



HAL
open science

Endommagement discret et continu : application aux matériaux quasi-fragiles

Benjamin Hérissou

► **To cite this version:**

Benjamin Hérissou. Endommagement discret et continu : application aux matériaux quasi-fragiles. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Bretagne Sud, 2018. Français. NNT : 2018LORIS483 . tel-02273159

HAL Id: tel-02273159

<https://theses.hal.science/tel-02273159>

Submitted on 28 Aug 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE / UNIVERSITE DE BRETAGNE-SUD

sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE BRETAGNE-SUD

Mention : Sciences pour l'Ingénieur

Ecole doctorale: SPI

Présentée par

Benjamin Hérisson

Préparée à l'unité mixte de recherche Dupuy de Lôme IRDL
FRE CNRS (3744)

Etablissement de rattachement : **UNIVERSITE BRETAGNE SUD**

Endommagement discret et continu : application aux matériaux quasi-fragiles

Thèse soutenue le 08/02/2018

devant le jury composé de :

Mme Delphine Brancherie

Maître de conférences HDR, Université de Technologie de Compiègne /
Rapporteur

M. Alain Sellier

Professeur des universités, Toulouse III Paul Sabatier / Rapporteur

M. Djimédo Kondo

Professeur des universités, Université Pierre et Marie Curie / Examineur

M. Panagiotis Kotronis

Professeur des universités, Ecole centrale de Nantes / Examineur

M. Gilles Pijaudier-Cabot

Professeur des universités, Université de Pau et des pays de l'Adour /
Examineur

M. Noël Challamel

Professeur des universités, Université Bretagne Sud / Directeur de thèse

M. Vincent Picandet

Maître de conférences HDR, Université Bretagne Sud / Co-directeur de thèse

M. Arnaud Perrot

Maître de conférences HDR, Université Bretagne Sud / Co-directeur de thèse

Résumé

Dans cette thèse, des considérations fondamentales de modélisation des phénomènes de rupture sont abordées pour des systèmes discrets endommageables. Le but est d'établir, en commençant par des problèmes structuraux simples, un pont entre la Mécanique de l'Endommagement Discret (MED) et celle de la Mécanique de l'Endommagement Continu (MEC) non local. Il est actuellement admis que la MEC doit être considérée dans un cadre non local afin d'obtenir des résultats cohérents, notamment lors de la modélisation numérique de phénomènes de radoucissement basés sur des lois d'endommagement. Nous appuyons cette non-localité sur l'échelle de la microstructure du matériau. A l'aide d'une procédure de continualisation et l'utilisation de l'approximant de Padé, nous avons pu obtenir l'expression analytique de l'approximation continue non-locale offrant une représentation très fidèle du comportement du problème discret dans tout le processus d'endommagement. Nous étudions les systèmes de la chaîne axiale discrète en traction, de la poutre console discrète en flexion ainsi que de la membrane microstructurée sous pression uniforme. Le système discret est tout d'abord résolu puis les équations discrètes sont continualisées pour obtenir un modèle non local continu. Pour chacun de ces problèmes une attention toute particulière est portée aux conditions aux limites du problème continualisé, dont l'importance est illustrée tout au long de ce manuscrit.

Mots-clés : Matériaux microstructurés ; Milieu continu endommageable ; Système discret ; Effet d'échelle ; Localisation.

Summary

In this thesis, some fundamental considerations of the modeling of failure are addressed for discrete damage systems. The goal is to establish, starting with simple structural problems, a bridge between the Discrete Damage Mechanics (DDM) and that of the non-local Continuum Damage Mechanics (CDM). It is currently accepted that DDM systems must be considered in a non-local framework to obtain consistent results, especially during numerical modeling of softening phenomena based on damage laws. We support this non-locality on the scale of the microstructure of the material. Using a continualisation procedure and with the use of the Padé approximant, we were able to obtain the analytic expression of the non-local continuous approximation offering an accurate simulation of the discrete problem for the whole damage process. We study the systems of the discrete axial chain under traction, the discrete bending beam and the microstructured membrane under uniform pressure. The discrete system is first solved, then the discrete equations are continualised to obtain a non-local continuum model. For each of these problems, careful attention is paid to the boundary conditions of the continual problem, the importance of which is illustrated throughout this manuscript.

Key words: discrete problem; Continuum Damage Mechanics; scale effect; microstructured material; localization.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs pour m'avoir offert l'opportunité de réaliser cette thèse et de m'avoir encadré pendant ces trois années. Noël Challamel, mon directeur, toujours prêt à partager sa grande culture de la mécanique en restant toujours humble et ouvert d'esprit, ainsi que mes co-directeurs, Vincent Picandet et Arnaud Perrot, pour leur soutien et leurs nombreux conseils sur les outils informatiques utilisés tout au long de la thèse. J'avais le privilège de connaître cette équipe depuis ma formation de 3^{ème} année de licence et je suis heureux d'avoir pu faire la transition d'élève à collaborateur de recherche.

Je souhaiterais adresser mes remerciements à tous les membres du jury pour avoir accepté ce rôle : Djimédo Kondo, Panagiotis Kotronis, Gilles Pijaudier-Cabot et particulièrement aux rapporteurs : Delphine Brancherie et Alain Sellier qui ont accepté cette responsabilité chronophage. Je remercie aussi Phillippe Pilvin pour avoir participé à mes comités de suivi de thèse.

J'adresse un grand merci à ma famille qui savait depuis longtemps et bien avant moi que je deviendrais chercheur, merci d'avoir encouragé ma curiosité et de m'avoir permis d'aller aussi loin. Je remercie Marine, pour toutes ces années à m'accompagner, et son soutien particulièrement important pour moi dans ces derniers mois de rédaction difficile. A toute la famille Trépos pour un amour partagé des énigmes et pour m'avoir approvisionné en carburant de recherche toute ces années.

Je souhaite beaucoup de réussite à Alice et Sovannara dans la suite de leurs projets, leur gentillesse a eu raison de ma timidité dès mon arrivée au laboratoire. Je remercie Florian pour ces discussions passionnées, son humour et sa mauvaise foi qui n'a d'égale que son refus du prescriptivisme linguistique. Je salue Théo et Florent, que j'ai malheureusement quitté trop tôt en occupant mon poste d'ATER, leur bonne humeur et leur esprit est un vrai plaisir au quotidien. Je tiens aussi à remercier Séverine pour sa gentillesse et son aide pendant mes premiers cours où je n'étais pas très à l'aise.

Table des matières

Table des matières	2
Table des notations	4
Introduction	5
1 Contexte et bibliographie.....	8
1.1 Etude des réseaux discrets élastiques	8
1.2 Mécanique de l'endommagement	12
1.3 Mécanique non locale.....	13
1.4 Méthode de continualisation	15
2 Chaîne axiale microstructurée	19
2.1 Introduction	19
2.2 Comportement statique de la chaîne élastique non-linéaire FPU	20
2.2.1 Solutions exactes en statique du modèle lattice FPU	24
2.2.2 Comportement élastique linéaire – cas $\alpha = 0$	25
2.2.3 Comportement avec chargement limite pour $\alpha < 0$	29
2.2.4 Comportement monotone $\alpha > 0$	31
2.2.5 Continualisation du modèle FPU discret – Série de Taylor	34
2.2.6 Continualisation du modèle FPU discret – approximant de Padé.	40
2.3 Chaîne élasto-endommageable.....	47
2.3.1 Système d'endommagement discret.....	47
2.3.2 Approche de continualisation	60
2.3.3 Approche énergétique du problème endommageable	66
2.4 Conclusion.....	69
3 Chaîne microstructurée en flexion	71

Table des matières

3.1	Introduction	71
3.2	Comportement en flexion du modèle MED	71
3.3	MEC– Modèle non local continualisé.....	82
3.3.1	Procédure de continuatisation.....	82
3.3.2	Résolution du problème de flexion de MEC non locale.....	84
3.3.3	Discussion sur les conditions aux limites du modèle MEC non local.....	86
3.4	Comportement du modèle MED sous chargement distribué	96
3.5	Conclusions	100
4	Membrane élastique microstructurée	102
4.1	Introduction	102
4.2	Comportement statique de la membrane discrète	103
4.3	Résolution matricielle de la membrane discrète	108
4.4	Comportement statique de la membrane continue non locale.....	109
4.4.1	Modèle de la membrane continualisée non locale.....	110
4.4.2	Modèle de la membrane non locale de type Eringen.....	113
4.5	Comportement dynamique de la membrane discrète	118
4.6	Comportement dynamique de la membrane continue non locale	120
4.6.1	Membrane continualisée non locale	120
4.7	Comportement en haute fréquence.....	126
4.8	Analyse d’onde dispersive	128
4.9	Conclusions	129
	Synthèse et ouvertures	131
	Références	134

Table des notations

a	Longueur d'un élément discret
A	Section d'un élément
α	Paramètre d'écroutissage
β	Coefficient de chargement adimensionnel
C	Raideur angulaire
D	Variable d'endommagement
δ	Déplacement normalisé
E	Module d'Young
ε	Déformation
i, j	Numérotation des nœuds
κ	Courbure
L	Longueur du système
l_0	Longueur de chaîne endommagée
l_c	Longueur caractéristique
M	Moment fléchissant
m, p	Coefficients des séries de Fourier
N	Effort normal
n	Nombre d'éléments du système
p	Nombre d'éléments endommagés
P	Charge ponctuel
q	Charge linéique
θ	Rotation
r, s	Numéro de fréquences propres
u	Déplacement d'un nœud
w	Flèche, déplacement hors plan d'un nœud
W	Energie du système
ζ_H	Fonction Hurwitz Zeta
\hat{X}	Variable délocalisée
X^*	Variable adimensionnelle
X_y	Variable associée à la limite élastique

Introduction

Le projet de cette thèse est né de mon stage de Master 2 Recherche réalisé au LIMatB (Laboratoire d'Ingénierie des Matériaux de Bretagne), aujourd'hui devenu IRDL (Institut de Recherche Dupuy de Lôme), pendant lequel j'ai pu participer à différents travaux de recherche. Noël Challamel m'a proposé un premier travail sur la continualisation d'une chaîne axiale discrète pour découvrir le processus de recherche dans un domaine que je connaissais à peine, et qui s'est révélé plus riche que je n'aurais pu l'imaginer à l'époque.

Cette thèse n'était pas qu'un projet de recherche pour moi. L'enseignement m'a toujours attiré et cela fait longtemps que je suis passionné par les travaux de vulgarisations scientifiques. Dans ma jeunesse, c'était un moyen pour moi d'apprendre des choses sur des sujets multiples sans avoir de formation universitaire sur ces sujets. Le fond m'intéressait et m'intéresse toujours mais ce n'est que plus tard que j'ai commencé à analyser la forme. Comment vulgariser sans sacrifier l'exactitude de l'explication ou la richesse d'un phénomène ? À quel public s'adresse ma communication ? L'analogie que j'utilise pour illustrer un phénomène ne risque-t-elle pas d'induire en erreur si on l'extrapole au-delà de l'exemple ? Des problématiques proches de celles de l'enseignement en général. L'opportunité de donner des cours durant cette thèse, en projet « découverte de la recherche » la 1^{ère} et 2^{ème} année, en formule 2 pour la 2^{ème} et 3^{ème} année et enfin en tant qu'ATER depuis septembre 2017, m'a permis de mettre à l'épreuve l'idée que je me faisais de l'enseignement et de la vulgarisation. Sans compter l'entraînement apporté par 3 années passées à chercher une réponse claire à la question « De quoi parle ta thèse ? ».

Dans cette thèse, des considérations fondamentales de modélisation des phénomènes de rupture sont abordées à partir d'un système endommageable unidimensionnel. Le but est d'établir, en commençant par un problème structural uniaxial assez élémentaire, un pont entre la Mécanique de l'Endommagement Discret (MED) et celle de la Mécanique de l'Endommagement Continu (MEC) non local. Il est actuellement admis que la MEC doit être considérée dans un cadre non local afin d'obtenir des résultats cohérents, notamment lors de la modélisation numérique de phénomènes de radoucissement basés sur des lois d'endommagement. Pijaudier-Cabot et Bažant (Pijaudier-Cabot and Bažant 1987) ont les premiers développé un modèle non local intégral phénoménologique qui a prouvé son efficacité pour prédire les phénomènes de microfissurations et leurs effets à l'échelle de la structure. Cependant, depuis 3 décennies maintenant, l'origine exacte de la non-localité est

débatue. Il manque encore une justification théorique à la source de la non-localité pour ces modèles macroscopiques non-locaux continus d'endommagement avec des arguments de micromécanique (abordé dans (Bažant 1987) ou (Bažant 1994)).

Le contexte scientifique de ce sujet sera développé plus en profondeur dans le premier chapitre. Ce domaine de recherche est très vaste et ce projet de thèse n'a pas pour ambition de réaliser une description exhaustive de tous les travaux concernant ce sujet. Nous tâcherons donc de faire preuve de concision et de nous concentrer sur les résultats les plus pertinents vis-à-vis de notre sujet d'étude.

Le deuxième chapitre commencera par l'étude du système FPU (Fermi Pasta Ulam) qui consiste en un modèle discret axial non-linéaire élastique. En fonction des paramètres choisis, ce modèle peut décrire un comportement présentant une forme de radoucissement, ce qui nécessite la prise en compte de la non localité du modèle, tout en s'affranchissant des considérations de continuité d'interface élastique/endommagement d'une chaîne axiale endommageable. Avec certains paramètres, le comportement de la chaîne est de type hyperélastique monotone, comportement qui concerne plutôt des matériaux organiques. Même si ce n'est pas l'objet principal de cette thèse, il convient d'être ouvert à tous les débouchés éventuels des travaux entrepris. Nous étudierons tout d'abord le modèle discret, et une fois résolu, nous déterminerons les continus équivalents en introduisant des longueurs caractéristiques. Il s'agira ensuite d'appliquer cette même méthodologie au problème axial endommageable, plus complexe. Les termes « écrouissage » et « radoucissement » seront utilisés tous au long de ce manuscrit pour désigner la phase d'endommagement, respectivement, précédant et suivant la charge limite du système (pic de charge), sans toutefois avoir de signification sur la dureté du matériau considéré.

Le modèle en flexion avec interaction discrète non-locale sous différents chargements fera l'objet du troisième chapitre, je tâcherai de profiter des résultats déjà obtenus sur le sujet par des travaux précédents de notre équipe (Challamel et al. 2015e) sur ce modèle en flexion.

Enfin, dans le chapitre quatre, nous réaliserons une étude d'une membrane microstructurée élastique comme dernière étape de ce manuscrit, en étudiant la continualisation de son comportement mécanique en chargement statique et dynamique. Une membrane similaire dans un milieu infini a déjà fait l'objet de travaux, entre autre, par Rosenau (Rosenau 1987) et sera le point de départ de notre étude.

1 Contexte et bibliographie

1.1 Etude des réseaux discrets élastiques

Dans les années 1950, l'étude des oscillations dans les réseaux non linéaires a commencé avec l'expérience numérique de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) (Fermi et al. 1955). Fermi et al. ont accidentellement trouvé que la présence d'un terme non-linéaire quadratique, cubique ou même linéaire par parties dans la force de rappel d'un réseau axial avec l'interaction du plus proche voisin peut être responsable du phénomène dit d'échange de mode de vibrations. Cet échange s'accompagne d'un phénomène de récurrence, à savoir la possibilité pour le système de revenir à son état initial après une période de récurrence. Les résultats inattendus de leur travail ont conduit au développement de la théorie du soliton par Kruskal et Zabusky (Kruskal and Zabusky 1964) dans les années 1960 (voir aussi (Maugin 1999, 2011)). Il existe très peu de solutions analytiques pour les problèmes de réseaux dynamiques non linéaires ; une exception peut être mentionnée pour un réseau avec interaction exponentielle également appelée réseau de Toda (Toda 1975). Récemment, (Kovacic and Zukovic 2018) ont obtenu une solution exacte en dynamique pour la chaîne avec interaction cubique pure. À ce jour, à notre connaissance, les solutions analytiques pour la dynamique ou la statique du réseau FPU avec des non-linéarités polynomiales (autres que cubiques) ne sont toujours pas disponibles dans la littérature. La non-linéarité de type quadratique dans la force de rappel du réseau est associée à une énergie interne de type cubique, par intégration. Fermi et al. (Fermi et al. 1955) ont initialement considéré une énergie interne convexe associée à un terme cubique supplémentaire positif dans l'énergie discrète du système de réseau non linéaire. En fait, l'énergie de type convexe et non convexe peut être obtenue à partir de l'équation d'énergie postulée par Fermi et al (Fermi et al. 1955). Le choix d'une énergie non convexe peut aussi se justifier physiquement, comme en témoigne la loi à potentiel de Lennard-Jones par exemple (Lennard-Jones 1931).

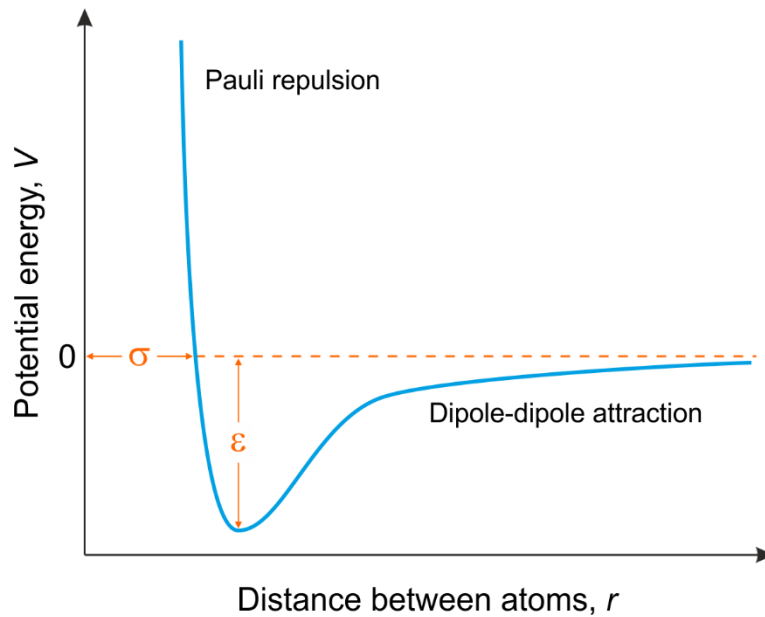


Figure 1-1 loi potentielle de Lennard-Jones issu de « Chemistry Dictionary & Glossary »

Dans le potentiel de Lennard-Jones, la contribution de la force répulsive entre les atomes (répulsion de Pauli) est combinée à une force d'attraction à longue portée (force de van der Waals) responsable de la perte de convexité. Par conséquent, nous tacherons d'envisager les deux cas (énergie convexe et non convexe), tout du moins dans la première partie (réseau élastique non-linéaires), avec différentes applications physiques et techniques. Une solution analytique du comportement statique du réseau FPU n'a pas encore été construite mais il convient de mentionner le papier de Gazis et Wallis (Gazis and Wallis 1965) qui ont analysé analytiquement le comportement statique d'un réseau linéaire avec une interaction polynomiale non linéaire concentrée au bord. La première étape de nos travaux n'est certes pas liée au comportement des matériaux quasi-fragiles mais les modèles à chaîne non linéaire peuvent concerner de nombreuses applications d'ingénierie. Par exemple, un système élastique non linéaire discret peut décrire la tension des filaments de biopolymère avec des propriétés d'allongement non linéaires équivalentes pour chaque segment. La réponse effort-déformation non linéaire a été obtenue à partir d'une modélisation en chaîne de type filiforme par Marko et Siggia (Marko and Siggia 1995), Vanderzande (Vanderzande 1998), Bouchiat et al (Bouchiat et al. 1999), Winkler (Winkler 2003), Purohit et al (Purohit et al. 2008), Su et Purohit (Su and Purohit 2011) et Holzapfel et Ogden (Holzapfel and Ogden 2013). La plupart des approches considèrent un filament élastique connecté avec un couplage de flexion et d'étirement. Récemment, par exemple,

Su et Purohit (Su and Purohit 2011) ont étudié l'effet de la charge répartie sur le comportement élastique des filaments sous fluctuations thermiques.

Le comportement d'une barre élastique non linéaire sous contrainte homogène, dont le matériau constitutif a une propriété énergétique convexe ou non convexe, a été étudié par Ericksen (Ericksen 1975). Ce dernier a relié la stabilité de l'état de contrainte uniforme de ce problème à la loi d'élasticité contrainte-déformation strictement monotone, qui peut être exprimée en termes de convexité de l'énergie de déformation associée. Ericksen (Ericksen 1975) a également considéré la loi non monotone, et a montré la perte d'unicité des solutions pour la barre homogène en tension pure. Cette propriété strictement monotone de lois constitutives plus générales est étudiée en détail par Antman (Antman 2005) pour des poutres et s'avère être équivalente à la définition positive de la matrice hessienne pour une loi élastique non linéaire différentiable. Ce problème est alors lié à la stabilité et à la bifurcation des problèmes structuraux d'élasticité non linéaire, où la non-linéarité provient de la loi de comportement élastique. Des méthodes de perturbation avancées peuvent être utilisées pour caractériser les multiples solutions de bifurcation possibles de tels systèmes (voir aussi Antman (Antman 2005) ou plus récemment Luongo (Luongo 2015), Piccardo et al (Piccardo et al. 2015)).

Il convient de mentionner que del Piero et Truskinovsky (Del Piero and Truskinovsky 2001) ou Gelli et Royer-Carfagni (Gelli and Royer-Carfagni 2004) ont déjà étudié un système axial discret unidimensionnel. del Piero et Truskinovsky (Del Piero and Truskinovsky 2001) ont montré qu'une rupture discrète peut se produire dans un continuum avec une loi d'ouverture de fissure cohésive bimodale. Gelli et Royer-Carfagni (Gelli and Royer-Carfagni 2004) ont étudié un système axial discret qui peut se comporter asymptotiquement comme un milieu continu avec une loi cohésive associée à une fonction d'énergie de rupture finie pour le saut de déplacement de la fissure. Pour éviter la convergence asymptotique vers un continuum local équivalent, une loi d'effet d'échelle spécifique doit être introduite pour les sous-chaînes dont le nombre d'atomes diminue. On peut montrer dans ce cas en utilisant des résultats mathématiques sur la convergence variationnelle des fonctionnelles discrètes (Γ -convergence) que le continuum équivalent a perdu sa nature «locale» pour une chaîne infinie et possède une énergie cohésive (et donc une sorte de non localité - voir Planas et al (Planas et al. 1993)).

Pour en revenir au problème abordé par Ericksen (Ericksen 1975), il étudie la stabilité des multiples solutions possibles de ce système pour des lois de contrainte-déformation non monotones (y compris un éventuel radoucissement élastique) et évoque la possibilité d'un

champ de déplacement discontinu. Pour une barre locale continue (en absence de microstructure), le phénomène de localisation induit par un comportement radoucissant est concentré dans une région de longueur nulle, phénomène connu sous le nom de paradoxe de Wood pour les problèmes d'évolution de plasticité radoucissante (Wood (Wood 1968); Bazant (Bazant 1976)). Pour une barre élastique microstructurée avec une microstructure de taille finie, la localisation semble être contrôlée par la taille de la microstructure, qui est intrinsèquement contenue dans une loi d'élasticité cohésive radoucissante. Des solutions en déplacement discontinu sont mentionnées par Ericksen (Ericksen 1975) pour la loi d'élasticité non linéaire non monotone, et sont également liées au concept de modèles d'élasticité cohésive s'appuyant sur une loi d'évolution de discontinuité de déplacement basée sur l'énergie. Des modèles d'élasticité cohésive ont été développés en profondeur par Del Piero et Truskinovsky (Del Piero and Truskinovsky 2001, 2009), Marigo et Truskinovsky (Marigo and Truskinovsky 2004) ou Charlotte et al (Charlotte et al. 2006) sur la base d'arguments théoriques et variationnels. Gelli et Royer-Carfagni (Gelli and Royer-Carfagni 2004) ont établi des lois cohésives de longueur nulle à partir de modèles de réseaux unidimensionnel. Cependant, ces modèles cohésifs utilisaient principalement un champ de déplacement discontinu de longueur nulle. Nous aurons recours à des modèles cohésifs de longueur finie et basée sur la microstructure dans les travaux présentés ici.

1.2 Mécanique de l'endommagement

La rupture a pendant longtemps été étudiée comme un état binaire, rompu ou non, lié à la valeur ultime de la grandeur mesurée pour un échantillon. C'est avec les travaux de Palmgren (Palmgren 1924), Miner (Miner 1945) et Robinson (Robinson 1952) que l'on voit apparaître la mention d'une variable représentant la détérioration progressive des caractéristiques de l'échantillon. C'est vraiment en 1958 que Kachanov marque le début de la MEC (Mécanique de l'Endommagement Continu) (Kachanov 1958).

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi} \right)^n$$

Figure 1-2 – Formulation d'endommagement en loi puissance de Kachanov (1958). ψ désigne la « continuité » ou « intégrité » correspondant à 1-D.

La mécanique de l'endommagement a trouvé son fondement thermodynamique dans les années 80 (Lemaître and Chaboche 1988). Les calculs de mécanique des structures dans les

années 80 avec la méthode des éléments finis ont montré la nécessité d'introduire une non localité pour contrôler les processus de localisation en présence de radoucissement (Pijaudier-Cabot and Bažant 1987). L'aspect non local de l'endommagement sera discuté plus en détail dans la partie suivante.

La MEC est une théorie du continuum phénoménologique efficace pour capturer les phénomènes de microfissuration au sein d'un élément représentatif de la structure. En effet, la présence de microfissures peut affecter la réponse du matériau dans un état donné ; les microfissures peuvent également se propager avec certains paramètres de chargement contrôlé. L'introduction d'un modèle d'ingénierie simple et robuste pour la simulation de ces effets d'endommagement au niveau de la structure est l'une des tâches majeures de la communauté des mécaniciens pour des conceptions sûres.

L'endommagement progressif dans les modèles discrets et les conséquences sur la modélisation du continuum ont également été étudiés par des approches statistiques telles que Delaplace et al (Delaplace et al. 1996); ou plus récemment, Chatzigeorgiou et al. (Chatzigeorgiou et al. 2005), Rinaldi et Lai (Rinaldi and Lai 2007), Mastilovic (Mastilovic 2011) ou Rinaldi (Rinaldi 2013), où des modèles d'élément rompus sont incorporés à l'échelle micro. Kale et Ostoja-Starzewski (Kale and Ostoja-Starzewski 2014) ont récemment analysé un modèle d'un réseau de ressorts inélastique et montré la capacité de simuler des transitions élastiques-plastiques-fragiles dans un milieu désordonné, avec un certain comportement ductile possible. Contrairement à ces approches statistiques, la méthodologie suivie dans les travaux présentés ici est basée sur un raisonnement déterministe où le milieu de référence est un système discret avec des propriétés de dégradation discrètes. L'article de Ryvkin et Slepyan (Ryvkin and Slepyan 2010) peut également être cité à ce stade pour sa résolution exacte de la propagation d'une fissure dans un milieu élastique discret bidimensionnel. Une revue des propriétés des milieux discret endommageable bidimensionnel composé d'éléments « lattices » est réalisé par Nikolić et al. (Nikolić et al. 2017) pour des maillages réguliers ou irréguliers. Notre étude sur la membrane microstructurée portera sur une maille régulière carrée.

1.3 Mécanique non locale

Aujourd'hui, il est généralement admis que les modèles de MEC doivent être implantés dans une structure non locale pour obtenir des simulations fiables dans le cas de matériaux présentant du radoucissement. Pijaudier-Cabot et Bažant (Pijaudier-Cabot and Bažant 1987) ont été les premiers à développer un modèle d'endommagement intégral non local

phénoménologique, qui s'est avéré très efficace pour appréhender les effets de microfissurations dans les problèmes structuraux.

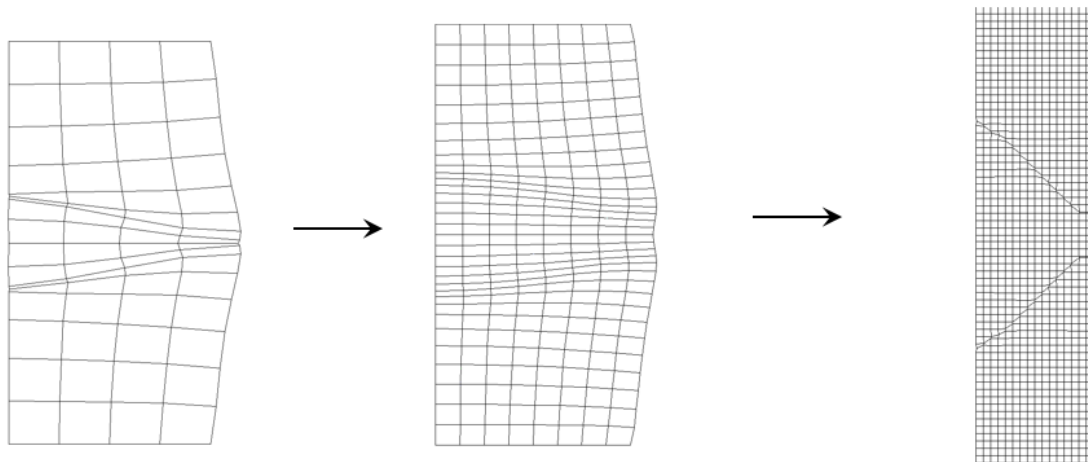


Figure 1-3 – Exemple de dépendance au maillage d’une simulation numérique locale d’un matériaux présentant du radoucissement. D’après (Challamel, 2002, Rapport interne de l’INSA de Rennes)

Depuis cet article, beaucoup de modèles MEC non locaux ont été suggérés dans la littérature, avec des arguments basés sur l’efficacité des simulations numériques, le fondement thermodynamique ou le formalisme variationnel (voir par exemple (Comi and Perego 2001; Borino et al. 2003; Lorentz and Andrieux 2003; Challamel et al. 2009; Challamel 2010)). La justification d’un modèle MEC non local basé sur des arguments physiques reste aujourd’hui une question ouverte et difficile, en particulier pour obtenir des effets d’échelle réalistes, comme l’ont récemment montré Grassl et al (Grassl et al. 2012) ou Grégoire et al (Grégoire et al. 2013). Les hypothèses non locales utilisées pour ces modèles macroscopiques non locaux de MEC doivent être justifiées de manière théorique en se basant sur des éléments micromécaniques, comme l’a montré Bažant (Bažant 1987) ou (Bažant 1994), l’explication qualitative de ces études est basée sur l’interaction possible des microfissures au cours du processus de chargement. Nous tâcherons ci-après de voir si la non localité observée à petite échelle peut être le résultat du caractère discret d’un matériau. La dimension de la longueur caractéristique conditionne aussi l’effet d’échelle sur la résistance structurelle, comme l’a déjà décrit (Bažant 2005). Plus récemment, Bažant (Bažant 2010) a analysé la capacité de la mécanique multi-échelle à inclure ou à justifier la MEC non locale à la transition micro-macro.

1.4 Méthode de continualisation

Le sujet de la mise en relation des systèmes discrets et continus est ancien et avait déjà été abordé par Lagrange (Lagrange 1759) au XVIIIème siècle. Lagrange montre à l'époque le lien entre la chaîne unidimensionnelle ou les réseaux axiaux avec les continuums asymptotiques unidimensionnels associés (voir aussi Brillouin (Brillouin 2003), pour le contexte historique de la mécanique des réseaux discrets, dénomés « lattices » en anglais). Au XIXème siècle, Piola a introduit des modèles de type intégral non local à partir d'interactions microscopiques discrètes, qui peuvent être étendues en utilisant des modèles de gradient d'ordre supérieur (Dell'Isola et al. 2014b, a). L'approche qui consiste à faire le lien entre la MED (Mécanique de l'Endommagement Discret) et la MEC non locale est basée sur une procédure dite de continualisation. Ces dernières sont basées sur diverses approximations des opérateurs discrets par des approximations continues via le développement en série de Taylor ou les approximants de Padé (Kruskal and Zabusky 1964; Collins 1981; Rosenau 1986, 1987; Kevrekidis et al. 2002; Andrianov et al. 2010). Le système discret est généralement constitué de micro-cellules finies, et on recherche le meilleur milieu continu équivalent, qui conserve des informations liées à la taille de la microstructure au travers de la longueur caractéristique. Le continuum dit enrichi, équivalent au milieu discret, est parfois appelé un quasi-continuum (Collins 1981). Il dépend généralement des termes tronqués dans le développement asymptotique des opérateurs de différence (voir aussi l'analyse de Zabusky et Kruskal dans le cadre de la dynamique des solitons (Zabusky and Kruskal 1965)). On peut aussi se référer à Rosenau (Rosenau 1986), Palais (Palais 1997) et Maugin (Maugin 2011) pour une perspective historique sur le lien entre le modèle de réseau Fermi-Pasta-Ulam et l'équation de propagation des ondes continualisée. Zabusky et Kruskal (Zabusky and Kruskal 1965) ont utilisé un développement en série de Taylor de l'opérateur en différence finie du second ordre du système discret jusqu'au quatrième ordre de la dérivée spatiale. Benjamin et al. (Benjamin et al. 1972) puis Collins (Collins 1981) ont proposé d'utiliser l'inverse de l'opérateur de différence finie du second ordre, évitant ainsi l'utilisation d'opérateurs spatiaux de quatrième ordre. L'approximant de Padé des opérateurs de différences finies a été introduit par Rosenau pour les systèmes de lattices FPU (Rosenau 1986) et s'est avéré efficace pour modéliser la propagation d'onde dans la dynamique de réseaux axiaux sans nécessiter de dérivée d'ordre supérieur. Ce développement en série rationnelle de l'opérateur de différence a été largement utilisée pour les milieux unidimensionnels et bidimensionnels (Rosenau 1986, 1987; Wattis 2000; Kevrekidis et al. 2002; Andrianov et al. 2010). L'approximation quasi-continue du réseau de Toda a été étudiée par Hyman et

Rosenau (Hyman and Rosenau 1987). La plupart des études de ces réseaux non-linéaires a porté sur la propagation des ondes axiales. Nous tâcherons d'appliquer la même méthodologie dans le contexte d'un chargement statique. Le cas des problèmes axiaux élastiques ont été traités (Collins 1981; Rosenau 1986; Triantafyllidis and Bardenhagen 1993; Andrianov et al. 2010), ou plus récemment, dans l'étude des systèmes en flexion (Challamel et al. 2014). L'approche suivie par Triantafyllidis et Bardenhagen (Triantafyllidis and Bardenhagen 1993) leur a permis d'obtenir des solutions numériques pour un réseau axial non linéaire sous une charge axiale uniforme et avec une interaction des éléments adjacents ou plus éloignés. Triantafyllidis et Bardenhagen (Triantafyllidis and Bardenhagen 1993) ont également étudié la continualisation possible du problème de réseau non linéaire, à partir de l'équation en différence du déplacement ou directement à partir de considérations énergétiques.

Jusqu'aujourd'hui, très peu d'articles portant sur l'application de cette méthode sur des milieux discrets endommageables avaient été publiés. Un modèle de poutre utilisant la MEC non local a été créé récemment, en se basant sur un système de réseau en flexion (Challamel et al. 2015e). Ces résultats suivent une analyse réalisée sur des systèmes élastiques discrets (ou des réseaux lattices à interaction élastique linéaire) qui se comportent comme des éléments structuraux non locaux (Challamel et al. 2014). Il faut aussi mentionner les travaux de Askes and Sluys (Askes and Sluys 2003) qui construisent une loi élasto-endommageable d'ordre supérieur à partir des interactions discrètes (modèle à un champ de type hyperélastique au gradient). L'élasticité non locale d'Eringen (Eringen 1983) a permis de capturer les effets d'échelle induits par le caractère discret d'un système microstructuré en flexion avec interaction élastique linéaire (Wang and Wang 2013; Challamel et al. 2014). Le système de réseau de rotules peut être appelé modèle structurel élastique de Hencky, ou modèle de Hencky (Hencky 1920). Les résultats non locaux sont valables pour les systèmes de flexion discrets, mais aussi pour les systèmes discrets de cisaillement / flexion (Duan et al. 2013; Zhang et al. 2013). En d'autres termes, l'élasticité non locale d'Eringen peut être théoriquement justifiée par certains arguments de micromécanique ou de microstructure, et l'effet d'échelle du modèle élastique non local peut être calibré exactement par rapport à la taille de la cellule microscopique périodique.

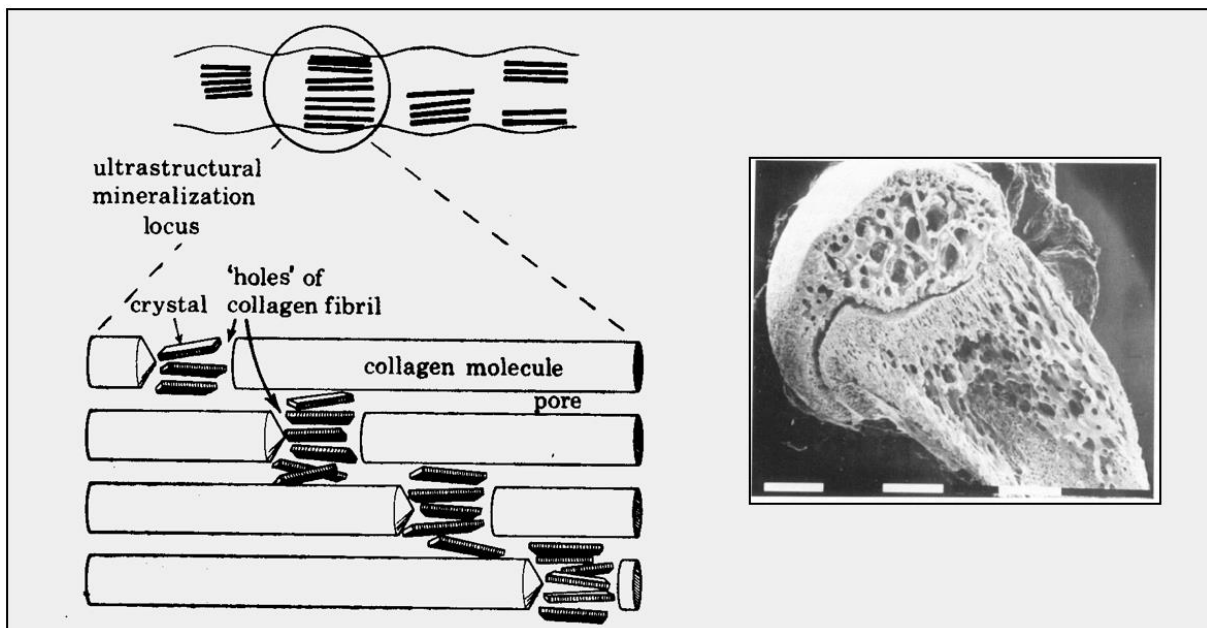


Figure 1-4 – Microstructure des os. Triples hélices de collagène et phosphates de calcium.
D'après « Matériaux Nanostructurés – Jacques Livage »

Plus récemment, la communauté dédiée aux calculs numériques a été attirée par le défi numérique de l'analyse multi-échelle, à partir de configurations matérielles en lattices. Fish et Chen (Fish and Chen 2004) ont développé une approche multi-échelle pour les systèmes moléculaires statiques et dynamiques. Blanc et al. (Blanc, Bris, & Lions, 2007) fournissent une vue d'ensemble des résultats mathématiques dans les calculs multi-échelles. Carcaterra et al. (Carcaterra et al. 2015) ont développé des continus au gradient d'ordre supérieur à partir des interactions de lattices linéaires et non linéaires. Les solutions exactes de problèmes de réseaux linéaires peuvent être obtenues à partir de la résolution d'équations aux différences finies linéaires (voir par exemple Gazis et Wallis (Gazis and Wallis 1965), Mindlin (Mindlin 1965) ou plus récemment Challamel et al. (Challamel et al. 2015d). Mindlin (Mindlin 1965) a décrit le comportement d'un réseau linéaire unidimensionnel, dans la gamme élastique, en tenant compte des interactions de trois éléments adjacents, et en a déduit certaines lois de comportement possibles de l'élasticité au gradient.

Le lien entre l'élasticité non locale d'Eringen et les propriétés réticulaires a déjà été souligné par Eringen (Eringen 1983) pour la propagation des ondes axiales. Il a été montré récemment, en utilisant une procédure de continualisation, que l'élasticité non locale d'Eringen (Eringen 1983) peut également être utilisée pour décrire le comportement statique et dynamique des réseaux linéaires avec interaction du plus proche voisin. Cela s'est avéré pertinent dans la mécanique des structures élastiques linéaires pour les

problèmes de poutres axiales, de torsion et de flexion, à la fois pour les applications statiques et dynamiques (voir (Challamel et al. 2014, 2015a, b, 2016c)). Wang et al. (Wang et al. 2016) ont également montré l'efficacité du modèle non local d'Eringen pour capturer l'effet d'échelle dans des poteaux lattices soumis à leur poids propre. La non localité d'Eringen s'est également révélée efficace pour capturer l'effet d'échelle sur des systèmes de réseaux bidimensionnels (Zhang et al. 2014a, b). La longueur caractéristique d'un tel modèle non local peut être ajustée analytiquement à partir de la taille de la cellule répétitive microscopique. La définition d'un milieu non local équivalent pour les problèmes de réseau non linéaire a probablement été moins étudiée. Challamel et al (Challamel et al. 2015b) ont montré qu'une chaîne discrète géométriquement non linéaire peut se comporter comme un élément structurel de type non local d'Eringen, même pour de grandes valeurs de rotation. Certains calculs issus de développement asymptotique sont également fournis à la fois pour le réseau et les systèmes continus non locaux. Des modèles d'élasticité de gradient d'ordre supérieur ont été construits par Challamel et al (Challamel et al. 2015c) pour le réseau non linéaire, basé sur un développement asymptotique au gradient de second ordre ou de quatrième ordre des opérateurs de différence de réseau.

2 Chaîne axiale microstructurée

2.1 Introduction

Ce chapitre traitera des questions fondamentales portant sur la modélisation du phénomène de rupture en observant un système d'endommagement discret unidimensionnel. Cette étude tente d'établir un lien entre les approches MED et MEC non-local, tout au moins pour un problème uniaxial structural élémentaire. Dans ce chapitre, nous essayons de montrer que la non-localité observée, à une échelle inférieure au spécimen considéré, peut être le résultat du caractère discret de la structure interne d'un matériau. La longueur caractéristique non-locale est déterminée ici grâce à l'analyse de la taille de la microstructure périodique d'une chaîne axiale. Les effets d'échelle sur la résistance structurelle, décrit par (Bažant 2005), sont aussi étudiés dans le cas de cette chaîne à structuration périodique.

