



HAL
open science

Cinématique et dynamique galactiques

Jérôme Leca

► **To cite this version:**

Jérôme Leca. Cinématique et dynamique galactiques. Astrophysique [astro-ph]. Université de Strasbourg, 2019. Français. NNT : 2019STRAE003 . tel-02277457

HAL Id: tel-02277457

<https://theses.hal.science/tel-02277457v1>

Submitted on 3 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE-PHYSIQUE

UMR 7550

THÈSE présentée par :

Jérôme LECA

soutenue le : 8 février 2019

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : Astrophysique

Cinématique et dynamique galactiques

THÈSE dirigée par :

Bienaymé Olivier

Université de Strasbourg

RAPPORTEUSES :

Gomez Ana

Reylé Céline

Observatoire de Paris

Université de Besançon

AUTRES MEMBRES DU JURY :

Robin Annie

Famaey Benoit

Université de Besançon

Université de Strasbourg

Table des matières

Remerciements	4
1 Introduction	5
2 La structure galactique	10
2.1 Historique	10
2.2 Modèles galactiques	18
2.3 Besançon Galaxy Model (BGM)	21
2.4 Profils de densité	23
2.4.1 Disque stellaire	23
2.4.2 Milieu Inter Stellaire (ISM)	25
2.4.3 Halo stellaire	25
2.4.4 Halo de matière noire	26
2.4.5 Conclusion	26
3 Fonction de distribution	28
3.1 Généralités	29
3.1.1 Définition	29
3.1.2 Théorème de Liouville - Equation de Boltzmann	31
3.1.3 Intégrales du mouvement	33
3.2 Applications aux modèles galactiques	35
3.2.1 Symétries	36
3.2.2 Moments de la DF et équations de Jeans	36
3.3 Intégrales du mouvement	37
3.3.1 Deux premières intégrales du mouvement	38
3.4 Potentiel de Stäckel et I_3	38
3.4.1 Quasi-intégrale	41
3.5 Forme explicite des fonctions de distribution	42
3.5.1 Distribution de Schwarzschild	42
3.5.2 Distribution de Shu (Schwarzschild modifiée)	44
3.5.3 Généralisation à 3D	46

4	Procédure d'ajustements des fonctions de distribution	47
4.1	Calcul de I3	47
4.2	Choix des paramètres	48
4.3	Méthode	48
4.4	Distribution des vitesses	50
4.4.1	Profils des vitesses u,v et w	50
4.4.2	Tilt	50
5	Cohérence dynamique	53
5.1	Potentiels	55
5.1.1	Potentiel des disques minces et épais	55
5.1.2	Potentiel du bulbe central, du halo stellaire et de l'ISM	57
5.1.3	Potentiel du halo de matière noire	57
5.2	Courbe de rotation	57
5.3	Bouclage	58
5.3.1	Résultats préliminaires	59
5.4	Résultats	59
6	Travail complémentaire : recherche de structures dans le halo stellaire	62
6.1	Données et sélection	63
6.1.1	Données de base	63
6.1.2	Sélection	64
6.1.3	Fonction de corrélation	65
6.2	Espace des intégrales du mouvement	67
6.2.1	Choix du potentiel	68
6.2.2	Surdensités	72
6.2.3	Améliorations possibles	72
	Conclusion	76
A	Article	79
B	Résolution numérique de l'équation de Poisson	88
B.0.1	Contexte	88
B.0.2	Equation de Poisson	88
B.0.3	Méthode itérative	91
B.0.4	Tests	92
C	Transformations	96
C.1	Coordonnées	96
C.2	Vitesses	97

Remerciements

Je tiens à remercier Claire Marrache-Kikuchi, Ariane Lançon, Christian Boily et Nicolas Martin qui m'ont aidé et encouragé le long de mes études supérieures et grâce à qui celles-ci purent aboutir à la thèse.

Je n'aurais pas obtenu ce doctorat sans le soutien, l'aide et la patience de mon directeur de thèse, Olivier Bienaymé, que je remercie chaleureusement pour ces trois années. Je remercie aussi Benoit Famaey pour ses conseils et encouragements pendant cette thèse.

Tout le long de ce travail, j'ai été accompagné par mes amis, éparpillés de par le monde, mais toujours présents aux bons moments ; je tiens donc à les remercier, notamment les bretons. Je remercie particulièrement les doctorants de l'observatoire de Strasbourg qui sont devenus des amis et qui ont adoucis ces années de doctorat.

Enfin je réserve mes derniers remerciements à ma famille, particulièrement mes parents, qui, présents depuis le début, m'ont ouvert à la curiosité et m'ont toujours soutenu durant ce long trajet.

Chapitre 1

Introduction

Les questions relatives à la structure, la formation et l'évolution des galaxies en général, et de la nôtre en particulier, font partie des questions les plus importantes de l'astrophysique moderne. Dans le cadre de l'étude de notre propre Galaxie, la Voie Lactée, le Modèle de la Galaxie de Besançon a été créé pour modéliser le nombre d'étoiles observées le long de lignes de visée données, afin par exemple de permettre la prévision du nombre d'étoiles observées par différents relevés, et pour donner des indications précisément quant à la structure, la formation et l'évolution de notre Galaxie, en comparant les observations au modèle, et en mettant à jour le modèle régulièrement.

Il s'agit d'un modèle de synthèse qui inclut des éléments essentiels de notre connaissance actuelle de la physique Galactique, connaissance qui est en évolution rapide notamment via l'arrivée récente des données de la mission Gaia. Le travail de cette thèse a pour objectif de rendre dynamiquement cohérente la cinématique du modèle en y modifiant la description de la cinématique et de la densité stellaires : ceci est obtenu en modélisant correctement les fonctions de distribution, densités-cinématiques en cohérence avec le potentiel gravitationnel du modèle Galactique.

Aujourd'hui, l'arrivée des mesures du relevé Gaia permet d'accéder à une connaissance beaucoup plus précise et détaillée de la structure et de la dynamique de notre Galaxie. Cela nécessite d'améliorer considérablement la modélisation de notre Galaxie. Le travail présenté ici a consisté à construire une telle modélisation et à développer des outils permettant de l'inclure dans une nouvelle version du modèle Galactique de Besançon.

Nous décrivons dans les différents chapitres de la thèse, la version initiale utilisée du modèle de Besançon, les différents développements analytiques que nous avons retenus, les outils numériques et leurs tests. L'algorithmique permettant de créer un modèle dynamiquement cohérent est présenté et détaillé dans les différents chapitres. La mise en place et la construction de

catalogue de pseudo données sont encore en phase de test. Une fois achevée, cela permettra en particulier la comparaison du modèle aux observations du relevé Gaia et l’ajustement des paramètres du modèle Galactique.

Le modèle de la Galaxie de Besançon (Robin and Creze 1986, Bienayme et al. 1987, Marshall et al. 2006, Reylé et al. 2009, Robin et al. 2012, 2014, Amores et al. 2017, Lagarde et al. 2017, 2018) a été créé pour modéliser le nombre d’étoiles galactiques observées dans n’importe quelles direction du ciel, pour permettre la prévision du nombre d’étoiles et pour donner des indications sur la structure, la formation et l’évolution de notre Galaxie. Il s’agit d’un modèle de synthèse qui inclut des éléments essentiels de notre connaissance actuelle de la physique galactique. Un tel modèle est une extension naturelle et une généralisation moderne des méthodes basées sur l’équation de la statistique stellaire (von Seeliger 1898). De nombreux modèles similaires ont été développés ; nous pouvons citer quelques-uns des développements les plus récents (Girardi et al. 2005, Binney 2012, Sanders and Binney 2014, Binney et al. 2014b, Sharma et al. 2014, Vasiliev 2018). Le modèle de Besançon est basé sur un ensemble de composantes galactiques pour le milieu interstellaire, les étoiles et la matière noire. La distribution de la densité stellaire est décrite à l’aide de composantes stellaires, chaque composante ayant des caractéristiques différentes avec des plages d’âge, des abondances stellaires et des gradients radiaux. Le modèle reproduit le nombre d’étoiles observé. Il peut anticiper ou prédire les résultats des comptages d’étoiles avec plusieurs des bandes larges photométriques existantes. La transformation des paramètres stellaires (température effective, gravité, métallicité) en observables (magnitudes et couleurs) se fait à l’aide de grilles semi-empiriques (Lejeune et al. 1997, Westera et al. 2002), les bibliothèques dites BaSeL. Pour les naines très froides dont la température est inférieure à environ 4000 K, les modèles NextGen sont utilisés (Allard et al. 1997, Baraffe et al. 1998, voir aussi Schultheis et al. 2006). Parmi les améliorations récentes, nous mentionnons l’introduction de composants non axisymétriques comme la structure de la barre intérieure (Robin et al. 2012). Le modèle inclut également une modélisation détaillée de l’extinction permettant une description précise des observations vers des directions proches du plan galactique (Marshall et al. 2006). Le modèle est périodiquement mis à jour avec les évolutions régulières de nos connaissances sur les propriétés galactiques, les propriétés stellaires et les luminosités (Schultheis et al. 2006, Czekaj et al. 2014, Mor et al. 2017, Amores et al. 2017, Lagarde et al. 2017, 2018), binarités, abondances, cinématique et dynamique stellaires. Nous nous intéressons ici à l’amélioration de la dynamique du modèle, qui complète l’introduction précédente des propriétés cinématiques des étoiles (Robin and Oblak 1987), et l’introduction d’une cohérence dynamique dans le voisinage solaire (Bienayme et al. 1987). Cette cohérence dynamique relie

l'épaisseur des composantes stellaires à leur dispersion de vitesses verticales au travers du potentiel gravitationnel vertical au rayon galactique du soleil R_0 . Dans [Bienayme et al. 1987](#), la cohérence dynamique est limitée au voisinage solaire.

On sait depuis plusieurs décennies construire des modèles de la galaxie à l'échelle globale ([McGill and Binney 1990](#), [Kent and de Zeeuw 1991](#), [Famaey and Dejonghe 2003](#)), mais ce n'est que récemment que des outils pratiques ont été développés en utilisant des intégrales d'action ([Binney 2012](#)) ou d'autres intégrales qui atteignent une précision excellente ([Bienaymé et al. 2015](#)). Dans le présent document, la cohérence est étendue à un domaine qui couvre près de 95 % du volume occupé par les disques stellaires, à l'exception de la partie très interne du modèle de la Galaxie. Notre modèle dynamique suppose que la Galaxie est axisymétrique, hypothèse qui n'est pas satisfaite dans la partie la plus interne de la Galaxie.

Pour modéliser la distribution des composantes du disque stellaire, nous définissons des fonctions de distribution dépendantes de trois intégrales du mouvement, l'énergie, le moment angulaire et une troisième intégrale approchée. Ces fonctions de distribution sont dérivées de la fonction de distribution de Shu ([Shu 1969](#)).

L'arrivée des données de Gaia offre la possibilité de sonder un grand volume de la galaxie avec une précision sans précédent. Cela implique que la qualité de la modélisation doit être réalisée au regard de la qualité de ces nouvelles données exceptionnelles. Grâce à la précision remarquable des observations, de nombreuses données Gaia peuvent être directement inversées pour déduire les positions 3D et les vitesses des étoiles sans biais notable. Il est ainsi plus facile d'effectuer l'analyse à l'intérieur d'une zone étendue autour du Soleil et cela évite les difficultés d'une analyse classique basée sur les grandeurs apparentes, les mouvements propres, les vitesses radiales ou les distances spectrophotométriques. En particulier, les données de Gaia nous permettront de mesurer avec une précision jamais atteinte le potentiel galactique sur un domaine étendu. Déterminer avec précision la masse de la matière visible, un défi même avec les données de Gaia, et la soustraire de la masse dynamique totale déduite du potentiel, nous permettra de tracer très précisément la distribution de densité de la matière noire. Une façon d'atteindre ce but consiste à construire des modèles galactiques dynamiques auto-cohérents qui relient la cinématique et la densité pour chaque population stellaire par l'équation de Boltzmann sans collision sous l'hypothèse de la stationnarité. Ces modèles sont basés sur des fonctions de distribution explicites ([Ting et al. 2013](#), [Binney et al. 2014b](#), [Bovy 2015](#), [Bienaymé et al. 2015](#), [Binney and McMillan 2016](#), [Vasiliev 2018](#)) et tous ces modèles suivent des approches identiques (voir une compilation par [Sanders and Binney 2016](#)) utilisant les

ajustements Stäckel et l’ajustement des orbites avec les actions, sauf dans le cas de [Bienaymé et al. 2015](#) qui utilisent les intégrales du mouvement analytiques. A l’exception de [Sanders and Binney 2015](#) qui développent un modèle triaxial, ces modèles n’incluent pas encore d’effets non axisymétriques, par exemple liés à un halo triaxial de matière noire ou aux disques elliptiques. Naturellement, d’autres approches sont possibles, semblables à celles basées sur des simulations de N corps ([Chemin et al. 2015](#)) et d’autres tentent également d’ajuster numériquement des intégrales plus générales du mouvement par la reconstruction des tores ([Prendergast and Tomer 1970](#), [McGill and Binney 1990](#), [Robnik 1993](#), [Kaasalainen 1994](#), [Bienaymé and Traven 2013](#)). Enfin, notons que la construction d’un modèle stationnaire est une première étape pour déterminer l’amplitude de la non-stationnarité et peut servir d’état de référence pour analyser les non-stationnarités comme les perturbations. Dans cette thèse, nous détaillons la façon dont nous modélisons l’auto-cohérence pour une version axisymétrique du Modèle de Besançon de la Galaxie. La précision de cette méthode est quantifiée dans [Bienaymé et al. 2015](#). Il est montré que la version 2014 ([Robin et al. 2014](#)) n’est pas loin de l’auto-cohérence dynamique et que la majorité des orbites sont convenablement décrites dans le cadre des potentiels de Stäckel. Un test important consiste à déterminer le potentiel galactique à l’aide de l’équation de Jeans en utilisant nos fonctions de distribution. En appliquant cette méthode, les forces verticales et radiales et la densité de masse totale sont retrouvées avec une incertitude inférieure à un pour cent dans un grand volume de la Galaxie. Notre approche de l’auto-cohérence dynamique est formellement identique à celle développée par [Sanders and Binney 2016](#) en utilisant également le formalisme du potentiel Stäckel. Une différence significative est que nous utilisons une expression analytique explicite des intégrales, mais pas les actions numériques intégrées. Un autre aspect est que nos expressions analytiques sont rapidement évaluées, un résultat essentiel en vue de la construction de grands catalogues de pseudo-données.

Cette thèse présente les différentes étapes utilisées pour construire une version du modèle de Besançon qui soit cohérente dynamiquement. Après un rappel historique et une description de modèles galactiques au chapitre 2, je décris différents types de fonctions de distribution pour les lois de densité et cinématiques des populations stellaires et je présente celles retenues au chapitre 3. Les chapitres 4 et 5 détaillent les étapes pour la construction de modèles analytiques dynamiquement cohérents. Le chapitre 6 est un travail annexe qui a été mené en parallèle à l’amélioration du modèle de Besançon : j’ai effectuée un travail sur la recherche de sous-structures dans le halo stellaire de la Galaxie. Cette analyse est basée sur l’analyse de la distribution des trois intégrales du mouvements pour un échantillon Gaia DR1 /RAVE

d'étoiles du halo stellaire galactique.

Chapitre 2

La structure galactique

2.1 Historique

Depuis que la vie émergea sur terre, le ciel, bien que différent de ce que nous pouvons voir aujourd'hui, était déjà constellé d'étoiles. On peut imaginer que les divers phénomènes célestes intriguèrent les premiers hommes et il est généralement admis que la sédentarisation et l'apparition de l'élevage permirent à l'homme d'avoir plus de temps pour penser...Le spectacle qui s'offrait à eux chaque nuit sans nuage fit sûrement germer dans leurs esprits beaucoup de questions et l'esprit humain étant ce qu'il est, divers réponses qu'elles soient théologique ou logique tentèrent de combler le vide de la connaissance d'alors. Scientifiquement parlant, des modèles apparurent au fil du temps : dans l'antiquité, notamment en Grèce, les savants de l'époque, grâce aussi à l'émergence des mathématiques, commencèrent à structurer une vision globale de l'univers (hélas, parmi toutes les écoles de pensée de l'époque, la vision aristotélicienne de l'univers perdura pendant des siècles, bien que fausse...). Taille de la terre, distance terre-soleil devinrent accessibles, les mouvements des planètes connues (et donc reconnaissable a l'oeil nu) devinrent prédictibles etc ... et l'on est surpris par la précision des calculs tenant compte des moyens de l'époque. C'est aussi à cette époque que fût créer la première classification des étoiles selon leur éclats apparents par Hipparque de Nicée. A chaque étoile était attribué un éclat sur une échelle de 1 à 10 ce qui est à la base du système de magnitude actuel !

Le ciel n'étant observé qu'à l'oeil nu, les débats furent surtout théoriques et philosophiques quant à la structure cosmique entourant notre planète. Il fallut attendre le début du 17ème siècle et Galilée et sa lunette pour donner un nouvel et extraordinaire élan à la compréhension de ce qui se déroulait dans l'univers. L'homme avait enfin la capacité de sonder les phénomènes

extraterrestres et les découvertes ne cessèrent de se succéder depuis.

En ce qui concerne les galaxies, c'est Kant qui émit la première fois l'idée que les étoiles pouvaient être regroupées sous forme de vaste "univers-îles", et que certaines des nébuleuses aperçues dans le ciel étaient de même nature que ces groupements d'étoiles mais très éloignées. Par l'observation et le comptage d'étoiles, Herschel donna pour la première fois, au 18ème siècle, un modèle de la Voie Lactée : l'idée de Kant semblait être confirmée scientifiquement... Kapteyn ([Kapteyn 1922](#)) poursuivit, sur les mêmes principes mais avec des méthodes et des moyens techniques plus sophistiqués, la recherche de la répartition des étoiles nous entourant ; leur deux modèles (celui de Herschel et de Kapteyn) bien que montrant une forme oblate, positionnaient le soleil près du centre galactique et, ne connaissant pas l'existence de matière interstellaire pouvant diminuer la luminosité apparente des étoiles, se trompaient sur les échelles de distances. Il fallut l'étude de Shapley sur les amas globulaires (dont les mouvement semblaient être en orbite autour d'un centre éloigné d'environ 13 kpc du soleil) et celle de Trumpler sur la luminosité des amas ouverts pour respectivement : replacer le centre galactique loin du soleil et confirmer l'absorption interstellaire et ainsi corriger les erreurs de distance faites jusqu'alors. Ainsi émergea la première vision moderne de la Voie Lactée. Avec l'augmentation des performances des télescopes, on confirma également que notre galaxie n'était pas unique et qu'il en existait de divers formes, masses etc...

Parallèlement, et en ce qui concerne la Voie Lactée, Lindbald, en 1926, supposa que les étoiles de la galaxie étaient en rotation autour d'un centre commun (théorie des épicycles). Oort effectua le premier traitement moderne de la rotation galactique pour les étoiles du voisinage solaire ([Oort 1927b,a](#)). La cinématique galactique devint ainsi un des piliers de la compréhension de la galaxie ([Oort 1928](#)). Ainsi, par des arguments cinématiques et chimiques, Baade ([Baade 1944](#)) proposa de distinguer les étoiles en deux sous populations que l'on peut résumer de la manière suivante (et inventa par là-même la notion de population stellaire) : les étoiles de population I, jeune, (pop I) suivaient surtout des orbites circulaires près de plan galactique et possédaient une métallicité élevée, tandis que celle de population II, plus vieille, (pop II) ne suivaient plus des orbites circulaires et étaient de métallicité faible. Cette différence entre populations stellaires et l'amélioration des modèles d'évolution stellaire menèrent à se poser des questions sur l'origine d'une telle distinction et de la formation de la galaxie elle-même.

Les moyens techniques s'améliorant au fil du temps, les mesures des vitesses aux grandes distances devinrent accessibles et plus précises ; on s'aperçut alors que contrairement aux prédictions la théorie, pour laquelle si l'on cumulait toute la matière visible présente, la vitesse de rotation devait dimi-

nuer avec le rayon, la vitesse de rotation restait constante (Rubin and Ford 1970, Freeman 1970, Rogstad and Shostak 1972 etc. La seule explication dynamique était qu’il fallait une grande quantité de masse non visible pour aboutir théoriquement au même résultat : ainsi la matière noire fit son entrée dans le monde des galaxies. Bien que depuis, sa nature n’est pas encore appréhendée, il est communément admis que quasiment toutes les galaxies spirales sont à l’intérieur d’un halo de matière noire.

Description globale d’une galaxie

De manière surprenante, il n’existe pas de définition officielle d’une galaxie (Forbes and Kroupa 2011). Il existe néanmoins un consensus pour la plupart des galaxies faisant intervenir plusieurs critères (les cas extrêmes étant plus difficiles à catégoriser...) : on décrit généralement une galaxie comme étant une collection de populations stellaires gravitationnellement liées au sein d’un halo de matière noire, ayant un temps de relaxation supérieur à celui de l’univers et possédant des satellites. Cette définition est assez large mais contient une grande partie des galaxies connues, qu’elles soient elliptiques ou non, mais certains cas problématiques sont tout de même à noter. Pour les cas où le doute n’existe pas, nous pouvons encore dégager certains points communs qui non seulement sont utiles pour les tentatives de description de notre galaxie, mais aussi semblent indiquer des processus identiques lors de la formation et évolution de tels systèmes.

Nous nous focaliserons ici sur les galaxies dites spirales selon la classification de Hubble (Hubble 1926). Ces galaxies ont toutes en commun (figure 2.1) la présence d’un disque autour duquel gravitent des amas globulaires, le tout entouré par un halo stellaire. Pour certaines galaxies, on peut rajouter à cette liste la présence d’un bulbe centrale, d’une barre central, des spirales dans le disque, la présence d’un disque épais et d’un halo de matière noire.

Disque

Constitué majoritairement d’étoiles, de gaz et de poussières, le disque est la composante visible la plus importante d’une galaxie spirale. De nombreux travaux (Freeman 1970, Pohlen and Trujillo 2006) montrent que la distribution radiale de la luminosité $I(R)$ des disques galactiques suivent généralement une loi exponentielle (figure 2.2) :

$$I(R) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{h_R}\right)$$

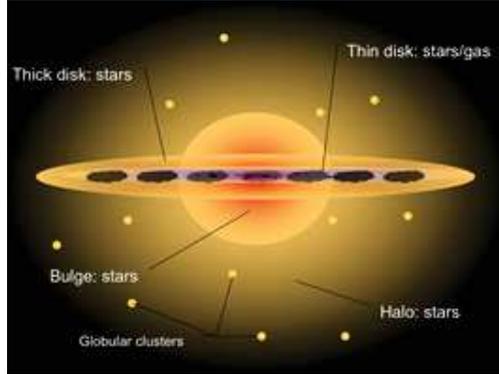


FIGURE 2.1 – Représentation d’une galaxie mettant en valeur les principales composantes (Image Credit : Swinburne University of Technology)

où I_0 est la luminosité centrale et h_R est l’échelle de longueur. On est alors tenté de supposer que la densité massique suit elle aussi une loi exponentielle mais cette supposition nécessite alors que le ratio masse-luminosité soit constant. Fathi (Fathi 2010, Fathi et al. 2010) calcula sur un échantillon de 30.000 galaxies une valeur moyenne de $h_R = 3.8 \pm 2 \text{ kpc}$ dans les bandes g , r , i et z . Cette valeur moyenne est de $5 \pm 3 \text{ kpc}$ en bande u . A noter aussi que les galaxies de faibles masses ($10^9 - 10^{10} M_\odot$) possèdent en moyenne une faible échelle de longueur ($1.5 \pm 0.7 \text{ kpc}$) tandis que les galaxies de grande masse possèdent en moyenne une échelle de longueur plus grande ($5.7 \pm 1.9 \text{ kpc}$).

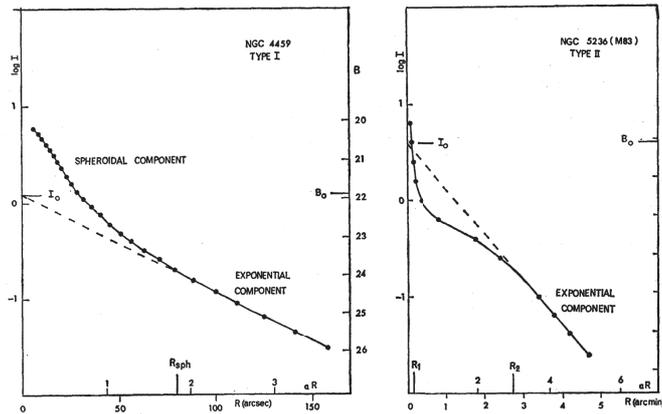


FIGURE 2.2 – Profils de luminosité de deux galaxies issus de Freeman 1970. Le changement de pente au centre est dû à la présence d’un bulbe central.

La distribution de luminosité verticale est souvent représentée par soit une

distribution en $sech^2$ qui est solution d'un disque auto-gravitant isotherme¹, soit par une loi exponentielle (figure 2.3). Ces 2 formes sont réconciliées si l'on exprime le profil vertical de luminosité $I(z)$ sous la forme générale suivante (van der Kruit 1988) :

$$I(z) = I_0 sech^{2/n} \left(\frac{nz}{2h_z} \right)$$

avec I_0 est la luminosité centrale $n = 1$ correspond au profil en $sech^2$ et $n = \infty$ au profil exponentiel. Dans les deux cas, on atteint un maximum dans le plan galactique ($z = 0$) avec symétrie de part et d'autre de ce plan.

Si le disque possède un ratio masse/luminosité $\Gamma = M/L$ constant, sa densité $\rho(R, z)$ est alors décrite par :

$$\rho(R, z) = \rho_0 e^{-\frac{R}{h}} sech^2 \left(\frac{z}{z_0} \right)$$

Il existe néanmoins plusieurs autres profils de densité, souvent déduits d'un potentiel (Myamoto-Nagai, isotherme etc...).

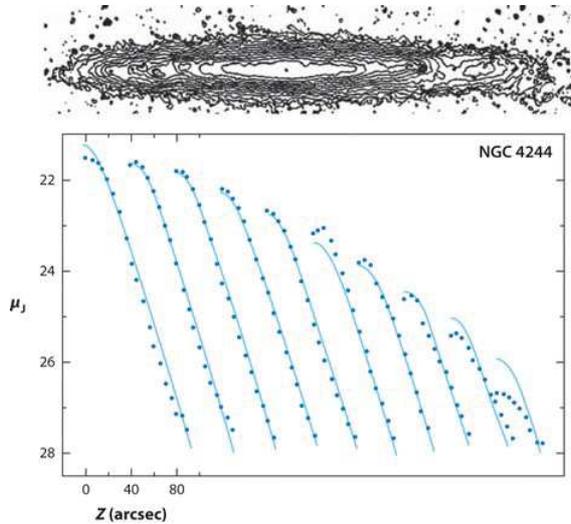


FIGURE 2.3 – Profils verticaux de luminosité. Les courbes sont en $sech^2$. Les différentes courbes selon l'axe des abscisses représentent le profil vertical à différents rayons. (van der Kruit and Freeman 2011)

1. C'est-à-dire dont la dispersion de vitesse est la même quelque soit la hauteur. Les disques étant constitués de plusieurs populations stellaire d'âges et donc de propriétés cinématiques différentes, cette hypothèse peut être mise en défaut...

Le disque est souvent le lieu de formation stellaire continue (bras spiraux etc...) et sa population est généralement jeune avec une métallicité élevée. D'un point de vue cinématique, les étoiles étant pour la plupart jeunes, les orbites sont quasi-circulaires avec une faible dispersion de vitesse.

Bulbe

La partie centrale des galaxies contient souvent un bulbe abritant généralement en son sein un trou noir. Il est souvent modélisé par un profil de Sérsic :

$$\mu(R) = \mu_0 - b_n R^{1/n}$$

où μ est la brillance de surface, μ_0 la brillance de surface au centre, n est l'indice de Sérsic et b_n est calculé selon la valeur de n . On retrouve le célèbre profil de Vaucouleurs pour $n = 4$ et un profil exponentiel pour $n = 1$.

Halo stellaire

On observe autour des deux précédentes composantes une extension de faible luminosité (Merritt 2016) généralement de forme sphérique et suivant une loi de puissance : le halo stellaire. Cependant il est difficile de trouver un profil général : la formation du halo est souvent dû à différents mergers et dépend donc de l'histoire de la galaxie. Sa luminosité domine pour les grandes distances comme l'indique par exemple cette modélisation de M31 (Andromède) par Courteau (figure 2.4).

Décrivons maintenant les autres composantes qui ne sont pas fréquemment présentes dans les galaxies spirales.

Halo de matière noire

Dans la plupart des galaxies spirales, on observe des courbes de rotation plates à longue distance. Or comme nous l'avons remarqué précédemment, cela est incompatible si l'on ne s'en tient qu'à la matière visible. Plusieurs hypothèses furent invoquées pour pallier à ce manque de matière massique (MACHOS, nuages) mais la nature de cette mystérieuse masse manquante reste encore aujourd'hui inconnue et seuls ses effets dynamiques semblent prouver son existence.²

Puisque l'on ne peut l'observer, nous l'affublons du nom de matière noire. Le

2. On peut trouver d'autre dynamique dans lesquelles la matière noire serait non nécessaire comme MOND (MOdified Newtonian Dynamics) (Famaey and McGaugh 2013)

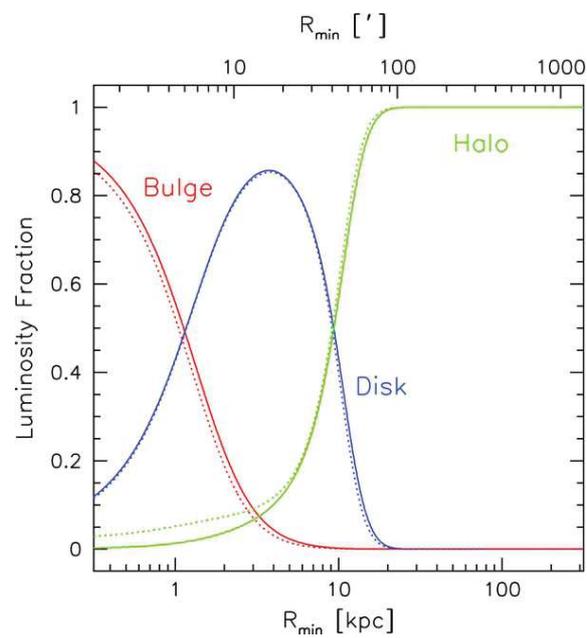


FIGURE 2.4 – Modélisation des différentes zones de luminosité de M31. Comme indiqué précédemment, il n'est pas étonnant de voir la luminosité du bulbe dominer dans la région centrale. Puis le disque prend le relais et enfin le halo stellaire domine à large distance

profil de densité le plus connu pour représenter les halos de matière noire est le fameux profil NFW (Navarro-Frenk-White) (Navarro et al. 1996) :

$$\rho(r) = \rho_{crit} \delta_c \left[\left(\frac{r}{r_s} \right) \left(1 + \frac{r^2}{r_s^2} \right) \right]^{-1}$$

où $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$ est la densité critique de l'univers dans le modèle cosmologique de la matière noire froide, δ_c est la densité caractéristique et r_s un paramètre de longueur. Ce modèle, issu de simulations numériques dans un univers en expansion est réputé universel dans le sens où il semble s'appliquer aussi bien aux halos des galaxies qu'aux halos de groupe de galaxies... Cependant la masse diverge avec le rayon et n'est pas forcément bien représentative des halos galactiques (cf core-cusp problem). On lui préfère parfois le profil pseudo-isotherme :

$$\rho(r) = \rho_0 / \left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]$$

où ρ_0 est la densité centrale et r_c est le rayon de coeur. Même si la masse diverge encore avec r , ce profil donne généralement un bon ajustement aux courbes de rotation galactiques.

