



HAL
open science

Incompressible optimal transport : dependence to the data and entropic regularization

Aymeric Baradat

► **To cite this version:**

Aymeric Baradat. Incompressible optimal transport : dependence to the data and entropic regularization. Analysis of PDEs [math.AP]. Université Paris Saclay (COMUE), 2019. English. NNT : 2019SACLX016 . tel-02270693

HAL Id: tel-02270693

<https://theses.hal.science/tel-02270693v1>

Submitted on 26 Aug 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
de
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : École Polytechnique

Laboratoire d'accueil : Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, UMR 7640 CNRS

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Aymeric BARADAT

Transport optimal incompressible :
dépendance aux données et régularisation entropique

Thèse soutenue le : 17 juin 2019 à : Palaiseau

Après avis des rapporteurs :

GUILLAUME CARLIER (Professeur au Ceremade, Université Paris-Dauphine)

PIERRE-EMMANUEL JABIN (Professeur au CSCAMM, University of Maryland)

Jury de soutenance :

YANN BRENIER (DR au DMA, ENS Paris) Codirecteur de thèse

GUILLAUME CARLIER (Professeur au Ceremade, Université Paris-Dauphine) Rapporteur

ISABELLE GALLAGHER (Professeure au DMA, ENS Paris) Présidente

FRANÇOIS GOLSE (Professeur au CMLS, École Polytechnique) Examineur

DANIEL HAN-KWAN (CR au CMLS, École Polytechnique) Codirecteur de thèse

CHRISTIAN LÉONARD (Professeur à Modal'X, Université Paris Nanterre) Examineur

Remerciements

Les remerciements d'une thèse de maths (résultats sans doute extrapolables à d'autres disciplines) sont en général très structurés :

1. Le premier point est **obligatoire** : on commence par remercier ses directeurs de thèses, ses rapporteurs et son jury, puis l'on dit être très honoré. Il faut dire que sauf exception (dont je ne fais pas partie), on l'est !
2. Ensuite, on remercie tout ceux qui ont participé à notre quotidien de doctorants : les équipes administratives auxquelles on a eu affaire, les chercheurs de nos laboratoires, les autres doctorants...
3. Vient le tour des chercheurs des autres laboratoires qui ont joué un rôle dans notre thèse : nos collaborateurs, les gens avec qui on a discuté, qui nous ont encadré pendant notre scolarité, qui nous ont donné l'occasion de faire des exposés...
4. Alors, on remercie les personnes *qui nous ont transmis leur amour des sciences*, ou *qui ont cru en nous*, bref ceux qui ont construit de leurs mains le doctorant passionné que l'on est. Ils sont souvent profs au lycée ou après.¹
5. Enfin, on remercie tous les autres, ceux qui font partie de la vie une fois oublié le boulot : la famille, les amis et les gens que l'on côtoie dans nos activités annexes. La plupart du temps, cette partie contient une phrase du type *Cette thèse aurait vraiment été trop dure sans... ou Je tiens également à remercier ... pour les bons moments passés à la plage/au bar/au foot.*

J'ai toujours été dans la case des bons élèves. Outre les éléments liés à la note de bas de page 1 et un besoin probablement malsain de reconnaissance, cela révèle ma capacité à comprendre les consignes et mon appétence à les respecter en toute circonstance. Je vais donc suivre studieusement les points 1 à 5. Cependant mis à part le premier point pour lequel on ne peut vraiment pas se permettre de plaisanter, je vais vous proposer un petit jeu.² Mon texte sera à *trou*. Vous devrez vous même trouver l'emplacement de chacun des noms de la liste fournie à la fin de cette section. En mettant les lettres rouges de chaque nom dans leur ordre d'apparition dans le texte, vous trouverez une phrase résumant l'une des dernières slides de l'exposé. Attention : pour les moins spécialistes d'entre vous, il faudra peut-être rester attentif !

¹On élude en général le rôle de la reproduction sociale dans notre choix de carrière. Qui remercier sinon !? On préférera donc toujours les histoires de rencontres extraordinaires et de choix individuels audacieux. Ainsi, je ne rappellerai pas que ma mère est chercheuse, et que mon père était ingénieur.

²Cela fait également partie des consignes d'essayer dans la mesure du possible de rendre tout cela ludique, de façon à occuper les pauvres malheureux qui sont venus à la soutenance en pensant à tort que ça ne pouvait pas être aussi pénible que ce qu'on dit.



1. Je commence donc par remercier mes deux directeurs de thèse, Yann Brenier et Daniel Han-Kwan. J'ai énormément apprécié d'évoluer sous la supervision de deux mathématiciens non seulement que j'admire énormément, mais qui ont en plus des approches et des visions très différentes de l'analyse sur des sujets pourtant connexes, approches dont j'espère avoir réussi à m'imprégner au moins un tout petit peu. J'espère surtout avoir l'opportunité de continuer à apprendre d'eux dans le futur.

Je suis très reconnaissant envers Guillaume Carlier et Pierre-Emmanuel Jabin d'avoir accepté de rapporter ma thèse, et je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux. Je remercie également Isabelle Gallagher, François Golse et Christian Léonard d'avoir accepté de faire partie de mon jury. C'est pour moi un immense honneur de soutenir devant des chercheurs pour qui j'éprouve tant d'estime.

2. Un grand merci au personnel administratif extraordinaire que j'ai eu la chance de côtoyer au CMLS, [redacted], [redacted] et [redacted], et au DMA, [redacted], [redacted], [redacted] et [redacted]. Il doit falloir bien du courage pour travailler dans des labos de matheux (à moins que je ne prenne mon cas pour une généralité). Je pense quand même que la peur et la honte de trop vous ennuyer m'a fait progresser (un peu) dans les diverses démarches qui jalonnent la vie de doctorant. Merci aussi à [redacted] que j'ai eu le plaisir de retrouver en enseignant au département d'économie de l'ENS après qu'elle m'eut accompagné durant ma scolarité au DMA.

Merci à tous les doctorants et post-doctorants de mes deux labos, en particulier à ceux avec qui j'ai partagé mes bureaux, à savoir [redacted], [redacted], [redacted] et [redacted] pour ce qui est de l'École Polytechnique et [redacted], [redacted], [redacted] et [redacted] pour ce qui est de l'ENS. Puisque je partageais mon temps, je n'étais pas le plus assidu, ce qui m'a donné l'impression de profiter de votre présence sans donner beaucoup en échange. J'espère que c'est sans rancune ! Plus généralement, je suis très reconnaissant envers les membres de ces deux labos pour leur accueil et leur convivialité, et j'ai une pensée particulière pour mon petit demi-frère de thèse [redacted], pour [redacted] dont j'admire le franc-parler et pour nos nombreuses discussions, et pour [redacted] qui se démène pour construire du lien mathématique au sein de l'équipe d'analyse du CMLS.

3. J'ai beaucoup de gratitude envers toutes les personnes qui m'ont guidé à un moment ou à un autre de ma scolarité, à commencer par [redacted] qui a été une tutrice idéale à l'ENS. Par la suite j'ai eu la chance de faire un stage inoubliable à [redacted] sous la supervision de [redacted], qui en plus d'avoir été un encadrant exceptionnel, est toujours resté par la suite incroyablement bienveillant à mon encontre. Bien qu'il ait déjà été cité, je me dois de remercier à nouveau [redacted] dont l'humanité, la gentillesse et la générosité on fait de lui non-seulement un directeur de mémoire fantastique (j'ai adoré chaque rendez-vous au Général Beuret !), mais aussi et surtout un soutien constant par la suite.

J'ai eu le bonheur de travailler avec [redacted] à Lisbonne. C'était vraiment super, j'ai rarement été aussi captivé par un projet (je ne sais pas si beaucoup de chercheurs font des maths par SMS !). C'est vraiment ce genre de rencontres qui me donne envie de faire de la recherche. C'est donc tout naturellement que je remercie également [redacted], [redacted] et [redacted] sans qui cette collaboration n'aurait pas pu avoir lieu.

Je voudrais remercier [] qui après avoir été un très bon camarade de promo à l'ENS, est devenu un collègue avec qui je prends beaucoup de plaisir à échanger et dont j'apprécie énormément la sincérité et la droiture d'esprit. Je remercie également son directeur de thèse, [], qui a joué un rôle important dans mon intégration à la communauté des "transporteurs".

Je remercie aussi [] parce que je crois qu'il m'a expressément demandé de le faire, et mon grand demi-frère de thèse [] pour son enthousiasme inébranlable.

4. Ici, je me dois de citer mon professeur de Physique-Chimie au lycée : []. J'espère ne pas l'avoir déçu en choisissant les maths. Je ne comprends toujours pas trop ce qui m'a fait louper la sortie "Physique" à l'ENS. Probablement la faute en incombe-t-elle à [], mon professeur de maths en Spé.

5. Pour cette dernière partie, je vais commencer par remercier les colocataires avec qui j'ai beaucoup aimé partager mon quotidien de thésard (et même un peu avant) : ma préférée [], et les autres [], [] et [].

Ensuite, un grand merci à mes potes de Longju que j'aimerais voir plus souvent [], [], [], [] et []. Je suis fier de nous d'être toujours en contact et j'espère qu'on aura encore des moments à nous dans l'avenir. Merci plus généralement à tout ceux de mon club d'athlé [], qui est resté tant que je le fréquentais mon endroit préféré pour sortir du monde académique.

Je ne peux pas repenser à mes études sans une pensée émue pour mes acolytes durant les années prépa, [], [], [] et [].

Merci aux [] de pouvoir être cités tous en même temps, et vive le ski! Merci aussi à ces satanées féministes de l'ENS [], [], [], [] et []. Il est unique, on n'arrive à le grouper qu'avec tout le monde ou avec personne, je l'ai aussi connu à l'ENS, il a une boucle d'oreille et il n'aspire qu'à aider les autres, je tiens à remercier [] !

Cette thèse aurait sans-doute été beaucoup plus triste sans tous ces films de super-héros ou aux 7 Parnassiens selon l'humeur, ces soirées sushis, le Japon... Un grand merci à vous [], [] et [].

Merci beaucoup à toi, ma meilleure pote de Master []. Le fais que tu aies toujours un pas d'avance me permet de profiter de tes conseils avisés. Bravo encore pour Poitiers!

Enfin, je voudrais remercier ma famille. Comme une partie d'entre elle est Corse, elle est trop nombreuse pour qu'il soit possible de citer tout le monde. Merci tout de même à [], [] et [], je m'en veux de vous avoir fait dépenser cette énergie déraisonnable pour ma scolarité. Merci à [] que j'ai trop peu connu, mais qui a probablement contribué à développer mon goût pour les sciences et ma curiosité. Merci aussi à mon beau-père [] pour Fontainebleau, et tout ces calculs de hauteur de ponts et viaducs. Merci à [] (désolé, cette thèse ne porte pas sur le Big-Bang) et [] pour toutes ces belles randos, et à [] pour quand il n'y a pas de rando. Merci aussi à

d'avoir un "x" dans son prénom. Je m'arrête en remerciant du fond du cœur
, je suis très touché que vous ayez souhaité venir à ma soutenance.

Et désolé à tous les autres que je n'ai pas cité, l'exercice n'est pas si facile !



Liste des noms :

Albane Trém <u>e</u> au	François Gén <u>e</u> rau	Mathilde Beau <u>f</u> ils
Alexandre Poli	Françoise Dess <u>a</u> lle	Membres du groupe Arê <u>ch</u> es
Alexandrine Torren <u>t</u> s	Hernan Iriarte Carrasc <u>o</u>	Mes grands-mè <u>r</u> es
Ambre Rosse	Hug <u>o</u> Lavenant	Mon cousin <u>X</u> avier
Amélie Castelain	Iván Moyano	Mon frè <u>r</u> e Anselin
Amélie Privé	<u>J</u> acko Rastikian	Mon oncl <u>e</u> Éric
Amine Marrakchi	Jaime Bustillo	Mon pè <u>r</u> e
Ana Bela Cruzeiro	Jaouad Mourta <u>d</u> a	Nicolas Brigoulei <u>x</u>
Anne-Fleur Multon	Jean-Claude Zambrini	Oli <u>v</u> ier Gargominy
Bénédicte Auffray	Julie Beauté	<u>P</u> ise
Car <u>o</u> le Jupp <u>i</u> n	Laure Saint-Raymond	Pascale Fuseau
Cécile Huneau	Laurence Vin <u>c</u> ent	Rémi Côme
<u>C</u> écile Taing	Léonard Monsaing <u>e</u> on	Salomé Dehaut
Charles Hadfield	Luca Nenna	Timothée Fluteau
Christian Léonard	Lucie Belloir	Thomas Budzinski
David Tewodrose	Lu <u>i</u> gi Ambrosio	Thomas Gallou <u>ë</u> t
Del <u>p</u> hin Sénizergues	Ma cousine Anaï <u>s</u>	<u>T</u> ien-Vinh Nguyen
Edouard Balzin	Ma cousine Chloé	Tobias Bar <u>k</u> er
Elisabeth Miller	Ma mère	Tris <u>t</u> an Tourniaire
<u>E</u> ssonne Athletic	Ma sœur Mathilde	Valentine Copin
<u>E</u> vrard Léon	Marine Amier	Vincent <u>t</u> Reynaud
Filippo Santambrogio	Matthieu Kochersperger	Yves Duval
Flavien <u>S</u> imon	Matthieu Piquerez	Zaïna Elmir



Avez-vous trouvé la phrase mystère ?

,

-----.

Sommaire

1	Introduction	11
1.1	Le transport optimal incompressible	13
1.1.1	Arnol'd et la formulation variationnelle de l'équation d'Euler incompressible	13
1.1.2	Les résultats positifs d'Ebin et Marsden	18
1.1.3	Les contre-exemples de Shnirelman	19
1.1.4	Le transport optimal incompressible comme relaxation du problème d'Arnol'd	20
1.1.5	Modèles équivalents et variantes	26
1.1.6	Champ de pression	32
1.2	L'équation d'Euler cinétique	39
1.2.1	Présentation	40
1.2.2	La limite quasineutre de l'équation de Vlasov-Poisson	43
1.2.3	Condition de Penrose	44
1.2.4	Caractère mal posé de l'équation d'Euler cinétique	47
1.2.5	Une autre limite singulière : l'équation de Vlasov-Benney	48
1.3	Régularisation entropique du transport optimal incompressible	49
1.3.1	Le théorème de Sanov	50
1.3.2	Le problème de Schrödinger en mécanique statistique	52
1.3.3	Théorème de Girsanov à entropie finie	55
1.3.4	Formulation à la Benamou-Brenier	55
1.3.5	Le problème de Brödinger	58
1.4	Aperçu des principaux résultats de la partie I	60
1.4.1	Chapitre 2 : Dépendance continue de l'action optimale et du champ de pression par rapport aux données	61
1.4.2	Chapitre 3 : Caractère mal posé de l'équation d'Euler cinétique et de l'équation de Vlasov-Benney	62
1.4.3	Chapitre 4 : La pression n'est pas une fonction lisse des données	66
1.4.4	Bilan de la partie I	67
1.5	Aperçu des principaux résultats de la Partie II	68
1.5.1	Chapitre 5 : Existence d'un champ de pression pour le problème bruité	68
1.5.2	Chapitre 6 : Limite de bruit nul dans le problème de Brödinger	69
1.6	Récapitulatif des principales notations, et des principaux problèmes de minimisation.	72
1.6.1	Types de compétiteurs	72
1.6.2	Notations diverses	72
1.6.3	Fonctionnelles	73
1.6.4	Problèmes de minimisation	74

I	Dependence of the incompressible optimal transport problem with respect to endpoints	76
2	Continuous dependence of the optimal action and of the pressure field with respect to endpoints	77
2.1	Notations	77
2.2	Hölder continuity of the optimal action	78
2.3	Hölder continuity of the pressure field	86
	Appendices	91
2.A	Proof of Lemma 2.2.3	91
3	Nonlinear instability of Vlasov type equations around rough velocity profiles	95
3.1	Introduction of the chapter	95
3.1.1	Measure-valued solutions	95
3.1.2	The results	96
3.2	Structure of the proof	98
3.2.1	Analytic regularity with respect to the position	98
3.2.2	Outline of the Chapter	98
3.3	Presentation of the abstract model	99
3.3.1	The abstract model	99
3.3.2	Gradient structure	100
3.3.3	Assumptions	101
3.3.4	Examples	102
3.4	The linearized system	102
3.4.1	Spectral analysis	103
3.4.2	Definition of analytic norms	105
3.4.3	Sharp semigroup bounds	106
3.5	Nonlinear instability	115
3.5.1	Statement of the main result	115
3.5.2	Properties of the analytic norms	117
3.5.3	Estimates for the source term in the Duhamel formulation	119
3.5.4	A Cauchy-Kovalevskaja theorem	123
3.5.5	Conclusion: proof of Theorem 3.5.1	132
3.6	Consequences	132
3.6.1	Almost Lyapounov instability	132
3.6.2	Ill-posedness when the spectrum is highly unbounded	137
3.6.3	The specific case of the kinetic Euler equation	141
	Appendices	148
3.A	Superpositions of Diracs are unstable	148
3.B	Proofs of the properties of the analytic norms	149

4	The pressure field is not a smooth function of the endpoints	154
4.1	Outline of the chapter	154
4.2	Classical mechanics in a semi-concave potential	155
4.2.1	Semi-concave functions on the torus	155
4.2.2	Semi-concavity of the potential in classical lagrangian mechanics	159
4.3	Equivalence of the two models	165
4.3.1	Weak solutions to the kinetic Euler equation and superposition principle . . .	165
4.3.2	A solution to incompressible optimal transport induces a weak solution to the kinetic Euler equation	166
4.3.3	A weak solution to the kinetic Euler equation for small times induces a solution to incompressible optimal transport	167
4.4	Instability of the relaxed solutions	170
4.4.1	An existence result for the kinetic Euler equation	170
4.4.2	Estimates on the pressure field	172
4.4.3	Estimates for the endpoints condition	173
4.4.4	Proof of Theorem 1.4.5	174
II	Entropic regularization of incompressible optimal transport	176
5	Existence of the pressure field	177
5.1	Notations and preliminary results	177
5.1.1	Functional spaces of interest	177
5.1.2	Preliminary results	178
5.2	Existence of the pressure in the multiphasic model MBrö	179
5.2.1	A modified optimization problem	179
5.2.2	Boundedness of the optimal value	181
5.2.3	Characterization of the pressure as a distribution	183
5.2.4	Conclusion of the proof of Theorem 1.5.2	186
5.3	Link between MBrö and Brö	187
5.3.1	Statement of the result	187
5.3.2	Proof of Theorem 5.3.1 using Lemma 5.3.2 and Lemma 5.3.4	189
5.3.3	Proof of Lemma 5.3.2	193
5.3.4	Proof of Lemma 5.3.4	194
5.4	Existence of the pressure in the standard problem Brö	195
5.5	A formal way to derive the equation for the pressure	196
6	Zero noise limit and displacement convexity	198
6.1	Introduction of the chapter	198
6.1.1	Contributions	198
6.1.2	Notations, conventions and preliminary results	201
6.2	Convergence of Brö towards IOT	203
6.3	Convergence of Sch towards OT	210
6.4	Convergence of TPBrö towards TPIOT	214
6.4.1	Gamma convergence	214
6.4.2	Convergence of the pressures	216

6.5	Time convexity of the entropy	218
Appendices		221
6.A	Existence and uniqueness for TPBrö	221
6.B	Properties of the Brownian motion on the torus	222
6.B.1	Brownian bridges on the torus	223
6.B.2	Proof of Lemma 6.2.3	223
6.B.3	Proof of Lemma 6.2.5	225

Chapitre 1

Introduction

Il est d'usage de modéliser l'évolution d'un fluide incompressible et non visqueux par l'équation d'Euler incompressible, un système d'équations aux dérivées partielles qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u \text{ tangent au bord,} \\ u|_{t=0} = u_0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Ici, l'inconnue $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^d$ représente la vitesse des particules de fluide se trouvant à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ à la position $x \in D$, D étant le domaine physique (de dimension d) dans lequel le fluide se meut. On impose la valeur de u à l'instant initial, et on se pose la question de l'évolution ultérieure de u . La deuxième ligne, la *condition de divergence nulle* décrit le caractère incompressible du fluide, et la condition au bord donné par la troisième ligne signifie que les particules de fluides ne peuvent s'échapper du domaine D . Le champ $p = p(t, x)$, le *champ de pression*, est une fonction scalaire qui peut être vue comme une seconde inconnue du problème. En passant à la divergence dans la première ligne, on obtient¹ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \mathbf{div} (u \otimes u), \\ \nabla p + \mathbf{div} (u \otimes u) \text{ tangent au bord.} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

La pression à l'instant t est donc la solution d'une équation elliptique faisant intervenir la vitesse à l'instant t . Cela s'interprète de la façon suivante : p est l'unique champ scalaire (à une fonction du temps près) permettant à la condition de divergence nulle d'être préservée au cours du temps.

L'équation d'Euler incompressible (1.1), introduite par Euler lui-même dans [42] est l'une des premières équations aux dérivées partielles d'évolution jamais écrites. Euler révélait alors toute la puissance du calcul différentiel, qui permettait essentiellement de décrire toute la complexité de l'évolution d'une infinité de particules en interaction par l'étude d'une seule fonction : le champ

¹Si $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a \otimes b$ désigne la matrice de taille $d \times d$ dont le coefficient i, j est $a_i b_j$. L'opérateur noté \mathbf{div} agit sur les champs de matrices, et renvoie un vecteur qui à la k -ième ligne est la divergence au sens standard du champ de vecteur formé par la k -ième ligne du champ de matrices considéré. À cause de la condition de divergence nulle, $(u \cdot \nabla)u = \mathbf{div}(u \otimes u)$. On a choisi cette forme pour bien voir l'analogie avec ce qui se passera plus tard dans un cadre cinétique.

de vitesse, fonction du temps et de la position. Rien n'étant gratuit, il n'arriva pas à résoudre complètement son équation (faute de temps sans doute) et admettait lui-même (traduit en langage contemporain) :

Mais comme on n'a encore que fort peu travaillé sur la résolution de telles équations différentielles à trois variables, nous ne saurions espérer une solution complète de notre équation avant que les bornes de l'Analyse ne soient étendues considérablement plus loin.

Il concluait néanmoins avec optimisme :

Cependant, tout ce que la Théorie des fluides renferme est contenu dans les deux équations rapportées ci-dessus ((1.1), *N.d.A*), de sorte que ce ne sont pas les principes de la Mécanique qui nous manquent dans la poursuite de ces recherches, mais uniquement l'Analyse, qui n'est pas encore assez cultivée pour ce dessein. Partant, on voit clairement quelles découvertes nous restent encore à faire dans cette Science avant que nous puissions arriver à une Théorie plus parfaite du mouvement des fluides.

Sans remettre en doute le génie d'Euler, et malgré le caractère révolutionnaire des travaux dont je viens de parler, ces citations peuvent paraître surprenantes pour un lecteur moderne. En effet, d'une part, on sait aujourd'hui que dans de nombreux cas, on doit ajouter aux équations des termes liés à la viscosité (et donc étudier l'équation de Navier-Stokes) pour obtenir des modèles réalistes. D'autre part, je pense qu'on peut dire que l'analyse n'est toujours pas assez cultivée pour résoudre l'équation d'Euler : même dans l'espace entier \mathbb{R}^3 , on ne sait toujours pas si toutes les solutions régulières de cette équation sont globales en temps, ou si certaines d'entre elles cessent d'exister ou d'être régulières en temps fini.



Dans cette thèse, on voudra étudier un fluide incompressible et non visqueux par une autre approche : de façon lagrangienne, c'est à dire *via* un problème de minimisation, en fixant l'état du système aux instants initiaux et finaux. On le fera grâce au problème de transport optimal incompressible, un modèle introduit par Brenier [20] à la fin des années 80, qui sera mon objet d'étude principal.

La formulation lagrangienne de la mécanique classique et le fameux *principe de moindre action* donnèrent lieu à des avancées spectaculaires, à la fois en physique et en mathématiques. En établissant la notion d'*action* comme quantité clé de la mécanique, elle ouvrait la voie à la mécanique hamiltonienne, puis à la mécanique quantique. En interprétant les trajectoires physiques comme des *trajectoires minimales*, elle fixait les prémisses de la géométrie riemannienne et de la relativité générale.

Le fait d'appliquer un certain formalisme mathématique (dans notre cas le formalisme lagrangien) au cas des fluides incompressibles constitue un double défi d'un point de vue mathématique. D'une part, il faut généraliser les théories existantes dans le cas où le nombre de particules est infini. D'autre part, il faut étudier la contrainte d'incompressibilité, un type d'interaction entre particules qui n'a pas d'analogue pour un système fini. C'est peut-être pour ces raisons qu'Arnol'd et Khesin ouvrent leur livre [7] par la phrase suivante :

Hydrodynamics is one of those fundamental areas in mathematics where progress at any moment may be regarded as a standard to measure the real success of mathematical science.²

Avec ces grandes idées en tête, passons à la présentation des différents problèmes que j'ai étudiés pendant ma thèse. Cette introduction est organisée comme suit.

Dans la Section 1.1, je vais présenter en détails le problème de transport optimal incompressible. J'en expliquerai les motivations, les différentes formulations que l'on rencontre dans la littérature, et je terminerai par décrire ce que l'on sait sur le *champ de pression*, le multiplicateur de Lagrange de ce problème de minimisation correspondant à la contrainte d'incompressibilité.

Dans la Section 1.2, je présenterai l'équation d'Euler cinétique, une EDP d'évolution qui apparaît naturellement lorsque l'on étudie les solutions du problème de transport optimal incompressible, et que l'on rencontrera aux Chapitres 3 et 4.

Dans la Section 1.3, j'introduirai les problèmes de régularisation entropique qui ont joué un rôle majeur ces dernières années dans la théorie de transport optimal, et dont j'étudierai la version incompressible dans la Partie II de ma thèse.

Les Section 1.4 et 1.5 offre un panorama des résultats que j'ai obtenus durant ma thèse, et qui seront démontrés dans ce manuscrit.

Enfin, la Section 1.6 est un index des notations les plus utilisées dans ce manuscrit.

1.1 Le transport optimal incompressible

Avant de présenter le problème de transport optimal incompressible, commençons par exposer le point de vue proposé par Arnol'd sur la dynamique des fluides parfaits et incompressibles.

1.1.1 Arnol'd et la formulation variationnelle de l'équation d'Euler incompressible

Arnol'd fut le premier à introduire, dans [6, 7], une façon de décrire un fluide incompressible de façon lagrangienne. Plus précisément, on va voir qu'il a donné une interprétation de l'équation d'Euler (1.1) comme l'équation géodésique (formelle) sur un groupe de Lie (formel) de dimension infinie muni d'une métrique invariante à droite. Voyons ce que cela veut dire.



Je vais me placer dans le cas où les particules sont indexées. Ce sera peut être vu par le lecteur comme un contresens historique, mais cela permettra de comprendre où sont les hypothèses et ce que l'on va relaxer plus tard. Je me donne donc un ensemble d'indices \mathcal{I} (infini), et une mesure de probabilité \mathbf{m} sur \mathcal{I} qui pour chaque sous ensemble $A \subset \mathcal{I}$ me donne $\mathbf{m}(A)$ la masse des particules dont l'indice se trouve dans A . (Je ne me poserai pas de question relative à la mesurabilité ou aux ensembles de mesure nulle dans cette sous-section.)

Imaginons que les particules évoluent dans ouvert borné $D \subset \mathbb{R}^d$, muni de sa mesure de Lebesgue (normalisée) Leb^3 . Raisonner de façon lagrangienne, c'est fixer l'état du fluide aux instants initiaux

²L'hydrodynamique est un de ces domaines majeurs en mathématique où tout progrès peut être considéré comme un étalon permettant de mesurer le véritable succès de la science mathématique.

³En fait, toutes les considérations de cette sous-section pourraient être faites dans une variété Riemannienne orientable munie de sa forme volume sans grand changement.

et finaux. On va appeler $t = 0$ l'instant initial, $t = 1$ l'instant final⁴, et pour chaque $i \in \mathcal{I}$, on va se donner $x_0^i \in D$ le point de départ de la particule correspondante et $x_1^i \in D$ son point d'arrivée. En l'absence de potentiel, dire que la particule i satisfait un principe de moindre action entre x_0^i et x_1^i , c'est dire que sa trajectoire $t \in [0, 1] \mapsto x^i(t) \in D$ satisfait $x^i(0) = x_0^i$, $x^i(1) = x_1^i$, et minimise l'action

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{x}^i(t)|^2 dt$$

parmi les courbes joignant x_0^i à x_1^i . Ici, on va vouloir que le système de particules dans son ensemble satisfasse un principe de moindre action. On va donc chercher à minimiser l'action totale :

$$\frac{1}{2} \iint_0^1 |\dot{x}^i(t)|^2 dt dm(i). \quad (1.3)$$

Sans interaction, ce problème est le même que celui consistant à minimiser l'action trajectoire par trajectoire. Les particules se déplacent donc en ligne droite, à moins que les bords du domaine ne les en empêchent. Mais nous voulons décrire une dynamique *incompressible*, et c'est *via* cette condition d'incompressibilité que les particules vont interagir. Pour formaliser cette contrainte, on va demander à ce qu'à chaque instant t et pour chaque sous-ensemble mesurable $A \subset D$ la masse des particules qui sont dans A à l'instant t est $\text{Leb}(A)$ ⁵ :

$$m(\{i, x^i(t) \in A\}) = \text{Leb}(A). \quad (1.4)$$

Une autre façon de le dire est que pour toute fonction φ mesurable et bornée sur D ,

$$\int \varphi(x^i(t)) dm(i) = \int \varphi(x) dx. \quad (1.5)$$

Encore une fois, cette contrainte est purement infini dimensionnelle : il n'existe pas de contrainte similaire pour un nombre fini de particules. Notons également que cette condition aux instants $t = 0$ et $t = 1$ impose une condition sur la façon que l'on a de choisir les positions initiales et finales de chaque particule de fluide.

Le problème auquel on aboutit est donc le suivant :

Problème 1.1.1 (Problème pour des particules indexées). Étant données les positions initiales et finales de chaque particule de fluide (x_0^i) et (x_1^i), choisies de façon à ce que la contrainte d'incompressibilité (1.4) soit satisfaite à ces instants, trouver des trajectoire (x^i) de sorte que :

- pour chaque i , x^i joint x_0^i à x_1^i ,
- à chaque instant, la contrainte d'incompressibilité (1.4) est satisfaite,
- l'action (1.3) est minimale parmi tous les choix de trajectoires respectant les deux premiers points.

⁴Sauf mentions explicite du contraire, tous les problèmes d'optimisation que l'on va présenter seront écrits entre les instants 0 et 1. Cependant, gardons en tête qu'il s'agit d'un choix arbitraire et que tous ces problèmes peuvent s'écrire entre deux instants quelconques. En particulier, à de nombreuses reprises dans cette thèse, on étudiera nos problèmes de minimisations entre les instants 0 et $T > 0$, ou entre les instants ε et $1 - \varepsilon$ où $\varepsilon \in]0, 1/2[$.

⁵On traite le cas d'un fluide de densité constante. Le volume et la masse représentent donc essentiellement la même chose.

C'est maintenant que l'on doit faire des hypothèses. Imaginons que D soit régulier et que l'on ne souhaite regarder que les dynamiques au cours desquelles pour chaque t , il existe un difféomorphisme Φ_t de D tel que pour tout $i \in \mathcal{I}$,

$$x^i(t) = \Phi_t(x_0^i).$$

Outre la question de la régularité, cette restriction impose une propriété plus topologique : *les particules ne peuvent pas se croiser* : si deux particules sont au même endroit au même moment c'est que leurs trajectoires sont les mêmes durant toute l'évolution. En d'autres termes, la trajectoire d'une particule est entièrement déterminée par sa position initiale.

Quitte à considérer que deux particules « collées » sont en fait les mêmes, on peut changer d'indexation et choisir d'indexer directement par cette position initiale. Cela revient à prendre $\mathcal{I} = D$, pour tout $i \in D$, $x_0^i = i$ et nécessairement pour un fluide incompressible, $\mathfrak{m} = \text{Leb}$.

Reformulons la contrainte d'incompressibilité et l'action dans ce cadre. Par exemple avec la formulation (1.5), il faut que pour tout t et tout φ ,

$$\int \varphi(\Phi_t(x)) dx = \int \varphi(x) dx. \quad (1.6)$$

On dit que Φ_t est un difféomorphisme préservant la mesure. Si en plus, Φ_t préserve l'orientation, on note $\Phi_t \in \text{SDiff}(D)$ ⁶. Remarquons que dans ce cadre, l'état final est lui même donné par un élément $\Phi_1 \in \text{SDiff}(D)$.

Pour ce qui est de l'action, on obtient directement

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int |\partial_t \Phi_t(x)|^2 dx dt.$$

Mais souvent, pour décrire les variations d'une famille de difféomorphisme, on préfère considérer le champ de *vitesses eulériennes* :

$$u(t, x) := \partial_t \Phi_t(\Phi_t^{-1}(x)).^7 \quad (1.7)$$

Grâce à l'incompressibilité (1.6) appliqué à u , l'action vaut également

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int |u(t, x)|^2 dx dt. \quad (1.8)$$

On se retrouve donc cette fois avec le problème de minimisation suivant, introduit dans [6] :

Problème 1.1.2 (Problème d'Arnol'd). Étant donné $\Phi_1 \in \text{SDiff}(D)$, trouver le chemin $(\Phi_t)_{t \in [0,1]}$ sur $\text{SDiff}(D)$ joignant l'identité Id à Φ_1 et qui minimise l'action (1.8) où u est déduite de (Φ_t) par la formule (1.7).

Avant de chercher quelles sont les conditions d'optimalité pour ce problème de minimisation, faisons plusieurs remarques.

⁶On se restreint ainsi à la composante connexe de l'identité dans l'ensemble des difféomorphismes préservant la mesure.

⁷En effet, si D était une variété, $u(t, \bullet)$ serait un champs de vecteurs, contrairement à $\partial_t \Phi_t$.

Remark 1.1.3. 1. Ce problème s'interprète comme un problème géodésique.

En effet, on peut voir l'ensemble $\text{SDiff}(D)$ comme une variété Riemannienne formelle de dimension infinie de la façon suivante.

La formule (1.7) permet d'identifier les éléments du tangent à $\text{SDiff}(D)$ au point Φ comme des champs de vecteurs. En fait, les champs de vecteurs que l'on obtient ainsi sont exactement ceux à *divergence nulle et tangents au bord de D* .

En effet, d'une part, si (Φ_t) est un chemin tracé sur $\text{SDiff}(D)$, et si u est sa vitesse eulérienne alors u est tangent au bord de D . C'est simplement une conséquence du fait que les trajectoires $t \mapsto \Phi_t(x)$ ne sortent pas de D . De plus pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(D)$ et tout t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \varphi(\Phi_t(x)) dx &= \int \nabla \varphi(\Phi_t(x)) \cdot \partial_t \Phi_t(x) dx \\ &= \int \nabla \varphi(x) \cdot u(t, x) dx \\ &= - \int \varphi(x) \operatorname{div}(u(t, x)) dx \end{aligned} \tag{1.9}$$

où l'on a utilisé l'incompressibilité à la seconde ligne et la formule de Green-Ostrogradski à la troisième. Mais par (1.6), $\int \varphi \circ \Phi_t$ est constante, donc

$$\int \varphi(x) \operatorname{div}(u(t, x)) dx = 0,$$

et donc u est à divergence nulle.

Réciproquement, si u est un champ de vecteurs à divergence nulle tangent au bord de D et si $\Phi \in \text{SDiff}(D)$, le flot associé à u partant de Φ , c'est à dire la solution de

$$\Phi_0(x) = \Phi(x), \quad \partial_t \Phi_t(x) = u(\Phi_t(x)), \tag{1.10}$$

fournit bien un chemin de difféomorphisme de D passant par Φ à $t = 0$, de vitesse eulérienne u , et le calcul (1.9) permet de vérifier qu'il reste dans $\text{SDiff}(D)$. Le tangent formel de $\text{SDiff}(D)$ est donc bien exactement identifiable aux champs de vecteurs à divergence nulle tangents au bord de D .

En considérant sur cet ensemble la métrique L^2 , on munit cette variété formelle d'une structure Riemannienne, et les actions sur cette variété se calculent exactement par la formule (1.8).

2. L'ensemble $\text{SDiff}(D)$ est également un groupe, et il est intéressant d'observer que la métrique L^2 sur les vitesses eulériennes est une métrique invariante à droite : si (Φ_t) est un chemin sur $\text{SDiff}(D)$ et si $\Psi \in \text{SDiff}(D)$, alors les chemins (Φ_t) et $(\Phi_t \circ \Psi)$ admettent les mêmes vitesses eulériennes, et donc *a fortiori* la même action. On pouvait s'y attendre, car la composition par Ψ correspond à une réindexation des particules : on ne donne plus à la particule qui part du point x le nom x mais le nom $\Psi^{-1}(x)$. Cela ne doit pas changer pour autant la trajectoire de cette particule.
3. Étant connu le point précédent, on voit bien que dans le problème d'Arnol'd, on peut partir de n'importe quel difféomorphisme, et pas seulement de l'identité. Mais ce n'est en fait pas plus général : aller de Φ_0 à Φ_1 est équivalent à aller de Id à $\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1}$.



Condition nécessaire d'optimalité dans le problème d'Arnol'd. Nous montrons ici *formellement* que si (Φ_t) est une solution parfaitement régulière au problème d'Arnol'd, alors sa vitesse eulérienne (1.7) est un solution de l'équation d'Euler (1.1). Nous n'étudions en aucun cas la régularité nécessaire qu'il faudrait connaître de (Φ_t) pour justifier ces calculs, et nous discuterons de l'existence de telles solutions dans les prochains paragraphes.

Conformément à l'énoncé du problème, choisissons $\Phi_1 \in \text{SDiff}(D)$, et supposons que l'on soit capable de trouver un chemin de longueur minimale (Φ_t) joignant l'identité à Φ_1 . Notons u sa vitesse eulérienne.

Nécessairement, si (Ψ_t) est un autre chemin tracé sur $\text{SDiff}(D)$ dont les deux points extrémaux sont l'identité, alors l'action du chemin $(\Psi_t \circ \Phi_t)$ doit être plus grande que celle de (Φ_t) . On va choisir de tels (Ψ_t) d'une façon particulière : pour ξ un champ de vecteurs lisse à divergence nulle et tangent au bord, $h \in \mathcal{D}(0, 1)$ une fonction et $\delta > 0$, on construit le chemin (Ψ_t^δ) de la façon suivante.

Pour $s \geq 0$, notons $H_s \in \text{SDiff}(D)$ la solution à l'instant s du flot associé à ξ partant de l'identité. Pour $t \in [0, 1]$, on définit alors :

$$\Psi_t^\delta := H_{\delta h(t)}.$$

Au premier ordre en δ^8 , on a :

$$\Psi_t^\delta = \text{Id} + \delta h(t)\xi, \quad \partial_t \Psi_t^\delta = \delta h'(t)\xi, \quad d\Psi_t^\delta = \text{Id} + \delta h(t) d\xi.$$

En conséquences, la vitesse eulérienne v^δ du chemin $(\Psi_t^\delta \circ \Phi_t)$ vérifie à chaque instant t :

$$\begin{aligned} v^\delta(t, \Psi_t^\delta) &= \partial_t(\Psi_t^\delta \circ \Phi_t)(\Phi_t^{-1}) = \partial_t \Psi_t^\delta + d\Psi_t^\delta \cdot \partial_t \Phi_t(\Phi_t^{-1}) \\ &= u(t, \bullet) + \delta h'(t)\xi + \delta h(t) d\xi \cdot u(t, \bullet). \end{aligned}$$

L'action du chemin $(\Psi_t^\delta \circ \Phi_t)$ vaut donc au premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \int |v^\delta(t, x)|^2 dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int |v^\delta(t, \Psi_t^\delta(x))|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int |u(t, x)|^2 dx dt + \delta \int_0^1 \int \langle u(t, x), h'(t)\xi(x) + h(t) d\xi(x) \cdot u(t, x) \rangle dx dt. \end{aligned}$$

À cause de l'optimalité de u , il faut que pour tout ξ à divergence nulle, tangent au bord et tout h ,

$$\int_0^1 \int \langle u(t, x), h'(t)\xi(x) + h(t) d\xi(x) \cdot u(t, x) \rangle dx dt = 0.$$

Mais en intégrant par parties par rapport au temps dans le premier terme, et en utilisant la formule

$$\text{div} \left(\langle \xi, u \rangle u \right) = \langle \xi, u \rangle \text{div} u + \langle d\xi u, u \rangle + \langle (u \cdot \nabla)u, \xi \rangle$$

et $\text{div} u = 0$ pour intégrer par parties par rapport à l'espace dans le second, on obtient :

$$\int_0^1 \int \langle \partial_t u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla)u(t, x), h(t)\xi(x) \rangle dx dt = 0.$$

⁸Pour le reste du calcul, on ne garde que les termes d'ordre 1 en δ . Moyennant quelques hypothèses de régularité que l'on a pas envie d'expliquer ici, il est possible de tout justifier soigneusement.

Le champ de vecteurs $\partial_t u + (u \cdot \nabla)u$ est donc un champ de vecteurs orthogonal en tout temps à tous les champs de vecteurs à divergence nulle et tangents au bord.

Or la célèbre décomposition de Helmholtz a pour conséquence directe le fait que l'ensemble des gradients de fonctions scalaires est égal à l'orthogonal pour le produit scalaire L^2 de l'ensemble des champs de vecteurs à divergence nulle et tangents au bord. Donc $\partial_t u + (u \cdot \nabla)u$ est le gradient d'une certaine fonction scalaire, que l'on appelle $-p$.

Comme on a déjà vu que u est un champ de vecteurs à divergence nulle et tangent au bord de D , il est solution de l'équation d'Euler (1.1). Cette équation s'interprète donc bel et bien comme l'équation géodésique sur $\text{SDiff}(D)$ muni de la métrique L^2 .

1.1.2 Les résultats positifs d'Ebin et Marsden

Le problème d'Arnol'd permet donc en théorie de construire des solutions de l'équation d'Euler en résolvant un problème de minimisation. Cette démarche a atteint son paroxysme avec l'article d'Ebin et Marsden [40], dans lequel les auteurs prouvent en utilisant la structure Riemannienne formelle de $\text{SDiff}(D)$ le résultat suivant (entre autres).

Theorem 1.1.4 (Ebin, Marsden 1970⁹). *Soit $s > n/2 + 1$.*

- *Soit $u_0 \in H^s(D)$ à divergence nulle et tangent au bord de D . Alors il existe $\tau > 0$ telle que l'équation d'Euler incompressible (1.1) admet sur $[-\tau, \tau]$ une unique solution*

$$u \in C^0([-\tau, \tau]; H^s(D)) \cap C^1([-\tau, \tau] \times D).$$

- *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\Phi_1 \in \text{SDiff}(D) \cap H^s(D)$ vérifiant :*

$$\|\Phi_1 - \text{Id}\|_{H^s} \leq \varepsilon,$$

il existe $(\Phi_t) \in C^1([0, 1]; H^s(D))$ une unique solution au problème d'Arnold de l'identité à Φ_1 .

Remark 1.1.5. 1. Le premier point de ce théorème correspond exactement aux théories classiques d'existence pour l'équation d'Euler, initiées par Lichtenstein [71] dès le milieu des années 20. Les méthodes d'optimisation ne permettent pas d'obtenir de meilleurs résultats d'existence que des méthodes fondées sur l'estimation *a priori* de normes de Sobolev d'indice élevé, mais elle permettent tout de même de les retrouver.

2. Dans [40], D peut être n'importe quelle variété Riemannienne orientable lisse, éventuellement à bord. De ce point de vue, l'article est particulièrement novateur.
3. Le deuxième point va particulièrement nous intéresser dans la suite. Il énonce qu'au voisinage de l'identité, tout élément de $\text{SDiff}(D)$ peut être joint à l'identité par un chemin de longueur minimale. On verra dans le paragraphe suivant que ce n'est pas une propriété globale : certains points de $\text{SDiff}(D)$ parfaitement réguliers ne peuvent être joints à l'identité par un chemin de longueur minimale.

⁹Théorème 15.2 dans [40].

1.1.3 Les contre-exemples de Shnirelman

Dans une série de travaux [87, 88, 89], Shnirelman montre que la problème d'Arnol'd n'admet pas toujours des solutions. En cause, deux phénomenes : en dimension 2, le diamètre de $\text{SDiff}([0, 1]^2)$ est infini, et en dimension au moins 3, $\text{SDiff}([0, 1]^d)$ a un défaut de complétude.

Diamètre infini en dimension 2. Le résultat est le suivant.

Theorem 1.1.6 (Shnirelman 1994¹⁰). *Il existe un difféomorphisme Φ_1 de $\text{SDiff}([0, 1]^2)$ qui ne peut être joint à l'identité par un chemin de $\text{SDiff}([0, 1]^2)$ dont l'action (1.8) est finie.*

Sans rentrer dans les détails, ce résultat est une conséquence du fait que l'on peut trouver Φ_1 qui force tout chemin (Φ_t) joignant l'identité à Φ_1 à avoir une quantité suffisantes de points $x, y \in [0, 1]^2$ tels que les trajectoires $t \mapsto \Phi_t(x)$ et $t \mapsto \Phi_t(y)$ font un grand nombre de rotations l'une autour de l'autre. C'est donc lié à la topologie des espaces de dimension 2, où la contrainte imposant aux particules de ne pas se croiser est beaucoup plus restrictive qu'en dimension supérieure.

Insistons sur le fait que le théorème ne met pas en évidence un manque de connexité de $\text{SDiff}([0, 1]^2)$: les difféomorphismes construits peuvent être joints à l'identité par des chemins continus. En revanche, il montre qu'il existe des difféomorphismes à distance infinie de l'identité.

En dimension au moins 3, défaut de complétude. En dimension $d \geq 3$, la situation est complètement différente : au moins dans le cas du cube¹¹, le diamètre est toujours fini. On a même une estimation explicite du diamètre.

Theorem 1.1.7 (Shnirelman 1994¹²). *Soit $\Phi_1 \in \text{SDiff}([0, 1]^d)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe (Φ_t) un chemin trac e sur $\text{SDiff}(D)$ joignant l'identité à Φ_1 dont l'action (1.8) est inférieure à*

$$2\sqrt{\frac{d}{3}} + \varepsilon.$$

Ce résultat repose sur un théorème d'approximation des solutions relaxées que l'on définira un peut plus tard. Malgré ce résultat, la situation n'est pas beaucoup plus favorable comme le montre le résultat suivant.

Theorem 1.1.8 (Shnirelman 1987¹³). *Il existe $\Phi_1 \in \text{SDiff}([0, 1]^d)$ tel que pour tout chemin (Φ_t) sur $\text{SDiff}([0, 1]^d)$ joignant l'identité à Φ_1 , il existe un autre chemin $(\tilde{\Phi}_t)$ sur $\text{SDiff}([0, 1]^d)$ joignant l'identité à Φ_1 , et dont l'action est strictement plus petite.*

Cette fois, l'idée est la suivante : il existe nécessairement des difféomorphismes $\phi_1 \in \text{SDiff}([0, 1]^2)$ tels qu'en définissant $\Phi_1 \in \text{SDiff}([0, 1]^3)$ par :

$$\Phi_1 : (x, y, z) \in [0, 1]^3 \mapsto (\phi_1(x, y), z)$$

¹⁰Th eor eme 2.6 dans [89].

¹¹On peut facilement en déduire que c'est également vrai pour toute image lisse du cube, et la preuve s'adapte aisément à d'autres cas, comme celui du tore, le disque etc...

¹²Th eor eme 2.1 dans [89].

¹³Th eor eme 1.1 dans [87].

alors la distance géodésique de l'identité à ϕ_1 dans $\text{SDiff}([0, 1]^2)$ est strictement plus grande que la distance géodésique de l'identité à Φ_1 dans $\text{SDiff}([0, 1]^3)$. Il suffit en effet de prendre ϕ_1 comme dans le Théorème 1.1.6, et d'utiliser le Théorème 1.1.7.

Un chemin (Φ_t) d'action petite joignant l'identité à Φ_1 présente donc nécessairement des mouvements verticaux. Il est alors possible d'obtenir un chemin d'action strictement plus petite en diminuant ces mouvements verticaux. Par exemple, on peut définir $(\tilde{\Phi}_t)$ en superposant deux versions aplaties d'un facteur 2 de (Φ_t) .

Cet argument se généralise aisément aux dimensions supérieures.

Remark 1.1.9. Le Théorème 1.1.8 montre que la méthode directe du calcul des variations, consistant à considérer des suites minimisantes et à tenter de passer à la limite, ne s'applique pas au problème d'Arnol'd : ces suites ne convergent pas dans $\text{SDiff}(D)$. En d'autres termes, les sous-niveaux de l'action (1.8) ne sont pas des compacts de l'ensemble des chemins tracés sur $\text{SDiff}(D)$ (quelque soit la topologie raisonnable que l'on considère sur cet ensemble). C'est l'objet du problème de transport optimal incompressible de comprendre ce que l'on obtient « à la limite ».



Quelque soit la dimension, il existe donc des cas où le problème d'Arnol'd n'admet pas de solution. Dans les paragraphes suivants, on va donc relaxer ce problème de façon à en obtenir un nouveau pour lequel il existe toujours des solutions. En dimension 3 et plus, l'espace que l'on va étudier pourra être vu comme le complété de $\text{SDiff}(D)$ par rapport à la distance géodésique donnée par le problème d'Arnol'd. En dimension 2, ce ne sera pas le cas, mais il est toujours possible d'interpréter les solutions relaxées comme des *limites hydrostatiques* de mouvements tridimensionnels (voir [27]).

1.1.4 Le transport optimal incompressible comme relaxation du problème d'Arnol'd

On a déjà dit que le fait de considérer des mouvements dans $\text{SDiff}(D)$ interdisait aux particules de se croiser. De plus, c'est précisément cette condition qui produit une obstruction à l'existence de solution au problème d'Arnol'd. En effet dans le cas de la dimension 3, on voit bien dans notre contre-exemple que le mouvement limite devrait être bidimensionnel, puisque s'il y a des mouvements verticaux, on est capable de réduire l'action. Mais pourtant, ce mouvement bidimensionnel ne peut pas suivre un chemin de difféomorphismes, puisque l'on a justement pris pour état final un difféomorphisme qui ne pouvait être atteint par un chemin de difféomorphismes d'action finie. Dans ce mouvement limite, les particules doivent donc se croiser.

On en tire deux enseignements. D'une part il faut relâcher cette contrainte de non intersection pour espérer trouver des solutions dans le cas tridimensionnel. D'autre part il semblerait que ce faisant, des difféomorphismes qui ne sont pas atteignables par des chemins de difféomorphismes d'action finie en dimension 2 deviennent atteignables par des mouvements bidimensionnels au cours desquels les particules se croisent.

On veut donc reprendre notre problème pour des particules indexées et ne plus imposer que pour chaque i , la position de la particule i à l'instant t soit de la forme $\Phi_t(x_0^i)$ où (Φ_t) est un chemin de difféomorphismes. En revanche, on ne va pas résoudre ce problème général qui consisterait à pouvoir distinguer individuellement chacune des particules. On va simplement supposer les deux choses suivantes.

- On connaît pour chaque $x, y \in D$ la masse des particules voyageant de x à y durant l'évolution. En particulier, on n'impose pas que toutes les particules partant de x arrivent au même point ($\Phi_1(x)$ dans le problème d'Arnol'd).
- Pour chaque $x, y \in D$, cette masse résulte elle-même de la superposition d'une infinité de particules, de sorte que deux particules joignant x à y n'étant pas contraintes d'emprunter le même chemin, le nombre de chemins parcourus par des particules joignant x à y pourra être éventuellement infini.

On va alors chercher à décrire non pas la trajectoire individuelle de chaque particule i , mais pour chaque trajectoire possible $\omega \in C^0([0, 1]; D)$ la masse des particules empruntant le chemin ω .



Pour formaliser ces idées, on va faire appel à des mesures de probabilité. On en a d'ailleurs déjà rencontré une : la mesure \mathbf{m} sur l'ensemble des indices \mathcal{I} . Introduisons quelques notations. D'abord, si \mathcal{X} est un ensemble mesurable (on ne fait pas référence explicitement à sa tribu), on notera $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ l'ensemble de ses mesures de probabilité. Si \mathcal{X} est topologique (et en fait on n'utilisera que des espaces métriques complets), on considérera toujours sa tribu borélienne.

Une notion qui va revenir sans cesse est la notion de mesure-image que j'introduis donc ici.

Definition 1.1.10. Soient (\mathcal{X}, r) un espace mesuré et \mathcal{Y} un espace mesurable. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ une application mesurable. La mesure image de r par f , notée $f_{\#}r$ est la mesure sur \mathcal{Y} définie pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathcal{Y}$ par

$$f_{\#}r(A) = r(f^{-1}(A)).$$

Cette opération permet donc de construire des mesures sur \mathcal{Y} à partir des mesures sur \mathcal{X} *via* les applications mesurables de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} . On peut la voir de plusieurs de façons différentes.

- Si r est une mesure de probabilité, $f_{\#}r$ est la loi de la variable aléatoire f .
- Pour toute application mesurable et positive φ sur \mathcal{Y} ,

$$\int \varphi \, d f_{\#}r = \int \varphi \circ f \, dr.$$

- Cette dernière formule peut se comprendre de la façon suivante :

$$f_{\#}r = \int \delta_{f(x)} \, dr(x),$$

où $\delta_{f(x)}$ est la masse de Dirac au point $f(x) \in \mathcal{Y}$. Donc $f_{\#}r$ est la mesure qui pour chaque $x \in \mathcal{X}$, met en $f(x)$ la masse $dr(x)$.



Revenons au problème de transport optimal incompressible. À partir de maintenant, D pourra être un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^d , ou le tore plat $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. *A priori*, ce problème aurait un sens dans n'importe quel espace métrique mesuré en remplaçant la mesure de Lebesgue par la mesure de référence en question, mais on ne s'y intéressera pas à ce niveau de généralité. En

revanche, certains résultats dont on va parler passent sans difficulté au cas où D est une variété Riemannienne munie d'une mesure à densité lisse et partout strictement positive par rapport à la mesure de volume.

Les conditions extrémales seront décrites par une mesure de probabilité borélienne γ sur $D \times D$. Si $x, y \in D$, la quantité

$$d\gamma(x, y)$$

représente la masse de particules joignant x à y durant l'évolution.

L'objet sur lequel portera le problème de minimisation sera une mesure de probabilité borélienne P sur l'ensemble des trajectoires $C^0([0, 1]; D)$ (que l'on considère muni de la distance de la convergence uniforme). On dit que P est un *flot généralisé*. Cette fois, si ω est une telle trajectoire, la quantité

$$dP(\omega)$$

représente la masse des particules empruntant la trajectoire ω durant l'évolution.

On voudra considérer des flots généralisés *incompressibles*, il va donc falloir parler de la densité d'un flot généralisé. L'évaluation à l'instant $t \in [0, 1]$, notée X_t fournit une application mesurable de $C^0([0, 1]; D)$ dans D . On peut donc définir la densité ρ_t de P à l'instant t par :

$$\rho_t := X_{t\#}P.$$

Si $x \in D$, la quantité $d\rho_t(x)$ s'interprète comme la masse de particules en x à l'instant t . Un flot sera dit incompressible si à chaque instant, sa densité est la mesure de Lebesgue :

$$\forall t \in [0, 1], \quad X_{t\#}P = \text{Leb}. \quad (1.11)$$

On voudra également que nos flots généralisés soient compatibles avec les conditions extrémales imposées par γ . On va donc prescrire :

$$(X_0, X_1)\#P = \gamma. \quad (1.12)$$

Comme pour chaque $x, y \in D$, $d(X_0, X_1)\#P(x, y)$ est la masse sous P de tous les ω qui vérifient $\omega_0 = x$ et $\omega_1 = y$, cela correspond bien à ce que l'on voulait. Remarquons que pour qu'il existe des flots généralisés P qui soient à la fois incompressibles et de condition extrémales γ , il faut que γ satisfasse une condition d'incompressibilité. Il faut que si X et Y sont les applications de $D \times D$ dans D qui à (x, y) associent respectivement x et y , alors :

$$X\#\gamma = Y\#\gamma = \text{Leb}. \quad (1.13)$$

On dit alors que γ est *bistochastique*.

On doit en dernier lieu définir ce qu'est l'action d'un flot généralisé P . On pose :

$$\bar{\mathcal{A}}(P) := \int A(\omega) dP(\omega) = \mathbb{E}_P[A], \quad (1.14)$$

où si $\omega \in C^0([0, 1]; D)$,

$$A(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\omega}_t|^2 dt & \text{si } \omega \text{ est absolument continue,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.15)$$

On en arrive alors au problème suivant, introduit par Brenier dans [20].

Problème 1.1.11 (Problème du transport optimal incompressible). Soit $\gamma \in \mathcal{P}(D \times D)$ une mesure de probabilité bistochastique. Trouver le flot généralisé P de sorte que :

- les conditions extrémales de P sont décrites par γ , *i.e.* (1.12) est satisfaite,
- le flot P est incompressible : il vérifie (1.11),
- l'action $\bar{\mathcal{A}}(P)$ est minimale parmi tous les choix de flots généralisés respectant les deux premiers points.

Dans la suite, on appellera ce problème IOT(γ).

Remark 1.1.12. 1. Le transport optimal incompressible constitue une relaxation du problème d'Arnol'd. En effet, si on choisit $\Phi_1 \in \text{SDiff}(D)$ on peut construire γ bistochastique en posant :

$$\gamma := (\text{Id}, \Phi_1)_\# \text{Leb}. \quad (1.16)$$

Dans ce cas, on dit que γ est induite par un difféomorphisme.

De même, si (Φ_t) est un chemin sur $\text{SDiff}(D)$ partant de l'identité, on peut définir :

$$\Psi : x \in D \mapsto \left(t \mapsto \Phi_t(x) \right) \quad \text{et} \quad P := \Psi_\# \text{Leb}. \quad (1.17)$$

On vérifie alors que P est un flot généralisé incompressible, que ses conditions extrémales sont données par γ définie par la formule (1.16), et que son action définie par (1.14) est la même que celle de (Φ_t) définie par (1.8). En particulier, si P est une solution du transport optimal incompressible qui se trouve correspondre à un chemin de difféomorphismes (Φ_t) *via* (1.17), alors (Φ_t) est une solution au problème d'Arnol'd.

2. En revanche, on a perdu la structure de groupe du problème d'Arnol'd. En effet, il n'y a pas de façon canonique de « composer » deux mesures bistochastiques : étant donnés $x, z \in D$, le fait de connaître pour tout $y \in D$ la masse des particules voyageant de x à y au cours d'une première évolution et la masse des particules voyageant de x à z au cours d'une seconde évolution ne suffit pas à déterminer la masse des particules voyageant de y à z durant la concaténation de ces deux évolutions (tout dépend des corrélations entre le premier et le second processus). Le modèle multiphasique que l'on introduira dans la sous-section suivante, s'il ne permet pas de retrouver une structure de groupe claire, permet au moins de composer naturellement deux trajectoires.
3. Ce problème est couramment nommé *modèle de Brenier* et ses solutions *solutions d'Euler à la Brenier*.



Le problème de transport optimal incompressible, comme son nom l'indique est une version incompressible du problème de transport optimal quadratique dans sa version dynamique.

Problème 1.1.13 (Problème du transport optimal dynamique). Étant donnés $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(D)$, trouver la mesure $P \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; D))$ minimisant l'action $\bar{\mathcal{A}}$ définie par la formule (1.14) sous contraintes $X_{0\#}P = \rho_0$ et $X_{1\#}P = \rho_1$.

On se réfère à [94, Sections 5.1.1, 5.1.2] pour une étude complète de ce problème, et en particulier pour le lien entre ce problème et le problème de transport optimal statique que l'on ne décrit pas ici. Notons que dans le problème de transport optimal 1.1.13, on prescrit seulement la densité initiale et la densité finale. En revanche, dans le problème de transport optimal incompressible 1.1.11, on doit donner une condition extrémale plus précise, sans quoi on aurait nécessairement $\rho_0 = \rho_1 = \text{Leb}$, et pour solution la loi P partant de Leb et chargeant des trajectoires constantes.

Existence de solutions. Il existe toujours des solutions au problème de transport optimal dynamique. En effet, la fonctionnelle d'action A est propre et semi-continue inférieurement pour la topologie de la convergence uniforme sur l'espace des courbes $C^0([0, 1]; D)$ (c'est probablement le cas le plus connu pour lequel la méthode directe du calcul des variations [35, 50] s'applique). On en déduit ([4, Remarque 5.1.5, Lemme 5.1.7]) que la fonctionnelle

$$P \mapsto \int A(\omega) dP(\omega)$$

est elle même propre et semi-continue inférieurement pour la topologie de la convergence étroite sur $\mathcal{P}(C^0([0, 1]; D))$. Comme la contrainte est clairement fermée pour cette topologie, on peut appliquer la méthode directe du calcul des variations, de sorte que l'existence de solution est équivalente à l'existence d'un compétiteur d'action finie, et un tel compétiteur est facile à construire.

En revanche, il n'y a pas unicité en général.



Le problème IOT a lui aussi l'avantage de toujours admettre des solutions, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 1.1.14 (Brenier 1989¹⁴). *Pour tout γ bistochastique, le problème de transport optimal incompressible admet une solution.*

Preuve. Encore une fois, $\overline{\mathcal{A}}$ est propre et semi-continue inférieurement, donc l'existence de solution est équivalente à l'existence d'un flot généralisé incompressible, compatible avec γ et d'action finie.

Je vais donner une construction explicite (sans rentrer dans tous les détails) d'un tel flot généralisé dans le cas du tore, comme cela est fait dans [20]. Le cas du cube se traite presque de la même façon en remplaçant les conditions au bord périodiques par des symétries miroirs (voir [89, Théorème 2.1]) et la cas des ouverts convexes bornés est expliqué dans [65, Théorème 2.12].

Soient $x, y \in \mathbb{T}^d$. Je construis $P^{x,y}$ de la façon suivante. Pour presque tout $z \in \mathbb{T}^d$, il existe une unique géodésique g_1 entre x et z , et une unique géodésique g_2 entre z et y . L'application qui à z associe la courbe

$$\Psi(z) : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} g_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ g_2(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

est donc presque partout bien définie. On prend alors

$$P^{x,y} := \Psi_{\#} \text{Leb}.$$

On a représenté à la Figure 1.1 l'évolution de la densité de $P^{x,y}$ en fonction du temps.

¹⁴[20, Théorème 4.2].

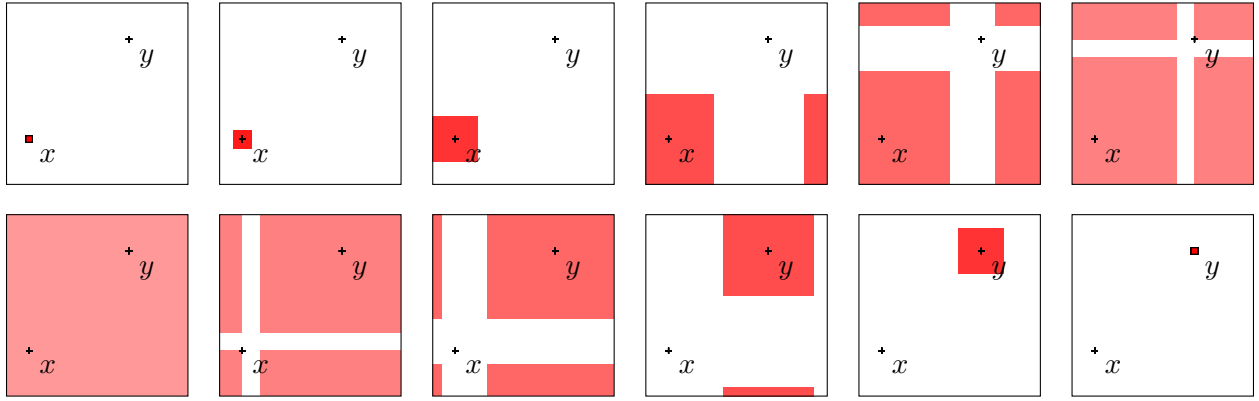


FIGURE 1.1 : On représente l'évolution de la densité de $P^{x,y}$ au cours du temps. Au temps $t = 0$, toutes les particules sont en x , au temps $t = 1$, elles sont toutes en y et en $t = 1/2$, elles recouvrent le tore de façon homogène. Entre les instants 0 et $1/2$, et entre les instants $1/2$ et 1, les particules se déplacent en ligne droite.

Ensuite, il suffit de considérer

$$P := \int P^{x,y} d\gamma(x,y).$$

Il est facile de vérifier que la densité de P est invariante par translation, et donc que nécessairement, P est incompressible. De même, on voit aisément que P est compatible avec γ . Par ailleurs, son action se calcule de façon explicite (c'est l'intégrale contre γ de toutes les actions de $P^{x,y}$, qui sont toutes égales), et vaut :

$$\overline{\mathcal{A}}(P) = \frac{d}{3}.$$

Le résultat est donc démontré. \square

Remarque 1.1.15. 1. On a non seulement montré qu'il existe toujours une solution, mais on a aussi montré que quelque soit γ , l'action optimale est majorée par $d/3$. Ce n'est pas sans rappeler le Théorème 1.1.7¹⁵. Ce n'est pas un hasard. En fait, pour montrer ce résultat, Shnirelman fait une construction similaire dans le cas du cube, puis montre que lorsque γ est induit par un difféomorphisme, tout flot généralisé en dimension supérieure à 3 est approximable avec son action et sans changer les points extrémaux par un chemin de difféomorphismes.

2. Ce théorème d'existence est valable en dimension 2, et même en dimension 1! Cela fait une nette différence avec ce qui se passe dans le problème d'Arnol'd, qui est trivial en dimension 1.
3. Le transport optimal incompressible admet donc des solutions, mais elles ne sont pas uniques en général. Par exemple, si D est le disque unité dans \mathbb{R}^2 , on peut montrer assez facilement que si γ est induit par l'application $x \mapsto -x$, alors la rotation du disque dans un sens ou dans l'autre sont deux solutions distinctes du problème de transport optimal incompressible (c'est par exemple une conséquence de [20, Théorème 5.1]). De plus, les contraintes et l'action étant

¹⁵Rappelons que la longueur d'une courbe est $\sqrt{2A}$, où A est l'action de cette courbe. Le facteur $\sqrt{2}$ entre notre preuve et le Théorème 1.1.7 est lié au fait que j'ai présenté la construction dans le tore et non dans le cube.

linéaires en P , toute combinaison convexe de ces deux solutions fournit une nouvelle solution. En fait, il y en a encore beaucoup d'autres, comme en témoigne la construction faite dans [19].

1.1.5 Modèles équivalents et variantes

Selon les circonstances, on va avoir besoin de travailler sur des modèles proches. Je vais ici en donner deux. Le premier consiste à comprendre le problème comme un problème de transport optimal mettant en jeu plusieurs *phases* de fluides interagissant entre elles *via* l'incompressibilité. Il a été introduit et étudié pour la première fois par Brenier dans [23, 24], et peut être vu comme la version « Benamou-Brenier » du problème original, par analogie avec la formulation du transport optimal classique introduite dans [15]. Le second se formule en termes de plans de trafic (voir [18]) et a été proposé récemment par Lavenant dans [65]. Avant toute chose, revenons sur la formulation Benamou-Brenier du problème de transport optimal 1.1.13.

Formulation Benamou-Brenier du transport optimal. Dans ce type de problème, on ne cherche plus à décrire toutes les trajectoires empruntées par les particules, mais seulement l'évolution au cours du temps de leur densité dans l'espace et de leur vitesse. Une population de particules y est donc modélisée par une courbe $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(D))$ tracée sur l'ensemble des mesures de probabilités représentant sa densité au cours de temps, et un champ de vecteurs $v \in L^2([0, 1] \times D, dt \otimes \rho_t)$ représentant sa vitesse, qui sont liées entre elle par l'équation de continuité (ou de conservation de la masse) :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (1.18)$$

Étant donné la condition d'intégrabilité que l'on s'est donnée sur v , cette équation a un sens distributionnel. L'action associée à cette évolution est donnée par :

$$\mathcal{A}(\rho, v) := \frac{1}{2} \int_0^1 \int |v(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt. \quad (1.19)$$

On peut alors se poser le problème suivant, introduit dans [15] :

Problème 1.1.16 (Version Benamou-Brenier du transport optimal). Étant donnés $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(D)$, trouver la solution de l'équation de continuité (ρ, v) minimisant l'action \mathcal{A} définie par la formule (1.19) sous contrainte $\rho|_{t=0} = \rho_0$ et $\rho|_{t=1} = \rho_1$.

Existence de solutions. Le fait que l'espace dans lequel on choisit les vitesses dépende de la densité rend le problème délicat à manipuler *a priori*. Une astuce désormais classique en transport optimal consiste à exploiter le fait que l'action d'une solution (1.19) se réécrit ([23, Proposition 3.4]) :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int |v(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt = \sup_{\substack{\xi: D \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \xi \text{ lisse}}} \int_0^1 \int \xi(t, x) \cdot v(t, x) d\rho_t(x) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \int |\xi(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt. \quad (1.20)$$

Cette formule a alors un sens (éventuellement à valeur $+\infty$) dès que $m := v\rho$ est une mesure de Radon à valeurs vectorielles sur D . On a donc résolu notre problème quant à l'ensemble de définition des compétiteurs, et on obtient même une action non seulement semi-continue inférieurement par rapport à (ρ, m) (pour la topologie de la convergence étroite sur ρ et m , comme sup d'applications

continues) mais même convexe (comme sup d'applications linéaires). On peut également vérifier qu'elle a ses sous-niveaux compacts. Je renvoie de nouveau à [23, 24] pour plus de détails, mais j'espère avoir convaincu le lecteur que le passage à cette variable m rend la question de l'existence équivalente à celle de l'existence de compétiteur d'action finie. Celle-ci facile à vérifier, par exemple car comme on va le voir, chaque compétiteur au problème de transport optimal dynamique 1.1.13 donne lieu à un compétiteur pour le problème de Benamou-Brenier 1.1.16.

En revanche, il n'y a pas unicité en général.

Lien avec le problème de transport optimal dynamique. On va voir qu'étant donnés les densités initiales et finales $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(D)$, le problème de transport optimal dynamique entre ρ_0 et ρ_1 1.1.13 et le problème de Benamou-Brenier 1.1.16 admettent la même action optimale, et on peut faire se correspondre les minimiseurs de ces deux problèmes.

Pour ce faire, on va utiliser le lemme suivant issu de la théorie de l'équation de continuité pour des champs de vitesse non réguliers [38, 1].

Lemme 1.1.17 (Def. 3.2, Thm. 3.4 dans [1]). *1. Soit $P \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; D))$ un flot généralisé d'action finie, alors en définissant (ρ, v) par :*

$$\forall t \in [0, 1], \quad X_{t\#}P = \rho_t, \quad (1.21)$$

$$\text{pour presque tout } t \in [0, 1], \quad X_{t\#}(\dot{\omega}_t P) = v(t, \bullet)\rho_t, \quad (1.22)$$

alors (ρ, v) est dans l'espace $C^0([0, 1]; \mathcal{P}(D)) \times L^2([0, 1] \times D, dt \otimes \rho_t)$, est une solution de l'équation de continuité, et :

$$\mathcal{A}(\rho, v) \leq \bar{\mathcal{A}}(P). \quad (1.23)$$

2. Réciproquement, soit $(\rho, v) \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(D)) \times L^2([0, 1] \times D, dt \otimes \rho_t)$ une solution distributionnelle de l'équation de continuité. Alors il existe $P \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; D))$ tel que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad X_{t\#}P = \rho_t, \\ \text{pour } P\text{-presque tout } \omega \text{ et presque tout } t \in [0, 1], \quad \dot{\omega}_t = v(t, \omega_t). \quad (1.24)$$

En particulier,

$$\bar{\mathcal{A}}(P) = \mathcal{A}(\rho, v).$$

3. En conséquence, étant donnée (ρ, v) une solution de l'équation de continuité, si P minimise son action parmi les flots généralisés satisfaisant (1.21) et (1.22), alors P satisfait (1.24).

Remarque 1.1.18. 1. La formule (1.22) énonce que le vecteur $v(t, x)$ est la vitesse moyenne des particules qui sont en x à l'instant t . Elle est équivalente à :

$$\forall \xi : [0, 1] \times D \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ fonction test,} \quad \int_0^1 \int v(t, x) \cdot \xi(t, x) d\rho_t(x) dt = \int \int_0^1 \dot{\omega}_t \cdot \xi(t, \omega_t) dt dP(\omega).$$

L'inégalité des actions (1.23) est alors une conséquence de l'inégalité de Jensen.

2. La formule (1.24) est plus forte que (1.22) : (presque) toutes les particules en x à l'instant t ont la vitesse $v(t, x)$, donc *a fortiori*, la vitesse moyenne de ces particules est $v(t, x)$. Le deuxième point du lemme énonce donc que l'on peut choisir un P ne chargeant que des solutions de l'équation différentielle ordinaire associée au champs de vecteurs v , quelle que soit la régularité de celui-ci !

3. Le point 3 consiste simplement à remarquer que le cas d'égalité dans l'inégalité de Jensen (1.23) est exactement (1.24).

On peut maintenant justifier l'équivalence entre nos deux formulations du problème de transport optimal. En effet :

- Si P est une solution du problème de transport optimal dynamique 1.1.13 entre ρ_0 et ρ_1 , alors le couple (ρ, v) donné par le point 1 du Lemme 1.1.17 est un compétiteur pour $\text{OT}(\rho_0, \rho_1)$ avec une action moindre.
- Si (ρ, v) est une solution du problème de Benamou-Brenier 1.1.16, alors la mesure P donné par le point 2 du Lemme 1.1.17 est un compétiteur pour le problème de transport optimal dynamique entre ρ_0 et ρ_1 avec la même action.

En conséquence, les actions optimales doivent coïncider et les correspondances décrites doivent envoyer les solutions d'un problème sur les solutions de l'autre problème.

Passons maintenant aux variantes du problème de transport optimal incompressible.

La version multiphasique du problème de transport optimal incompressible. Ici, on suppose que les particules se répartissent en plusieurs « phases » de fluides, comme dans une sorte de cocktail. Certaines particules sont des particules de rhum, d'autres de jus d'ananas, d'autres encore de la grenadine etc... On se donne alors un espace de probabilité $(\mathcal{I}, \mathbf{m})$ comme précédemment, mais pour indexer les différentes phases et non pas les particules individuellement. La quantité $\mathbf{dm}(i)$ correspond à la masse totale de particule sur la phase i de sorte que par la suite, la répartition dans l'espace des particules de la phase i sera décrite par une mesure de probabilité.

La phase i est décrite comme dans le Problème 1.1.16 par une solution (ρ^i, v^i) de l'équation de continuité (1.18)

Les différentes phases interagissent à travers la contrainte d'incompressibilité, c'est à dire que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\int \rho_t^i \mathbf{dm}(i) = \text{Leb}. \quad (1.25)$$

On suppose que l'on connaît la répartition des particules de chaque phase à l'instant initial c'est à dire que pour (presque tout) $i \in \mathcal{I}$, on se donne ρ_0^i et ρ_1^i . Pour que la contrainte d'incompressibilité soit satisfaite à l'instant initial et à l'instant final, on les choisit de sorte que :

$$\int \rho_0^i \mathbf{dm}(i) = \int \rho_1^i \mathbf{dm}(i) = \text{Leb}. \quad (1.26)$$

On pose alors le problème suivant, introduit dans [23, 24] :

Problème 1.1.19 (Problème de transport optimal incompressible multiphasique). Étant donné un choix mesurable¹⁶ $\rho_0 = (\rho_0^i)_{i \in \mathcal{I}}$, $\rho_1 = (\rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$ de familles de mesures de probabilité sur D satisfaisant (1.26), trouver une famille mesurable de couples $(\rho, v) = (\rho^i, v^i)_{i \in \mathcal{I}}$ tels que :

- pour m -presque tout i , (ρ^i, v^i) est une solution de l'équation de continuité joignant ρ_0^i à ρ_1^i ,

¹⁶Ici, $(\rho_0^i)_{i \in \mathcal{I}}$ mesurable signifie que pour toute fonction test, φ , $i \mapsto \int \varphi d\rho_0^i$ est mesurable. On peut faire des choses analogues pour les couples $(\rho^i, v^i)_{i \in \mathcal{I}}$ et on peut justifier que si les données sont mesurables, alors les solutions le sont aussi, mais je n'entre pas dans les détails.

- pour tout $t \in [0, 1]$, la contrainte d'incompressibilité (1.25) est satisfaite,
- La famille (ρ, v) minimise l'action totale :

$$\mathcal{A}(\rho, v) := \int \mathcal{A}(\rho^i, v^i) \, dm(i) = \frac{1}{2} \iint_0^1 \int |v^i(t, x)|^2 \, d\rho_t^i(x) \, dt \, dm(i). \quad (1.27)$$

Dans la suite, on appellera ce problème $\text{MIOT}(\rho_0, \rho_1)$.

Existence de solutions pour le problème multifluide. Comme pour le problème 1.1.16, le passage aux variables $(\rho^i, m^i)_{i \in \mathcal{I}}$ avec pour chaque i , $m_i := v^i \rho^i$ donne lieu à une action propre et semi-continue inférieurement, de sorte que l'existence de solution est équivalente à l'existence de compétiteurs d'action finie. Une construction similaire à celle décrite dans la preuve du Théorème 1.1.14 permet alors de conclure.

Encore une fois, il n'y a pas unicité en général.

Lien avec le problème de transport optimal incompressible. Dans un cas particulier sur l'ensemble des phases, ce modèle est strictement équivalent au problème de transport optimal incompressible. Il s'agit du cas où les particules sont indexées par leurs positions extrémales. En effet, supposons que $I = D \times D$, et que pour tout $x, y \in D$,

$$\rho_0^{x,y} = \delta_x, \quad \text{et} \quad \rho_1^{x,y} = \delta_y.$$

En d'autres termes, la phase indexée par (x, y) correspond à l'ensemble des particules partant de x et arrivant en y .

On se donne alors γ bistochastique, et on suppose que le \mathbf{m} correspondant à l'indexation n'est autre que γ . La contrainte d'incompressibilité aux instants extrémaux (1.26) est alors satisfaite. On va voir que dans ce cas, l'action optimale dans le problème de transport optimal incompressible multiphasique que l'on obtient est la même que l'action optimale dans le problème de transport optimal incompressible correspondant à γ , et que l'on peut faire se correspondre les minimiseurs de ces deux problèmes.

En effet, en utilisant le Lemme 1.1.17, on vérifie que :

- Si $(\rho^{x,y}, v^{x,y})_{(x,y) \in D \times D}$ est une solution du problème multiphasique, en prenant pour chaque (x, y) le flot généralisé $P^{x,y}$ donné dans le point 2 du Lemme 1.1.17, alors

$$P := \int P^{x,y} \, d\gamma(x, y)$$

est une solution du problème standard avec la même action.

- Réciproquement, si P est une solution du problème standard, on définit les probabilités conditionnelles :

$$\text{pour } \gamma\text{-presque tout } (x, y), \quad P^{x,y} := P(\bullet | X_0 = x, X_1 = y).$$

En prenant alors pour chaque (x, y) le couple $(\rho^{x,y}, v^{x,y})$ donné à partir de $P^{x,y}$ par le point 1 du Lemme 1.1.17, on obtient une solution du problème multiphasique avec la même action (grâce au point 3).

Une autre formulation du problème de transport optimal 1.1.16. Avant de présenter le problème de transport optimal incompressible en termes de plans de trafic, il nous faut réinterpréter le problème de Benamou-Brenier 1.1.16 comme la recherche des géodésiques d'un certain espace métrique, l'espace de Wasserstein. Le principe est le suivant. La quantité :

$$d_{\text{MK}} : (\rho_0, \rho_1) \in \mathcal{P}(D) \times \mathcal{P}(D) \mapsto \sqrt{2\mathcal{A}^*(\rho_0, \rho_1)},$$

où $\mathcal{A}^*(\rho_0, \rho_1)$ est l'action optimale dans le Problème de Benamou-Brenier 1.1.16, est une distance sur $\mathcal{P}(D)$ ([83, Proposition 5.1]). On l'appelle *distance de Monge-Kantorovic*¹⁷. On peut alors étudier des propriétés métriques de courbes tracées sur $\mathcal{P}(D)$. En particulier, on peut parler de courbes absolument continues (voir par exemple [4, Section 1.1]). On peut alors énoncer le théorème suivant qui donne le lien entre ces courbes absolument continues (d'ordre 2), et les solutions de l'équation de continuité. Il peut être vu comme une conséquence du Théorème 1.1.17 énoncé plus haut.

Theorem 1.1.20 ([4, Théorème 8.3.1]). *Soit $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ une courbe continue. Cette courbe appartient à l'ensemble $AC^2([0, 1]; \mathcal{P}(D))$ vis à vis de la distance de Monge-Kantorovic si et seulement si il existe un champ de vecteurs $v = v(t, x)$ dans l'espace $L^2([0, 1] \times \mathbb{T}^d, dt \otimes \rho_t)$ tel que (ρ, v) est une solution distributionnelle de l'équation de continuité. Dans ce cas,*

$$\int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt = \inf_v \int_0^1 \int |v(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt, \quad (1.28)$$

où la borne inférieure, est prise sur l'ensemble de ces champs de vecteurs, et où la dérivée métrique, définie par $|\dot{\rho}_t| := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d_{\text{MK}}(\rho_t, \rho_{t+h})}{h}$ est bien définie pour presque tout t . De plus, cette borne inférieure est atteinte, et le champ de vecteurs correspondant est unique.

Le problème suivant est alors clairement équivalent au problème de Benamou-Brenier 1.1.16 (en particulier, il existe toujours une solution).

Problème 1.1.21 (Problème de transport optimal en termes de dérivée métrique). Étant donnés $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(D)$, trouver la courbe $\rho \in AC^2([0, 1]; \mathcal{P}(D))$ minimisant l'action (que l'on continue d'appeler \mathcal{A} avec un léger abus de notation) :

$$\mathcal{A}(\rho) := \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt \quad (1.29)$$

sous contrainte $\rho|_{t=0} = \rho_0$ et $\rho|_{t=1} = \rho_1$.

Dans la suite, et en particulier au Chapitre 6, on appellera ce problème $\text{OT}(\rho_0, \rho_1)$.

Transport optimal incompressible en termes de plans de trafic. Cette fois, on garde un modèle de type multiphasique, mais on oublie l'indexation particulière des différentes phases de fluide, pour ne s'intéresser qu'à la proportion de chacune des phases, c'est à dire à la loi de la variable aléatoire

$$i \mapsto \rho_i$$

du paragraphe précédent.

¹⁷Ou distance de Wasserstein.

L'évolution du fluide est alors décrite par un *plan de trafic*, c'est à dire une mesure de probabilité $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; \mathcal{P}(D)))$ sur l'ensemble des courbes tracées sur l'ensemble des mesures de probabilité sur le domaine physique D . La quantité $d\mathbf{P}(\rho)$ représente la masse des phases empruntant le chemin $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$. Le plan de trafic \mathbf{P} est dit incompressible si pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\int \rho_t d\mathbf{P}(\rho) = \text{Leb}. \quad (1.30)$$

L'action d'un plan de trafic est donnée par la formule¹⁸ :

$$\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}) := \frac{1}{2} \iint_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt d\mathbf{P}(\rho). \quad (1.31)$$

Dans cette nouvelle formulation, les conditions extrémales du problème sont prescrites par une mesure $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(D) \times \mathcal{P}(D))$, la quantité $d\Gamma(\rho_0, \rho_1)$ représentant la masse des phases qui partent de la mesure ρ_0 pour arriver à la mesure ρ_1 . On prescrit les conditions extrémales du plan de trafic \mathbf{P} en imposant :

$$(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1)_{\#} \mathbf{P} = \Gamma, \quad (1.32)$$

où pour tout $t \in [0, 1]$, \mathbf{X}_t est l'application d'évaluation à l'instant t sur l'espace $C^0([0, 1]; \mathcal{P}(D))$. Pour que cette condition soit compatible avec l'incompressibilité de \mathbf{P} , il faut que :

$$\int \rho_0 d\Gamma(\rho_0, \rho_1) = \int \rho_1 d\Gamma(\rho_0, \rho_1) = \text{Leb}. \quad (1.33)$$

On dit que Γ est *bistochastique en moyenne*. Notre nouveau problème de minimisation, introduit par Lavenant dans [65], est le suivant.

Problème 1.1.22 (Problème du transport optimal incompressible en termes de plans de trafic). Étant donné Γ bistochastique en moyenne, trouver le plan de trafic \mathbf{P} incompressible au sens de la formule (1.30) satisfaisant la condition extrémale (1.32) et minimisant l'action totale (1.31). Dans la suite, on appellera ce problème TPIOT(Γ).

Lien avec le problème multiphasique. Le problème que je viens d'énoncer me semble plus satisfaisant que le problème multiphasique parce qu'il ne fait pas intervenir le choix arbitraire de l'indexation. Les notations y sont souvent plus claires et la formulation paraît plus intrinsèque. Pourtant, le problème n'est pas plus général. En fait, il correspond exactement au cas multiphasique où $\mathcal{I} = \mathcal{P}(D) \times \mathcal{P}(D)$, où $\mathbf{m} = \Gamma$ et où pour tout $(\rho_0, \rho_1) \in \mathcal{I}$:

$$\rho_0^{\rho_0, \rho_1} = \rho_0 \quad \text{et} \quad \rho_1^{\rho_0, \rho_1} = \rho_1.$$

En effet, on vérifie facilement que si $(\rho^{\rho_0, \rho_1}, \nu^{\rho_0, \rho_1})$ est une solution au problème multiphasique correspondant à ces conditions extrémales, alors :

$$\int \delta_{\rho^{\rho_0, \rho_1}} d\Gamma(\rho_0, \rho_1)$$

est un compétiteur pour le problème en termes de plans de trafic de condition extrémale Γ , avec une action moindre. Pour la correspondance réciproque, une difficulté provient du fait que si \mathbf{P} est

¹⁸Comme d'habitude, on fixe par convention $\int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt = +\infty$ lorsque ρ n'est pas dans $AC^2([0, 1]; \mathcal{P}(D))$.

une solution du problème en terme de plans de trafic de condition extrémale Γ , conditionnellement à $\mathbf{X}_0 = \rho_0$ et $\mathbf{X}_1 = \rho_1$, \mathbf{P} charge potentiellement plusieurs courbes joignant ρ_0 à ρ_1 . Mais alors la moyenne de toute ces courbes est encore une courbe joignant ρ_0 à ρ_1 . On définit donc :

$$\rho^{\rho_0, \rho_1} := \mathbb{E}_{\mathbf{P}} \left[\rho \mid \mathbf{X}_0 = \rho_0, \mathbf{X}_1 = \rho_1 \right],$$

et on choisit v^{ρ_0, ρ_1} réalisant l'infimum dans (1.28). La famille $(\rho^{\rho_0, \rho_1}, v^{\rho_0, \rho_1})$ ainsi construite est alors un compétiteur pour le problème multiphasique, avec une action moindre. On en déduit que l'action optimale dans les deux problèmes est la même, et que notre correspondance permet de passer des solutions du problème multiphasique à des solutions du problème en termes de plans de trafic et *vice versa*, d'où l'équivalence des deux modèles. On donne plus de détails sur ces observations à l'Appendice 6.A du Chapitre 6.

Conséquences. Les résultats que l'on a énoncés pour le problème multiphasique s'adaptent donc, et on en déduit :

- Le problème admet toujours des solutions, qui ne sont pas uniques en général.
- Dans le cas où Γ ne charge que des mesures du type (δ_x, δ_y) , alors le problème est équivalent au problème de transport optimal incompressible.

1.1.6 Champ de pression

On aborde ici un point délicat, qui est celui de l'étude du champ de pression pour le problème de transport optimal incompressible, c'est à dire du multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité. Je vais traiter ici la version standard du problème de transport optimal incompressible, mais le cas multiphasique et le cas des plans de trafic se traitent de façon similaire.

Au niveau formel, on sait trouver une condition nécessaire et suffisante d'optimalité assez simple. En revanche, sa justification rigoureuse est un problème compliqué faisant intervenir la question de régularité de la pression. Ce problème a été partiellement résolu par Ambrosio et Figalli [2, 3] grâce à des résultats de régularité initiés par Brenier [24], nous y reviendrons.

Je vais expliquer la condition nécessaire et suffisante formelle, puis je vais expliquer comment utiliser le théorème de l'enveloppe pour obtenir rigoureusement l'existence de la pression au sens des distributions. Enfin, je présenterai le résultat de régularité connu, et ce que l'on peut en faire pour trouver une condition nécessaire d'optimalité.

Condition d'optimalité formelle. Je vais discrétiser le problème de façon à ce que les compétiteurs du problème discrétisé soient des éléments d'un ensemble de dimension finie. On pourra alors appliquer sans difficulté le théorème des multiplicateurs de Lagrange (ou de Karush-Kuhn-Tucker). Ce sera particulièrement simple, puisque le transport optimal incompressible est un problème d'optimisation linéaire (l'action dépend linéairement de P), sous des contraintes linéaires (l'incompressibilité ainsi que la compatibilité à γ sont des conditions linéaires sur P) et une contrainte de positivité (P est une mesure de probabilité).

Pour que l'ensemble des mesures sur un ensemble soit de dimension finie, il faut que cet ensemble soit fini. On choisit donc $\mathcal{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_{\mathcal{T}}} = 1\}$ un sous ensemble fini de $[0, 1]$ et on suppose que $D = \{x_1, \dots, x_{N_D}\}$ est un ensemble fini. On va alors considérer des mesures de

probabilité P sur l'ensemble fini $D^{\mathcal{T}}$. Si $\omega \in D^{\mathcal{T}}$, on va simplement écrire $P(\omega) := P(\{\omega\})$, de sorte que cet ensemble de mesure s'identifie au simplexe de $\mathbb{R}^{D^{\mathcal{T}}}$:

$$\forall \omega \in D^{\mathcal{T}}, P(\omega) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\omega \in D^{\mathcal{T}}} P(\omega) = 1.$$

On se donne alors :

- une mesure de probabilité γ sur $D \times D$, c'est à dire un élément du simplexe de $\mathbb{R}^{D \times D}$ (on notera $\gamma_{j_1 j_2} := \gamma(\{(x_{j_1}, x_{j_2})\})$,
- pour chaque $t_i \in \mathcal{T}$, une mesure de probabilité $\rho(t_i, \bullet)$ sur D , c'est à dire un élément du simplexe de \mathbb{R}^D (on notera $\rho_{ij} := \rho(t_i, \{x_j\})$,
- une fonction $A : D^{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$.

l'analogue du problème de transport optimal incompressible s'écrit alors de la façon suivante.