L'approche que nous adoptons ici afin de faire le lien entre la mécanique de l'endommagement discret et la mécanique de l'endommagement continu non-local est basée sur une procédure dite de continualisation décrite dans le chapitre précédent. L'introduction d'opérateurs différentiels d'ordre supérieur offre une résolution analytique des problèmes formulés en différences finies dans le cas des systèmes étudiés ici. Pour rappel, cette méthode mise en place pour créer un lien entre les problèmes discrets et continus consiste en une continualisation qui a déjà été étudiée pour des problèmes axiaux élastiques (Collins 1981 ; Rosenau 1986 ; Triantafyllidis and Bardenhagen 1993 ; Andrianov et al. 2010), ou plus récemment, dans l'étude des systèmes en flexion (Challamel et al. 2014). Les résultats issus de l'analyse de la chaîne FPU ont été publiés dans (Hérisson et al. 2016a).

Askes et Sluys (Askes and Sluys 2003) ont étudié le comportement dynamique d'une chaîne axiale non linéaire affectée par un phénomène d'endommagement. Ils ont réduit les équations dynamiques à un seul champ de déplacement, ce qui équivaut à une formulation hyperélastique. La méthodologie suivie dans ce chapitre est basée sur les mêmes hypothèses de Askes et Sluys (2003) pour le réseau discret élastique, mais nous conservons la formulation à deux champs dans le processus de continualisation (les champs d'endommagement et de déplacement sont indépendamment continualisés).

Dans ce chapitre, un problème de chaîne endommageable axiale discrète est analysé en utilisant un mode de chargement distribué pour générer un effort normal non uniforme proche de (Picandet et al. 2015). Un mode de chargement réparti en masses concentrées est

adopté, ce qui entraîne un effort normal non-uniforme où le dernier maillon n'est chargé qu'à moitié. Ce mode de chargement spécifique permet une identification exacte de la force normale du système lattice, donnant des valeurs équivalentes à ceux obtenus avec le modèle continu. La solution exacte pour une distribution non-uniforme de l'effort normal est comparée à un modèle de MEC se basant sur une procédure de continualisation. Les résultats de cette étude ont été publiés dans (Hérisson et al. 2016b). Cette étude utilise une approche micro-mécanique afin de développer un modèle MEC non-local unidimensionnel en considérant un système de chaîne axiale sous tension. L'effet d'échelle en résistance de la structure est aussi observé et comparé à des lois d'effet d'échelle universelles.

Nous commencerons par traiter la chaîne axiale élastique non-linéaire pour nous affranchir des difficultés additionnelles liées à l'endommagement. Cette chaîne axiale, communément appelée chaîne FPU pour Fermi-Pasta-Ulam comme décrite dans le chapitre précédent, sera étudiée en statique pour une énergie convexe et non convexe.

2.2 Comportement statique de la chaîne élastique non-linéaire FPU

Le modèle FPU discret, composé d'une série de ressorts élastiques non-linéaires, est examiné ici en traction sous charge répartie, représentée par q . Nous n'adoptons pas des masses concentrées pour ce premier cas, on ne fera donc pas apparaître d'effet d'échelle en résistance sur la taille de la microstructure. Ces effets seront abordés dans la partie suivante. La Figure 2-1 représente la chaîne axiale avec la numérotation de chaque élément et le chargement sur chaque nœud qui peut être interprété comme le poids propre de la chaîne. Cette dernière, composée de n ressorts, a une longueur totale L telle que $L=n \times a$ où a est la taille initiale d'un élément. Le déplacement u_i est défini au nœud i . l'effort normal N_i et la déformation $\tilde{\varepsilon}_i$ sont définis au milieu de chaque élément. Pour éviter toute confusion et pour une meilleure représentation géométrique des phénomènes encourus dans la chaîne continue équivalente, les éléments sont indicés à mi-distance des nœuds qui les entourent : le ressort entre les nœuds i et $i+1$ est donc indicé $i+1/2$.

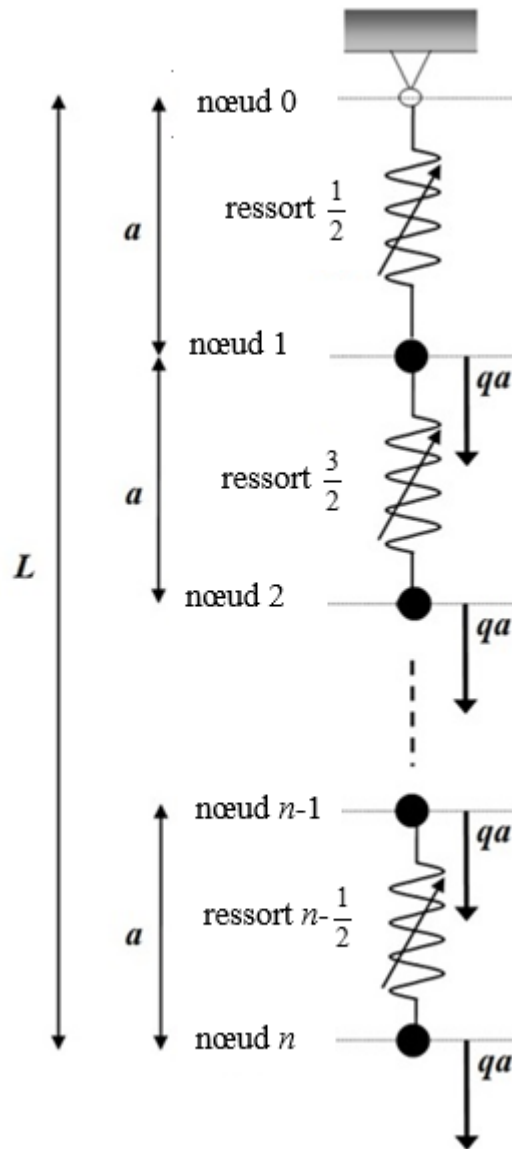


Figure 2-1 : Chaîne axiale soumise à son propre poids par unité de longueur.

Le comportement statique de la chaîne FPU est gouverné par l'équation d'équilibre :

$$\frac{N_{i+1/2} - N_{i-1/2}}{a} = -q \quad (2-1)$$

Et la loi constitutive :

$$N_i = EA \left[\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a} + \alpha \left(\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a} \right)^2 \right] \quad (2-2)$$

où a est la longueur d'un élément, E le module d'Young, A la section de la chaîne et α est un paramètre adimensionnel qui contrôle la non linéarité de la réponse élastique des éléments. Ce dernier paramètre caractérise l'interaction quadratique du « lattice » FPU. Il était initialement positif dans le papier original de Fermi et al. (Fermi et al. 1955), de façon à ce que l'énergie associée au modèle reste convexe, au moins en traction. En combinant l'équation d'équilibre Éq. (2-1) et la loi constitutive, Éq. (2-2), on obtient une équation non linéaire aux différences exprimée en fonction de la variable de déplacement :

$$EA \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{a^2} + \alpha \frac{(u_{i+1} - u_i)^2 - (u_i - u_{i-1})^2}{a^3} \right] = -q \quad (2-3)$$

ce qui peut être présenté de manière équivalente comme :

$$EA \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{a^2} \left(1 + \alpha \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{a} \right) \right] = -q \quad (2-4)$$

Cette équation non linéaire aux différences peut être obtenue directement à partir de la stationnarité $\delta W = 0$ de la fonctionnelle énergie suivante :

$$W = \sum_{i=0}^n a \frac{EA}{2} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} \right)^2 + \alpha a \frac{EA}{3} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} \right)^3 - q a u_i \quad (2-5)$$

Seul le comportement en traction est étudié ici. Dans les travaux originaux de Fermi-Pasta-Ulam, α était considéré positif et choisi pour limiter la valeur relative du terme non linéaire. Dans notre cas, nous étudierons les cas α positifs et négatifs. La Figure 2-2 illustre l'énergie du système FPU en fonction du déplacement relatif. On peut noter que l'on a une fonction convexe pour $\alpha > 0$, mais pas pour $\alpha < 0$. Le cas $\alpha < 0$ est associé à une énergie non convexe, similaire au potentiel de Lennard-Jones, avec une force de liaison limitée, alors que le cas correspond typiquement aux matériaux de type hyperélastique comme le caoutchouc, les polymères ou les matériaux d'origine biologique (Ogden (Ogden 1997) ; Holzapfel et Ogden (Ogden and Holzapfel 2006)). Ce modèle est très simple à ce stade afin de rester général mais il comporte certaines limitations. Il ne peut pas, par exemple, capturer les phénomènes parfaitement limités en déformation comme le cas pour certains matériaux issus du vivant (voir entre autre Challamel et Rajagopal (Challamel and Rajagopal 2016)) ou des non linéarités élastiques plus générales (Rajagopal (Rajagopal 2011)).

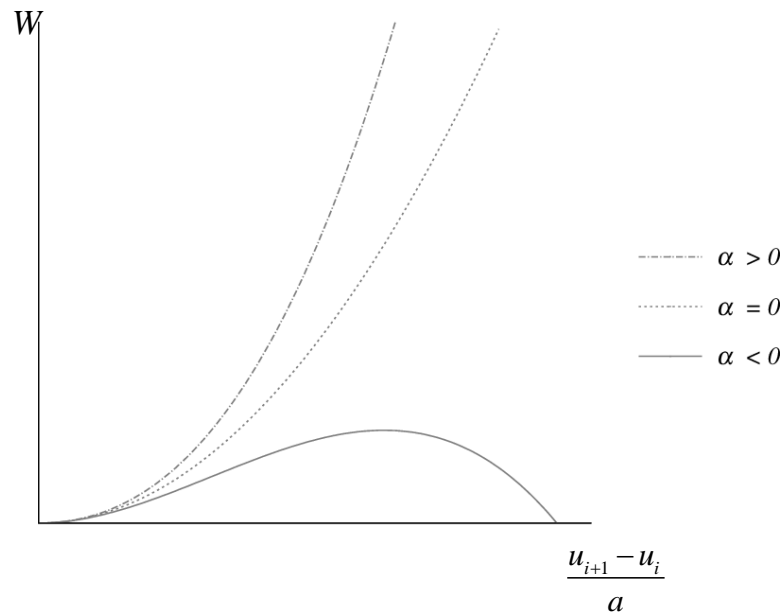


Figure 2-2 : L'énergie du système en fonction du déplacement selon la valeur du paramètre α .

L'équation d'équilibre peut être reformulée en équation linéaire aux différences :

$$\frac{N_{i+1} - N_i}{a} = -q \quad (2-6)$$

Qui peut être intégrée avec les conditions aux limites suivantes :

$$N_{1/2} = qL \Rightarrow N_i = q(L - ai) + \frac{qa}{2} \quad (2-7)$$

Pour notre cas, l'effort normal varie le long de la chaîne. Il est possible d'utiliser l'effort normal \hat{N}_i délocalisé :

$$\hat{N}_i = N_{i+1/2} \quad (2-8)$$

associé à la solution exacte du problème continu :

$$\hat{N}_i = q(L - ai) \quad (2-9)$$

L'équation non-linéaire aux différences, Éq. (2-4), peut être obtenue de manière équivalente à partir des équations aux différences finies :

$$\frac{\hat{N}_i - \hat{N}_{i-1}}{a} = -q, \quad \hat{N}_i = EA \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{a} + \alpha \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} \right)^2 \right] \quad (2-10)$$

La différence est uniquement dans la notation, en effet l'Éq. (2-1) est centrée mais les indices i ne sont pas entiers (ils représentent les éléments), ce qui n'est pas intuitif. Le problème discret est alors converti en une équation non linéaire aux différences tel que :

$$EA \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{a} + \alpha \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} \right)^2 \right] = q(L - ai) \quad (2-11)$$

On peut exprimer le problème de manière équivalente en utilisant l'équation aux différences suivante :

$$N_i = EA \left[\tilde{\varepsilon}_i + \alpha \tilde{\varepsilon}_i^2 \right] \quad \text{avec} \quad \tilde{\varepsilon}_i = \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a} \quad (2-12)$$

ou avec la notation alternative :

$$\hat{N}_i = EA \left[\hat{\varepsilon}_i + \alpha \hat{\varepsilon}_i^2 \right] \quad \text{avec} \quad \hat{\varepsilon}_i = \tilde{\varepsilon}_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{a} \quad (2-13)$$

Il est intéressant de noter que la déformation équivalente converge asymptotiquement vers la déformation du milieu continu, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varepsilon}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i = u'_i$. L'Éq. (2-13) couplée à l'Éq. (2-9) définit l'équation non linéaire aux différences du premier ordre du système FPU discret étudié. Nous nous intéressons à la réponse statique de la chaîne axiale pour un chargement monotone.

2.2.1 Solutions exactes en statique du modèle lattice FPU

Nous introduisons les paramètres adimensionnels suivants :

$$a^* = \frac{a}{L} = \frac{1}{n}, \quad u^* = \frac{u}{L} \quad \text{et} \quad q^* = \frac{qL}{EA} \quad (2-14)$$

Il est possible de convertir l'Éq. (2-13) en équation non-linéaire aux différences du premier ordre :

$$\hat{\varepsilon}_i^2 + \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\alpha} + \frac{(a^*i-1)}{\alpha} q^* = 0 \Rightarrow \hat{\varepsilon}_i = -\frac{1}{2\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha \left(1 - \frac{i}{n} \right) q^*} \right) \quad (2-15)$$

Deux cas doivent être distingués, en fonction du signe de α . Pour $\alpha < 0$, l'énergie n'est plus convexe et la dérivée du second ordre de l'énergie s'annule dans le premier élément encastré associé avec la charge limite $q_{\max}^* = -1/4\alpha$ (en traction). Dans l'autre cas, $\alpha \geq 0$, l'énergie du système est convexe en traction et il n'y a pas de charge limite.

Quelle que soit la valeur de α , l'Éq. (2-15) peut être reformulée en équation aux différences telle que :

$$u_{i+1}^* = u_i^* - \frac{1}{2n\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha \left(1 - \frac{i}{n} \right) q^*} \right) \quad (2-16)$$

En considérant la condition aux limites $u_0 = 0$, et dans les cas $\alpha \geq 0$ et la partie ascendante (avant la charge limite) du cas $\alpha < 0$, le déplacement de l'extrémité libre de la chaîne discrète est donné par :

$$u_n^* = -\frac{1}{2n\alpha} \sum_{i=0}^n \left(1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left(1 - \frac{i}{n} \right) q^*} \right) \quad (2-17)$$

Pour $\alpha \leq 0$, au-delà de la charge limite, quand le premier élément entre dans la phase descendante, le déplacement de l'extrémité peut être obtenu par :

$$u_n^* = -\frac{1}{2n\alpha} \left[\left(1 + \sqrt{1 + 4\alpha q^*} \right) + \sum_{i=1}^n \left(1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left(1 - \frac{i}{n} \right) q^*} \right) \right] \quad (2-18)$$

2.2.2 Comportement élastique linéaire – cas $\alpha = 0$

Même si la configuration du réseau discret élastique linéaire est bien plus simple, examiner ses propriétés fondamentales peut être utile pour bien comprendre la généralisation non linéaire. Dans ce cas, si $\alpha = 0$, l'Éq. (2-3) donne une équation linéaire aux différences du second-ordre qui s'écrit :

$$\frac{u_{i+1}^* - 2u_i^* + u_{i-1}^*}{a^{*2}} = -q^* \text{ avec } u_0^* = 0 \text{ et } \frac{u_n^* - u_{n-1}^*}{a^*} = \frac{q^*}{n} \quad (2-19)$$

La solution de cette équation est obtenue par :

$$u_i^* = -\frac{q^* a^{*2} i^2}{2} + C_1 i + C_2 \quad (2-20)$$

Les constantes additionnelles (C_1 , C_2) sont déterminées à partir des conditions aux limites de la chaîne axiale. $u_0 = 0$ nous donne $C_2 = 0$, tandis que C_1 est déterminée à partir de la condition sur le dernier maillon, $u_n^* - u_{n-1}^* = q^*/n^2 = \tilde{\varepsilon}_n/n$, avec $a^* = 1/n$:

$$u_i^* = -\frac{q^* i}{2n^2} [i - (1 + 2n)] \quad (2-21)$$

Le déplacement de l'extrémité u_n^* est alors obtenu pour le cas linéaire :

$$u_n^*(\alpha = 0) = q^* \frac{n+1}{2n} \quad (2-22)$$

Dans les prochaines figures, le déplacement adimensionnel de l'extrémité de la chaîne a été normalisé par $2n/(n+1)$, afin que toutes les courbes effort-déplacement, paramétrées par α , aient la même pente que dans le cas élastique linéaire pour q proche de zéro. Précision importante sur cette normalisation : dans la Figure 2-3, qui représente le déplacement adimensionnalisé de l'extrémité en fonction du chargement adimensionnel pour $\alpha = 1$ et différentes valeurs de n , le système continu pour $n \rightarrow \infty$ semble être moins rigide que dans le cas $n = 1$, ce qui est contraire à ce qui est attendu en termes d'effets d'échelles dans les systèmes discrets. Cela n'est dû qu'à l'effet de la normalisation. En effet la Figure 2-4 présente la même courbe sans normalisation et l'effet d'échelle est bien celui auquel on s'attend, le système devient plus rigide avec l'augmentation de n (voir Challamel et al. (Challamel et al. 2014)). La Figure 2-5 montre l'effet du paramètre α sur la réponse du système, pour des valeurs positives et négatives. Pour $\alpha < 0$, on observe une proportionnalité de la réponse à la valeur de α , les prochaines équations seront donc normalisées par rapport à α dans ce cas précis.

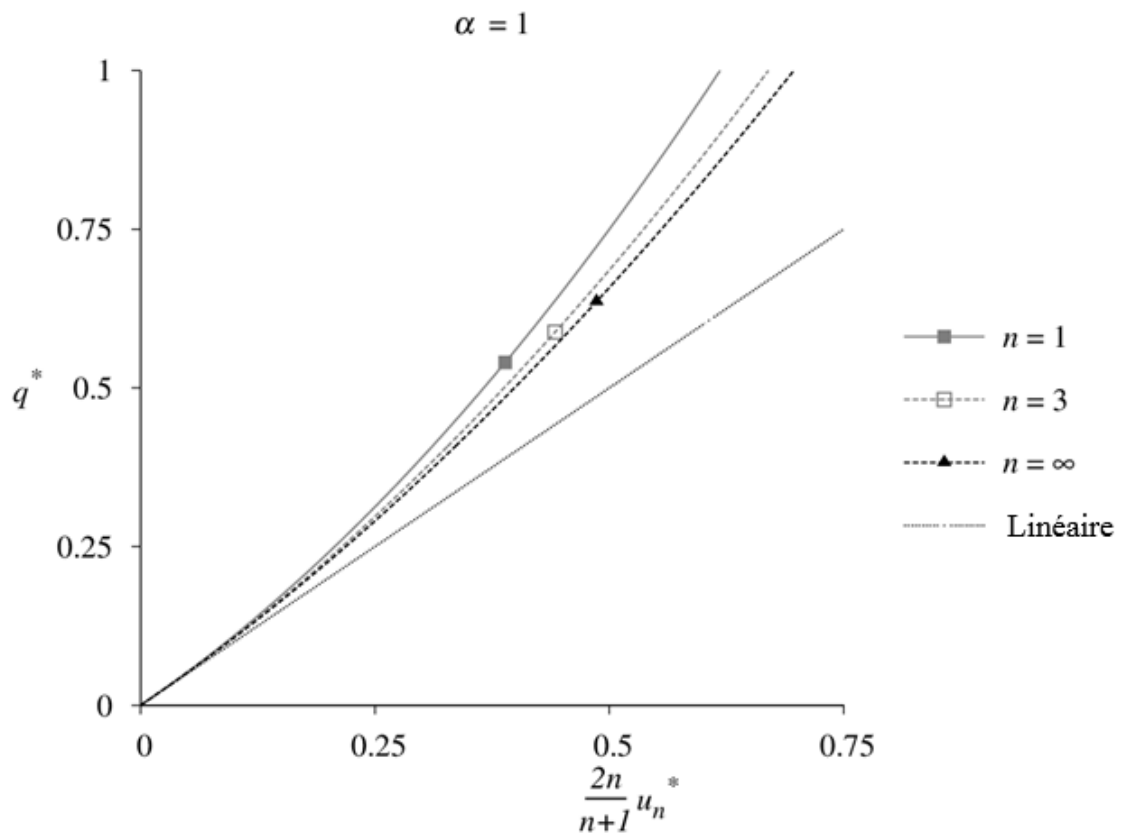


Figure 2-3 – Déplacement adimensionnel de l'extrémité en fonction de la charge avec $\alpha = 1$ et différentes valeurs de n , nombre d'éléments constitutifs.

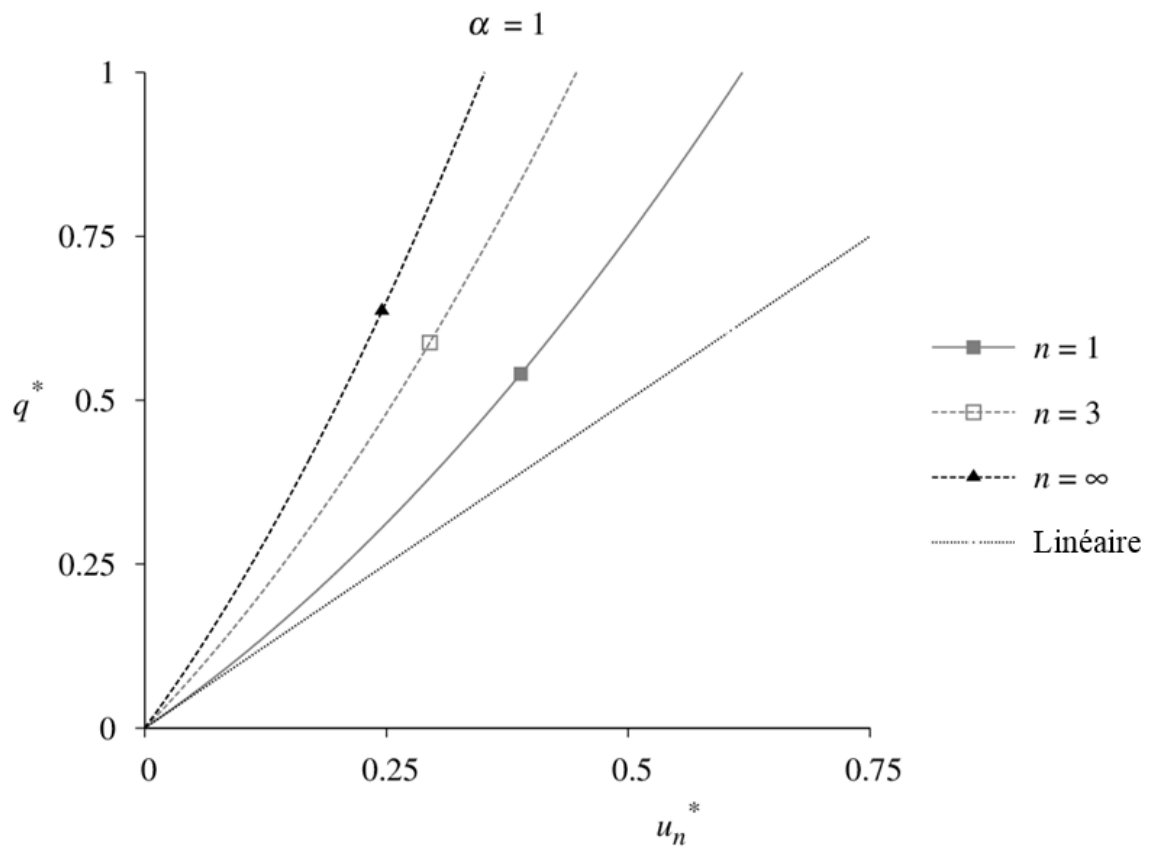


Figure 2-4 – Déplacement adimensionnel de l'extrémité en fonction de la charge avec $\alpha = 1$ et différentes valeurs de n , sans normalisation.

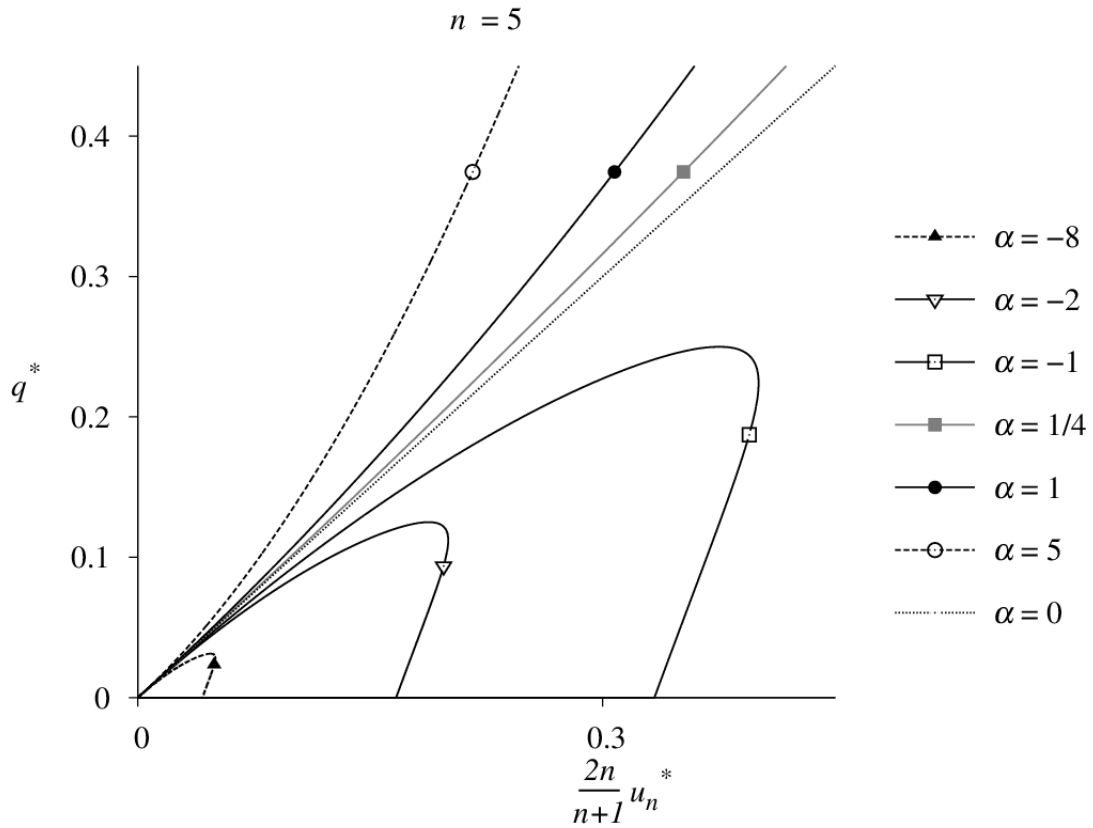


Figure 2-5 – Déplacement adimensionnel de l'extrémité en fonction de la charge avec $n = 1$ et différentes valeurs de α .

2.2.3 Comportement avec chargement limite pour $\alpha < 0$

Dans le cas $\alpha < 0$, i.e. en présence d'une charge limite (capacité de résistance finie), il est pratique d'introduire la déformation caractéristique ε_y comme suit :

$$\alpha = -\frac{1}{2\varepsilon_y} \leq 0, \quad q_y^* = \frac{\varepsilon_y}{2} \geq 0 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{q^*}{q_y^*} \geq 0 \quad (2-23)$$

ε_y représente ici la valeur de déformation maximum en traction (voir Figure 2-6).

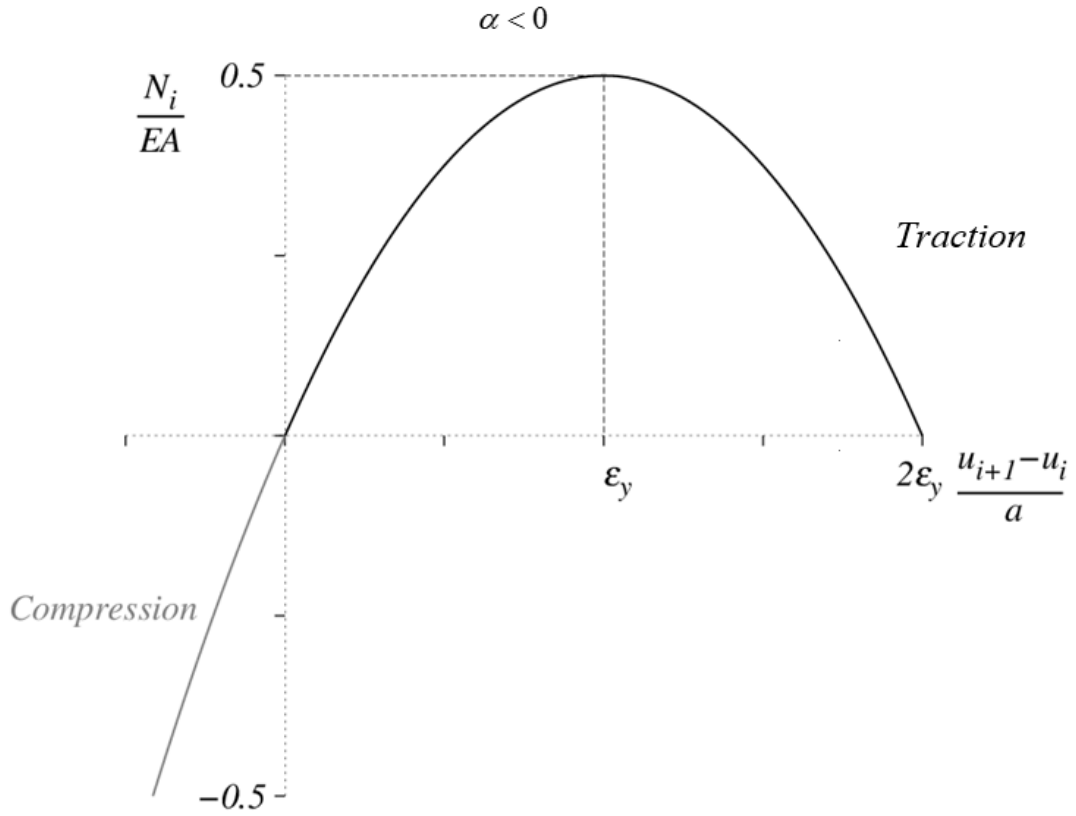


Figure 2-6 – Réponse effort normal-déplacement du ressort non-linéaire pour $\alpha < 0$

Avec cette notation, et tant que la charge limite n'est pas atteinte, la branche ascendante est calculée pour $i \in \{0 ; 1 ; 2 \dots ; n-1\}$:

$$\frac{u_{i+1}^* - u_i^*}{\varepsilon_y} = \frac{1}{n} \left[1 - \sqrt{1 - \beta \left(1 - \frac{i}{n} \right)} \right] \quad \text{avec} \quad u_0^* = 0 \quad (2-24)$$

que l'on peut exprimer aussi tel que :

$$\frac{u_{i+1}^* - u_i^*}{\varepsilon_y} = b_1 - b_2 \times \sqrt{b_3 + i} \quad \text{avec} \quad b_1 = \frac{1}{n} ; b_2 = \sqrt{\frac{\beta}{n^3}} \quad \text{et} \quad b_3 = \frac{n}{\beta} - n \quad (2-25)$$

b_1 , b_2 et b_3 sont tous des nombres positifs. Par somme, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{u_{i+1}^* - u_i^*}{\varepsilon_y} = \frac{u_p^* - u_0^*}{\varepsilon_y} = pb_1 - b_2 \sum_{i=0}^{p-1} \sqrt{b_3 + i} = pb_1 - b_2 \left(-\zeta_H \left[-\frac{1}{2}, b_3 + p \right] + \zeta_H \left[-\frac{1}{2}, b_3 \right] \right) \quad (2-26)$$

où la fonction Hurwitz Zeta ζ_H est introduite pour exprimer la solution de l'équation aux différences à résoudre :

$$\zeta_H [s, q] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+q)^{-s} \quad \text{ou} \quad \zeta_H \left[-\frac{1}{2}, q \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+q)^{1/2} \quad (2-27)$$

Pour finir, en utilisant $u_0^* = 0$, l'équation aux différences du premier ordre admet la solution analytique suivante :

$$\frac{u_i^*}{\varepsilon_y} = \frac{i}{n} - \sqrt{\frac{\beta}{n^3}} \left(\zeta_H \left[-\frac{1}{2}, \frac{n}{\beta} - n \right] - \zeta_H \left[-\frac{1}{2}, \frac{n}{\beta} - n + i \right] \right) \quad (2-28)$$

Une fois la charge limite du système atteinte, le premier élément entre dans la phase descendante alors que tous les ressorts suivants resteront sur la phase ascendante, n'ayant pas atteint leur charge maximale. Cela est représenté par l'équation suivante pour $i \in \{1 ; 2 ; 3 \dots ; n-1\}$:

$$\frac{u_{i+1}^* - u_i^*}{\varepsilon_y} = \frac{1}{n} \left[1 - \sqrt{1 - \beta \left(1 - \frac{i}{n} \right)} \right] \quad \text{et} \quad \frac{u_1^*}{\varepsilon_y} = \frac{1}{n} \left[1 + \sqrt{1 - \beta} \right] \quad (2-29)$$

La seule différence avec le cas précédent est le changement de condition aux limites, $u_0^* = 0$ est toujours valable, mais on utilise u_1^* de l'Éq. (2-29) pour identifier la solution car seule le premier ressort atteint la branche descendante :

$$\frac{u_i^*}{\varepsilon_y} = \frac{1}{n} \times \left(i + \sqrt{1 - \beta} + \sqrt{\frac{\beta}{n}} \left(-\zeta_H \left[-\frac{1}{2}, \frac{n}{\beta} - n + 1 \right] + \zeta_H \left[-\frac{1}{2}, \frac{n}{\beta} - n + i \right] \right) \right) \quad (2-30)$$

2.2.4 Comportement monotone $\alpha > 0$

Nous considérons maintenant le cas $\alpha > 0$, qui est caractéristique des élastomères ou biomatériaux. Le paramètre α peut de nouveau être défini comme dans l'Éq. (2-23), où ε_y représente cette fois la valeur absolue de déformation associée à la plus petite valeur d'effort normal (voir Figure 2-7).

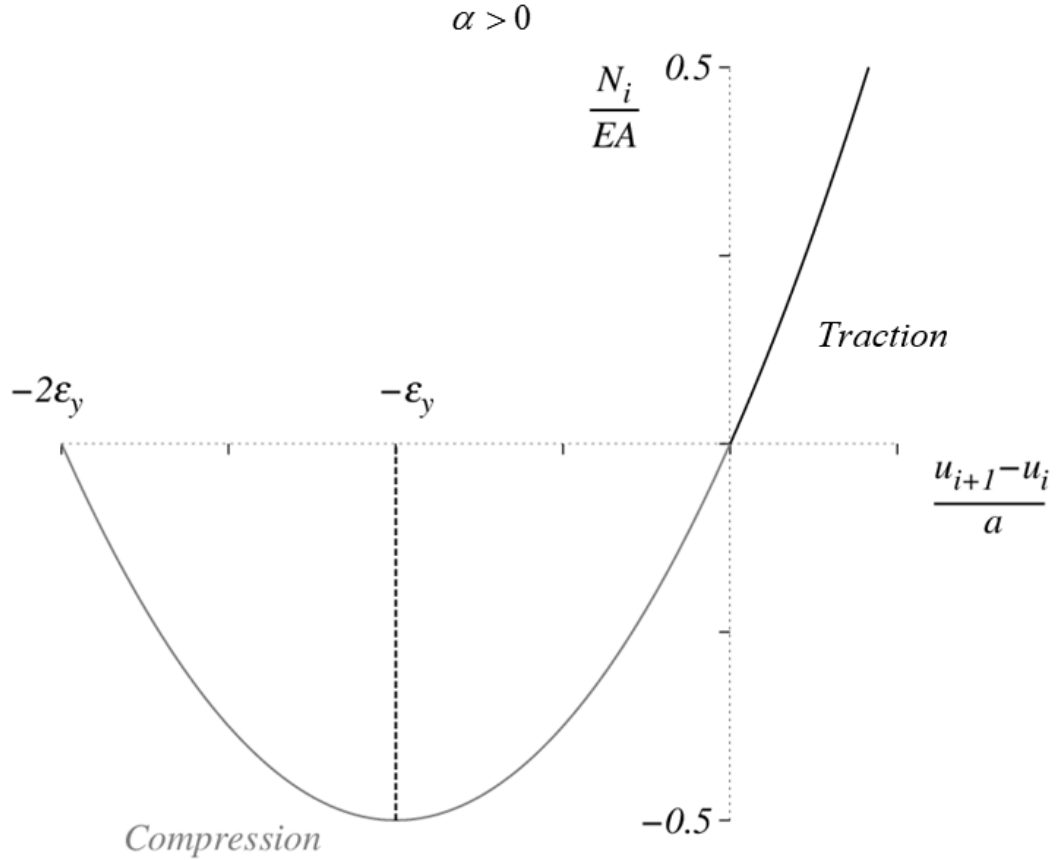


Figure 2-7 – Réponse effort normal-déplacement du ressort non-linéaire pour $\alpha > 0$

Avec ces nouveaux paramètres, l'Éq. (2-15) devient :

$$\frac{u_{i+1}^* - u_i^*}{\varepsilon_y} = -\frac{1}{n} \left[1 - \sqrt{1 + \beta \left(1 - \frac{i}{n} \right)} \right] \quad \text{avec } u_0^* = 0 \quad (2-31)$$

où la branche avec des valeurs négatives n'est pas considérée pour notre cas. L'Éq. (2-31) peut aussi s'écrire uniquement en traction (pour $\beta > 0$) :

$$\frac{u_{i+1}^* - u_i^*}{\varepsilon_y} = \frac{1}{n} \left[-1 + \sqrt{\frac{\beta}{n}} \times \sqrt{\frac{n}{\beta} + n - i} \right] = -\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{\beta}{n^3}} \times \sqrt{\frac{n}{\beta} + n - i} \quad (2-32)$$

Il peut être utile d'utiliser le changement de variable suivant $j = n - i$, afin que l'équation aux différences soit convertie sous la forme :

$$\frac{u_j^* - u_{j-1}^*}{\varepsilon_y} = -\frac{1}{n} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\beta j}{n}} \right] \text{ avec } u_{i=0}^* = u_{j=n}^* = 0 \quad (2-33)$$

On reconnaît alors une équation aux différences similaire au cas précédent :

$$\frac{u_j^* - u_{j-1}^*}{\varepsilon_y} = b_1 - b_2 \times \sqrt{b_3 + j} \quad \text{avec } b_1 = \frac{1}{n} ; b_2 = \sqrt{\frac{\beta}{n^3}} \text{ et } b_3 = \frac{n}{\beta} \quad (2-34)$$

En suivant le même raisonnement, utilisant la fonction Hurwitz zeta, on obtient la solution :

$$\frac{u_j^*}{\varepsilon_y} = \frac{1}{n} \times \left(j - n - \sqrt{\frac{\beta}{n}} \left(\zeta_H \left[-\frac{1}{2}, \frac{n}{\beta} + 1 + n \right] - \zeta_H \left[-\frac{1}{2}, \frac{n}{\beta} + 1 + j \right] \right) \right) \quad (2-35)$$

ou, de manière équivalente, avec notre variable d'origine, et $u_0^* = 0$:

$$\frac{u_i^*}{\varepsilon_y} = \frac{1}{n} \times \left(-i - \sqrt{\frac{\beta}{n}} \left(\zeta_H \left[-\frac{1}{2}, \frac{n}{\beta} + 1 + n \right] - \zeta_H \left[-\frac{1}{2}, \frac{n}{\beta} + 1 + n - i \right] \right) \right) \quad (2-36)$$

Pour des valeurs positives de α , la Figure 2-3 présente l'effet de radoucissement de la discrétisation paramétrée par le nombre d'éléments n , comme observé habituellement pour des systèmes discrets (voir Challamel et al. (Challamel et al. 2014)). Pour des valeurs négatives, la Figure 2-8 illustre l'effet d'échelle dans le système discret en représentant l'évolution du déplacement de l'extrémité pour différentes valeurs de n . Dans la normalisation considérée, pour des valeurs négatives de α , toutes les courbes paramétrées par α atteignent la valeur limite de charge $\beta_{\max} = 1$. Cette représentation adimensionnelle permet de mieux comprendre l'effet d'échelle induit par le paramètre n . On peut mentionner que n semble avoir un effet relativement faible sur la phase ascendante de la réponse, au contraire, dans la phase de « radoucissement » l'effet est très prononcé, en effet des valeurs élevées de n tendent à réduire l'hystérésis élastique entre les 2 branches de la réponse. Asymptotiquement, pour un nombre infini d'éléments $n \rightarrow \infty$, ce qui correspond au cas continu local, il n'y a pas de différence entre les deux branches. Cet effet paradoxal vient du fait qu'en présence d'un gradient d'effort normal, le premier ressort connecté à l'encastrement est le plus sollicité. Quand il atteint la valeur de charge maximale, la charge diminue dans la branche de « radoucissement » et tous les ressorts à l'exception du premier subissent une décharge élastique. Dans le cas local asymptotique, pour $n \rightarrow \infty$, le premier ressort a une longueur infinitésimal, ce qui engendre une sorte de paradoxe de Wood (Wood

1968), i.e. un phénomène de localisation de la déformation dans une région de longueur nulle associé à une décharge élastique.

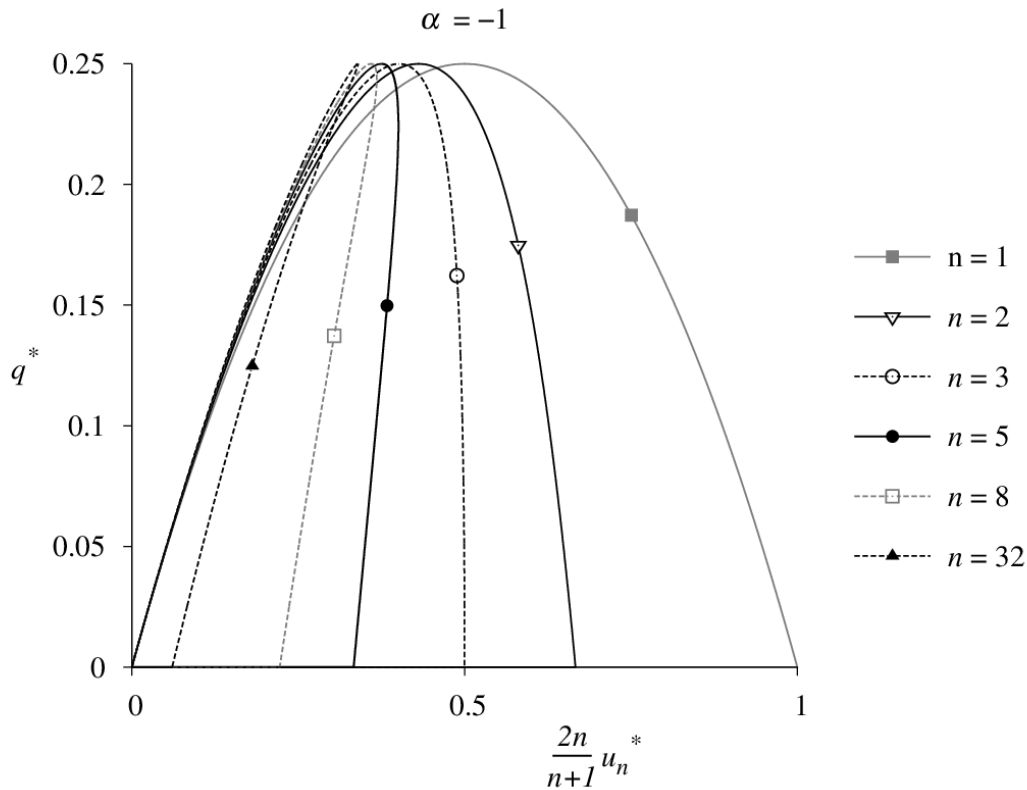


Figure 2-8 – Déplacement adimensionnel de l'extrémité en fonction de la charge avec $\alpha = -1$ et différentes valeurs de n , nombre d'éléments constitutifs.

