



**HAL**  
open science

# Instabilités thermoacoustiques dans les moteurs à propergol solide

Aurélien Genot

► **To cite this version:**

Aurélien Genot. Instabilités thermoacoustiques dans les moteurs à propergol solide. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2019. Français. NNT : 2019SACLC032 . tel-02278347

**HAL Id: tel-02278347**

**<https://theses.hal.science/tel-02278347>**

Submitted on 4 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Instabilités thermoacoustiques dans les moteurs à propergol solide

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay  
préparée à CentraleSupélec

École doctorale n°579 Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et  
géosciences (SMEMaG)  
Spécialité de doctorat : Combustion

Thèse présentée et soutenue à Gif-sur-Yvette, le 21 Juin 2019, par

**AURÉLIEN GENOT**

Composition du Jury :

Avraham Hirschberg Professeur émérite, Université de Twente	Président
Bénédicte Cuenot Chercheur sénior, Cerfacs	Rapporteur
Fabien Halter Professeur, Université d'Orléans	Rapporteur
Joël Dupays Ingénieur de Recherche, Onera	Examineur
Franck Nicoud Professeur, Université de Montpellier	Examineur
Catherine Weisman Maître de Conférences, Sorbonne-Université	Examineur
Thierry Schuller Professeur, Université Toulouse III	Directeur de thèse
Stany Gallier Ingénieur de Recherche, ArianeGroup	Co-directeur de thèse
Julien Pichillou Ingénieur de Recherche, Cnes	Invité



# Remerciements

Je remercie en premier lieu ceux qui m'ont suivi durant la thèse : Thierry Schuller, Stany Gallier (mes directeurs de thèse), Nathalie Cesco et Julien Pichillou (mes encadrants CNES). Thierry est très engagé dans l'encadrement de ses doctorants, soucieux de leur bonne progression. Stany m'a beaucoup apporté par son expertise en aérothermochimie de la propulsion solide. Nathalie et Julien m'ont permis d'échanger assez régulièrement avec la communauté française de propulsion solide et ainsi de m'enrichir au contact de belles personnalités.

En suivant, je remercie tous les membres du jury. J'espère avoir d'autres occasions de les rencontrer tant nos échanges ont été intéressants. Je remercie en particulier deux d'entre eux : Joël Dupays pour sa grande sympathie et sa simplicité et Avraham Hirschberg pour ses excellents conseils, sa grande gentillesse et son dévouement pour la science.

Durant mes vacances pour l'enseignement, j'ai également beaucoup appris et je le dois aux personnes avec qui j'ai pu travailler : Aymeric Vié, Benoit Fiorina, Laurent Zimmer et Philippe Scoufflaire.

L'EM2C facilite également le travail de recherche grâce à un cadre de travail rendu agréable par l'investissement de Noï Lavaud, Nathalie Rodrigues, Brigitte Llobel et Sebastien Turgis. Je les remercie pour leur grande volonté de soutien envers les doctorants.

Je remercie bien sûr mes collègues doctorants et amis : Lionel Hirschberg, Robin Nez, Valentin Dupif, Kévin Monclard-Torres, Gilles Baillet, Adrien Chate-lier, Pedro Volpiani, Macole Sabat, Mélody Cailler, Roxanne Letournel, David Marchal, Claire Beauchesne, Marco Gatti, Milan Pelletier, Junghwa Yi, Luc Lecointre, Guilhem Lavabre, Guillaume Vignat, Amandine Menasria, Marion Picquart et tant d'autres. Merci pour votre soutien et votre sympathie.

Enfin, je remercie tout spécialement ma famille et mes proches sur qui j'ai toujours pu compter.

Cette thèse a été rendue possible grâce au financement CNES-ArianeGroup.

*L'amour et la connaissance sont les deux seules valeurs qui valent, car elles se démultiplient à mesure qu'on les partage.*

# Résumé

Ce travail vise à élucider un phénomène récemment identifié dans les simulations des écoulements des moteurs de fusées à propergol solide et encore remis en question. L'objectif est d'identifier les mécanismes conduisant à des instabilités thermoacoustiques auto-entretenues, induites par le couplage de la dynamique de la combustion des gouttes d'aluminium libérées par la combustion du propergol, avec le champ acoustique à l'intérieur du moteur.

Ce phénomène est étudié au moyen de simulations numériques de ces écoulements, d'un ensemble de modèles numériques d'ordre réduit et de modèles analytiques, tout en gardant à l'esprit que la modélisation de la combustion de l'aluminium soulève de nombreuses difficultés. L'analyse menée tout au long de ce manuscrit repose sur un ensemble d'hypothèses simplificatrices : *(i)* la réponse de la combustion de gouttes d'aluminium aux perturbations acoustiques est contrôlée par l'écoulement local autour de la goutte, *(ii)* le processus de combustion peut être supposé quasi-stationnaire pour la gamme de fréquences et les amplitudes acoustiques étudiées et *(iii)* la combustion de l'aluminium est brusquement arrêtée lorsque le diamètre de la goutte d'aluminium atteint un diamètre résiduel.

Quelques considérations générales sur la structure de l'écoulement dans les moteurs à propergol solide ainsi qu'un état de l'art sur la modélisation de la combustion de gouttes d'aluminium et des instabilités observées dans ces systèmes sont d'abord présentés. Cette analyse montre que des oscillations du taux de vaporisation des gouttes peuvent être une source d'instabilité thermoacoustique et que ces oscillations sont contrôlées par la dynamique de l'écoulement gazeux autour des gouttes.