Problème de transport optimal incompressible discret. Trouver $P \in \mathbb{R}^{D^{\mathcal{T}}}$ qui minimise :

$$\bar{A}(P) := \sum_{\omega \in D^{\mathcal{T}}} A(\omega) P(\omega),$$

sous la contrainte de compatibilité à γ :

$$\forall j_1, j_2, \quad \sum_{\substack{\omega \in D^{\mathcal{T}} \\ \omega_0 = x_{j_1}, \omega_1 = x_{j_2}}} P(\omega) = \gamma_{j_1 j_2} \quad (1.34)$$

la contrainte sur la densité¹⁹ :

$$\forall i, j, \quad \sum_{\substack{\omega \in D^{\mathcal{T}} \\ \omega_{t_i} = x_j}} P(\omega) = \rho_{ij} \quad (1.35)$$

et la contrainte de positivité²⁰ :

$$\forall \omega, \quad P(\omega) \geq 0.$$



Par les résultats classiques d'optimisation (ici, les contraintes étant linéaires ou de positivité, il n'est pas nécessaire de montrer qu'elles sont qualifiées), une condition nécessaire d'optimalité pour P est l'existence pour chaque j_1, j_2 d'un multiplicateur de Lagrange $\varphi(x_{j_1}, x_{j_2})$ associé à la contrainte de compatibilité à γ et pour chaque i, j d'un multiplicateur de Lagrange $p(t_i, x_j)$ associé à la contrainte d'incompressibilité vérifiant :

$$\forall \omega \in D^{\mathcal{T}}, \quad A(\omega) \geq \sum_i p(t_i, \omega_{t_i}) + \varphi(\omega_0, \omega_1), \quad (1.36)$$

$$\forall \omega \in D^{\mathcal{T}} \text{ tel que } P(\omega) > 0, \quad A(\omega) = \sum_i p(t_i, \omega_{t_i}) + \varphi(\omega_0, \omega_1). \quad (1.37)$$

¹⁹Pour qu'il n'y ait pas de redondance avec la contrainte précédente, on peut se contenter prendre $t_i \neq 0, 1$.

²⁰Le fait que P somme à 1 a déjà été codé dans les deux contraintes précédentes, donc il n'y a pas besoin de l'imposer.

En conséquence, si ω est tel que $P(\omega) > 0$ et si $\tilde{\omega}$ a les mêmes extrémités que ω , alors

$$A(\omega) - \sum_i p(t_i, \omega_{t_i}) = \varphi(\omega_0, \omega_1) \leq A(\tilde{\omega}) - \sum_i p(t_i, \tilde{\omega}_{t_i})$$

On a donc montré que si P est un optimiseur, alors il existe un champ scalaire p tel que P ne charge que des courbes ω qui minimisent l'action étendue :

$$A_p : \omega \in D^{\mathcal{T}} \mapsto A(\omega) - \sum_i p(t_i, \omega_{t_i})$$

à extrémités fixées. Le fait que cette condition soit suffisante pourrait être déduit de façon abstraite, mais se vérifie aussi facilement à la main : si P est un compétiteur satisfaisant cette conditions et si Q est un autre compétiteur,

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} A_p(\omega)P(\omega) &= \sum_{\omega} \varphi(\omega_0, \omega_1)P(\omega) && \text{par (1.37)} \\ &= \sum_{j_1 j_2} \varphi(x_{j_1}, x_{j_2}) \sum_{\substack{\omega \in D^{\mathcal{T}} \\ \omega_0 = x_{j_1}, \omega_1 = x_{j_2}}} P(\omega) \\ &= \sum_{j_1 j_2} \varphi(x_{j_1}, x_{j_2}) \gamma_{j_1 j_2} && \text{par (1.34)} \\ &= \sum_{\omega} \varphi(\omega_0, \omega_1)Q(\omega) && \text{par (1.34)} \\ &\leq \sum_{\omega} A_p(\omega)Q(\omega) && \text{par (1.36)}. \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat en remarquant que (1.35) implique :

$$\sum_{\omega} \sum_i p(t_i, \omega_{t_i})P(\omega) = \sum_{\omega} \sum_i p(t_i, \omega_{t_i})Q(\omega) = \sum_{ij} \rho_{ij} p(t_i, x_j).$$



On peut donc imaginer qu'une condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour un compétiteur P est l'existence d'une fonction $p = p(t, x)$ telle que pour P -presque tout chemin ω , ω minimise l'action modifiée :

$$\int_0^1 \left\{ \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} - p(t, \omega_t) \right\} dt \tag{1.38}$$

parmi les courbes partageant ses extrémités. D'abord, cette condition est bien suffisante (le calcul du cas discret s'adapte de façon transparente). Une conséquence importante de ce fait est qu'une solution régulière u à l'équation d'Euler incompressible (1.47) donne lieu à une solution du problème de transport optimal incompressible, et cette solution est unique. En particulier, dans le cas où le problème d'Arnol'd admet une solution, celle-ci est également une solution du problème relaxé du transport optimal incompressible, et elle est unique même au niveau du problème relaxé. Cette propriété rappelle la notion d'unicité fort-faible pour les équations aux dérivées partielles d'évolution : s'il existe une solution forte, alors elle est unique même dans la classe des solutions faibles.

Théorème 1.1.23 (Brenier 1989²¹). *Soit u une solution à l'équation d'Euler incompressible (1.47) jusqu'à l'instant $T > 0$, p sa pression supposée suffisamment régulière, (Φ_t) le flot associé à u par (1.10) et P le flot généralisé associé à (Φ_t) par (1.17). Si la hessienne de p satisfait au sens des matrices symétriques :*

$$\forall(t, x) \quad D^2 p(t, x) \leq \frac{\pi^2}{T^2}, \quad (1.39)$$

alors P est une solution du problème de transport optimal incompressible pour ses propres conditions extrémales. Si l'inégalité est stricte, alors cette solution est unique.

En effet, dans les conditions du théorème, P ne charge que des solutions de l'équation de Newton :

$$\ddot{\omega}_t = -\nabla p(t, \omega_t). \quad (1.40)$$

(Ce sont les caractéristiques de l'équation d'Euler.) Or la condition (1.39) est une condition suffisante pour que ces solutions soient des minimiseurs de l'action (1.38) à extrémités fixées jusqu'à l'instant T , et dans le cas de l'inégalité stricte, pour qu'il n'existe qu'une courbe minimisante. Le théorème est alors une conséquence de notre condition suffisante d'optimalité.

En revanche, le caractère nécessaire de cette condition n'est connu que dans un sens faible, *localisé en temps*. Dans le reste de cette sous-section, l'objectif sera de présenter les trois points suivants :

- Toute solution admet un unique champ de pression. Il s'agit *a priori* d'une distribution agissant comme un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte d'incompressibilité. On y a accès *via* le théorème de l'enveloppe du Calcul des Variations.
- Un phénomène surprenant survient : même dans le cas où il existe plusieurs solutions au problème de transport optimal incompressible, toutes ces solutions admettent la même pression.
- Cette pression a la régularité $L^2_{\text{loc}}(0, 1; BV(\mathbb{T}^d))$, ce qui est suffisant pour définir l'action (1.38) localement en temps pour P -presque toute courbe. Pour tout $0 < a < b < 1$, P -presque toute courbe minimise alors cette action entre les instants a et b parmi les courbes partageant leurs positions aux instants a et b .

Existence d'un champ de pression. Rappelons tout d'abord brièvement ce qu'est le théorème de l'enveloppe. Imaginons que l'on veuille minimiser la fonction

$$f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

sous les contraintes

$$g_1 = c_1, \quad g_2 = c_2, \quad \dots, \quad g_p = c_p,$$

où g_1, \dots, g_p sont des applications de \mathbb{R}^N dans $\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_p}$ respectivement, et où on a fixé les valeurs des contraintes $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \dots, c_p \in \mathbb{R}^{n_p}$. Supposons que ce problème admette pour solution un point $x^* = x^*(c_1, \dots, c_p) \in \mathbb{R}^N$, et notons $f^*(c_1, \dots, c_p) = f \circ x^*(c_1, \dots, c_p)$ la valeur optimale correspondante. Dans le cas favorable (si f et g_1, \dots, g_p sont régulières et si les contraintes sont

²¹Théorème 5.1 dans [20].

qualifiées), le théorème des extrema liés nous garantit l'existence de $\lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ ²², les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes, tels que :

$$\nabla f(x^*) = \sum_{k=1}^p dg_k(x^*)^\top \cdot \lambda_k,$$

où pour chaque k , $dg_k(x^*)^\top : \mathbb{R}^{n_k} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est l'adjoint de la différentielle $dg_k(x^*)$ de g_k au point x^* . Supposons alors que le point d'optimalité x^* , comme fonction de c_1, \dots, c_p , soit différentiable par rapport à c_{k_0} pour un certain $k_0 \in \{1, \dots, p\}$. On a alors avec des notations classiques :

$$\begin{aligned} \nabla_{c_{k_0}} f^*(c_1, \dots, c_p) &= \nabla_{c_{k_0}} (f \circ x^*(c_1, \dots, c_p)) \\ &= \left\langle \nabla f(x^*), \partial_{c_{k_0}} x^*(c_1, \dots, c_p) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^p \left\langle \lambda_k, dg_k(x^*) \partial_{c_k} x^*(c_1, \dots, c_p) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^p \left\langle \lambda_k, \partial_{c_{k_0}} g_k(x^*(c_1, \dots, c_p)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Mais par définition, pour tout k , $g_k(x^*(c_1, \dots, c_p)) = c_k$, donc tous les termes de la somme sauf le k_0 -ième s'annule, et on a :

$$\nabla_{c_{k_0}} f \circ x^*(c_1, \dots, c_p) = \lambda_{k_0}.$$

C'est le théorème de l'enveloppe : dans les situations favorables, le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte k_0 représente la différentielle de la valeur optimale lorsque l'on relâche la contrainte k_0 dans le problème d'optimisation, tout en maintenant les autres contraintes fixées.

Dans notre situation, on voit les choses dans l'autre sens : on montre que la valeur optimale du problème est différentiable par rapport à la densité lorsque l'on relâche la contrainte d'incompressibilité tout en maintenant fixe la contrainte sur les conditions extrémales, puis on appelle champ de pression la différentielle obtenue. On introduit donc le problème de transport optimal incompressible dans lequel on relâche la contrainte d'incompressibilité.

Problème 1.1.24 (Problème du transport optimal à densité fixée). Soit $\gamma \in \mathcal{P}(D \times D)$ une mesure de probabilité bistochastique et $\rho = (\rho_t)_{t \in [0,1]} \in C^0([0,1]; \mathcal{P}(D))$ une courbe tracée sur l'espace des mesures de probabilité sur D . Trouver le flot généralisé P de sorte que :

- les conditions extrémales de P sont décrites par γ , *i.e.* (1.12) est satisfaite,
- le flot P a pour densité ρ , c'est à dire pour tout $t \in [0,1]$, $X_{t\#} P = \rho_t$,
- l'action $\bar{\mathcal{A}}(P)$ est minimale parmi tous les choix de flots généralisés respectant les deux premiers points.

On fera référence à ce problème par le sigle $\text{IOT}(\gamma, \rho)$.

²²Dans un but de concision, j'utilise outrageusement le caractère euclidien de \mathbb{R}^n comme cela m'arrange, alors qu'une partie de la difficulté en dimension infinie provient précisément du fait que les espaces en jeu ne sont plus réflexifs.

Remarque 1.1.25. Bien sûr, si γ est bistochastique, pour que les deux premiers points soient compatibles, il faut que $\rho_0 = \rho_1 = \text{Leb}$.

Notons alors $\bar{\mathcal{A}}^*(\rho)$ l'action optimale dans ce problème de minimisation. L'enjeu devient alors de démontrer que $\bar{\mathcal{A}}^*$ est différentiable pour une certaine topologie au point $\rho = \text{Leb}$ ²³. Sa différentielle, qui sera un élément du dual de l'espace des densités que l'on considérera, sera alors le champ de pression que l'on cherche. Mais il se trouve que $\bar{\mathcal{A}}^*$ est convexe. C'est une conséquence du fait que si P_1 est un compétiteur pour la densité ρ_1 , et P_2 est un compétiteur pour la densité ρ_2 , alors $(P_1 + P_2)/2$ est un compétiteur pour la densité $(\rho_1 + \rho_2)/2$. Pour être différentiable au point Leb ²⁴, il suffit donc à $\bar{\mathcal{A}}^*$ d'être bornée au voisinage de Leb , et d'avoir une sous-différentielle réduite à un point.

C'est précisément le contenu du théorème suivant, dû à Brenier [22], revisité par Ambrosio et Figalli [3, Section 6]. Dans l'énoncé de ce théorème, on note \mathcal{C} l'ensemble des fonctions scalaires $\varphi \in C_c^1((0, 1) \times D)$, d'intégrale nulle en tout temps et telles que $1 + \varphi$ soit partout positive. En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$, on a $(1 + \varphi) \text{Leb} \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(D))$.

Théorème 1.1.26 (Brenier 1993, Ambrosio, Figalli 2009). *Il existe C ne dépendant que de la dimension telle que quelle que soit la fonction $\varphi \in \mathcal{C}$ vérifiant $\|\varphi\|_{C^1} \leq 1/2$,*

$$\bar{\mathcal{A}}^*((1 + \varphi) \text{Leb}) \leq C. \quad (1.41)$$

En tant que fonctionnelle sur \mathcal{C} , $\bar{\mathcal{A}}^$ admet donc une sous-différentielle non-vide au point Leb .*

Cela signifie qu'il existe $p \in \mathcal{C}'$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$,

$$\bar{\mathcal{A}}^*((1 + \varphi) \text{Leb}) \geq \bar{\mathcal{A}}^*(\text{Leb}) + \langle p, \varphi \rangle_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}. \quad (1.42)$$

De plus, cette inégalité caractérise p au sens des distributions (à l'ajout d'une distribution ne dépendant que du temps près) : si P est solution au problème du transport optimal incompressible de conditions extrémales γ , alors pour tout champ de vecteurs $\xi \in C_c^\infty((0, 1) \times D)$:

$$\langle p, \text{div } \xi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \iint_0^1 \left\langle \frac{d}{dt} \xi(t, \omega_t), \dot{\omega}_t \right\rangle dt dP(\omega). \quad (1.43)$$

Remarque 1.1.27. Ce théorème affirme non seulement l'existence d'un champ de pression, mais aussi le fait que ce champ de pression est unique et ne dépend pas de la solution considérée, comme annoncé précédemment. En particulier, la valeur du membre de droite de (1.43) est la même quelle que soit la solution P choisie.

Donnons quelques idées sur la façon proposée par Brenier dans [22] pour obtenir (1.41), car on adoptera des approches similaires au Chapitres 2 et 5 pour modifier la densité de flots généralisés sans trop augmenter leurs actions. Remarquons que si $\xi \in C_c^1((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$ est un champ de vecteurs, petit en norme C^1 , et si P est un flot généralisé incompressible d'action fini, alors en définissant :

$$\Psi : \omega \mapsto \left(t \mapsto \omega_t + \xi(t, \omega_t) \right), \quad (1.44)$$

et $Q := \Psi_{\#} P$, alors Q a pour densité :

$$\forall t \in [0, 1], \quad X_{t\#} Q = (\text{Id} + \xi(t, \bullet))_{\#} \text{Leb},$$

²³Ici, on fait un petit abus de notation, et on appelle Leb la courbe constante, égale à Leb .

²⁴Disons au sens de Gâteaux, cela n'a pas vraiment d'importance.

et pour action :

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}(Q) &= \bar{\mathcal{A}}(P) + \iint_0^1 \left\langle \frac{d}{dt} \xi(t, \omega_t), \dot{\omega}_t \right\rangle dt dP(\omega) + \frac{1}{2} \iint_0^1 \left| \frac{d}{dt} \xi(t, \omega_t) \right|^2 dt dP(\omega) \\ &\lesssim \bar{\mathcal{A}}(P) \left(1 + \|\xi\|_{C^1} \right).\end{aligned}\quad (1.45)$$

(Le symbole \lesssim signifie « inférieur à, à une constante multiplicative près ».) Ainsi, pour démontrer (1.41), il suffit de trouver pour tout φ comme dans l'énoncé du Théorème 1.1.26 un champ de vecteur $\xi \in C_c^1((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$ tel que :

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, 1], \quad (\text{Id} + \xi(t, \bullet))_{\#} \text{Leb} &= (1 + \varphi(t, \bullet)) \text{Leb}, \\ \|\xi\|_{C^1} &\lesssim \|\varphi\|_{C^1}.\end{aligned}$$

Le Q ainsi obtenu sera alors un compétiteur d'action bornée uniformément en φ du problème $\text{IOT}(\gamma, (1 + \varphi) \text{Leb})$. Or un résultat dû à Dacorogna et Moser [36], dont on donne une version simple et adaptée à nos problème au Lemme 2.2.3, nous permet de trouver un tel ξ , et donc de conclure.

Régularité de la pression et condition nécessaire d'optimalité. Une fois obtenu un champ de pression satisfaisant l'inégalité (1.42), la dérivation formelle du caractère nécessaire de la condition énoncée à l'équation (1.38) est assez simple (voir [3, Section 6] pour plus de détails). En effet, disons qu'on se place dans le cas $D = \mathbb{T}^d$, et choisissons P une solution au problème de transport optimal incompressible. Soit $h \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$ une courbe dont les deux extrémités sont 0. On définit alors P_h en ajoutant h à toute courbe chargée par P :

$$\Psi : \omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d) \mapsto \omega + h \quad \text{et} \quad P_h := \Psi_{\#} P.$$

Maintenant, pour tout borélien $E \subset C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, on définit :

$$Q_h^E := \mathbf{1}_E P + \mathbf{1}_{^c E} P_h,$$

où $^c E$ est le complémentaire de E . On note ρ_h^E la densité de Q_h^E . Imaginons que l'on puisse appliquer (1.42) à $\phi := \rho_h^E - 1$. On obtient alors :

$$\bar{\mathcal{A}}(Q_h^E) \geq \bar{\mathcal{A}}^*(\rho_h^E) \geq \bar{\mathcal{A}}^*(\text{Leb}) + \langle p, \rho_h^E - 1 \rangle = \bar{\mathcal{A}}(P) + \langle p, \rho_h^E - 1 \rangle.$$

En manipulant un tout petit peu cette inégalité, on obtient :

$$\int_E \int_0^1 \left\{ \frac{|\dot{\omega}_t + \dot{h}_t|^2}{2} - p(t, \omega_t + h_t) \right\} dt dP(\omega) \geq \int_E \int_0^1 \left\{ \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} - p(t, \omega_t) \right\} dt dP(\omega).$$

Donc pour tout h , P -presque tout ω a une action (1.38) plus petite que $\omega + h$. Mais des arguments de séparabilité devraient alors permettre d'invertir le « pour tout » et le « P -presque tout », et on obtiendrait que P -presque toute courbe minimise l'action (1.38) à extrémités fixées.

En fait, pour des raisons techniques visant d'une part à justifier l'application de l'inégalité de convexité (1.42) et d'autre part à traiter cette interversion, ces arguments ne sont valables que si p est d'intégrabilité :

$$p \in L^p([0, 1] \times \mathbb{T}^d),$$

avec $p > 1$, et en utilisant dans (1.38) un représentant particulier pour p , défini par :

$$\forall(t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{T}^d, \quad \bar{p}(t, x) := \liminf_{s \rightarrow 0} p * \tau_s(t, x),$$

où $(\tau_s)_{s \geq 0}$ est le noyau de la chaleur sur \mathbb{T}^d . C'est là qu'intervient le résultat de régularité d'Ambrosio et Figalli [2, Théorème 3.1] qui en améliorant un résultat précédent dû à Brenier [24, Théorème 1.2]²⁵ permet d'arriver à ce niveau d'intégrabilité dès lors que l'on s'autorise à localiser en temps (leurs preuves ont depuis été adaptées par Santambrogio [84] à d'autres situations).

Théorème 1.1.28 (Ambrosio, Figalli 2008). *La pression du problème de transport optimal incompressible vérifie :*

$$p \in L_{\text{loc}}^2((0, 1); BV(\mathbb{T}^d)).$$

En particulier, il existe $q > 1$ tel que

$$p \in L_{\text{loc}}^2((0, 1); L^q(\mathbb{T}^d)).$$

Remarque 1.1.29. On ne s'attend pas à ce que ce résultat soit optimal. Une conjecture due à Brenier [28, Section 4] énonce que le champ de pression devrait être semi-concave²⁶, et donne un exemple de solution dont la pression est semi-concave, mais pas plus (notamment, dans cet exemple, pour tout $t \in (0, 1)$, $p(t, \bullet)$ n'est pas dans l'espace de Sobolev $W_{\text{loc}}^{2,1}(D)$).

Ambrosio et Figalli déduisent alors du Théorème 1.1.28 la condition nécessaire suivante.

Théorème 1.1.30 (Ambrosio, Figalli 2009²⁷). *Soit P une solution du problème de transport optimal incompressible, p la pression correspondante et $0 < \varepsilon < 1/2$. Alors P -presque tout ω minimise l'action*

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left\{ \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} - \bar{p}(t, \omega_t) \right\} dt$$

parmi les courbes coïncidant avec ω aux instants ε et $1 - \varepsilon$.

Par ailleurs, s'il existe $q > 1$ tel que $p \in L^q([0, 1] \times \mathbb{T}^d)$, alors on peut même prendre $\varepsilon = 0$.

Remarque 1.1.31. Ce résultat montre donc bien que la condition formelle d'optimalité que l'on avait trouvée, en plus d'être une condition suffisante d'optimalité, en est bien une condition nécessaire dès lors que l'on choisit le bon représentant pour p et dès lors que l'on localise en temps. De plus, ces restrictions ne sont plus nécessaires si l'on peut justifier que p est régulier.

Ces considérations sur le champ de pression, qui sera un objet d'étude récurrent tout au long de cette thèse, closent cette section de présentation du problème de transport optimal incompressible. Présentons maintenant l'équation d'Euler cinétique, qui sera étudiée au Chapitre 3 et qui sera un outil clé dans le résultat du Chapitre 4.

1.2 L'équation d'Euler cinétique

Dans cette section, on va changer de point de vue, et on va expliquer pourquoi la dynamique décrite par le transport optimal incompressible peut aussi être étudiée comme un problème de Cauchy pour une version relaxée de l'équation d'Euler (1.1), à savoir l'équation d'Euler cinétique, et on décrira les principaux résultats connus à propos de cette équation.

²⁵Où il est montré que ∇p est une mesure de Radon sur $(0, 1) \times \mathbb{T}^d$.

²⁶C'est à dire que sa dérivée seconde spatiale devrait être majorée.

²⁷Il s'agit du Théorème 6.8 dans [3].

1.2.1 Présentation

On a donc vu qu'une solution P du problème de transport optimal incompressible admettait une pression p de sorte que P ne charge au moins en un certain sens que des courbes ω minimisant l'action :

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - p(t, \omega_t) \right\} dt$$

à extrémités fixées.

Mais l'objet de la mécanique lagrangienne est justement de dire que ces courbes sont des solutions de l'équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$\ddot{\omega}_t = -\nabla p(t, \omega_t),$$

qui n'est autre que la loi de Newton dans le potentiel p . Or de façon générale, lorsque l'on veut décrire un système de particules suivant toutes la même loi de Newton, on utilise la théorie cinétique qui consiste à étudier l'évolution en fonction du temps de la densité de particules dans l'espace des phases $D \times \mathbb{R}^d$ c'est à dire de la quantité

$$f(t, x, v), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in D, \quad v \in \mathbb{R}^d,$$

qui représente la masse des particules qui sont à l'instant t à la position x et à la vitesse v . Si notre système est représenté par le flot généralisé P , cette densité f^{28} peut se définir à partir de P par :

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(t, \bullet) = (X_t, V_t)_{\#} P, \quad (1.46)$$

où pour toute courbe ω , $X_t(\omega) = \omega_t$ comme précédemment et où $V_t(\omega) = \dot{\omega}_t$ est bien défini pour presque tout t , P -presque sûrement dès que P est d'action finie.

À cause de la loi de Newton, dans notre modèle, les particules qui sont en (x, v) à l'instant t seront en $(x + v dt, v - \nabla p(t, x) dt)$ à l'instant $t + dt$. En termes de f , cela signifie que formellement :

$$f(t + dt, x + v dt, v - \nabla p(t, x) dt) = f(t, x, v),$$

et donc que f doit être une solution de l'équation de Vlasov :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x p \cdot \nabla_v f = 0.$$

Par ailleurs, dans le monde cinétique, la contrainte d'incompressibilité se réécrit :

$$\int f(t, x, v) dv = 1.$$

Décrire cette dynamique comme un problème de Cauchy consiste donc à fixer f_0 une densité initiale sur $D \times \mathbb{R}^d$, et à chercher une solution au problème :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x p \cdot \nabla_v f = 0, \\ \int f dv = 1, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases} \quad (1.47)$$

²⁸*A priori*, à chaque instant, f est une mesure sur $D \times \mathbb{R}^d$. En fait, à cause de la contrainte d'incompressibilité, le bon cadre sera de voir f comme une fonction mesurable de t et x à valeur dans l'ensemble des mesures de probabilité sur l'espace des vitesses. Mais dans ce paragraphe, on fera comme si c'était une fonction lisse et on notera donc $f(t, x, v) dx dv$ lorsque l'on voudra intégrer par rapport à la mesure correspondante.

Cette équation, introduite par Brenier dans [21], sera vue dans le paragraphe suivant comme une certaine limite de l'équation de Vlasov-Poisson, et est étudiée en tant que telle dans [21, 53, 25, 58, 62]. Nous présenterons alors les résultats existants concernant l'existence et l'unicité de solutions pour cette équation. Pour l'instant, contentons-nous d'en calculer les premiers moments pour voir un peu plus précisément ce à quoi on a affaire. Les calculs que l'on va faire sont formels mais aisément généralisable dans un cadre distributionnel.

Moment d'ordre 0. D'abord, intégrons l'équation de Vlasov par rapport à v . On obtient²⁹ :

$$\partial_t \left(\int f \, dv \right) + \int v \cdot \nabla_x f \, dv - \nabla_x p \cdot \int \nabla_v f \, dv = 0.$$

Or le premier terme s'annule à cause de l'incompressibilité, et le dernier terme s'annule car on intègre un gradient. Le deuxième terme, quant à lui, se reformule de façon conservative :

$$\int v \cdot \nabla_x f \, dv = \operatorname{div}_x \left(\int v f \, dv \right).$$

L'équation du moment d'ordre 0 est donc :

$$\operatorname{div}_x \left(\int v f \, dv \right) = 0. \quad (1.48)$$

Cette formule signifie que la *vitesse macroscopique* des particules est à divergence nulle.

Moment d'ordre 1. Maintenant, multiplions l'équation de Vlasov par v et intégrons la par rapport à v . On obtient :

$$\partial_t \left(\int v f \, dv \right) + \int v \otimes v \cdot \nabla_x f \, dv - \left(\int v \otimes \nabla_v f \, dv \right) \cdot \nabla_x p = 0,$$

où comme précédemment, si $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a \otimes b$ désigne la matrice de taille $d \times d$ dont le coefficient i, j est $a_i b_j$. Mais une intégration par partie dans le troisième terme donne en utilisant l'incompressibilité :

$$\int v \otimes \nabla_v f \, dv = - \int \operatorname{Id} f \, dv = - \operatorname{Id}.$$

Par ailleurs, le deuxième terme s'écrit de façon conservative :

$$\int v \otimes v \cdot \nabla_x f \, dv = \mathbf{div}_x \left(\int v \otimes v f \, dv \right).$$

L'équation du moment d'ordre 1 est donc :

$$\partial_t \left(\int v f \, dv \right) + \mathbf{div}_x \left(\int v \otimes v f \, dv \right) + \nabla_x p = 0. \quad (1.49)$$

²⁹Rappelons que la pression p ne dépend pas de v .

On peut alors faire trois observations.

- D'abord, comme son nom l'indique, l'équation d'Euler cinétique (1.47) est une version cinétique de l'équation d'Euler incompressible (1.1). En effet, si f est *monocinétique*, c'est à dire s'il existe un champ de vecteurs $u = u(t, x)$ tel que f soit de la forme :

$$f(t, x, v) = \delta_{v=u(t,x)}$$

alors par les équations des moments d'ordre 0 (1.48) et d'ordre 1 (1.49), si f solution de (1.47), alors u est solution de l'équation d'Euler incompressible (1.1) avec le même champ de pression. Quelques lignes de calculs distributionnels permettent également de justifier que lorsque u est suffisamment régulière, cette condition nécessaire est également suffisante.

- Remarquons également que l'on ne peut pas choisir n'importe quelle densité initiale f_0 . Bien sûr, il faut que f_0 soit compatible avec la contrainte d'incompressibilité, c'est à dire que pour tout x ,

$$\int f_0(x, v) dv = 1. \quad (1.50)$$

Mais il faut également que f_0 soit compatible avec l'équation (1.48), *i.e.* que :

$$\operatorname{div}_x \left(\int v f_0(x, v) dv \right) = 1. \quad (1.51)$$

- Remarquons enfin que l'on peut écrire une équation pour la pression. Comme dans le cas de l'équation d'Euler incompressible (1.1) où la pression vérifie (1.2), la pression n'est pas véritablement une inconnue supplémentaire du problème puisqu'elle s'exprime à partir de f *via* une équation elliptique. Pour le voir, il suffit de passer à la divergence dans (1.49) et d'utiliser (1.48). On obtient alors :

$$-\Delta_x p = \operatorname{div}_x \mathbf{div}_x \left(\int v \otimes v f dv \right). \quad (1.52)$$

En conséquence, on préférera en général résoudre le système :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x p \cdot \nabla_v f = 0, \\ -\Delta_x p = \operatorname{div}_x \mathbf{div}_x \left(\int v \otimes v f dv \right), \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases} \quad (1.53)$$

et justifier *a posteriori* que lorsque f_0 satisfait les conditions (1.50) et (1.51), alors les solutions de ce système conservent leur incompressibilité, et sont donc des solutions de l'équation d'Euler incompressible (1.47). Cette justification montre de surcroît que les conditions (1.50) et (1.51) sont les seules conditions algébriques à imposer pour obtenir des solutions.³⁰

³⁰Il faudra aussi imposer des conditions de régularité sur f_0 , qui elles seront très restrictives.

1.2.2 La limite quasineutre de l'équation de Vlasov-Poisson

Comme je l'ai déjà dit, l'équation d'Euler cinétique apparaît naturellement en physique des plasmas comme limite quasineutre de l'équation de Vlasov-Poisson régissant l'évolution d'une population de particules chargées sous l'effet de leur propre champ électrique, et qui est l'une des équations les plus étudiées de la physique des plasmas. Plus précisément, on va s'intéresser à la version de cette équation régissant l'évolution d'une population d'électrons dans un environnement peuplé d'une densité uniforme d'ions³¹. En prenant toutes les grandeurs physiques égales à 1, cette équation s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x U \cdot \nabla_v f = 0, \\ -\Delta_x U = \int f \, dv - 1, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases} \quad (1.54)$$

Là encore, le potentiel $U = U(t, x)$ ne dépend que du temps et de la position. Il est solution d'une équation de Poisson dans laquelle seule la densité de particules dans l'espace intervient. Le 1 dans l'équation du champ électrique correspond au champ électrique généré par les ions. Parmi l'énorme quantité de travaux concernant cette équation, mentionnons Ukay-Okabe qui démontrent dans [92] l'existence globale de solutions classiques en dimension 2 d'espace, et Lions-Perthame [72] et Pfaffelmoser [82] qui obtiennent par des méthodes différentes ce résultat en dimension 3. Il me semble que le livre [51] offre une bonne vue d'ensemble du domaine. À ma connaissance, les résultats d'unicité les plus aboutis sont dus à Loeper [73], Miot [78] and Holding-Miot [64].

Dans de nombreux systèmes physiques, il est pertinent d'introduire une grandeur, la *longueur de Debye*, qui correspond à l'échelle typique des oscillations du champ électrique, et qui est très petite devant la longueur typique d'observation dans beaucoup de situations d'étude. Par exemple, dans un tokamak, la longueur de Debye est de l'ordre de $10^{-4}m$. Dans la ionosphère, elle est de l'ordre du millimètre. En faisant intervenir la longueur de Debye, notée ε , l'équation Vlasov-Poisson (1.54) se réécrit :

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon - \nabla_x U^\varepsilon \cdot \nabla_v f^\varepsilon = 0, \\ -\varepsilon^2 \Delta U^\varepsilon = \int f^\varepsilon \, dv - 1, \\ f^\varepsilon|_{t=0} = f_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (1.55)$$

En choisissant $\varepsilon = 0$ dans cette équation, on retrouve exactement l'équation d'Euler cinétique (1.47). Cette limite s'appelle la limite *quasineutre* de l'équation de Vlasov-Poisson, puisqu'à la limite, les densités d'ions et d'électrons coïncident, et le plasma est donc électriquement neutre.

On peut alors se poser la question suivante : lorsque ε est petit, l'équation d'Euler cinétique permet-elle de décrire la dynamique de l'équation de Vlasov-Poisson (1.55) ? En d'autres termes, si (f^ε) est une famille de solutions de Vlasov-Poisson (1.55) pour des longueurs de Debye tendant vers 0, et si f est une solution de l'équation d'Euler cinétique (1.47), a-t-on en un certain sens :

$$f_0^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f_0 \quad \implies \quad f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f?$$

Un article de Grenier [53] a joué un grand rôle dans la perspective de justifier rigoureusement de cette limite³² (qui est encore un sujet actif aujourd'hui, on va le voir). L'auteur y démontre un

³¹Dans un plasma, les ions étant beaucoup plus lourds que les électrons, on peut négliger leur mouvement en première approximation

³²Citons également les articles [29, 52, 25] qui traitent par des méthodes différentes le même type de problématique.

résultat d'existence de solutions pour l'équation de Vlasov-Poisson (1.55) en temps court et pour des données analytiques, mais avec des estimations uniformes en la longueur de Debye ε . Il obtient ainsi à la fois un résultat d'existence et une justification de la limite formelle dans ce cadre des données analytiques. Dans le même article, Grenier décrit les oscillations opérant dans le plasma lorsque les conditions (1.50) et (1.51) ne sont pas satisfaites par f_0^ε . Il décrit ainsi les solutions de l'équation de Vlasov-Poisson à petite longueur de Debye par une solution de l'équation d'Euler cinétique corrigée pour prendre en compte le fait que les données ne sont pas électriquement neutres.

On va voir dans le paragraphe suivant que dans les espaces de Sobolev, les choses sont beaucoup plus compliquées, d'une part à cause des instabilités dans l'équation de Vlasov-Poisson, et d'autre part à cause du scaling de l'équation d'Euler cinétique. Ces phénomènes rendent l'équation d'Euler cinétique mal-posée et la limite quasineutre fautive en général.

1.2.3 Condition de Penrose

Dans toute cette sous-section, on se place dans le cas où $D = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$ pour pouvoir utiliser des descriptions des solutions en série de Fourier par rapport à la variable de position x .

L'équation de Vlasov-Poisson (1.54) admet des solutions stationnaires instables. Le type de solutions stationnaires que l'on va considérer sont *homogènes en espace*. Si f ne dépend que de la variable de vitesse v (on pourra dire que f est un *profil en vitesse* ou simplement un *profil*) :

$$f(t, x, v) = \mu(v),$$

alors f est une solution stationnaire de l'équation de Vlasov-Poisson (1.54) (et également de (1.55) et (1.47) dès que μ est d'intégrale 1 d'ailleurs). En effet, dans ce cas, les deux premiers termes de l'équation de Vlasov s'annulent, et le potentiel ne dépend pas de l'espace, donc son gradient s'annule, et donc le troisième terme de l'équation de Vlasov s'annule également. Si on linéarise (1.54) au voisinage d'une telle solution, c'est à dire si l'on cherche une solution de la forme

$$f(t, x, v) = \mu(v) + \varepsilon h(t, x, v),$$

et qu'on ne garde que les termes d'ordre ε , on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + v \cdot \nabla_x h - \nabla_x U \cdot \nabla_v \mu = 0, \\ -\Delta U = \int h \, dv, \\ h|_{t=0} = h_0. \end{array} \right. \quad (1.56)$$

Une technique standard en théorie des systèmes dynamiques et en particulier des EDPs d'évolution pour étudier la dynamique de l'équation au voisinage de la solution stationnaire μ consiste en premier lieu à rechercher les solutions propres de cette équation linéaire, c'est à dire les solutions de la forme

$$h(t, x, v) = g(x, v) \exp(\lambda t)$$

où g et λ sont éventuellement complexes, et où λ s'appelle le taux de croissance de la solution propre. Lorsque $\Re(\lambda) > 0$, on dit que la solution est instable : elle grandit exponentiellement vite avec le temps, si $\Re(\lambda) < 0$, on dit qu'elle est stable : elle se rapproche exponentiellement vite de 0. Enfin, si

$\Re(\lambda) = 0$, la solution est dite neutre. Ces solutions correspondent exactement aux directions propres de l'opérateur linéaire :

$$g = g(x, v) \mapsto \begin{cases} v \cdot \nabla_x g - \nabla_x U \cdot \nabla_v g, \\ -\Delta_x U = \int g \, dv. \end{cases} \quad (1.57)$$

Si on imagine (ce qui n'est pas le cas ici) que cet opérateur est diagonalisable, alors toutes les solutions de l'équation linéaires seront des combinaisons linéaires de modes exponentiels. On pourra alors tenter de prouver qu'au voisinage de la solution stationnaire μ , toute solution au problème non-linéaire est proche de la solution au problème linéaire ayant la même donnée initiale. On aura alors essentiellement décrit le comportement de notre équation au voisinage de μ par son comportement linéaire, et donc par les solutions propres.

Dans l'équation linéaire (1.56), les inconnues sont h et U , et μ est fixé. Les coefficients de l'équation ne dépendent donc pas de la variable de position x , et l'opérateur linéaire (1.57) préserve les fréquences spatiales. Cela signifie qu'en décomposant les solutions propres en modes de Fourier selon la variable x , on peut se ramener à chercher des solutions propres de la forme :

$$h(t, x, v) = g(v) \exp(in \cdot x) \exp(\lambda t), \quad (1.58)$$

où $n \in \mathbb{Z}^d$, est la fréquence du mode en question. On appelle une telle solution propre un mode propre exponentiel. Ici, on cherche un critère d'instabilité, donc dans la suite de ce calcul, on supposera $\Re(\lambda) > 0$, et on cherchera une condition sur μ , n et λ pour qu'un tel mode propre exponentiel (non nul) existe. Remarquons que le cas $n = 0$ ne permet pas d'obtenir une solution non nulle, on suppose donc $n \neq 0$.

Si on injecte cet *ansatz* dans l'équation linéaire (1.56), on obtient par l'équation de Poisson

$$|n|^2 U(t, x) = \left(\int g(w) \, dw \right) \exp(in \cdot x) \exp(\lambda t),$$

et donc par l'équation de Vlasov en simplifiant par $\exp(in \cdot x) \exp(\lambda t)$:

$$(\lambda + in \cdot v)g(v) = \frac{in \cdot \nabla_v \mu(v)}{|n|^2} \int g(w) \, dw. \quad (1.59)$$

En divisant par $\lambda + in \cdot v$ de part et d'autre de cette égalité (comme on a supposé $\Re(\lambda) > 0$, cette opération est licite), et en intégrant par rapport à v , on obtient :

$$\left(\int g(w) \, dw \right) \times \left(1 - \frac{in}{|n|^2} \cdot \int \frac{\nabla_v \mu(v)}{\lambda + in \cdot v} \, dv \right) = 0.$$

Mais si l'intégrale de g est nulle, alors par (1.59), g est nul et on tombe sur la solution nulle. Pour obtenir une solution non triviale, il faut donc que :

$$\frac{in}{|n|^2} \cdot \int \frac{\nabla_v \mu(v)}{\lambda + in \cdot v} \, dv = 1. \quad (1.60)$$

Réciproquement, si μ , n et λ sont choisis de telle façon que cette condition est satisfaite, on peut par exemple choisir

$$g(v) = \frac{in \cdot \nabla_v \mu(v)}{\lambda + in \cdot v}$$

et alors le mode propre (1.58) est une solution de l'équation linéaire (1.56). Étant donné μ une solution stationnaire, l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\lambda) > 0$ et $n \in \mathbb{Z}^d$ satisfaisant l'équation (1.60) est donc une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de modes propres exponentiels instables de l'équation linéaire (1.56). Cette condition porte désormais le nom de *condition de Penrose* en référence à O. Penrose qui la découvrit et l'étudia pour la première fois dans [81].

On peut alors définir la notion de profil instable comme suit.

Définition 1.2.1. Soit μ un profil en vitesse. On dit que μ est instable s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\lambda) > 0$ et $n \in \mathbb{Z}^d$ pour lesquels la condition de Penrose (1.60) est satisfaite.

Remarque 1.2.2. En général, lorsque l'on étudie un système dynamique ou une EDP d'évolution au voisinage d'une solution stationnaire, la situation favorable est celle où toutes les solutions propres sont stables (au sens strict, c'est à dire de partie réelle strictement négative), on tente alors de démontrer une convergence vers la cette solution stationnaire dans le problème non-linéaire pour toute donnée au voisinage de celle-ci, ce qui correspond à un comportement dissipatif, en temps long. La situation défavorable est celle où il existe une solution propre instable. Dans ce cas, on tente de démontrer le caractère Lyapounov instable de la solution stationnaire : il existe une suite de données initiales $(f_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers la solution stationnaire et un voisinage V de cette solution stationnaire tels que pour tout n , la solution partant de f_0^n sort de V à un certain instant t_n . Le cas où il existe des modes neutres et où il n'existe pas de mode instable est en général plus difficile à traiter.

Dans notre situation, comme μ est à valeurs réelles, remplacer λ par $-\bar{\lambda}$ dans la formule (1.60) ne change pas la valeur de l'intégrale. En d'autres termes, à chaque mode propre stable de taux de croissance λ avec $\Re(\lambda) < 0$ correspond un mode propre instable de taux de croissance $-\bar{\lambda}$ (on a bien $\Re(-\bar{\lambda}) > 0$). En conséquence, aucune solution stationnaire homogène n'est stable au sens strict. Elle est soit instable, soit neutre. Il en ira de même dans le cas des équations (1.55) et (1.47). Par un léger abus de langage, dans le cas neutre, on parle en général tout de même de profil stable par opposition au cas instable. Dans la suite, on ne traitera que des phénomènes liés à l'instabilité.

Dans [81], Penrose décrit la forme des profils stables et instables. En dimension 1, que ce soit pour l'équation de Vlasov-Poisson ou pour l'équation d'Euler cinétique, un profil d'abord croissant puis décroissant est toujours stable, tandis qu'un profil contenant au moins deux maxima locaux suffisamment marqués et suffisamment éloignés est toujours instable. Pour cette raison, cette instabilité est souvent appelée *instabilité des deux bandes*³³ en physique des plasmas. On a représenté à la figure 1.2 la forme typique de profils unidimensionnels stables et instables. L'instabilité dans le cas multidimensionnel n'est pas plus compliquée : un profil multidimensionnel est instable si et seulement si il existe une direction telle que la projection de ce profil sur cette direction est un profil unidimensionnel instable.

Le premier résultat concernant l'instabilité non-linéaire pour ce type d'équation est une preuve de l'instabilité au sens de Lyapounov pour l'équation de Vlasov-Poisson (1.54), démontrée par Guo et Strauss dans [55]. Ce résultat a ensuite été revisité de façon quantitative par Han-Kwan et Hauray [58] en dimension 1 et par Han-Kwan et Nguyen [62] en dimension supérieure.

³³Ou instabilité des deux jets. En anglais, on l'appelle two-stream instability.

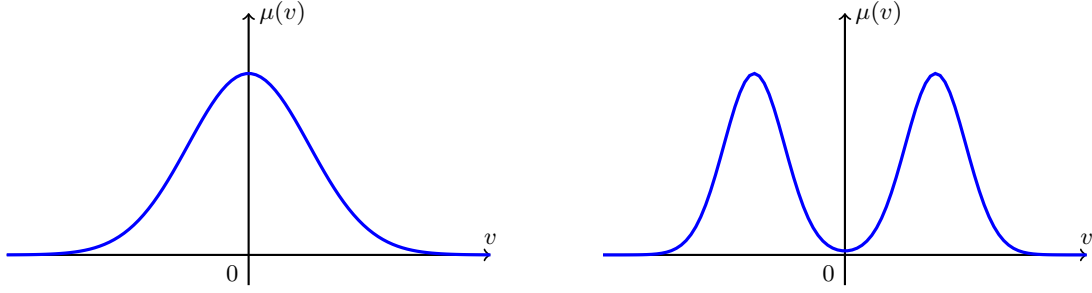


FIGURE 1.2 : À gauche, un profil unidimensionnel stable au sens de Penrose. À droite, un profil unidimensionnel instable.

1.2.4 Caractère mal posé de l'équation d'Euler cinétique

Pour ce qui est de la limite quasineutre, on peut effectuer des calculs similaires en gardant la dépendance en la longueur de Debye (équation (1.55)), et dans le cas de l'équation d'Euler cinétique (1.47). Dans le cas de l'équation de Vlasov-Poisson avec longueur de Debye, la condition de Penrose s'écrit :

$$\frac{in}{|n|^2} \cdot \int \frac{\nabla_v \mu(v)}{\lambda + in \cdot v} dv = \varepsilon^2. \quad (1.61)$$

Dans le cas d'Euler cinétique, on trouve :

$$in \cdot \int \frac{\nabla_v \mu(v)}{\lambda + in \cdot v} dv = 0. \quad (1.62)$$

Remarque 1.2.3. Il existe une différence cruciale entre les formules (1.60) et (1.61) d'une part, et (1.62) d'autre part. En effet, dans le premier cas, lorsque la partie réelle de λ est trop grande en valeur absolue, il ne peut pas exister de $n \in \mathbb{Z}^d$ satisfaisant la condition de Penrose (car le terme de gauche tend vers 0 uniformément en n quand la partie réelle de λ tend vers l'infini) : le spectre instable de l'opérateur linéaire en jeu est borné. Au contraire, en ce qui concerne l'équation d'Euler cinétique, si λ et n vérifient la condition de Penrose (1.62), alors c'est aussi le cas que $k\lambda$ et kn quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, le spectre instable est non borné et le taux de croissance croît au moins proportionnellement à la fréquence des modes propres. On retrouve ici le scaling hyperbolique de l'équation : si $f = f(t, x, v)$ est une solution de l'équation d'Euler cinétique, alors $f_k = f(kt, kx, v)$ est également une solution.

La conséquence de cette remarque est qu'au contraire de l'équation de Vlasov-Poisson qui admet des solutions globales régulières, l'équation d'Euler cinétique est mal posée en général. Ce résultat, obtenu par Han-Kwan et Nguyen dans [61, Théorème 1.2] peut s'exprimer de la façon suivante.

Théorème 1.2.4 (Han-Kwan, Nguyen, 2016). *Soit $\mu = \mu(v)$ une solution stationnaire homogène et analytique de l'équation d'Euler cinétique, instable au sens de Penrose, et satisfaisant certaines conditions d'annulation³⁴ (voir les conditions δ et δ' dans [58]).*

Pour tout $m, s, k \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in (0, 1)$, il existe une famille de temps $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0, une position de l'espace des phases $(x_0, v_0) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ et une famille de solutions $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (1.47) telles que :

³⁴Cette condition est faite pour s'assurer que les solutions construites restent positives.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n est une solution jusqu'au temps T_n partant de la condition initiale f_0^n d'un mode propre exponentiel de fréquence n ,
- la suite de temps $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est d'ordre :

$$T_n = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log n}{n} \right),$$

- l'asymptotique suivante est vérifiée :

$$\frac{\|f^n - \mu\|_{L^2([0, T_n] \times B_n)}}{\|\langle v \rangle^m \{f_0^n - \mu\}\|_{H^s(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)}^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

où $B_n = B(x_0, 1/n^k) \times B(v_0, 1/n^k)$ et $\langle v \rangle = \sqrt{1 + |v|^2}$.

Remarque 1.2.5. 1. Cela signifie qu'il ne peut pas exister de théorie de Cauchy qui associe de façon hölderienne une solution à une donnée initiale, même si l'on contrôle à l'instant initial un grand nombre s de dérivées d'un grand nombre m de moments, et même si l'on cherche une solution dans L^2 localisée en espace et en temps.

2. Ce résultat a été inspiré par des idées générales dues à Métivier [76].
3. Insistons sur le caractère analytique de μ dans ce théorème, et sur les conditions d'annulation que ce profil doit satisfaire. C'est précisément sur ces points que le Chapitre 3 de cette thèse constitue une amélioration. On prouvera que ce résultat est encore valable lorsque μ est seulement une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d , de moment d'ordre 2 fini.

Sans rentrer dans les détails, l'instabilité présentée ici implique aussi que la limite quasineutre est fautive en général lorsque la convergence des données initiales n'a lieu qu'à une vitesse polynomiale et dans les espaces de Sobolev. Ce résultat a été obtenu par Han-Kwan et Hauray [58] en dimension 1 et par Han-Kwan et Nguyen [62] en dimension supérieure. Quand la vitesse de convergence des données est exponentielle en revanche, Han-Kwan et Iacobelli montrent dans [60, 59] que la limite peut être vraie, même quand μ est instable.

1.2.5 Une autre limite singulière : l'équation de Vlasov-Benney

On a donc vu que le caractère mal posé de l'équation d'Euler cinétique (1.47) était une conséquence de l'équation de Vlasov dans un potentiel ne dépendant que de t et x (qui fait apparaître une condition de Penrose au niveau du linéarisé) et du scaling hyperbolique de l'équation. De plus, ce scaling hyperbolique provient du fait que le potentiel p a le même niveau de régularité que la densité f (en vertu de l'équation (1.52)), et donc que le champ de force $-\nabla_x p$ a une dérivée spatiale de plus que f .

Ce même phénomène apparaît dans un modèle étudié par exemple dans les articles [14, 12, 13, 63] (voir aussi les références citées dans ces articles) et qui est souvent appelé équation de Vlasov-Benney :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \rho \cdot \nabla_v f = 0, \\ \rho = \int f \, dv, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases} \quad (1.63)$$

Cette équation révèle le même genre de phénomènes que l'équation d'Euler cinétique, tout en ayant l'avantage d'être locale en espace (tandis que l'équation (1.52) rend la pression non-locale).

L'équation (1.63) est elle aussi une limite quasineutre de l'équation de Vlasov-Poisson, mais cette fois de sa version décrivant l'évolution d'ions autours desquels gravitent des électrons supposés sans masse et suivant la statistique de Maxwell-Boltzmann au premier ordre. Sans entrer dans les détails (voir l'introduction de [56] pour plus de précisions), cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x U \cdot \nabla_v f = 0, \\ U - \varepsilon^2 \Delta U = \int f \, dv - 1, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

Pour l'équation de Vlasov-Benney, la condition de Penrose s'écrit :

$$in \cdot \int \frac{\nabla_v \mu(v)}{\lambda + in \cdot v} \, dv = 1. \quad (1.64)$$

et admet donc la même invariance que (1.62). Le Théorème 1.2.4 est également valable pour l'équation de Vlasov-Benney (il s'agit alors d'une version quantitative d'un résultat précédent de Bardos et Nouri [14, Théorème 4.1]), et comme pour l'équation d'Euler cinétique, il est possible de prouver que la limite quasineutre est fautive en général. De même, les résultats du Chapitre 3 de cette thèse s'appliquent également à cette équation.

Han-Kwan et Rousset [63] (voir aussi le Chapitre 1 de [57]) ont montré que l'équation de Vlasov-Benney est bien posée pour des conditions initiales telles qu'au dessus de chaque x , le profil en vitesse $f_0(x, \bullet)$ est stable, évitant ainsi les instabilités rendant le problème mal-posé. D'ailleurs, ces auteurs affirment qu'un tel résultat devrait être atteignable dans le cas de l'équation d'Euler cinétique.

Je termine ici cette section sur la présentation de l'équation d'Euler cinétique, et je passe à la description des problèmes de régularisation entropique qui occuperont toute la partie II de ma thèse.

1.3 Régularisation entropique du transport optimal incompressible

Ces dernières années, à l'initiative de Mikami [77] puis Léonard [66, 68] une grande quantité de travaux ont été consacrés au *problème de Schrödinger*, et en particulier à son lien avec le problème de transport optimal (voir aussi les travaux [95, 46, 33] et les références qu'ils contiennent pour des études d'autres aspects de ce problème, en particulier son lien avec la mécanique quantique). Le problème de Schrödinger est un problème de minimisation entropique naturellement issu de la théorie des grandes déviations³⁵. Il a le bon goût d'être parfaitement régulier, de très bien approximer le problème de transport optimal quadratique, et d'être calculable numériquement par des méthodes particulièrement efficaces [34, 16] faisant appel à l'algorithme de Sinkhorn [90, 91]. Pour ces raisons, le problème de Schrödinger est souvent appelé *régularisation entropique du transport optimal*. On se propose dans cette section de présenter le problème de Schrödinger, puis sa version incompressible.

Mettons tout de suite le lecteur en garde concernant un point qui peut paraître tentant. Si la régularisation entropique du problème de transport optimal incompressible semble consister à ajouter de la viscosité à celui-ci, en aucun cas on ne prétend modéliser dans un sens faible l'écoulement d'un fluide visqueux lié de près ou de loin à l'équation de Navier-Stokes. J'affirme même que le lien

³⁵Bien que posé par Schrödinger [85, 86] lui-même dès le début des années 30!

entre le transport optimal incompressible et l'équation d'Euler n'existe pas entre la régularisation entropique du premier et l'équation de Navier-Stokes. Je ne développerai pas plus avant cette affirmation, mais une première raison de s'en convaincre est que le problème que l'on va étudier sera parfaitement symétrique en temps.

Le but de cette section est d'introduire le problème de Schrödinger, puis de présenter la version *entropisée* du problème de transport optimal incompressible qui sera le principal objet d'étude de la partie II de cette thèse. Mais avant toute chose, parlons grandes déviations.

1.3.1 Le théorème de Sanov

Le but du théorème de Sanov est de décrire la configuration typique d'un grand nombre de tirages indépendants et identiquement distribués conditionnés à l'observation d'un événement rare.

On se donne donc un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes et identiquement distribuées à valeur dans un espace \mathcal{X} supposé polonais, et de loi R (pour *référence*).

Une fonctionnelle de première importance dans le théorème de Sanov sera la fonctionnelle d'*entropie relative* par rapport à R (aussi appelée divergence de Kullback-Leibler) dont on commence par donner la définition.

Définition 1.3.1. L'entropie relative d'une mesure de probabilité $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ par rapport à R est donnée par :

$$H(P|R) := \begin{cases} \mathbb{E}_P \left[\log \left(\frac{dP}{dR} \right) \right] & \text{si } P \ll R, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vu comme une fonction de P , l'entropie relative $H(\bullet|R)$ est strictement convexe, propre et semi-continue inférieurement [37, Lemme 6.2.12]. Elle s'annule en P si et seulement si $P = R$ et quantifie donc en quelque sorte la proximité de P à R , sans pour autant être une distance (elle n'est par exemple pas symétrique).



Reprenons nos tirages i.i.d. $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On ne va pas s'intéresser à l'ordre dans lequel on effectue les tirages, donc à l'étape n , on ne va s'intéresser qu'à la *mesure empirique* :

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{Z_k}.$$

C'est une mesure aléatoire, c'est à dire une variable aléatoire à valeur dans $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. La loi des grands nombres assure que pour toute fonction continue et bornée φ sur \mathcal{X} ,

$$\int \varphi d\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(Z_k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E}_R[\varphi].$$

En effet, la suite $(\varphi(Z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ constitue une suite de variables aléatoires i.i.d. intégrables (car bornées), de loi $\varphi \# R$. Un « événement rare », ce pourra donc être un événement du type

$$\left| \int \varphi d\mu_n - \mathbb{E}_R[\varphi] \right| \in I$$

pour une certaine fonction test φ et un certain intervalle I de \mathbb{R} à distance strictement positive de 0, voire une intersection de tels événements. Le but de théorème de Sanov est de répondre à la question suivante : *En supposant que n est grand et conditionnellement à des événements rares tels que ceux décrits, que peut on dire de la loi de la mesure aléatoire μ_n ?*

Le théorème est le suivant ([37, Théorème 6.2.10]).

Théorème 1.3.2 (Théorème de Sanov). *En notant $M_n \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$ la loi de μ_n , la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait un principe de grandes déviations de fonction de taux $H(\bullet|R)$ pour la topologie de la convergence étroite.*

En d'autres termes, pour tout ouvert U et tout fermé F de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ muni de la topologie de la convergence étroite :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log M_n(U) &\geq - \inf_{P \in U} H(P|R), \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log M_n(F) &\leq - \inf_{P \in F} H(P|R). \end{aligned}$$

En particulier, à l'étape n , la probabilité que μ_n soit dans un voisinage V d'une mesure P est de l'ordre de :

$$\mathbb{P}(\mu_n \in V) \approx \exp(-nH(P|R)). \quad (1.65)$$

Quelques manipulations de ce principe de grandes déviations permettent d'apporter la réponse suivante à la question que l'on s'était posée, formulée ici de façon informelle mais qui pourrait être rendue parfaitement rigoureuse :

Si n est grand, étant données $(\varphi_j)_{j \in J}$ une famille de fonctions tests indexée par un ensemble J et $(a_j)_{j \in J}$ une famille de nombres réels, conditionnellement à ce que pour tout $j \in J$, on ait

$$\int \varphi_j d\mu_n \approx a_j,$$

alors avec grande probabilité, μ_n est proche de l'unique³⁶ mesure $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ minimisant l'entropie $H(\bullet|R)$ parmi les mesures Q de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ satisfaisant pour tout j :

$$\int \varphi_j dQ = a_j. \quad (1.66)$$

En effet, dans ce cas, μ_n doit être proche d'une mesure Q satisfaisant (1.66) pour tout j . Or, à cause de (1.65), être au voisinage d'un tel Q différent du minimiseur P , et donc d'entropie relative plus grande, est beaucoup plus rare qu'être au voisinage de P , d'où le résultat.

On peut même en général aller un cran plus loin et affirmer que conditionnellement à ces événements rares, avec grande probabilité, tout se passe comme si chaque tirage avait été effectué de façon indépendante mais sous la loi P plutôt que sous la loi R .

Le théorème de Sanov permet donc de réinterpréter des questions de grandes déviations comme des problèmes de minimisation entropique, c'est à dire de recherche de minimiseurs de l'entropie relative sous contraintes de type (1.66).

³⁶À cause de la stricte convexité de $H(\bullet|R)$.

1.3.2 Le problème de Schrödinger en mécanique statistique

Désormais, analysons comment Schrödinger introduit son problème dans [86, Section VII].

Imaginez que vous observez un système de particules en diffusion, qui soient en équilibre thermodynamique. Admettons qu'à un instant donné t_0 vous les ayez trouvées en répartition à peu près uniforme et qu'à $t_1 > t_0$ vous ayez trouvé un écart spontané et considérable par rapport à cette uniformité. On vous demande de quelle manière cet écart s'est produit. Quelle en est la manière la plus probable ?

Un système de particules en diffusion en équilibre thermodynamique, on le modélise en général par un grand nombre n de particules dont les dynamiques sont aléatoires et indépendantes et suivent la loi du *mouvement brownien réversible*, c'est à dire si l'on travaille dans un domaine D de l'espace, le mouvement brownien dont la loi initiale est égale à la mesure de Lebesgue Leb^{37} . En supposant $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, et en choisissant $\nu > 0$, on se donne donc $R^\nu \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; D))$ la loi du mouvement brownien réversible de diffusivité ν^{38} . La question de Schrödinger se formalise alors de la façon suivante. Soit n grand, et (Z_1, \dots, Z_n) des chemins tirés indépendamment sous la loi R^ν , et soit μ_n la mesure empirique

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{Z_k}.$$

En notant comme précédemment X_t l'application d'évaluation à l'instant t , supposons que l'on observe l'événement rare (évidemment formulable en termes de fonctions tests) :

$$X_{1\#}\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{Z_k(1)} \approx \rho_1,$$

pour une certaine mesure $\rho_1 \in \mathcal{P}(D)$ différente de la mesure de Lebesgue. Que peut-on dire de μ_n ?

Par le théorème de Sanov 1.3.2, tout se passe comme si chacun des (Z_1, \dots, Z_n) avait été tiré de façon indépendante sous la loi P minimisant l'entropie relative $H(\bullet|R^\nu)$ sous contrainte $X_{1\#}P = \rho_1$. Décrire μ_n , c'est donc résoudre ce problème d'optimisation.

Ici, on a traité différemment l'instant final de l'instant initial, introduisant de façon artificielle une flèche du temps. En général, on appelle problème de Schrödinger le problème *symétrique en temps* suivant.

Problème 1.3.3 (Problème de Schrödinger). Étant donnés $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(D)$ et $\nu > 0$, trouver le flot généralisé $P \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; D))$ minimisant l'entropie

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(P) := \nu H(P|R^\nu) \tag{1.67}$$

sous contraintes $X_{0\#}P = \rho_0$ et $X_{1\#}P = \rho_1$.

³⁷Ici, D est comme précédemment un ouvert convexe borné ou le tore plat, et on traite le mouvement brownien au bord par une condition de rebond symétrique.

³⁸Le coefficient ν est proportionnel à la température du gaz que l'on considère.

Avant de parler d'existence pour ce problème de minimisation, il nous faut parler de la propriété d'additivité de l'entropie relative, décrite par le lemme suivant et très souvent utile pour l'étude des problèmes de minimisation entropique. C'est une simple conséquence de la propriété d'additivité du log.

Lemme 1.3.4. *Soient \mathcal{X}, \mathcal{Y} deux espaces polonais, $P, R \in \mathcal{P}(X)$ deux mesures de probabilité sur \mathcal{X} et $X : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ une application mesurable. On a alors :*

$$H(P|R) = H(X_{\#}P|X_{\#}R) + \mathbb{E}_P \left[H \left(P^X \middle| R^X \right) \right], \quad (1.68)$$

où P^X et R^X représentent les probabilités conditionnelles $P(\bullet|X)$ et $R(\bullet|X)$ respectivement. En particulier,

$$H(X_{\#}P|X_{\#}R) \leq H(P|R). \quad (1.69)$$

Comme première application de ce lemme, remarquons que s'il existe une solution P au problème de Schrödinger associé à ν, ρ_0, ρ_1 , alors nécessairement par (1.69) :

$$\begin{aligned} H(\rho_0|\text{Leb}) &= H(X_{0\#}P|X_{0\#}R^\nu) \leq H(P|R^\nu) < +\infty, \\ H(\rho_1|\text{Leb}) &= H(X_{1\#}P|X_{1\#}R^\nu) \leq H(P|R^\nu) < +\infty. \end{aligned}$$

Donc quelque soit ν , une condition nécessaire à l'existence d'une solution au problème de Schrödinger entre ρ_0 et ρ_1 est que ces deux densités aient une entropie finie par rapport à la mesure de Lebesgue. En fait, on peut montrer (voir par exemple [45, Section II, Lemme 1.23]) que cette condition est suffisante. De plus, à cause de la stricte convexité de $H(\bullet|R^\nu)$, la solution obtenue est unique.



Le problème de Schrödinger est le même que le problème de transport optimal dynamique 1.1.13, en remplaçant l'action $\bar{\mathcal{A}}$ par l'entropie relative au mouvement brownien.

Et de fait, ces problèmes sont très liés : le problème de transport optimal est la limite du problème de Schrödinger dans la limite de bruit nul, comme le montre le théorème suivant, dû à Léonard et issu de [66, Proposition 3.1] (exprimé ici dans un cadre beaucoup moins général)³⁹.

Théorème 1.3.5 (Léonard 2012). *La Γ -convergence suivante a lieu :*

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}_\nu = \bar{\mathcal{A}}.$$

En particulier, pour tout $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(D)$, il existe $(\rho_0^\nu)_{\nu>0}$ et $(\rho_1^\nu)_{\nu>0}$ des suites de données initiales et finales telles qu'en notant P^ν la solution au problème de Schrödinger entre ρ_0^ν et ρ_1^ν :

- *toute valeur d'adhérence de $(P^\nu)_{\nu>0}$ est une solution au problème de transport optimal entre ρ_0 et ρ_1 ,*
- *on a la convergence des valeurs optimales :*

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) = \bar{\mathcal{A}}^*(\rho_0, \rho_1),$$

l'action optimale dans le problème de transport optimal entre ρ_0 et ρ_1 .

³⁹Notons que pour la version *statique* que je n'ai pas décrite ici, une preuve plus simple et plus courte a été proposée dans [31, Théorème 2.7]. On peut d'ailleurs facilement obtenir le résultat dynamique à partir du résultat statique, mais je ne m'étends pas.

La preuve de Léonard consiste à démontrer la convergence simple des transformées de Jensen des fonctionnelles en jeu.

On reviendra longuement sur ce théorème dans le Chapitre 6 de cette thèse, et on proposera des approches alternatives, plus constructives. On étudiera également de façon systématique le choix que l'on peut effectuer pour les familles $(\rho'_\nu)_{\nu>0}$ et $(\rho''_\nu)_{\nu>0}$.

Pour l'instant, donnons un calcul élémentaire au niveau des marginales fini-dimensionnelles permettant d'entrevoir pourquoi $\overline{\mathcal{H}}_\nu$ est proche de $\overline{\mathcal{A}}$ (et en particulier, pourquoi c'est bien par ν qu'il faut multiplier la fonctionnelle d'entropie pour obtenir quelque chose à la limite). Donnons nous $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = 1$ et $P \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; D))$. Par la formule (1.68) :

$$H(P|R^\nu) = H\left(P_{t_0, \dots, t_p} \middle| R_{t_0, \dots, t_p}^\nu\right) + \mathbb{E}_P \left[H\left(P^{X_{t_0}, \dots, X_{t_p}} \middle| R^{\nu, X_{t_0}, \dots, X_{t_p}}\right) \right]. \quad (1.70)$$

où $P_{t_0, \dots, t_p} = (X_{t_0}, \dots, X_{t_p})\#P$, $R_{t_0, \dots, t_p}^\nu = (X_{t_0}, \dots, X_{t_p})\#R^\nu$ et où les lois $P^{X_{t_0}, \dots, X_{t_p}}$ et $R^{\nu, X_{t_0}, \dots, X_{t_p}}$ sont les lois de P et R^ν conditionnées à leurs positions aux instants t_0, \dots, t_p .

Or soit en faisant comme si on travaillait dans l'espace entier⁴⁰, soit en travaillant au premier ordre quand ν est petit, la loi R_{t_0, \dots, t_p}^ν a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{p+1} (que l'on appelle $\text{Leb}^{\otimes(p+1)}$), qui vaut :

$$\frac{dR_{t_0, \dots, t_p}^\nu}{d\text{Leb}^{\otimes(p+1)}} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}(t_k - t_{k-1})^d} \exp\left(-\frac{|x_k - x_{k-1}|^2}{2\nu(t_k - t_{k-1})}\right).$$

En conséquence, au moins formellement,

$$\begin{aligned} H\left(P_{t_0, \dots, t_p} \middle| R_{t_0, \dots, t_p}^\nu\right) &= \mathbb{E}_{P_{t_0, \dots, t_p}} \left[\log \left(\frac{dP_{t_0, \dots, t_p}}{dR_{t_0, \dots, t_p}^\nu} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{P_{t_0, \dots, t_p}} \left[\log \left(\frac{dP_{t_0, \dots, t_p}}{d\text{Leb}^{\otimes(p+1)}} \right) \right] - \mathbb{E}_{P_{t_0, \dots, t_p}} \left[\log \left(\frac{dR_{t_0, \dots, t_p}^\nu}{d\text{Leb}^{\otimes(p+1)}} \right) \right] \\ &= H\left(P_{t_0, \dots, t_p} \middle| \text{Leb}^{\otimes(p+1)}\right) - \mathbb{E}_P \left[\log \left\{ \prod_{k=1}^p \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}(t_k - t_{k-1})^d} \exp\left(-\frac{|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2}{2\nu(t_k - t_{k-1})}\right) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2\nu} \mathbb{E}_P \left[\sum_{k=1}^p \frac{|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2}{t_k - t_{k-1}} \right] + H\left(P_{t_0, \dots, t_p} \middle| \text{Leb}^{\otimes(p+1)}\right) + \mathcal{O}_{\nu \rightarrow 0}(\log \nu). \end{aligned}$$

En injectant cette estimation dans (1.70) et en multipliant par ν , on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_\nu(P) &= \frac{1}{2} \mathbb{E}_P \left[\sum_{k=1}^p \frac{|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^2}{t_k - t_{k-1}} \right] \\ &\quad + \nu H\left(P_{t_0, \dots, t_p} \middle| \text{Leb}^{\otimes(p+1)}\right) + \nu \mathbb{E}_P \left[H\left(P^{X_{t_0}, \dots, X_{t_p}} \middle| R^{\nu, X_{t_0}, \dots, X_{t_p}}\right) \right] + \mathcal{O}_{\nu \rightarrow 0}(\nu \log \nu). \end{aligned}$$

Or le premier terme est une approximation classique de $\overline{\mathcal{A}}$. Il s'agit donc de montrer que les autres termes sont perturbatifs au sens de la Γ -convergence⁴¹.

⁴⁰On ne s'est pas placé dans ce cadre à cause du fait qu'alors le mouvement brownien réversible n'est pas une mesure de probabilité.

⁴¹On pourrait arguer que ce calcul ne montre pas grand chose car le \mathcal{O} n'est pas uniforme en p , car l'entropie des lois conditionnelles est difficile à manipuler et car la Γ -convergence se comporte mal vis à vis de la somme. Pourtant, en faisant un tout petit peu plus attention, on pourrait démontrer la Γ -lim inf par ce calcul. Mais surtout, il me semble que ces considérations sont assez révélatrices, et on aura tout le temps par la suite de faire des calculs rigoureux.

1.3.3 Théorème de Girsanov à entropie finie

En fait, un outil clé pour avoir des formules exploitables sans passer par les marginales finidimensionnelles sera le théorème de Girsanov. Quand il n'y a pas de bruit, les courbes chargées par le transport optimal sont *absolument continues*, elles sont donc entièrement caractérisées par leurs vitesses. Dans le cas du problème de Schrödinger, ce n'est plus le cas. Cependant, le théorème de Girsanov met à notre disposition des processus, le drift en avant et en arrière, qui s'interprètent comme des sortes de vitesses moyennes (ou vitesses de Nelson, voir [79]) et qui permettent de caractériser complètement la dynamique des processus d'entropie finie par rapport au brownien.

Donnons ici un énoncé relativement concis, tout en citant [67] pour plus de détails, et pour la preuve.

Théorème 1.3.6 (Théorème de Girsanov à entropie finie). *Soit $\nu > 0$ et $P \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; D))$ une mesure d'entropie finie par rapport à R^ν . Alors il existe deux processus $(\vec{b}_t)_{t \in [0, 1]}$ et $(\overleftarrow{b}_t)_{t \in [0, 1]}$ ⁴² (les drifts en avant et en arrière de P) tels qu'au sens d'Itô, sous P ,*

$$dX_t = \vec{b}_t dt + \nu dB_t \quad \text{et} \quad dX_{1-t} = -\overleftarrow{b}_t dt + \nu dB_{1-t}, \quad (1.71)$$

où $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ est un mouvement brownien standard sous P .

De plus, l'entropie de P par rapport à R^ν peut s'exprimer en fonction de $(\vec{b}_t)_{t \in [0, 1]}$ et $(\overleftarrow{b}_t)_{t \in [0, 1]}$:

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(P) = \nu H(\rho_0 | \text{Leb}) + \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbb{E}_P \left[\left| \vec{b}_t \right|^2 \right] dt = \nu H(\rho_1 | \text{Leb}) + \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbb{E}_P \left[\left| \overleftarrow{b}_t \right|^2 \right] dt, \quad (1.72)$$

où ρ_0 et ρ_1 sont $X_{0\#}P$ et $X_{1\#}P$ respectivement.

Souvent, pour obtenir un résultat ne faisant pas intervenir le sens du temps, il est avantageux de faire la demi-somme des inégalités dans (1.72), et ainsi d'obtenir par l'identité du parallélogramme :

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(P) = \nu \frac{H(\rho_0 | \text{Leb}) + H(\rho_1 | \text{Leb})}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbb{E}_P \left[\left| \frac{\vec{b}_t + \overleftarrow{b}_t}{2} \right|^2 + \left| \frac{\vec{b}_t - \overleftarrow{b}_t}{2} \right|^2 \right] dt. \quad (1.73)$$

Les formules (1.72) rappellent la définition de $\overline{\mathcal{A}}$. On a simplement remplacé la vitesse des courbes absolument continues par les drifts de P . Grâce à (1.73), on va pouvoir écrire une formulation à la Benamou-Brenier du problème de Schrödinger.

1.3.4 Formulation à la Benamou-Brenier

Soit $\nu > 0$ et $P \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; D))$ une mesure d'entropie finie par rapport à R^ν . L'idée des formulations à la Benamou-Brenier consiste à voir la densité de P comme une solution de l'équation de continuité, et de voir la fonctionnelle à minimiser comme la contrepartie au niveau des processus d'une fonctionnelle sur les solutions de l'équation de continuité. On commence donc par définir $\rho_t := X_{t\#}P$. Étant donnée la formule (1.73), on peut se dire que les champs de vecteurs $c = c(t, x)$ et $w = w(t, x)$ définis au temps $t \in [0, 1]$ par :

$$P\text{-p.s.} \quad c(t, X_t) = \mathbb{E}_P \left[\frac{\vec{b}_t + \overleftarrow{b}_t}{2} \middle| X_t \right] \quad \text{et} \quad w(t, X_t) = \mathbb{E}_P \left[\frac{\vec{b}_t - \overleftarrow{b}_t}{2} \middle| X_t \right] \quad (1.74)$$

⁴²Pour que cet énoncé ait un sens, il faut que les processus $(\vec{b}_t)_{t \in [0, 1]}$ et $(\overleftarrow{b}_t)_{t \in [0, 1]}$ soient progressifs par rapport aux bonnes filtrations. Ils le sont, mais je n'insiste pas.

vont jouer un rôle. On appelle en général c la *vitesse de courant* associée à P , et w sa *vitesse osmotique*.

Or il se trouve qu'une application directe de la formule d'Itô en utilisant (1.71) montre que (ρ, c) est une solution de l'équation de continuité. De plus, le théorème suivant, prouvé par Föllmer dans [45, Théorème 3.10] dans le cas de la dimension 1 et facilement généralisable en dimension supérieure permet de caractériser entièrement w .

Théorème 1.3.7 (Föllmer 1986). *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.6, en notant $\rho_t := X_{t\#}P$ et en identifiant ρ_t à sa densité par rapport à Leb, pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$P\text{-p.s.} \quad w(t, X_t) = \frac{\nu}{2} \nabla \log \rho_t^{43}.$$

Il n'y a donc pas le choix : toutes les lois d'entropie finie par rapport à R^ν ont la même vitesse osmotique.

Revenons à l'identité (1.73). Par l'inégalité de Jensen, on a :

$$\begin{aligned} & \nu \frac{H(\rho_0 | \text{Leb}) + H(\rho_1 | \text{Leb})}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t(x)|^2 d\rho_t(x) dt \\ &= \nu \frac{H(\rho_0 | \text{Leb}) + H(\rho_1 | \text{Leb})}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbb{E}_P \left[|c(t, X_t)|^2 + |w(t, X_t)|^2 \right] dt \\ &\leq \nu \frac{H(\rho_0 | \text{Leb}) + H(\rho_1 | \text{Leb})}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbb{E}_P \left[\left| \frac{\vec{b}_t + \overleftarrow{b}_t}{2} \right|^2 + \left| \frac{\vec{b}_t - \overleftarrow{b}_t}{2} \right|^2 \right] dt \\ &= \nu H(P | R^\nu). \end{aligned} \tag{1.75}$$

De plus, l'égalité survient si et seulement si pour presque tout $t \in [0, 1]$,

$$P\text{-p.s.} \quad \frac{\vec{b}_t + \overleftarrow{b}_t}{2} = c(t, X_t) \quad \text{et} \quad \frac{\vec{b}_t - \overleftarrow{b}_t}{2} = w(t, X_t), \tag{1.76}$$

ce qui correspond exactement au cas où les drifts ne dépendent que de la position présente, c'est à dire au cas où la loi P est markovienne.

Réciproquement, on verra plus tard, au Lemme 5.3.4 du Chapitre 5 que si (ρ, c) est une solution de l'équation de continuité telle que :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int |c(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t(x)|^2 d\rho_t(x) dt < +\infty,$$

alors il existe P markovienne de densité ρ , ayant pour vitesse de courant c , pour vitesse osmotique $w = \nu \nabla \log \rho / 2$, vérifiant (1.76) et donc :

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(P) = \nu \frac{H(\rho_0 | \text{Leb}) + H(\rho_1 | \text{Leb})}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t(x)|^2 d\rho_t(x) dt.$$

On en conclue alors que si P est une solution du problème de Schrödinger à diffusivité ν entre ρ_0 et ρ_1 , alors P est markovienne, et le couple (ρ, c) constitué de sa densité et de sa vitesse de courant est solution du problème de minimisation suivant (on se réfère également à [32, Section IV], [47, Corollaire 5.8] ou l'introduction de [48] pour l'observation de cette équivalence).

⁴³Pour donner un sens à $\nabla \log \rho_t$, une façon commode est de montrer que $\sqrt{\rho_t} \in H^1(D)$, puis de définir par $\nabla \log \rho_t := 2\nabla \sqrt{\rho_t} / \sqrt{\rho_t}$, qui est bien défini ρ_t -presque partout.

Problème 1.3.8 (Formulation Benamou-Brenier du problème de Schrödinger). Soit $\nu > 0$. Étant donnés $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(D)$, trouver le couple (ρ, c) tel que :

- Le couple (ρ, c) est une solution de l'équation de continuité joignant ρ_0 à ρ_1 .
- La densité ρ vérifie $\sqrt{\rho} \in L^2((0, 1); H^1(\mathbb{T}^d))$. Dans ce cas, on note :

$$\nabla \log \rho_t := 2 \frac{\nabla \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}, \quad (1.77)$$

qui est bien définie $dt \otimes \rho_t$ -presque partout.

- Le couple (ρ, c) minimise la fonctionnelle :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho, c) := \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t(x)|^2 d\rho_t(x) dt. \quad (1.78)$$

dans l'ensemble des couples qui vérifient les deux premiers points.

On voit bien le lien avec le transport optimal quadratique, dont la formulation Benamou-Brenier consiste simplement à poser $\nu = 0$ dans la formule ci-dessus. Plus précisément, on a pénalisé le problème de transport optimal avec un terme faisant intervenir l'*information de Fisher* de ρ . En effet, la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}(\rho) := \frac{1}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t|^2 d\rho_t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \int |\nabla \sqrt{\rho_t}|^2 dx dt, \quad (1.79)$$

fixée à $+\infty$ si $\sqrt{\rho}$ n'est pas dans $L^2((0, 1); H^1(\mathbb{T}^d))$ n'est autre que l'intégrale en temps de l'information de Fisher :

$$F(\rho_t) := \frac{1}{8} \int |\nabla \log \rho_t|^2 d\rho_t.$$

La fonctionnelle \mathcal{F} est strictement convexe et semi-continue inférieurement sur $C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ lorsque $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ est muni de la topologie de la convergence étroite.

Remarque 1.3.9. 1. Ici, pas besoin de mettre les termes impliquant ρ_0 et ρ_1 de la formule (1.73). En effet, ρ_0 et ρ_1 étant prescrits, ce terme ne dépend pas du compétiteur considéré.

2. Comme pour le problème de Schrödinger, ce problème admet une solution si et seulement si $H(\rho_0 | \text{Leb}) < +\infty$ et $H(\rho_1 | \text{Leb}) < +\infty$. Dans ce cas, la solution est unique.
3. À partir de maintenant, on ne réécrira plus la condition $\sqrt{\rho} \in L^2((0, 1); H^1(\mathbb{T}^d))$, puisque par définition de \mathcal{F} , cette condition sera vérifiée dès que $\mathcal{F}(\rho) < +\infty$. Rappelons nous simplement que dans tout ce manuscrit, $\nabla \log \rho$ n'est bien définie *via* la formule (1.77) que si cette condition est vérifiée.
4. On commence également à voir pourquoi ce type de problème est fréquemment appelé *régularisation entropique* des problèmes de transport optimal. En effet, une solution de ce problème a nécessairement une information de Fischer intégrable par rapport au temps, ce qui peut-être vu comme une propriété de régularité de ρ .

Comme dans le cas du transport optimal, on peut reformuler le problème à l'aide du Théorème 1.1.20, en faisant intervenir la dérivée métrique de ρ .

Problème 1.3.10 (Problème de Schrödinger en termes de dérivée métrique). Soit $\nu > 0$. Étant donné $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(D)$, trouver $\rho \in AC^2([0, 1]; \mathcal{P}(D))$ minimisant la fonctionnelle (que l'on continue d'appeler \mathcal{H}_ν avec un léger abus de notation) :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho) := \int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t(x)|^2 d\rho_t(x) dt. \quad (1.80)$$

sous contrainte $\rho|_{t=0} = \rho_0$ et $\rho|_{t=1} = \rho_1$.

Dans la suite et en particulier au Chapitre 6, on appellera ce problème $\text{Sch}_\nu(\rho_0, \rho_1)$.

1.3.5 Le problème de Brödinger

Le problème de Brödinger (nommé ainsi par les auteurs de [5] comme combinaison du modèle de Brenier et du problème de Schrödinger) est une version incompressible du problème de Schrödinger de la même façon que le problème de transport optimal incompressible est une version incompressible du problème de transport optimal. Comme pour le problème de transport optimal incompressible, on peut en étudier trois versions : une concernant les lois, une multiphasique et une en termes de plans de trafic. À chaque fois, on remplace simplement la fonctionnelle d'action par la fonctionnelle d'entropie. Ces problèmes prennent donc la forme suivante.

Problème 1.3.11 (Problème de Brödinger). Soit $\nu > 0$ et $\gamma \in \mathcal{P}(D \times D)$ une mesure de probabilité bistochastique. Trouver le flot généralisé P de sorte que :

- les conditions extrémales de P sont décrites par γ , *i.e.* (1.12) est satisfaite,
- le flot P est incompressible, c'est à dire pour tout $t \in [0, 1]$, $X_{t\#}P = \text{Leb}$,
- l'entropie relative $\overline{\mathcal{H}}_\nu(P)$ (définie par la formule 1.67) est minimale parmi tous les choix de flots généralisés respectant les deux premiers points.

Ce problème sera noté $\text{Brö}_\nu(\gamma)$.

Ce problème a été proposé et étudié pour la première fois par Arnaudon, Cruzeiro, Léonard et Zambrini dans [5].

Problème 1.3.12 (Problème de Brödinger multiphasique). Soit $(\mathcal{I}, \mathbf{m})$ un espace de probabilité et soit $\nu > 0$. Étant donné un choix mesurable $\rho_0 = (\rho_0^i)_{i \in \mathcal{I}}$, $\rho_1 = (\rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$ de familles de mesures de probabilité sur D satisfaisant (1.26), trouver une famille mesurable $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$ tels que :

- pour \mathbf{m} -presque tout i , (ρ^i, c^i) est une solution de l'équation de continuité joignant ρ_0^i à ρ_1^i ,
- pour tout $t \in [0, 1]$, la contrainte d'incompressibilité (1.25) est satisfaite,
- La famille $(\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$ minimise la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu(\rho, \mathbf{c}) &:= \frac{1}{2} \int \int_0^1 \int \left\{ |c^i(t, x)|^2 + \frac{\nu^2}{4} |\nabla \log \rho_t^i(x)|^2 \right\} d\rho_t^i(x) dt d\mathbf{m}(i) \\ &= \mathcal{A}(\rho, \mathbf{c}) + \nu^2 \mathcal{F}(\rho), \end{aligned} \quad (1.81)$$

où \mathcal{A} est l'action totale, définie par la formule (1.27) et où :

$$\mathcal{F}(\rho) := \int \mathcal{F}(\rho^i) \, \mathrm{d}\mathbf{m}(i) = \frac{1}{8} \int \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^i(x)|^2 \, \mathrm{d}\rho_t^i(x) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\mathbf{m}(i) \quad (1.82)$$

Ce problème portera l'appellation $\mathrm{MBrö}_\nu(\rho_0, \rho_1)$ dans la suite.

Sous cette forme, le problème a été étudié pour la première fois dans [9], dont le Chapitre 5 de cette thèse est tiré.

Problème 1.3.13 (Problème de Brödinger en termes de plans de trafic). Soit $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(D) \times \mathcal{P}(D))$ une mesure de probabilité bistochastique en moyenne et soit $\nu > 0$. Trouver le plan de trafic \mathbf{P} de sorte que :

- les conditions extrémales de \mathbf{P} sont décrites par Γ , *i.e.* (1.32) est satisfaite,
- le flot \mathbf{P} est incompressible, c'est à dire pour tout $t \in [0, 1]$, (1.30) est satisfaite,
- le plan de trafic \mathbf{P} minimise la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}) &:= \frac{1}{2} \int \int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\mathbf{P}(\rho) + \frac{\nu^2}{8} \int \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t(x)|^2 \, \mathrm{d}\rho_t(x) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\mathbf{P}(\rho) \\ &= \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}) + \nu^2 \overline{\mathcal{F}}(\mathbf{P}), \end{aligned} \quad (1.83)$$

où $\overline{\mathcal{A}}$ est l'action totale, définie par la formule (1.31) et où

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathbf{P}) := \int \mathcal{F}(\rho) \, \mathrm{d}\mathbf{P}(\rho) \quad (1.84)$$

est l'intégrale en temps de l'information de Fisher totale (on rappelle que \mathcal{F} est définie par la formule (1.79)).

Ce problème sera appelé par la suite $\mathrm{TPBrö}_\nu(\Gamma)$.

C'est dans ce cadre que l'on a choisi d'écrire l'article [11] dont le Chapitre 6 de cette thèse est tiré.

Existence de solutions. Comme pour le problème de Schrödinger, il faut imposer des conditions sur les données du problème pour qu'il admette des solutions.

1. Dans le cas du problème de Brödinger, la condition nécessaire et suffisante d'existence est :

$$H(\gamma | \mathrm{Leb} \otimes \mathrm{Leb}) < +\infty. \quad (1.85)$$

La preuve, donnée dans [5, Corollaire 5.2], est très similaire à celle présentée au Théorème 1.1.14, mais en remplaçant les géodésiques par des *ponts browniens*, et en utilisant (1.68).

2. De la même façon, on montre que dans le cas du problème de Brödinger multiphasique, la condition nécessaire et suffisante d'existence est :

$$\int H(\rho_0^i | \mathrm{Leb}) \, \mathrm{d}\mathbf{m}(i) < +\infty \quad \text{et} \quad \int H(\rho_1^i | \mathrm{Leb}) \, \mathrm{d}\mathbf{m}(i) < +\infty. \quad (1.86)$$

3. Dans le cas des plans de trafic, cette condition s'écrit :

$$\int H(\rho_0 | \text{Leb}) d\Gamma(\rho_0, \rho_1) < +\infty \quad \text{et} \quad \int H(\rho_1 | \text{Leb}) d\Gamma(\rho_0, \rho_1) < +\infty. \quad (1.87)$$

Dans ces trois cas, s'il existe une solution, elle est unique (voir par exemple la Remarque 6.A.3 du Chapitre 6 pour le cas des plans de trafic).

Liens entre les différents problèmes. En revanche, le résultat d'équivalence décrit à la sous-section 1.1.5 dans le cas du transport optimal incompressible n'est plus valable dans le cas du problème de Brödinger. En effet, comme elles ont une entropie infinie, les conditions initiales et finales

$$\rho_0^{x,y} = \delta_x, \quad \text{et} \quad \rho_1^{x,y} = \delta_y$$

ne sont pas admissibles pour le problème de Brödinger multiphasique.

Cependant, on pourra montrer (au Théorème 5.3.1) que la construction décrite donne lieu à une solution au problème de Brödinger multiphasique *localisée en temps*. Soit P une solution au problème de Brödinger associée à la condition extrême γ et à la diffusivité ν . Définissons les probabilités conditionnelles :

$$\text{pour } \gamma\text{-presque tout } (x, y), \quad P^{x,y} := P(\bullet | X_0 = x, X_1 = y).$$

On montrera que pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2[$, en notant $P_\varepsilon^{x,y}$ et R_ε^ν les restrictions de $P^{x,y}$ et R^ν aux temps $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, alors pour γ -presque tout (x, y) :

$$H(P_\varepsilon^{x,y} | R_\varepsilon^\nu) < +\infty.$$

On peut donc associer à $P_\varepsilon^{x,y}$ sa densité $(\rho^{x,y})_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}$ et sa vitesse de courant $c^{x,y}$, et on verra que $(\rho^{x,y}, c^{x,y})_{(x,y) \in D \times D}$ indexée par γ est une solution au problème de Brödinger multiphasique entre les instants ε et $1 - \varepsilon$.

L'équivalence entre formulation multiphasique et formulation en termes de plans de trafic, quant à elle, tient toujours dans ce cadre.

Calcul numérique. Citons l'article [17] qui utilise une version discrétisée en temps du problème de Brödinger pour calculer numériquement des solutions approchées au problème de transport optimal incompressible.

Je m'arrête là pour ce qui est de la présentation des problèmes de régularisation entropique. Maintenant que l'on a introduit les notions principales que j'étudierai dans ma thèse, exposons les résultats que je vais démontrer.