2.2.5 Continualisation du modèle FPU discret – Série de Taylor

2.2.5.1 Continualisation de l'équation non-linéaires aux différences du second ordre

Cette partie se concentre sur la possibilité de développement d'un milieu continu enrichi capable de décrire la réponse et les caractéristiques du système discret. L'importance de d'établir un milieu continu équivalent tient dans le fait que mathématiquement, il est plus facile de simuler le comportement d'un milieu continu que celui d'un milieu discret. En suivant la procédure de continualisation présentée par Kruskal et Zabusky (Kruskal and Zabusky 1964), l'équation non linéaire aux différences Éq. (2-4) peut être continualisée en utilisant le développement en série de Taylor des opérateurs aux différences :

$$u(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \partial_x^k}{k!} u(x) = e^{a\partial_x} u(x) \quad \text{avec } u_{i+1} = e^{a\partial_x} u(x) \quad (2-37)$$

Éq. (2-4) peut être réécrite en utilisant ce développement asymptotique et en se limitant aux termes d'ordres inférieurs à 4 :

$$EA \left[u'' + \frac{a^2}{12} u^{(4)} \right] \left[1 + 2\alpha \left(u' + \frac{a^2}{6} u''' \right) \right] + o(a^4) = -q \quad (2-38)$$

Le système continué peut aussi s'exprimer :

$$EA \left[u'' + \frac{a^2}{12} u^{(4)} + 2\alpha \left(u'u'' + \frac{a^2}{6} u''u''' + \frac{a^2}{12} u'u^{(4)} \right) \right] + o(a^4) = -q \quad (2-39)$$

L'équation du quatrième ordre, Éq. (2-39), peut aussi être obtenue par principe variationnel. En considérant la fonctionnelle énergie (voir Éq. (3.4) dans (Triantafyllidis and Bardenhagen 1993) pour l'énergie interne avec une force de rappel élastique parabolique), le travail des efforts internes s'écrit :

$$W[u] = \int_0^L \frac{1}{2} EA u'^2 + EA\alpha \frac{u'^3}{3} - \frac{a^2}{24} EA (1 + 2\alpha u') u''^2 - qu \, dx \quad (2-40)$$

Comme mentionné par Triantafyllidis et Bardenhagen (Triantafyllidis and Bardenhagen 1993), prendre uniquement en compte l'interaction du premier voisin résulte en une contribution négative à la densité d'énergie, même si α prend des valeurs positives. En d'autres termes, la fonctionnelle énergie n'est plus définie positive dans ce cas. Dans cet esprit, Triantafyllidis et Bardenhagen (Triantafyllidis and Bardenhagen 1993) incluent des interactions plus générales étendues à d'autres éléments adjacents, qui mènent à un problème d'élasticité au gradient correctement posé avec une contribution positive du terme additionnel de gradient de déformation dans la fonctionnelle énergie. La stationnarité de la fonctionnelle énergie $\delta W[u] = 0$ mène de nouveau à l'Éq. (2-39) avec les conditions aux limites variationnellement cohérentes suivantes :

$$-\frac{a^2}{12} EA \left[(1 + 2\alpha u') u'' \delta u' \right]_0^L + EA \left[\left(u' + \alpha u'^2 + \frac{a^2}{12} \alpha u''^2 + \frac{a^2}{12} (1 + 2\alpha u') u''' \right) \delta u \right]_0^L = 0 \quad (2-41)$$

On peut alors obtenir du premier terme de l'Éq. (2-41) cette condition aux limites d'ordre supérieur :

$$u''(0) = u''(L) = 0 \quad (2-42)$$

2.2.5.2 Continualisation de l'équation linéaire aux différences du premier ordre – Série de Taylor

L'équation discrète, Éq. (2-10), peut aussi être continualisée à partir du développement en série de Taylor de la déformation discrète :

$$\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a} = \frac{2}{a} \sinh\left(\frac{a\partial_x}{2}\right)u = \partial_x \left(1 + \frac{a^2}{24}\partial_x^2 + o(a^4)\right)u \quad (2-43)$$

Cette continualisation est alors équivalente à une sorte de loi constitutive d'élasticité au gradient non linéaire :

$$N(x) = EA \left[\tilde{\varepsilon}(x) + \alpha [\tilde{\varepsilon}(x)]^2 \right] \quad \text{avec} \quad u' + \frac{a^2}{24}u''' = \tilde{\varepsilon}(x) \quad (2-44)$$

Il est bon de noter que l'effort normal $N(x) = q(L-x) + \frac{qa}{2}$ est calculé dans chaque élément et est donné par l'Éq. (2-7). Il est décalé par rapport à celui du milieu continu local $\hat{N}(x) = q(L-x)$.

2.2.5.3 Comportement avec point limite pour $\alpha < 0$

L'Éq. (2-44) peut être réécrite pour exprimer $\tilde{\varepsilon}(x)$ en fonction de la charge q :

$$\frac{N(x)}{EA} = \tilde{\varepsilon}(x) + \alpha \tilde{\varepsilon}(x)^2 = \frac{q}{EA}(L-x) + \frac{qa}{2EA} \quad (2-45)$$

On applique la normalisation décrite dans l'Éq. (2-23) et on résout l'Éq. (2-45) pour obtenir l'expression de $\tilde{\varepsilon}(x)$. Dans ce cas, l'équation différentielle du second ordre à résoudre dans la branche ascendante (avant la charge maximale) est donnée par la plus petite des deux solutions :

$$u' + \frac{a^2}{24}u''' = \tilde{\varepsilon}(x) \quad \text{avec} \quad \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_y} = 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{q(L-x) + qa/2}{EA\varepsilon_y}} \quad (2-46)$$

Qui peut s'exprimer avec les paramètres adimensionnels suivants :

$$u' + \frac{a^2}{24}u''' = \tilde{\varepsilon}(x) \quad \text{avec} \quad \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_y} = 1 - \sqrt{1 - \beta \left(1 + \frac{1}{2n} - x^*\right)} \quad (2-47)$$

Cette équation différentielle linéaire est numériquement intégrée avec la condition aux limites « cinématique » $u(0)=0$. Lorsque le domaine d'intégration inclus l'origine à $x = 0$ (ce qui est le cas avec cette condition aux limites). On peut voir immédiatement par la racine carrée dans la définition de la déformation équivalente que le paramètre de chargement adimensionnel β ne peut pas dépasser une certaine valeur définie par β_{cr} , telle que :

$$\beta_{cr} = \frac{2n}{2n+1} < \beta_{\max} = 1 \quad (2-48)$$

Cette charge critique, β_{cr} , est inférieure à la charge maximale théorique pour le système FPU, $\beta_{\max} = 1$, et donc, cette méthode ne permet pas de simuler des valeurs élevées de chargement. Cela est dû au fait que pour β plus grand que β_{cr} , la racine carrée prend des valeurs négatives pour x^* variant entre 0 et $1/2n$. La figure 2-9 montre la réponse du système continu basé sur le développement en série de Taylor de l'opérateur aux différences centrées en utilisant la condition aux limites « cinématiques » $u(0) = 0$ et les conditions d'ordres supérieurs variationnellement consistantes $u''(0)=u''(L)=0$.

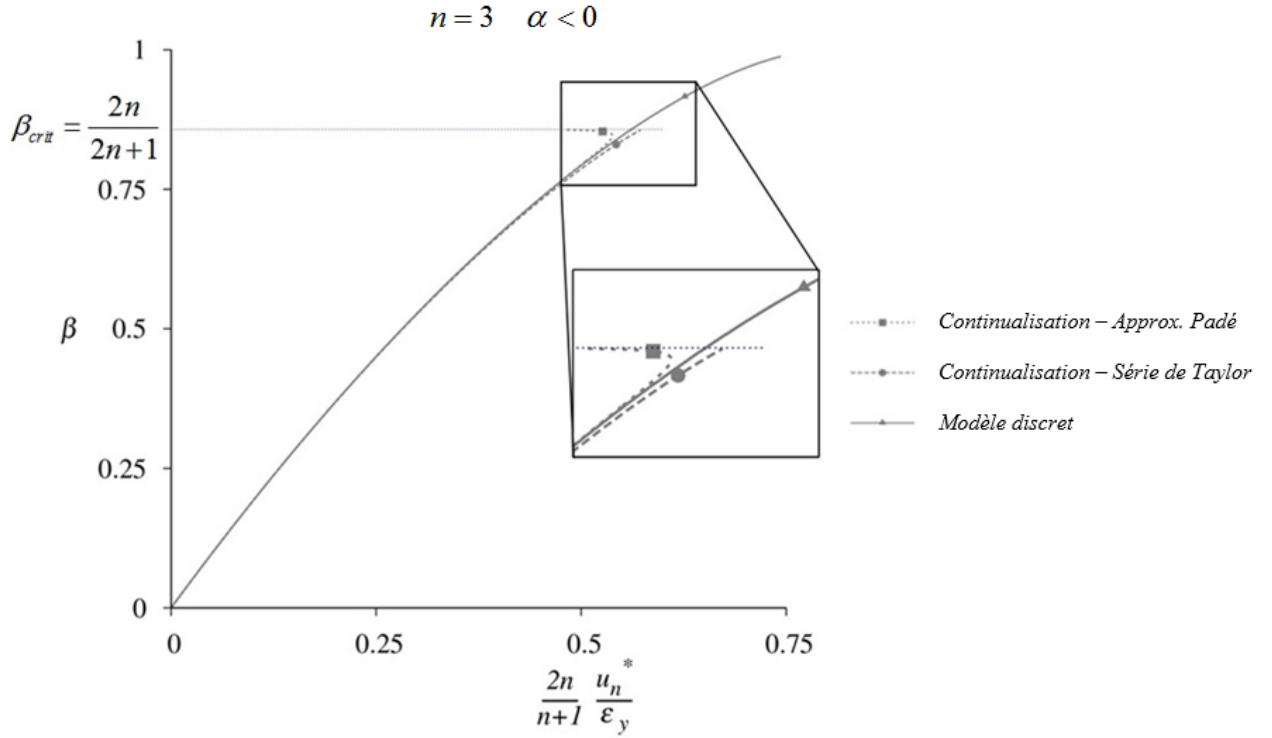


Figure 2-9 – Effort-déplacement adimensionné du système continué avec condition « cinématique » avec et sans l'utilisation de l'approximant de Padé.

La procédure de continualisation semble être efficace jusqu'à la charge critique β_{cr} . On peut alors proposer une condition aux limites alternative dite « statique » (ou loi cohésive élastique de longueur finie) qui est issue de la continualisation de l'équation discrète :

$$N(a/2) = EA \left[\frac{[\Delta u(a/2)]}{a} + \alpha \left(\frac{[\Delta u(a/2)]}{a} \right)^2 \right] \quad \text{avec} \quad (2-49)$$

$$[\Delta u(a/2)] = u(a) - u(0) = u(a)$$

qui est finalement réécrite, pour la condition aux limites continuée :

$$\frac{u(a)}{a} = \tilde{\epsilon} \left(\frac{a}{2} \right) \quad (2-50)$$

La condition aux limites « statique » (ou loi cohésive élastique de longueur finie) peut être exprimé en variables adimensionnelles :

$$u^* \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} (1 - \sqrt{1 - \beta}) \quad (2-51)$$

Une fois que la branche atteint la valeur maximale $\beta_{\max} = 1$, le premier élément entre dans la phase de radoucissement. L'Éq. (2-50) est toujours valide mais la condition aux limites « statique » est alors modifiée pour :

$$u^* \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} (1 + \sqrt{1 - \beta}) \quad (2-52)$$

Cette condition aux limites cohésive utilise implicitement $u_0 = 0$, mais exprime le déplacement adimensionné du premier nœud à $1/n$. Pour modifier le domaine d'intégration, nous pouvons décaler les conditions aux limites d'ordre supérieur (Éq. (2-42)) de la taille d'un demi-élément considérant ainsi uniquement la zone de la chaîne avec des valeurs réelles de déplacement, tout en ayant conscience que cela entraînera peut-être une perte de précision du modèle continu. Les nouvelles conditions aux limites d'ordre supérieur sont :

$$u'' \left(\frac{a}{2} \right) = u'' \left(L + \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (2-53)$$

Les trois conditions aux limites sont donc définies sous forme adimensionnelles en $1/2n$, $1/n$ et $(2n+1)/2n$. Dans ce cas, le calcul de la réponse du système continu montre que la solution est définie pour toute la plage $0 < \beta < 1$. Les résultats seront commentés et comparés au modèle lattice dans la section suivante.

2.2.5.4 Comportement monotone pour $\alpha > 0$

Ici nous appliquons la normalisation décrite en section 2.2 :

$$\alpha = \frac{1}{2\varepsilon_y} \geq 0 \quad (2-54)$$

L'équation différentielle du second-ordre à résoudre est alors :

$$u' + \frac{a^2}{24}u''' = \tilde{\varepsilon}(x) \quad \text{with} \quad \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_y} = -1 + \sqrt{1 + 2 \frac{q(L-x) + qa/2}{EA\varepsilon_y}} \quad (2-55)$$

qui peut s'exprimer avec les termes adimensionnels définis précédemment :

$$u' + \frac{a^2}{24}u''' = \tilde{\varepsilon}(x) \quad \text{with} \quad \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_y} = -1 + \sqrt{1 + \beta \left(1 + \frac{1}{2n} - x^*\right)} \quad (2-56)$$

Cette équation est résolue numériquement avec des conditions de type cinématique. L'équation n'est pas susceptible de faire apparaître des racines carrées négatives pour l'intervalle $\beta \in [0 ; +\infty]$. Les conditions aux limites d'ordre supérieur n'ont pas besoin d'être décalées dans ce cas, on utilise alors directement l'Éq. (2-42).

2.2.6 Continualisation du modèle FPU discret – approximant de Padé.

L'approximant de Padé d'ordre 2/2 de l'opérateur aux différences finies centrées est utilisé pour éviter l'introduction de conditions aux limites d'ordre supérieur associées au modèle d'élasticité au gradient d'ordre supérieur :

$$\partial_x \left(1 + \frac{a^2}{24} \partial_x^2\right) = \frac{\partial_x}{1 - \frac{a^2}{24} \partial_x^2} + \dots \quad (2-57)$$

2.2.6.1 Comportement avec point limite pour $\alpha < 0$

Le système continualisé Éq. (2-12) est dans ce cas :

$$u' = \tilde{\varepsilon}(x) - \frac{a^2}{24} \tilde{\varepsilon}'' \quad \text{avec} \quad \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_y} = 1 - \sqrt{1 - \beta \left(1 + \frac{1}{2n} - x^*\right)} \quad (2-58)$$

Cette équation peut être lue comme une forme d'équation non locale où la déformation $\varepsilon(x)$ s'écrit selon une équation différentielle du second ordre implicite exprimée par rapport à la déformation locale $\hat{\varepsilon}(x) = u'(x)$. Cela a été utilisé par Eringen pour des équations différentielles implicites de contrainte-déformation (Eringen 1983). Des

déformations non locales similaires ont été utilisées pour des problèmes d'endommagement par (Peerlings et al. 1996).

L'intégration de cette équation avec les conditions aux limites de type cinématique $u(0) = 0$ mène à la solution continuallisée associée à l'approximant de Padé :

$$\frac{u^*}{\varepsilon_y} = x^* - \frac{2 \left[\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2n} - x^* \right) \beta \right)^{3/2} - \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \beta \right)^{3/2} \right]}{3\beta} \quad \text{pour } x^* \in [0,1] \quad (2-59)$$

$$+ \frac{\beta}{48n^2 \left[\sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{2n} - x^* \right) \beta} - \sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \beta} \right]}$$

On peut montrer à nouveau que le chargement adimensionnel β ne peut pas dépasser une valeur critique β_{cr} mise en valeur pour la méthode d'élasticité au gradient d'ordre supérieur, voir Éq. (2-48). Les deux méthodes continuallisées basées sur la condition aux limites de type cinématique $u(0) = 0$ présentent des comportements différents à proximité de la charge critique, mais aucune des deux aboutissent à des chargements dépassant cette valeur. En considérant la condition aux limites de type statique (ou loi cohésive), l'Éq. (2-51) donne, après intégration, une solution analytique pour la branche ascendante (avant que la charge n'atteigne $\beta_{\max} = 1$) :

$$\frac{u^*}{\varepsilon_y} = x^* - \frac{2 \left[\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2n} - x^* \right) \beta \right)^{3/2} - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \beta \right)^{3/2} \right]}{3\beta} \quad \text{pour } x^* \in \left[\frac{1}{n}, 1 \right] \quad (2-60)$$

$$+ \frac{\beta}{48n^2 \left[\sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{2n} - x^* \right) \beta} - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \beta} \right]} - \frac{\sqrt{1-\beta}}{n}$$

Pour ce qui est de la branche descendante, il est important d'insister sur le fait que seul le premier élément, avec des conditions limite de type cohésif, reprend la plus grande charge et atteint la branche descendante (voit son module élastique diminuer).

On intègre alors avec la seconde condition aux limites de type statique, Éq. (2-52), ce qui nous donne la solution « radoucissante » :

$$\frac{u^*}{\varepsilon_y} = x^* - \frac{2 \left[\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2n} - x^* \right) \beta \right)^{3/2} - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \beta \right)^{3/2} \right]}{3\beta} + \frac{\beta}{48n^2 \left[\sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{2n} - x^* \right) \beta} - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \beta} \right]} + \frac{\sqrt{1 - \beta}}{n} \quad \text{pour } x^* \in \left[\frac{1}{n}, 1 \right] \quad (2-61)$$

La comparaison des deux méthodes avec la condition aux limites de type statique (ou modèle d'élasticité cohésive) est illustrée en Figure 2-10.

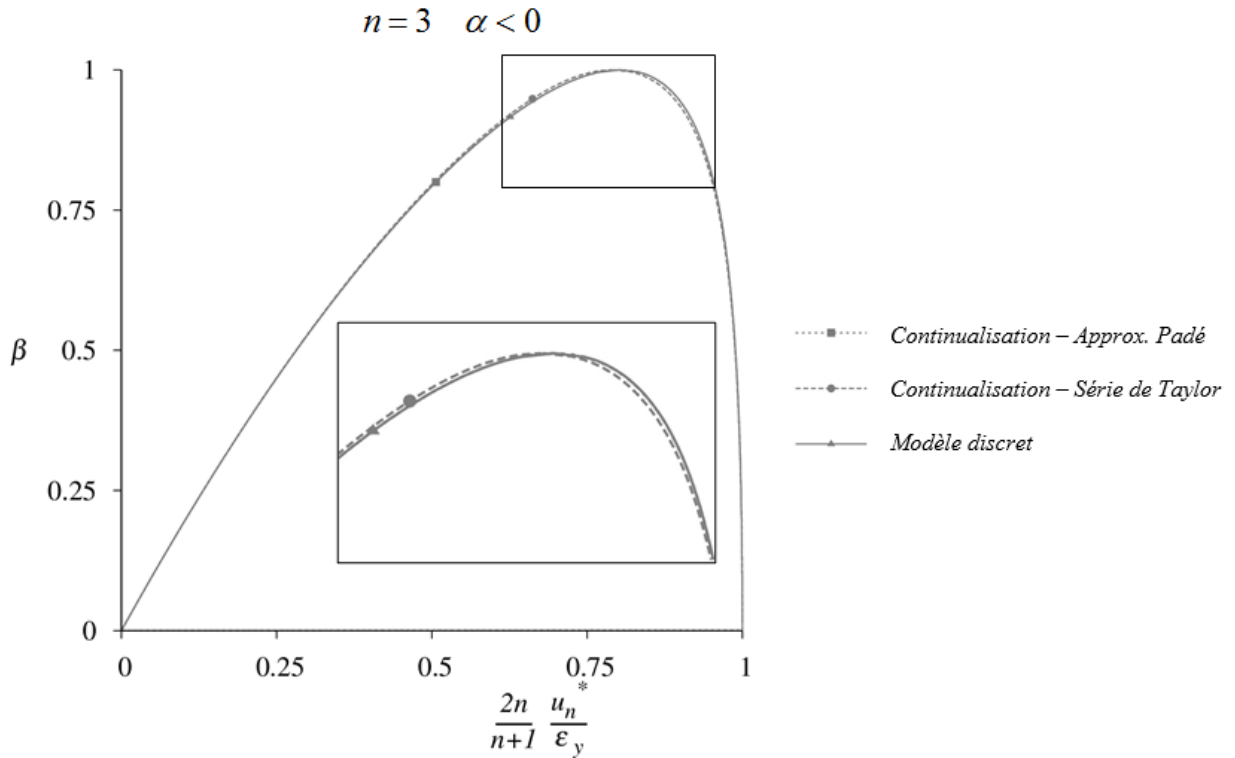


Figure 2-10 – Effort-déplacement adimensionnalisé du système continu avec condition « statique » (ou modèle cohésif) avec et sans l'utilisation de l'approximant de Padé.

Les deux méthodes présentent des résultats assez fidèles à la réponse discrète. Cependant la précision diminue avec l'augmentation de la charge β , comme illustrée en Figure 2-11, où le pourcentage d'erreur entre les deux méthodes de continualisation et le modèle discret de référence pour tout l'intervalle de chargement est tracé.

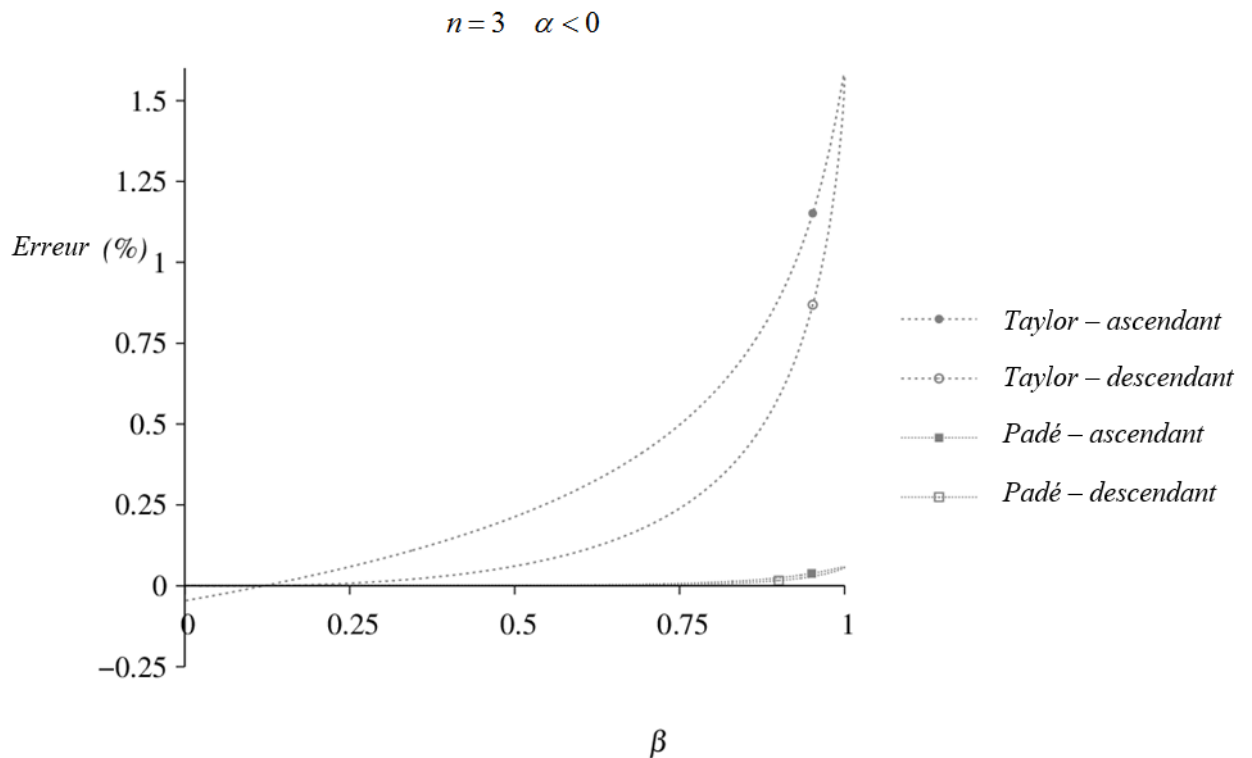


Figure 2-11 – Pourcentage d’erreur vis-à-vis de la réponse discrète des deux continuations avec la condition « statique » en fonction du chargement.

La continuation basée sur l’approximant de Padé est clairement la plus précise avec un maximum de 0,05% d’erreur comparé au 1,5% d’erreur maximum de la continuation en série de Taylor. Cette moindre précision peut être attribuée au décalage de la condition aux limites d’ordre supérieur qui nous a permis d’obtenir une réponse pour tout l’intervalle de chargement, l’approximant de Padé ne nécessitant pas de condition aux limites d’ordre supérieur. Il est intéressant de mentionner que les courbes ont été tracées avec un faible nombre d’élément $n=3$ pour chaque figure, afin d’exacerber la contribution du terme non local, mettant ainsi en valeur l’efficacité des modèles continués. Bien sûr, les 2 méthodes fonctionnent aussi pour des valeurs élevées de n . La continuation basée sur l’approximant de Padé avec la condition aux limites de type statique offre les meilleurs résultats. La Figure 2-12 se concentre sur les solutions de la continuation avec approximant de Padé avec les deux types de conditions aux limites comparées à la réponse du modèle continu local.

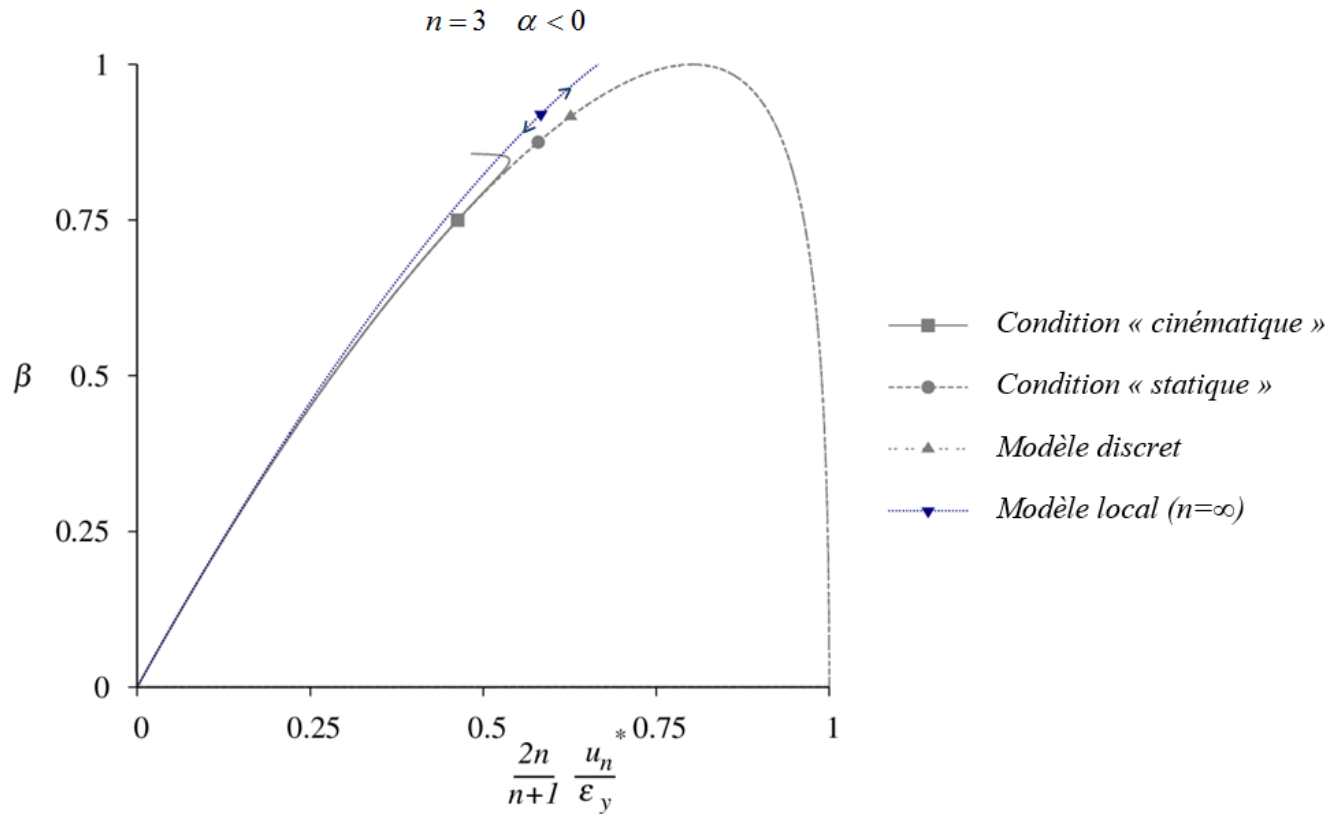


Figure 2-12 – Effort-déplacement adimensionnalisé du système continu avec conditions « cinématique » et « statique » avec l'approximant de Padé ainsi que la réponse locale pour comparaison.

Comme déjà précisé précédemment dans l'analyse discrète, le modèle continu local (un modèle discret avec un nombre infini de maillon) ne présente pas d'hystérésis entre la courbe ascendante et descendante. Le profil de déplacement le long de la chaîne, $u^*(x^*)$, est représenté pour différentes valeurs de β en Figure 2-13.

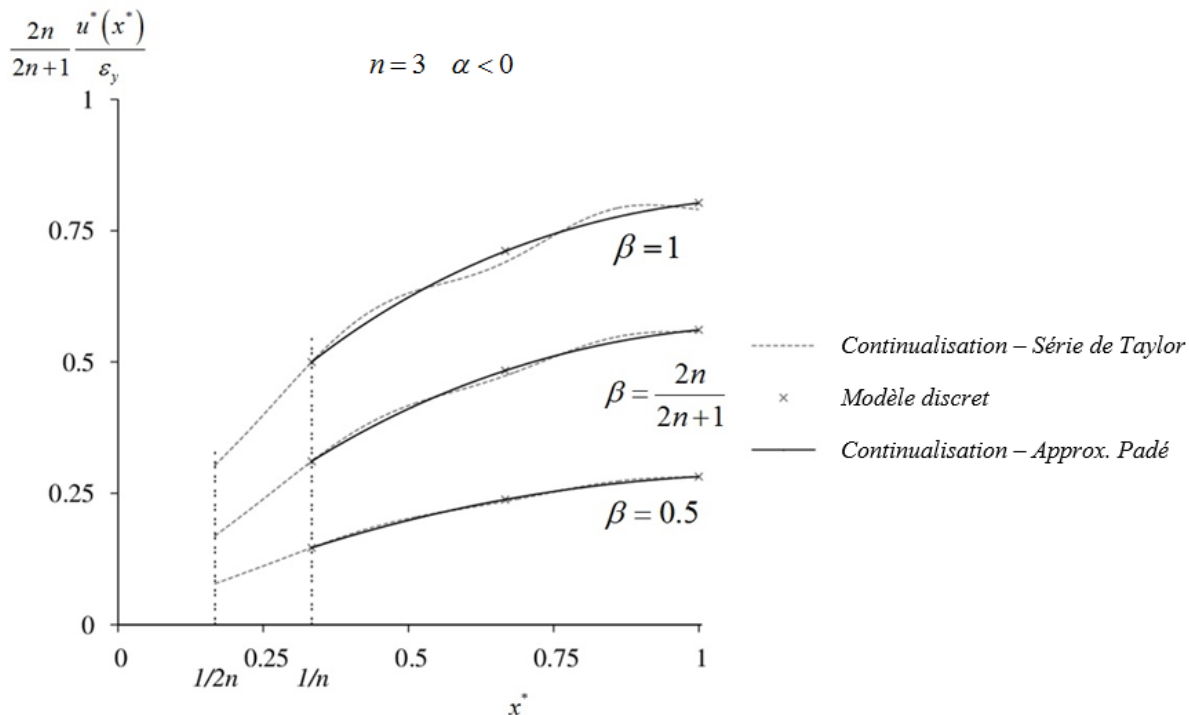


Figure 2-13 – déplacement adimensionnel normalisé le long de la chaîne pour les deux méthodes de continualisation avec condition « statique » pour un modèle discret de référence de 3 éléments ($n = 3$) pour différentes valeurs de β ($\beta_{max} = 1$, $\beta_{cr} = 2n/(2n+1) = 6/7$ et $\beta = 0,5$).

On peut voir que le modèle non local basé sur l’approximant de Padé (défini pour $x^* \in [1/n ; 1]$) correspond bien aux déplacements des nœuds du système discret. Cependant, la continualisation basée sur les séries de Taylor (définie pour $x^* \in [1/(2n) ; 1]$) présente des oscillations dont l’amplitude augmente avec des valeurs de β plus élevées.

2.2.6.2 Comportement monotone pour $\alpha > 0$

Pour $\alpha > 0$, le système continualisé est :

$$u' = \tilde{\varepsilon}(x) - \frac{a^2}{24} \tilde{\varepsilon}'' \quad \text{avec} \quad \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_y} = -1 + \sqrt{1 + \beta \left(1 + \frac{1}{2n} - x^*\right)} \quad (2-62)$$

Comme précédemment, on intègre cette équation avec la condition aux limites de type cinématique, $u(0) = 0$, ce qui nous mène à la solution continuallisée, associée à l'approximant de Padé :

$$\frac{u^*}{\varepsilon_y} = -x^* - \frac{2 \left[\left(1 + \left(1 + \frac{1}{2n} - x^* \right) \beta \right)^{3/2} - \left(1 + \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \beta \right)^{3/2} \right]}{3\beta} \quad \text{pour } x^* \in [0,1] \quad (2-63)$$

$$+ \frac{\beta}{48n^2 \left[\sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{2n} - x^* \right) \beta} - \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \beta} \right]}$$

Figure 2-14 présente les 2 méthodes de continuallisation avec condition aux limites « cinématique » pour $\alpha > 0$.

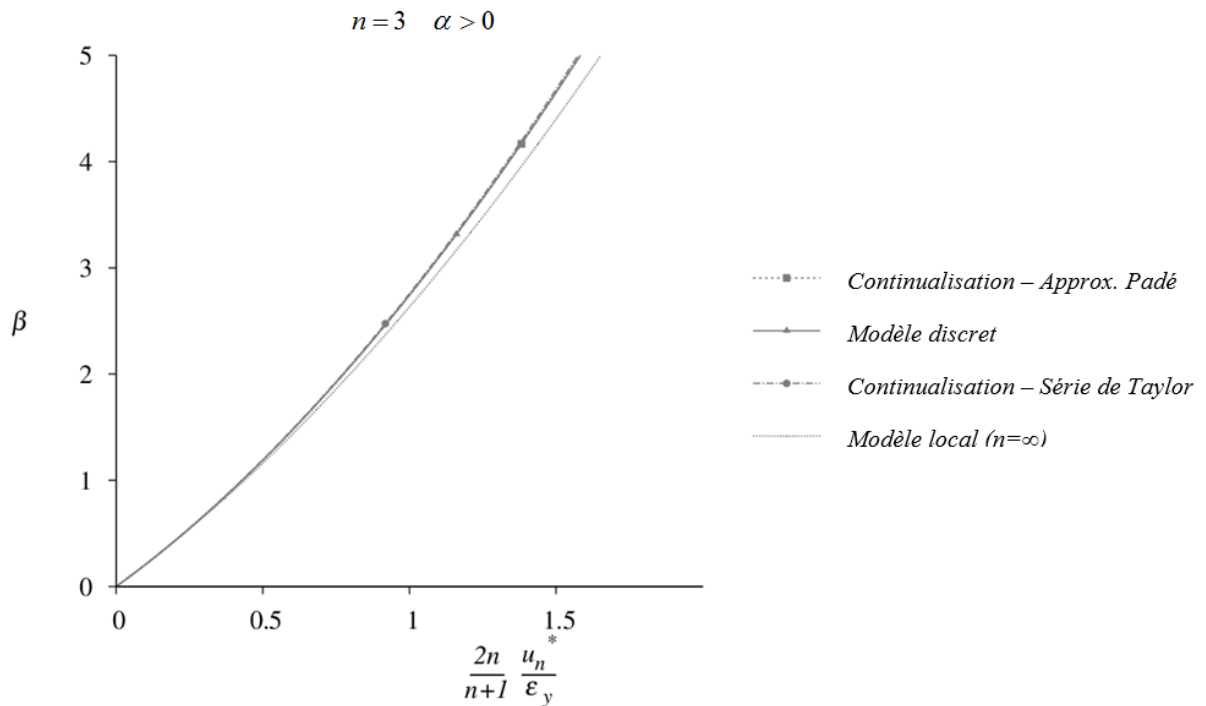


Figure 2-14 – Effort-déplacement adimensionnalisé du système continuallisé avec condition « cinématique » avec et sans l'utilisation de l'approximant de Padé. Pour $\alpha > 0$.

Les 2 méthodes correspondent bien au comportement de la chaîne discrète, et la continuallisation par approximant de Padé a de nouveau une meilleure précision. Pour $\beta = 5$, l'erreur relative avec l'approximant de Padé est de 0,1% et de 0,5% pour les séries de Taylor. Tout comme pour la cas $\alpha < 0$, les résultats numériques issus des séries de Taylor

présentent des oscillations, illustrées Figure 2-15, qui représentent le profil de déplacement le long de la chaîne, $u^*(x^*)$.

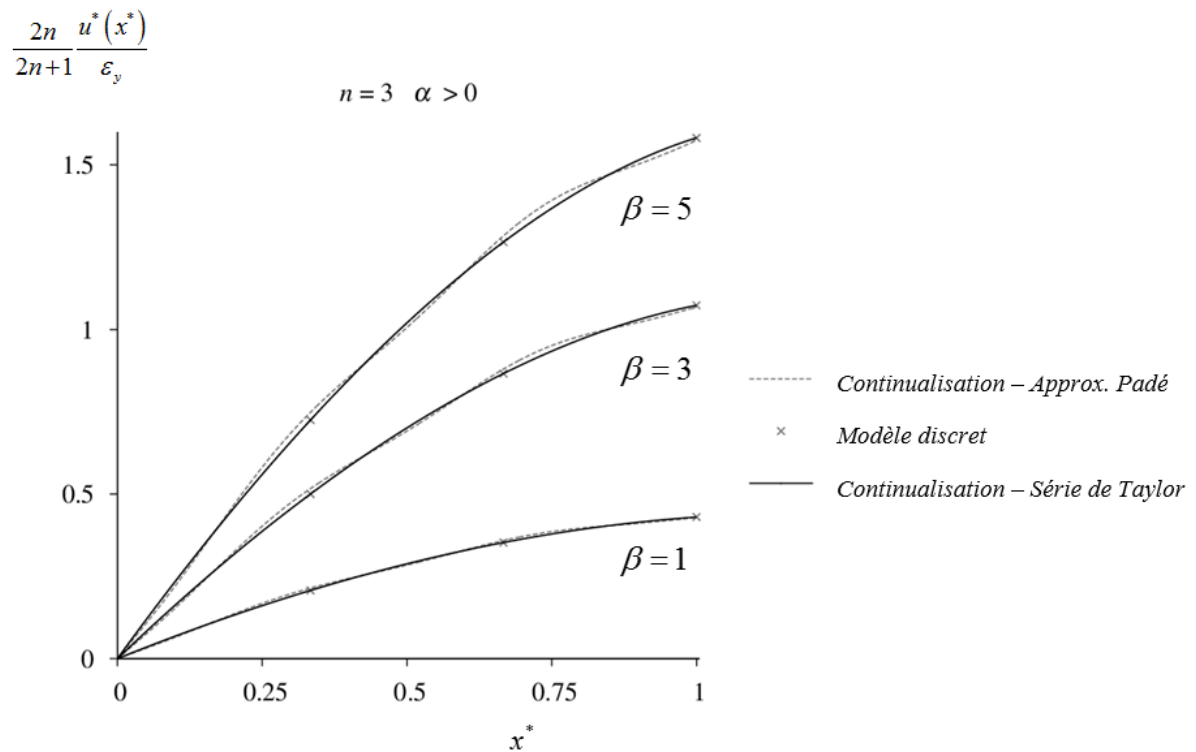


Figure 2-15 – déplacement adimensionnel normalisé le long de la chaîne pour les deux méthodes de continualisation avec condition « cinématique » pour un modèle discret de référence de 3 éléments ($n = 3$) pour différentes valeurs de β .

2.3 Chaîne élasto-endommageable

2.3.1 Système d'endommagement discret

Cette étude se concentre sur la réponse en statique d'un système axial élasto-endommageable et microstructuré. Le système d'endommagement structurel est composé de n ressorts périodiques endommageables, qui peuvent être considérés comme une chaîne discrète (ou un problème de lattice unidimensionnel endommageable). Les n éléments périodiques possèdent la même dimension initiale, notée a . De même, la longueur totale de la chaîne, L , est égale à $L = n \times a$, i.e. le nombre d'éléments périodiques multiplié par la taille de chaque élément.

On considère le comportement en déplacement d'une chaîne discrète d'une longueur de L composée de n ressorts élasto-endommageables de rigidité initiale k (voir Figure 2-16). Chaque nœud reçoit une charge concentrée qa à l'exception du dernier nœud qui reçoit seulement une charge $qa/2$, ce qui provoque une distribution linéaire de l'effort normal le long de la chaîne axiale. Le mode de chargement du dernier maillon, qui ne reprend qu'une demi-charge concentrée, permet une identification de l'effort normal dans le réseau discret comme étant égal à celui obtenu en résolvant le problème continu.