L'instabilité thermoacoustique est d'abord étudiée au moyen de simulations numériques de l'écoulement dans un moteur générique afin de mettre en évidence ses principales caractéristiques en effectuant une analyse paramétrique des conditions l'altérant. Le diamètre résiduel des gouttes d'aluminium après

la combustion, l'amplitude de la perturbation acoustique et la durée de la combustion des gouttes d'aluminium figurent parmi les principaux paramètres modifiant l'instabilité. En outre, trois comportements de réponse de la combustion à l'acoustique sont identifiés : un comportement linéaire pour les faibles niveaux de pression acoustique puis un comportement quadratique et enfin un comportement fortement non-linéaire quand l'amplitude des oscillations augmente.

Le problème est ensuite analysé dans un cadre linéaire pour de petites perturbations. Un ensemble d'expressions analytiques est dérivé. Elles régissent les perturbations du taux de dégagement de chaleur produites par la dynamique des gouttes d'aluminium dans le champ d'écoulement perturbé. Deux aspects importants de la réponse des gouttes d'aluminium sont identifiés. Ils sont associés aux oscillations de la durée du temps de combustion des gouttes, identifiables à la frontière du nuage de gouttes, et aux fluctuations du taux d'évaporation contrôlées par la convection de l'écoulement gazeux autour de chaque goutte. Les fluctuations qui mènent à des perturbations du dégagement de chaleur sont des perturbations des champs de vitesse du gaz et des perturbations de la vitesse et du diamètre des gouttes. Tenant compte de ces dynamiques, des expressions analytiques sont obtenues et permettent de reproduire avec précision les résultats numériques des simulations de l'écoulement. Quatre nombres sans dimension qui régissent la dynamique de ces instabilités sont également identifiés.

Inspiré de l'analyse théorique précédente, un modèle numérique d'ordre réduit faiblement non linéaire est finalement développé pour déterminer l'état thermoacoustique du moteur générique lorsque l'amplitude de la perturbation acoustique augmente. Cet outil est utilisé pour montrer que les phénomènes non linéaires conduisant à un cycle limite sont les mêmes que ceux identifiés en régime linéaire.

# Abstract

This work aims at elucidating a phenomenon recently identified in the dynamics of solid rocket motors and still questioned. The objective is to identify the mechanisms leading to self-sustained thermo-acoustic instabilities, induced by the coupling of the combustion dynamics of aluminum droplets released by the burning propellant, with the acoustic field inside the motor chamber.

This phenomenon is studied by means of numerical flow simulations, a set of reduced order numerical flow models and fully analytical models, while keeping in mind that modeling aluminum combustion raises many difficulties and is not a mature field yet. The analysis conducted throughout this manuscript relies thus on a set of simplifying hypothesis by assuming *(i)* that the response of the combustion of aluminum droplets to acoustic perturbations is controlled by the oscillating drag exerted by the local flow around the droplet, *(ii)* that this unsteady combustion process can be assumed quasi-steady for the range of frequencies and acoustic amplitudes studied and *(iii)* that aluminum combustion is abruptly quenched when the aluminum droplet diameter falls below a residual diameter.

Some general considerations on the flow field in solid rocket motors are presented first, together with a state of the art on modeling droplet aluminum combustion and observations made on instabilities in these systems. A synthesis on the recently explored thermo-acoustic instabilities triggered by the combustion of aluminum is presented. It is pointed out that oscillations of the droplet vaporization rate can be a source of instability and it is controlled by unsteady convection.

The thermo-acoustic instability is studied first by means of numerical flow simulations in a generic solid rocket motor to highlight the cyclic flow in the motor and then a parametrical analysis is conducted. The post-combustion residual diameter of the aluminum particles, the amplitude of acoustic perturbation and the lifetime of the burning aluminum droplets are among the main parameters



altering the instability. Also, three combustion response behaviors to acoustics are identified : a linear behavior for small acoustic pressure levels followed by a quadratic behavior then a highly non-linear behavior when the pressure amplitude increases in the motor chamber.

The problem is then analyzed in the linear framework. A set of expressions is derived. They govern the heat release rate disturbances produced by the dynamics of aluminum droplets in the perturbed flow field. Two important features of the response of aluminum droplets are identified. They are associated to oscillations of the droplet lifetime at the boundary of the droplet cloud and to fluctuations of the droplet evaporation rate, controlled by convection. The dynamics of the droplets highly depends on gas and droplet velocity fields and on droplet diameter. Taking these features into account, yields analytical expressions that allow to reproduce with accuracy the numerical results from the flow simulations. Four dimensionless numbers are then identified. They govern the dynamics of these instabilities.

Inspired from the previous theoretical analysis, a weakly nonlinear low-order numerical model is finally developed to determine the thermo-acoustic state of the generic solid rocket motor when the amplitude of the acoustic perturbation increases. This tool is used to highlight that the nonlinear phenomena leading to a limit cycle are the same as those identified in the linear regime.

# Table des matières

Résumé	v
Abstract	vii
Nomenclature	xiii
<b>I Introduction : Propulsion solide et instabilités</b>	<b>1</b>
<b>1 La propulsion solide</b>	<b>3</b>
1.1 Contexte et fonctionnement des systèmes propulsifs . . . . .	3
1.2 Le propergol solide : composition et combustion . . . . .	5
1.3 Gouttes d'aluminium dans un MPS . . . . .	8
1.4 Ecoulement stationnaire de Taylor-Culick . . . . .	14
1.5 Instationnarités de l'écoulement . . . . .	16
<b>2 Instabilité thermoacoustique</b>	<b>27</b>
2.1 Instabilité THERmoACoustique (ITHAC) . . . . .	27
2.2 Méthodes de prévision d'une instabilité thermoacoustique . . .	29
2.3 Etat de l'art sur l'ITHAC . . . . .	31
2.4 Objectifs de la thèse . . . . .	33
2.5 Plan du manuscrit . . . . .	34
<b>II Simulations de l'instabilité thermoacoustique dans un Mo-</b> <b>teur à Propergol Solide</b>	<b>37</b>
<b>3 Modélisation de la combustion de l'aluminium</b>	<b>39</b>
3.1 Modèles de la combustion de gouttes d'aluminium . . . . .	39
3.2 Effet de l'écoulement sur la combustion d'une goutte . . . . .	47
<b>4 Simulation numérique instable de référence</b>	<b>53</b>