1.4 Aperçu des principaux résultats de la partie I

Dans tous les résultats que l'on présente, le domaine physique est le tore plat de dimension d , noté \mathbb{T}^d . Seulement attention, dans les Chapitres 3, pour alléger les notations dans les calculs de séries de Fourier, il s'agit de $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / 2\pi\mathbb{Z}^d$, tandis que dans les autres chapitres, il s'agit de $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. La Partie I de ma thèse porte sur la dépendance du problème de transport optimal incompressible $\text{IOT}(\gamma)$ (Problème 1.1.11) par rapport à la mesure bistochastique γ intervenant dans son énoncé. Plus

précisément, on va donner un résultat positif (au Chapitre 2) et un résultat négatif (au Chapitre 4) concernant le champ de pression : il dépend de façon continue de γ en un certain sens, mais il n'en est pas une fonction lisse. Sans pour autant avoir d'énoncé précis à ce sujet, mentionnons tout de même que cette question doit être liée à la question de la courbure de la variété Riemannienne formelle sous-jacente. Dans chaque cas, les variations de γ sont mesurées par la distance de Monge-Kantorovic d'ordre 2 sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$, notée d_{MK} . Pour ce qui est des variations de p , cela dépendra de la situation.

1.4.1 Chapitre 2 : Dépendance continue de l'action optimale et du champ de pression par rapport aux données

L'objectif du Chapitre 2 est d'abord de montrer un résultat de continuité hölderienne concernant l'action optimale. Dans l'énoncé suivant, si γ est une mesure bistochastique, $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma)$ est l'action optimale dans le problème $\text{IOT}(\gamma)$.

Théorème 1.4.1. *Il existe une constante dimensionnelle $M > 0$ telle que pour toutes mesures $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$ bistochastiques :*

$$|\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2) - \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1)| \leq M d_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^{1/d+3}.$$

La preuve suit peu ou prou celle due à Shnirelman dans [89] lui permettant de comparer l'action optimale $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma)$ à l'action que l'on obtiendrait si les particules voyageaient en ligne droite (violant alors la contrainte d'incompressibilité). L'idée de la preuve est la suivante. Étant donnés γ_1, γ_2 bistochastiques suffisamment proches, $\Gamma \in \mathcal{P}((\mathbb{T}^d)^4)$ un couplage optimal entre γ_1 et γ_2 , et P une solution du problème $\text{IOT}(\gamma_1)$, on va construire à partir de P un flot généralisé P' très proche de P et de conditions extrémales γ_2 de la façon suivante : pour tout chemin ω chargé par P joignant x à y , et tout $X, Y \in \mathbb{T}^d$, on ajoute à ω une fonction affine de façon à obtenir un chemin $\omega^{X,Y}$ joignant X à Y . Le flot généralisé P' est alors celui donnant à $\omega^{X,Y}$ la masse :

$$dP'(\omega^{X,Y}) = \frac{dP(\omega) d\Gamma(x, y, X, Y)}{d\gamma_1(x, y)}.$$

Ce faisant, on aura perdu le caractère incompressible de P . On utilisera alors le théorème de Dacorogna et Moser [36] dont on a déjà parlé (voir le Lemme 2.2.3 du Chapitre 2 pour une version simple de ce résultat) pour redresser P' sans trop augmenter l'action. On obtiendra ainsi un bon compétiteur P'' pour le problème $\text{IOT}(\gamma_2)$. On pourra alors conclure en estimant l'action du flot P'' .

Le Théorème 1.4.1, ou plus exactement le Lemme 2.2.1 qui en est une version adaptée au problème de transport optimal à densité fixée $\text{IOT}(\gamma, \rho)$ (Problème 1.1.24), nous permettra alors de démontrer un résultat de continuité hölderienne pour le champ de pression dans un certain espace dual. Pour tout champ de vecteurs $\xi : [0, 1] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, on note :

$$\mathbf{N}(\xi) := \sup_t \text{Lip } \xi(t, \bullet) + \left(\int_0^1 \|\partial_t \xi(t, \bullet)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.88)$$

Le champ de pression associé à γ , noté p_γ , en tant qu'élément de l'espace dual vis-à-vis de la norme \mathbf{N}^{44} et localisé en temps est une fonction hölderienne de γ .

⁴⁴C'est bien une norme si on la restreint à des champs de vecteurs qui s'annulent aux instants initiaux et finaux.

Théorème 1.4.2. *Soit $\tau \in (0, 1/4)$. Il existe $M > 0$ ne dépendant que de d et de τ telle que pour toutes mesures $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$ bistochastiques :*

$$\sup_{\substack{\mathbf{N}(\xi) \leq 1, \\ \text{Supp}(\xi) \subset [\tau, 1-\tau] \times \mathbb{T}^d}} |\langle \nabla p_{\gamma_2} - \nabla p_{\gamma_1}, \xi \rangle| \leq M \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^{1/[2+2(d+1)(d+2)]}.$$

Pour prouver ce théorème, on raisonne par approximation. On note $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma, \rho)$ l'action optimale dans le problème $\text{IOT}(\gamma, \rho)$, et si ξ est un champ de vecteurs à support compact en temps et tel que $\mathbf{N}(\xi) \leq 1$, on pose $r = \text{div}(\xi)$. On utilise alors les 4 estimations suivantes⁴⁵ :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb} + \delta r) - \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \text{Leb} + \delta r) &\leq M \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^\beta, \\ \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \text{Leb}) - \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb}) &\leq M \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^\beta, \\ \langle p_{\gamma_2}, r \rangle &\leq \frac{\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb} + \delta r) - \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb})}{\delta}, \\ -\langle p_{\gamma_1}, r \rangle &\leq \frac{\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \text{Leb} + \delta r) - \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb})}{\delta} + C\delta, \end{aligned}$$

où $M, \beta, C > 0$, et où les estimations sont uniformes en $\delta > 0$ et ξ .

Les deux premières lignes affirment que l'action optimale dans le problème $\text{IOT}(\gamma, \rho)$ est hôlderienne, ce qui est précisément le résultat du Lemme 2.2.1 dont on a déjà parlé. La troisième ligne est exactement l'inégalité de convexité (1.42) : la pression est dans la sous-différentielle de l'action optimale de $\rho \mapsto \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma, \rho)$ au point Leb . Enfin, la dernière ligne est une majoration au second ordre en δ de l'action $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma, \text{Leb} + \delta r)$. C'est là que la condition $\mathbf{N}(\xi) \leq 1$ intervient. En effet, on obtient cette estimation en observant que si on raisonne comme dans la preuve du Théorème 1.1.26 pour modifier des flots généralisés à partir de champs de vecteurs, alors on peut majorer le terme quadratique de l'action du flot modifié dans (1.45) par $\mathbf{N}(\xi)^2$.

Le résultat est alors obtenu en sommant les deux dernières lignes, puis en utilisant les deux premières et en choisissant $\delta = \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^{\beta/2}$.

1.4.2 Chapitre 3 : Caractère mal posé de l'équation d'Euler cinétique et de l'équation de Vlasov-Benney

Dans le Chapitre 3, on va revisiter le résultat principal de [61] (énoncé plus tôt au Théorème 1.2.4 de cette introduction) concernant le caractère mal-posé de l'équation d'Euler cinétique (1.47) et de l'équation de Vlasov-Benney (1.63), de façon à inclure le cas où le profil stationnaire μ est une simple mesure, sans hypothèse de régularité supplémentaire⁴⁶.

Dans notre cas, on travaille sur des solutions distributionnelles qui sont régulières par rapport à la variable x de position et seulement des mesures par rapport à la variable v de vitesse. Une façon naturelle de contrôler la taille de telles solutions est de raisonner en termes d'observables macroscopiques : on prend une fonction test de la variable de vitesse, on intègre cette fonction test contre notre solution et on étudie les normes Sobolev de la fonction de l'espace ainsi obtenu. Si φ est une fonction test, et si f est une solution, on note $\langle f, \varphi \rangle$ l'observable macroscopique correspondante.

⁴⁵En fait, pour des raisons techniques, ce ne sont pas exactement ces estimations que l'on utilise, mais des versions où l'on régularise r , comme expliqué à la Section 2.3 du Chapitre 2.

⁴⁶Dans le cas de l'équation d'Euler cinétique, on supposera quand même que μ a un moment d'ordre 2 fini de sorte que la pression soit bien définie *via* la formule (1.52).

Par commodité, les fonctions tests que l'on considère sont de classe C^∞ et à support compact, mais on pourrait penser à des résultat analogues prenant en compte les moments de notre solution, et donc la densité spatiale d'énergie, ou d'autres grandeurs du même type. Le résultat principal est le suivant.

Théorème 1.4.3. *Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ un profil stationnaire instable au sens de Penrose, $N \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Il existe une suite de conditions initiales $(f_0^k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour l'équation d'Euler cinétique (1.47) tendant vers μ et une suite de temps $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 tels que :*

- pour tout k , il existe une solution distributionnelle f_k de (1.47) de condition initiale f_0^k , définie jusqu'au temps T_k ,
- si on note p_k la pression correspondante, on a :

$$\frac{\|p_k\|_{L^1([0, T_k] \times \mathbb{T}^d)}}{\sum_{i=1}^N \|\langle f_0^k, \varphi_i \rangle - \langle \mu, \varphi_i \rangle\|_{W^{s, \infty}(\mathbb{T}^d)}^\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (1.89)$$

De plus,

$$T_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{|\log \varepsilon_k|}{|n_k|} \right),$$

où $\varepsilon_k := \|p_k|_{t=0}\|_{L^1}$, et où $f^k - \mu$ est une perturbation d'un mode propre exponentiel de fréquence n_k .

Dans le cas de l'équation de Vlasov-Benney (1.63), le résultat est le même en remplaçant la pression p_k par $\rho_k - 1$, où ρ_k est la densité spatiale associée à la solution f_k .

Ainsi, même si l'on contrôle à l'instant initial un grand nombre d'observables macroscopiques dans des espaces de Sobolev d'indices très élevés, il existe des solutions pour lesquelles une certaine observable (la pression dans le cas d'Euler cinétique et la densité dans le cas de Vlasov-Benney) croît suffisamment vite pour faire diverger la quantité (1.89). En particulier, il ne peut exister de théorie de Cauchy pour (1.47) ou pour (1.63) qui prend une donnée initiale pour laquelle on contrôle un grand nombre de dérivées d'un grand nombre d'observables et qui lui associe de façon hôlderienne une solution, même pour un petit exposant de Hölder, même en temps court, et même si l'on ne demande à contrôler aucune dérivée de la solution.

Remarque 1.4.4. Dans le cas où μ est simplement une mesure, il n'est pas tout à fait clair *a priori* ce que signifie être instable au sens de Penrose puisque les formules (1.62) et (1.64) font intervenir le gradient de μ . En fait, en intégrant par partie ces formules, on obtient :

$$\int \frac{|n|^2}{(\lambda + in \cdot v)^2} d\mu(v) = \begin{cases} 0 & \text{pour Euler cinétique,} \\ -1 & \text{pour Vlasov-Benney,} \end{cases} \quad (1.90)$$

qui ont un bien un sens dans notre situation. On verra d'ailleurs à l'Appendice 3.A du Chapitre 3 qu'en utilisant cette formule pour définir les profils instables, une mesure de Dirac est toujours stable, tandis que dans le cas d'Euler cinétique, la superposition d'un nombre fini supérieur ou égal à 2 de mesures de Dirac est toujours instable. Cette observation est cohérente avec la forme des profils stables et instables que l'on a rencontrés à la Figure 1.2.

Présentons les grandes lignes de la démonstration du Théorème 1.4.3 dans le cas de l'équation d'Euler cinétique. Le cas de l'équation de Vlasov-Benney se traite exactement de la même façon. On commence par adopter une formulation multiphasique, c'est à dire par faire l'observation suivante (déjà faite par exemple dans [53]). Soit $(\mathcal{I}, \mathbf{m})$ un espace de probabilité et soit $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) = (\rho^i, v^i)_{i \in \mathcal{I}}$ une famille de solutions (disons classique) des équations⁴⁷ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \mathcal{I}, \quad \partial_t \rho^i(t, x) + \operatorname{div}(\rho^i(t, x)v^i(t, x)) = 0, \\ \forall i \in \mathcal{I}, \quad \partial_t v^i(t, x) + (v^i(t, x) \cdot \nabla)v^i(t, x) = -\nabla p(t, x), \\ \int \rho^i(t, x) \, d\mathbf{m}(i) \equiv 1, \\ \forall i \in \mathcal{I}, \quad \rho^i|_{t=0} = \rho_0^i \text{ et } v^i|_{t=0} = v_0^i. \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un système constitué d'une infinité d'équations de type « Euler » partageant le même champ de pression, et incompressible en moyenne.

On peut alors définir pour tout temps t et toute position x la mesure $f(t, x, \bullet)$ par :

$$f(t, x, \bullet) := \int \rho^i(t, x) \delta_{v=v^i(t, x)} \, d\mathbf{m}(i), \quad (1.91)$$

ou de façon équivalente pour tout fonction test φ par :

$$\int \varphi(v) f(t, x, dv) = \langle f, \varphi \rangle(t, x) := \int \varphi(v^i(t, x)) \rho^i(t, x) \, d\mathbf{m}(i). \quad (1.92)$$

Dans ce cas, f est une solution distributionnelle de l'équation d'Euler cinétique (1.47).

Or les solutions stationnaires et homogènes de l'équation d'Euler cinétique $f(t, x, v) = \mu(v)$ sont toujours de cette forme avec $\mathcal{I} = \mathbb{R}^d$, $\mathbf{m} = \mu$, et pour tout $w \in \mathbb{R}^d$, $\rho^w \equiv 1$ et $v^w \equiv w$, puisque cela revient à écrire l'identité triviale :

$$\mu = \int \delta_{v=w} \, d\mu(w).$$

Par ailleurs, $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) = (1, w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ est toujours lisse, même quand μ n'est qu'une mesure.

En d'autres termes, à une solution stationnaire et homogène potentiellement très irrégulière μ de l'équation d'Euler cinétique, on peut associer une solution stationnaire et parfaitement régulière $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) := (1, w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_t \rho^w(t, x) + \operatorname{div}(\rho^w(t, x)v^w(t, x)) = 0, \\ \forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_t v^w(t, x) + (v^w(t, x) \cdot \nabla)v^w(t, x) = -\nabla p(t, x), \\ \int \rho^w(t, x) \, d\mu(w) \equiv 1, \\ \forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \rho^w|_{t=0} = \rho_0^w \text{ et } v^w|_{t=0} = v_0^w. \end{array} \right. \quad (1.93)$$

On peut alors se demander s'il existe des solutions instables à ce système d'équations au voisinage de cette solution stationnaire. Cela revient à chercher les solutions instables de l'équation d'Euler cinétique au voisinage de μ qui sont elles aussi décomposables sous la forme (1.91) avec $\mathcal{I} = \mathbb{R}^d$ et

⁴⁷On peut montrer que ces équations constituent les conditions d'optimalité pour le problème de transport optimal incompressible multiphasique MIOT.

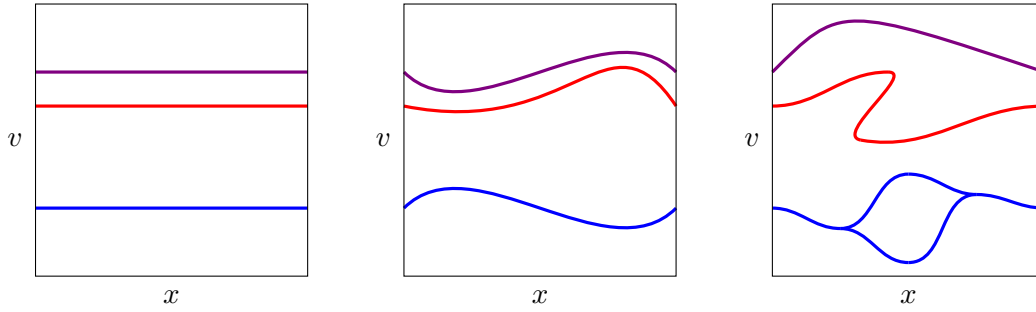


FIGURE 1.3 : À gauche, une solution stationnaire associée au profil μ , qui est une superposition de trois masses de Dirac. Au milieu, une autre densité dans l'espace des phases décomposable sous la forme (1.91) avec $\mathcal{I} = \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{m} = \mu$. Les vitesses dépendent de la position, et la densité sur chaque graphe peut ne plus être uniforme. À droite, la densité ne peut plus être décomposée sous la forme (1.91) avec $\mathcal{I} = \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{m} = \mu$, car les vitesses des deux « phases » inférieures ne forment plus des graphes.

$\mathbf{m} = \mu$ (on donne une illustration de telles solutions à la Figure 1.3). On remarque alors qu'il existe des modes propres exponentiels de fréquence $n \in \mathbb{Z}^d$ et de taux de croissance $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\lambda) > 0$ si et seulement si la condition de Penrose (1.90) est vérifiée. Cela signifie que même si *a priori*, on s'est restreint à étudier une sous-classe de l'ensemble des solutions (celles qui se décomposent sous la forme (1.91) avec $(\mathcal{I}, \mathbf{m}) = (\mathbb{R}^d, \mu)$), cette restriction ne nous a pas fait perdre de direction instable : le spectre du linéarisé du système multiphasique (1.93) au voisinage de $(1, w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ est le même que le spectre du linéarisé de l'équation d'Euler cinétique (1.47) au voisinage de μ ⁴⁸.

On peut alors suivre les grandes lignes de la preuve du Théorème 1.2.4 pour le système multiphasique (1.93) à la place de l'équation d'Euler cinétique (1.47). La première étape consiste à obtenir une estimation optimale pour le semi-groupe de l'équation linéarisée, en régularité analytique (Théorème 3.4.6 du Chapitre 3). La deuxième étape consiste à construire des solutions au système non-linéaire (1.93) comme des perturbations des solutions du problème linéaire correspondant, toujours en régularité analytique. Pour ce faire, on écrit une formule de Duhamel pour le reste, et on obtient des solutions en incorporant à une preuve due à Caffish [30] du théorème de Cauchy-Kovalevskaia l'estimation de la première étape (Théorème 3.5.14). Le Théorème 1.4.3 est alors la conséquence d'estimations sur les solutions que l'on obtient en perturbant des modes propres exponentiels de fréquence et de taux de croissance de plus en plus grands.

Dans notre cas, deux nouvelles difficultés apparaissent. D'une part, on doit traiter en même temps une infinité d'équations. Il faut donc faire attention à ce que toutes les estimations obtenues soient uniformes en w . D'autre part, en passant aux variables multiphasiques, la propriété sur le premier moment que doit satisfaire une condition initiale pour l'équation (1.47), à savoir (1.50), n'est pas linéaire en nos nouvelles variables (ρ, v) . Cela a pour conséquence que les modes propres exponentiels associés au système multiphasique (1.93) ne satisfont pas cette propriété. Pour trouver des solutions, on ne peut donc pas partir des conditions initiales des modes propres exponentiels. Il faut partir de conditions initiales légèrement perturbées, que l'on construit explicitement (c'est l'objet de la Sous-section 3.6.3 du Chapitre 3).

⁴⁸Au moins quand μ est lisse, de façon à pouvoir donner un sens au linéarisé de (1.47) au voisinage de μ .

1.4.3 Chapitre 4 : La pression n'est pas une fonction lisse des données

Enfin, l'objectif du Chapitre 4, sera d'utiliser les solutions instables construites au Chapitre 3 pour démontrer le résultat suivant.

Théorème 1.4.5. *Il existe une mesure bistochastique γ_0 telle que pour tout $r > 1$ et tout $\varepsilon > 0$,*

$$\sup_{\substack{\gamma \neq \gamma_0 \text{ bistochastique,} \\ d_{\text{MK}}(\gamma_0, \gamma) \leq \varepsilon}} \frac{|p_\gamma - p_{\gamma_0}|_{L^r([0,1]; L^1(\mathbb{T}^d))}}{d_{\text{MK}}(\gamma_0, \gamma)} = +\infty.$$

En tant qu'élément de l'espace $L^r(0, 1; L^1(\mathbb{T}^d))$, p_γ ne peut donc pas être une fonction lipschitzienne de γ .

Pour montrer ce résultat, on commencera par donner un résultat d'équivalence entre les solutions du problème de transport optimal incompressible IOT et les solutions distributionnelles de l'équation d'Euler cinétique (1.47). Bien que cela ne soit pas nécessaire pour montrer le Théorème 1.4.5 (on n'utilisera que des solutions dont la pression est analytique), on montrera ce théorème d'équivalence dans un cadre assez général, en supposant que la pression est seulement semi-concave. Comme on l'a déjà vu à la Remarque 1.1.29, Brenier [28] conjecture que cette condition est toujours vérifiée. Plus exactement, on supposera que :

$$\exists C = (C_t) \in L^1(0, T) \quad \text{telle que} \quad D^2 p(t, \bullet) \leq C_t \text{Id}, \quad (1.94)$$

où $D^2 p(t, \bullet)$ est la hessienne distributionnelle de $p(t, \bullet)$, et où l'inégalité est prise au sens des matrices symétriques. Le théorème que l'on montrera est alors le suivant :

Théorème 1.4.6. *Soit P une solution du problème IOT dont le champ de pression est semi-concave au sens de (1.94). Alors sa densité dans l'espace des phases f définie par (1.46) est une solution distributionnelle de l'équation d'Euler cinétique (1.47).*

Réciproquement, si $f = (f_t)_{t \in [0, T]}$ est une solution distributionnelle de l'équation d'Euler cinétique (1.47) dont la pression est semi-concave au sens de (1.94) et si f_0 est à support compact, alors il existe $T^ \leq T$ tel que tout flot généralisé P sur l'intervalle de temps $[0, T^*]$ dont la densité dans l'espace des phases est $(f_t)_{t \in [0, T^*]}$ est une solution du problème IOT.*

Remarque 1.4.7. • Grâce à la théorie de l'équation de continuité avec des champs de vitesse non réguliers développée par DiPerna et Lions dans [38], revisitée et généralisée par Ambrosio et Crippa dans [1], on peut montrer que pour toute solution distributionnelle (f_t) de l'équation d'Euler cinétique dont le gradient de pression est L^1 , il existe un flot généralisé P de densité dans l'espace des phases (f_t) . Donc ce théorème permet toujours de construire des solutions du problème IOT à partir de solutions de l'équations d'Euler cinétique. On donne plus de détails à la Section 4.3.3 du Chapitre 4.

- La condition de support compact de f_0 est nécessaire dans le cas du tore pour se prémunir de particules faisant des tours du tore arbitrairement vite.

La preuve du Théorème 1.4.6 consiste premièrement à développer l'équivalence entre la loi de Newton et le problème de minimisation du Lagrangien en mécanique classique, dans le cas où le potentiel est seulement semi-concave. Bien que cette équivalence soit relativement élémentaire, on

la traite en détails car le fait que l'on travaille dans le tore et sous la condition (1.94) ne sont peut-être pas complètement classiques. On montre alors le premier point du Théorème 1.4.6 de la façon suivante. La condition d'optimalité du Théorème 1.1.30 et l'équivalence loi de Newton/Lagrangien, nous permet de montrer que si P est une solution du problème IOT, alors P -presque toute courbe vérifie la loi de Newton (1.40). Or cette équation est précisément l'équation des caractéristiques de l'équation d'Euler cinétique, ce qui donne le résultat. Le second point, quant à lui, constitue une adaptation au cas cinétique du Théorème 1.1.23 traitant de l'optimalité des solutions de l'équation d'Euler.

Donnons aussi brièvement les idées de la preuve du Théorème 1.4.5. On choisit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ à support compact et instable au sens de Penrose. On prend alors $n \in \mathbb{Z}^d$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ de partie réelle positive vérifiant la condition de Penrose (1.90). Pour tout $c \in \mathbb{R}$ suffisamment petit, on peut alors trouver grâce au Chapitre 3 une donnée initiale f_0^c et une solution (f_t^c) de l'équation d'Euler cinétique partant de f_0^c jusqu'à l'instant 1 telles que :

- la donnée initiale f_0^c est une perturbation d'ordre c de la solution stationnaire μ ,
- la pression p^c correspondante est proche du mode exponentiel :

$$p^c(t, x) \approx c \Re \left(\exp(in \cdot x) \exp(\lambda t) \right).$$

On note P^c la solution au problème IOT correspondant à f^c via le Théorème 1.4.6, P^0 celle associée à la solution stationnaire μ , et γ^c, γ^0 leurs conditions extrémales respectives. Rappelons que la pression associée à la solution stationnaire est nulle. On montre alors aux Lemmes 4.4.3 et 4.4.4 que :

$$\begin{aligned} \|p^c\|_{L_t^r L_x^1} &\approx c \frac{\exp(\Re(\lambda))}{\Re(\lambda)^{1/r}}, \\ \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma^0, \gamma^c) &\lesssim c \frac{|n| \exp(\Re(\lambda))}{\Re(\lambda)^2}. \end{aligned}$$

En calculant le rapport de ces deux estimations, on obtient :

$$\frac{\|p^c\|_{L_t^r L_x^1}}{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma^0, \gamma^c)} \gtrsim \frac{\Re(\lambda)^{2-1/r}}{|n|}.$$

On conclut en remplaçant (n, λ) par $(kn, k\lambda)$ où $k \in \mathbb{N}^*$ grâce à la Remarque 1.2.3 et en faisant tendre k vers $+\infty$.

1.4.4 Bilan de la partie I

Les Théorèmes 1.4.2 et 1.4.5 permettent de dire que le champ de pression n'est ni une fonction parfaitement régulière, ni une fonction complètement singulière des données. Cependant, on ne s'attend aucunement à ce que ces résultats soient optimaux, et ils ne sont pas entièrement satisfaisants pour des raisons que l'on se propose de développer ici.

- D'abord, l'espace fonctionnel dual considéré dans le Théorème 1.4.2 de continuité höldérienne est plus gros que l'espace $L_t^r L_x^1$ considéré dans le Théorème 1.4.5. En particulier, on ne sait pas à l'heure actuelle si la pression comme élément de cet espace dual, dépend de façon lipschitzienne des données.

- En fait, il n'existe même pas de résultat général permettant de s'assurer que p appartienne toujours à l'espace $L_t^r L_x^1$. En effet, le meilleur résultat actuel, à savoir le Théorème 1.1.28, ne permet que de montrer $p \in L_{t,\text{loc}}^r L_x^1$. Or dans la preuve du Théorème 1.4.5, on a besoin de façon cruciale d'estimer la pression jusqu'à l'instant final.
- On n'a pas pu montrer avec notre méthode que l'action optimale dans le problème de transport optimal incompressible était irrégulière par rapport aux données. Par exemple, la question de savoir si l'action optimale dans $\text{IOT}(\gamma)$ est une fonction lipschitzienne de γ reste ouverte.

On espère tout de même que ces résultats constituent une première étape en vue de montrer qu'il existe un espace fonctionnel dans lequel la pression est une fonction continue mais pas régulière des données. On espère également que l'idée selon laquelle le défaut de régularité de la pression par rapport aux données peut être vu comme une conséquence de l'instabilité de Penrose est intéressante en soi.

1.5 Aperçu des principaux résultats de la Partie II

La Partie II de ma thèse est dédiée au problème de Brödinger. Encore une fois, on travaille sur le tore plat \mathbb{T}^d . On montre au Chapitre 5 l'existence d'un champ de pression, et on traite au Chapitre 6 la limite de bruit nul.

1.5.1 Chapitre 5 : Existence d'un champ de pression pour le problème bruité

L'objectif du Chapitre 5 est de démontrer que comme dans le cas du problème de transport optimal incompressible IOT , on peut associer à toute solution du problème de Brödinger Brö un champ scalaire de pression. On va donc montrer l'analogie du Théorème 1.1.26 dans ce cadre :

Théorème 1.5.1. *Soit $\nu > 0$, γ une mesure bistochastique satisfaisant (1.85) et P la solution du problème $\text{Brö}_\nu(\gamma)$ (défini au Problème 1.3.11).*

Il existe une unique distribution scalaire $p \in \mathcal{D}'((0,1) \times \mathbb{T}^d)$ (à l'ajout d'une distribution ne dépendant que du temps près) telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}((0,1) \times \mathbb{T}^d)$ d'intégrale nulle en tout temps, et pour tout flot généralisé Q vérifiant :

- *le flot Q a pour conditions extrémales γ i.e. $(X_0, X_1)_\# Q = \gamma$,*
- *le flot Q a pour densité $1 + \varphi$: pour tout $t \in [0, 1]$, on a $X_{t\#} Q = (1 + \varphi(t, \bullet)) \text{Leb}$,*

on a :

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(Q) \geq \overline{\mathcal{H}}_\nu(P) + \langle p, \varphi \rangle.$$

(On rappelle que $\overline{\mathcal{H}}_\nu$ est définie par la formule (1.67).)

Contrairement à ce qu'il se passe dans le cas du transport optimal incompressible, il est difficile de travailler sur ce problème directement car il n'est pas facile de modifier un flot généralisé P incompressible d'entropie finie de façon à obtenir un flot Q de densité prescrite et d'entropie finie. En particulier la transformation que l'on a présentée en esquissant la preuve du Théorème 1.1.26 ne marche pas ici telle quelle.

On commence donc par montrer un résultat analogue dans le cas du problème multiphasique MBrö . Dans ce cas, on peut même écrire une formule pour p au sens des distributions.

Théorème 1.5.2. Soit $(\mathcal{I}, \mathbf{m})$ un espace de probabilité, $\nu > 0$, ρ_0 et ρ_1 des conditions extrémales satisfaisant la condition d'existence de solutions (1.86), et $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$ la solution du problème $\text{MBrö}_\nu(\rho_0, \rho_1)$ (défini au Problème 1.3.12).

Il existe une unique distribution scalaire $p \in \mathcal{D}'((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$ (à l'ajout d'une distribution ne dépendant que du temps près) telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$ d'intégrale nulle en tout temps, et pour toute famille de solutions de l'équation de continuité $(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{c}}) = (\tilde{\rho}^i, \tilde{c}^i)_{i \in \mathcal{I}}$ vérifiant :

- \mathbf{m} -presque sûrement, $\tilde{\rho}^i|_{t=0} = \rho_0^i$ et $\tilde{\rho}^i|_{t=1} = \rho_1^i$,
- pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\int \tilde{\rho}_t^i \, \text{dm}(i) = (1 + \varphi(t, \bullet)) \text{Leb},$$

on a :

$$\mathcal{H}_\nu(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{c}}) \geq \mathcal{H}_\nu(\rho, \mathbf{c}) + \langle p, \varphi \rangle.$$

(On rappelle que \mathcal{H}_ν est définie par la formule (1.81).)

Cette pression satisfait au sens des distributions :

$$\partial_t \left(\int \rho^i c^i \, \text{dm}(i) \right) + \mathbf{div} \left(\int \left\{ c^i \otimes c^i - w^i \otimes w^i \right\} \rho^i \, \text{dm}(i) \right) = -\nabla p, \quad (1.95)$$

où w^i , la vitesse osmotique de la phase i , est définie par :

$$w^i = \frac{\nu}{2} \nabla \log \rho^i.$$

Cette fois, on peut suivre globalement les lignes de la preuve du Théorème 1.1.26 décrite plus haut. Seulement, au lieu de transformer les trajectoires des particules par des transformations du type (1.44), on transforme les courbes de mesures de probabilités ρ^i par des transformations du type :

$$\rho^i \mapsto \left(t \mapsto (\text{Id} + \xi(t, \bullet))_{\#} \rho_t^i \right),$$

où comme précédemment, ξ est obtenu grâce au théorème de Dacorogna et Moser [36]. Une différence notable avec le Théorème 1.1.26 est qu'ici, il faut pouvoir estimer l'information de Fischer des courbes perturbées. Pour le faire, il faudra contrôler deux dérivées de φ , et non plus une seule. On utilisera donc le théorème de Dacorogna et Moser dans un espace de régularité plus élevé, et la pression p que l'on obtiendra sera dans un espace dual plus gros, ressemblant au dual des fonctions C^1 en temps et C^2 en espace.

On pourra alors démontrer le Théorème 1.5.1 *via* le Théorème 5.3.1 exprimant le lien entre le problème Brö et le problème MBrö dont on a déjà parlé à la Sous-section 1.3.5.

1.5.2 Chapitre 6 : Limite de bruit nul dans le problème de Brödinger

Le Chapitre 6, tiré de l'article [11] écrit en collaboration avec L. Monsaingeon, vise en premier lieu à démontrer les résultats de Γ -convergence suivants.

Théorème 1.5.3. On a dans le cas des problèmes IOT et Brö (Problèmes 1.1.11 et 1.3.11) :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_\nu + \iota_{\text{Inc}} = \overline{\mathcal{A}} + \iota_{\text{Inc}},$$

où ι_{Inc} est la fonction caractéristique⁴⁹ correspondant à la contrainte d'incompressibilité (1.11).

Pour ce qui est des problèmes TPIOT et TPBrö (Problèmes 1.1.22 et 1.3.13) :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_{\nu} + \iota_{\text{Inc}} = \overline{\mathcal{A}} + \iota_{\text{Inc}},$$

où ι_{Inc} est la fonction caractéristique correspondant à la contrainte d'incompressibilité (1.30).

On étudie également en détails au Théorème 6.2.1 et à la Remarque 6.4.1 les conditions extrémales que peuvent prendre les suites de recouvrement pour la Γ -limsup, et on montre la convergence des champs de pression au Théorème 6.1.4.

Pour la Γ -liminf dans le cas standard, on n'a pas besoin de se préoccuper de la contrainte d'incompressibilité : il suffit de montrer que si (P^{ν}) est une famille de flots généralisés convergeant étroitement vers P , alors :

$$\liminf_{\nu \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_{\nu}(P^{\nu}) \geq \overline{\mathcal{A}}(P).$$

Ce sera alors en particulier vrai lorsque (P^{ν}) et P sont incompressibles. Mais ce résultat n'est alors rien de plus que la Γ -liminf du résultat de convergence du problème de Schrödinger vers le transport optimal énoncé au Théorème 1.3.5, dû à Léonard [66].

On a tout de même choisi d'en donner une nouvelle preuve⁵⁰ consistant à minorer l'entropie relative de la façon suivante :

$$\overline{\mathcal{H}}_{\nu}(P) \geq \int \tilde{A} dP - \nu e^{-1} \int \exp\left(\frac{\tilde{A}}{\nu}\right) dR^{\nu},$$

où \tilde{A} est une minoration continue et bornée de l'action A d'une courbe, typiquement la somme des incréments quadratiques le long d'une partition finie de l'intervalle $[0, 1]$. Cette minoration est obtenue en posant $u = dP/dR^{\nu}$ et $v = \tilde{A}/\nu$ dans l'inégalité de convexité :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad u \log u \geq uv - \exp(v - 1),$$

puis en intégrant par rapport à R^{ν} . On présente tous les détails de cette preuve au Théorème 6.2.1.

Pour sa part, la preuve de la Γ -limsup consiste essentiellement à construire à partir d'un compétiteur P du problème de transport optimal incompressible une famille de compétiteurs (P^{ν}) pour le problème de Brödinger en perturbant chaque courbe chargée par P par un pont brownien de diffusivité ν (notons que l'incompressibilité est alors préservée). L'ingrédient clé pour estimer l'entropie du processus obtenu est la formule de Cameron-Martin pour les ponts browniens, qui montre que si ω est une courbe absolument continue de \mathbb{R}^d , si B_{ω}^{ν} est le processus obtenu en translatant ω par le pont brownien de \mathbb{R}^d de diffusivité ν joignant 0 à 0, et si $B^{\nu, x, y}$ est le pont brownien de \mathbb{R}^d de diffusivité ν joignant x à y , alors :

$$\nu H(B_{\omega}^{\nu} | B^{\nu, x, y}) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\omega}_t|^2 dt - \frac{|x - y|^2}{2}.$$

On renvoie au Lemme 6.B.2 du Chapitre 5 pour la preuve de cette formule, au Lemme 6.2.5 pour son adaptation au cas du tore, et à la preuve du Théorème 6.2.1 pour son application à la preuve de la Γ -limsup.

⁴⁹Elle vaut 0 si la contrainte est satisfaite, $+\infty$ sinon.

⁵⁰Notre preuve s'adapte aisément au cadre très général traité dans [66].

Dans cette partie du Chapitre, on rencontre des difficultés supplémentaires liées au fait que l'on travaille sur le tore (il faut par exemple faire attention au fait que les ponts browniens sur le tore ne sont pas de simples projections de ponts browniens sur l'espace entier, mais la superposition de telles projections). On a cependant choisi de travailler dans ce cadre pour éviter d'autres problèmes liés à la non-compacité dans le cas de l'espace entier \mathbb{R}^d (le mouvement brownien partant de Lebesgue n'est plus une mesure finie) ou aux problèmes de bord dans les ouverts bornés de \mathbb{R}^d .

Dans le cas des plans de trafic, la Γ -liminf est immédiate. Pour la Γ -limsup, on écrit en termes d'EDP la perturbation correspondant à l'ajout d'un pont brownien : si $\rho \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, on considère la perturbation de ρ définie à l'instant t par :

$$\rho_t^\nu := \rho_t * \tau_{\nu t(1-t)},$$

où $(\tau_s)_{s \geq 0}$ est le noyau de la chaleur sur le tore. La famille de compétiteurs pour la Γ -limsup est alors construite à partir d'un plan de trafic \mathbf{P} en effectuant cette transformation pour chaque courbe chargée par \mathbf{P} . Or des calculs très simples sur ces courbes régularisées (voir le Lemme 6.3.2 du Chapitre 6) permettent d'obtenir les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\rho}_t^\nu|^2 dt + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t|^2 d\rho_t dt &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt + \nu \left[\frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} + C \right], \\ \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\rho}_t^\nu|^2 dt &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt + \nu \left[\frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \right], \end{aligned}$$

où la constante C apparaissant dans la première ligne ne dépend que de la dimension. La Γ -limsup découle rapidement de la première inégalité : elle affirme que si ρ est un bon compétiteur pour le problème de transport optimal 1.1.21, alors ρ^ν est un bon compétiteur pour le problème de Schrödinger 1.3.10. Il suffit alors d'intégrer cette inégalité par rapport à \mathbf{P} et de remarquer que notre régularisation préserve l'incompressibilité.

Par ailleurs, la seconde inégalité permet de retrouver de façon variationnelle (*i.e.* sans connaître la structure des minimiseurs) la convexité géodésique de l'entropie totale. En effet, considérons par exemple le cas du transport optimal. Si la courbe ρ est optimale pour le problème de transport optimal 1.1.21, alors ρ^ν doit avoir une action plus grande, et donc notre inégalité donne :

$$\int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \leq \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2}.$$

La convexité géodésique de l'entropie est alors aisément déduite en passant à la limite $\nu \rightarrow 0$ (Proposition 6.5.1 du Chapitre 6). On peut alors facilement étendre ce résultat aux problèmes TPIOT et TPBrö :

Théorème 1.5.4. *Soit \mathbf{P} une solution du problème TPIOT ou TPBrö. Alors la fonction*

$$t \mapsto \int H(\rho_t | \text{Leb}) d\mathbf{P}(\rho)$$

est convexe.

Ce théorème est l'analogue dans le cadre incompressible d'un résultat dû à McCann [75] dans le cas du transport optimal, et qui s'est révélé être d'une importance cruciale, par exemple dans l'étude des flots de gradients dans l'espace de Wasserstein (voir [4]). Dans le cas du problème de

Schrödinger, le résultat est dû à Léonard [69], et dans le cas du transport optimal incompressible, un résultat partiel avait été démontré par Lavenant dans [65]⁵¹.

Cette preuve est nouvelle même dans le cas du transport optimal simple, et il me semble qu'elle apporte une nouvelle justification à l'étude de la régularisation entropique du transport optimal plutôt que d'autres types de régularisation (même si cette justification est d'importance bien moindre que le lien du problème de Schrödinger avec les grandes déviations ou l'efficacité computationnelle de celui-ci).

1.6 Récapitulatif des principales notations, et des principaux problèmes de minimisation.

Avant de passer au corps de ma thèse, rappelons brièvement les principales notations que l'on va utiliser, et que l'on tâchera de respecter sauf mention explicite du contraire. La numérotation correspond à l'ordre d'apparition dans l'introduction. On a choisi de classer ces notations par ordre de généralité croissant.

1.6.1 Types de compétiteurs

- $\rho \in C^0([0, 1], \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$: courbe tracée sur l'ensemble des mesures de probabilités sur \mathbb{T}^d .
- $(\rho, c), (\rho, v) \in C^0([0, 1], \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)) \times L^2([0, 1] \times \mathbb{T}^d, dt \otimes \rho_t)$: solutions de l'équation de continuité.
- $P, Q \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d))$: flots généralisés.
- $(\rho, c) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$: famille mesurable de solutions de l'équation de continuité, indexée par un espace de probabilité $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$.
- $P, Q \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)))$: plans de trafic sur \mathbb{T}^d .

1.6.2 Notations diverses

- R^ν : loi du mouvement brownien sur \mathbb{T}^d de diffusivité ν , partant de la mesure de Lebesgue.
- X_t : opérateur d'évaluation au temps t des courbes sur le tore, *i.e.* si $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, $X_t(\omega) := \omega_t$.
- \mathbf{X}_t : opérateur d'évaluation au temps t des courbes sur l'ensemble des mesures de probabilité, *i.e.* si $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, $\mathbf{X}_t(\rho) := \rho_t$.
- $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$: mesure bistochastique sur le tore (*i.e.* vérifiant (1.13)).
- $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$: mesure bistochastique en moyenne (*i.e.* vérifiant (1.33)).

⁵¹Il y montre le résultat pour une solution particulière du problème. Mentionnons tout de même que sa preuve semble plus robuste dans les domaines à bord. On donne plus d'informations sur cet article à la remarque 6.5.3.

1.6.3 Fonctionnelles

Actions

- \mathcal{A} : quand on l'évalue sur une solution de l'équation de continuité (ρ, c) :

$$\mathcal{A}(\rho, c) := \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt, \quad (1.19)$$

quand on l'évalue sur une courbe ρ sur l'ensemble des mesures de probabilité :

$$\mathcal{A}(\rho) := \int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt. \quad (1.29)$$

- $\bar{\mathcal{A}}$: si P est un flot généralisé :

$$\bar{\mathcal{A}}(P) := \frac{1}{2} \int \int_0^1 |\dot{\omega}_t|^2 dt dP(\omega). \quad (1.14)$$

- \mathcal{A} : si (ρ, c) est une famille de solutions de l'équations de continuité :

$$\mathcal{A}(\rho, c) := \frac{1}{2} \int \int_0^1 \int |c^i(t, x)|^2 d\rho_t^i(x) dt d\mathbf{m}(i). \quad (1.27)$$

- $\bar{\mathcal{A}}$: si P est un plan de trafic :

$$\bar{\mathcal{A}}(P) := \frac{1}{2} \int \int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt dP(\rho). \quad (1.31)$$

Informations de Fischer

- \mathcal{F} : si ρ est une courbe sur l'ensemble des mesures de probabilité :

$$\mathcal{F}(\rho) := \frac{1}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t|^2 d\rho_t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \int |\nabla \sqrt{\rho_t}|^2 dx dt. \quad (1.79)$$

- \mathcal{F} : si ρ est une famille de courbes sur l'ensemble des mesures de probabilité :

$$\mathcal{F}(\rho) := \frac{1}{8} \int \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^i|^2 d\rho_t^i dt d\mathbf{m}(i). \quad (1.82)$$

- $\bar{\mathcal{F}}$: si P est un plan de trafic :

$$\bar{\mathcal{F}}(P) := \frac{1}{8} \int \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t|^2 d\rho_t dt dP(\rho). \quad (1.84)$$

Entropies On se donne un niveau de bruit $\nu > 0$.

- \mathcal{H}_ν : quand on l'évalue sur une solution de l'équation de continuité (ρ, c) :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho, c) := \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t|^2 d\rho_t dt = \mathcal{A}(\rho, c) + \nu^2 \mathcal{F}(\rho), \quad (1.78)$$

quand on l'évalue sur une courbe ρ sur l'ensemble des mesures de probabilité :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho) := \int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t|^2 d\rho_t dt = \mathcal{A}(\rho) + \nu^2 \mathcal{F}(\rho). \quad (1.80)$$

- $\overline{\mathcal{H}}_\nu$: si P est un flot généralisé :

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(P) := \nu H(P|R^\nu). \quad (1.67)$$

- \mathcal{H}_ν : si (ρ, c) est une famille de solutions de l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu(\rho, c) &:= \frac{1}{2} \int \int_0^1 \int |c^i(t, x)|^2 d\rho_t^i(x) dt d\mathbf{m}(i) + \frac{\nu^2}{8} \int \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^i|^2 d\rho_t^i dt d\mathbf{m}(i) \\ &= \mathcal{A}(\rho, c) + \nu^2 \mathcal{F}(\rho). \end{aligned} \quad (1.81)$$

- $\overline{\mathcal{H}}_\nu$: si P est un plan de trafic :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu(\rho, c) &:= \frac{1}{2} \int \int_0^1 |\dot{\rho}_t|^2 dt d\mathbf{P}(\rho) + \frac{\nu^2}{8} \int \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t|^2 d\rho_t dt d\mathbf{P}(\rho) \\ &= \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}) + \nu^2 \overline{\mathcal{F}}(\mathbf{P}). \end{aligned} \quad (1.83)$$

1.6.4 Problèmes de minimisation

Avec les notations des sous-sections précédentes :

- OT (ρ_0, ρ_1) (Problème 1.1.21) : étant donnés $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, minimiser $\mathcal{A}(\rho)$ sur l'ensemble des courbes ρ sur l'ensemble des mesures de probabilité satisfaisant les contraintes $\rho|_{t=0} = \rho_0$ et $\rho|_{t=1} = \rho_1$.
- Sch $_\nu(\rho_0, \rho_1)$ (Problème 1.3.10) : étant donnés $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ et $\nu > 0$, minimiser $\mathcal{H}_\nu(\rho)$ sur l'ensemble des courbes ρ sur l'ensemble des mesures de probabilité satisfaisant les contraintes $\rho|_{t=0} = \rho_0$ et $\rho|_{t=1} = \rho_1$.
- IOT (γ) (Problème 1.1.11) : étant donnée γ bistochastique, minimiser $\overline{\mathcal{A}}(P)$ sur l'ensemble des flots généralisés P satisfaisant les contraintes :
 - $(X_0, X_1)_\# P = \gamma$,
 - pour tout $t \in [0, 1]$, $X_{t\#} P = \text{Leb}$.
- Brö $_\nu(\gamma)$ (Problème 1.3.11) : étant donnée γ bistochastique et $\nu > 0$, minimiser $\overline{\mathcal{H}}_\nu(P)$ sur l'ensemble des flots généralisés P satisfaisant les contraintes :

- $(X_0, X_1)_{\#}P = \gamma$,
- pour tout $t \in [0, 1]$, $X_{t\#}P = \text{Leb}$.

- $\text{MIOT}(\rho_0, \rho_1)$ (Problème 1.1.19) : étant données ρ_0, ρ_1 des familles de mesures de probabilité sur \mathbb{T}^d , minimiser $\mathcal{A}(\rho, \mathbf{c})$ sur l'ensemble des familles (ρ, \mathbf{c}) de solutions de l'équation de continuité satisfaisant les contraintes :

- pour m-presque tout i , $\rho^i|_{t=0} = \rho_0^i$ et $\rho^i|_{t=1} = \rho_1^i$,
- pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\int \rho_t^i \, d\mathbf{m}(i) = \text{Leb}.$$

- $\text{MBrö}_\nu(\rho_0, \rho_1)$ (Problème 1.3.12) : étant données ρ_0, ρ_1 des familles de mesures de probabilité sur \mathbb{T}^d et $\nu > 0$, minimiser $\mathcal{H}_\nu(\rho, \mathbf{c})$ sur l'ensemble des familles (ρ, \mathbf{c}) de solutions de l'équation de continuité satisfaisant les contraintes :

- pour m-presque tout i , $\rho^i|_{t=0} = \rho_0^i$ et $\rho^i|_{t=1} = \rho_1^i$,
- pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\int \rho_t^i \, d\mathbf{m}(i) = \text{Leb}.$$

- $\text{TPIOT}(\Gamma)$ (Problème 1.1.22) : étant donnée Γ bistochastique en moyenne, minimiser $\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P})$ sur l'ensemble des plans de trafic \mathbf{P} satisfaisant les contraintes :

- $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1)_{\#}\mathbf{P} = \Gamma$,
- pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\int \rho_t \, d\mathbf{P}(\rho) = \text{Leb}.$$

- $\text{TPBrö}_\nu(\Gamma)$ (Problème 1.3.13) : étant donnée Γ bistochastique en moyenne et $\nu > 0$, minimiser $\overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P})$ sur l'ensemble des plans de trafic \mathbf{P} satisfaisant les contraintes :

- $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1)_{\#}\mathbf{P} = \Gamma$,
- pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\int \rho_t \, d\mathbf{P}(\rho) = \text{Leb}.$$

Part I

Dependence of the incompressible optimal transport problem with respect to endpoints

Chapter 2

Continuous dependence of the optimal action and of the pressure field with respect to endpoints

We present in this chapter the results from the article [10], which contains an independent introduction. We do not reproduce it entirely here to avoid to the reader unnecessary repetitions. We recall that the main results of this chapter have been presented in Subsection 1.4.1 above.



The purpose of this chapter is to prove Theorems 1.4.1 and 1.4.2 stated above, and it will be done in Sections 2.2 and 2.3 respectively. Consequently, we will mainly work with the Problem 1.1.11 of incompressible optimal transport (IOT for short). More precisely, in Section 2.2, we will prove a more general result than Theorem 1.4.1, allowing other densities than the Lebesgue measure, and so we will work with the problem $\text{IOT}(\gamma, \rho)$ defined in Problem 1.1.24. This more general result (Lemma 2.2.1 below) will be useful in the proof of Theorem 1.4.2.

Before beginning, let us introduce some notations.

2.1 Notations

Let us recall that we work on the flat torus $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. We call d the geodesic distance on the torus \mathbb{T}^d , d_2 the 2-product metric on $(\mathbb{T}^d)^2$ and as before d_{MK} the Monge-Kantorovich distance of exponent 2 on the set of Borel probability measures on $(\mathbb{T}^d)^2$. Remark that because of the finite diameter of the torus,

$$\sup_{\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{P}((\mathbb{T}^d)^2)} d_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2) < +\infty. \quad (2.1)$$

We will call $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma)$ the optimal action in $\text{IOT}(\gamma)$ and $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma, \rho)$ the action in $\text{IOT}(\gamma, \rho)$. We have seen in Remark 1.1.15 that $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma)$ is bounded uniformly in γ . We call this property the finite diameter property of incompressible optimal transport. In other terms

$$\text{Diam}(d) := \sup_{\gamma \text{ bistochastic on } \mathbb{T}^d} \sqrt{\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma)} < +\infty. \quad (2.2)$$

This property will be useful in the sequel.

A functional space will be of particular interest: the one corresponding to the norm \mathbf{N} defined above and that we recall here. This is the space E of continuous functions $f = f(t, x)$ satisfying the properties:

- for all $t \in [0, 1]$, $f(t, \bullet)$ is Lipschitz and

$$\sup_t \text{Lip } f(t, \bullet) < +\infty; \quad (2.3)$$

- for all $x \in \mathbb{T}^d$, $f(\bullet, x) \in AC^2([0, 1])$ and the temporal derivative $\partial_t f$ which is punctually defined for almost all $t \in [0, 1]$ for all almost all $x \in \mathbb{T}^d$ satisfies

$$\int_0^1 \|\partial_t f(t, \bullet)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 dt < +\infty. \quad (2.4)$$

If $f \in E$, we recall that:

$$\mathbf{N}(f) := \sup_t \text{Lip } f(t, \bullet) + \left(\int_0^1 \|\partial_t f(t, \bullet)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Once again, when restricted to functions having zero mean or to functions vanishing for t equal to 0 or 1, this is a norm. If there is $\tau \in (0, 1/4)$ such that $f \in E$ vanishes for $t \in [0, \tau] \cup [1 - \tau, 1]$, we write $f \in E_\tau$. With an abuse of notations, we keep the same notations if f has its values in \mathbb{R}^d .

In the proofs, we will use the letter M to denote a large constant only depending on the dimension (and on τ in the last section), which will be likely to grow from line to line.

2.2 Hölder continuity of the optimal action

As announced, this section is devoted to the proof of a generalized version of Theorem 1.4.1. Let us begin by describing it.

From now on, we chose ψ a smooth nonnegative scalar function on \mathbb{R}^d whose support is included in $[-1/4, 1/4]^d$ and of integral equal to one. Then for all $0 < \varepsilon \leq 1$, and $v \in \mathbb{R}^d$, we define

$$\psi^\varepsilon(v) := \frac{1}{\varepsilon^d} \psi\left(\frac{v}{\varepsilon}\right). \quad (2.6)$$

Of course these functions can be transported to functions on the torus by the natural injection from $[-1/4, 1/4]^d$ to \mathbb{T}^d and we still call the resulting functions (ψ^ε) .

For reasons that will become clear, if $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ coincide with Lebesgue at times 0 and 1, and if $0 < \varepsilon \leq 1/4$ we call ρ^ε the function of $t \in [0, 1]$ and $z \in \mathbb{T}^d$ defined by

$$\rho^\varepsilon(t, z) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0, \varepsilon], \\ \int \psi^\varepsilon(z - x) d\rho_s(x) \text{ with } s = \frac{t - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} & \text{if } t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon], \\ 1 & \text{if } t \in [1 - \varepsilon, 1]. \end{cases} \quad (2.7)$$

Finally, if m is a measure on \mathbb{T}^d and $a > 0$, we say that $m \geq a$ if $m - a \cdot \text{Leb}$ is a positive measure, and if $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, we say that ρ is greater than a if it is the case for all $t \in [0, 1]$. When

regularizing the paths of measures, we will not denote differently the regularized paths of measures and their densities with respect to the Lebesgue measure.

The result that we will show is the following. We recall that $\text{Diam}(d)$ is defined by (2.2) and that \mathbf{N} is defined by (2.5).

Lemma 2.2.1. *There exist two constants $C > 0$ and $M > 0$ only depending on the dimension such that for all γ_1 and γ_2 bistochastic on \mathbb{T}^d , for all $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ greater than $3/4$ coinciding with Leb at times 0 and 1, and for all $0 < \varepsilon \leq 1/4$, if*

$$\sqrt{\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \rho)} \leq 2 \text{Diam}(d), \quad (2.8)$$

$$C(1 + \mathbf{N}(\rho^\varepsilon)) \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}} \leq 1/4, \quad (2.9)$$

then

$$\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \rho^\varepsilon) \leq \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \rho) + M \left(\varepsilon + \{1 + \mathbf{N}(\rho^\varepsilon)\} \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}} \right). \quad (2.10)$$

In particular, if $\rho = \text{Leb}$, then (2.8) is always true by (2.2), $\mathbf{N}(\rho^\varepsilon) = 0$, and as soon as

$$C \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}} \leq 1/4, \quad (2.11)$$

then

$$\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2) \leq \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1) + M \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}} \right). \quad (2.12)$$

Remark 2.2.2.

- If we do not have any information on ρ , (2.10) could seem useless because of the presence of $\mathbf{N}(\rho^\varepsilon)$ in the right hand side. In that case, we can use the fact that there exists $K > 0$ only depending on the dimension such that

$$\mathbf{N}(\rho^\varepsilon) \leq \frac{K \left(1 + \sqrt{\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \rho)} \right)}{\varepsilon^{d+1}}. \quad (2.13)$$

This formula is an easy consequence of the definition of ψ^ε and of formula (2.21) below. This remark will be used in the proof of Theorem 1.4.2.

- If we do not suppose that $\sqrt{\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \rho)} < 2 \text{Diam}(d)$, it is possible to prove that the result (2.10) is still true replacing M by $M(1 + \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \rho))$. But this proof requires to be more cautious and to handle separately the time and space derivatives in lemma 2.2.3.

Theorem 1.4.1 follows from this lemma.

Proof of Theorem 1.4.1. We chose:

$$\varepsilon = \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^{1/(d+3)}$$

in formula (2.12). As soon as

$$\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{1}{(4C)^{d+3}},$$

equation (2.11) is satisfied and the result is true. The global Hölder continuity is implied by the local one because of the finite diameter property (2.1). \square

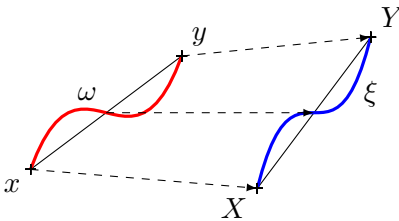


Figure 2.1: Illustration of the operation that gives ξ from ω . The curve ξ is obtained by adding to ω the only affine function for the endpoints of ξ to be X and Y .

Proof of Lemma 2.2.1. Take γ_1 , γ_2 and ρ as in the statement of the lemma. Take P a solution to $\text{IOT}(\gamma_1, \rho)$ as designed at Problem 1.1.24. Also take Γ an optimal plan between γ_1 and γ_2 (in the classical sense of quadratic optimal transport). The plan Γ is a probability measure on $(\mathbb{T}^d)^4$.

Let us recall heuristically the idea of the proof. Take $(x, y, X, Y) \in (\mathbb{T}^d)^4$. Let us imagine that a proportion $dP^{x,y}(\omega)$ of the particles traveling from x to y under P follow the path ω . We can modify ω by defining

$$\xi(t) := \omega(t) + (1-t)(X-x) + t(Y-y)^1,$$

to get a path from X to Y . This transformation is illustrated at Figure 2.1. But by definition,

$$d_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^2 = \int d_2((x, y), (X, Y))^2 d\Gamma(x, y, X, Y). \quad (2.14)$$

(We recall that d_2 is the Euclidean distance on $(\mathbb{T}^d)^2$.) So as γ_1 and γ_2 are supposed to be close, (x, y) and (X, Y) are expected to be close for a large amount of (x, y, X, Y) according to Γ . For such (x, y, X, Y) , the path ξ will be a slight modification of ω . We can then define a plan by charging ξ with the mass $d\Gamma(x, y, X, Y) dP^{x,y}(\omega)$ and by doing this transformation for every path. We may then end up with a flow which has γ_2 as endpoints condition and which is close to P . We can then straighten it to make it have the density ρ , and we get an admissible plan for $\text{IOT}(\gamma_2, \rho)$ whose action should not be very larger than $\bar{\mathcal{A}}(P)$. In fact, to straighten the flow, we need to regularize it and that is why we will diffuse a bit the particles, giving rise to the parameter ε of the statement. This strategy consisting in regularizing a generalized flow in order to straighten its density is borrowed from the proof of Shnirelman in [89]. However, if Shnirelman builds a straightening map by hands, we prefer to use the famous result of Dacorogna and Moser presented in [36]. We give a simple version of this result in Lemma 2.2.3.

We now start the rigorous proof. We fix γ_1 , γ_2 , ρ and ε as in the statement of the lemma, and we suppose that (2.8) holds. We divide the reasoning in several steps during which we will progressively modify P to end up with an admissible flow for $\text{IOT}(\gamma_2, \rho^\varepsilon)$. At each step, we will derive an upper bound for the action of the flow that would have been built.

In the three first steps, C will be a dimensional constant which may grow from line to line. It will be fixed in the end of step three.

¹In fact, $(1-t)(X-x)$ and $t(Y-y)$ make no sense *a priori* because we cannot multiply the elements of \mathbb{T}^d by scalars. So to be completely rigorous, we should replace in this formula $X-x$ and $Y-y$ by $i(X-x)$ and $i(Y-y)$ where $i: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ is a measurable right inverse of the canonical projection on the torus that satisfies for all $x, X \in \mathbb{T}^d$: $|i(X-x)| = d(x, X)$. We keep these notations to lighten the computations.

Step one: change of endpoints condition. First, as announced, we change the endpoint conditions of the solution P to $\text{IOT}(\gamma_1, \rho)$. The set $C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$ of continuous curves on \mathbb{T}^d endowed with the supremum norm is a Polish space and the evaluation map (X_0, X_1) is measurable, so we can use the disintegration theorem to define for γ_1 -almost all $(x, y) \in (\mathbb{T}^d)^2$

$$P^{x,y} := P(\bullet | X_0 = x, X_1 = y).$$

For all $(x, y, X, Y) \in (\mathbb{T}^d)^4$, define for any curve $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$ the curve $T_1[x, y, X, Y](\omega)$ whose position at time $t \in [0, 1]$ is

$$T_1[x, y, X, Y](\omega)(t) = \omega(t) + (1-t)(X-x) + t(Y-y), \quad (2.15)$$

as already shown at Figure 2.1. This curve moves $P^{x,y}$ -almost surely from X to Y . As a consequence, as Γ is an optimal plan between γ_1 and γ_2 , its (X, Y) -marginal is γ_2 and the following generalized flow

$$P_{\Gamma, T_1} := \int T_1[x, y, X, Y]_{\#} P^{x,y} d\Gamma(x, y, X, Y), \quad (2.16)$$

admits γ_2 as endpoints condition. (In this formula, we used Definition 1.1.10 of push-forwards.)

Let us compute the action of P_{Γ, T_1} . For all $(x, y, X, Y) \in (\mathbb{T}^d)^4$ and $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, using the triangle inequality in L^2 and the definition of A (1.15), we get

$$\begin{aligned} A(T_1[x, y, X, Y](\omega)) &= \frac{1}{2} \left\| \dot{\omega} - (X-x) + (Y-y) \right\|_{L^2([0,1])}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ \|\dot{\omega}\|_{L^2([0,1])} + \|(X-x) - (Y-y)\|_{L^2([0,1])} \right\}^2 \\ &\leq \left\{ \sqrt{A(\omega)} + \frac{1}{\sqrt{2}} d_2((x, y), (X, Y)) \right\}^2. \end{aligned}$$

Integrating with respect to $P^{x,y}$ and then Γ , using the definition of $\bar{\mathcal{A}}$ (1.14), (2.14) and (2.16), we get

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1}) &\leq \left\| \sqrt{A(\omega)} + \frac{1}{\sqrt{2}} d_2((x, y), (X, Y)) \right\|_{L^2(dP^{x,y}(\omega) d\Gamma(x, y, X, Y))}^2 \\ &\leq \left\{ \left\| \sqrt{A(\omega)} \right\|_{L^2(dP(\omega))} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| d_2((x, y), (X, Y)) \right\|_{L^2(d\Gamma(x, y, X, Y))} \right\}^2 \\ &\leq \left(\sqrt{\bar{\mathcal{A}}(P)} + \frac{d_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \bar{\mathcal{A}}(P) + \sqrt{2\bar{\mathcal{A}}(P)} d_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2) + \frac{1}{2} d_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^2. \end{aligned}$$

Thus, using (2.1) and (2.8), we find $C > 0$ such that,

$$\bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1}) - \bar{\mathcal{A}}(P) \leq C d_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2). \quad (2.17)$$

Step two: regularization. To regularize the marginals in space, we define for all $v \in \mathbb{R}^d$ and for any curve $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$ the curve $T_2[v](\omega)$ whose position at time t is

$$T_2[v](\omega)(t) = \begin{cases} \omega(0) + \frac{v}{\varepsilon}t & \text{if } t \in [0, \varepsilon], \\ \omega(s) + v \quad \text{with } s = \frac{t - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} & \text{if } t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon], \\ \omega(1) + \frac{1 - t}{\varepsilon}v & \text{if } t \in [1 - \varepsilon, 1]. \end{cases} \quad (2.18)$$

Then we define

$$P_{\Gamma, T_1, T_2} := \int \left(T_2[v]_{\#} P_{\Gamma, T_1} \right) \psi^\varepsilon(v) dv, \quad (2.19)$$

where ψ^ε is the cutoff function (2.6) used in the formula (2.7) that defines ρ^ε . As for all v , $T_2[v]$ fixes the endpoints of the curves, the endpoints condition of P_{Γ, T_1, T_2} is still γ_2 . Let us compute its action. For all $v \in \mathbb{R}^d$ and $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$,

$$A(T_2[v](\omega)) = \frac{|v|^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2(1 - 2\varepsilon)} \int_0^1 |\dot{\omega}(t)|^2 dt.$$

Integrating with respect to P_{Γ, T_1} and then $\psi^\varepsilon(v) dv$, and using (2.6) and $\varepsilon \leq 1/4$, we get

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1, T_2}) &= \int \frac{|v|^2}{\varepsilon} \psi^\varepsilon(v) dv + \frac{1}{1 - 2\varepsilon} \bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1}) \\ &\leq \varepsilon \int |w|^2 \psi(w) dw + (1 + 4\varepsilon) \bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1}). \end{aligned}$$

Subsequently, using (2.17) and (2.1), we easily find C such that

$$\bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1, T_2}) - \bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1}) \leq C\varepsilon. \quad (2.20)$$

Step three: study of the density of P_{Γ, T_1, T_2} . We define for all $t \in [0, 1]$, $Q(t, \bullet) := X_{t\#} P_{\Gamma, T_1, T_2}$ the density of P_{Γ, T_1, T_2} at time t . In this paragraph, we will bound the quantity $\mathbf{N}(Q - \rho^\varepsilon)$. We recall that \mathbf{N} is defined in (2.5). In what follows, we will use the notations $dP^{x,y}$, $d\Gamma$, s and $\xi(s)$ as abbreviations for $dP^{x,y}(\omega)$, $d\Gamma(x, y, X, Y)$, $(t - \varepsilon)/(1 - 2\varepsilon)$ and $\omega(s) + (1 - s)(X - x) + s(Y - y)$ respectively.

First of all, if $t \in [0, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, 1]$, $Q(t, \bullet) \equiv 1$ (so that $\rho^\varepsilon = Q$ for these values of t). If $t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, we easily get by (2.15), (2.16), (2.18) and (2.19):

$$\forall z \in \mathbb{T}^d, \quad Q(t, z) = \iint \psi^\varepsilon(z - \xi(s)) dP^{x,y} d\Gamma.$$

Then, consider the definition (2.7) of ρ^ε . On the one hand, ρ is the density of P , that is for all t , $\rho_t = X_{t\#} P$. On the other hand, both the endpoints condition of P and the first marginal of Γ is γ_1 . Consequently, if $t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, we have

$$\forall z \in \mathbb{T}^d, \quad \rho^\varepsilon(t, z) = \iint \psi^\varepsilon(z - \omega(s)) dP^{x,y} d\Gamma. \quad (2.21)$$

As a consequence, Q and ρ^ε are equal if $t \in [0, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, 1]$, and otherwise, for all $(t, z) \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \times \mathbb{T}^d$, we obtain

$$Q(t, z) - \rho^\varepsilon(t, z) = \iint \left\{ \psi^\varepsilon(z - \xi(s)) - \psi^\varepsilon(z - \omega(s)) \right\} dP^{x,y} d\Gamma. \quad (2.22)$$

If we differentiate this expression with respect to space, we get

$$\nabla Q(t, z) - \nabla \rho^\varepsilon(t, z) = \iint \left\{ \nabla \psi^\varepsilon(z - \xi(s)) - \nabla \psi^\varepsilon(z - \omega(s)) \right\} dP^{x,y} d\Gamma$$

Thus,

$$\begin{aligned} & |\nabla Q(t, z) - \nabla \rho^\varepsilon(t, z)| \\ & \leq \|D^2 \psi^\varepsilon\|_\infty \iint |\xi(s) - \omega(s)| dP^{x,y} d\Gamma \\ & = \frac{\|D^2 \psi\|_\infty}{\varepsilon^{d+2}} \iint |(1-s)(X-x) + s(Y-y)| d\Gamma(x, y, X, Y) \\ & \leq \frac{\|D^2 \psi\|_\infty}{\varepsilon^{d+2}} \iint d_2((x, y), (X, Y)) d\Gamma(x, y, X, Y) \\ & \leq \frac{\|D^2 \psi\|_\infty}{\varepsilon^{d+2}} \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2) \quad (\text{by the Cauchy-Schwarz inequality}). \end{aligned}$$

If now we differentiate (2.22) with respect to time, we get

$$\begin{aligned} \partial_t Q(t, z) - \partial_t \rho^\varepsilon(t, z) &= \iint \left\{ \nabla \psi^\varepsilon(z - \omega(s)) - \nabla \psi^\varepsilon(z - \xi(s)) \right\} \cdot \dot{\omega}(s) dP^{x,y} d\Gamma \\ & \quad + \iint \nabla \psi^\varepsilon(z - \xi(s)) \cdot (\dot{\omega}(s) - \dot{\xi}(s)) dP^{x,y} d\Gamma. \end{aligned}$$

On the one hand, for almost all t ,

$$\begin{aligned} & \left\| \iint \left\{ \nabla \psi^\varepsilon(\bullet - \xi(s)) - \nabla \psi^\varepsilon(\bullet - \omega(s)) \right\} \cdot \dot{\omega}(s) dP^{x,y} d\Gamma \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \\ & \leq \|D^2 \psi^\varepsilon\|_\infty \iint |\xi(s) - \omega(s)| |\dot{\omega}(s)| dP^{x,y} d\Gamma \\ & \leq \frac{\|D^2 \psi\|_\infty}{\varepsilon^{d+2}} \iint |(1-s)(X-x) + s(Y-y)| |\dot{\omega}(s)| dP^{x,y} d\Gamma \\ & \leq \frac{\|D^2 \psi\|_\infty}{\varepsilon^{d+2}} \left(\int |\dot{\omega}(s)|^2 dP \right)^{1/2} \left(\int d_2((x, y), (X, Y))^2 d\Gamma \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

We take the L^2 norm of this expression in time:

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 \left\| \iint \left\{ \nabla \psi^\varepsilon(\bullet - \xi(s)) - \nabla \psi^\varepsilon(\bullet - \omega(s)) \right\} \cdot \dot{\omega}(s) dP^{x,y} d\Gamma \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{C}{\varepsilon^{d+2}} \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2) \end{aligned}$$

On the other hand, for almost all t ,

$$\begin{aligned} & \left\| \iint \nabla \psi^\varepsilon(\bullet - \xi(s)) \cdot (\dot{\xi}(s) - \dot{\omega}(s)) \, dP^{x,y} \, d\Gamma \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \\ &= \left\| \iint \nabla \psi^\varepsilon(\bullet - \xi(s)) \cdot ((X - x) - (Y - y)) \, dP^{x,y} \, d\Gamma \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \\ &\leq \|\nabla \psi^\varepsilon\|_\infty \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{C}{\varepsilon^{d+1}} \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

So we get:

$$\left(\int_0^1 \|\partial_t Q - \partial_t \rho^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 \, dt \right)^{1/2} \leq \frac{C}{\varepsilon^{d+2}} \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2).$$

Gathering these two estimates, and using the definition of \mathbf{N} (2.5), we obtain

$$\mathbf{N}(Q - \rho^\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^{d+2}} \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2). \quad (2.23)$$

From now on, the constant C will be fixed and we suppose that (2.9) is satisfied. We will call M a new constant which will be "sufficiently large".

Step four: Dacorogna and Moser's lemma. Now we want to use the following lemma which is a simple version of the main result in [36]. We give an elementary proof in the appendix.

Lemma 2.2.3. *Let f and g be scalar functions in the space E (defined in (2.3), (2.4)), greater than $1/2$, and such that for all $t \in [0, 1]$,*

$$\int f(t, x) \, dx = \int g(t, x) \, dx = 1.$$

There exists a vector field $\zeta \in E$ and $M > 0$ only depending on the dimension such that

$$\forall t \in [0, 1], \quad (\text{Id} + \zeta(t, \bullet))_\#(f(t, \bullet) \cdot \text{Leb}) = g(t, \bullet) \cdot \text{Leb}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{N}(\zeta) \leq \Psi\left(M(1 + \max\{\mathbf{N}(f), \mathbf{N}(g)\})\mathbf{N}(g - f)\right), \quad (2.25)$$

where $\Psi : x \mapsto x \exp(x)$. As a consequence of (2.25), the following properties hold:

$$\forall t \in [0, 1], \quad \text{if } f(t, \bullet) = g(t, \bullet), \text{ then } \zeta(t, \bullet) = 0, \quad (2.26)$$

and for all $\Upsilon > 0$ there is $M > 0$ only depending on d and Υ such that as soon as

$$(1 + \max\{\mathbf{N}(f), \mathbf{N}(g)\})\mathbf{N}(g - f) \leq \Upsilon,$$

then

$$\mathbf{N}(\zeta) \leq M(1 + \max\{\mathbf{N}(f), \mathbf{N}(g)\})\mathbf{N}(g - f).$$

The density ρ is greater than $3/4$, and by formula (2.7) so is ρ^ε . In particular, ρ^ε is greater than $1/2$. Furthermore, as a consequence of (2.9),

$$\frac{C}{\varepsilon^{d+2}} \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{1}{4}.$$

So by (2.23), as \mathbf{N} controls the L^∞ norm of functions vanishing at times 0 and 1, Q is also greater than $1/2$. In addition, still by (2.23),

$$1 + \max \{ \mathbf{N}(\rho^\varepsilon), \mathbf{N}(Q) \} \leq \frac{5}{4} + \mathbf{N}(\rho^\varepsilon) \leq 2(1 + \mathbf{N}(\rho^\varepsilon)),$$

and with (2.23) and (2.9),

$$(1 + \max \{ \mathbf{N}(\rho^\varepsilon), \mathbf{N}(Q) \}) \mathbf{N}(Q - \rho^\varepsilon) \leq 2C(1 + \mathbf{N}(\rho^\varepsilon)) \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}} \leq 1/2.$$

So we can apply Lemma 2.2.3 with $f = \rho^\varepsilon$, $g = Q$ and $\Upsilon = 1/2$, and find M only depending on d and $\zeta = (\zeta(t, z))$ such that for all $t \in [0, 1]$,

$$(\text{Id} + \zeta(t, \bullet))_{\#} Q(t, \bullet) = \rho^\varepsilon(t, \bullet), \quad (2.27)$$

$$\mathbf{N}(\zeta) \leq M(1 + \mathbf{N}(\rho^\varepsilon)) \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}}. \quad (2.28)$$

Moreover, if $t \in [0, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, 1]$ and $z \in D$, by (2.26), $\zeta(t, z) = 0$. Now to a curve $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, we associate the curve $T_3(\omega) := (t \mapsto \omega(t) + \zeta(t, \omega(t)))$ and we define

$$P_{\Gamma, T_1, T_2, T_3} := T_3_{\#} P_{\Gamma, T_1, T_2}.$$

The flow $P_{\Gamma, T_1, T_2, T_3}$ has γ_2 as endpoints condition because ζ cancels at times 0 and 1 and its density is ρ^ε because of (2.27). It remains to compute the action of $P_{\Gamma, T_1, T_2, T_3}$. If ω is a curve in \mathbb{C} , still using the triangle inequality in L^2 ,

$$\begin{aligned} A(T_3(\omega)) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \dot{\omega}(t) + \frac{d}{dt} \zeta(t, \omega(t)) \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\omega}(t) + \partial_t \zeta(t, \omega(t)) + d\zeta(t, \omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t)|^2 dt \\ &\leq \left(\sqrt{A(\omega)} + \mathbf{N}(\zeta) \left(1 + \sqrt{A(\omega)} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

As a consequence, still by the same technique

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1, T_2, T_3}) &= \int A(T_3(\omega)) dP_{\Gamma, T_1, T_2}(\omega) \\ &\leq \int \left(\sqrt{A(\omega)} + \mathbf{N}(\zeta) \left(1 + \sqrt{A(\omega)} \right) \right)^2 dP_{\Gamma, T_1, T_2}(\omega) \\ &\leq \left(\sqrt{\bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1, T_2})} + \mathbf{N}(\zeta) \left(1 + \sqrt{\bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1, T_2})} \right) \right)^2 \\ &\leq \bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1, T_2}) + CM(1 + \mathbf{N}(\rho^\varepsilon)) \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}} \quad (\text{by (2.28)}). \end{aligned}$$

So taking $M \leftarrow CM$,

$$\bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1, T_2, T_3}) - \bar{\mathcal{A}}(P_{\Gamma, T_1, T_2}) \leq M(1 + \mathbf{N}(\rho^\varepsilon)) \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}}. \quad (2.29)$$

We get the result of Lemma 2.2.1, namely (2.10), by summing (2.17), (2.20) and (2.29). \square

2.3 Hölder continuity of the pressure field

This section is entirely devoted to the proof of Theorem 1.4.2. Once again we start with giving the ideas of the proof. We recall that expression (1.42) lets us interpret the pressure field as the Lagrange multiplier associated to the incompressibility constraint. In other terms, if $(\mathcal{E}, \|\bullet\|_{\mathcal{E}})$ is seen as a tangent space for the space of densities at Leb , if γ_1 is a bistochastic measure, and if we call p_{γ_1} the pressure associated to the endpoints condition γ_1 ,

$$\sup_{\|r\|_{\mathcal{E}} \leq 1} \langle p_{\gamma_1}, r \rangle$$

is interpreted as the slope of the action $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \bullet)$ at Leb in the directions of \mathcal{E} . We will fix $\tau > 0$ and chose for \mathcal{E} the set of distributional divergences of vector fields of E_{τ} :

$$\mathcal{E} := \text{div } E_{\tau},$$

and

$$\|r\|_{\mathcal{E}} := \inf_{\text{div } \xi = r} \mathbf{N}(\xi).$$

The theorem states that the slope in the directions of \mathcal{E} does not depend too much on the endpoints condition. This is a consequence of four estimates. Given γ_1 and γ_2 two bistochastic measures, a direction $r \in \mathcal{E}$ and two small parameters ε and δ , we will see that under certain conditions,

1. at the endpoints condition γ_1 , the slope in the direction r is bounded from below by a quantity of type

$$\langle p_{\gamma_1}, r \rangle \geq \frac{\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \text{Leb} + \delta r) - \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \text{Leb})}{\delta} - M\delta;$$

2. at the endpoints condition γ_2 , the slope in the direction r is bounded from above by a quantity of type

$$\langle p_{\gamma_2}, r \rangle \leq \frac{\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb} + \delta r^{\varepsilon}) - \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb})}{\delta} + M(\delta + \varepsilon);$$

3. the number $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb} + \delta r^{\varepsilon})$ is not too large with respect to $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \text{Leb} + \delta r)$, as seen in Lemma 2.2.1:

$$\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb} + r^{\varepsilon}) \leq \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \text{Leb} + r) + M \left(\varepsilon + \{1 + \mathbf{N}(r^{\varepsilon})\} \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}} \right);$$

4. the number $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb})$ is not too small with respect to $\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \text{Leb})$:

$$\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb}) \geq \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \text{Leb}) - M \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}} \right).$$

Indeed, relying on these four estimates, one can get something like

$$\langle p_{\gamma_2} - p_{\gamma_1}, r \rangle \leq \frac{M}{\delta} \left(\varepsilon + \{1 + \mathbf{N}(r^{\varepsilon})\} \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{d+2}} \right) + M(\varepsilon + \delta).$$

Then we just have to take the good parameters to get the result with variations of density of the form $r = -\operatorname{div} \xi$. In fact, given a vector field ξ , we will not work directly with $r := -\operatorname{div} \xi$ in the right hand side of the first and second points, and in the third point, but with the densities obtained at time t by transporting the Lebesgue measure by the maps $\operatorname{Id} + \delta \xi(t, \bullet)$, $\delta > 0$.

Let us do it rigorously. We take γ_1 and γ_2 two bistochastic measures sufficiently close in a sense to be specified later, C and M as in Lemma 2.2.1, a number $\tau \in (0, 1/4)$ and $\xi = \xi(t, x) \in E_\tau$ a vector field satisfying $\mathbf{N}(\xi) \leq 1$. Using Theorem 1.1.28, we can suppose without loss of generality that with these τ and M , we have:

$$\|p\|_{L^2(\tau, 1-\tau; BV(\mathbb{T}^d))} \leq M. \quad (2.30)$$

We also take two small parameters ε and δ that we will fix later on.

Call ρ_δ the density defined for all $t \in [0, 1]$ by $(\operatorname{Id} + \xi(t, \bullet))_\# \operatorname{Leb}$.

First point. We chose P_{γ_1} some solution to $\operatorname{IOT}(\gamma_1)$. We recall that according to the finite diameter property, $\sqrt{\overline{\mathcal{A}}(P_{\gamma_1})} \leq \operatorname{Diam}(d) \leq M$. For any $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, we call $T_\delta(\omega)$ the curve whose position at time $t \in [0, 1]$ is

$$\omega(t) + \delta \xi(t, \omega(t)).$$

Then we call $H_{\gamma_1}(\delta) := T_{\delta\#} P_{\gamma_1}$. Of course, the density of $H_{\gamma_1}(\delta)$ is ρ_δ and T_δ does not change the endpoints of the trajectories. So $H_{\gamma_1}(\delta)$ is admissible for $\operatorname{IOT}(\gamma_1, \rho_\delta)$. Moreover, using (1.43), we can estimate the action of $H_{\gamma_1}(\delta)$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \rho_\delta) &\leq \overline{\mathcal{A}}(H_{\gamma_1}(\delta)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int \left| \dot{\omega}(t) + \delta \frac{d}{dt} \xi(t, \omega(t)) \right|^2 dP_{\gamma_1}(\omega) dt \\ &= \overline{\mathcal{A}}(P_{\gamma_1}) - \delta \langle p_{\gamma_1}, \operatorname{div} \xi \rangle + \frac{\delta^2}{2} \int_0^1 \int \left| \frac{d}{dt} \xi(t, \omega(t)) \right|^2 dP_{\gamma_1}(\omega) dt \\ &\leq \overline{\mathcal{A}}(P_{\gamma_1}) - \delta \langle p_{\gamma_1}, \operatorname{div} \xi \rangle + M \delta^2 \mathbf{N}(\xi)^2. \end{aligned}$$

Finally, as $\mathbf{N}(\xi)$ is supposed to be smaller than 1, we obtain the first point:

$$\overline{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \rho_\delta) - \overline{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \operatorname{Leb}) + \delta \langle p_{\gamma_1}, \operatorname{div} \xi \rangle \leq M \delta^2. \quad (2.31)$$

Observe that consequently, there exists $\delta_0 > 0$ such that if $\delta \leq \delta_0$,

$$\sqrt{\overline{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \rho_\delta)} \leq 2 \operatorname{Diam}(d). \quad (2.32)$$

Second point. For the second estimate, the starting point is (1.42) written for the regularization ρ_δ^ε of ρ_δ :

$$\overline{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \operatorname{Leb}) + \langle p_{\gamma_2}, \rho_\delta^\varepsilon - 1 \rangle \leq \overline{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \rho_\delta^\varepsilon). \quad (2.33)$$

Then, we remark that as soon as $\delta < 1$, $\det(\operatorname{Id} + \delta d\xi(t, z))$ is well defined and positive for all $t \in [0, 1]$, for Leb -almost all $x \in \mathbb{T}^d$, and

$$\rho_\delta(t, z + \delta \xi(t, z)) = \frac{1}{\det(\operatorname{Id} + \delta d\xi(t, z))}.$$

Moreover, as all the coefficients of $d\xi(t, z)$ are almost everywhere smaller than one, developing the determinant and still using $\delta < 1$,

$$\det(\text{Id} + \delta d\xi(t, z)) = 1 + \delta \operatorname{div} \xi(t, x) + \delta^2 F(t, z, \delta)$$

with

$$\sup_{\delta} \|F(\bullet, \delta)\|_{L_{t,z}^{\infty}} \leq M.$$

Subsequently, up to taking a smaller $\delta_0 > 0$, if

$$\delta \leq \delta_0, \tag{2.34}$$

then

$$\begin{aligned} \|\rho_{\delta} - 1\|_{L_{t,x}^{\infty}} &\leq \frac{1}{4}, \\ \|\rho_{\delta} - 1 + \delta \operatorname{div} \xi\|_{L_{t,x}^{\infty}} &\leq \delta^2 M. \end{aligned} \tag{2.35}$$

As a consequence, if we define ξ^{ε} for all $t \in [0, 1]$ and $z \in \mathbb{T}^d$ by

$$\xi^{\varepsilon}(t, z) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \in [0, \varepsilon], \\ \int \psi^{\varepsilon}(z - x) \xi(s, x) dx \text{ with } s = \frac{t - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} & \text{if } t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon], \\ 0 & \text{if } t \in [1 - \varepsilon, 1], \end{cases}$$

we get that under condition (2.34),

$$\|\rho_{\delta}^{\varepsilon} - 1 - \delta \operatorname{div} \xi^{\varepsilon}\|_{L_{t,x}^{\infty}} \leq \delta^2 M.$$

In addition, if $t \in [0, \tau] \cup [1 - \tau, 1]$ and $z \in \mathbb{T}^d$, $\rho_{\delta}^{\varepsilon}(t, z) = 1$ and $\xi^{\varepsilon}(t, z) = 0$. These two remarks are sufficient to make use of the regularity of the pressure field (2.30) (in fact, here, we would only need p_{γ_2} to be a measure, but it will not be the case in (2.37)). Indeed,

$$\begin{aligned} |\langle p_{\gamma_2}, \rho_{\delta}^{\varepsilon} - 1 - \delta \operatorname{div} \xi^{\varepsilon} \rangle| &\leq \|p_{\gamma_2}\|_{L^1([\tau, 1-\tau] \times \mathbb{T}^d)} \|\rho_{\delta}^{\varepsilon} - 1 - \delta \operatorname{div} \xi^{\varepsilon}\|_{L_{t,x}^{\infty}} \\ &\leq \|p_{\gamma_2}\|_{L^2([\tau, 1-\tau]; BV)} M \delta^2 \\ &\leq M \delta^2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Now we want to estimate $\xi - \xi^{\varepsilon}$ in $L_t^2 L_x^{\infty}$ norm. In the following computations, if f is a function of t and x , we will denote by $f(t)$ the function of x $f(t, \bullet)$. First, if $t \in [0, \varepsilon]$, $\xi^{\varepsilon}(t)$ vanishes, and

$$\|\xi(t) - \xi^{\varepsilon}(t)\|_{L_x^{\infty}}^2 \leq \left(\int_0^t \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^{\infty}} d\sigma \right)^2 \leq \varepsilon \int_0^{\varepsilon} \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^{\infty}}^2 d\sigma.$$

Likewise, if $t \in [1 - \varepsilon, 1]$,

$$\|\xi(t) - \xi^{\varepsilon}(t)\|_{L_x^{\infty}}^2 \leq \varepsilon \int_{1-\varepsilon}^1 \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^{\infty}}^2 d\sigma.$$

Finally, if $t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, calling $s = (t - \varepsilon)/(1 - 2\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}
\|\xi(t) - \xi^\varepsilon(t)\|_{L_x^\infty}^2 &= \|\xi(t) - \xi * \psi^\varepsilon(s)\|_{L_x^\infty}^2 \\
&\leq 2\|\xi(t) - \xi(s)\|_{L_x^\infty}^2 + 2\|\xi(s) - \xi * \psi^\varepsilon(s)\|_{L_x^\infty}^2 \\
&\leq 2\left|\int_s^t \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^\infty} d\sigma\right|^2 + M\varepsilon^2 \\
&\leq 2\varepsilon \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^\infty}^2 d\sigma + M\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Gathering these three estimates, we get

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \|\xi(t) - \xi^\varepsilon(t)\|_{L_x^\infty}^2 dt \\
&\leq M\varepsilon^2 + \varepsilon \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^\infty}^2 d\sigma dt + \varepsilon \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{1-\varepsilon}^1 \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^\infty}^2 d\sigma dt \\
&\quad + 2\varepsilon \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^\infty}^2 d\sigma dt \\
&\leq M\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \int_0^\varepsilon \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^\infty}^2 d\sigma + \varepsilon^2 \int_{1-\varepsilon}^1 \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^\infty}^2 d\sigma \\
&\quad + 4\varepsilon^2 \int_0^1 \|\partial_t \xi(\sigma)\|_{L_x^\infty}^2 d\sigma \\
&\leq M\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

and so

$$\|\xi - \xi^\varepsilon\|_{L_t^2 L_x^\infty} \leq M\varepsilon.$$

Moreover, if $t \in [0, \tau] \cup [1 - \tau, 1]$, both $\xi(t)$ and $\xi^\varepsilon(t)$ vanish. Consequently, for M large enough, and here using the full regularity given by (2.30),

$$\begin{aligned}
|\langle p_{\gamma_2}, \delta \operatorname{div} \xi^\varepsilon - \delta \operatorname{div} \xi \rangle| &= \delta |\langle \nabla p_{\gamma_2}, \xi - \xi^\varepsilon \rangle| \\
&\leq \delta \|p_{\gamma_2}\|_{L^2([\tau, 1-\tau]; BV)} \|\xi - \xi^\varepsilon\|_{L_t^2 L_x^\infty} \\
&\leq M\delta\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

In the end, gathering (2.33), (2.36) and (2.37), as soon as (2.34) holds,

$$-\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \rho_\delta^\varepsilon) + \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \operatorname{Leb}) - \delta \langle p_{\gamma_2}, \operatorname{div} \xi \rangle \leq M\delta(\delta + \varepsilon). \tag{2.38}$$

Third and fourth point. We already saw that if (2.34) holds, then so do (2.35) (and thus $\rho_\delta \geq 3/4$) and (2.8) (see (2.32)). Furthermore, under this condition, using (2.13) and (2.32), we can find K only depending on d such that

$$1 + N(\rho_\delta^\varepsilon) \leq \frac{K}{\varepsilon^{d+1}}.$$

So as soon as (2.34) holds and if,

$$CK \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{(d+1)(d+2)}} \leq \frac{1}{4}, \tag{2.39}$$

then Lemma 2.2.1 applies with ρ_δ (and *a fortiori* also with Leb), that is to say

$$\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \rho_\delta^\varepsilon) - \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \rho_\delta) \leq M \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{(d+1)(d+2)}} \right), \quad (2.40)$$

$$\bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_1, \text{Leb}) - \bar{\mathcal{A}}^*(\gamma_2, \text{Leb}) \leq M \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{(d+1)(d+2)}} \right). \quad (2.41)$$

Conclusion. The consequence of these points is that under the conditions (2.34) and (2.39), the four inequalities (2.31), (2.38), (2.40) and (2.41) hold and summing them and dividing by δ , we obtain (using $\delta \leq \delta_0 < 1$ to bound ε by ε/δ)

$$\langle p_{\gamma_2} - p_{\gamma_1}, \text{div } \xi \rangle \leq M \left(\delta + \frac{1}{\delta} \left\{ \varepsilon + \frac{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)}{\varepsilon^{(d+1)(d+2)}} \right\} \right).$$

Now it is straightforward to check that if

$$\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \min \left(\delta_0^{2+2(d+1)(d+2)}, \frac{1}{(4CK)^{1+(d+1)(d+2)}} \right),$$

then

$$\delta := \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^{1/[2+2(d+1)(d+2)]} \quad \text{and} \quad \varepsilon := \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^{1/[1+(d+1)(d+2)]}$$

satisfy (2.34) and (2.39) and provide the following inequality

$$\langle p_{\gamma_1} - p_{\gamma_2}, \text{div } \xi \rangle \leq M \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^{1/[2+2(d+1)(d+2)]}.$$

The global Hölder property is deduced from the local one as in the proof of Theorem 1.4.1. □

Appendices

2.A Proof of Lemma 2.2.3

We will use the following lemma which may be seen as the simplest result in the regularity theory for elliptic equations (see for example chapter 3 of [49]). Remark that we only need the gain of one derivative. We do not have to use more sophisticated results of this theory, allowing the gain of two derivatives.