La forme du halo de matière noire fait encore débat : sa formation commencerait avec une perturbation de densité dans l'univers primordial et croissant linéairement jusqu'à atteindre une densité critique à partir de laquelle cette sur-densité s'effondrerait pour former un halo de matière noire. Ce halo, en accréant d'autres halos et avec des possibles mergers, continue sa croissance... Or l'effondrement d'une sur-densité est généralement non isotrope et il n'y a aucune raison, à priori, que le halo soit sphérique. Une des manières pour tenir compte d'un éventuel aplatissement et d'inclure un paramètre q tel que $r^2 = R^2 + (z/q)^2$ qui permet, pour $q < 1$ d'aplatir le halo.

Disque épais

La majorité des galaxies spirales possèdent une composante en forme de disque qui se démarque du disque "normal" par son épaisseur (ses étoiles possèdent une dispersion de vitesse plus élevée) : le disque épais. Bien que sa formation fasse encore débat, il est probable qu'il se soit formé à partir du disque mince par chauffage (dû à des mergers et ou accrétions). Sa population est généralement âgée et de faible métallicité.

Barre

On pense qu'environ 50 % des galaxies spirales SB contiennent une composante tri-axiale de forme ellipsoïdale aplatie en z : la barre. Son nom vient du fait qu'elle est animée d'un mouvement de rotation solide (indépendant du rayon) : les étoiles la composant se déplacent sur des orbites fermées majoritairement le long de l'axe principal de la barre dans un repère animé d'une vitesse angulaire constante. Bien qu'absente des modèles axisymétriques, son influence est importante en ce qui concerne la dynamique, la morphologie et l'évolution de la galaxie. En effet, la barre influe entre autres en redistribuant le moment cinétique au disque. Elle influe sur les bras spiraux à grande échelle et par échange de moment cinétique avec le halo de matière noire, pourrait modifier la forme de ce dernier. Etant absente de notre modèle, nous ne détaillerons pas davantage. Il faut néanmoins garder à l'esprit que son influence importante est nécessaire pour une description correcte et détaillée du potentiel galactique.

Bras spiraux

Lord Rosse observa pour la première fois une structure spirale en 1845 (M51). Depuis, on observe que la majorité des galaxies ayant la forme de disque possèdent aussi des bras spiraux. Leur origine n'est pas encore claire : bien que la rotation différentielle joue un rôle crucial, elle ne peut à elle seule expliquer la formation et surtout la persistance de telles structures. La théorie des ondes de densité (Lin and Shu 1964, 1966) fait encore aujourd'hui autorité pour les spirales à grandes échelles mais la question de leur formation et de leur évolution reste encore en débat. Les bras sont le siège d'une formation stellaire intense et sont donc peuplés d'étoiles massives. Il est évident encore que les bras spiraux constituent un écart à l'axisymétrie.

2.2 Modèles galactiques

Modéliser les galaxies, notamment la nôtre, permet de réunir une vaste quantité de résultats dans différents champs de recherche (évolution stellaire, dynamique galactique, ISM etc...) et donc permet de faire un bilan sur l'état des connaissances actuelles sur les galaxies. De plus, un modèle permet, par comparaison aux observations, de tester des hypothèses ou des modèles à échelles plus réduites. En effet, beaucoup de phénomènes issus de divers champs de recherche sont interdépendants (évolution chimique, dispersion des vitesses etc...) et il est important de réunir tous ces aspects dans une

globalité afin de tester leurs influences mutuelles. Enfin, la plupart des observations actuelles sont le résultat d'évolution de phénomènes ayant trait à la formation galactique : à travers des modèles de la Galaxie, on peut remonter l'histoire de celle-ci et ainsi mieux comprendre les mécanismes de formation et d'évolution.

La première modélisation galactique connue fût réalisée par William Herschel au cours du 18ème siècle. Avec un télescope permettant de voir les étoiles jusqu'à une magnitude d'environ 15 dans le visible (bande V), il compta les étoiles dans à peu près 600 champs répartis dans le ciel, méthode qu'il nomma lui-même "star-gauging". Avec les connaissances de l'époque, il supposa :

- toutes les étoiles possédaient la même luminosité intrinsèque (et que donc la luminosité perçue était directement proportionnelle à la distance puisque l'absorption interstellaire n'était pas encore envisagée)
- les étoiles étaient uniformément réparties
- son télescope pouvait "voir" toutes les étoiles existantes

Il mit alors au jour une représentation de la Voie Lactée dans laquelle le soleil est proche du centre mais où l'on distingue déjà un aplatissement aux pôles. Par la suite, Herschel lui-même mit en doute ses hypothèses, le perfectionnement des télescopes permettant de sonder plus précisément et plus profondément le ciel.

En parallèle des progrès technologiques, les avancées mathématiques permirent à Von Seeliger, en 1898, de raffiner la méthode statistique de comptage d'étoiles. Abandonnant les hypothèses d'Herschel (mais en ne connaissant pas encore l'existence de matière interstellaire), il proposa que le nombre d'étoiles dN de magnitude absolue comprise entre dM et $M + dM$ et dans un volume $d^3\vec{r}$ pouvait se mettre sous la forme :

$$dN = \tilde{\Phi}(M, \vec{r}) dM d^3\vec{r} \quad (2.1)$$

où $\tilde{\Phi}$ est la distribution d'étoiles de magnitude absolue M à la position \vec{r} . On peut réécrire l'équation 2.1 autrement en supposant que la proportion d'étoiles de différentes luminosités est la même quelle que soit l'endroit où l'on se trouve dans la galaxie³ :

$$dN = \Phi(M) dM \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (2.2)$$

3. Ceci est faux en général mais constitue une bonne approximation si l'on considère des population d'étoiles précises, d'où l'idée de traceurs...

où $\Phi(M)$ est la **fonction de luminosité**, i.e. le nombre d'étoiles ayant une magnitude absolue M , et $\rho(\vec{r})$ est la densité d'étoiles. Von Seelinger déduisit donc que, lors d'un comptage d'étoiles, le nombre d'étoiles $A(m)$ de magnitude m observé est donc :

$$A(m) = \int_0^\infty \Phi(M)\rho(r)r^2\omega dr \quad (2.3)$$

où ω est l'angle solide par lequel on observe. Cette équation constitue ce que l'on appelle **l'équation fondamentale de la statistique stellaire**. Elle sert de base dans de nombreux modèles galactiques, notamment celui de Besançon que nous détaillerons plus tard. Notons que $M = m + 5 - 5 \log r - a(r)$. m est la magnitude apparente et $a(r)$ est l'absorption interstellaire.

Ce fût Kapteyn qui, entre 1900 et 1930, appliqua de manière la plus impres-

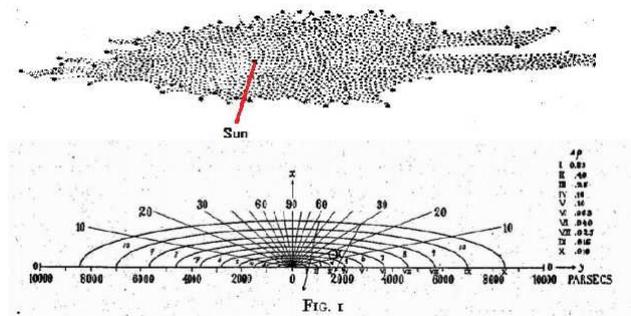


FIGURE 2.5 – En haut : la Voie Lactée selon Herschel. En bas : la Voie Lactée selon Kapteyn (Kapteyn 1922). Les lignes représentent les iso-densité.

sionnante cette équation en menant un vaste programme d'observations et de collectes de données à travers le monde (directeur d'un institut sans télescope, il mis à contribution plusieurs télescopes autour du monde). Le modèle de galaxie qu'il en déduisit est encore un modèle oblat mais encore avec le soleil proche du centre. Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, Shapley et Trumpler mirent en évidence que le soleil était vraisemblablement loin du centre galactique et que la lumière qui nous parvenait des étoiles lointaines était sujette à l'absorption et au rougissement dus à la matière interstellaire. Ainsi les modèles galactiques devinrent de plus en plus réalistes.

Un des points cruciaux de l'équation de von Seeliger (2.3) est que l'intégrale dans le second terme peut-être vue comme une convolution : plus $\Phi(M)$ est générale, étendue, plus on perd de l'information sur la densité $\rho(r)$. Il est alors pertinent de chercher à subdiviser en populations stellaires les étoiles de la galaxie afin de pouvoir travailler avec des fonctions de luminosité les plus

précises possibles. On obtient alors le nombre d'étoiles en sommant toutes ces sous-populations :

$$A(m) = \sum_S A(m, S) \quad (2.4)$$

où S désigne une sous-population.

Modéliser la Voie Lactée par le comptage d'étoiles et l'équation de von Seeliger peut se faire de deux manières principales :

- On commence par mesurer $A(m, couleur)$. Supposant une certaine classe de luminosité pour ces étoiles de cette couleur, on leur attribue une magnitude absolue grâce à une relation couleur-magnitude (pour la classe de luminosité adéquate). Puisque nous connaissons la magnitude apparente, on peut alors remonter à la distance $r(m, M)$ (parallaxe photométrique). On ajuste ensuite les fonctions de densités $\rho(r)$ aux "nouvelles" fonctions de luminosité $A(r)$. Cette approche fût utilisée par [Brooks 1981](#), [Yoshii 1982](#) et [Gilmore and Reid 1983](#).
- On intègre numériquement l'équation de von Seeliger en supposant une forme pour la fonction de luminosité $\Phi(M)$, la densité $\rho(r)$ et la relation magnitude-couleur $M(couleur)$. On obtient ainsi un modèle pour $A(m, S)$ que l'on compare avec les $A(m, S)$ issus des observations. On réitère ensuite le procédé jusqu'à une bonne concordance entre modèle et observations. Utilisé par [Bahcall and Soneira 1980](#), [Reid and Majewski 1993](#), c'est aussi cette approche qui est la base du modèle de Besançon ([Robin and Creze 1986](#)), que nous détaillons maintenant.

2.3 Besançon Galaxy Model (BGM)

Le modèle galactique de Besançon est un modèle semi-empirique tentant de modéliser la Voie Lactée en prenant en compte au maximum les dernières avancées dans des domaines aussi divers que l'histoire de formation stellaire, l'évolution de la galaxie, la cinématique galactique etc... Son but, en plus de simuler un comptage d'étoiles dans une direction donnée (avec leur propriétés intrinsèques –âge, température ...– et cinématiques) directement comparable aux observations, sont, à partir d'hypothèses sur l'évolution stellaire, la fonction de masse initiale (IMF) et l'histoire de formation stellaire, de tester les différents scénarios d'évolution de la Galaxie.

Commencé en 1979-1981 ([Robin and Creze 1986](#)), il n'a cessé depuis d'évoluer avec l'apport de nouvelles données (échantillons plus grands, mesures plus précises ...) et de meilleures compréhensions des phénomènes physiques associés aux galaxies. On peut citer entre autre l'apport de l'auto-cohérence dynamique du modèle ([Bienayme et al. 1987](#)), l'incorporation d'une carte

3D d’extinction (Marshall 2006), l’amélioration des modélisation des disques épais (Robin et al. 2014)... Le passage paramètres stellaires (température effective, gravité, métallicité) à observable (couleur et magnitude) se fait grâce aux grilles du modèle semi-empirique d’atmosphère de la librairie BaSel (Lejeune et al. 1997, Westera et al. 2002). Pour les étoiles naines de température inférieure à 4000 K, le BGM utilise la grille de modèles NextGen (Allard et al. 1997, Baraffe et al. 1998). Cette mise à niveau constante au fil du temps fait du BGM encore aujourd’hui un des modèles les plus réalistes (Reylé et al. 2009, Robin et al. 2012, 2014, Amores et al. 2017, Lagarde et al. 2017, 2018).

Comme abordé précédemment, le modèle de Besançon se base sur l’équation fondamentale de la statistique stellaire en l’intégrant numériquement. Or, plutôt que d’utiliser une relation $M(\text{couleur})$, qui est dégénérée selon la classe de luminosité, le BGM utilise les diagrammes de Hess afin de déduire la fonction de luminosité. Cela permet d’inclure des hypothèses sur l’évolution galactique puisque les diagrammes de Hess dépendent de l’âge et de la métallicité des populations concernées. Ainsi, si l’on suppose que les étoiles nées à la même époque ont la même composition chimique (au départ et au même endroit), que leur IMF décrit leur répartition sur le diagramme HR et que leur distribution spatiale et cinétique reflète une histoire dynamique commune, le nombre d’étoiles dans la direction (l,b)⁴, dans une tranche dr et possédant ces même caractéristiques peut s’écrire sous la forme :

$$N = \phi \psi \rho r^2 \cos b dl db dr \quad (2.5)$$

où $\phi = \phi(M_{bol}, T_{eff}, Age)$ est le nombre d’étoiles par pc^3 dans une cellule donnée du diagramme HR (via M_{bol} , la magnitude absolue bolométrique, et T_{eff} , la température effective) et d’un âge donné. $\psi = \psi(Z, Age)$ est la proportion d’étoiles ayant une métallicité Z pour un âge donné. Notons qu’ici $\rho = \rho(r, l, b, Age)$.

La partie stellaire axisymétrique est modélisée par quatre composantes principales :

- le disque fin : lui-même subdivisé en 7 composantes d’âges différents (de 0 à 10 milliards d’années)
- le disque épais : subdivisé en 2 composantes jeune et vieille
- le halo stellaire
- le bulbe centrale

A cela s’ajoute les composantes non-stellaires :

4. On se place ici en coordonnées galactiques : l , la longitude, est l’angle entre l’axe Soleil-centre galactique et l’axe Soleil-étoile dans le plan galactique et b , la latitude, est l’angle entre l’axe Soleil-centre galactique et l’axe Soleil-étoile hors au plan galactique.

- l'ISM
- le halo de matière noire

Récemment des implémentations ont été effectuées afin d'inclure une barre, mais nous n'utiliserons pas cet ajout dans notre thèse, conséquence de l'hypothèse forte d'axisymétrie que nous suivrons par la suite.

2.4 Profils de densité

Nous décrivons dans cette section l'ensemble des profils de densité du BGM qui seront utilisés par la suite. Les formules pour les disques stellaire serviront seulement de base, un des buts étant de les redéterminer via les fonctions de distribution.

2.4.1 Disque stellaire

Le disque stellaire est modélisé par 2 grandes composantes : le disque mince, lui-même subdivisé en 7 composantes selon leur âge, et le disque épais, subdivisé en 2 composantes selon leur âge également. Pour chaque composante, selon le procédé utilisé par [Robin and Creze 1986,?](#) et [Czekaj et al. 2014](#), la modélisation nécessite trois ingrédients de base, à savoir :

- une estimation de la densité au voisinage solaire pour toutes les composantes
- une expression mathématique permettant de reproduire les densités aussi bien au voisinage solaire qu'aux grandes distances
- enfin l'évaluation des échelles de longueur/hauteur pour chaque composante afin de contraindre les éventuels paramètres libres des expressions analytiques des lois de densité

Disque mince jeune

Le disque mince jeune (composante 1) ($\leq 0.15Gyr$) est représenté par un profil de densité à double exponentielle :

$$\rho(R, z) = \rho_0 [e^{-a^2/h_{R+}^2} - e^{-a^2/h_{R-}^2}] \quad (2.6)$$

où $a^2 = R^2 + \frac{z^2}{\epsilon^2}$ et ϵ le rapport des axes, $h_{R+} = 5 \text{ kpc}$, $h_{R-} = 3 \text{ kpc}$ et ρ_0 une constante de normalisation.

Disque mince vieux

Contrairement à plusieurs modèles en vigueur, les composantes du disque mince pour des âges $\geq 0.15Gyr$ (numérotées de 2 à 7) sont modélisées par un profil de Einasto (Einasto 1979), notamment pour assurer la continuité et la dérivabilité dans le plan et possédant un trou central :

$$\rho(R, z) = \rho_{0,j} \left[\exp \left(\chi - \sqrt{\chi^2 + (a/h_{R+})^2} \right) - \exp \left(\chi - \sqrt{\chi^2 + (a/h_{R-})^2} \right) \right] \quad (2.7)$$

où $\chi = 0.5$ et $j = 2, \dots, 7$.

Les paramètres d'une telle loi, échelle de longueur et excentricité, sont déduites de la manière suivante :

une première estimation de la densité totale⁵ au voisinage solaire ρ_{\odot} ainsi que l'excentricité $\epsilon(i)$. En considérant un taux de formation d'étoile $SFR(i)$ ⁶ pour chaque composante, on sépare la densité en 7 composantes. Grâce à des modèles d'IMF, d'évolution stellaire, relations âge-métallicité etc... on simule la densité réelle observée au voisinage solaire. La densité ainsi obtenue est injectée dans l'équation de Poisson qui donne un potentiel. Sommé aux autres potentiels (ISM, halo...), on ajuste les paramètres du halo de matière noire et du bulbe pour obtenir une courbe de rotation conforme aux observations. Enfin, partant de la relation âge-dispersion de vitesse (ici, ϕ désigne le potentiel et non plus la fonction de luminosité)

$$\sigma_w^2 \ln \left(\frac{\rho(R, z)}{\rho(R, 0)} \right) = -\Phi(R, z) + \Phi(R, 0)$$

on ajuste l'excentricité ϵ si l'on tire σ_w des observations (Gomez et al. 1997). On réitère l'opération jusqu'à convergence. Les paramètres obtenus sont résumés dans le tableau 2.1. La formule ci-dessus, tirée des équations de Jeans, suppose que les mouvements radiaux et verticaux sont découplés : la validité d'une telle hypothèse est acceptable jusqu'à des $z = \pm 1kpc$.

Les lois de densité présentées ci-dessus serviront de base pour ajuster notre modèle. On peut noter directement ici que le processus d'auto-cohérence utilisé pour déduire les paramètres du profil d'Einasto changera profondément puisque nous utiliserons par la suite non-plus un profil analytique exact pour la densité mais l'intégration d'une fonction de densité (voir chapitre 2).

5. Totale dans le sens où l'on ne considère que le disque fin, c'est-à-dire sans séparer les composantes

6. *SFR* pour Star Formation Rate

TABLE 2.1 – Points sur lesquels la DF est ajustée

Composante	Age	ρ_0	σ_w	ϵ
2	0.15-1	$7.9.10^{-3}$	8	0.0268
3	1-2	$6.2.10^{-3}$	10	0.0375
4	2-3	$4.0.10^{-3}$	13.2	0.0551
5	3-5	$5.8.10^{-3}$	15.8	0.0696
6	5-7	$6.6.10^{-3}$	17.4	0.0785
7	7-10	$3.96.10^{-3}$	17.5	0.0791

Disque épais jeune et vieux

Les disques épais jeune et vieux (composante 8 et 9) sont modélisés par :

$$\begin{cases} \rho_{0,j} \cdot \exp\left(-\frac{R-R_\odot}{h_R} \times \left(1 - \frac{1/h_z}{x_l(2+x_l/h_z)} z^2\right)\right) & \text{for } |z| \leq x_l \\ \rho_{0,j} \cdot \exp\left(-\frac{R-R_\odot}{h_R}\right) \times \frac{\exp(x_l/h_z)}{1+x_l/2h_z} \exp\left(-\frac{|z|}{h_z}\right) & \text{for } |z| > x_l \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $x_l = 400 \text{ pc}$ et $R_\odot = 8 \text{ kpc}$ est la distance radiale admise du Soleil. De même que pour les composantes minces vieilles, nous nous servons de cette expression analytique comme référence pour les ajustements.

2.4.2 Milieu Inter Stellaire (ISM)

Le milieu interstellaire est représenté par un profil exponentiel soit :

$$\rho(R, z) = \rho_0 \times \exp\left(-\frac{R - R_\odot}{h_R}\right) \times \exp\left(-\frac{z}{h_z}\right) \quad (2.9)$$

avec $h_z = 140 \text{ pc}$ et $h_R = 5 \text{ kpc}$.

2.4.3 Halo stellaire

On utilise une profil de Hernquist pour modéliser le halo stellaire soit :

$$\rho_0(R, z) = \rho_0 \times \frac{1}{R_a(R_a + R_{core})^n} \quad (2.10)$$

avec $R_a^{1/2} = R^2 + \left(\frac{z}{q}\right)^2$, $R_{core} = 2.1 \text{ kpc}$, $n = 2.1$ et $q = 0.77$.

2.4.4 Halo de matière noire

La densité du halo de matière noire (et qui produit une courbe de rotation plate aux grandes distances) est :

$$\rho_{DM} = \frac{\rho_c}{1 + (a/R_c)^2} \quad (2.11)$$

Ici, on permet un éventuel aplatissement vertical de la forme du halo grâce au paramètre q tel que $a^2 = R^2 + (z/q)^2$.

2.4.5 Conclusion

En raison de ses nombreuses composantes stellaires, le BGM permet une description détaillée de la Galaxie, description contrainte par les comptages d'étoiles. D'un autre côté, la cinématique stellaire y est représentée par des distributions de Schwarzschild avec un ellipsoïde de vitesse triaxiale et un courant asymétrique. Cette modélisation de la cinématique est en fait insuffisante bien qu'elle ait permis de rendre compte de façon approchée de la cinématique galactique.

Une modélisation cohérente de la cinématique est rendue nécessaire avec l'arrivée de nouvelles observations cinématiques bien plus précises. La cohérence dynamique globale doit permettre de construire un modèle 'idéal' stationnaire et réaliste de notre Galaxie.

On remarquera que cela servira aussi à produire un modèle stationnaire de référence pour construire d'autres modèles présentant des écarts à l'équilibre et des non-stationarités.

Cette cohérence cinématique s'appuie ici sur les fonctions de distribution décrites dans le chapitre suivant et qui s'exprime explicitement en fonction de trois intégrales du mouvement.

Nous l'avons vu, le BGM grâce à ses nombreuses composantes permet une description raffinée pour le comptage d'étoiles. Or, même si l'auto-cohérence est établie depuis [Bienayme et al. 1987](#), la modélisation cinématique reste incorrecte : les distributions en vitesses sont considérées gaussiennes, or on sait que ce n'est pas le cas pour la composante v (dans le sens de la rotation de la galaxie, voir chapitre suivant) qui peut être fortement asymétrique. C'est néanmoins cette version présentée que nous prendrons comme base, comme pseudo-observations. Notre méthode quant à son amélioration consiste à construire des fonctions de distribution 6D (positions et vitesses) pour les densités des composantes des disques stellaires (et donc en supposant les distributions de l'ISM et du halo stellaire connues) et d'ajuster les paramètres de ces fonctions pour qu'elles s'ajustent au mieux à ces pseudo-observations. Ces fonctions de distributions doivent également prédire de

façon la plus réaliste possible les distributions de vitesses, et c'est pour cela qu'un paramètre, la troisième intégrale, s'avérera cruciale. Nous décrivons maintenant la construction de la fonction de distribution.

Chapitre 3

Fonction de distribution

Le chapitre précédent donne les éléments pour le calcul du potentiel gravitationnel de la version 2014 (légèrement modifiée) du modèle de Besançon.

L'étape suivante est le développement du calcul des fonctions de distribution des étoiles des disques. Elle consiste en premier à effectuer le calcul d'un ensemble représentatif de toutes les orbites couvrant toutes les énergies et moments cinétiques ainsi que les vitesses verticales au plan du disque afin de recouvrir l'ensemble des valeurs possibles de la troisième intégrale.

L'étape d'après est le calcul pour chacune de ces orbites d'une troisième intégrale approchée. Pour cela on détermine pour chacune des orbites un paramètre nommé z_0 qui permettra de définir la troisième intégrale approchée, les deux autres intégrales E et L_z étant connues par ailleurs. Enfin pour chaque ensemble d'orbites de même énergie et même moment cinétique, on détermine la valeur optimale de z_0 qui donne les meilleures troisièmes intégrales approchées pour ce sous-ensemble d'orbites. Cela nous a permis de construire une table $z_0(E, L_z)$. On notera que la troisième intégrale est conservée le long de chaque orbite à quelques pour mille à l'exception de certaines orbites résonnantes et surtout des orbites qui s'approchent du centre galactique. Cependant nous ne sommes pas concernés ici par ces orbites, car nous ne cherchons à modéliser que les étoiles des disques stellaires qui ont de grands moments cinétiques et restent donc éloignées du centre galactique.

Le choix des fonctions de distribution est décrit ci-dessous. Des calculs exploratoires et détaillés nous ont permis de montrer que ces fonctions de distribution génèrent des lois de densité exponentielles radialement. On a réussi également à modéliser les lois cinématiques qui, radialement, varient de façon exponentielle, à la fois pour les dispersions de vitesses radiales et les dispersions de vitesses verticales. Les paramètres de ces fonctions de distribution sont les 3 échelles de longueurs de la densité, de la cinématique radiale, de la cinématique verticale $R_\rho, R_{\sigma_U}, R_{\sigma_W}$. Les trois autres paramètres sont la

densité, la dispersion de vitesse radiale et celle verticale à la position du soleil.

3.1 Généralités

Lorsqu'un système physique est composé d'un grand nombre de particules¹, la résolution des équations de mouvement attachées à chacune des particules permettrait, en théorie, de décrire complètement le système : on saurait à chaque instant t , la position $\vec{r}(t)$ et la vitesse $\vec{v}(t)$ de chaque particule. Pour cela, ils faudrait résoudre un système de $6N$ équations (où N est le nombre de particule du système)...Cependant, la résolution analytique peut s'avérer très vite impossible (cf. problèmes à 3 corps...) et la résolution numérique devient inenvisageable si l'on considère des ordres de grandeurs typiques trouvés dans la nature (un gaz contenu dans un volume macroscopique contient plusieurs moles, chacune d'elle contenant $6,02 \cdot 10^{23}$ particules...). En ce qui concerne les galaxies, composées de plusieurs milliards d'étoiles, il est évident que nous sommes face à ces problématiques.

Il faut alors se tourner vers une méthode qui permet de traiter le système dans son ensemble afin de retrouver et prévoir ses propriétés globales sans pour autant occulter complètement ses constituants : c'est exactement en quoi consiste la physique statistique notamment à travers le concept de fonctions de distribution. Le principe est grossièrement de renoncer à la connaissance exacte du comportement individuel de chaque particule...

Nous introduisons dans cette première partie, les bases théoriques les plus importantes de la définition de fonction de distribution ainsi que les notions qui s'y rattachent jugées utiles pour la suite. Il est évident que cette présentation est loin d'être exhaustive mais elle suffira lorsque nous devrons appliquer ces outils aux cas concrets des galaxies.

3.1.1 Définition

Soit un système de N étoiles, chacune étant pour l'instant étiquetée par leur position $\vec{r}_i(t)$ et leur vitesse $\vec{v}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Chaque étoile est alors représentée par un point $\vec{\eta}_i = (\vec{r}_i, \vec{v}_i) = (x_i, y_i, z_i, v_{x,i}, v_{y,i}, v_{z,i})$ dans un espace 6D, **l'espace des phases**. Au fur et à mesure du mouvement de l'étoile dans le système réel, son point représentatif dans l'espace des phases va décrire une

1. Ici, le mot particule est à prendre au sens large du terme c'est-à-dire qu'il peut représenter une particule tel un proton ou électron mais aussi bien une molécule ou une étoile...

trajectoire dans l'espace des phases selon les equations de mouvement² :

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\nabla\Phi(\vec{r}) \quad (3.1)$$

où $\Phi(\vec{r})$ est le potentiel de la galaxie.

Nous partons du principe qu'il existe une fonction, dite **fonction de distribution** $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ telle que le nombre d'étoiles dN se trouvant dans le voisinage³ $d\vec{r}$ de \vec{r} et possédant une vitesse dans le voisinage $d\vec{v}$ de \vec{v} est :

$$dN = f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3\vec{r}d^3\vec{v} \quad (3.2)$$

f représente alors la densité de points dans l'espace des phases.

Un système stellaire tel qu'une galaxie possède une extension finie et même si cette limite peut être mal définie, il est raisonnable de supposer qu'il n'existe pas d'étoiles à l'infini. Il est aussi évident que les étoiles possèdent une vitesse finie et les observations montrent qu'elles s'étendent jusqu'à des valeurs de quelques centaines de $km.s^{-1}$. Cela veut dire qu'implicitement les N points représentant une galaxie occupent un volume fini dans l'espace des phases et donc que la fonction f est finie sur tout l'intervalle des positions et des vitesses et même qu'elle y est nulle pour un rayon tendant vers l'infini.⁴ . Nous pouvons donc intégrer sur tout l'intervalle pour déduire le nombre total d'étoiles $N(t)$ du système :

$$N(t) = \int_{\vec{r}} \int_{\vec{v}} f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3\vec{r}d^3\vec{v} \quad (3.3)$$

Cette dernière relation constitue une normalisation de la fonctions de distribution.

Cependant, nous sommes souvent amenés, en astrophysique, à manier des quantités telles que la densité, la masse etc... il est alors commode de travailler avec une fonction de distribution qui représentera non plus le nombre d'étoiles mais la masse stellaire présente en chaque point, soit une normalisation⁵ :

$$M(t) = \int_{\vec{r}} \int_{\vec{v}} f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3\vec{r}d^3\vec{v} \quad (3.4)$$

2. Puisqu'un système d'équation possède une unique solution pour des conditions initiales données, deux trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent s'entrecouper

3. Voisinage infinitésimal dans l'espace des phases, ce qui nous permet de faire l'hypothèse de linéarité et de supposer f constante dans ce voisinage...

4. Ce critère purement physique constitue déjà une première restriction sur la forme de la fonction f

5. Les deux normalisations sont équivalentes si on suppose que toutes les étoiles sont de masses identiques

avec M la masse totale du système exprimée par la suite en masse solaire M_{\odot} .

Avec cette définition, on peut alors accéder à la densité en intégrant sur toutes les vitesses (obtenant ainsi en chaque points la masse stellaire présente , peut importe la vitesse de l'étoile qui y contribue) :

$$\rho(\vec{r}, t) = \int_{\vec{v}} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v} \quad (3.5)$$

où ρ qui sera exprimé par la suite en M_{\odot}/pc^{-3} .