4.1	Modélisation physique de l'écoulement dans les simulations numériques . . . . .	53
4.2	Modélisation numérique . . . . .	56
4.3	Simulation instable de référence . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Effets du modèle de combustion sur l'ITHAC</b>	<b>71</b>
5.1	Introduction . . . . .	71
5.2	Impact de l'amplitude de forçage : Non-linéarités de combustion	75
5.3	Modèle ASSM : Impact du diamètre résiduel . . . . .	83
5.4	Modèle Lobe . . . . .	88
5.5	Conclusion . . . . .	91
<b>III</b>	<b>Analyse linéaire de stabilité</b>	<b>93</b>
<b>6</b>	<b>Stabilité linéaire dans un MPS</b>	<b>95</b>
6.1	Approches théoriques pour la stabilité linéaire dans les MPS . .	95
6.2	Expression des pertes et sources acoustiques . . . . .	100
6.3	Comparaison avec la simulation de référence . . . . .	109
6.4	Hypothèse : pertes acoustiques linéaires . . . . .	109
6.5	Conclusion . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Modèle analytique linéaire pour la réponse de la combustion</b>	<b>111</b>
7.1	Introduction . . . . .	112
7.2	Calcul de référence stable . . . . .	112
7.3	Modèle de réponse linéaire de la combustion de l'aluminium . .	121
7.4	Modèle pour la stabilité linéaire . . . . .	139
7.5	Conclusion . . . . .	142
<b>8</b>	<b>Simplification du modèle source et nombres adimensionnels</b>	<b>145</b>
8.1	Introduction . . . . .	145
8.2	Simplification de la modélisation des fluctuations locales du taux de dégagement de chaleur . . . . .	147
8.3	Nombres adimensionnels . . . . .	155
8.4	Conclusion . . . . .	170
<b>IV</b>	<b>Analyse faiblement non-linéaire</b>	<b>175</b>
<b>9</b>	<b>Modèle d'ordre réduit faiblement non-linéaire</b>	<b>177</b>
9.1	Méthode des moyennes . . . . .	177
9.2	Approche non-linéaire pour l'ITHAC . . . . .	180
9.3	Modélisations physiques d'ordre réduit . . . . .	185

9.4	Résolution numérique . . . . .	193
9.5	Résultats de l'outil développé . . . . .	196
9.6	Conclusion . . . . .	201
<b>Conclusion</b>		<b>205</b>
<b>A Description du code CPS, Code pour la Propulsion Spatiale</b>		<b>213</b>
A.1	Introduction . . . . .	213
A.2	Modélisation physique . . . . .	214
A.3	Modélisation numérique . . . . .	215
A.4	Conclusion . . . . .	215
<b>B Linéarisation des équations de conservation</b>		<b>217</b>
B.1	Equations de conservation pour un mélange diphasique réactif .	217
B.2	Linéarisation des équations . . . . .	220
<b>C Thermo-acoustic instabilities driven by fuel droplet lifetime oscillations</b>		<b>223</b>
C.1	Introduction . . . . .	225
C.2	Illustration in a SRM . . . . .	226
C.3	Analytical model . . . . .	229
C.4	Application to a cylindrical SRM . . . . .	234
C.5	Conclusion . . . . .	238
<b>References</b>		<b>251</b>



# Nomenclature

## Variables et paramètres :

$C_P$	Capacité thermique massique à pression constante	$r$	Position radiale ou rayon ou constante des gaz parfaits
$C_V$	Capacité thermique massique à volume constant	$s$	Rapport stoechiométrique
$D$	Diamètre d'une goutte	$t$	Temps
$E$	Energie totale	$t_v$	Temps caractéristique de convection
$\Delta H_r$	Enthalpie de réaction	$u$	Vitesse longitudinale
$L$	Longueur de la chambre du moteur	$v$	Vitesse radiale ou verticale
$L_v$	Chaleur latente de vaporisation	$x$	Position axiale
$N_p$	Nombre de gouttes par unité de volume	B	Nombre de Spalding
$Q_v$	Flux de chaleur convectif	Bi	Nombre de Biot
$R$	Rayon du moteur	M	Nombre de Mach
$S$	Surface de la goutte	Nu	Nombre de Nusselt
$T$	Température ou période acoustique	Pr	Nombre de Prandtl
$Y$	Fraction Massique	Re	Nombre de Reynolds
$a$	Vitesse du son	$S_{tk}$	Nombre de Stokes
$f$	Fréquence	$S_r$	Nombres de Strouhal de l'écoulement
$k$	Longueur d'onde	$S_c$	Nombres de Strouhal de combustion
$\dot{m}$	Débit massique	$S_v$	Nombre de convection
$p$	Pression du gaz	Sh	Nombre de Nusselt
$\dot{q}$	Taux de dégagement de chaleur	$\mathcal{D}$	Coefficient de diffusion
		$F_d$	Force de traînée
		$\mathbf{I}$	Matrice identité

$\mathbf{P}$	Tenseur des contraintes	$\mathcal{R}_e$	Partie réelle
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse gaz	$\mathcal{S}$	Terme source de Rayleigh local
$\mathcal{F}$	Vecteur flux		
$\mathcal{M}$	Masse molaire	$\mathcal{W}$	Vecteur variable conservative
$\mathcal{H}$	Fonction Heaviside		
$\mathcal{I}_m$	Partie imaginaire		