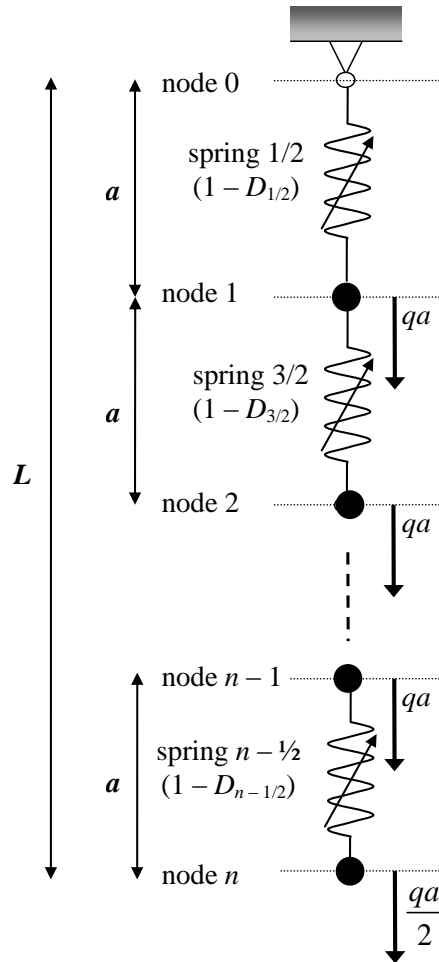


Figure 2-16 – Chaîne axiale soumise à son propre poids par unité de longueur.

2.3.1.1 Équation d'équilibre

Les équations d'équilibre sous forme discrète peuvent s'écrire :

$$\frac{N_{i+1/2} - N_{i-1/2}}{a} = -q \tag{2-64}$$

où $N_{i+1/2}$ est la force normale du ressort axial endommageable $i + 1/2$.

2.3.1.2 Comportement élasto-endommageable

Chaque ressort axial se comporte comme un ressort élasto-endommageable, dont l'élongation dépend de l'effort normal, $N_{i+1/2}$, appliqué sur le ressort $i + 1/2$:

$$N_{i+1/2} = ES(1 - D_{i+1/2}) \frac{u_{i+1} - u_i}{a} = \frac{ES}{a} (1 - D_{i+1/2}) \Delta u_{i+1/2} \quad (2-65)$$

où $u_i = u(x = x_i = ia)$ sont les déplacements aux nœuds de la chaîne, $k = ES/a$ est la rigidité initiale de chaque élément élastique périodique et $D_{i+1/2}$ est la valeur de l'endommagement de chaque maillon de la chaîne ou de chaque ressort axial $i + 1/2$. $D_{i+1/2}$ varie entre 0 pour le ressort non endommagé et 1 pour le ressort totalement endommagé ou rompu. L'Éq. (2-65) s'applique sur toute la longueur du système et peut être reformulée en termes d'effort normal effectif décalé vers la gauche d'un demi maillon (Picandet et al. 2015) comme suit :

$$\tilde{N}_i = \frac{N_i}{1 - D_i} = ES \frac{\Delta u_i}{a} \text{ avec } \Delta u_i = \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a} \quad (2-66)$$

où \tilde{N}_i désigne l'effort normal dans le ressort translationnel fictif i , centré au niveau du nœud i et situé entre les nœuds fictifs $i - 1/2$ et $i + 1/2$. On considère donc que la fonction de charge d'endommagement est formée ainsi :

$$f(\Delta u_i, D_i) = \frac{\Delta u_i}{\Delta u_y} - 1 - \alpha D_i \leq 0 \quad (2-67)$$

Par conséquent, la fonction de charge d'endommagement dépend de deux paramètres du matériau : Δu_y est le déplacement relatif nécessaire pour l'initiation du phénomène d'endommagement et α contrôle la réponse en radoucissement du matériau en présence d'effets de propagation de l'endommagement. Ce dernier peut être considéré comme un paramètre de durcissement qui doit être positif pour éviter au ressort d'éventuels effets de type snap-back (Picandet et al. 2015). Cette loi d'endommagement effort-déplacement peut être considérée comme une variante de la fonction de charge d'endommagement de Marigo (Marigo 1981). De plus, on peut voir que la pente de la fonction effort-déplacement est contrôlée par la valeur de α dans la configuration d'endommagement. $\alpha \in [0;1]$ est associé à un régime de radoucissement de l'endommagement, alors que pour $\alpha \geq 1$ un régime d'écrouissage précède le régime de radoucissement avant la rupture. La Figure 2-17 montre

l'évolution des courbes d'effort-déplacement d'un élément constitutif pour un chargement monotone, selon le paramètre adimensionnel α .

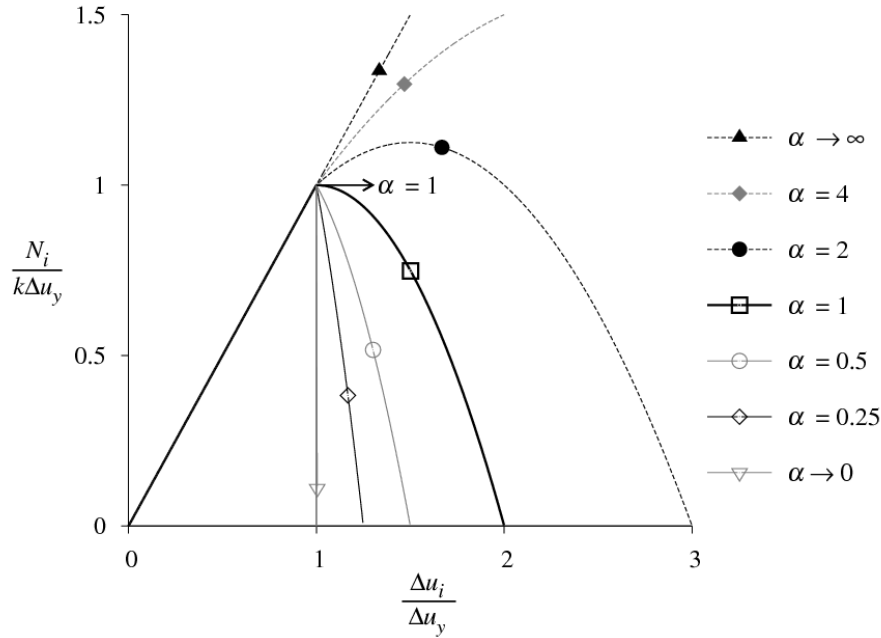


Figure 2-17 – Comportement du ressort élasto-endommageable $\frac{N_i}{k\Delta u_y} = f\left(\frac{\Delta u_i}{\Delta u_y}\right)$; La phase d'endommagement commence au point d'endommagement $(\Delta u_i, N_i) = (\Delta u_y, C\Delta u_y)$

Les conditions de chargement-déchargement (conditions de Kuhn-Tucker) sont définies par :

$$f(\Delta u_i, D_i) \leq 0, \quad \dot{D}_i \geq 0, \quad f(\Delta u_i, D_i) \dot{D}_i = 0 \quad (2-68)$$

Dans le cas d'un chargement monotone, l'évolution de l'endommagement au sein de la zone endommagée est dictée par le critère de charge d'endommagement $f(\Delta u_i, D_i) = 0$, menant à une égalité forcée entre la variable de déplacement et celle d'endommagement.

Pour le chargement monotone étudié dans ce chapitre, l'inégalité de l'Éq. (2-67) peut être reformulée sous forme d'une égalité exprimée selon des variables en déplacement équivalent comme suit :

$$\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a\varepsilon_y} = 1 + \alpha D_i \text{ avec } \varepsilon_y = \frac{\Delta u_y}{a} \quad (2-69)$$

On peut noter que les équations discrètes présentées ici ne sont rien d'autre qu'un modèle numérique en différences finies centrées d'un problème d'endommagement « local ». De ce fait, la loi d'endommagement élastique démontrée par l'Éq. (2-66) pour le problème de lattice peut être maintenant utilisé pour le problème continu « local » :

$$\tilde{N} = \frac{N}{1-D} = ES\varepsilon \text{ et } \varepsilon = u' \quad (2-70)$$

et la fonction de charge donnée dans l'Éq. (2-69) peut être formulée pour le problème continu comme ceci :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = 1 + \alpha D \quad (2-71)$$

couplée avec l'équation d'équilibre du problème de lattice, l'Éq. (2-64) peut être désormais notée pour le problème continu comme suit :

$$N' = -q \quad (2-72)$$

où le symbole prime indique la dérivée en respectant la coordonnée longitudinale x (i.e. $\partial/\partial x$).

2.3.1.3 Comportement élastique - Solution exacte

La solution analytique exacte du système élastique discret est tout d'abord étudiée dans cette section. Si $D_i = 0 \forall i \in [1, n]$, lors de la phase élastique, alors l'Éq. (2-65) se réduit à :

$$N_i = q(L - ai) = EA \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a} \quad (2-73)$$

L'équation d'équilibre dans le cas d'une élasticité pure peut être notée ainsi :

$$-qa = N_{i+1/2} - N_{i-1/2} = k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (2-74)$$

Quand des paramètres adimensionnels sont pris en compte, la relation ci-dessus résulte en :

$$\frac{u_{i+1}^* - 2u_i^* + u_{i-1}^*}{a^2} = -q^* \text{ avec } u^* = u/L, a^* = a/L = 1/n \text{ et } q^* = qL/ES \quad (2-75)$$

On peut la considérer comme une équation linéaire aux différences finies de second ordre. On peut obtenir la solution de cette équation avec l'Éq. (2-20), comme pour le système FPU, cependant les conditions aux limites sont légèrement différentes du fait des masses concentrées considérées dans ce problème :

$$u_0^* = 0 \text{ et } \frac{u_n^* - u_{n-1}^*}{a^*} = \frac{q^*}{2n} \quad (2-76)$$

Les conditions aux limites $u_0 = 0$ mènent à un terme constant nul, i.e. $B = 0$, pendant que $u_n^* - u_{n-1}^* = q^*/2n^2$ permet la détermination de A qui nous amène à la solution élastique :

$$EAu_i = -\frac{qa^2}{2}i^2 + qLai \quad (2-77)$$

Nous pouvons voir dans l'Éq.(2-77) que le déplacement axial du lattice élastique correspond exactement à la solution continue locale avec la relation $x = ai$. Le chargement limite d'endommagement, q_y , est calculé à condition que le premier maillon encastré atteigne sa limite maximale d'élasticité, i.e. :

$$N_{1/2} = q\left(L - \frac{a}{2}\right) = ES\varepsilon_y \Rightarrow q_y = \frac{\varepsilon_y ES}{L\left(1 - \frac{1}{2n}\right)} \quad (2-78)$$

L'Éq.(2-78) montre que le chargement limite d'endommagement dépend de la taille de la microstructure. Cela met en lumière le caractère intrinsèque de l'effet d'échelle en résistance de ce modèle de lattice endommageable. Il est aussi possible d'introduire le chargement limite d'endommagement « local », qui est obtenu de manière asymptotique quand $n \rightarrow \infty$.

$$q_{y,\infty} = \frac{\varepsilon_y ES}{L} \quad (2-79)$$

Les paramètres de charge adimensionnels suivants peuvent être introduits ainsi :

$$\beta = \frac{q}{q_{y,\infty}} \text{ et } \beta_y = \frac{q_y}{q_{y,\infty}} \quad (2-80)$$

Grâce aux Éq. (2-79) et (2-80) β_y peut désormais être exprimé comme une fonction de n :

$$\beta_y = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)} = \frac{2n}{2n-1} \quad (2-81)$$

La réponse globale du lattice endommageable peut être mesurée par le déplacement de l'extrémité $\delta = u_n$. Si $\beta \leq \beta_y$, i.e. dans le régime élastique, l'Éq. (2-78) nous donne le rapport effort-déplacement exprimé en utilisant le déplacement adimensionnel élastique de l'extrémité, $u_n^*/\varepsilon_y = \delta^*/\varepsilon_y$:

$$\beta = \frac{2}{\varepsilon_y} \delta^* \quad (2-82)$$

On peut normaliser le déplacement de la chaîne par rapport au déplacement de la chaîne à la limite élastique $n \rightarrow \infty$, qui est associée à la charge adimensionnelle β égale à 1, i.e. $q = q_{y,\infty}$. Le déplacement de l'extrémité au point de limite élastique, $\delta_{y,\infty}^*$, est obtenu ainsi :

$$\delta_{y,\infty}^* = \frac{\varepsilon_y}{2} \quad (2-83)$$

Ci-après, les déplacements de l'extrémité sont normalisés en fonction du déplacement maximum élastique de l'extrémité, δ_y . Les courbes d'effort-déplacement présentées ici sont tracées selon des variables normalisées : le chargement adimensionnel β et le déplacement normalisé, δ/δ_y . En conséquence, toutes les courbes se croisent au même point (quand $\beta = 1$, $\delta/\delta_y = 1$), peu importe le nombre, n , d'éléments périodiques dans la chaîne, même si le seuil d'élasticité pour un nombre donné de n est plus élevé que ce point d'élasticité.

2.3.1.4 Réponse globale de l'approche discrète élasto-endommageable

Dans cette étude, nous examinons un mode de chargement contrôlé en déplacement. Dans le cas d'un mode de chargement monotone, dès que l'endommagement est amorcé dans la chaîne axiale, elle se comporte de manière non-linéaire dans la zone endommagée connectée à l'encastrement, et élastiquement dans le reste de la chaîne. Tout d'abord, nous cherchons une solution pour la zone d'endommagement. En combinant les équations Éq. (2-64), (2-65) et (2-69), on obtient le champ d'endommagement discret par l'équation d'endommagement non-linéaire suivante :

$$(1 + \alpha D_i) \varepsilon_y = \frac{q(L - ia)}{ES(1 - D_i)} \quad (2-84)$$

Si nous combinons les équations Éq. (2-79) et (2-80), nous pouvons réécrire l'Éq. (2-84) sous forme adimensionnelle :

$$(1 + \alpha D_i)(1 - D_i) = \beta(1 - ia^*) \quad (2-85)$$

Pour $\beta > \beta_y$ et $\alpha \geq 1$ (dans la phase d'écroutissage), il se produit une propagation de l'endommagement et la valeur de ce dernier dans le problème discret est directement lié au paramètre de charge, β , dans l'Éq. (2-85), qui peut s'exprimer comme une équation polynomiale de second ordre :

$$D_i^2 + \frac{1 - \alpha}{\alpha} D_i + \frac{\beta(1 - ia^*) - 1}{\alpha} = 0 \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{q}{q_{y,\infty}} \quad (2-86)$$

qui admet deux solutions :

$$D_i = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{i}{n}\right)} \quad (2-87)$$

La solution d'écroutissage est notée par le signe positif D_i^+ et est égale à la solution minimale de l'équation polynomiale de second-ordre :

$$D_i^+ = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{i}{n}\right)} \quad (2-88)$$

La solution de radoucissement est notée par le signe négatif D_i^- et est égale à la solution maximale de l'équation polynomiale de second-ordre :

$$D_i^- = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{i}{n}\right)} \quad (2-89)$$

La transition entre l'écroutissage et le radoucissement est obtenue au point de connexion des 2 phases dans le ressort le plus tendu, pour lequel l'endommagement est $D_{1/2}$ (lié à l'encastrement) :

$$\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 0 \Rightarrow \beta_{\max} = \beta_y \frac{(1 + \alpha)^2}{4\alpha} \quad (2-90)$$

Cela signifie que pour la phase d'écroutissage, nous devons calculer, pour un paramètre de chargement donné $\beta \in [\beta_y; \beta_{\max}]$, le nombre p de ressorts endommagés actifs et le nombre $n - p$ de ressorts élastiques complémentaires dans la chaîne microstructurée. Le nombre p de ressorts endommagés dépend du paramètre de chargement et peut être calculé à partir de la longueur endommagée continue l_0 , associé à une valeur nulle du paramètre d'endommagement. Toutefois, comme l'endommagement D_i est calculé avec le déplacement du lattice $u_{i+1/2}$ et $u_{i-1/2}$, la longueur endommagée est calculée à partir de l'équation non-linéaire suivante :

$$D_i^+ \left(i = \frac{l_0}{a} + \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow l_0^* = \frac{l_0}{L} = \frac{1}{\beta_y} - \frac{1}{\beta} \quad (2-91)$$

Le nombre p de ressorts endommagés devrait donc être limité par l'inégalité suivante :

$$\frac{p - 1}{n} \leq l_0^* = \frac{1}{\beta_y} - \frac{1}{\beta} < \frac{p}{n} \quad (2-92)$$

ou par :

$$p = E \left[n \left(\frac{1}{\beta_y} - \frac{1}{\beta} \right) \right] + 1 \quad (2-93)$$

Le nombre maximal de ressorts endommagés, p_{max} , est égal à :

$$p_{max} = E \left[n \left(\frac{1}{\beta_y} - \frac{1}{\beta_{max}} \right) \right] + 1 \quad (2-94)$$

Pendant la phase d'érouissage, pour le nombre p de ressorts endommagés, l'équation aux différences finies de premier ordre doit être résolue avec :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{a\varepsilon_y} = 1 + \alpha D_{i+1/2}^+ \quad \text{avec} \quad D_{i+1/2}^+ = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{i}{n} - \frac{1}{2n} \right)} \quad (2-95)$$

L'équation aux différences finies de premier ordre peut être intégrée numériquement en utilisant une méthode itérative avec $u_0 = 0$ comme condition aux limites. Il est également possible de trouver une solution analytique pour l'équation aux différences finies linéaire Éq. (2-95). Si l'on considère les mêmes conditions aux limites pour l'extrémité encastreee $u_0 = 0$, Éq. (2-95) peut s'écrire :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{a\varepsilon_y} = \frac{\alpha + 1}{2} - \sqrt{\frac{\beta\alpha}{n}} \sqrt{\frac{n(1 + \alpha)^2}{4\beta\alpha} - \left(n - i - \frac{1}{2} \right)} \quad (2-96)$$

qui peut aussi être exprimée par :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{a\varepsilon_y} = b_1 - b_2 \times \sqrt{b_3 + i} \quad \text{avec} \quad b_1 = \frac{\alpha + 1}{2} ; b_2 = \sqrt{\frac{\beta\alpha}{n}} \quad \text{et} \quad b_3 = \frac{n(1 + \alpha)^2}{4\beta\alpha} + \frac{1}{2} - n. \quad (2-97)$$

Par addition, nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^{j-1} \frac{u_{i+1}^* - u_i^*}{\varepsilon_y} = \frac{u_j^* - u_0^*}{\varepsilon_y} = j b_1 - b_2 \sum_{i=0}^{j-1} \sqrt{b_3 + i} \quad \text{avec} \quad (2-98)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{j-1} \sqrt{b_3 + i} &= \sqrt{b_3} + \sqrt{b_3 + 1} + \sqrt{b_3 + 2} + \dots + \sqrt{b_3 + j - 1} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{b_3 + j + k} + \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{b_3 + k} = -\zeta_H \left[-\frac{1}{2}, b_3 + j \right] + \zeta_H \left[-\frac{1}{2}, b_3 \right] \end{aligned} \quad (2-99)$$

Chaîne axiale microstructurée

Avec ζ_H , la fonction Hurwitz Zêta définie comme suit :

$$\zeta_H[s, q] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+q)^{-s} \quad \text{ou} \quad \zeta_H\left[-\frac{1}{2}, q\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+q)^{1/2} \quad (2-100)$$

L'équation aux différences finies de premier ordre mène à une solution analytique en utilisant la fonction Hurwitz Zêta :

$$\frac{u_i}{a\varepsilon_y} = b_1 i - C_1 + b_2 \times \left(-\zeta_H\left[-\frac{1}{2}, b_3\right] + \zeta_H\left[-\frac{1}{2}, b_3 + i\right] \right) \quad (2-101)$$

Éq.(2-101) devient :

$$\frac{u_i}{a\varepsilon_y} = \frac{\alpha+1}{2} i + C_1 + \sqrt{\frac{\beta\alpha}{n}} \times \left(\begin{array}{l} -\zeta_H\left[-\frac{1}{2}, \frac{n(1+\alpha)^2}{4\beta\alpha} + \frac{1}{2} - n\right] \\ +\zeta_H\left[-\frac{1}{2}, \frac{n(1+\alpha)^2}{4\beta\alpha} + \frac{1}{2} - n + i\right] \end{array} \right) \quad (2-102)$$

Si $u_0 = 0$ alors $C_1 = 0$, donc la solution exacte de l'équation du lattice endommageable est :

$$\frac{u_i}{a\varepsilon_y} = \frac{\alpha+1}{2} i + \sqrt{\frac{\beta\alpha}{n}} \times \left(\begin{array}{l} -\zeta_H\left[-\frac{1}{2}, \frac{n(1+\alpha)^2}{4\beta\alpha} + \frac{1}{2} - n\right] \\ +\zeta_H\left[-\frac{1}{2}, \frac{n(1+\alpha)^2}{4\beta\alpha} + \frac{1}{2} - n + i\right] \end{array} \right) \quad (2-103)$$

Pour vérifier les résultats, nous avons calculé les déplacements du nœud dans la zone endommagée, c'est-à-dire pour $i \leq p$, en utilisant les méthodes analytique et numérique itérative. Les solutions analytique et numérique exacte sont identiques.

Dès que le paramètre de chargement atteint $\beta = \beta_{\max}$, le ressort le plus sollicité (connecté à l'encastrement) entre en phase de radoucissement caractérisé par :

$$\frac{u_1}{a\varepsilon_y} = 1 + \alpha D_{1/2}^- \quad \text{avec} \quad D_{1/2}^- = \frac{\alpha-1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)} \quad (2-104)$$

Les $p - 1$ ressorts endommagés se décharge élastiquement avec la valeur d'endommagement atteinte à $\beta = \beta_{\max}$, tandis que les $n - p$ ressorts élastiques se déchargent élastiquement.

Les Figures 2-18 et 2-19 présentent les résultats numériques obtenus par une approche itérative numérique, appliquée à l'écroutissement et au radoucissement du problème axial discret. Pour un système discret donné (en fixant $n = 4$), la Figure 2-18 montre que le paramètre α contrôle l'amplitude de l'écroutissement et la valeur de chargement ultime.

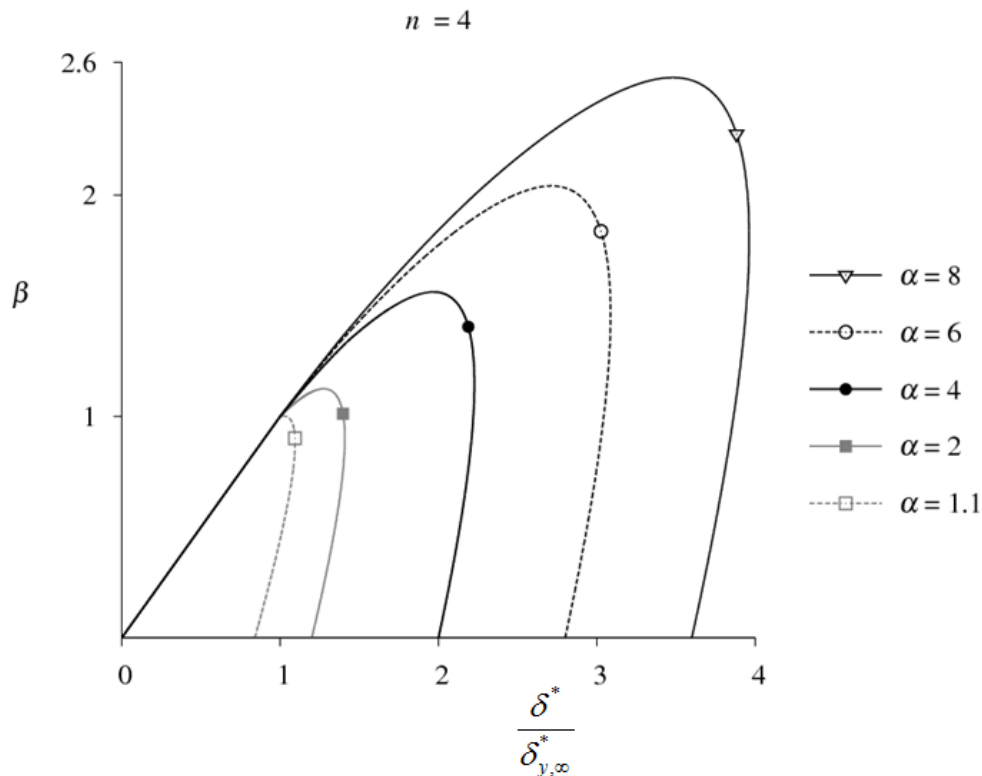


Figure 2-18 – Déplacement adimensionnel de l'extrémité de la chaîne en fonction du chargement, avec $n = 4$ et différentes valeurs du paramètre α

D'autre part, comme l'illustre la Figure 2-19, le radoucissement dépend beaucoup du nombre de cellules n ; la réponse se fragilise pour un grand nombre de cellules, alors que la réponse quasi-fragile est obtenue pour un système structuré composé de quelques cellules endommagées. De plus, nous observons que la taille de la microstructure, n , a aussi un effet sur le chargement maximal. Ce résultat attendu est ici confirmé pour le système microstructuré d'endommagement écroutissement-radoucissement. Concernant la normalisation de la Figure 2-19, toutes les courbes passe par le point d'élasticité (1 ; 1), ce qui correspond à la limite du domaine élastique quand $n \rightarrow \infty$.

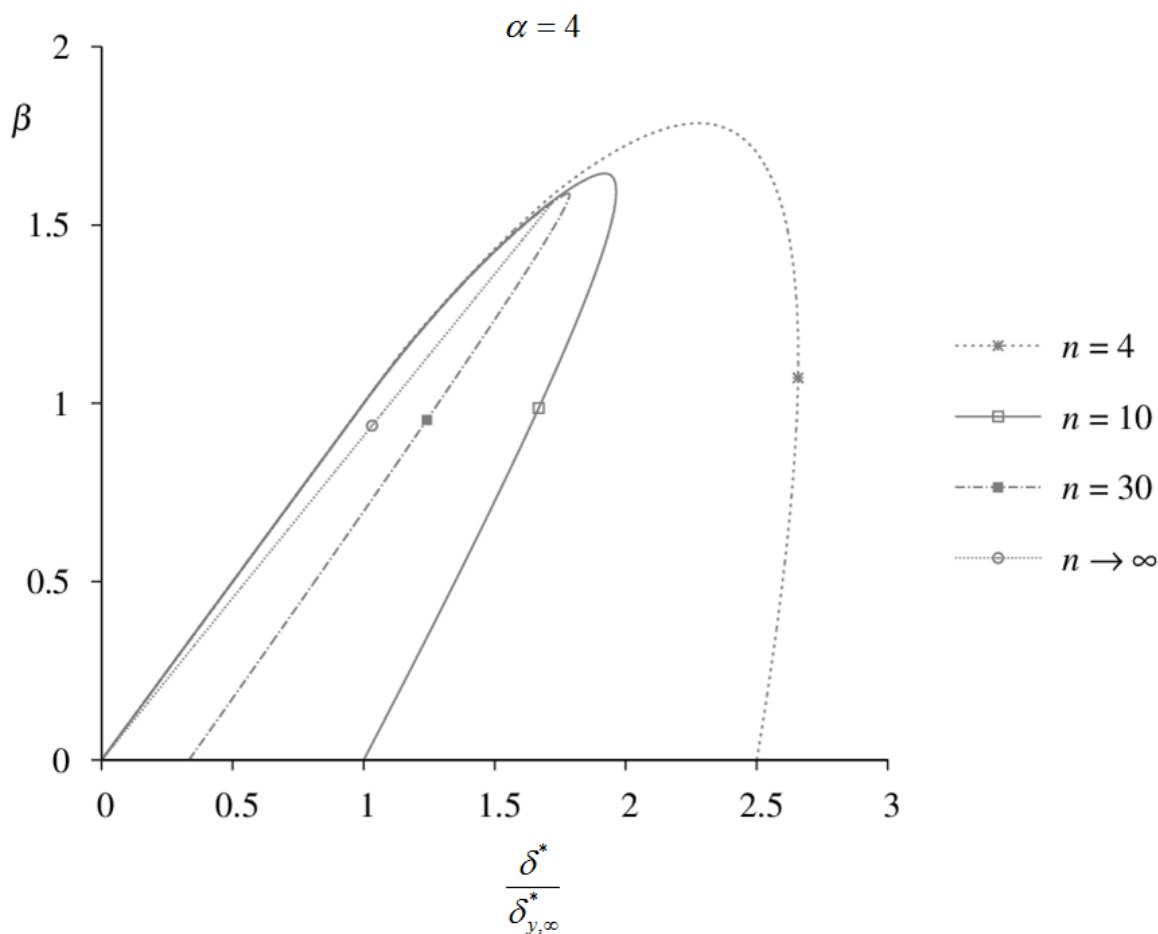


Figure 2-19 – Déplacement adimensionnel de l'extrémité de la chaîne en fonction du chargement, avec $\alpha = 4$ et différents nombres d'éléments constitutifs

La Figure 2-20 montre l'effet d'échelle en termes de résistance par rapport à la taille de la cellule, n . Nous observons des résultats similaires à ceux détaillés en (Bažant 2005) : la résistance augmente pour les petits spécimens (initialement spécimens non-fissurés). La relation d'effet d'échelle a déjà fait l'objet d'un commentaire de Bažant, pour des spécimens non-fissurés. Ici, l'effet d'échelle en résistance est donné par :

$$\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\max,\infty}} = \beta_y = \frac{1}{1 - \frac{1}{2n}} = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2-105)$$

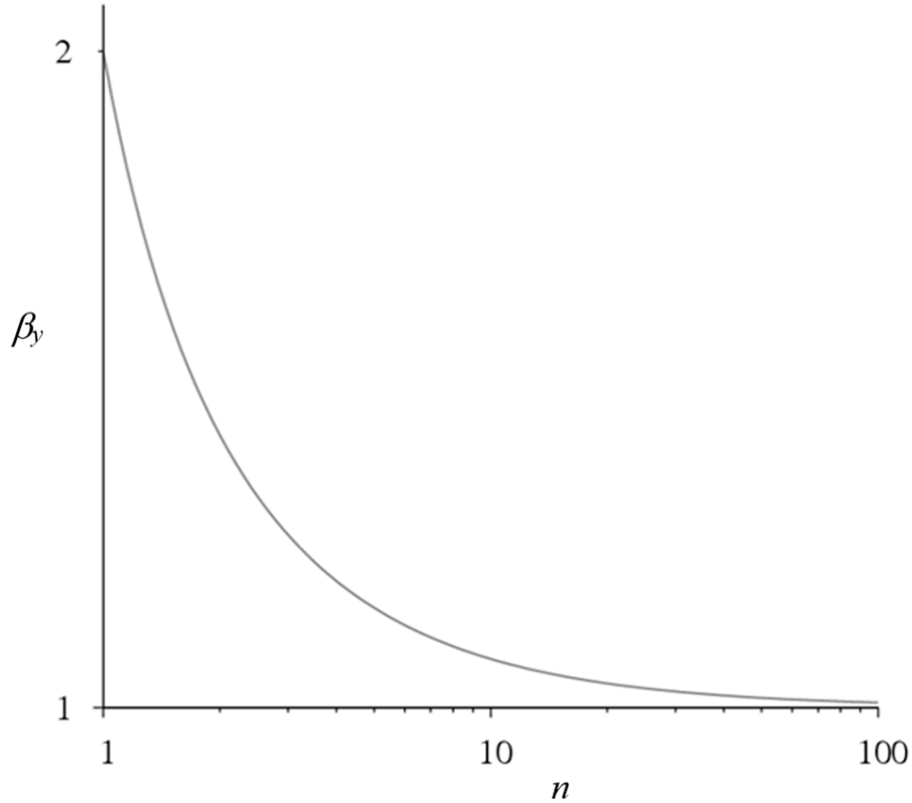


Figure 2-20 – Représentation de l'évolution de l'effet d'échelle en résistance selon la taille de la microstructure, n .

2.3.2 Approche de continualisation

2.3.2.1 Principes de base de la méthode

Dans cette partie, nous développons un modèle non-local de mécanique continue de l'endommagement directement des équations d'endommagement discret en utilisant de nouveau la procédure de continualisation décrite en Éq. (2-37). Pour l'écroutissage, et pour $x^* \in [0; l_0^*]$, l'équation discrète en Éq. (2-69) peut être étendue à un milieu continu équivalent grâce à une procédure de continualisation, comme l'Éq. (2-43). Il est aussi possible d'obtenir une expansion rationnelle en utilisant l'approximant de Padé d'ordre 2/2 :

$$\partial_x \left(1 + \frac{a^2}{24} \partial_x^2 \right) = \frac{\partial_x}{1 - \frac{a^2}{24} \partial_x^2} + \dots \quad (2-106)$$

Le système discret en Éq. (2-69) peut être approximé par :

$$\frac{\partial_x}{1 - \frac{a^2}{24} \partial_x^2} \left[\frac{u(x)}{\varepsilon_y} \right] = 1 + \alpha D(x) \quad (2-107)$$

On voit apparaître une longueur caractéristique au carré égale à $a^2/24$. Cette même valeur avait déjà été obtenue par (Jaberolanssar and Peddieson 1981) pour un réseau lattice non endommagé et aussi par (Bažant 1984) pour un modèle de réseau endommageable appelé « modèle imbriqué ». La fonction de chargement continu donnée en Éq. (2-107) peut aussi être exprimée de manière non-locale :

$$u' = \varepsilon_y \left(1 + \alpha D - \alpha \frac{a^2}{24} D'' \right) \text{ avec } D = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1 - x^*)} \quad (2-108)$$

équivalent à :

$$\frac{u'}{\varepsilon_y} = 1 + \alpha (D - l_c^{*2} D'') \text{ avec } l_c^* = \frac{a^*}{2\sqrt{6}}. \quad (2-109)$$

Cela donne l'expression du déplacement le long de la chaîne :

$$\frac{u^*}{\varepsilon_y} = \frac{\alpha + 1}{2} x^* - \frac{2\alpha^2}{3\beta} \left[\left(\frac{1 + \alpha}{2} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1 - x^*) \right]^{3/2} + \frac{\beta}{48n^2 \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1 - x^*)}} + C \quad (2-110)$$

La constante d'intégration peut se déduire des conditions aux limites.

2.3.2.2 Conditions aux limites « cinématique »

Tout d'abord, nous pouvons supposer que les conditions aux limites cinématiques du problème non-local de continualisation sont les mêmes que celles utilisées pour le problème « local ». La condition aux limites à l'encastrement est $u^*(0) = 0$, donc l'Éq. (2-110) mène à :

$$\frac{u^*}{\varepsilon_y} = \frac{\alpha+1}{2} x^* + \frac{2\alpha^2}{3\beta} \left(\begin{array}{l} - \left[\left(\frac{1+\alpha}{2} \right)^2 - \beta\alpha(1-x^*) \right]^{\frac{3}{2}} \\ + \left[\left(\frac{1+\alpha}{2} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \right]^{\frac{3}{2}} \end{array} \right) + \frac{\beta}{48n^2} \left(\begin{array}{l} \left(\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}(1-x^*) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ - \left(\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right) \quad (2-111)$$

Notons que cette solution n'est pas valide lorsqu'elle est proche du chargement maximal $\beta = \beta_{max}$: la réponse est particulière pour le chargement limite $\beta = \beta_{max}/\beta_y$, qui est le chargement maximal pour le problème local.

2.3.2.3 Conditions aux limites « statique »

Une condition aux limites non-locale dite « statique » est une condition alternative pouvant être appliquée au problème de continualisation. Nous l'appelons « condition aux limites statique » car une telle condition peut se révéler équivalente à une condition aux limites en effort normal associée au premier ressort. La condition aux limites statique nous amène à définir la valeur de déplacement au premier nœud comme suit :

$$\frac{u_1}{\alpha\varepsilon_y} = 1 + \alpha D_{1/2} \quad \text{avec} \quad D_{1/2} = \frac{\alpha-1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)} \quad (2-112)$$

En combinant cette dernière relation avec l'Éq.(2-110) nous obtenons :

$$\frac{u^*}{\varepsilon_y} = \frac{\alpha+1}{2} \left(x^* - \frac{1}{n} \right) + \frac{2\alpha^2}{3\beta} \left(\begin{array}{l} - \left[\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}(1-x^*) \right]^{\frac{3}{2}} \\ + \left[\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]^{\frac{3}{2}} \end{array} \right) + \frac{\beta}{48n^2} \left(\begin{array}{l} \left(\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}(1-x^*) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ - \left(\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{\alpha-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2} \right)^2 - \beta\alpha \left(1 - \frac{1}{2n} \right)} \right) \quad (2-113)$$

La Figure 2-21 montre que la condition aux limites statique, associée à la formulation non locale, mène à une meilleure approximation du problème discret que celle reposant sur la condition aux limites cinématique. La charge maximale peut être atteinte sans perte de

précision, et la solution continuallisée « statique » est presque impossible à distinguer de la réponse du système discret.

2.3.2.4 Comportement radoucissant

Pour une charge proche du maximum, $\beta \rightarrow \beta_{\max}$, la phase radoucissante contrôle le processus de post-localisation, au moins dans le premier élément. La chaîne peut être divisée en trois parties : le modèle cohésif de radoucissement appliqué dans le premier ressort encastré, $x^* \in [0; 1/n]$, la décharge élastique de la zone pré-endommagée pour $x^* \in [1/n; l_{0\max}^*]$ et la décharge élastique dans la portion non-endommagée de la chaîne pour $x^* \in [l_{0\max}^*; 1]$, où $l_{0\max}^* = 1 - 1/\beta_{\max}$. Dans la portion pré-endommagée de la chaîne, l'endommagement garde sa valeur maximale, D_{\max} , qui est atteinte à la charge maximale. Pour la phase de décharge pré-endommagée, l'équation différentielle suivante est applicable pour $x^* \in [1/n; l_{0\max}^*]$:

$$ESu' = \frac{N}{1-D_{\max}} - \frac{a^2}{24} \left(\frac{N}{1-D_{\max}} \right)'' \text{ avec } D_{\max} = \frac{\alpha-1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta_{\max}}{\alpha} (1-x^*)} \quad (2-114)$$

et nous pouvons réécrire l'Éq. (2-114) comme suit :

$$\frac{u^{-*'}(x^*)}{\varepsilon_y} = \beta \frac{1-x^*}{1-D_{\max}} - \beta \frac{a^2}{24} \left(\frac{1-x^*}{1-D_{\max}} \right)'' \quad (2-115)$$

Il convient d'observer que les dérivés de tous les paramètres adimensionnels, notés par des signes prime, sont ici dérivée par rapport aux coordonnées adimensionnelles, x^* , (i.e. $\partial/\partial x^*$). L'intégration de l'Éq. (2-115) par rapport à x^* donne donc :

$$\frac{u^-(x^*)}{\varepsilon_y} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+1} \frac{2n-1}{2n} \left[\left(x^* - \frac{(2nx^*-1)^{3/2}}{3n\sqrt{2n-1}} \right) + \frac{1}{24n(2n-1)\sqrt{\frac{2nx^*-1}{2n-1}}} \right] + A \quad (2-116)$$

Seul le premier ressort subit un processus d'endommagement actif, D_0^- , alors que les autres ressorts endommagés se déchargent élastiquement avec une rigidité réduite provoquée par l'endommagement maximum subi, c'est-à-dire l'endommagement à la charge maximale,

D_{max} . La condition aux limites statique nous permet de définir ainsi le déplacement du premier nœud :

$$\frac{u^-(a^*)}{\varepsilon_y} = (1 + \alpha D_{1/2}^-) a^* \text{ avec } D_{1/2}^- = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)} \quad (2-117)$$

C'est un type de loi cohésive, puisque c'est une loi « non locale » qui est également équivalente à la relation entre l'effort normal et le déplacement, présentée en introduction :

$$N\left(\frac{a}{2}\right) = EA(1 - D_{1/2}^-) \frac{u^-(a)}{a} \text{ avec } N\left(\frac{a}{2}\right) = q\left(L - \frac{a}{2}\right) \quad (2-118)$$

En combinant l'Éq. (2-116) avec l'Éq. (2-117) nous obtenons :

$$\frac{u^-(x^*)}{\varepsilon_y} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + 1} \frac{2n - 1}{2n} \left[x^* - \frac{(2nx^* - 1)^{3/2}}{3n\sqrt{2n - 1}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n\sqrt{2n - 1}} \right] + \frac{1 + \alpha D_{1/2}^-}{n} \quad (2-119)$$

2.3.2.5 Conditions de continuité à l'interface des zones endommagée et élastique

Nous démontrons ici que les conditions de continuité à l'interface des zones endommagée et élastique doivent correspondre aux conditions aux limites non-locales enrichies utilisées pour une chaîne axiale endommageable non-locale. Dans chacun des cas étudiés précédemment, la solution de déplacement dans la zone élastique, pour $x \in [l_0; L]$, est obtenue à partir des conditions de continuité à l'interface des zones endommagée et élastique, qui est semblable à Éq. (2-77) avec $x^* = ia^* = i/n$, comme développé dans le comportement purement élastique :

$$\frac{u^+(x^*)}{\varepsilon_y} = \beta \frac{x^*}{2} [2 - x^*] + B \quad (2-120)$$

La constante additionnelle B dépend de la condition aux limites enrichie. Puisque la condition aux limites exprime ici la continuité de la force normale, i.e. $N^-(l_0^* + a/2) = N^+(l_0^* + a/2)$, nous devons valider la relation suivante :

$$\frac{u^{-*}(l_0^* + a^*) - u^{-*}(l_0^*)}{a^*} = \frac{u^{+*}(l_0^* + a^*) - u^{+*}(l_0^*)}{a^*} \quad (2-121)$$

Dans le cas présent, la continuité du déplacement implicite, i.e. $u^{-*}(l_0^*) = u^{+*}(l_0^*)$, mène à la continuité du déplacement à $l_0^* + a^*$, i.e. $u^{-*}(l_0^* + a^*) = u^{+*}(l_0^* + a^*)$, qui ne contredit pas l'affirmation sur les conditions aux limites rédigées pour $x^* = 1/n$. En d'autres termes, l'influence de l'endommagement doit être étendue de a^* à $l_0^* + a^*$ en utilisant l'équation de continuité du déplacement $u^{-*}(l_0^* + a^*) = u^{+*}(l_0^* + a^*)$. Éq. (2-121) mène alors à l'expression suivante :

$$\frac{u^{+*}(x^*)}{\varepsilon_y} = \frac{u^{-*}(l_0^* + 1/n)}{\varepsilon_y} + \frac{\beta}{2} [x^*(2 - x^*) - l_0^*(2 - l_0^*)] \quad (2-122)$$

Le déplacement de l'extrémité est obtenu pour l'Éq. (2-122) avec $x^* = 1$:

$$\frac{u^{+*}(1)}{\varepsilon_y} = \frac{u^{-*}(l_0^* + 1/n)}{\varepsilon_y} + \frac{\beta}{2} [1 - l_0^*(2 - l_0^*)] \quad (2-123)$$

Dans la phase de radoucissement, l'équation dépend de $l_{0,\max}^*$, qui représente la longueur de chaîne endommagée pour la charge la plus élevée :

$$\frac{u^{+*}(1)}{\varepsilon_y} = \frac{u^{-*}(l_{0,\max}^* + 1/n)}{\varepsilon_y} + \frac{\beta}{2} [1 - l_{0,\max}^*(2 - l_{0,\max}^*)] \quad (2-124)$$

Comme illustrée dans la Figure 2-21, la solution continuallisée avec des conditions aux limites « statiques » donne d'excellents résultats, tant dans la phase d'écrouissage que dans la phase de radoucissement, alors que les conditions aux limites « cinématiques » ne nous permettent pas de couvrir toute la réponse jusqu'à la charge maximale. De plus, nous observons le paradoxe de Wood pour le problème de localisation (avec $n \rightarrow \infty$), où la chaîne se décharge de manière élastique après la charge maximale (du fait d'une longueur de dissipation nulle).