Lemma 2.A.1. *Let F be a bounded measurable function on the torus whose integral is null and let U be a distributional solution to the Poisson equation*

$$\Delta U = F.$$

Then U is Lipschitz continuous and there exists C only depending on the dimension such that

$$\|\nabla U\|_\infty \leq C\|F\|_\infty.$$

Proof of Lemma 2.2.3. We will denote by M a large constant only depending on the dimension possibly growing from line to line. For given $s \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ and $x \in \mathbb{T}^d$, we call

$$\begin{aligned} h(t, x) &:= f(t, x) - g(t, x), \\ \rho(s, t, x) &:= (1 - s)f(t, x) + sg(t, x), \\ L &:= \sup_t \text{Lip } h(t, \bullet), \\ \kappa(t) &:= \|\partial_t h(t, \bullet)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}, \\ \mathcal{N} &:= \max \{N(f), N(g)\}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

With these notations,

$$N(h) = L + \left(\int_0^1 \kappa(\tau)^2 d\tau \right)^{1/2}$$

Because at each time, $h(t, \bullet)$ has zero mean, we have

$$\|h\|_\infty \leq M \sup_t \text{Lip } h(t, \bullet) \leq MN(h)$$

Notice that for all s , $\rho(s, \bullet)$ belongs to E and all its values are greater than $1/2$. Also remark the following estimate

$$\sup_s N(\rho(s, \bullet)) \leq \mathcal{N}. \tag{2.43}$$

For all t , take θ the unique distributional solution to the Poisson equation

$$\begin{aligned}\Delta\theta(t, x) &= f(t, x) - g(t, x) = h(t, x), \\ \int \theta(t, x) dx &= 0.\end{aligned}$$

(The second equation ensures the measurability of θ with respect to time.) We first analyse the regularity of θ . A direct application of Lemma 2.A.1 provides

$$\|\nabla\theta\|_\infty \leq C\|h\|_\infty \leq MN(h). \quad (2.44)$$

Now take x_1, x_2 in \mathbb{T}^d , $t_1 < t_2$ in $[0, 1]$, and call for every $x \in \mathbb{T}^d$

$$\begin{aligned}H(x) &:= h(t_2, x_2 + x) - h(t_1, x_1 + x), \\ \Theta(x) &:= \theta(t_2, x_2 + x) - \theta(t_1, x_1 + x).\end{aligned}$$

Then Θ is a solution to the Poisson equation

$$\Delta\Theta = H,$$

and besides (we recall that d is the geodesic distance on \mathbb{T}^d),

$$\|H\|_\infty \leq Ld(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} \kappa(t) dt.$$

As a consequence, by Lemma 2.A.1,

$$\|\nabla\Theta\|_\infty \leq C \left(Ld(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} \kappa(t) dt \right).$$

Using this estimate at $x = 0$, we get

$$|\nabla\theta(t_2, x_2) - \nabla\theta(t_1, x_1)| \leq C \left(Ld(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} \kappa(t) dt \right).$$

This formula holds for all $t_1 < t_2$, x_1 and x_2 , which implies that $\nabla\theta \in E$, with

$$\mathbf{N}(\nabla\theta) \leq C\mathbf{N}(h). \quad (2.45)$$

Now define for all $s \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ and $x \in \mathbb{T}^d$ the vector

$$v(s, t, x) := \frac{\nabla\theta(t, x)}{\rho(s, t, x)}.$$

Remark that for a fixed $t \in [0, 1]$, the following continuity equation holds in $[0, 1] \times \mathbb{T}^d$:

$$\partial_s \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

Observe the following algebraic properties of \mathbf{N} (which are consequences of the chain rule):

$$\begin{aligned}\forall a, b \in E, & \quad \mathbf{N}(ab) \leq \|a\|_\infty \mathbf{N}(b) + \mathbf{N}(a) \|b\|_\infty, \\ \forall a \in E, \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lipschitz,} & \quad \mathbf{N}(f \circ a) \leq \operatorname{Lip}(f) \mathbf{N}(a).\end{aligned}$$

So as $\rho \geq 1/2$ and the reciprocal function ($a \mapsto 1/a$) is 4-Lipschitz on $[1/2, \infty[$, by (2.43), (2.44) and (2.45),

$$\begin{aligned} \sup_s \mathbf{N}(v(s, \bullet)) &\leq \|\nabla\theta\|_\infty \sup_s \mathbf{N}\left(\frac{1}{\rho(s, \bullet)}\right) + \mathbf{N}(\nabla\theta) \sup_s \left\| \frac{1}{\rho(s, \bullet)} \right\|_\infty \\ &\leq 4\|\nabla\theta\|_\infty \sup_s \mathbf{N}(\rho(s, \bullet)) + 2\mathbf{N}(\nabla\theta) \\ &\leq M(\mathcal{N} + 1)\mathbf{N}(h). \end{aligned} \tag{2.46}$$

In particular, the Cauchy-Lipschitz theorem lets us define for all t and x the solution to the following ordinary differential equation on \mathbb{R}^d :

$$\begin{cases} \partial_s z(s, t, x) = v(s, t, x + z(s, t, x)), \\ z(0, t, x) = 0. \end{cases}$$

By classical results about the continuity equation (see for example [1]), the method of characteristic implies that for all $s \in [0, 1]$ and $t \in [0, 1]$,

$$\rho(s, t, \bullet) = (\text{Id} + z(s, t, \bullet))\# \rho(0, t, \bullet),$$

and in particular, (2.24) holds with for all $t \in [0, 1]$ and $x \in \mathbb{T}^d$,

$$\zeta(t, x) := z(1, t, x).$$

It remains to show inequality (2.25). To do so, call

$$\begin{aligned} \tilde{L} &:= \sup_{s,t} \text{Lip } v(s, t, \bullet), \\ \tilde{\kappa}(t) &:= \sup_s \|\partial_t v(s, t, \bullet)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}. \end{aligned}$$

Take $t_1 < t_2$ in $[0, 1]$, x_1 and x_2 in \mathbb{T}^d . We have for all s ,

$$\begin{aligned} \partial_s |z(s, t_2, x_2) - z(s, t_1, x_1)| &\leq |v(s, t_2, x_2 + z(s, t_2, x_2)) - v(s, t_1, x_1 + z(s, t_1, x_1))| \\ &\leq \tilde{L} \mathbf{d}(x_1 + z(s, t_1, x_1), x_2 + z(s, t_2, x_2)) + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\kappa}(\tau) \, d\tau \\ &\leq \tilde{L} |z(s, t_2, x_2) - z(s, t_1, x_1)| + \tilde{L} \mathbf{d}(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\kappa}(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Hence, by Grönwall's inequality, for all $s \in [0, 1]$,

$$|z(s, t_2, x_2) - z(s, t_1, x_1)| \leq \left\{ \tilde{L} \mathbf{d}(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\kappa}(\tau) \, d\tau \right\} \frac{\exp(\tilde{L}s) - 1}{\tilde{L}}.$$

At $s = 1$, this inequality implies

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\zeta) &\leq \sup_s \mathbf{N}(v(s, \bullet)) \frac{\exp(\tilde{L}) - 1}{\tilde{L}} \\ &\leq \sup_s \mathbf{N}(v(s, \bullet)) \exp\left(\sup_s \mathbf{N}(v(s, \bullet))\right), \end{aligned}$$

because $\tilde{L} \leq \sup_s \mathbf{N}(v(s, \bullet))$. Inequality (2.25) is then a consequence of (2.46) and of the definition of \mathcal{N} and h in (2.42). \square

Remark 2.A.2. Inverting the sense of time, we could also prove estimate (2.25) for:

$$\xi(t, x) := \tilde{z}(0, t, x),$$

where \tilde{z} is the solution to:

$$\begin{cases} \partial_s \tilde{z}(s, t, x) = v(s, t, x + \tilde{z}(s, t, x)), \\ \tilde{z}(1, t, x) = 0. \end{cases}$$

In addition, we have for all t :

$$(\text{Id} + \zeta(t, \bullet)) \circ (\text{Id} + \xi(t, \bullet)) = (\text{Id} + \xi(t, \bullet)) \circ (\text{Id} + \zeta(t, \bullet)) = \text{Id}.$$

On the other hand, remark that if f and g had one more derivative, we could do the whole proof with one more derivative. Indeed, in the context of Lemma 2.A.1, we have $\|\mathbf{D}^2 U\|_\infty \leq C\|\nabla F\|_\infty$, and the standard theory of ordinary differential equation associates to a velocity field with k derivatives a flow with k derivatives. In the end, we would get an estimate for the second order derivatives of ζ .

These two points show how to prove Theorem 5.1.1, used in Chapter 5.

Chapter 3

Nonlinear instability of Vlasov type equations around rough velocity profiles

We present in this chapter the results from the article [8], which contains an independent introduction. We do not reproduce it entirely here to avoid to the reader unnecessary repetitions. We recall that the main results of this chapter have been presented in Subsection 1.4.2 above.



As already said in the introduction, the aim of this chapter is to extend existing results concerning nonlinear instability in Vlasov type equations in the neighbourhood of stationary solution with minimal regularity assumptions. We want to reach Theorem 1.4.3, but as both the Penrose condition and our proof are more general than their applications to the kinetic Euler equation (1.47) and the Vlasov-Benney equation (1.63), we will work in a general framework presented in Section 3.3 below. This framework encompasses the kinetic Euler equation (1.47) and the Vlasov-Benney equation (1.63), but also the Vlasov-Poisson equation (1.54). Recall that we will build weak solutions to Vlasov equations using strong solutions to multiphase systems of equations. So naturally, this abstract model will be of multiphase type. Of course in the Vlasov-Poisson case, we will not prove an ill-posedness result (this equation is well-posed), but still our proof makes it possible to deduce an "almost" Lyapounov instability result, in this context of rough velocity profiles, see Theorem 3.1.2 below.

We give in the following introduction some definitions, state the main results and give an outline of the chapter. We will repeat for clarity Theorem 1.4.3 in Theorem 3.1.3. All this work is done in the flat torus $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / 2\pi\mathbb{Z}^d$.

3.1 Introduction of the chapter

We will work with solutions that are only measures with respect to the velocity variable. Let us define a notion of solutions in this context.

3.1.1 Measure-valued solutions

More precisely we will be dealing with functions $f : [0, T] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ which are smooth when integrated against smooth functions of the variable v . If φ is a smooth and bounded function on

\mathbb{R}^d , we define for all t and x

$$\langle f, \varphi \rangle(t, x) := \int \varphi(v) f(t, x, dv).$$

The function $\langle f, \varphi \rangle$ is called the *macroscopic observable* corresponding to φ . The class of solutions to (1.54) that we will consider is defined as follows.

Definition 3.1.1 (Weak in v and strong in x solutions). We will say that $f : [0, T] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ is a weak in v and strong in x solution to (1.54) if it satisfies in the classical sense for all test function φ the system

$$\begin{cases} \partial_t \langle f, \varphi \rangle(t, x) + \operatorname{div} \langle f, v \varphi \rangle(t, x) + \nabla_x U(t, x) \cdot \langle f, \nabla \varphi \rangle(t, x) = 0, \\ -\Delta_x U(t, x) = \langle f, 1 \rangle(t, x) - 1, \\ f(0, x, dv) = f_0(x, dv). \end{cases}$$

Equations (1.47) and (1.63) have straightforward similar formulations.

We recall that this is motivated by the following fact. If μ is any probability measure, then it is a weak solution to (1.54) (resp. (1.47) or (1.63)). Moreover, an integration by parts leads to

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{n \cdot \nabla_v \mu(v)}{n \cdot (v - \omega)} dv = |n|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(v)}{\{n \cdot (v - \omega)\}^2}, \quad (3.1)$$

which only involves μ and not its derivatives. (We make no difference between the density μ and the measure it induces $d\mu(v) = \mu(v) dv$.) Therefore, the Penrose instability condition of Definition 1.2.1 makes sense for any probability measure μ , and it is a natural question to know whether the stability can be studied around such profiles.

To give examples of unstable profiles in this setting, we show in Appendix 3.A that in the case of the kinetic Euler equation, a superposition of a finite number of distinct Dirac masses is always unstable. This is coherent with the classical setting where profiles with one bump are stable and profiles with several sufficiently large and sufficiently distant bumps are unstable.

The natural question that is asked is the following: do there exist unstable weak solutions to (1.54), (1.47) and (1.63) in the neighborhood of any probability measure μ that satisfies the corresponding Penrose condition. The purpose of this chapter is to answer affirmatively to this question. As explained in Subsection 1.4.2, the strategy consists in building solutions to corresponding multiphase systems of equations, in analytic regularity.

Let us state the results of the chapter precisely.

3.1.2 The results

In the measure-valued setting, we are only able to evaluate the size of the weak in v and strong in x solutions when integrated against smooth functions of v . So we will state the results in terms of macroscopic observables. These results might be understood as follows: whatever the number of macroscopic observables we control at the initial time in very strong norms, one specific macroscopic quantity will be likely to grow along the flow of the equation even in weak norms. This macroscopic quantity will be the electric potential in the case of the Vlasov-Poisson equation, the pressure in the case of the kinetic Euler equation and the density in the case of the Vlasov-Benney equation.

Almost Lyapounov instability for Vlasov-Poisson

In this case, the result we show can be stated in the following way.

Theorem 3.1.2. *Take μ an unstable profile, $N \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0, 1]$. Then there exists, $(T_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ and (f_0^k) a family of measure-valued initial data such that:*

- for all k , there is a weak in v and strong in x solution f^k to (1.54) starting from f_0^k up to time T_k ,
- if we denote by U_k the corresponding electric potential, we have:

$$\frac{\|U_k\|_{L^1([0, T_k] \times \mathbb{T}^d)}}{\sum_{i=1}^N \|\langle f_0^k, \varphi_i \rangle - \langle \mu, \varphi_i \rangle\|_{W^{s, \infty}(\mathbb{T}^d)}^\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Moreover

$$T_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} |\log \varepsilon_k| \quad \text{with} \quad \varepsilon_k := \|U_k|_{t=0}\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}.$$

Remark that there is no contribution of the stationary solution in the numerator because the electric potential of the stationary solution is 0.

We could not prove with our method a Lyapounov instability result: in our proof, we build solutions that actually satisfy

$$\|U_k\|_{L^1([0, T_k] \times \mathbb{T}^d)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

whereas Lyapounov instability would correspond to the following property:

$$\sum_{i=1}^N \|\langle f_0^k, \varphi_i \rangle - \langle \mu, \varphi_i \rangle\|_{W^{s, \infty}(\mathbb{T}^d)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

but:

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|U_k\|_{L^1([0, T_k] \times \mathbb{T}^d)} > 0.$$

This point will be developed in Remark 3.6.2.

In conclusion, our method makes it possible to deal with measure-valued solutions. It also allows to drop the so-called δ and δ' -conditions in [58] that we already talked about. But on the other hand, the instability result is a bit weaker than the one of Han-Kwan–Hauray in [58] and Han-Kwan–Nguyen in [62].

Ill-posedness for kinetic Euler and Vlasov-Benney

The statement in these cases is similar to the previous one, but we can take a sequence (T_k) tending to zero: the instabilities can develop arbitrarily fast.

Theorem 3.1.3. *Take μ an unstable profile, $N \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0, 1]$. Then there exists, $(T_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ **tending to zero** and (f_0^k) a family of measure-valued initial data such that:*

- for all k , there is a weak in v and strong in x solution f^k to (1.47) starting from f_0^k up to time T_k ,

- if we denote by p_k the corresponding pressure, we have:

$$\frac{\|p_k\|_{L^1([0, T_k] \times \mathbb{T}^d)}}{\sum_{i=1}^N \|\langle f_0^k, \varphi_i \rangle - \langle \mu, \varphi_i \rangle\|_{W^{s, \infty}(\mathbb{T}^d)}^\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Moreover

$$T_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{|\log \varepsilon_k|}{|n_k|} \right),$$

where $\varepsilon_k := \|p_k|_{t=0}\|_{L^1}$ and n_k is the spatial frequency of the nearest exponential growing mode.

The same result holds for (1.63) instead of (1.47), replacing the pressure by

$$\rho_k - 1,$$

ρ_k being the density of f_k .

In that case, our result is a strict generalization of [61, Theorem 1.2], presented at Theorem 1.2.4 of the main introduction. Once again, we can drop the δ or δ' -condition.

Let us give the main ideas of the proof.

3.2 Structure of the proof

3.2.1 Analytic regularity with respect to the position

The proof consists in studying the linearized multiphasic system to get an estimate on the corresponding semigroup, and then to use this estimate to get a nonlinear solution through a fixed point argument. As in the works [53, 58, 61], we work in an analytic framework. The densities and velocity fields in the multiphasic formulation will be analytic functions of x . This is the relevant level of regularity to handle the fact that in the kinetic Euler equation and in the Vlasov-Benney equation, the force field ($-\nabla p$ and $-\nabla \rho$ respectively) are one derivative less regular than the density. So for instance, there is no hope *a priori* to perform a fixed point proof of existence in any Sobolev space (besides, our ill-posedness result makes the feasibility of such proof very unlikely). In our work, this lack of regularity will appear in the fact that the semi-group of the linearized operator will be continuous only in analytic functional spaces.

3.2.2 Outline of the Chapter

Let us present the content of each section of the Chapter.

Section 3.3. We introduce the abstract multiphasic model we will work with, and the assumptions we make to perform the analysis. The three equations (1.54), (1.53) and (1.63) in their multiphasic formulations are particular cases of this model. The homogeneous solutions of the form $(\rho, \mathbf{v}) := (1, w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ that we considered in the introduction are still stationary solutions in this framework.

Section 3.4. We study the linearization of the abstract model around these homogeneous stationary solutions. This section is divided in two parts: in Subsection 3.4.1, we compute the unstable eigenvectors and eigenvalues of the linearized system, and in Subsection 3.4.3, we derive some sharp estimates for the corresponding semigroup in analytic regularity following [61]. These estimates are crucial to get sufficiently large times of existence for the instabilities to develop (see the beginning of Subsection 3.4.3 for more detail).

Section 3.5. We show that there exist analytic solutions to the abstract model of the form

$$\text{stationary solution} + \eta f + \text{remainder}$$

where η is a small parameter, f is a solution to the linearized system (typically an exponential growing mode of spatial frequency n) and the remainder is small with respect to η and cancels at $t = 0$. We also bound from below the time of existence of such solutions with respect to η and n using the estimate derived in the previous section. This is done at Theorem 3.5.1 which is the main result of this chapter. The strategy is the same as in [53] and [61]: we decompose the operator as a linear term and an at least quadratic term, and we consider the latter as a source term in a Duhamel formulation. After a fine analysis of the properties of the analytic norms we use (Subsection 3.5.2), and of the size of each term in the Duhamel formulation (Subsection 3.5.3), we can perform at Subsection 3.5.4 a fixed point argument as in Caflish' proof of the Cauchy-Kovalevskaja theorem (see [30]).

Section 3.6. We show how to deduce from these existence results Theorem 3.1.2 and Theorem 3.1.3. Theorem 3.6.1 asserts that the Penrose instability condition always implies almost Lyapounov instability in the abstract multiphase model. The only thing we need to do is to use the form of the eigenvalues and the estimates obtained in Theorem 3.5.1 to evaluate precisely the size of the initial data in Sobolev type norms and of the solutions in Lebesgue type norms. Corollary 3.6.3 is a kinetic version of Theorem 3.6.1 and directly implies Theorem 3.1.2.

On the other hand, ill-posedness around Penrose unstable profiles only holds in the abstract multiphase model when a further assumption is made on the spectrum of the linearized operator. This is the content of Theorem 3.6.5, and of Corollary 3.6.6, its kinetic counterpart. This assumption is true in the kinetic Euler equation and in the Vlasov-Benney equation thanks to their scaling properties already discussed in Subsection 1.2.4. Apart from this new ingredient, the proof is very similar to the one of Theorem 3.1.2. However, if Corollary 3.6.6 directly implies Theorem 3.1.3 in the Vlasov-Benney case, we need to work a little bit more to adapt it to the case of the kinetic Euler equation. The reason is the fact that the initial data of the exponential growing modes we build in the abstract setting do not satisfy the incompressibility constraint. In Subsection 3.6.3, we present how to fix this problem, and thus how to prove Theorem 3.1.3 in the case of the kinetic Euler equation.

Appendices. In Appendix 3.A, we show that any superposition of at least two Dirac masses is unstable for the kinetic Euler equation. In Appendix 3.B, we give the proofs of the properties of the analytic norms stated in Subsection 3.5.2.

3.3 Presentation of the abstract model

Let us describe the model we will study throughout the paper.

3.3.1 The abstract model

First, we model the evolution of several phases indexed by a probability measure μ on \mathbb{R}^d and described by their densities $(\rho^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ and velocity fields $(v^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ which are functions of time $t \in \mathbb{R}_+$ and position $x \in \mathbb{T}^d$. The torus is normalized, so that the total mass of its Lebesgue

measure is supposed to be equal to one. The notation $\boldsymbol{\rho}(t)$ and $\boldsymbol{v}(t)$ will stand for the whole families $(\rho^w(t, \bullet))_{w \in \mathbb{R}^d}$ and $(v^w(t, \bullet))_{w \in \mathbb{R}^d}$. These phases follow the Newton dynamics in a potential U :

$$\begin{cases} \forall w \in \mathbb{R}^d, & \partial_t \rho^w(t, x) + \operatorname{div}(\rho^w(t, x) v^w(t, x)) = 0, \\ \forall w \in \mathbb{R}^d, & \partial_t v^w(t, x) + (v^w(t, x) \cdot \nabla) v^w(t, x) = -\nabla U[\boldsymbol{\rho}(t), \boldsymbol{v}(t)](x), \\ \forall w \in \mathbb{R}^d, & \rho^w|_{t=0} = \rho_0^w \text{ and } v^w|_{t=0} = v_0^w. \end{cases} \quad (3.2)$$

We need now to describe how the phases generate the potential. We suppose it is in the following form:

$$U[\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{v}](x) := A \left[\int \Phi(v^w) \rho^w \, d\mu(w) \right] (x). \quad (3.3)$$

where: $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow E$ is a smooth function, E is a normed \mathbb{R} -vector space with finite dimension and A is a homogeneous Fourier multiplier of symbol $P : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathcal{L}(E^{\mathbb{C}}; \mathbb{C}) = \mathcal{L}(E; \mathbb{R})^{\mathbb{C}}$. (The notations $E^{\mathbb{C}}$ and $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})^{\mathbb{C}}$ stand for the complexifications of E and $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ respectively.)

Remark 3.3.1 (Stationary solution). Defining for all w $\rho^w \equiv 1$ and $v^w \equiv w$, the potential is well defined thanks to (3.5), its gradient vanishes, and we get a stationary solution (corresponding to the stationary homogeneous solution in Vlasov-Poisson).

Remark 3.3.2. It would be natural to solve the two first lines of (3.2) only for μ -almost all w . In addition, it could seem artificial to prescribe initial conditions for all w and not only for μ -almost all w because it would mean describing the distribution of the particles belonging to a phase that does not contain any particle. However, in this paper, we build solutions starting from very specific initial conditions (the eigenvectors of the linearized operators around homogeneous solutions) that have a meaning for all w . So we will indeed solve (3.2) for all w .

Remark 3.3.3. It is a simple computation to prove that if $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{v}) = (\rho^w, v^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ is a classical solution to (3.2)-(3.3), then the density f defined for all t and x by:

$$f(t, x, \bullet) \int \rho^w(t, x) \delta_{v=v^w(t, x)} \, d\mu(w)$$

is a weak in v and strong in x solution to the kinetic system:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x U \cdot \nabla_v f = 0, \\ U(t, x) = A \left[\int \Phi(v) f(t, x, dv) \right], \\ f_0(x) = \int \rho_0^w(x) \delta_{v=v_0^w(x)} \, d\mu(w). \end{cases}$$

3.3.2 Gradient structure

We will solve the system (3.2)-(3.3) for a particular class of initial data, where the total mass is the same as the one of the stationary solution, and where the velocity is a gradient.

Formally, a solution to (3.2)-(3.3) of the form

$$(\boldsymbol{\rho}(t), \boldsymbol{v}(t)) = (1 + r^w(t), w + u^w(t))_{w \in \mathbb{R}^d}$$

with

$$\forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \int_{\mathbb{T}^d} r^w(0, x) dx = 0 \quad \text{and} \quad u^w(0) \text{ is a gradient}$$

keeps this structure along the flow: we expect that for all t for which the solution exists,

$$\forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \int_{\mathbb{T}^d} r^w(t, x) dx = 0 \quad \text{and} \quad u^w(t) \text{ is a gradient.}$$

We will see in the sequel that this is true for our solutions. We give a name to this type of families of functions.

Definition 3.3.4. Let $(r, u) = (r^w, u^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ a family of pairs of analytic functions. We write $(r, u) \in \mathbf{L}_0$ if

$$\forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \int_{\mathbb{T}^d} r^w(x) dx = 0 \quad \text{and} \quad u^w \text{ is a gradient.}$$

3.3.3 Assumptions

Let us give a few assumptions to be made to perform the analysis. We will need several quantities depending on A , Φ and μ to be finite. We will take a large number $M > 0$ that bounds all of them.

Assumption 3.3.5 (Assumptions on μ and Φ). We suppose that Φ is a power series on \mathbb{R}^d , *i.e.* there is $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^d} \in E^{\mathbb{N}^d}$ such that for all $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\Phi(w) = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} w^k a_k \tag{3.4}$$

where if $k = (k_1, \dots, k_d)$ and $w = (w_1, \dots, w_d)$, w^k stands for the real number $w_1^{k_1} \times \dots \times w_d^{k_d}$. We will also use the notation $|k| := k_1 + \dots + k_d$. Moreover, we suppose that there exists $r_0 > 0$ such that the following quantities are finite and bounded by M :

$$\int |\Phi(w)| d\mu(w) \leq M, \tag{3.5}$$

$$\int |d\Phi(w)| d\mu(w) \leq M, \tag{3.6}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^d, |k| \geq 1} |a_k| |k| \int (|w| + r_0)^{|k|-1} d\mu(w) \leq M, \tag{3.7}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^d, |k| \geq 2} |a_k| |k| (|k| - 1) \int (|w| + r_0)^{|k|-2} d\mu(w) \leq M. \tag{3.8}$$

These quantities are linked together: for instance, (3.7) clearly implies (3.6). However we will not develop much these links, especially since in all the physical models presented in the introduction, Φ is polynomial, and in that case, all these estimates hold with M big enough as soon as

$$\int |w|^p d\mu(w) < +\infty$$

where p is the degree of Φ . We will nevertheless write the proof for analytic Φ because the estimates are the same as in the polynomial case.

Assumption 3.3.6 (Assumptions on P). We suppose that A is real, which means in terms of its symbol P :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, \quad P(-n) = \overline{P(n)}, \quad (3.9)$$

where the conjugate is understood via the identification $\mathcal{L}(E^{\mathbb{C}}; \mathbb{C}) = \mathcal{L}(E; \mathbb{R})^{\mathbb{C}}$.

We also suppose that P is uniformly bounded:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}^d} |P(n)| \leq M. \quad (3.10)$$

This assumption will be crucial for the semi-group of the linearized operator to be continuous at our level of analytic regularity. It means that the force field should not involve more than one derivative of the macroscopic observable

$$\int \Phi(v^w) \rho^w \, d\mu(w).$$

3.3.4 Examples

Let us give E , Φ and P in our physical models.

- **The Vlasov-Poisson case.** Equation (1.54) has a straightforward multiphasic formulation of the form (3.2)-(3.3): we take $E = \mathbb{R}$, $\Phi \equiv 1$, $P(0) = 0$ and

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \quad P(n) = \frac{1}{|n|^2}.$$

- **The kinetic Euler case.** As explained in the introduction, we will not work directly with the kinetic Euler equation (1.47), but with the equation (1.53) where the pressure is the solution of an elliptic equation involving f . We will justify in Subsection (3.6.3) that when f_0 satisfies the two conditions (1.50) and (1.51), then our solutions are indeed solutions to (1.47).

Now (1.53) has a multiphasic version of the form (3.2)-(3.3): it suffices to take $E = \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\Phi : v \mapsto v \otimes v$, $P(0) = 0$ and

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \forall X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad P(n) \cdot X = -\frac{\langle n, X \cdot n \rangle}{|n|^2}.$$

- **The Vlasov-Benney case.** In the case of the Vlasov-Benney equation (1.63), we take $E = \mathbb{R}$, $\Phi \equiv 1$ and for all $n \in \mathbb{Z}^d$,

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, \quad P(n) = 1.$$

In these three cases, all the assumptions are easy to check.

3.4 The linearized system

In this section and in the following one, we study the multiphasic system (3.2) governed by the potential defined in (3.3) with the assumptions (3.5), (3.6) and (3.10). In this setting, defining

for all w $\rho^w \equiv 1$ and $v^w \equiv w$ leads to a stationary solution. The linearized system around this stationary solution is

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_t r^w(t, x) + w \cdot \nabla r^w(t, x) + \operatorname{div}(u^w(t, x)) = 0, \\ \forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_t u^w(t, x) + (w \cdot \nabla)u^w(t, x) = -\nabla V[\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)](x), \\ V[\mathbf{r}, \mathbf{u}](x) := A \left[\int \{ \Phi(w)r^w + d\Phi(w) \cdot u^w \} d\mu(w) \right] (x), \\ \forall w \in \mathbb{R}^d, \quad r^w|_{t=0} = r_0^w \text{ and } u^w|_{t=0} = u_0^w. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

3.4.1 Spectral analysis

We look for the exponential growing modes of system (3.11) *i.e.* the non-zero solutions of the form

$$\left\{ \begin{array}{l} r^w(t, x) = f(w) \exp(\lambda t) \exp(in \cdot x), \\ u^w(t, x) = g(w) \exp(\lambda t) \exp(in \cdot x). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

with $n \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\Re(\lambda) > 0$, and $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ and $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ in $L^\infty(\mu)$ (for V to be well defined thanks to (3.5) and (3.6)). Injecting this ansatz in (3.11), we get that for all $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + in \cdot w)f(w) = -in \cdot g(w), \\ (\lambda + in \cdot w)g(w) = -i \left(P(n) \cdot \int \{ \Phi(w')f(w') + d\Phi(w') \cdot g(w') \} d\mu(w') \right) n. \end{array} \right.$$

As a consequence, if (\mathbf{r}, \mathbf{u}) is a non-trivial solution, then $n \neq 0$ and

$$P(n) \cdot \int \{ \Phi(w')f(w') + d\Phi(w') \cdot g(w') \} d\mu(w') \neq 0.$$

Up to dividing f and g by this number, we can suppose that it is equal to 1. Then, we get for all w ,

$$f(w) = -\frac{|n|^2}{(\lambda + in \cdot w)^2} \quad \text{and} \quad g(w) = \frac{-in}{\lambda + in \cdot w}. \quad (3.13)$$

Such f and g are bounded.

Then, setting for all $w \in \mathbb{R}^d$

$$\Psi(n, \lambda, w) := \frac{\Phi(w)}{\lambda + in \cdot w},$$

we require:

$$\begin{aligned} 1 &= P(n) \cdot \int \{ \Phi(w)f(w) + d\Phi(w) \cdot g(w) \} d\mu(w) \\ &= P(n) \cdot \int \left\{ -\Phi(w) \frac{|n|^2}{(\lambda + in \cdot w)^2} - i \frac{d\Phi(w) \cdot n}{\lambda + in \cdot w} \right\} d\mu(w) \\ &= -iP(n) \cdot \int \left\{ -i\Phi(w) \frac{|n|^2}{(\lambda + in \cdot w)^2} + \frac{d\Phi(w) \cdot n}{\lambda + in \cdot w} \right\} d\mu(w) \\ &= -iP(n) \cdot \int \partial_w \Psi(n, \lambda, w) \cdot n d\mu(w) \\ &= -i \left(\int \partial_w \left\{ \frac{P(n) \cdot \Phi(w)}{\lambda + in \cdot w} \right\} \cdot n d\mu(w) \right). \end{aligned}$$

In particular, we get the following general Penrose condition:

$$\int \partial_w \left\{ \frac{P(n) \cdot \Phi(w)}{\lambda + in \cdot w} \right\} \cdot n \, d\mu(w) = i, \quad (3.14)$$

for instability to hold.

Conversely, if (3.14) holds for some $n \in \mathbb{Z}^d$ and $\Re(\lambda) > 0$, and if we define f and g by (3.13), then the exponential growing modes (3.12) are (classical, unstable) solutions to the linearized equation (3.11).

In the end, we have proved the following proposition.

Proposition 3.4.1. *System (3.11) admits exponential growing modes if and only if there exists $n \in \mathbb{Z}^d$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\lambda) > 0$ satisfying (3.14). In that case, f and g are given up to a scalar by (3.13).*

Consequently, we define what is an unstable profile in the following way.

Definition 3.4.2 (Unstable profile). We say that the probability measure μ on \mathbb{R}^d is unstable if there exist $n \in \mathbb{Z}^d$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\lambda) > 0$ such that (3.14) holds.

Remark 3.4.3. When (3.14) holds, with this choice of f and g , the potential takes a very simple form:

$$\begin{aligned} V[\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)](x) &= \left(P(n) \cdot \int \left\{ \Phi(w') f(w') + d\Phi(w') \cdot g(w') \right\} d\mu(w') \right) \exp(\lambda t) \exp(in \cdot x) \\ &= \exp(\lambda t) \exp(in \cdot x). \end{aligned}$$

Hence, it is natural to use this quantity to evaluate the size of our solutions, as it is done in Theorem 3.1.2 and Theorem 3.1.3.

Example 3.4.4. • In the case of the Vlasov-Poisson equation (1.54), (3.14) reads

$$\int \frac{d\mu(w)}{(\lambda + in \cdot w)^2} = -1. \quad (3.15)$$

as expected in (3.1) (with the correspondence $\lambda = -in \cdot \omega$). In particular, the multiphase formulation and the kinetic one have the exact same unstable eigenvalues.

- In the case of the kinetic Euler equation (1.53), (3.14) reads

$$\begin{aligned}
i &= \frac{1}{|n|^2} \int \partial_w \left\{ \frac{(in \cdot w)^2}{\lambda + in \cdot w} \right\} \cdot n \, d\mu(w) \\
&= \frac{1}{|n|^2} \int \left(\frac{-2|n|^2 n \cdot w}{\lambda + in \cdot w} + \frac{i|n|^2 (n \cdot w)^2}{(\lambda + in \cdot w)^2} \right) d\mu(w) \\
&= i \int \frac{2(\lambda + in \cdot w)in \cdot w + (n \cdot w)^2}{(\lambda + in \cdot w)^2} d\mu(w) \\
&= i \int \frac{2i\lambda n \cdot w - (n \cdot w)^2}{(\lambda + in \cdot w)^2} d\mu(w) \\
&= i \int \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda + in \cdot w)^2} \right) d\mu(w) \\
&= i - \lambda^2 i \int \frac{d\mu(w)}{(\lambda + in \cdot w)^2}.
\end{aligned}$$

So we get the expected Penrose condition in this context (see (1.90)).

$$\int \frac{d\mu(w)}{(\lambda + in \cdot w)^2} = 0. \tag{3.16}$$

- Finally, in the case of the Dirac-Benney system (1.63), similar computations show that (3.14) reads

$$\int \frac{|n|^2}{(\lambda + in \cdot w)^2} d\mu(w) = -1, \tag{3.17}$$

as in (1.90).

3.4.2 Definition of analytic norms

The purpose of Subsection 3.4.3 below will be to derive some bounds on the semigroup related to system (3.11) in analytic regularity. Let us introduce the analytic norms we will work with for the rest of the chapter. For these definitions, we follow Grenier [53]. Let us mention that this type of spaces have also been used in a very different context – but with the same kind of estimates – in the 90’s to study the rate of convergence of Galerkin approximations for semilinear parabolic PDEs. On this extensive topic, we refer for example to [44, 39, 43] and references therein.

Take $\delta > 0$, and f a function on \mathbb{T}^d . We say that f belongs to X_δ if it can be written for all $x \in \mathbb{T}^d$:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_n \exp(in \cdot x),$$

with

$$|f|_\delta := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}_n| \exp(\delta|n|) < +\infty.$$

Remark that this formula makes sense for f with value in \mathbb{R} , \mathbb{R}^d or E taking for $|\bullet|$ any norm on the corresponding vector space. So with a slight abuse of notations, we will still write $f \in X_\delta$ in all these cases.

Now, if $\mathbf{f} = (f^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ is a family of functions on \mathbb{T}^d , we say that \mathbf{f} belongs to \mathbf{X}_δ if it can be written for all $w \in \mathbb{R}^d$ and $x \in \mathbb{T}^d$:

$$f^w(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_n(w) \exp(in \cdot x)$$

with for all $n \in \mathbb{Z}^d$, $\hat{f}_n \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mu)$ and with

$$\|\mathbf{f}\|_\delta := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}_n|_\infty \exp(\delta|n|) < +\infty. \quad (3.18)$$

Once again, we keep the same notations for the values of f to be in \mathbb{R} , \mathbb{R}^d or E .

Finally, to gain space, if $\mathbf{r} = (r^w)_{w \in \mathbb{R}^d} \in \mathbf{X}_\delta$ is a family of functions from \mathbb{T}^d to \mathbb{R} and $\mathbf{u} = (u^w)_{w \in \mathbb{R}^d} \in \mathbf{X}_\delta$ is a family of functions from \mathbb{T}^d to \mathbb{R}^d , we write

$$\|(\mathbf{r}, \mathbf{u})\|_\delta := \max(\|\mathbf{r}\|_\delta, \|\mathbf{u}\|_\delta). \quad (3.19)$$

More generally, if \mathbf{f} and \mathbf{g} are two families of functions, $\|\mathbf{f}, \mathbf{g}\|_\delta$ will stand for the max between $\|\mathbf{f}\|_\delta$ and $\|\mathbf{g}\|_\delta$.

Remark that all the exponential growing modes found in the previous subsection belong for all t and all δ to \mathbf{X}_δ .

We also write

$$\mathbf{L}^\infty := L^\infty(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{R}^d).$$

Its norm is defined by

$$\forall(\hat{r}, \hat{u}) \in \mathbf{L}^\infty, \quad |(\hat{r}, \hat{u})|_\infty := \max(|\hat{r}|_\infty, |\hat{u}|_\infty).$$

With the same notation as before, we can see that

$$\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |(\hat{r}_n, \hat{u}_n)|_\infty \exp(\delta|n|) \leq \|(\mathbf{r}, \mathbf{u})\|_\delta \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |(\hat{r}_n, \hat{u}_n)|_\infty \exp(\delta|n|).$$

3.4.3 Sharp semigroup bounds

In this subsection, we will derive sharp estimates in analytic regularity for the semigroup corresponding to system (3.11). The philosophy for this result is the following: to build solutions to (3.2)-(3.3), we will consider the nonlinear part of the system as a perturbation of the linear part. As long as the linear part of the solution is small, we will be able to deduce that the perturbation is even smaller and to perform a fixed point proof. So we want the estimate on the semigroup to be sharp for the fixed point argument to work until the longest possible times. We work in analytic regularity because in general, the only bound that we can get for the spectrum of the linearized operator is the fact that the unstable spectrum increases proportionally with the frequency of the exponential growing modes, as stated in Proposition 3.4.5 below.

For each $n \in \mathbb{Z}^d$, we call

$$S_n := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ such that } \Re(\lambda) > 0 \text{ and the Penrose condition (3.14) holds}\}. \quad (3.20)$$

We already saw that S_0 is empty.

We also call

$$\begin{aligned}\Lambda_n(\lambda) &:= \int \partial_w \left\{ \frac{P(n) \cdot \Phi(w)}{\lambda + in \cdot w} \right\} \cdot n \, d\mu(w) \\ &= iP(n) \cdot \int \left\{ -\Phi(w) \frac{|n|^2}{(\lambda + in \cdot w)^2} - i \frac{d\Phi(w) \cdot n}{\lambda + in \cdot w} \right\} d\mu(w).\end{aligned}\tag{3.21}$$

The first observation to be made is that under condition (3.10), the size of S_n does not grow too much with n . More precisely, we have the following proposition.

Proposition 3.4.5. *We have:*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \sup_{\lambda \in S_n} \frac{\Re(\lambda)}{|n|} < +\infty.$$

Proof. For $n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, we call

$$\widetilde{S}_n := \{l \in \mathbb{C} \text{ such that } |n|l \in S_n\}.$$

Now for all $n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, for all $w \in \mathbb{R}^d$ and for all $l \in \mathbb{C}$ such that $\Re(l) > 0$, using (3.10),

$$\begin{aligned}\left| \partial_w \left\{ \frac{P(n) \cdot \Phi(x)}{|n|l + in \cdot w} \right\} \cdot n \right| &\leq |P(n)| \left\{ \frac{|d\Phi(w)|}{\Re(l)} + \frac{|\Phi(w)|}{\Re(l)^2} \right\} \\ &\leq M \left\{ \frac{|d\Phi(w)|}{\Re(l)} + \frac{|\Phi(w)|}{\Re(l)^2} \right\}\end{aligned}$$

In particular, integrating with respect to μ and using (3.5), (3.6) and (3.21) leads to

$$|\Lambda_n(|n|l)| \leq \frac{M^2}{\Re(l)} + \frac{M^2}{\Re(l)^2} \xrightarrow{\Re(l) \rightarrow +\infty} 0.$$

As a consequence, there is $C > 0$ (independent of n) such that if $\Re(l) \geq C$, then for any $n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, the modulus of $\Lambda_n(|n|l)$ is lower than $1/2$, and so the Penrose condition (3.14) cannot hold with $\lambda = |n|l$. \square

Form now on, we suppose that μ is unstable, that is $\cup_{n \in \mathbb{Z}^d} S_n \neq \emptyset$. We set

$$\gamma_0 := \sup_{n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \sup_{\lambda \in S_n} \frac{\Re(\lambda)}{|n|} > 0.\tag{3.22}$$

The rest of this subsection will be devoted to the proof of the following theorem.

Theorem 3.4.6. *Let $\delta_0 > 0$ and $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbf{X}_{\delta_0}$. There exists a unique classical solution $(\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t))$ to (3.11) at time $t \in [0, \delta_0/\gamma_0)$ starting from $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$. It satisfies the following properties:*

- for all $\gamma > \gamma_0$, there exists C only depending on M and γ (and not δ_0 nor $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$) such that for all $t \leq \delta_0/\gamma$,

$$\|(\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t))\|_{\delta_0 - \gamma t} \leq C \|(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)\|_{\delta_0}.$$

- for all $\delta < \delta_0$, the map

$$t \in \left[0, \frac{\delta_0 - \delta}{\gamma_0}\right) \mapsto (\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)) \in \mathbf{X}_\delta$$

is continuous,

- if $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbf{L}_0$ (defined in Definition 3.3.4), then this property is propagated: for all $t < \delta_0/\gamma_0$, $(\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)) \in \mathbf{L}_0$.

Remark 3.4.7. If we write

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)) =: S_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0), \quad (3.23)$$

then the theorem shows that

$$\|S_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)\|_{\delta_0 - \gamma t} \leq C \|(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)\|_{\delta_0}. \quad (3.24)$$

Proof. Take γ , δ and $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$ as in the statement of Theorem 3.4.6.

Let $(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = ((t, x) \mapsto r^w(t, x), u^w(t, x))_{w \in \mathbb{R}^d}$ be a time dependent family of C^1 functions. For all $n \in \mathbb{Z}^d$, we call $\hat{\mathbf{r}}_n = (\hat{r}_n(t, w))$ and $\hat{\mathbf{u}}_n = (\hat{u}_n(t, w))$ the Fourier coefficients of these functions, so that for all (t, x, w) ,

$$r^w(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{r}_n(t, w) \exp(in \cdot x) \quad \text{and} \quad u^w(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}_n(t, w) \exp(in \cdot x). \quad (3.25)$$

Then (\mathbf{r}, \mathbf{u}) is a solution to (3.11) if and only if for all $n \in \mathbb{Z}^d$ and $w \in \mathbb{R}^d$, the pair $(\hat{\mathbf{r}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)$ is a solution to

$$\begin{cases} \partial_t \begin{bmatrix} \hat{r}_n(t, w) \\ \hat{u}_n(t, w) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} n \cdot w & n \\ 0 & n \cdot w \text{Id}_{\mathbb{R}^d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{r}_n(t, w) \\ \hat{u}_n(t, w) \end{bmatrix} = I_n(\hat{\mathbf{r}}_n(t), \hat{\mathbf{u}}_n(t)) \begin{bmatrix} 0 \\ -in \end{bmatrix}, \\ \hat{r}_n(0, w) \text{ and } \hat{u}_n(0, w) \text{ are the } n\text{th Fourier coefficients of } r_0^w \text{ and } u_0^w, \end{cases} \quad (3.26)$$

with

$$I_n(\hat{\mathbf{r}}_n(t), \hat{\mathbf{u}}_n(t)) := P(n) \cdot \int \{ \Phi(w') \hat{r}_n(t, w') + d\Phi(w') \cdot \hat{u}_n(t, w') \} d\mu(w').$$

Now it suffices to show the following lemma.

Lemma 3.4.8. *For each $n \in \mathbb{Z}^d$, equation (3.26) admits a unique solution $(\hat{\mathbf{r}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)$ for all times and it is a continuous map from \mathbb{R}_+ to \mathbf{L}^∞ .*

Moreover, for all $\gamma > \gamma_0$, there exists C only depending on M and γ such that this solution satisfies

$$\|(\hat{\mathbf{r}}_n(t), \hat{\mathbf{u}}_n(t))\|_\infty \leq C \|(\hat{\mathbf{r}}_n(0), \hat{\mathbf{u}}_n(0))\|_\infty \exp(\gamma|n|t).$$

Indeed, if the lemma is true, the unique classical solution to (3.11) is given by (3.25) with $(\hat{\mathbf{r}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)$ given by the lemma. Then, if $\gamma > \gamma_0$, by the lemma, we can find C only depending on M and γ such that for all $t \leq \delta_0/\gamma$,

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t))\|_{\delta_0 - \gamma t} &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|(\hat{\mathbf{r}}_n(t), \hat{\mathbf{u}}_n(t))\|_\infty \exp(\{\delta_0 - \gamma t\}|n|) \\ &\leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|(\hat{\mathbf{r}}_n(0), \hat{\mathbf{u}}_n(0))\|_\infty \exp(\delta_0|n|) \\ &\leq C \|(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)\|_{\delta_0}. \end{aligned}$$

Hence, the first point of Theorem 3.4.6 is proved.

For the second point, let $\delta < \delta_0$ and $T < (\delta_0 - \delta)/\gamma_0$. It suffices to prove that

$$t \in [0, T] \mapsto (\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)) \in \mathbf{X}_\delta$$

is continuous. Take C as given by Lemma 3.4.8 with $\gamma := (\delta_0 - \delta)/T$. If $t \in [0, T]$, we need to prove:

$$\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in [0, T]}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |(\hat{\mathbf{r}}_n(s), \hat{\mathbf{u}}_n(s)) - (\hat{\mathbf{r}}_n(t), \hat{\mathbf{u}}_n(t))|_\infty \exp(\delta|n|) = 0.$$

But on the one hand, for all $n \in \mathbb{Z}^d$, $(\hat{\mathbf{r}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)$ is continuous in \mathbf{L}^∞ , so that each term of the sum tends to 0. On the other hand, for all $n \in \mathbb{Z}^d$ and $s \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |(\hat{\mathbf{r}}_n(s), \hat{\mathbf{u}}_n(s))|_\infty \exp(\delta|n|) &\leq C |(\hat{\mathbf{r}}_n(0), \hat{\mathbf{u}}_n(0))|_\infty \exp(\gamma|n|s) \exp(\delta|n|) \\ &\leq C |(\hat{\mathbf{r}}_n(0), \hat{\mathbf{u}}_n(0))|_\infty \exp(\gamma|n|T) \exp(\delta|n|) \\ &= C |(\hat{\mathbf{r}}_n(0), \hat{\mathbf{u}}_n(0))|_\infty \exp(\delta_0|n|) \end{aligned}$$

where the last line is obtained by definition of γ . This bound does not depend on s and is summable with respect to n . So the dominated convergence theorem applies and the result follows.

Finally, $S_t \mathbf{L}_0 \subset \mathbf{L}_0$ is a consequence of the fact that the first equation for $n = 0$ reduces to:

$$\partial_t \hat{\mathbf{r}}_0(t, w) = 0,$$

and that the second equation for any $n \in \mathbb{Z}^d$ ensures that for all t and w , the vector $\partial_t \hat{\mathbf{u}}_n(t, w) + in \cdot w \hat{\mathbf{u}}_n(t, w)$ is collinear with n . \square

In order to prove Lemma 3.4.8, we need to state a result for the family of holomorphic functions $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ (which was defined in (3.21)). By the definition (3.22) of γ_0 , we already know that if $n \in \mathbb{Z}^d$ and λ is such that $\Re(\lambda) > \gamma_0|n|$, then $\Lambda_n(\lambda) \neq i$. We need a stronger result, which tells that if $\Re(\lambda) \geq \gamma|n| > \gamma_0|n|$, then $\Lambda_n(\lambda)$ stays far from i uniformly in n and $\Im(\lambda)$. This is the content of the following proposition. We postpone its proof to the end of the subsection.

Proposition 3.4.9. *For all $\gamma > \gamma_0$, there exists $\delta > 0$ such that for all $n \in \mathbb{Z}^d$, for all λ with $\Re(\lambda) \geq \gamma|n|$,*

$$|\Lambda_n(\lambda) - i| \geq \delta.$$

Proof of Lemma 3.4.8. We fix $n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ (there is no evolution for $n = 0$, so the inequality is trivially true). To lighten the notations, we denote by $\alpha = (\alpha(t, w))$ and $\beta = (\beta(t, w))$ the functions that will play the roles of $(\hat{\mathbf{r}}_n^w(t))$ and $(\hat{\mathbf{u}}_n^w(t))$. More precisely, given $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbf{L}^\infty$, we look for solutions to

$$\begin{cases} \partial_t \begin{bmatrix} \alpha(t, w) \\ \beta(t, w) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} n \cdot w & n \\ 0 & n \cdot w \text{Id}_{\mathbb{R}^d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha(t, w) \\ \beta(t, w) \end{bmatrix} = I_n(\alpha(t), \beta(t)) \begin{bmatrix} 0 \\ -in \end{bmatrix}, \\ \alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{and} \quad \beta(0) = \beta_0, \end{cases} \quad (3.27)$$

with

$$I_n(\alpha(t), \beta(t)) := P(n) \cdot \int \{ \Phi(w') \alpha(t, w') + d\Phi(w') \cdot \beta(t, w') \} d\mu(w'). \quad (3.28)$$

($\alpha(t)$ and $\beta(t)$ are notations for $\alpha(t, \bullet)$ and $\beta(t, \bullet)$ respectively.)

It is easy to see that this equation generates a C_0 semigroup on \mathbf{L}^∞ . Indeed, call

$$\begin{aligned} A_n(w) &:= -i \begin{bmatrix} n \cdot w & n \\ 0 & n \cdot w \text{Id}_{\mathbb{R}^d} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_n : (\alpha, \beta) \in \mathcal{D}(\mathbf{A}_n) &\mapsto A_n(w) \cdot \begin{bmatrix} \alpha(w) \\ \beta(w) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_n : (\alpha, \beta) \in \mathbf{L}^\infty &\mapsto I_n(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} 0 \\ -in \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(The domain $\mathcal{D}(\mathbf{A}_n)$ is the set of couples $(\alpha, \beta) \in \mathbf{L}^\infty$ for which the formula in the definition of \mathbf{A}_n provides an element of \mathbf{L}^∞). Then, Equation (3.27) can be reformulated as

$$\partial_t(\alpha(t), \beta(t)) = \mathbf{A}_n \cdot (\alpha(t), \beta(t)) + \mathbf{B}_n \cdot (\alpha(t), \beta(t)).$$

But on the one hand, \mathbf{A}_n generates the C_0 semigroup $(e^{t\mathbf{A}_n})_{t \in \mathbb{R}_+}$ with for all $t \in \mathbb{R}_+$, for all $(\alpha, \beta) \in \mathbf{L}^\infty$ and for all $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}_n} \cdot (\alpha, \beta)(w) &= \exp(tA_n(w)) \cdot \begin{bmatrix} \alpha(w) \\ \beta(w) \end{bmatrix} \\ &= \exp(-itn \cdot w) \begin{bmatrix} 1 & -itn \\ 0 & \text{Id}_{\mathbb{R}^d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha(w) \\ \beta(w) \end{bmatrix} \\ &= \exp(-itn \cdot w) \begin{bmatrix} \alpha(w) - itn \cdot \beta(w) \\ \beta(w) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Remark the following estimate of the operator norm of $e^{t\mathbf{A}_n}$:

$$\|e^{t\mathbf{A}_n}\| \leq 1 + t|n|. \quad (3.29)$$

On the other hand, \mathbf{B}_n is bounded on \mathbf{L}^∞ and its operator norm satisfies

$$\|\mathbf{B}_n\| \leq K|n|$$

where K only depends on M .

Thus, by [80, Chapter 3, Theorem 1.1], $\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n$ is the infinitesimal generator of a C_0 semigroup $(e^{t(\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n)})_{t \in \mathbb{R}_+}$ on \mathbf{L}^∞ , and taking a slightly bigger K , for all $t \geq 0$,

$$\|e^{t(\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n)}\| \leq \exp(K|n|t).$$

The continuity property stated in Lemma 3.4.8 follows. The aim is now to lower the constant K down to any $\gamma > \gamma_0$ up to adding a multiplicative constant.

We fix $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbf{L}^\infty$. We will compute the Laplace transform $p \mapsto H[p]$ of

$$h : t \mapsto \left(e^{t(\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n)} - e^{t\mathbf{A}_n} \right) \cdot (\alpha_0, \beta_0) = \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}_n} \cdot \mathbf{B}_n \cdot (\alpha(s), \beta(s)) \, ds \in \mathbf{L}^\infty.$$

With the previous estimate, we can classically (see for example the proof of [80, Chapter 3, Theorem 5.3]) deduce that the Laplace transform F of $(e^{t(\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n)})$ is its resolvent, namely for all $p \in \mathbb{C}$ with $\Re(p) > K|n|$,

$$F[p] := \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{t(\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n)} \cdot (\alpha_0, \beta_0) dt \in \mathcal{D}(\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n) \left(= \mathcal{D}(\mathbf{A}_n) \right),$$

$$\text{and } \left(p \text{Id}_{L^\infty} - (\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n) \right) \cdot F[p] = (\alpha_0, \beta_0). \quad (3.30)$$

In the same way, thanks to (3.29), for all $p \in \mathbb{C}$ with $\Re(p) > 0$ (remark that if $\omega > 0$, then $1 + t|n| \leq (1 + |n|/\omega)e^{\omega t}$),

$$G[p] := \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{t\mathbf{A}_n} \cdot (\alpha_0, \beta_0) dt \in \mathcal{D}(\mathbf{A}_n),$$

$$\text{and } \left(p \text{Id}_{L^\infty} - \mathbf{A}_n \right) G[p] = (\alpha_0, \beta_0). \quad (3.31)$$

But then, solving the resolvent equations (3.31) and (3.30), we easily find that for all $p \in \mathbb{C}$ with $\Re(p) > K|n| > 1$,

$$G[p](w) = \left[\begin{array}{c} \frac{\alpha_0(w)}{p + in \cdot w} - \frac{in \cdot \beta_0(w)}{(p + in \cdot w)^2} \\ \frac{\beta_0(w)}{p + in \cdot w} \end{array} \right], \quad (3.32)$$

$$F[p](w) = G[p](w) + I_n(F[p]) \left[\begin{array}{c} \frac{-|n|^2}{(p + in \cdot w)^2} \\ \frac{-in}{p + in \cdot w} \end{array} \right]. \quad (3.33)$$

Applying iI_n to (3.33), we get by the definition of I_n in (3.28) and by the definition of $\Lambda_n(p)$ in (3.21):

$$\left(i - \Lambda_n(p) \right) I_n(F[p]) = iI_n(G[p]).$$

But as soon as $\Re(p) > \gamma_0|n|$, one must have $\Lambda_n(p) \neq i$, and

$$I_n(F[p]) = \frac{i}{i - \Lambda_n(p)} I_n(G[p])$$

Finally, we get (at least when $\Re(p) > K|n|$)

$$H[p](w) = F[p](w) - G[p](w) = \frac{i}{i - \Lambda_n(p)} I_n(G[p]) \left[\begin{array}{c} \frac{-|n|^2}{(p + in \cdot w)^2} \\ \frac{-in}{p + in \cdot w} \end{array} \right].$$

But this expression is well defined and analytic in p on $\{p \in \mathbb{C} \mid \Re(p) > \gamma_0|n|\}$. We keep the notation $H[p]$ in this domain.

In addition, if $\gamma > \gamma_0$, we have the following estimates.

- By Proposition 3.4.9, there is $\delta > 0$ only depending on γ such that for all $n \in \mathbb{Z}^d$, for all p with $\Re(p) \geq \gamma|n|$,

$$|\Lambda_n(p) - i| \geq \delta.$$

- Now we give an estimate for $H[p](w)$ when $\Re(p) \geq \gamma|n|$ and $w \in \mathbb{R}^d$. We just use the previous consideration, the fact that when $\Re(p) \geq \gamma|n|$, then $|p + in \cdot w| \geq \gamma|n|$ and the formulae for I_n , (3.28) and for $G[p](w)$, (3.32). In the following computation, \lesssim means "lower than, up to a multiplicative constant which only depends on M and γ ". We have:

$$\begin{aligned} |H[p](w)| &= \left| \frac{i}{i - \Lambda_n(p)} \right| \times |I_n(G[p])| \times \left| \left[\begin{array}{c} -|n|^2 \\ (p + in \cdot w)^2 \\ -in \\ p + in \cdot w \end{array} \right] \right| \\ &\lesssim |I_n(G[p])| \times \frac{|n|}{|p + in \cdot w|} \\ &= \frac{|n|}{|p + in \cdot w|} \left| \int \left\{ \Phi(w') \left(\frac{\alpha_0(w')}{p + in \cdot w'} - \frac{in \cdot \beta_0(w')}{(p + in \cdot w')^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{d\Phi(w') \cdot \beta_0(w')}{p + in \cdot w'} \right\} d\mu(w') \right| \\ &\lesssim \frac{|n|}{|p + in \cdot w|} \left(\int \frac{|\Phi(w')| + |d\Phi(w')|}{|p + in \cdot w'|} d\mu(w') \right) |(\alpha_0, \beta_0)|_\infty. \end{aligned} \quad (3.34)$$

- There exists C only depending on M and γ (and not depending on w) such that for all $\gamma \geq \gamma_0$ and for all $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{|\Phi(w')| + |d\Phi(w')|}{|\gamma|n| + i(q + n \cdot w)| |\gamma|n| + i(q + n \cdot w')|} d\mu(w') dq \leq \frac{C}{|n|}. \quad (3.35)$$

This is an easy consequence of the explicit computation

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{|\gamma|n| + i(q + n \cdot w)| |\gamma|n| + i(q + n \cdot w')|} \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{(\gamma|n| + |q + n \cdot w|)(\gamma|n| + |q + n \cdot w'|)} \\ &= \frac{8}{\gamma|n|} \frac{1 + Q \log(1 + Q)}{2 + Q} \frac{1}{Q} \text{ with } Q = \frac{|n \cdot w - n \cdot w'|}{\gamma|n|} \\ &\leq \frac{8}{\gamma|n|}. \end{aligned}$$

As a consequence, gathering (3.34) and (3.35), we get that for all $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_{\gamma|n|-i\infty}^{\gamma|n|+i\infty} |H[p](w)| dp = \int_{-\infty}^{+\infty} |H[\gamma|n| + iq](w)| dq \leq C |(\alpha_0, \beta_0)|_\infty, \quad (3.36)$$

with C only depending on M and γ . Therefore, the abscissa of convergence of h is lower or equal to $\gamma_0|n|$, and the inverse Laplace transform formula applies, that is for all $\gamma > \gamma_0$ and $t \geq 0$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma|n|-i\infty}^{\gamma|n|+i\infty} e^{pt} H[p] dp \\ &= \frac{e^{\gamma|n|t}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} H[\gamma|n| + iq] dq, \end{aligned}$$

and by (3.36),

$$\begin{aligned} |h(t)|_\infty &\leq \frac{e^{\gamma|n|t}}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |H[\gamma|n| + iq]| dq \right|_\infty \\ &\leq C e^{\gamma|n|t} |(\alpha_0, \beta_0)|_\infty, \end{aligned} \tag{3.37}$$

where C only depends on M and γ . But

$$(\alpha(t), \beta(t)) = e^{t(\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n)}(\alpha_0, \beta_0) = e^{t\mathbf{A}_n}(\alpha_0, \beta_0) + h(t).$$

Hence, we get the result by gathering (3.29) and (3.37) \square

We now prove Proposition 3.4.9.

Proof of Proposition 3.4.9. Defining the variable ξ by the formula, $\lambda = |n|\xi$, we define for all $n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, for all ξ with $\Re(\xi) > 0$,

$$F_n(\xi) := \Lambda_n(|n|\xi) = -iP(n) \cdot \int \left\{ \frac{\Phi(w)}{(\xi + iu_n \cdot w)^2} + i \frac{d\Phi(w) \cdot u_n}{\xi + iu_n \cdot w} \right\} d\mu(w),$$

where u_n stands for the vector of the sphere $n/|n| \in \mathbb{S}^{d-1}$. All these functions are holomorphic on the half-plane

$$\mathbb{C}_+^* := \{\xi \in \mathbb{C} \text{ such that } \Re(\xi) > 0\}.$$

We know that for all $\xi \in \mathbb{C}$ satisfying $\Re(\xi) > \gamma_0$, for all $n \in \mathbb{Z}^d$, $F_n(\xi) \neq i$, and the goal is to prove that for all $\gamma > \gamma_0$, there exists $\delta > 0$ such that if $\xi \in \mathbb{C}$ satisfies $\Re(\xi) \geq \gamma$, then $|F_n(\xi) - i| \geq \delta$.

By contradiction, if the result does not hold, we can find $\gamma > \gamma_0$, $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}$ and $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ with for all $k \in \mathbb{N}$, $\Re(\xi_k) \geq \gamma$ such that

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F_{n_k}(\xi_k) = i.$$

We show in several steps that this leads to a contradiction.

Step one: $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded.

For all $w \in \mathbb{R}^d$ and all $\xi = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ with $\Re(\xi) = \alpha \geq \gamma$, we define the nonnegative function

$$H(\xi, w) := \frac{|\Phi(w)|}{\alpha^2 + (|\beta| - |w|)^2} + \frac{|d\Phi(w)|}{\sqrt{\alpha^2 + (|\beta| - |w|)^2}}.$$

On the one hand, for all $w \in \mathbb{R}^d$,

$$H(\xi, w) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow +\infty} 0,$$

and on the other hand for all ξ with $\Re(\xi) \geq \gamma$ and $w \in \mathbb{R}^d$,

$$H(\xi, w) \leq \frac{|\Phi(w)|}{\gamma^2} + \frac{|\mathrm{d}\Phi(w)|}{\gamma} \in L^1(\mu).$$

Hence, the dominated convergence theorem applies and

$$\int H(\xi, w) \mathrm{d}\mu(w) \xrightarrow[\Re(\xi) \geq \gamma]{|\xi| \rightarrow +\infty} 0.$$

We conclude step one remarking that because of (3.10), for all $n \in \mathbb{Z}^d$ and $\xi \in \mathbb{C}_+^*$,

$$|F_n(\xi)| \leq M \int H(\xi, w) \mathrm{d}\mu(w). \quad (3.38)$$

So as

$$|F_{n_k}(\xi_k)| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1,$$

(ξ_k) must be bounded.

Step two: convergence to a non constant holomorphic function.

Up to an extraction, we can suppose that as k tends to $+\infty$, $\xi_k \rightarrow \xi_\infty$ with $\Re(\xi_\infty) \geq \gamma$, $u_{n_k} \rightarrow u \in \mathbb{S}^{d-1}$ and $P(n_k) \rightarrow P \in \mathcal{L}(E^{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$ (with $\|P\| \leq M$, thanks to (3.10)). Then, by the dominated convergence theorem, $(F_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converges pointwise to F defined for all $\xi \in \mathbb{C}_+^*$ by

$$F(\xi) := -iP \cdot \int \left\{ \frac{\Phi(w)}{(\xi + iu \cdot w)^2} + i \frac{\mathrm{d}\Phi(w) \cdot u}{\xi + iu \cdot w} \right\} \mathrm{d}\mu(w).$$

Furthermore, because of Montel's theorem, this convergence is locally uniform on \mathbb{C}_+^* . In particular,

$$F(\xi_\infty) = \lim_{k \rightarrow +\infty} F_{n_k}(\xi_k) = i.$$

Moreover, because of (3.38),

$$F(\xi) \xrightarrow[\Re(\xi) \geq \gamma]{|\xi| \rightarrow +\infty} 0.$$

So F cannot be constant.

Step three: conclusion applying Rouché's theorem.

If $\xi \in \mathbb{C}$ and $r > 0$, we denote by $\mathcal{D}(\xi, r)$ the closed disk centered at ξ and of radius r , and $\mathcal{C}(\xi, r) = \partial\mathcal{D}(\xi, r)$ the circle centered at ξ and of radius r . Chose $r > 0$ such that:

- for all $\xi \in \mathcal{D}(\xi_\infty, r)$, $\Re(\xi) > \gamma_0$,
- the only zero of $F - i$ in $\mathcal{D}(\xi_\infty, r)$ is ξ_∞ .

Call

$$a := \inf_{\xi \in \mathcal{C}(\xi_\infty, r)} |F(\xi)|.$$

If k is sufficiently large because of the locally uniform convergence of (F_{n_k}) toward F ,

$$\sup_{\xi \in \mathcal{C}(\xi_\infty, r)} |F_{n_k}(\xi) - F(\xi)| < a,$$

so Rouché's theorem applies. For such a k , $F_{n_k} - i$ and $F - i$ have the same number of zeroes (counted with multiplicity) on $\mathcal{D}(\xi_\infty, r)$. So $F_{n_k} - i$ cancels at least once on $\mathcal{D}(\xi_\infty, r)$, and so there exists ξ with $\Re(\xi) > \gamma_0$ such that $F_{n_k}(\xi) = i$, which contradicts the definition of γ_0 . \square

3.5 Nonlinear instability

3.5.1 Statement of the main result

The purpose of this subsection is to prove the existence of solutions to the nonlinear system (3.2)-(3.3) for any initial data in the neighborhood of an unstable stationary solution. The nonlinear system is viewed as a perturbation of the linearized system (3.11) for which Theorem 3.4.6 gives the existence of solutions.

Fix $\delta_0 > 0$, consider γ_0 as defined in (3.22) and suppose $\gamma_0 > 0$. The initial condition will be taken of the form

$$(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{v}_0) = (\mathbf{1} + \mathbf{r}_0, \mathbf{w} + \mathbf{u}_0),$$

with $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbf{L}_0$ and $(\nabla \mathbf{r}_0, \nabla \mathbf{u}_0) \in X_{\delta_0}$ for some $\delta_0 > 0$.

We look for solutions of the form

$$\rho^w(t, x) = 1 + r^w(t, x) + \sigma^w(t, x), \quad v^w(t, x) = w + u^w(t, x) + \xi^w(t, x) \quad (3.39)$$

where here and in the whole section, (\mathbf{r}, \mathbf{u}) is a solution to the linear problem: $(\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)) = S_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$, and where $(\boldsymbol{\sigma}(0), \boldsymbol{\xi}(0)) = 0$.

Injecting this ansatz in (3.2)-(3.3), we find that $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ must be solution to the following system (where we omit the dependence of each function in (t, x) to gain space, and where the equations must hold for all $w \in \mathbb{R}^d$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \sigma^w + w \cdot \nabla \sigma^w + \operatorname{div}(\xi^w) = -\operatorname{div}\left((r^w + \sigma^w)(u^w + \xi^w)\right), \\ \partial_t \xi^w + (w \cdot \nabla) \xi^w = -\nabla V[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}] - \nabla W_{\mathbf{r}, \mathbf{u}}[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}] - \left[(u^w + \xi^w) \cdot \nabla\right](u^w + \xi^w), \\ V[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}] := A \left[\int \left\{ \Phi(w) \sigma^w + d\Phi(w) \cdot \xi^w \right\} d\mu(w) \right], \\ W_{\mathbf{r}, \mathbf{u}}[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}] := A \left[\int \left\{ \Phi(w + u^w + \xi^w) - \Phi(w) \right\} (r^w + \sigma^w) d\mu(w) \right] \\ + A \left[\int \left\{ \Phi(w + u^w + \xi^w) - \Phi(w) - d\Phi(w) \cdot (u^w + \xi^w) \right\} d\mu(w) \right], \\ \sigma^w|_{t=0} = 0 \text{ and } \xi^w|_{t=0} = 0. \end{array} \right. \quad (3.40)$$

As expected, we recognize the linear system (3.11) plus terms that are at least quadratic. So we give a Duhamel formulation of this system which is clearly equivalent at the level of regularity at which we work

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(t) \end{bmatrix} = \int_0^t S_{t-s} \begin{bmatrix} -\operatorname{div}\left((\mathbf{r}(s) + \boldsymbol{\sigma}(s))(\mathbf{u}(s) + \boldsymbol{\xi}(s))\right) \\ -\nabla W_{\mathbf{r}, \mathbf{u}}[\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\xi}(s)] - \left[(\mathbf{u}(s) + \boldsymbol{\xi}(s)) \cdot \nabla\right](\mathbf{u}(s) + \boldsymbol{\xi}(s)) \end{bmatrix} ds. \quad (3.41)$$

The derivatives are taken pointwise in w : for instance, the notation $\operatorname{div}(\mathbf{v})$ stands for $(\operatorname{div} v^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$. We have written the couples of density and velocity fields in column to gain space.

We will prove the following theorem of existence in the spaces $(\mathbf{X}_\delta)_{\delta > 0}$ defined in Subsection 3.4.2.

Theorem 3.5.1. *Suppose that μ is unstable as defined in Definition 3.4.2, so that γ_0 defined in (3.22) is positive. Take $\Gamma > \gamma_0$.*

Then there exists $\varepsilon_0 > 0$ only depending on Γ , r_0 and M (the last two appearing in (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) and (3.10)), such that for all $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbf{L}_0$ (defined in definition (3.3.4)), if there is $\delta_0 > 0$ such that

$$\|\mathbf{D}\mathbf{r}_0, \mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_{\delta_0} \leq \varepsilon_0, \quad (3.42)$$

then:

- (3.41) admits a solution $(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\xi}(t)) \in \mathbf{L}_0$ for $t \in [0, \delta_0/\Gamma]$,
- for all $\delta < \delta_0$, $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ is continuous from $[0, (\delta_0 - \delta)/\Gamma]$ to \mathbf{X}_δ ,
- there holds:

$$\sup_{t \leq \delta_0/\Gamma} \|\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\xi}(t)\|_{\delta_0 - \Gamma t} \leq \frac{\|\mathbf{D}\mathbf{r}_0, \mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_{\delta_0}^2}{\varepsilon_0}. \quad (3.43)$$

Moreover, this solution is unique in the class of analytic solutions: if $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})$ is a solution to (3.41) which is continuous from $[0, T]$ to \mathbf{X}_δ for some $T \leq \delta_0/\Gamma$ and $\delta > 0$, then for all $t \in [0, T]$, $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)) = (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$.

Consequently, for such $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$, δ_0 and Γ , equations (3.2)-(3.3) admit a unique analytic solution $(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{v}(t))$ of the form (3.39) with

$$\boldsymbol{\rho}_0 = 1 + \mathbf{r}_0 \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_0 = w + \mathbf{u}_0,$$

and we can estimate thanks to (3.43) the distance between the linear solution and the nonlinear one.

Finally, $(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{v}(t))$ stays real if $(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{v}_0)$ is real, and $\boldsymbol{\rho}(t)$ stays nonnegative if $\boldsymbol{\rho}_0$ is nonnegative.

Remark 3.5.2. • This is an existence result in a neighborhood of the stationary solution: for any initial data (in \mathbf{L}_0) sufficiently close to the stationary solution, we are able to find a local in time solution to (3.2)-(3.3). In fact, we could even drop the condition $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbf{L}_0$ if we were not interested in finding the best time of existence that is possible with this method.

- The notation $\|\mathbf{D}\mathbf{f}\|_\delta$ stands for the analytic norm of the differential of \mathbf{f} , uniformly on w . We give a more precise definition in Definition 3.5.3 below.
- If $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbf{L}_0$ and $\delta_0 > 0$, then

$$\|\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0\|_{\delta_0} \leq \|\mathbf{D}\mathbf{r}_0, \mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_{\delta_0}. \quad (3.44)$$

In particular, (3.42) implies $\|\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0\|_{\delta_0} \leq \varepsilon_0$. This remark will be useful in the following.

- In the Vlasov-Poisson case, the result by Loeper [73, Theorem 1.2] asserts that there is at most one distributional solution (in space and velocity) with bounded macroscopic density. Compared to this result, the uniqueness part of our theorem is very weak: *one reformulation* of the problem (the multiphase system) admits a unique *analytic* solution. However, in the other cases, the uniqueness of solutions with low regularity in the velocity variable is an open question.

The proof is based on a fixed point argument in the Duhamel formulation (3.41). To perform it, we will first list a few standard (but useful) properties of the family of norms $(\|\bullet\|_\delta)_{\delta \geq 0}$ defined in (3.18). Secondly, we will use these properties to derive estimates on the source term in Equation (3.41). We will then show a version of the Cauchy-Kovalevskia theorem, very close to the one due to Caffisch in [30]. But we will have to take into account the loss of regularity due to the presence of S_{t-s} in (3.41) (as already done in [53, 61]). Also, for the first time to our knowledge, our proof allows to get ε_0 independent of δ_0 . It is interesting since if $(\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t))$ is an exponential growing mode of frequency $n \in \mathbb{Z}^d$ and $c \in \mathbb{R}$, as a function of δ ,

$$\|c \mathbf{D}\mathbf{r}_0, c \mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_\delta \propto c|n| \exp(|n|\delta).$$

Therefore, we have a precise control on the best δ (and corresponding T) we can take for a given c : once Γ is fixed, ε_0 is fixed and we can get solutions starting from $c(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$ up to time $T = \delta/\Gamma$ as soon as $c|n| \exp(|n|\delta) \lesssim \varepsilon_0$, that is

$$T \propto -\frac{\log c}{|n|}.$$

(Usually, ε_0 is a decreasing function of δ , and consequently, the condition of existence $c \exp(|n|\delta) \lesssim \varepsilon_0(\delta)$ is stronger.) Therefore, (3.42) can be seen as a balance between the size of the initial condition and the time of existence given by the theorem. This is useful when we want to get large times of existence, as we will need in the Vlasov-Poisson case. To get this result, we will have to take advantage of the fact that a solution starting from \mathbf{L}_0 stays in \mathbf{L}_0 . We will then be able to use Lemma 3.5.9 below. We will finally apply this theorem to the proof of Theorem 3.5.1 thanks to the estimates that were previously derived.

3.5.2 Properties of the analytic norms

The following properties are basic tools when working with the analytic norms defined in Subsection 3.4.2 (at least the first ones), and most of the proofs can for example be found in [53, 43]. However, we will recall them in Appendix 3.B because we have to obtain uniform estimates with respect to the variable w . The last lemma is more original and delicate. We have decided to postpone the proofs to the appendix to lighten the reading.

First, we will introduce a notation to bound all the first derivatives of a function in X_δ or \mathbf{X}_δ .

Definition 3.5.3. Let $f \in X_\delta$ and $\mathbf{g} \in \mathbf{X}_\delta$ be written for all $x \in \mathbb{T}^d$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_n \exp(in \cdot x) \quad \text{and} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{g}_n(w) \exp(in \cdot x),$$

with for all $n \in \mathbb{Z}^d$, $\hat{g}_n \in L^\infty$. We define for all $\delta > 0$

$$|Df|_\delta := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n| |\hat{f}_n| \exp(\delta|n|),$$

$$\|\mathbf{D}\mathbf{g}\|_\delta := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n| |\hat{g}_n|_\infty \exp(\delta|n|).$$

Remark that this definition makes sense whatever the normed vector space in which f and \mathbf{g} take their values. That is the reason for this definition.

We move on to the estimates. We write the following propositions for families of functions in \mathbf{X}_δ , but the results are obviously still true for functions in X_δ .

The first proposition asserts that for all δ , $\|\bullet\|_\delta$ is a norm of algebra.

Proposition 3.5.4. *Take $\delta > 0$ and let $\mathbf{f} = (f^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ and $\mathbf{g} = (g^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ be two families functions in \mathbf{X}_δ with \mathbf{f} \mathbb{R} -valued. Then $\mathbf{fg} := (f^w g^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ is still in \mathbf{X}_δ , and*

$$\|\mathbf{fg}\|_\delta \leq \|\mathbf{f}\|_\delta \|\mathbf{g}\|_\delta.$$

The second proposition gives the behavior of the norms ($\|\bullet\|_\delta$) with respect to differentiation.

Proposition 3.5.5. *Take $\mathbf{f} = (f^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ in \mathbf{X}_δ for some $\delta > 0$. Then for all $0 < \delta' < \delta$, we have the following estimate:*

$$\|\mathbf{Df}\|_{\delta'} \leq \frac{1}{\delta - \delta'} \|\mathbf{f}\|_\delta.$$

The next proposition is a Leibniz type formula.

Proposition 3.5.6. *Take $\delta > 0$ and let $\mathbf{f} = (f^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ and $\mathbf{g} = (g^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ be two families of functions with \mathbf{f} \mathbb{R} -valued. Then for all $\delta > 0$ we have the following estimate:*

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{fg})\|_\delta \leq \|\mathbf{f}\|_\delta \|\mathbf{Dg}\|_\delta + \|\mathbf{g}\|_\delta \|\mathbf{Df}\|_\delta.$$

In particular, if \mathbf{f} and \mathbf{g} take their values in \mathbb{R}^d and if α and $\beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{f}^\alpha \mathbf{g}^\beta)\|_\delta \leq |\alpha| \|\mathbf{f}\|_\delta^{|\alpha|-1} \|\mathbf{g}\|_\delta^{|\beta|} \|\mathbf{Df}\|_\delta + |\beta| \|\mathbf{f}\|_\delta^{|\alpha|} \|\mathbf{g}\|_\delta^{|\beta|-1} \|\mathbf{Dg}\|_\delta. \quad (3.45)$$

The following estimate will be useful when estimating the force field.

Proposition 3.5.7. *Take f a E -valued function. Then we have the following estimate:*

$$|\nabla A f|_\delta \leq M |\mathbf{Df}|_\delta.$$

The next lemma asserts more or less that \mathbf{D} commutes with the semigroup S .

Lemma 3.5.8. *Take $\gamma > \gamma_0$ and C as in Theorem 3.4.6. If $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$ is such that for some $\delta > 0$,*

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)\|_\delta < +\infty,$$

then the following estimates holds for all $t > \delta/\gamma$:

$$\|\mathbf{D}S_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)\|_{\delta-\gamma t} \leq C \|\mathbf{D}(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)\|_\delta.$$

We will work with families of functions that have no constant part: their Fourier coefficients of order 0 will be 0. This is crucial to get ε_0 independent of δ_0 as needed in Subsection 3.6.1. For such functions, we have the following estimates.

Lemma 3.5.9. *Let $\mathbf{f} = (f^w)_{w \in \mathbb{R}^d} \in \mathbf{X}_\delta$ for some $\delta > 0$, and such that for all $w \in \mathbb{R}^d$,*

$$\int f^w(x) dx = 0. \quad (3.46)$$

Then for all $0 \leq \delta' \leq \delta$,

$$\|\mathbf{f}\|_{\delta'} \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_\delta}{\exp(\delta - \delta')}.$$

Finally, we give some estimates dealing with the composition of analytic functions. We recall that Φ is given by formula (3.4). If λ is a nonnegative number, we set

$$|\Phi|(\lambda) := \sum_{k \in \mathbb{N}^d} |a_k| \lambda^{|k|}.$$

Remark that $|\Phi|$ and its derivatives are sums of nonnegative terms. Thus, they always have a meaning in $[0, +\infty]$. With this definition, assumptions (3.7) and (3.8) can be reformulated

$$\int |\Phi'|(|w| + r_0) d\mu(w) \leq M, \quad (3.47)$$

$$\int |\Phi''(|w| + r_0) d\mu(w) \leq M. \quad (3.48)$$

We can now state the last lemma of the subsection.

Lemma 3.5.10. *Take $a \in \mathbb{R}^d$, f and g two analytic functions from \mathbb{T}^d to \mathbb{R}^d and $\delta \geq 0$. Then, the following inequalities hold (with possible infinite values)*

$$|\Phi(a + f) - \Phi(a + g)|_\delta \leq |f - g|_\delta |\Phi'|(|a| + |f, g|_\delta), \quad (3.49)$$

$$|\mathbf{D}\Phi(a + f)|_\delta \leq |\mathbf{D}f|_\delta |\Phi'|(|a| + |f|_\delta), \quad (3.50)$$

$$|\Phi(a + f) - \Phi(a) - \mathbf{d}\Phi(a) \cdot f|_\delta \leq |f|_\delta^2 |\Phi''(|a| + |f|_\delta), \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} & |\mathbf{D}\{\Phi(a + f) - \Phi(a + g)\}|_\delta \\ & \leq |f - g|_\delta |\mathbf{D}f, \mathbf{D}g|_\delta |\Phi''(|a| + |f, g|_\delta) + |\mathbf{D}(f - g)|_\delta |\Phi'|(|a| + |f, g|_\delta), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} & |\mathbf{D}\{\Phi(a + f) - \Phi(a + g) - \mathbf{d}\Phi(a) \cdot (f - g)\}|_\delta \\ & \leq \{|\mathbf{D}(f - g)|_\delta |f, g|_\delta + |f - g|_\delta |\mathbf{D}f, \mathbf{D}g|_\delta\} |\Phi''(|a| + |f, g|_\delta). \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.5.3 Estimates for the source term in the Duhamel formulation

We will estimate the different terms in (3.41) in order to apply a Cauchy-Kovalevskaia theorem. We take $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbf{L}_0$ and $\delta_0 > 0$, and we call

$$\eta := \|\mathbf{D}\mathbf{r}_0, \mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_{\delta_0}.$$

Because of (3.44), we have then

$$\|\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0\|_{\delta_0} \leq \eta.$$

We take $\Gamma > \gamma_0$ (as in the statement of Theorem 3.5.1), and we define

$$\gamma_1 := \frac{2}{3}\gamma_0 + \frac{1}{3}\Gamma = \gamma_0 + \frac{1}{3}(\Gamma - \gamma_0). \quad (3.54)$$

In the sequel, C is the constant appearing in Theorem 3.4.6 with $\gamma = \gamma_1$. It only depends on M and Γ . In particular, with these definitions,

$$\sup_{t \in [0, \delta_0/\gamma_1]} \|(\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t))\|_{\delta_0 - \gamma_1 t} \leq C\eta, \quad (3.55)$$

$$\sup_{t \in [0, \delta_0/\gamma_1]} \|(\nabla \mathbf{r}(t), \nabla \mathbf{u}(t))\|_{\delta_0 - \gamma_1 t} \leq C\eta. \quad (3.56)$$

We begin with the easiest terms.

Proposition 3.5.11. *For all $t < \delta_0/\gamma_1$, we have*

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div}(\mathbf{r}(t)\mathbf{u}(t))\|_{\delta_0 - \gamma_1 t} &\leq 2C^2\eta^2, \\ \|(\mathbf{u}(t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(t)\|_{\delta_0 - \gamma_1 t} &\leq C^2\eta^2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

For all $t < \delta_0/\gamma_1$, for all $\delta \leq \delta_0 - \gamma_1 t$, for all $\eta > 0$, and for all families $\mathbf{p}_1 := (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\xi}_1)$ and $\mathbf{p}_2 := (\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\xi}_2)$, we have

$$\begin{aligned} &\left\| \operatorname{div} \left\{ (\mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}_1) \right\} - \operatorname{div} \left\{ (\mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\sigma}_2)(\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}_2) \right\} \right\|_{\delta} \\ &\leq \left(C\eta + \|D\mathbf{p}_1, D\mathbf{p}_2\|_{\delta} \right) \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_{\delta} + \left(C\eta + \|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\|_{\delta} \right) \|D(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\|_{\delta}, \\ &\left\| \left((\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}_1) \cdot \nabla \right) (\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}_1) - \left((\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}_2) \cdot \nabla \right) (\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}_2) \right\|_{\delta} \\ &\leq \left(C\eta + \|D\boldsymbol{\xi}_1, D\boldsymbol{\xi}_2\|_{\delta} \right) \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|_{\delta} + \left(C\eta + \|\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2\|_{\delta} \right) \|D(\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2)\|_{\delta}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

where $\|D\mathbf{p}\|_{\delta}$ stands for $\|D\boldsymbol{\sigma}, D\boldsymbol{\xi}\|_{\delta}$.

Proof. Inequalities (3.57) are easy consequences of (3.55), (3.56), Proposition 3.5.4 and Proposition 3.5.6 once remarked that for any $\delta \geq 0$ and any vector valued \mathbf{f} , $\|\operatorname{div} \mathbf{f}\|_{\delta} \leq \|D\mathbf{f}\|_{\delta}$.

To show inequalities (3.58), just decompose the differences of products using the relation

$$(a + b_1)(c + d_1) - (a + b_2)(c + d_2) = (a + b_1)(d_1 - d_2) + (c + d_2)(b_1 - b_2),$$

and use (3.55), (3.56) and Proposition 3.5.6. \square

Let us move on the delicate part of estimating the force field. It is now that we must use the analyticity of Φ . We will prove the following.

Proposition 3.5.12. *There is K only depending on M , r_0 and Γ such that:*

- For all $t \leq \delta_0/\gamma_1$ and for all η such that $C\eta \leq r_0$, we have

$$|\nabla W_{\mathbf{r}, \mathbf{u}}[0, 0](t)|_{\delta_0 - \gamma_1 t} \leq K\eta^2. \quad (3.59)$$

(We recall that r_0 is used in (3.7) and (3.8).)

- For all $t \leq \delta_0/\gamma_1$, for all $\delta \leq \delta_0 - \gamma_1 t$, for all η such that $C\eta \leq r_0$, and for all families $\mathbf{p}_1 := (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\xi}_1)$ and $\mathbf{p}_2 := (\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\xi}_2)$ such that

$$C\eta + \|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\|_{\delta} \leq r \leq r_0,$$

we have

$$\begin{aligned} &|\nabla W_{\mathbf{r}, \mathbf{u}}[\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\xi}_1](t) - \nabla W_{\mathbf{r}, \mathbf{u}}[\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\xi}_2](t)|_{\delta} \\ &\leq K \left\{ \left(C\eta + \|D\mathbf{p}_1, D\mathbf{p}_2\|_{\delta} \right) \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_{\delta} + r \|D(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\|_{\delta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Proof. Proof of (3.59). By the definition of $W_{r,\mathbf{u}}$ in (3.40),

$$\begin{aligned} W_{r,\mathbf{u}}[0,0] &= A \left[\int \left\{ \Phi(w + u^w) - \Phi(w) \right\} r^w \, d\mu(w) \right] \\ &\quad + A \left[\int \left\{ \Phi(w + u^w) - \Phi(w) - d\Phi(w)u^w \right\} d\mu(w) \right]. \end{aligned}$$

Thus, by Proposition 3.5.7, if $t \leq \delta_0/\gamma_1$ and $\delta := \delta_0 - \gamma_1 t$,

$$\begin{aligned} |\nabla W_{r,\mathbf{u}}[0,0](t)|_\delta &\leq M \left| D \int \left\{ \Phi(w + u^w(t)) - \Phi(w) \right\} r^w(t) \, d\mu(w) \right|_\delta \\ &\quad + M \left| D \int \left\{ \Phi(w + u^w(t)) - \Phi(w) - d\Phi(w)u^w(t) \right\} d\mu(w) \right|_\delta \\ &\leq M \int \left| D \left(\left\{ \Phi(w + u^w(t)) - \Phi(w) \right\} r^w(t) \right) \right|_\delta \, d\mu(w) \\ &\quad + M \int \left| D \left\{ \Phi(w + u^w(t)) - \Phi(w) - d\Phi(w)u^w(t) \right\} \right|_\delta \, d\mu(w) \end{aligned}$$

But on the one hand, by (3.55), (3.56) and Proposition 3.5.6,

$$\begin{aligned} &\left| D \left(\left\{ \Phi(w + u^w(t)) - \Phi(w) \right\} r^w(t) \right) \right|_\delta \\ &\leq C |D\{\Phi(w + u^w(t)) - \Phi(w)\}|_\delta + C |\Phi(w + u^w(t)) - \Phi(w)|_\delta, \\ &= C |D\{\Phi(w + u^w(t))\}|_\delta + C |\Phi(w + u^w(t)) - \Phi(w)|_\delta, \\ &\leq 2C^2\eta |\Phi'|(|w| + C\eta), \end{aligned}$$

the last line being obtained using (3.55), (3.56), (3.49) and (3.50).

On the other hand, by (3.53),

$$\left| D \left\{ \Phi(w + u^w(t)) - \Phi(w) - d\Phi(w)u^w(t) \right\} \right|_\delta \leq 2C^2\eta^2 |\Phi''(|w| + C\eta)|.$$

In the end, we find

$$|\nabla W_{r,\mathbf{u}}[0,0](t)|_\delta \leq 2MC^2\eta^2 \int \left\{ |\Phi'|(|w| + C\eta) + |\Phi''(|w| + \eta) \right\} d\mu(w).$$

We conclude by using (3.47), (3.48) and $C\eta \leq r_0$.

