - 2de CT - Sur 64 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
35	20	55	36,4%

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
71	64	1,1

6.3.2.2: Monge - 2de CT - Sur 89 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
270	2	272	0,7%

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
6	89	0,06

Cette fois-ci, les différences sont extrêmement marquées: 0,7% et 36,4% pour le taux, 0,06 et 1,10 pour la moyenne par page.

6.4: Etude de manuels de même niveau dans deux collections dont l'une a pris la suite de l'autre chez le même éditeur.

Pour cette étude, j'ai choisi:

i) deux livres de Terminale:

- Queysanne-Revuz - Terminale CDE - 1974
- Gourion-Novelli - Terminale CE - 1979

J'ai fait les relevés pour un même chapitre intitulé dans les deux livres: "Fonction numérique d'une variable réelle: continuité et limites" (le second livre remplace la collection du premier livre, en conservant exactement le même plan et les mêmes divisions en paragraphes et sous-paragraphes).

ii) deux livres de Troisième:

- Queysanne-Revuz - 3ème - 1974
- Corieu-Gourion-Lixi-Goutodier-Rougeau - 1980

De même, ici aussi, le second livre remplace le premier. Le chapitre étudié s'intitule: "Applications linéaires et Applications affines."

6.4.1: pour la Terminale.

6.4.1.1: Queysanne-Revuz - Terminale CDE - Sur 41 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
39	7	46	15,2%

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
3 2	4 1	0 , 7 8

6.4.1.2: Gourion-Novelli - Terminale CE - Sur 42 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
3 9	1 0	4 9	2 0 , 4 %

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
2 2	4 2	0 , 5 2

6.4.1.3: Conclusions.

Pour les tableaux a), le taux a augmenté de 15,2% à 20,4%. Par contre, pour les tableaux b), les moyennes ont diminué de 0,78 à 0,52. Les différences sont nettes, mais beaucoup moins marquées que celles rencontrées en 6.3 (même classe et collections différentes).

6.4.2: pour la classe de 3ème.

6.4.2.1: Queusanne-Reyuz - 3ème - Sur 26 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
1 9	7	2 6	2 6 , 9 %

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
1 0	2 6	0 , 3 8

6.4.2.2: Corieu-Gourion-... - 3ème - Sur 23 pages.

a)

PUD sans Marqueurs	PUD avec Marqueurs	Total PUD	Taux des Marqueurs
2 2	3	2 5	1 2 %

b)

Total des Marqueurs	Nombre de pages	Moyenne par page
8	2 3	0 , 3 4

6.4.2.3: Conclusions.

Ici, contrairement à la Terminale, le taux des tableaux a) a nettement baissé, mais, là encore, beaucoup moins qu'entre les collections différentes vues en 6.3. Quant à la moyenne des tableaux b), elle n'a pratiquement pas changé.

Ce que l'on peut conclure de ces tableaux est que l'usage des Marqueurs ne se fait que suivant l'inspiration des auteurs. Il n'est fonction ni du niveau de la classe, ni de la date d'édition.

La fréquence des Marqueurs n'est jamais négligeable et est parfois considérable.

CONCLUSIONS

1. Conclusions techniques.

Il nous semble que les usages possibles des différents Marqueurs peuvent être résumés dans le tableau suivant.

	renfor- ceur/indicateur/indicateur de A	renfor- ceur/indicateur de E	renfor- ceur/indicateur de {com- préhension}	renfor- ceur/indicateur de {image}	renfor- ceur/indicateur de de \rightarrow	renfor- ceur/indicateur de d'antériorité de mutificat	renfor- ceur/indicateur de postériorité de mutificat	annula- teur de restric- tion
quelconque	X	?	X	X	X		X	X
arbitraire	X	?	X	X	X		X	X
donné	X	X				X		
fixé	X					X		
fixe	X	X				X		
choisi	X					X		
variable			X	X	X		X	

- indique que c'est un cas qui se produit.
- indique que c'est un cas que nous n'avons pas rencontré, et nous n'avons pas réussi à imaginer un exemple convaincant.
- ? indique que c'est un cas douteux : hésitation entre une \exists -quantification dans une mutification ensembliste-compréhension ({compréhension}), et une mutification ensembliste-image ({image}).