3.1.2 Théorème de Liouville - Equation de Boltzmann

Dans la réalité, chacun des points constituant un système physique est régi par les équations du mouvement : celles-ci permettent de prédire les positions et les vitesses des points étant données certaines conditions initiales. Au fil de l'évolution, les points représentatifs dans l'espace des phases vont eux aussi décrire des trajectoires à mesure que les positions et les vitesses évoluent dans la réalité. f représentant la densité de ces points, on peut légitimement se demander comment évolue f lors de l'évolution du système. Pour cela, et si le système possède un nombre de points $N_{tot} \gg 1$, la correspondance avec la mécanique des fluides est utile : on représente alors chaque points de l'espace des phases par un vecteur 6D $\vec{\eta} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ et l'on définit l'opérateur gradient tel que $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z})$. On considère de plus un volume 6D \mathcal{V} contenu dans une surface fermée \mathcal{S} contenant N particules. On supposera aussi que N_{tot} est constant (hypothèse qui est valide dans le cas qui nous intéresse, voire ce qui suit). Le nombre de particules N dépend alors seulement des flux entrant et sortant sur la surface \mathcal{S} , soit :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \oint f \dot{\vec{\eta}} d^5\vec{S} = \int \vec{\nabla} (f \dot{\vec{\eta}}) d^6\vec{V}$$

où $d^5\vec{S}$ est l'hypersurface infinitésimale et $d^6\vec{V}$ l'hypervolume infinitésimal dans l'espace des phases. La seconde égalité est obtenue en vertu du théorème de Stokes, et puisque $N = \int f d^6\vec{V}$, on a alors, en égalisant les termes dans les intégrales :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} (f \dot{\vec{\eta}}) = \frac{df}{dt} = 0$$

soit donc une équation de continuité ! Lors de l'évolution du système, les volumes infinitésimaux entourant un nombre de points constant n_1 se déforment mais restent constant durant l'évolution du système , ou, formulé autrement, la densité locale autour d'un point reste constante le long de la trajectoire

dans l'espace des phases. Or la densité locale dans l'espace des phases étant justement la valeur de la fonction de distribution en ce point, on aboutit à une des formulations du théorème de Liouville :

La fonction de distribution est constante le long d'une trajectoire dans l'espace des phases.

Développons encore :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{\eta}} \vec{\nabla}(f) + f \vec{\nabla}(\dot{\vec{\eta}}) = 0$$

or

$$\vec{\nabla} \dot{\vec{\eta}} = \partial_x \dot{x} + \partial_y \dot{y} + \partial_z \dot{z} + \partial_{v_x} \dot{v}_x + \partial_{v_y} \dot{v}_y + \partial_{v_z} \dot{v}_z$$

Les trois premiers termes de droite sont évidemment nuls. De plus, si les seules forces en présence dérivent d'un potentiel, les équations du mouvement étant $\dot{v}_x = \partial_x \Phi$ etc... Et le potentiel ne dépendant que de la position, les dérivées partielles selon la vitesse s'annulent également, d'où le résultat :

$$\vec{\nabla} \dot{\vec{\eta}} = 0$$

De plus, en développant le 2ème terme et avec $\dot{\vec{\eta}} = (\vec{v}, -\nabla_{\vec{r}} \Phi)$ ⁶, on obtient finalement l'équation de Boltzmann sans collision⁷ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \nabla_{\vec{x}} f - \nabla_x(\Phi) \nabla_{\vec{v}} f = 0 \quad (3.6)$$

Précisons le terme "sans collision" ; en effet, en toute généralité, il aurait fallu tenir compte des créations, destructions et collisions entre particules composant le système. Si cela avait été le cas, des termes additionnels seraient apparus dans le membre de droite et le théorème de Liouville ne serait plus valable. Plutôt que de décrire ici la forme générale de cette équation qui nous aurait amené trop loin du sujet, nous avons anticipé son application aux systèmes qui nous intéressent, à savoir les galaxies :

1. Les étoiles ayant une vie limitée, il serait de prime abord nécessaire de tenir compte du taux par unités d'espace des phases de naissance B et de mort D d'étoiles, soit l'ajout au second membre de l'équation de Boltzmann d'un terme $B - D$. Or, on peut montrer que ce terme est soit négligeable (cas par exemple des étoiles de faibles masses $< 0.5M_{\odot}$

6. d'après les équations du mouvement

7. Théorème de Liouville, équation de Boltzmann, équation de Vlassov... beaucoup de noms pour ce qui est au fond la même chose... Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'article de Hénon 1982 sur ce sujet ([Hénon 1982](#)).

ayant une vie plus longue que l'âge de l'univers mais un taux de créations négligeable, et donc $B - D \sim 0$) ou, pour les étoiles massives ($> 20M_{\odot}$) et donc ayant une vie très courte, les processus de formations stellaires sont plus pertinents que l'équation de Boltzmann pour décrire leur distribution dans l'espace des phases (Le temps de révolution autour de la galaxie est d'environ 250 millions d'années alors que certaines étoiles ne vivent que 10 millions d'années)

2. En ce qui concerne les collisions⁸ à proprement dit, un célèbre résultat dû à Chandrasekhar montre que l'on peut aisément négliger ces phénomènes dans une galaxie. Il montra que le temps nécessaire à une étoile pour dévier significativement de sa trajectoire initiale est $t_{relax} \sim \frac{0.1N}{\ln(N)} t_{cross}$ où N est le nombre d'étoiles dans la galaxie et $t_{cross} \sim R/v$ est le temps mis typiquement par une étoile pour traverser la galaxie. Pour une galaxie telle la Voie Lactée, ce temps est plus long que l'âge de la galaxie et l'on peut raisonnablement négliger les collisions

Enfin, nous considérerons par la suite la galaxie dans un état stationnaire et donc, nous nous référerons dorénavant à l'équation de Boltzmann sans collision sous la forme stationnaire (CBE pour Collisionless Boltzmann Equation), soit :

$$\boxed{\vec{v}\nabla_{\vec{x}}f - \nabla_{\vec{x}}(\Phi)\nabla_{\vec{v}}f = 0} \quad (3.7)$$

Cette équation est l'une des pierres angulaires de la dynamique stellaire moderne. Toute fonction de distribution voulant modéliser la distribution d'étoiles dans une galaxie (et dans les conditions décrites plus haut) se doit de vérifier cette équation. Un moyen pour satisfaire automatiquement cette équation est d'exprimer la fonction de distribution selon les intégrales du mouvement, que nous présentons maintenant.

3.1.3 Intégrales du mouvement

En mécanique, l'évolution d'un système est décrite par ses équations de mouvement. De manière générale, on a :

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \dots, \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

8. Le terme collision est à prendre au sens d'une déviation significative de la vitesse et trajectoire de l'étoile due à l'influence d'une étoile proche ou cumulée des autres étoiles de champs

avec $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$. Ce système de 6 équations différentielles, étant données certaines conditions initiales, possèdent 6 constantes d'intégrations $C_i = C_i(\vec{r}, \vec{v}, t)$ où la dépendance explicite au temps est possible. On les appelle les **constantes du mouvement**. Or si l'on est en présence d'un système stationnaire (et donc ne dépendant pas explicitement du temps), alors, en éliminant le temps, les équations du mouvement peuvent se réécrire sous la forme :

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{-\frac{\partial\Phi}{\partial x}} = \frac{dv_y}{-\frac{\partial\Phi}{\partial y}} = \frac{dv_z}{-\frac{\partial\Phi}{\partial z}}$$

On peut alors prendre n'importe quelle variable, par exemple x , comme variable indépendante et ainsi reformuler l'équation précédente ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \text{ etc...}$$

soit un système de 5 équations indépendantes du temps et dont les constantes d'intégration, au nombre de 5, seront elles-aussi indépendante du temps. On les nomme les **intégrales du mouvement** et elles restent constante le long de l'orbite de la particule concernée. Ces dernières sont d'une importance majeure dans la dynamique et cinématique galactique : le lien fort entre l'équation de Boltzmann et les équations du mouvement est mis en valeur grâce au théorème de Jeans que nous explicitons maintenant.

Si on exprime alors, pour un système stationnaire, la fonction de distribution en fonction des intégrales du mouvement, $f = F(I_i)$, on vérifie que F est automatiquement solution de CBE :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial I_j} \frac{\partial I_j}{\partial t} = 0 \quad (3.8)$$

Ce résultat est connu en astrophysique sous le nom de **théorème de Jeans**. Le fait d'exprimer la fonction de distribution seulement selon les intégrales de mouvements permet de s'affranchir d'une contrainte assez lourde quant à la forme de la fonction de distribution (à condition bien-sûr de rester réaliste physiquement...). L'exemple le plus simple d'intégrale du mouvement est l'énergie E pour un système stationnaire isolé : elle reste bien constante puisque le système est isolé et est indépendante du temps puisque le système est stationnaire.

Il existe néanmoins 2 grandes familles d'intégrales du mouvement : intégrale dite **isolante** ou dite **non-isolante**. Une intégrale isolante permet de réduire de 1 la dimension de l'espace des phases et Lynden-Bell ([Lynden-Bell 1962](#)) montra que seules ces dernières étaient utiles dans la constitution des

fonctions de distribution.

Intégrale isolante/non-isolante

Pour mieux appréhender cette notion, considérons un système fictif où seule l'énergie serait une intégrale du mouvement, i.e. $E = cste$, ce qui réduit l'espace des phases d'une dimension. L'étoile, via son point représentatif, est confinée à se mouvoir sur une hypersurface de dimension 5. L'espace des phases est alors "divisé" en autant d'hyperplan 5D qu'il existe de valeur de E différentes.

De plus, si le mouvement n'est pas contraint autrement, il peut en théorie explorer tous les points de cette hypersurface (hypothèse ergodique). Si un point parcourt effectivement toute la surface $E = cste$, et d'après le fait que f est constante le long de sa trajectoire (théorème de Liouville), f serait alors constante sur toute la surface et l'on aurait finalement :

$$f = f(E)$$

Cette propriété de l'intégrale E faisant passer la dépendance de f de 6 (dans le cas général) à 1 paramètre est due au fait que E est un intégrale isolante. On peut alors, même sur cet exemple simple, s'imaginer qu'il est primordial de chercher à travailler avec ce type d'intégrale...

3.2 Applications aux modèles galactiques

Puisque nous voulons ici modéliser une galaxie dans un état stationnaire et axisymétrique, nous allons encore développer quelques résultats inhérents à l'étude de tels systèmes. Outre un premier changement de coordonnées cartésiennes-cylindriques, il nous faudra présenter les équations de Jeans qui sont en quelques sortes l'application de la CBE à l'astrophysique. Après quoi nous rentrerons dans le vif du sujet en présentant les intégrales de mouvement spécifiques aux modèles axisymétrique ainsi que la genèse de la fonction de distribution que nous utiliserons.

3.2.1 Symétries

Etant en présence d'un système axisymétrique, il est naturel dans un premier temps d'utiliser les coordonnées cylindriques telles que⁹ (R, θ, z) :

- le centre de la galaxie coïncide avec l'origine du repère $(R, \theta, z) = (0, 0, 0)$
- le plan galactique $z = 0$ définit un plan de symétrie tel que $\rho(R, \theta, -z) = \rho(R, \theta, z)$
- l'axe z est orienté perpendiculairement au plan galactique
- notre modèle étant axisymétrique il est invariant par rotation autour de l'axe z , donc toutes les quantités seront indépendantes de θ
- nous noterons par la suite u, v, w les composantes des vitesses telles que

$$(u, v, w) = (v_R, v_\theta, v_z)$$

Nous passerons parfois d'une notation à l'autre selon les conventions.

Notre fonction de distribution prendra alors la forme (dans un premier temps) :

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = f(R, z, u, v, w) \quad (3.9)$$

les considérations précédentes étant toujours valables à condition d'inclure les jacobiens dans les intégrations correspondant aux changements de coordonnées cartésiennes-cylindriques.

3.2.2 Moments de la DF et équations de Jeans

Bien que la fonction de distribution soit un outil puissant, il est tout de même nécessaire d'avoir accès aux observables pour contraindre et/ou valider un modèle. C'est justement l'utilité des moments des fonctions de distribution. Nous avons déjà défini le moment d'ordre 0 qui est simplement la densité et que nous réexprimons ici avec les nouvelles coordonnées :

$$\rho(R, z) = \int f(R, z, u, v, w) du dv dw \quad (3.10)$$

9. D'autres systèmes de coordonnées sont aussi adaptés à cette symétrie, par exemple les coordonnées ellipsoïdales prolates...mais les quantités (notamment vitesses) sont plus faciles à se représenter et mesurer selon les coordonnées présentées)

Les moments d'ordre 1 sont les vitesses moyennes selon les trois directions¹⁰ :

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\rho} \int v_i f(R, z, u, v, w) dudvdw \quad (3.11)$$

où v_i peut être remplacé par u,v ou w.

Enfin, les moments d'ordre 2 seront de la forme :

$$\overline{v_i v_j} = \frac{1}{\rho} \int v_i v_j f(R, z, u, v, w) dudvdw \quad (3.12)$$

On aura alors, grâce aux moments d'ordre 1 et 2 accès aux dispersions de vitesse via l'équation :

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (3.13)$$

Equations de Jeans

Les relations entre ces moments peuvent se déduire de la CBE en multipliant ses membres un par un par la vitesse puis en intégrant. Sans entrer dans les détails du calcul nous obtenons alors les fameuses équations de Jeans (1915) (ici dans le cas cylindrique) :

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}^2}{\partial R} + \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{w}}{\partial z} + \rho \left(\frac{\bar{u}^2 - \bar{v}^2}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{w}}{\partial R} + \frac{\partial \rho \bar{w}^2}{\partial z} + \rho \left(\frac{\bar{u} \bar{w}}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.15)$$

3.3 Intégrales du mouvement

Le théorème de Jeans nous permet de focaliser la recherche de fonctions de distribution vérifiant automatiquement la CBE à condition que celles-ci soient exprimées selon les intégrales de mouvement... or quelles sont-elles dans le cas des galaxies axisymétriques et stationnaires ? Nous verrons qu'il existe deux intégrales du mouvement évidentes mais qui ne suffisent pas à elles seules à correctement décrire les phénomènes observés. Plusieurs arguments indiquent qu'il existe nécessairement une troisième intégrale mais dont l'expression analytique est beaucoup moins évidente que les deux premières.

¹⁰. Nous supposons par la suite implicitement que les moments dépendent de R et de z

Nous devons alors introduire la notion de potentiels de Stäckel dans lesquels cette troisième intégrale est exacte. Enfin nous expliciterons la notion de quasi-intégrale du mouvement.

3.3.1 Deux premières intégrales du mouvement

Si nous admettons les hypothèses de symétrie et stationnarité définies plus haut, il est facile de trouver deux intégrales du mouvement qui sont :

— l'énergie :

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \Phi(R, z)$$

— et le moment cinétique selon l'axe z :

$$L_z = Rv$$

Regardons les conséquences s'il ne doit exister, dans le cas de notre Galaxie, seulement que deux intégrales du mouvement :

nous aurons une fonction de distribution $f = f(E, L_z)$ où la forme de f est pour l'instant sans importance ; en effet, nous pouvons remarquer que les vitesses u et w , qui n'apparaissent que dans l'expression de l'énergie sous la forme $u^2 + w^2$, jouent un rôle symétrique. Sans même de calculs explicites, on peut se convaincre que dans ce cas nous avons $\sigma_u = \sigma_w$, ce que les observations démentent (Dehnen and Binney 1998).

De plus, lorsque l'on simule les orbites des étoiles avec des potentiels censés représenter au mieux le potentiel galactique, les orbites ne semblent pas remplir tout le volume possible dans l'espace des phases mais sont comme restreintes dans une zone plus petite (Ollongren 1962, figure 3.1) : c'est justement l'indice qu'il existe une autre intégrale du mouvement isolante, qui dans la littérature est connue comme étant la célèbre **troisième intégrale** (à ce sujet on pourra aussi consulter le classique Henon and Heiles 1964).

Nous ne détaillerons ici que le cas de la recherche de I_3 dans le cadre des potentiels de Stäckel.

3.4 Potentiel de Stäckel et I_3

Dans le cadre de la théorie d'Hamilton-Jacobi, la recherche des intégrales de mouvement est grandement facilitée lorsque les équations d'Hamilton-Jacobi sont séparables. Une façon de procéder, étant supposé Φ connu, est de déterminer un système de coordonnées dans lequel les équations seront séparables. Dû à Stäckel, cette idée fut appliquée à la dynamique galactique par

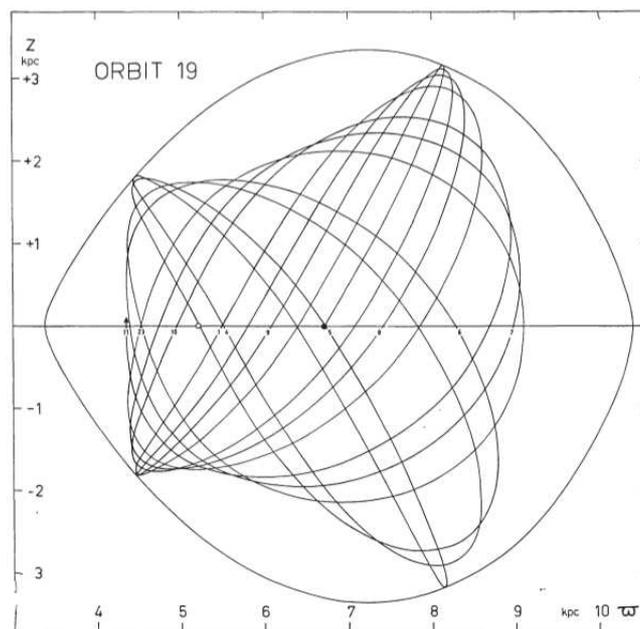


FIGURE 3.1 – Tirée de [Ollongren 1962](#), cette figure montre l’orbite d’une étoile dans un potentiel axisymétrique. La courbe extérieure délimite le domaine théoriquement explorable de l’étoile dans ce plan, or on remarque que l’orbite est confinée dans un espace plus petit.

Eddington en 1915 (Eddington 1915) et remise au goût du jour par Lynden-Bell 1962 (Lynden-Bell 1962) (pour une description complète du potentiel de Stäckel et des intégrales de mouvement, voir de Zeeuw and Lynden-Bell 1985, on pourra aussi consulter Contopoulos 1963c,a,b, Manabe 1979). Nous décrivons ici les points essentiels dans le cadre d'un système axisymétrique. Dans ce cas (figure 3.2), on introduit les coordonnées sphéroïdales prolates (λ, ν) comme étant les racines τ de :

$$\frac{R^2}{\tau + \alpha} + \frac{z^2}{\tau + \gamma} = 1 \quad (3.16)$$

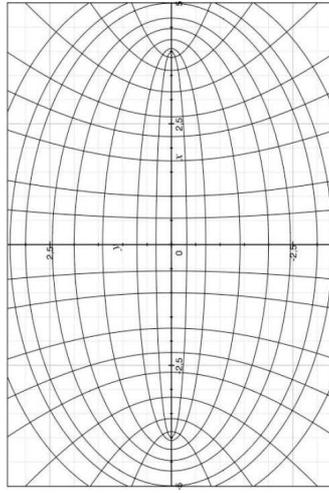


FIGURE 3.2 – Coordonnées sphéroïdales

où $R^2 = x^2 + y^2$ et α et γ sont des paramètres qui déterminent la forme des courbes : en effet, de la même manière qu'un point est repéré, en coordonnées cartésiennes, par l'intersection de deux courbes de degré 1, en coordonnées sphéroïdales un point est repéré par l'intersection de deux courbes de degré 2 qui sont, pour λ constant, des ellipses dont le grand axe est dirigé selon l'axe des z et, pour ν constant, des hyperboles à deux feuillettes coupant l'axe des z . Ceci est vérifié seulement si $-\gamma \leq \nu \leq -\alpha \leq \lambda$. Enfin, les deux courbes partagent les mêmes foyers $\pm z_0 = \pm \sqrt{\gamma - \alpha}$. Lorsque $z_0 \rightarrow \infty$, le système de coordonnées est cylindrique et lorsque $z_0 \rightarrow 0$, le système est sphérique. La correspondance avec les coordonnées cylindriques étant :

$$R^2 = \frac{(\lambda + \alpha)(\nu + \alpha)}{\alpha - \gamma}, z^2 = \frac{(\lambda + \gamma)(\nu + \gamma)}{\gamma - \alpha} \quad (3.17)$$

ou, inversement,

$$\lambda, \nu = \frac{1}{2}(R^2 + z^2 - \gamma - \alpha) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 - z^2 + \gamma - \alpha)^2 + 4R^2 z^2} \quad (3.18)$$

Près de l'origine, en $(\lambda, \nu) = (-\alpha, -\gamma)$, le système de coordonnées est à peu près cylindrique avec $R \sim \sqrt{\lambda + \alpha}$ et $z \sim \sqrt{\nu + \gamma}$. Pour des rayons importants, les coordonnées deviennent à peu près sphériques avec $r \sim \sqrt{\lambda + \alpha}$ et la latitude $\chi \sim \sin^{-1} \sqrt{\frac{\nu + \gamma}{\gamma - \alpha}}$.

Dans ce système de coordonnées, on peut montrer que les équations d'Hamilton-Jacobi sont séparables si le potentiel se met sous la forme (appelé **potentiel de Stäckel**) :

$$\Phi(\lambda, \nu) = -\frac{h(\lambda) - h(\nu)}{\lambda - \nu} \quad (3.19)$$

où $h(\lambda)$ et $h(\nu)$ sont deux fonctions arbitraires¹¹. Dans ce cas, les orbites possèdent trois intégrales de mouvement qui sont l'énergie E , le moment cinétique selon z , L_z , et une troisième intégrale qui peut se mettre sous la forme (Lynden-Bell 1962, de Zeeuw and Lynden-Bell 1985, Statler 1989) :

$$I_3 = \Psi(\lambda, \nu) - \frac{1}{2} \frac{L^2 - L_z^2}{\gamma - \alpha} - \frac{1}{2} v_z^2 \quad (3.20)$$

avec :

$$\Psi(\lambda, \nu) = \frac{(\nu + \gamma)h(\lambda) - (\lambda + \gamma)h(\nu)}{(\gamma - \alpha)(\lambda - \nu)} \quad (3.21)$$

On choisit $h(-\gamma) = 0$ de telle sorte que Ψ est nul dans le plan $z = 0$. Notons que dans la limite $(\gamma - \alpha) \rightarrow \infty$, I_3 devient $-E_z$.

Cependant, ce cas est idéal et le potentiel galactique n'est pas de Stäckel. Pour pouvoir exploiter ces résultats nous pouvons ajuster localement un potentiel de Stäckel au potentiel réel : la troisième intégrale, qui n'est exacte que dans le cas de potentiels de Stäckel, ne pourra plus être garantie constante, on parlera alors de **quasi-intégrale du mouvement**.

3.4.1 Quasi-intégrale

Soit $V(R, z) = \tilde{V}(\lambda, \nu)$ le véritable potentiel avec lequel nous voulons travailler. Si nous supposons z_0 déjà connu, il est toujours possible de trouver localement (par exemple en un point $(R_1, z_1) = (\lambda_1, \nu_1)$) un potentiel de Stäckel qui coïncide avec le potentiel V si l'on prend pour $h(\lambda)$ et $h(\nu)$ les expressions suivantes :

$$h(\lambda) = \tilde{V}(\lambda, \nu_1)(\lambda - \nu_1) - \tilde{V}(\lambda_1, \nu_1)(\lambda_1 - \nu) + C \quad (3.22)$$

$$h(\nu) = -\tilde{V}(\lambda_1, \nu)(\lambda_1 - \nu) + C \quad (3.23)$$

11. On notera que les variables λ et ν couvrent deux intervalles disjoints et que donc $h(\lambda)$ et $h(\nu)$ sont en fait deux fonctions distinctes.

où la constante C est déterminée par la condition $h(-\lambda) = 0$ décrite plus haut. Si de plus on pose $\lambda = z_0^2$ et $\alpha = 0$, alors la fonction (3.21) peut se réexprimer selon (R, z) comme :

$$\Psi(R, z) = -\frac{\lambda + z_0^2}{z_0^2}(V(R, z) - V(\sqrt{\lambda}, 0)) \quad (3.24)$$

avec :

$$\lambda = \frac{1}{2}(R^2 + z^2 - z_0^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + z^2 - z_0^2)^2 + 4R^2z_0^2} \quad (3.25)$$

et donc, on approxime I_3 par la quasi-intégrale de mouvement suivante :

$$I_3 = \Psi(R, z) - \frac{1}{2}\frac{L^2 - L_z^2}{z_0^2} - \frac{1}{2}v_z^2 \quad (3.26)$$

Cette intégrale est réévaluée localement en chaque point et donc peut varier (d'où son appellation). On peut vérifier (Bienaymé et al. 2015) que sa variation le long des orbites ne varie que très peu à condition de bien choisir le z_0 : la valeur est choisie de sorte que la dispersion de I_3 le long de l'orbite soit minimale. Le temps de calcul de plusieurs centaines d'orbites afin d'analyser la variation de I_3 peut être réduit en tenant compte des remarques suivantes :

- I_3 est nulle dans le plan ($z = 0$)
- I_3 atteint sa valeur maximum pour les orbites en "coquille" (orbites ayant une grande extension verticale et aucune extension radiale)

3.5 Forme explicite des fonctions de distribution

Maintenant que nous connaissons les intégrales de mouvement, nous pouvons "bâtir" une fonction de distribution ne dépendant que de ces trois quantités. Nous commencerons par présenter la fonction de distribution dite de Schwarzschild qui permet de dégager clairement la notion ellipsoïde des vitesses. Puis nous essaierons de retracer pas à pas la construction de la fonction de distribution que nous utiliserons effectivement.

3.5.1 Distribution de Schwarzschild

Ce qu'on appelle la distribution de Schwarzschild décrit la distribution cinématique des étoiles du voisinage solaire avec trois gaussiennes :

$$f_S(R, z, u, v, w) = A.exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2} - \frac{(v - v_C)^2}{2\sigma_v^2} - \frac{w^2}{2\sigma_w^2}\right) \quad (3.27)$$

Ici A est un facteur de normalisation. Le plus important pour notre propos est l'expression dans l'exponentielle : si on l'égalise à une constante :

$$\frac{u^2}{2\sigma_u^2} + \frac{(v - v_C)^2}{2\sigma_v^2} + \frac{w^2}{2\sigma_w^2} = cste \quad (3.28)$$

elle représente dans l'espace des vitesses un ellipsoïde aligné sur les axes principaux et avec les longueurs des demi-axes principaux les dispersions de vitesses. Cette expression est appelée l'**ellipsoïde des vitesses** et résume les principales propriétés des distributions de vitesses. Bien qu'elles n'apparaissent pas aussi explicitement dans la plupart des autres fonctions de distribution, nous nous y référerons tout de même lorsqu'il faudra parler des propriétés cinématiques.

En effet, dans le voisinage solaire la distribution des vitesses est anisotrope, i.e. $\sigma_u \neq \sigma_v \neq \sigma_w$. De plus, les corrélations entre vitesses font qu'en général, il existe des termes croisés non nuls (par exemple σ_{uv} etc...). Il est alors intéressant de mettre ces moments sous la forme d'une matrice 3×3 $\tilde{\sigma}$ que nous pouvons alors diagonaliser sous la forme $\tilde{\sigma} = Id(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ afin d'obtenir des quantités complètement décorréelées (où Id est la matrice identité).

Tilt et déviation du vertex

Examinons les conséquences sur l'exemple des vitesses u et w : nous avons déjà remarqué lorsque nous abordions la nécessité d'une troisième intégrale du mouvement que $\sigma_w/\sigma_u \neq 1$. Nous avons aussi $\sigma_{uw} = \langle uw \rangle \neq 0$. On peut chercher à transformer linéairement ces vitesses afin de les rendre indépendantes :

$$v_1 = u \cos \delta - w \sin \delta \quad (3.29)$$

$$v_2 = u \sin \delta + w \cos \delta \quad (3.30)$$

qui n'est autre qu'une rotation d'angle δ . Si nous voulons que $\langle v_1 v_2 \rangle = 0$, on peut montrer alors que δ doit vérifier :

$$\delta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\sigma_{uw}}{\sigma_u^2 - \sigma_w^2}$$

Dans ce nouveau jeu de coordonnées, si nous définissons un nouvel ellipsoïde de telle sorte que les axes principaux sont alignés sur les vecteurs propres de $\tilde{\sigma}$ avec comme demi-axes les σ correspondants, on peut voir qu'il y a une déviation d'un angle δ par rapport aux axes du repère galactique : on appelle cet angle le **tilt** de l'ellipsoïde des vitesses. De la même manière, on définit la **déviation du vertex** par :

$$\delta_v = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\sigma_{uv}}{\sigma_u^2 - \sigma_v^2}$$

3.5.2 Distribution de Shu (Schwarzschild modifiée)

Le point de départ de la fonction de distribution que nous utilisons est la distribution de Shu (Shu 1969), qui décrit un disque stellaire infiniment fin en rotation avec un potentiel axisymétrique. Nous résumons ici son cheminement :

soit $\Psi(R, \theta, p_R, p_\theta)$ (où p_R, p_θ sont respectivement les moments conjugués selon R et θ) la fonction de distribution devant décrire un disque stellaire infiniment fin composé d'étoiles ayant la même masse m . Supposant que le

système est à l'état d'équilibre, l'entropie $S = - \int_D \Psi \ln \Psi dR d\theta dp_R dp_\theta$ doit y être maximum. En maximisant l'entropie avec les deux contraintes que sont la conservation de l'énergie totale et la conservation du moment cinétique "local", il obtient pour Ψ la forme suivante :

$$\Psi = \exp(-1 - \beta E - q(p_\theta)) \quad (3.31)$$

où β est une constante, E est l'énergie totale et $q(p_\theta)$ est un multiplicateur de Lagrange dépendant du moment cinétique. Ensuite par des arguments physiques et quelques manipulations mathématiques, il obtient finalement ce qu'on appelle la fonction de Shu ou fonction de Schwarzschild modifiée (en notations "modernes") :

$$\Psi = \begin{cases} \frac{2\Omega(R_c) \tilde{\Sigma}(R_c)}{\kappa(R_c) 2\pi\tilde{\sigma}^2} \exp\left(-\frac{E-E_{circ}(R_c)}{\tilde{\sigma}^2}\right) & \text{si } L_z > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.32)$$

où $R_c = R_c(L_z)$ est le rayon d'une orbite circulaire ayant pour moment cinétique L_z , κ est la fréquence épicyclique, $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\sigma}$ sont des paramètres dépendants de R_c , E est l'énergie totale et E_{circ} est l'énergie pour une orbite circulaire ayant le moment cinétique L_z . Nous pouvons déjà remarquer que cette fonction ne dépend que de deux intégrales de mouvement que sont E et L_z et donc vérifie l'équation de Boltzmann sans collision.

L'appellation "distribution de Schwarzschild modifiée" vient du fait que pour des faibles vitesses, on retrouve la distribution de Schwarzschild. Enfin le fait qu'elle soit nulle pour $L_z < 0$ signifie que nous interdisons des étoiles avec un mouvement rétrograde

On peut mieux appréhender son sens physique en prenant le point de vue de [Dehnen 1999](#); Soit une fonction de distribution modélisant un disque infiniment fin et dont toutes les étoiles auraient des orbites parfaitement circulaires. Une forme générale pour cette fonction serait :

$$f(E, L_z) = F(L_z) \delta(E - E_c(L_z)) \quad (3.33)$$

où le dirac $\delta(E - E_c(L_z))$ contraint le modèle uniquement aux orbites circulaires. Si $\Sigma(R)$ est la densité surfacique du disque, alors f doit vérifier :

$$\Sigma(R) = \int f(E, L_z) d^3v \quad (3.34)$$

d'où l'on tire la forme de F soit :

$$F(L_z) = \frac{2\Omega\tilde{\Sigma}(R(L_z))}{2\pi\kappa} \quad (3.35)$$

avec $\tilde{\Sigma}$ de la même forme que la densité recherchée.