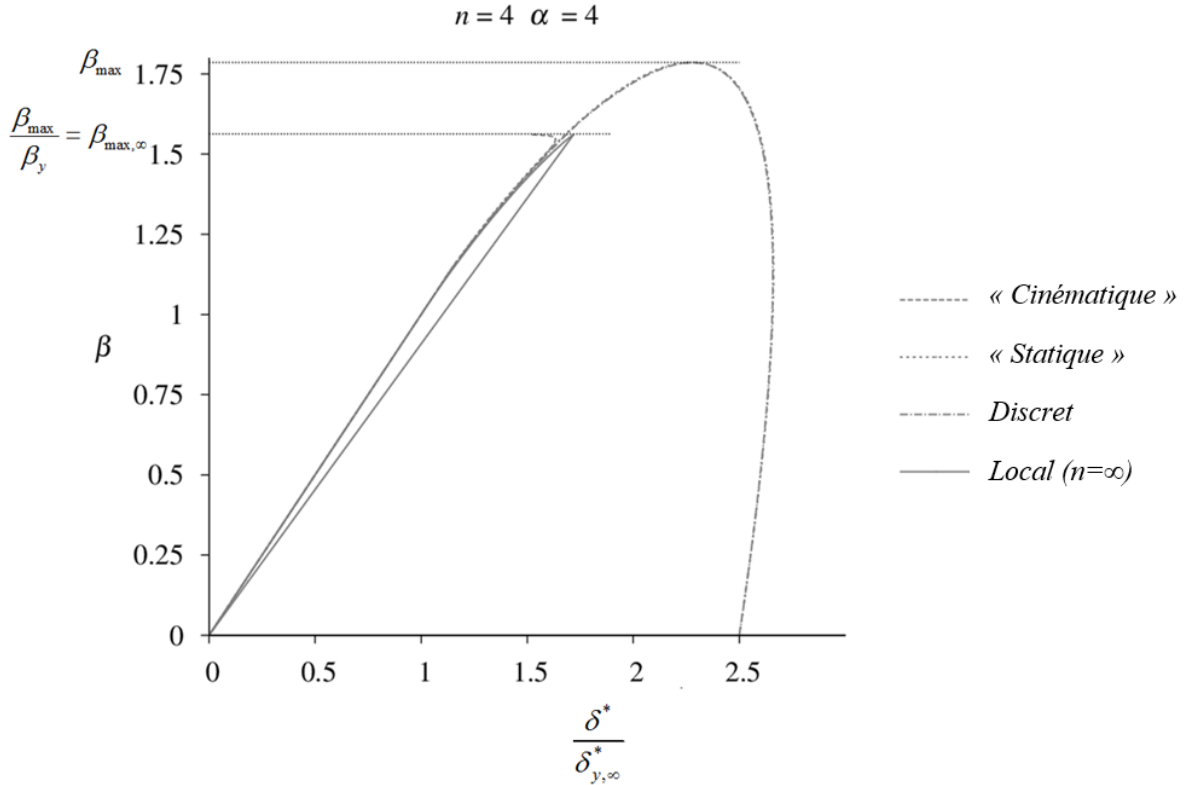


Figure 2-21 – Comparaison des réponses discrète et continuaisée, avec $n = 4$ et $\alpha = 4$.

2.3.3 Approche énergétique du problème endommageable

Notre étude de cas d'une chaîne endommageable avec gradient de contrainte n'aborde pas l'énergie du système. Il peut être intéressant de vérifier la commutativité de la procédure de continuailisation vis-à-vis de l'énergie. La continuailisation de l'énergie discret doit être exactement équivalente à l'énergie issue des équations principales continuailisées. En combinant l'Éq. (2-64) et Éq. (2-65) on obtient :

$$EA \left[\frac{(1 - D_{i+1/2})(u_{i+1} - u_i) + (1 - D_{i-1/2})(u_i - u_{i-1})}{a^2} \right] = -q_i \quad (2-125)$$

A partir de l'Éq. (2-125), on peut obtenir l'énergie du système discret elasto-endommageable :

$$W = a \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{4} EA \left[(1 - D_{i+1/2}) \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} \right)^2 + (1 - D_{i-1/2}) \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{a} \right)^2 \right] - q_i u_i \quad (2-126)$$

La procédure de continualisation est toujours donnée par l'Éq. (2-37) et l'équivalent pour la fonction d'endommagement est :

$$D(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \partial_x^k D(x)}{k!} = e^{a\partial_x} D(x) \quad (2-127)$$

En considérant le développement en série de Taylor au second ordre de cette procédure de continualisation, Éq. (2-69), appliqué à l'Éq. (2-73) et l'Éq. (2-74) nous avons :

$$\begin{cases} N = EA(1-D) \left(u' + \frac{a^2}{24} u''' \right) \\ N' + \frac{a^2}{24} N''' = -q \end{cases} \quad (2-128)$$

En combinant l'Éq. (2-128) et en négligeant les termes d'ordres supérieurs à a^4 , on obtient :

$$EA \left[-D'u' + (1-D)u'' + \frac{a^2}{24} \left[2(1-D)u^{(4)} - 4D'u''' - 3D''u'' - D'''u' \right] \right] = -q \quad (2-129)$$

L'Éq. (2-129) est obtenue par continualisation de l'équation aux différences principale en Éq. (2-125) ou de manière équivalente en utilisant l'équation différentielle, Éq. (2-74). Il est aussi possible de continualiser la fonctionnelle énergie du système discret. Tout d'abord, on peut vérifier que lorsque $D=0$, on obtient :

$$D=0 \Rightarrow EA \left[u'' + \frac{a^2}{12} u^{(4)} \right] = -q \quad (2-130)$$

On continualise l'énergie du système discret, l'Éq. (2-126), avec un développement en série de Taylor d'ordre 2 :

$$W = \int_0^L \frac{EA}{4} \left[\begin{aligned} &\left(1-D - \frac{a}{2}D' - \frac{a^2}{8}D''\right) \left(u' + \frac{a}{2}u'' + \frac{a^2}{6}u'''\right)^2 \\ &+ \left(1-D + \frac{a}{2}D' - \frac{a^2}{8}D''\right) \left(u' - \frac{a}{2}u'' + \frac{a^2}{6}u'''\right)^2 \end{aligned} \right] dx - \int_0^L q u dx \quad (2-131)$$

En développant W et en utilisant la stationnarité de la fonctionnelle énergie $\delta W[u] = 0$, l'Éq. (2-129) devient :

$$\int_0^L \frac{EA}{4} \left[\begin{aligned} &(1-D)u'\delta u' + (1-D)\frac{a^2}{6}(u'\delta u''' + u'''\delta u') \\ &+ (1-D)\frac{a^2}{4}u''\delta u'' - \frac{a^2}{4}D'(u'\delta u'' + u''\delta u') - \frac{a^2}{8}D''u'\delta u' \end{aligned} \right] dx - \int_0^L q \delta u dx = 0 \quad (2-132)$$

Les prochaines équations détaillent l'intégration par parties de l'Éq. (2-132):

$$\int_0^L (1-D)(u'\delta u') dx = \left[(1-D)u'\delta u \right]_0^L - \int_0^L \left((1-D)u'' - D'u' \right) \delta u dx \quad (2-133)$$

$$\int_0^L (1-D)\frac{a^2}{6}(u'\delta u''') dx = \frac{a^2}{6} \left[\begin{aligned} &\left[\left((1-D)u''' - u'D'' - 2D'u'' \right) \delta u \right]_0^L \\ &+ \left[\left(D'u' - (1-D)u'' \right) \delta u' \right]_0^L \\ &+ \left[(1-D)u'\delta u'' \right]_0^L \\ &- \int_0^L \left(\begin{aligned} &-D'''u' - 3D''u'' \\ &-3u'''D' + (1-D)u^{(4)} \end{aligned} \right) \delta u dx \end{aligned} \right] \quad (2-134)$$

$$\int_0^L (1-D)\frac{a^2}{6}(u'''\delta u') dx = \frac{a^2}{6} \left[\left[(1-D)u''' \delta u \right]_0^L - \int_0^L \left((1-D)u^{(4)} - u'''D' \right) \delta u dx \right] \quad (2-135)$$

$$\int_0^L (1-D)\frac{a^2}{4}u''\delta u'' dx = \frac{a^2}{4} \left[\begin{aligned} &-\left[\left((1-D)u''' - D'u'' \right) \delta u \right]_0^L + \left[(1-D)u''\delta u' \right]_0^L \\ &- \int_0^L \left(-D''u'' - 2u'''D' + (1-D)u^{(4)} \right) \delta u dx \end{aligned} \right] \quad (2-136)$$

$$\int_0^L -\frac{a^2}{4}D'u'\delta u'' = -\frac{a^2}{4} \left[\begin{aligned} &-\left[\left(D''u' + D'u'' \right) \delta u \right]_0^L + \left[D'u'\delta u' \right]_0^L \\ &- \int_0^L \left(D'''u' + 2D''u'' + u'''D' \right) \delta u dx \end{aligned} \right] \quad (2-137)$$

$$\int_0^L -\frac{a^2}{4} D'u'' \delta u' dx = -\frac{a^2}{4} \left[[D'u'' \delta u]_0^L - \int_0^L (D''u'' + u'''D') \delta u dx \right] \quad (2-138)$$

$$\int_0^L -\frac{a^2}{8} D''u' \delta u' dx = -\frac{a^2}{8} \left[[D''u' \delta u]_0^L - \int_0^L (D'''u' + D''u'') \delta u dx \right] \quad (2-139)$$

Les conditions aux limites d'ordre supérieur sont obtenues par l'Éq. (2-133) à Éq. (2-139) :

$$\begin{aligned} & \left[-\delta u \left(u'(1-D) - \frac{a^2}{24} (D''u' - 2u''D' + 2u'''(1-D)) \right) \right]_0^L \\ & + \left[\delta u' \left(\frac{a^2}{12} (u''(1-D) - u'D') \right) \right]_0^L + \left[\delta u'' \frac{a^2}{6} (1-D)u' \right]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (2-140)$$

En faisant abstraction des conditions aux limites, à partir de l'Éq. (2-133) à Éq. (2-139), on obtient :

$$\int_0^L \left(-D'u' + (1-D)u'' + \frac{a^2}{24} \begin{bmatrix} 4(u'''D' + (D-1)u^{(4)}) + 3(D'''u' + D''u'') \\ +6(D''u'' + u'''D') \\ +6(-D''u'' - 2u'''D' - (D-1)u^{(4)}) \\ -6(D'''u' + 2D''u'' + u'''D') \\ +4(D'''u' + 3D''u'' + 3u'''D' + (D-1)u^{(4)}) \end{bmatrix} \right) \delta u dx - \int_0^L q \delta u dx = 0 \quad (2-141)$$

qui est équivalent à :

$$\int_0^L -EA \left[\begin{array}{l} -D'u' + (1-D)u'' \\ + \frac{a^2}{24} \begin{bmatrix} 2(1-D)u^{(4)} - 4D'u''' \\ -3D''u'' - D'''u' \end{bmatrix} \end{array} \right] \delta u dx - \int_0^L q \delta u dx = 0 \quad (2-142)$$

La formulation faible est équivalente à la formulation forte :

$$-D'u' + (1-D)u'' + \frac{a^2}{24} \left[2(1-D)u^{(4)} - 4D'u''' - 3D''u'' - D'''u' \right] = -\frac{q}{EA} \quad (2-143)$$

qui est équivalent à l'Éq. (2-129). La continualisation de l'énergie du modèle discret est donc équivalente dans ce cas à la continualisation de l'équation aux différences principale, sans toutefois aborder le sujet des conditions aux limites.

2.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié la rupture d'un système en réseau discret élastique non-linéaire puis élasto-endommageable en le considérant comme un problème axial unidimensionnel. Ce problème est traité avec une approche d'endommagement discret et d'endommagement continu non-local. En utilisant une procédure de continualisation, cette étude démontre que ce système d'endommagement microstructuré se comporte comme un élément structurel d'endommagement non-local. Il a été démontré que le modèle non-local possède une longueur caractéristique constante dont la valeur au carré est égale à $a^2/24$, indépendamment du chargement.

En appliquant la méthodologie de continualisation, la non-localité du modèle d'endommagement apparaît à la fois dans les lois constitutives et dans la fonction de charge. Un modèle d'endommagement discret non-local couplé a été développé en se basant sur des arguments physiques liés au caractère discret de la matière à petite échelle. La réponse en écrouissage et en radoucissement de la chaîne dépend de l'échelle de la microstructure (taille de la maille). Cependant, la réponse en radoucissement est bien plus sensible, ce qui confirme le rôle essentiel de la loi d'endommagement non-local (ou loi cohésive en radoucissement) pour de tels systèmes structurels quasi-fragiles. Selon la condition de chargement choisie, des effets d'échelle peuvent également être observés sur le système, effets plus marqués sur les structures plus petites.

3 Chaîne microstructurée en flexion

3.1 Introduction

Ce chapitre traitera du problème de la poutre discrète microstructurée en flexion. Nous aborderons la même approche que dans le chapitre 2, sans toutefois passer par l'étape du système élastique non-linéaire. Nous étudierons directement le problème élasto-endommageable. De nouveau il s'agit de montrer que le problème de flexion d'un système MED peut être traité par une approche de MEC non locale. Le problème de la poutre console avec charge ponctuelle peut être rapproché du problème de la chaîne axiale en considérant cette dernière comme la fibre supérieure d'une poutre en flexion présentant un effort normal qui évolue le long de la poutre. Comme présenté dans le chapitre 1, il a récemment été montré que des systèmes élastiques discrets (ou des systèmes de réseau « lattices » avec interactions élastiques linéaires) peuvent se comporter comme des éléments structuraux non locaux (Challamel et al. 2014). L'élasticité non locale d'Eringen (Eringen 1983) a permis de mettre en évidence les effets d'échelle induits par le caractère discret d'un système microstructuré en flexion avec interactions élastiques linéaires (Wang et Wang 2013; Challamel et al. 2014; Zhang et al. 2014), ou avec interactions élasto-endommageables (Challamel et al. 2015e) sur laquelle cette étude se base.

Il sera porté une attention toute particulière aux conditions aux limites qui ont une très grande importance dans l'élaboration d'un modèle non local fidèle au système discret comme on a pu l'observer dans le chapitre précédent.

3.2 Comportement en flexion du modèle MED

Considérons un système d'endommagement élastique microstructuré constitué de n rotules élastiques endommageables reliées entre elles par des éléments rigides pour former une poutre discrète, voir Figure 3-1 (système MEC). Cette poutre console microstructurée est sollicitée en flexion par une force verticale notée P à son extrémité. Comme pour le problème précédent, la longueur totale de la structure est égale à $L=n \times a$, c'est-à-dire le nombre de cellules élémentaires multiplié par leur taille.

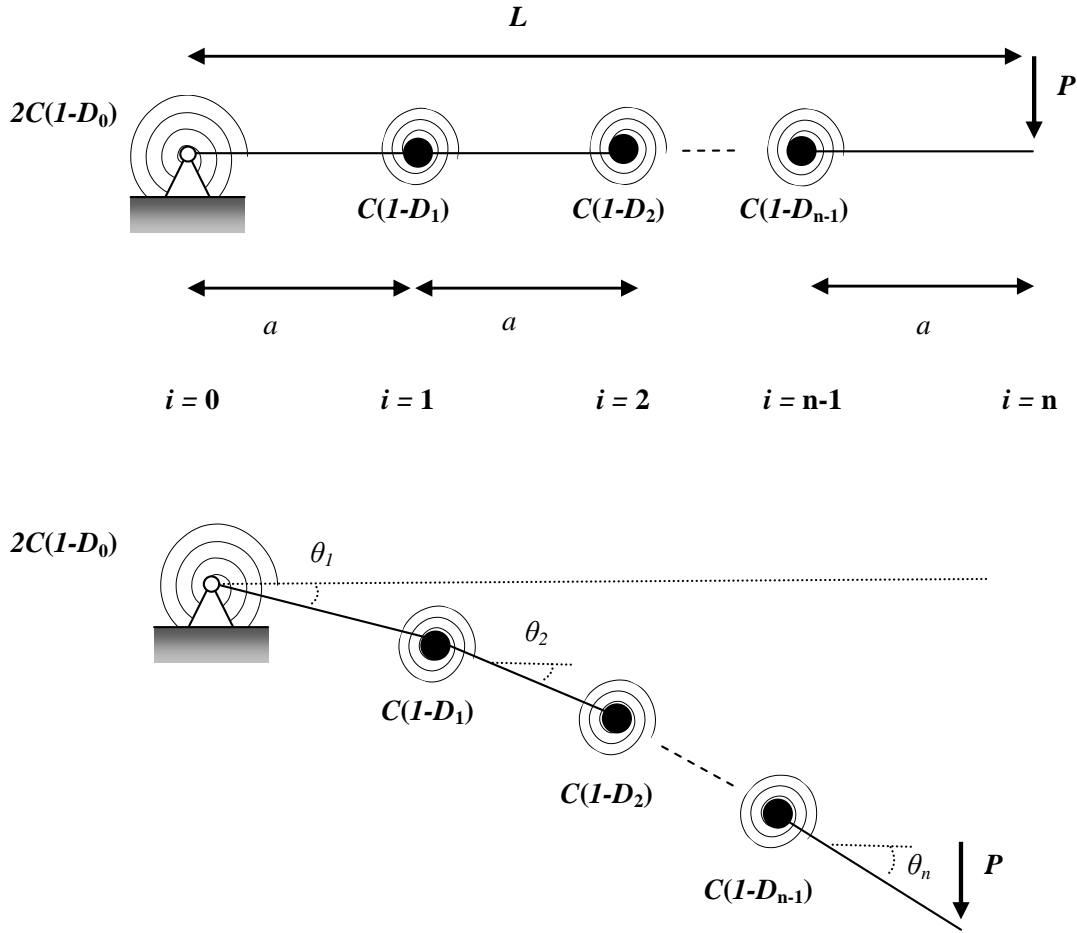


Figure 3-1 – Poutre console microstructurée avec ressorts flexionnels endommageables

Les ressorts flexionnels ont un comportement elasto-endommageable caractérisé par :

$$M_i = C(1 - D_i)\Delta\theta_i = C(1 - D_i)\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{a} \quad (3-1)$$

où $w_i = w(x = x_i = ia)$ est la flèche de la poutre au nœud i , M_i est le moment fléchissant dans la i -ème rotule, $C = EI/a$ est la raideur élastique initiale de chaque ressort flexionnel, et D_i est la valeur de son endommagement. L'Éq. (3-1) peut être réécrite en termes de moments fléchissants effectifs tel que :

$$\tilde{M}_i = \frac{M_i}{1 - D_i} = EI \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{a^2} \quad (3-2)$$

Chaîne microstructurée en flexion

où \tilde{M}_i désigne le moment de flexion effectif dans la rotule élasto-endommageable. La fonction de charge d'endommagement $f(\Delta\theta_i, D_i)$ est supposée dépendre de la rotation $\Delta\theta_i$ et de l'endommagement D_i :

$$f(\Delta\theta_i, D_i) = \frac{\Delta\theta_i}{\Delta\theta_y} - 1 - \alpha D_i \leq 0 \quad (3-3)$$

Par conséquent, la fonction de charge d'endommagement dépend de deux paramètres matériels, qui sont la rotation relative pour l'initiation du phénomène d'endommagement $\Delta\theta_y$ et le paramètre α qui contrôle la réponse post-endommagement du matériau en présence d'une évolution de l'endommagement. Une phase d'écrouissage apparaît pour des valeurs de α supérieures à 1 (voir Figure 3-2).

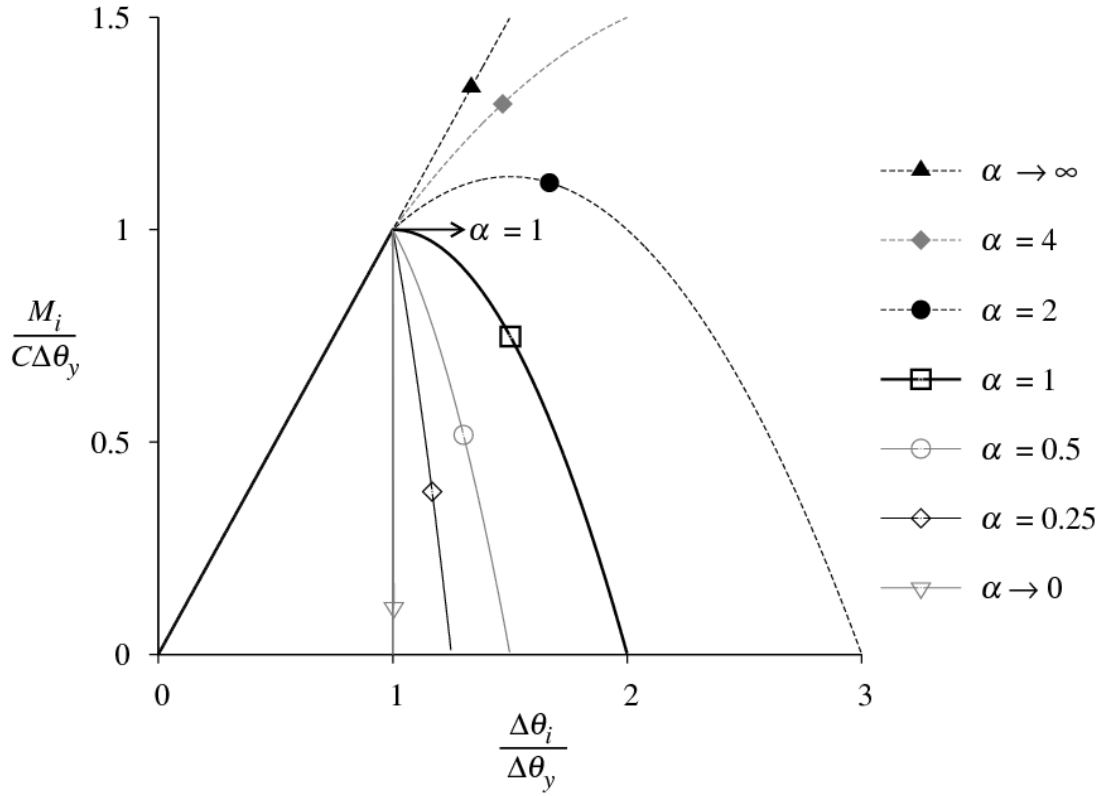


Figure 3-2 – Comportement du ressort élasto-endommageable $\frac{M_i}{C\Delta\theta_y} = f\left(\frac{\Delta\theta_i}{\Delta\theta_y}\right)$;

l'endommagement commence au point $(\Delta\theta_i, M_i) = (\Delta\theta_y, C\Delta\theta_y)$

Les conditions de charge-décharge (conditions de Kuhn-Tucker), sont définies similairement au chapitre 2 :

$$f(\Delta\theta_i, D_i) \leq 0, \quad \dot{D}_i \geq 0, \quad f(\Delta\theta_i, D_i) \dot{D}_i = 0 \quad (3-4)$$

La fonction de charge d'endommagement Éq. (3-3) peut être réécrite en fonction de la courbure discrète κ_i telle que :

$$f(\kappa_i, D_i) = \frac{\kappa_i}{\kappa_y} - 1 - \alpha D_i \leq 0 \text{ avec } \kappa_i = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{a^2} \text{ et } \kappa_y = \frac{\Delta\theta_y}{a} \quad (3-5)$$

Chaîne microstructurée en flexion

Comme précédemment, le chargement monotone considéré résulte en un critère de charge égal à $f(\kappa_i, D_i) = 0$, qui impose cette relation entre la courbure discrète et la variable d'endommagement au cours du processus endommageable :

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{a^2 \kappa_y} = 1 + \alpha D_i \quad (3-6)$$

La dernière étape est l'introduction de l'équation d'équilibre sous forme discrète :

$$\frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{a^2} = 0 \quad (3-7)$$

Dans le problème discret considéré ici, et pour la poutre console reprenant seulement une charge verticale P à son extrémité, le moment fléchissant est égal à :

$$M_i = PL \left(1 - \frac{x_i}{L} \right) \quad \text{et} \quad x_i = ai \quad (3-8)$$

Il est assez remarquable de souligner que les équations discrètes ne sont rien d'autre que le schéma numérique en différence finie centrée du problème d'endommagement "local", qui est défini par la loi d'endommagement élastique Éq. (3-2), écrit maintenant pour le problème continu "local":

$$\tilde{M} = \frac{M}{1-D} = EI\kappa \quad \text{et} \quad \kappa = w'' \quad (3-9)$$

où $\kappa = w''$ est la courbure, et avec la fonction de charge d'endommagement Éq. (3-6) écrite pour le modèle continu :

$$\frac{\kappa}{\kappa_y} = 1 + \alpha D \quad (3-10)$$

Couplé avec l'équation d'équilibre Éq. (3-7), elle peut aussi s'écrire pour le problème continu :

$$M'' = 0 \quad (3-11)$$

En d'autres termes, la poutre endommageable microstructurée est exactement la formulation aux différences finies du problème d'endommagement continu local.

La solution du système discret dans la phase purement élastique a déjà été obtenue par (Challamel et al. 2014) pour la poutre console avec charge ponctuelle avec les conditions aux limites $w_0 = 0$ et $w_{-1} = w_1$, en notant $\delta = w_n$ qui mène à :

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{Pa^2L}{6EI} \quad (3-12)$$

On peut voir que le second terme présente des effets d'échelle car dépendant de la taille de l'élément, ce qui n'est pas le cas de la solution du cas local exprimée par le premier terme de l'équation. La flèche $\delta = \delta_y$ au point de limite élastique $P = P_y$, est obtenue en introduisant $P = P_y$ dans l'Éq. (3-12).

Les paramètres adimensionnels et de normalisation utilisés dans la suite sont définis ci-après :

$$P_y = EI \frac{\kappa_y}{L}, \quad \beta = \frac{P}{P_y}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad w^* = \frac{w}{L}, \quad l_c^* = \frac{l_c}{L}, \quad l_0^* = \frac{l_0}{L} \quad \text{et} \quad \kappa_y^* = \kappa_y L \quad (3-13)$$

L'expression de la variable d'endommagement est la même que dans le problème axial, les Éq. (2-83) à (2-88) sont donc aussi valable dans ce cas, cependant contrairement au problème axial où l'effort normal et l'endommagement sont considérés au centre d'un élément, ici le moment et l'endommagement d'une rotule sont calculés au nœud. On obtient donc une valeur du chargement maximum, β_{\max} , correspondant à la jonction entre les branches d'écroûissage et de radoucissement, par l'équation suivante :

$$\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{\max} = \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha} \quad (3-14)$$

Cela signifie que dans le processus d'écroûissage, il faut calculer un facteur de charge donné $\beta \in [1; \beta_{\max}]$ pour les p rotules en endommagement actif, et les $n-p$ rotules élastiques non endommagées complémentaires dans la poutre microstructurée. Le nombre p de rotules

Chaîne microstructurée en flexion

endommagées peut être calculé à partir de la longueur endommagée associée à une variable d'endommagement qui s'annule :

$$D_i^+(x^* = l_0^*) = 0 \Rightarrow l_0^* = 1 - \frac{1}{\beta} \quad (3-15)$$

Le nombre p de rotules endommagées est donc encadré par ces valeurs :

$$\frac{p-1}{n} \leq l_0^* = 1 - \frac{1}{\beta} \leq \frac{p}{n} \quad (3-16)$$

Dans la zone d'endommagement, tout élément endommagé est considéré comme endommagé sur toute sa longueur. L'expression de p est alors :

$$p = E \left[n \frac{\beta - 1}{\beta} \right] + 1 \quad (3-17)$$

La valeur maximum de p , associée à β_{\max} peut être exprimée :

$$p_{\max} = E \left[n \frac{\beta_{\max} - 1}{\beta_{\max}} \right] + 1 = E \left[n \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2} \right] + 1 \quad (3-18)$$

La Figure 3-3 présente l'évolution de p et de l_0 en fonction de β . Le problème discret est naturellement discontinu et converge vers la valeur continue de l_0 que pour des valeurs élevées de n .

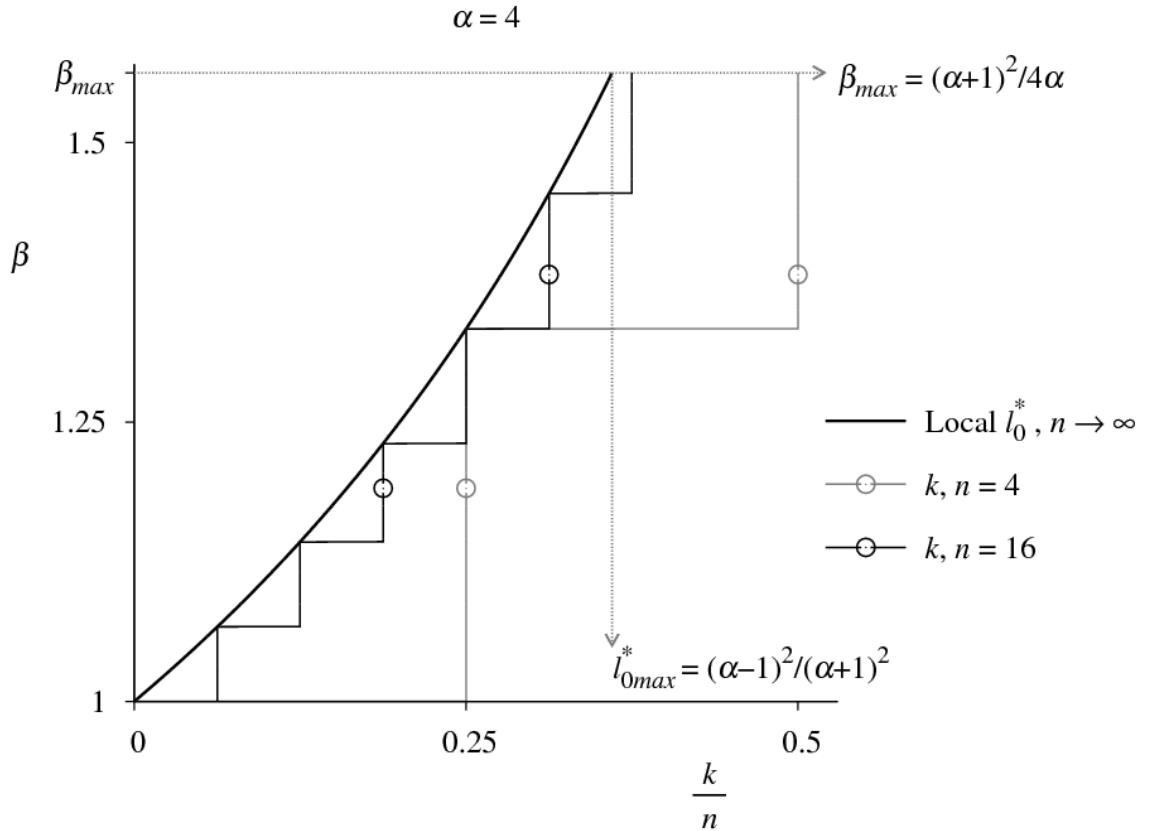


Figure 3-3– représentation des p ressorts endommagés en fonction de β au-delà de la limite élastique.

Dans la phase d'écrouissage, pour les p rotules endommagées, l'équation aux différences finies du second-ordre devant être résolue est :

$$\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{a^2 \kappa_y} = 1 + \alpha D_i^+ \quad \text{avec} \quad D_i^+ = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{i}{n}\right)} \quad (3-19)$$

Une solution analytique peut être trouvée pour cette équation linéaires aux différences finies du second-ordre. En appliquant un changement de variable, $u_i = w_i - w_{i-1}$, alors l'Éq. (3-19) est convertie en une équation aux différences finies du premier ordre :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{a^2 \kappa_y} = \frac{\alpha + 1}{2} - \alpha \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{i}{n}\right)} \quad (3-20)$$

Ce qui nous ramène à une équation proche de celle résolue dans le chapitre 2. La première phase de la résolution sera donc similaire :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{a^2 \kappa_y} = a_1 - a_2 \sqrt{\eta + i} \text{ avec } a_1 = \frac{\alpha + 1}{2} ; a_2 = \sqrt{\frac{\alpha \beta}{n}} \text{ et } \eta = n \left[\left(\frac{1 + \alpha}{2\sqrt{\alpha \beta}} \right)^2 - 1 \right] \quad (3-21)$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$\frac{u_i}{a^2 \kappa_y} = a_1 i + C_1 + a_2 \left(\zeta_H \left[-\frac{1}{2}, i + \eta \right] - \zeta_H \left[-\frac{1}{2}, \eta \right] \right) \quad (3-22)$$

où ζ_H est la fonction Hurwitz zêta. Il faut alors réaliser une autre intégration aux différences finies pour retrouver notre variable originale :

$$\frac{w_i}{a^2 \kappa_y} = C_2 + \frac{a_1 i(i-1)}{2} + C_1 i - a_2 \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^j \sqrt{\eta + k} \quad (3-23)$$

En intégrant avec les conditions aux limites $w_0 = 0$ et $\frac{w_1^*}{\kappa_y^*} = \frac{1 + \alpha D_0^+}{2n^2}$, on identifie les 2 constantes d'intégrations et on obtient la solution exacte du système discret dans la phase d'écroûissage :

$$\frac{w_i^*}{\kappa_y^*} = \frac{w_j^*}{\kappa_y^*} i + \frac{1}{n^2} \left[\frac{(\alpha + 1)i(i-1)}{4} + i \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2} \right)^2 - \alpha \beta} - \sqrt{\frac{\alpha \beta}{n}} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\zeta_H \left[-\frac{1}{2}, \eta \right] - \zeta_H \left[-\frac{1}{2}, j + 1 + \eta \right] \right) \right] \quad (3-24)$$

Cette solution correspond aux résultats obtenus avec la résolution exacte par itération. Une fois que le facteur de charge atteint $\beta = \beta_{\max}$, le régime de radoucissement s'applique dans la section encastree, qui se caractérise par :

$$M(0) = \frac{2EI}{a} (1 - D_0) \Delta \theta(0) \text{ et } D_0^- = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \quad (3-25)$$

En considérant la rotation du premier élément en radoucissement, $\Delta\theta(0) = \frac{w(a)}{a}$, la condition limite suivante est obtenue :

$$M(0) = \frac{2EI}{a}(1 - D_0)\frac{w(a)}{a} \Rightarrow w(a) = \frac{\beta\kappa_y a^2}{2\left(1 - \frac{\alpha - 1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}\right)} \quad (3-26)$$

Les $p-1$ rotules endommagées suivantes se déchargent élastiquement avec une rigidité affectée par la valeur de l'endommagement atteinte pour $\beta = \beta_{\max}$ tandis que les $n-p$ rotules non endommagées se déchargent élastiquement selon leur raideur initiale.

Les résultats obtenus à partir d'une approche numérique itérative sont présentés sur la Figure 3-4 et Figure 3-5 pour les phases d'écrouissage et de radoucissement du problème de flexion discrète. Sans surprise, on observe le même type d'influence des paramètres du modèle que pour la chaîne axiale, la Figure 3-4 montre que le paramètre α contrôle l'ampleur du processus d'écrouissage et la valeur de la charge ultime. D'autre part, comme le montre la Figure 3-5, le processus de radoucissement est fortement dépendant du nombre n d'éléments constitutifs de la chaîne.

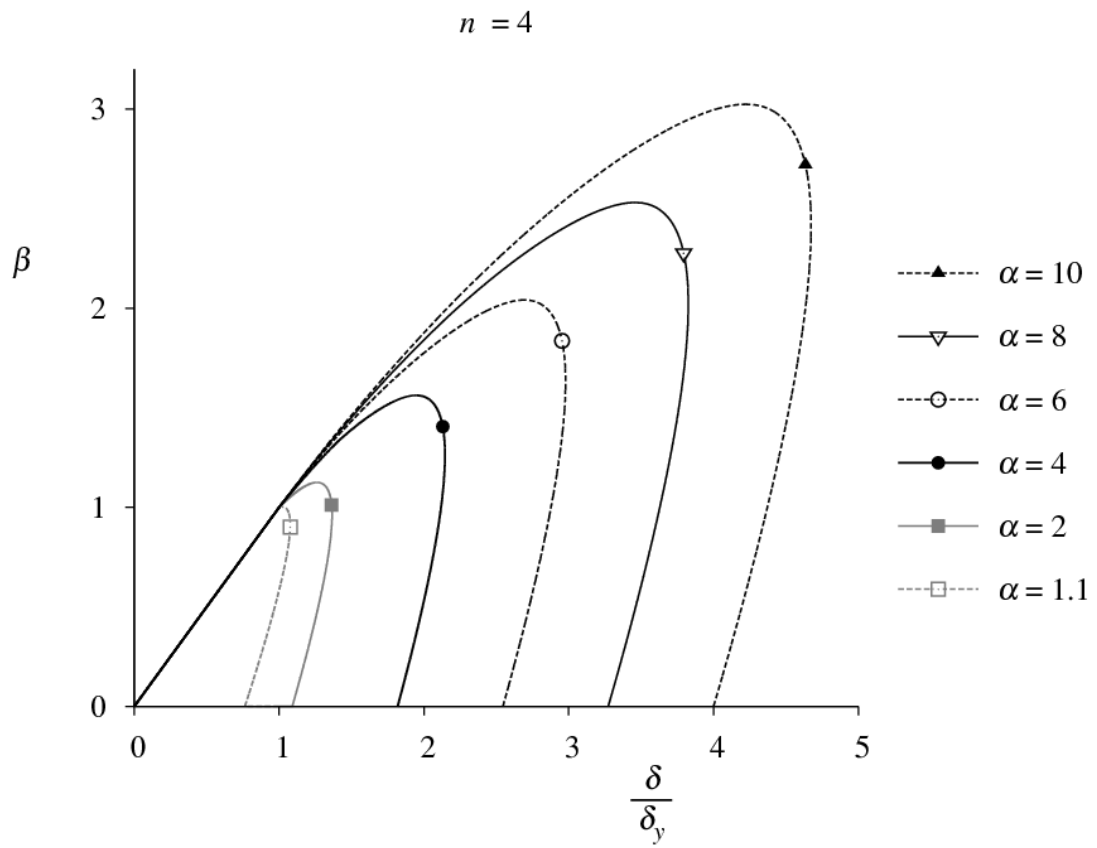


Figure 3-4 – Relation charge-flèche du système discret endommageable ($n=4$), par rapport au paramètre α .

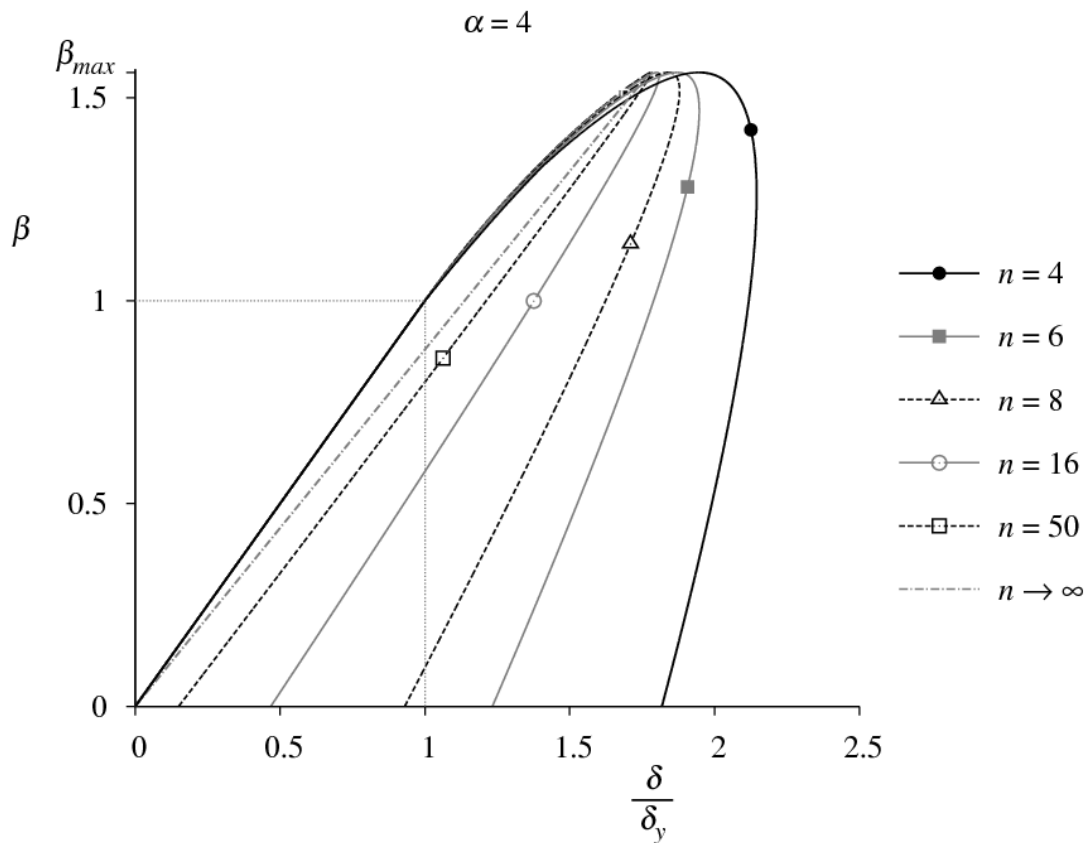


Figure 3-5 –Relation charge-flèche du système discret endommageable ($\alpha = 4$), par rapport au nombre d'élément n .

3.3 MEC– Modèle non local continualisé

3.3.1 Procédure de continualisation

Pour $\alpha > 1$, il y a une phase d'écroutissage pour le modèle MEC et l'endommagement peut se propager au sein de la poutre microstructurée. Les équations discrètes sont étendues jusqu'à un continuum équivalent via la méthode de continualisation, à la fois pour les variables d'endommagement et de déplacement (modèle MEC continualisé). Autrement dit, nous cherchons à obtenir modèle de poutre MEC qui pourrait présenter les effets d'échelle du problème de MED. Dans ce cas précis, dans la phase d'écroutissage l'endommagement peut se propager et ce phénomène peut être représenté ici avec un modèle de MEC non local.