.../...

Dans le rôle d'annulateur de restriction et de renforceur/indicateur d'ordre de mutification, on peut dire que l'emploi de chaque Marqueur est relativement clair (encore que, pour un élève, retrouver le bon ordre des mutifications n'est pas toujours chose facile).

Par contre, dans le rôle de renforceur/indicateur de mutification, il est beaucoup plus difficile de s'y retrouver (un même Marqueur peut être renforceur/indicateur de mutifications différentes). Il n'y a pas de moyen sûr à l'avance qui nous indique à quelle mutification on a affaire ; seul le contexte peut le dire. Un élève pourra-t-il toujours s'en sortir seul?

Remarque : puisque \lceil donné \rceil peut intervenir dans le rôle de renforceur/indicateur de \exists -quantification, on peut se demander pourquoi il n'en est pas de même pour \lceil fixé \rceil et \lceil choisi \rceil . Bien sûr, on peut rencontrer des phrases telles que :

- \lceil On peut choisir α tel que \rceil

- \lceil Il est possible de fixer y de telle sorte que \rceil
dans lesquelles on reconnaît une \exists -quantification (grâce aux mots \lceil peut \rceil et \lceil possible \rceil), ou encore des phrases telles que :

- $\lceil \alpha$ peut être choisi de telle sorte que \rceil

Mais dans tous ces cas (y compris le dernier, où \lceil choisi \rceil intervient dans le bloc \lceil être choisi \rceil qui est une forme passive de \lceil choisir \rceil), il ne s'agit pas de Marqueur au sens défini dans ce travail (cf. 1.1.4.).

2. Conclusions pédagogiques.

Ce travail constitue une étude linguistique de type monographique sur un point très particulier du langage mathématique : l'emploi des mots que nous avons appelés Marqueurs. Nous pensons que des études monographiques portant sur d'autres points particuliers conduiraient à des conclusions générales analogues. De façon sommaire, ces conclusions sont les suivantes :

a) du point de vue de sa structure linguistique (c'est à dire indépendamment

.../...

dé la complexité proprement mathématique des contenus), le langage utilisé dans les manuels de l'Enseignement Secondaire est essentiellement le même (et en tout cas, est aussi compliqué) que celui utilisé dans l'Enseignement Supérieur ou dans les articles à l'usage des mathématiciens professionnels.

b) ce langage utilise un grand nombre de procédés spécifiques, souvent subtils, parfois d'usage délicat, et dont la connaissance et la compréhension ne peuvent absolument pas être présumées (non seulement chez l'enfant, mais même chez l'adulte cultivé non mathématicien).

c) parmi ces procédés, il y a l'utilisation de certains mots dont l'utilité est variable : ils sont parfois indispensables (du moins en l'absence d'expressions plus explicites mais plus lourdes), parfois simplement utiles, parfois superflus, voire dangereux.

Par ailleurs, il faut noter une différence importante entre les classes de français et de mathématiques : dans les premières, on fait une large place à l'analyse des procédés syntaxiques et sémantiques employés dans les textes étudiés ; par contre dans les secondes, les explications linguistiques sur les procédés particuliers du langage mathématique sont extrêmement rares, d'où une grande difficulté pour beaucoup d'élèves à remédier par eux-mêmes à leurs incompréhensions éventuelles.

Quelles conclusions pratiques peut-on alors tirer sur la façon d'écrire et de rédiger des manuels destinés aux élèves du Secondaire? On peut définir deux attitudes possibles, opposées, entre lesquelles il y a une multitude d'intermédiaires.

La première attitude est de considérer que les élèves doivent être habitués au langage mathématique tel qu'il est (y compris dans ses subtilités et ses abus de langage) grâce à un entraînement pratique sans explications théoriques.

La seconde attitude consiste à n'utiliser dans les textes destinés aux élèves du Secondaire que des procédés linguistiques simples et dûment expliqués.