**Indices :**

0	Ecoulement moyen	$g$	Phase gazeuse
1	Fluctuation temporelle de l'écoulement	$i$	Injection à la surface du propergol
$\infty$	Environnement gazeux	$l$	Pertes acoustiques
$Al$	Aluminium	$n$	n-ième mode
$D^2$	Sans fonction Heaviside / Loi $D^2$ classique	$p$	Phase particulaire
<i>ITHAC</i>	Source de l'instabilité	$r$	Résidu d'oxyde d'aluminium
$Ox$	Oxydant	<i>rot</i>	Rotationnel
$S$	Phase gaz à la surface de la goutte	<i>sat</i>	Conditions de saturation
$ac$	Acoustique	<i>st</i>	Stœchiométrie
$b.c.$	Contribution de frontière	$t$	Col, "throat"
$c$	Combustion du propergol	$v.c.$	Contribution de volume
$d$	Trainée, "Drag"	$\hat{\cdot}$	Fluctuations dans l'espace de Fourier
$f$	Flamme		

**Caractères grecs :**

$\alpha$	Taux de croissance	$\eta$	Amplitude de pression acoustique
$\alpha_p$	Fraction volumique de gouttes	$\Psi$	Fonction de courant
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifiques	$\nu$	Viscosité cinématique
$\omega$	Fréquence angulaire ( $\omega = 2\pi f$ )	$\mu$	Viscosité dynamique
$\delta$	Fonction Dirac ou différentielle	$\kappa$	Fraction massique de particules
$\xi$	Paramètre de viscosité	$\rho$	Masse volumique
$\psi$	Mode acoustique non-perturbé	$\tau_v$	Temps caractéristique de trainée

**Abréviations :**

Al	Aluminium
ASSM	Aerodynamics of Segmented Solid Motors
CFD	Computational Fluid Dynamics
CPS	Code Propulsion Spatiale (code CFD ArianeGroup)
FDF	Flame Describing Function



FTF	Flame Transfer Function
ITHAC	Instabilités THERmoACoustiques
MPS	Moteur à Propergol Solide
PA	Perchlorate d'Ammonium
PBHT	Polybutadiène Hydroxytélchélique

Première partie

Introduction : Propulsion solide  
et instabilités



# Chapitre 1

## La propulsion solide

*Au sein d'ArianeGroup, les moteurs à propergol solide (MPS) sont utilisés notamment pour propulser les fusées Ariane 5 et prochainement Ariane 6. Le propergol contient en son sein l'oxydant et le réducteur qui, après initiation par une source de chaleur, réagissent et forment des produits de combustion portés à haute température. Souvent, pour augmenter l'énergie thermique libérée, des particules métalliques sont ajoutées. Le propergol solide se consume et les particules métalliques, libérées dans la chambre, réagissent dans un second temps. Enfin, le chapitre présente les différents phénomènes instationnaires à l'origine d'oscillations de pression. Des instabilités d'origine hydrodynamique ou associées aux combustions du propergol et des gouttes d'aluminium peuvent se développer. La structure du champ acoustique dans un MPS est également décrite lors de ces instabilités.*

### 1.1 Contexte et fonctionnement des systèmes propulsifs

Dans ce chapitre sont décrits le principe de la propulsion solide, les systèmes où elle est utilisée et le propergol solide, matériau qui permet la propulsion.

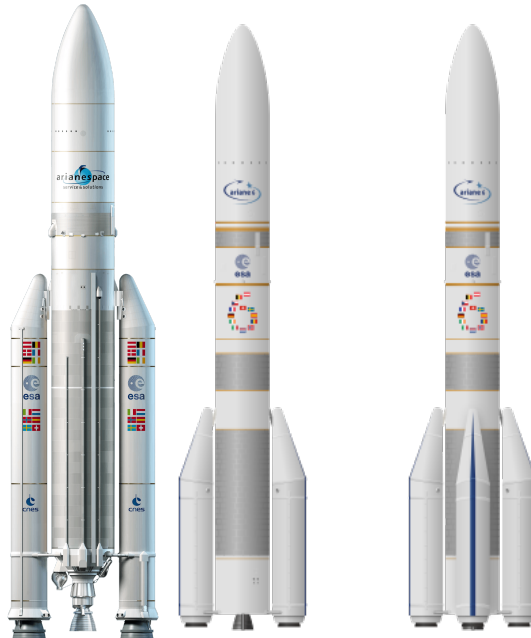
Ce sujet de thèse s'inscrit dans le cadre de la R&T du CNES et d'ArianeGroup, pour le lanceur Ariane 6.

Le CNES est un établissement public à caractère industriel et commercial (EPIC) qui élabore et propose au gouvernement français le programme spatial. Safran et Airbus Group ont mutualisé leur savoir-faire et leurs activités dans le domaine de l'aérospatial et ont créé une entreprise en 2014 pour notamment dé-

velopper les lanceurs Ariane 6. L'entreprise ArianeGroup, anciennement Airbus Safran Launchers, assure la commercialisation et l'exploitation des systèmes de lancements spatiaux.

Le lanceur Ariane 5 est connu pour sa fiabilité mais présente des coûts de lancement trop importants (200 à 220 millions pour deux satellites) par rapport aux nouveaux entrants dans le marché du lancement de satellites : Space X et Longue Marche (Bigot et al. (2009)). Ariane 6, prévue pour 2020, doit permettre de proposer des lancements à un coût réduit, tout en étant plus en adéquation avec le marché des satellites à lancer.