Si l'on veut généraliser aux orbites non circulaires et en tenant compte de la dispersion σ_R , il faut remplacer la fonction $\delta(E - E_c(L_z))$ par une fonction plus réaliste. La fonction de Shu s'obtient alors naturellement avec une gaussienne soit :

$$f(E, L_z) = \frac{2\Omega(R_c) \tilde{\Sigma}(R_c)}{\kappa(R_c) 2\pi\tilde{\sigma}_R^2} \exp\left(-\frac{E - E_{circ}(R_c)}{\tilde{\sigma}_R^2}\right) \quad (3.36)$$

On peut alors voir la fonction de Shu comme décrivant un disque d'étoiles aux orbites parfaitement circulaires "chauffé" radialement... Un des intérêts de cette fonction de distribution est aussi que la densité surfacique et la dispersion de vitesse radiale calculées à partir des moments de la fonction de Shu sont très proches de la forme des $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\sigma}$ introduits au départ.

De la même manière que nous avons "chauffé" radialement, on peut se demander si l'on peut réitérer cette idée pour permettre des mouvements verticaux et tenir compte de la structure verticale du potentiel... Multiplier la fonction de Shu par un terme $\propto \frac{1}{\sigma_z(L_z)} \cdot \exp\left(-\frac{\phi(z)}{2\sigma_z^2}\right)$ conviendrait si nous étions en présence d'un potentiel cylindrique. Or le couplage des mouvements radiaux et verticaux ainsi que la nécessité d'introduire I_3 rend les choses plus délicates...

3.5.3 Généralisation à 3D

On peut généraliser simplement la fonction de Shu au cas tridimensionnel pour un potentiel axisymétrique séparable en R et z ($\Phi(R, z) = \Phi_1(R) + \Phi_2(z)$). Dans ce cas $E_z = w^2/2 + \Phi_2(z)$ est une intégrale du mouvement. Il suffit de multiplier la fonction de Shu par exemple par le terme $\propto \frac{1}{\sigma_z(L_z)} \cdot \exp\left(-\frac{E_z}{2\sigma_z^2}\right)$ pour obtenir une fonction de distribution dépendant uniquement des intégrales du mouvement et donc qui est stationnaire. On peut généraliser à 3D (Statler 1989, Bienayme and Sechaud 1997, Bienaymé 1999) en mettant la fonction de distribution sous la forme :

$$f(E, L_z, I_3) = \frac{2\Omega(R_c) \Sigma(L_z)}{2\pi\kappa(R_c) \sigma_R^2} \exp\left[-\frac{(E - E_{circ})}{\sigma_R^2}\right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_z} \exp\left[-\left(\frac{R_c^2(L_z)}{z_0^2} + 1\right)^{-1} \left(\frac{1}{\sigma_z^2} - \frac{1}{\sigma_R^2}\right) I_3\right] \quad (3.37)$$

qui est stationnaire dans le cas d'un potentiel de Staeckel, et qui est quasi-stationnaire pour des potentiels proches de celui de la Voie Lactée.

Chapitre 4

Procédure d’ajustements des fonctions de distribution

Une fois adoptée la forme des fonctions de distribution, on déduit la densité par intégration sur les vitesses. Les densités étant connues, on obtient le potentiel gravitationnel via la résolution de l’équation de Poisson. Avec ce nouveau potentiel, nous pouvons recalculer les intégrales du mouvement, les fonctions de distribution et les densités puis encore un nouveau potentiel etc... et ce jusqu’à convergence (i.e. jusqu’à ce que la différence des potentiels entre deux itérations deviennent négligeable).

Nous avons pris comme point de départ le potentiel du modèle de Besançon, adapté de la version 2014, dont les composantes sont décrites au chapitre 2.4 (nous nous servons uniquement des composantes axisymétrique du BGM, à savoir les disques minces et épais, l’ISM, le bulbe central et enfin le halo de matière noire).

A chaque itération les paramètres libres des fonctions de distribution sont ajustées de façon à reproduire au mieux les densités des disques stellaires du modèle de Besançon de 2014.

Nous décrivons à présent cette étape initiale.

4.1 Calcul de I_3

Le calcul de la fonction de distribution ne peut s’effectuer que si nous connaissons la valeur de I_3 , celle-ci nécessitant la connaissance de z_0 en chaque point de sorte que la variation de I_3 soit minimale le long de l’orbite. Or cette étape demande entre autres de calculer plusieurs centaines d’orbites pour chaque valeur désirée. Il est alors plus rapide de tabuler les valeurs de z_0 selon E et Lz et d’interpoler les valeurs en chaque point de la grille.

Cette grille de départ, calculée à partir du potentiel, s'étend de $R=500$ pc à $R=15500$ pc (figure 4.1). Grâce à cela, chaque valeur de I_3 peut alors être déduite.

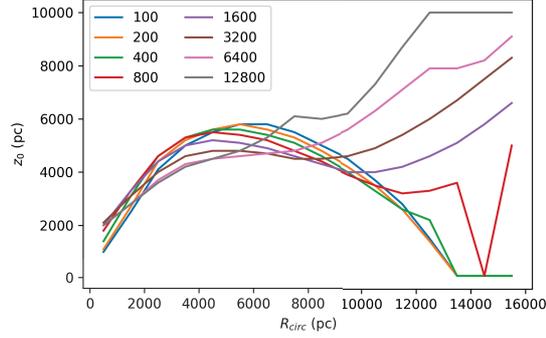


FIGURE 4.1 – Le paramètre z_0 selon R_{circ} pour différents ΔE tel que $E = E_c + \Delta E$ avec E_c l'énergie d'un orbite circulaire au rayon R_{circ}

4.2 Choix des paramètres

Enfin, il ne reste plus que le choix des paramètres $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\sigma}$, nous choisissons un profil exponentiel afin que la densité et la dispersion soient, après calcul des moments, proche d'une loi exponentielle également, soit donc :

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(L_z) &= \Sigma_0 \exp\left(-\frac{(R_c(L_z) - R_0)}{R_d}\right) \\ \tilde{\sigma}_R(L_z) &= \sigma_{R,0} \exp\left(-\frac{(R_c(L_z) - R_0)}{R_{\sigma,R}}\right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

où R_0 est la position radiale du soleil (que l'on prend ici égale à 8 kpc). Nous imposons également une dépendance entre σ_R et σ_z telle que : $\sigma_R = 2\sigma_z$ pour les disques minces et $\sigma_R = 1.5\sigma_z$ pour les disques épais (Ojha et al. 1996). Nous allons alors jouer sur 4 paramètres en tout : R_d , $\sigma_{z,0}$, $R_{\sigma,z}$ et enfin un facteur de normalisation ρ_0 .

4.3 Méthode

Le calcul analytique de la densité de masse à partir de la fonction de distribution est impossible et il faut intégrer numériquement sur toutes les

TABLE 4.1 – Points sur lesquels la DF est ajustée

j	R_{min}	R_{max}	ΔR	z_{min}	z_{max}	Δz
2	2000	16000	2000	0	600	100
3	2000	16000	2000	0	600	100
4	2000	18000	2000	0	1000	200
5	2000	18000	2000	0	1200	300
6	2000	18000	2000	0	1400	350
7	2000	18000	2000	0	1400	350

vitesses possibles : nous avons choisi les intervalles

$$\begin{cases} u = -300, 300 km.s^{-1} \\ v = 10, 360 km.s^{-1} \\ w = -200, 200 km.s^{-1} \end{cases}$$

et des pas de $10 km.s^{-1}$. Pour ajuster nos paramètres nous minimisons la différence entre le modèle de Besançon et notre densité par la méthode du gradient sur une grille de points (R, z) . Le profil de densité étant exponentiel, la minimisation est rendue plus aisée en travaillant avec les logarithmes des fonctions ; nous minimisons donc la fonction :

$$\chi^2 = \sum_{R_i} \left(\sum_{z_i} [\log(\rho_{BGM}) - \log(\rho_{DF})]^2 \right)$$

où R_i et z_i sont les points choisis tels que résumés sur le tableau 4.1. Le rayon minimum R_{min} est de 2000 pc car en-deçà de cette valeur, la fonction de distribution n'est pas adaptée et ne suit pas le profil du modèle 2014 Besançon. Le rayon maximum R_{max} est pris en considérant le rayon à partir duquel la densité de Besançon est quasiment nulle. Le z_{max} est choisie de la même manière.

Les résultats pour les disques minces 2 à 7 sont résumés dans le tableau 4.2. La densité peut alors être calculée par simple intégration numérique¹ (en conservant les mêmes limites cinématiques) et en incluant une coupure de sorte que $\rho(R, z) = 0$ si $L_z > 20000 pc \times 200 km.s^{-1}$

De même que pour les disques minces, nous avons résumé les résultats pour les 2 composantes disques épais dans le tableau 4.2.

1. Ici sur une grille pour $R=0-60$ kpc et $z=0-10$ kpc par pas de 10 pc

TABLE 4.2 – Paramètre pour les disques minces vieux

j	ρ_0	R_d	R_σ	$\sigma_{z,0}$
2	69057.68	3782.174	7026.016	7.944
3	55887.149	3752.147	6807.485	10.573
4	38309.885	3661.194	6577.778	14.528
5	57631.437	3570.769	6411.928	17.302
6	49073.382	3505.712	6280.732	18.79
7	63643.04	3500.935	6271.561	18.885

TABLE 4.3 – Paramètre pour les disques épais

j	ρ_0	R_d	R_σ	$\sigma_{z,0}$
8	6422.146	876.382	4160.194	27.0
9	44062.912	1207.839	5037.912	25.189

4.4 Distribution des vitesses

Après ce premier ajustement, il est intéressant de se pencher sur la modélisation cinématique qu’induit notre DF.

4.4.1 Profils des vitesses u, v et w

Par intégration, nous pouvons déterminer les distributions de vitesses u, v ou w selon R et z . A titre d’exemple, nous avons tracé ces distributions pour différents z pour $R = 8kpc$ (figure 4.2). Les distributions de u et w ressemblent à des gaussiennes centrées en 0 alors que la distribution de v s’écarte d’une distribution normale, et met en valeur le phénomène de courant asymétrique. Ces courbes mettent également en lumière la différence entre notre modèle et celui de Schwarzschild (ce dernier ayant des distributions gaussiennes pour les trois composantes).

4.4.2 Tilt

La fonction de distribution étant déterminée, nous pouvons calculer numériquement les moments afin d’obtenir le tilt de l’ellipsoïde donné par la formule suivante :

$$\tan 2\delta = \frac{2\sigma_{uw}}{\sigma_u^2 - \sigma_w^2} \quad (4.2)$$

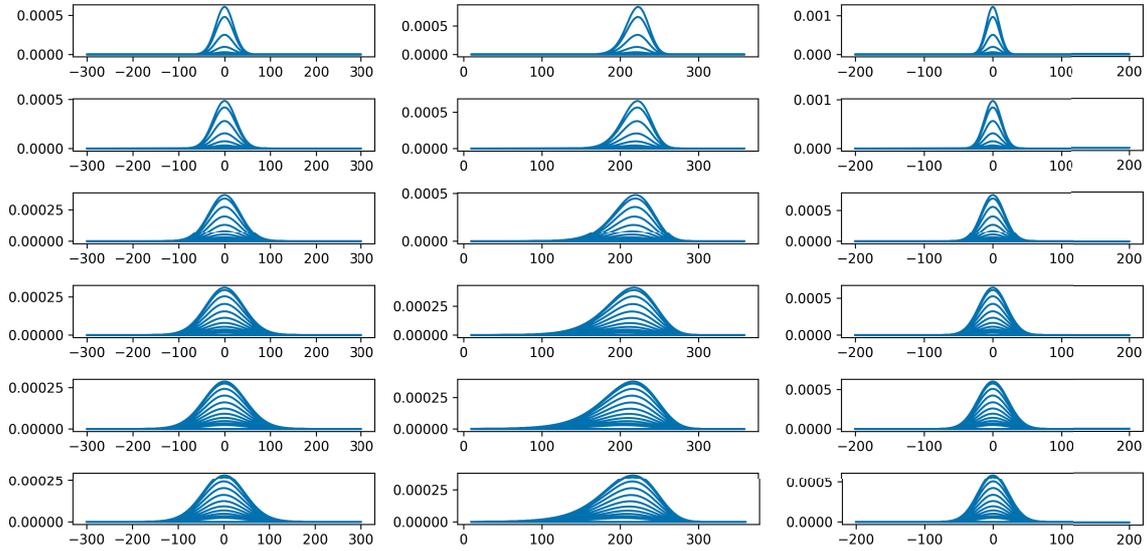


FIGURE 4.2 – Distributions des vitesses pour (de gauche à droite) u, v et w pour z allant de 0 à 1000 pc par pas de 100 pc.

Les résultats pour les disques minces sont présentés sur la figure 4.3 : le tilt pour les composantes minces est quasiment le même pour les composantes minces : le fait que nous utilisons un modèle axisymétrique et sans perturbation amène alors à un tilt égal pour chaque population du disque mince quelque soit son âge... On observe également que le tilt pour les disques épais est plus élevé et différent.

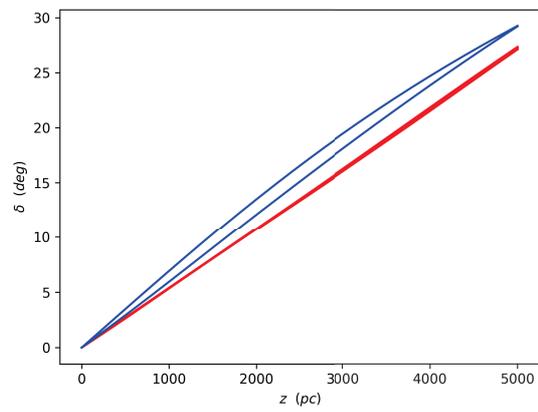


FIGURE 4.3 – Tilt en degrés pour les composantes minces (en rouge) et épaisses (en bleu).

Chapitre 5

Cohérence dynamique

Pour construire un modèle dynamiquement cohérent de la Galaxie, nous avons utilisé l'ensemble des éléments décrits précédemment. Un premier calcul du potentiel permet de déterminer les fonctions de distribution des disques stellaires. Les paramètres des fonctions de distribution sont ensuite contraints et déterminés par les observations (ici pour notre phase de développement ; nous avons considéré les lois de densité du modèle de 2014 comme étant nos observations, sachant que le modèle de 2014 est en pratique bien contraint par les comptages stellaires). Une fois les fonctions de distribution ajustées, elles génèrent des nouvelles lois de densité légèrement différentes des lois utilisées initialement pour le calcul du potentiel. Le potentiel gravitationnel du modèle est donc modifié. Il faut réitérer les calculs avec ce nouveau potentiel galactique. On interrompt les itérations quand le potentiel et les FD ne changent plus entre deux itérations.

Une fois la convergence obtenue, en pratique en trois ou quatre itérations, on a construit un modèle auto-cohérent modélisant les observations.

Cela donne une boucle de calcul résumée par le tableau 5.1 :

- Le calcul du potentiel Galactique.
- Le calcul des orbites.
- La détermination de la table $z_0(E, Lz)$ qui sert pour le calcul de la troisième intégrale et permet le calcul des fonctions de distribution $f_i(R, z, u, v, w)$.
- L'ajustement des paramètres $\rho, \sigma_U, \sigma_W, R_\rho, R_{\sigma_U}, R_{\sigma_W}$ des modèles de disques stellaires pour reproduire les observations de comptages stellaires (voir le chapitre 4 pour la procédure d'ajustement des fonctions de distribution).
- Avec les fonctions de distribution ajustées, nous recalculons le potentiel des disques stellaires (voir Annexe pour la résolution de l'équation de Poisson).

(La densité des disques stellaires a changé et il faut donc recalculer le

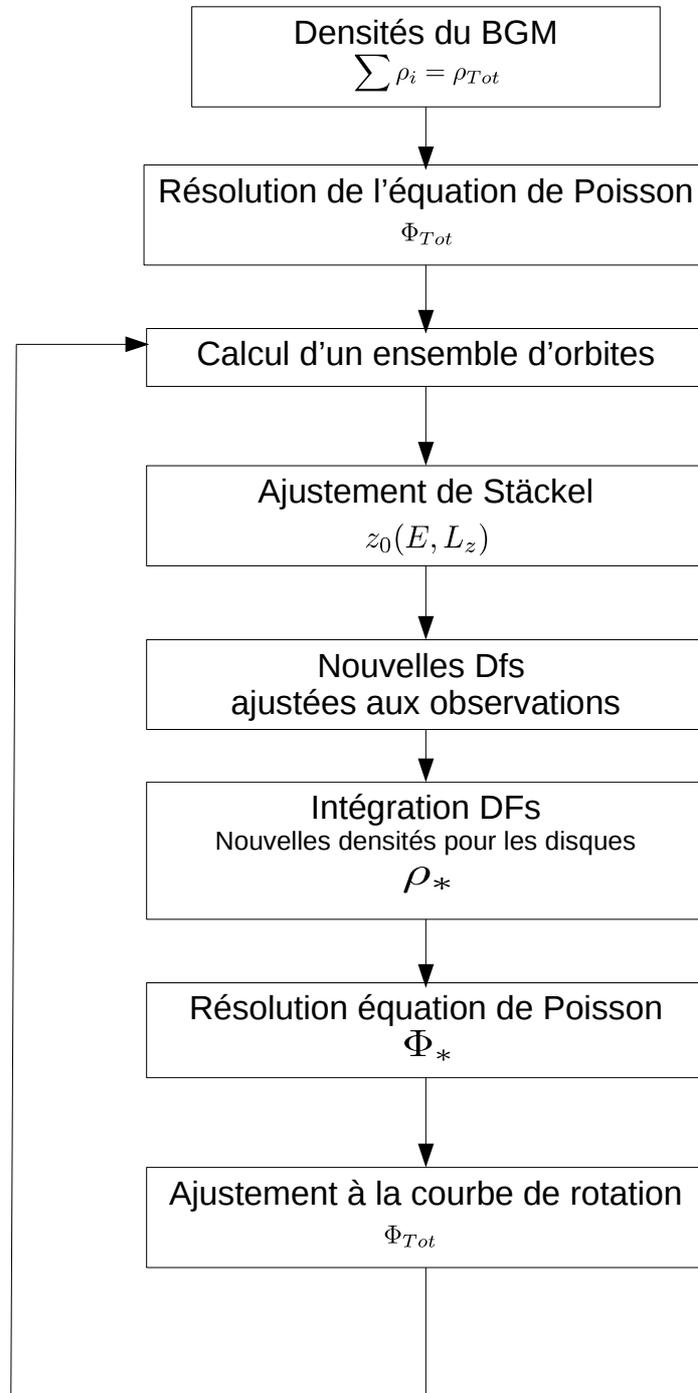


TABLE 5.1 – Bouclage dynamique

potentiel)

- On ajuste le halo noir pour pouvoir reproduire la courbe de rotation galactique de Sofue.
- Après toutes ces étapes, on obtient un nouveau potentiel de la Galaxie.

5.1 Potentiels

Nous avons modifié les potentiels des disques d'étoiles, via la densité calculée à partir des fonctions de distribution. Le nouveau potentiel est calculé à partir de l'équation de Poisson. Les potentiels des autres composantes, i.e. le bulbe, l'ISM, le halo stellaire et le halo de matière noire, sont calculés via les expressions analytiques du modèle de Besançon : nous ajustons néanmoins les paramètres du halo de matière noire afin que la courbe de rotation obtenue par notre méthode s'ajuste aux observations.

5.1.1 Potentiel des disques minces et épais

Partant de nos densités ρ_i , nous résolvons l'équation de Poisson $\Delta\Phi_i = 4\pi G\rho_i$ ¹ afin de déterminer le potentiel sur une grille (R, z) de même dimension que celle utilisée pour la densité (figures 5.1-5.2). La méthode utilisée pour résoudre l'équation de Poisson est détaillée en annexe. Notons que pour les conditions aux limites, nous avons intégré la masse présente dans un rayon de 20 kpc et pour z compris entre -2 et 2 kpc. Due à notre coupure en L_z utilisée pour la densité, intégrer sur un plus grand volume donne le même résultat. Enfin, nous intégrons l'équation pour toute les densités sommées, c'est-à-dire $\rho = \sum_i \rho_i$ avec i allant de 1 à 9.

Afin de s'assurer de l'exactitude de notre programme, nous l'avons testé sur plusieurs profils de Miyamoto-Nagai (pour lesquels nous possédons les expressions analytiques des densités et des potentiels correspondants) pour différentes valeurs des paramètres du profil Miyamoto-Nagai pour des disques plus ou moins sphériques ou aplatis (voir l'Annexe B).

Disque mince jeune

Plusieurs essais se sont montrés infructueux pour reproduire un profil de densité valable pour cette composante avec notre fonction de distribution : la raison est que ce disque est trop jeune et ne peut pas être supposé relaxé. Nous intégrons alors de manière indépendante cette composante et ajoutons

1. avec Φ est le potentiel, G est la constante de gravitationnelle et ρ est la densité.

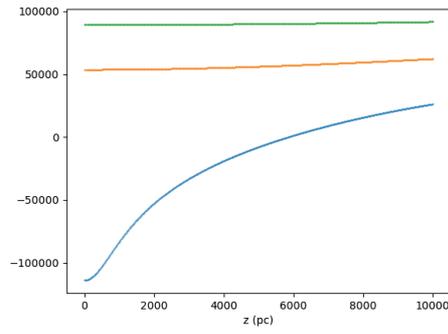


FIGURE 5.1 – Potentiel selon R pour trois valeurs de $z=0,2,4$ kpc

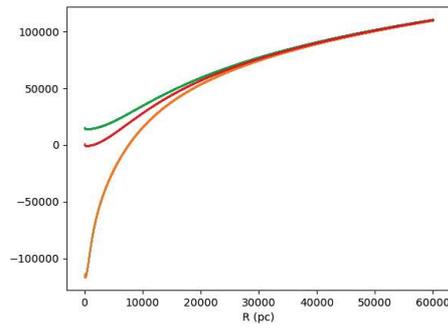


FIGURE 5.2 – Potentiel selon z pour trois valeurs de $R=0,8,16$ kpc

sa contribution au potentiel total. Nous intégrons via la méthode décrite par Schmidt (voir Bienaymé et al 1987).

Autres disques minces et disques épais

Pour ces composantes, on résout l'équation de Poisson après avoir intégré la fonction de distribution pour obtenir la densité. L'algorithme utilisé est basé sur les différences finies et itérations jusqu'à convergence. Pour un temps de calcul minimum, nous pouvons ajuster les dimensions et le pas de la grille puis interpoler par la méthode de spline cubique. Les détails de l'algorithme utilisé pour résoudre l'équation de Poisson sont détaillés en annexe.

5.1.2 Potentiel du bulbe central, du halo stellaire et de l'ISM

Pour ces composantes, on utilise encore une fois une intégration "directe" des composantes du modèle de Besançon. Il est à noter, que toutes ces composantes sont axisymétriques (on n'inclut pas la barre).

5.1.3 Potentiel du halo de matière noire

Le potentiel associé au profil de densité du halo de matière noire est

$$\Phi_{DM} = -4\pi G\rho_c R_c^2 \left[1 - \left(\frac{R_c}{a}\right) \arctan\left(\frac{a}{R_c}\right) - \frac{1}{2} \log\left(1 + \left(\frac{a}{R_c}\right)^2\right) \right] \quad (5.1)$$

avec comme paramètres de départ $\rho_c = 0.1079$ et $R_c = 2697$, et $a^2 = R^2 + (z/q)^2$, $q = 0.8$. Le paramètre q permet l'éventualité d'un halo aplati. Nous ajustons les paramètres ρ_c et R_c afin que la courbe de rotation issue des potentiels précédemment calculés s'ajuste au mieux sur les observations actuelles.

5.2 Courbe de rotation

La vitesse de rotation théorique $v_c(R) = v(R, z = 0) = \sqrt{-\partial\phi/\partial R}$ doit évidemment s'accorder avec les observations, notamment une courbe de rotation plate aux grandes distances. En ajoutant les différentes composantes du potentiel galactique, nous ajustons les paramètres du halo de matière noire pour que la courbe de rotation totale obtenue s'ajuste au mieux à celle de [Sofue 2015](#) : l'auteur déduit sa courbe de rotation par des mesures de vitesses circulaires d'objets galactiques près du plan pour des distances $< 10kpc$ et

et à l'aide des vitesses d'amas globulaires jusqu'à $25kpc$. D'autres objets extragalactiques (galaxies naines etc...) permettent d'aller jusqu'à $1Mpc$. On dispose ainsi d'une courbe de rotation très étendue : pour notre propos, nous utiliserons ces données jusqu'à $40kpc$. On obtient par exemple $\rho_c = 0.1383$ et $R_c = 2598$ lors de la première boucle. L'ajustement est présenté sur la figure 5.3.

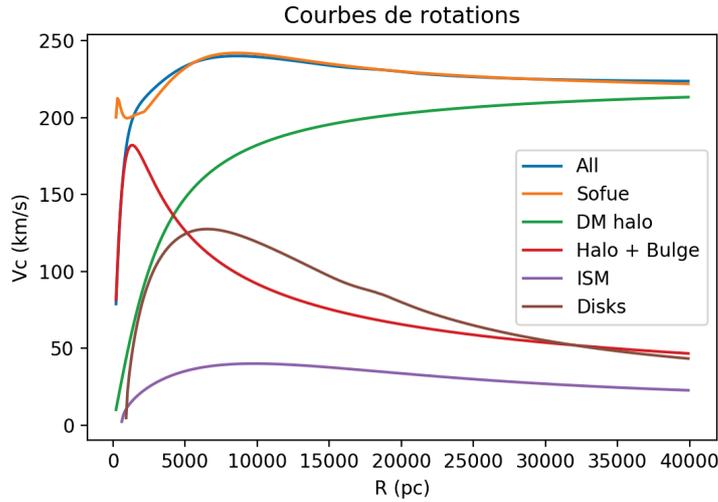


FIGURE 5.3 – Courbes de rotation des différentes composantes ainsi que la courbe de rotation finale comparée à celle de Sofue

5.3 Bouclage

Le potentiel est alors modifié par le changement induit sur la fonction de distribution, et par un réajustement des paramètres du halo de matière noire, d'où l'idée de bouclage de la procédure jusqu'à convergence selon le critère :

$$\sum_{i,j} \left| \frac{(\Phi_{prec} - \Phi_{act})}{\Phi_{prec}} \right| \leq 10^{-3}$$

où Φ_{prec} et Φ_{act} sont respectivement les potentiels à l'étape précédente et nouvellement calculé. Une fois cette convergence atteinte, nous recalculons les intégrales du mouvement avec le nouveau potentiel obtenu : on recrée un table pour les z_0 afin de recalculer les valeurs de I_3 en chaque point, l'énergie est également recalculée en fonction de ce nouveau potentiel. On reprend ainsi la boucle en recalculant les différentes densités et, suivant les

mêmes étapes que précédemment, pour aboutir à un nouveau potentiel et ceci jusqu'à convergence définitive.

5.3.1 Résultats préliminaires

On a tracé, en sommant les composantes pour le disque mince et le disque épais séparément, les densités radiales et verticales en les comparant aux densités du modèle de Besançon (figures 5.4-5.5-5.6-5.7). Pour le disque mince, on remarque un décalage entre les deux modèles pour le profil radial n'excédant pas 20%. L'ajustement est légèrement meilleur pour le profil vertical. Ces résultats sont marginalement satisfaisants. En modifiant certains paramètres et la méthode d'ajustement, on aboutit néanmoins à une bien meilleure convergence (voir notre article en annexe) : le rapport des dispersions de vitesse y est légèrement modifié : 2.1 pour le disque mince, 1.47 pour le disque épais jeune et 1.38 pour le disque épais jeune. L'ajustement initial est réalisé en utilisant le programme MINUIT (James and Roos 1975) sur un domaine radial tel que $4 \text{ kpc} < R < 12 \text{ kpc}$ et avec z allant de 3 à 4 fois l'échelle de longueur verticale pour les disques minces et jusqu'à 1 kpc pour les disques épais.

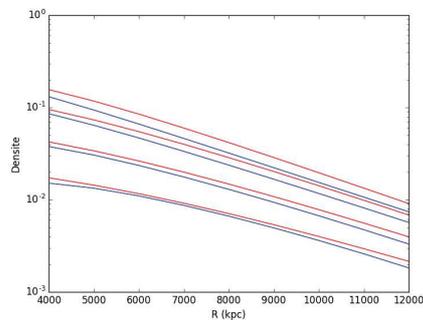


FIGURE 5.4 – En bleu la densité du disque mince déduite de la fonction de distribution, en rouge la densité du disque mince du modèle de Besançon. L'ordonnée est en échelle log.

5.4 Résultats

La figure 1 de notre article en annexe présente les densités verticales pour une composante du disque mince (gauche) et le disque épais vieux (droite). La figure 2 présente les densités radiales selon le même ordre. La correspondance est bonne et ce pour des rayons étendus autour de la position solaire

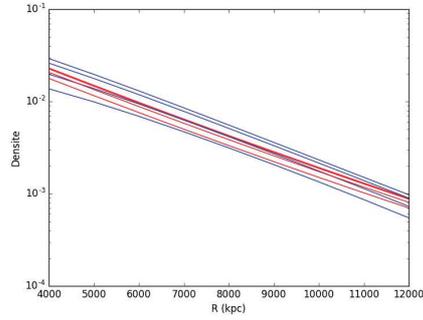


FIGURE 5.5 – En bleu la densité du disque épais déduite de la fonction de distribution, en rouge la densité du disque épais du modèle de Besançon. L'ordonnée est en échelle log

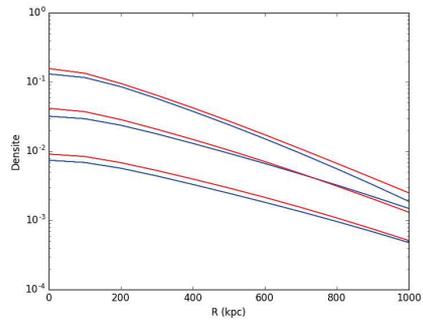


FIGURE 5.6 – En bleu la densité du disque mince déduite de la fonction de distribution, en rouge la densité du disque mince du modèle de Besançon. L'ordonnée est en échelle log

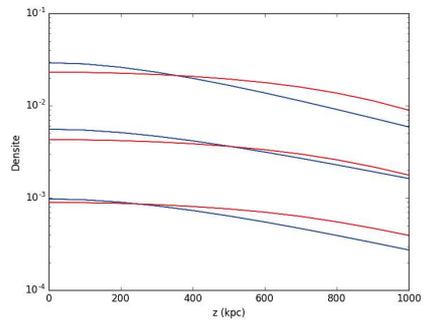


FIGURE 5.7 – En bleu la densité du disque épais déduite de la fonction de distribution, en rouge la densité du disque épais du modèle de Besançon. L'ordonnée est en échelle log

8 kpc et pour des hauteurs allant jusqu'à 1000 pc bien que l'on note un écart progressant selon z (voir table 1) notamment par l'influence du halo stellaire. Les nouvelles dispersions de vitesse peuvent aussi être obtenues (tables 1 et figure 3 et 4). Par construction les dispersions de vitesse σ_u et σ_v sont exponentielles et les rapports R_{σ_z}/R_ρ des échelles caractéristiques de leur distribution sont respectivement pour le disque mince et vieux de 3.35 et de 3.42, à comparer avec la valeur 2 souvent supposée. Le courant asymétrique est maintenant déterminé exactement avec une grande différence pour le disque épais due à une dispersion de vitesse plus grande. Enfin le tilt de l'ellipsoïde semble être le même pour les différentes composantes du disque mince (les faibles variations étant dues au changement du paramètre z_0 nécessaire pour ajuster le potentiel de Stäckel).