Proof of (3.60). Take $t \leq \delta_0/\gamma_1$, $\delta \leq \delta_0 - \gamma_1 t$, η such that $C\eta \leq r_0$, $\mathbf{p}_1 := (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\xi}_1)$ and $\mathbf{p}_2 := (\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\xi}_2)$ as in the statement. We have by the definition of $W_{r,\mathbf{u}}$ in (3.40):

$$\begin{aligned} &W_{r,\mathbf{u}}[\mathbf{p}_1] - W_{r,\mathbf{u}}[\mathbf{p}_2] \\ &= A \left[\int \left\{ \Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w) \right\} (\sigma_1^w - \sigma_2^w) \, d\mu(w) \right] \\ &\quad + A \left[\int \left\{ \Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w + u^w + \xi_2^w) \right\} (r^w + \sigma_2^w) \, d\mu(w) \right] \\ &\quad + A \left[\int \left\{ \Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w + u^w + \xi_2^w) - d\Phi(w) \cdot (\xi_1^w - \xi_2^w) \right\} d\mu(w) \right]. \end{aligned}$$

So by Proposition 3.5.7, omitting the time variable,

$$\begin{aligned}
& |\nabla W_{r,u}[\mathbf{p}_1] - \nabla W_{r,u}[\mathbf{p}_2]|_\delta \\
& \leq M \int \left| \underbrace{\mathrm{D}\left(\left\{\Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w)\right\}(\sigma_1^w - \sigma_2^w)\right)}_{=:\Lambda_1} \right|_\delta \mathrm{d}\mu(w) \\
& \quad + M \int \left| \underbrace{\mathrm{D}\left(\left\{\Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w + u^w + \xi_2^w)\right\}(r^w + \sigma_2^w)\right)}_{=:\Lambda_2} \right|_\delta \mathrm{d}\mu(w) \\
& \quad + M \int \left| \underbrace{\mathrm{D}\left(\Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w + u^w + \xi_2^w) - \mathrm{d}\Phi(w) \cdot (\xi_1^w - \xi_2^w)\right)}_{=:\Lambda_3} \right|_\delta \mathrm{d}\mu(w).
\end{aligned}$$

Let us control these terms one by one. First, by Proposition 3.5.6,

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 & \leq |\mathrm{D}(\Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w))|_\delta \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_\delta \\
& \quad + |\Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w)|_\delta \|\mathrm{D}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\|_\delta \\
& = |\mathrm{D}\Phi(w + u^w + \xi_1^w)|_\delta \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_\delta \\
& \quad + |\Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w)|_\delta \|\mathrm{D}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\|_\delta.
\end{aligned}$$

With (3.49), (3.50), (3.55), (3.56) and $C\eta + \|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\|_\delta \leq r \leq r_0$, we obtain

$$\Lambda_1 \leq \left\{ (C\eta + \|\mathrm{D}\mathbf{p}_1, \mathrm{D}\mathbf{p}_2\|_\delta) \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_\delta + r \|\mathrm{D}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\|_\delta \right\} |\Phi'|(|w| + r_0). \quad (3.61)$$

Then, still by Proposition 3.5.6, (3.55), (3.56) and $C\eta + \|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\|_\delta \leq r \leq r_0$,

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 & \leq r \left| \mathrm{D}\left\{\Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w + u^w + \xi_2^w)\right\} \right|_\delta \\
& \quad + (C\eta + \|\mathrm{D}\mathbf{p}_1, \mathrm{D}\mathbf{p}_2\|_\delta) \left| \Phi(w + u^w + \xi_1^w) - \Phi(w + u^w + \xi_2^w) \right|_\delta.
\end{aligned}$$

Using (3.52) and (3.49), we get

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 & \leq r \|\mathrm{D}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\|_\delta |\Phi'|(|w| + r_0) \\
& \quad + r_0 \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\| (C\eta + \|\mathrm{D}\mathbf{p}_1, \mathrm{D}\mathbf{p}_2\|_\delta) |\Phi''(|w| + r_0)| \\
& \quad + (C\eta + \|\mathrm{D}\mathbf{p}_1, \mathrm{D}\mathbf{p}_2\|_\delta) \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_\delta |\Phi'|(|w| + r_0) \\
& = (C\eta + \|\mathrm{D}\mathbf{p}_1, \mathrm{D}\mathbf{p}_2\|_\delta) \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_\delta \left\{ |\Phi'|(|w| + r_0) + r_0 |\Phi''(|w| + r_0)| \right\} \\
& \quad + r \|\mathrm{D}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\|_\delta |\Phi'|(|w| + r_0). \quad (3.62)
\end{aligned}$$

For Λ_3 , we just have to use (3.53). We get

$$\Lambda_3 \leq \left\{ r \|\mathrm{D}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\| + (C\eta + \|\mathrm{D}\mathbf{p}_1, \mathrm{D}\mathbf{p}_2\|_\delta) \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\| \right\} |\Phi''(|w| + r_0)|. \quad (3.63)$$

The result is obtained by integrating (3.61), (3.62) and (3.63) with respect to w and by using (3.47) and (3.48). \square

In the end, the results of this subsection can be summarized in the following way.

Theorem 3.5.13 (Conclusion of the subsection). *Take $\Gamma > \gamma_0$, γ_1 as in (3.54) and C the constant given by Theorem 3.4.6 with $\gamma = \gamma_1$. Equation (3.41) can be rewritten as*

$$\mathbf{p}(t) = \int_0^t S_{t-s} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s)) ds, \quad (3.64)$$

with S defined in (3.23) and satisfying (3.24), and \mathcal{F}_η satisfying the following estimates for some $K > 0$ only depending on M , r_0 and Γ .

- For all $t \leq \delta_0/\gamma_0$ and for all η such that $C\eta \leq r_0$, we have

$$\|\mathcal{F}_\eta(t, 0)\|_{\delta_0 - \gamma_0 t} \leq K\eta^2. \quad (3.65)$$

- For all $t \leq \delta_0/\gamma_1$, for all $\delta \leq \delta_0 - \gamma_1 t$, for all η such that $C\eta \leq r_0$, and for all \mathbf{p}_1 and \mathbf{p}_2 such that

$$C\eta + \|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\|_\delta \leq r \leq r_0,$$

we have

$$\|\mathcal{F}_\eta(t, \mathbf{p}_1) - \mathcal{F}_\eta(t, \mathbf{p}_2)\|_\delta \leq K \left\{ (C\eta + \|\mathbf{D}\mathbf{p}_1, \mathbf{D}\mathbf{p}_2\|_\delta) \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_\delta + r \|\mathbf{D}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\|_\delta \right\}. \quad (3.66)$$

- For any $\mathbf{p} \in \mathbf{X}_\delta \cap \mathbf{L}_0$, $\delta \geq 0$, for all $\eta > 0$ and for all $t \leq \delta_0/\gamma_1$,

$$\mathcal{F}_\eta(t, \mathbf{p}) \in \mathbf{L}_0. \quad (3.67)$$

Proof. Looking at (3.41), we see that

$$\mathcal{F}_\eta(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} -\operatorname{div} \left((\mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}) \right) \\ -\nabla W_{r, \mathbf{u}}[\mathbf{p}] - [(\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla](\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$

Estimates (3.65) and (3.66) are obvious consequences of (3.57), (3.58), (3.59) and (3.60).

To see (3.67), remark that as for all $w \in \mathbb{R}^d$, u^w and ξ^w are gradients,

$$\left[(\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla \right] (\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \nabla \left(|\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}|^2 \right).$$

□

3.5.4 A Cauchy-Kovalevskaja theorem

We want to derive from the estimates (3.24), (3.65) and (3.66) and from property (3.67) an existence result for equation (3.64) in the Banach spaces $(\mathbf{X}_\delta)_{\delta > 0}$ defined in Subsection 3.4.2.

The theorem is the following.

Theorem 3.5.14. *For all $\Gamma > \gamma_0$ there exists $\varepsilon_0 > 0$ only depending on r_0 , M and Γ (and not δ_0) such that if*

$$\eta \leq \varepsilon_0, \quad (3.68)$$

then:

- equation (3.64) admits a solution \mathbf{p} for $t \in [0, \delta_0/\Gamma]$ with values in \mathbf{L}_0 ,
- for all $\delta < \delta_0$, \mathbf{p} is continuous from $[0, (\delta_0 - \delta)/\Gamma]$ to \mathbf{X}_δ ,
- there holds:

$$\sup_{t \in [0, \delta_0/\Gamma]} \|\mathbf{p}(t)\|_{\delta_0 - \Gamma t} \leq \frac{\eta^2}{\varepsilon_0}. \quad (3.69)$$

Moreover, this solution is unique in the class of analytic solutions: if \mathbf{q} is a solution to (3.64) which is continuous from $[0, T]$ to \mathbf{X}_δ for some $T \leq \delta_0/\Gamma$ and $\delta > 0$, then for all $t \in [0, T]$, $\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t)$.

Remark 3.5.15. The proof also gives for free

$$\sup_{t \in [0, \delta_0/\Gamma]} \sup_{\delta < \delta_0 - \Gamma t} \sqrt{\delta_0} (\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2} \|\mathbf{D}\mathbf{p}(t)\|_\delta \leq \frac{\eta^2}{\varepsilon_0}. \quad (3.70)$$

Proof. Take $\Gamma > \gamma_0$, and define as previously γ_1 by (3.54). As before, C will stand for the constant appearing in Theorem 3.4.6 with $\gamma = \gamma_1$. Define as well

$$\gamma_2 := \frac{1}{3}\gamma_0 + \frac{2}{3}\Gamma = \gamma_0 + \frac{2}{3}(\Gamma - \gamma_0).$$

In the whole proof, equation (3.24) will be used with γ_2 , and the corresponding constant will be considered as a function of Γ . Also, in the whole proof, K will denote a large constant which will be likely to grow from line to line, but only depending on r_0 , M and Γ .

First we define the following norm:

$$\|\|\mathbf{p}\|\| := \sup_{t \in [0, \delta_0/\Gamma]} \|\mathbf{p}(t)\|_{\delta_0 - \Gamma t} + \sqrt{\delta_0} \sup_{\substack{t < \delta_0/\Gamma \\ \delta < \delta_0 - \Gamma t}} (\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2} \|\mathbf{D}\mathbf{p}(t)\|_\delta. \quad (3.71)$$

This type of norm has been used for the first time by Caffish in [30]. Here, we have chosen the exponent in the derivative part equal to 1/2 and we have added a factor $\sqrt{\delta_0}$. All these choices are made to obtain ε_0 independent of δ_0 as the following computations will show.

For a given η , we introduce the scheme:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= 0, \\ \forall n \geq 0, \quad \mathbf{p}_{n+1}(t) &:= \int_0^t S_{t-s} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_n(s)) \, ds. \end{aligned}$$

First of all, $0 \in \mathbf{L}_0$. Moreover, if $\mathbf{p} \in \mathbf{L}_0$ is sufficiently regular, and if $0 \leq s \leq t$, then $\mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}) \in \mathbf{L}_0$ by (3.67), and so $S_{t-s} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}) \in \mathbf{L}_0$ by Theorem 3.4.6. Consequently, it is easy to prove by induction that for all $n \in \mathbb{N}$ and all $t \geq 0$ such that the definition of $\mathbf{p}_n(t)$ makes sense, then $\mathbf{p}_n(t) \in \mathbf{L}_0$. In particular, $\mathbf{p}_n(t)$ will satisfy (3.46) and, we will be able to use Lemma 3.5.9.

Now we suppose that (3.68) holds and we will show that as soon as ε_0 is small enough, then the scheme will converge to a certain \mathbf{p} for which we will give an estimate.

Step one: estimating \mathbf{p}_1 .

Let us begin the computations by estimating $\|\mathbf{p}_1\|$. If $t \leq \delta_0/\Gamma$,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}_1(t)\|_{\delta_0-\Gamma t} &\leq \int_0^t \|S_{t-s}\mathcal{F}_\eta(s,0)\|_{\delta_0-\Gamma t} ds \\
&\leq K \int_0^t \|\mathcal{F}_\eta(s,0)\|_{\delta_0-(\Gamma-\gamma_2)t-\gamma_2s} ds && \text{by (3.24),} \\
&\leq K \int_0^t \frac{\|\mathcal{F}_\eta(s,0)\|_{\delta_0-\gamma_1s}}{\exp((\delta_0-\gamma_1s) - (\delta_0 - (\Gamma-\gamma_2)t - \gamma_2s))} ds && \text{by Lem. 3.5.9,} \\
&\leq \frac{K\eta^2}{\exp((\Gamma-\gamma_2)t)} \int_0^t \exp(-(\gamma_2-\gamma_1)s) ds && \text{by (3.65),} \\
&\leq \frac{K}{\gamma_2-\gamma_1} \frac{\eta^2}{\exp((\Gamma-\gamma_2)t)}.
\end{aligned}$$

Putting the $\gamma_2 - \gamma_1$ in the constant C and using $\Gamma > \gamma_2$, we get

$$\|\mathbf{p}_1(t)\|_{\delta_0-\Gamma t} \leq C\eta^2. \quad (3.72)$$

On the other hand, choose $t < \delta_0/\Gamma$ and $\delta < \delta_0 - \Gamma t$. Taking for all $s \in [0, t]$

$$\delta'(s) := \frac{\delta + \gamma_2(t-s) + \delta_0 - \gamma_1s}{2},$$

we get

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{D}\mathbf{p}_1(t)\|_\delta &\leq \int_0^t \|\mathbf{D}S_{t-s}\mathcal{F}_\eta(s,0)\|_\delta ds \\
&\leq K \int_0^t \|\mathbf{D}\mathcal{F}_\eta(s,0)\|_{\delta+\gamma_2(t-s)} ds && \text{by Lem. 3.5.8,} \\
&\leq K \int_0^t \frac{\|\mathcal{F}_\eta(s,0)\|_{\delta'(s)}}{\delta'(s) - \delta - \gamma_2(t-s)} ds && \text{by Prop. 3.5.5,} \\
&\leq K \int_0^t \frac{\|\mathcal{F}_\eta(s,0)\|_{\delta_0-\gamma_1s}}{\delta'(s) - \delta - \gamma_2(t-s)} e^{-(\delta_0-\gamma_1s-\delta'(s))} ds && \text{by Lem. 3.5.9,} \\
&\leq K\eta^2 \int_0^t \frac{e^{-(\delta_0-\delta-\gamma_2t+(\gamma_2-\gamma_1)s)/2}}{\delta_0 - \delta - \gamma_2t + (\gamma_2 - \gamma_1)s} ds && \text{by (3.65),} \\
&\leq K\eta^2 e^{-(\delta_0-\delta-\gamma_2t)/2} \int_0^t \frac{ds}{\delta_0 - \delta - \gamma_2t + (\gamma_2 - \gamma_1)s} \\
&= K\eta^2 e^{-(\delta_0-\delta-\gamma_2t)/2} \log \left(\frac{\delta_0 - \delta - \gamma_1t}{\delta_0 - \delta - \gamma_2t} \right).
\end{aligned}$$

But remark that for $t \leq \delta_0/\Gamma$ and $\delta < \delta_0 - \Gamma t$,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\delta_0}(\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2} e^{-(\delta_0-\delta-\gamma_2t)/2} \log \left(\frac{\delta_0 - \delta - \gamma_1t}{\delta_0 - \delta - \gamma_2t} \right) \\
&\leq \delta_0 e^{-\delta_0/2} \sup_{\tilde{t} < 1/\Gamma} \sup_{\tilde{\delta} < 1-\Gamma\tilde{t}} (1 - \tilde{\delta} - \Gamma\tilde{t})^{1/2} e^{-(1-\tilde{\delta}-\gamma_2\tilde{t})/2} \log \left(\frac{1 - \tilde{\delta} - \gamma_1\tilde{t}}{1 - \tilde{\delta} - \gamma_2\tilde{t}} \right),
\end{aligned}$$

and that

$$\sup_{\tilde{t} < 1/\Gamma} \sup_{\tilde{\delta} < 1 - \Gamma\tilde{t}} (1 - \tilde{\delta} - \Gamma\tilde{t})^{1/2} e^{-(1 - \tilde{\delta} - \gamma_2\tilde{t})/2} \log \left(\frac{1 - \tilde{\delta} - \gamma_1\tilde{t}}{1 - \tilde{\delta} - \gamma_2\tilde{t}} \right)$$

only depends on Γ . So we can include this factor in the constant C and because $\delta_0 e^{-\delta_0/2} \leq 2$, we get

$$\sqrt{\delta_0} (\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2} \|D\mathbf{p}_1(t)\|_\delta \leq K\eta^2. \quad (3.73)$$

Gathering (3.72) and (3.73), we conclude that

$$\|\|\mathbf{p}_1\|\| \leq K\eta^2.$$

Step two: estimating $\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}$ by induction.

Now, we prove by induction that when ε_0 is sufficiently small, then for all $n \geq 1$,

$$\|\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\|\| \leq 2^{-(n-1)} \|\|\mathbf{p}_1\|\|, \quad (3.74)$$

and

$$\|\|\mathbf{p}_n\|\| \leq \eta. \quad (3.75)$$

Basis step. When $n = 1$, (3.74) is automatically true, and as under condition (3.68),

$$\|\|\mathbf{p}_1\|\| \leq K\eta^2 \leq K\varepsilon_0\eta,$$

as soon as

$$K\varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}, \quad (3.76)$$

we have

$$\|\|\mathbf{p}_1\|\| \leq \frac{\eta}{2}. \quad (3.77)$$

Equation (3.75) is then trivially true for $n = 1$.

Induction step. If the result is true for $k = 1, \dots, n$, let us estimate the norm $\|\|\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n\|\|$. First of all, as soon as

$$\varepsilon_0 \leq \frac{r_0}{C+1}, \quad (3.78)$$

then for all $s \leq \delta_0/\Gamma$,

$$C\eta + \|\|\mathbf{p}_n(s), \mathbf{p}_{n-1}(s)\|\|_{\delta_0 - \Gamma s} \leq (C+1)\eta \leq r_0,$$

so we will be able to use (3.66) with $r := (C+1)\eta$. Take $t \leq \delta_0/\Gamma$. By setting for all $s \in [0, t]$

$$\delta(s) := \delta_0 - (\Gamma - \gamma_2)t - \gamma_2 s,$$

we have by (3.24), (3.66), (3.75), (3.71) and Lemma 3.5.9:

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{p}_{n+1}(t) - \mathbf{p}_n(t)\|_{\delta_0 - \Gamma t} \\
& \leq \int_0^t \|S_{t-s} \{ \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_n(s)) - \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_{n-1}(s)) \}\|_{\delta_0 - \Gamma t} ds \\
& \leq K \int_0^t \|\mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_n(s)) - \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_{n-1}(s))\|_{\delta(s)} ds \\
& \leq K \int_0^t \left\{ \left(C\eta + \|\mathbf{D}\mathbf{p}_{n-1}(s), \mathbf{D}\mathbf{p}_n(s)\|_{\delta(s)} \right) \|\mathbf{p}_n(s) - \mathbf{p}_{n-1}(s)\|_{\delta(s)} \right. \\
& \quad \left. + (C+1)\eta \|\mathbf{D}(\mathbf{p}_n(s) - \mathbf{p}_{n-1}(s))\|_{\delta(s)} \right\} ds \\
& \leq K \int_0^t \left\{ \left(C\eta + \frac{\eta}{\sqrt{\delta_0}(\delta_0 - \delta(s) - \Gamma s)^{1/2}} \right) \frac{\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\|}{\exp(\delta_0 - \Gamma s - \delta(s))} \right. \\
& \quad \left. + (C+1)\eta \frac{\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\|}{\sqrt{\delta_0}(\delta_0 - \delta(s) - \Gamma s)^{1/2}} \right\} ds \\
& \leq K \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\| \eta \int_0^t \left\{ \frac{C}{\exp(\delta_0 - \Gamma s - \delta(s))} + \frac{C+2}{\sqrt{\delta_0}(\delta_0 - \Gamma s - \delta(s))^{1/2}} \right\} ds.
\end{aligned}$$

But using

$$\delta_0 - \Gamma s - \delta(s) = (\Gamma - \gamma_2)t - (\Gamma - \gamma_2)s,$$

we get

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}_{n+1}(t) - \mathbf{p}_n(t)\|_{\delta_0 - \Gamma t} & \leq K \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\| \eta \left\{ C + (C+2) \sqrt{\frac{t}{\delta_0}} \right\} \\
& \leq K \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\| \eta.
\end{aligned}$$

In particular,

$$\|\mathbf{p}_{n+1}(t) - \mathbf{p}_n(t)\|_\delta \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\| \quad (3.79)$$

as soon as

$$K\varepsilon_0 \leq \frac{1}{4}. \quad (3.80)$$

On the other hand, if $t < \delta_0/\Gamma$ and $\delta < \delta_0 - \Gamma t$, by using Lemma 3.5.8,

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{p}_{n+1}(t) - \mathbf{p}_n(t))\|_\delta \leq K \int_0^t \|\mathbf{D}(\mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_n(s)) - \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_{n-1}(s)))\|_{\delta + \gamma_2(t-s)} ds.$$

We get rid of the D by using Proposition 3.5.5 with for all $s \in [0, t]$,

$$\delta(s) := \frac{\delta + \gamma_2(t-s) + \delta_0 - \Gamma s}{2},$$

With this choice, for all $s \in [0, t]$,

$$\Delta(s) := \delta(s) - \delta - \gamma_2(t-s) = \delta_0 - \Gamma s - \delta(s) = \frac{\delta_0 - \delta - \gamma_2 t - (\Gamma - \gamma_2)s}{2}. \quad (3.81)$$

Consequently,

$$\|D(\mathbf{p}_{n+1}(t) - \mathbf{p}_n(t))\|_\delta \leq K \int_0^t \frac{\|\mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_n(s)) - \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_{n-1}(s))\|_{\delta(s)}}{\Delta(s)} ds.$$

By the exact same estimations of $\|\mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_n(s)) - \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}_{n-1}(s))\|_{\delta(s)}$ as before,

$$\begin{aligned} & \|D(\mathbf{p}_{n+1}(t) - \mathbf{p}_n(t))\|_\delta \\ & \leq K \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\| \eta \int_0^t \left\{ \frac{C}{\Delta(s) \exp(\Delta(s))} + \frac{C+2}{\sqrt{\delta_0} \Delta(s)^{3/2}} \right\} ds. \end{aligned}$$

We just have to use

$$\Delta(s) \geq \frac{\delta_0 - \delta - \Gamma t}{2}$$

to get the bound

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{ds}{\Delta(s) \exp(\Delta(s))} & \leq \exp\left(-\frac{\delta_0 - \delta - \Gamma t}{2}\right) \int_0^t \frac{ds}{\Delta(s)} \\ & \leq 2 \exp\left(-\frac{\delta_0 - \delta - \Gamma t}{2}\right) \int_0^t \frac{ds}{\delta_0 - \delta - \gamma_2 t - (\Gamma - \gamma_2)s} \\ & \leq 2 \exp\left(-\frac{\delta_0 - \delta - \Gamma t}{2}\right) \log\left(\frac{\delta_0 - \delta - \gamma_2 t}{\delta_0 - \delta - \Gamma t}\right). \end{aligned}$$

And besides, by (3.81),

$$\int_0^t \frac{ds}{\Delta(s)^{3/2}} \leq \frac{4\sqrt{2}}{\Gamma - \gamma_2} \frac{1}{(\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2}}.$$

In the end,

$$\sqrt{\delta_0}(\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2} \|D(\mathbf{p}_{n+1}(t) - \mathbf{p}_n(t))\|_\delta \leq K \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\| \eta (L + 1),$$

with

$$\begin{aligned} L & = \sup_{\substack{t < \delta_0/\Gamma \\ \delta < \delta_0 - \Gamma t}} \sqrt{\delta_0}(\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2} \exp\left(-\frac{\delta_0 - \delta - \Gamma t}{2}\right) \log\left(\frac{\delta_0 - \delta - \gamma_2 t}{\delta_0 - \delta - \Gamma t}\right) \\ & \leq \delta_0 \exp(-\delta_0/2) \sup_{\substack{\tilde{t} < 1/\Gamma \\ \tilde{\delta} < 1 - \Gamma \tilde{t}}} (1 - \tilde{\delta} - \Gamma \tilde{t})^{1/2} \log\left(\frac{1 - \tilde{\delta} - \gamma_2 \tilde{t}}{1 - \tilde{\delta} - \Gamma \tilde{t}}\right) \\ & \leq 2 \sup_{\substack{\tilde{t} < 1/\Gamma \\ \tilde{\delta} < 1 - \Gamma \tilde{t}}} (1 - \tilde{\delta} - \Gamma \tilde{t})^{1/2} \log\left(\frac{1 - \tilde{\delta} - \gamma_2 \tilde{t}}{1 - \tilde{\delta} - \Gamma \tilde{t}}\right) \end{aligned}$$

and

$$\sup_{\substack{\tilde{t} < 1/\Gamma \\ \tilde{\delta} < 1 - \Gamma \tilde{t}}} (1 - \tilde{\delta} - \Gamma \tilde{t})^{1/2} \log\left(\frac{1 - \tilde{\delta} - \gamma_2 \tilde{t}}{1 - \tilde{\delta} - \Gamma \tilde{t}}\right)$$

only depending on Γ . Thus,

$$\begin{aligned} \sqrt{\delta_0}(\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2} \|D(\mathbf{p}_{n+1}(t) - \mathbf{p}_n(t))\|_\delta &\leq K\eta \|\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\|\| \\ &\leq K\varepsilon_0 \|\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\|\|. \end{aligned}$$

Once again,

$$\left(\frac{\delta_0 - \delta - \Gamma t}{\delta_0}\right)^{1/2} \|D(\mathbf{p}_{n+1}(t) - \mathbf{p}_n(t))\|_\delta \leq \frac{1}{4} \|\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\|\| \quad (3.82)$$

as soon as

$$K\varepsilon_0 \leq \frac{1}{4}. \quad (3.83)$$

So under conditions (3.80), (3.83), then (3.79) and (3.82) hold and thus by summing them,

$$\|\|\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n\|\| \leq \frac{1}{2} \|\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}\|\| \leq 2^{-n} \|\|\mathbf{p}_1\|\|.$$

To get

$$\|\|\mathbf{p}_{n+1}\|\| \leq \eta,$$

it suffices to sum (3.74) for all the integers up to $n+1$ and (3.77). So we are done with our induction as soon as ε_0 satisfies (3.76), (3.78), (3.80), (3.83).

Step three: conclusion of the first and third point of the statement.

We have shown that when ε_0 is small enough, under condition (3.68), $(\mathbf{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence in the Banach space of functions having finite norm $\|\|\bullet\|\|$. So it converges to a certain \mathbf{p} which turns out to be a solution to equation (3.64) and which belongs to \mathbf{L}_0 for all of its times of existence (\mathbf{L}_0 is closed even for the topology of distributions). Moreover, by summing (3.74) for all $n \geq 1$ and by using (3.72) and (3.76), we get

$$\|\|\mathbf{p}\|\| \leq 2 \|\|\mathbf{p}_1\|\| \leq \frac{\eta^2}{\varepsilon_0}.$$

Inequalities (3.69) and (3.70) follow easily.

Step four: continuity of \mathbf{p} .

Here, we show the second point of the statement. First, because of (3.66) (with $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$ and $\mathbf{p}_2 = 0$), (3.69) and (3.70), we can estimate \mathcal{F} : for all $t < \delta_0/\Gamma$ and for all $\delta < \delta_0 - \Gamma t$, there is a constant K such that

$$\|\mathcal{F}_\eta(t, \mathbf{p}(t))\|_\delta \leq \frac{K}{(\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2}}. \quad (3.84)$$

(For this part of the proof, we do not need to be cautious with the dependences of K ; *a priori*, it depends on everything except for t and δ .) In what follows, K will be a large constant growing from line to line.

Then, if $0 \leq t_1 < t_2 \leq \delta_0/\Gamma$, using (3.64), we get:

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \int_0^{t_1} \{S_{t_2-s} - S_{t_1-s}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s)) \, ds + \int_{t_1}^{t_2} S_{t_2-s} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s)) \, ds \quad (3.85)$$

Now, we chose $\delta < \delta_0$ and we suppose $0 \leq t_1 < t_2 \leq T := (\delta_0 - \delta)/\Gamma$. The goal is to show that the two terms in (3.85) tend to zero in \mathbf{X}_δ when $t_2 - t_1$ goes to zero. The easiest term is the second one:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{t_1}^{t_2} S_{t_2-s} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s)) \, ds \right\|_\delta &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|S_{t_2-s} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_\delta \, ds \\
&\leq K \int_{t_1}^{t_2} \|\mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_{\delta+\gamma_2(t_2-s)} \, ds && \text{by (3.24),} \\
&\leq K \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{(\delta_0 - \delta - \Gamma s - \gamma_2(t_2 - s))^{1/2}} && \text{by (3.84),} \\
&= K \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{(\Gamma(T - s) - \gamma_2(t_2 - s))^{1/2}} \\
&\leq K \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{((\Gamma - \gamma_2)(T - s))^{1/2}} \\
&\leq K \int_{T-(t_2-t_1)}^T \frac{ds}{((\Gamma - \gamma_2)(T - s))^{1/2}} \\
&\leq K \sqrt{t_2 - t_1},
\end{aligned}$$

which tends to zero when $t_2 - t_1$ tends to zero.

We treat the first term in two stages: $t_2 \searrow t_1$ and then $t_1 \nearrow t_2$.

The case $t_2 \searrow t_1$. We have:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1} \{S_{t_2-s} - S_{t_1-s}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s)) \, ds &= \int_0^{t_1} \{S_{t_2-t_1} - \text{Id}\} S_{t_1-s} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s)) \, ds \\
&= \{S_{t_2-t_1} - \text{Id}\} \mathbf{p}(t_1).
\end{aligned}$$

According to the continuity part of Theorem 3.4.6, this term tends to zero in \mathbf{X}_δ as $t_2 \searrow t_1$ provided $\mathbf{p}(t_1) \in \mathbf{X}_{\delta'}$ for some $\delta' > \delta$. But this is the case as we know that $\mathbf{p}(t_1) \in \mathbf{X}_{\delta_0 - \Gamma t_1}$, and $\delta_0 - \Gamma t_1 > \delta_0 - \Gamma T = \delta$.

The case $t_1 \nearrow t_2$. We also have:

$$\int_0^{t_1} \{S_{t_2-s} - S_{t_1-s}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s)) \, ds = \int_0^{t_1} S_{t_1-s} \{S_{t_2-t_1} - \text{Id}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s)) \, ds$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{t_1} \{S_{t_2-s} - S_{t_1-s}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s)) \, ds \right\|_\delta \\
&\leq \int_0^{t_1} \|S_{t_1-s} \{S_{t_2-t_1} - \text{Id}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_\delta \, ds \\
&\leq \int_0^{t_1} \|\{S_{t_2-t_1} - \text{Id}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_{\delta+\gamma_2(t_1-s)} \, ds && \text{by (3.24),} \\
&= \int_0^{t_2} \mathbf{1}_{s \leq t_1} \|\{S_{t_2-t_1} - \text{Id}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_{\delta+\gamma_2(t_1-s)} \, ds. && (3.86)
\end{aligned}$$

On the one hand, if $s \in [0, t_2)$, $\mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s)) \in \mathbf{X}_{\delta'}$ for all $\delta' < \delta_0 - \Gamma s$, and

$$\delta + \gamma_2(t_2 - s) < \delta + \Gamma(t_2 - s) \leq \delta + \Gamma(T - s) = \delta_0 - \Gamma s.$$

So by the continuity part of Theorem 3.4.6

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{s \leq t_1} \|\{S_{t_2-t_1} - \text{Id}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_{\delta + \gamma_2(t_1-s)} &\leq \|\{S_{t_2-t_1} - \text{Id}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_{\delta + \gamma_2(t_2-s)} \\ &\xrightarrow[t_1 \nearrow t_2]{} 0. \end{aligned}$$

On the other hand, for all $s \in [0, t_2)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{s \leq t_1} \|\{S_{t_2-t_1} - \text{Id}\} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_{\delta + \gamma_2(t_1-s)} &\leq \mathbb{1}_{s \leq t_1} \|S_{t_2-t_1} \mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_{\delta + \gamma_2(t_1-s)} + \mathbb{1}_{s \leq t_1} \|\mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_{\delta + \gamma_2(t_1-s)} \\ &\leq 2 \|\mathcal{F}_\eta(s, \mathbf{p}(s))\|_{\delta + \gamma_2(t_2-s)} \\ &\leq \frac{K}{(\delta_0 - \delta - \Gamma s - \gamma_2(t_2 - s))^{1/2}} \\ &\leq \frac{K}{((\Gamma - \gamma_2)(T - s))^{1/2}} \end{aligned}$$

where we used (3.84) to get the fourth line. This bound does not depend on t_1 and is summable between 0 and $t_2 \leq T$. So the dominated convergence theorem applies, and we can pass to the limit $t_1 \nearrow t_2$ in (3.86).

Step five: uniqueness.

Suppose $\eta \leq \varepsilon_0$. The computations of the induction part of step two show that if \mathbf{q}_1 and \mathbf{q}_2 are two solutions to (3.64) up to time δ_0/Γ that satisfy

$$\sup_{t \in [0, \delta_0/\Gamma]} \|\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t)\|_{\delta_0 - \Gamma t} \leq \eta, \quad (3.87)$$

then

$$\|\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|\| \leq \frac{1}{2} \|\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|\|.$$

Consequently, in that case, $\mathbf{q}_1(t) = \mathbf{q}_2(t)$ for all $t \in [0, \delta_0/\Gamma]$.

Moreover, we have seen that ε_0 does not depend on δ_0 . So if we replace δ_0 by some ι_0 in (3.87), then the conclusion holds up to time ι_0/Γ .

Now take \mathbf{p} as built in step three and \mathbf{q} , $T \leq \delta_0/\Gamma$ and $\delta > 0$ as in the statement of the theorem. Let $t_0 \in [0, T]$ be defined by:

$$t_0 := \sup\{t \in [0, T] \mid \mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(t)\}.$$

Suppose by contradiction that $t_0 < T$.

By the previous considerations, it suffices to find $\iota_0 \leq \delta_0$ such that $t_0 < \iota_0/\Gamma \leq T$ and

$$\sup_{t \in [t_0, \iota_0/\Gamma]} \|\mathbf{q}\|_{\iota_0 - \Gamma t} \leq \eta. \quad (3.88)$$

Indeed, if such a ι_0 exists, then (3.87) holds with ι_0 instead of δ_0 , $\mathbf{q}_1 := \mathbf{p}$ and $\mathbf{q}_2 := \mathbf{q}$. (The estimate for \mathbf{p} and the estimate for \mathbf{q} before t_0 are due to $\iota_0 \leq \delta_0$ and $\|\|\mathbf{p}\|\| \leq \eta$.) Hence, for all $t \leq \iota_0/\Gamma$, $\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t)$ and as $\iota_0/\Gamma > t_0$, the maximality of t_0 is contradicted.

As $\mathbf{p}(t_0) \in \mathbf{L}_0$, $\delta' \mapsto \|\mathbf{p}\|_{\delta'}$ is an increasing function. So as

$$\|\mathbf{p}(t_0)\|_{\delta_0 - \Gamma t_0} \leq \eta,$$

for all $\iota_0 < \delta_0$,

$$\|\mathbf{q}(t_0)\|_{\iota_0 - \Gamma t_0} = \|\mathbf{p}(t_0)\|_{\iota_0 - \Gamma t_0} < \eta.$$

In addition, if ι_0 is sufficiently small, then $\iota_0 - \Gamma t_0 \leq \delta$, where δ , given in the statement of the theorem, is such that \mathbf{q} is continuous in \mathbf{X}_δ . For such ι_0 there is $t_1 > t_0$ such that for all $t \in [t_0, t_1]$,

$$\|\mathbf{q}(t)\|_{\iota_0 - \Gamma t} \leq \|\mathbf{q}(t)\|_{\iota_0 - \Gamma t_0} \leq \eta.$$

Up to taking an even lower $\iota_0 > t_0 \Gamma$ we can suppose furthermore that $\iota_0 / \Gamma \leq t_1$. For such a ι_0 , (3.88) holds and the result follows. \square

3.5.5 Conclusion: proof of Theorem 3.5.1

Theorem 3.5.1 is a direct application of Theorem 3.5.14.

The fact that $(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{v}(t))$ stays real is a consequence of (3.9). Indeed, with this assumptions, on the one hand, with the notations of the proof of Lemma 3.4.8:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbf{A}_{-n} = \overline{\mathbf{A}_n} \quad \text{and} \quad \mathbf{B}_{-n} = \overline{\mathbf{B}_n}.$$

So the linear solutions are real if $(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{v}_0)$ is real. On the other hand, the fixed point procedure developed in the proof of theorem 3.5.14 send real functions on real functions. So the nonlinear solutions also stay real.

The fact that $\boldsymbol{\rho}(t)$ stays nonnegative is a classical fact in the theory of the continuity equation and can be understood for example through the characteristics method. \square

3.6 Consequences

In this section, we will give some consequences of our results. First, we will prove that the solution to equations (3.2)-(3.3) are almost Lyapounov unstable in the neighborhood of any linearly unstable stationary profile. Theorem 3.1.2 for the Vlasov-Poisson equation will be a direct application of this result. Then, we show an ill-posedness result implying Theorem 3.1.3 when the unstable spectrum grows linearly with the frequency of the exponential growing modes, as it does in the kinetic Euler equation and in the Vlasov-Benney equation.

3.6.1 Almost Lyapounov instability

Take μ an unstable profile, as defined in Definition 3.4.2. We consider γ_0 as defined in (3.22). We also take $\gamma \in (0, \gamma_0)$ and

$$\Gamma := 2\gamma_0 - \gamma,$$

chosen so that $\Gamma - \gamma_0 = \gamma_0 - \gamma$.

From now on, we take $(n, \lambda) \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ such that (3.14) holds and such that $\Re(\lambda)/|n| \in [\gamma, \gamma_0]$.

Because of Subsection 3.4.1, taking the real part of the exponential growing mode associated to (n, λ) , and using the notations:

$$u := \frac{n}{|n|}, \quad r + i\varphi := \frac{\lambda}{|n|}, \quad \theta(w) := \arctan\left(\frac{\varphi + u \cdot w}{r}\right), \quad (3.89)$$

we obtain that for all $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} r_c^w(t, x) := -c \frac{\cos[n \cdot x + |n|\varphi t - 2\theta(w)]}{r^2 + (\varphi + u \cdot w)^2} \exp(|n|rt), \\ u_c^w(t, x) := c \frac{\sin[n \cdot x + |n|\varphi t - \theta(w)]}{\sqrt{r^2 + (\varphi + u \cdot w)^2}} \exp(|n|rt) \times u, \end{cases} \quad (3.90)$$

is a real solution to the linearized system (3.11). Its initial data is clearly in \mathbf{L}_0 . We see thanks to remark 3.4.3 that it corresponds to the linear potential

$$V[\mathbf{r}_c(t), \mathbf{u}_c(t)](x) = c \cos(n \cdot x + |n|\varphi t) \exp(|n|rt). \quad (3.91)$$

We deduce our "almost Lyapounov instability" result.

Theorem 3.6.1 (Almost Lyapounov instability). *Take $s \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0, 1]$. Then there exists $(\rho_0^k, \mathbf{v}_0^k)_{k \in \mathbb{N}}$ a family of analytic initial data tending uniformly in w towards the stationary solution $(\mathbf{1}, \mathbf{w})$ in $W^{s, \infty}$, $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a family of positive times tending to $+\infty$ such that for all $k \in \mathbb{N}$, the unique analytic solution (ρ^k, \mathbf{v}^k) to (3.2)-(3.3) starting from $(\rho_0^k, \mathbf{v}_0^k)$, is defined up to time T_k , and satisfies*

$$\frac{\int \min\left(\|\rho^{k,w} - 1\|_{L^1((0, T_k) \times \mathbb{T}^d)}, \|v^{k,w} - w\|_{L^1((0, T_k) \times \mathbb{T}^d)}\right) d\mu(w)}{\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \left\{ \max\left(\|\rho_0^{k,w} - 1\|_{W^{s, \infty}}, \|v_0^{k,w} - w\|_{W^{s, \infty}}\right) \right\}^\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (3.92)$$

Moreover, we have the following asymptotics for the potential:

$$\frac{\|U[\rho^k, \mathbf{v}^k] - U[\mathbf{1}, \mathbf{w}]\|_{L^1((0, T_k) \times \mathbb{T}^d)}}{\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \left\{ \max\left(\|\rho_0^{k,w} - 1\|_{W^{s, \infty}}, \|v_0^{k,w} - w\|_{W^{s, \infty}}\right) \right\}^\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty, \quad (3.93)$$

where $(\mathbf{1}, \mathbf{w})$ is a notation for the homogeneous stationary solution.

Moreover

$$T_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} |\log \varepsilon_k| \quad (3.94)$$

with $\varepsilon_k := \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \left\{ \max\left(\|\rho_0^{k,w} - 1\|_{L^1}, \|v_0^{k,w} - w\|_{L^1}\right) \right\}$.

Remark 3.6.2. • A classical Lyapounov instability result would mean some discontinuity of the numerator of (3.92) in the topology generated by the norm in the denominator. Here we show instead that the numerator cannot be Hölder continuous with any Hölder exponent with respect to the denominator. That is why we call this result almost Lyapounov instability.

- Equation (3.93) shows that the instability does not come from the multiphasic representations of the solutions. Indeed, the potential does not depend on this representation.

Proof. Chose $\gamma < \gamma_0$ sufficiently close to γ_0 to have

$$\alpha > 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\gamma}{\Gamma}, \quad (3.95)$$

with $\Gamma := \gamma_0 + (\gamma_0 - \gamma)$. Now take (n, λ) as in the beginning of the subsection, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (0, 1]^{\mathbb{N}}$ a sequence converging to 0, satisfying:

$$c_k |n| < c_k^{\alpha/2}.$$

Take $T_k > 0$ the unique positive number such that

$$c_k |n| \exp(|n| \Gamma T_k) = c_k^{\alpha/2}. \quad (3.96)$$

Then we define $(\mathbf{r}^k, \mathbf{u}^k) := (\mathbf{u}_{c_k}, \mathbf{r}_{c_k})$ using (3.90). Remark that

$$\|D\mathbf{r}_0^k, D\mathbf{u}_0^k\|_{\Gamma T_k} \lesssim c_k |n| \exp(|n| \Gamma T_k) = c_k^{\alpha/2} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

(The symbol \lesssim means "lower than up to a constant which is independent of k ".) So when k is sufficiently large, condition (3.42) of Theorem 3.5.1 is satisfied with $\delta_0 = \Gamma T_k$. As a consequence, the unique analytic solution (ρ^k, \mathbf{v}^k) to (3.2)-(3.3) starting from the initial data $(\rho_0^k, \mathbf{v}_0^k) = (\mathbf{1} + \mathbf{r}_0^k, \mathbf{w} + \mathbf{u}_0^k)$ is well defined up to time T_k , and is of the form

$$\forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \rho^{k,w} = 1 + r^{k,w} + \sigma^{k,w} \quad \text{and} \quad v^{k,w} = w + u^{k,w} + \xi^{k,w}.$$

Moreover, (σ^k, ξ^k) satisfies the estimate (3.43), which gives:

$$\sup_{t \leq T_k} \|\sigma(t), \xi(t)\|_{\Gamma(T_k - t)} \lesssim c_k^2 \exp(2|n| \Gamma T_k). \quad (3.97)$$

Let us move on to the proof of the asymptotics (3.92). First, we estimate $(\rho_0^k, \mathbf{v}_0^k)$. It is given explicitly by $(\mathbf{1} + \mathbf{r}^k, \mathbf{w} + \mathbf{u}^k)$ and formula (3.90) with $t = 0$. We deduce:

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \max \left(\|\rho_0^{k,w} - 1\|_{W^{s,\infty}}, \|v_0^{k,w} - w\|_{W^{s,\infty}} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} c_k. \quad (3.98)$$

Now we have to estimate (ρ^k, \mathbf{v}^k) in $L^1((0, T_k) \times \mathbb{T}^d)$ (we denote by $\|\bullet\|_{L^1}$ its norm to lighten the notations). First, remark that for all $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} & \min \left(\|\rho^{k,w} - 1\|_{L^1}, \|v^{k,w} - w\|_{L^1} \right) \\ & \geq \min \left(\|r^{k,w}\|_{L^1} - \|\sigma^{k,w}\|_{L^1}, \|u^{k,w}\|_{L^1} - \|\xi^{k,w}\|_{L^1} \right) \\ & \geq \min \left(\|r^{k,w}\|_{L^1}, \|u^{k,w}\|_{L^1} \right) - \max \left(\|\sigma^{k,w}\|_{L^1}, \|\xi^{k,w}\|_{L^1} \right). \end{aligned}$$

But now, with formula (3.90) and equation (3.96), we easily see that

$$\begin{aligned}
& \int \min \left(\|r^{k,w}\|_{L^1}, \|u^{k,w}\|_{L^1} \right) d\mu(w) \\
& \quad \gtrsim c_k \exp(|n|rT_k) - c_k \\
& \quad \gtrsim c_k \exp(|n|\gamma T_k) - c_k \\
& \quad \gtrsim c_k \exp(|n|\Gamma T_k)^{\gamma/\Gamma} - c_k \\
& \quad \gtrsim c_k^{1-(1-\alpha/2)\gamma/\Gamma} - c_k \\
& \quad \gtrsim c_k^{1-(1-\alpha/2)\gamma/\Gamma} + \underset{k \rightarrow +\infty}{o} \left(c_k^{1-(1-\alpha/2)\gamma/\Gamma} \right). \tag{3.99}
\end{aligned}$$

On the other hand, with the help of (3.18), (3.19), (3.97) and Lemma 3.5.9, we get that for all $t \in [0, T_k]$,

$$\begin{aligned}
& \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \max \left(\|\sigma^{k,w}(t)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}, \|\xi^{k,w}(t)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \right) \\
& \quad \leq \|\sigma^k(t), \xi^k(t)\|_0 \\
& \quad \leq \exp(-\Gamma(T_k - t)) \|\sigma^k(t), \xi^k(t)\|_{\Gamma(T_k - t)} \\
& \quad \lesssim c_k^2 \exp(\Gamma(2|n| - 1)T_k) \exp(\Gamma t).
\end{aligned}$$

Integrating over time, we get by (3.95)

$$\begin{aligned}
& \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \max \left(\|\sigma^{k,w}\|_{L^1}, \|\xi^{k,w}\|_{L^1} \right) \lesssim c_k^2 \exp(2\Gamma|n|T_k) \\
& \quad \lesssim c_k^\alpha \\
& \quad = \underset{k \rightarrow +\infty}{o} \left(c_k^{1-(1-\alpha/2)\gamma/\Gamma} \right). \tag{3.100}
\end{aligned}$$

Gathering (3.98), (3.99) and (3.100), we get

$$\begin{aligned}
& \frac{\int \min \left(\|\rho^{k,w} - 1\|_{L^1((0, T_k) \times \mathbb{T}^d)}, \|v^{k,w} - w\|_{L^1((0, T_k) \times \mathbb{T}^d)} \right) d\mu(w)}{\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \left\{ \max \left(\|\rho_0^{k,w} - 1\|_{W^{s,\infty}}, \|v_0^{k,w} - w\|_{W^{s,\infty}} \right) \right\}^\alpha} \\
& \quad \gtrsim \frac{c_k^{1-(1-\alpha/2)\gamma/\Gamma} + \underset{k \rightarrow +\infty}{o} \left(c_k^{1-(1-\alpha/2)\gamma/\Gamma} \right)}{c_k^\alpha} \\
& \quad \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty,
\end{aligned}$$

by (3.95), which gives (3.92).

To prove (3.93), remark that for all $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
U[\boldsymbol{\rho}^k, \mathbf{v}^k] &= U[\mathbf{1}, \mathbf{w}] + V[\mathbf{r}^k, \mathbf{u}^k] + V[\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k] \\
&\quad + A \underbrace{\int \{\Phi(w + u^{k,w} + \xi^{k,w}) - \Phi(w)\} (r^{k,w} + \sigma^{k,w}) \, d\mu(w)}_{W_1} \\
&\quad + A \underbrace{\int \{\Phi(w + u^{k,w} + \xi^{k,w}) - \Phi(w) - d\Phi(w) \cdot (u^{k,w} + \xi^{k,w})\} \, d\mu(w)}_{W_2}.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

On the one hand, $V[\mathbf{r}^k, \mathbf{u}^k]$ is given by (3.91) and we compute easily as in (3.99) that

$$\|V[\mathbf{r}^k, \mathbf{u}^k]\|_{L^1} \gtrsim c_k^{1-(1-\alpha/2)\gamma/\Gamma} + \underset{k \rightarrow +\infty}{o} \left(c_k^{1-(1-\alpha/2)\gamma/\Gamma} \right). \tag{3.102}$$

On the other hand, using the definition of V in (3.11) and estimates (3.5), (3.6) and (3.10),

$$\begin{aligned}
\|V[\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k]\|_{L^1} &\lesssim \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \max \left(\|\sigma^{k,w}\|_{L^1}, \|\xi^k\|_{L^1} \right) \\
&\lesssim c_k^\alpha = \underset{k \rightarrow +\infty}{o} \left(c_k^{1-(1-\alpha/2)\gamma/\Gamma} \right),
\end{aligned} \tag{3.103}$$

by (3.100).

Let us show how to treat W_1 defined in (3.101), W_2 being treated in the same way and satisfying the same estimate. In the second line, we use (3.10) and Proposition 3.5.4, in the third line, we use (3.49), in the fourth line, we use (3.47), and finally in the last line, we use the same arguments as for (3.100):

$$\begin{aligned}
\|W_1\|_{L^1} &\leq \int_0^{T_k} \left| A \int \{\Phi(w + u^{k,w} + \xi^{k,w}) - \Phi(w)\} (r^{k,w} + \sigma^{k,w}) \, d\mu(w) \right|_0 \, dt \\
&\lesssim \int_0^{T_k} \int |\Phi(w + u^{k,w} + \xi^{k,w}) - \Phi(w)|_0 |r^{k,w} + \sigma^{k,w}|_0 \, d\mu(w) \, dt \\
&\lesssim \int_0^{T_k} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} |r^{k,w} + \sigma^{k,w}|_0 |u^{k,w} + \xi^{k,w}|_0 \, dt \int |\Phi'|(|w| + r_0) \, d\mu(w) \\
&\lesssim c_k^\alpha = \underset{k \rightarrow +\infty}{o} \left(c_k^{1-(1-\alpha/2)\gamma/\Gamma} \right).
\end{aligned} \tag{3.104}$$

We get (3.93) by gathering (3.102), (3.103), (3.104) and (3.98).

Finally, (3.94) is a consequence of (3.96) and the explicit estimate

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \max \left(\|\rho_0^{k,w} - 1\|_{L^1}, \|v_0^{k,w} - w\|_{L^1} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} c_k.$$

□

We can now go back to the kinetic formulation and give a corollary which implies Theorem 3.1.2. We recall that in Theorem 3.1.2, we suppose that we control a certain number of macroscopic observables at the initial time. But with (1.92), it is easy to go from a multiphasic representation of the system to macroscopic observables. This remark leads to the following statement.

Corollary 3.6.3. Take μ an unstable profile, $N \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0, 1]$. Take $(\boldsymbol{\rho}_0^k, \mathbf{v}_0^k)_{k \in \mathbb{N}}$ and $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ as in the previous theorem, and $(\boldsymbol{\rho}^k, \mathbf{v}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ the corresponding solutions. For each i , call

$$\langle f_0^k, \varphi_i \rangle := \int \varphi_i(v_0^{k,w}) \rho_0^{k,w} d\mu(w).$$

Then, we have:

$$\frac{\|U[\boldsymbol{\rho}^k, \mathbf{v}^k] - U[\mathbf{1}, \mathbf{w}]\|_{L^1((0, T_k) \times \mathbb{T}^d)}}{\sum_{i=1}^N \|\langle f_0^k, \varphi_i \rangle - \langle \mu, \varphi_i \rangle\|_{W^{s, \infty}(\mathbb{T}^d)}^\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (3.105)$$

Moreover,

$$T_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} |\log \varepsilon_k|, \quad (3.106)$$

where $\varepsilon_k := \|U[\boldsymbol{\rho}^k, \mathbf{v}^k]|_{t=0} - U[\mathbf{1}, \mathbf{w}]\|_{L^1}$.

Proof. In view of (3.93), to prove (3.105) it suffices to show that if $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, there exists $C > 0$ such that for all smooth $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})$,

$$\begin{aligned} & \left\| \int \varphi(v^w) \rho^w d\mu(w) - \int \varphi(w) d\mu(w) \right\|_{W^{s, \infty}} \\ & \leq C \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \left\{ \max \left(\|\rho^w - 1\|_{W^{s, \infty}}, \|v^w - w\|_{W^{s, \infty}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

This is an easy consequence of the following decomposition:

$$\begin{aligned} & \int \varphi(v^w) \rho^w d\mu(w) - \int \varphi(w) d\mu(w) \\ & = \int \{\varphi(v^w) \rho^w - \varphi(w)\} d\mu(w) \\ & = \int \varphi(v^w) \{\rho^w - 1\} d\mu(w) + \int \{\varphi(v^w) - \varphi(w)\} d\mu(w). \end{aligned}$$

To prove (3.106), just remark that because of (3.91), taking (c_k) as in the previous proof,

$$\|U[\boldsymbol{\rho}^k, \mathbf{v}^k]|_{t=0} - U[\mathbf{1}, \mathbf{w}]\|_{L^1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \max \left(\|\rho_0^{k,w} - 1\|_{L^1}, \|v_0^{k,w} - w\|_{L^1} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} c_k. \quad \square$$

3.6.2 Ill-posedness when the spectrum is highly unbounded

With an additional assumption, we can show an ill-posedness result for equations (3.2)-(3.3). The assumption is the following.

Assumption on the structure of the unbounded spectrum

We assume that the number γ_0 defined in (3.22) satisfies

$$\gamma_0 = \limsup_{|n| \rightarrow +\infty} \sup_{\lambda \in S_n} \frac{\Re(\lambda)}{|n|}. \quad (3.107)$$

(We recall that S_n is defined in (3.20).) This assumption means that there exist exponential growing modes of frequency n with growing rates of order $|n|\gamma_0$ for arbitrary large $|n|$.

Example 3.6.4. As already noticed in the introduction, the kinetic Euler equation (1.53) and the Vlasov-Benney equation (1.63) satisfy the following property: if $n \in \mathbb{Z}^d$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ are such that $\lambda \in S_n$, then for all $k \in \mathbb{N}^*$, $k\lambda \in S_{kn}$. This can be directly checked using the Penrose conditions (3.16) and (3.17). As a consequence, for all $n \in \mathbb{Z}^d$ and $k \in \mathbb{N}$,

$$kS_n \subset S_{kn}.$$

Equation (3.107) follows easily. This property is a consequence of the following scaling for (1.47) and (1.63):

if $f(t, x, v)$ is a solution and $k \in \mathbb{N}$, then $f(kt, kx, v)$ is also a solution.

Under this assumption, the instability proved at Theorem 3.6.1 is true even in small times.

Theorem 3.6.5. *Take μ an unstable profile satisfying assumption (3.107), $s \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0, 1]$. Then there exists $(\rho_0^k, \mathbf{v}_0^k)_{k \in \mathbb{N}}$ a family of analytic initial data tending uniformly in w towards the stationary solution $(\mathbf{1}, w)$ in $W^{s, \infty}$, $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a family of positive times **tending to zero** such that for all $k \in \mathbb{N}$, the unique analytic solution (ρ^k, \mathbf{v}^k) to (3.2)-(3.3) starting from $(\rho_0^k, \mathbf{v}_0^k)$, is defined up to time T_k , and satisfies (3.92) and (3.93).*

Moreover

$$T_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{|\log \varepsilon_k|}{|n_k|} \right), \quad (3.108)$$

where

$$\varepsilon_k := \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \left\{ \max \left(\|\rho_0^{k, w} - 1\|_{L^1}, \|v_0^{k, w} - w\|_{L^1} \right) \right\}$$

and where n_k is the spatial frequency of the nearest exponential growing mode.

Proof. The proof is very similar to the one of Theorem 3.6.1, except that here the eigenvalue depends on k . Thanks to assumption (3.107), we choose $(n_k, \lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a family of solutions to (3.14) with

$$\begin{aligned} |n_k| &\underset{k \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad r_k &:= \frac{\Re(\lambda_k)}{|n_k|} \underset{k \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \gamma_0. \end{aligned}$$

Now we take for all k :

$$c_k := \frac{1}{|n_k|^\beta} \underset{k \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \beta := \frac{5}{\alpha}(\alpha s + 2). \quad (3.109)$$

We take γ sufficiently close to γ_0 to have (with $\Gamma = 2\gamma_0 - \gamma$)

$$a := 1 + \frac{1}{\beta} - \frac{\gamma}{\Gamma} \left(1 - \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{\beta} \right) < \alpha \left(1 - \frac{s}{\beta} \right), \quad (3.110)$$

$$a = 1 + \frac{1}{\beta} - \frac{\gamma}{\Gamma} \left(1 - \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{\beta} \right) < \frac{\alpha}{2}. \quad (3.111)$$

We suppose up to forgetting the first terms that for all $k \in \mathbb{N}$,

$$r_k \geq \gamma. \quad (3.112)$$

Using the notations (3.89) indexed by k for (n_k, λ_k) , we define

$$\begin{cases} r^{k,w}(t, x) := -c_k \frac{\cos \left[n_k \cdot x + |n_k| \varphi_k t - 2\theta_k(w) \right]}{r_k^2 + (\varphi_k + u_k \cdot w)^2} \exp(|n_k| r_k t), \\ u^{k,w}(t, x) := c_k \frac{\sin \left[n_k \cdot x + |n_k| \varphi_k t - \theta_k(w) \right]}{\sqrt{r_k^2 + (\varphi_k + u_k \cdot w)^2}} \exp(|n_k| r_k t) \times u_k. \end{cases} \quad (3.113)$$

Remark that

$$\frac{c_k |n_k|}{c_k^{\alpha/4}} = c_k^{1-\alpha/\{4(\alpha s+1)\}-\alpha/4} \leq c_k^{1-\alpha/2} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Consequently, we can suppose that for all $k \in \mathbb{N}$,

$$c_k |n_k| < c_k^{\alpha/4}.$$

In that case, we take T_k the unique positive number satisfying

$$c_k |n_k| \exp(|n_k| \Gamma T_k) = c_k^{\alpha/4}. \quad (3.114)$$

Remark that automatically, as $1 < \beta(1 - \alpha/4)$,

$$T_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{|\log c_k|}{|n_k|} \right) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Formula (3.108) follows easily. Then,

$$\|D\mathbf{r}_0^k, D\mathbf{u}_0^k\|_{\Gamma T_k} \lesssim c_k |n_k| \exp(|n_k| \Gamma T_k) = c_k^{\alpha/4} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

So when k is sufficiently large, condition (3.42) of Theorem 3.5.1 is satisfied with $\delta_0 = \Gamma T_k$. As a consequence, the unique analytic solution (ρ^k, \mathbf{v}^k) to (3.2)-(3.3) starting from the initial data $(\rho_0^k, \mathbf{v}_0^k) = (\mathbf{1} + \mathbf{r}_0^k, \mathbf{w} + \mathbf{u}_0^k)$ is well defined up to time T_k , and is of the form

$$\forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \rho^{k,w} = 1 + r^{k,w} + \sigma^{k,w} \quad \text{and} \quad v^{k,w} = w + u^{k,w} + \xi^{k,w}.$$

Moreover, (σ^k, ξ^k) satisfies the estimate (3.43), which gives:

$$\sup_{t \leq T_k} \|\sigma(t), \xi(t)\|_{\Gamma(T_k-t)} \lesssim c_k^2 |n_k|^2 \exp(2|n_k| \Gamma T_k). \quad (3.115)$$

In this context (3.98) becomes (using (3.109)):

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \max \left(\|\rho_0^{k,w} - 1\|_{W^{s,\infty}}, \|v_0^{k,w} - w\|_{W^{s,\infty}} \right) \sim c_k |n_k|^s = c_k^{1-s/\beta}. \quad (3.116)$$

Equation (3.99) becomes (thanks to (3.112) and (3.114) and the definition of a in (3.110))

$$\begin{aligned} \int \min \left(\|r^{k,w}\|_{L^1}, \|u^{k,w}\|_{L^1} \right) d\mu(w) &\gtrsim \frac{c_k \exp(|n| \Gamma T_k)^{\gamma/\Gamma} - c_k}{|n_k|} \\ &\gtrsim c_k^a - c_k^{1+1/\beta}. \end{aligned}$$

But clearly $a < 1 + 1/\beta$, so that

$$\int \min \left(\|r^{k,w}\|_{L^1}, \|u^{k,w}\|_{L^1} \right) d\mu(w) \gtrsim c_k^a + \underset{k \rightarrow +\infty}{o} (c_k^a). \quad (3.117)$$

Finally, (3.100) becomes because of (3.114), (3.111) and (3.115):

$$\begin{aligned} \max \left(\|\sigma^{k,w}\|_{L^1}, \|\xi^{k,w}\|_{L^1} \right) &\lesssim c_k^2 |n_k|^2 \exp(2\Gamma |n_k| T_k) \\ &\lesssim c_k^{\alpha/2} = \underset{k \rightarrow +\infty}{o} (c_k^a), \end{aligned} \quad (3.118)$$

Gathering (3.116), (3.117) and (3.118), we get

$$\begin{aligned} &\frac{\int \min \left(\|\rho^{k,w} - 1\|_{L^1((0,T_k) \times \mathbb{T}^d)}, \|v^{k,w} - w\|_{L^1((0,T_k) \times \mathbb{T}^d)} \right) d\mu(w)}{\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \left\{ \max \left(\|\rho_0^{k,w} - 1\|_{W^{s,\infty}}, \|v_0^{k,w} - w\|_{W^{s,\infty}} \right) \right\}^\alpha} \\ &\gtrsim \frac{c_k^a + \underset{k \rightarrow +\infty}{o} (c_k^a)}{c_k^{\alpha(1-s/\beta)}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \end{aligned}$$

using (3.110) in the last line. Estimate (3.93) is proved in the exact same way as in the previous proof. \square

As in the previous subsection, Theorem 3.6.5 has a kinetic counterpart. The following corollary implies Theorem 3.1.3 in the Vlasov-Benney case. For the kinetic Euler case, the next subsection (in particular Theorem 3.6.10) is also needed.

Corollary 3.6.6. *Take μ an unstable profile satisfying assumption 3.107, $N \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0, 1]$. Take $(\rho_0^k, \mathbf{v}_0^k)_{k \in \mathbb{N}}$ and $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ as in the previous theorem (in particular (T_k) converges to zero), and $(\rho^k, \mathbf{v}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ the corresponding solutions. For each i , call*

$$\langle f_0^k, \varphi_i \rangle := \int \varphi_i(v_0^{k,w}) \rho_0^{k,w} d\mu(w).$$

Then, we have:

$$\frac{\|U[\rho^k, \mathbf{v}^k] - U[\mathbf{1}, \mathbf{w}]\|_{L^1((0,T_k) \times \mathbb{T}^d)}}{\sum_{i=1}^N \|\langle f_0^k, \varphi_i \rangle - \langle \mu, \varphi_i \rangle\|_{W^{s,\infty}(\mathbb{T}^d)}^\alpha} \underset{k \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Moreover

$$T_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{|\log \varepsilon_k|}{|n_k|} \right),$$

where $\varepsilon_k := \|U[\rho^k, \mathbf{v}^k]|_{t=0} - U[\mathbf{1}, \mathbf{w}]\|_{L^1}$ and n_k is the spatial frequency of the nearest exponential growing mode.

Proof. The proof is the same than the one of Corollary 3.6.3. \square

3.6.3 The specific case of the kinetic Euler equation

As already said in the introduction, in the case of the kinetic Euler equation, our abstract framework let us solve (1.53), but not (1.47): our method applies when we have a formula for the force field, and not when it is defined through a constraint. So an argument must be added to prove Theorem 3.1.3. It is done in three steps.

First we will show in Theorem 3.6.7 that the measure-valued solutions to (1.53) built in Theorem 3.5.1 are in fact measure-valued solutions to (1.47) provided the initial data satisfies (1.50)-(1.51) (which makes sense in a measure-valued setting).

Unfortunately, the initial data used in the proof of Theorem 3.6.5 (the initial data of the exponential growing modes) do not satisfy this property. We will give in Lemma 3.6.8 a way to add a quadratic perturbation to these initial data in order to regain (1.50)-(1.51).

Finally, Theorem 3.6.10 will be nothing but an adaptation of Theorem 3.6.5 in the case of the kinetic Euler equation. It can be seen as a stability result for this theorem: if we modify the initial data chosen in the proof of Theorem 3.6.5 by a quadratic perturbation, then the result is still true.

The two kinetic Euler equations coincide in analytic regularity

Take f a smooth solution to (1.53). Such a solution f satisfies

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\int f(t, x, v) \, dv \right) + \operatorname{div} \left(\int v f(t, x, v) \, dv \right) &= 0, \\ \partial_t \operatorname{div} \left(\int v f(t, x, v) \, dv \right) + \operatorname{div} \left(-\nabla p(t, x) \left\{ \int f(t, x, v) \, dv - 1 \right\} \right) &= 0, \end{aligned}$$

and so

$$\partial_{tt} \left(\int f(t, x, v) \, dv \right) + \operatorname{div} \left(-\nabla p(t, x) \left\{ \int f(t, x, v) \, dv - 1 \right\} \right) = 0,$$

This equation holds in the measure-valued setting for the solutions of Theorem 3.5.1 taking successively $\varphi \equiv 1$ and $\varphi(v) := v$ in the weak formulation. (The second one is not bounded but f must have a finite second order moment in virtue of (3.5), (3.24) and (3.43).) We call $R = (R(t, x))$ the scalar function defined by

$$R(t, x) := \int f(t, x, v) \, dv - 1.$$

Considering the previous computation, as soon as

$$\int f_0(\bullet, v) \, dv \equiv 1 \quad \text{and} \quad \operatorname{div} \left(\int v f_0(\bullet, v) \, dv \right) \equiv 0, \quad (3.119)$$

then R must be a solution to the linear equation (once p is known)

$$\begin{cases} \partial_{tt} R(t, x) + \operatorname{div} \left(-\nabla p(t, x) R(t, x) \right) = 0, \\ R|_{t=0} \equiv 0, \quad \partial_t R|_{t=0} \equiv 0. \end{cases} \quad (3.120)$$

We recall that because of (1.50) and (1.51), the initial condition of a solution to (1.47) must satisfy (3.119).

In Theorem 3.5.1, we have built solutions to (3.2)-(3.3) satisfying for some $\delta_0 > 0$ and $\Gamma > 0$ (among other estimates)

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq \delta_0/\Gamma} \sup_{0 \leq \delta \leq \delta_0 - \Gamma t} \|\rho(t), \mathbf{v}(t)\|_\delta &< +\infty, \\ \sup_{0 \leq t \leq \delta_0/\Gamma} \sup_{0 \leq \delta \leq \delta_0 - \Gamma t} (\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2} |Dp(t)|_\delta &< +\infty. \end{aligned}$$

(The second one is an easy consequence of (3.3), Proposition 3.5.6, (3.7) and (3.70).) Therefore, there is $C > 0$ such that for all $t \in [0, \delta_0/\Gamma)$, for all $\delta \in [0, \delta_0 - \Gamma t)$,

$$|Dp(t)|_\delta \leq \frac{C}{(\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2}}. \quad (3.121)$$

When integrating the estimate we have on ρ , we also get

$$\sup_{0 \leq t \leq \delta_0/\Gamma} \sup_{0 \leq \delta \leq \delta_0 - \Gamma t} |R(t)|_\delta < +\infty \quad (3.122)$$

We are now able to prove the following.

Theorem 3.6.7. *If (3.121) holds, the only solution to (3.120) satisfying (3.122) is 0.*

In particular, the solutions to (1.53) built in Theorem 3.5.1 and for which (3.119) holds are solutions to (1.47), as announced.

Proof. We call $T := \delta_0/\Gamma$ the time of existence of our solution and

$$t_0 := \sup\{t < T \text{ such that } R(t) = 0 \text{ and } \partial_t R(t) = 0\}.$$

The goal is to show that $t_0 = T$. By contradiction if it is not the case, we can do the change of variable $t \leftarrow (t - t_0)$, $T \leftarrow (T - t_0) > 0$, $\delta_0 \leftarrow (\delta_0 - \Gamma t_0)$ and suppose that $t_0 = 0$. Then, we just have to show that there exists $\varepsilon \in (0, T)$ such that

$$\forall t \leq \varepsilon, \quad R(t) = 0.$$

Indeed, if so, for all $t < \varepsilon$, $\partial_t R(t) = 0$ and the definition of t_0 would be contradicted. For $\varepsilon \in (0, T)$, we define

$$N(\varepsilon) := \sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \sup_{0 \leq \delta \leq \delta_0 - \Gamma t} |R(t)|_\delta < +\infty.$$

We will show that if ε is sufficiently small, then

$$N(\varepsilon) \leq \frac{1}{2} N(\varepsilon).$$

The result follows easily. Because $R(0) = \partial_t R(0) = 0$, for all $t < T$,

$$R(t, x) = \int_0^t \int_0^s \operatorname{div}(-\nabla p(\tau, x) R(\tau, x)) \, d\tau \, ds.$$

Thus, if $\delta < \delta_0 - \Gamma t$,

$$|R(t)|_\delta = \int_0^t \int_0^s |\operatorname{div}(-\nabla p(\tau) R(\tau))|_\delta \, d\tau \, ds.$$

But using Proposition 3.5.4 and Proposition 3.5.5, and defining

$$\delta'(\tau) := \delta + \frac{\delta_0 - \Gamma\tau - \delta}{2},$$

we get

$$\begin{aligned} |R(t)|_\delta &\leq \int_0^t \int_0^s \frac{|\nabla p(\tau)R(\tau)|_{\delta'(\tau)}}{\delta'(\tau) - \delta} d\tau ds \\ &\leq 2 \int_0^t \int_0^s \frac{|\mathbf{D}p(\tau)|_{\delta'(\tau)}|R(\tau)|_{\delta'(\tau)}}{\delta_0 - \delta - \Gamma\tau} d\tau ds. \end{aligned}$$

By (3.121) and the definition of N , if $\varepsilon > 0$ and $t \leq \varepsilon$,

$$\begin{aligned} |R(t)|_\delta &\leq 2\sqrt{2}CN(\varepsilon) \int_0^t \int_0^s \frac{1}{(\delta_0 - \delta - \Gamma\tau)^{3/2}} d\tau ds \\ &\leq \frac{4\sqrt{2}C}{\Gamma}N(\varepsilon) \int_0^t \frac{1}{(\delta_0 - \delta - \Gamma s)^{1/2}} ds \\ &= \frac{8\sqrt{2}C}{\Gamma^2}N(\varepsilon) \left((\delta_0 - \delta)^{1/2} - (\delta_0 - \delta - \Gamma t)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Taking the supremum on $\delta \leq \delta_0 - \Gamma t$, and then on $t \leq \varepsilon$, we get

$$N(\varepsilon) \leq \frac{8\sqrt{2}C}{\Gamma^2} \sqrt{\Gamma\varepsilon} N(\varepsilon).$$

We obtain the result by taking

$$\varepsilon \leq \frac{\Gamma^3}{512C^2}.$$

□

Choosing appropriate initial conditions

We recall that the initial conditions used in the proof of Theorem 3.6.5 are of the form $(\mathbf{1} + \mathbf{r}_0, \mathbf{w} + \mathbf{u}_0)$, \mathbf{r}_0 and \mathbf{u}_0 being given for all $w \in \mathbb{R}^d$ and $x \in \mathbb{T}^d$ by the formulae:

$$\begin{cases} r_0^w(x) := -c \frac{\cos[n \cdot x - 2\theta(w)]}{r^2 + (\varphi + u \cdot w)^2} = -c \Re \left(\frac{\exp(in \cdot x)}{(r + i\varphi + iu \cdot w)^2} \right), \\ u_0^w(x) := c \frac{\sin[n \cdot x - \theta(w)]}{\sqrt{r^2 + (\varphi + u \cdot w)^2}} \times u = -c \Re \left(\frac{i \exp(in \cdot x)}{r + i\varphi + iu \cdot w} \right) \times u, \end{cases} \quad (3.123)$$

where c and $\varphi \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $n \in \mathbb{Z}^d$, $u = n/|n|$ and $\theta(w) := \arctan(\{\varphi + u \cdot w\}/r)$. In the case of the kinetic Euler equation, these are initial data of an exponential growing mode corresponding to the eigenvalue $\lambda = |n|(r + i\varphi)$ provided (3.16) holds. We suppose it is the case.

The first condition in (3.119) holds for these data. Indeed, in this context (use (1.92)), we have to check that for all $x \in \mathbb{T}^d$,

$$\int r_0^w(x) d\mu(w) = 0.$$

But

$$\begin{aligned}
\int r_0^w(x) d\mu(w) &= -c \Re \left(\exp(in \cdot x) \int \frac{d\mu(w)}{(r + i\varphi + iu \cdot w)^2} \right) \\
&= -c|n|^2 \Re \left(\exp(in \cdot x) \int \frac{d\mu(w)}{(\lambda + in \cdot w)^2} \right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.124}$$

by (3.16).

However, the second condition in (3.119) does not hold in general. In this setting, it would mean that

$$\operatorname{div}_x \left(\int (w + u_0^w(x))(1 + r_0^w(x)) d\mu(w) \right)$$

cancel. But

$$\begin{aligned}
&\int (w + u_0^w(x))(1 + r_0^w(x)) d\mu(w) \\
&= \int w d\mu(w) - c \Re \left(\exp(in \cdot x) \int \left\{ \frac{w}{(r + i\varphi + iu \cdot w)^2} + \frac{i u}{r + i\varphi + iu \cdot w} \right\} d\mu(w) \right) \\
&\quad - c^2 \int \frac{\cos[n \cdot x - 2\theta(w)] \sin[n \cdot x - \theta(w)]}{(r^2 + (\varphi + u \cdot w)^2)^{3/2}} d\mu(w) \times u.
\end{aligned}$$

Taking the divergence, we get

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}_x \left(\int (w + u_c^w(0, x))(1 + r_c^w(0, x)) d\mu(w) \right) \\
&= -c|n|^2 \Re \left(\exp(in \cdot x) \int \left\{ \frac{in \cdot w}{(\lambda + in \cdot w)^2} - \frac{1}{\lambda + in \cdot w} \right\} d\mu(w) \right) \\
&\quad - c^2 n \cdot u \int \frac{\cos[2n \cdot x - 3\theta(w)]}{(r^2 + (\varphi + u \cdot w)^2)^{3/2}} d\mu(w).
\end{aligned}$$

But the first term can be rewritten

$$c|n|^2 \Re \left(\lambda \exp(in \cdot x) \int \frac{d\mu(w)}{(\lambda + in \cdot w)^2} \right) = 0 \tag{3.125}$$

because of (3.16). Finally, we end up with

$$\operatorname{div}_x \left(\int (w + u_0^w(x))(1 + r_0^w(x)) d\mu(w) \right) = -c^2 |n|^4 \Re \left(\exp(2in \cdot x) \int \frac{d\mu(w)}{(\lambda + in \cdot w)^3} \right),$$

which does not cancel in general. Nevertheless, the crucial point is that the first order (in c) cancels. We give the initial data we shall consider in the following lemma.

Lemma 3.6.8. Take $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$ the couple defined in (3.123) and suppose (3.16) holds with $\lambda = |n|(r + i\varphi)$. We call

$$V := \int \left\{ r_0^w u_0^w - \int r_0^w(y) u_0^w(y) dy \right\} d\mu(w) \quad (3.126)$$

$$\forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \tilde{u}_0^w = u_0^w - V. \quad (3.127)$$

Then $(\boldsymbol{\rho}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0) := (\mathbf{1} + \mathbf{r}_0, \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{u}}_0)$ belongs to \mathbf{L}_0 and satisfies the multiphasic version of (3.119).

In particular, according to Theorem 3.6.7, the solution to (1.53) built in Theorem 3.5.1 starting from these data are also solution to (1.47).

Remark 3.6.9. The vector field V is a quadratic function of (\mathbf{r}, \mathbf{u}) . We can even give the following explicit formula using (3.123) and trigonometric identities. For all $x \in \mathbb{T}^d$, we have

$$V(x) = -\frac{c^2}{2} \int \frac{\sin[2n \cdot x - 3\theta(w)]}{(r^2 + (\varphi + u \cdot w)^2)^{3/2}} d\mu(w) \times u. \quad (3.128)$$

Proof. The first condition in (3.119) only involves \mathbf{r}_0 , which is unchanged, and has already been checked in (3.124). We just have to check the second one. We have

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}_x \left(\int (1 + r_0^w)(w + \tilde{u}_0^w) d\mu(w) \right) \\ &= \operatorname{div}_x \left(\int (1 + r_0^w)(w + u_0^w - V) d\mu(w) \right) \\ &= \operatorname{div}_x \left(\int \{r_0^w w + u_0^w\} d\mu(w) \right) + \operatorname{div}_x \left(\int r_0^w u_0^w d\mu(w) \right) \\ & \quad - \operatorname{div}_x \left(V \int (1 + r_0^w) d\mu(w) \right). \end{aligned}$$

We have checked in (3.125) that the first term cancels. The second one equals the third one because of (3.124) and because by the definition of V ,

$$\operatorname{div} V = \operatorname{div} \left(\int r_0^w u_0^w d\mu(w) \right).$$

Finally, $(0, V) \in \mathbf{L}_0$ because V is the gradient of the function defined for all $x \in \mathbb{T}^d$ by:

$$\frac{c^2}{4|n|} \int \frac{\cos[2n \cdot x - 3\theta(w)]}{(r^2 + (\varphi + u \cdot w)^2)^{3/2}} d\mu(w).$$

□

Stability of Theorem 3.6.5

We are now ready to state and prove Theorem 3.6.5 in the case of the kinetic Euler equation. Of course as in the previous cases, this theorem has a kinetic version that implies Theorem 3.1.3 in the kinetic Euler case.

Theorem 3.6.10. *Take μ an unstable profile for the kinetic Euler equation (satisfying the Penrose condition (3.16)), $s \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0, 1]$. Consider $(\rho_0^k, \mathbf{v}_0^k)_{k \in \mathbb{N}}$ and $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ the families of data and times given by Theorem 3.6.5.*

Then for all k , the unique analytic solution $(\tilde{\rho}^k, \tilde{\mathbf{v}}^k)$ to the multiphasic kinetic Euler equation starting from $(\rho_0^k, \tilde{\mathbf{v}}_0^k)$ is defined up to time T_k ($\tilde{\mathbf{v}}_0^k$ being chosen as in Lemma 3.6.8). This family of solutions still satisfy the asymptotics (3.92) and (3.93), and $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ still satisfies (3.108).

Remark 3.6.11. In particular, thanks to Theorem 3.6.7 and Lemma 3.6.8, Theorem 3.6.5 holds for Equation (1.47), and not only for (1.53).

Proof. Let us take $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, β , γ , Γ and $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ as in the proof of Theorem 3.6.5.

First, let us check that for k sufficiently large, there exist a multiphasic solution to (1.53) starting from $(\rho_0^k, \tilde{\mathbf{v}}_0^k)$ up to time T_k . To use Theorem 3.5.1, we need to check condition (3.42). We just have to consider the velocity part because the density part is unchanged. Using the notations of Lemma 3.6.8 with the index k (V_k is defined in (3.126) and $\tilde{\mathbf{u}}_0^k$ is defined in (3.127)), we have (using (3.128)):

$$\begin{aligned} \|D\tilde{\mathbf{u}}_0^k\|_{\Gamma T_k} &\leq \|D\mathbf{u}_0^k\|_{\Gamma T_k} + |DV_k|_{\Gamma T_k} \\ &\lesssim c_k |n_k| \exp(|n_k| \Gamma T_k) + c_k^2 |n_k| \exp(2|n_k| \Gamma T_k) \\ &\lesssim c_k^{\alpha/4} + \frac{c_k^{\alpha/2}}{|n_k|}, \end{aligned}$$

the last line being obtained thanks to (3.114). In particular, if k is sufficiently large, $\|\tilde{\mathbf{u}}_0^k\|_{\Gamma T_k} \leq \varepsilon_0$. So for such k , Theorem 3.5.1 guarantees the existence of a unique analytic multiphasic solution $(\tilde{\rho}_0^k, \tilde{\mathbf{v}}^k)$ to (1.53) up to time T_k . It has the following form: for all $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^{k,w} &= 1 + r^{k,w} + (\tilde{r}^{k,w} - r^{k,w}) + \tilde{\sigma}^{k,w}, \\ \tilde{\mathbf{v}}^{k,w} &= w + u^{k,w} + (\tilde{u}^{k,w} - u^{k,w}) + \tilde{\xi}^{k,w}, \end{aligned}$$

where:

- $(\mathbf{r}^k(t), \mathbf{u}^k(t)) = S_t(\mathbf{r}_0^k, \mathbf{u}_0^k)$ is given by (3.113),
- $(\tilde{\mathbf{r}}^k(t), \tilde{\mathbf{u}}^k(t)) = S_t(\mathbf{r}_0^k, \tilde{\mathbf{u}}_0^k)$,
- $(\tilde{\sigma}^k, \tilde{\xi}^k)$ satisfies the same estimates as (σ^k, ξ^k) in the proof of Theorem 3.6.5.

Comparing with the proof of Theorem 3.6.5, we just need to show that the additional term

$$(\tilde{\mathbf{r}}^k(t), \tilde{\mathbf{u}}^k(t)) - (\mathbf{r}^k(t), \mathbf{u}^k(t)) = S_t(0, V_k)$$

is negligible both in the estimate of the initial condition and in the L^1 estimate. Thus, the two things we have to prove are:

- for the initial condition

$$\|V_k\|_{W^{s,\infty}} = o_{k \rightarrow +\infty} (c_k^{1-s/\beta}),$$

- for the L^1 estimate

$$\|S_t(0, V_k)\|_{L^1((0, T_k) \times \mathbb{T}^d)} = o_{k \rightarrow +\infty}(c_k^a),$$

where a is defined in (3.110).

For the first one, thanks to (3.128) and (3.109),

$$\|V_k\|_{W^{s, \infty}} \lesssim c_k^2 \times 2^s |n_k|^s \lesssim (c_k^{1-s/\beta})^2 = o_{k \rightarrow +\infty}(c_k^{1-s/\beta}).$$

For the second one,

$$\begin{aligned} \|S_t(0, V_k)\|_{L^1_{t,x}} &\leq \int_0^{T_k} \|S_t(0, V_k)\|_0 dt \\ &\lesssim \int_0^{T_k} |V_k|_{\Gamma t} dt && \text{by (3.4.6),} \\ &\lesssim c_k^2 \int_0^{T_k} \exp(2|n_k|\Gamma t) dt && \text{by (3.128),} \\ &\lesssim \frac{c_k^2}{|n_k|} \exp(2|n_k|\Gamma T_k) \\ &\lesssim \frac{c_k^{\alpha/2}}{|n_k|^3} && \text{by (3.114),} \\ &\lesssim c_k^{\alpha/2+3/\beta} = o_{k \rightarrow +\infty}(c_k^a) && \text{by (3.111).} \end{aligned}$$

This concludes the proof. □

Appendices

3.A Superpositions of Diracs are unstable

In this section, we give ourselves an integer $p \geq 2$, p positive numbers $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ whose sum is 1, and p distinct points of \mathbb{R}^d , a_1, \dots, a_p . We define

$$\mu := \alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_p \delta_{a_p}.$$

The measure μ is unstable for the kinetic Euler equation.

Theorem 3.A.1. *The measure μ is unstable in the sense of the Penrose condition (3.16).*

Proof. Take $n \in \mathbb{Z}^d$ such that $n \cdot a_1, \dots, n \cdot a_p$ are distinct. We will show that there exists $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\lambda) > 0$ such that

$$\int \frac{d\mu(w)}{(\lambda + in \cdot w)^2} = \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{(\lambda + in \cdot a_k)^2} = 0. \quad (3.129)$$

For all $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\lambda) \neq 0$, (3.129) holds if and only if $P(\lambda) = 0$, where P is the following polynomial:

$$P(X) := \sum_{k=1}^p \alpha_k \prod_{l \neq k} (X + in \cdot a_l)^2.$$

This polynomial is of degree $2(p-1)$. According to the fundamental theorem of algebra, it admits at least one complex root z .

If $z = ix$ with $x \in \mathbb{R}$, then either there is exactly one k_0 such that $x = -n \cdot a_{k_0}$ or for all l , $x \neq -n \cdot a_l$ (if so, we set $k_0 := 1$). In each case, for all $l \neq k_0$, $x \neq -n \cdot a_l$, so

$$\begin{aligned} (-1)^p P(ix) &= \sum_{k=1}^p \alpha_k \prod_{l \neq k} (x + n \cdot a_l)^2 \\ &\geq \alpha_{k_0} \prod_{l \neq k_0} (x + n \cdot a_l)^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Hence, we get a contradiction and $\Re(z)$ cannot be 0.

Moreover remark that $P(-\bar{X}) = \overline{P(X)}$. So we also have $P(-\bar{z}) = 0$. But necessarily, $\Re(z) > 0$ or $\Re(-\bar{z}) > 0$. We conclude that there is $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\lambda) > 0$ with $P(\lambda) = 0$. For this λ , (3.129) holds. \square

3.B Proofs of the properties of the analytic norms

We give in this appendix the proofs of the results stated in Subsection 3.5.2.

Proof of Proposition 3.5.4. We have for all $w \in \mathbb{R}^d$ and $x \in \mathbb{T}^d$:

$$f^w(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_k(w) \exp(ik \cdot x) \quad \text{and} \quad g^w(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \hat{g}_l(w) \exp(il \cdot x),$$

with for all n \hat{f}_n and \hat{g}_n in L^∞ . Consequently,

$$f^w(x)g^w(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{k+l=n} \hat{f}_k(w)\hat{g}_l(w) \right) \exp(in \cdot x).$$

It follows with (3.18) that

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\mathbf{g}\|_\delta &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left| \sum_{k+l=n} \hat{f}_k \hat{g}_l \right|_\infty \exp(\delta|n|) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k+l=n} |\hat{f}_k|_\infty \exp(\delta|k|) |\hat{g}_l|_\infty \exp(\delta|l|) \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}_k|_\infty \exp(\delta|k|) \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} |\hat{g}_l|_\infty \exp(\delta|l|) \right) \\ &= \|\mathbf{f}\|_\delta \|\mathbf{g}\|_\delta. \end{aligned}$$

□

Proof of Proposition 3.5.5. For all $w \in \mathbb{R}^d$ and $x \in \mathbb{T}^d$,

$$f^w(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_n(w) \exp(in \cdot x),$$

with for all n , $\hat{f}_n \in L^\infty$. Consequently, if $\delta' < \delta$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}f\|_{\delta'} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n| |\hat{f}_n|_\infty \exp(\delta'|n|) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}_n|_\infty \exp(\delta|n|) \times |n| \exp(-(\delta - \delta')|n|) \\ &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}_n|_\infty \exp(\delta|n|) \right) \times \sup_{a \in \mathbb{R}_+} \left\{ a \exp(-(\delta - \delta')a) \right\} \\ &\leq \frac{1}{\delta - \delta'} \|\mathbf{f}\|_\delta. \end{aligned}$$

□

Proof of Proposition 3.5.6. We have already seen in the proof of Proposition 3.5.4 that with the same notations, for all $x \in \mathbb{T}^d$ and $w \in \mathbb{R}^d$,

$$f^w(x)g^w(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{k+l=n} \hat{f}_k(w)\hat{g}_l(w) \right) \exp(in \cdot x).$$

So

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}(\mathbf{f}\mathbf{g})\|_\delta &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n| \left| \sum_{k+l=n} \hat{f}_k \hat{g}_l \right|_\infty \exp(\delta|n|) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k+l=n} (|k| + |l|) |\hat{f}_k|_\infty |\hat{g}_l|_\infty \exp(\delta|n|) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k+l=n} \left\{ |k| |\hat{f}_k|_\infty |\hat{g}_l|_\infty + |\hat{f}_k|_\infty |l| |\hat{g}_l|_\infty \right\} \exp(\delta|k|) \exp(\delta|l|) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |k| |\hat{f}_k|_\infty e^{\delta|k|} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} |\hat{g}_l|_\infty e^{\delta|l|} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}_k|_\infty e^{\delta|k|} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} |l| |\hat{g}_l|_\infty e^{\delta|l|} \\ &= \|\mathbf{f}\|_\delta \|\mathbf{D}\mathbf{g}\|_\delta + \|\mathbf{g}\|_\delta \|\mathbf{D}\mathbf{f}\|_\delta. \end{aligned}$$

Inequality (3.45) is simply obtained by induction on $|\alpha| + |\beta|$. □

Proof of Proposition 3.5.7. For all $x \in \mathbb{T}^d$,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_n \exp(in \cdot x),$$

with for all n $\hat{f}_n \in E$. Consequently

$$\nabla A f(x) = -i \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} P(n) \cdot \hat{f}_n \exp(in \cdot x)n.$$

In particular, using (3.10),

$$\begin{aligned} |\nabla A f|_\delta &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n| |P(n) \cdot \hat{f}_n| \exp(\delta|n|) \\ &\leq M \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n| |\hat{f}_n| \exp(\delta|n|) \\ &\leq M \|\mathbf{D}f\|_\delta. \end{aligned}$$

□

Proof of Lemma 3.5.8. The unique classical solution to (3.11) is given by (3.25) with $(\hat{\mathbf{r}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)$ given by Lemma 3.4.8. As a consequence,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}(\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t))\|_{\delta-\gamma t} &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n| |(\hat{\mathbf{r}}_n(t), \hat{\mathbf{u}}_n(t))|_\infty \exp(\{\delta - \gamma t\}|n|) \\ &\leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n| |(\hat{\mathbf{r}}_n(0), \hat{\mathbf{u}}_n(0))|_\infty \exp(\delta|n|) \\ &\leq C \|\mathbf{D}(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)\|_\delta. \end{aligned}$$

□

Proof of Lemma 3.5.9. For all $w \in \mathbb{R}^d$ and $x \in \mathbb{T}^d$,

$$f^w(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_n(w) \exp(in \cdot x),$$

with for all n , $\hat{f}_n \in L^\infty$. But by (3.46), $\hat{f}_0(w) = 0$ for all $w \in \mathbb{R}^d$. Consequently, if $\delta' < \delta$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\delta'} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |\hat{f}_n|_\infty \exp(\delta'|n|) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |\hat{f}_n|_\infty \exp(\delta|n|) \times \exp(-(\delta - \delta')|n|) \\ &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}_n|_\infty \exp(\delta|n|) \right) \times \exp(-(\delta - \delta')) \\ &= \frac{\|f\|_\delta}{\exp(\delta - \delta')}. \end{aligned}$$

□

Proof of Lemma 3.5.10. To prove these three estimates, we only need to consider the case when $\Phi : w \mapsto w^k$ for some $k \in \mathbb{N}^d$. For the general case, it suffices then to multiply the inequalities obtained by $|a_k|$ and to sum over k . For $i \in \{1, \dots, d\}$, we denote by $\mathbf{1}_i \in \mathbb{R}^d$ the vector whose only nonzero coordinate is a one at position i . Then, if α and $\beta \in \mathbb{N}^d$ are such that $\alpha + \beta = k - \mathbf{1}_i$, we chose $\gamma_{\alpha, \beta}^i \in \mathbb{N}$ in such a way that for all X and $Y \in \mathbb{R}^d$,

$$X^k - Y^k = \sum_{i=1}^d (X_i - Y_i) \sum_{\alpha + \beta = k - \mathbf{1}_i} \gamma_{\alpha, \beta}^i X^\alpha Y^\beta. \quad (3.130)$$

(Use Bernoulli's formula to find such $\gamma_{\alpha, \beta}^i$.) Up to now, we omit to specify in each line $i = 1, \dots, d$ and $\alpha + \beta = k - \mathbf{1}_i$. Remark that taking for $h \in \mathbb{R}$, $X = (1+h)\mathbf{1}_i$ and $Y = \mathbf{1}_i$, the previous formula leads to

$$(1+h)^{k_i} - 1 = h \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i (1+h)^{\alpha_i}.$$

Derivating at $h = 0$, we obtain

$$\sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i = k_i. \quad (3.131)$$

In particular, summing over i ,

$$\sum_{i, \alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i = |k|. \quad (3.132)$$

Proof of (3.49). We want to show

$$|(a+f)^k - (a+g)^k|_\delta \leq |f-g|_\delta \times |k|(|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-1}.$$

But by (3.130), the triangle inequality and Proposition 3.5.4,

$$\begin{aligned}
|(a+f)^k - (a+g)^k|_\delta &= \left| \sum_i (f_i - g_i) \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i (a+f)^\alpha (a+g)^\beta \right|_\delta \\
&\leq |f-g|_\delta \sum_{i, \alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i (|a| + |f|_\delta)^{|\alpha|} (|a| + |g|_\delta)^{|\beta|} \\
&\leq |f-g|_\delta (|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-1} \sum_{i, \alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i \\
&= |f-g|_\delta \times |k| (|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-1},
\end{aligned}$$

the last line being obtained by (3.132).