Chaîne microstructurée en flexion

Le lien entre le système discret et le système équivalent continu $w_i = w(x = ia)$ et $D_i = D(x = ia)$ est réalisé par la procédure dite de continualisation présentée dans le chapitre 2 :

$$w(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \partial_x^k}{k!} w(x) = e^{a\partial_x} w(x) \text{ et } D(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \partial_x^k}{k!} D(x) = e^{a\partial_x} D(x) \quad (3-27)$$

L'équation discrète Éq. (3-2) peut donc être continualisée ainsi :

$$\tilde{M} = \frac{4EI}{a^2} \sinh^2\left(\frac{a}{2}\partial_x\right) w \quad (3-28)$$

Un développement en série de Taylor donne :

$$\tilde{M} = EI \left(w'' + \frac{a^2}{12} w^{(4)} \right) \quad (3-29)$$

à l'ordre a^2 . On peut aussi utiliser un approximant de Padé d'ordre 2/2 de l'opérateur pseudo-différentiel :

$$\tilde{M} - \frac{a^2}{12} \tilde{M}'' = EI w'' \quad (3-30)$$

Que l'on peut aussi exprimer par :

$$\tilde{M} - l_c^2 \tilde{M}'' = EI \kappa \text{ avec } \tilde{M} = \frac{M}{1-D}, \quad l_c^2 = \frac{a^2}{12} \text{ et } \kappa = w'' \quad (3-31)$$

On peut reconnaître la loi élastique non locale d'Eringen exprimée en termes de moment effectif. La fonction de la charge d'endommagement de l'Éq. (3-6) peut aussi être continualisée ainsi, en utilisant l'approximant de Padé comme dans l'Éq. (3-30) :

$$\frac{\kappa}{\kappa_y} = 1 + \alpha (D - l_c^2 D'') \quad (3-32)$$

C'est une loi d'endommagement de type gradient (voir Casandjian et al. 2013; Challamel et Hellesland 2013). Déjà détaillée par Challamel et Hellesland, cette loi peut être équivalente à une loi d'endommagement non local si l'on introduit une mesure non locale de déformation (courbure non locale dans ce cas précis) telle que celle-ci :

$$\bar{\kappa} - l_c^2 \bar{\kappa}'' = \kappa \quad (3-33)$$

En utilisant les équations (3-32) et (3-33), on obtient une équation différentielle équivalente :

$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_y} = 1 + \alpha D \quad (3-34)$$

On peut reconnaître un modèle exprimé en termes de déformations non locales, proche structurellement du modèle de Pijaudier-Cabot et Bažant (Pijaudier-Cabot and Bažant 1987), aussi appelé modèle d'endommagement au gradient implicite où la mesure de déformation non locale est définie par l'Éq. (3-33) – voir (Peerlings et al. 1996). Toutefois, elle se différencie du modèle ci-dessus car l'élasticité est affectée par des termes non locaux, un effet considéré comme étant de second ordre par Pijaudier-Cabot et Bažant (1987) ou Peerlings et al (1996).

3.3.2 Résolution du problème de flexion de MEC non locale

Le problème d'évolution de l'endommagement du modèle discret est ensuite calculé pour être appliqué au cas de la poutre console, à partir du système couplé d'équations différentielles dans la zone d'endommagement.

$$\frac{M}{1-D} - l_c^2 \left(\frac{M}{1-D} \right)'' = EI w'', \quad M = P(L-x) \text{ et } \frac{w''}{\kappa_y} = 1 + \alpha (D - l_c^2 D'') \quad (3-35)$$

Il est intéressant de noter que dans le cas d'une poutre non endommagée, $D(x) = 0$ les équations élastiques sont réduites à :

$$M - l_c^2 M'' = EI w'' \text{ et } M = P(L-x) \quad (3-36)$$

Comme l'ont déjà souligné Challamel et Wang (Challamel and Wang 2008), ce modèle de poutre console précis de contient aucun effet non local car :

$$M'' = 0 \Rightarrow M = EIw'' \quad (3-37)$$

Cela signifie que les effets non locaux apparaissent uniquement dans la configuration endommagée, une propriété similaire à celle des modèles pionniers de Pijaudier-Cabot et Bažant (1987). Cette propriété d'invariance d'échelle lors de la phase d'élasticité n'aurait pas été applicable en présence d'un chargement réparti.

Dans l'Éq. (3-35), et si l'on compare la loi constitutive non locale avec la fonction de charge d'endommagement non local, le modèle continualisé présenté ici associe directement la variable d'endommagement local avec le moment fléchissant local :

$$M = EI\kappa_y(1-D)(1+\alpha D) \quad (3-38)$$

Autrement dit, la variable d'endommagement peut être exprimée de façon équivalente par rapport à la variable de contrainte locale généralisée, une propriété étonnante qui n'est généralement pas adoptée dans la plupart des modèles d'endommagement continus non locaux. Il est à noter que ce type de modèles d'endommagement au gradient (ou présentant une équivalence vis-à-vis de ce modèle d'endommagement exprimé en termes de déformation) n'a pas besoin de conditions aux limites d'ordre supérieur supplémentaire. Cette propriété a déjà été observée dans le cas du continuum élastique non local obtenu grâce à la continualisation d'un système élastique discret.

Comme souvent dans le cas de la flexion de poutres inélastiques, (voir (Challamel et al. 2009; Challamel 2010) pour une poutre non locale endommageable), la longueur totale L de la poutre peut être décomposée en deux régions, l'une considérée comme la zone d'endommagement en écrouissage qui couvre une zone adjacente à une section encastree d'une dimension l_0 , où $x \in [0; l_0]$. En dehors de cette zone, la poutre est considérée comme purement élastique et non endommagée, $D = 0$.

En partant du principe que la variable d'endommagement est continue tout le long de la zone endommagée, la longueur endommagée l_0 peut être calculée ainsi :

$$D(l_0) = 0 \Rightarrow \frac{l_0}{L} = \frac{\beta - 1}{\beta} \quad (3-39)$$

L'analyse non locale continue de la transition écrouissage-adoucissement est similaire à celle du système discret. Durant la phase d'écrouissage, par exemple $\beta \in [1; \beta_{\max}]$, l'endommagement augmente dans la zone d'écrouissage $x^* \in [0; l_0^*]$ avec $l_0^* = 1 - 1/\beta$. L'équation aux différences finies, Éq. (3-19) est désormais approximée par une équation différentielle continue grâce à la procédure de continualisation et l'utilisation de l'approximant de Padé :

$$\frac{w''}{\kappa_y} = 1 + \alpha \left(D - \frac{a^2}{12} D'' \right) \quad \text{avec} \quad D = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{L} \right)} \quad (3-40)$$

La courbure peut être exprimée de manière équivalente ainsi :

$$\frac{w''}{\kappa_y} = \frac{1 + \alpha}{2} - \alpha \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1 - x^*)} - \alpha l_c^{*2} \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1 - x^*)}^3} \quad (3-41)$$

avec $l_c^2 = \frac{a^2}{12}$

Une double intégration de la courbure conduit à une solution générale de la flèche adimensionnée dans la zone d'endommagement $x^* \in [0; l_0^*]$:

$$\frac{w^*}{\kappa_y^*} = \left(\frac{1 + \alpha}{2} \right) \frac{x^{*2}}{2} - \frac{4\alpha^3}{15\beta^2} \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1 - x^*)}^5 + \alpha l_c^{*2} \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1 - x^*)} + Ax^* + B \quad (3-42)$$

3.3.3 Discussion sur les conditions aux limites du modèle MEC non local

L'identification des deux constantes d'intégration A et B dans l'équation de la flèche est problématique, et nécessite donc une véritable procédure de continualisation des conditions aux limites. La flèche s'annule à la limite de la section encastree, ce qui permet de d'identifier directement l'unes des constantes d'intégration :

$$w^*(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{w^*}{\kappa_y^*} = & \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \frac{x^{*2}}{2} - \frac{4\alpha^3}{15\beta^2} \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1-x^*)} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right)^5 \\ & + \alpha l_c^{*2} \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1-x^*)} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right) + Ax^* \end{aligned} \quad (3-43)$$

La seconde condition aux limites est liée aux conditions de rotation de la section encastree. Une condition aux limites locale consisterait à adopter une rotation nulle, ce qui induirait une mauvaise approximation de la solution discrète, trop rigide :

$$w^{*\prime}(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{w^*}{\kappa_y^*} = & \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \frac{x^{*2}}{2} - \frac{4\alpha^3}{15\beta^2} \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1-x^*)} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right)^5 \\ & + \alpha l_c^{*2} \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1-x^*)} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right) \\ & + \left[\frac{2\alpha^2}{3\beta} \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}^3 - \frac{\beta}{2} l_c^{*2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}} \right] x^* \end{aligned} \quad (3-44)$$

Il est utile de préciser que cette relation n'est pas définie lorsque le facteur de chargement est à son maximum, $\beta = \beta_{\max} = (1+\alpha)^2/4\alpha$. Notons que la solution en écroutissage

« local » est obtenue pour une longueur caractéristique qui s'annule quand $l_c/L \rightarrow 0$, ou de manière équivalente quand $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{w^*}{\kappa_y^*} = \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \frac{x^{*2}}{2} - \frac{4\alpha^3}{15\beta^2} \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1-x^*)} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right) + \left(\frac{2\alpha^2}{3\beta} \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right) x^* \quad (3-45)$$

Une fois que la flèche dans la zone endommagée $x \in [0; l_0]$ est connue grâce à une intégration, la flèche dans la zone d'élasticité $x \in [l_0; L]$ peut être dérivée de la condition de continuité de la flèche et de la rotation :

$$w^-(l_0) = w^+(l_0) \quad \text{et} \quad w'^-(l_0) = w'^+(l_0) \quad (3-46)$$

Ce qui mène au calcul de la flèche dans la zone élastique :

$$w^+(x) = \frac{PLx^2}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI} + \left[w'^-(l_0) - \frac{PLl_0}{EI} + \frac{P(l_0)^2}{2EI} \right] x + \left[w^-(l_0) - (l_0)w'^-(l_0) + \frac{PL(l_0)^2}{2EI} - \frac{P(l_0)^3}{3EI} \right] \quad (3-47)$$

On peut voir dans la Figure 3-6 qu'une telle modélisation continue de la section encastree d'un modèle discret n'est pas efficace, surtout lorsque la charge atteint son maximum (avec les hypothèses cinématiques locales). Cela signifie que les conditions aux limites doivent être correctement continualisées à partir du système discret, et les conditions aux limites "locales" doivent être corrigées. En partant de la condition aux limites discrètes de l'extrémité encastree, on obtient la condition aux limites discrète $w(a) = w(-a)$ qui est également continualisée :

$$w'(0) + \frac{a^2}{6} w'''(0) + o(a^4) = 0 \quad (3-48)$$

En considérant cette condition aux limites corrigée, on identifie la constante d'intégration

A :

$$A = \frac{2\alpha^2}{3\beta} \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}^3 + \frac{\beta}{2} l_c^{*2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (3-49)$$

La flèche dans la zone endommagée est alors obtenue par :

$$\begin{aligned} \frac{w^*}{\kappa_y^*} = & \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \frac{x^{*2}}{2} - \frac{4\alpha^3}{15\beta^2} \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} (1-x^*)^5 - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right) \\ & + \alpha l_c^{*2} \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} (1-x^*) - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right) + \left[\frac{2\alpha^2}{3\beta} \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}^3 + \frac{\beta}{2} l_c^{*2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}} \right] x^* \end{aligned} \quad (3-50)$$

Les conditions de continuité à l'interface élasto-endommageable sont elles aussi continuialisées telles que :

$$w^-(l_0) = w^+(l_0) \text{ et } \frac{w^-(l_0+a) - w^-(l_0-a)}{2a} = \frac{w^+(l_0+a) - w^+(l_0-a)}{2a} \quad (3-51)$$

L'expression de la flèche à l'extrémité est ensuite exprimée dans la zone élastique de la chaîne :

$$\begin{aligned} w^+(x) = & \frac{PLx^2}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI} + \\ & \left[\frac{w^-(l_0+a) - w^-(l_0-a)}{2a} - \frac{PLl_0}{EI} + \frac{P}{6EI} (a^2 + 3l_0^2) \right] x \\ & + \left[w^-(l_0) - l_0 \frac{w^-(l_0+a) - w^-(l_0-a)}{2a} + \frac{PL(l_0)^2}{2EI} - \frac{P(l_0)^3}{3EI} - P \frac{l_0 a^2}{6EI} \right] \end{aligned} \quad (3-52)$$

Ces conditions aux limites étendues sont nécessaires pour la connexion entre l'élasticité non locale et le problème d'endommagement non local. On suppose par la suite que

$l_{0,\max}^* > a^* = 1/n$, i.e. $p > 1$. On peut voir clairement sur la figure 3-6 que la nouvelle solution basée sur la continualisation des conditions aux limites donne de bien meilleurs résultats par rapport aux résultats numériques discrets de référence (avec les conditions aux limites cinématiques d'ordre supérieur). Il est à noter que la solution non locale est moins rigide que la solution locale, une propriété qui était déjà observée pour les systèmes élastiques (voir (Challamel 2013) par exemple). Cependant, la nouvelle approximation conduit à une sorte de seuil limite de chargement, dû au comportement divergent de la solution lorsque le facteur de charge tend vers β_{\max} . De nouveau, on observe le rôle clé joué par les conditions aux limites, comme déjà souligné par (Mesarovic et Padbidri 2005; Inglis et al. 2008; Coenen et al. 2012) dans des analyses multi-échelles de problèmes de localisation de l'endommagement. Ce point est également discuté en détails par Challamel et al (Challamel et al. 2014) qui montrent que les conditions aux limites peuvent influencer l'effet sur la rigidité qu'ont les termes non locaux dans la réponse en flexion d'une poutre non locale. Il est confirmé dans cette étude que la réponse globale est extrêmement sensible au choix des conditions aux limites du problème continu non local par rapport à la solution discrète.

Une autre continualisation de la condition aux limites discrète au niveau de l'extrémité encastree est basée sur l'équivalence du moment fléchissant à l'encastrement :

$$\frac{w_{-1} - 2w_0 + w_1}{a^2 \kappa_y} = 1 + \alpha D_0^+ \quad \text{avec} \quad D_0^+ = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}$$

(3-53)

En injectant les conditions de la différence finie du problème discret, $w_0 = 0$, et $w_{-1} = w_1$, en considérant leurs équivalents continus l'Éq. (3-53) devient :

$$\frac{2w(a)}{a^2 \kappa_y} = \frac{1 + \alpha}{2} - \alpha \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}$$

(3-54)

En injectant cette condition aux limites dans la solution générale de la flèche non locale, on obtient une solution basée sur l'équivalence du moment fléchissant à l'encastrement :

$$\begin{aligned}
 \frac{w^*}{\kappa_y^*} = & \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \frac{x^{*2}}{2} - \frac{4\alpha^3}{15\beta^2} \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1-x^*)} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right)^5 \\
 & + \alpha l_c^{*2} \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (1-x^*)} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right) \\
 & + \left[-\frac{\alpha}{2n} \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} - \alpha l_c^{*2} n \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{n} \right)} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right) \right] x^* \\
 & + \left[\frac{4\alpha^3}{15\beta^2} n \left(\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{n} \right)} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right)^5 \right]
 \end{aligned} \tag{3-55}$$

Pour cette condition limite statique au bord de la poutre, l'équivalence parfaite entre la solution d'élasticité et la solution élasto-endommageable est obtenue à partir des conditions de continuité cinématique suivantes pour $x = l_0$:

$$w^-(l_0) = w^+(l_0) \text{ et } \frac{w^-(l_0+a) - w^-(l_0)}{a} = \frac{w^+(l_0+a) - w^+(l_0)}{a} \tag{3-56}$$

Qui sont équivalentes à :

$$w^-(l_0) = w^+(l_0) \text{ et } w^-(l_0+a) = w^+(l_0+a) \tag{3-57}$$

La solution complémentaire de la partie élastique est obtenue à partir de l'Éq. (3-57), sans utilisation du paramètre de charge β pour voir plus facilement le lien avec l'Éq. (3-12) :

$$\begin{aligned}
 w^+(x) = & \frac{PLx^2}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI} + \\
 & \left[\frac{w^-(l_0+a) - w^-(l_0)}{a} - \frac{PL}{EI} \left(l_0 + \frac{a}{2} \right) + \frac{P}{6EI} (a^2 + 3l_0^2 + 3l_0a) \right] x \\
 & + \left[w^-(l_0) - l_0 \frac{w^-(l_0+a) - w^-(l_0)}{a} + \frac{PLl_0}{2EI} (l_0+a) - \frac{Pl_0}{6EI} (a^2 + 3l_0a + 2l_0^2) \right]
 \end{aligned} \tag{3-58}$$

On peut facilement vérifier à partir de cette équation que la flèche élasto-endommageable tend vers la solution élastique lorsque le facteur de charge P tend vers la charge de la limite d'élasticité P_y , c'est-à-dire pour une longueur endommagée nulle $l_0 \rightarrow 0$:

$$\lim_{P \rightarrow P_y} w^+(L) = \frac{P_y L^3}{3EI} + \frac{P_y a^2 L}{6EI} \quad (3-59)$$

Il est montré sur la Figure 3-6 que cette dernière flèche non locale basée sur le principe d'équivalence de moments est probablement la meilleure approximation continue du système MED (avec la condition aux limites statique équivalente). La charge maximale peut être atteinte avec ce dernier modèle non local, pour $\beta = \beta_{\max} = (1 + \alpha)^2 / 4\alpha$, et l'endommagement en ce point au niveau de l'encastrement est égale à $D_{\max} = (\alpha - 1) / 2\alpha$ pour le modèle considéré. Le modèle discret de référence est bien approché par ce modèle non local obtenu à partir de la procédure de continualisation. Il est également confirmé que le modèle local surestime la rigidité du système dans la phase d'écroutissage. Les diverses hypothèses cinématiques qui ont été étudiées et tracées sur la Figure 3-6 sont résumées dans le tableau 1.

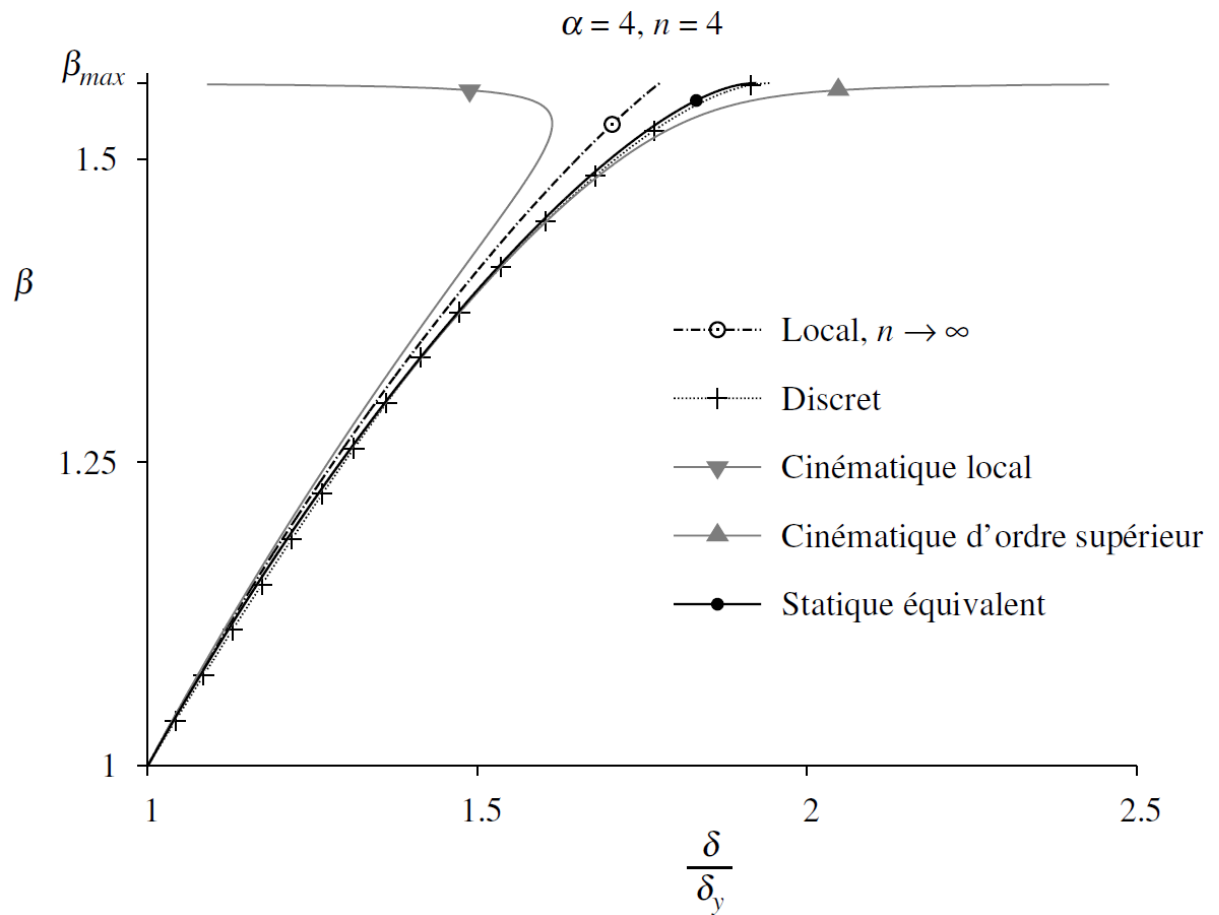


Figure 3-6 – flèche de l'extrémité au-delà de la limite élastique jusqu'à la charge maximum pour un système discret de $n=4$ avec $\alpha = 4$ pour différentes paires de conditions aux limites.

Conditions aux limites en :	$x^* = 0$	$x^* = l_0^*$
Continuité de la flèche	$w^{-*}(0) = 0$	$w^{-*}(l_0^*) = w^{+*}(l_0^*)$
Cinématique locale Conditions de continuité	$w^{*'}(0) = 0$	$w^{-*'}(l_0^*) = w^{+*'}(l_0^*)$
Cinématique d'ordre supérieur Conditions de continuité	$w^{-*'}(0) + \frac{a^{*2}}{6} w^{-*'''}(0) + o(a^{*4}) = 0$	$w^{-*}(l_0^* + a^*) - w^{-*}(l_0^* - a^*) = w^{+*}(l_0^* + a^*) - w^{+*}(l_0^* - a^*)$
Condition statique équivalente $w_{-1}^{-*} = w_1^{-*}$	$\frac{2w^*(a^*)}{a^{*2} \kappa_y^*} = \frac{1+\alpha}{2} - \alpha \sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}$	$w^{-*}(l_0^* + a^*) = w^{+*}(l_0^* + a^*)$

Tableau 3-1. Résumé des conditions limites utilisées pour la résolution du problème continualisé.

À ce stade, pour le processus d'écrouissage, on peut conclure que l'approche continualisée équivalente à une approche de MEC non-locale avec conditions aux limites continualisées donne d'excellents résultats par rapport à la solution numérique de référence discrète. L'approche non locale donne également un meilleur résultat que l'approche locale qui surestime la rigidité du système discret.

La dernière partie de la comparaison entre les approches continue et discrète concerne l'étape de radoucissement. Une fois que la charge atteint la valeur maximum, le radoucissement contrôle le processus de post-localisation, au moins dans la partie encastree. La poutre peut être divisée en trois parties, le modèle cohésif radoucissant à l'encastrement $x \in [0; a]$, le déchargement élastique de la zone pré-endommagée pour

Chaîne microstructurée en flexion

$x \in [a; l_{0,\max}]$ avec $l_{0,\max}^* = 1 - 1/\beta_{\max}$ et le déchargement élastique dans la zone non endommagée de la poutre pour $x \in [l_{0,\max}; L]$. Pour le déchargement, dans la zone pré-endommagée de la poutre, l'équation différentielle suivante s'applique :

$$\frac{M(x)}{1 - D_{\max}(x)} - l_c^2 \left[\frac{M(x)}{1 - D_{\max}(x)} \right]'' = EI w''(x) \quad \text{pour } x \in [0; l_{0,\max}]$$

avec

$$M(x) = P(L - x), \quad D_{\max}(x^*) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} - \frac{1 + \alpha}{2\alpha} \sqrt{x^*}, \quad \beta_{\max} = \frac{(1 + \alpha)^2}{4\alpha} \quad \text{et } l_c^2 = \frac{a^2}{12} \quad (3-60)$$

qui peut être analytiquement ou numériquement intégrée deux fois. Dans la zone endommagée $x \in [a; l_{0,\max}]$, l'équation différentielle de la flèche est donnée par :

$$\frac{w^{*''}(x^*)}{\kappa_y^*} = \frac{2\alpha\beta}{1 + \alpha} \left[1 - \sqrt{x^*} - \frac{l_c^2}{4\sqrt{x^{*3}}} \right] \quad (3-61)$$

Pour ce problème de radoucissement, la flèche a été obtenue dans la zone endommagée à partir de l'intégration de la courbure dans l'Éq. (3-61), en utilisant les conditions aux limites

suivantes, $w^-(0) = 0$ et $w^-(a^*) = \frac{\kappa_y^*}{2n^2} (1 + \alpha D_0^-)$:

$$\begin{aligned} \frac{w^*(x^*)}{\kappa_y^*} = & \frac{2\alpha\beta}{1 + \alpha} \left[\frac{x^{*2}}{2} - \frac{4}{15} \sqrt{x^{*5}} + l_c^2 \sqrt{x^*} \right] + \\ & \left[\frac{1}{2n} \left(\frac{1 + \alpha}{2} + \alpha \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}} \right) - \frac{2\alpha\beta}{1 + \alpha} \left(\frac{1}{2n} - \frac{4}{15\sqrt{n^3}} + l_c^2 \sqrt{n} \right) \right] x^* \end{aligned} \quad (3-62)$$

Pour une vérification robuste de ces résultats théoriques, la flèche a également été calculée à l'aide d'une méthode numérique, à savoir une méthode de différence finie centrée associée aux mêmes conditions aux limites à l'extrémité encastree.

Une bonne approximation du modèle de MED en utilisant le modèle de MEC non-local est montrée à nouveau dans la Figure 3-7, pour les phases d'écrouissage et de radoucissement.

La Figure 3-7 indique clairement le besoin d'introduire un modèle non local dans la phase d'écroutissage, mais également dans la phase de radoucissement. Bien sûr, le déchargement élastique est obtenu pour le modèle radoucissant continu "local" (avec le paradoxe de Wood (Wood 1968), associé à une localisation dans une zone de longueur nulle), une propriété qui a été clairement surmontée ici avec l'approche non locale, qui donne des résultats très proches de ceux obtenus pour le système discret sur toute la plage de chargement.

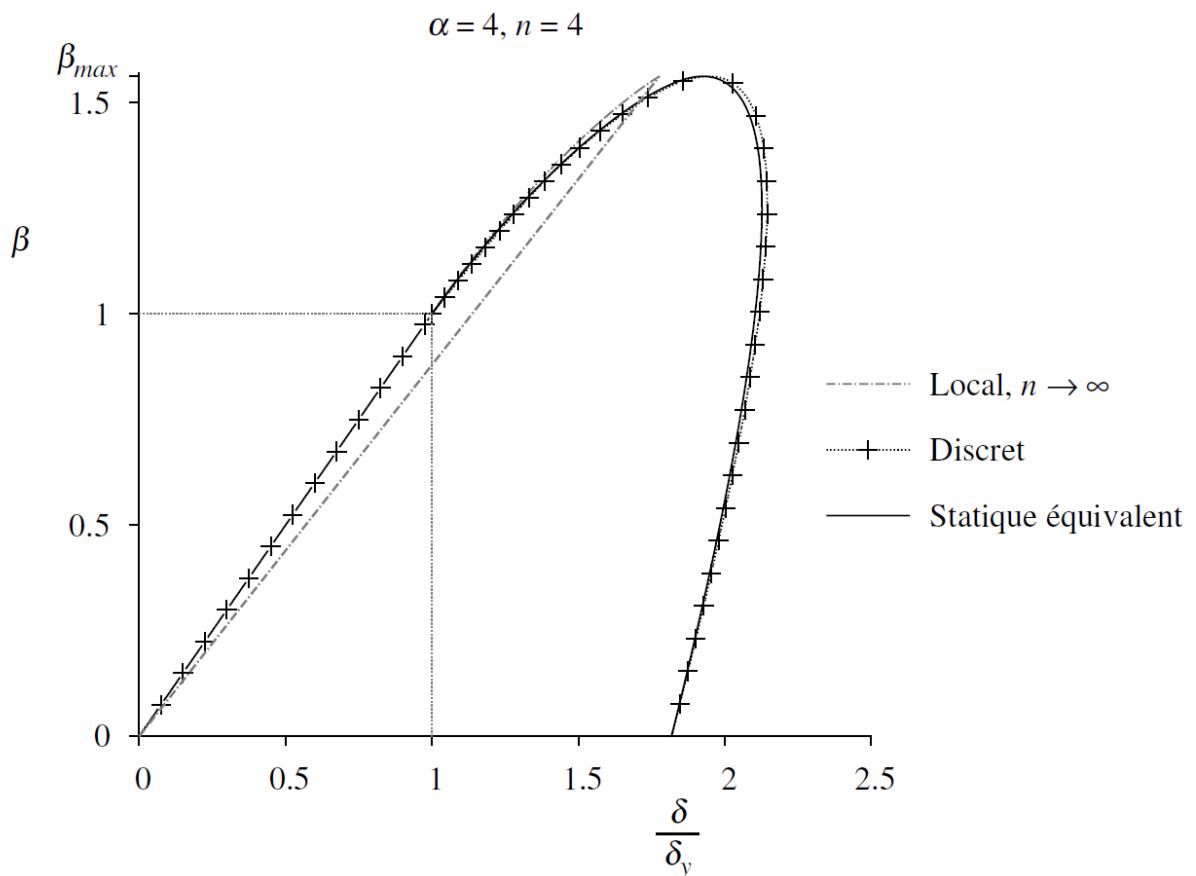


Figure 3-7 – Comparaison de la relation charge-flèche pour le processus complet, écroutissage et radoucissement entre le système discret ($n = 4$ et $\alpha = 4$), la loi locale, et l'approche statique équivalente de la continualisation.

3.4 Comportement du modèle MED sous chargement distribué

On peut envisager un problème similaire dans un autre cas de chargement. La poutre reçoit un chargement réparti selon le modèle des charges concentrées, chaque nœud reprend une

Chaîne microstructurée en flexion

charge pa , avec p la charge linéique, à l'exception des nœuds d'extrémité qui ne reprennent qu'une demi-charge. Le système considéré est décrit en Figure 3-8.

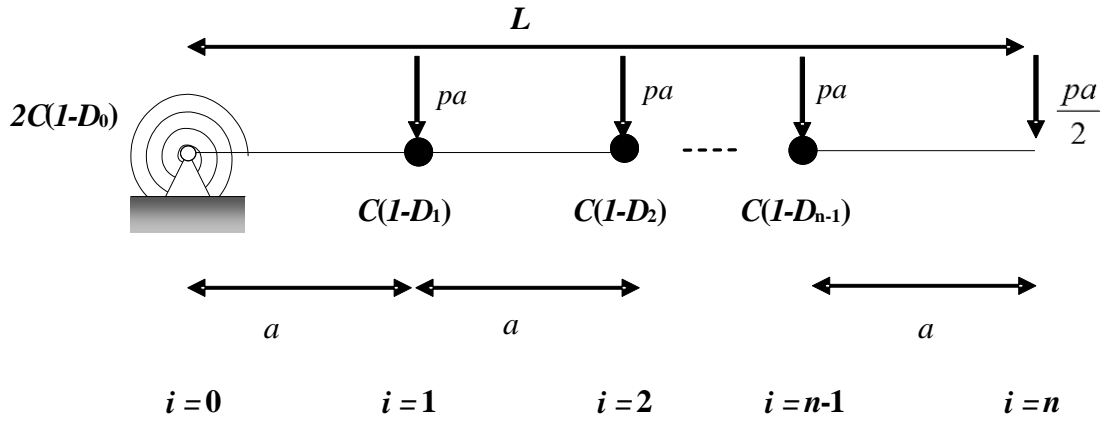


Figure 3-8 – Poutre console microstructurée sous chargement répartie.

Les ressorts élasto-endommageables ont un comportement identique au cas précédent. L'équilibre des moments sous forme discrète s'écrit dans ce cas :

$$\frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{a^2} = p \quad (3-63)$$

La valeur du moment fléchissant pour la poutre console discrète est égale à :

$$M_i = \frac{pL^2}{2} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 = EI(1 - D_i) \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{a^2} \quad (3-64)$$

En combinant l'Éq. (3-64) et l'Éq. (3-6), on obtient un polynôme du second ordre en D_i :

$$(1 + \alpha D_i)(1 - D_i) = \frac{pL^2}{2EI\kappa_y} \left(\frac{i}{n} - 1\right)^2 \quad (3-65)$$

L'expression de la variable d'endommagement est alors :

$$D_i^\pm = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \mp \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2} \quad \text{avec} \quad p_y = 2EI \frac{\kappa_y}{L^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{p}{p_y} \quad (3-66)$$

La longueur endommagée, l_0 , est obtenue en trouvant la valeur de x Pour laquelle D s'annule :

$$D_i^+(x^* = l_0^*) = 0 \Rightarrow (1 - l_0^*)^2 = \frac{1}{\beta} \Rightarrow l_0^* = 1 - \sqrt{\frac{1}{\beta}} \quad (3-67)$$

En prenant p le nombre de ressort endommagés, l_0 est encadré par :

$$\frac{p-1}{n} \leq l_0^* = 1 - \sqrt{\frac{1}{\beta}} \leq \frac{p}{n} \quad (3-68)$$

Ce qui nous donne la valeur de p :

$$p = E \left[n \left(1 - \sqrt{\frac{1}{\beta}} \right) \right] + 1 \quad (3-69)$$

L'équation aux différences du second ordre à résoudre pour la branche d'écroutissage de la zone endommagée de la poutre est donc :

$$\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{a^2 \kappa_y} = 1 + \alpha D_i^+ \quad \text{avec} \quad D_i^+ = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{i}{n} \right)^2} \quad (3-70)$$

Les conditions aux limites du problème discret sont les mêmes que pour le cas de la charge ponctuelle, l'Éq. (3-26) est donc toujours applicable.

Dans la plage de chargement purement élastique, la solution est donnée par (Challamel et al. 2014). Le déplacement de l'extrémité libre, δ , est dans ce cas :

$$\delta = \frac{pL^4}{8EI} + \frac{pa^2L^2}{8EI} \quad (3-12)$$

Dans le cas local ($a \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$), on retrouve la valeur caractéristique de la flèche d'une poutre console sous charge répartie $\delta = \frac{pL^4}{8EI}$. La flèche du système discret élastique est

multiplié par un facteur $\frac{1+n^2}{n^2}$, strictement positif, le système discret est donc toujours plus

souple que l'équivalent local. Les Figures 3-9 et 3-10 présentent respectivement l'influence du paramètre α et du nombre d'éléments constituant la chaîne. On observe, comme

précédemment, que la branche d'écrouissage est contrôlé par le paramètre α et la branche de radoucissement dépend du nombre d'éléments. A noter que dans le chapitre 2, adopter le système des masses concentrées (demi-charge sur le dernier élément) faisait apparaître un effet d'échelle en résistance qui est fonction de la taille de la microstructure, ce n'est pas le cas ici car la rotation du premier élément est calculée directement à l'encastrement. L'expression de β_{max} est donnée par l'Eq. (3-14) avec la définition de β donnée par l'Eq. (3-66).

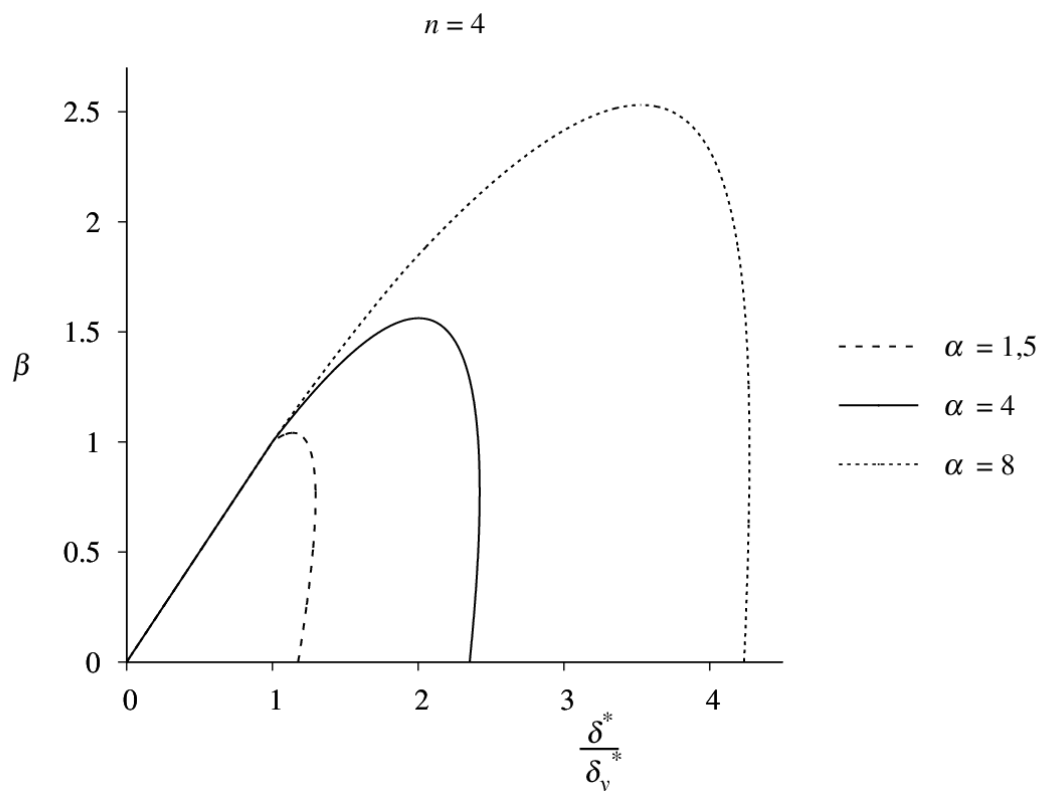


Figure 3-9 – Relation charge-flèche du système discret endommageable ($n=4$), par rapport au paramètre α .

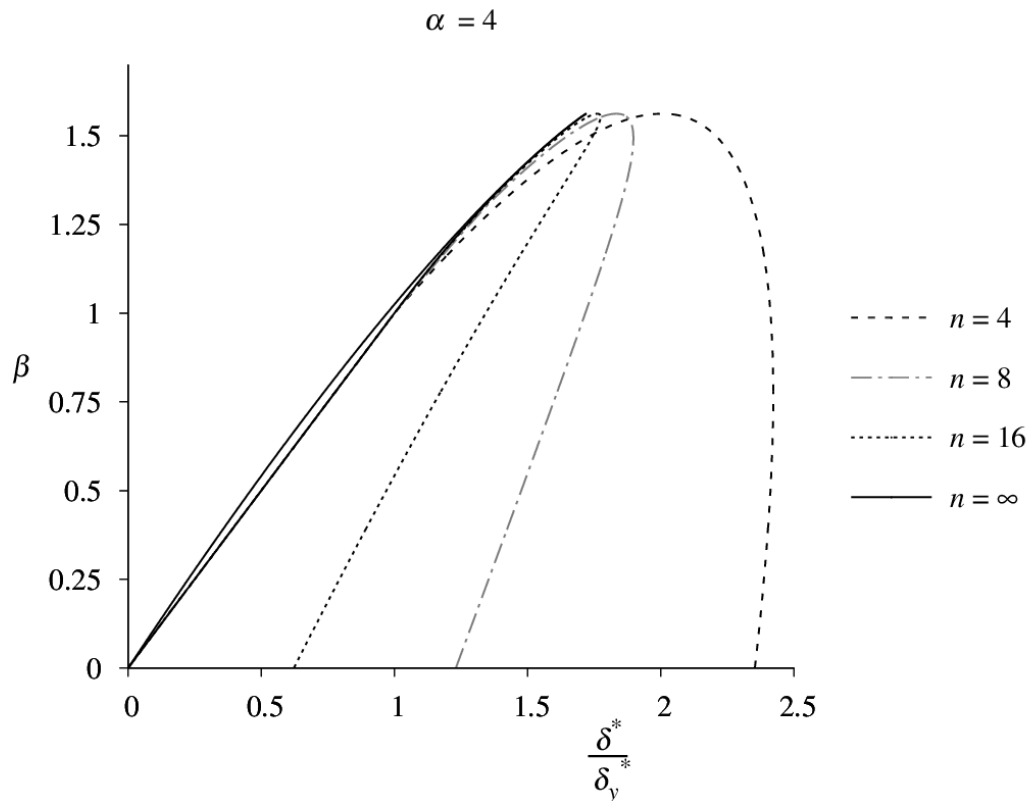


Figure 3-10 – Relation charge-flèche du système discret endommageable ($\alpha = 4$) sous charge répartie, par rapport au nombre d'élément n .

On pourrait envisager une démarche de continualisation pour ce problème de charge distribuée analogue à la démarche suivie pour le problème de la charge concentrée.

3.5 Conclusions

Ce chapitre traite d'un modèle de poutre microstructurée endommageable en flexion pour une charge concentrée et montre, à partir d'une procédure de continualisation, que ce système se comporte comme un élément structural de MEC non local. En d'autres termes, un modèle de MEC non local entièrement couplé a été construit à partir d'arguments physiques liés au caractère discret de la matière à plus petite échelle (MED en réseau). La longueur caractéristique l_c du modèle MEC non local ne dépend pas du chargement et est proportionnelle à la microstructure du réseau donnée par le paramètre de la taille d'un élément a . Plus exactement, la longueur caractéristique au carré l_c^2 est égale à $a^2/12$, ce qui est le double de la longueur caractéristique obtenue pour le problème axial.

Le rôle clé des conditions aux limites a également été étudié. Une sensibilité importante de la réponse globale du modèle structurel aux conditions aux limites a été observée théoriquement et numériquement. Il a également été montré que le modèle de MEC non local s'adapte efficacement aux résultats du modèle de MED lorsqu'un ensemble cohérent de conditions aux limites est implémenté au niveau de l'extrémité encastree et à l'interface entre les zones purement élastique et endommagée.

La non-localité basée sur la micromécanique développée dans ce chapitre peut être classée comme un modèle non local continu associé à un modèle d'endommagement non local cohésif. Le modèle non local continu distribué est construit pour la zone de propagation de l'endommagement dans la phase d'écrouissage, et donne de meilleurs résultats que le modèle local équivalent par rapport au modèle discret exact. Dans le régime de radoucissement, seul le modèle cohésif s'applique afin de déterminer la rotation du premier élément à l'extrémité encastree.