Les moteurs à propergols solides (MPS) permettent le décollage de la fusée Ariane 5 et prochainement de la fusée Ariane 6 (figure 1.1). Ces moteurs ont un



**FIGURE 1.1** – De gauche à droite : Ariane 5, Ariane 6 (deux ou quatre MPS pour varier la puissance au décollage) (Wikipedia)

fonctionnement assez simple. La figure 1.2 montre un schéma typique d'un MPS. Le propergol solide est situé aux parois internes du moteur. Dans la chambre, la combustion du propergol est initiée par un allumeur. Sa combustion produit des gaz qui s'échappent ensuite par la tuyère permettant la propulsion. Des lignes de courant de l'écoulement sont représentées à la figure 1.2. Le propergol régresse au cours de la combustion et la géométrie interne évolue au cours du lancement. Un propergol aluminisé libère des particules d'aluminium, lors de sa régression, qui réagissent à leur tour à proximité de la surface du propergol solide (zone rouge, figure 1.2). Un écoulement gaz-particules est donc injecté

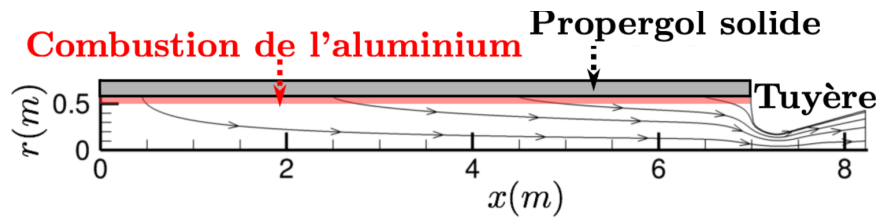


FIGURE 1.2 – Illustration du propergol solide, de l'écoulement et de la zone de combustion de l'aluminium dans un MPS

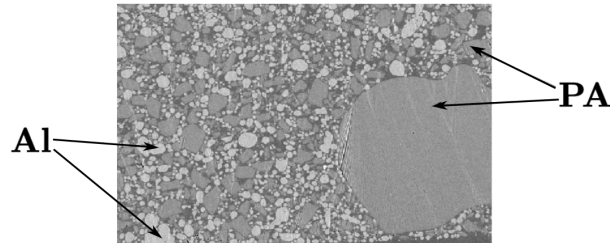
radialement au cours de la combustion du propergol et sort, après rotation, par la tuyère selon la direction axiale. L'éjection des gaz par la tuyère se traduit par une poussée sur la structure solide. La nature du propergol est détaillée dans la sous-section suivante.

## 1.2 Le propergol solide : composition et combustion

Il existe différents types de propergol. Tout d'abord, on peut distinguer deux familles de propergol. Il s'agit des propergols double base et des propergols composites (Davenas (2012)). Les premiers sont composés de nitrocellulose solide, de nitroglycérine liquide et éventuellement d'additifs. Les éléments oxydants et réducteurs sont réunis dans la même molécule et forment ainsi un matériau homogène. Les propergols composites sont plus récents et produisent une impulsion spécifique plus grande, c'est-à-dire une durée plus longue pendant laquelle un kilogramme de propergol produit une poussée équivalente à une masse d'un kilogramme. Ceux-ci sont constitués d'un mélange hétérogène d'oxydants, d'un liant réducteur et parfois d'une charge métallique supplémentaire (bore, aluminium). Le liant est le plus souvent constitué d'un polymère. Des particules métalliques sont ajoutées afin d'augmenter les performances et d'obtenir un couple oxydo-réducteur plus énergétique. Elles permettent également d'amortir certaines oscillations de pression, notamment à hautes fréquences (Karnesky and Colucci (1975), Temkin and Dobbins (1966), Culick (2006)).

Le propergol utilisé pour les MPS de la fusée Ariane 5 est la butalane<sup>®</sup>. Il s'agit d'un propergol composite composé de perchlorate d'ammonium (PA) pour la charge oxydante et de polybutadiène hydroxytéléchélique (PBHT) pour le liant et d'aluminium (Al) pour l'additif énergétique (ESA (2005)). La figure 1.3 montre la structure hétérogène des propergols composites comme le PA/PBHT/Al (butalane<sup>®</sup>). Une composition typique du propergol d'un MPS d'une fusée Ariane 5 comprend en termes de fractions massiques :

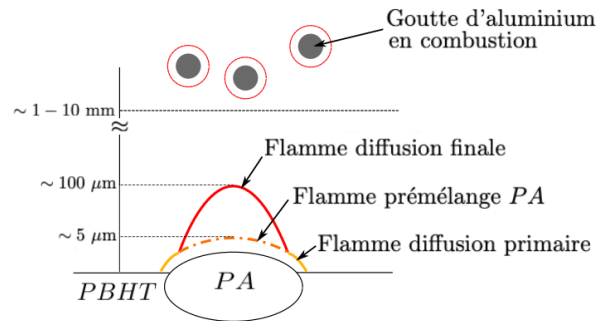
- des grains de 5 – 200  $\mu\text{m}$  de PA à hauteur de  $\sim 68\%$



**FIGURE 1.3** – Photo au microscope électronique de la structure d'un propergol PA/PBHT/Al (Gallier (2014))

- des particules de  $5 - 50 \mu\text{m}$  d'Al à hauteur de  $\sim 18\%$
- et du PBHT à hauteur de  $\sim 14\%$ , le liant entre les particules.

Du fait de leur composition hétérogène, ces propergols composites brûlent de façon complexe. Il se forme une flamme de prémélange de perchlorate d'ammonium (PA), une flamme de diffusion primaire (PBHT/PA) et une flamme de diffusion finale (figure 1.4). Le PA joue le rôle de l'oxydant et le PBHT celui d'un réducteur. Une quantité importante de l'aluminium ne brûle pas directement à la surface du propergol solide. Il brûle dans la chambre, à quelques millimètres de la surface du propergol solide, à cause du temps de fusion des particules d'aluminium et de l'allumage des gouttes. La combustion d'un propergol aluminisé produit deux contributions énergétiques : une combustion surfacique pour le propergol solide (PA/PBHT) et une combustion distribuée en volume de gouttes d'aluminium (Culick (2006)). La combustion de l'aluminium et les différents phénomènes physiques mis en jeu sont abordés à la section 1.3.