On notera que ces résultats sont en accord avec les contraintes observationnelles pour les dispersions de vitesses basées sur les relevés RAVE et UCAC (Robin et al 2017). Ils reproduisent correctement les nombreuses mesures de l'inclinaison de l'ellipsoïde des vitesses au dessus du plan galactique (voir par exemple [Siebert et al. 2008](#))

Chapitre 6

Travail complémentaire : recherche de structures dans le halo stellaire

[Helmi et al. 2016](#) ont annoncé avoir identifié des sous-structures du halo stellaire, sous-structures visibles dans l'espace des intégrales du mouvement, en utilisant la première relâche de données des observations du relevé Gaia (DR1). Etant donné la précision encore limitée de ces observations, nous étions étonné que des sous-structures de petites tailles soient déjà visibles avec ce premier relevé Gaia. Nous avons cherché à reproduire leur travail avec l'idée d'utiliser l'information d'une troisième intégrale tandis que Helmi et al n'en ont utilisé que deux. Cependant nous n'avons finalement pas réussi à reproduire les résultats d'Helmi et al, ni à être certain d'avoir utilisé la même sélection d'étoiles. N'ayant pas compris les raisons de ce désaccord, mais ayant exploré de nombreuses possibilités, nous donnons ici un résumé de ce travail et concluons que le DR2 Gaia incluant positions 3D et vitesses 3D précises permettra de mieux répondre à la question des grumeaux dans le halo stellaire.

Bien qu'il soit souvent modélisé comme une composante lisse, le halo stellaire est en réalité plus complexe et peuplé de diverses sous-structures, que l'on reconnaît entre autres par leurs signatures chimiques, cinématiques et parfois spatiales. L'intérêt de telles sous-structures, plus qu'un simple recensement des structures nouvelles observées, nous apporte de précieux indices sur la formation de la Galaxie. Eggen, Lynden-Bell et Sandage proposèrent dans leur célèbre article de 1962 ([Eggen et al. 1962](#)) le premier scénario de formation de la Galaxie (modèle ELS) : en observant 221 étoiles dans l'espace des vitesses combinées à leur excès en ultraviolet (comme indica-

teur d'âge), il déduisirent que la Galaxie fût formée par effondrement rapide d'un nuage protogalactique. Durant cet effondrement, la première génération d'étoile fût formée, gardant des orbites à fortes excentricités (conservation du moment cinétique) et une métallicité faible (reflétant la chimie du nuage protogalactique). Cet article, en plus de proposer un modèle de formation, mit en lumière le fait que l'étude cinématique et chimique des étoiles du halo pouvait être utilisée comme traceur des moyens de formation de la Galaxie. Cependant, Searle et Zinn, dans un non-moins célèbre article ([Searle and Zinn 1978](#)) mirent en évidence des failles dans un tel scénario : en observant la métallicité et l'âge d'amas globulaires, il montrèrent que le manque de gradient en métallicité et la grande dispersion des âges de ces amas étaient inconsistants avec le modèle ELS. Ils proposèrent alors que la galaxie soit née de l'accrétion de plusieurs protogalaxies, possédant leur propre histoire. On pense aujourd'hui que la formation serait un mélange des 2 scénarios. On a observé, depuis, des groupes d'étoiles cohérents cinématiquement dans le halo comme traces d'anciennes collisions ainsi que plusieurs streams ([Ibata et al. 1994](#), [Grillmair 2009](#), [Grillmair and Carlin 2016](#)). La discrimination de ces différents groupes d'étoiles est rendue difficile tant par leur complexité que par les mécanismes pouvant effacer l'information d'événements anciens (dans le sens où certains mécanismes peuvent supprimer toute distinction entre les étoiles originaires de la galaxie et celle accrétées plus tard : on peut citer par exemple, la formation du bulbe, le mélange des étoiles du disque par effets de chauffage et par les bras spiraux...). Cependant, si ces mécanismes ont été inefficaces, on peut retrouver les traces des événements passés par leurs propriétés cinématiques, chimiques ainsi que leurs signatures dans l'espace des intégrales du mouvement. Les streams participant à moins de 5% des étoiles du halo proche ([Gould 2003](#)), une large part est alors occupée par les étoiles rémanentes de la formation ou des mergers qui ont eut lieu après. On se propose dans ce chapitre d'examiner la possible identification de tels groupes d'étoiles dans l'espace des intégrales du mouvement en utilisant notre troisième intégrale.

6.1 Données et sélection

6.1.1 Données de base

Lancé en 2013, le satellite Gaia nous apporte les données parmi les plus précises jamais atteintes pour environ 1 milliard d'étoiles (DR2 [Collaboration et al. 2018](#)). Une partie du DR1 ([Lindegren et al. 2016](#)) donne les parallaxes et les mouvements propres pour environ 2 millions de sources de TYCHO-

2 (Hog et al. 2000) avec des erreurs inférieures à 1 mas pour environ 80% d’entre elles. Couplé au survey RAVE (Steinmetz et al. 2006, Kunder et al. 2017), qui, grâce aux spectres d’environ 500 000 étoiles, permet d’obtenir les vitesses radiales (ainsi que les paramètres stellaires tels la gravité de surface, la métallicité etc...), on peut créer un échantillon d’étoiles avec les trois composante des vitesses ainsi que leur distances. Avec un crossmatching entre TGAS et RAVE, on trouve 210 422 étoiles en commun. Suivant les critères de sélection de Helmi et al. 2016, on ne garde, sur cet échantillon, que les étoiles ayant une erreur sur la vitesse radiale inférieure à 10% et un coefficient de corrélation supérieur à 10 (qui indique une mesure sûre de la vitesse radiale). De plus, afin de s’assurer que les mesures des paramètres astrophysiques soient sûrs, on ne garde que les étoiles ayant un signal-sur-bruit (SNR) supérieur à 20 (Kordopatis et al. 2013) et ayant le critère algoconv différent de 1. Enfin, on ne garde que les étoiles ayant une erreur relative sur la parallaxe inférieure à 30% (selon les mesures de Gaia ou RAVE). On obtient ainsi 159 555 étoiles soit environ 10 000 étoiles de moins que Helmi. Cependant, sur notre échantillon, nous trouvons une proportion d’étoiles similaire avec une parallaxe plus précise avec les données RAVE. Comme indiqué dans Helmi et al. 2016 et Binney et al. 2014a, les parallaxes de RAVE pour les étoiles géantes sont sous-estimées en moyenne de 11% et nous corrigeons alors cela en remplaçant $\pi_{RAVE}^{corr} = 1.11\pi_{RAVE}$ pour les étoiles avec $\log g < 3.5$. Notons à ce sujet que les distances sont calculées en prenant l’inverse de la parallaxe. Bien que certains auteurs ont pointé du doigt cette méthode (Bailer-Jones 2015, Luri et al. 2018), et pointé qu’une sélection sur les erreurs relatives amènent un biais, nous persistons dans ce choix, ne serait-ce que pour des raisons de comparaison. Cependant, une meilleur prise en compte des calculs de distance pourrait être intéressante par la suite.

6.1.2 Sélection

Après cette première sélection permettant de disposer d’un échantillon épuré des mesures aberrantes, nous procédons à une première discrimination afin d’obtenir une majorité d’étoiles appartenant potentiellement au halo. On ne garde alors que les étoiles possédant une métallicité inférieure à -1,5 et distante de plus de 100 pc. On aboutit à notre échantillon final de seulement 1564 étoiles. Pour ces étoiles nous calculons leur position et vitesse cartésiennes selon les transformations présentées en annexe. Nous supposons que la position du soleil est à 8 kpc et la vitesse du LSR¹ est de 220 $km.s^{-1}$.

1. LSR pour Local Standard of Rest est le référentiel au repos local. Ce référentiel suit la vitesse moyenne des étoiles du voisinage solaire.

Nous ne tenons pas compte de la correction de la vitesse du soleil par la suite, son ajout ayant un effet négligeable sur les étoiles du halo. Une seconde discrimination possible disque/halo s'effectue dans l'espace des vitesses grâce à l'apprentissage automatique non-supervisé (unsupervised machine learning) et par la méthode de modèle de mélange gaussien (Gaussian Mixture Model ou GMM). Le principe est le suivant : on cherche à modéliser la distribution totale de N données $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ par une somme de k gaussienne G_i de moyenne μ_i et de matrice de covariance Σ_i inconnues. Si on pose $\theta = (\mu_1, \Sigma_1, \dots, \mu_k, \Sigma_k)$ alors la fonction de distribution totale est :

$$f(\mathbf{x}, \theta, \pi_i) = \sum_{i=1}^k \pi_i G_i(\mu_i, \theta_i) \quad (6.1)$$

où les π_i sont les proportions des différents groupes, dit paramètres latents puisqu'ils ne sont pas observables. Pour trouver les meilleurs paramètres π_i , μ_i et Σ_i , on cherche à maximiser la vraisemblance qui est ici :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \theta, \pi_i) = \sum_{j=1}^N \log \left(\sum_{i=1}^k \pi_i G_i(\mathbf{x}_j, \theta_i) \right) \quad (6.2)$$

On utilise pour cela l'algorithme espérance-maximisation (EM, Dempster 77) qui converge vers la solution. On assigne ensuite, pour chaque donnée, la gaussienne auquel elle appartient grâce au théorème de Bayes (on calcule la probabilité d'une données d'appartenir à un groupe et on lui attribut le groupe dont la probabilité est la plus élevée). Pour ce qui nous intéresse, on sépare l'échantillon en 2 sous parties distinctes : les étoiles faisant partie du halo, ajustées pour v_y par une gaussienne de moyenne d'environ 20 km.s^{-1} et les étoiles appartenant au disque (nous ne faisons pas de distinction entre disque mince ou épais) ajustées pour v_y par une gaussienne de moyenne d'environ 180 km.s^{-1} . Les résultats sont présentés sur les figures 6.1 et 6.2.

6.1.3 Fonction de corrélation

Pour mieux caractériser la granularité de la répartition des étoiles dans l'espace des vitesses, nous utilisons la fonction de corrélation à deux point $\langle \xi \rangle$ telle que :

$$\langle \xi \rangle = \frac{\langle DD \rangle}{\langle RR \rangle} - 1$$

avec

$$\langle DD \rangle = \frac{\text{Nombre de paires avec } v < |\vec{v}_i - \vec{v}_j| < v + \Delta v}{N_D * (N_D - 1)}$$

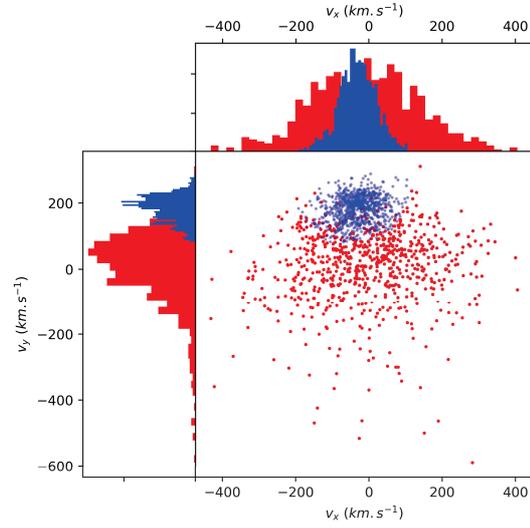


FIGURE 6.1 – Vitesses de l'échantillon final ; les étoiles appartenant préférentiellement au disque sont en bleu, celles du halo en rouge

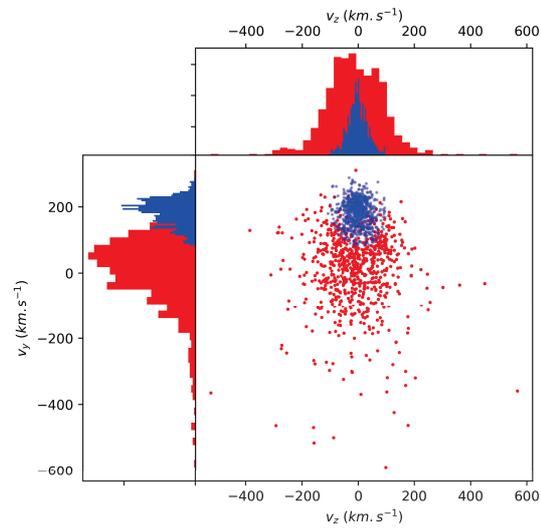


FIGURE 6.2 – Vitesses de l'échantillon final ; les étoiles appartenant préférentiellement au disque sont en bleu, celles du halo en rouge

est le nombre de paires d'étoiles des données, normalisé, ayant une différence de vitesse dans un certain intervalle de vitesse. $\langle RR \rangle$ est la même chose avec un échantillon aléatoire créé à partir des lois gaussiennes déduites précédemment. Pour cela nous avons créé 1000 échantillons selon les mêmes lois et mélangé les composantes v_y et v_z . Enfin nous avons pris la moyenne de ces 1000 échantillons sur chaque intervalle pour calculer la fonction de corrélation. Les erreurs sur cette fonction sont calculées en supposant une incertitude poissonnienne (figure 6.3). Deux choses sont à remarquer : pour de faibles différences de vitesse, on constate un excès de structure comparé à l'échantillon aléatoire. Pour les grandes différences de vitesse, le nombre de paires dans les données sont en très fort excès : cela est probablement dû aux étoiles ayant des orbites rétrogrades.

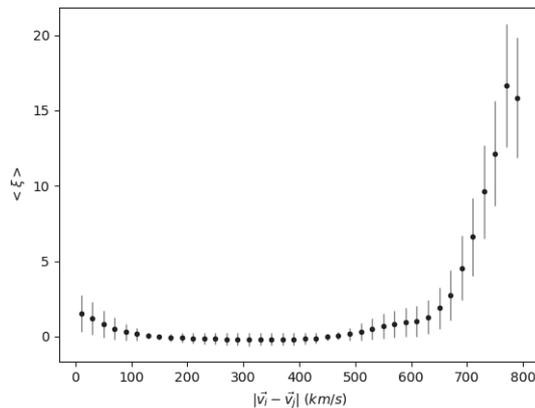


FIGURE 6.3 – Fonction de corrélation en fonction de la différence en vitesse pour nos données comparées à une distribution gaussienne déduite. Un excès de structures est clairement visible pour les petites et grandes différences.

6.2 Espace des intégrales du mouvement

Il a été montré (Helmi and de Zeeuw 2000) que les structures accrétées dans le halo possédaient une signature particulière dans l'espace des intégrales du mouvement. Même après avoir été incorporé et donc subi plusieurs processus de perte d'information, on peut retrouver ces groupes d'étoiles. En effet, les intégrales du mouvement étant par définition constantes le long des orbites, et donc, en simplifiant, au cours du temps, on s'attend à ce que les groupes d'étoiles observés aient gardé les mêmes dispositions dans cet espace des intégrales du mouvement. Il faut cependant relativiser de tels propos :

le potentiel de la galaxie est mal défini, et on le suppose ici axisymétrique, et donc seul le moment cinétique selon z est ici théoriquement conservé. Or, les changements pour les autres intégrales de mouvement sont tels que l'on conserve une certaine cohérence. On se propose ici de comparer les résultats obtenus par Helmi et ceux obtenus de la même manière en utilisant la troisième intégrale du mouvement ainsi qu'un potentiel plus réaliste (bien que, encore une fois, axisymétrique).

6.2.1 Choix du potentiel

La modélisation du potentiel par [Helmi et al. 2016](#) consiste en la superposition de 3 composantes : un potentiel logarithmique pour le halo, un potentiel de Miyamoto-Nagai pour le disque et un potentiel de Hernquist pour le bulbe, soient :

$$\Phi_{\text{halo}} = v_{\text{halo}}^2 \ln(1 + R^2/d^2 + z^2/d^2), \quad (6.3)$$

avec $v_{\text{halo}} = 173.2$ km/s, et $d = 12$ kpc,

$$\Phi_{\text{disk}} = -\frac{GM_{\text{disk}}}{\sqrt{R^2 + \left(a_d + \sqrt{z^2 + b_d^2}\right)^2}}, \quad (6.4)$$

avec $M_{\text{disk}} = 6.3 \times 10^{10}$, $a_d = 6.5$ kpc et $b_d = 0.26$ kpc, et

$$\Phi_{\text{bulge}} = -\frac{GM_{\text{bulge}}}{r + c_b}, \quad (6.5)$$

avec $M_{\text{bulge}} = 2.1 \times 10^{10}$ and $c_b = 0.7$ kpc. Nous avons préféré utiliser le potentiel du modèle de Besançon (en y excluant les composantes non-axisymétriques) qui nous semble plus réaliste. Cependant, loin du centre, ces deux modélisations sont approximativement constantes (voir figure 6.4) et ne diffèrent donc que d'une valeur constante ce qui permet la comparaison entre les 2 méthodes par la suite puisque la majorité des étoiles de notre échantillon se trouve à des distances suffisantes pour supposer la différence entre les deux potentiels constante (voir figure 6.5).

On trace alors les distributions des étoiles pour L_{\perp} et E en fonction de L_z (figures 6.6 et 6.7) dans un premier temps avec le potentiel de Helmi et L_{\perp} et E en fonction de I_3 avec le potentiel de Besançon (figures 6.8 et 6.9).

On remarque une forte surdensité pour $L_z \sim 1800 - 2000$ km/s kpc représentant vraisemblablement les étoiles appartenant au disque, nous indiquant en même temps qu'une amélioration de notre discrimination est possible. De

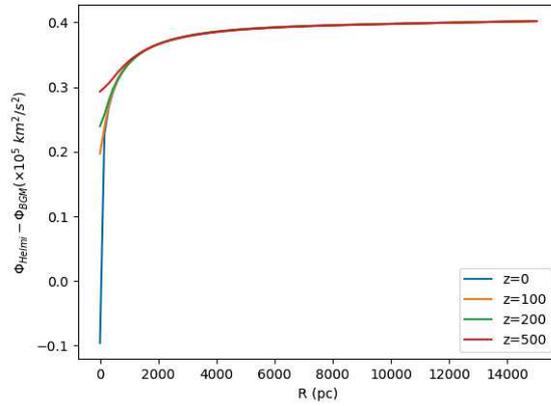


FIGURE 6.4 – Valeur absolue de la différence entre le potentiel proposé par Helmi et celui du modèle de Besançon. On constate que la différence devient constante pour des grandes distances au centre.

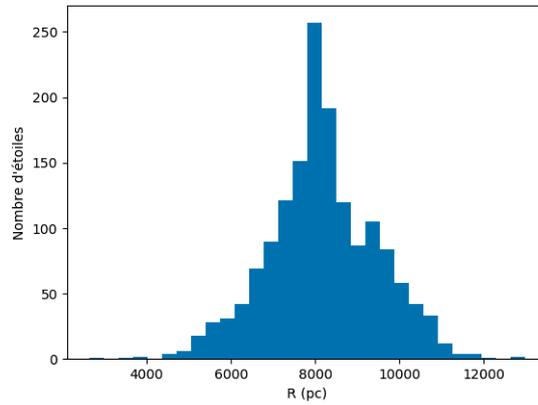


FIGURE 6.5 – Nombre d'étoiles de notre échantillon selon la distance au centre de la Galaxie. En comparant avec la différence de potentiel précédente, on constate que pour la majorité des étoiles, on peut supposer la différence de potentiel constante.

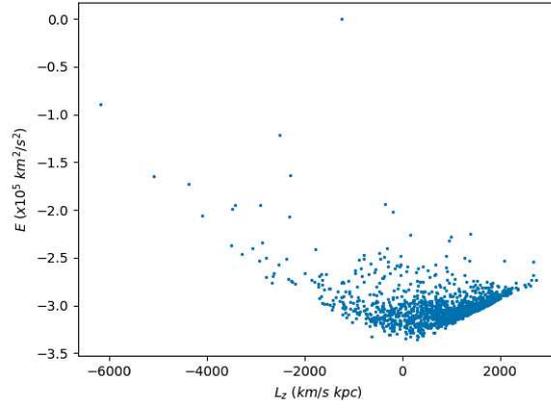


FIGURE 6.6 – Distribution des étoiles selon E et L_z avec le potentiel d’Helmi.

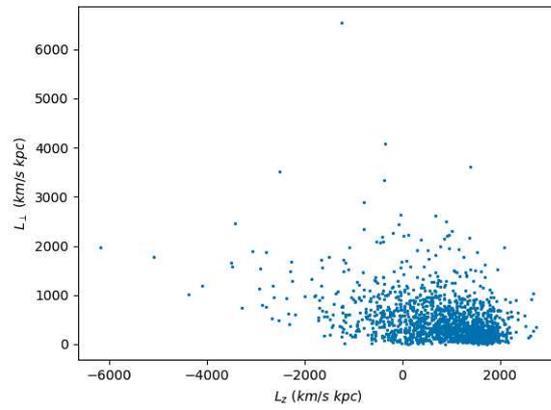


FIGURE 6.7 – Distribution des étoiles selon L_{perp} et L_z avec le potentiel d’Helmi.

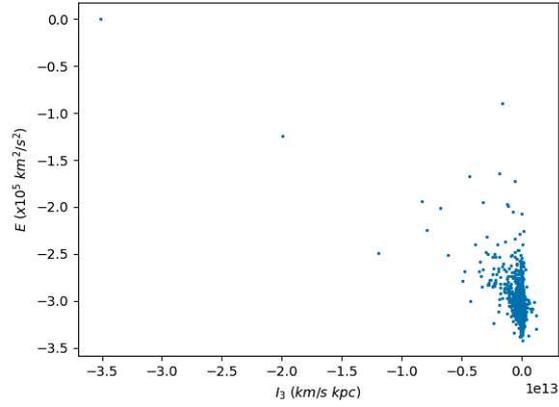


FIGURE 6.8 – Distribution des étoiles selon E et I_3 avec le potentiel de Besançon.

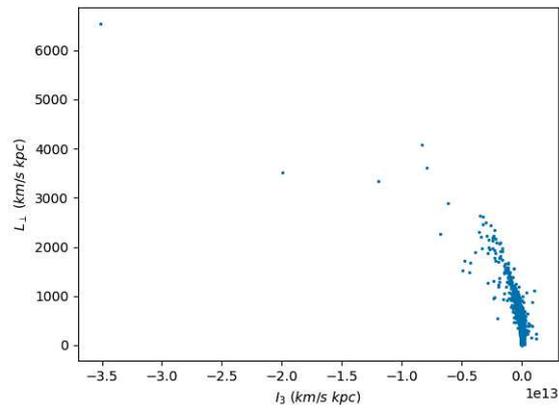


FIGURE 6.9 – Distribution des étoiles selon L_{perp} et I_3 avec le potentiel de Besançon.

plus, on observe que les étoiles à forte énergie de liaison ont un L_z faible rejoignant ainsi les conclusions d’Helmi.

On observe ici une forte concentration d’étoiles autour de $I_3 \sim 0$, indiquant une forte présence d’étoiles appartenant vraisemblablement au disque. La comparaison avec les 2 méthodes permet de confirmer ou d’infirmer la présence de groupes distincts qui, s’ils existent, devraient figurer sur les 2 diagrammes.

6.2.2 Surdensités

Afin de mettre en valeur des possibles surdensités significatives dans l’espace des intégrales du mouvement, nous utilisons la méthode d’estimation par noyaux : on peut voir cette méthode comme une généralisation de la méthode d’estimation par histogramme. A chaque donnée est attribuée une fonction, dite fonction de noyau qui est paramétrisée par un paramètre le lissage ou largeur. Ainsi faisant la somme de toutes ces fonctions, nous obtenons une estimation de la densité des données. La fonction de noyau utilisée est celle d’Epanenchikov qui donne des résultats optimaux. Les largeurs de noyau sont déterminées au préalable par validation croisée en testant plusieurs largeurs entre 0 et 1 et nous aboutissons à une largeur de noyau optimal de 0.18. Nous obtenons au final une estimation de densité dans l’espace des intégrales du mouvement (figures 6.10 et 6.11). Nous avons séparé les groupes d’étoiles appartenant au halo et au disque. Pour mieux caractériser les surdensités, nous appliquons un filtre afin de localiser les maxima locaux : nous en trouvons 16 pour la méthode Helmi et 10 pour notre méthode.

Cependant, un tel traitement suppose idéalement que nous connaissons la position exacte de chaque étoile dans cet espace. Or si l’on tient compte des incertitudes, les conclusions sont battues en brèches : malgré le traitement statistique effectué par Helmi, nous jugeons que ces incertitudes, trop importantes, empêchent toutes conclusions raisonnables (figure 6.12). En effet, si nous traçons ces mêmes cartes de densités, on s’aperçoit immédiatement que la position de chaque étoile est bien trop incertaine pour la supposer appartenir à un groupe distinct plutôt qu’un autre.

6.2.3 Améliorations possibles

Depuis ces travaux, le DR2 de Gaia a été publié et l’on dispose maintenant de mesures précises pour la parallaxe et les mouvements propres pour plus de 1 milliard d’étoiles. Ce nouveau data release inclut notamment les vitesses radiales pour plus de $7 \cdot 10^6$ étoiles, ce qui est une source considérable comparée à RAVE. Il serait alors intéressant de réitérer les méthodes utilisées

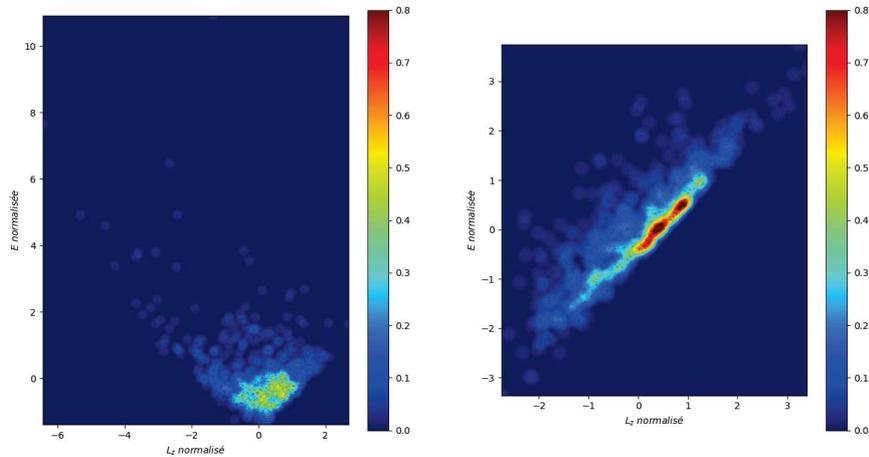


FIGURE 6.10 – A gauche, carte de densité du halo dans l’espace des intégrales du mouvement. A droite, la même carte mais pour les étoiles du disque. Le code couleur indique l’estimation de densité.

(en recoupant avec d’autres catalogues pour la métallicité) avec cette fois ci des incertitudes moindres. L’utilisation du nouveau potentiel de Besançon obtenu par cohérence dynamique, qu’on pense représenter plus fidèlement le potentiel réel de la Galaxie, pourrait paraître superflue au vu de la position des étoiles sélectionnées; cependant, la solidité des conclusions nous paraissent augmentées en utilisant un tel potentiel. Si la comparaison des méthodes pourraient confirmer les découvertes d’Helmi, et en infirmer certaines autres, il est naturel de lui laisser la paternité de l’idée essentielle. La troisième intégrale pourrait alors se révéler utile pour de telles recherches de sous-structures dans le halo, contribuant alors modestement à ce champ de recherche très actif.

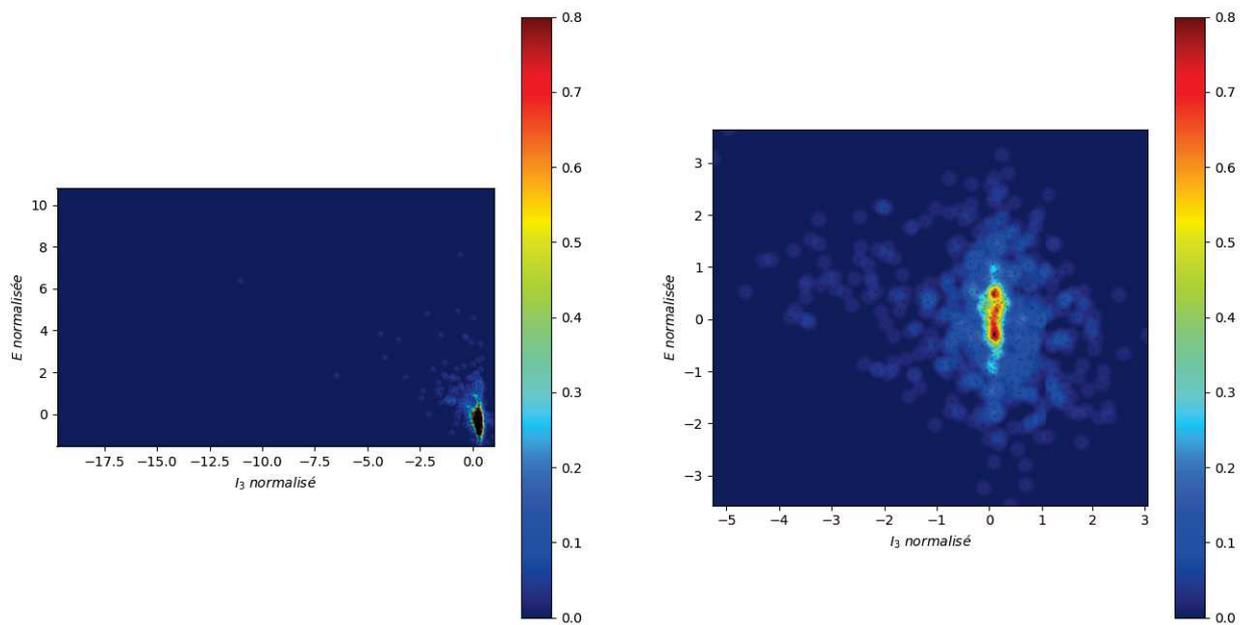


FIGURE 6.11 – A gauche, carte de densité du halo dans l’espace des intégrales du mouvement. A droite, la même carte mais pour les étoiles du disque. Le code couleur indique l’estimation de densité. L_z est ici remplacé par I_3 et le potentiel utilisé est celui de Besançon.

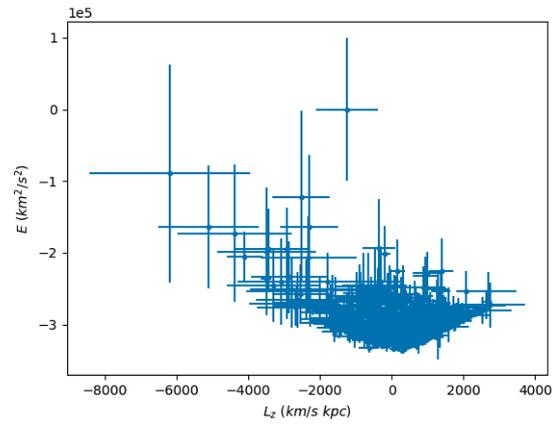


FIGURE 6.12 – Distribution des étoiles selon L_{perp} et L_z avec le potentiel d’Helmi avec les barres d’erreurs. Ici on suppose que les incertitudes ne proviennent que des vitesses.