Proof of (3.50). To prove

$$|D(a+f)^k|_\delta \leq |k| |Df|_\delta (|a| + |f|) ^{|k|-1},$$

it suffices to develop $(a+f)^k$, use the triangle inequality and the fact that for all $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$|Df^\alpha|_\delta \leq |\alpha| |f|_\delta^{|\alpha|-1} |Df|_\delta,$$

which is (3.45) of Proposition 3.5.6 with $\beta = 0$. One can then re-factorize and get the result. The proof of (3.51) follows the same path.

Proof of (3.52). Here we need to prove

$$\begin{aligned}
|D\{(a+f)^k - (a+g)^k\}|_\delta &\leq |f-g|_\delta |Df, Dg|_\delta \times |k| (|k|-1) (|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-2} \\
&\quad + |D(f-g)|_\delta \times |k| (|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-1}.
\end{aligned}$$

but using (3.130) and then Proposition 3.5.6, we get

$$\begin{aligned}
|D\{(a+f)^k - (a+g)^k\}|_\delta &\leq \sum_{i, \alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i |D\{(f_i - g_i)(a+f)^\alpha (a+g)^\beta\}|_\delta \\
&\leq |f-g|_\delta \underbrace{\sum_{i, \alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i |D\{(a+f)^\alpha (a+g)^\beta\}|_\delta}_{:=S_1} \\
&\quad + |D(f-g)|_\delta \underbrace{\sum_{i, \alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i (a+f)^\alpha (a+g)^\beta}_ {:=S_2} |_\delta.
\end{aligned}$$

To estimate S_1 , remark that thanks to Proposition 3.5.6, for all α and β such that $|\alpha| + |\beta| = |k| - 1$,

$$\begin{aligned}
|D\{(a+f)^\alpha (a+g)^\beta\}|_\delta &\leq |\alpha| (|a| + |f|_\delta)^{|\alpha|-1} (|a| + |g|_\delta)^{|\beta|} |Df|_\delta \\
&\quad + |\beta| (|a| + |f|_\delta)^{|\alpha|} (|a| + |g|_\delta)^{|\beta|-1} |Dg|_\delta \\
&\leq (|\alpha| + |\beta|) (|a| + |f, g|_\delta)^{|\alpha| + |\beta| - 1} |Df, Dg|_\delta \\
&= (|k| - 1) (|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-2} |Df, Dg|_\delta.
\end{aligned}$$

It remains to sum over α, β and to use (3.132) to get

$$S_1 \leq |k|(|k| - 1)(|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-2} |Df, Dg|_\delta.$$

The sum S_2 is estimated in the same way than in the proof of (3.49). The result follows.

Proof of (3.53). At last, we have to show

$$\begin{aligned} & \left| D\{(a+f)^k - (a+g)^k - \sum_i k_i a^{k-1_i} (f_i - g_i)\} \right|_\delta \\ & \leq \left\{ |D(f-g)|_\delta |f, g|_\delta + |f-g|_\delta |Df, Dg|_\delta \right\} |k|(|k| - 1)(|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-2}. \end{aligned}$$

Thanks to (3.130) and (3.131),

$$\begin{aligned} & \left| D\{(a+f)^k - (a+g)^k - \sum_i k_i a^{k-1_i} (f_i - g_i)\} \right|_\delta \\ & = \left| D\left\{ \sum_i (f_i - g_i) \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i \left((a+f)^\alpha (a+g)^\beta - a^{\alpha+\beta} \right) \right\} \right|_\delta. \end{aligned}$$

By similar computations than before,

$$\begin{aligned} & \left| D\{(a+f)^k - (a+g)^k - \sum_i k_i a^{k-1_i} (f_i - g_i)\} \right|_\delta \\ & \leq |f-g|_\delta \underbrace{\sum_{i, \alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i |D\{(a+f)^\alpha (a+g)^\beta\}|_\delta}_{:=S_1} + |D(f-g)|_\delta \underbrace{\sum_{i, \alpha, \beta} \gamma_{\alpha, \beta}^i \left| (a+f)^\alpha (a+g)^\beta - a^{\alpha+\beta} \right|_\delta}_{:=S_2}. \end{aligned}$$

The sum S_1 has already been estimated in the proof of (3.52). For S_2 , remark that

$$\begin{aligned} \left| (a+f)^\alpha (a+g)^\beta - a^{\alpha+\beta} \right|_\delta & \leq (|a| + |f|_\delta)^{|\alpha|} (|a| + |g|_\delta)^{|\beta|} - |a|^{|\alpha|+|\beta|} \\ & \leq (|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-1} - |a|^{|k|-1} \\ & \leq (|k| - 1)(|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-2} |f, g|_\delta. \end{aligned}$$

Indeed, for the first line, you just have to develop the product, simplify the term $a^{\alpha+\beta}$, use the triangle inequality and Proposition 3.5.4, and finally re-factorize. Our estimation does not depend on i, α, β , so taking the sum, by (3.132),

$$S_2 \leq |k|(|k| - 1)(|a| + |f, g|_\delta)^{|k|-2} |f, g|_\delta.$$

Hence, the result. □

Chapter 4

The pressure field is not a smooth function of the endpoints

We recall that the main results of this chapter have been presented in Subsection 1.4.3 above. This chapter will be the subject of a forthcoming article.



The goal of this chapter is to prove Theorems 1.4.6 and 1.4.5 stated in the introduction. Everything is done in the flat torus $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Contrarily to the other chapters where we consider the problem IOT (Problem 1.1.11) between the times 0 and 1, here, we will often deal with the same problem, but between the times 0 and $T > 0$, see footnote 4 of the introduction.

Theorem 1.4.6 asserts that as soon as the pressure field is semi-concave in the following sense¹:

$$\exists C = (C_t) \in L^1(0, T) \quad \text{such that} \quad D^2 p(t, \bullet) \leq C_t \text{Id}, \quad (4.1)$$

then any solution of the incompressible optimal transport problem IOT (Problem 1.1.11) induces through formula (1.46) a weak solution to the kinetic Euler equation (1.47), and any weak solution to the kinetic Euler equation (1.47) with compact support generates as superposition solutions (in the sense of [1, Definition 3.2], more on this in Subsection 4.3.3) some solutions to IOT, at least when restricted to a smaller set of times.

Theorem 1.4.5 shows that as an element of $L_t^r L_x^1$, $r > 1$, the pressure field of incompressible optimal transport cannot be a smooth function of the endpoint conditions.

Let us give an outline of this Chapter.

4.1 Outline of the chapter

In Section 4.2, we will show the correspondence between Newton's law and Lagrangian mechanics in a context where the potential is only semi-concave. We will start by giving in 4.2.1 some easy facts on semi-concave functions of the torus. We will then show the equivalence strictly speaking in Subsection 4.2.2. More precisely, we show in Theorem 4.2.12 that when ϕ satisfies condition (4.1),

¹We reproduce here formula 1.94 for clarity.

then any minimizer of the Lagrangian

$$\int_0^T \left\{ \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} - \phi(t, \omega_t) \right\} dt$$

up to homotopy relative to endpoints satisfies the Newton law:

$$\ddot{\omega}_t = -\nabla\phi(t, \omega_t).$$

in a weak sense to be specified later, in (4.5). We give in Theorem 4.2.15 a condition on the function C appearing in formula (4.1) for a solution to the Newton law to be a minimizer of the Lagrangian up to homotopy relative to endpoints, and in Theorem 4.2.17, we give a condition on C and on the endpoints x and $y \in \mathbb{T}^d$ for the solution to the Newton law joining x to y which is homotopic to the unique geodesic between x and y to be the unique minimizer of the Lagrangian in the class of curves joining x to y .

With this correspondence, we will be able to prove Theorem 1.4.6 in Section 4.3. We will prove that a solution to incompressible optimal transport whose pressure is semi-concave induces a weak solution to the kinetic Euler equation at Theorem 4.3.5. It will be a consequence of Theorem 1.1.30 and Theorem 4.2.12. We will prove at Theorem 4.3.7 that a weak solution to the kinetic Euler equation whose pressure is semi-concave and with compact support generates solutions to incompressible optimal transport. It will be a consequence of Theorem 4.2.17.

Then, Section 4.4 will be devoted to the proof of Theorem 1.4.5. As explained in the introduction, it will be a consequence of two estimates, given at Lemma 4.4.3 and Lemma 4.4.4 respectively.

4.2 Classical mechanics in a semi-concave potential

4.2.1 Semi-concave functions on the torus

We give here some basic facts about semi-concave functions on the torus. Everything is elementary, but we chose to do all the proofs for the sake of completeness, as the case of the torus might be slightly unusual. In the whole subsection, we deal with a function on the torus $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$, and we denote by $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ the corresponding periodic function defined by $F := f \circ \Pi$, where $\Pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ is the canonical projection. We also give ourselves a nonnegative number C . We will call elements of the torus by small letters like a, x, y , and elements of \mathbb{R}^d by capital letters like A, X, Y . We will denote by d the canonical distance on the torus, and by $\text{Diam } \mathbb{T}^d$ its diameter.

Definition 4.2.1 (Semi-concave function). We say that the function f is C -semi-concave if the function

$$X \in \mathbb{R}^d \mapsto F(X) - \frac{C}{2}|X|^2$$

is a concave function.

Remark 4.2.2. One could check that this definition is equivalent to saying $D^2f \leq C \text{Id}$ where we differentiate in the sense of distributions and where we consider the order of symmetric matrices.

In what follows, we call G this concave function. Of course in that case, G and consequently f and F are continuous. From now on, we suppose that f is C -semi-concave.

Observe the following easy property.

Remark 4.2.3. Take $A \in \mathbb{R}^d$. The function G_A defined for all $X \in \mathbb{R}^d$ by

$$G_A(X) = F(X) - \frac{C}{2}|X - A|^2 = \underbrace{G(X)}_{\text{concave}} + \underbrace{C\langle X, A \rangle - \frac{C}{2}|A|^2}_{\text{affine}}.$$

is a concave function.

Superdifferential of semi-concave functions. Remember the definition of superdifferential of a concave function.

Definition 4.2.4. Let $H : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ a concave function. We say that the vector $l \in \mathbb{R}^d$ is in the superdifferential of H at $X \in \mathbb{R}^d$ and if for all $Y \in \mathbb{R}^d$,

$$H(Y) \leq H(X) + \langle l, Y - X \rangle.$$

A classical theorem asserts that the superdifferential of a concave function is everywhere nonempty. We can define the superdifferential of semi-concave functions by using the corresponding concave functions.

Definition 4.2.5. If $x \in \mathbb{T}^d$ and $l \in \mathbb{R}^d$, we say that l is in the superdifferential of f at x and we write $l \in \partial f(x)$ if one of the two following equivalent statements holds

1. there is $X \in \Pi^{-1}(\{x\})$ such that l is in the superdifferential of G_X at X ,
2. for all $X \in \Pi^{-1}(\{x\})$, l is in the superdifferential of G_X at X .

Proof of the equivalence. The second point implies the first one because the superdifferential of a concave function on \mathbb{R}^d is everywhere nonempty.

The first point implies the second one because if X and X' belong to $\Pi^{-1}(\{x\})$, then for all $Y \in \mathbb{R}^d$,

$$G_{X'}(X' + Y) = G_X(X + Y) =: H(Y).$$

Thus, the superdifferential of G_X at X and the one of $G_{X'}$ at X' are equal, as they both coincide with the superdifferential of H at 0. \square

In the sequel, it will be more convenient to work with f directly. So we give another characterization of superdifferentials. First of all let us define directional superdifferentials. The second point of the following definition will be useful in the next section.

Definition 4.2.6. Take e belonging to the unit sphere \mathbb{S}^{d-1} and $l \in \mathbb{R}^d$. We say that l is in the superdifferential of direction e of f at x and we write $l \in \partial_e f(x)$ if one of the two following equivalent affirmations holds

1. for all $t \geq 0$,

$$f(x + te) \leq f(x) + t\langle l, e \rangle + \frac{C}{2}t^2,$$

2. for all $c > 0$, there exists a sequence $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ going to zero such that for all $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x + t_n e) \leq f(x) + t_n \langle l, e \rangle + ct_n.$$

Proof of the equivalence. The first point implies the second one.

Let us assume the second point and prove the first one. First remark that the case $t = 0$ is obvious. Else take $X \in \Pi^{-1}(\{x\})$, $c > 0$ and (t_n) as given by the assumption. As G_X is concave, the function:

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{G_X(X + te) - G_X(X)}{t}$$

is nonincreasing. So if $t > 0$, as soon as $t_n \leq t$,

$$\frac{G_X(X + te) - G_X(X)}{t} \leq \frac{G_X(X + t_n e) - G_X(X)}{t_n}.$$

Writing this inequality in terms of f leads to

$$\frac{f(x + te) - f(x)}{t} - \frac{C}{2}t \leq \frac{f(x + t_n e) - f(x)}{t_n} - \frac{C}{2}t_n.$$

Now if we use the assumption on the right hand part, we get

$$\frac{f(x + te) - f(x)}{t} - \frac{C}{2}t \leq \langle l, e \rangle + c - \frac{C}{2}t_n.$$

The result follows letting n go to $+\infty$, c go to zero and multiplying by t . \square

Now we can give our other characterization of superdifferentials.

Proposition 4.2.7. *Let $x \in \mathbb{T}^d$ and $l \in \mathbb{R}^d$. Then $l \in \partial f(x)$ if and only if for all $e \in \mathbb{S}^{d-1}$, $l \in \partial_e f(x)$.*

Proof. If $l \in \partial f(x)$, take $X \in \Pi^{-1}(\{x\})$, $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ and $t > 0$. Call $Y := X + te$. By definition,

$$G_X(Y) \leq G_X(X) + \langle l, Y - X \rangle = f(x) + t\langle l, e \rangle.$$

But as

$$G_X(Y) = F(Y) - \frac{C}{2}|Y - X|^2 = f(x + te) - \frac{C}{2}t^2,$$

we conclude that $l \in \partial_e f(x)$.

Conversely if for all $e \in \mathbb{S}^{d-1}$, $l \in \partial_e f(x)$, take $X \in \Pi^{-1}(\{x\})$ and $Y \in \mathbb{R}^d$. If $Y = X$, there is nothing to prove. Else, call $e = (Y - X)/|Y - X|$ and $t = |Y - X|$. We have by the first point of Definition 4.2.6

$$\begin{aligned} G_X(Y) &= f(x + te) - \frac{C}{2}|Y - X|^2 \\ &\leq f(x) + t\langle l, e \rangle + \frac{C}{2}t^2 - \frac{C}{2}t^2 \\ &= f(x) + t\langle l, e \rangle \\ &= G_X(X) + \langle l, Y - X \rangle. \end{aligned}$$

\square

In fact, it is not necessary to check the directional superdifferential in every direction. Indeed, remark the following fact.

Proposition 4.2.8. *Let $x \in \mathbb{T}^d$ and $l \in \mathbb{R}^d$. The set*

$$\{e \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ such that } l \in \partial_e f(x)\}$$

is closed. In particular, if V is a dense subset of \mathbb{S}^{d-1} , $l \in \partial f(x)$ if and only if for all $e \in V$, $l \in \partial_e f(x)$.

Proof. The first point of Definition 4.2.6 is clearly a closed condition on e (we recall that f is continuous). The second statement is a direct consequence of Proposition 4.2.7. \square

Bounds on semi-concave functions. Here we will show that the number C in the definition of semi-concave functions controls the oscillation and the Lipschitz constant of these functions. (When $c = 0$, we recover the fact that a periodic and concave function must be constant.)

Proposition 4.2.9. *The function f is bounded and*

$$\max f - \min f \leq \frac{(\text{Diam } \mathbb{T}^d)^2}{2} C.$$

Proof. Let $x \in \mathbb{T}^d$ be such that $f(x) = \min f$ and $y \in \mathbb{T}^d$ be such that $f(y) = \max f$. Necessarily, $\partial f(x) = \{0\}$. Else, it means that there is $l \in \partial f(x)$ with $l \neq 0$. But in that case if $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ is chosen so that $\langle l, e \rangle < 0$, Definition 4.2.6 would contradict the minimality of $f(x)$.

Now take $X \in \Pi^{-1}(\{x\})$ and $Y \in \Pi^{-1}(\{y\})$ with $|Y - X| = d(x, y)$. As $0 \in \partial f(x)$,

$$f(y) - \frac{C}{2} d(x, y)^2 = G_X(Y) \leq G_X(X) = f(x).$$

In other terms,

$$\max f - \min f \leq \frac{C}{2} d(x, y)^2 \leq \frac{(\text{Diam } \mathbb{T}^d)^2}{2} C.$$

\square

Proposition 4.2.10. *The function f is Lipschitz continuous and*

$$\text{Lip } f \leq \text{Diam } \mathbb{T}^d \times C.$$

Proof. Call $L := \text{Diam } \mathbb{T}^d \times C$. It suffices to show that for all $X \in \mathbb{T}^d$, for all $e \in \mathbb{S}^{d-1}$, for all $s > 0$,

$$F(X) - Ls \leq F(X + se) \leq F(X) + Ls.$$

Let us begin by the left hand inequality. Because G_X is concave, if $t > s$, then

$$\frac{G_X(X + se) - G_X(X)}{s} \geq \frac{G_X(X + te) - G_X(X)}{t}.$$

In terms of F ,

$$\frac{F(X + se) - F(X)}{s} - \frac{C}{2}s \geq \frac{F(X + te) - F(X)}{t} - \frac{C}{2}t.$$

Consequently,

$$\begin{aligned} F(X + se) &\geq F(X) - \frac{C}{2}st - \frac{\max f - \min f}{t}s \\ &\geq F(X) - \frac{C}{2}s \left\{ t + \frac{(\text{Diam } \mathbb{T}^d)^2}{t} \right\}. \end{aligned}$$

We get the result by choosing $t = \text{Diam } \mathbb{T}^d$.

For the right hand inequality, it suffices to exchange the roles of X and $X + se$. \square

4.2.2 Semi-concavity of the potential in classical lagrangian mechanics

In this section, we present, in the context of semi-concave potentials, the link between the minimizers of the Lagrangian

$$L_\phi : \omega \in C^0([0, T]; \mathbb{T}^d) \mapsto \begin{cases} \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - \phi(t, \omega_t) \right\} dt & \text{if } \omega \in AC^2([0, T], \mathbb{T}^d), \\ +\infty & \text{else,} \end{cases} \quad (4.2)$$

with prescribed endpoints, and the solutions to the second order differential equation

$$\ddot{\omega}_t = -\nabla \phi(t, \omega_t). \quad (4.3)$$

We recall that the set $AC^2(0, T)$ is the set of absolutely continuous curves ω that satisfy:

$$\int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt < +\infty.$$

The potentials ϕ that we will use will satisfy the following assumption.

Assumption 4.2.11. We suppose that there exists a function $C : t \mapsto C_t$ in $L^1(0, T; \mathbb{R}_+)$ such that for almost all $t \in [0, T]$, $\phi(t, \bullet)$ is C_t -semi-concave (as for p in formula (1.94)).

In particular, in virtue of Proposition 4.2.9 and Proposition 4.2.10, there is a dimensional constant $\Lambda > 0$ such that for almost all $t \in [0, T]$,

$$\max \phi(t, \bullet) - \min \phi(t, \bullet) \leq \Lambda C_t, \quad \text{Lip } \phi(t, \bullet) \leq \Lambda C_t. \quad (4.4)$$

In this context, we will not work with (4.3) which makes no sense *a priori*, but with its natural relaxation:

$$\omega \in W^{2,1}(0, T; \mathbb{T}^d) \quad \text{and for almost all } t \in [0, T], \quad -\ddot{\omega}_t \in \partial \phi(t, \omega_t). \quad (4.5)$$

A minimizer of (4.2) up to homotopy is a solution to (4.5). The functional L_ϕ is clearly proper and lower semi-continuous for the topology of uniform convergence. These properties ensure the existence of minimizers in each class of homotopy relative to endpoints.

We show the following theorem.

Theorem 4.2.12. *Suppose that ϕ satisfies Assumption 4.2.11. Consider a curve $\omega \in C^0([0, T]; \mathbb{T}^d)$ such that for all ξ homotopic to ω relative to its endpoints, we have:*

$$L_\phi(\xi) \geq L_\phi(\omega).$$

Then (4.5) holds.

Proof. By minimality, for all $h \in \mathcal{D}(]0, T[; \mathbb{R}^d)$ and all $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - \phi(t, \omega_t) \right\} dt \\ & \leq \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t + \delta \dot{h}_t|^2 - \phi(t, \omega_t + \delta h_t) \right\} dt \\ & \leq \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - \phi(t, \omega_t) \right\} dt + \delta \int_0^T \left\{ \langle \dot{\omega}_t, \dot{h}_t \rangle - \frac{\phi(t, \omega_t + \delta h_t) - \phi(t, \omega_t)}{\delta} \right\} dt + o(\delta) \\ & \leq \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - \phi(t, \omega_t) \right\} dt + \delta \int_0^T \left\{ \langle \dot{\omega}_t, \dot{h}_t \rangle + \Lambda C_t |h_t| \right\} dt + o(\delta). \end{aligned}$$

Dividing this inequality by δ and letting it go to 0, we get

$$\forall h \in \mathcal{D}(]0, T[; \mathbb{R}^d), \quad \int_0^T \left\{ \langle \dot{\omega}_t, \dot{h}_t \rangle + \Lambda C_t |h_t| \right\} dt \geq 0.$$

In particular, writing this inequality for both h and $-h$,

$$\forall h \in \mathcal{D}(]0, T[; \mathbb{R}^d), \quad |\langle \ddot{\omega}, h \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq \Lambda \int_0^T C_t |h_t| dt,$$

and this is sufficient to conclude that $\omega \in W^{2,1}([0, T]; D)$ and that almost everywhere, $|\ddot{\omega}_t| \leq \Lambda C_t$.

Call \mathcal{Z} the set of times when ω is twice differentiable, and when $\phi(t, \bullet)$ is C_t -semi-concave. This set is of full measure on $[0, T]$ as an intersection of two sets of full measure. We will prove that the set

$$A := \{t \in \mathcal{Z} \mid -\ddot{\omega}_t \notin \partial \phi(t, \omega_t)\}$$

is negligible. It suffices to prove that for any $\varepsilon > 0$,

$$A^\varepsilon := A \cap]\varepsilon, T - \varepsilon[$$

is negligible. From now on we fix $\varepsilon > 0$.

Take V a countable dense subset of the sphere \mathbb{S}^{d-1} and $\mathcal{S} := \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$. If $t \in \mathcal{Z}$, then by Proposition 4.2.8, there exists $e \in V$ such that

$$-\ddot{\omega}_t \notin \partial_e \phi(t, \omega_t).$$

But then, by Definition 4.2.6, there exist $c > 0$ and $s_0 > 0$ such that for all $s \leq s_0$,

$$\phi(t, \omega_t + se) \geq \phi(t, \omega_t) - s \langle \ddot{\omega}_t, e \rangle + cs.$$

Of course, we can choose s_0 to be in \mathcal{S} and c to be equal to s_0 without loss of generality. In other terms, calling for $e \in V$ and $s_0 \in \mathcal{S}$

$$A_{e, s_0}^\varepsilon := \{t \in \mathcal{Z} \cap]\varepsilon, T - \varepsilon[\mid \forall s \leq s_0, \phi(t, \omega_t + se) \geq \phi(t, \omega_t) - s \langle \ddot{\omega}_t, e \rangle + s_0 s\},$$

we see that

$$A^\varepsilon = \bigcup_{e \in V} \bigcup_{s_0 \in \mathcal{S}} A_{e, s_0}^\varepsilon$$

So it suffices to prove that for all $e \in V$ and $s_0 \in \mathcal{S}$, A_{e, s_0}^ε is negligible. We argue by contradiction and suppose that $\text{Leb}(A_{e, s_0}^\varepsilon) > 0$ for some $e \in V$ and $s_0 \in \mathcal{S}$.

Take K a compact and O an open set of $[0, T]$ such that

$$K \subset A_{e, s_0}^\varepsilon \subset O,$$

and such that $\lambda(O \setminus K)$ is sufficiently small to have

$$\text{Leb}(K) \geq \frac{1}{2} \lambda(A_{e, s_0}^\varepsilon) > 0 \quad \text{and} \quad \Lambda \int_{O \setminus K} C_t dt < \frac{s_0}{4} \text{Leb}(A_{e, s_0}^\varepsilon) \leq \frac{s_0}{2} \text{Leb}(K). \quad (4.6)$$

Take then h a function in $\mathcal{D}([0, T])$ with values in $[0, 1]$ and which is equal to 1 on K and equal to 0 outside of O . Let us compute the action of the curve $\omega + she$ with $s \in]0, s_0[$.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t + s\dot{h}_t e|^2 - \phi(t, \omega_t + sh_t e) \right\} dt \\ &= \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 dt + s \int_0^T \langle \dot{\omega}_t, e \rangle \dot{h}_t dt - \int_0^T \phi(t, \omega_t + sh_t e) dt + O(s^2) \\ &= \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - \phi(t, \omega_t) \right\} dt + s \int_0^T \langle \dot{\omega}_t, e \rangle \dot{h}_t dt + \int_0^T \left\{ \phi(t, \omega_t) - \phi(t, \omega_t + sh_t e) \right\} dt + O(s^2). \end{aligned}$$

But outside O :

$$\int_{cO} \left\{ \phi(t, \omega_t) - \phi(t, \omega_t + sh_t e) \right\} dt = 0 = s \int_{cO} \langle \ddot{\omega}_t, e \rangle h_t dt.$$

In K , using the definition of A_{e, s_0}^ε :

$$\begin{aligned} \int_K \left\{ \phi(t, \omega_t) - \phi(t, \omega_t + sh_t e) \right\} dt &= \int_K \left\{ \phi(t, \omega_t) - \phi(t, \omega_t + se) \right\} dt \\ &\leq s \int_K \left\{ \langle \ddot{\omega}_t, e \rangle - s_0 \right\} dt \\ &= s \left\{ \int_K \langle \ddot{\omega}_t, e \rangle h_t dt - s_0 \text{Leb}(K) \right\}. \end{aligned}$$

Finally, in $O \setminus K$, we use (4.4) to get:

$$\begin{aligned} \int_{O \setminus K} \left\{ \phi(t, \omega_t) - \phi(t, \omega_t + sh_t e) \right\} dt &\leq \Lambda \int_{O \setminus K} C_t dt \\ &= s\Lambda \int_{O \setminus K} C_t dt + \int_{O \setminus K} \langle \ddot{\omega}, e \rangle h_t dt - \int_{O \setminus K} \langle \ddot{\omega}, e \rangle h_t dt. \end{aligned}$$

Gathering everything,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t + s\dot{h}_t e|^2 - \phi(t, \omega_t + sh_t e) \right\} dt - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - \phi(t, \omega_t) \right\} dt \\ &\leq s \left\{ \int_0^T \langle \dot{\omega}_t, e \rangle \dot{h}_t dt + \int_0^T \langle \ddot{\omega}, e \rangle h_t dt - s_0 \text{Leb}(K) + \Lambda \int_{O \setminus K} C_t dt - \int_{O \setminus K} \langle \ddot{\omega}, e \rangle h_t dt \right\} + O(s^2). \end{aligned}$$

But the two first terms cancel each other, so that we are left with:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t + s\dot{h}_t e|^2 - \phi(t, \omega_t + sh_t e) \right\} dt - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - \phi(t, \omega_t) \right\} dt \\ &\leq s \left\{ -s_0 \text{Leb}(K) + \Lambda \int_{O \setminus K} C_t dt - \int_{O \setminus K} \langle \ddot{\omega}, e \rangle h_t dt \right\} + O(s^2) \\ &\leq s \left\{ -s_0 \text{Leb}(K) + \Lambda \int_{O \setminus K} C_t dt + \int_{O \setminus K} |\ddot{\omega}| dt \right\} + O(s^2). \end{aligned}$$

As almost everywhere, $|\ddot{\omega}_t| \leq \Lambda C_t$, we have:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t + s \dot{h}_t e|^2 - \phi(t, \omega_t + s h_t e) \right\} dt - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - \phi(t, \omega_t) \right\} dt \\ & \leq s \left\{ -s_0 \text{Leb}(K) + 2\Lambda \int_{O \setminus K} C_t dt, \right\} + O(s^2) \end{aligned}$$

and it appears that when s is small, thanks to (4.6), the minimality of ω is contradicted. As a consequence, for almost all $t \in [0, T]$, $-\ddot{\omega}_t \in \partial\phi(t, \omega_t)$. \square

A solution to (4.5) for small times is the unique minimizer of (4.2) up to homotopy.

Before proving the converse part of Theorem 4.2.12, we need to introduce an assumption on the function C appearing in Assumption 4.2.11.

Assumption 4.2.13. We say that C provides a Poincaré control if for all smooth function $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, we have:

$$\int_0^T C_t \varphi(t)^2 dt \leq \int_0^T \varphi'(t)^2 dt. \quad (4.7)$$

We say that C provides a strict Poincaré control if the inequality in the above formula is strict for all $\varphi \neq 0$.

Up to taking a smaller T , this assumption always holds, as explained in the following remark.

Remark 4.2.14. • If C is a constant, by the standard Poincaré inequality, C provides a Poincaré control (resp. a strict Poincaré control) if and only if

$$T \times \sqrt{C} \leq \pi \quad (\text{resp } < \pi).$$

- More generally, it is easy to prove with the Cauchy-Schwarz inequality that a sufficient condition for C to provide a Poincaré control (resp. a strict Poincaré control) is

$$T \times \|C\|_{L^1([0, T])} \leq 1 \quad (\text{resp } < 1).$$

Hence, for all $C \in L^1([0, T])$, there exists $T^* \leq T$ such that $C|_{[0, T^*]}$ provides a (strict) Poincaré control.

We are now ready to state and prove the converse part of Theorem 4.2.12.

Theorem 4.2.15. *Suppose that ϕ satisfies Assumption 4.2.11, with a function C that provides a Poincaré control. Let ω be a curve satisfying (4.5). Then for all ξ homotopic to ω relative to its endpoints, we have*

$$L_\phi(\omega) \leq L_\phi(\xi).$$

If the Poincaré control is strict, then the inequality is strict for all $\xi \neq \omega$ and ω is the unique minimizer of L_ϕ in its class of homotopy relative to endpoints.

Proof. Take ξ a curve which is homotopic to ω relative to its endpoints. Let us consider W and E some lifts of ω and ξ respectively, with the same endpoints. In the following, Φ stands for the periodic function (in space) corresponding to ϕ i.e. $\Phi : (t, X) \in \mathbb{R}^d \mapsto \phi(t, \Pi(X))$.

For almost all $t \in [0, T]$, we have by the first point of Definition 4.2.6 and (4.5):

$$\Phi(t, E_t) \leq \Phi(t, W_t) - \langle \ddot{\omega}_t, E_t - W_t \rangle + \frac{C_t}{2} |E_t - W_t|^2,$$

which can be rewritten

$$-\phi(t, \omega_t) - \frac{C_t}{2} |E_t - W_t|^2 \leq -\phi(t, \xi_t) - \langle \ddot{\omega}_t, E_t - W_t \rangle.$$

We can suppose that ξ and consequently E are in $AC^2(0, T)$, else there is nothing to prove. In that case, integrating the previous inequality and using an integration by parts leads to:

$$\begin{aligned} - \int_0^T \phi(t, \omega_t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T C_t |E_t - W_t|^2 dt &\leq - \int_0^T \phi(t, \xi_t) dt + \int_0^T \langle \dot{\omega}_t, \dot{E}_t - \dot{W}_t \rangle dt \\ &= - \int_0^T \phi(t, \xi_t) dt + \int_0^T \langle \dot{\omega}_t, \dot{\xi}_t - \dot{\omega}_t \rangle dt \end{aligned}$$

(Of course, for almost all t , $\dot{\omega}_t = \dot{W}_t$ and $\dot{\xi}_t = \dot{E}_t$.) Using the formula:

$$\langle \dot{\omega}_t, \dot{\xi}_t - \dot{\omega}_t \rangle = \frac{1}{2} |\dot{\xi}_t|^2 - \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - \frac{1}{2} |\dot{E}_t - \dot{W}_t|^2,$$

we get:

$$L_\phi(\omega) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{E}_t - \dot{W}_t|^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^T C_t |E_t - W_t|^2 dt \leq L_\phi(\xi).$$

We conclude by applying (4.7) to $t \mapsto |E_t - W_t|$ thanks to a standard regularization procedure. \square

In Section 4.3, we will need a criterion to ensure that a solution to (4.5) is an absolute minimizer of (4.2) (and not only in its class of homotopy). We give this criterion in the following paragraph.

A case when the minimizer of (4.2) is homotopic to the unique geodesic. Let us introduce an assumption relating to $x, y \in \mathbb{T}^d$ under which the minimizers of L_ϕ are homotopic to the unique geodesic joining x to y .

Assumption 4.2.16. We suppose that the function C satisfies

$$K := \frac{\Lambda T}{2\pi} \|C\|_{L^1(0, T)} < \pi, \tag{4.8}$$

where Λ is given in (4.4).

In that case, we say that $x, y \in \mathbb{T}^d$ are close if:

$$y - x \in \Pi \left((-(\pi - K), \pi - K)^d \right).$$

Remark that when x and y are close, then there is a unique geodesic joining x to y .

Theorem 4.2.17. *We suppose that ϕ satisfies Assumption 4.2.11 with a function C providing a strict Poincaré control and satisfying Assumption 4.2.16. Consider some close $x, y \in \mathbb{T}^d$.*

If ω is a solution to (4.5) joining x to y which is homotopic to the unique geodesic joining x to y , then ω is the unique minimizer of L_ϕ between x and y .

The proof relies on the following lemma.

Lemma 4.2.18. *Suppose that ϕ satisfies Assumption 4.2.11 with a function C satisfying Assumption 4.2.16, and take some close $x, y \in \mathbb{T}^d$.*

Then the minimizers of L_ϕ between x and y are homotopic to the unique geodesic joining x to y .

Let us prove Theorem 4.2.17 using Lemma 4.2.18.

Proof of Theorem 4.2.17. Take ω as in the statement of the theorem. As C provides a strict Poincaré control, according to Theorem 4.2.15, ω is the unique minimizer of L_ϕ in its class of homotopy relative to endpoints.

Let $\tilde{\omega}$ be a minimizer of L_ϕ between x and y . By Lemma 4.2.18, $\tilde{\omega}$ is homotopic to the geodesic joining x to y , and so ω and $\tilde{\omega}$ are homotopic. Because of the previous consideration $\omega = \tilde{\omega}$. \square

Now, we give the proof of Lemma 4.2.18.

Proof of Lemma 4.2.18. Call ω the unique geodesic joining x to y . It suffices to prove that if ξ is not homotopic to ω , then $L_\phi(\omega) < L_\phi(\xi)$. So let us take ξ which is not homotopic to ω . Suppose that $\xi \in AC^2(0, T)$ (else, there is nothing to prove). Define:

$$U := \int_0^T \dot{\omega}_t dt \quad \text{and} \quad V := \int_0^T \dot{\xi}_t dt.$$

Because ω is a geodesic,

$$\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt = \frac{|U|^2}{2T}, \quad (4.9)$$

and by Jensen's inequality,

$$\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\xi}_t|^2 dt \geq \frac{|V|^2}{2T}. \quad (4.10)$$

As ω is a geodesic, for all $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$U_i^2 \leq V_i^2. \quad (4.11)$$

Because ω and ξ are not homotopic but have the same endpoints, there exists $i_0 \in \{1, \dots, d\}$ such that $V_{i_0} - U_{i_0} \in 2\pi\mathbb{Z}^*$. For $i = i_0$ we have a better estimate than (4.11):

$$V_{i_0}^2 - U_{i_0}^2 = (V_{i_0} - U_{i_0})^2 + 2U_{i_0}(V_{i_0} - U_{i_0}) \geq (V_{i_0} - U_{i_0})^2 - 2|U_{i_0}||V_{i_0} - U_{i_0}|$$

But in addition,

$$|U_{i_0}| \leq \pi,$$

so that $\lambda \mapsto \lambda^2 - 2\lambda|U_{i_0}|$ is increasing on $[2\pi, +\infty)$. Consequently, as $|V_{i_0} - U_{i_0}| \geq 2\pi$,

$$V_{i_0}^2 - U_{i_0}^2 \geq 4\pi^2 - 4|U_{i_0}|\pi = 4\pi(\pi - |U_{i_0}|) > 4\pi K, \quad (4.12)$$

where the last inequality is obtained thanks to $U_{i_0} \in (-(\pi - K), \pi - K)$, which is due to the fact that x and y are close. As a consequence, we have:

$$\begin{aligned}
L_\phi(\xi) - L_\phi(\omega) &= \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\xi}_t|^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt - \int_0^T \{\phi(t, \xi_t) - \phi(t, \omega_t)\} dt \\
&\geq \frac{|V|^2}{2T} - \frac{|U|^2}{2T} - \int_0^T \{\max \phi(t, \bullet) - \min \phi(t, \bullet)\} dt && \text{by (4.9),(4.10),} \\
&\geq \frac{V_{i_0}^2 - U_{i_0}^2}{2T} - \Lambda \int_0^T C_t dt && \text{by (4.8),(4.11),} \\
&> \frac{2\pi K}{T} - \frac{2\pi K}{T} && \text{by (4.12),}
\end{aligned}$$

as K is defined by $K := \Lambda T \|C\|_{L^1} / 2\pi$. The result follows \square

4.3 Equivalence of the two models

In this section, we show how to associate to a solution to incompressible optimal transport a weak solution to the kinetic Euler equation and *vice versa*.

From now on, we will work with probability measures on various spaces, so we need to introduce some notations. If \mathcal{X} is a Polish space, we denote by $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ the set of Borel probability measures on \mathcal{X} . If $\alpha : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ is a measurable map between two Polish spaces \mathcal{X}, \mathcal{Y} , and if $m \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, we denote by $\alpha_{\#}m$ the push-forward of m by α , that is the unique Borel probability measure on \mathcal{Y} that satisfies for all $\varphi \in C_b(\mathcal{Y})$:

$$\int \varphi d\alpha_{\#}m = \int \varphi \circ \alpha dm.$$

First of all, let us define more precisely what is a weak solution to the kinetic Euler equation.

4.3.1 Weak solutions to the kinetic Euler equation and superposition principle

Formally, the first equation in (1.47) is equivalent to the continuity equation on the phase space:

$$\partial_t f_t(x, v) + \operatorname{div}_{x,v} \left(f_t(x, v) \begin{bmatrix} v \\ -\nabla p(t, x) \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (4.13)$$

Hence, to treat this equation, we will use the theory developed by DiPerna and Lions in [38], revisited and extended by Ambrosio and Crippa in [1]. This leads to the following definition.

Definition 4.3.1. Take $f : t \in [0, T] \mapsto f_t \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ a measurable map and a scalar field $p \in L^1(0, T; W^{1,1}(\mathbb{T}^d))$. We say that (f, p) is a weak solution to the kinetic Euler equation if

- for almost all time $t \in [0, T]$, the first marginal $\Pi_{x\#}f_t$ of f_t is the Lebesgue measure Leb ,
- equation (4.13) holds in $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$.

Let us make a few remarks on this definition.

Remark 4.3.2. 1. If (f, p) is a solution in the sense of the previous definition, as f is incompressible and as $p \in L^1(0, T; W^{1,1}(\mathbb{T}^d))$, we have:

$$\int_0^T \int |\nabla p(t, x)| df_t(x, v) dt = \int_0^T \int |\nabla p(t, x)| dx dt < +\infty.$$

In particular, the following integrability holds:

$$\begin{bmatrix} v \\ -\nabla p(t, x) \end{bmatrix} \in L^1([0, T]; L^1_{\text{loc}}(f_t)),$$

and the second term in (4.13) is well defined in a distributional sense.

2. As observed in [1, Remark 1.2], if (f, p) is a weak solution to the kinetic Euler equation, then f admits a continuous representative. In that case, the incompressibility holds at all time.

4.3.2 A solution to incompressible optimal transport induces a weak solution to the kinetic Euler equation

Let us begin by defining the density corresponding to a generalized flow. We rewrite here formula (1.46) from the introduction.

Definition 4.3.3. Let P be a generalized flow charging only absolutely continuous curves. In that case, for almost all time $t \in [0, T]$, the map $\omega \mapsto \dot{\omega}_t$ is well defined P -almost everywhere. For such t , the density at time t corresponding to P , denoted by f_t , is the probability measure on $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ defined by:

$$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d), \quad \int \varphi(x, v) df_t(x, v) = \int \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t) dP(\omega).$$

Remark 4.3.4. Because it has a finite action (1.14), any solution to incompressible optimal transport only charges absolutely continuous curves, so they admit a density.

Now, we show that if the pressure of a solution to incompressible optimal transport is semi-concave, then the corresponding density is a weak solution to the kinetic Euler equation.

Theorem 4.3.5. *Take P a solution to incompressible optimal transport, $f : t \mapsto f_t$ its density and call p the corresponding pressure field. If p satisfies Assumption 4.2.11, then (f, p) is a weak solution to the kinetic Euler equation.*

Proof. First, remark that for all $\varphi \in C_b(\mathbb{T}^d)$, for all t where the density of P is well defined,

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) df_t(x, v) &= \int \varphi(\omega_t) dP(\omega) && \text{by Definition 4.3.3,} \\ &= \int \varphi(x) dx && \text{by (1.11).} \end{aligned}$$

Moreover, under Assumption 4.2.11, $p \in L^1(0, T; \text{Lip}(\mathbb{T}^d)) \subset L^1(0, T; W^{1,1}(\mathbb{T}^d))$. Hence, we just have to prove that (4.13) holds in \mathcal{D}' .

Let φ be a test function in $C_c^\infty(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ and $\chi \in C_c^\infty(0, T)$. It suffices to prove that

$$\int_0^T \int \chi'(t) \varphi(x, v) df_t(x, v) dt = - \int_0^T \int \chi(t) \left\{ \nabla_x \varphi(x, v) \cdot v - \nabla_v \varphi(x, v) \cdot \nabla_x p(t, x) \right\} df_t(x, v) dt.$$

(Remark that for almost all t , the first marginal of f_t is the Lebesgue measure and $p(t, \bullet)$ is differentiable almost everywhere, so we can conclude that for almost all t , $\nabla_x p(t, x)$ is well defined f_t -almost everywhere.) But by Definition 4.3.3 and Fubini's theorem, as the functions:

$$(x, v) \mapsto \nabla_x \varphi(x, v) \cdot v \quad \text{and} \quad (x, v) \mapsto \nabla_v \varphi(x, v) \cdot \nabla_x p(t, x)$$

are bounded by an integrable function time, this equality is equivalent to

$$\iint_0^T \chi'(t) \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t) dt dP(\omega) = - \iint_0^T \chi(t) \left\{ \nabla_x \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t) \cdot \dot{\omega}_t - \nabla_v \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t) \cdot \nabla_x p(t, \omega_t) \right\} dt dP(\omega). \quad (4.14)$$

Under Assumption 4.2.11, we can apply [3, Theorem 6.8] asserting that P -almost all curve is a so-called p -minimizing path, *i.e.* a minimizer of L_ϕ with $\phi = p$ up to homotopy. Indeed, in our case $p \in L^1(0, T; L^\infty(\mathbb{T}^d))$ and for almost all t , $p(t, \bullet)$ is continuous. In particular, the maximal function Mp defined in [3, Section 6] is in $L^1((0, T) \times \mathbb{T}^d)$, and for almost all time t , $\bar{p}(t, \bullet)$ defined in [3, Section 6] coincide with $p(t, \bullet)$ everywhere.

As a consequence, by Theorem 4.2.12, P -almost all curves satisfy (4.5). Hence, it is easy to prove that for P -almost all ω

$$t \mapsto \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t)$$

is absolutely continuous, and that for almost all t ,

$$\frac{d}{dt} \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t) = \nabla_x \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t) \cdot \dot{\omega}_t + \nabla_v \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t) \cdot \ddot{\omega}_t.$$

In particular, for P -almost all ω , we have:

$$\int_0^T \chi'(t) \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t) dt = \int_0^T \chi(t) \left\{ \nabla_x \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t) \cdot \dot{\omega}_t + \nabla_v \varphi(\omega_t, \dot{\omega}_t) \cdot \ddot{\omega}_t \right\} dt \quad (4.15)$$

On the one hand, for almost all t , $p(t, \bullet)$ is differentiable almost everywhere and the marginal of P at time t is the Lebesgue measure. So for $dt \otimes P$ -almost all (t, ω) , $p(t, \bullet)$ is differentiable at ω_t . On the other hand, P -almost all ω satisfies (4.5), so that for $dt \otimes P$ -almost all (t, ω) , ω is differentiable at time t and $-\ddot{\omega}_t \in \partial p(t, \omega_t)$. As a consequence, the set:

$$\mathcal{F} := \left\{ (t, \omega) \text{ such that } \begin{array}{l} \omega \text{ is differentiable at time } t, \\ -\ddot{\omega}_t \in \partial p(t, \omega_t), \\ p(t, \bullet) \text{ is differentiable at } \omega_t. \end{array} \right\}$$

is of full measure with respect to $dt \otimes P$ as an intersection of two sets of full measure. In particular, for P -almost all ω , for almost all time t , $\ddot{\omega}_t$ and $-\nabla_x p(t, \omega_t)$ exist and coincide. So for such ω , we can replace the one by the other in (4.15), and (4.14) follows. \square

4.3.3 A weak solution to the kinetic Euler equation for small times induces a solution to incompressible optimal transport

In order to prove the converse of Theorem 4.3.5, we will use that any weak solution to the kinetic Euler equation is a so-called superposition solution (see [1, Def. 3.2, Thm. 3.4]). In our setting, this result can be reformulated as follows.

Theorem 4.3.6. *Take (f, p) a weak solution to the kinetic Euler equation. There exists a generalized flow $P \in \mathcal{P}(C^0([0, T]; \mathbb{T}^d))$ such that:*

- *P -almost all curve ω belongs to $W^{2,1}([0, T]; \mathbb{T}^d)$. In particular, the map $\omega \mapsto \dot{\omega}_t$ is well defined for all time, P -almost everywhere.*
- *For all t , the density at time t corresponding to P is f_t .*
- *For P -almost all curve ω , for almost all t , $\ddot{\omega}_t$ and $-\nabla p(t, \omega_t)$ exist and coincide.*

If in addition, p is smooth, then P is unique.

Proof. As

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{1}{1 + |v|} \left| \begin{bmatrix} v \\ -\nabla p(t, x) \end{bmatrix} \right| df_t(x, v) dt < +\infty,$$

a slight adaptation of [1, Theorem 3.4] provides a probability measure \bar{P} on $C^0([0, T]; \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ that only charges absolutely continuous curves (ω, q) , satisfying for almost all t :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_t = q_t, \\ \dot{q}_t = -\nabla p(t, \omega_t), \end{cases}$$

and such that for all time t , for all $\varphi \in C_b(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$,

$$\int \varphi df_t = \int \varphi(\omega_t, q_t) d\bar{P}(\omega, q).$$

Pushing forward \bar{P} by the map $(\omega, q) \mapsto \omega$, we obtain a generalized flow P , and we easily check that it satisfies all the conditions of the statement.

When p is smooth, the map Ψ that associates to $(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ the unique solution to

$$\forall t \in [0, T], \quad \ddot{\omega}_t = -\nabla p(t, \omega_t), \quad \omega_0 = x, \quad \dot{\omega}_0 = v$$

is well defined, and as a consequence of [1, Theorem 3.1], $P = \Psi_{\#} f_0$. □

We are now ready to state the main result of this subsection.

Theorem 4.3.7. *Take (f, p) a weak solution to the kinetic Euler equation and consider a generalized flow P as given by Theorem 4.3.6.*

Suppose that:

- *the pressure p satisfies Assumption 4.2.11 with a function C providing a strict Poincaré control and satisfying Assumption 4.2.16,*
- *for P -almost all curve ω , ω_0 and ω_T are close and ω is homotopic to the unique geodesic joining ω_0 to ω_T .*

Then P is the unique solution to incompressible optimal transport corresponding to its own endpoint conditions.

Remark 4.3.8. The second part of Theorem 1.4.6 is a consequence of Theorem 4.3.7. Indeed, if p satisfies Assumption 4.2.11 or equivalently (4.1), then up to reducing the set of times, C provides a strict Poincaré control (thanks to Remark 4.2.14) and Assumption 4.2.16 holds with some $K > 0$.

Furthermore, if f_0 is supported in $\mathbb{T}^d \times [-M, M]^d$, and if P is as in Theorem 4.3.6, we can check with (4.4) that for P -almost all curve, for all time t , and for all $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$|\dot{\omega}_t^i| \leq M + \Lambda \int_0^t C_s ds \leq M + \Lambda \|C\|_{L^1(0,t)},$$

and so ω_0 and ω_t are close as soon as

$$\{M + \Lambda \|C\|_{L^1(0,t)}\}t \leq \pi - K.$$

So up to reducing again the set of times, all the assumptions of Theorem 4.3.7 hold.

Proof. First, as a consequence of Theorem 4.3.6, P -almost all curve satisfies (4.5). So for P -almost all ω , all the assumptions of Theorem 4.2.17 and so ω is the unique minimizer of L_p between ω_0 and ω_T .

Take Q an incompressible generalized flow that shares its endpoints condition with P . Call γ this common endpoints condition. Using the disintegration theorem, we find two measurable families of generalized flows $(P^{x,y})$ and $(Q^{x,y})$ such that

- for all φ positive and measurable on $C^0([0, T]; D)$,

$$\begin{aligned} \int \varphi dP &= \int \left(\int \varphi dP^{x,y} \right) d\gamma(x, y), \\ \int \varphi dQ &= \int \left(\int \varphi dQ^{x,y} \right) d\gamma(x, y), \end{aligned}$$

- for γ -almost all (x, y) , $P^{x,y}$ (resp. $Q^{x,y}$) almost all curve ω satisfies $\omega_0 = x$ and $\omega_T = y$.

Because the minimizers of L_p with prescribed endpoints are unique, for γ -almost all (x, y) , $P^{x,y}$ is a Dirac, concentrated on the unique minimizer of L_p between x and y .

We deduce that for γ -almost all endpoints $x, y \in \mathbb{T}^d$,

$$\int L_p(\omega) dP^{x,y}(\omega) \leq \int L_p(\omega) dQ^{x,y}(\omega),$$

with an equality if and only if $P^{x,y} = Q^{x,y}$. If we integrate with respect to γ , we get:

$$\int L_p(\omega) dP(\omega) \leq \int L_p(\omega) dQ(\omega), \tag{4.16}$$

with an equality if and only if $P = Q$. By definition of L_p and because P and Q are incompressible, for $R = P$ or Q :

$$\begin{aligned} \int L_p(\omega) dR(\omega) &= \int \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\omega}_t|^2 - p(t, \omega_t) \right\} dt dR(\omega) \\ &= \mathcal{A}(R) - \int_0^T \int p(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

We get the result by plugging this identity in (4.16). □

4.4 Instability of the relaxed solutions

The purpose of this section is to use the existence result for the kinetic Euler equation developed in Chapter 3 to build solutions to incompressible optimal transport for which we can derive some estimates that let us prove Theorem 1.4.5.

4.4.1 An existence result for the kinetic Euler equation

As in Chapter 3, we will build solutions to the kinetic Euler equation of the form:

$$f(t, x, \bullet) = \int \delta_{v=v^w(t,x)} \rho^w(t, x) d\mu(w), \quad (4.17)$$

where $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ has a finite moment of order 2, and $(\rho^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ and $(v^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ are families of smooth time dependent densities and vector fields on \mathbb{T}^d , solving the following system of an infinite number of equations:

$$\begin{cases} \forall w \in \mathbb{R}^d, & \partial_t \rho^w + \operatorname{div}(\rho^w v^w) = 0, \\ \forall w \in \mathbb{R}^d, & \partial_t v^w + (v^w \cdot \nabla) v^w = -\nabla p, \\ & -\Delta p = \operatorname{div} \mathbf{div} \int v^w \otimes v^w \rho^w d\mu(w). \end{cases} \quad (4.18)$$

We have seen in Section 3.4 of Chapter 3 that this system of equations admits exponential growing modes of growing rate $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\lambda) > 0$ and frequency $n \in 2\pi\mathbb{Z}^{d^2}$ around its stationary solution $(1, w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ if and only if (μ, n, λ) satisfies the Penrose instability criterion:

$$\int \frac{d\mu(w)}{(\lambda + in \cdot w)^2} = 0. \quad (4.19)$$

Following Subsection 3.6.3 of Chapter 3, for such (μ, n, λ) and $c > 0$, we will consider the following initial conditions for the system of equations (4.18):

$$\begin{aligned} \rho_0^{c,w}(x) &:= 1 + c\Re \left\{ \frac{|n|^2}{(\lambda + in \cdot w)^2} \exp(in \cdot x) \right\}, \\ v_0^{c,w}(x) &:= w + c\Re \left\{ \frac{in}{\lambda + in \cdot w} \exp(in \cdot x) \right\} + c^2 V(x), \end{aligned} \quad (4.20)$$

where for all $x \in \mathbb{T}^d$,

$$V(x) := \frac{|n|^2}{2} \Im \left\{ \int \frac{d\mu(w)}{(\lambda + in \cdot w)^3} \exp(2in \cdot x) \right\} n.$$

This is a quadratic perturbation of the initial data of the corresponding exponential growing mode. Because of the results of Subsection 3.6.3 of Chapter 3, if (ρ, \mathbf{v}) is a solution to (4.18) starting from these data, and if f is given by (4.17), then f satisfies (1.50) and (1.51), so it remains incompressible, and hence it is a solution to the Euler kinetic equation (1.47).

In terms of f , we will build solutions to the kinetic Euler equation starting from:

$$f_0^c := \int \delta_{v=v_0^{c,w}} \rho_0^{c,w} d\mu(w), \quad \text{with } (\rho_0^{c,w}, v_0^{c,w})_{w \in \mathbb{R}^d} \text{ as in (4.20)}. \quad (4.21)$$

²Recall that in Chapter 3, $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$ while here, $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

We will use the following existence theorem, which is a consequence of Theorem 3.5.1 from Chapter 3. We recall that the family of analytic norms $(|\bullet|_\delta)_{\delta>0}$ are defined in Subsection 3.4.2.

Theorem 4.4.1. *Let $\delta > 0$, $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ be a Penrose unstable profile, $n \in 2\pi\mathbb{Z}^d$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\lambda) > 0$ satisfying (4.19). Then there exist $c_\delta, \Lambda_\delta > 0$ such that for all $c \leq c_\delta$, there is a weak solution up to time 1 to (1.47) starting from f_0^c as defined in (4.21), whose pressure is of the form*

$$\forall t, x, \quad p^c(t, x) = c\Re\left(\exp(\lambda t + in \cdot x)\right) + q^c(t, x), \quad (4.22)$$

with

$$\sup_{t \in [0,1]} |q^c(t, \bullet)|_\delta \leq \Lambda_\delta c^2. \quad (4.23)$$

As the pressure field p^c is smooth, by Theorem 4.3.6, this solution induces a unique generalized flow P^c .

In addition, as soon as the support of μ is compactly embedded in the open cube

$$(-\pi, \pi)^d,$$

up to reducing c_δ , P^c is the unique generalized Euler flow corresponding to its own endpoints condition.

Remark 4.4.2. This theorem contains less information than 3.5.1. Indeed the latest expresses more or less a lower bound depending on n , λ and δ for c_δ . But we will not have to use this lower bound.

Proof. The existence part is a direct consequence of 3.5.1, so we will not enter into the details, and we will focus on the proof of the last part of the statement. So we suppose that the support of μ is compactly embedded in the open cube $(-\pi, \pi)^d$. For sufficiently small c , let p^c and P^c be as in the statement of the theorem.

First, take $\delta > 0$. We have for c sufficiently small, using Proposition 3.5.5 from Chapter 3 concerning the behaviour of the analytic norms with respect to derivation:

$$\begin{aligned} |D^2 p^c|_{L_t^1 L_x^\infty} &\leq \sup_{t \in [0,1]} |D^2 p^c(t, \bullet)|_0 \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sup_{t \in [0,1]} |p^c(t, \bullet)|_\delta \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \left(c \exp(\Re(\lambda)) \exp(|n|\delta) + \Lambda_\delta c^2 \right) \\ &\xrightarrow{c \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

We easily deduce that for c small enough, p^c satisfies Assumption 4.2.11 with a function C providing a strict Poincaré control (by Remark 4.2.14) and satisfying Assumption 4.2.16 with $K = K^c$ going to zero as c tends to 0.

According to Theorem 4.3.7, to conclude that for small c , P^c is the unique generalized Euler flow corresponding to its endpoint conditions, it suffices to show that it only charges curves ω such that ω_0 and ω_1 are close and which is homotopic to the unique geodesic joining ω_0 to ω_1 . It is easy

to check that a sufficient condition for these two conditions to hold is that for P^c -almost all ω , and any direction $i \in \{1, \dots, d\}$, if ω^i denotes the i -th coordinate, then

$$\sup_{t \in [0,1]} |\dot{\omega}_t^i| \leq \pi - K^c.$$

But by definition of P^c , for P^c -almost all ω , there is $w \in \text{Supp } \mu$ such that for all $t \in [0, 1]$,

$$\dot{\omega}_t = v_0^{c,w}(\omega_0) - \int_0^t \nabla p^c(s, \omega_s) ds = w + \underset{c \rightarrow 0}{O}(c),$$

where $v_0^{c,w}$ is defined in (4.20), and where we can check that the O is uniform in w and t . The result follows from the facts that $\text{Supp } \mu \Subset (-\pi, \pi)^d$ and that $K^c \rightarrow 0$ when $c \rightarrow 0$. \square

4.4.2 Estimates on the pressure field

In this subsection, we prove the following easy lemma.

Lemma 4.4.3. *Let μ be a Penrose unstable profile, $n \in 2\pi\mathbb{Z}^d$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\lambda) > 0$ satisfying (4.19). For all $r > 1$, there is a constant a_r only depending on d, r such that the family of pressures defined in Theorem 4.4.1 satisfies*

$$|p^c|_{L_t^r L_x^1} \geq a_r \frac{\exp(\Re(\lambda)) - 1}{\Re(\lambda)^{1/r}} c + \underset{c \rightarrow 0}{o}(c). \quad (4.24)$$

Proof. For the first term in the right-hand side of (4.22), we have:

$$\begin{aligned} \left| c \Re \left(\exp(\lambda t + in \cdot x) \right) \right|_{L_t^r L_x^1} &= c \left\{ \int_0^1 \exp(r \Re(\lambda) t) \left(\int |\cos(n \cdot x)| dx \right)^r dt \right\}^{1/r} \\ &\geq c \text{Vol}(\mathbb{T}^d)^{1/r} \times \left\{ \int_0^1 \exp(r \Re(\lambda) t) dt \right\}^{1/r} \\ &= c \text{Vol}(\mathbb{T}^d)^{1/r} \times \left\{ \frac{\exp(r \Re(\lambda)) - 1}{r \Re(\lambda)} \right\}^{1/r} \\ &\geq a_r \frac{\exp(\Re(\lambda)) - 1}{\Re(\lambda)^{1/r}} c \end{aligned}$$

with:

$$a_r := \left\{ \frac{\text{Vol}(\mathbb{T}^d)}{r} \right\}^{1/r}.$$

(Of course the phase change due to the imaginary part of λ plays no role.)

For the second term in the right-hand side of (4.22), take $\delta > 0$. If $c \leq c_\delta$, then (4.23) holds. But the norm $|\bullet|_\delta$ clearly controls the L^∞ norm, and hence the $L_t^r L_x^1$ norm. As a consequence

$$|q^c|_{L_t^r L_x^1} = \underset{c \rightarrow 0}{O}(c^2).$$

The result follows. \square

4.4.3 Estimates for the endpoints condition

Here, we prove the following lemma.

Lemma 4.4.4. *Let μ be a Penrose unstable profile, $n \in 2\pi\mathbb{Z}^d$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\lambda) > 0$ satisfying formula (4.19). For sufficiently small c , call γ^c the endpoints condition of P^c as given in Theorem 4.4.1. There is a constant A which only depends on μ such that*

$$\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma^0, \gamma^c) \leq A \left(1 + \frac{|n|}{\Re(\lambda)^2} \exp(\Re(\lambda)) \right) c + \underset{c \rightarrow 0}{o}(c). \quad (4.25)$$

Remark 4.4.5. To define the Monge-Kantorovic distance on $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$, we need a distance on $\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$. We use as in Chapter 2:

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d, \quad \mathbf{d}_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{\mathbf{d}(x_1, y_1)^2 + \mathbf{d}(x_2, y_2)^2},$$

where \mathbf{d} is the canonical distance on the torus.

Proof. For c sufficiently small, call Ψ^c the map that associates to $(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ the unique solution to

$$\forall t \in [0, 1], \quad \ddot{\omega}_t = -\nabla p^c(t, \omega_t), \quad \omega_0 = x, \quad \dot{\omega}_0 = v.$$

As explained in the proof of Theorem 4.3.6, we have $P^c = \Psi_{\#}^c f_0^c$, where f_0^c is defined in (4.21).

As a consequence, calling $\Phi^c : (x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto (x, \Psi^c(x, v)|_{t=1})$, the endpoints of the path starting from x at velocity v , we have $\gamma^c = \Phi_{\#}^c f_0^c$. By definition of f_0^c and by linearity of push-forwards,

$$\gamma^c = \int \Phi_{\#}^c \left\{ \delta_{v_0^{c,w}} \rho_0^{c,w} \right\} d\mu(w) = \int \phi^{c,w}_{\#} \rho_0^{c,w} d\mu(w),$$

where $\phi^{c,w} : x \in \mathbb{T}^d \mapsto \Phi^c(x, v_0^{c,w}(w))$. Let us call for all c sufficiently small and $w \in \mathbb{R}^d$: $\gamma^{c,w} := \phi^{c,w}_{\#} \rho_0^{c,w}$.

By standard properties of the Monge-Kantorovic distance,

$$\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma^0, \gamma^c) \leq \int \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma^{0,w}, \gamma^{c,w}) d\mu(w). \quad (4.26)$$

From now on, we fix $w \in \mathbb{R}^d$, and we provide an upper bound for $\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma^{0,w}, \gamma^{c,w})$. First, we have:

$$\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma^{0,w}, \gamma^{c,w}) \leq \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma^{0,w}, \tilde{\gamma}^{c,w}) + \mathbf{d}_{\text{MK}}(\tilde{\gamma}^{c,w}, \gamma^{c,w}) \quad (4.27)$$

where $\tilde{\gamma}^{c,w} := \phi^{0,w}_{\#} \rho_0^{c,w}$.

To estimate the first term in the right-hand side of (4.27), we observe that $\rho_0^{0,w}$ is the Lebesgue measure on the torus, and that for all $x \in \mathbb{T}^d$, $\phi^{0,w}(x) = (x, x+w)$, so that $\phi^{0,w}$ is $\sqrt{2}$ -Lipschitz continuous. Consequently,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma^{0,w}, \tilde{\gamma}^{c,w}) &= \mathbf{d}_{\text{MK}}(\phi^{0,w}_{\#} \text{Leb}, \phi^{0,w}_{\#} \rho_0^{c,w}) \\ &\leq \text{Lip}(\phi^{0,w}) \mathbf{d}_{\text{MK}}(\text{Leb}, \rho_0^{c,w}) \\ &= \sqrt{2} \mathbf{d}_{\text{MK}}(\text{Leb}, \rho_0^{c,w}). \end{aligned}$$

Using [83, Theorem 5.34], we deduce that when c is sufficiently small,

$$\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma^{0,w}, \tilde{\gamma}^{c,w}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |\rho_0^{c,w} - 1|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{T}^d)} = O_{c \rightarrow 0}(c), \quad (4.28)$$

where O is uniform in w , n and λ .

For the second term in the right-hand side of (4.27), we have:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\text{MK}}^2(\tilde{\gamma}^{c,w}, \gamma^{c,w}) &= \mathbf{d}_{\text{MK}}^2(\phi^{0,w} \# \rho_0^{c,w}, \phi^{c,w} \# \rho_0^{c,w}) \\ &\leq \int \mathbf{d}_2^2(\phi^{0,w}(x), \phi^{c,w}(x)) \rho_0^{c,w}(x) \, dx \\ &= \int \mathbf{d}^2(x + w, \Psi(x, v_0^{c,w}(x))|_{t=1}) \rho_0^{c,w}(x) \, dx. \end{aligned}$$

But for all $x \in \mathbb{T}^d$,

$$\Psi(x, v_0^{c,w}(x))|_{t=1} = x + w - \int_0^1 \int_0^s \nabla p^c(\tau, \Psi(x, v_0^{c,w}(x))|_{t=\tau}) \, d\tau \, ds.$$

In particular,

$$\mathbf{d}(x + w, \Psi(x, v_0^{c,w}(x))|_{t=1}) \leq \int_0^1 \int_0^s |\nabla p^c(\tau, \bullet)|_{L^\infty} \, d\tau \, ds.$$

Hence, using (4.22), taking $\delta > 0$ and assuming that c is sufficiently small, we get

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(x + w, \Psi(x, v_0^{c,w}(x))|_{t=1}) &\leq c \int_0^1 \int_0^s |\Re(in \exp(\lambda\tau + in \cdot \bullet))|_{L^\infty} \, d\tau \, ds + \int_0^1 \int_0^s |\nabla q^c(\tau, \bullet)|_0 \, d\tau \, ds \\ &\leq c|n| \int_0^1 \int_0^s |\Re(\exp(\lambda\tau + in \cdot \bullet))|_{L^\infty} \, d\tau \, ds + \frac{1}{\delta} \int_0^1 \int_0^s |q^c(\tau, \bullet)|_\delta \, d\tau \, ds \\ &\leq c|n| \int_0^1 \int_0^s \exp(\Re(\lambda)\tau) \, d\tau \, ds + o_{c \rightarrow 0}(c) \\ &\leq \frac{c|n|}{\Re(\lambda)^2} \exp(\Re(\lambda)) + o_{c \rightarrow 0}(c) \end{aligned}$$

where the o is uniform in w and x . Integrating the square of this inequality with respect to $\rho_0^{c,w}(x) \, dx$, using (4.20), and then taking the square root leads to:

$$\mathbf{d}_{\text{MK}}(\tilde{\gamma}^{c,w}, \gamma^{c,w}) \leq \frac{c|n|}{\Re(\lambda)^2} \exp(\Re(\lambda)) + o_{c \rightarrow 0}(c) \quad (4.29)$$

where the o is uniform in w .

Inequality (4.25) is then a consequence of (4.26) (4.27), (4.28) and (4.29). \square

4.4.4 Proof of Theorem 1.4.5

Let μ be a Penrose unstable profile whose support is compactly embedded in $(-\pi, \pi)^d$. Let $r > 1$ and $\varepsilon > 0$. Take a_r and A as defined in Lemma 4.4.3 and Lemma 4.4.4 respectively.

For $n \in 2\pi\mathbb{Z}^d$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\lambda) > 0$ satisfying (4.19), and for c sufficiently small we define P^c as in Theorem 4.4.1, γ^c its endpoint conditions (in this case P^c is the unique solution to incompressible optimal transport with endpoint conditions γ^c) and p^c its pressure field.

Calling $\gamma := \gamma_0$ (which does not depend on n, λ), we have by (4.24), (4.25) and the fact that $p^0 = 0$:

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma, \tilde{\gamma}) \leq \varepsilon} \frac{|p(\tilde{\gamma}) - p(\gamma)|_{L_t^r L_x^1}}{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma, \tilde{\gamma})} &\geq \liminf_{c \rightarrow 0} \frac{|p^c|_{L_t^r L_x^1}}{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma, \gamma^c)} \\ &\geq \frac{a_r}{A} \frac{\exp(\Re(\lambda)) - 1}{1 + \frac{|n|}{\Re(\lambda)^2} \exp(\Re(\lambda))}. \end{aligned}$$

As this is true for any $n \in 2\pi\mathbb{Z}^d$ and λ with positive real part satisfying (3.16), by the scaling of the equation (Remark 1.2.3), we have also for all $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sup_{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma, \tilde{\gamma}) \leq \varepsilon} \frac{|p(\tilde{\gamma}) - p(\gamma)|_{L_t^r L_x^1}}{\mathbf{d}_{\text{MK}}(\gamma, \tilde{\gamma})} \gtrsim \frac{a_r}{A} \frac{\exp(\Re(k\lambda)) - 1}{1 + \frac{k|n|}{\Re(k\lambda)^2} \exp(\Re(k\lambda))} \gtrsim k^{1-1/r},$$

where " \gtrsim " means "greater than up to a multiplicative constant that does not depend on k ".

Hence, we get the result by letting k go to $+\infty$. □

Part II

Entropic regularization of incompressible optimal transport

Chapter 5

Existence of the pressure field

We present in this chapter the results from the article [9], which contains an independent introduction. We do not reproduce it entirely here to avoid to the reader unnecessary repetitions. However, we decided to reorganise the paper in order to have a continuously uniform layout with the rest of the thesis, and a good agreement with the notations given in the introduction. We recall that the main results of this chapter have been presented in Subsection 1.5.1 above.



The goal of this chapter is to show the existence of a pressure field in the Brödinger problem Brö (Problem 1.3.11) and its multiphasic version MBrö (Problem 1.3.12), which corresponds to prove Theorems 1.5.1 and 1.5.2 from the introduction.

In Section 5.1, we introduce some notations, and give some preliminary results. In particular, we present in Subsection 5.1.1 the functional spaces we will work with in the rest of the Chapter.

We prove Theorem 1.5.2 in Section 5.2. As said in the introduction, the proof is quite similar to the one of Theorem 1.1.26, with the additional necessity to estimate the Fischer information of the modified generalized flows.

Then, we prove the result concerning the link between the problems Brö and MBrö presented in Subsection 1.3.5, namely Theorem 5.3.1, of Section 5.3.

The proof of Theorem 1.5.1, given in Section 5.4, is a consequence of Theorem 1.5.2, Theorem 5.3.1 and their respective proofs.

Finally, we give in Section 5.5 a formal way to recover formula (1.95), assuming by analogy with the non-viscous case that each phase is the solution of the Schrödinger problem corresponding to its endpoints, in the potential given by the pressure field. We do not prove that this condition is always verified, but it should be the "noisy" version of Theorem 1.1.30 of the introduction.

In this chapter, the level of noise $\nu > 0$ of Brö_ν and MBrö_ν is given once for all, and everything is done in the flat torus $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$.

5.1 Notations and preliminary results

5.1.1 Functional spaces of interest

In the whole chapter, if \mathcal{B} is a Banach space, we denote by \mathcal{B}' its topological dual. Two functional sets will be of particular interest.

1. We will often consider the set $C^0([0, 1], \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ of curves on the set of probability measures on the torus. We endow it with the topology of uniform convergence corresponding to the topology of narrow convergence on $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$. We write $M = (M_t)_{t \in [0, 1]} \in C_0^0([0, 1], \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ whenever M belongs to $C^0([0, 1], \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ and $M_0 = M_1 = \text{Leb}$, the Lebesgue measure on \mathbb{T}^d .

2. The set \mathcal{E} will be the vector space of continuous scalar functions f that satisfy

- for all $t \in [0, 1]$, $f(0, \bullet) = f(1, \bullet) = 0$,
- for all $t \in [0, 1]$, $f(t, \bullet) \in W^{2, \infty}(\mathbb{T}^d)$ and the Hessian $D^2 f$ of f satisfies:

$$\sup_{t \in [0, 1]} \|D^2 f(t, \bullet)\|_{L_x^\infty} < +\infty,$$

- for all $x \in \mathbb{T}^d$, $f(\bullet, x) \in AC^2([0, 1])$ and the temporal derivative $\partial_t f$, which is punctually defined for almost all $t \in [0, 1]$ for almost all $x \in \mathbb{T}^d$, satisfies

$$\int_0^1 \|\partial_t f(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 dt < +\infty.$$

On \mathcal{E} , we define the norm

$$\forall f \in \mathcal{E}, \quad \mathbf{N}(f) := \sup_{t \in [0, 1]} \|D^2 f(t)\|_{L_x^\infty} + \left(\int_0^1 \|\partial_t f(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

This norm is very similar to the one used in Chapter 2, defined by (1.88) and (2.5). But here, we control two spatial derivatives of f instead of one.

If in addition, for all $t \in [0, 1]$, $\int f(t, x) dx = 0$, we write $f \in \mathcal{E}_0$.

In a slightly abusive way, we keep the same notations if f has its values in \mathbb{R}^d .

The pressure that we will find naturally arises as a Gâteaux-differential of a functional defined on \mathcal{E}_0 . For the link between Gâteaux-differentiability and subdifferential of a convex function, we refer to [41].

Remark that with these notations identifying a measure with its density with respect to Leb , we have $C_0^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)) \cap \mathcal{E} \subset 1 + \mathcal{E}_0$.

5.1.2 Preliminary results

We will use the following result, which is a consequence of the main result in [36]. Recall that we have seen in Remark 2.A.2 of the appendix of Chapter 2 how to prove this result.

Theorem 5.1.1. *Let $\varphi \in \mathcal{E}_0$ be such that $\mathbf{N}(\varphi) \leq 1/2$. There exists a dimensional constant $C > 0$, $\xi = \xi(t, x) \in \mathbb{R}^d$ and $\zeta = \zeta(t, x) \in \mathbb{R}^d$ two vector fields of \mathcal{E}_0 such that:*

- for all $t \in [0, 1]$, $\phi(t, \bullet) := \text{Id} + \xi(t, \bullet)$ and $\psi(t, \bullet) := \text{Id} + \zeta(t, \bullet)$ are two diffeomorphisms of the torus \mathbb{T}^d , which are inverses of each other,

- for all $t \in [0, 1]$,

$$\phi(t, \bullet)_\# \left((1 + \varphi(t, \bullet)) \text{Leb} \right) = \text{Leb},$$

or equivalently,

$$\psi(t, \bullet)_\# \text{Leb} = (1 + \varphi(t, \bullet)) \text{Leb}, \quad (5.2)$$

- we have:

$$\mathbf{N}(\xi) + \mathbf{N}(\zeta) \leq C\mathbf{N}(\varphi). \quad (5.3)$$

We will also need the following easy lemma.

Lemma 5.1.2. *Take $\alpha \in \mathcal{E}'_0$. There is a unique distributional gradient $F(\alpha) \in \nabla\mathcal{D}'((0,1) \times \mathbb{T}^d)$ such that for all $\varphi \in \mathcal{D}((0,1) \times \mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d)$,*

$$\langle \alpha, \operatorname{div} \varphi \rangle_{\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0} = -\langle F(\alpha), \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Moreover, $F : \mathcal{E}'_0 \mapsto \nabla\mathcal{D}'$ is a continuous injection. In the following, we simply call ∇ this operator.

5.2 Existence of the pressure in the multiphasic model MBrö

The purpose of this section is to prove Theorem 1.5.2, so we work with the multiphasic problem MBrö, defined in Problem 1.3.12. We fix $(\mathcal{I}, \mathbf{m})$ a probability space of labels for the different phases. We also fix $\boldsymbol{\rho}_0 = (\rho_0^i)_{i \in \mathcal{I}}$ and $\boldsymbol{\rho}_1 = (\rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$ two measurable families of probability measures on \mathbb{T}^d satisfying the incompressibility condition (1.26) and condition (1.86), so that the problem $\text{MBrö}_\nu(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\rho}_1)$ admits a unique solution.

As in the proof of Theorem 1.1.26, we introduce a new optimization problem, relaxing the incompressibility constraint in MBrö.

5.2.1 A modified optimization problem

We define this problem as follows.

Problem 5.2.1 (Multiphasic Schrödinger problem with prescribed density). Let $M = (M_t)_{t \in [0,1]}$ be in the set $C_0^0([0,1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$. Find a measurable family $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{c}) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$ such that:

- for \mathbf{m} -almost all i , (ρ^i, c^i) is a solution to the continuity equation joining ρ_0^i to ρ_1^i ,
- for all $t \in [0,1]$, we have:

$$\int \rho_t^i \, \mathbf{d}\mathbf{m}(i) = M_t,$$

- The family $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{c})_{i \in \mathcal{I}}$ minimizes:

$$\mathcal{H}_\nu(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{c}) := \frac{1}{2} \int \int_0^1 \int \left\{ |c^i(t, x)|^2 + \frac{\nu^2}{4} |\nabla \log \rho_t^i(x)|^2 \right\} \, \mathrm{d}\rho_t^i(x) \, \mathrm{d}t \, \mathbf{d}\mathbf{m}(i),$$

in the set of families satisfying the two first conditions.

From now on, as $\boldsymbol{\rho}_0$ and $\boldsymbol{\rho}_1$ are supposed to be fixed, we will simply call this problem $\text{MBrö}_\nu(M)$, and $\mathcal{H}_\nu^*(M)$ the corresponding optimal value of \mathcal{H}_ν . We fix by convention $\mathcal{H}_\nu^*(M) = +\infty$, if $\text{MBrö}_\nu(M)$ has no solution (which as usual is only possible when there is no competitor with finite value of \mathcal{H}_ν). As $\boldsymbol{\rho}_0$ and $\boldsymbol{\rho}_1$ satisfy the condition of existence (1.86) for the problem $\text{MBrö}_\nu(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\rho}_1)$, we know that $\mathcal{H}_\nu^*(\text{Leb}) < +\infty^1$.

¹As earlier in this thesis, with an abuse of notation, we write Leb for the curve $t \in [0,1] \mapsto \text{Leb}$.

The functional $\mathcal{H}_\nu^*(M)$ is convex and lower semi-continuous, as stated in the following lemma.

Lemma 5.2.2. *The functional*

$$M \in C_0^0([0, 1]; \mathcal{P}(T^d)) \mapsto \mathcal{H}_\nu^*(M)$$

is convex and lower semi-continuous for the topology of $C^0([0, 1]; \mathcal{P}(T^d))$.

In particular, it is also semi-continuous for any stronger topology, as the one of \mathcal{E} , so that:

$$\varphi \in \mathcal{E}_0 \mapsto \mathcal{H}_\nu^*(1 + \varphi)^2$$

is also convex and lower semi-continuous.

Proof. We start by proving the convexity. Let us take $M_1, M_2 \in C_0^0([0, 1]; \mathcal{P}(T^d))$ and $\lambda \in [0, 1]$. If $\mathcal{H}_\nu^*(M_1)$ or $\mathcal{H}_\nu^*(M_2)$ is infinite, there is nothing to prove. Else, let us consider $(\rho^1, \mathbf{c}^1) = (\rho^{1,i}, c^{1,i})_{i \in \mathcal{I}}$ and $(\rho^2, \mathbf{c}^2) = (\rho^{2,i}, c^{2,i})_{i \in \mathcal{I}}$ the solutions of $\text{MBrö}_\nu(M_1)$ and $\text{MBrö}_\nu(M_2)$ respectively. We define for \mathfrak{m} -almost all $i \in \mathcal{I}$ and all $t \in [0, 1]$:

$$\tilde{\rho}_t^i := (1 - \lambda)\rho_t^{1,i} + \lambda\rho_t^{2,i}, \quad \tilde{m}_t^i := (1 - \lambda)\rho_t^{1,i}c_t^{1,i} + \lambda\rho_t^{2,i}c_t^{2,i}, \quad \tilde{c}_t^i := \frac{d\tilde{m}_t^i}{d\tilde{\rho}_t^i},$$

and $(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{m}}) := (\tilde{\rho}^i, \tilde{m}^i, \tilde{c}^i)_{i \in \mathcal{I}}$. Because of formula (1.20) of the introduction, \mathcal{A} , and hence \mathcal{H}_ν and \mathcal{H}_ν^* are convex, when considered as a function of the couple density/momentum, namely $(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{m}})$ here.

Consequently, as $(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{c}})$ is a competitor for $\text{MBrö}_\nu((1 - \lambda)M_1 + \lambda M_2)$, we have:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu^*((1 - \lambda)M_1 + \lambda M_2) &\leq \mathcal{H}_\nu(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{c}}) \\ &\leq (1 - \lambda)\mathcal{H}_\nu(\rho^1, \mathbf{c}^1) + \lambda\mathcal{H}_\nu(\rho^2, \mathbf{c}^2) \\ &= (1 - \lambda)\mathcal{H}_\nu^*(M_1) + \lambda\mathcal{H}_\nu^*(M_2). \end{aligned}$$

The semi-continuity works the same way, remarking that still thanks to formula (1.20), \mathcal{A} , and hence \mathcal{H}_ν and \mathcal{H}_ν^* are lower semi-continuous (when considered as a function of the couple density/momentum). Indeed, let us take $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequence of $C_0^0([0, 1]; \mathcal{P}(T^d))$ converging to M , and (ρ^n, \mathbf{c}^n) the solution of $\text{MBrö}_\nu(M_n)$. If $\liminf_n \mathcal{H}_\nu(\rho^n, \mathbf{c}^n) = +\infty$, there is nothing to prove. Else, up to forgetting some labels, $(\mathcal{H}_\nu(\rho^n, \mathbf{c}^n))$ is bounded. But then, as $\mathcal{H}_\nu \geq \mathcal{A}$, the corresponding sequence $(\rho^n, \mathbf{m}^n) := (\rho^{n,i}, \rho^{n,i}c^{n,i})_{i \in \mathcal{I}, n \in \mathbb{N}}$ has its values in a compact³. If (ρ, \mathbf{m}) is a limit point, and if (ρ, \mathbf{c}) is the corresponding couple of densities/velocities, then it is a competitor for $\text{MBrö}_\nu(M)$, and we have:

$$\mathcal{H}_\nu^*(M) \leq \mathcal{H}_\nu(\rho, \mathbf{c}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}_\nu(\rho^n, \mathbf{c}^n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}_\nu^*(\rho^n, \mathbf{c}^n).$$

This concludes the proof. □

From now on, we decompose the proof of Theorem 1.5.2 into two parts: in Lemma 5.2.3, we show that \mathcal{H}_ν is bounded in a neighbourhood of Leb , so that it admits a non-empty subdifferential at Leb . In Lemma 5.2.5, we show that this subdifferential is a singleton, and we derive formula (1.95) for p , its only element. We conclude the proof of the theorem in Subsection 5.2.4.

²We also set $\mathcal{H}_\nu^*(1 + \varphi) = +\infty$ in case $1 + \varphi$ is not everywhere nonnegative.

³For the convergence in law and almost sure of the measurable map $i \mapsto (\rho^{n,i}, \rho^{n,i}c^{n,i})_{i \in \mathcal{I}}$, with values in the set of space time measures endowed with the topology of narrow convergence. We are not more specific and refer to [23, 24] for more details

5.2.2 Boundedness of the optimal value

Because of Lemma 5.2.2, and because $\mathcal{H}_\nu^*(\text{Leb}) < +\infty$, a sufficient condition for \mathcal{H}_ν^* to admit a non-empty subdifferential $\partial\mathcal{H}_\nu^*(\text{Leb}) \subset \mathcal{E}'_0$ at $M = \text{Leb}$ is to be bounded in a \mathcal{E}_0 -neighbourhood of Leb . This is the subject of the following lemma, which is the main part in the proof of Theorem 1.5.2. We recall that the norm \mathbf{N} is defined by formula (5.1).

Lemma 5.2.3. *There is $C > 0$ only depending on the dimension and on ρ_0, ρ_1 such that for all $\varphi \in \mathcal{E}_0$ satisfying the estimate $\mathbf{N}(\varphi) \leq 1/2$, we have:*

$$\mathcal{H}_\nu^*(1 + \varphi) \leq C(1 + \nu^2).$$

Remark 5.2.4. In this lemma, we follow cautiously the dependence of the constants with respect to ν . It will be useful in Chapter 6 to deduce the convergence of the pressure fields when ν tends to zero.

Proof. In the whole proof, the symbol \lesssim means "lower than, up to a multiplicative dimensional constant".

For a given φ as in the statement of the lemma, we take ξ, ζ the two vector fields and ϕ, ψ the corresponding time-dependent diffeomorphisms given by Theorem 5.1.1. We call $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$ the solution of $\text{MBrö}_\nu(\rho_0, \rho_1)$. By definition (1.79) of the Fischer information (see also (1.77)), as $\mathcal{F}(\rho) < +\infty$, for \mathbf{m} -almost all i , $\sqrt{\rho^i} \in L^2((0, 1); H^1(\mathbb{T}^d))$. In particular, ρ^i has a density with respect to the Lebesgue measure, and $\nabla \log \rho^i$ is well defined $dt \otimes \rho_t^i$ -almost everywhere.

We start by defining a competitor for the problem $\text{MBrö}_\nu(1 + \varphi)$.

Step 1: Definition of a competitor for $\text{MBrö}_\nu(1 + \varphi)$. We define for \mathbf{m} -almost all $i \in \mathcal{I}$, all $t \in [0, 1]$ and $x \in \mathbb{T}^d$:

$$\rho^{\varphi, i}(t, x) := \rho^i(t, \phi(t, x)) \det D\phi(t, x), \quad (5.4)$$

$$c^{\varphi, i}(t, x) := \partial_t \psi(t, \phi(t, x)) + D\psi(t, \phi(t, x)) \cdot c^i(t, \phi(t, x)), \quad (5.5)$$

where $D\phi$ and $D\psi$ stand for the differentials with respect to x of ϕ and ψ respectively. Then, we call $(\rho^\varphi, \mathbf{c}^\varphi) := (\rho^{\varphi, i}, c^{\varphi, i})_{i \in \mathcal{I}}$.

Let us prove that $(\rho^\varphi, \mathbf{c}^\varphi)$ is a competitor for the problem $\text{MBrö}_\nu(1 + \varphi)$ (Problem 5.2.1).

First of all, for \mathbf{m} -almost all i , $(\rho^{\varphi, i}, c^{\varphi, i})$ is a solution to the continuity equation. Indeed, by the change of variable formula, equation 5.4 exactly means that for all $t \in [0, 1]$ and \mathbf{m} -almost all i :

$$\rho_t^{\varphi, i} = \psi(t, \bullet) \# \rho_t^i. \quad (5.6)$$

Hence, if f is a test function, we have:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int f(x) d\rho_t^{\varphi, i}(x) &= \frac{d}{dt} \int f(\psi(t, x)) d\rho_t^i(x) && \text{by (5.6),} \\ &= \int \left\{ \partial_t (f(\psi(t, x))) + \langle c^i(t, x), \nabla (f(\psi(t, x))) \rangle \right\} d\rho_t^i(x) \\ &= \int \left\langle \nabla f(\psi(t, x)), \partial_t \psi(t, x) + D\psi(t, x) \cdot c^i(t, x) \right\rangle d\rho_t^i(x) \\ &= \int \left\langle \nabla f(\psi(t, x)), c^{\varphi, i}(t, \psi(t, x)) \right\rangle d\rho_t^i(x) && \text{by (5.5),} \\ &= \int \left\langle \nabla f(x), c^{\varphi, i}(t, x) \right\rangle d\rho_t^{\varphi, i}(x) && \text{by (5.6),} \end{aligned}$$

where in the second line, we used the fact that (ρ^i, c^i) is a solution to the continuity equation. Hence, the claim.