Quelle que soit la solution adoptée, il nous semble que les Professeurs de mathématiques doivent être capables de tout expliquer aux élèves.

Dans le cas particulier des Marqueurs, il nous paraît que leur usage devrait être réduit au minimum, uniquement aux cas où ils seront réellement utiles, et avec

.../...

les explications nécessaires.

Beaucoup de points restent à exploiter concernant cette étude, et en particulier nous regrettons de n'avoir pas pu faire des études expérimentales auprès des élèves eux-mêmes. Nous espérons tout de même que ce modeste travail contribuera à aider les enseignants de mathématiques dans leur tâche.

DIFFICULTES LINGUISTIQUES ET PEDAGOGIQUES SOULEVEES
PAR L'EMPLOI, DANS LES TEXTES MATHEMATIQUES, DE
CERTAINS ADJECTIFS MARQUEURS DE VARIANCE.
(Exemplés principalement empruntés aux manuels
du Second Degré)

ERRATA

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 0.1.1., la typographie des auteurs cités dans cette étude n'a pas pu être respectée. C'est un inconvénient lorsque l'écriture de ces citations est ainsi rendue plus lourde ou moins claire. Par exemple, page 69 aux lignes 8 et 10, un espace plus large devrait exister entre " \mathbb{R} " et " $|\cos x|$ " d'une part, et entre " \mathbb{R} " et " $k(x) - k(x_0)$ " d'autre part ; à la ligne 12, l'astérisque devrait être plus rapproché du signe + dans " \mathbb{R}^* " (idem page 100). Par ailleurs, à des endroits différents de cette brochure, les espacements entre les lignes ne sont pas toujours corrects. Par exemple page 22, un double interligne serait nécessaire entre "Soit M un point choisi" et "De même on peut écrire", tandis qu'un seul suffirait entre "Soit O un point fixe du plan" et "Mais on n'écrira pas". Des problèmes analogues se rencontrent aux pages 48 et 76.

Nous nous excusons du problème de tirage pour le haut de la page 423.

- page 8 : ligne 10, après "certains automatismes." ajouter la phrase : "Toutefois un point placé à cet endroit séparerait plus nettement les deux phrases et serait donc préférable".
- page 22 : ligne 2, après "apparente" remplacer la virgule par deux points.
ligne 3, supprimer "cer-".
ligne 4, après "cercle (c),..." mettre un point-virgule.
ligne 5, après "points de base d'un faisceau" remplacer la virgule par un point-virgule.
- page 26 : ligne 13, remplacer les guillemets par des crochets de citation ([,]).
- page 33 : ligne 16, rajouter après "la phrase suivante" : "(exclue en pratique)".
- page 39 : ligne 8 à partir du bas de page, remplacer "dans la rubrique "Cas douteux" par "sous la rubrique 2.3.2.3."
- page 41 : ligne 13, lire "Sans doute y aurait-il" à la place de "Sans doute il y aurait-il".
- page 44 : formule c) du 2.2.3.2. : $\mathcal{U}, x_1, E_1, \dots, x_n, E_n$, ainsi que les symboles \subseteq devraient se trouver sur la même ligne.
- page 45 : ligne 9, lire "mutification" à la place de "ntufication".
- page 46 : dernière ligne, à la place de "Dans cet autre exemple" lire "Dans ce dernier exemple".
- page 47 : ligne 10 à partir du bas de page, lire " $0 \leq x \leq 3$ " au lieu de " $0 \leq x \leq -3$ ".
- page 48 : ligne 5 à partir du bas de page, supprimer la parenthèse après "récente".
- page 53 : exemple (2)18, mettre un crochet de citation au début.
exemple (2)21, souligner "Soient."
- page 54 : ligne 14, mettre un crochet de citation au début.
- page 57 : exemple (2)27, souligner "Si u et v sont des vecteurs de E"
exemple (2)28, souligner "a étant un nombre réel".
- page 59 : ligne 10, mettre " $\frac{a}{x}$ " entre des crochets de citation.
- page 63 : ligne 1, remplacer "Dans cet exemple" par "Dans l'exemple suivant"
ligne 6, $M, \rightarrow, \leq, a_1, \vec{M}_1$ devraient se trouver sur la même ligne.
- page 65 : après l'exemple (2)42, ajouter : "Remarque : Bien que l'exercice soit donné sous la forme interrogative, l'auteur ne termine pas son texte par un point d'interrogation comme il serait correct de le faire."