Conclusions

La cinématique et la dynamique galactiques sont des champs de recherche cruciaux pour la compréhension des galaxies. Le mouvement des étoiles est dicté par le potentiel gravitationnel sous-jacent et l'observation des vitesses permet de déduire les forces mises en jeu ainsi que ce potentiel. La compréhension de nombreux aspects de la Galaxie, sa forme, sa composition, son histoire, passent nécessairement par la modélisation et la compréhension de sa dynamique et de sa cinématique.

L'approche que nous avons développée dans cette thèse est celle d'un modèle dynamique stationnaire d'une galaxie axisymétrique qui doit permettre une description rigoureuse des champs de vitesse stellaire.

Ce modèle repose sur l'écriture de fonctions de distribution stationnaires dépendant de trois intégrales du mouvement. Ces fonctions de distribution stationnaires sont solutions de l'équation de Boltzmann sans collision et sont donc des solutions exactes pour représenter la cinématique et la densité stellaires de disques. Nos fonctions de distribution correspondent à des disques stellaires ayant des densités décroissantes exponentiellement avec le rayon galactique. De même pour la cinématique, les dispersions de vitesses décroissent exponentiellement. Ces lois de densité ont un nombre réduit de paramètres : les échelles de longueur, la densité et la cinématique à la position du soleil. Nous avons pu étendre la cohérence dynamique du modèle de Besançon à l'ensemble de la Galaxie, en dehors des 3 kpc centraux où par ailleurs la Galaxie n'est plus axisymétrique. Ceci est un progrès sensible comparé à la cohérence locale développée en 1987 pour le modèle de Besançon. Nous avons développé les programmes nécessaires à la construction des modèles dynamiquement cohérents.

Nous noterons que seuls les algorithmes développés par le groupe d'Oxford, basés également sur des intégrales du mouvement, proposent une approche similaire et permettent de construire des fonctions de distribution stationnaires (et donc cohérentes avec le potentiel gravitationnel). Cependant l'approche utilisée ici est fortement analytique ; il en résulte un gain considérable en temps de calcul, élément important quand il s'agit de consti-

tuer des catalogues de millions de pseudos-étoiles.

On notera que le choix de lois exponentielles pour modéliser les disques est arbitraire. Le choix de distributions de vitesses radiales et verticales gaussiennes est également arbitraire. L’histoire ne se termine pas ici et les observations Gaia permettront de vérifier ces hypothèses. Si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, nous pourrions reconstruire les fonctions de distribution en fonction de ces nouvelles contraintes. Enfin il faut noter que le centre galactique dominé par une barre et de forts mouvements non-axisymétriques n’est pas modélisable par notre modèle.

La modélisation cinématique du modèle de Besançon est améliorée :

- les distributions de vitesse sont maintenant contraintes par la fonction de distribution ; plus particulièrement, les distributions en V et W ,
- le courant asymétrique n’est plus un paramètre libre, il est déterminé exactement,
- les dispersions de vitesse en z sont très proches de celles trouvées par Robin et al 2014 et 2017, indiquant que la cohérence était déjà appliquée pour les faibles z .

Perspectives

A long terme, on pourra envisager de déterminer précisément le potentiel gravitationnel Galactique et après une détermination précise de la masse baryonique que permettra le modèle de Besançon, il sera possible de définir la forme et l’aplatissement du halo noir, ainsi que sa contribution exacte au voisinage du plan Galactique. Un modèle axisymétrique cohérent permettra de définir un modèle stationnaire de référence et donc de mesurer exactement les écarts à la stationnarité et l’amplitude des perturbations et des forces perturbatives. Enfin, l’espace des intégrales du mouvement est un espace privilégié pour la détection des débris et des restes d’anciennes accrétions dans le halo Galactique, la troisième intégrale pouvant se révéler utile pour une discrimination plus précise de groupes d’étoiles.

A court terme, les perspectives et la poursuite de ce travail concernent d’abord l’intégration de notre modèle dynamiquement cohérent dans le programme de tirage de catalogues de données simulées du modèle de Besançon. Actuellement, notre modèle est intégré en tirant les densités selon les lois auto-cohérentes. Cependant, pour les vitesses, on se contente de supposer des distributions de vitesses gaussiennes ayant pour dispersion et courant asymétrique, celles du modèle auto-cohérent. Ceci est une bonne approximation. Toutefois, cela ne prend pas en compte les corrélations entre les trois composantes des vitesses et surtout cela néglige le fait que la distribution de

la composante V de la vitesse s'écarte fortement d'une gaussienne pour les grandes dispersions de vitesse. Ce dernier problème sera résolu simplement en modifiant et agrandissant de façon ad hoc les tables décrivant les fonctions de distribution, afin de réaliser un tirage selon les distributions marginales $f(v)$. Réaliser les tirages des vitesses exactement selon les fonctions de distribution auto-cohérentes nécessitera beaucoup plus de cpu et de stockage mémoire, mais permettra de considérer correctement les couplages entre les différentes composantes des vitesses U , V et W .

Il serait toutefois possible de s'affranchir de cette difficulté en évitant de faire la comparaison du modèle aux observations au travers d'histogrammes des distributions marginales (par exemple des vitesses U , V ou bien W etc). En effet, si on calcule directement la vraisemblance d'un modèle donné pour un jeu d'observations $(x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i)$, i allant de 1 à N étoiles mesurées, on a simplement besoin de calculer les probabilité $p(x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i) = FD(x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i) / \rho(x_i, y_i, z_i)$. La normalisation ne tient compte que de la densité spatiale en (x, y, z) du catalogue des observations, quantité immédiate à calculer. Ce calcul de la vraisemblance du modèle ne nécessite plus aucune approximation et serait beaucoup plus rapide en cpu.

Annexe A

Article

A new dynamically self-consistent version of the Besançon Galaxy Model

O. Bienaymé¹, J. Leca¹, and A. C. Robin²

¹ Observatoire astronomique de Strasbourg, Université de Strasbourg, CNRS, 11 rue de l'Université, F-67000 Strasbourg, France

² Institut Utinam, CNRS UMR 6213, Université de Franche-Comté, OSU THETA Franche-Comté-Bourgogne, Observatoire de Besançon, BP 1615, 25010 Besançon Cedex, France

Received / Accepted

ABSTRACT

Context. Dynamically self-consistent galactic models are necessary for analysing and interpreting star counts, stellar density distributions, and stellar kinematics in order to understand the formation and the evolution of our Galaxy.

Aims. We modify and improve the dynamical self-consistency of the Besançon Galaxy model in the case of a stationary and axisymmetric gravitational potential.

Methods. Each stellar orbit is modelled by determining a Stäckel approximate integral of motion. Generalised Shu distribution functions (DFs) with three integrals of motion are used to model the stellar distribution functions.

Results. This new version of the Besançon model is compared with the previous axisymmetric BGM2014 version and we find that the two versions have similar densities for each stellar component. The dynamically self-consistency is improved and can be tested by recovering the forces and the potential through the Jeans equations applied to each stellar distribution function. Forces are recovered with an accuracy better than one per cent over most of the volume of the Galaxy.

Key words. Methods: numerical – Galaxies: kinematics and dynamics

1. Introduction

The Besançon Galaxy Model (Robin & Crézé 1986a,b; Bienaymé et al. 1987; Marshall et al. 2006; Reylyé et al. 2009; Robin et al. 2012, 2014; Amôres et al. 2017; Lagarde et al. 2017, 2018) has been created to model the observed Galactic star counts, to allow predicted star counts, and to give insight on the structure, formation, and evolution of our Galaxy. It is a synthesis model that includes essential elements of our current knowledge of the Galactic physics. A model of this kind is a natural extension and modern generalisation of methods based on the equation of stellar statistics (von Seeliger 1898). Many similar models have been developed; we can cite a few of the most recent developments (Girardi et al. 2005; Binney 2012; Sanders & Binney 2014; Binney et al. 2014; Sharma et al. 2014; Vasiliev 2018; Sysoliana et al. 2018). The Besançon model is based on a set of Galactic components for the ISM, stars, and dark matter. The stellar density distribution is described with stellar components, each component having different characteristics of stars with ranges of ages, abundances, and radial gradients. The model reproduces observed star counts. It can anticipate or predict the results of star counts with many of the existing photometric wide bands. The transformation of stellar parameters (effective temperature, gravity, metallicity) to observables (magnitude and colours) is done with semi-empirical atmosphere model grids (Lejeune et al. 1997; Westera et al. 2002), the so-called BaSeL libraries. For the very cool dwarfs with temperatures lower than about 4000 K, we use the NextGen models (Allard et al. 1997; Baraffe et al. 1998; see also Schultheis et al. 2006). Among some of the recent improvements, we mention the introduction of non-axisymmetric components like the inner bar structure (Robin et al. 2012). The model also includes a detailed modelling of

the extinction allowing an accurate description of observations towards directions close to the Galactic plane (Marshall et al. 2006). The model is periodically updated with the regular advances of our knowledge of Galactic properties, stellar properties, and luminosities (Schultheis et al. 2006; Czekaj et al. 2014; Mor et al. 2017; Amôres et al. 2017; Lagarde et al. 2017, 2018), binarities, abundances, stellar kinematics, and dynamics. Here we are concerned with the improvement of the dynamics of the model, and we mention the preceding introduction of the kinematical properties of stars (Robin & Oblak 1987), and the introduction of a dynamical consistency in the solar neighbourhood (Bienaymé et al. 1987). This dynamical consistency relates the thickness of the stellar components to their vertical velocities through the vertical gravitational potential close to the solar Galactic radius R_0 . In Bienaymé et al. (1987) the dynamical consistency is restricted to the solar neighbourhood. A similar Galactic model, but with an inner bar and a dynamical consistency restricted to the solar neighbourhood, is being produced (Fernández-Trincado et al., in preparation).

It has been known for decades that globally dynamically consistent models of the Galaxy can be built (McGill & Binney 1990; Kent & de Zeeuw 1991; Famaey & Dejonghe 2003), but only recently have practical tools been developed using action integrals (Binney 2012) or energy-integrals that achieve excellent accuracy (Bienaymé et al. 2015). In the present paper the consistency is extended to a much broader space, nearly 95 % of the volume occupied by the stellar discs, with the exception of the very inner part of the Galaxy model. Our dynamical model assumes axisymmetry, a hypothesis not satisfied in the inner part of the Galaxy.

To model the distribution of the stellar disc components, we define general distribution functions depending on three integrals of motion, the energy, the angular momentum, and a third approximate integral. They are derived from the Shu distribution function (DF).

The arrival and publication of Gaia data offer the possibility to probe a wide volume of the Galaxy with unprecedented accuracy. It implies that the quality of the modelling must be realised with regard to these exceptional data. Owing to the exquisite accuracy of observations, many Gaia data can be directly inverted to recover 3D positions and velocities of stars with negligible bias. This makes it simpler to perform the analysis within an extended neighbourhood of the Sun, and it avoids the difficulties of applying classical analysis based on the apparent magnitudes, proper motions, radial velocities, or spectrophotometric distances. In particular, Gaia data will allow us to measure with a never achieved precision the Galactic potential over an extended domain. Determining accurately the mass contribution of the visible matter, a challenge even with Gaia data, and subtracting it from the total dynamical mass computed from the potential, will allow us to draw very precisely the dark matter density distribution. One way to achieve this goal consists in building dynamically self-consistent Galactic models that relate the kinematics and the number density for each stellar population through the collisionless Boltzmann equation under the hypothesis of stationarity. Such models are based on explicit distribution functions (Ting et al. 2013; Binney et al. 2014; Bovy 2015; Bienaymé et al. 2015; Binney & McMillan 2016; Vasiliev 2018) and these available models follow identical approaches (see a compilation by Sanders & Binney 2016) using Stäckel fits and fitting orbits with actions at the exception of Bienaymé et al. (2015) who used analytic integrals of motion. With the exception of Sanders & Binney (2015) who develop a triaxial model, these models do not yet include non-axisymmetric effects, for instance related to a triaxial dark matter halo or to elliptical discs. Naturally, other approaches are possible, similar to these based on N body simulations (Chemin et al. 2015) and also attempts to numerically fit more general integrals of motion from torus reconstruction (Prendergast 1982; McGill & Binney 1990; Robnik 1993; Kaasalainen 1994; Kaasalainen & Binney 1994; Bienaymé & Traven 2013). Finally, we note that building a stationary model is a first step in order to determine the amplitude of non-stationarity and can be used as a reference state to analyse non-stationarities like perturbations.

In this paper, we detail the way we generalise the self-consistent dynamical modelling for an axisymmetric version of the Besançon Galaxys Model (BGM). The accuracy of this method is quantified in Bienaymé et al. (2015). It is shown that the 2014 version of the BGM (Robin et al. 2014) is not far from the dynamical self-consistency and that the majority of orbits are conveniently described in the frame of Stäckel potentials. An important test consists in recovering the full Galactic potential from the Jeans equation using distribution functions built with the mean of integrals of motion. Applying our method, the vertical and radial forces and the total mass density are recovered with an uncertainty smaller than one percent in a large volume of the Galaxy.

Our approach of the dynamical self-consistency is formally identical to that developed by Sanders & Binney (2016) also using the formalism of Stäckel potential. A significant difference is that we use an explicit analytic expression of the integrals, but

not the numerically integrated actions. Another aspect is that our analytic expressions are rapidly evaluated.

This paper presents the different steps used to build a dynamically consistent version of the Besançon model. The first step is the determination of the gravitational potential based on usual methods, and then the determination of the approximate third integrals for any point in the phase space. It follows with the description of distribution functions for disc stellar populations based on a generalisation of the Shu DF. Then we present a comparison of the previous BGM2014 version with this new one.

2. Potentials

The core of the dynamical modelling is the calculation of the gravitational potential and forces. Their determinations do not present critical difficulties in the present context of components without a central cusp and with a null density at large distances. A review of some numerical methods is given in Vasiliev (2018). In the different versions of the BGM (Bienaymé et al. 1987; Robin et al. 2012, 2014), the components either have an explicitly known potential-density pair or, in the case of the ellipsoidal density distributions with Einasto profiles, the potential is determined with a single integration. Comparing our new version, presented here, with the BGM2014 version (Robin et al. 2014), three of the analytical density components of the BGM—the youngest stellar disc, the ISM, and the stellar halo are not modified—but we change the analytic expression for the dark matter to allow its flattening. In the previous BGM versions the stellar densities are modelled with Einasto profiles or with modified double exponential profiles. Within this new version, stellar discs, which are dynamically consistent, are numerically determined and tabulated on a (R, z) coordinate grid. Furthermore, the density of stellar components are set null beyond a cut-off radius, $R_{cut} \simeq 15$ kpc (see Amôres et al. 2017). We also introduce a vertical cut with a null density beyond $z_{cut} = \pm 4$ kpc (the dynamical modelling of thin discs gives a density at 4 kpc four orders of magnitude or more smaller than at $z = 0$ and thus is numerically negligible). We leave the youngest analytical disc unchanged since this component is not in a stationary equilibrium state and does not need a stationary dynamical modelling.

Potential and forces must be determined accurately and the numerical computation must be fast enough. We consider that this implies relative errors on forces smaller than three thousandths everywhere. Within the disc, this is sufficient to accurately distinguish the amount of dark matter from the visible matter. To compute the gravitational potential we consider the total density from the Galactic components having a cut-off radius (stellar discs and ISM). Other components, e.g. dark matter and the stellar halo, are treated separately.

We solve the 3D Poisson equation in cylindrical coordinates in the axisymmetric case

$$\Delta \phi(R, z) = 4 \pi G \rho(R, z) \quad (1)$$

using a finite difference algorithm.

The density is discretised on a grid with 2^N points along the R and z directions, respectively, from 0 to $R_{max} = 61$ kpc and from 0 to $z_{max} = 10$ kpc. The Poisson equation is solved with boundary conditions (BC) defined along two lines $\phi(R_{max}, z)$ and $\phi(R, z_{max})$. They are numerically determined with the equation

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \iiint \rho(\mathbf{x}') \times \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (2)$$

Significantly higher values of R_{max} and z_{max} are chosen than the outer cut-off radius of the density distributions to avoid the singularities of the Green's function for gravitational potential and to minimise its variation between neighbouring points of the grid. The density is evaluated and the integration performed applying the Simpson rule on a grid with steps $\Delta x = \Delta y = 50$ pc and $\Delta z = 40$ pc.

The numerical integration of Eq. 1 is performed iteratively and to reduce the computing time N is progressively increased from 5 to 7 (the number of grid points passing from 32×32 to 128×128 with final steps $dR=480$ pc and $dz=80$ pc). The potential and forces outside of the grid points are interpolated with a bicubic spline that ensures the continuity of the derivatives at positions on grid points. The final accuracy depends on the different grid sizes, the grid to sample the density distribution, the one used to compute the BC, and the one to solve the Poisson equation. The potential is used to determine the stellar distribution functions (see Section 4) and the forces to compute the orbits. Forces are also needed to test the self-consistency of the dynamical model by checking the numerical exactness of the Jeans equations. This last test is mandatory if we want to accurately determine the total Galactic mass distribution through the density and kinematics of stellar populations (Bienaymé et al. 2015). Applying the dynamical consistency to the BGM2014 version (Bienaymé et al. 2015), we obtain an accuracy better than three thousandths over a wide volume. A better accuracy of one thousandth can be obtained using a 256×256 grid to solve the Poisson equation, but with a computing time that is a factor of 30 times longer.

In the previous versions of the BGM the spherical dark matter halo potential is given in spherical coordinates by

$$\phi(r) = -4\pi G \rho_c r_c^2 \left[1 - \frac{1}{2} \log(1 + r_s^2) - \arctan(r_s)/r_s \right] \quad (3)$$

with $r_s = r/r_c$. This corresponds to a density distribution characterised by its core radius r_c and central density ρ_c

$$\rho(r) = \rho_c \frac{r_c^2}{r^2 + r_c^2} \quad (4)$$

providing a flat rotation curve at large radius.

We modify this dark halo potential by replacing r^2 with $R^2 + z^2/q^2$ in cylindrical coordinates to allow a halo flattening. The resulting density remains positive if $q > 0.5$ and thus is also positive for usually accepted values of the potential flattening.

Adding visible and dark matter components, the dark matter core radius r_c and central density ρ_c are adjusted in order to reproduce the observed rotation curve (Sofue 2012). The flattening q of dark matter halo is adjusted to reproduce the known local mass density and local dark matter density (Bienaymé et al. 2014).

3. Stäckel fit to a stellar orbit

Stationary distribution functions (DFs) can be written depending on the integrals of motion to model the density and kinematical

distribution of stellar discs. In the case of Stäckel potentials three such integrals of the motion are known and can be expressed analytically (Lynden-Bell 1962; de Zeeuw 1985a,b). These integrals can be used to build DFs and appropriate ones are the extension of the Shu DFs with nearly isothermal distribution of velocities.

Stäckel potentials cover a relatively large variety of potentials with many orbits, similar to those in realistic galactic potentials. The Galactic potential can be globally approximated with a Stäckel potential (De Bruyne et al. 2000; Famaey & Dejonghe 2003). However, concerning the distribution functions of stars, it is more interesting to consider separately the orbits and to find, independently for each orbit, the associated Stäckel potential that provides the best approximate third integral. For an axisymmetric potential, two integrals are the energy and the angular momentum, and it is always possible to express explicitly the third integral as a function of the potential (see below). This analytic expression can be used as an approximate integral for a non-Stäckel potential. The only free parameter z_0 is adjusted by minimising the variance of the approximated third integral along each orbit (z_0 defines the confocal ellipsoidal coordinate system associated to a Stäckel potential). In practice, we adjust only one z_0 value for each family of orbits having the same energy E and the same angular momentum L_z . Then we tabulate the corresponding fitted function $z_0(E, L_z)$.

With the definition given below, the third integral is exact and null for the orbits confined in the plane. The maximum values of this third integral are reached for orbits close to the shell-like orbits (high z -vertical extensions and small radial extensions when they cross the Galactic plane). If z_0 is modified, the variance of the approximate third integral along orbits simultaneously increases or decreases for all the orbits with the same E and L_z . Since the variance is minimum for the shell-like orbits (see figure 3 in Bienaymé et al. 2015), to determine the best fitting z_0 , it is safer in computing time to consider only these shell orbits. Furthermore, it is sufficient to follow these shell orbits for a short time with a single vertical excursion out of the Galactic plane.

Other methods to approximate a third integral were proposed and are based on the determination of the actions (for a recent review, see Sanders & Binney 2016). The method that is presented here is similar to what was published in Kent & de Zeeuw (1991), where our third integral expression (see Eq. 6 below) can be recovered by substituting their equation 14 in equation 13 and the energy by the Hamiltonian. By comparing three different methods to approximate the third integral, Kent & de Zeeuw (1991) noted that this method is the most accurate.

Our method is based on the fact that for an orbit passing through the point $(x, y) = (\lambda_0, \nu_0)$ we associate the potential ϕ to a Stäckel potential $\phi_{Staeckel}$, and both potentials are assumed to be identical along the two lines $\lambda = \lambda_0$ and $\nu = \nu_0$ (a complete discussion of Stäckel potentials and ellipsoidal coordinates is given in de Zeeuw 1985a,b). This is quite similar to what is done in Sanders & Binney (2014) or Vasiliev (2018) before they determine numerically the actions with a quadrature. Other ways to proceed to a Stäckel approximation are given in Sanders & Binney (2016) or Vasiliev (2018). Here, we were also able to determine the action since with the E and I_3 expressions, it is straightforward to deduce the equation of the section of the phase space (R, v_R) and $(z = 0)$. Then the action is obtained through a numerical quadrature.

Third integral: We reproduce in Eq. 5 the expression of a third integral depending on the coordinates and the potentials (see Bienaymé et al. 2015). Elliptical coordinate systems and Stäckel

potentials are presented in de Zeeuw (1985a,b). One of the usual forms given for the third integral is

$$I_s = \Psi(R, z) - \frac{1}{2} \frac{L^2 - L_z^2}{z_0^2} - \frac{1}{2} v_z^2, \quad (5)$$

where L and L_z are the total and vertical angular momenta, z_0 a fixed parameter, v_z the vertical velocity, and the function ψ can be written with its potential dependence (Bienaymé et al. 2015)

$$\Psi(R, z) = - \left[\phi(R, z) - \phi(\sqrt{\lambda}, 0) \right] \frac{(\lambda + z_0^2)}{z_0^2}, \quad (6)$$

with ϕ the potential and λ one of the ellipsoidal coordinates:

$$\lambda = \frac{1}{2}(R^2 + z^2 - z_0^2) + \frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + z^2 - z_0^2)^2 + 4R^2 z_0^2}. \quad (7)$$

We use a normalised third integral I_3 that varies with Stäckel potentials from 0 for the orbits confined to the plane to 1 for the shell orbits

$$I_3 = - \frac{I_s}{(E - E_c)} \left(1 + \frac{R_c^2}{z_0^2} \right)^{-1}, \quad (8)$$

with E the total energy; $E_c(L_z)$ and $R_c(L_z)$ are respectively the energy and the radius of the circular orbit that have the angular momentum L_z .

The benefit of this simple formulation is that the third integral explicitly depends on the potential. Generalisation to non-axisymmetry with three planes of symmetry is possible with a second and a third integral also written with their potential dependence (in preparation).

4. Distribution functions for stellar discs

Within the BGM, the DFs represent the number density of stars within the phase space. Their characteristics, age, mass, and abundances are extensions of the DFs with more variables and they are defined elsewhere in the BGM model. Concerning the kinematics, a stationary distribution function of positions and velocities is a solution of the collisionless Boltzmann equation and can be expressed as a function of the isolating integrals of motion. Here we extend to 3D the Shu DFs that were built to define 2D stationary exponential discs (Shu 1969). The 3D extension is achieved owing to Stäckel potentials that admit three integrals of motion. The Shu DF depends on E and L_z . The 3D generalisation includes the vertical motions and the distribution outside of the $z = 0$ disc by adding a vertical nearly isothermal distribution using a third integral. This generalisation is defined in Bienaymé (1999) to analyse local samples of Hipparcos stars and is also used to determine the local density of dark matter, modelling stellar samples of RAVE stars (Bienaymé et al. 2014).

In the case of Stäckel potentials a generalised Shu DF can be written as

$$f(E, L_z, I_3) = g(L_z) \exp(-E_R/\tilde{\sigma}_R^2 - E_z/\tilde{\sigma}_z^2) \quad (9)$$

with

$$E_R = (E - E_c)(1 - I_3) \quad (10)$$

and

$$E_z = (E - E_c)I_3 \quad (11)$$

with I_3 varying from 0 to 1. The full I_3 expression is given in equations 1 and 4 in Bienaymé et al. (2015) and in Eqs. 5–8,

$$\tilde{\sigma}_R = \tilde{\sigma}_{0,R} \exp(-R_c(L_z)/R_{\sigma_R}), \quad (12)$$

$$\tilde{\sigma}_z = \tilde{\sigma}_{0,z} \exp(-R_c(L_z)/R_{\sigma_z}), \quad (13)$$

$$g(L_z) = \frac{2\Omega(R_c)}{\kappa(R_c)} \frac{\tilde{\rho}(R_c)}{(2\pi)^{3/2} \tilde{\sigma}_R(R_c)^2 \tilde{\sigma}_z(R_c)}, \quad (14)$$

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 \exp(-R_c(L_z)/R_\rho). \quad (15)$$

The parameters $\tilde{\sigma}_R$ and $\tilde{\sigma}_z$ allow us to define the radial and vertical velocity dispersions that have nearly exponential radial decreases with the scale lengths R_{σ_R} and R_{σ_z} . The parameter $\tilde{\rho}$ defines the density distribution that is also nearly exponential with the scale length R_ρ . The parameters $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{\sigma}_{0,R}$, and $\tilde{\sigma}_{0,z}$ scale the global amplitudes of the density and velocity dispersions. The thicknesses of these discs are no longer free parameters and they are constrained by the $\tilde{\sigma}_z$ and the R_{σ_R} parameters. We write each of the free model parameters with a tilde. For small velocity dispersions, the exact velocity dispersions σ_R or σ_z are close to the functions $\tilde{\sigma}_R$ or $\tilde{\sigma}_z$, and the exact density distribution ρ is close to $\tilde{\rho}$. The parameters Ω and κ are the circular velocity and the epicyclic frequency.

If $I_3 = 0$ or $E_z = 0$, the DF (Eq. 9) reduces to the Shu DF with the density null outside of the mid-plane $z = 0$. At the opposite, and for Stäckel potentials, if $I_3=1$ (i.e. $E_R=0$), the corresponding orbits are the shell orbits. The volume occupied by shell orbits in a Stäckel potential is two-dimensional and these orbits are confined in an ellipsoidal sheet with no radial extension when they cross the plane at $z = 0$.

In the case of non-Stäckel potentials, as the BGM potential, the approximate third integral I_3 of the shell-like orbits reaches a maximum value, $I_{3,max}(E, L_z)$, that is different from 1 (see e.g. Ollongren 1962, figure 31 for extreme case of a thick shell orbit). Then, in the case of non-Stäckel potentials the DFs for stellar discs must be written using equation Eqs. 9–11 and replacing Eq. 10 with

$$E_R = (E - E_c)(I_{3,max} - I_3), \quad (16)$$

E_R specifies the amount of radial motion and E_z the amount of vertical motion.

Finally, we note that the DF (Eq. 9) is quasi isothermal, and exactly isothermal in the case of a separable potential in R and z coordinates. It is similar to the DFs used by Binney & McMillan (2011) since in the case of small departures from circular motions we have

$$E_R \simeq \kappa J_R \quad (17)$$

and

$$E_z \simeq \nu J_z, \quad (18)$$

where ν is the vertical frequency, J_R and J_z the radial and vertical actions.

Finally, we introduce a cut in the DF (Eq. 9), with $g(L_z) = 0$ if the angular momentum is larger than $L_{z,cut}=15 \text{ kpc} \times 200 \text{ km/s}$. This cut models the decrease in the stellar disc density distributions at large Galactic radii (Amôres et al. 2017)

5. Dynamically consistent model

The previous paragraphs detail the elements needed to build a dynamically consistent Galactic model and each stellar disc is characterised with a DF given by Eq. 9. These DFs are computed for an initially given potential. Since they generate new densities and a new potential, we iterate until obtaining the convergence of the potential and of the DFs. The resulting Galactic model depends on the list of the following free parameters $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{\sigma}_{0,R}$, $\tilde{\sigma}_{0,z}$, \tilde{R}_ρ , \tilde{R}_{σ_R} , and \tilde{R}_{σ_z} given for each stellar disc (i.e. the densities and velocity dispersions at the solar position and their respective scale lengths).

We apply the process to adjust the free parameters and fit the analytical density of each stellar disc of the BGM2014 version (Einasto profiles and modified double-exponential profiles). The fit is restricted radially to the domain $4 \text{ kpc} < R < 12 \text{ kpc}$ to avoid the modelling of the central hole of the BGM2014 analytic discs. The fit is also restricted vertically to a maximum z -height at 3 to 4 scale heights for each considered disc. Moreover for the thick disc, we restrict the fit to z -distances smaller than 1 kpc. These z -limits are introduced since within the 2004 BGM version there was no attempt to perform the dynamical consistency at larger z -distances. Our adjustment is achieved by a least-squares minimisation of the density profiles in the given ranges of R and z positions by using the MINUIT software (James 2004)

The quality of the fit of the density distributions (Figures 1 and 2) is excellent, revealing that the family of stellar density profiles were realistically chosen in Robin & Crézé (1986a,b). However in these models, the kinematics, which are dynamically consistent only in the solar neighbourhood, had to be improved and this is achieved with the dynamical modelling conducted here. This new modelling suppresses free parameters such as the velocity dispersion ratios σ_R/σ_θ and the disc scale heights. Furthermore, the asymmetric drift is determined exactly and is not approximated.

With the new version of the model, adjusting the kinematical parameters $\tilde{\sigma}_z$ and \tilde{R}_{σ_z} and the density parameters $\tilde{\rho}_0$ and \tilde{R}_ρ is the predominant factor that allows us to reproduce the BGM2014 densities of the stellar discs. Conversely, varying $\tilde{\sigma}_R$ and \tilde{R}_{σ_R} within reasonable values has a small impact on the vertical and radial density distributions of the stellar discs. These two last parameters will be constrained with observations and not by the dynamical self-consistency. Thus, these two parameters $\tilde{\sigma}_R$ and \tilde{R}_{σ_R} are currently fixed before they can be more tightly constrained by kinematical observations. Then we assume that $\tilde{R}_{\sigma_R} = \tilde{R}_{\sigma_z}$ and we fixed for each stellar disc the velocity dispersion ratio σ_U/σ_W at the solar position, respectively 2.1 for the thin discs (Gomez et al. 1997; Robin et al. 2017), 1.47 for the young thick disc, and 1.38 for the old thick disc (Soubiran et al. 2003; Robin et al. 2017).