Moreover, formula (5.2) implies that for all $t \in [0, 1]$, the mean density of ρ at time t is $1 + \varphi(t, \bullet)$:

$$\int \rho_t^{\varphi, i} \, d\mathbf{m}(i) = \psi(t, \bullet)_{\#} \int \rho_t^i \, d\mathbf{m}(i) = \psi(t, \bullet)_{\#} \text{Leb} = (1 + \varphi(t, \bullet)) \text{Leb}.$$

As a consequence, $(\rho^\varphi, \mathbf{c}^\varphi)$ is a competitor for $\text{MBrö}_\nu(1 + \varphi)$, and:

$$\mathcal{H}_\nu^*(1 + \varphi) \leq \mathcal{H}_\nu(\rho^\varphi, \mathbf{c}^\varphi) = \mathcal{A}(\rho^\varphi, \mathbf{c}^\varphi) + \nu^2 \mathcal{F}(\rho^\varphi). \quad (5.7)$$

(We recall that \mathcal{A} and \mathcal{F} are defined by the formulae (1.27) and (1.82) respectively.) To get the result, it remains to estimate $\mathcal{H}_\nu(\rho^\varphi, \mathbf{c}^\varphi)$. Let us estimate first $\mathcal{A}(\rho^\varphi, \mathbf{c}^\varphi)$, and then $\mathcal{F}(\rho^\varphi)$.

Step 2: Estimation of $\mathcal{A}(\rho^\varphi, \mathbf{c}^\varphi)$. For $i \in \mathcal{I}$, we have:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c^{\varphi, i}(t, x)|^2 \, d\rho_t^{\varphi, i}(x) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c^{\varphi, i}(t, \psi(t, x))|^2 \, d\rho_t^i(x) \, dt && \text{by (5.6),} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int |\partial_t \psi(t, x) + D\psi(t, x) \cdot c^i(t, x)|^2 \, d\rho_t^i(x) \, dt && \text{by (5.5),} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c^i(t, x) + \partial_t \zeta(t, x) + D\zeta(t, x) \cdot c^i(t, x)|^2 \, d\rho_t^i(x) \, dt && \text{because } \psi = \text{Id} + \zeta, \\ &\lesssim \frac{1}{2} \int_0^1 \int \left\{ |c^i(t, x)|^2 + |\partial_t \zeta(t, x)|^2 + |D\zeta(t, x) \cdot c^i(t, x)|^2 \right\} \, d\rho_t^i(x) \, dt \\ &\lesssim \left(1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c^i(t, x)|^2 \, d\rho_t^i(x) \, dt \right) (1 + \mathbf{N}(\zeta)^2), \end{aligned}$$

where the last line is obtained thanks to the definition (5.1) and by observing that $\mathbf{N}(\zeta)$ controls $\sup_t \text{Lip}(\zeta(t, \bullet))$. It remains to integrate this inequality with respect to \mathbf{m} to obtain:

$$\mathcal{A}(\rho^\varphi, \mathbf{c}^\varphi) \lesssim (1 + \mathcal{A}(\rho, \mathbf{c})) (1 + \mathbf{N}(\zeta)^2). \quad (5.8)$$

Step 3: Estimation of $\mathcal{F}(\rho^\varphi)$. If $i \in \mathcal{I}$, using the definition (5.4) of $\rho^{\varphi, i}$, we can compute explicitly for \mathbf{m} -almost all i and all t and x :

$$\nabla \log \rho_t^{\varphi, i}(x) = {}^t D\phi(t, x) \cdot \nabla \log \rho_t^i(\phi(t, x)) + \nabla \log \det D\phi(t, x),$$

where ${}^t D\phi$ is the adjoint of $D\phi$. As a consequence,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^{\varphi, i}(x)|^2 \, d\rho_t^{\varphi, i}(x) \, dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^{\varphi, i}(\psi(t, x))|^2 \, d\rho_t^i(x) \, dt && \text{by (5.6),} \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \int |{}^t D\phi(t, \psi(t, x)) \cdot \nabla \log \rho_t^i(x) + \nabla \log \det D\phi(t, \psi(t, x))|^2 \, d\rho_t^i(x) \, dt \\ &\lesssim \frac{1}{8} \int_0^1 \int \left\{ |{}^t D\phi(t, \psi(t, x)) \cdot \nabla \log \rho_t^i(x)|^2 + |\nabla \log \det D\phi(t, \psi(t, x))|^2 \right\} \, d\rho_t^i(x) \, dt. \end{aligned}$$

The first term can be estimated thanks to:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} \int_0^1 \int |\mathbf{D}\phi(t, \psi(t, x)) \cdot \nabla \log \rho_t^i(x)|^2 d\rho_t^i(x) dt \\
&= \frac{1}{8} \int_0^1 \int |(\text{Id} + {}^t\mathbf{D}\xi(t, \psi(t, x))) \cdot \nabla \log \rho_t^i(x)|^2 d\rho_t^i(x) dt \quad \text{because } \phi = \text{Id} + \xi, \\
&\lesssim \left(\frac{1}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^i(x)|^2 d\rho_t^i(x) dt \right) (1 + \mathbf{N}(\xi)^2). \tag{5.9}
\end{aligned}$$

For the second term, quick computations show that for all (t, x) where ξ (and consequently ϕ) is twice differentiable with respect to space:

$$\nabla \log \det \mathbf{D}\phi(t, \psi(t, x)) = (\text{Id} + {}^t\mathbf{D}\zeta(t, x)) \cdot \nabla \text{div } \xi(t, \psi(t, x)), \tag{5.10}$$

so that:

$$\left\| \nabla \log \det \mathbf{D}\phi(t, \psi(t, x)) \right\|_{\infty} \lesssim (1 + \mathbf{N}(\zeta))\mathbf{N}(\xi).$$

Consequently, we get:

$$\frac{1}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \det \mathbf{D}\phi(t, \psi(t, x))|^2 d\rho_t^i(x) dt \lesssim (1 + \mathbf{N}(\zeta))^2 \mathbf{N}(\xi)^2. \tag{5.11}$$

Gathering (5.9) and (5.11) and integrating with respect to \mathbf{m} , we end up with:

$$\mathcal{F}(\rho^\varphi) \lesssim (1 + \mathcal{F}(\rho)) (1 + \mathbf{N}(\xi)^2) (1 + \mathbf{N}(\zeta)^2). \tag{5.12}$$

Step 4: Conclusion. Gathering the two estimates (5.8) and (5.12), inequality (5.7), the control (5.3) on ξ and ζ given by the Theorem of Dacogna and Moser and $\mathbf{N}(\varphi) \leq 1/2$, we get:

$$\mathcal{H}_\nu^*(1 + \varphi) \lesssim 1 + \nu^2 + \mathcal{H}_\nu(\rho, \mathbf{c}) \lesssim 1 + \nu^2 + \mathcal{H}_\nu^*(\text{Leb}).$$

But considering $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{c}})$ the solution of $\text{MBr}\ddot{\text{o}}_1(\rho_0, \rho_1)$, we have:

$$\mathcal{H}_\nu^*(\text{Leb}) \leq \mathcal{A}(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{c}}) + \nu^2 \mathcal{F}(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{c}}) \leq (1 + \nu^2) \mathcal{H}_1^*(\text{Leb}),$$

which only depends on the dimension, ρ_0 and ρ_1 . The result follows. \square

5.2.3 Characterization of the pressure as a distribution

In the following lemma, we show that if \mathcal{H}_ν^* admits a non-empty differential at Leb , then its subdifferential is a singleton.

Lemma 5.2.5. *Take $p \in \partial \mathcal{H}_\nu^*(\text{Leb}) \subset \mathcal{E}'_0$. Let ∇p be the distribution given by Lemma 5.1.2, and $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$ be the solution of $\text{MBr}\ddot{\text{o}}_\nu(\rho_0, \rho_1)$. Then in the sense of distributions:*

$$-\nabla p = \partial_t \left(\int \rho^i c^i \, \text{dm}(i) \right) + \text{div} \left(\int \{c^i \otimes c^i - w^i \otimes w^i\} \rho^i \, \text{dm}(i) \right), \tag{5.13}$$

where for $i \in \mathcal{I}$:

$$w^i = \frac{\nu}{2} \nabla \log \rho^i.$$

Proof. Take $\xi \in \mathcal{D}((0,1) \times \mathbb{T}^d)$ be a smooth vector field, and define for all $\varepsilon > 0$, $t \in [0,1]$ and $x \in \mathbb{T}^d$:

$$\begin{aligned}\phi^\varepsilon(t, x) &:= x + \varepsilon\xi(t, x), \\ \varphi^\varepsilon(t, x) &:= \det D\phi^\varepsilon(t, x) - 1.\end{aligned}\tag{5.14}$$

For all $\varepsilon > 0$, the function φ^ε belongs to \mathcal{E}_0 , so that using $p \in \partial\mathcal{H}_\nu^*(\text{Leb})$:

$$\mathcal{H}_\nu^*(\text{Leb}) + \langle p, \varphi^\varepsilon \rangle_{\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0} \leq \mathcal{H}_\nu^*(1 + \varphi^\varepsilon).\tag{5.15}$$

First, we can check that for all t and x :

$$\varphi^\varepsilon(t, x) = \varepsilon \operatorname{div} \xi(t, x) + \varepsilon\delta^\varepsilon(t, x),$$

where $\delta^\varepsilon = \delta^\varepsilon(t, x) \in \mathbb{R}$ tends to zero in any reasonable space of functions. As a consequence, with the notations of Lemma 5.1.2, we can estimate $\langle p, \varphi^\varepsilon \rangle$ in formula (5.15) by:

$$\langle p, \varphi^\varepsilon \rangle_{\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0} = -\varepsilon \langle \nabla p, \operatorname{div} \xi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon).\tag{5.16}$$

It remains to give an estimate for $\mathcal{H}_\nu^*(1 + \varphi^\varepsilon)$. To do so, we build a competitor for $\text{MBrö}_\nu(1 + \varphi^\varepsilon)$ as in the proof of Lemma 5.2.3, by defining:

$$\begin{aligned}\rho^{\varepsilon, i}(t, x) &:= \rho^i(t, \phi^\varepsilon(t, x)) \det D\phi^\varepsilon(t, x), \\ c^{\varepsilon, i}(t, x) &:= \partial_t \psi^\varepsilon(t, \phi^\varepsilon(t, x)) + D\psi^\varepsilon(t, \phi^\varepsilon(t, x)) \cdot c^i(t, \phi^\varepsilon(t, x)),\end{aligned}$$

where ψ^ε is the spatial inverse of ϕ^ε . It is well defined provided ε is sufficiently small, and it satisfies for all t and x :

$$\psi^\varepsilon(t, x) = x - \varepsilon\xi(t, x) + \varepsilon r^\varepsilon(t, x),\tag{5.17}$$

where $r^\varepsilon = r^\varepsilon(t, x) \in \mathbb{R}^d$ tends to zero in any reasonable space of functions. For all t and x , we also call

$$\zeta^\varepsilon(t, x) = \varepsilon\xi(t, x) + \varepsilon r^\varepsilon(t, x),\tag{5.18}$$

As in the proof of Lemma 5.2.3, $(\rho^\varepsilon, \mathbf{c}^\varepsilon) := (\rho^{\varepsilon, i}, c^{\varepsilon, i})_{i \in \mathcal{I}}$ is a competitor for $\text{MBrö}_\nu(1 + \varphi^\varepsilon)$, so that:

$$\mathcal{H}_\nu^*(1 + \varphi^\varepsilon) \leq \mathcal{H}_\nu(\rho^\varepsilon, \mathbf{c}^\varepsilon) = \mathcal{A}(\rho^\varepsilon, \mathbf{c}^\varepsilon) + \nu^2 \mathcal{F}(\rho^\varepsilon).\tag{5.19}$$

Once again, we will estimate $\mathcal{A}(\rho^\varepsilon, \mathbf{c}^\varepsilon)$ and $\mathcal{F}(\rho^\varepsilon)$ separately.

Estimation of $\mathcal{A}(\rho^\varepsilon, \mathbf{c}^\varepsilon)$. With the same computations as in Step 2 of the proof of Lemma 5.2.3, we get for $i \in \mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_0^1 \int |c^{\varepsilon, i}(t, x)|^2 d\rho_t^{\varepsilon, i}(x) dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c^i(t, x) + \partial_t \zeta^\varepsilon(t, x) + D\zeta^\varepsilon(t, x) \cdot c^i(t, x)|^2 d\rho_t^i(x) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c^i(t, x) - \varepsilon \partial_t \xi(t, x) - \varepsilon D\xi(t, x) \cdot c^i(t, x)|^2 d\rho_t^i(x) dt + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon),\end{aligned}$$

where the second line is obtained using (5.18). By expanding the square, we get:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c^{\varepsilon,i}(t,x)|^2 d\rho_t^{\varepsilon,i}(x) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c^i(t,x)|^2 d\rho_t^i(x) dt - \varepsilon \int_0^1 \int \left\langle c^i(t,x), \partial_t \xi(t,x) + D\xi(t,x) \cdot c^i(t,x) \right\rangle d\rho_t^i(x) dt + \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Our first estimate is obtained by integrating this inequality with respect to \mathbf{m} , and by performing integrations by parts:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho^\varepsilon, c^\varepsilon) &= \mathcal{A}(\rho, c) - \varepsilon \int \int_0^1 \int \left\langle c^i(t,x), \partial_t \xi(t,x) + D\xi(t,x) \cdot c^i(t,x) \right\rangle d\rho_t^i(x) dt d\mathbf{m}(i) + \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o}(\varepsilon) \\ &= \mathcal{A}(\rho, c) + \varepsilon \left\langle \partial_t \left(\int c^i \rho^i d\mathbf{m}(i) \right) + \mathbf{div} \left(\int c^i \otimes c^i \rho^i d\mathbf{m}(i) \right), \xi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o}(\varepsilon). \quad (5.20) \end{aligned}$$

Estimation of $\mathcal{F}(\rho^\varepsilon)$. Here, for $i \in \mathcal{I}$, the computations of Step 3 of the proof of Lemma 5.2.3 give:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^{\varepsilon,i}(x)|^2 d\rho_t^{\varepsilon,i}(x) dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \int |{}^t D\phi^\varepsilon(t, \psi^\varepsilon(t,x)) \cdot \nabla \log \rho_t^i(x) + \nabla \log \det D\phi^\varepsilon(t, \psi^\varepsilon(t,x))|^2 d\rho_t^i(x) dt. \end{aligned}$$

But because of (5.14), (5.17) and (5.10), we have for all t and x :

$$\begin{aligned} {}^t D\phi^\varepsilon(t, \psi^\varepsilon(t,x)) &= \text{Id} + \varepsilon {}^t D\xi(t,x) + \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o}(\varepsilon), \\ \nabla \log \det D\phi^\varepsilon(t, \psi^\varepsilon(t,x)) &= \varepsilon \nabla \text{div} \xi(t,x) + \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o}(\varepsilon), \end{aligned}$$

where the $o(\varepsilon)$ is uniform in t and x . Plugging these equalities in the previous formula leads to:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^{\varepsilon,i}(x)|^2 d\rho_t^{\varepsilon,i}(x) dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \int |(\text{Id} + \varepsilon {}^t D\xi(t,x)) \cdot \nabla \log \rho_t^i(x) + \varepsilon \nabla \text{div} \xi(t,x)|^2 d\rho_t^i(x) dt + \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o}(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^i(x)|^2 d\rho_t^i(x) dt \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^1 \int \left\langle \nabla \log \rho_t^i(x), D\xi(t,x) \cdot \nabla \log \rho_t^i(x) + \nabla \text{div} \xi(t,x) \right\rangle d\rho_t^i(x) dt + \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Integrating with respect to \mathbf{m} , multiplying by ν^2 , calling $w^i := \nu \nabla \log \rho^i / 2$ and performing integrations by parts, we get:

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \mathcal{F}(\rho^\varepsilon) \\
&= \nu^2 \mathcal{F}(\rho) + \frac{\varepsilon}{4} \nu^2 \int \int_0^1 \int \left\langle \nabla \log \rho_t^i(x), D\xi(t, x) \cdot \nabla \log \rho_t^i(x) + \nabla \operatorname{div} \xi(t, x) \right\rangle d\rho_t^i(x) dt d\mathbf{m}(i) + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon) \\
&= \nu^2 \mathcal{F}(\rho) - \varepsilon \left\langle \operatorname{div} \left(\int w^i \otimes w^i \rho^i d\mathbf{m}(i) \right) - \nabla \operatorname{div} \left(\frac{\nu}{2} \int w^i \rho^i d\mathbf{m}(i) \right), \xi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon) \\
&= \nu^2 \mathcal{F}(\rho) - \varepsilon \left\langle \operatorname{div} \left(\int w^i \otimes w^i \rho^i d\mathbf{m}(i) \right), \xi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon), \tag{5.21}
\end{aligned}$$

where the last line is obtained using:

$$\int w^i \rho^i d\mathbf{m}(i) = \frac{1}{2} \int \nabla \rho^i d\mathbf{m}(i) = \frac{1}{2} \nabla \int \rho^i d\mathbf{m}(i) = \frac{1}{2} \nabla \operatorname{Leb} = 0.$$

Conclusion. Hence, gathering the convex inequality (5.15), the expansion of the bracket (5.16), inequality (5.19) and the two estimates (5.20) and (5.21), we get:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}_\nu^*(\rho, \mathbf{c}) - \varepsilon \langle \nabla p, \operatorname{div} \xi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\
& \leq \mathcal{H}_\nu^*(\rho, \mathbf{c}) + \varepsilon \left\langle \partial_t \left(\int c^i \rho^i d\mathbf{m}(i) \right) + \operatorname{div} \left(\int \{c^i \otimes c^i - w^i \otimes w^i\} \rho^i d\mathbf{m}(i) \right), \xi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Letting ε go to zero, this formula implies that for all $\xi \in \mathcal{D}((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$,

$$\left\langle \partial_t \left(\int c^i \rho^i d\mathbf{m}(i) \right) + \operatorname{div} \left(\int \{c^i \otimes c^i - w^i \otimes w^i\} \rho^i d\mathbf{m}(i) \right) + \nabla p, \xi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \geq 0.$$

But replacing ξ by $-\xi$, this inequality is in fact an equality, and it exactly means that (5.13) holds in a distributional sense. \square

5.2.4 Conclusion of the proof of Theorem 1.5.2

Theorem 1.5.2 follows easily from Lemma 5.2.2, Lemma 5.2.3 and Lemma 5.2.5. Because of Lemma 5.2.2, \mathcal{H}_ν^* is convex and lower semi-continuous, and thanks to Lemma 5.2.5, we can find $p \in \partial \mathcal{H}_\nu^* \subset \mathcal{E}'_0$ i.e. such that for all $\varphi \in \mathcal{E}_0$,

$$\mathcal{H}_\nu^*(1 + \varphi) \geq \mathcal{H}_\nu^*(\operatorname{Leb}) + \langle p, \varphi \rangle.$$

But in that case, if $(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{c}})$ is as in the statement of Theorem 1.5.2, and if (ρ, \mathbf{c}) is the solution of $\operatorname{MBrö}_\nu(\rho_0, \rho_1)$, then

$$\mathcal{H}_\nu(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{c}}) \geq \mathcal{H}_\nu^*(1 + \varphi) \geq \mathcal{H}_\nu^*(\operatorname{Leb}) + \langle p, \varphi \rangle = \mathcal{H}_\nu(\rho, \mathbf{c}) + \langle p, \varphi \rangle.$$

Uniqueness and formula (1.95) are directly given by Lemma 5.2.5. \square

5.3 Link between MBrö and Brö

5.3.1 Statement of the result

Let us recall the context already presented in Subsection 1.3.5. We take γ a bistochastic measure satisfying the condition (1.85) of existence of a solution for the problem $\text{Brö}_\nu(\gamma)$, defined in Problem 1.3.11. We call as in the introduction $R^\nu \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; \mathbb{R}^d))$ the law of the Brownian motion starting from Leb. Let P be a solution of $\text{Brö}_\nu(\gamma)$. We define for γ -almost all $(x, y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$:

$$P^{x,y} := P(\bullet | X_0 = x \text{ and } X_1 = y). \quad (5.22)$$

(As usual, if $t \in [0, 1]$, X_t is the evaluation map at time t .) Also call $R^{\nu,x,y}$ the Brownian bridge:

$$R^{\nu,x,y} := R^\nu(\bullet | X_0 = x \text{ and } X_1 = y). \quad (5.23)$$

For $a < b \in [0, 1]$, we call $X_{[a,b]}$ the restriction operator:

$$X_{[a,b]} : \omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d) \mapsto \omega|_{[a,b]} \in C^0([a, b]; \mathbb{T}^d).$$

Then, we define:

$$P_\varepsilon^{x,y} := X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]\#} P^{x,y}. \quad (5.24)$$

We will prove that the family of couples of density and current velocity of $P^{x,y}$ (in the sense of formula (1.74) and Theorem 1.3.6 of the introduction), with $(x, y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ is a solution of the problem MBrö_ν with respect to its own endpoints, with $\mathcal{I} = \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ and $\mathbf{m} = \gamma$.

Theorem 5.3.1. *Take γ a bistochastic measure satisfying the condition (1.86) of existence for $\text{Brö}_\nu(\gamma)$ (Problem 1.3.11), P the solution of $\text{Brö}_\nu(\gamma)$, $\varepsilon > 0$ and for γ -almost all $(x, y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$, consider $P_\varepsilon^{x,y}$ as defined by formula (5.24).*

For γ -almost all (x, y) , we have:

$$H(P_\varepsilon^{x,y} | R_\varepsilon^\nu) < +\infty. \quad (5.25)$$

For all $t \in [0, 1]$, call $\rho_t^{x,y} := X_{t\#} P^{x,y}$ and take $c^{x,y} : [\varepsilon, 1-\varepsilon] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d4}$ the current velocity of $P_\varepsilon^{x,y}$ as given by formula (1.74) and Theorem 1.3.6.

Then $(\rho, \mathbf{c}) := (\rho^{x,y}, c^{x,y})_{(x,y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d}$ is the solution of $\text{MBrö}_\nu(\rho_\varepsilon, \rho_{1-\varepsilon})$ between the times $t = \varepsilon$ and $t = 1 - \varepsilon$, with $\mathcal{I} = \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ and $\mathbf{m} = \gamma$.

To prove this theorem, we will need two lemmas. The first one will be useful to show that for γ -almost all (x, y) , $P_\varepsilon^{x,y}$ has a finite entropy with respect to the restriction of the Brownian motion, $R_\varepsilon^\nu := X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]\#} R^\nu$. It writes as follows.

Lemma 5.3.2. *Take $\varepsilon \in (0, 1/2)$ and $x, y \in \mathbb{T}^d$. We have $R_\varepsilon^{\nu,x,y} \ll R_\varepsilon^\nu$, and there exist positive smooth functions $f_\varepsilon^{\nu,x,y}$ and $g_\varepsilon^{\nu,x,y}$ on \mathbb{T}^d such that the Radon-Nikodym derivative of $R_\varepsilon^{\nu,x,y}$ with respect to R_ε^ν is:*

$$\frac{dR_\varepsilon^{\nu,x,y}}{dR_\varepsilon^\nu} = f_\varepsilon^{\nu,x,y}(X_\varepsilon) g_\varepsilon^{\nu,x,y}(X_{1-\varepsilon}) \quad (5.26)$$

⁴ *A priori, $c^{x,y}$ depends on ε . In fact, we can show that if $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, then $c_{\varepsilon_2}^{x,y}$ is the restriction of $c_{\varepsilon_1}^{x,y}$ to the set of times $[\varepsilon_2, 1 - \varepsilon_2]$. This is an easy consequence of the uniqueness part of Theorem 1.1.20. For this reason, and to lighten the notations, we will omit dependence of $c^{x,y}$ in ε .*

As a consequence, for all $Q \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d))$, we have:

$$H(Q_\varepsilon | R_\varepsilon^\nu) = H(Q_\varepsilon | R_\varepsilon^{\nu, x, y}) + \int \log f^{\nu, x, y}(x) d\rho_\varepsilon^Q(x) + \int \log g_\varepsilon^{\nu, x, y}(x) d\rho_{1-\varepsilon}^Q(x), \quad (5.27)$$

where $Q_\varepsilon := X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon] \#} Q$, $\rho_\varepsilon^Q := X_{\varepsilon \#} Q$ and $\rho_{1-\varepsilon}^Q := X_{1-\varepsilon \#} Q$.

Remark 5.3.3. The first point of the lemma implies that up to time restrictions, the Brownian bridge $R^{\nu, x, y}$ is the solution of the dynamical Schrödinger problem (Problem 1.3.3 in the introduction) with respect to its own endpoints, see [68, Theorem 3.3].

The second lemma will let us associate to a solution (ρ, c) to the continuity equation with $\mathcal{H}_\nu(\rho, c) < +\infty$ (recall that \mathcal{H}_ν is defined by formula (1.78)) a (Markov) process Q satisfying $\nu H(Q | R^\nu) \leq \mathcal{H}_\nu(\rho, c)$ up to endpoint terms and whose density is ρ .

Lemma 5.3.4. *Let (ρ, c) be a solution to the continuity equation with:*

$$\mathcal{H}_\nu(\rho, c) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c(t, x)|^2 d\rho_t(x) dt + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t(x)|^2 d\rho_t(x) dt < +\infty.$$

There exist $Q \in \mathcal{P}(C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d))$ such that:

- the entropy of Q with respect to R^ν is given by:⁵

$$\nu H(Q | R^\nu) \leq \nu \frac{H(\rho_0 | \text{Leb}) + H(\rho_1 | \text{Leb})}{2} + \mathcal{H}_\nu(\rho, c) < +\infty, \quad (5.28)$$

- for all $t \in [0, 1]$, $X_{t \#} Q = \rho_t$.

We prove Theorem 5.3.1 in the next subsection and postpone the proof of Lemma 5.3.2 in Subsection 5.3.3, and the proof of Lemma 5.3.4 in Subsection 5.3.4.

In these proofs, we will have to build laws P on $C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$ by *concatenation*. The idea is the following. Let $a < b < c \in [0, 1]$ be three given times, and P_1 and P_2 be laws on $C^0([a, b]; \mathbb{T}^d)$ and $C^0([b, c]; \mathbb{T}^d)$ respectively. In the case when there is $x \in \mathbb{T}^d$ such that P_1 -almost everywhere and P_2 -almost everywhere, $X_b = x$, we will denote by:

$$P_1 \otimes P_2 \in \mathcal{P}(C^0([a, c]; \mathbb{T}^d))$$

the product measure of P_1 and P_2 via the identification:

$$C^0([a, c]; \mathbb{T}^d) \cap \{X_b = x\} = \left(C^0([a, b]; \mathbb{T}^d) \cap \{X_b = x\} \right) \times \left(C^0([b, c]; \mathbb{T}^d) \cap \{X_b = x\} \right).$$

This construction is easily adapted when there are more than two laws.

Also, if $0 < a < b < 1$, and if P is a law on $C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, the conditional law:

$$P\left(\bullet \mid X_{[a, b]}\right),$$

which is well defined P -almost everywhere, will be seen as an element of:

$$\mathcal{P}\left(C^0([0, a]; \mathbb{T}^d) \times C^0([b, 1]; \mathbb{T}^d)\right).$$

⁵We could check that our construction leads to a law Q whose current velocity is c , and hence because of inequality (1.75) of the introduction, this inequality is in fact an equality. But as we will not need this fact, we will not prove it.

5.3.2 Proof of Theorem 5.3.1 using Lemma 5.3.2 and Lemma 5.3.4

Take γ, P, ε as in the statement of the theorem. Let us first check the entropy condition (5.25). By the disintegration formula for the entropy (formula (1.68) in the introduction) used with the map $X := (X_0, X_1)$, we have:

$$H(P|R^\nu) = H(\gamma|(X_0, X_1)_\#R^\nu) + \mathbb{E}_P \left[H(P^{X_0, X_1} | R^{\nu, X_0, X_1}) \right], \quad (5.29)$$

where $(P^{x,y})$ and $(R^{\nu, x,y})$ are defined in (5.22) and (5.23) respectively. In particular, as all the entropies are nonnegative and as $H(P|R^\nu) < +\infty$, we have;

$$P\text{-almost everywhere,} \quad H(P^{X_0, X_1} | R^{\nu, X_0, X_1}) < +\infty,$$

which exactly means that $H(P^{x,y} | R^{\nu, x,y}) < +\infty$ for γ -almost all (x, y) . Using formula (1.69) with $X = X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}$, the restriction operator, we deduce that:

$$\text{for } \gamma\text{-almost all } (x, y), \quad H(P_\varepsilon^{x,y} | R_\varepsilon^{\nu, x,y}) < +\infty.$$

We conclude by estimating $H(P_\varepsilon^{x,y} | R_\varepsilon^{\nu, x,y})$ with the help of formula (5.27) of Lemma 5.3.2, using the fact that $f_\varepsilon^{\nu, x,y}$ and $g_\varepsilon^{\nu, x,y}$ are bounded away from 0.

Hence, we consider (ρ, \mathbf{c}) as in the statement of the theorem. We need to prove that this is a solution of $\text{MBrö}_\nu(\rho_\varepsilon, \rho_{1-\varepsilon})$ between the times ε and $1 - \varepsilon$. So let us take an other competitor $(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{c}}) = (\tilde{\rho}^{x,y}, \tilde{\mathbf{c}}^{x,y})_{(x,y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d}$ for this problem (in particular, $(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{c}})$ is only defined between the times ε and $1 - \varepsilon$). We will build from $(\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{c}})$ a competitor Q for $\text{Brö}_\nu(\gamma)$.

Construction of Q . For $(x, y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$, the following construction of $Q^{x,y}$ clearly makes sense γ -almost everywhere. First we define:

$$P_{\varepsilon,0}^{x,y} := X_{[0,\varepsilon]\#} P^{x,y}, \quad \text{and} \quad P_{\varepsilon,1}^{x,y} := X_{[1-\varepsilon,1]\#} P^{x,y}.$$

Then, we take $Q_\varepsilon^{x,y} \in \mathcal{P}(C^0([\varepsilon, 1 - \varepsilon]; \mathbb{T}^d))$ as given by Lemma 5.3.4 from $(\tilde{\rho}^{x,y}, \tilde{\mathbf{c}}^{x,y})$. We define $Q^{x,y}$ by concatenation:

$$Q^{x,y} := \int_{C^0([\varepsilon, 1-\varepsilon]; \mathbb{T}^d)} P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet | X_\varepsilon = \omega_\varepsilon) \otimes \delta_\omega \otimes P_{\varepsilon,1}^{x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon} = \omega_{1-\varepsilon}) dQ_\varepsilon^{x,y}(\omega). \quad (5.30)$$

Finally, we define Q by:

$$Q := \int Q^{x,y} d\gamma(x, y). \quad (5.31)$$

Marginal laws of $Q^{x,y}$. From formula (5.30), we easily get:

$$\begin{aligned} X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]\#} Q^{x,y} &= \int X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]\#} \left\{ P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet | X_\varepsilon = \omega_\varepsilon) \otimes \delta_\omega \otimes P_{\varepsilon,1}^{x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon} = \omega_{1-\varepsilon}) \right\} dQ_\varepsilon^{x,y}(\omega) \\ &= \int \delta_\omega dQ_\varepsilon^{x,y}(\omega) = Q_\varepsilon^{x,y}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

In addition, as $X_{\varepsilon\#}Q_{\varepsilon}^{x,y} = \rho_{\varepsilon}^{x,y} = X_{\varepsilon\#}P_{0,\varepsilon}^{x,y}$, we also have:

$$\begin{aligned} X_{[0,\varepsilon]\#}Q^{x,y} &= \int \Psi_{0,\varepsilon\#} \left\{ P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet|X_{\varepsilon} = \omega_{\varepsilon}) \otimes \delta_{\omega} \otimes P_{\varepsilon,1}^{x,y}(\bullet|X_{1-\varepsilon} = \omega_{1-\varepsilon}) \right\} dQ_{\varepsilon}^{x,y}(\omega) \\ &= \int P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet|X_{\varepsilon} = \omega_{\varepsilon}) dQ_{\varepsilon}^{x,y}(\omega) \\ &= \int P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet|X_{\varepsilon} = z) d\rho_{\varepsilon}^{x,y}|_{t=\varepsilon}(z) = P_{0,\varepsilon}^{x,y}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

In the same way:

$$X_{[1-\varepsilon,1]\#}Q^{x,y} = P_{1,\varepsilon}^{x,y} \quad (5.34)$$

The law Q is a competitor. First $Q^{x,y}$ -almost all path joins x to y , so that by (5.31):

$$(X_0, X_1)\#Q = \gamma.$$

Let us check the incompressibility. From formulae (5.32), (5.33) and (5.34), we deduce that for all $t \in [0, 1]$ and γ -almost all $(x, y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$:

$$X_t\#Q^{x,y} = \begin{cases} \rho_t^{x,y} & \text{if } t \in [0, \varepsilon], \\ \tilde{\rho}_t^{x,y} & \text{if } t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon], \\ \rho_t^{x,y} & \text{if } t \in [1 - \varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Consequently, if $t \in [0, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, 1]$, we have:

$$X_t\#Q = \int \rho_t^{x,y} d\gamma(x, y) = \int X_t\#P^{x,y} d\gamma(x, y) = X_t\# \int P^{x,y} d\gamma(x, y) = X_t\#P = \text{Leb},$$

because P , as the solution of $\text{Brö}_{\nu}(\gamma)$, is incompressible and of endpoints γ . If $t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$,

$$X_t\#Q = \int \tilde{\rho}_t^{x,y} d\gamma(x, y) = \text{Leb},$$

because $(\tilde{\rho}, \tilde{c})$ is a competitor for $\text{MBrö}(\rho_{\varepsilon}, \rho_{1-\varepsilon})$ with $(\mathcal{I}, \mathbf{m}) = (\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d, \gamma)$, and is hence incompressible. We conclude that Q is a competitor for $\text{Brö}(\gamma)$. In particular:

$$\overline{\mathcal{H}}_{\nu}(Q) = \nu H(Q|R^{\nu}) \geq \nu H(P|R^{\nu}) = \overline{\mathcal{H}}_{\nu}(P). \quad (5.35)$$

From now on, the goal is to express the entropies $H(P|R^{\nu})$ and $H(Q|R^{\nu})$ in terms of $\mathcal{H}_{\nu}(\rho, c)$ and $\mathcal{H}_{\nu}(\tilde{\rho}, \tilde{c})$, and to use (5.35) to compare $\mathcal{H}_{\nu}(\rho, c)$ and $\mathcal{H}_{\nu}(\tilde{\rho}, \tilde{c})$.

Computation of the entropy of P . We first compute $H(P|R^{\nu})$. First, (5.29) can be rewritten:

$$H(P|R^{\nu}) = H(\gamma|(X_0, X_1)\#R^{\nu}) + \int H(P^{x,y}|R^{\nu,x,y}) d\gamma(x, y). \quad (5.36)$$

Then to compute $H(P^{x,y}|R^{\nu,x,y})$, we use the additive property of the entropy (1.68), but this time with $X = X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}$. This leads for γ -almost all (x, y) to:

$$H(P^{x,y}|R^{\nu,x,y}) = H(P_{\varepsilon}^{x,y}|R_{\varepsilon}^{\nu,x,y}) + \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H \left(P^{x,y}(\bullet|X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}) \middle| R^{\nu,x,y}(\bullet|X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}) \right) \right] \quad (5.37)$$

We compute the first term thanks to formula (5.27) of Lemma 5.3.2 and inequality (1.75) of the introduction:⁶

$$\begin{aligned} \nu H(P_\varepsilon^{x,y} | R_\varepsilon^{\nu,x,y}) &\geq \nu \frac{H(\rho_\varepsilon^{x,y} | \text{Leb}) + H(\rho_{1-\varepsilon}^{x,y} | \text{Leb})}{2} \\ &\quad - \nu \int \log f_\varepsilon^{\nu,x,y} d\rho_\varepsilon^{x,y} - \nu \int \log g_\varepsilon^{\nu,x,y} d\rho_{1-\varepsilon}^{x,y} + \mathcal{H}_\nu(\rho^{x,y}, c^{x,y}). \end{aligned} \quad (5.38)$$

An inequality for the second term. On the other hand, as $R^{\nu,x,y}$ is Markovian. In particular, calling:

$$R_{\varepsilon,0}^{\nu,x,y} := X_{[0,\varepsilon]\#} R^{\nu,x,y}, \quad \text{and} \quad R_{\varepsilon,1}^{\nu,x,y} := X_{[1-\varepsilon,1]\#} R^{\nu,x,y},$$

we have:

$$\begin{aligned} X_{[0,\varepsilon]\#} R^{\nu,x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}) &= R_{\varepsilon,0}^{\nu,x,y}(\bullet | X_\varepsilon), \\ R^{\nu,x,y}(\bullet | X_{[0,1-\varepsilon]}) &= R_{\varepsilon,1}^{\nu,x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Consequently, using (1.68) with $X = X_{[0,\varepsilon]}$, we have $P^{x,y}$ -almost surely:

$$\begin{aligned} &H\left(P^{x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}) \middle| R^{\nu,x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]})\right) \\ &= H\left(X_{[0,\varepsilon]\#} P^{x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}) \middle| R_{\varepsilon,0}^{\nu,x,y}(\bullet | X_\varepsilon)\right) + \mathbb{E}_{P^{x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]})} \left[H\left(P^{x,y}(\bullet | X_{[0,1-\varepsilon]}) \middle| R_{\varepsilon,1}^{\nu,x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon})\right) \right] \\ &= H\left(X_{[0,\varepsilon]\#} P^{x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}) \middle| R_{\varepsilon,0}^{\nu,x,y}(\bullet | X_\varepsilon)\right) + \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H\left(P^{x,y}(\bullet | X_{[0,1-\varepsilon]}) \middle| R_{\varepsilon,1}^{\nu,x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon})\right) \middle| X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} \right]. \end{aligned}$$

Concerning P , remark the following identities:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[X_{[0,\varepsilon]\#} P^{x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}) \middle| X_\varepsilon \right] &= P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet | X_\varepsilon), \\ \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[P^{x,y}(\bullet | X_{[0,1-\varepsilon]}) \middle| X_{1-\varepsilon} \right] &= P_{\varepsilon,1}^{x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon}). \end{aligned}$$

So integrating the previous formula with respect to $P^{x,y}$ and using Jensen's inequality in the last line:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H\left(P^{x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}) \middle| R^{\nu,x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]})\right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H\left(X_{[0,\varepsilon]\#} P^{x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}) \middle| R_{\varepsilon,0}^{\nu,x,y}(\bullet | X_\varepsilon)\right) \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H\left(P^{x,y}(\bullet | X_{[0,1-\varepsilon]}) \middle| R_{\varepsilon,1}^{\nu,x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon})\right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[\mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H\left(X_{[0,\varepsilon]\#} P^{x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}) \middle| R_{\varepsilon,0}^{\nu,x,y}(\bullet | X_\varepsilon)\right) \middle| X_\varepsilon \right] \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[\mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H\left(P^{x,y}(\bullet | X_{[0,1-\varepsilon]}) \middle| R_{\varepsilon,1}^{\nu,x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon})\right) \middle| X_{1-\varepsilon} \right] \right] \\ &\geq \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H\left(P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet | X_\varepsilon) \middle| R_{\varepsilon,0}^{\nu,x,y}(\bullet | X_\varepsilon)\right) \right] + \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H\left(P_{\varepsilon,1}^{x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon}) \middle| R_{\varepsilon,1}^{\nu,x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon})\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

⁶Once again with a slight abuse of notation, we still call \mathcal{H}_ν the functional obtained through formula (1.78), but only integrating between the times ε and $1 - \varepsilon$.

The entropy of Q . We can do the same computations for Q instead of P . In that case:

- The formulae (5.36) and (5.37) are exactly the same, replacing the letter P by the letter Q .
- The inequality (5.38) is in the other sense (because of formula (5.28) of Lemma 5.3.4), and $\mathcal{H}_\nu(\rho^{x,y}, c^{x,y})$ is replaced by $\mathcal{H}_\nu(\tilde{\rho}^{x,y}, \tilde{c}^{x,y})$:

$$\begin{aligned} \nu H(Q_\varepsilon^{x,y} | R_\varepsilon^{\nu,x,y}) &\leq \nu \frac{H(\rho_\varepsilon^{x,y} | \text{Leb}) + H(\rho_{1-\varepsilon}^{x,y} | \text{Leb})}{2} \\ &\quad - \nu \int \log f_\varepsilon^{\nu,x,y} d\rho_\varepsilon^{x,y} - \nu \int \log g_\varepsilon^{\nu,x,y} d\rho_{1-\varepsilon}^{x,y} + \mathcal{H}_\nu(\tilde{\rho}^{x,y}, \tilde{c}^{x,y}). \end{aligned} \quad (5.40)$$

(Recall that $\tilde{\rho}$ and ρ coincide at time $t = \varepsilon$ and at time $t = 1 - \varepsilon$.)

- As thanks to (5.30):

$$Q^{x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}) = P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet | X_\varepsilon) \otimes P_{\varepsilon,1}^{x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon}),$$

we get an equality in (5.39):

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{Q^{x,y}} \left[H \left(Q^{x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}) \middle| R^{\nu,x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{Q^{x,y}} \left[H \left(P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet | X_\varepsilon) \otimes P_{\varepsilon,1}^{x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon}) \middle| R^{\nu,x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{Q^{x,y}} \left[H \left(P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet | X_\varepsilon) \middle| R_{\varepsilon,0}^{\nu,x,y}(\bullet | X_\varepsilon) \right) \right] + \mathbb{E}_{Q^{x,y}} \left[H \left(P_{\varepsilon,1}^{x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon}) \middle| R_{\varepsilon,1}^{\nu,x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H \left(P_{\varepsilon,0}^{x,y}(\bullet | X_\varepsilon) \middle| R_{\varepsilon,0}^{\nu,x,y}(\bullet | X_\varepsilon) \right) \right] + \mathbb{E}_{P^{x,y}} \left[H \left(P_{\varepsilon,1}^{x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon}) \middle| R_{\varepsilon,1}^{\nu,x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

(The third line follows easy computations using the Markov property:

$$R^{\nu,x,y}(\bullet | X_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}) = R_{\varepsilon,0}^{\nu,x,y}(\bullet | X_\varepsilon) \otimes R_{\varepsilon,1}^{\nu,x,y}(\bullet | X_{1-\varepsilon}),$$

and the last one follows from the fact that the marginals of $P^{x,y}$ and $Q^{x,y}$ coincide at time $t = \varepsilon$ and $1 - \varepsilon$.)

Gathering the formulae (5.36), (5.37) for P and Q , and (5.38), (5.39), (5.40) and (5.41), we get:

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(Q) - \overline{\mathcal{H}}_\nu(P) \leq \mathcal{H}_\nu(\tilde{\rho}, \tilde{c}) - \mathcal{H}_\nu(\rho, c). \quad (5.42)$$

Conclusion. Using (5.35), we get as announced:

$$\mathcal{H}_\nu(\tilde{\rho}, \tilde{c}) \geq \mathcal{H}_\nu(\rho, c),$$

or in other terms, (ρ, c) is the solution of $\text{MBrö}_\nu(\rho_\varepsilon, \rho_{1-\varepsilon})$.

Remark that in the specific case when $(\tilde{\rho}, \tilde{c}) = (\rho, c)$, we get $\overline{\mathcal{H}}_\nu(Q) \leq \overline{\mathcal{H}}_\nu(P)$, which is compatible with (5.35) if and only if $\overline{\mathcal{H}}_\nu(Q) = \overline{\mathcal{H}}_\nu(P)$. Hence, in that case, by uniqueness of minimizers in $\text{Brö}_\nu(\gamma)$, $P = Q$. It means that inequalities (5.38) and (5.39) are in fact equalities. We recover the known fact that for γ -almost all (x, y) , $P^{x,y}$ is Markovian, see [5, Section 3]. \square

5.3.3 Proof of Lemma 5.3.2

First of all, because the Markov property of the Brownian motion R^ν , the laws R_ε^ν and $R_\varepsilon^{\nu,x,y}$ have the same bridges:

$$R^{\nu,x,y}\text{-almost everywhere, } R_{\varepsilon}^{\nu,x,y}(\bullet|X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon}) = X_{\varepsilon,1-\varepsilon}\# \left(R^\nu(\bullet|X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon}) \right) = R_\varepsilon^\nu(\bullet|X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon}).$$

In particular, $R_\varepsilon^{\nu,x,y} \ll R_\varepsilon^\nu$ if and only if $(X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon})\# R_\varepsilon^{\nu,x,y} \ll (X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon})\# R_\varepsilon^\nu$, and in that case:

$$\frac{dR_\varepsilon^{\nu,x,y}}{dR_\varepsilon^\nu} = \frac{d(X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon})\# R_\varepsilon^{\nu,x,y}}{d(X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon})\# R_\varepsilon^\nu} \circ (X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon}). \quad (5.43)$$

In this proof, we will call:

$$R_{\varepsilon,1-\varepsilon}^\nu := (X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon})\# R^\nu, \quad R_{\varepsilon,1-\varepsilon}^{\nu,x,y} := (X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon})\# R^{\nu,x,y}, \quad R_{0,\varepsilon,1-\varepsilon,1}^\nu := (X_0, X_\varepsilon, X_{1-\varepsilon}, X_1)\# R^\nu.$$

Let $(\tau_s^\nu)_{s \geq 0}$ be the heat flow of diffusivity ν on the torus *i.e.* the solution to:

$$\begin{cases} \partial_s \tau_s^\nu = \frac{\nu}{2} \Delta \tau_s^\nu, \\ \tau_0^\nu = \delta_0. \end{cases}$$

Since the Brownian motion R^ν is a Markov process of generator $\nu/2\Delta$, the density of $R_{0,\varepsilon,1-\varepsilon,1}^\nu$ has the following Radon-Nikodym derivative with respect to the measure $\text{Leb}^{\otimes 4}$:

$$\frac{dR_{0,\varepsilon,1-\varepsilon,1}^\nu}{d\text{Leb}^{\otimes 4}}(a, b, c, d) = \tau_\varepsilon^\nu(b-a) \times \tau_{1-2\varepsilon}^\nu(c-b) \times \tau_\varepsilon^\nu(d-c).$$

So by classical results concerning the behaviour of Radon-Nikodym derivatives towards conditionings:

$$\begin{aligned} \frac{dR_{\varepsilon,1-\varepsilon}^{\nu,x,y}}{d\text{Leb}^{\otimes 2}}(b, c) &= \frac{\tau_\varepsilon^\nu(b-x) \times \tau_{1-2\varepsilon}^\nu(c-b) \times \tau_\varepsilon^\nu(y-c)}{\int \tau_\varepsilon^\nu(b'-x) \times \tau_{1-2\varepsilon}^\nu(c'-b') \times \tau_\varepsilon^\nu(y-c') \, db' \, dc'} \\ &= \frac{\tau_\varepsilon^\nu(b-x) \times \tau_{1-2\varepsilon}^\nu(c-b) \times \tau_\varepsilon^\nu(y-c)}{\tau_1^\nu(y-x)}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

(The second equality is deduced from the semi-group property of (τ_s^ν) .) On the other hand, we have:

$$\frac{dR_{\varepsilon,1-\varepsilon}^\nu}{d\text{Leb}^{\otimes 2}}(b, c) = \tau_{1-2\varepsilon}^\nu(c-b). \quad (5.45)$$

Gathering formulae (5.44) and (5.45), we get:

$$\frac{dR_{\varepsilon,1-\varepsilon}^{\nu,x,y}}{dR_{\varepsilon,1-\varepsilon}^\nu}(b, c) = \frac{\tau_\varepsilon^\nu(b-x) \times \tau_\varepsilon^\nu(y-c)}{\tau_1^\nu(y-x)}.$$

Plugging this identity into (5.43), we get (5.26) with:

$$f_\varepsilon^{\nu,x,y}(b) := \frac{\tau_\varepsilon^\nu(b-x)}{\sqrt{\tau_1^\nu(y-x)}} \quad \text{and} \quad g_\varepsilon^{\nu,x,y}(c) := \frac{\tau_\varepsilon^\nu(y-c)}{\sqrt{\tau_1^\nu(y-x)}}.$$

Then, (5.27) just follow from the following easy computations:

$$\begin{aligned}
H(Q_\varepsilon | R_\varepsilon^\nu) &= \mathbb{E}_{Q_\varepsilon} \left[\log \left(\frac{dQ_\varepsilon}{dR_\varepsilon^\nu} \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_{Q_\varepsilon} \left[\log \left(\frac{dQ_\varepsilon}{dR_\varepsilon^{\nu, x, y}} \right) \right] + \mathbb{E}_{Q_\varepsilon} \left[\log \left(\frac{dR_\varepsilon^{\nu, x, y}}{dR_\varepsilon^\nu} \right) \right] \\
&= H(Q_\varepsilon | R_\varepsilon^{\nu, x, y}) + \mathbb{E}_{Q_\varepsilon} [\log f^{\nu, x, y}(X_\varepsilon)] + \mathbb{E}_{Q_\varepsilon} [\log g^{\nu, x, y}(X_{1-\varepsilon})].
\end{aligned}$$

The result follows easily. \square

5.3.4 Proof of Lemma 5.3.4

The proof follows closely the one of [1, Theorem 3.4]. We take (ρ, c) as in the statement of the lemma and $(\tau_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ a convolution kernel, everywhere positive. For a given $\varepsilon > 0$, we define:

$$\rho^\varepsilon := \rho * \tau_\varepsilon \quad \text{and} \quad c^\varepsilon := \frac{(\rho c) * \tau_\varepsilon}{\rho^\varepsilon}.$$

With this definition, $(\rho^\varepsilon, c^\varepsilon)$ is clearly a solution to the continuity equation and the following inequality is classical (see formula (3.5) in [1] with $\Theta = |\bullet|^2/2$):

$$\mathcal{A}(\rho^\varepsilon, c^\varepsilon) \leq \mathcal{A}(\rho, c). \quad (5.46)$$

(Recall that \mathcal{A} is defined by formula (1.19).) Moreover, calling:

$$w := \frac{\nu}{2} \nabla \log \rho \quad \text{and} \quad w^\varepsilon := \frac{\nu}{2} \nabla \log \rho^\varepsilon,$$

we have:

$$w^\varepsilon := \frac{\nu \nabla \rho^\varepsilon}{2 \rho^\varepsilon} = \frac{\nu (\nabla \rho) * \tau_\varepsilon}{2 \rho^\varepsilon} = \frac{(w\rho) * \tau_\varepsilon}{\rho^\varepsilon},$$

which means that w^ε is obtained from w in the same way as c^ε is obtained from c . In particular,

$$\nu^2 \mathcal{F}(\rho^\varepsilon) = \mathcal{A}(\rho^\varepsilon, w^\varepsilon) \leq \mathcal{A}(\rho, w) = \nu^2 \mathcal{F}(\rho). \quad (5.47)$$

(Recall that \mathcal{F} is defined by (1.79).) Gathering (5.46) and (5.47), we get:

$$\mathcal{H}_\nu(\rho^\varepsilon, c^\varepsilon) \leq \mathcal{H}_\nu(\rho, c). \quad (5.48)$$

Finally, we also get easily:

$$H(\rho_0^\varepsilon | \text{Leb}) \leq H(\rho_0 | \text{Leb}) \quad \text{and} \quad H(\rho_1^\varepsilon | \text{Leb}) \leq H(\rho_1 | \text{Leb}). \quad (5.49)$$

We can suppose that the entropies $H(\rho_0 | \text{Leb})$ and $H(\rho_1 | \text{Leb})$ are finite⁷, because if they are not, Lemma 5.3.4 reduces to Lemma 1.1.17.

At this level of regularity, we can define Q^ε the (unique) law of the solution to the stochastic differential equation:

$$dX_t = v^\varepsilon(t, X_t) dt + \nu dB_t,$$

⁷In fact, it is always the case, because we could show that these quantities are controlled by $\mathcal{H}_\nu(\rho, c)$, see Remark 6.A.3 of Chapter 6.

starting from ρ_0^ε , where $v^\varepsilon := c^\varepsilon + w^\varepsilon$, and where B is a standard Brownian motion. For $t \in [0, 1]$, we call $\tilde{\rho}_t^\varepsilon := X_{t\#}Q^\varepsilon$, the density of Q^ε at time t . Because $(\rho^\varepsilon, c^\varepsilon)$ is a solution to the continuity equation, by definition of v^ε :

$$\partial_t \rho_t^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_t^\varepsilon v^\varepsilon) = \frac{\nu}{2} \Delta \rho_t^\varepsilon.$$

But by a standard application of the Itô formula, we also have:

$$\partial_t \tilde{\rho}_t^\varepsilon + \operatorname{div}(\tilde{\rho}_t^\varepsilon v^\varepsilon) = \frac{\nu}{2} \Delta \tilde{\rho}_t^\varepsilon.$$

Consequently, ρ^ε and $\tilde{\rho}^\varepsilon$ are two solutions to the same parabolic equation with smooth coefficients, and with the same initial condition. So they coincide.

Thanks to formula (1.72) (here $\vec{b}_t = v^\varepsilon(t, X_t)$), $H(Q^\varepsilon | R^\nu) < +\infty$. So by Theorem 1.3.7, the osmotic velocity of Q^ε is $\nu/2 \nabla \log \rho^\varepsilon$, and by (1.74), its current velocity at time t is Q^ε -almost everywhere:

$$v^\varepsilon(t, X_t) - \frac{\nu}{2} \nabla \log \rho^\varepsilon(t, X_t) = c^\varepsilon(t, X_t).$$

In particular, thanks to (1.73) and (1.76), we have:

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(Q^\varepsilon) = \nu \frac{H(\rho_0^\varepsilon | \operatorname{Leb}) + H(\rho_1^\varepsilon | \operatorname{Leb})}{2} + \mathcal{H}_\nu(\rho^\varepsilon, c^\varepsilon) \leq \nu \frac{H(\rho_0 | \operatorname{Leb}) + H(\rho_1 | \operatorname{Leb})}{2} + \mathcal{H}_\nu(\rho, c), \quad (5.50)$$

where the last inequality is obtained thanks to (5.48) and (5.49). But $\overline{\mathcal{H}}_\nu$ has compact sublevels for the topology of narrow convergence, so we can find Q a limit point of $(Q^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$.

The density of Q is clearly ρ (the density of a law is continuous with respect to narrow convergence). By lower semi-continuity of $\overline{\mathcal{H}}_\nu$, passing to the limit in (5.50), we get:

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(Q) \leq \nu \frac{H(\rho_0 | \operatorname{Leb}) + H(\rho_1 | \operatorname{Leb})}{2} + \mathcal{H}_\nu(\rho, c).$$

Hence, the result. □

5.4 Existence of the pressure in the standard problem Brö

We are now ready to prove Theorem 1.5.1. The structure of the proof is the same as the one of 1.5.2, so we only treat the details of the parts that differ.

Given a bistochastic γ satisfying condition (1.85) and $\varphi \in \mathcal{E}_0$ with compact support in $(0, 1) \times \mathbb{T}^d$, we define a new problem prescribing the density $(1 + \varphi)$ instead of Leb in $\operatorname{Brö}_\nu(\gamma)$, as in Problem 5.2.1 in the case of $\operatorname{MBrö}$. We call $\overline{\mathcal{H}}_\nu^*(1 + \varphi)$ the optimal value of $\overline{\mathcal{H}}_\nu$ in this new problem. As in Lemma 5.2.2, $\overline{\mathcal{H}}_\nu^*$ is convex and lower semi-continuous for the topology of \mathcal{E}_0 .

Let us prove that ε being fixed, there exists $C > 0$ ⁸ such that for all $\varphi \in \mathcal{E}$ with $\mathbf{N}(\varphi) \leq 1/2$ and whose support is included in $(\varepsilon, 1 - \varepsilon) \times \mathbb{T}^d$,

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(1 + \varphi) \leq C,$$

where C only depend on the dimension, ε and $(\rho_\varepsilon, \rho_{1-\varepsilon})$

⁸Here, C may depend on the dimension, ε , ρ_ε , $\rho_{1-\varepsilon}$ and ν . Contrary to before, we do not follow its dependence with respect to ν .

We define $(P_\varepsilon^{x,y}, \rho^{x,y}, c^{x,y})_{(x,y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d}$ as given by Theorem 5.3.1. Recall that by Theorem 5.3.1, $(\rho, c) = (\rho^{x,y}, c^{x,y})_{(x,y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d}$ is a solution of $\text{MBrö}_\nu(\rho_\varepsilon, \rho_{1-\varepsilon})$ between the times ε and $1-\varepsilon$. Then, we build from (ρ, c) a competitor $(\tilde{\rho}, \tilde{c}) = (\tilde{\rho}^{x,y}, \tilde{c}^{x,y})$ for $\text{MBrö}_\nu(1+\varphi)$ as defined in Problem 5.2.1, between the endpoints ρ_ε and $\rho_{1-\varepsilon}$, and between the times ε and $1-\varepsilon$, as in the proof of Lemma 5.2.3. From this proof, we have:

$$\mathcal{H}_\nu(\tilde{\rho}, \tilde{c}) \leq C, \quad (5.51)$$

where C does not depend on φ .

Finally, we consider Q , build from $(\tilde{\rho}, \tilde{c})$ as in the proof of Theorem 5.3.1. By (5.42), we have:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_\nu^*(1+\varphi) &\leq \overline{\mathcal{H}}(Q) = \overline{\mathcal{H}}(P) + \mathcal{H}_\nu(\tilde{\rho}, \tilde{c}) - \mathcal{H}_\nu(\rho, c) && (5.52) \\ &\leq \overline{\mathcal{H}}_\nu(P) + \mathcal{H}_\nu(\tilde{\rho}, \tilde{c}) && \text{because } \mathcal{H}_\nu \geq 0, \\ &\leq \overline{\mathcal{H}}_\nu^*(\text{Leb}) + C && \text{by (5.51),} \\ &\leq C, \end{aligned}$$

taking a larger C , but still independent of φ in the last line.

We conclude that for all $\varepsilon \in (0, 1/2)$, there exists $p_\varepsilon \in \mathcal{D}'((\varepsilon, 1-\varepsilon) \times \mathbb{T}^d)$ such that for all $\varphi \in \mathcal{E}_0$ with compact support in $(\varepsilon, 1-\varepsilon) \times \mathbb{T}^d$,

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu^*(1+\varphi) \geq \overline{\mathcal{H}}_\nu^*(\text{Leb}) + \langle p_\varepsilon, \varphi \rangle_{\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0}$$

We deduce from formula (5.52) that p_ε is the pressure field in $\text{MBrö}_\nu(\rho_\varepsilon, \rho_{1-\varepsilon})$, so that by Lemma 5.2.5, p_ε is unique, and given by formula (1.95). At last, by footnote 4 and formula (1.95), if $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, then p_{ε_2} is the restriction of p_{ε_1} to the set of times $(\varepsilon_2, 1-\varepsilon_2)$. So we end-up with a unique distribution p satisfying the properties announced in the statement of Theorem 1.5.1. \square

5.5 A formal way to derive the equation for the pressure

Recall that in the case of incompressible optimal transport, if P is a solution of $\text{IOT}(\gamma)$, and if p is its pressure field, then for all $\varepsilon \in (0, 1/2)$, P -almost all curve ω is a minimizer of the Lagrangian:

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left\{ \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} - p(t, \omega_t) \right\} dt$$

among the set of curves whose positions at time ε and $1-\varepsilon$ are ω_ε and $\omega_{1-\varepsilon}$ respectively (at least when p is regular, see Theorem 1.1.30 of the introduction).

In the case of the Brödinger problem, if P is the solution of $\text{Brö}_\nu(\gamma)$ and if p is its pressure field, the corresponding expected result would be as follows. For γ -almost all (x, y) , $P_\varepsilon^{x,y}$ as defined by formula (5.24) should be the solution of the Schrödinger problem in the potential p , just defined by replacing $\overline{\mathcal{H}}_\nu(P)$ by:⁹

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(P) - \mathbb{E}_P \left[\int p(t, X_t) dt \right]$$

⁹Or equivalently when p is smooth by replacing R^ν by $\exp(\frac{1}{\nu} \int p(t, X_t) dt) R^\nu$.

in Problem 1.3.3, between the times ε and $1 - \varepsilon$, with respect to its own endpoints. But in that case, it is known (see for example [95, Section 4.B]) that calling $\rho^{x,y}$ the density of $P^{x,y}$, $c^{x,y}$ its current velocity, and $w^{x,y} := \nu/2\nabla \log \rho^{x,y}$, then $(\rho^{x,y}, c^{x,y}, w^{x,y})$ solves the following equations:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^{x,y} + \operatorname{div}(\rho^{x,y} c^{x,y}) = 0, \\ \partial_t c^{x,y} + (c^{x,y} \cdot \nabla) c^{x,y} + (w^{x,y} \cdot \nabla) w^{x,y} + \frac{\nu}{2} \Delta w^{x,y} = -\nabla p. \end{cases}$$

(The notation $\Delta w^{x,y}$ stands for the Laplacian operator computed coordinate by coordinate.) The second equation is reminiscent of the classical one:

$$\partial_t c^{x,y} + (c^{x,y} \cdot \nabla) c^{x,y} = -\nabla p$$

for the velocity field in optimal transport with potential, plus osmotic terms of order ν^2 . If we multiply this equation by $\rho^{x,y}$ and if we use the identities:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(c^{x,y} \otimes c^{x,y} \rho^{x,y}) &= \rho^{x,y} (c^{x,y} \cdot \nabla) c^{x,y} + c^{x,y} \operatorname{div}(\rho^{x,y} c^{x,y}), \\ \operatorname{div}(w^{x,y} \otimes w^{x,y} \rho^{x,y}) &= \frac{\nu^2}{4} \Delta \nabla \rho^{x,y} - \frac{\nu}{2} \rho^{x,y} \Delta w^{x,y} - \rho^{x,y} (w^{x,y} \cdot \nabla) w^{x,y}, \end{aligned}$$

we get the following equation for the momentum:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho^{x,y} c^{x,y}) + \operatorname{div} \left(\{c^{x,y} \otimes c^{x,y} - w^{x,y} \otimes w^{x,y}\} \rho^{x,y} \right) + \frac{\nu}{4} \Delta \nabla \rho^{x,y} \\ = -\rho^{x,y} \nabla p + \cancel{c^{x,y} (\partial_t \rho^{x,y} + \operatorname{div}(\rho^{x,y} c^{x,y}))} = -\rho^{x,y} \nabla p. \end{aligned}$$

If we integrate with respect to γ , because of incompressibility, the $\Delta \nabla$ term cancels and the coefficient in front of ∇p becomes 1. So we get:

$$\partial_t \left(\int \rho^{x,y} c^{x,y} d\gamma(x, y) \right) + \operatorname{div} \left(\int \{c^{x,y} \otimes c^{x,y} - w^{x,y} \otimes w^{x,y}\} \rho^{x,y} d\gamma(x, y) \right) = -\nabla p.$$

This is exactly formula (1.95) derived earlier, with $\mathcal{I} = \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ and $\mathbf{m} = \gamma$, which is coherent with the fact that we observed in Theorem 5.3.1 that $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^{x,y}, c^{x,y})_{(x,y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d}$ is the solution to $\operatorname{MBrö}_\nu$, when localized in times, with respect to its own endpoints.

It is likely that just as in the incompressible optimal transport case, regularity estimates for the pressure field would make it possible to justify rigorously these computations, but we did not pursue in this direction.

Chapter 6

Zero noise limit and displacement convexity

We present in this chapter the results from the article [11], which contains an independent introduction. We do not reproduce it entirely here to avoid to the reader unnecessary repetitions. We recall that the main results of this chapter have been presented in Subsection 1.5.2 above.



6.1 Introduction of the chapter

Once again in this chapter, we work on the flat torus $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. We call d the geodesic distance on the torus and $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ the canonical projection. We will deal with the following six problems defined in the introduction:

- the optimal transport problem in terms of metric derivative OT (Problem 1.1.21),
- the Schrödinger problem in terms of metric derivative Sch (Problem 1.3.10),
- the incompressible optimal transport problem IOT (Problem 1.1.11),
- the Brödinger problem Brö (Problem 1.3.11),
- the incompressible optimal transport problem in terms of traffic plans TPIOT (Problem 1.1.22),
- the Brödinger problem in terms of traffic plans TPBrö (Problem 1.3.13).

Let us start by presenting more precisely than in Subsection 1.5.2 the results we will prove in the chapter.

6.1.1 Contributions

Our first result will assert the convergence of the Brödinger problem Brö_ν (Problem 1.3.11) towards the incompressible optimal transport problem IOT (Problem 1.1.11) as the diffusivity $\nu \rightarrow 0$. It will be written below in terms of Γ -convergence of the corresponding functionals, which in particular classically implies convergence of the minimizers. This extends recent results from [17], where the

same convergence was proved but for a discrete-time version of the problem only. In the following statement, if $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$, then ι_γ is the characteristic function corresponding to the marginal constraint (1.12) and ι_{Inc} is the characteristic function corresponding to the incompressibility constraint (1.11). In other words, if P is a generalized flow, we write

$$\iota_\gamma(P) := \begin{cases} 0 & \text{if } (X_0, X_1)_{\#} P = \gamma, \\ +\infty & \text{else,} \end{cases} \quad \text{and} \quad \iota_{\text{Inc}}(P) := \begin{cases} 0 & \text{if } X_{t\#} P = \text{Leb for all } t, \\ +\infty & \text{else.} \end{cases}$$

Our first convergence result reads then

Theorem 6.1.1. *With the same notations as before,*

1. *The following Γ -convergence holds:*

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \{\bar{\mathcal{H}}_\nu + \iota_{\text{Inc}}\} = \bar{\mathcal{A}} + \iota_{\text{Inc}}.$$

2. *If γ is bistochastic and satisfies $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$, then*

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \{\bar{\mathcal{H}}_\nu + \iota_{\text{Inc}} + \iota_\gamma\} = \bar{\mathcal{A}} + \iota_{\text{Inc}} + \iota_\gamma.$$

This will be seen as a straightforward consequence of Theorem 6.2.1 below, and the result is stronger than convergence of the minimizers. Note that the second statement only addresses the case of a fixed marginal law $P_{0,1} = \gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$, while the first part does not and will typically require suitable regularization $\gamma^\nu \xrightarrow{*} \gamma$. The key step in the proof will be to build a recovery sequence P^ν by adding a Brownian bridge (with diffusivity ν) to any absolutely continuous curve charged by any admissible generalized flow P in incompressible optimal transport. We will then use a Cameron-Martin formula to compute the entropy of the resulting process. We will also exploit the continuity of the optimal action in $\text{IOT}(\gamma)$ with respect to γ in the narrow topology [10, Theorem 1] to obtain a necessary and sufficient condition for a sequence $(\gamma^\nu)_{\nu>0}$ of bistochastic measures to be the marginal laws of a recovery sequence $P^\nu \xrightarrow{*} P$, see point 2 in Theorem 6.2.1.



We address next the convergence $\text{Sch}_\nu \rightarrow \text{OT}$ (Problem 1.3.10 and 1.1.21 respectively) of the Schrödinger problem towards deterministic optimal transport in the small noise limit, Theorem 6.3.1 below. This is well known from [77, 66, 34, 31] and we dispense from including the precise statement at this stage, but we will give an independent proof that is elementary and new to the best of our knowledge. In particular, we will present an explicit PDE regularization procedure that will be inspired from the previous probabilistic arguments and Brownian bridges. This procedure provides directly a recovery sequence.



Our third result is the convergence $\text{TPBr}_\nu \rightarrow \text{TPIOT}$ of the Brödinger problem towards the incompressible optimal transport problem in terms of traffic plans (Problems 1.3.13 and 1.1.22 respectively), as the diffusivity vanishes:

Theorem 6.1.2. *If Γ is bistochastic in average with finite average marginal entropies as in (1.87), then*

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \overline{\mathcal{H}}_\nu + \iota_{\text{Inc}} + \iota_\Gamma \right\} = \overline{\mathcal{A}} + \iota_{\text{Inc}} + \iota_\Gamma \quad (6.1)$$

for the narrow topology of $\mathcal{P}(C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)))$.

Here we write as before $\iota_\Gamma(\mathbf{P})$ and $\iota_{\text{Inc}}(\mathbf{P})$ for the characteristic functions of the marginal and incompressibility constraints, (1.32) and (1.30), respectively. Again, this result is stronger than convergence of the minimizers.

Given that both problems have an incompressibility constraint, a natural question to ask is whether the associated Lagrange multipliers converge as well, *i.e.* whether the Brödinger pressure (as defined in Chapter 5) converges towards the incompressible optimal transport pressure (as defined in [22]). The precise definition of these pressure fields will be recalled later on in Theorem 6.4.4.

The answer to that question is yes, but in order to make a rigorous statement we first need to introduce the following functional space:

Definition 6.1.3. Let $C^{1,2}([0, 1] \times \mathbb{T}^d)$ denote the space of functions having continuous time-derivative and continuous second order space-derivatives. For such a function $f \in C^{1,2}([0, 1] \times \mathbb{T}^d)$, we say that $f \in \mathcal{G}$ if in addition:

- for all $x \in \mathbb{T}^d$, $f(0, x) = f(1, x) = 0$,
- for all $t \in [0, 1]$,

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(t, x) \, dx = 0.$$

Our result is the following:

Theorem 6.1.4. *Take Γ bistochastic in average and satisfying (1.87). For all $\nu > 0$ let p^ν be the pressure field associated to $\text{TPBrö}_\nu(\Gamma)$, and let p be the pressure field associated to $\text{IOT}(\Gamma)$ (both being defined in Theorem 6.4.4). Then*

$$p^\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow 0]{*} p \quad \text{in } \mathcal{G}'$$

for the weak-* convergence on the topological dual \mathcal{G}' of \mathcal{G} .



Finally, our last set of results will be concerned with the time-convexity of the entropy along some of the dynamical interpolations, namely the optimal transport problem and the Schrödinger problem on the one hand (Proposition 6.5.1), and on the other hand the incompressible optimal transport problem and the Brödinger problem in terms of traffic plans (Proposition 6.5.2). Again, we prefer not to include precise statements at this early stage and refer to section 6.5. The results in Proposition 6.5.1 are not new, but we provide again a new and rather elementary proof which we consider of independent interest. The results from Proposition 6.5.2 were partially known for particular cases, and we extend results from [65] – see Section 6.5 for a thorough discussion and further references.

6.1.2 Notations, conventions and preliminary results

Conditional laws. If \mathcal{X} and \mathcal{Y} are two polish spaces, p is a Borel measure on \mathcal{X} , and $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ is measurable, we recall that we denote by $\Phi_{\#}p$ the push-forward of p by Φ , *i.e.* the law of Φ under p .

When there is no ambiguity on the map Φ to be used, we simply denote by p^y the conditional law $p(\bullet | \Phi = y) \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. By virtue of the disintegration theorem, p^y is well defined for $\Phi_{\#}p$ -almost every $y \in \mathcal{Y}$, and concentrates on the fiber $\Phi^{-1}(y)$. We recall that, with these definitions, if φ is a test function on \mathcal{X} then

$$\int_{\mathcal{X}} \varphi(x) dp(x) = \int_{\mathcal{Y}} \left\{ \int_{\Phi^{-1}(y)} \varphi(x) dp^y(x) \right\} d\Phi_{\#}p(y). \quad (6.2)$$

If P is the law of a process on \mathbb{T}^d or \mathbb{R}^d , *i.e.* an element of $\mathcal{P}(C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d))$ or $\mathcal{P}(C^0([0, 1]; \mathbb{R}^d))$, and if the map X_t is the evaluation at time t , we will write $P_t := X_{t\#}P$ for the marginal of P at time t . Following the standard notations, $P_{0,1}$ will stand for the joint law $(X_0, X_1)_{\#}P$, and $P^{x,y}$ will refer to the conditional law $P(\bullet | X_0 = x, X_1 = y)$. These laws will frequently have their diffusivity as a superscript (typically P^ν). In that case, we write

$$P^{\nu,x,y} := P^\nu(\bullet | X_0 = x, X_1 = y).$$

With these notations, the marginal constraint (1.12) can be reformulated as $P_{0,1} = \gamma$ and the incompressibility (1.11) reads $P_t = \text{Leb}$.

Similarly, if \mathbf{P} is a traffic plan, $t \in [0, 1]$ and for all $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, $\mathbf{X}_t(\rho := \rho_t)$, we will write $\mathbf{P}_t := \mathbf{X}_{t\#}\mathbf{P}$ for the time- t marginal, $\mathbf{P}_{0,1}$ will stand for the joint law $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1)_{\#}\mathbf{P}$, and $\mathbf{P}^{\rho_0,\rho_1}$ will refer to the conditional law $\mathbf{P}(\bullet | \mathbf{X}_0 = \rho_0, \mathbf{X}_1 = \rho_1)$. These laws will frequently have their diffusivity as a superscript (typically \mathbf{P}^ν). In that case, we write

$$\mathbf{P}^{\nu,\rho_0,\rho_1} := \mathbf{P}^\nu(\bullet | \mathbf{X}_0 = \rho_0, \mathbf{X}_1 = \rho_1).$$

With these notations, (1.32) rewrites $\mathbf{P}_{0,1} = \Gamma$ and the generalized incompressibility (1.30) reads $\int \rho d\mathbf{P}_t(\rho) = \text{Leb}$.

Properties of the relative entropy. In Section 6.2, we will need several elementary results about the relative entropy, listed here without proofs. The first one concerns the change of reference measure.

Proposition 6.1.5. *Let r and p be as above and let $f \in L^1(\mathcal{X}, r)$ be nonnegative and p -almost surely positive. Then*

$$H(p | f \cdot r) = H(p | r) - \int \log f dp.$$

With our notations, formula (1.68) can be rewritten in the following way:

Proposition 6.1.6. *Let \mathcal{X} and \mathcal{Y} be polish spaces, r and p be as above and take $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ a measurable map. Then with the same notations as before,*

$$H(p | r) = H(\Phi_{\#}p | \Phi_{\#}r) + \int H(p^x | r^x) d\Phi_{\#}p(x).$$

Finally, if Φ is one-to-one, then simultaneously pushing forward r and p by Φ does not change their relative entropy:

Proposition 6.1.7. *Take \mathcal{X} , \mathcal{Y} , r , p and Φ as in Proposition 6.1.6. Assume furthermore that $p \ll r$ and that there exists $\Psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ such that r -almost surely, $\Psi \circ \Phi = \text{Id}_{\mathcal{X}}$. Then*

$$H(p|r) = H(\Phi_{\#}p|\Phi_{\#}r).$$

For probability measures on the torus $\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ and if no confusion arises, we simply write

$$H(\rho) := H(\rho|\text{Leb}) = \int_{\mathbb{T}^d} \rho(x) \log \rho(x) \, dx$$

for the entropy computed relatively to the Lebesgue measure (once again, we keep the same notation ρ for a measure and its density with respect to Leb).

The heat flow. Let us denote by τ_s the heat kernel in the torus

$$\partial_s \tau_s = \frac{1}{2} \Delta \tau_s$$

at time $s > 0$, started from the initial Dirac distribution $\tau_0 = \delta$. We will need the following estimate several times.

Lemma 6.1.8. *There are two dimensional constants $k_d, K_d > 0$ such that for all $s \in (0, 1]$, and for all $x, y \in \mathbb{T}^d$,*

$$\frac{k_d}{\sqrt{2\pi s}^d} \exp\left(-\frac{\mathbf{d}^2(x, y)}{2s}\right) \leq \tau_s(y - x) \leq \frac{K_d}{\sqrt{2\pi s}^d} \exp\left(-\frac{\mathbf{d}^2(x, y)}{2s}\right). \quad (6.3)$$

This type of results can be obtained under general assumptions on the domain and we refer *e.g.* to [54, 70, 93] for this delicate topic. In the torus we have the explicit formula

$$\forall x, y \in \mathbb{T}^d, \quad \tau_s(y - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}^d} \sum_{\bar{l} \in \pi^{-1}(\{0\})} \exp\left(-\frac{|\bar{y} - \bar{x} + \bar{l}|^2}{2s}\right), \quad (6.4)$$

where $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$ are chosen so that $\pi(\bar{x}) = x$ and $\pi(\bar{y}) = y$. Hence the bounds (6.3) could be worked out by hand. As such, the upper bound can only be valid for short times (note that we took care to assume $s \leq 1$ in our statement) and indeed we shall only use this in the limit $s \rightarrow 0$.

Outline. The chapter is organized as follows: in Section 6.2 we discuss the convergence $\text{Brö}_\nu \rightarrow \text{IOT}$ by probabilistic arguments as $\nu \rightarrow 0$. Section 6.3 contains the PDE regularization procedure that we talked about in the introduction, Lemma 6.3.2, as well as our new proof of the convergence $\text{Sch}_\nu \rightarrow \text{OT}$ of entropic towards deterministic optimal transport. In Section 6.4 we prove the corresponding result for incompressible traffic plans, namely $\text{TPBrö}_\nu \rightarrow \text{TPIOT}$. We also show that the associated pressures converge. Our last Section 6.5 is devoted to the time-convexity of the entropy in the various models. We include in Appendix 6.A a self-contained proof of the existence and uniqueness of solutions for TPBrö . In Section 6.2 we shall heavily rely on some explicit properties of the Brownian motion and bridges on the torus: in order not to interrupt the exposition we will simply give the technical statements when needed in the text, and defer their proofs to Appendix 6.B.

6.2 Convergence of Brö towards IOT

The goal of this section is to prove

Theorem 6.2.1.

1. Let $(P^\nu)_{\nu>0}$ be a sequence of incompressible generalized flows narrowly converging to P . Then

$$\liminf_{\nu \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) \geq \bar{\mathcal{A}}(P).$$

2. Let P be an admissible generalized flow for $\text{IOT}(\gamma)$, and $\gamma^\nu \xrightarrow{*} \gamma$. The following are equivalent:

(a) there exists a sequence of generalized incompressible flows P^ν narrowly converging to P with marginals $P_{0,1}^\nu = \gamma^\nu$ and such that

$$\limsup_{\nu \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) \leq \bar{\mathcal{A}}(P) \tag{6.5}$$

(b) the sequence of marginals satisfies

$$\limsup_{\nu \rightarrow 0} \nu H(\gamma^\nu | R_{0,1}^\nu) \leq \frac{1}{2} \int \mathbf{d}(x, y)^2 d\gamma(x, y). \tag{6.6}$$

Remark 6.2.2. Condition (6.6) exactly requires $(\gamma^\nu)_{\nu>0}$ to be a recovery sequence for the Γ -convergence

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \{ \nu H(\cdot | R_{0,1}^\nu) + \iota_{\text{Bis}} \} = C_{\text{MK}} + \iota_{\text{Bis}}, \tag{6.7}$$

where:

$$C_{\text{MK}}(\gamma) := \frac{1}{2} \int \mathbf{d}(x, y)^2 d\gamma(x, y)$$

is the Monge-Kantorovich quadratic cost functional and $\iota_{\text{Bis}}(\gamma)$ is the characteristic function of the bistochasticity constraint. The Γ -convergence (6.7) is well known as a particular case of results from [66] and [31], hence for a given γ there always exists a sequence γ^ν as in (6.6) and in practice our Theorem 6.2.1 guarantees that one can always construct a recovery sequence $P^\nu \xrightarrow{*} P$.

Let us first prove Theorem 6.1.1 using Theorem 6.2.1:

Proof of Theorem 6.1.1. Both $\Gamma - \lim \inf$ parts are a direct consequence of point 1 of Theorem 6.2.1, regardless of any marginal constraint.

For the $\Gamma - \lim \sup$ part in point 1, fix an admissible generalized flow P with marginals $P_{0,1} = \gamma$. By [31, Theorem 2.7] there always exists a recovery sequence $\gamma^\nu \xrightarrow{*} \gamma$ for the optimal transport problem, *i.e.* satisfying (6.6) (their proof is easily adapted from \mathbb{R}^d to \mathbb{T}^d). Thus by Theorem 6.2.1 we can construct a recovery sequence $P^\nu \xrightarrow{*} P$ satisfying (6.5).

For the $\Gamma - \lim \sup$ part of point 2, we claim that the particular sequence $\gamma^\nu = \gamma$ satisfies (6.6). On this premise, Theorem 6.2.1 immediately provides a recovery sequence $P^\nu \xrightarrow{*} P$ with marginals $P_{0,1}^\nu = \gamma$ and satisfying (6.5) as required, hence it suffices to check our claim. To this end, observe that the density $r_{0,1}^\nu$ of $R_{0,1}^\nu$ with respect to $\text{Leb} \otimes \text{Leb}$ is

$$r_{0,1}^\nu(x, y) = \tau_\nu(y - x)$$

where as before, (τ_s) is the heat kernel in the torus at time s . By Proposition 6.1.5 (with $f = r_{0,1}^\nu$ and $r = \text{Leb} \otimes \text{Leb}$) we have thus

$$\begin{aligned} \nu H(\gamma | R_{0,1}^\nu) &= \nu H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) - \int \nu \log r_{0,1}^\nu(x, y) \, d\gamma(x, y) \\ &= \nu H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) - \int \nu \log \tau_\nu(y - x) \, d\gamma(x, y) \\ &\xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0 + \frac{1}{2} \int d^2(x, y) \, d\gamma(x, y), \end{aligned}$$

where the last line is obtained using our assumption $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$ as well as (6.3) (which implies in particular $\nu \log \tau_\nu(x = y) \rightarrow -d^2(x, y)$ uniformly on $\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$). Hence our claim holds and the proof is complete. \square

Let us now carry on with the proof of Theorem 6.2.1, which will go through several steps. We begin with

Proof of point 1 of Theorem 6.2.1. This result is weaker than the same statement without the incompressibility constraint. Hence, it is direct a consequence of the works of C. Léonard, see *e.g.* [66, Proposition 2.5]. For the sake of self-completeness we choose to present here an independent proof, fully leveraging the explicit structure of the reversible Brownian motion R^ν as a particular reference measure (whereas C. Léonard covers much more general settings). We will also recycle part of the argument later on in the proof of 2a \implies 2b in Theorem 6.2.1, hence we give the full details.

Consider a sequence $P^\nu \xrightarrow{*} P$ as in our statement. Observe first that the Legendre transform of $h(u) = u \log u$ is $h^*(v) = e^{v-1}$, in particular

$$u \log u \geq uv - e^{v-1} \quad \text{for all } u, v. \quad (6.8)$$

Fix any bounded and continuous function $f(\omega)$ on $C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$. Taking $u = \frac{dP^\nu}{dR^\nu}(\omega)$, $v = f(\omega)/\nu$ in the previous convexity inequality and integrating with respect to R^ν , we get

$$\begin{aligned} \nu \overline{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) &= \nu \int \frac{dP^\nu}{dR^\nu}(\omega) \log \frac{dP^\nu}{dR^\nu}(\omega) \, dR^\nu(\omega) \\ &\geq \nu \int \frac{dP^\nu}{dR^\nu}(\omega) \frac{f(\omega)}{\nu} \, dR^\nu(\omega) - \nu \int \exp\left(\frac{f(\omega)}{\nu} - 1\right) \, dR^\nu(\omega) \\ &= \int f(\omega) \, dP^\nu(\omega) - \nu e^{-1} \int \exp\left(\frac{f(\omega)}{\nu}\right) \, dR^\nu(\omega). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ideally, one wishes to test $f = A$ (the kinetic action) in this formula, and pass to the limit $\nu \rightarrow 0$ hoping that the exponential term $\nu e^{-1} \int \{\dots\} \rightarrow 0$ to conclude that $\liminf \nu \overline{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) \geq \int A \, dP$. However this is not rigorously justified because A is not continuous for the uniform topology on $C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, and most importantly because $A(\omega) = +\infty$ for R^ν -almost all paths ω in the exponential under the integral in the r.h.s. (whereas the above formal argument rather requires the latter term to vanish as $\nu \rightarrow 0$). Instead, we take a natural difference quotient approximation: for $N \in \mathbb{N}$ and $n = 0 \dots N$ let $t_n = n\tau$ be the uniform partition of $[0, 1]$ with size $\tau = 1/N$. For any $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$ we set

$$A_N(\omega) := \frac{1}{2\tau} \sum_{n=0}^{N-1} d^2(\omega_{t_n}, \omega_{t_{n+1}}). \quad (6.10)$$

This is of course a good approximation of $A(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\omega}_t|^2 dt$, and note that, for fixed N , $A_N(\cdot)$ is continuous (for the uniform topology) and bounded. (In the whole space \mathbb{R}^d one should replace A_N by its truncation $\tilde{A}_N := \min(A_N, N)$ to guarantee boundedness, and the rest of the argument below then applies *mutatis mutandis*.)

For technical reasons, let us fix a parameter $\alpha \in (0, 1)$ close to 1. Taking $f = \alpha A_N$, the last integral in the r.h.s. of (6.9) reads

$$\int \exp\left(\alpha \frac{A_N(\omega)}{\nu}\right) dR^\nu(\omega) = \int \prod_{n=0}^{N-1} \exp\left(\alpha \frac{d^2(\omega_{t_n}, \omega_{t_{n+1}})}{2\nu\tau}\right) dR^\nu(\omega)$$

Since the increments of the Brownian motion are independent and stationary this becomes simply

$$\int \exp\left(\alpha \frac{A_N(\omega)}{\nu}\right) dR^\nu(\omega) = \left[\int \exp\left(\alpha \frac{d^2(\omega_\tau, \omega_0)}{2\nu\tau}\right) dR^\nu(\omega) \right]^N. \quad (6.11)$$

By definition R^ν is the projection on the torus of the Brownian motion \bar{R}^ν in \mathbb{R}^d , whence

$$\begin{aligned} & \int \exp\left(\alpha \frac{d^2(\omega_\tau, \omega_0)}{2\nu\tau}\right) dR^\nu(\omega) \\ &= \frac{1}{(2\pi\nu\tau)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\alpha \frac{d^2(0, \pi(y))}{2\nu\tau}\right) \exp\left(-\frac{|y|^2}{2\nu\tau}\right) dy \\ &\leq \frac{1}{(2\pi\nu\tau)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left((\alpha - 1) \frac{|y|^2}{2\nu\tau}\right) dy, \end{aligned}$$

where we used $d(0, \pi(y)) \leq |y - 0|$ in the last line. Because we were cautious enough to choose $\alpha < 1$ this quantity is finite, and changing variables $z = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\nu\tau}} y$ in the integral yields

$$\begin{aligned} \int \exp\left(\alpha \frac{d^2(\omega_\tau, \omega_0)}{2\nu\tau}\right) dR^\nu(\omega) &\leq \frac{1}{(2\pi(1-\alpha))^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) dz \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)^{d/2}}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Gathering (6.11)(6.12) we have

$$\int \exp\left(\alpha \frac{A_N(\omega)}{\nu}\right) dR^\nu(\omega) \leq \frac{1}{(1-\alpha)^{Nd/2}}, \quad (6.13)$$

whence from (6.9) with $f = \alpha A_N$

$$\begin{aligned} \liminf_{\nu \rightarrow 0} \nu \bar{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) &\geq \liminf_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \alpha \int A_N(\omega) dP^\nu(\omega) \right\} \\ &\quad - \limsup_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \nu e^{-1} \int \exp\left(\alpha \frac{A_N(\omega)}{\nu}\right) dR^\nu(\omega) \right\} \\ &\geq \liminf_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \alpha \int A_N(\omega) dP^\nu(\omega) \right\} - \limsup_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \frac{\nu e^{-1}}{(1-\alpha)^{Nd/2}} \right\} \\ &= \alpha \int A_N(\omega) dP(\omega) - 0 \end{aligned}$$

because $P^\nu \xrightarrow{*} P$ by assumption (and A_N is bounded continuous). Taking next $\alpha \rightarrow 1$ and then \liminf as $N \rightarrow \infty$ with pointwise convergence $A_N(\omega) \rightarrow A(\omega)$ for all $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, we finally get by Fatou's lemma

$$\liminf_{\nu \rightarrow 0} \nu \overline{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) \geq 1 \cdot \liminf_{N \rightarrow \infty} \int A_N(\omega) dP(\omega) \geq \int A(\omega) dP(\omega) = \mathcal{A}(P)$$

and the proof is complete. \square

Before going into the details of proof of point 2 in Theorem 6.2.1, we will need a few preliminary definitions and lemmas. In order not to interrupt the flow of the exposition, we postpone the proofs of some of these technical statements to the appendix.

The first technical result that we shall need is the counterpart of formula (6.13) for Brownian bridges instead of the reversible Brownian motion:

Lemma 6.2.3. *Consider A_N as defined in (6.10). There is a dimensional constant $C_d > 0$ such that, for all $x, y \in \mathbb{T}^d$, $\nu \in (0, 1)$, and fixed $\alpha \in (0, 1)$, there holds*

$$\int \exp\left(\frac{\alpha}{\nu} A_N(\omega)\right) dR^{\nu, x, y}(\omega) \leq \frac{C_d}{(1 - \alpha)^{Nd/2}} \exp\left(\frac{\alpha}{2\nu} d^2(x, y)\right), \quad (6.14)$$

where $R^{\nu, x, y} = R^\nu(\bullet | X_0 = x, X_1 = y)$ is the Brownian bridge joining x to y .

In the whole space this would readily follow from explicit computations for Gaussian vectors. In the case of the torus, we postpone the proof to Appendix 6.B for convenience.

We also need to define a notion of translated bridges, which will play a crucial role when building the recovery sequence (P^ν) . To do so, let us first denote by Π the projection:

$$\Pi : \omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}^d) \mapsto (t \mapsto \pi(\omega_t)) \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d).$$

Then, if $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, we write T_ω for the translation map

$$T_\omega : \alpha \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d) \mapsto \omega + \alpha \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d). \quad (6.15)$$

Let $\overline{B}^\nu := \overline{R}^{\nu, 0, 0}$ be the Brownian bridge in \mathbb{R}^d with diffusivity ν and joining 0 to 0. The translated Brownian bridges are defined as follows.

Definition 6.2.4. If $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$ and $\nu > 0$, we set

$$B_\omega^\nu := T_{\omega \#} \Pi \# \overline{B}^\nu.$$

Roughly speaking, B_ω^ν is obtained by adding the projection of the Brownian bridge to ω . Remark that the Brownian bridge in the torus is not the projection of the Brownian bridge in \mathbb{R}^d , i.e. $R^{\nu, 0, 0} \neq \Pi \# \overline{B}^\nu$. As a consequence, $B_\omega^\nu \neq T_{\omega \#} R^{\nu, 0, 0}$. This alternative definition of translated bridges would have made the proof of Lemma 6.2.5 below more delicate.

The entropy of B_ω^ν with respect to the bridges of R^ν will be computed thanks to

Lemma 6.2.5. *There exists a dimensional constant $C = C_d$ such that, for all $\nu \leq 1$ and all $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$,*

$$\nu H(B_\omega^\nu | R^{\nu, \omega_0, \omega_1}) \leq A(\omega) - \frac{1}{2} d^2(\omega_0, \omega_1) + C\nu. \quad (6.16)$$

Once again, we postpone the proof to the appendix. Note that, in the whole space \mathbb{R}^d , the corresponding result is stated in Lemma 6.B.2 and follows from the classical Cameron-Martin formula. In this case, equality holds in (6.16) with $C = 0$.