**FIGURE 1.4** – Schématisation de la combustion d'un propergol composite aluminisé

La hauteur de flamme au-dessus du propergol (PA/PBHT) est de l'ordre de  $100 \mu\text{m}$  (Lengelle et al. (2000)) comme illustrée à la figure 1.4. Les produits de combustion du propergol sont essentiellement constitués de  $\text{CO}$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{HCl}$  et  $\text{N}_2$ . D'un point de vue macroscopique, la combustion du propergol est donc assimilable à un front de réaction homogène qui consomme le propergol selon la direction normale à la surface. Ce modèle est illustré à la figure 1.5. Un

bilan de masse permet de déterminer la vitesse  $v_i$  des produits de combustion s'échappant de la surface en combustion. Cette vitesse peut être utilisée dans certaines simulations comme une condition limite pour l'écoulement dans la chambre :

$$\rho_{g,i}v_i = \rho_c v_c \quad (1.1)$$

où  $\rho_g$  est la masse volumique des gaz de combustion,  $i$  est l'indice relatif à l'injection,  $\rho_c$  est la masse volumique du propergol solide et  $v_c$  désigne la vitesse de déplacement du front de combustion.

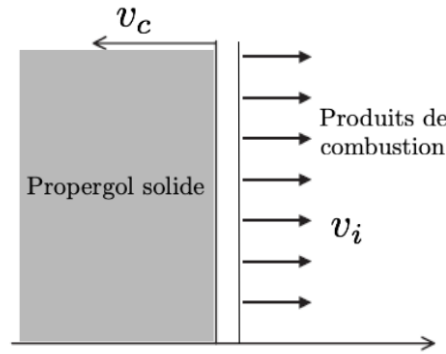


FIGURE 1.5 – Combustion du propergol solide (Kuentzmann (2004))

Pour la combustion du propergol, on parle de régression normale du front, "en cigarette". On peut exprimer la vitesse de régression du propergol en utilisant la loi de Vieille (1893) :

$$v_c = Ap^n \quad (1.2)$$

où  $p$  est la pression en bar,  $A$  et  $n$  sont des coefficients dont les valeurs dépendent du propergol. Dans des conditions normales de fonctionnement, le propergol régresse à une vitesse  $v_c$  de l'ordre de la dizaine de millimètres par seconde. Sa vitesse dépend de la pression de la chambre dans le moteur selon l'expression Eq. (1.2). L'ordre de grandeur de la vitesse de régression de la vitesse du propergol est faible devant la vitesse du son (environ 1000 m/s).

Dans le cas de la butalane<sup>®</sup> de la fusée Ariane 5, la température de surface du propergol est de l'ordre de 1000 K. La flamme du propergol, située à une centaine de micromètres, a une température de l'ordre de 2200 K. Après combustion du propergol, l'écoulement est constitué de gouttes d'aluminium (encore imbrûlées), de monoxyde de carbone, de dioxyde de carbone, de vapeur



d'eau, de chlorure d'hydrogène et d'autres produits gazeux en concentration négligeable. Les différents constituants du milieu après combustion du propergol (PA/PBHT) aluminisé à hauteur de 18%, avant combustion de l'aluminium, sont donnés à la Table 1.1. Ces données sont similaires à celles de [Lengellé et al. \(2002\)](#); [Lengelle et al. \(2000\)](#).

**TABLE 1.1** – *Fractions massiques des produits de combustion du propergol solide (PA/PBHT/Al). Présence de gouttes liquides d'aluminium (section 1.3)*

$Y_{N_2}$	$Y_{CO_2}$	$Y_{H_2O}$	$Y_{CO}$	$Y_{HCl}$	$Y_{Al(l)}$
0.08	0.12	0.20	0.19	0.21	0.18

L'aluminium étant très oxydable, les gouttes dans la chambre réagissent principalement avec le dioxyde de carbone et la vapeur d'eau (produits de la réaction PA/PBHT). Après combustion de l'aluminium, l'écoulement dans la chambre comprend majoritairement du monoxyde de carbone, du dioxyde de carbone, du chlorure d'hydrogène, de la vapeur d'eau, des gouttes d'oxyde d'aluminium (alumine) et d'autres produits gazeux en concentration négligeable. Les fractions massiques sont données à la Table 1.2. La combustion de l'aluminium permet d'augmenter la température du gaz de 2200 K à 3400 K dans la chambre du moteur.

**TABLE 1.2** – *Fractions massiques des constituants liquides et gazeux dans le moteur après combustion de l'aluminium*

$Y_{N_2}$	$Y_{CO_2}$	$Y_{H_2O}$	$Y_{CO}$	$Y_{HCl}$	$Y_{Al_2O_3(l)}$
0.08	0.02	0.07	0.26	0.18	0.32

Pour résumer, les moteurs à propergol solide qui équipent les lanceurs Ariane 5 et Ariane 6 sont alimentés par des propergols composites (PA/PBHT/Aluminium). Deux combustions sont alors observées. Une première combustion surfacique PA/PBHT (très proche de la surface du propergol) entraîne une régression du propergol à une vitesse  $v_c$  qui dépend de la pression ambiante. La chambre est le siège d'une combustion distribuée de gouttes d'aluminium libérées avec les produits gazeux de la réaction PA/PBHT (principalement du dioxyde de carbone et de la vapeur d'eau).

### 1.3 Gouttes d'aluminium dans un MPS

L'aluminium subit de nombreuses transformations de la fabrication du propergol aluminisé jusqu'à l'utilisation du moteur. Au contact de l'air, les parti-

cules d'aluminium, avant d'être intégrées dans le propergol, s'oxydent en surface. Durant l'utilisation du moteur, le propergol libère des particules d'aluminium qui peuvent s'agglomérer. Ces particules deviennent d'abord liquides puis elles réagissent avec leur environnement gazeux. De cette combustion de gouttes, des résidus inertes sont produits. La fin de vie de la goutte réactive est une phase encore mal connue et est, dans le cadre de ce manuscrit, modélisée par un arrêt abrupt du processus de combustion. Ces différentes étapes sont décrites ci-dessous.