THESE DE 3^{ème} CYCLE
EN
DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PRESENTÉE PAR RAKOTOVOAVY Farasololalao

SUR LE SUJET :

DIFFICULTÉS LINGUISTIQUES ET PÉDAGOGIQUES SOULEVÉES
PAR L'EMPLOI, DANS LES TEXTES MATHÉMATIQUES, DE
CERTAINS ADJECTIFS MARQUEURS DE VARIANCE.

(Exemples principalement empruntés aux manuels
du Second Degré)

SOUTENUE LE 26 JANVIER 1983 DEVANT LE JURY :

André REVUZ

Président

Daniel LACOMBE

Rapporteur

Josette ADDA

Examineur

Jérôme CHASTENET de GERY

Examineur

Oswald DUCROT

Examineur

Bernard JAULIN

Examineur

page 69 : avant dernière ligne, remplacer " $\alpha < \epsilon$ " par " $\alpha \leq \epsilon$ ".

page 70 : lignes 11, 12, 13, supprimer la phrase "Cette catégorie.... sous-catégorie particulière."

page 72 : ligne 2, lire "considérée" au lieu de "considérés."

page 76 : ligne 10, lire "Ce syntagme R est presque toujours" au lieu de "Ce syntagme R est toujours".

page 78 : ligne 4, après "restrictive" ajouter "indécomposable".
ligne 13, remplacer "ce syntagme" par "le syntagme."

page 80 : ligne 4, à partir du bas de page, lire " $\sum_{i=1}^p$ " au lieu de " $\sum_{i=1}^n$ ".

page 83 : ligne 11 avant le bas de page, après "le sens de la phrase" ajouter "(cf. 1,4,5.)".

page 84 : ligne 7 avant le bas de page, après "la phrase de PUD" ajouter "du type étudié ici."

page 89 : avant dernière ligne, lire "Supérieur" au lieu de "supérieur".

page 90 : ligne 10, lire "trouver" au lieu de "rouver."

page 93 : ligne 10, supprimer la virgule après "c"

page 104 : ligne 8, lire "peut-être" à la place de "peut être."
ligne 9, remplacer "être indépendants" par "représenter des vecteurs indépendants."

page 109 : mettre la ligne 5 avant le bas de page entre des crochets de citation.

page 112 : ligne 9, supprimer le soulignement de "point."

page 113 : ligne 15, mettre " \mapsto " entre des crochets de citation.
ligne 5 à partir du bas de page, supprimer le soulignement de "complexe."

page 116 : ligne 9 avant le bas de page, mettre la parenthèse fermante après "[fixé]" et non pas après "[fixer]".
ligne 10 à partir du bas de page, mettre la parenthèse fermante après "[chercher]" et non pas après "[résoudre]".

page 117 : ligne 12, remplacer "a = 1" par "a = -1."

page 118 : ligne 6 avant le bas de page, remplacer "quoique" par "quoi que".

page 125 : ligne 10, lire "par rapport à la \forall -quantification sur la variable $\lceil x \rceil$ " à la place de "par rapport aux \forall -quantifications sur les variables $\lceil a \rceil$ et $\lceil x \rceil$ ".
ligne 4 à partir du bas de page, lire "accompagné soit" au lieu de "soit accompagné."

page 126 : ligne 3 à partir du bas de page, lire " $0 \leq \xi \leq 1$ " au lieu de " $0 \leq \xi \leq d$ ".
entre les lignes 13 et 9 avant le bas de page, remplacer respectivement "A" et "B" par "A" et "B".

page 139 : ligne 10, après "[donné]" ajouter "ainsi que [fixe]".