We proceed now with the proof of the equivalence $2a \iff 2b$ in Theorem 6.2.1. In order to ease the exposition we opted for dividing the argument in two steps, one for each implication.

Proof of Theorem 6.2.1, $2a \implies 2b$. Assume that P^ν converges to P and satisfies the Γ -lim sup inequality (6.5). Disintegrating with respect to (X_0, X_1) , we have by Proposition 6.1.6

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) = \nu H(\gamma^\nu | R'_{0,1}) + \nu \int H(P^{\nu,x,y} | R^{\nu,x,y}) d\gamma^\nu(x, y).$$

Hence with our assumption (6.5) there holds

$$\begin{aligned} & \limsup_{\nu \rightarrow 0} \{ \nu H(\gamma^\nu | R'_{0,1}) \} \\ & \leq \limsup_{\nu \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) - \liminf_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \nu \int H(P^{\nu,x,y} | R^{\nu,x,y}) d\gamma^\nu(x, y) \right\} \\ & \leq \overline{\mathcal{A}}(P) - \liminf_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \nu \int H(P^{\nu,x,y} | R^{\nu,x,y}) d\gamma^\nu(x, y) \right\}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

In order to estimate the last integral we proceed using the same strategy as in the proof of point 1 of Theorem 6.2.1 earlier: for large $N \in \mathbb{N}$ and $\tau = 1/N$ we write again $t_n = n\tau$ for $n = 0 \dots N$. Consider now

$$\hat{A}_N(\omega) := \frac{1}{2\tau} \sum_{n=0}^{N-1} d^2(\omega_{t_n}, \omega_{t_{n+1}}) - \frac{1}{2} d^2(\omega_0, \omega_1) = A_N(\omega) - \frac{1}{2} d^2(\omega_0, \omega_1).$$

This function is continuous for the uniform topology on $C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, bounded, and it is of course an approximation of

$$\hat{A}(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\omega}_t|^2 dt - \frac{1}{2} d^2(\omega_0, \omega_1) & \text{if } \omega \in AC^2 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

as $N \rightarrow \infty$. We fix again a parameter $\alpha \in (0, 1)$ close to 1. Exploiting the convexity inequality (6.8) with $u = \frac{dP^{\nu,x,y}}{dR^{\nu,x,y}}(\omega)$ and $v = \frac{\alpha}{\nu} \hat{A}_N(\omega)$, and integrating first with respect to $R^{\nu,x,y}$ (note that $\omega_0 = x$ and $\omega_1 = y$ for $R^{\nu,x,y}$ -almost all ω) and then with respect to γ^ν , we get

$$\begin{aligned} \nu \int H(P^{\nu,x,y} | R^{\nu,x,y}) d\gamma^\nu(x, y) & \geq \alpha \iint \hat{A}_N(\omega) dP^{\nu,x,y}(\omega) d\gamma^\nu(x, y) \\ & \quad - \nu e^{-1} \int \exp\left(-\frac{\alpha}{2\nu} d(x, y)^2\right) \int \exp\left(\frac{\alpha}{\nu} A_N(\omega)\right) dR^{\nu,x,y}(\omega) d\gamma^\nu(x, y). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Since by assumption $P^\nu \xrightarrow{*} P$, we see that the first term in the r.h.s

$$\iint \hat{A}_N(\omega) dP^{\nu,x,y}(\omega) d\gamma^\nu(x, y) = \int \hat{A}_n(\omega) dP^\nu(\omega) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \int \hat{A}_n(\omega) dP(\omega), \quad (6.19)$$

thus it only remains to show that the limsup of the exponential term in (6.18) goes to zero (just like in the previous proof of point 1 of Theorem 6.2.1). This is where we need to use Lemma 6.2.3. From (6.18)(6.19)(6.14), we get:

$$\begin{aligned}
& \liminf_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \nu \int H(P^{\nu,x,y} | R^{\nu,x,y}) d\gamma^\nu(x,y) \right\} \\
& \geq \alpha \int \hat{A}_N(\omega) dP(\omega) \\
& \quad - \limsup_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \nu e^{-1} \int \exp\left(-\frac{\alpha}{2\nu} d(x,y)^2\right) \frac{C_d \exp\left(\frac{\alpha}{2\nu} d^2(x,y)\right)}{(1-\alpha)^{Nd/2}} d\gamma^\nu(x,y) \right\} \\
& \geq \alpha \int \hat{A}_N(\omega) dP(\omega) - \limsup_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \nu e^{-1} \times \frac{C_d}{(1-\alpha)^{Nd/2}} \right\} \\
& = \alpha \int \hat{A}_N(\omega) dP(\omega).
\end{aligned}$$

Taking next $\alpha \rightarrow 1$ and \liminf as $N \rightarrow \infty$ with now

$$\hat{A}_N(\omega) = A_N(\omega) - \frac{1}{2} d^2(\omega_0, \omega_1) \rightarrow A(\omega) - \frac{1}{2} d^2(\omega_0, \omega_1)$$

for all ω , we conclude by Fatou's lemma that

$$\begin{aligned}
& \liminf_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \nu \int H(P^{\nu,x,y} | R^{\nu,x,y}) d\gamma^\nu(x,y) \right\} \\
& \geq \int \left\{ A(\omega) - \frac{1}{2} d^2(\omega_0, \omega_1) \right\} dP(\omega) = \bar{A}(P) - \frac{1}{2} \int d^2(x,y) d\gamma(x,y).
\end{aligned}$$

Applying this inequality in (6.17) finally gives (6.6) and the proof is complete. \square

Let us now establish the converse implication:

Proof of Theorem 6.2.1, 2b \implies 2a. Take $(\gamma^\nu)_{\nu>0}$ as in our statement. Since we have $\gamma^\nu \xrightarrow{*} \gamma$, a closer look into the proof of [10, Theorem 1] (continuity of the optimal action in the incompressible optimal transport problem $\text{IOT}(\gamma)$ with respect to the marginal γ) gives a sequence Q^ν of generalized flows converging to P such that Q^ν is admissible for $\text{IOT}(\gamma^\nu)$ and

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{A}(Q^\nu) = \bar{A}(P). \quad (6.20)$$

Let now

$$P^\nu := \int B_\omega^\nu dQ^\nu(\omega), \quad (6.21)$$

with B_ω^ν as in Definition 6.2.4. Roughly speaking, P^ν is a noisy version of Q^ν , where all the paths initially charged by Q^ν receive now an additional small Brownian perturbation.

First of all, we claim that $P^\nu \xrightarrow{*} P$ as $\nu \rightarrow 0$. Indeed, if φ is a test function on $C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, let us check that

$$\varphi^\nu : \omega \mapsto \int \varphi(\alpha) dB_\omega^\nu(\alpha)$$

converges uniformly towards φ on the compact sets of $C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$. If K is such a compact set, take $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ a modulus of continuity of $\varphi|_K$. Of course, m can be chosen continuous and bounded. Then, for all $\omega \in K$,

$$\begin{aligned} |\varphi^\nu(\omega) - \varphi(\omega)| &\leq \int |\varphi(\alpha) - \varphi(\omega)| \, dB_\omega^\nu(\alpha) \\ &= \int |\varphi(\omega + \alpha) - \varphi(\omega)| \, dB_0^\nu(\alpha) \leq \int m(\|\alpha\|_\infty) \, dB_0^\nu(\alpha), \end{aligned}$$

and we conclude using $B_0^\nu \xrightarrow{*} \delta_0$. Since $Q^\nu \xrightarrow{*} P$ we see that

$$\begin{aligned} \int \varphi(\alpha) \, dP^\nu(\alpha) &= \int \left(\int \varphi(\alpha) \, dB_\omega^\nu(\alpha) \right) \, dQ^\nu(\omega) \\ &= \int \varphi^\nu(\omega) \, dQ^\nu(\omega) \xrightarrow[\nu \rightarrow 0]{} \int \varphi(\omega) \, dP(\omega) \end{aligned}$$

as claimed.

Moreover, it is straightforward to check that the marginal constraint is satisfied, *i.e.* that $(X_0, X_1)_\# P^\nu = \gamma^\nu$. Let us check now the incompressibility. Take φ a test function on \mathbb{T}^d : by Definition 6.2.4 of B_ω^ν and the incompressibility of Q^ν , we have for all $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int \varphi(\alpha_t) \, dP^\nu(\alpha) &= \iint \varphi(\alpha_t) \, dB_\omega^\nu(\alpha) \, dQ^\nu(\omega) \\ &= \iint \varphi(\pi(\bar{\alpha}_t) + \omega_t) \, d\bar{B}^\nu(\bar{\alpha}) \, dQ^\nu(\omega) \\ &= \iint \varphi(\pi(\bar{\alpha}_t) + \omega_t) \, dQ^\nu(\omega) \, d\bar{B}^\nu(\bar{\alpha}) \\ &= \iint \varphi(\pi(\bar{\alpha}_t) + x) \, dx \, d\bar{B}^\nu(\bar{\alpha}) \\ &= \iint \varphi(x') \, dx' \, d\bar{B}^\nu(\bar{\alpha}) = \int \varphi(x') \, dx'. \end{aligned}$$

Next, let us estimate $\bar{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) = \nu H(P^\nu | R^\nu)$. Conditioning on the endpoints, we get by Proposition 6.1.6

$$H(P^\nu | R^\nu) = H(\gamma^\nu | R_{0,1}^\nu) + \int H(P^{\nu,x,y} | R^{\nu,x,y}) \, d\gamma^\nu(x, y). \quad (6.22)$$

Moreover, conditioning (6.21), we get for γ^ν -almost all $(x, y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$:

$$P^{\nu,x,y} = \int B_\omega^\nu \, dQ^{\nu,x,y}(\omega).$$

Hence for γ^ν -almost all $(x, y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$, by Jensen's inequality, and because $Q^{\nu,x,y}$ -almost surely $\omega_0 = x$ and $\omega_1 = y$, there holds

$$H(P^{\nu,x,y} | R^{\nu,x,y}) \leq \int H(B_\omega^\nu | R^{\nu,x,y}) \, dQ^{\nu,x,y}(\omega) = \int H(B_\omega^\nu | R^{\nu,\omega_0,\omega_1}) \, dQ^{\nu,x,y}(\omega).$$

Substituting this inequality in formula (6.22), we get:

$$\begin{aligned} H(P^\nu | R^\nu) &\leq H(\gamma^\nu | R_{0,1}^\nu) + \iint H(B_\omega^\nu | R^{\nu, \omega_0, \omega_1}) dQ^{\nu, x, y}(\omega) d\gamma^\nu(x, y) \\ &= H(\gamma^\nu | R_{0,1}^\nu) + \int H(B_\omega^\nu | R^{\nu, \omega_0, \omega_1}) dQ^\nu(\omega). \end{aligned}$$

Multiplying by ν and using (6.16), we get for $\nu < 1$:

$$\begin{aligned} \nu H(P^\nu | R^\nu) &\leq \nu H(\gamma^\nu | R_{0,1}^\nu) + \int \left\{ A(\omega) - \frac{1}{2} d^2(\omega_0, \omega_1) + C\nu \right\} dQ^\nu(\omega) \\ &= \nu H(\gamma^\nu | R_{0,1}^\nu) + \bar{\mathcal{A}}(Q^\nu) - \frac{1}{2} \int d^2(x, y) d\gamma^\nu(x, y) + C\nu, \end{aligned}$$

where C is a dimensional constant. With our assumption (6.6) and by (6.20), we finally obtain

$$\begin{aligned} \limsup_{\nu \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) &= \limsup_{\nu \rightarrow 0} \nu H(P^\nu | R^\nu) \\ &\leq \limsup_{\nu \rightarrow 0} \left\{ H(\gamma^\nu | R_{0,1}^\nu) + \bar{\mathcal{A}}(Q^\nu) - \frac{1}{2} \int d^2(x, y) d\gamma^\nu(x, y) + C\nu \right\} \\ &= \limsup_{\nu \rightarrow 0} \nu H(\gamma^\nu | R_{0,1}^\nu) + \lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{\mathcal{A}}(Q^\nu) - \frac{1}{2} \int d^2(x, y) d\gamma^\nu(x, y) \\ &\leq \frac{1}{2} \int d(x, y)^2 d\gamma(x, y) + \bar{\mathcal{A}}(P) - \frac{1}{2} \int d(x, y)^2 d\gamma(x, y) \end{aligned}$$

and the proof is complete. \square

6.3 Convergence of Sch towards OT

Here we give a new proof of the convergence of *entropic* optimal transport (Problem 1.3.10) towards *deterministic* optimal transport (Problem 1.1.21) as the diffusivity $\nu \rightarrow 0$. We stress again that the result itself is not new [77, 66, 34, 31], but our proof only relies on elementary PDE arguments and we believe it is worth including the details for the sake of completeness.

For curves $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ and given $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ we write

$$\iota_{(\rho_0, \rho_1)}(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{if } \rho|_{t=0} = \rho_0 \text{ and } \rho|_{t=1} = \rho_1 \\ +\infty & \text{else,} \end{cases}$$

for the characteristic function of the endpoints constraint. Let us recall that we simply write $H(\mu) = H(\mu | \text{Leb})$ for the entropy of a probability $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ computed relatively to the Lebesgue measure on the torus. Also recall that \mathcal{H}_ν and \mathcal{A} are defined by formulae (1.29) and (1.80) respectively.

Theorem 6.3.1. *Let $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ such that $H(\rho_0) < +\infty$ and $H(\rho_1) < +\infty$. Then*

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \mathcal{H}_\nu + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} \right\} = \mathcal{A} + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} \quad (6.23)$$

for the uniform topology on $C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$.

Before going into the proof we shall need a fundamental regularization procedure (Lemma 6.3.2 below), to be used repeatedly in the sequel. To motivate the approach, observe that, in the previous section, the key step was the construction of a suitable recovery sequence $P^\nu \xrightarrow{*} P$ by means of Brownian bridges – see in particular (6.21). Our regularization below will simply consist in a similar construction at the PDE level.

More precisely, recall that we write $\tau_s(x)$ for the heat kernel at time $s > 0$

$$\partial_s \tau_s = \frac{1}{2} \Delta \tau_s$$

started from the initial Dirac distribution $\tau_0 = \delta$. For a given curve $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ and diffusivity parameter $\nu > 0$ we shall always write $\rho^\nu \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ for the curve defined by

$$t \mapsto \rho_t^\nu := \rho_t * \tau_{\nu t(1-t)} \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), \quad (6.24)$$

where the convolution only acts in space. In other words ρ_t^ν is defined as the solution of the heat flow at time $s = \nu t(1-t)$ started from ρ_t at time $s = 0$, and in particular ρ^ν has the same endpoints as ρ

$$\rho_0^\nu = \rho_0 \quad \text{and} \quad \rho_1^\nu = \rho_1.$$

Our regularity estimate takes the following quantitative form:

Lemma 6.3.2. *For all $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, defining ρ^ν as in (6.24), there holds*

$$\mathcal{A}(\rho^\nu) + \frac{\nu^2}{2} \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \int |\nabla \log \rho_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt + \nu \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \leq \mathcal{A}(\rho) + \nu \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2}. \quad (6.25)$$

Moreover, there exists a dimensional constant $C = C_d > 0$ such that,

$$\mathcal{A}(\rho^\nu) + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt + \nu \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \leq \mathcal{A}(\rho) + \nu \left[\frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} + C \right]. \quad (6.26)$$

Similarly, for $\alpha > 0$ the entropic version holds as:

$$\mathcal{H}_\alpha(\rho^\nu) + \frac{\nu^2}{2} \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \int |\nabla \log \rho_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt + \nu \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \leq \mathcal{H}_\alpha(\rho) + \nu \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} \quad (6.27)$$

and

$$\mathcal{H}_\alpha(\rho^\nu) + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt + \nu \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \leq \mathcal{H}_\alpha(\rho) + \nu \left[\frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} + C \right]. \quad (6.28)$$

Note that all four right-hand sides are allowed to be infinite, in which case our statement is vacuous.

Proof. Let us start with (6.25). We can always assume that ρ has regularity $AC^2([0, T]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, since otherwise $\mathcal{A}(\rho) = +\infty$ in the r.h.s. By theorem 1.1.20 there exists a velocity field $c \in L^2(dt \otimes \rho_t)$ such that $\mathcal{A}(\rho) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c_t|^2 \rho_t dt$. Defining the classical regularization

$$\tilde{c}_t^\nu := \frac{(\rho_t c_t) * \tau_{\nu t(1-t)}}{\rho_t * \tau_{\nu t(1-t)}} = \frac{(\rho_t c_t) * \tau_{\nu t(1-t)}}{\rho_t^\nu}, \quad (6.29)$$

it is easy to check that

$$\partial_t \rho_t^\nu + \operatorname{div}(\rho_t^\nu \hat{c}_t^\nu) = -\nu(t-1/2) \Delta \rho_t^\nu$$

at least in the sense of distributions. (This is a first reason why we defined the regularization (6.29) as acting on the momentum variable $m^\nu = \rho_t^\nu \hat{c}_t^\nu = (\rho_t c_t) * \tau_{\nu t(1-t)}$, rather than directly on the velocities). The extra Laplacian in the right-hand side arises because the regularizing kernel $\tau_{\nu t(1-t)}(\cdot)$ is not fixed but depends on time. Setting moreover

$$c_t^\nu := \hat{c}_t^\nu - \nu(t-1/2) \nabla \log \rho_t^\nu \quad (6.30)$$

and recalling that $\operatorname{div}(\rho \nabla \log \rho) = \operatorname{div}\left(\rho \frac{\nabla \rho}{\rho}\right) = \Delta \rho$, we have now

$$\partial_t \rho_t^\nu + \operatorname{div}(\rho_t^\nu c_t^\nu) = 0,$$

hence by definition (1.29) of the kinetic action

$$\mathcal{A}(\rho^\nu) \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt. \quad (6.31)$$

Since $\tau_{\nu t(1-t)}(\cdot)$ is a probability measure and $(\rho, m) \mapsto \frac{|m|^2}{2\rho}$ is jointly convex, an immediate application of Jensen's inequality gives automatically

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int |\hat{c}_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c_t|^2 \rho_t dt = \mathcal{A}(\rho) \quad (6.32)$$

(this is another reason for the particular definition of \hat{c} .) Gathering (6.31)(6.32) and exploiting (6.30) to expand $|\hat{c}_t^\nu|^2$, we find

$$\mathcal{A}(\rho^\nu) + \frac{\nu^2}{2} \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \int |\nabla \log \rho_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt \leq \mathcal{A}(\rho) + \nu \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) \int \nabla \log \rho_t^\nu \cdot c_t^\nu \rho_t^\nu dt. \quad (6.33)$$

Writing next

$$\frac{d}{dt} H(\rho_t^\nu) = \int (1 + \log \rho_t^\nu) \partial_t \rho_t^\nu = - \int (1 + \log \rho_t^\nu) \operatorname{div}(\rho_t^\nu c_t^\nu) = \int \nabla \log \rho_t^\nu \cdot c_t^\nu \rho_t^\nu dt$$

we obtain after integration by parts

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) \int \nabla \log \rho_t^\nu \cdot c_t^\nu \rho_t^\nu dt &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) \frac{d}{dt} H(\rho_t^\nu) dt \\ &= \frac{H(\rho_0^\nu) + H(\rho_1^\nu)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \\ &= \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt. \end{aligned}$$

Here we crucially used the fact that the endpoints $\rho_0^\nu = \rho_0$ and $\rho_1^\nu = \rho_1$ remain unchanged. Our first estimate (6.25) immediately follows by substituting this identity in (6.33).

To get (6.26), we first add $\frac{\nu^2}{2} \int_0^1 t(1-t) \int |\nabla \log \rho_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt$ to both sides of (6.25) and use the algebraic identity $t(1-t) + (t-1/2)^2 = 1/4$ to get

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho^\nu) + \frac{\nu^2}{8} \int_0^1 \int |\nabla \log \rho_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt + \nu \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \\ \leq \mathcal{A}(\rho) + \nu \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} + \nu \int_0^1 \nu \frac{t(1-t)}{2} \int |\nabla \log \rho_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt, \end{aligned} \quad (6.34)$$

and it only remains to control the last term in the right-hand side. By the celebrated Li-Yau inequality [70, Theorem 1.1], the Fisher information decays at a universal rate along the heat flow uniformly in the initial datum, here (with $\tilde{\rho}_s = \tau_s * \tilde{\rho}_0$):

$$\int |\nabla \log \tilde{\rho}_s|^2 \tilde{\rho}_s \leq \frac{d}{2s} \quad \forall \tilde{\rho}_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), \forall s > 0.$$

Recalling that, by definition, ρ_t^ν is the solution at time $s = \nu t(1-t)$ of the heat flow started from $\tilde{\rho}_0 = \rho_t$, the last term in (6.34) can thus be controlled as

$$\nu \int_0^1 \nu \frac{t(1-t)}{2} \int |\nabla \log \rho_t^\nu|^2 \rho_t^\nu dt \leq \nu \int_0^1 \nu \frac{t(1-t)}{2} \cdot \frac{d}{2\nu t(1-t)} dt \leq C_d \nu$$

and (6.26) follows.

As for (6.27)(6.28), we recall that the Fisher information

$$F(\tilde{\rho}_s) = \frac{1}{8} \int |\nabla \log \tilde{\rho}_s|^2 \tilde{\rho}_s$$

is nonincreasing along the heat flow (by the same Jensen's inequality used in (6.32)). In our particular setting this gives $F(\rho_t^\nu) \leq F(\rho_t)$ for all $t \in [0, 1]$. The result immediately follows by adding $\alpha^2 \mathcal{F}(\rho^\nu) \leq \alpha^2 \mathcal{F}(\rho)$ to (6.25) and (6.26), respectively, and the proof is complete. \square

We are now in position of proving the convergence of Sch_ν towards OT.

Proof of Theorem 6.3.1. The Γ -lim inf is obvious, as $\mathcal{H}_\nu = \mathcal{A} + \nu^2 \mathcal{F} \geq \mathcal{A}$ and \mathcal{A} is lower semi-continuous. Let us therefore consider the Γ -lim sup, and fix $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ with endpoints ρ_0, ρ_1 . We can always assume that $\rho \in AC^2$, otherwise there is nothing to prove.

For $\rho \in AC^2([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, we claim that $(\rho^\nu)_{\nu>0}$ defined in (6.24) is an admissible recovery sequence. Indeed, as already discussed ρ^ν has same endpoints ρ_0, ρ_1 as ρ . Moreover from (6.26) we get

$$\mathcal{H}_\nu(\rho^\nu) = \mathcal{A}(\rho^\nu) + \nu^2 \mathcal{F}(\rho^\nu) \leq \mathcal{A}(\rho) + \nu \left[\frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} + C \right],$$

and taking the lim sup gives

$$\limsup_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{H}_\nu(\rho^\nu) \leq \mathcal{A}(\rho)$$

as required. \square

Remark 6.3.3. From this proof it is clear that, apart from the static entropy term $\nu \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2}$, the purely dynamical lim sup-gap for the Γ -convergence $\mathcal{H}_\nu \rightarrow \text{OT}$ is of order at most $C\nu$ for a dimensional constant $C = C_d$.

Remark 6.3.4. When $H(\rho_0)$ or $H(\rho_1)$ is infinite, the Γ -convergence (6.23) cannot hold because $\mathcal{H}_\nu(\cdot) + \iota_{(\rho_0, \rho_1)}(\cdot) \equiv +\infty$ for all $\nu > 0$. However, similarly to the scenario of Theorem 6.2.1, it is still possible to prove

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{H}_\nu = \mathcal{A},$$

and more precisely

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \mathcal{H}_\nu + \iota_{(\rho_0^\nu, \rho_1^\nu)} \right\} = \mathcal{A} + \iota_{(\rho_0, \rho_1)}$$

if and only if $\rho_0^\nu \xrightarrow{*} \rho_0$, $\rho_1^\nu \xrightarrow{*} \rho_1$ and

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu H(\rho_0^\nu) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu H(\rho_1^\nu) = 0.$$

Such (ρ_0^ν) and (ρ_1^ν) are easy to build for instance by convolution.

6.4 Convergence of TPBrö towards TPIOT

Here we prove the Γ -convergence in Theorem 6.1.2 as well as the convergence of the pressures associated with the incompressibility constraints, Theorem 6.1.4.

6.4.1 Gamma convergence

Proof of Theorem 6.1.2. Again, the Γ -lim inf easily follows from the standard lower semi-continuity of $\overline{\mathcal{A}}$ together with $\overline{\mathcal{H}}_\nu = \overline{\mathcal{A}} + \nu^2 \overline{\mathcal{F}} \geq \overline{\mathcal{A}}$, and we only focus on the Γ -lim sup inequality. The argument essentially consists in superposing the proof of Theorem 6.3.1 by linearity, *i.e.* integrating with respect to \mathbf{P} .

More precisely: For $\nu > 0$ we define the mapping

$$\Phi^\nu : \rho \mapsto \rho^\nu \tag{6.35}$$

from $C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ to itself, where the curve $\rho^\nu = (\rho_t^\nu)_{t \in [0, 1]}$ is defined in (6.24). For any incompressible traffic plan \mathbf{P} , we first claim that

$$\mathbf{P}^\nu := \Phi^\nu \# \mathbf{P}$$

shares its marginals with \mathbf{P} and automatically inherits incompressibility from that of \mathbf{P} . Indeed, as already observed, ρ^ν leaves the endpoints unchanged $\rho_0^\nu = \rho_0$ and $\rho_1^\nu = \rho_1$, hence for all test functions φ on $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$

$$\int \varphi(\rho_0, \rho_1) d\mathbf{P}^\nu(\rho) = \int \varphi(\Phi^\nu(\rho)_0, \Phi^\nu(\rho)_1) d\mathbf{P}(\rho) = \int \varphi(\rho_0^\nu, \rho_1^\nu) d\mathbf{P}(\rho) = \int \varphi(\rho_0, \rho_1) d\mathbf{P}(\rho)$$

and therefore $\mathbf{P}_{0,1}^\nu = \mathbf{P}_{0,1}$. In particular, the constraint $\mathbf{P}_{0,1}^\nu = \Gamma$ is satisfied as soon as $\mathbf{P}_{0,1} = \Gamma$. For the incompressibility, since Lebesgue is invariant for the heat flow $(\tau_s)_\# \text{Leb} = \text{Leb} \Rightarrow \Phi^\nu(\text{Leb}) = \text{Leb}$, and because Φ^ν is linear, we have

$$\int \rho_t d\mathbf{P}^\nu(\rho) = \int \Phi^\nu(\rho)_t d\mathbf{P}(\rho) = \Phi^\nu \left(\int \rho d\mathbf{P}(\rho) \right)_t = \Phi^\nu(\text{Leb}) = \text{Leb}$$

for all t .

Taking now an admissible \mathbf{P} in $\text{TPIOT}(\Gamma)$, we just showed that \mathbf{P}^ν is admissible too, and we claim that it is a suitable recovery sequence.

First, we claim that $\mathbf{P}^\nu \xrightarrow{*} \mathbf{P}$: according to [4, Lemma 5.2.1], it suffices to show that Φ^ν converges uniformly towards the identity on the compact sets of $C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$. In fact, this convergence is even uniform (and not compactly uniform), and follows from the following estimate:

$$\forall \rho \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), \forall s \geq 0, \quad \mathbf{d}_{\text{MK}}(\rho, \rho * \tau_s) \leq \sqrt{s}.$$

(Use as a coupling between ρ and $\rho * \tau_s$ the joint law of the Brownian motion starting from ρ between the times 0 and s .) Indeed, as a consequence,

$$\forall \rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)), \quad \sup_{t \in [0, 1]} \mathbf{d}_{\text{MK}}(\rho_t, \rho_t^\nu) \leq \sup_{t \in [0, 1]} \sqrt{\nu t(1-t)} = \frac{\sqrt{\nu}}{2},$$

which proves the uniform convergence.

For the limsup inequality, we can always assume that $\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}) < \infty$ hence that \mathbf{P} only charges AC^2 curves, otherwise there is nothing to prove. We can therefore appeal to Lemma 6.3.2 and (6.26) (for \mathbf{P} -a.e. ρ) to estimate

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}^\nu) &= \int \mathcal{H}_\nu(\rho) \, d\mathbf{P}^\nu(\rho) = \int \mathcal{H}_\nu(\rho^\nu) \, d\mathbf{P}(\rho) \\ &\leq \int \mathcal{A}(\rho) \, d\mathbf{P}(\rho) + \nu \int \left[\frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} + C \right] \, d\mathbf{P}(\rho) \\ &\leq \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}) + \nu \left[\int \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} \, d\Gamma(\rho_0, \rho_1) + C \right]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Taking the limsup gives the desired inequality and the proof is complete. \square

Remark 6.4.1. As in Remark 6.3.4, if (1.87) does not hold the Γ -convergence (6.1) cannot hold due to $\overline{\mathcal{H}}_\nu(\cdot) + \iota_\Gamma(\cdot) \equiv +\infty$. However, it is still possible to prove

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_\nu + \iota_{\text{Inc}} = \overline{\mathcal{A}} + \iota_{\text{Inc}}$$

by regularizing Γ as $\Gamma^\nu := (\Psi_\nu, \Psi_\nu)_\# \Gamma$, where

$$\Psi_\nu : \rho \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \mapsto \rho * \tau_\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$$

and the admissible generalized flow must also be regularized correspondingly. In fact, we expect as in Remark 6.3.4 that

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \overline{\mathcal{H}}_\nu + \iota_{\text{Inc}} + \iota_{\Gamma^\nu} \right\} = \overline{\mathcal{A}} + \iota_{\text{Inc}} + \iota_\Gamma$$

if and only if $\Gamma^\nu \xrightarrow{*} \Gamma$ and

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int H(\rho_0) \, d\Gamma^\nu(\rho_0, \rho_1) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int H(\rho_1) \, d\Gamma^\nu(\rho_0, \rho_1) = 0.$$

To prove this statement, one needs a result corresponding to [10, Theorem 1] in that setting but we did not pursue in this direction.

6.4.2 Convergence of the pressures

The purpose of this section is to prove Theorem 6.1.4. We will need the following definition of the average density of a traffic plan.

Definition 6.4.2. Let \mathbf{P} be a traffic plan. Its density $\rho^{\mathbf{P}} \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ is defined at time $t \in [0, 1]$ by:

$$\rho_t^{\mathbf{P}} := \int \rho_t d\mathbf{P}(\rho).$$

In other words, $(\rho_t^{\mathbf{P}})_{t \in [0, 1]}$ is the curve obtained by averaging all the phases at time t with respect to \mathbf{P} . Recall that in Chapter 5, we have introduced the following functional space:

Definition 6.4.3. We call \mathcal{E}_0 the space of continuous functions $f : [0, 1] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying:

- for all $x \in \mathbb{T}^d$, $f(0, x) = f(1, x) = 0$,
- for all $t \in [0, 1]$,

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(t, x) dx = 0,$$

- for all $t \in [0, 1]$, $f(t, \bullet) \in W^{2, \infty}(\mathbb{T}^d)$ and the Hessian $D^2 f$ of f satisfies:

$$\sup_{t \in [0, 1]} \|D^2 f(t, \bullet)\|_{\infty} < +\infty,$$

- $f(\bullet, x) \in AC^2([0, 1])$ for all $x \in \mathbb{T}^d$, and $\partial_t f$, which is well defined for almost all t and all x , satisfies

$$\int_0^1 \|\partial_t f(t, \bullet)\|_{\infty}^2 dt < +\infty.$$

We endow \mathcal{E}_0 with the norm

$$\mathbf{N}(f) := \sup_{t \in [0, 1]} \|D^2 f(t, \bullet)\|_{\infty} + \left(\int_0^1 \|\partial_t f(t, \bullet)\|_{\infty}^2 dt \right)^{1/2},$$

for which $(\mathcal{E}_0, \mathbf{N})$ is a Banach space. We write \mathcal{E}'_0 for its topological dual and \mathbf{N}' for the dual norm. Note that up to extending the elements of \mathcal{E}'_0 by prescribing that they cancel when evaluated against functions of time only, \mathcal{E}'_0 is a subspace of the set of distributions $\mathcal{D}'((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$.

Working in terms of traffic plans, an easy extension of Theorem 1.5.2 to the case of transport plans gives:

Theorem 6.4.4 (Existence of the pressure fields).

1. Let Γ be bistochastic in average. There exists a unique $p \in \mathcal{E}'_0$ such that, for all solutions \mathbf{P} to $\text{TPIOT}(\Gamma)$ and all traffic plans \mathbf{Q} satisfying (1.32) with $\rho^{\mathbf{Q}} - 1 \in \mathcal{E}_0$, there holds

$$\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{Q}) \geq \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}) + \langle p, \rho^{\mathbf{Q}} - 1 \rangle_{\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0}.$$

The distribution p is called the pressure field associated to $\text{TPIOT}(\Gamma)$.

2. Let Γ be bistochastic in average and satisfy (1.87), and let $\nu > 0$. There exists a unique $p^\nu \in \mathcal{E}'_0$ such that, if \mathbf{P}^ν is the unique solution to $\text{TPBrö}_\nu(\Gamma)$ and \mathbf{Q} is any traffic plan satisfying (1.32) with $\rho^{\mathbf{Q}} - 1 \in \mathcal{E}_0$, then

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{Q}) \geq \overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}^\nu) + \langle p^\nu, \rho^{\mathbf{Q}} - 1 \rangle_{\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0}. \quad (6.37)$$

Moreover, there exists a constant C only depending on d and Γ such that

$$\mathbf{N}'(p^\nu) \leq C(1 + \nu^2). \quad (6.38)$$

The distribution p^ν is called the pressure field associated to $\text{TPBrö}_\nu(\Gamma)$. Estimate (6.38) is a direct consequence of Lemma 5.2.3.

Proof. The proof is exactly the same as the one of Theorem 1.5.2 (it also works in the non-viscous case!), but in terms of traffic plans. Use Theorem 1.1.20 for the link between the two formulations. \square

We are now ready to prove the convergence of the pressures:

Proof of Theorem 6.1.4. Let \mathbf{P}^ν be the unique minimizer for $\text{TPBrö}_\nu(\Gamma)$. First, $\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}^\nu)$ is uniformly bounded as $\nu \rightarrow 0$. Indeed, as for all ν , \mathbf{P}^1 is a competitor for $\text{TPBrö}_\nu(\Gamma)$ we have:

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}^\nu) \leq \overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}^1) = \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}^1) + \nu^2 \overline{\mathcal{F}}(\mathbf{P}^1) \leq C(1 + \nu^2),$$

so that:

$$\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}^\nu) \leq \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}^\nu) + \nu^2 \overline{\mathcal{F}}(\mathbf{P}^\nu) = \overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}^\nu) \leq C(1 + \nu^2) \leq C$$

as $\nu \rightarrow 0$, and we recall that $\overline{\mathcal{A}}$ is proper for the narrow topology. Consequently, the sequence (\mathbf{P}^ν) is tight and has at least one cluster point $\mathbf{P}^\nu \xrightarrow{*} \mathbf{P}$ (up to extraction of a discrete subsequence if needed). By Theorem 6.1.2, and recalling that Γ -convergence implies convergence of minimizers to minimizers, it is clear that any such cluster point \mathbf{P} is a solution to $\text{IOT}(\Gamma)$.

First of all, by Theorem 6.4.4, the pressures $(p^\nu)_{\nu > 0}$ are bounded in \mathcal{E}'_0 uniformly in ν . But, as \mathcal{G} is continuously embedded in \mathcal{E}_0 , (p^ν) is also bounded in \mathcal{G}' . By separability of \mathcal{G} and the Banach-Alaoglu theorem there is $p^* \in \mathcal{G}'$ such that, up to extraction of a further subsequence, $p^\nu \xrightarrow{*} p^*$ for the weak-* topology of \mathcal{G}' . Thus it suffices to show that $p^* = p$, and convergence of the whole sequence towards p will follow by standard arguments. To do so, and by uniqueness in Theorem 6.4.4, it suffices to show that, for all $\varphi \in \mathcal{E}_0$ and all traffic plans \mathbf{Q} satisfying (1.32) as well as $\rho^{\mathbf{Q}} = 1 + \varphi$, there holds

$$\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{Q}) \geq \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}) + \langle p^*, \varphi \rangle_{\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0}. \quad (6.39)$$

To test this inequality, take $\varphi \in \mathcal{E}_0$ and \mathbf{Q} such that $\rho^{\mathbf{Q}} = 1 + \varphi$, and define

$$\mathbf{Q}^\nu := \Phi_{\#}^\nu \mathbf{Q}$$

as in the proof of Theorem 6.1.2. We recall that Φ^ν is defined in (6.35) via (6.24). From the subdifferential characterization (6.37) of p^ν , we have

$$\overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{Q}^\nu) \geq \overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}^\nu) + \langle p^\nu, \rho^{\mathbf{Q}^\nu} - 1 \rangle_{\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0}. \quad (6.40)$$

Repeating the exact same argument from the proof of Theorem 6.1.2 (construction of the recovery sequences), we have moreover

$$\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{Q}) \geq \limsup_{\nu \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{Q}^\nu). \quad (6.41)$$

But by linearity of Φ^ν with $\Phi^\nu(\text{Leb}) = \text{Leb}$ (or, abusing notations, $\Phi^\nu(1) = 1$) it is easy to check that

$$\varphi^\nu := \rho^{\mathcal{Q}^\nu} - 1 = \Phi^\nu(\varphi),$$

which by definition of Φ^ν simply means that $\varphi^\nu(t, \cdot)$ is the solution at time $s = \nu t(1 - t)$ of the heat flow started from $\varphi(t, \cdot)$. Therefore, by standard properties of the heat flow, $\varphi^\nu \rightarrow \varphi$ in any reasonable topology, and in particular strongly in \mathcal{E}_0 . Together with $p^\nu \xrightarrow{*} p$, this allows to take the limit in the product

$$\langle p^\nu, \varphi^\nu \rangle_{\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \langle p^*, \varphi \rangle_{\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0}. \quad (6.42)$$

Moreover, by the Γ – lim inf property in Theorem 6.1.2 with $P^\nu \xrightarrow{*} P$,

$$\liminf_{\nu \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_\nu(P^\nu) \geq \overline{\mathcal{A}}(P). \quad (6.43)$$

We finally retrieve (6.39) by passing to the limit in (6.40) using (6.41), (6.42), and (6.43). \square

6.5 Time convexity of the entropy

Using our regularization lemma 6.3.2, we prove here the time-convexity of the relative entropy $H(\bullet) = H(\bullet | \text{Leb})$ for the interpolations $\text{OT}, \text{Sch}_\alpha$ on the one hand, and for $\text{TPIOT}, \text{TPBrö}_\alpha$ on the other hand. For the one-phase problems $\text{IOT}, \text{Brö}$, the incompressibility constraint $\rho_t = \text{Leb}$ forces the entropy to be constant in time $H(\rho_t) \equiv H(\text{Leb}) = 0$, so nothing interesting can be said there.

We recover along the way some well known results: in Proposition 6.5.1 below, convexity along solutions of the optimal transport problem is nothing but McCann’s celebrated *displacement convexity* [75], and the convexity for the Schrödinger problem can be found in [69]. The convexity for TPIOT in our Proposition 6.5.2 was conjectured by Brenier in [26], and recently proved by Lavenant in [65] for particular solutions only (roughly speaking, solutions with minimal entropy in some integral sense). To the best of our knowledge our proof is new even for the classical OT geodesic problem. We would like to stress that our argument is purely variational and exploits neither prior knowledge on - nor particular structure of - the minimizers. In particular we improve Lavenant’s results [65] by proving that *any* solution of TPIOT has convex entropy.

We begin with the single-phase setting:

Proposition 6.5.1. *Let $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ with finite entropies $H(\rho_0), H(\rho_1) < \infty$, and let ρ be a solution of $\text{OT}(\rho_0, \rho_1)$ or $\text{Sch}_\alpha(\rho_0, \rho_1)$ for fixed diffusivity $\alpha > 0$. Then $t \mapsto H(\rho_t)$ is convex.*

Proof. Let us start with OT . For small $\nu > 0$ consider the curve ρ^ν defined by (6.24). As already discussed the endpoints remain invariant, $\rho_0^\nu = \rho_0, \rho_1^\nu = \rho_1$: the curve ρ^ν is therefore an admissible competitor in the OT problem, and since ρ is a minimizer we have $\mathcal{A}(\rho) \leq \mathcal{A}(\rho^\nu)$. Discarding the term $\frac{\nu^2}{8} \int(\dots) \geq 0$ in (6.25), we have

$$\mathcal{A}(\rho) \leq \mathcal{A}(\rho^\nu) \leq \mathcal{A}(\rho) + \nu \left[\frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \right]$$

hence

$$\int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \leq \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2}$$

for all $\nu > 0$. By standard properties of the heat flow we have moreover $\rho_t^\nu = \tau_{\nu t(1-t)} * \rho_t \xrightarrow{*} \rho_t$ for all $t \in [0, 1]$ as $\nu \rightarrow 0$. Since the entropy is lower semi-continuous with respect to narrow convergence, we get by Fatou's lemma

$$\int_0^1 H(\rho_t) dt \leq \int_0^1 \liminf_{\nu \rightarrow 0} H(\rho_t^\nu) dt \leq \liminf_{\nu \rightarrow 0} \int H(\rho_t^\nu) dt \leq \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2}.$$

In particular $H(\rho_t) < \infty$ for a.e. t , and in fact for all t by narrow continuity of $\rho \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ and lower semi-continuity of H .

This was carried out in times $t \in [0, 1]$, but ρ is of course a minimizer for the optimal transport problem $\text{OT}(\rho_{t_0}, \rho_{t_1})$ for all intermediate times $t_0 \leq t_1$. Since we just proved that $\frac{1}{2}[H(\rho_{t_0}) + H(\rho_{t_1})] < +\infty$, we can repeat the exact same argument to conclude that

$$\int_{t_0}^{t_1} H(\rho_t) dt \leq \frac{H(\rho_{t_0}) + H(\rho_{t_1})}{2}, \quad \forall t_0 \leq t_1.$$

Since ρ is narrowly continuous and H is l.s.c. for the narrow convergence, and because t_0, t_1 can now vary arbitrarily, this implies the desired convexity.

The proof for $\text{Sch}_\alpha(\rho_0, \rho_1)$ is identical, simply using (6.27) instead of (6.25). \square

In the case of traffic plans, we have similarly

Proposition 6.5.2. *Let Γ be bistochastic in average with finite marginal entropy as in (1.87), and let \mathbf{P} be any solution to $\text{TPIOT}(\Gamma)$ or $\text{TPBrö}_\alpha(\Gamma)$ for $\alpha > 0$. Then the average entropy*

$$t \mapsto \int H(\rho_t) d\mathbf{P}(\rho)$$

is convex.

We stress that the result holds for *all* solutions to TPIOT . On the other hand, as already discussed and proved in the Appendix, the solution of TPBrö is unique.

Proof. We consider first the TPIOT problem. As in the proof of Theorem 6.1.2 earlier in section 6.4.1, the argument essentially consists in superposing (*i.e.* integrating with respect to \mathbf{P}) the corresponding statement for a single phase, here Proposition 6.5.1.

More precisely: let \mathbf{P} be a solution to TPIOT , and consider as before the map $\Phi^\nu : \rho \mapsto \rho^\nu$ from $C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ to itself defined by (6.24). We already checked in the proof of Theorem 6.1.2 that the traffic plan

$$\mathbf{P}^\nu := \Phi^\nu \# \mathbf{P}$$

is incompressible and shares its marginals Γ with \mathbf{P} . Since \mathbf{P} is a minimizer in TPIOT there holds

$$\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}) \leq \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}^\nu) = \int \mathcal{A}(\rho) d\mathbf{P}^\nu(\rho) = \int \mathcal{A}(\rho^\nu) d\mathbf{P}(\rho).$$

Discarding $\frac{\nu^2}{8} \int (\dots) \geq 0$ in (6.25) we can estimate as before

$$\mathcal{A}(\rho^\nu) \leq \mathcal{A}(\rho) + \nu \left(\frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \right)$$

for \mathbf{P} -a.e. ρ , and integrating with respect to \mathbf{P} gives

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}) &\leq \int \left\{ \mathcal{A}(\rho) + \nu \left(\frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt \right) \right\} d\mathbf{P}(\rho) \\ &= \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{P}) + \nu \left(\int \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} d\mathbf{P}(\rho) - \int \int_0^1 H(\rho_t^\nu) dt d\mathbf{P}(\rho) \right).\end{aligned}$$

Whence

$$\int_0^1 \int H(\rho_t^\nu) d\mathbf{P}(\rho) dt \leq \int \frac{H(\rho_0) + H(\rho_1)}{2} d\mathbf{P}(\rho)$$

for all $\nu > 0$. The right-hand side is finite since the marginal entropies $\int \{H(\rho_0) + H(\rho_1)\} d\mathbf{P}(\rho) = \int \{H(\rho_0) + H(\rho_1)\} d\Gamma(\rho_0, \rho_1) < +\infty$. Taking first $\nu \rightarrow 0$ and repeating next the argument in arbitrary subintervals $[t_0, t_1] \subset [0, 1]$, the rest of the proof is identical to the previous proof of Proposition 6.5.1 and we omit the details.

For TPBrö $_\alpha$ we simply use (6.27) instead of (6.25) as before, and the proof is complete. \square

Remark 6.5.3. Let us recall that in [65] H. Lavenant proves (a slightly weaker version of) the same convexity by discretizing TPIOT in time, which gives a minimization problem over a large number K of intermediate marginals at times $0 = t_0, \dots, t_K = 1$. Performing an infinitesimal perturbation of the k -th optimal marginal using the heat flow as well as the *flow interchange* technique from [74], one retrieves then some convexity in the discrete time variable k and finally passes to the limit $K \rightarrow \infty$ to conclude. The technical details differ compared to our proof above, but the main idea is somehow similar: the heat flow gives admissible competitors in the variational problem, and tends to simultaneously diminish and convexify the entropy. Hence if the entropy were not convex, one could construct better competitors by running the heat flow for short times while improving convexity. However, our regularization $\rho_t^\nu = \tau_{\nu t(1-t)} * \rho_t$ is more global, roughly speaking because we simultaneously perturb the whole continuum of time-marginals in a unified fashion and thus we avoid any delicate time-discretization procedure. More importantly, our approach has a clear counterpart at the level of the underlying stochastic processes, $\nu t(1-t)$ being of course the intrinsic scale of the Brownian bridges $B^{\nu, x, y}$ involved in section 6.2.

Appendices

6.A Existence and uniqueness for TPBrö

Here we establish

Theorem 6.A.1. *Take Γ bistochastic in average satisfying the entropy condition (1.87), and let $\nu > 0$. Then $\text{TPBrö}_\nu(\Gamma)$ admits a unique solution.*

This is perhaps not completely standard in this form due to our choice of exposition in terms of traffic plans, and we include the details for the sake of completeness.

Proof. For the existence it suffices to show that there exists at least one admissible traffic plan ($\overline{\mathcal{H}}_\nu$ being proper and lower semi-continuous, the direct method in the calculus of variations applies). In order to find such a traffic plan, one can either adapt the proof of [5, Corollary 5.2], or also observe that, given an admissible traffic plan \mathbf{P} for $\text{TPIOT}(\Gamma)$, the traffic plan $\mathbf{P}^\nu = \Phi_{\#}^\nu \mathbf{P}$ constructed in the proof of Theorem 6.1.2 is admissible for $\text{TPBrö}_\nu(\Gamma)$ – in particular (6.36) ensures that $\overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}^\nu) < +\infty$.

For the uniqueness part, we first show that if \mathbf{P} is a solution to $\text{TPBrö}_\nu(\Gamma)$, then the conditional law $\mathbf{P}^{\rho_0, \rho_1} := \mathbf{P}(\bullet | \mathbf{X}_0 = \rho_0, \mathbf{X}_1 = \rho_1)$ is a Dirac mass for Γ -almost all (ρ_0, ρ_1) . In other words, \mathbf{P} is supported on the graph of a measurable map, which to any (ρ_0, ρ_1) associates a unique curve $m = m[\rho_0, \rho_1] \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ joining ρ_0 to ρ_1 . Indeed, let us define the average:

$$m[\rho_0, \rho_1] := \int \rho \, d\mathbf{P}^{\rho_0, \rho_1}(\rho) \in C^0([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)).$$

This curve is well defined for Γ -almost all (ρ_0, ρ_1) , and we claim that $\mathbf{P}^{\rho_0, \rho_1} = \delta_{m[\rho_0, \rho_1]}$ for Γ -almost all (ρ_0, ρ_1) . To check this, let us define

$$\tilde{\mathbf{P}} := \int \delta_{m[\rho_0, \rho_1]} \, d\Gamma(\rho_0, \rho_1).$$

Because $m[\rho_0, \rho_1]$ has endpoints ρ_0, ρ_1 one can check that $\tilde{\mathbf{P}}_{0,1} = \Gamma$, and in the same spirit it is easy to see that $\tilde{\mathbf{P}}$ is incompressible in average (because \mathbf{P} is). By strict convexity of \mathcal{H}_ν and Jensen's inequality, we have for Γ -almost all (ρ_0, ρ_1)

$$\mathcal{H}_\nu(m[\rho_0, \rho_1]) = \mathcal{H}_\nu \left(\int \rho \, d\mathbf{P}^{\rho_0, \rho_1}(\rho) \right) \leq \int \mathcal{H}_\nu(\rho) \, d\mathbf{P}^{\rho_0, \rho_1}(\rho) \quad (6.44)$$

with equality if and only if $\mathbf{P}^{\rho_0, \rho_1}$ is a Dirac mass. To verify that equality holds as desired, let us integrate (6.44) with respect to Γ : by definition of $\tilde{\mathbf{P}}$ on the left-hand side, and using the disintegration formula (6.2) with respect to \mathbf{P} on the right-hand side, we get

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_\nu(\tilde{\mathbf{P}}) &= \int \mathcal{H}_\nu(\rho) \, d\tilde{\mathbf{P}}(\rho) = \iint \mathcal{H}_\nu(\rho) \, d\delta_{m[\rho_0, \rho_1]}(\rho) \, d\Gamma(\rho_0, \rho_1) \\ &= \int \mathcal{H}_\nu(m[\rho_0, \rho_1]) \, d\Gamma(\rho_0, \rho_1) \\ &\leq \iint \mathcal{H}_\nu(\rho) \, d\mathbf{P}^{\rho_0, \rho_1}(\rho) \, d\Gamma(\rho_0, \rho_1) \\ &= \int \mathcal{H}_\nu(\rho) \, d\mathbf{P}(\rho) = \overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}). \end{aligned}$$

Since \mathbf{P} is a minimizer and $\tilde{\mathbf{P}}$ is admissible the reverse inequality $\overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}) \leq \overline{\mathcal{H}}_\nu(\tilde{\mathbf{P}})$ holds as well, thus we must have equality in (6.44) for Γ -a.e. (ρ_0, ρ_1) and therefore $\mathbf{P}^{\rho_0, \rho_1} = \delta_{m[\rho_0, \rho_1]}$ as claimed.

Finally, if \mathbf{P}_1 and \mathbf{P}_2 are two solutions to $\text{TPBrö}(\Gamma)$ then, because $\overline{\mathcal{F}}_\nu$ is affine, $\mathbf{P}_3 := (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)/2$ is a solution as well and must be supported on a graph. But, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ being themselves supported on a graph, $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ can be supported on a graph if and only if \mathbf{P}_1 and \mathbf{P}_2 coincide. Hence, uniqueness is proved. \square

Remark 6.A.2. From this proof it is clear that we established a slightly stronger statement, namely that any minimizer for TPBrö must be supported on a graph $(\rho_0, \rho_1) \mapsto \delta_{m[\rho_0, \rho_1]}$. This shows that the framework of traffic plans is not more general than multiphase flows in the sense of problems MIOT and MBrö of the introduction (Problems 1.1.19 and 1.3.12). Somehow we just proved that one can allow labeling on couples $(\rho_0, \rho_1) \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ instead of $(x, y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$, but no better, as already observed in the introduction.

Remark 6.A.3. In addition to being a sufficient condition as stated above in Theorem 6.A.1, the entropy condition (1.87) is in fact also necessary for $\text{TPBrö}(\Gamma)$ to admit a (unique) solution. Indeed, by the classical Logarithmic Sobolev Inequality, the Fisher Information controls the entropy $H(\rho) \leq C_d F(\rho)$. Since $\overline{\mathcal{F}}(\mathbf{P}) = \int_0^1 \int F(\rho_t) \, d\mathbf{P}(\rho) \, dt < \infty$ there exists at least a time $t_0 \in [0, 1]$ such that the average entropy $\nu^2 \int H(\rho_{t_0}) \, d\mathbf{P}(\rho) \leq C\nu^2 \int F(\rho_{t_0}) \, d\mathbf{P}(\rho) < \infty$. Moreover for an AC^2 curve the time derivative of the entropy can be computed by the chain rule $\frac{d}{dt} H(\rho_t) = \int \nabla \log \rho_t \cdot c_t \, d\rho_t$, where $c_t(x)$ corresponds to the metric speed $\dot{\rho}_t$ in Theorem 1.1.20. By definition of $\overline{\mathcal{H}}_\nu$, any plan with finite entropy $\overline{\mathcal{H}}_\nu(\mathbf{P}) < \infty$ has both its metric speed $\dot{\rho}_t$ and Fisher information $F(\rho_t)$ controlled in the L^2 sense, hence $\frac{d}{dt} H(\rho_t)$ is controlled in L^1 . This L^1 bound on $\frac{d}{dt} H(\rho_t)$ allows to propagate the previous finiteness $\int H(\rho_{t_0}) \, d\mathbf{P}(\rho) < \infty$ to the whole interval $t \in [0, 1]$.

6.B Properties of the Brownian motion on the torus

Here we give detailed proofs of some technical lemmas that we used in Section 6.2 for the Brownian motion and bridges on the torus, mainly Lemma 6.2.3 and Lemma 6.2.5.

Throughout this appendix, barred quantities will live in \mathbb{R}^d , while unbarred quantities will live in the torus. Typically, we shall write $\bar{\omega} \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}^d)$ and $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$.

6.B.1 Brownian bridges on the torus

We need to recall the link between the Brownian bridges in the torus

$$R^{\nu,x,y} := R^\nu(\bullet | X_0 = x, X_1 = y)$$

and the Brownian bridges in the whole space.

For $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$ we denote by $\bar{R}^{\nu,\bar{x},\bar{y}}$ the Brownian bridge of diffusivity ν in \mathbb{R}^d joining \bar{x} to \bar{y} . The following lemma is classical and only expresses the fact that the Brownian motion on the torus is nothing but the projection of the Brownian motion on the whole space.

Lemma 6.B.1. *Take x and y in \mathbb{T}^d , and choose any lifts \bar{x} and \bar{y} in \mathbb{R}^d such that $\pi(\bar{x}) = x$ and $\pi(\bar{y}) = y$. Then*

$$R^{\nu,x,y} = \frac{1}{Z^{\nu,x,y}} \sum_{\bar{l} \in \pi^{-1}(\{0\})} \exp\left(-\frac{|\bar{y} - \bar{x} + \bar{l}|^2}{2\nu}\right) \Pi_{\#} \bar{R}^{\nu,\bar{x},\bar{y}+\bar{l}},$$

where $Z^{\nu,x,y}$ is a normalization constant.

Remark that because of (6.4),

$$Z^{\nu,x,y} = \sqrt{2\pi\nu}^d \tau_\nu(y - x). \quad (6.45)$$

We are now ready for the proof of Lemma 6.2.3.

6.B.2 Proof of Lemma 6.2.3

Choosing arbitrary lifts $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$ of $x, y \in \mathbb{T}^d$, we deduce from Lemma 6.B.1:

$$\begin{aligned} & \int \exp\left(\frac{\alpha}{\nu} A_N(\omega)\right) dR^{\nu,x,y}(\omega) \\ &= \frac{1}{Z^{\nu,x,y}} \sum_{\bar{l} \in \pi^{-1}(\{0\})} \exp\left(-\frac{|\bar{y} - \bar{x} + \bar{l}|^2}{2\nu}\right) \int \exp\left(\frac{\alpha}{\nu} A_N \circ \Pi(\bar{\omega})\right) d\bar{R}^{\nu,\bar{x},\bar{y}+\bar{l}}(\bar{\omega}). \end{aligned} \quad (6.46)$$

For arbitrary points $\bar{p}, \bar{q} \in \mathbb{R}^d$ we first estimate

$$\Lambda(\bar{p}, \bar{q}) := \int \exp\left(\frac{\alpha}{\nu} A_N \circ \Pi(\bar{\omega})\right) d\bar{R}^{\nu,\bar{p},\bar{q}}(\bar{\omega}).$$

First, because $d(\pi(\bar{u}), \pi(\bar{v})) \leq |\bar{v} - \bar{u}|$ for all $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^d$, we have:

$$\Lambda(\bar{p}, \bar{q}) \leq \int \exp\left(\frac{\alpha}{2\nu\tau} \sum_{n=0}^{N-1} |\bar{\omega}_{t_{n+1}} - \bar{\omega}_{t_n}|^2\right) d\bar{R}^{\nu,\bar{p},\bar{q}}(\bar{\omega}) = \mathbb{E}_{\bar{R}^{\nu,\bar{p},\bar{q}}} \left[\exp\left(\frac{\alpha}{2\nu\tau} \sum_{n=0}^{N-1} |\bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n}|^2\right) \right].$$

If \bar{R}^ν is the law of any Brownian motion of diffusivity ν on \mathbb{R}^d , the law of the canonical process \bar{X}_t under the bridge $\bar{R}^{\nu,\bar{p},\bar{q}}$ is the same as the law of $\bar{Y}_t = \bar{X}_t + (1-t)(\bar{p} - \bar{X}_0) + t(\bar{q} - \bar{X}_1)$ under \bar{R}^ν . Hence, we have

$$\begin{aligned} \Lambda(\bar{p}, \bar{q}) &\leq \mathbb{E}_{\bar{R}^\nu} \left[\exp\left(\frac{\alpha}{2\nu\tau} \sum_{n=0}^{N-1} |\bar{Y}_{t_{n+1}} - \bar{Y}_{t_n}|^2\right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\bar{R}^\nu} \left[\exp\left(\frac{\alpha}{2\nu\tau} \sum_{n=0}^{N-1} |\bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n} + \tau\{(\bar{q} - \bar{p}) - (\bar{X}_1 - \bar{X}_0)\}|^2\right) \right]. \end{aligned}$$

Expanding $(a + b - c)^2$ in the sum, it is easy to get (recall that $N\tau = 1$):

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} \left| (\bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n}) + \tau(\bar{q} - \bar{p}) - \tau(\bar{X}_1 - \bar{X}_0) \right|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |\bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n}|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \tau^2 |\bar{q} - \bar{p}|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \tau^2 |\bar{X}_1 - \bar{X}_0|^2 \\
&\quad + 2 \sum_{n=0}^{N-1} (\bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n}) \cdot \tau(\bar{q} - \bar{p}) - 2 \sum_{n=0}^{N-1} \tau(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \tau(\bar{X}_1 - \bar{X}_0) \\
&\quad - 2 \sum_{n=0}^{N-1} (\bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n}) \cdot \tau(\bar{X}_1 - \bar{X}_0) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |\bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n}|^2 + \tau |\bar{q} - \bar{p}|^2 + \tau |\bar{X}_1 - \bar{X}_0|^2 \\
&\quad + 2\tau(\bar{X}_1 - \bar{X}_0)(\bar{q} - \bar{p}) - 2\tau(\bar{q} - \bar{p})(\bar{X}_1 - \bar{X}_0) - 2\tau |\bar{X}_1 - \bar{X}_0|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |\bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n}|^2 + \tau |\bar{q} - \bar{p}|^2 - \tau |\bar{X}_1 - \bar{X}_0|^2.
\end{aligned}$$

As a consequence, and by independence of the Brownian increments,

$$\begin{aligned}
\Lambda(\bar{p}, \bar{q}) &\leq \exp\left(\frac{\alpha}{2\nu} |\bar{q} - \bar{p}|^2\right) \mathbb{E}_{\bar{R}^\nu} \left[\exp\left(\frac{\alpha}{2\nu\tau} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} |\bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n}|^2 - \tau |\bar{X}_1 - \bar{X}_0|^2 \right\}\right) \right] \\
&\leq \exp\left(\frac{\alpha}{2\nu} |\bar{q} - \bar{p}|^2\right) \mathbb{E}_{\bar{R}^\nu} \left[\exp\left(\frac{\alpha}{2\nu\tau} \sum_{n=0}^{N-1} |\bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n}|^2\right) \right] \\
&= \exp\left(\frac{\alpha}{2\nu} |\bar{q} - \bar{p}|^2\right) \left(\mathbb{E}_{\bar{R}^\nu} \left[\exp\left(\frac{\alpha}{2\nu\tau} |\bar{X}_\tau - \bar{X}_0|^2\right) \right] \right)^N \\
&= \exp\left(\frac{\alpha}{2\nu} |\bar{q} - \bar{p}|^2\right) \times \frac{1}{(1 - \alpha)^{Nd/2}},
\end{aligned}$$

where the last equality follows from the same explicit computation as in (6.12).

Finally, exploiting this inequality with $\bar{p} = \bar{x}$ and $\bar{q} = \bar{y} + \bar{l}$ as in (6.46), using formulae (6.4)(6.45) and the dimensional bounds (6.3) on the heat kernel, we get when $\nu \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\int \exp\left(\frac{\alpha}{\nu} A_N(\omega)\right) dR^{\nu,x,y}(\omega) &\leq \frac{1}{(1 - \alpha)^{dN/2}} \times \frac{1}{Z^{\nu,x,y}} \sum_{\bar{l} \in \pi^{-1}(\{0\})} \exp\left(- (1 - \alpha) \frac{|\bar{y} - \bar{x} + \bar{l}|^2}{2\nu}\right) \\
&= \frac{1}{(1 - \alpha)^{dN/2}} \times \frac{\tau_{\frac{\nu}{1-\alpha}}(y - x)}{\tau_\nu(y - x)} \\
&\leq \frac{1}{(1 - \alpha)^{dN/2}} \times \frac{K_d \exp\left(-\frac{(1-\alpha)}{2\nu} d^2(x, y)\right)}{k_d \exp\left(-\frac{1}{2\nu} d^2(x, y)\right)} \\
&\leq \frac{C_d}{(1 - \alpha)^{dN/2}} \exp\left(\frac{\alpha}{2\nu} d^2(x, y)\right)
\end{aligned}$$

and the proof is achieved. \square

6.B.3 Proof of Lemma 6.2.5

To prove Lemma 6.2.5, we need first to prove the corresponding result in the whole space. As in the case of the torus in (6.15), we define the translation operator on the whole space as:

$$\bar{T}_{\bar{\omega}} : \bar{\alpha} \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}^d) \mapsto \bar{\omega} + \bar{\alpha} \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}^d).$$

We recall that $\bar{B}^\nu = \bar{R}^{\nu, 0, 0}$ is the Brownian bridge of diffusivity ν on \mathbb{R}^d joining 0 to 0. We have:

Lemma 6.B.2. *Let $\bar{\omega} \in AC^2([0, 1]; \mathbb{R}^d)$ and $\nu > 0$. Then*

$$\nu H(\bar{T}_{\bar{\omega}\#} \bar{B}^\nu | \bar{R}^{\nu, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1}) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\bar{\omega}}_t|^2 dt - \frac{|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0|^2}{2}.$$

Proof. We will rather establish the following equivalent formula: if $\bar{\alpha} \in AC^2([0, 1]; \mathbb{R}^d)$ satisfies $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_1 = 0$, then for all $\nu > 0$ and $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$,

$$\nu H(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}} | \bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}}) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\bar{\alpha}}_t|^2 dt. \quad (6.47)$$

If $\bar{\xi}_t := (1-t)\bar{\omega}_0 + t\bar{\omega}_1$, it will then suffice to apply this formula with $\bar{\alpha}_t := \bar{\omega}_t - \bar{\xi}_t$ and to use the identities $\bar{T}_{\bar{\omega}} = \bar{T}_{\bar{\alpha}} \circ \bar{T}_{\bar{\xi}}$ and $\bar{T}_{\bar{\xi}\#} \bar{B}^\nu = \bar{R}^{\nu, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1}$.

So let us prove (6.47). We fix $\bar{\alpha} \in AC^2([0, 1]; \mathbb{R}^d)$ with $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_1 = 0$ and $\nu > 0$. First, by the standard Cameron-Martin formula, if \bar{R}^ν is any ν Brownian motion on \mathbb{R}^d then

$$\nu H(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{R}^\nu | \bar{R}^\nu) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\bar{\alpha}}_t|^2 dt.$$

Noticing that the marginals $(\bar{R}^\nu)_{0,1}$ and $(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{R}^\nu)_{0,1}$ coincide (because $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_1 = 0$), we can apply Proposition 6.1.6 in order to condition on the endpoints (X_0, X_1) and get:

$$H(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{R}^\nu | \bar{R}^\nu) = 0 + \int H((\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{R}^\nu)^{\bar{x}, \bar{y}} | \bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}}) d\bar{R}_{0,1}^\nu(\bar{x}, \bar{y}).$$

Gathering these two formulae and observing that $(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{R}^\nu)^{\bar{x}, \bar{y}} = \bar{T}_{\bar{\alpha}\#}(\bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}})$ we get

$$\nu \int H(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}} | \bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}}) d\bar{R}_{0,1}^\nu(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\bar{\alpha}}_t|^2 dt. \quad (6.48)$$

Finally, take \bar{x} and \bar{y} in \mathbb{R}^d and consider the geodesic $\bar{\xi}_t := (1-t)\bar{x} + t\bar{y}$. Then $\bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}} = \bar{T}_{\bar{\xi}\#} \bar{B}^\nu$, $\bar{T}_{\bar{\xi}}$ and $\bar{T}_{\bar{\alpha}}$ commute, and $\bar{T}_{\bar{\xi}}$ is invertible, hence by Proposition 6.1.7,

$$H(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}} | \bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}}) = H(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{T}_{\bar{\xi}\#} \bar{B}^\nu | \bar{T}_{\bar{\xi}\#} \bar{B}^\nu) = H(\bar{T}_{\bar{\xi}\#} \bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{B}^\nu | \bar{T}_{\bar{\xi}\#} \bar{B}^\nu) = H(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{B}^\nu | \bar{B}^\nu).$$

Finally exploiting (6.48), we get for all \bar{x} and \bar{y} in \mathbb{R}^d :

$$\nu H(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}} | \bar{R}^{\nu, \bar{x}, \bar{y}}) = \nu H(\bar{T}_{\bar{\alpha}\#} \bar{B}^\nu | \bar{B}^\nu) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\bar{\alpha}}_t|^2 dt$$

and the proof is complete. \square

To deduce Lemma 6.2.5 from Lemma 6.B.2, we need a canonical construction of a processes on \mathbb{R}^d out of a processes on \mathbb{T}^d . To this end, we choose $i : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ a measurable right inverse of the projection π with bounded image. For $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$, we denote by $I(\omega)$ the unique lift of ω starting from $i(\omega_0)$. Of course, I is a measurable right inverse of Π , and the entropy is invariant under the canonical projection in the following sense

Lemma 6.B.3. *Take \bar{P} a probability measure and \bar{R} a finite Radon measure on $C^0([0, 1]; \mathbb{R}^d)$. Suppose that $\bar{P} \ll \bar{R}$ and that, \bar{R} -almost surely, $X_0 = i(\pi(X_0))$. Then*

$$H(\Pi_{\#}\bar{P} \mid \Pi_{\#}\bar{R}) = H(\bar{P} \mid \bar{R}).$$

Proof. On the set $\{X_0 = i(\pi(X_0))\}$ we have \bar{R} -almost surely $I \circ \Pi = \text{Id}$, and our statement is a direct consequence of Proposition 6.1.7. \square

With the above definition of the lift $I(\omega)$, observe that for all $\omega \in C^0([0, 1]; \mathbb{T}^d)$ the shifted bridge B_{ω}^{ν} from Definition 6.2.4 satisfies:

$$B_{\omega}^{\nu} := T_{\omega\#}\Pi_{\#}\bar{B}^{\nu} = \Pi_{\#}\bar{T}_{I(\omega)\#}\bar{B}^{\nu}.$$

We are finally in position of establishing Lemma 6.2.5.

Proof of Lemma 6.2.5. For notational convenience, we denote the lift of ω by

$$\bar{\omega} := I(\omega) \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}^d).$$

By Lemma 6.B.1, we have

$$\begin{aligned} R^{\nu, \omega_0, \omega_1} &= \frac{1}{Z^{\nu, \omega_0, \omega_1}} \sum_{\bar{l} \in \pi^{-1}(\{0\})} \exp\left(-\frac{|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0 + \bar{l}|^2}{2\nu}\right) \Pi_{\#}\bar{R}^{\nu, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1 + \bar{l}} \\ &= \Pi_{\#} \underbrace{\left(\frac{1}{Z^{\nu, \omega_0, \omega_1}} \sum_{\bar{l} \in \pi^{-1}(\{0\})} \exp\left(-\frac{|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0 + \bar{l}|^2}{2\nu}\right) \bar{R}^{\nu, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1 + \bar{l}} \right)}_{:= \bar{B}^{\nu, \omega_0, \omega_1}} \end{aligned}$$

Observe that

- all the measures involved in the definition of $\bar{B}^{\nu, \omega_0, \omega_1}$ are mutually singular (because $\bar{R}^{\nu, \bar{a}, \bar{b}} \perp \bar{R}^{\nu, \bar{a}, \bar{b}'}$ as soon as $\bar{b} \neq \bar{b}'$),
- $\bar{T}_{\bar{\omega}\#}\bar{B}^{\nu} \ll \bar{R}^{\nu, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1}$ by Lemma 6.B.2,
- $\bar{R}^{\nu, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1} \ll \bar{B}^{\nu, \omega_0, \omega_1}$ (because $\bar{R}^{\nu, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1}$ appears in the sum defining the measure $\bar{B}^{\nu, \omega_0, \omega_1}$ for $\bar{l} = 0$),

As a consequence $\bar{T}_{\bar{\omega}\#}\bar{B}^{\nu} \ll \bar{B}^{\nu, \omega_0, \omega_1}$, and computing the corresponding Radon-Nikodym derivative only involves the $\bar{l} = 0$ contribution in $\bar{B}^{\nu, \omega_0, \omega_1}$. Moreover, since $\bar{R}^{\nu, \omega_0, \omega_1}$ -almost surely $X_0 =$

$i(\pi(X_0))$, we can apply Lemma 6.B.3 to compute

$$\begin{aligned}
H(B_\omega^\nu | R^{\nu, \omega_0, \omega_1}) &= H(\bar{T}_{\bar{\omega}\#} \bar{B}^\nu | \bar{B}^{\nu, \omega_0, \omega_1}) \\
&= H\left(\bar{T}_{\bar{\omega}\#} \bar{B}^\nu \left| \frac{1}{Z^{\nu, \omega_0, \omega_1}} \exp\left(-\frac{|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0|^2}{2\nu}\right) \bar{R}^{\nu, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1}\right.\right) \\
&= H(\bar{T}_{\bar{\omega}\#} \bar{B}^\nu | \bar{R}^{\nu, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1}) + \frac{|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0|^2}{2\nu} + \log Z^{\nu, \omega_0, \omega_1}
\end{aligned}$$

where we used Proposition 6.1.5 in the last equality. We can compute the first entropy term in the right hand side using Lemma 6.B.2 (remark that the action of ω on the torus coincides with that of its lift $\bar{\omega}$ to \mathbb{R}^d) and we can estimate the last term using (6.45)(6.3), which leads to

$$\begin{aligned}
\nu H(B_\omega^\nu | R^{\nu, \omega_0, \omega_1}) &\leq \left(\frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\bar{\omega}}_t|^2 dt - \frac{1}{2} |\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0|^2\right) + \nu \left(\frac{|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0|^2}{2\nu} + \log K_d - \frac{d^2(\omega_0, \omega_1)}{2\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\omega}_t|^2 dt - \frac{d^2(\omega_0, \omega_1)}{2\nu} + \nu \log K_d
\end{aligned}$$

and concludes the proof with $C := \log K_d$. □

Bibliography

- [1] Luigi AMBROSIO et Gianluca CRIPPA : Continuity equations and ODE flows with non-smooth velocity. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 144(6):1191–1244, 2014.
- [2] Luigi AMBROSIO et Alessio FIGALLI : On the regularity of the pressure field of Brenier’s weak solutions to incompressible Euler equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 31(4):497–509, 2008.
- [3] Luigi AMBROSIO et Alessio FIGALLI : Geodesics in the space of measure-preserving maps and plans. *Archive for rational mechanics and analysis*, 194(2):421–462, 2009.
- [4] Luigi AMBROSIO, Nicola GIGLI et Giuseppe SAVARÉ : *Gradient flows: in metric spaces and in the space of probability measures*. Springer, 2006.
- [5] Marc ARNAUDON, Ana Bela CRUZEIRO, Christian LÉONARD et Jean-Claude ZAMBRINI : An entropic interpolation problem for incompressible viscid fluids. *ArXiv:1704.02126*, 2017.
- [6] Vladimir I. ARNOLD : Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l’hydrodynamique des fluides parfaits. *In Annales de l’institut Fourier*, volume 16, pages 319–361. Institut Fourier, 1966.
- [7] Vladimir I. ARNOLD et Boris A. KHESIN : *Topological methods in hydrodynamics*, volume 125. Springer Science & Business Media, 1999.
- [8] Aymeric BARADAT : Nonlinear instability in Vlasov type equations around rough velocity profiles. *ArXiv 1811.01350*, 2018.
- [9] Aymeric BARADAT : On the existence of a scalar pressure field in the Breninger problem. *ArXiv:1803.06299*, 2018.
- [10] Aymeric BARADAT : Continuous dependence of the pressure field with respect to endpoints for ideal incompressible fluids. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 58(1):25, 2019.
- [11] Aymeric BARADAT et Léonard MONSAINGEON : Small noise limit and convexity for generalized incompressible flows, Schrödinger problems, and optimal transport. *ArXiv:1810.12036*, 2018.
- [12] Claude BARDOS et Nicolas BESSE : The Cauchy problem for the Vlasov-Dirac-Benney equation and related issues in fluid mechanics and semi-classical limits. *Kinetic & Related Models*, 6(4), 2013.

- [13] Claude BARDOS et Nicolas BESSE : Hamiltonian structure, fluid representation and stability for the Vlasov–Dirac–Benney equation. *In Hamiltonian Partial Differential Equations and Applications*, pages 1–30. Springer, 2015.
- [14] Claude BARDOS et Anne NOURI : A Vlasov equation with Dirac potential used in fusion plasmas. *Journal of Mathematical Physics*, 53(11):115621, 2012.
- [15] Jean-David BENAMOU et Yann BRENIER : A computational fluid mechanics solution to the Monge–Kantorovich mass transfer problem. *Numerische Mathematik*, 84(3):375–393, 2000.
- [16] Jean-David BENAMOU, Guillaume CARLIER, Marco CUTURI, Luca NENNA et Gabriel PEYRÉ : Iterative Bergman projections for regularized transportation problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(2):A1111–A1138, 2015.
- [17] Jean-David BENAMOU, Guillaume CARLIER et Luca NENNA : Generalized incompressible flows, multi-marginal transport and Sinkhorn algorithm. *Numerische Mathematik*, pages 1–22, 2017.
- [18] Marc BERNOT, Vicent CASELLES et Jean-Michel MOREL : Traffic plans. *Publicacions Matemàtiques*, pages 417–451, 2005.
- [19] Marc BERNOT, Alessio FIGALLI et Filippo SANTAMBROGIO : Generalized solutions for the Euler equations in one and two dimensions. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 91(2):137–155, 2009.
- [20] Yann BRENIER : The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids. *Journal of the American Mathematical Society*, 2(2):225–255, 1989.
- [21] Yann BRENIER : *Une formulation de type Vlassov-Poisson pour les equations d’Euler des fluides parfaits incompressibles*. Rapport de recherches INRIA, 1989.
- [22] Yann BRENIER : The dual least action problem for an ideal, incompressible fluid. *Archive for rational mechanics and analysis*, 122(4):323–351, 1993.
- [23] Yann BRENIER : A homogenized model for vortex sheets. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 138(4):319–353, 1997.
- [24] Yann BRENIER : Minimal geodesics on groups of volume-preserving maps and generalized solutions of the Euler equations. *Communications on pure and applied mathematics*, 52(4):411–452, 1999.
- [25] Yann BRENIER : Convergence of the Vlasov–Poisson system to the incompressible Euler equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(3-4):737–754, 2000.
- [26] Yann BRENIER : Extended Monge–Kantorovich theory. *Lecture notes in mathematics-Springer Verlag*, pages 91–122, 2003.
- [27] Yann BRENIER : Generalized solutions and hydrostatic approximation of the Euler equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(14-17):1982–1988, 2008.

- [28] Yann BRENIER : Remarks on the minimizing geodesic problem in inviscid incompressible fluid mechanics. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 47(1-2):55–64, 2013.
- [29] Yann BRENIER et Emmanuel GRENIER : Limite singulière du système de Vlasov-Poisson dans le régime de quasi neutralité: le cas indépendant du temps. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 318(2):121–124, 1994.
- [30] Russel E CAFLISCH : A simplified version of the abstract Cauchy-Kowalewski theorem with weak singularities. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 23(2):495–500, 1990.
- [31] Guillaume CARLIER, Vincent DUVAL, Gabriel PEYRÉ et Bernhard SCHMITZER : Convergence of entropic schemes for optimal transport and gradient flows. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 49(2):1385–1418, 2017.
- [32] Yongxin CHEN, Tryphon T GEORGIU et Michele PAVON : On the relation between optimal transport and Schrödinger bridges: A stochastic control viewpoint. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 169(2):671–691, 2016.
- [33] AB CRUZEIRO, Liming WU et JC ZAMBRINI : Bernstein processes associated with a Markov process. In *Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, pages 41–72. Springer, 2000.
- [34] Marco CUTURI : Sinkhorn distances: Lightspeed computation of optimal transport. In *Advances in neural information processing systems*, pages 2292–2300, 2013.
- [35] Bernard DACOROGNA : *Direct methods in the calculus of variations*, volume 78. Springer Science & Business Media, 2007.
- [36] Bernard DACOROGNA et Jürgen MOSER : On a partial differential equation involving the Jacobian determinant. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse non linéaire*, volume 7, pages 1–26. Elsevier, 1990.
- [37] Amir DEMBO et Ofer ZEITOUNI : *Large deviations techniques and applications*, volume 38. Springer Science & Business Media, 2009.
- [38] Ronald J DIPERNA et Pierre-Louis LIONS : Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Inventiones Mathematicae*, 98(3):511–547, 1989.
- [39] Arjen DOELMAN et Edriss S TITI : Exponential convergence of the Galerkin approximation for the Ginzburg-Landau equation. In *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*, pages 241–252. Springer, 1993.
- [40] David G EBIN et Jerrold MARSDEN : Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. *Annals of Mathematics*, pages 102–163, 1970.
- [41] Ivar EKELAND et Roger TEMAM : *Convex analysis and variational problems*. SIAM, 1999.
- [42] Leonhard EULER : Principes généraux du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, (11):274–315, 1757.
- [43] Andrew B FERRARI et Edriss S TITI : Gevrey regularity for nonlinear analytic parabolic equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 23(1-2):424–448, 1998.

- [44] Ciprian FOIAS et Roger TEMAM : Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations. *Journal of Functional Analysis*, 87(2):359–369, 1989.
- [45] Hans FÖLLMER : Time reversal on Wiener space. *Stochastic processes, mathematics and physics (Bielefeld, 1984). Lecture Notes in Mathematics*, 1158:119–129, 1986.
- [46] Hans FÖLLMER : Random fields and diffusion processes. *In École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XV–XVII, 1985–87*, pages 101–203. Springer, 1988.
- [47] Ivan GENTIL, Christian LÉONARD et Luigia RIPANI : About the analogy between optimal transport and minimal entropy. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques. Série 6*, 3:569–600, 2017.
- [48] Nicola GIGLI et Luca TAMANINI : Benamou-Brenier and duality formulas for the entropic cost on $\text{RCD}^*(K, N)$ spaces. *ArXiv:1805.06325*, 2018.
- [49] David GILBARG et Neil S. TRUDINGER : *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 2015.
- [50] Enrico GIUSTI : *Direct methods in the calculus of variations*. World Scientific, 2003.
- [51] Robert T GLASSEY : *The Cauchy problem in kinetic theory*, volume 52. SIAM, 1996.
- [52] Emmanuel GRENIER : Defect measures of the Vlasov-Poisson system in the quasineutral regime. *Communications in Partial Differential Equations*, 20(7-8):1189–1215, 1995.
- [53] Emmanuel GRENIER : Oscillations in quasineutral plasmas. *Communications in Partial Differential Equations*, 21(3-4):363–394, 1996.
- [54] Alexander GRIGOR'YAN : Estimates of heat kernels on Riemannian manifolds. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 273:140–225, 1999.
- [55] Yan GUO et Walter A. STRAUSS : Nonlinear instability of double-humped equilibria. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 12(3):339–352, 1995.
- [56] Daniel HAN-KWAN : Quasineutral limit of the Vlasov-Poisson system with massless electrons. *Communications in Partial Differential Equations*, 36(8):1385–1425, 2011.
- [57] Daniel HAN-KWAN : *Stabilité, limites singulières et conditions de contrôle géométrique en théorie cinétique*. Habilitation à diriger des recherches (HDR), École Polytechnique, 2017.
- [58] Daniel HAN-KWAN et Maxime HAURAY : Stability issues in the quasineutral limit of the one-dimensional Vlasov–Poisson equation. *Communications in Mathematical Physics*, 334(2):1101–1152, 2015.
- [59] Daniel HAN-KWAN et Mikaela IACOBELLI : Quasineutral limit for Vlasov–Poisson via Wasserstein stability estimates in higher dimension. *Journal of Differential Equations*, 263(1):1–25, 2017.
- [60] Daniel HAN-KWAN et Mikaela IACOBELLI : The quasineutral limit of the Vlasov–Poisson equation in Wasserstein metric. *Communications in Mathematical Sciences*, 15(2):481–509, 2017.

- [61] Daniel HAN-KWAN et Toan T NGUYEN : Ill-posedness of the hydrostatic Euler and singular Vlasov equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 221(3):1317–1344, 2016.
- [62] Daniel HAN-KWAN et Toan T NGUYEN : Nonlinear Instability of Vlasov–Maxwell Systems in the Classical and Quasineutral Limits. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48(5):3444–3466, 2016.
- [63] Daniel HAN-KWAN et Frédéric ROUSSET : Quasineutral limit for Vlasov–Poisson with Penrose stable data. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure(4)*, 49(6):1445–1495, 2016.
- [64] Thomas HOLDING et Evelyne MIOT : Uniqueness and stability for the Vlasov–Poisson system with spatial density in Orlicz spaces. *Mathematical analysis in fluid mechanics—selected recent results*, 710:145–162, 2017.
- [65] Hugo LAVENANT : Time-convexity of the entropy in the multiphasic formulation of the incompressible Euler equation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 56(6):170, 2017.
- [66] Christian LÉONARD : From the Schrödinger problem to the Monge–Kantorovich problem. *Journal of Functional Analysis*, 262(4):1879–1920, 2012.
- [67] Christian LÉONARD : Girsanov theory under a finite entropy condition. *In Séminaire de Probabilités XLIV*, pages 429–465. Springer, 2012.
- [68] Christian LÉONARD : A survey of the Schrödinger problem and some of its connections with optimal transport. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 34(4):1533–1574, 2014.
- [69] Christian LÉONARD : On the convexity of the entropy along entropic interpolations. *In Measure Theory in Non-Smooth Spaces*, pages 194–242. Sciendo Migration, 2017.
- [70] Peter LI et Shing Tung YAU : On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Mathematica*, 156(1):153–201, 1986.
- [71] Leon LICHTENSTEIN : Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze. *Mathematische Zeitschrift*, 23(1):89–154, 1925.
- [72] Pierre-Louis LIONS et Benoît PERTHAME : Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov–Poisson system. *Inventiones Mathematicae*, 105(1):415–430, 1991.
- [73] Grégoire LOEPER : Uniqueness of the solution to the Vlasov–Poisson system with bounded density. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 86(1):68–79, 2006.
- [74] Daniel MATTHES, Robert J MCCANN et Giuseppe SAVARÉ : A family of nonlinear fourth order equations of gradient flow type. *Communications in Partial Differential Equations*, 34(11):1352–1397, 2009.
- [75] Robert J MCCANN : A convexity principle for interacting gases. *Advances in mathematics*, 128(1):153–179, 1997.

- [76] Guy MÉTIVIER : Remarks on the Well-Posedness of the Nonlinear Cauchy Problem. *Geometric Analysis of PDE and Several Complex Variables: Dedicated to François Trèves*, 368(337), 2005.
- [77] Toshio MIKAMI : Monge’s problem with a quadratic cost by the zero-noise limit of h-path processes. *Probability theory and related fields*, 129(2):245–260, 2004.
- [78] Evelyne MIOT : A uniqueness criterion for unbounded solutions to the Vlasov–Poisson system. *Communications in Mathematical Physics*, 346(2):469–482, 2016.
- [79] Edward NELSON : *Dynamical theories of Brownian motion*, volume 2. Princeton university press Princeton, 1967.
- [80] Amnon PAZY : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [81] Oliver PENROSE : Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma. *The Physics of Fluids*, 3(2):258–265, 1960.
- [82] Klaus PFAFFELMOSE : Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data. *Journal of Differential Equations*, 95(2):281–303, 1992.
- [83] Filippo SANTAMBROGIO : Optimal transport for applied mathematicians. *Birkhäuser, NY*, 2015.
- [84] Filippo SANTAMBROGIO : Regularity via duality in calculus of variations and degenerate elliptic PDEs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 457(2):1649–1674, 2018.
- [85] Erwin SCHRÖDINGER : *Über die Umkehrung der naturgesetze*. Verlag Akademie der wissenschaften in kommission bei Walter de Gruyter u. Company, 1931.
- [86] Erwin SCHRÖDINGER : Sur la théorie relativiste de l’électron et l’interprétation de la mécanique quantique. *In Annales de l’institut Henri Poincaré*, volume 2, pages 269–310, 1932.
- [87] Alexander I. SHNIRELMAN : On the geometry of the group of diffeomorphisms and the dynamics of an ideal incompressible fluid. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 56(1):79, 1987.
- [88] Alexander I. SHNIRELMAN : Attainable diffeomorphisms. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 3(3):279–294, 1993.
- [89] Alexander I. SHNIRELMAN : Generalized fluid flows, their approximation and applications. *Geometric And Functional Analysis*, 4(5):586–620, 1994.
- [90] Richard SINKHORN : A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices. *The annals of mathematical statistics*, 35(2):876–879, 1964.
- [91] Richard SINKHORN : Diagonal equivalence to matrices with prescribed row and column sums. *The American Mathematical Monthly*, 74(4):402–405, 1967.
- [92] Seiji UKAI et Takayoshi OKABE : On classical solutions in the large in time of two-dimensional Vlasov’s equation. *Osaka Journal of Mathematics*, 15(2):245–261, 1978.

- [93] Srinivasa RS VARADHAN : Diffusion processes in a small time interval. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 20(4):659–685, 1967.
- [94] Cédric VILLANI : *Topics in optimal transportation*. Numéro 58. American Mathematical Society, 2003.
- [95] Jean-Claude ZAMBRINI : Variational processes and stochastic versions of mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 27(9):2307–2330, 1986.

Titre : Transport optimal incompressible : dépendance aux données et régularisation entropique

Mots Clefs : Transport optimal ; hydrodynamique ; équations cinétiques ; régularisation entropique.

Résumé : Cette thèse porte sur le problème de transport optimal incompressible (IOT) introduit par Brenier [20] et visant à décrire l'évolution d'un fluide incompressible et non-visqueux de façon lagrangienne, c'est à dire en fixant l'état initial et l'état final de ce fluide, et en minimisant une fonctionnelle d'action sur un ensemble de dynamiques admissibles.

Dans une première partie, on étudie la dépendance du problème IOT par rapport aux données. Plus précisément, on analyse la dépendance du champ de pression (le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité) par rapport à la mesure γ prescrivant l'état initial et l'état final du fluide. On montre que la pression dépend continûment de γ (Chapitre 2), mais pas de façon lisse (Chapitre 4). Ce dernier résultat est lié au caractère mal-posé de l'équation d'Euler cinétique, une équation d'évolution étudiée au Chapitre 3 s'interprétant comme l'équation d'optimalité du problème IOT.

Dans une seconde partie, on s'intéresse à la régularisation entropique du problème IOT, introduit dans [5] sous le nom de problème de Brödinger (Brö). On prouve au Chapitre 5 l'existence d'un champ de pression dans le problème régularisé. On montre ensuite au Chapitre 6, issu d'une collaboration avec L. Monsaingeon [11], que lorsque le paramètre de régularisation tend vers zéro, le problème Brö Γ -converge vers IOT, avec convergence des champs de pression.

Title : Incompressible optimal transport: dependence to the data and entropic regularization

Keys words : Optimal transport; hydrodynamics; kinetic equations; entropic regularization.

Abstract : This thesis focuses on Incompressible Optimal Transport (IOT), a minimization problem introduced by Brenier in [20], aiming at describing the evolution of an incompressible and inviscid fluid in a Lagrangian way, *i.e.* by prescribing the state of the fluid at the initial and final times and by minimizing some action functional among the set of admissible dynamics.

In a first part, we study the dependence of IOT with respect to the data. More precisely, we analyse the dependence of the pressure field, the Lagrange multiplier corresponding to the incompressibility constraint, with respect to the measure γ determining the state of the fluid at the initial and final times. We show that this dependence is continuous (Chapter 2), but not smooth (Chapter 4). This last statement is linked to an ill-posedness result proved in Chapter 3 for the so-called kinetic Euler equation, a kinetic PDE interpreted as the optimality equation of IOT.

In a second part, we are interested in the entropic regularization of IOT: the so-called Brödinger problem (Brö), introduced in [5]. We prove in Chapter 5 the existence of a pressure field, and we prove in Chapter 6 (taken from a joint work with L. Monsaingeon [11]) that when the diffusivity coefficient tends to zero, the problem Brö Γ -converges towards IOT, and with convergence of the pressure fields.