4 Membrane élastique microstructurée

4.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à l'étude du comportement statique et dynamique d'une membrane microstructurée élastique, à la fois à l'aide d'une approche discrète et d'une approche continue non locale. Cette membrane discrète prend la forme d'un réseau constitué de ressorts élastiques connectés dans deux directions, formant une membrane microstructurée rectangulaire. De nombreuses études ont déjà été menées pour appréhender l'effet des modèles de microstructure à l'échelle macroscopique et les travaux récents, tels que Challamel et al. (Challamel et al. 2016d), ont montré la dépendance des modèles de continuum enrichis unidimensionnels aux schémas microstructuraux, aussi bien pour les microstructures de masses concentrées que distribuées. Ce chapitre généralise l'analyse unidimensionnelle à un problème de membrane microstructurée à deux dimensions. L'analyse géométrique et mécanique du problème de la membrane microstructurée est basée sur les travaux de Rosenau (Rosenau 1987) qui établit les équations non-linéaires de vibration transverse d'un réseau bidimensionnel. Les équations ont toutefois été linéarisées dans notre cas. Pour la partie statique de l'étude mécanique, nous appliquons un effort uniforme hors plan sur la membrane.

L'approche présentée consiste ici à faire le lien entre la mécanique de la membrane discrète et la mécanique de la membrane continue non locale aussi bien dans le cas statique que dynamique. Nous appliquons de nouveau la procédure dite de continualisation développée par Kruskal et Zabusky (Kruskal and Zabusky 1964). Elle repose sur un développement des opérateurs aux différences finies du réseau en série de Taylor, pour convertir le problème aux différences en des équations différentielles d'ordres supérieurs. L'utilisation de l'approximant de Padé permet d'éviter des équations différentielles d'ordre supérieur, comme cela a été fait par Rosenau (Rosenau 1986) sur la vibration d'une membrane discrète pour ensuite dériver analytiquement les équations de dispersion d'ondes non locales illustrant les effets de la microstructure. Ce problème de propagation d'ondes dans une membrane discrète a aussi été étudié plus récemment par Andrianov et Awrejcewicz (Andrianov and Awrejcewicz 2008) qui utilisent un approximant de Padé en un et deux points pour calibrer leur modèle non local de membrane. Lombardo et Askes (Lombardo and Askes 2010) ont également approximé le comportement d'une membrane discrète fixée aux bords par un approximant de Padé et ont obtenu les fréquences propres par une analyse par la méthode des éléments finis.

Nous essaierons pour notre part d'obtenir des solutions analytiques. Un problème mathématiquement proche a été étudié par Mindlin (Mindlin 1970) pour un modèle de réseau tridimensionnel élastique avec interactions au voisinage direct et indirect, ce qui menait aussi à une résolution d'équations linéaires en différences finies du second-ordre. Cependant, le problème de la membrane n'avait pas été considéré dans cette dernière publication. Tong et al (Tong et al. 1971) et (Chen 1971) ont obtenu l'équation exacte de la fréquence propre du problème de la membrane aux différences finies, ce qui équivaut au problème de réseau considéré dans ce chapitre.

D'un point de vue mathématique, ce problème peut être rapproché de celui de la diffusion (conduction thermique) pour un maillage bidimensionnel, considérant une équation linéaire du second-ordre aux différences finies, voir Challamel et al, (Challamel et al. 2016a). A noter que le problème de la plaque discrète répond à une équation linéaire du quatrième ordre en différences finies et diffère donc de celui de la membrane (Zhang et al. 2014b, c; Challamel et al. 2016b). Comme évoqué précédemment, ce chapitre se base sur les résultats de Rosenau (Rosenau 1987) pour des membranes infinies, adaptés dans le cas présent à des membranes finies, sans déplacement aux bords, dans le cas statique et dynamique. Les résultats obtenus durant la thèse ont été publiés dans (Hérisson et al. 2018). Nous comparons un modèle local et non local au modèle discret afin de justifier la source de la non localité. La discrétisation périodique considérée peut être supposée provenir du caractère discret de la matière à petite échelle.

4.2 Comportement statique de la membrane discrète

La membrane discrète considérée ici est constituée de masses concentrées sollicitées par une charge verticale qa^2 dans la direction orthogonale au plan de la membrane (q est une charge surfacique [N/m] et a désigne la taille des éléments discrets constitutifs du réseau, i.e. la longueur initiale de chaque ressort). Les nœuds n'ont qu'un seul degré de liberté dans la direction verticale, ce déplacement hors-plan est noté w . Tous les nœuds de bords demeurent dans le plan de référence et sont supposés fixes. La membrane rectangulaire est composée de n_x ressorts de longueur a dans la direction x et n_y de même longueur dans la direction y . La traction répartie est appliquée sur les bords de la membrane et est notée T , voir Figure 4-1. La longueur dans chaque direction est notée, $L_x=L$, $L_y=\lambda L$, et le nombre d'éléments dans chaque direction, $n_x=n$, $n_y=\lambda n$, où λ est le rapport longueur/largeur. La Figure 4-2 illustre la déformée de la membrane avec un coefficient $\lambda=0.5$.

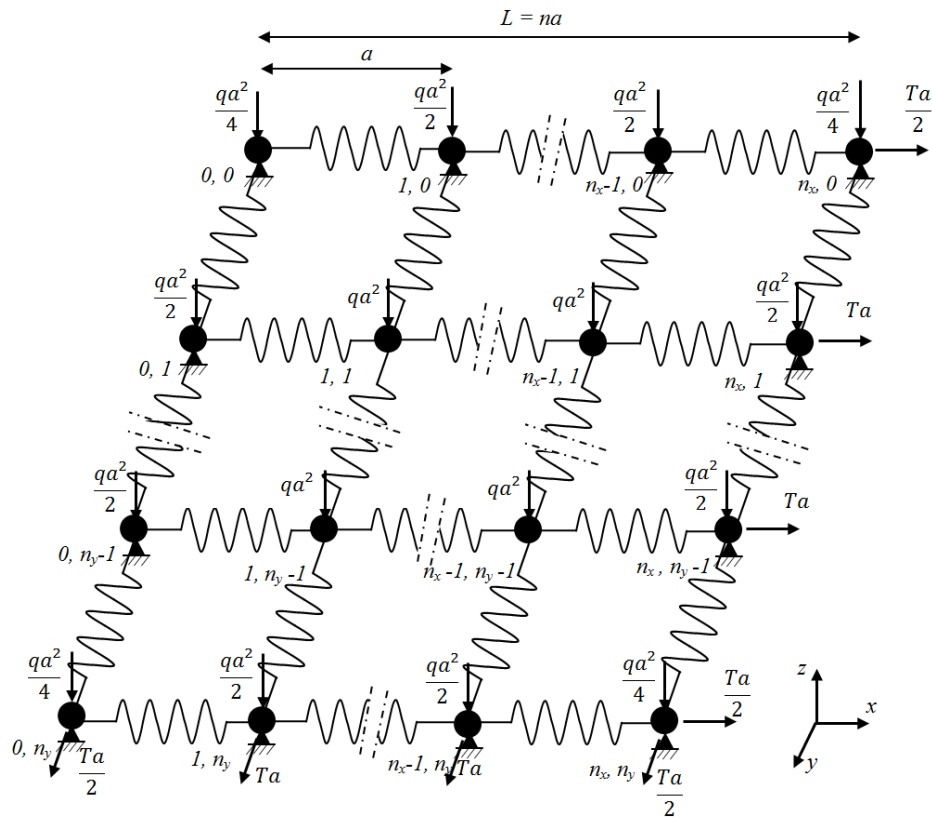


Figure 4-1 – Membrane discrète avec pression uniforme hors-plan.

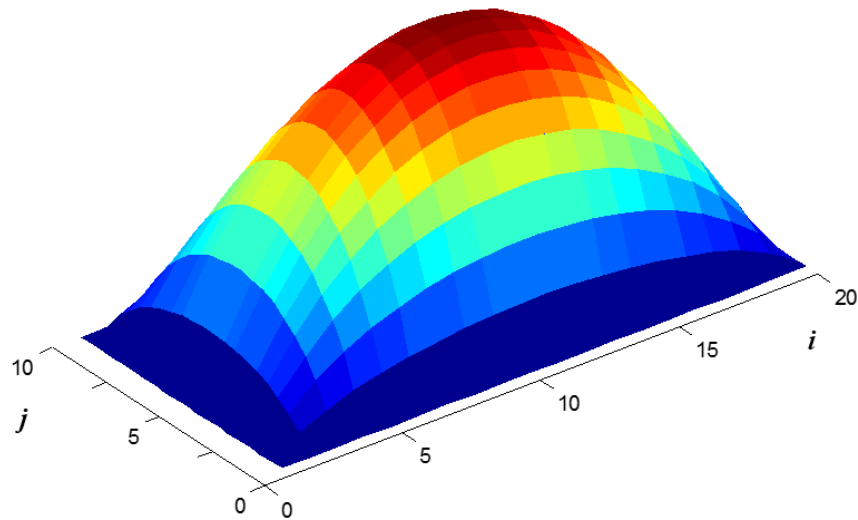


Figure 4-2 – Représentation de la flèche de la membrane rectangulaire avec $n=20$ et $\lambda=0.5$

Membrane élastique microstructurée

La composante verticale de l'effort dans chaque ressort est calculée pour la traction T comme étant :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{i+1/2,j}^x = T \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{a} \\ P_{i,j+1/2}^y = T \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{a} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} P_{i-1/2,j}^x = T \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{a} \\ P_{i,j-1/2}^y = T \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{a} \end{array} \right. \quad (4-1)$$

L'équation d'équilibre à chaque nœud est :

$$P_{i+1/2,j}^x - P_{i-1/2,j}^x + P_{i,j+1/2}^y - P_{i,j-1/2}^y = -qa \quad (4-2)$$

Les conditions aux limites, liées aux déplacements bloqués au bord de la membrane sont données par :

$$w_{0,j} = w_{n_x,j} = 0 \text{ pour } j \in \{0;1\dots;n_y\} \text{ et } w_{i,0} = w_{i,n_y} = 0 \text{ pour } i \in \{0;1\dots;n_x\} \quad (4-3)$$

L'adjonction des équations Éq.(4-1) et (4-2) conduit à une équation aux différences linéaires en déplacement, gouvernant le comportement de la membrane discrète :

$$T \left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{a^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{a^2} \right] = -q \quad (4-4)$$

L'équation aux différences de la membrane discrète est la formulation en différences finies du problème de la membrane « locale » continue donnée par l'équation différentielle partielle de type Poisson telle que :

$$T\Delta w = -q \quad \text{avec} \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (4-5)$$

En effet, l'Éq.(4-1) peut aussi être reformulée en utilisant un opérateur de différence finie centrée :

$$\begin{cases} P_{i,j}^x = T \frac{w_{i+1/2,j} - w_{i-1/2,j}}{a} \\ P_{i,j}^y = T \frac{w_{i,j+1/2} - w_{i,j-1/2}}{a} \end{cases} \quad (4-6)$$

qui est le schéma en différences finies centrées de la loi continue au gradient telle que :

$$\underline{P} = T \underline{\nabla} w \quad \text{avec} \quad \underline{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \quad (4-7)$$

L'Éq.(4-2) peut être reformulée sous la forme :

$$\frac{P_{i+1/2,j}^x - P_{i-1/2,j}^x}{a} + \frac{P_{i,j+1/2}^y - P_{i,j-1/2}^y}{a} = -q \quad (4-8)$$

Le schéma en différences finies centrées associé à l'équation d'équilibre apparait alors :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{P} = -q \quad \text{avec} \quad \underline{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \quad (4-9)$$

On introduit le paramètre adimensionnel de chargement β , Éq.(4-4) devient :

$$\frac{w_{i+1,j} - 4w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}}{L} = -\frac{qL}{Tn^2} = -\frac{\beta}{n^2} \quad \text{avec} \quad \frac{qL}{T} = \beta \quad \text{et} \quad a = \frac{L}{n} \quad (4-10)$$

C'est une équation linéaire aux différences du second-order qui peut être résolue numériquement et exactement. La solution exacte s'exprime en double série de Fourier :

$$T \frac{w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j}}{a^2} = -q = -q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{m,p} \sin \frac{m\pi ai}{L} \sin \frac{p\pi aj}{\lambda L} \quad (4-11)$$

La constante $A_{m,p}$ est telle que :

$$A_{m,p} = \frac{4}{\lambda L^2} \int_0^L \int_0^{\lambda L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{p\pi y}{\lambda L} dx dy = \frac{16}{\pi^2} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{mp} \quad (4-12)$$

En supposant que la flèche de la membrane puisse également être développée en séries de Fourier, on obtient :

$$w_{i,j} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} W_{m,p} \sin \frac{m\pi ai}{L} \sin \frac{p\pi aj}{\lambda L} \quad (4-13)$$

En introduisant l'Éq. (4-12) et (4-13) dans l'Éq. (4-11) on obtient :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ -\frac{4T}{a^2} W_{m,p} \left(\sin^2 \frac{m\pi a}{2L} + \sin^2 \frac{p\pi a}{2\lambda L} \right) + \frac{16q}{\pi^2} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{mp} \right\} \sin \frac{m\pi ai}{L} \sin \frac{p\pi aj}{\lambda L} = 0 \quad (4-14)$$

Nous avons alors deux cas d'identification de $W_{m,p}$:

$$\sin \left(\frac{m\pi}{2n} \right) \neq 0 \text{ ou } \sin \left(\frac{p\pi}{2\lambda n} \right) \neq 0 \Rightarrow W_{m,p} = \frac{4qa^2}{\pi^2 T} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{mp \left(\sin^2 \frac{m\pi a}{2L} + \sin^2 \frac{p\pi a}{2\lambda L} \right)} \quad (4-15)$$

ou :

$$\sin \left(\frac{m\pi}{2n} \right) = \sin \left(\frac{p\pi}{2\lambda n} \right) = 0 \Rightarrow W_{m,p} = 0 \quad (4-16)$$

Dans le cas de l'Éq. (4-15), on obtient la solution de la flèche de la membrane discrète en l'injectant dans l'Éq. (4-14) ce qui donne :

$$w_{i,j} = \frac{4qa^2}{\pi^2 T} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{mp \left(\sin^2 \frac{m\pi a}{2L} + \sin^2 \frac{p\pi a}{2\lambda L} \right)} \sin \frac{m\pi ai}{L} \sin \frac{p\pi aj}{\lambda L} \quad (4-17)$$

L'Éq. (4-17) est valable pour tout m et p , à l'exception de $(m=k_1 2n) \wedge (p=k_2 2\lambda n)$, où k_1 et k_2 sont des entiers positifs, donnés par l'Éq. (4-16). Cette solution, sous forme adimensionnelle, peut être considérée avec les mêmes conditions sur m et p tel que :

$$w_{i,j}^* = \frac{4\beta}{\pi^2 n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{mp \left(\sin^2 \frac{m\pi}{2n} + \sin^2 \frac{p\pi}{2\lambda n} \right)} \sin \frac{m\pi i}{n} \sin \frac{p\pi j}{\lambda n} \quad (4-18)$$

Nous obtenons l'expression analytique de la flèche de la membrane. Pour vérifier ce résultat, nous traitons aussi le problème avec une résolution matricielle numérique.

4.3 Résolution matricielle de la membrane discrète

La membrane comporte n éléments, donc $n+1$ nœuds, par ligne et par rangée. Les deux nœuds d'extrémités ont leur déplacement bloqué sur z et ne sont donc pas à prendre en compte. On pose $c=n-1$, le nombre de nœuds considérés par rangée et par ligne. On écrit la matrice de déplacement des nœuds sous forme de vecteur pour simplifier la résolution et éviter d'avoir à traiter un tenseur d'ordre 4 pour les coefficients d'interaction entre les nœuds. Z est un vecteur à $c_t=c_x \times c_y$ composantes. Par exemple avec $n_x=n_y=4$ on obtient :

$$Z = \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \end{pmatrix} \text{ représente la matrice } w \text{ de taille } c_x \times c_y \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,3} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,3} \\ w_{3,1} & w_{3,2} & w_{3,3} \end{pmatrix}$$

Nous avons donc $w_{i,j} = Z_k$ avec $k = c_x(i-1) + j$, $i \in [1; c_x]$, $j \in [1; c_y]$. Les coefficients d'interaction entre les différents points seront écrits dans une matrice A de taille $c_t \times c_t$, ce qui fait donc un nombre de n^4 éléments. Cela limite le nombre n à des valeurs relativement basses afin de limiter les problèmes de gestion de mémoire lors de la résolution numérique. Heureusement, les effets non-locaux sont observés pour de faibles valeurs de n . Les notations du système en différences finies sont adaptées :

$$\begin{aligned} w_{i+1,j} &= Z_{c_x(i+1)+j} = Z_{k+c_x} \\ w_{i,j+1} &= Z_{c_x(i)+j+1} = Z_{k+1} \end{aligned} \quad (4-19)$$

On peut alors réécrire le terme de gauche de l'Éq.(4-10) tel que :

$$\frac{-4w_{i,j} + w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}}{L} = \frac{-4Z_k + Z_{k+c_x} + Z_{k-c_x} + Z_{k+1} + Z_{k-1}}{L} \quad (4-20)$$

Cette transformation peut être illustrée par :

$$\begin{bmatrix} & 1 & & & & & & \\ 1 & -4 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & -4 & 1 & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \rightarrow [1 \quad \dots \quad 1 \quad -4 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

La matrice A est définie par :

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= -4 \rightarrow i \in [1; c_t^2] \\ A_{j,j+c_t} &= A_{j+c_t,j} = 1 \rightarrow j \in [1; c_t^2 - c_t] \\ A_{k,k+1} &= A_{k+1,k} = 1 \rightarrow k \in [1; c_t^2 - 1] \end{aligned} \quad (4-21)$$

Les conditions aux limites sont déjà partiellement prises en compte tel que le problème est posé mais une règle s'ajoute pour tenir compte des fins et débuts de ligne :

$$A_{pc_t, pc_t+1} = A_{pc_t+1, pc_t} = 0 \quad \text{avec} \quad p \in [1; c_t - 1] \quad (4-22)$$

Avec le même exemple, $n_x=n_y=4$, A devient une matrice bande de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & & & & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur des solutions est donné par le deuxième terme de droite de l'Éq.(4-10). Le système $AZ=S$ où S est le vecteur des solutions peut alors être résolu numériquement, dans notre cas directement par MATLAB. Les résultats correspondent à ceux obtenus avec la solution analytique en séries de Fourier.

4.4 Comportement statique de la membrane continue non locale

4.4.1 *Modèle de la membrane continuallisée non locale*

Pour obtenir une approximation non locale du système discret, nous appliquons une procédure de continualisation aux équations discrètes, comme pour les problèmes unidimensionnels :

$$w_{i+1,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \partial_x^k}{k!} w(x, y) = e^{a\partial_x} w(x, y) \quad (4-23)$$

L'expressions de l'Éq.(4-23) combinée avec la formulation aux différences finies du problème discret donne :

$$\begin{aligned} \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{a^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{a^2} &= \frac{e^{a\partial_x} - 2 + e^{-a\partial_x}}{a^2} + \frac{e^{a\partial_y} - 2 + e^{-a\partial_y}}{a^2} \\ &= \left[\frac{2 \cosh(a\partial_x) - 4 + 2 \cosh(a\partial_y)}{a^2} \right] w \end{aligned} \quad (4-24)$$

L'équation aux différences en Éq.(4-4) devient :

$$\frac{-q}{T} = \left[\frac{4}{a^2} \sinh^2\left(\frac{a}{2}\partial_x\right) + \frac{4}{a^2} \sinh^2\left(\frac{a}{2}\partial_y\right) \right] w \quad (4-25)$$

En utilisant l'approximant de Padé d'ordre 2/2 pour un développement de l'Éq. (4-25) on obtient :

$$\frac{-q}{T} = \left[\frac{\partial_x^2}{1 - \frac{a^2}{12}\partial_x^2} + \frac{\partial_y^2}{1 - \frac{a^2}{12}\partial_y^2} \right] w \quad (4-26)$$

qui peut également s'écrire :

$$-\left(1 - \frac{a^2}{12} \partial_x^2\right) \left(1 - \frac{a^2}{12} \partial_y^2\right) \frac{q}{T} = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 - \frac{a^2}{6} \partial_x^2 \partial_y^2\right) w \quad (4-27)$$

En utilisant l'opérateur laplacien et en négligeant les termes d'ordres supérieurs en a^4 , l'Éq.(4-27) peut s'exprimer :

$$\Delta w - \frac{a^2}{6} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right) = -\frac{1}{T} \left(1 - \frac{a^2}{12} \Delta\right) q \quad (4-28)$$

Il est intéressant de mentionner que l'Éq.(4-4) a été continuallisée directement. Si désormais la continualisation de chaque équation aux différences du premier ordre est considérée, l'Éq.(4-6), donne :

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{a^2}{24} \partial_x^2\right) P_x = T \partial_x w \\ \left(1 - \frac{a^2}{24} \partial_y^2\right) P_y = T \partial_y w \end{cases} \quad (4-29)$$

L'Éq.(4-8) est continuallisée sous une forme non locale :

$$\partial_x \left(1 - \frac{a^2}{24} \partial_y^2\right) P_x + \partial_y \left(1 - \frac{a^2}{24} \partial_x^2\right) P_y = -\left(1 - \frac{a^2}{24} \Delta\right) q \quad (4-30)$$

En multipliant l'Éq.(4-30) par l'opérateur différentiel partiel $\left(1 - \frac{a^2}{24} \partial_y^2\right) \left(1 - \frac{a^2}{24} \partial_x^2\right)$, et en négligeant à nouveau les termes d'ordres supérieurs en a^4 , l'Éq.(4-30) s'exprime :

$$\left(1 - \frac{a^2}{12} \partial_y^2\right) \partial_x \left(1 - \frac{a^2}{24} \partial_x^2\right) P_x + \left(1 - \frac{a^2}{12} \partial_x^2\right) \partial_y \left(1 - \frac{a^2}{24} \partial_y^2\right) P_y = -\left(1 - \frac{a^2}{12} \Delta\right) q \quad (4-31)$$

. L'Éq.(4-31) peut alors s'écrire :

$$T \left(1 - \frac{a^2}{12} \partial_y^2\right) \partial_x^2 w + T \left(1 - \frac{a^2}{12} \partial_x^2\right) \partial_y^2 w = -\left(1 - \frac{a^2}{12} \Delta\right) q \quad (4-32)$$

On reconnaît bien l'équation de la membrane continuée non locale Éq.(4-28). Nous voulons à présent résoudre l'Éq.(4-32) pour obtenir la flèche de la membrane continuée non locale bloquée aux bords. Dans notre cas, la pression appliquée est uniforme, donc $\Delta q = 0$. $A_{m,p}$ n'est pas différent du cas discret, voir Éq. (4-12). La solution en séries de Fourier est alors :

$$\Delta w - \frac{a^2}{6} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} -C_{m,p} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{p^2 \pi^2}{(\lambda L)^2} + \frac{a^2 m^2 p^2 \pi^4}{6 \lambda^2 L^4} \right) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{p\pi y}{\lambda L} \quad (4-33)$$

En suivant le même processus que pour l'Éq. (4-14), on obtient l'expression $C_{m,p}$:

$$C_{m,p} = 16 \frac{qL^2}{T\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{\left(m^2 + \left(\frac{p}{\lambda} \right)^2 + \frac{a^2 m^2 p^2 \pi^2}{6(\lambda L)^2} \right) mp} \quad (4-34)$$

Ce qui donne l'expression de la flèche du problème non local statique :

$$w(x, y) = 16 \frac{qL^2}{T\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\pi^2 a^2}{12} \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{(\lambda L)^2} \right) \right] \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{\left(m^2 + \left(\frac{p}{\lambda} \right)^2 + \frac{a^2 m^2 p^2 \pi^2}{6(\lambda L)^2} \right) mp} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{p\pi y}{\lambda L} \quad (4-35)$$

Sous forme adimensionnel, l'Éq. (4-35) devient :

$$w^*(x^*, y^*) = 16 \frac{\beta}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{p^2}{(\lambda n)^2} \right) \right] \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{\left(m^2 + \left(\frac{p}{\lambda} \right)^2 + \frac{m^2 p^2 \pi^2}{6(\lambda n)^2} \right) mp} \sin m\pi x^* \sin p\pi y^* \quad (4-36)$$

où $x^* = \frac{x}{L}$ et $y^* = \frac{y}{\lambda L}$. Un cas particulier où le développement à l'ordre zéro du laplacien aux différences, équivalant au laplacien continu dans l'Éq.(4-28), peut être étudié pour la mise en valeur de l'influence de la non localité :

$$\begin{aligned}\frac{w_{i+1,j} - w_{i,j} + w_{i-1,j}}{a^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + o(a^2) \\ \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j} + w_{i,j-1}}{a^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + o(a^2)\end{aligned}\quad (4-37)$$

Ce problème local répond à l'équation aux dérivées partielles de Poisson :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Delta w = -\frac{q}{T} \quad (4-38)$$

Ce problème admet lui aussi une solution sous forme de séries de Fourier. Sans surprise, cette solution est plus simple que le cas non local. La solution générale et la constante $A_{m,p}$ ont toujours la même expression et la constante $C_{m,p}$ est obtenue en calculant le laplacien de la solution :

$$\Delta w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} -C_{m,p} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{p^2 \pi^2}{(\lambda L)^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{p\pi y}{\lambda L} \quad (4-39)$$

L'expression de la constante $C_{m,p}$ donne :

$$\begin{aligned}-C_{m,p} \frac{\pi^2}{L^2} \left(m^2 + \left(\frac{p}{\lambda} \right)^2 \right) &= A_{m,p} \\ C_{m,p} &= 16 \frac{qL^2}{T\pi^4} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{\left(m^2 + \left(\frac{p}{\lambda} \right)^2 \right) mp}\end{aligned}\quad (4-40)$$

La solution s'exprime alors :

$$w(x, y) = 16 \frac{qL^2}{T\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{\left(m^2 + \left(\frac{p}{\lambda} \right)^2 \right) mp} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{p\pi y}{\lambda L} \quad (4-41)$$

Et sous forme adimensionnelle :

$$w(x^*, y^*)^* = 16 \frac{\beta}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{p\pi}{2}}{\left(m^2 + \left(\frac{p}{\lambda}\right)^2\right) mp} \sin m\pi x^* \sin p\pi y^* \quad (4-42)$$

4.4.2 Modèle de la membrane non locale de type Eringen

Pour sa relation différentielle entre la contrainte et la déformation, le modèle contionalisé non local peut être comparé à un autre modèle non local phénoménologique, en l'occurrence basée sur la loi différentielle d'Eringen, voir (Eringen 1983) qui peut s'écrire selon une formulation vectorielle :

$$\underline{P} - l_c^2 \underline{\nabla}^2 \underline{P} = T \underline{\nabla} w \quad \text{et} \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{P} = -q \quad \text{avec} \quad \underline{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \quad (4-43)$$

où $\underline{\nabla}^2 = \Delta$ et $\underline{\nabla}$ est l'opérateur gradient. \underline{P} est le vecteur des forces verticales pour chaque direction principale du plan. L'Éq.(4-43) peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} P_x - l_c^2 \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial y^2} \right) = T \frac{\partial w}{\partial x} \\ P_y - l_c^2 \left(\frac{\partial^2 P_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) = T \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} = -q \quad (4-44)$$

Dans une membrane non locale utilisant la non localité d'Eringen, cette dernière apparait comme le laplacien de la charge :

$$T \Delta w = -[1 - l_c^2 \Delta] q \quad (4-45)$$

L'Éq.(4-45) écrite en coordonnées cartésiennes donne :

$$T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -q + l_c^2 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) \quad (4-46)$$

Il est bon de noter que ce même résultat peut être obtenu avec un léger changement dans la formulation vectorielle telle que :

$$\underline{P} - l_c^2 \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{P}) = T \underline{\nabla} w \quad \text{et} \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{P} = -q \quad (4-47)$$

Une fois écrite en coordonnées cartésiennes, on obtient :

$$\begin{cases} P_x - l_c^2 \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial x \partial y} \right) = T \frac{\partial w}{\partial x} \\ P_y - l_c^2 \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) = T \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} = -q \quad (4-48)$$

L'Éq.(4-44) est différente de l'Éq.(4-48) mais toutes deux mènent à l'Éq.(4-45). Dans notre cas, ce problème non local est équivalent au problème local car la pression appliquée est uniforme. La Figure 4-3 présente les résultats des flèches des différents modèles en fonction de n avec :

$$Err = \frac{w\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)_{Discrete} - w\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{continuous}}{w\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)_{Discrete}} \quad (4-49)$$

La Figure 4-4 présente la flèche normalisée au centre de la membrane. Pour les Figures 4-3 et 4-4, représentant une membrane carrée, $\lambda=1$, seules les valeurs paires de n sont représentées car les valeurs impaires ne présentent pas de point central sur le maillage. Le modèle continu non local offre un net gain de précision pour de faibles valeurs de n par rapport au modèle discret.

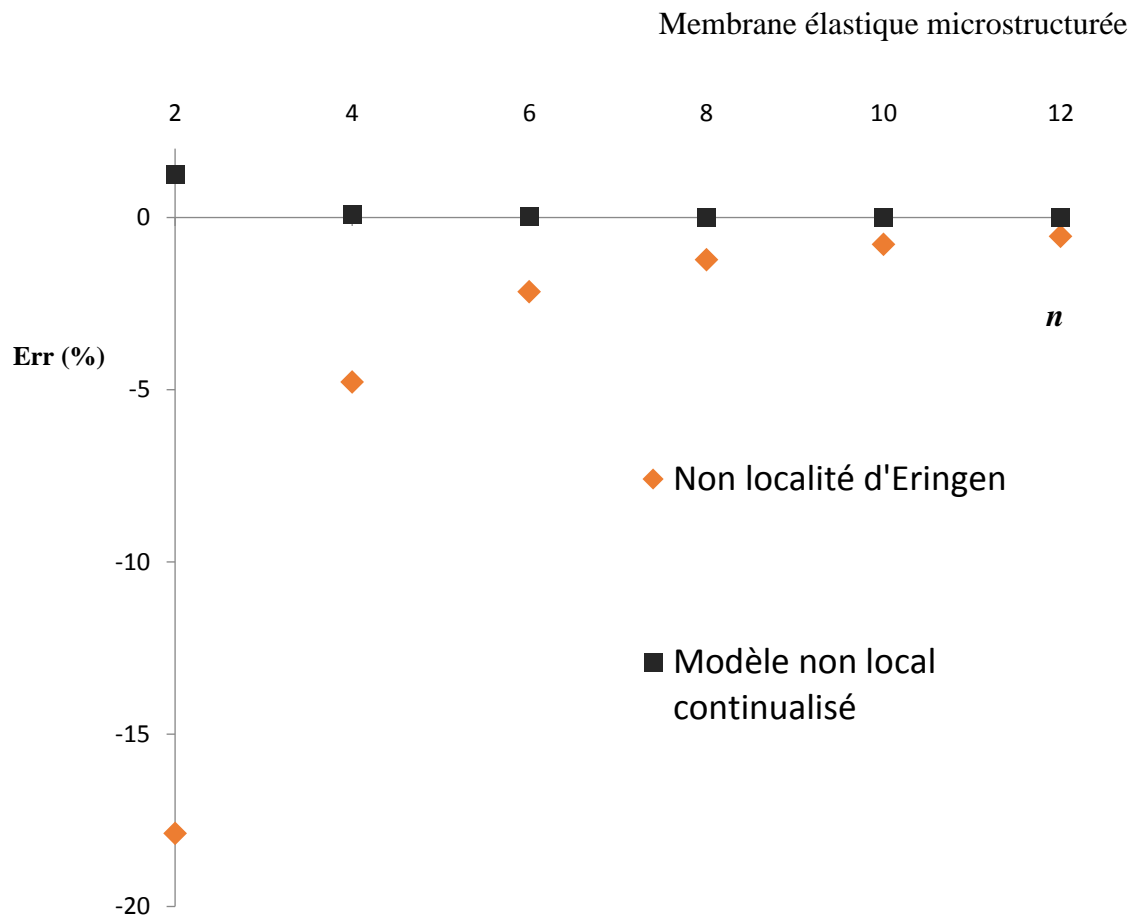


Figure 4-3 – Erreur relative des modèles continualisé et phénoménologique non local d'Eringen vis-à-vis de la réponse discrète pour différentes valeurs de n . problème statique.

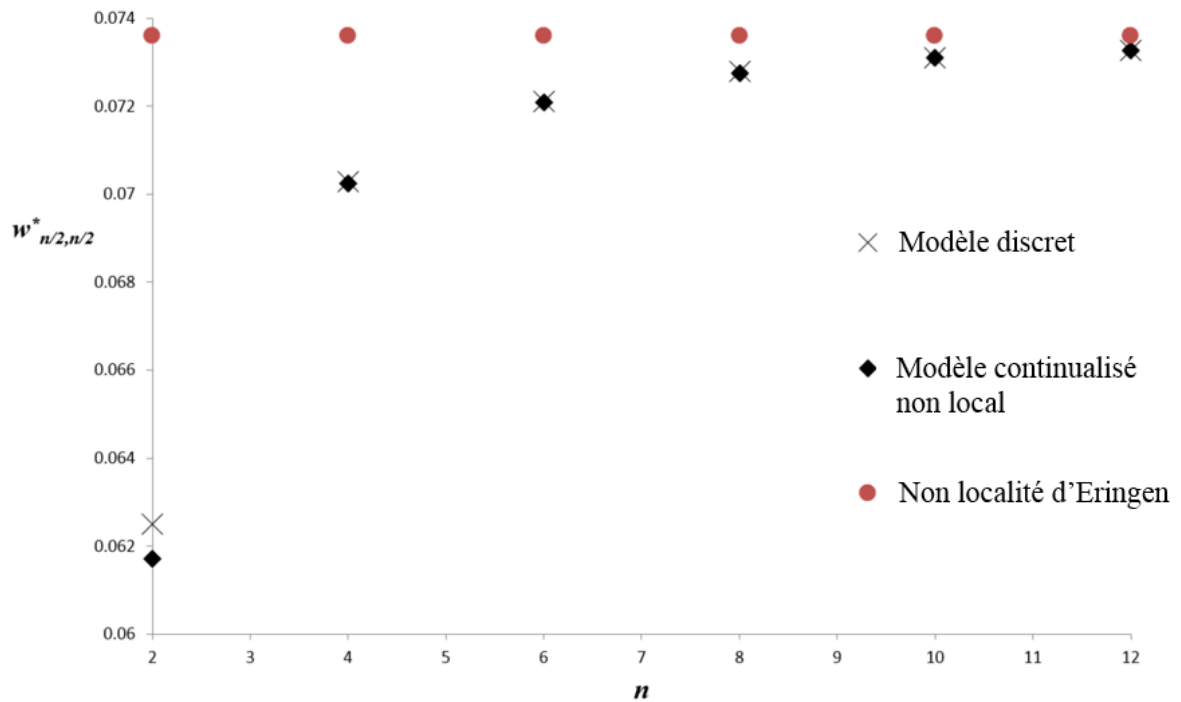


Figure 4-4 – Flèche normalisée au centre d’une membrane carrée pour différentes valeurs de n .

On peut alors observer un résultat assez contre-intuitif, la membrane discrète apparaît comme plus rigide que la membrane locale. Ce qui est l’opposé de ce qui est généralement observé, par exemple dans les problèmes unidimensionnels étudiés dans les chapitres 2 et 3. Contrairement aux figures 2-3 et 2-4, ce n’est pas un effet induit par notre normalisation du problème.

Je me permets de digresser rapidement de la résolution de ce problème pour parler d’un problème plus général que j’ai eu lors de la réalisation de cette figure, à savoir les biais cognitifs dans la démarche scientifique. En l’occurrence c’est un biais de confirmation dont j’ai été victime en réalisant cette figure. Pendant la programmation de la solution du problème, j’ai introduit une erreur dans le terme non-local du modèle continu localisé qui surestimait légèrement sa valeur. Seul le terme non-local était faux, la solution tendait donc toujours asymptotiquement vers le modèle local. Une seule erreur aurait facilement été repérée, mais par coïncidence j’ai aussi commis une erreur sur la solution discrète qui allait dans le même sens. La courbe de comparaison présentait donc le modèle local comme plus rigide que les solutions discrète et non locale continu localisée. Avec les 2 modèles convergeant

vers la solution locale et l'allure générale de la courbe qui correspondait à l'expérience limitée que j'avais des effets d'échelles dans les systèmes discrets, je n'ai pas réalisé mon erreur. Les résultats étaient conformes à mes attentes et je n'ai donc pas eu un regard suffisamment critique sur ceux-ci. Heureusement, un examen de mes résultats par un œil extérieur a mis en valeur une des erreurs, ce qui m'a permis de corriger tous les problèmes.

4.5 Comportement dynamique de la membrane discrète

Les équations de vibration de la membrane discrète sont obtenues à partir l'Éq.(4-1) tandis que l'équation d'équilibre définie par l'Éq.(4-2) prend en compte un terme d'inertie :

$$P_{i+1/2,j}^x - P_{i-1/2,j}^x + P_{i,j+1/2}^y - P_{i,j-1/2}^y = \rho a \ddot{w}_{i,j} \quad (4-50)$$

Où ρ est la masse volumique de la membrane. En associant l'Éq.(4-1) et l'Éq.(4-50), une équation linéaire du second-ordre aux différences est obtenue :

$$T \frac{w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j}}{a^2} = \rho \ddot{w}_{i,j} \quad (4-51)$$

Les conditions aux limites de la membrane discrète sont toujours données par l'Éq.(4-4). Comme pour le problème statique, l'équation aux différences de la membrane discrète est la formulation aux différences finies spatiales du problème continu « local » donnée par l'équation d'ondes :

$$T \Delta w = \rho \ddot{w} \quad \text{et} \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (4-52)$$

En considérant un mouvement homogène de pulsation ω , l'équation qui régit le comportement de la membrane discrète en dynamique est :

$$T \frac{w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j}}{a^2} + \rho \omega^2 w_{i,j} = 0 \quad (4-53)$$

L'Éq. (4-53) peut s'écrire sous la forme :

$$T \frac{w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + \left(\frac{a^2}{T} \rho \omega^2 - 4 \right) w_{i,j}}{a^2} = 0 \quad (4-54)$$

L'équation linéaire bidimensionnelle aux différences finies du second-ordre des fréquences propres est :

$$w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + \left(\frac{a^2}{T} \rho \omega^2 - 4 \right) w_{i,j} = 0 \quad (4-55)$$

La solution est sous la forme :

$$w_{i,j} = W_{m,p} \sin \frac{m\pi a i}{L} \sin \frac{p\pi a j}{\lambda L} \quad (4-56)$$

Il convient de noter qu'ici les paramètres m et p ne sont pas les termes de la somme infinie de la série de Fourier, ils représentent le nombre de demi-ondes dans chaque direction et sont limités dans le cas discret par le nombre d'éléments. En substituant l'Éq. (4-56) dans l'Éq. (4-55), les fréquences propres de la membrane discrète peuvent être extraites :

$$\omega_{m,p} = \sqrt{\frac{4T}{\rho a^2} \left[\sin^2 \frac{m\pi a}{2L} + \sin^2 \frac{p\pi a}{2\lambda L} \right]} \text{ avec } m \in \{1;2;\dots;n_x\} \text{ et } p \in \{1;2;\dots;n_y\} \quad (4-57)$$

Éq. (57) a également été obtenue indépendamment par Chen (Chen 1971) et Tong et al (Tong et al. 1971) (voir aussi Rutherford (Rutherford 1948) pour obtenir les mêmes résultats pour un problème mathématique analogue). Ces fréquences propres sont normalisées par :

$$\Omega_{m,p} = \sqrt{4n^2 \left[\sin^2 \frac{m\pi}{2n} + \sin^2 \frac{p\pi}{2\lambda n} \right]} \text{ avec } \Omega = \omega L \sqrt{\frac{\rho}{T}} \quad (4-58)$$

Comme précédemment, le problème local est traité à titre de comparaison. Ce dernier est régi par l'équation différentielle partielle suivante :

$$T \nabla^2 w + \rho \omega^2 w = 0 \quad (4-59)$$

La solution exacte peut être obtenue dans des ouvrages tels que Wang et Wang (Wang and Wang 2013) ou Leissa et Qatu (Leissa and Qatu 2011) pour une membrane bloquée aux bords en considérant une vibration sinusoïdale :

$$w(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{p\pi y}{\lambda L} \quad (4-60)$$

Les fréquences propres de la membrane sont données par :

$$\omega_{m,p} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho} \left(m^2 + \left(\frac{p}{\lambda} \right)^2 \right)} \quad (4-61)$$

Cette solution peut être normalisée comme précédemment :

$$\Omega_{m,p} = \pi \sqrt{m^2 + \left(\frac{p}{\lambda} \right)^2} \quad (4-62)$$

Ces résultats sont, sans surprise, cohérents avec les résultats de Wang et Wang (Wang and Wang 2013) ou Leissa et Qatu (Leissa and Qatu 2011) pour une membrane locale rectangulaire.