Figure 1 (left) shows the vertical density distribution of the old thin disc (scale height around 230 pc) at three Galactic radii 4, 8, and 12 kpc, and Figure 2 (left) its radial distribution at four $z = 0, 200, 400,$ and 600 pc. The adjustment is satisfying. This is expected at $R = 8$ kpc since the BGM2014 version is built to be dynamically consistent up to $z = 1$ kpc. The fact that the fit is also satisfying at other galactic radii confirms that the choice of Einasto profiles in the BGM2014 version for the disc density was valuable with respect to the dynamics. For the other discs, the agreement between the BGM2014 and the new version is correct and is better for the thinner disc components with smaller vertical velocity dispersions. For the old thick disc, the vertical and radial density distributions (corresponding to a 795

pc scale height in the case of a $sech^2$ density law) are shown in Figures 1 and 2 (right). The agreement between both models is still correct. We note that at $R = 8$ kpc and below $z = 1$ kpc the fit is excellent, illustrating the exactness of the dynamical consistency of the BGM2014 version. However, at larger height above the Galactic plane, both models differ, and at two scale-heights, or 1.6 kpc height, the BGM2014 density for the old thick disc is 17 % too small.

Concerning the density scale length, the agreement between the two models is nearly perfect for the old thin disc. For the old thick disc, the agreement is obtained only for z lower than 1 kpc. We note that the flare present in the outskirts of the Galaxy could be naturally modelled by adjusting the vertical velocity dispersions at large Galactic radii.

Table 1 gives the relative difference in percentage between the new and the old models at different heights z and at $R = 8$ kpc, for the old thin and old thick discs. The differences increase with z ; they become significant at three scale heights for the old thin disc and beyond 1 kpc for the old thick disc. At high z , the differences become of the order of the expected density of the stellar halo, and this illustrates the necessity of using dynamically self consistent distribution functions to properly identify and separate the Galactic stellar components. However, only observations will tell us whether our choice of nearly isothermal modelling of stellar discs is the correct one since small changes in the wings of the velocity distribution at low z impact the vertical density distribution at high z . Other choices of DFs could produce similar densities and velocities at low z and different densities at high z .

Table 1. Density differences (in percentage) between the BGM2004 version and the new dynamically self-consistent model for the old thin and old thick discs at $R = 8$ kpc and various z .

old thin disc				
z (pc)	200	400	600	800
diff(%)	-2.3%	-1.1%	+5%	+13%
old thick disc				
z (pc)	800	1600	2400	3200
diff(%)	-2.5%	+17%	+60%	+263%

The vertical velocity dispersion of each stellar component at ($R_0, z = 0$) is marginally modified in the new version compared with the BGM2014 version (see Table 2). This is a consequence of the fact that the self-consistency was already applied at low z .

Table 2. Previous (Robin et al. 2014, 2017) and new vertical velocity dispersions in km.s^{-1} for disc 2 to 7 components and the two young and old thick disc components (8 and 9) at $R_0 = 8$ kpc and $z = 0$.

disc	2	3	4	5	6	7	8	9
previous	8	10	13.2	15.8	17.4	17.5	28	59
new	7.3	9.9	13.4	16.0	17.5	17.6	26.4	51

Figure 3 shows at different z the radial variations of σ_U and Figure 4 the variations of σ_W . The velocity dispersions σ_U and σ_W are the major and minor axes of the velocity ellipsoid (i.e. σ_R and σ_z if $z = 0$). By construction, their radial variations are nearly exponential. For the old thin disc, we do not see significant z -variation of the kinematical scale lengths, R_{σ_R} and R_{σ_z} .

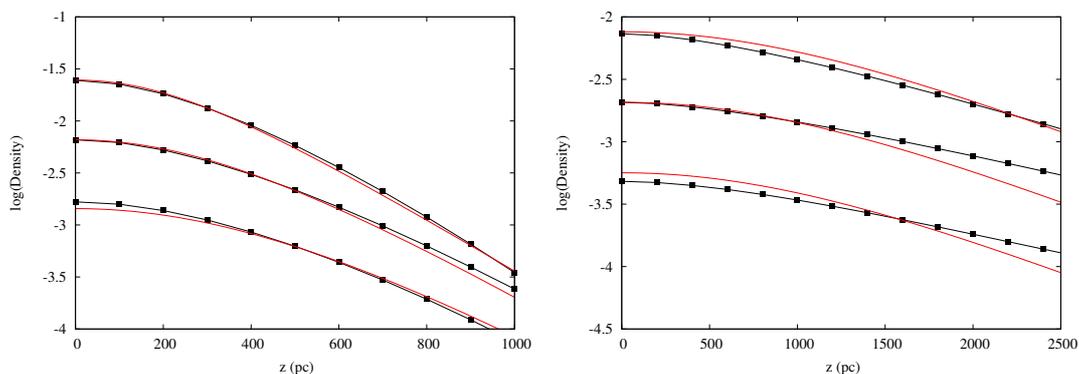


Fig. 1. Vertical density distributions for the old thin stellar disc (left) and the old thick disc (right) at three Galactic radii $R = 4, 8,$ and 12 kpc. Red lines: the old thin disc Einasto profile (left) and the old thick disc profile (right) from the BGM2014 version. Black squares and lines: dynamically consistent fitted discs.

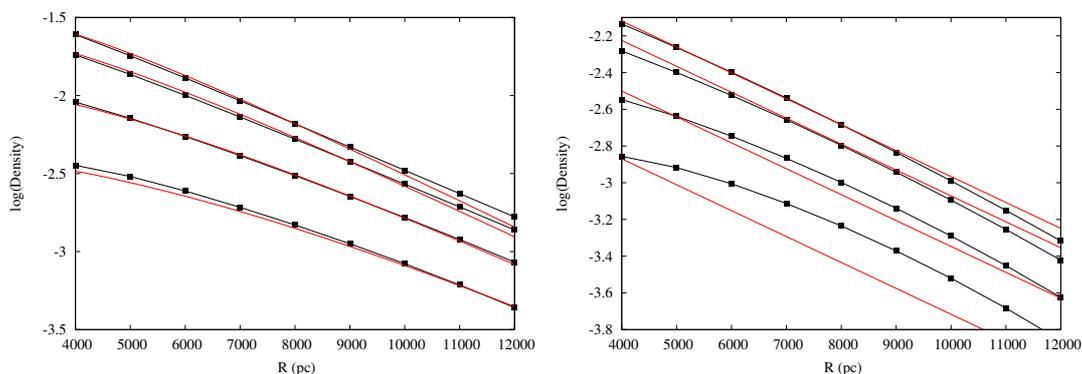


Fig. 2. Radial density distributions for the old thin stellar disc (left) and the old thick disc (right) at four vertical heights z . Red lines: the old thin disc Einasto profile at $z = 0, 200, 400,$ and 600 pc (left) and the old thick disc profile at $z = 0, 0.8, 1.6,$ and 2.4 kpc (right) from the BGM2014 version. Black squares and lines: dynamically consistent disc fitted from $R = 4$ kpc to 12 kpc.

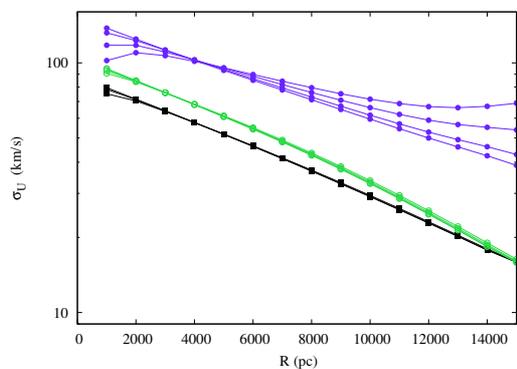


Fig. 3. σ_U radial velocity dispersions for the old thin disc (black lines) and the young thick disc (green lines) at $z = 0, 200, 400,$ and 600 pc. For the old thick disc (purple lines) at $z = 0, 0.8, 1.6,$ and 2.4 kpc. We note an increase in σ_U and R_{σ_U} with z for the old thick disc.

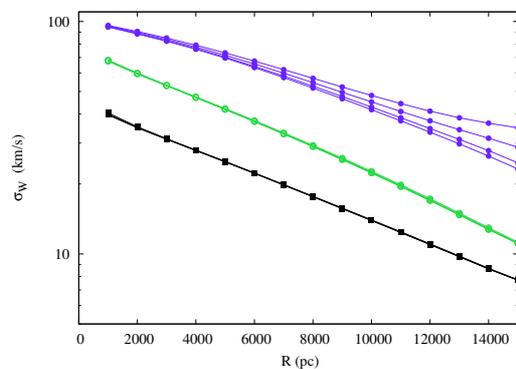


Fig. 4. σ_W vertical velocity dispersions for the old thin disc (black lines) and the young thick disc (green lines) at $z = 0, 200, 400,$ and 600 pc. For the old thick disc (purple lines) at $z = 0, 0.8, 1.6,$ and 2.4 kpc, σ_W does not change with z for the old thin disc or the young thick disc, but for the old thick disc, σ_W , and R_{σ_W} increase with z .

For the old thick disc, the kinematic scale lengths increase with z . For the thin and thick discs discussed here, the respective density scale lengths R_ρ at $z = 0$ are 2.53 and 3.15 kpc, and the kinematic scale lengths R_{σ_z} are 8.5 and 10.8 kpc. The ratio R_{σ_z}/R_ρ is far from the factor 2, a frequently assumed value based on the hypothesis of a self-gravitating isothermal disc (van der Kruit & Searle 1981, 1982). At very small radii R , the asymmetric drift is very large for the old thick disc and moreover the DFs are null

for negative angular momentum. Thus, the DFs are not realistic and it could explain the decrease in the dispersion at low R and high z (see Fig. 3).

The asymmetric drifts and the σ_V velocity dispersions are no longer free parameters and are exactly determined. The asymmetric drifts (Figure 5) are shown as a function of z at the solar

Galactic radius R_0 . The very different asymmetric drift of the old thick disc is due to its much higher velocity dispersions.

Within the interval $R = 4$ to 12 kpc, the velocity ellipsoids roughly point towards the Galactic centre. Figure 6 shows the variation in the tilt with z at $R = 8$ kpc for all the stellar components. They are very similar and just the old thick disc has a tilt slightly larger by 1 degree at 4 kpc height. The velocity ellipsoid tilt variation for the stellar discs results from the different z_0 values defining the Stäckel coordinates to model the DFs. These different z_0 values are directly obtained by fitting the orbits populating the stellar discs. We can consider as a first approximation that the tilt does not depend on the stellar disc population.

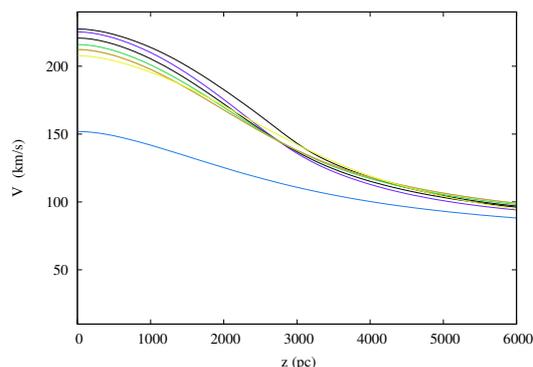


Fig. 5. Mean circular velocities for all disc components vs. z at $R = 8$ kpc with $V_c(R_0) = 221$ km/s. The blue line corresponds to the old thick disc.

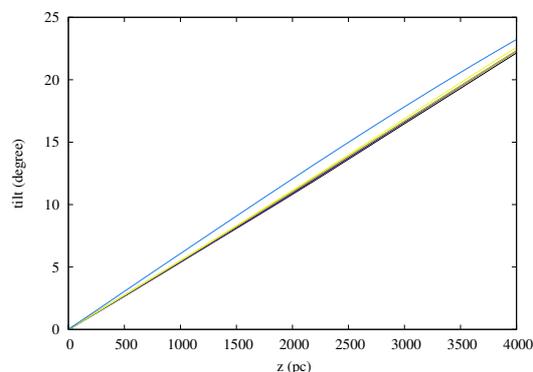


Fig. 6. Velocity ellipsoid vertical tilts for stellar discs vs. z at $R = 8$ kpc. The blue line corresponds to the old thick disc.

6. Conclusion

We have presented the elements of the structure of the new dynamical self-consistency of the Besançon Galactic Model. It is based on the use of an explicit approximate third integral and on the 3D generalisation of the Shu DF. For each stellar disc, the number of free parameters is reduced since the vertical velocity dispersions and the scale heights are dynamically related for each stellar disc. In addition the density scale heights and the vertical kinematic scale lengths (R_{σ_z}) are linked. A preliminary and intermediate version of this model was used to adjust the stellar kinematics from RAVE and TGAS observations (Robin et al. 2017).

The consistency of the dynamical model is performed with an accuracy that allows us to recover the mass distribution and forces with an error smaller than a few thousandths. Since, this new model substantially reproduces the previous 2004 version of the Besançon model and its stellar densities, in consequence it also matches the star counts and then provides a prediction of the kinematics of stellar populations. These predictions will be compared with Gaia observations. We can expect that these new observations will entail revisions with an adjustment of the modelled stellar populations, and an improvement of our current representation of the dark matter distribution.

A precise determination of the mass distribution of the Galaxy and the dark matter component will only be only achieved with an accurate modelling of the observed stellar components and their kinematics. This is an immediate goal of the BGM. Furthermore, obtaining a stationary model of the stellar discs will be a preliminary step to estimate the degree of non-stationarity of stellar components. For each stellar population, the accuracy of the fit will give the amplitude of non-stationarities. This will help to identify what type of non-stationarities are involved and what kind of complementary models must be developed.

To conclude, we note that we have considered a stationary Galaxy model without a bar and our methods require axisymmetric potentials. Generalisation to a non-axisymmetric model (work in preparation) is however possible with the same simplicity since the method developed for axisymmetric potentials (Bienaymé et al. 2015) can be generalised to 3D, also with analytic approximate integrals explicitly depending on the potential without a need for numerical integrations (see also Sanders & Evans 2015; Sanders & Binney 2015).

Acknowledgements. We are grateful to the anonymous referee for his report which improved the manuscript.

References

- Allard, F., Hauschildt, P. H., Alexander, D. R., & Starrfield, S. 1997, *ARA&A*, 35, 137
- Amôres, E. B., Robin, A. C., & Reylé, C. 2017, *A&A*, 602, A67
- Baraffe, I., Chabrier, G., Allard, F., & Hauschildt, P. H. 1998, *A&A*, 337, 403
- Bienaymé, O. 1999, *A&A*, 341, 86
- Bienaymé, O., Famaey, B., Siebert, A., et al. 2014, *A&A*, 571, A92
- Bienaymé, O., Robin, A. C., & Crézé, M. 1987, *A&A*, 180, 94
- Bienaymé, O., Robin, A. C., & Famaey, B. 2015, *A&A*, 581, A123
- Bienaymé, O., & Travençolo, G. 2013, *A&A*, 549, A89
- Binney, J. 2012, *MNRAS*, 426, 1324
- Binney, J., Burnett, B., Kordopatis, G., et al. 2014, *MNRAS*, 439, 1231
- Binney, J., & McMillan, P. 2011, *MNRAS*, 413, 1889
- Binney, J., & McMillan, P. J. 2016, *MNRAS*, 456, 1982
- Bovy, J. 2015, *ApJS*, 216, 29
- Chemin, L., Renaud, F., & Soubiran, C. 2015, *A&A*, 578, A14
- Czekaj, M. A., Robin, A. C., Figueras, F., Luri, X., & Haywood, M. 2014, *A&A*, 564, A102
- De Bruyne, V., Leeuw, F., & Dejonghe, H. 2000, *MNRAS*, 311, 297
- de Zeeuw, T. 1985a, *MNRAS*, 216, 273
- de Zeeuw, T. 1985b, *MNRAS*, 216, 599
- de Zeeuw, P. T., & Lynden-Bell, D. 1985, *MNRAS*, 215, 713
- Famaey, B., & Dejonghe, H. 2003, *MNRAS*, 340, 752
- Girardi, L., Groenewegen, M. A. T., Hatziminaoglou, E., & da Costa, L. 2005, *A&A*, 436, 895
- Gomez, A. E., Grenier, S., Udry, S., et al. 1997, *Hipparcos - Venice '97*, 402, 621
- James, F. 2004, *MNUIT Tutorial from 1972 CERN Computing and Data Processing School*
- Kaasalainen, M. 1994, *MNRAS*, 268, 1041
- Kaasalainen, M., & Binney, J. 1994, *MNRAS*, 268, 1033
- Kent, S. M., & de Zeeuw, T. 1991, *AJ*, 102, 1994
- Lagarde, N., Robin, A. C., Reylé, C., & Nascello, G. 2017, *A&A*, 601, A27
- Lagarde, N. et al. 2018, submitted
- Lejeune, T., Cuisinier, F., & Buser, R. 1997, *A&AS*, 125, 229
- Lynden-Bell, D. 1962, *MNRAS*, 124, 95

- Marshall, D. J., Robin, A. C., Reylé, C., Schultheis, M., & Picaud, S. 2006, A&A, 453, 635
- McGill, C. & Binney, J. 1990, MNRAS, 244, 634
- Mor, R., Robin, A. C., Figueras, F., & Lemasle, B. 2017, A&A, 599, A17
- Ollongren, A. 1962, Bull. Astron. Inst. Netherlands, 16, 241
- Prendergast, K. 1982, in Chudnowsky, D. and G. (eds) "The Riemann Problem" (Springer-Verlag)
- Reylé, C., Marshall, D. J., Robin, A. C., & Schultheis, M. 2009, A&A, 495, 819
- Robin, A. C., Bienaymé, O., Fernández-Trincado, J. G., & Reylé, C. 2017, A&A, 605, A1
- Robin, A., & Crézé, M. 1986a, A&AS, 64, 53
- Robin, A., & Crézé, M. 1986b, A&A, 157, 71
- Robin, A. C., & Oblak, E. 1987, Publications of the Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences, 69, 323
- Robin, A. C., Marshall, D. J., Schultheis, M., & Reylé, C. 2012, A&A, 538, A106
- Robin, A. C., Reylé, C., Fliri, J., et al. 2014, A&A, 569, A13
- Robnik, M. 1993, Journal of Physics A Mathematical General, 26, 7427
- Sanders, J. L., & Binney, J. 2014, MNRAS, 441, 3284
- Sanders, J. L., & Binney, J. 2015, MNRAS, 447, 2479
- Sanders, J. L., & Binney, J. 2016, MNRAS, 457, 2107
- Sanders, J. L., & Evans, N. W. 2015, MNRAS, 454, 299
- Schultheis, M., Robin, A. C., Reylé, C., et al. 2006, A&A, 447, 185
- Sharma, S., Bland-Hawthorn, J., Binney, J., et al. 2014, ApJ, 793, 51
- Shu, F. H. 1969, ApJ, 158, 505
- Sofue, Y. 2012, PASJ, 64, 75
- Soubiran, C., Bienaymé, O., & Siebert, A. 2003, A&A, 398, 141
- Sysoliatina K., Just A., Koutsouridou I. et al. 2018 submitted
- Ting, Y.-S., Rix, H.-W., Bovy, J., & van de Ven, G. 2013, MNRAS, 434, 652
- van der Kruit, P. C., & Searle, L. 1981, A&A, 95, 105
- van der Kruit, P. C., & Searle, L. 1982, A&A, 110, 61
- Vasiliev, E. 2018, arXiv:1802.08239
- von Seeliger, H 1898 Abh. K. Bayer Akad Wiss Ser II K1 19, 564
- Westera, P., Lejeune, T., Buser, R., Cuisinier, F., & Bruzual, G. 2002, A&A, 381, 524

Annexe B

Résolution numérique de l'équation de Poisson

B.0.1 Contexte

Le but est ici de déduire le potentiel en chaque point d'une grille ne disposant que d'une grille de densité. Dans notre contexte, nous travaillons en coordonnées cylindrique : d'une grille $(R, z, \rho(R, z))$, on veut obtenir une grille $(R, z, \Phi(R, z))$. De plus, nous devons prévoir les cas où l'expression analytique de la densité n'est pas connue ; parmi toute les techniques possibles, nous avons finalement opté pour la méthode de sur-relaxation, que nous décrivons brièvement ainsi que quelques tests effectués.

B.0.2 Equation de Poisson

Dans le cadre des systèmes soumis uniquement à la gravitation, le lien entre densité et potentiel se fait via la l'équation bien connue de Poisson :

$$\Delta\Phi(r) = \nabla^2\Phi(r) = 4\pi G\rho(r)$$

où G est la constante de gravitation et r est la distance à l'origine (choisie à priori arbitrairement mais dépend fortement, pour des raisons pratiques, de la symétrie du système). Les disques galactiques amènent naturellement à travailler en coordonnées cylindriques (R, θ, z) où $z = 0$ définit le plan de symétrie et, si nous supposons de plus que les disques sont axisymétriques, toutes les quantités mises en oeuvres ne dépendront que de (R, z) . Dans ce cadre, l'équation de Poisson s'exprime comme :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial z^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(R, z)$$

où il est important de noter que sous cette forme, l'équation de Poisson n'est pas définie en $R = 0$. Pour la résoudre numériquement, il nous faut "discrétiser" l'équation et puis traiter les cas $R \neq 0$ et $R = 0$.

Cas $R \neq 0$

Supposons que nous disposons d'une grille $N_i \times N_j$ où l'indice i se rapporte à la coordonnée radiale et z à la coordonnées verticale. 0 parti de maintenant, nous prendrons comme convention de notation pour le potentiel et la densité en un point (i, j) :

$$\Phi(R_i, z_i) = \Phi_{i,j}$$

$$\rho(R_i, z_i) = \rho_{i,j}$$

avec $R_i = i.\Delta R$ et $z_j = j.\Delta z$ où ΔR et Δz sont les pas entre deux points (on garde la possibilité que $\Delta R \neq \Delta z$).

Les dérivées sont discrétisées de la manière suivante (exemple sur ϕ) :

$$\frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} \longrightarrow \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta R}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial R^2} \longrightarrow \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j}}{\Delta R^2}$$

(si l'on dérive selon z , on garde i constante et l'on joue sur l'indice j).

L'équation de Poisson devient alors :

$$\frac{1}{R} \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta R} + \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j}}{\Delta R^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j}}{\Delta z^2} = 4\pi G \rho_{i,j}$$

d'où, finalement :

$$\Phi_{i,j} = \frac{(\Delta R \Delta z)^2}{2(\Delta R^2 + \Delta z^2)} A_{i,j}$$

avec

$$A_{i,j} = \frac{1}{R} \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta R} + \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta R^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta z^2} - 4\pi G \rho_{i,j}$$

$R=0$

Comme nous l'avons brièvement remarqué précédemment, nous devons traiter différemment la ligne $(R, z) = (0, z)$. Afin de contourner ce problème,

nous développons le potentiel en $R = 0$:

$$\begin{aligned}\Phi(R, z) &= \Phi(0, z) + R \left. \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} \right|_{R=0} + \frac{R^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial R^2} \right|_{R=0} \\ &= \Phi(0, z) + \frac{R^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial R^2} \right|_{R=0} \\ &= \Phi_0 + \alpha R^2\end{aligned}$$

avec $\Phi_0 = \Phi(R = 0, z)$ constant pour z fixé et $\alpha = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial R^2} \right|_{R=0}$. pour des raisons de symétrie, la dérivée première de Φ s'annule en $R = 0$. Donc, avec ce terme, nous pouvons calculer les termes de l'équation de Poisson :

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} &= 2\alpha \\ \frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial R^2} &= 2\alpha\end{aligned}$$

Donc l'équation de Poisson devient ici :

$$4\alpha + \frac{\partial^2 \Phi(0, z)}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(0, z) \longrightarrow 4\alpha + \frac{\Phi_{0,j+1} + \Phi_{0,j-1} - 2\Phi_{0,j}}{\Delta z^2} = 4\pi G\rho_{0,j}$$

Pour calculer α on utilise la dérivée seconde du potentiel en $R = 0$:

$$\frac{\Phi_{1,j} + \Phi_{-1,j} - 2\Phi_{0,j}}{\Delta R^2} = 2\alpha$$

Encore une fois en raison de la symétrie particulière du problème, on a $\Phi_{-1,j} = \Phi_{1,j}$, d'où :

$$\frac{2\Phi_{1,j} - 2\Phi_{0,j}}{\Delta R^2} = 2\alpha$$

et donc, en remplaçant α par son expression, on obtient finalement l'expression discrétisée de l'équation de Poisson en $R = 0$:

$$\frac{4(\Phi_{1,j} - \Phi_{0,j})}{\Delta R^2} + \frac{\Phi_{0,j+1} + \Phi_{0,j-1} - 2\Phi_{0,j}}{\Delta z^2} = 4\pi G\rho_{0,j}$$

Soit alors : ($R = 0, z$) :

$$\Phi_{0,j} = \frac{(\Delta R \Delta z)^2}{4\Delta R^2 + 2\Delta z^2} B_{0,j}$$

où :

$$B_{0,j} = \frac{4\Phi_{1,j}}{\Delta R^2} + \frac{\Phi_{0,j-1} + \Phi_{0,j+1}}{\Delta z^2} - 4\pi G\rho_{0,j}$$

B.0.3 Méthode itérative

Les formules précédentes permettent de calculer $\Phi_{i,j}$ si nous connaissons la valeur du potentiel pour les quatre points $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$ et $(i, j+1)$. Or, sans information a priori sur le potentiel, il nous faut approcher la solution par itération, connaissant seulement la densité et, par intégration de celle-ci, les conditions aux limites.

Nous présentons successivement trois méthodes pour cela, les deux premières n'étant utiles que pour la compréhension de la troisième.

Méthode de Jacobi

La méthode itérative la plus simple est celle de Jacobi : à chaque étape, on améliore l'estimation notre première estimation du potentiel en réutilisant ce même potentiel (on dénote par k l'étape actuelle) :

$$\Phi_{i,j}^{k+1} = \frac{(\Delta R \Delta z)^2}{2(\Delta R^2 + \Delta z^2)} A_{i,j}^k$$

pour $R \neq 0$ avec

$$A_{i,j}^k = \frac{1}{R} \frac{\Phi_{i+1,j}^k - \Phi_{i-1,j}^k}{2\Delta R} + \frac{\Phi_{i+1,j}^k + \Phi_{i-1,j}^k}{\Delta R^2} + \frac{\Phi_{i,j+1}^k + \Phi_{i,j-1}^k}{\Delta z^2} - 4\pi G \rho_{i,j}$$

et

$$\Phi_{0,j}^{k+1} = \frac{(\Delta R \Delta z)^2}{4\Delta R^2 + 2\Delta z^2} B_{0,j}^k$$

pour $R = 0$, avec

$$B_{0,j}^k = \frac{4\Phi_{1,j}^k}{\Delta R^2} + \frac{\Phi_{0,j-1}^k + \Phi_{0,j+1}^k}{\Delta z^2} - 4\pi G \rho_{0,j}$$

Méthode de Gauss-Seidel

Comme nous l'avons vu, le potentiel au point (i, j) est estimé grâce aux quatre points qui l'entoure. Nous pouvons tirer profit de cela pour accélérer la convergence de l'algorithme en utilisant le potentiel précédemment calculé (on suppose ici que nous parcourons la grille dans le sens croissant de i et j) :

$$\Phi_{i,j}^{k+1} = \frac{(\Delta R \Delta z)^2}{2(\Delta R^2 + \Delta z^2)} A_{i,j}^k$$

pour $R \neq 0$ avec

$$A_{i,j}^k = \frac{1}{R} \frac{\Phi_{i+1,j}^k - \Phi_{i-1,j}^{k+1}}{2\Delta R} + \frac{\Phi_{i+1,j}^k + \Phi_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta R^2} + \frac{\Phi_{i,j+1}^k + \Phi_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta z^2} - 4\pi G \rho_{i,j}$$

et

$$\Phi_{0,j}^{k+1} = \frac{(\Delta R \Delta z)^2}{4\Delta R^2 + 2\Delta z^2} B_{0,j}^k$$

pour $R = 0$, avec

$$B_{0,j}^k = \frac{4\Phi_{1,j}^k}{\Delta R^2} + \frac{\Phi_{0,j-1}^{k+1} + \Phi_{0,j+1}^k}{\Delta z^2} - 4\pi G \rho_{0,j}$$

méthode de sur-relaxation successive

Il est encore possible d'accélérer considérablement la méthode de Gauss-Seidel on combinant linéairement l'ancienne et la nouvelle solution, i.e. :

$$\Phi_{i,j}^{k+1} = (1 - \omega)\Phi_{i,j}^k + \omega \frac{(\Delta R \Delta z)^2}{2(\Delta R^2 + \Delta z^2)} A_{i,j}^k$$

pour $R \neq 0$ et

$$\Phi_{0,j}^{k+1} = (1 - \omega)\Phi_{0,j}^k + \omega \frac{(\Delta R \Delta z)^2}{4\Delta R^2 + 2\Delta z^2} B_{0,j}^k$$

pour $R = 0$. ω le paramètre de sur-relaxation et on peut montrer que cette méthode converge seulement si $0 < \omega < 2$ et que la convergence est accélérée si $1 < \omega < 2$. Pour une grille carrée, le meilleur paramètre de sur-relaxation peut être approché par la formule :

$$\omega \approx \frac{2}{1 + \frac{\pi}{N}}$$

où $N = N_i = N_j$ dans notre notation.

Reste à choisir un critère de convergence : nous avons choisit ici de stopper les itérations lorsque $\epsilon \leq 10^{-3}$ avec :

$$\epsilon = \frac{\sum_{i,j} |\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k|}{|\Phi_{max} - \Phi_{min}|}$$

B.0.4 Tests

Nous choisissons la paire densité/potentiel de Miyamoto-Nagai pour tester notre code pour deux raisons :

1. le potentiel de Miyamoto-Nagai est axisymétrique et peut couvrir de nombreuses possibilités de modèles selon la valeurs des paramètres a et b (plus ou moins sphérique...)

2. puisque nous possédons les expressions analytiques de la densité ainsi que du potentiel, il est aisé de comparer nos solutions numériques avec la solution exacte.

L'expression de la densité est :

$$\Phi(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}$$

où G est la constante de gravitation, M est la masse de la galaxie, R et z sont les coordonnées cylindriques habituelles et enfin a et b sont les paramètres du profil : pour $a = 0$ nous obtenons un profil sphérique (profil de Plummer) et pour $b = 0$ nous obtenons un disque infiniment fin (disque de Kuzmin). Le potentiel associé s'exprime lui comme :

$$\rho(R, z) = \frac{b^2 M a R^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{4\pi [R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}}$$

Après quelques tests préliminaires il apparaît clairement que la méthode SOR est bien la plus rapide (les potentiels après convergence étant similaires). Nous avons alors testé par la suite, sur une grille carré 2000×200 les précisions et convergence pour la méthode SOR.

Convergence

En diminuant le critère de convergence, la convergence se fait correctement. Or si nous enlevons tout critère de convergence et que nous laissons tourner l'algorithme suffisamment longtemps, nous constatons que ϵ diminue "rapidement" jusqu'à un minimum puis augmente un peu jusqu'à stabilisation définitive : ceci est dû à la définition même de notre critère, en effet, en sommant sur tous les points, il se peut que ϵ puisse souffrir de valeurs aberrantes sur un domaine extrêmement réduit. On peut néanmoins quantifier ce phénomène et remarquer qu'il est dans notre cas marginal, et nous gardons alors l'atteinte du minimum pour stopper notre algorithme (voir figure B.1).

Différents cas de figures

Enfin nous testons sur trois profils différents (sphérique, intermédiaire et infiniment fin) et nous constatons que les différences sont suffisamment petites, et qu'elles se situent au centre. Pour le profil sphérique, les résultats sont moins bons (voir figures B.2-B.3-B.4).