### 1.3.1 Oxydation en surface des particules d'aluminium

L'aluminium est très réactif. Même dans un environnement pauvre en oxygène, les particules d'aluminium vont se recouvrir d'une couche d'alumine ( $Al_2O_3$ ). [Yetter et al. \(2009\)](#) évaluent cette couche à environ 3 nm, quelle que soit la taille de la particule. D'un point de vue performance énergétique, cette couche est négligeable pour des particules de l'ordre de quelques micromètres. Mais pour des particules nanométriques cela peut représenter une grande perte énergétique car le rapport volume/surface de la goutte est plus petit.

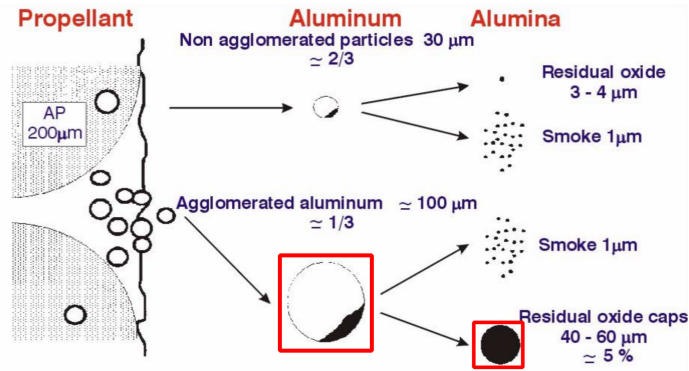
Pour des particules micrométriques, cette couche oxydée a tout de même un impact, puisqu'elle passive la goutte d'aluminium. La combustion ne peut être initiée tant qu'il y a une couche d'alumine solide en surface.

### 1.3.2 Agglomération et allumage

A la surface du propergol, les particules d'aluminium s'agglomèrent. Ce phénomène d'agglomération peut s'expliquer par l'adhérence des particules d'aluminium grâce à la couche fondue de liant qui les entoure ([Price and Sigman \(2000\)](#)).

La taille des agglomérats et la fraction massique d'agglomérats dépendent de la pression de fonctionnement. Plus la pression est grande et plus la vitesse des gaz injectés est grande ([Vieille \(1893\)](#)), ce qui entraîne un temps de résidence en surface du propergol plus faible et donc une proportion d'agglomérats moins importante. Dans les conditions de fonctionnement des moteurs d'Ariane 5, la pression est élevée (environ 5 MPa). Dans ce cas, seulement un tiers de la masse d'aluminium initial s'agglomère ([Duterque et al. \(1999\)](#), [Lengellé et al. \(2002\)](#)).

Les agglomérats de particules d'aluminium s'échauffent. De plus, les températures de fusion de l'aluminium et de l'alumine diffèrent. La première est de 933 K, et la seconde vaut 2327 K. La température à la surface du propergol



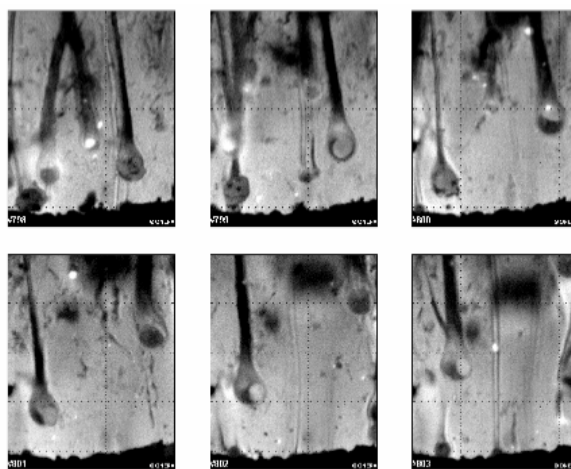
**FIGURE 1.6** – Comportement de l’aluminium dans un propergol composite. Seuls les phénomènes physiques encadrés en rouge sont considérés dans la modélisation de l’aluminium dans les simulations numériques (chapitre 4) : gouttes réactives provenant d’agglomérats et résidus de grande taille. (Lengellé et al. (2002))

(lors de sa combustion) s’élève à environ 1000-1400 K (Lengelle et al. (2000)). Au cours de ce processus, leur cœur métallique devient alors liquide dès lors que la température excède 933 K avec une couche protectrice solide d’alumine tant que la température reste inférieure à 2327 K. La couche d’alumine de quelques nanomètres peut se fissurer avant sa propre fusion (Rosenband (2004), Dupays (2009)). En effet, ce phénomène de fissuration s’explique par la dilatation de l’aluminium qui est plus importante que celle de l’alumine. Dans ce cas, la réaction de combustion autour de l’agglomérat peut être initiée à une température plus faible que la température de fusion de l’alumine. Sinon, la température d’allumage des gouttes se situe à une température supérieure à 2327 K, la température de fusion de l’alumine. Lorsque les agglomérats ont totalement fondu, ils prennent la forme de gouttes sphériques dont le diamètre est de l’ordre d’une centaine de micromètres.

Comme illustré par la figure 1.6, tirée de Lengellé et al. (2002), il y a donc essentiellement deux classes de gouttes d’aluminium : des gouttes agglomérées d’une centaine de micromètres et des gouttes non agglomérées de quelques dizaines de micromètres, générées à la surface du propergol. Ces deux classes de gouttes s’éloignent ensuite de la surface du propergol solide du fait de l’accélération communiquée par la force de traînée agissant sur les gouttes due à l’injection de gaz par combustion du propergol (figure 1.7).