4.6 Comportement dynamique de la membrane continue non locale

4.6.1 *Membrane continuallisée non locale*

La continualisation de la membrane en dynamique est sensiblement la même que pour le cas statique :

$$T \left[\frac{4}{a^2} \sinh^2 \left(\frac{a}{2} \partial_x \right) + \frac{4}{a^2} \sinh^2 \left(\frac{a}{2} \partial_y \right) \right] w + \rho \omega^2 w = 0 \quad (4-63)$$

Membrane élastique microstructurée

En combinant l'Éq. (4-23) avec l'Éq. (4-55) comme précédemment, nous obtenons l'approximation non locale de la membrane discrète :

$$T\Delta w - T \frac{a^2}{6} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho\omega^2 \left[1 - \frac{a^2}{12} \Delta \right] w = 0 \quad (4-65)$$

Cette équation a déjà été obtenue par Rosenau (Rosenau 1987). L'Éq. (4-65) peut également s'écrire sous la forme :

$$\left(T - \rho\omega^2 \frac{a^2}{12} \right) \Delta w - T \frac{a^2}{6} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho\omega^2 w = 0 \quad (4-66)$$

La forme générale de la solution est la même que pour le problème local :

$$w(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{p\pi y}{\lambda L} \quad (4-67)$$

En substituant l'Éq. (4-67) dans l'Éq. (4-66), on obtient :

$$\left(T - \rho\omega^2 \frac{a^2}{12} \right) \Delta w - T \frac{a^2}{6} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho\omega^2 w = - \left[\left(T - \rho\omega^2 \frac{a^2}{12} \right) \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{p^2 \pi^2}{(\lambda L)^2} \right) + \frac{Ta^2 m^2 p^2 \pi^4}{6\lambda^2 L^4} - \rho\omega^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{p\pi y}{\lambda L} \quad (4-68)$$

On peut extraire de cette équation les fréquences propres de la membrane continuallisée :

$$\omega_{m,p} = \pi \sqrt{\frac{T \left(m^2 + p^2 + \frac{a^2 m^2 p^2 \pi^2}{6(\lambda L)^2} \right)}{\rho L^2 \left(1 + \frac{a^2}{12} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{p^2 \pi^2}{(\lambda L)^2} \right) \right)}} \quad (4-69)$$

Avec la normalisation choisie, l'Éq. (4-69) devient :

$$\Omega_{m,p} = \pi \sqrt{\frac{\left(m^2 + p^2 + \frac{m^2 p^2 \pi^2}{6(\lambda n)^2}\right)}{\left(1 + \frac{\pi^2}{12n^2} \left(m^2 + \frac{p^2}{\lambda}\right)\right)}} \quad (4-70)$$

Membrane avec non localité de type Eringen

On prend à nouveau la non localité au sens d'Eringen comme référence pour comparer nos résultats. On définit une formulation vectorielle telle que :

$$\underline{P} - l_c^2 \underline{\nabla}^2 \underline{P} = T \underline{\nabla} w \quad \text{et} \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{P} = -\rho \omega^2 w \quad \text{avec} \quad \underline{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \quad (4-71)$$

Avec les mêmes notations que pour le problème statique, l'Éq. (4-72) peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} P_x - l_c^2 \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial y^2} \right) = T \frac{\partial w}{\partial x} \\ P_y - l_c^2 \left(\frac{\partial^2 P_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) = T \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} = -\rho \omega^2 w \quad (4-73)$$

La membrane continue non locale (au sens d'Eringen) est alors définie par l'équation :

$$T \Delta w + \rho \omega^2 \left[1 - \frac{a^2}{12} \Delta \right] w = 0 \quad (4-75)$$

L'Éq. (4-75) peut être écrite en coordonnées cartésiennes :

$$\left(T - \rho \omega^2 \frac{a^2}{12} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho \omega^2 w = 0 \quad (4-76)$$

Comme pour la formulation vectorielle du cas statique, la formulation alternative s'écrit :

$$\underline{P} - l_c^2 \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{P}) = T \underline{\nabla} w \quad \text{et} \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{P} = -\rho \omega^2 w \quad (4-78)$$

Qui, en coordonnées cartésiennes équivalentes, donne :

$$\begin{cases} P_x - l_c^2 \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial x \partial y} \right) = T \frac{\partial w}{\partial x} \\ P_y - l_c^2 \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) = T \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} = -\rho \omega^2 w \quad (4-80)$$

Une équation équivalente à l'Éq. (4-75) est bien retrouvée. La solution qui est toujours de la forme de l'Éq. (4-67) donne :

$$\left(T - \rho \omega^2 \frac{a^2}{12} \right) \Delta w + \rho \omega^2 w = - \left[\left(T - \rho \omega^2 \frac{a^2}{12} \right) \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{p^2 \pi^2}{(\lambda L)^2} \right) - \rho \omega^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{p\pi y}{\lambda L} \quad (4-82)$$

Pour finir, l'extraction des fréquences propres donne :

$$\omega_{m,p} = \pi \sqrt{\frac{T \left(m^2 + \frac{p^2}{\lambda} \right)}{\rho L^2 \left(1 + \frac{a^2}{12} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{p^2 \pi^2}{(\lambda L)^2} \right) \right)}} \quad (4-83)$$

Sous forme normalisée, l'Éq. (4-83) devient :

$$\Omega_{m,p} = \pi \sqrt{\frac{\left(m^2 + \frac{p^2}{\lambda} \right)}{\left(1 + \frac{\pi^2}{12n^2} \left(m^2 + \frac{p^2}{\lambda} \right) \right)}} \quad (4-84)$$

L'Éq. (4-66) peut alors être présentée comme un modèle de vibration non locale au gradient hybride défini par l'Éq. (4-75), en utilisant les termes d'ordres supérieurs de la flèche de la

membrane. La Figure 4-5 présente les résultats des différents modèles continus en fonction des résultats du modèle discret pour de faibles valeurs de n avec :

$$Err = \frac{\Omega_{Discrete} - \Omega_{continous}}{\Omega_{Discrete}} \quad (4-85)$$

Les modèles local et non local d'Eringen ne présentent alors pas de bon résultats. Ce dernier est le seul à donner une réponse plus rigide que le modèle discret. Par contre, le modèle continualisé avec le terme couplé est le plus proche du modèle discret, comme le montre la Figure 4-6 avec les résultats absolus des fréquences propres normalisées en fonction de n .

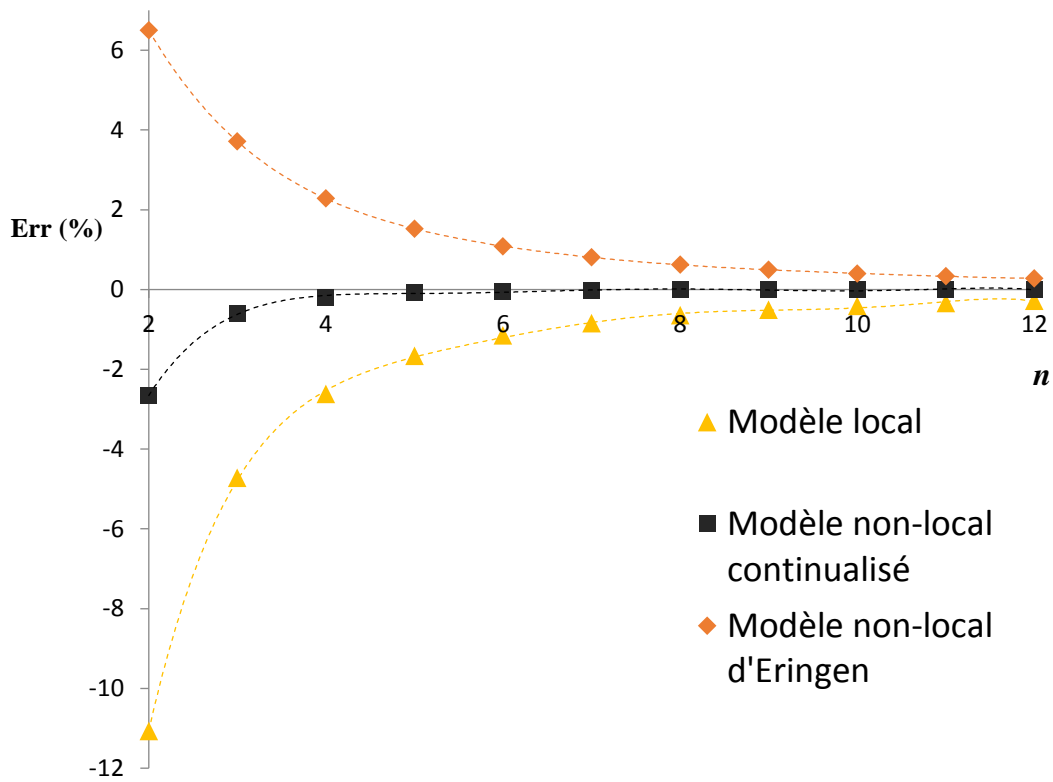


Figure 4-5 – Erreur relative des modèles continualisé et phénoménologique non local d'Eringen vis-à-vis de la réponse discrète pour différentes valeurs de n . Problème dynamique.

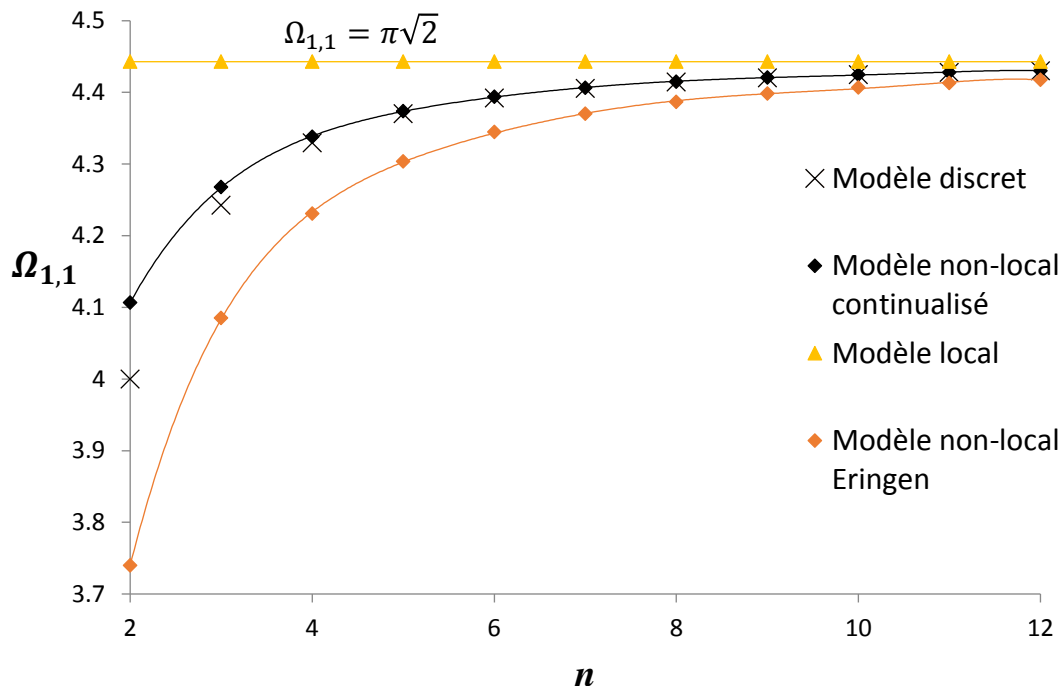


Figure 4-6 – Fréquences propres normalisées Ω pour $m=p=1$ d'une membrane carrée ($\lambda=1$) pour n éléments.

Le modèle non local de membranes de Rosenau (Rosenau 1987) proposé pour l'ingénierie considère une forme tronquée du modèle continualisé non local pour concorder avec le modèle différentiel d'Eringen. Ce dernier n'est pas suffisamment précis, comparé à la forme « complète » de non localité également obtenue par Rosenau, qui est tout de même issue d'une approximation. En particulier, pour le cas de la membrane uniformément chargée en statique, le modèle donne les mêmes résultats que le modèle local, qui n'est pas très fidèle au modèle discret, car la membrane possède des effets d'échelle même dans le cas statique. Il est alors recommandé d'utiliser la forme « complète » de non localité, comme celle obtenue par Rosenau en dynamique en étendant ce résultat au cas statique avec :

$$T\Delta w - T \frac{a^2}{6} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(1 - \frac{a^2}{12} \Delta\right) (\rho \ddot{w} - q) \quad (4-86)$$

4.7 Comportement en haute fréquence

Pour les basses fréquences, l'Éq. (4-63) est approximée par l'Éq. (4-64) comme cela a pu être montré par Rosenau (Rosenau 1987) (voir aussi (Andrianov and Awrejcewicz 2008)).

Pour les hautes fréquences, Andrianov et Awrejcewicz suggèrent de calibrer les termes non-locaux tel que :

$$T\Delta w - \beta a^2 T \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho \omega^2 [1 - \alpha a^2 \Delta] w = 0 \quad (4-88)$$

avec $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}$. Pour un système unidimensionnel, cette équation se réduit à la vibration non locale d'une corde (qui est mathématiquement équivalente à la vibration de barres axiales élastiques) :

$$T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \omega^2 \left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] w = 0 \quad (4-89)$$

avec $e_0 = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}} \approx 0.386$. Cette valeur $e_0 \approx 0.39$ est celle obtenue par Eringen (Eringen 1983) par la calibration de son modèle non local comprenant des relations d'ondes dispersives d'un réseau de Born-Kármán dans les zones de Brillouin. Dans l'Éq. (4-81), les paramètres (α, β) sont calibrés par rapport aux plus hautes fréquences. La fréquence maximale du réseau est calculée à partir de l'Éq. (4-58):

$$r = n \text{ et } s = \lambda n \Rightarrow \Omega_{n,\lambda n} = 2\sqrt{2}n \quad (4-90)$$

Si, désormais, on utilise le champ de déplacement sinusoïdal, l'Éq. (4-60) insérée dans l'équation de vibration non locale, Éq. (4-81), on obtient :

$$r = n \text{ et } s = \lambda n \Rightarrow \Omega_{n,\lambda n} = n\pi \sqrt{\frac{2 + \beta\pi^2}{1 + 2\alpha\pi^2}} \quad (4-91)$$

En égalisant l'Éq. (4-83) et l'Éq. (4-84) avec $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}$, on obtient :

$$\beta = \frac{2}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^4} \quad (4-92)$$

qui est la valeur obtenue par Andrianov et Awrejcewicz (Andrianov and Awrejcewicz 2008) pour la propagation d'onde de la membrane non locale calibrée par rapport aux hautes fréquences du réseau. Les modèles non-locaux, basses et hautes fréquences, peuvent

être comparés à la solution exacte du modèle discret dans le cas particulier $\Omega_{r,\lambda r}$ avec $r \in \{1; 2; \dots; n\}$. L'Éq. (4-58) est dans ce cas égale à :

$$\Omega_{r,\lambda r} = 2\sqrt{2}n \sin\left(\frac{r\pi}{2n}\right) \quad (4-93)$$

Le modèle non local valide en basses fréquences, basé sur l'Éq. (4-64), nous donne :

$$\Omega_{r,\lambda r} = k\pi \sqrt{\frac{2 + \frac{(r\pi)^2}{6n^2}}{1 + \frac{(r\pi)^2}{6n^2}}} \quad (4-94)$$

Alors que le modèle non local pertinent pour les hautes fréquences est basé sur l'Éq. (4-81) et s'écrit :

$$\Omega_{r,\lambda r} = r\pi \sqrt{\frac{2 + \beta \frac{(r\pi)^2}{n^2}}{1 + 2\alpha \frac{(r\pi)^2}{n^2}}} \text{ avec } \alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \text{ et } \beta = \frac{2}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^4}. \quad (4-95)$$

La Figure 4-7 décrit l'évolution des fréquences propres du modèle discret et de celles du modèle non local de Rosenau (1987) pour les basses fréquences (voir aussi Andrianov and Awrejcewicz, 2008) ainsi que celui établi par Andrianov and Awrejcewicz (2008) pour les hautes fréquences. La validité de chaque modèle non local dépend fortement de la plage de fréquence considérée, mais chaque approximation offre de bons résultats sur son domaine.

4.8 Analyse d'onde dispersive

Dans cette partie, la propagation d'onde dans le plan d'une membrane discrète est étudiée et est comparée à son équivalent non local, particulièrement dans la première zone de Brillouin. L'équation de dispersion peut être obtenue à partir de la formulation d'onde harmonique suivante :

$$w_{i,j} = W \exp\left[J\left(\omega t - k_x x_i - k_y x_j\right)\right] \quad (4-96)$$

où ω est la fréquence angulaire, W est l'amplitude, $x_i = ia$, $y_j = ja$ et où $J = \sqrt{-1}$. En utilisant l'Éq. (4-89) dans l'équation d'onde bi-dimensionnelle de la membrane discrète, Éq. (4-51), on obtient une relation de dispersion du réseau bidimensionnel :

$$\tilde{\omega}^2 = 4 \left[\sin^2 \left(\frac{k_x a}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{k_y a}{2} \right) \right] \text{ avec } \tilde{\omega} = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{T}} \quad (4-97)$$

Cette dernière équation a été obtenue par Rosenau (Rosenau 1987) et Lombardo et Askes (Lombardo and Askes 2010). Comme suggéré par ces derniers, il est possible d'introduire un angle pour caractériser l'orientation du vecteur d'onde par rapport au plan horizontal :

$$\begin{cases} k_x = k \cos \theta \\ k_y = k \sin \theta \end{cases} \quad (4-98)$$

de telle façon que la relation de dispersion puisse s'exprimer ainsi :

$$\tilde{\omega} = \pm 2 \sqrt{\sin^2 \left(\frac{k a \cos \theta}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{k a \sin \theta}{2} \right)} \quad (4-99)$$

Cette relation d'onde dispersive peut être comparée à celle obtenue pour une propagation d'onde dans la membrane non locale associée à l'Éq. (4-81) :

$$T \Delta w - \beta a^2 T \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \rho (1 - \alpha a^2 \Delta) \ddot{w} = 0 \text{ avec } \alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \text{ et } \beta = \frac{2}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^4} \quad (4-100)$$

comme précédemment obtenue par la calibration haute-fréquence (voir aussi les paramètres de la calibration de (Andrianov and Awrejcewicz 2008)). En considérant désormais la formulation d'onde harmonique dans le modèle de la membrane continue non locale :

$$w = W \exp \left[J (\omega t - k_x x - k_y y) \right] \quad (4-101)$$

Et en combinant l'Éq. (4-94) avec l'équation d'onde non locale, Éq. (4-93), on arrive à la relation d'onde dispersive suivante :

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{(k_x a)^2 + (k_y a)^2 + \beta (k_x a)^2 (k_y a)^2}{1 + \alpha [(k_x a)^2 + (k_y a)^2]} \quad (4-102)$$

qui peut être réécrite en représentation polaire :

$$\tilde{\omega} = \pm ka \sqrt{\frac{1 + \frac{\beta}{4}(ka)^2 \sin^2(2\theta)}{1 + \alpha(ka)^2}} \quad (4-103)$$

Cette équation d'onde dispersive a été obtenue par Lombardo and Askes (Lombardo and Askes 2010) où α et β ont été calibrés pour des basses fréquences. La comparaison des modèles discret et non local dans la première zone de Brillouin, i.e. pour $ka \cos \theta \in [0, \pi]$ et $\theta \in \left\{0; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right\}$, illustre l'efficacité du modèle non local basé sur l'Éq. (4-93) en termes de propriétés d'onde dispersive avec la calibration haute fréquence (voir Figure 4-8).

La calibration des propriétés d'onde dispersive du problème d'onde dans la membrane bidimensionnel de cette partie est similaire celle réalisée par Eringen (Eringen 1983) pour le problème unidimensionnel. Eringen avait déjà obtenu la même calibration du paramètre α , i.e. $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}$. Cette analyse d'onde dispersive non locale généralise les résultats d'Eringen à un réseau bidimensionnel en utilisant la calibration non locale d'Andrianov and Awrejcewicz (Andrianov and Awrejcewicz 2008).

4.9 Conclusions

Ce chapitre a traité du déplacement hors plan d'une membrane discrète et des modèles continualisés associés. Nos résultats montrent qu'une structure continue non locale se comporte comme une membrane microstructurée. Il est important de noter que les solutions analytiques ont été obtenues et que des simulations numériques du problème algébrique nous ont permis de corroborer ces résultats. La taille de la microstructure de la membrane détermine alors la longueur caractéristique du modèle continu non local. La longueur caractéristique associée ne dépend alors que de la taille de la microstructure. Le carré de cette dernière est alors égal à $a^2/12$ et demeure indépendant du chargement. Bien que, comme abordé dans la partie sur la calibration haute fréquence, cette longueur caractéristique semble être dépendante de la fréquence de vibration car elle nécessite une calibration pour modéliser le comportement de la membrane non locale dans les hautes fréquences. Par la suite, il pourrait être intéressant de traiter d'autres géométries de microstructure (microstructure à maille hexagonale par exemple) ou encore d'autres types de conditions limites, afin de généraliser ces résultats.

Synthèse et ouvertures

Dans ce mémoire, nous avons analysé des systèmes discrets élastiques non-linéaires ou élasto-endommageables, typiques des matériaux quasi-fragiles. Nous avons pu aborder le sujet de la continualisation des systèmes discrets microstructurés, en s'intéressant à des cas de structures unidimensionnelles ou bidimensionnelles. On a pu montrer que par le biais d'une procédure de continualisation, un modèle de MED peut être équivalent à un modèle de MEC non locale. Nous avons pu observer des effets d'échelle en déformation et en résistance dans le comportement de ces structures discrètes. Un modèle local échoue à capter ces effets d'échelle et la présence de comportement radoucissant résulte en des phénomènes de longueurs de dissipation nulle (paradoxe de Wood). Le modèle continualisé non local quant à lui permet de bien représenter ces effets sur toute la plage de chargement, aussi bien en écrouissage qu'en radoucissement.

La longueur caractéristique des modèles continualisés développés est indépendante du chargement. A noter que pour l'analyse dynamique de la membrane, la longueur caractéristique doit être calibrée lorsque l'on considère des fréquences de vibrations plus importantes. La longueur caractéristique au carré est égale à $a^2/12$ pour le problème 1D de la chaîne en flexion. Pour le problème de la chaîne axiale en traction, on obtient une valeur de $a^2/24$, qui est moins courante dans la littérature mais qui a déjà été observée pour des réseaux lattices endommageables (Bažant 1984). La procédure de continualisation nous donne une expression continue exacte des équations discrètes. Pour la chaîne axiale endommageable, nous obtenons :

$$\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{a} = \frac{2}{a} \sinh\left(\frac{a\partial_x}{2}\right)u$$

Nous avons ensuite recours à différents outils mathématiques pour obtenir une bonne approximation. Le développement en série de Taylor mène à :

$$\begin{cases} \frac{N}{(1-D)} = EA \left(u' + \frac{a^2}{24} u''' \right) \\ N' + \frac{a^2}{24} N''' = -q \end{cases}$$

Quant à l'approximant de Padé, il nous permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \left(\frac{N}{1-D} \right) - \frac{a^2}{24} \left(\frac{N}{1-D} \right)'' = EAu' \\ N' = - \left(q - \frac{a^2}{24} q'' \right) \end{cases}$$

Les équations équivalentes pour le problème de la poutre en flexion sont, en commençant par la procédure de continualisation :

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{a^2} = \frac{4}{a^2} \sinh^2 \left(\frac{a \partial_x}{2} \right) w$$

Le développement en série de Taylor donne une expression du moment effectif :

$$\frac{M}{1-D} = EI \left(w'' + \frac{a^2}{12} w^{(4)} \right)$$

L'utilisation de l'approximant de Padé nous permet d'écrire :

$$\left(\frac{M}{1-D} \right) - \frac{a^2}{12} \left(\frac{M}{1-D} \right)'' = EIw''$$

L'application de l'approximant de Padé sur la procédure de continualisation des équations du système discret offre de meilleurs résultats que le développement en série de Taylor dans notre cas, permettant d'obtenir une très bonne approximation de la réponse du système discret sans nécessiter de conditions aux limites d'ordres supérieurs. La question des conditions aux limites utilisées pour la résolution du problème continualisé non local est cruciale pour reproduire le comportement du système discret sur toute la plage de chargement. Le recours à une loi cohésive de longueur finie (calée sur la taille de la microstructure) pour la modélisation du comportement à l'encastrement aussi bien dans la phase d'écroutissement qu'en radoucissement a été déterminant dans l'établissement d'un modèle fiable. En effet les conditions classiques sur la cinématique du problème sont intrinsèquement locales et conduisent à des résultats incorrects lorsqu'on les intègre au modèle continualisé non local. Les conditions de continuité à l'interface élasto-endommageable sont aussi affectées. Ainsi, l'application de l'écriture « locale » de la continuité du déplacement ou de la rotation semble être intuitivement des conditions

adéquates mais elles échouent dans la représentation du comportement des systèmes microstructurés. Il est nécessaire d'envisager des conditions de continuité discrètes continuales pour une reproduction fidèle du milieu discret endommageable initial.

A ce jour, le problème de la poutre console élasto-endommageable avec charge répartie, en cours d'étude, montre des résultats similaires à ceux obtenus pour la poutre console. La continuation de la plaque élastique endommageable constituerait une suite intéressante pour ces travaux, j'espère pouvoir profiter de mon année d'ATER pour traiter ce sujet. Une autre extension porterait sur l'étude de la membrane en maille hexagonale car l'omniprésence dans la nature des structures et motifs hexagonaux est fascinante. Cependant la non-linéarité géométrique du problème m'a posé beaucoup de difficultés. A ce jour je suis loin d'une résolution mais c'est définitivement un problème que j'aimerais aborder dans l'avenir. Les problèmes traités ici adoptaient tous une approche déterministe. Pour compléter cette étude, une approche stochastique offre des perspectives intéressantes.

Outre les travaux de recherches que j'ai menés à l'IRDL à l'UBS, le monitorat dont j'ai bénéficié m'a permis d'enseigner dans la filière génie civil de l'UBS, où j'avais réalisé ma formation de Master. Être amené à dispenser un cours que j'ai suivi en tant qu'étudiant lors de ma formation est une expérience très enrichissante et qui m'a donné un léger avantage pour commencer à enseigner. Les difficultés sont connues et je peux adapter le rythme du cours en conséquence. Lors du projet « découverte de la recherche » avec des étudiants de Licence 1, j'avais abordé avec eux les biais de confirmation dans la démarche scientifique. J'avais illustré le concept avec une des expériences de pensées de Wason (Wason 1960), qui met en valeur une heuristique de jugement favorisant les biais de confirmation (bien que très efficace dans la vie de tous les jours). Ceci, avant d'être moi-même victime d'un biais de confirmation comme décrit dans le chapitre 4. Cela fait partie intégrante des expériences de la thèse qui m'ont appris à toujours garder un esprit critique et une bonne dose d'humilité.

Références

- Andrianov IV, Awrejcewicz J (2008) Continuous models for 2D discrete media valid for higher-frequency domain. *Computers & Structures* 86:140–144
- Andrianov IV, Awrejcewicz J, Weichert D (2010) Improved Continuous Models for Discrete Media. *Mathematical Problems in Engineering* 2010:1–35
- Antman SS (2005) *Nonlinear Problems of Elasticity*. Springer-Verlag, New York
- Askes H, Sluys LJ (2003) A classification of higher-order strain-gradient models in damage mechanics. *Archive of Applied Mechanics* 73:448–465 . doi: 10.1007/s00419-003-0296-3
- Bažant (1994) Nonlocal Damage Theory Based on Micromechanics of Crack Interactions. *Journal of Engineering Mechanics* 120:593–617 . doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1994)120:3(593)
- Bažant (2010) Elastoplastic Buckling. *Stability of Structures* 485–583 . doi: 10.1142/9789814317047_0008
- Bažant ZP (1987) Why continuum damage is nonlocal: justification by quasiperiodic microcrack array. *Mechanics Research Communications* 14:407–419
- Bazant ZP (1976) Instability, Ductility, and Size Effect in Strain-Softening Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 102:331–344
- Bažant ZP (2005) *Scaling of Structural Strength*. Butterworth-Heinemann
- Bažant ZP (1984) Imbricate continuum and its variational derivation. *Journal of Engineering Mechanics* 110:1693–1712
- Benjamin TB, Bona JL, Mahony JJ (1972) Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 272:47–78
- Borino G, Failla B, Parrinello F (2003) A symmetric nonlocal damage theory. *International Journal of Solids and Structures* 40:3621–3645 . doi: 10.1016/S0020-7683(03)00144-6

- Bouchiat C, Wang MD, Allemand J-F, et al (1999) Estimating the persistence length of a worm-like chain molecule from force-extension measurements. *Biophysical journal* 76:409–413
- Brillouin L (2003) *Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices*. Courier Corporation
- Carcattera A, dell’Isola F, Esposito R, Pulvirenti M (2015) Macroscopic description of microscopically strongly inhomogenous systems: A mathematical basis for the synthesis of higher gradients metamaterials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1–24
- Casandjian C, Challamel N, Lanos C, Hellesland J (2013) *Reinforced Concrete Beams, Columns and Frames: Mechanics and Design*. John Wiley & Sons
- Challamel (2010) A variationally based nonlocal damage model to predict diffuse microcracking evolution. *International Journal of Mechanical Sciences* 52:1783–1800 . doi: 10.1016/j.ijmecsci.2010.09.012
- Challamel, Casandjian C, Lanos C (2009) Some Closed-form Solutions to Simple Beam Problems Using Nonlocal (Gradient) Damage Theory. *International Journal of Damage Mechanics* 18:569–598 . doi: 10.1177/1056789508092400
- Challamel N (2013) Variational formulation of gradient or/and nonlocal higher-order shear elasticity beams. *Composite Structures* 105:351–368 . doi: 10.1016/j.compstruct.2013.05.026
- Challamel N, Camotim D, Wang CM, Zhang Z (2015a) On lateral-torsional buckling of discrete elastic systems: A nonlocal approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 49:106–113
- Challamel N, Grazide C, Picandet V, et al (2016a) A nonlocal Fourier’s law and its application to the heat conduction of one-dimensional and two-dimensional thermal lattices. *Comptes Rendus Mécanique* 344:388–401
- Challamel N, Hache F, Elishakoff I, Wang CM (2016b) Buckling and vibrations of microstructured rectangular plates considering phenomenological and lattice-based nonlocal continuum models. *Composite Structures* 149:145–156

Références

- Challamel N, Hellesland J (2013) Buckling of softening columns in a continuum damage mechanics perspective – Local versus non-local formulation. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 39:229–242 . doi: 10.1016/j.euromechsol.2012.11.007
- Challamel N, Kocsis A, Wang CM (2015b) Higher-order gradient elasticity models applied to geometrically nonlinear discrete systems. *Theoretical and Applied Mechanics* 42:223–248
- Challamel N, Kocsis A, Wang CM (2015c) Discrete and non-local elastica. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 77:128–140
- Challamel N, Picandet V, Collet B, et al (2015d) Revisiting finite difference and finite element methods applied to structural mechanics within enriched continua. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 53:107–120
- Challamel N, Picandet V, Pijaudier-Cabot G (2015e) From discrete to nonlocal continuum damage mechanics: Analysis of a lattice system in bending using a continualized approach. *International Journal of Damage Mechanics* 24:983–1012
- Challamel N, Rajagopal K (2016) On stress-based piecewise elasticity for limited strain extensibility materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 81:303–309
- Challamel N, Wang CM (2008) The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved. *Nanotechnology* 19:345703 . doi: 10.1088/0957-4484/19/34/345703
- Challamel N, Wang CM, Elishakoff I (2014) Discrete systems behave as nonlocal structural elements: bending, buckling and vibration analysis. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 44:125–135
- Challamel N, Wang CM, Elishakoff I (2016c) Nonlocal or gradient elasticity macroscopic models: A question of concentrated or distributed microstructure. *Mechanics Research Communications* 71:25–31
- Challamel N, Wang CM, Elishakoff I (2016d) Nonlocal or gradient elasticity macroscopic models: A question of concentrated or distributed microstructure. *Mechanics Research Communications* 71:25–31

- Charlotte M, Laverne J, Marigo J-J (2006) Initiation of cracks with cohesive force models: a variational approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 25:649–669
- Chatzigeorgiou G, Picandet V, Khelidj A, Pijaudier-Cabot G (2005) Coupling between progressive damage and permeability of concrete: analysis with a discrete model. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 29:1005–1018
- Chen FY (1971) On modeling and direct solution of certain free vibration systems. *Journal of Sound and Vibration* 14:57–79 . doi: 10.1016/0022-460X(71)90507-4
- Coenen EWC, Kouznetsova VG, Geers MGD (2012) Novel boundary conditions for strain localization analyses in microstructural volume elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 90:1–21
- Collins MA (1981) A quasicontinuum approximation for solitons in an atomic chain. *Chemical Physics Letters* 77:342–347 . doi: 10.1016/0009-2614(81)80161-3
- Comi C, Perego U (2001) Numerical aspects of nonlocal damage analyses. *Revue Européenne des Éléments Finis* 10:227–242 . doi: 10.1080/12506559.2001.11869249
- Del Piero G, Truskinovsky L (2001) Macro-and micro-cracking in one-dimensional elasticity. *International Journal of Solids and Structures* 38:1135–1148
- Del Piero G, Truskinovsky L (2009) Elastic bars with cohesive energy. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 21:141–171
- Delaplace A, Pijaudier-Cabot G, Roux S (1996) Progressive damage in discrete models and consequences on continuum modelling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44:99–136 . doi: 10.1016/0022-5096(95)00062-3
- Dell’Isola F, Andreaus U, Placidi L (2014a) At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola. *Mathematics and Mechanics of Solids* 1081286513509811

Références

- Dell'Isola F, Maier G, Perego U, et al (2014b) The Complete Works of Gabrio Piola: Volume I Commented English Translation - English and Italian Edition. Springer Publishing Company, Incorporated
- Duan WH, Challamel N, Wang CM, Ding Z (2013) Development of analytical vibration solutions for microstructured beam model to calibrate length scale coefficient in nonlocal Timoshenko beams. *Journal of Applied Physics* 114:104312 . doi: 10.1063/1.4820565
- Ericksen JL (1975) Equilibrium of bars. *Journal of elasticity* 5:191–201
- Eringen AC (1983) On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics* 54:4703–4710
- Fermi E, Pasta J, Ulam S (1955) Studies of nonlinear problems. Los Alamos Report LA-1940 978
- Fish J, Chen W (2004) Discrete-to-continuum bridging based on multigrid principles. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193:1693–1711 . doi: 10.1016/j.cma.2003.12.022
- Gazis DC, Wallis RF (1965) Surface tension and surface modes in semi-infinite lattices. *Surface Science* 3:19–32 . doi: 10.1016/0039-6028(65)90015-4
- Gelli MS, Royer-Carfagni GF (2004) Separation of scales in fracture mechanics: From molecular to continuum theory via Γ convergence. *Journal of engineering mechanics* 130:204–215
- Grassl P, Grégoire D, Rojas Solano L, Pijaudier-Cabot G (2012) Meso-scale modelling of the size effect on the fracture process zone of concrete. *International Journal of Solids and Structures* 49:1818–1827 . doi: 10.1016/j.ijsolstr.2012.03.023
- Grégoire D, Rojas-Solano L b., Pijaudier-Cabot G (2013) Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. *Int J Numer Anal Meth Geomech* 37:1434–1452 . doi: 10.1002/nag.2180
- Hencky K (1920) *Wärmeschutz von Rohrleitungen und Behältern: Mitteilung aus dem Forschungsheim für Wärmeschutz e. V., München. Bayer. Landeskohlenstelle*

- Hérisson B, Challamel N, Picandet V, Perrot A (2016a) Nonlocal continuum analysis of a nonlinear uniaxial elastic lattice system under non-uniform axial load. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 83:378–388
- Hérisson B, N. C, Picandet V., et al (2018) Static and Dynamic Behaviors of Microstructured Membranes within Nonlocal Mechanics. *Journal of Engineering Mechanics* 144:04017155 . doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001379
- Hérisson B, Picandet V, Challamel N, Perrot A (2016b) Scale effects in the static response of a one-dimensional quasi-brittle damage lattice. *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 20:1233–1248
- Holzapfel GA, Ogden RW (2013) Elasticity of biopolymer filaments. *Acta biomaterialia* 9:7320–7325
- Hyman JM, Rosenau P (1987) On the quasi-continuous approximation of the Toda lattice. *Physics Letters A* 124:287–289
- Inglis HM, Geubelle PH, Matouš K (2008) Boundary condition effects on multiscale analysis of damage localization. *Philosophical Magazine* 88:2373–2397 . doi: 10.1080/14786430802345645
- Jaberolanssar H, Peddieson J (1981) On continuum representation of mechanical behavior of discrete lattices. *Mechanics Research Communications* 8:251–257 . doi: 10.1016/0093-6413(81)90062-8
- Kachanov LM (1958) On the creep fracture time. *Izv Akad, Nauk USSR Otd Tech* 8:26–31
- Kale S, Ostoja-Starzewski M (2014) Elastic-plastic-brittle transitions and avalanches in disordered media. *Physical review letters* 112:045503
- Kevrekidis PG, Kevrekidis IG, Bishop AR, Titi ES (2002) Continuum approach to discreteness. *Physical Review E* 65:
- Kovacic I, Zukovic M (2018) On the response of some discrete and continuous oscillatory systems with pure cubic nonlinearity: Exact solutions. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 98:13–22 . doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.09.009

Références

- Kruskal MD, Zabusky NJ (1964) Stroboscopic-Perturbation Procedure for Treating a Class of Nonlinear Wave Equations. *Journal of Mathematical Physics* 5:231
- Lagrange J-L (1759) Recherches sur la nature et la propagation du son. *Miscnea Soc taurin* 1:i-112
- Leissa AW, Qatu MS (2011) *Vibrations of Continuous Systems*. McGraw-Hill
- Lemaître J, Chaboche JL (1988) *Endommagement. Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris
- Lennard-Jones JE (1931) Cohesion. *Proc Phys Soc* 43:461 . doi: 10.1088/0959-5309/43/5/301
- Lombardo M, Askes H (2010) Elastic wave dispersion in microstructured membranes. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* rspa20090516
- Lorentz E, Andrieux S (2003) Analysis of non-local models through energetic formulations. *International Journal of Solids and Structures* 40:2905–2936 . doi: 10.1016/S0020-7683(03)00110-0
- Luongo A (2015) On the use of the multiple scale method in solving “difficult” bifurcation problems. *Mathematics and Mechanics of Solids* 1081286515616053
- Marigo JJ (1981) Formulation d’une loi d’endommagement d’un matériau élastique. *CR Acad Sci Paris II* 292:1309–1312
- Marigo J-J, Truskinovsky L (2004) Initiation and propagation of fracture in the models of Griffith and Barenblatt. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 16:391–409
- Marko JF, Siggia ED (1995) Stretching dna. *Macromolecules* 28:8759–8770
- Mastilovic S (2011) Further Remarks on Stochastic Damage Evolution of Brittle Solids Under Dynamic Tensile Loading. *International Journal of Damage Mechanics* 20:900–921 . doi: 10.1177/1056789510385294
- Maugin GA (1999) *Nonlinear waves in elastic crystals*. Oxford University Press

- Maugin GA (2011) Solitons in elastic solids (1938–2010). *Mechanics Research Communications* 38:341–349
- Mesarovic SD, Padbidri J (2005) Minimal kinematic boundary conditions for simulations of disordered microstructures. *Philosophical Magazine* 85:65–78 . doi: 10.1080/14786430412331313321
- Mindlin RD (1965) Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures* 1:417–438
- Mindlin RD (1970) Lattice theory of shear modes of vibration and torsional equilibrium of simple-cubic crystal plates and bars. *International Journal of Solids and Structures* 6:725–738
- Miner MA (1945) Cumulative damage in fatigue. *J Appl Mech* 12:A159–A164
- Nikolić M, Karavelić E, Ibrahimbegovic A, Mišćević P (2017) Lattice Element Models and Their Peculiarities. *Arch Computat Methods Eng* 1–32 . doi: 10.1007/s11831-017-9210-y
- Ogden RW (1997) *Non-linear Elastic Deformations*. Courier Corporation
- Ogden RW, Holzapfel GA (2006) *Mechanics of biological tissue*. Springer
- Palais R (1997) The symmetries of solitons. *Bull Amer Math Soc* 34:339–403
- Palmgren A (1924) Die Lebensdauer von Kugellagern (Durability of ball bearings). *ZDVD* 68:339
- Peerlings RH., De Borst R, Brekelmans WAM, De Vree JHP (1996) Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for numerical methods in engineering* 39:3391–3403
- Picandet V, Hérisson B, Challamel N, Perrot A (2015) On the failure of a discrete axial chain using a continualized nonlocal Continuum Damage Mechanics approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*

Références

- Piccardo G, D'Annibale F, Zulli D (2015) On the contribution of Angelo Luongo to Mechanics: in honor of his 60th birthday. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 27:507–529
- Pijaudier-Cabot G, Bažant Z (1987) Nonlocal Damage Theory. *Journal of Engineering Mechanics* 113:1512–1533 . doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1512)
- Planas J, Elices M, Guinea GV (1993) Cohesive cracks versus nonlocal models: Closing the gap. *Int J Fract* 63:173–187 . doi: 10.1007/BF00017284
- Purohit PK, Arsenault ME, Goldman Y, Bau HH (2008) The mechanics of short rod-like molecules in tension. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 43:1056–1063
- Rajagopal KR (2011) Conspectus of concepts of elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids* 1081286510387856
- Rinaldi A (2013) Bottom-up modeling of damage in heterogeneous quasi-brittle solids. *Continuum Mech Thermodyn* 25:359–373 . doi: 10.1007/s00161-012-0265-6
- Rinaldi A, Lai Y-C (2007) Statistical damage theory of 2D lattices: Energetics and physical foundations of damage parameter. *International Journal of Plasticity* 23:1796–1825 . doi: 10.1016/j.ijplas.2007.03.005
- Robinson EL (1952) Effect of temperature variation on the long-time rupture strength of steels. *Trans ASME* 74:777–781
- Rosenau P (1987) Dynamics of dense lattices. *Phys Rev B* 36:5868–5876
- Rosenau P (1986) Dynamics of nonlinear mass-spring chains near the continuum limit. *Physics Letters A* 118:222–227
- Rutherford DE (1948) XXV.—Some Continuant Determinants arising in Physics and Chemistry. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* 62:229–236 . doi: 10.1017/S0080454100006634
- Ryvkin M, Slepian L (2010) Crack in a 2D beam lattice: Analytical solutions for two bending modes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 58:902–917 . doi: 10.1016/j.jmps.2010.03.006

- Su T, Purohit PK (2011) Fluctuating elastic filaments under distributed loads. *Mol Cell Biomech* 8:215–232
- Toda M (1975) Studies of a non-linear lattice. *Physics Reports* 18:1–123 . doi: 10.1016/0370-1573(75)90018-6
- Tong P, Pian THH, Bucciablli LL (1971) Mode shapes and frequencies by finite element method using consistent and lumped masses. *Computers & Structures* 1:623–638 . doi: 10.1016/0045-7949(71)90033-2
- Triantafyllidis N, Bardenhagen S (1993) On higher order gradient continuum theories in 1-D nonlinear elasticity. Derivation from and comparison to the corresponding discrete models. *Journal of Elasticity* 33:259–293
- Vanderzande C (1998) *Lattice models of polymers*. Cambridge University Press
- Wang CM, Zhang H, Challamel N, Xiang Y (2016) Buckling of Nonlocal Columns with Allowance for Selfweight. *Journal of Engineering Mechanics* 04016037
- Wang CY, Wang CM (2013) *Structural Vibration: Exact Solutions for Strings, Membranes, Beams, and Plates*. CRC Press
- Wason PC (1960) On the failure to eliminate hypotheses in a conceptual task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology* 12:129–140 . doi: 10.1080/17470216008416717
- Wattis JAD (2000) Quasi-continuum approximations to lattice equations arising from the discrete nonlinear telegraph equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 33:5925–5944
- Winkler RG (2003) Deformation of semiflexible chains. *The Journal of chemical physics* 118:2919–2928
- Wood RH (1968) *Some controversial and curious developments in the plastic theory of structures*. Cambridge University Press
- Zabusky NJ, Kruskal MD (1965) Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys Rev Lett* 15:240–243

Références

- Zhang Z, Challamel N, Wang CM (2013) Eringen's small length scale coefficient for buckling of nonlocal Timoshenko beam based on microstructured beam model. *Journal of Applied Physics* 114:114902 . doi: 10.1063/1.4821246
- Zhang Z, Wang CM, Challamel N (2014a) Eringen's length scale coefficient for buckling of nonlocal rectangular plates from microstructured beam-grid model. *International Journal of Solids and Structures* 51:4307–4315
- Zhang Z, Wang CM, Challamel N (2014b) Eringen's Length-Scale Coefficients for Vibration and Buckling of Nonlocal Rectangular Plates with Simply Supported Edges. *Journal of Engineering Mechanics* 141:04014117
- Zhang Z, Wang CM, Challamel N (2014c) Eringen's length scale coefficient for buckling of nonlocal rectangular plates from microstructured beam-grid model. *International Journal of Solids and Structures* 51:4307–4315

n°ordre 483