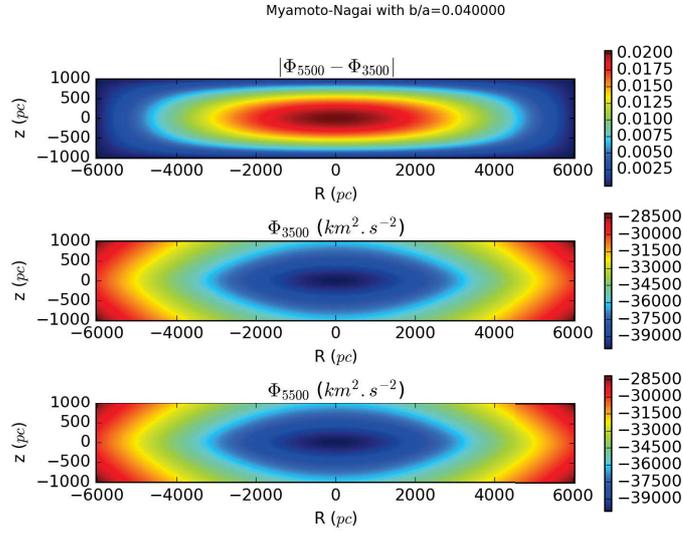


FIGURE B.1 – Comparaison des potentiels pour deux étapes différentes : le minimum est atteint vers l'étape 3500 et la solution a bien convergé pour l'étape 5500.

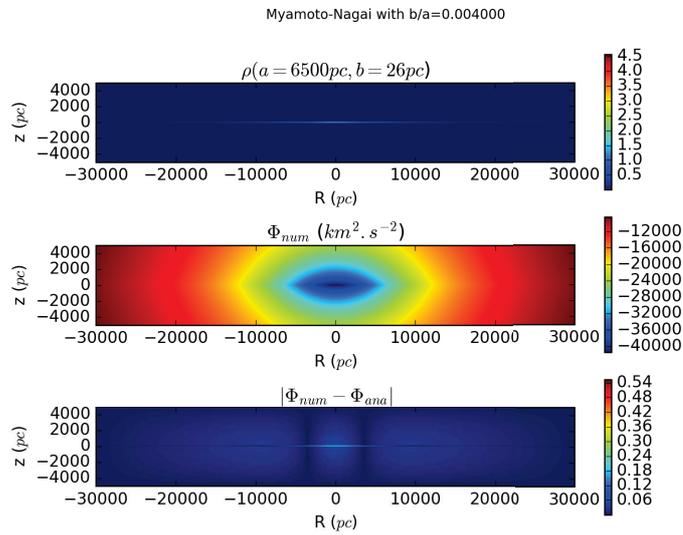


FIGURE B.2 – En haut et au milieu : densité et potentiel d'un disque mince. En bas : différence entre les potentiels obtenus numériquement et analytiquement

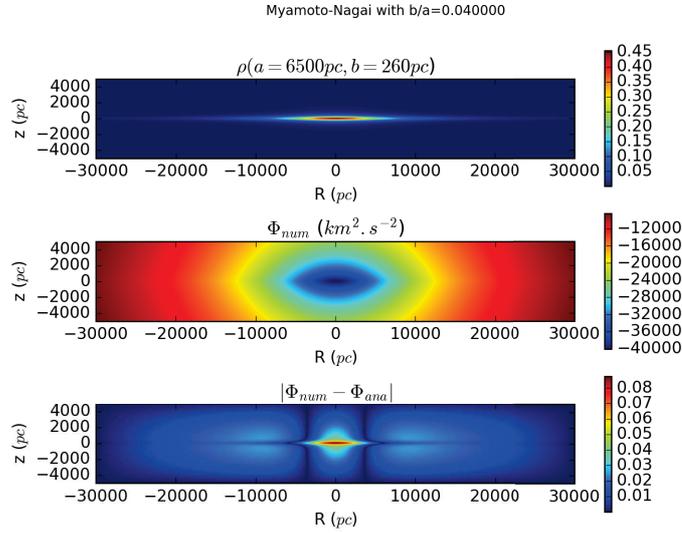


FIGURE B.3 – En haut et au milieu : densité et potentiel d’un disque épais. En bas : différence entre les potentiels obtenus numériquement et analytiquement

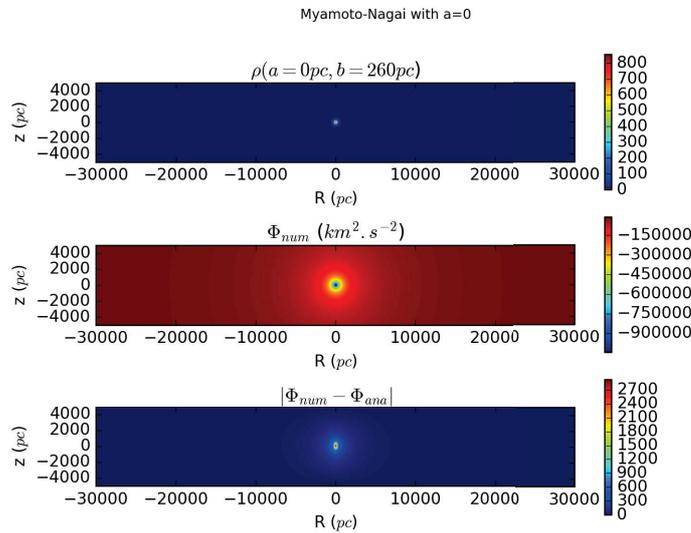


FIGURE B.4 – En haut et au milieu : densité et potentiel d’une sphère. En bas : différence entre les potentiels obtenus numériquement et analytiquement

Annexe C

Transformations

C.1 Coordonnées

Repérer les étoiles dans le ciel est peut-être ce qui précéda toutes les investigations plus poussées en astronomie. Parmi tous les repères cartésiens existant, nous en retenons deux pour notre étude :

- le repère équatorial définit avec x_{eq} dirigé du centre vers le point vernal¹ Υ , z_{eq} étant l'axe dirigé du centre vers le pôle nord céleste. L'axe y_{eq} complète de repère pour qu'on obtienne un repère orthogonale (le sens étant déduit par la règle de la main droite).
- le repère galactique définit avec l'axe x dirigé du centre vers le centre galactique, l'axe y dirigé du centre vers le pôle nord galactique et enfin l'axe z définit comme précédemment.

Les étoiles sont repérées soit par leur coordonnées équatoriales (α, δ) , soit par leur coordonnées galactiques (l, b) . A cela on peut rajouter la parallaxe π . On a alors les correspondances suivantes :

$$x_{eq} = \frac{1}{\pi} \cos(\delta) \cos(\alpha) \quad (\text{C.1})$$

$$y_{eq} = \frac{1}{\pi} \cos(\delta) \sin(\alpha) \quad (\text{C.2})$$

$$z_{eq} = \frac{1}{\pi} \sin(\delta) \quad (\text{C.3})$$

$$x = \frac{1}{\pi} \cos(b) \cos(l) \quad (\text{C.4})$$

1. Le point vernal est défini comme l'intersection entre l'équateur de la sphère celeste et l'eccliptique (plan de rotation apparente du soleil autour de la Terre)

$$y = \frac{1}{\pi} \cos(b) \sin(l) \quad (\text{C.5})$$

$$z = \frac{1}{\pi} \sin(b) \quad (\text{C.6})$$

Les repères sont évidemment orientés différemment et l'on peut passer de l'un à l'autre par une succession de rotations. Si l'on connaît les coordonnées équatoriales du pôle nord galactique (α_P, δ_P) ainsi que la position angulaire du centre galactique θ , on peut montrer que l'on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x_{eq} \\ y_{eq} \\ z_{eq} \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

où la transformation \mathbf{T} est la succession de trois rotations permettant de réaligner les axes des deux repères telles que :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \delta_P & 0 & \cos \delta_P \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \delta_P & 0 & \sin \delta_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_P & \sin \alpha_P & 0 \\ -\sin \alpha_P & \cos \alpha_P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

C.2 Vitesses

Pour obtenir les vitesses dans le repère galactique, il suffit de dériver la relation précédente, à savoir :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{T} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_{eq} \\ y_{eq} \\ z_{eq} \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

On peut alors montrer que cela revient à :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{TA} \begin{pmatrix} v_r \\ \frac{k}{\pi} \mu_\alpha^5 \\ \frac{k}{\pi} \mu_\delta \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 & -\sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

et v_r est la vitesse radiale, $\mu_\alpha^* = \mu_{alpha} \cos \delta$ est le mouvement propre en ascension droite et μ_{delta} est le mouvement propre en déclinaison et enfin $k = 4.74047$ est un facteur de conversion qui permet d'obtenir les vitesses en $km.s^{-1}$.

Bibliographie

- Allard, F., Hauschildt, P. H., Alexander, D. R., and Starrfield, S. (1997). Model Atmospheres of Very Low Mass Stars and Brown Dwarfs. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 35 :137–177.
- Amores, E. B., Robin, A. C., and Reyl e, C. (2017). Evolution over time of the Milky Way’s disc shape. *Astronomy and Astrophysics*, 602 :A67.
- Baade, W. (1944). The Resolution of Messier 32, NGC 205, and the Central Region of the Andromeda Nebula. *The Astrophysical Journal*, 100 :137.
- Bahcall, J. N. and Soneira, R. M. (1980). The universe at faint magnitudes. I - Models for the galaxy and the predicted star counts. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 44 :73–110.
- Bailer-Jones, C. A. L. (2015). Estimating Distances from Parallaxes. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 127 :994.
- Baraffe, I., Chabrier, G., Allard, F., and Hauschildt, P. H. (1998). Evolutionary models for solar metallicity low-mass stars : mass-magnitude relationships and color-magnitude diagrams. *Astronomy and Astrophysics*, 337 :403–412.
- Bienaym e, O. (1999). The local stellar velocity distribution of the Galaxy. Galactic structure and potential. *Astronomy and Astrophysics*, 341 :86–97.
- Bienayme, O., Robin, A. C., and Creze, M. (1987). The mass density in our Galaxy. *Astronomy and Astrophysics*, 180 :94–110.
- Bienaym e, O., Robin, A. C., and Famaey, B. (2015). Quasi integral of motion for axisymmetric potentials. *Astronomy and Astrophysics*, 581 :A123.
- Bienayme, O. and Sechaud, N. (1997). Stellar kinematics in the solar neighbourhood and the disc scale lengths of the Galaxy. *Astronomy and Astrophysics*, 323 :781–788.

- Bienaymé, O. and Traven, G. (2013). Approximate integrals of motion. *Astronomy and Astrophysics*, 549 :A89.
- Binney, J. (2012). Actions for axisymmetric potentials. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 426 :1324–1327.
- Binney, J., Burnett, B., Kordopatis, G., McMillan, P. J., Sharma, S., Zwitter, T., Bienaymé, O., Bland-Hawthorn, J., Steinmetz, M., Gilmore, G., Williams, M. E. K., Navarro, J., Grebel, E. K., Helmi, A., Parker, Q., Reid, W. A., Seabroke, G., Watson, F., and Wyse, R. F. G. (2014a). New distances to RAVE stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 437 :351–370.
- Binney, J., Burnett, B., Kordopatis, G., Steinmetz, M., Gilmore, G., Bienaymé, O., Bland-Hawthorn, J., Famaey, B., Grebel, E. K., Helmi, A., Navarro, J., Parker, Q., Reid, W. A., Seabroke, G., Siebert, A., Watson, F., Williams, M. E. K., Wyse, R. F. G., and Zwitter, T. (2014b). Galactic kinematics and dynamics from Radial Velocity Experiment stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439 :1231–1244.
- Binney, J. and McMillan, P. J. (2016). Torus mapper : a code for dynamical models of galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 456 :1982–1998.
- Bovy, J. (2015). galpy : A python Library for Galactic Dynamics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 216 :29.
- Brooks, K. O. (1981). The density distribution and luminosity function of faint stars in the galaxy. *Ph.D. Thesis*.
- Chemin, L., Renaud, F., and Soubiran, C. (2015). Incorrect rotation curve of the Milky Way. *Astronomy and Astrophysics*, 578 :A14.
- Collaboration, G., Brown, A. G. A., Vallenari, A., Prusti, T., de Bruijne, J. H. J., Babusiaux, C., and Bailer-Jones, C. A. L. (2018). Gaia Data Release 2. Summary of the contents and survey properties. *Astronomy & Astrophysics*, 616 :A1. arXiv : 1804.09365.
- Contopoulos, G. (1963a). A Classification of the Integrals of Motion. *The Astrophysical Journal*, 138 :1297.
- Contopoulos, G. (1963b). On the existence of a third integral of motion. *The Astronomical Journal*, 68 :1.

- Contopoulos, G. (1963c). Some Applications of a Third Integral of Motion. *The Astronomical Journal*, 68 :70.
- Czekaj, M. A., Robin, A. C., Figueras, F., Luri, X., and Haywood, M. (2014). The Besançon Galaxy model renewed. I. Constraints on the local star formation history from Tycho data. *Astronomy and Astrophysics*, 564 :A102.
- de Zeeuw, P. T. and Lynden-Bell, D. (1985). Best approximate quadratic integrals in stellar dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 215 :713–730.
- Dehnen, W. (1999). The Distribution of Nearby Stars in Velocity Space. volume 182, eprint : arXiv :astro-ph/9810320.
- Dehnen, W. and Binney, J. J. (1998). Local stellar kinematics from HIPPARCOS data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 298 :387–394.
- Eddington, A. S. (1915). The dynamics of a stellar system. Third paper : oblate and other distributions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 76 :37.
- Eggen, O. J., Lynden-Bell, D., and Sandage, A. R. (1962). Evidence from the motions of old stars that the Galaxy collapsed. *The Astrophysical Journal*, 136 :748.
- Einasto, J. (1979). Galactic mass modeling. volume 84, pages 451–458.
- Famaey, B. and Dejonghe, H. (2003). Three-component Stackel potentials satisfying recent estimates of Milky Way parameters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 340 :752–762.
- Famaey, B. and McGaugh, S. (2013). The MOND phenomenology. *ArXiv e-prints*, 1310 :arXiv :1310.4009.
- Fathi, K. (2010). Revisiting the Scale Length-of Plane and the Freeman Law in the Local Universe. *The Astrophysical Journal Letters*, 722 :L120–L125.
- Fathi, K., Allen, M., Boch, T., Hatziminaoglou, E., and Peletier, R. F. (2010). Scalelength of disc galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406 :1595–1608.
- Forbes, D. and Kroupa, P. (2011). What is a Galaxy? Cast your vote here... *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 28(01) :77–82. arXiv : 1101.3309.

- Freeman, K. C. (1970). On the Disks of Spiral and S0 Galaxies. *The Astrophysical Journal*, 160 :811.
- Gilmore, G. and Reid, N. (1983). New light on faint stars. III - Galactic structure towards the South Pole and the Galactic thick disc. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 202 :1025–1047.
- Girardi, L., Groenewegen, M. A. T., Hatziminaoglou, E., and da Costa, L. (2005). Star counts in the Galaxy. Simulating from very deep to very shallow photometric surveys with the TRILEGAL code. *Astronomy and Astrophysics*, 436 :895–915.
- Gomez, A. E., Grenier, S., Udry, S., Haywood, M., Meillon, L., Sabas, V., Sellier, A., and Morin, D. (1997). Kinematics of Disk Stars in the Solar Neighbourhood. volume 402, pages 621–624.
- Gould, A. (2003). An Upper Limit on the Granularity of the Local Stellar Halo. *The Astrophysical Journal Letters*, 592 :L63–L66.
- Grillmair, C. J. (2009). Four New Stellar Debris Streams in the Galactic Halo. *The Astrophysical Journal*, 693 :1118–1127.
- Grillmair, C. J. and Carlin, J. L. (2016). Stellar Streams and Clouds in the Galactic Halo. *arXiv :1603.08936 [astro-ph]*, 420 :87–112. arXiv : 1603.08936.
- Helmi, A. and de Zeeuw, P. T. (2000). Mapping the substructure in the Galactic halo with the next generation of astrometric satellites. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 319 :657–665.
- Helmi, A., Veljanoski, J., Breddels, M. A., Tian, H., and Sales, L. V. (2016). A box full of chocolates : The rich structure of the nearby stellar halo revealed by Gaia and RAVE. *arXiv :1611.00222 [astro-ph]*. arXiv : 1611.00222.
- Henon, M. (1982). Vlasov equation. *Astronomy and Astrophysics*, 114 :211.
- Henon, M. and Heiles, C. (1964). The applicability of the third integral of motion : Some numerical experiments. *The Astronomical Journal*, 69 :73.
- Hog, E., Fabricius, C., Makarov, V. V., Urban, S., Corbin, T., Wycoff, G., Bastian, U., Schwekendiek, P., and Wicenc, A. (2000). The Tycho-2 catalogue of the 2.5 million brightest stars. *Astronomy and Astrophysics*, 355 :L27–L30.
- Hubble, E. P. (1926). Extragalactic nebulae. *The Astrophysical Journal*, 64.

- Ibata, R. A., Gilmore, G., and Irwin, M. J. (1994). A dwarf satellite galaxy in Sagittarius. *Nature*, 370 :194–196.
- James, F. and Roos, M. (1975). Minuit : A System for Function Minimization and Analysis of the Parameter Errors and Correlations. *Comput.Phys.Commun.*, 10 :343–367.
- Kaasalainen, M. (1994). Torus Construction in Potentials Supporting Different Orbit Families. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 268 :1041.
- Kapteyn, J. C. (1922). First Attempt at a Theory of the Arrangement and Motion of the Sidereal System. *The Astrophysical Journal*, 55 :302.
- Kent, S. M. and de Zeeuw, T. (1991). Approximate third integrals in axisymmetric galaxies and the tilt of the velocity ellipsoid in the solar neighborhood. *The Astronomical Journal*, 102 :1994–2000.
- Kordopatis, G., Gilmore, G., Steinmetz, M., Boeche, C., Seabroke, G. M., Siebert, A., Zwitter, T., Binney, J., de Laverny, P., Recio-Blanco, A., Williams, M. E. K., Piffl, T., Enke, H., Roeser, S., Bijaoui, A., Wyse, R. F. G., Freeman, K., Munari, U., Carrillo, I., Anguiano, B., Burton, D., Campbell, R., Cass, C. J. P., Fiegert, K., Hartley, M., Parker, Q. A., Reid, W., Ritter, A., Russell, K. S., Stupar, M., Watson, F. G., Bienaymé, O., Bland-Hawthorn, J., Gerhard, O., Gibson, B. K., Grebel, E. K., Helmi, A., Navarro, J. F., Conrad, C., Famaey, B., Faure, C., Just, A., Kos, J., Matijevic, G., McMillan, P. J., Minchev, I., Scholz, R., Sharma, S., Siviero, A., de Boer, E. W., and Åkerhal, M. (2013). The Radial Velocity Experiment (RAVE) : Fourth Data Release. *The Astronomical Journal*, 146 :134.
- Kunder, A., Kordopatis, G., Steinmetz, M., Zwitter, T., McMillan, P., Casagrande, L., Enke, H., Wojno, J., Valentini, M., Chiappini, C., Matijevic, G., Siviero, A., de Laverny, P., Recio-Blanco, A., Bijaoui, A., Wyse, R. F. G., Binney, J., Grebel, E. K., Helmi, A., Jofre, P., Gilmore, G., Siebert, A., Famaey, B., Bienaymé, O., Gibson, B. K., Freeman, K. C., Navarro, J. F., Munari, U., Seabroke, G., Anguiano Jimenez, B., Reid, W., Bland-Hawthorn, J., Watson, F., Gerhard, O., Davies, G. R., Elsworth, Y. P., Lund, M., Miglio, A., Chaplin, W. J., and Mosser, B. (2017). VizieR Online Data Catalog : RAVE 5th data release (Kunder+, 2017). *VizieR Online Data Catalog*, 3279.
- Lagarde, N., Reylé, C., Robin, A. C., Tautvaisiene, G., Drazdauskas, A., Mikolaitis, S., Minkeviciute, R., Stonkute, E., Chorniy, Y., Bagdonas, V.,

- Miglio, A., Nasello, G., Gilmore, G., Randich, S., Bensby, T., Bragaglia, A., Flaccomio, E., Francois, P., Korn, A. J., Pancino, E., Smiljanic, R., Bayo, A., Carraro, G., Costado, M. T., Jimenez-Esteban, F., Jofre, P., Martell, S. L., Masseron, T., Monaco, L., Morbidelli, L., Sbordone, L., Sousa, S. G., and Zaggia, S. (2018). The Gaia-ESO survey : impact of extra-mixing on C- and N-abundances of giant stars. *ArXiv e-prints*, 1806 :arXiv :1806.01868.
- Lagarde, N., Robin, A. C., Reylé, C., and Nasello, G. (2017). Population synthesis to constrain Galactic and stellar physics. I. Determining age and mass of thin-disc red-giant stars. *Astronomy and Astrophysics*, 601 :A27.
- Lejeune, T., Cuisinier, F., and Buser, R. (1997). Standard stellar library for evolutionary synthesis. I. Calibration of theoretical spectra. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 125 :229–246.
- Lin, C. C. and Shu, F. H. (1964). On the Spiral Structure of Disk Galaxies. *The Astrophysical Journal*, 140 :646.
- Lin, C. C. and Shu, F. H. (1966). On the Spiral Structure of Disk Galaxies, II. Outline of a Theory of Density Waves. *Proceedings of the National Academy of Science*, 55 :229–234.
- Lindgren, L., Lammers, U., Bastian, U., Hernández, J., Klioner, S., Hobbs, D., Bombrun, A., Michalik, D., Ramos-Lerate, M., Butkevich, A., Comoretto, G., Joliet, E., Holl, B., Hutton, A., Parsons, P., Steidelmaeller, H., Abbas, U., Altmann, M., Andrei, A., Anton, S., Bach, N., Barache, C., Beciani, U., Berthier, J., Bianchi, L., Biermann, M., Bouquillon, S., Bourda, G., Braesemeister, T., Bucciarelli, B., Busonero, D., Carlucci, T., Castaneda, J., Charlot, P., Clotet, M., Crosta, M., Davidson, M., de Felice, F., Drimmel, R., Fabricius, C., Fienga, A., Figueras, F., Fraile, E., Gai, M., Garralda, N., Geyer, R., González-Vidal, J. J., Guerra, R., Hambly, N. C., Hauser, M., Jordan, S., Lattanzi, M. G., Lenhardt, H., Liao, S., Löffler, W., McMillan, P. J., Mignard, F., Mora, A., Morbidelli, R., Portell, J., Riva, A., Sarasso, M., Serraller, I., Siddiqui, H., Smart, R., Spagna, A., Stampa, U., Steele, I., Taris, F., Torra, J., van Reeven, W., Vecchiato, A., Zschocke, S., de Bruijne, J., Gracia, G., Raison, F., Lister, T., Marchant, J., Messineo, R., Soffel, M., Osorio, J., de Torres, A., and O’Mullane, W. (2016). Gaia Data Release 1. Astrometry : one billion positions, two million proper motions and parallaxes. *Astronomy and Astrophysics*, 595 :A4.
- Luri, X., Brown, A. G. A., Sarro, L. M., Arenou, F., Bailer-Jones, C. A. L., Castro-Ginard, A., de Bruijne, J., Prusti, T., Babusiaux, C., and Delgado,

- H. E. (2018). Gaia Data Release 2 : using Gaia parallaxes. *Astronomy & Astrophysics*. arXiv : 1804.09376.
- Lynden-Bell, D. (1962). Stellar dynamics. Only isolating integrals should be used in Jeans theorem. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 124 :1.
- Manabe, S. (1979). Applicability of Approximate Third Integral of Motion for Stellar Orbits in the Galaxy. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 31 :369–394.
- Marshall, D. J., Robin, A. C., Reyl e, C., Schultheis, M., and Picaud, S. (2006). Modelling the Galactic interstellar extinction distribution in three dimensions. *Astronomy and Astrophysics*, 453 :635–651.
- McGill, C. and Binney, J. (1990). Torus construction in general gravitational potentials. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 244 :634–645.
- Mor, R., Robin, A. C., Figueras, F., and Lemasle, B. (2017). Constraining the thin disc initial mass function using Galactic classical Cepheids. *Astronomy and Astrophysics*, 599 :A17.
- Navarro, J. F., Frenk, C. S., and White, S. D. M. (1996). The Structure of Cold Dark Matter Halos. *The Astrophysical Journal*, 462 :563.
- Ojha, D. K., Bienayme, O., Robin, A. C., Creze, M., and Mohan, V. (1996). Structure and kinematical properties of the Galaxy at intermediate galactic latitudes. *Astronomy and Astrophysics*, 311 :456–469.
- Ollongren, A. (1962). Three-dimensional galactic stellar orbits. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 16 :241.
- Oort, J. H. (1927a). Investigations concerning the rotational motion of the galactic system together with new determinations of secular parallaxes, precession and motion of the equinox (Errata : 4 94). *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 4 :79.
- Oort, J. H. (1927b). Observational evidence confirming Lindblad’s hypothesis of a rotation of the galactic system. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 3 :275.
- Oort, J. H. (1928). Dynamics of the galactic system in the vicinity of the Sun. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 4 :269.

- Pohlen, M. and Trujillo, I. (2006). The structure of galactic disks. Studying late-type spiral galaxies using SDSS. *Astronomy and Astrophysics*, 454 :759–772.
- Prendergast, K. H. and Tomer, E. (1970). Self-Consistent Models of Elliptical Galaxies. *The Astronomical Journal*, 75 :674.
- Reid, N. and Majewski, S. R. (1993). Star counts redivivus. I - A new look at the galaxy at faint magnitudes. *The Astrophysical Journal*, 409 :635–662.
- Reyl , C., Marshall, D. J., Robin, A. C., and Schultheis, M. (2009). The Milky Way’s external disc constrained by 2mass star counts. *Astronomy and Astrophysics*, 495 :819–826.
- Robin, A. and Creze, M. (1986). Stellar populations in the Milky Way - A synthetic model. *Astronomy and Astrophysics*, 157 :71–90.
- Robin, A. C., Marshall, D. J., Schultheis, M., and Reyl , C. (2012). Stellar populations in the Milky Way bulge region : towards solving the Galactic bulge and bar shapes using 2mass data. *Astronomy and Astrophysics*, 538 :A106.
- Robin, A. C. and Oblak, E. (1987). A kinematic model of the Galaxy. *Publications of the Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences*, 69 :323–326.
- Robin, A. C., Reyl , C., Fliri, J., Czekaj, M., Robert, C. P., and Martins, A. M. M. (2014). Constraining the thick disc formation scenario of the Milky Way. *Astronomy and Astrophysics*, 569 :A13.
- Robnik, M. (1993). On the Pade approximations to the Birkhoff-Gustavson normal form. *Journal of Physics A Mathematical General*, 26 :7427–7434.
- Rogstad, D. H. and Shostak, G. S. (1972). Gross Properties of Five Scd Galaxies as Determined from 21-CENTIMETER Observations. *The Astrophysical Journal*, 176 :315.
- Rubin, V. C. and Ford, W. K. (1970). Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *The Astrophysical Journal*, 159 :379.
- Sanders, J. L. and Binney, J. (2014). Actions, angles and frequencies for numerically integrated orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441 :3284–3295.

- Sanders, J. L. and Binney, J. (2015). A fast algorithm for estimating actions in triaxial potentials. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 447 :2479–2496.
- Sanders, J. L. and Binney, J. (2016). A review of action estimation methods for galactic dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457 :2107–2121.
- Schultheis, M., Robin, A. C., Reyl e, C., McCracken, H. J., Bertin, E., Mellier, Y., and Le F evre, O. (2006). Stellar populations in the CFHTLS. I. New constraints on the IMF at low mass. *Astronomy and Astrophysics*, 447 :185–198.
- Searle, L. and Zinn, R. (1978). Compositions of halo clusters and the formation of the galactic halo. *The Astrophysical Journal*, 225 :357–379.
- Sharma, S., Bland-Hawthorn, J., Binney, J., Freeman, K. C., Steinmetz, M., Boeche, C., Bienaym e, O., Gibson, B. K., Gilmore, G. F., Grebel, E. K., Helmi, A., Kordopatis, G., Munari, U., Navarro, J. F., Parker, Q. A., Reid, W. A., Seabroke, G. M., Siebert, A., Watson, F., Williams, M. E. K., Wyse, R. F. G., and Zwitter, T. (2014). Kinematic Modeling of the Milky Way Using the RAVE and GCS Stellar Surveys. *The Astrophysical Journal*, 793 :51.
- Shu, F. H. (1969). Models of Partially Relaxed Stellar Disks. *The Astrophysical Journal*, 158 :505.
- Siebert, A., Bienaym e, O., Binney, J., Bland-Hawthorn, J., Campbell, R., Freeman, K. C., Gibson, B. K., Gilmore, G., Grebel, E. K., Helmi, A., Munari, U., Navarro, J. F., Parker, Q. A., Seabroke, G., Siviero, A., Steinmetz, M., Williams, M., Wyse, R. F. G., and Zwitter, T. (2008). Estimation of the tilt of the stellar velocity ellipsoid from RAVE and implications for mass models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 391 :793–801.
- Sofue, Y. (2015). Dark halos of M 31 and the Milky Way. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 67 :75.
- Statler, T. S. (1989). Problems in determining the surface density of the Galactic disk. *The Astrophysical Journal*, 344 :217–231.
- Steinmetz, M., Zwitter, T., Siebert, A., Watson, F. G., Freeman, K. C., Munari, U., Campbell, R., Williams, M., Seabroke, G. M., Wyse, R. F. G.,

- Parker, Q. A., Bienaymé, O., Roeser, S., Gibson, B. K., Gilmore, G., Grebel, E. K., Helmi, A., Navarro, J. F., Burton, D., Cass, C. J. P., Dawe, J. A., Fiegert, K., Hartley, M., Russell, K. S., Saunders, W., Enke, H., Bailin, J., Binney, J., Bland-Hawthorn, J., Boeche, C., Dehnen, W., Eisenstein, D. J., Evans, N. W., Fiorucci, M., Fulbright, J. P., Gerhard, O., Jauregi, U., Kelz, A., Mijovic, L., Minchev, I., Parmentier, G., Penarrubia, J., Quillen, A. C., Read, M. A., Ruchti, G., Scholz, R.-D., Siviero, A., Smith, M. C., Sordo, R., Veltz, L., Vidrih, S., von Berlepsch, R., Boyle, B. J., and Schilbach, E. (2006). The Radial Velocity Experiment (RAVE) : First Data Release. *The Astronomical Journal*, 132 :1645–1668.
- Ting, Y.-S., Rix, H.-W., Bovy, J., and van de Ven, G. (2013). Constraining the Galactic potential via action-based distribution functions for mono-abundance stellar populations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 434 :652–660.
- van der Kruit, P. C. (1988). The three-dimensional distribution of light and mass in disks of spiral galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 192 :117–127.
- van der Kruit, P. C. and Freeman, K. C. (2011). Galaxy Disks. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 49 :301–371.
- Vasiliev, E. (2018). AGAMA : Action-based galaxy modeling framework. *Astrophysics Source Code Library*, page ascl :1805.008.
- Westera, P., Lejeune, T., Buser, R., Cuisinier, F., and Bruzual, G. (2002). A standard stellar library for evolutionary synthesis. III. Metallicity calibration. *Astronomy and Astrophysics*, 381 :524–538.
- Yoshii, Y. (1982). Density Distribution of Faint Stars in the Direction of the North Galactic Pole. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 34 :365.