### 1.3.3 Combustion d’une goutte d’aluminium et résidus

Les gouttes d’aluminium sont entourées par les produits de combustion du propergol. Il s’agit de gaz oxydants et inertes. Les différents gaz oxydants sont



**FIGURE 1.7** – Ombroscopie d’un propergol solide avec des gouttes d’aluminium en combustion (site internet ONERA/DEFA)

(Beckstead (2002); Brooks and Beckstead (1995); Lengellé et al. (2002)) :  $O_2$  (en très faibles quantités),  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $CO$  (voir Table 1.1). La vapeur d’eau  $H_2O$  et le dioxyde de carbone  $CO_2$  sont présents en grande quantité dans les MPS utilisés sur la fusée Ariane 5 et l’aluminium s’oxyde préférentiellement avec ces deux molécules (Belyaev et al. (1968)). Pour modéliser de façon simple la combustion de gouttes d’aluminium, seuls les oxydants  $H_2O$  et  $CO_2$  peuvent être pris en compte.

Comme l’illustre la figure 1.8, l’aluminium se vaporise, puis il réagit en phase gazeuse. Les produits issus de la combustion des gouttes d’aluminium sont nombreux (Beckstead (2002)) :  $Al_2O_3(l)$ ,  $AlCl$ ,  $AlCl_2$ ,  $AlClO$ ,  $AlOH_2$ ,  $AlO$ ,  $Al_2O$ ,  $AlO_2$ ,  $CO$ ,  $H_2$ , ... avec une recondensation de produits gazeux en alumine liquide ( $Al_2O_3(l)$ ). Les condensats d’alumine forment une trainée noire derrière la goutte d’aluminium dont certains peuvent diffuser vers la goutte d’aluminium, visible à la figure 1.7 (Brooks and Beckstead (1995)) et augmenter la quantité d’alumine déjà présente initialement (sous-section 1.3.2). Dans la goutte composée de deux constituants, un lobe d’alumine se forme (en vert dans la figure 1.8). Il résulte des forces de tension superficielle entre les différents composés  $Al - Al_2O_3$ . La surface d’échange aluminium-gaz est également modifiée.

Les travaux expérimentaux récents de Braconnier et al. (2018) permettent de donner des renseignements complémentaires sur la dynamique de combustion d’une goutte d’aluminium à basse et haute pressions. Après allumage, comme illustré à la figure 1.9, elle suit trois phases : (i) une combustion symétrique, (ii) une combustion asymétrique, (iii) une extinction. Durant la phase symétrique,

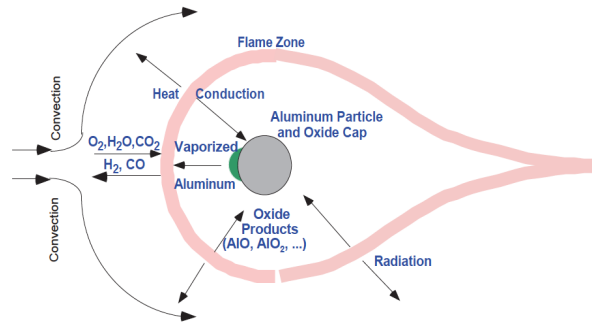


FIGURE 1.8 – Schéma de la combustion d'une particule d'aluminium dans un écoulement (Beckstead (2002))

la décroissance du diamètre peut être supposé modélisable par une loi du  $D^2$ . La phase asymétrique est liée à la présence du lobe d'oxyde d'aluminium et on remarque qu'elle est de courte durée par rapport à la phase symétrique. On peut donc penser que son effet est négligeable sur l'instabilité. La phase d'extinction est discutée à la sous-section suivante.

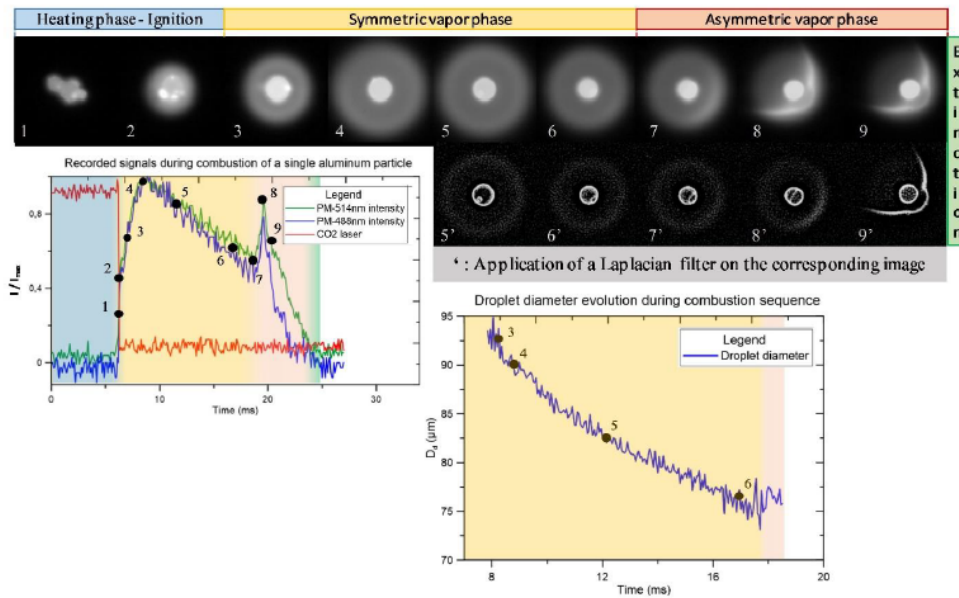


FIGURE 1.9 – Séquence caractéristique de combustion d'une goutte d'aluminium dans l'air -  $p_0 = 1$  bar -  $D_{t=0} = 93$  µm et corrélation temporelle avec les profils d'émission de lumière enregistrés. (Braconnier et al. (2018))

### 1.3.4 Micro-explosion de la goutte métallique en fin de combustion

Les gouttes multi-composants, en particulier les gouttes métalliques comme les gouttes aluminium-alumine, peuvent présenter en fin de vie un arrêt brutal de la combustion. Des extinctions résultant d'apparition de jets, de micro-explosions et/ou de rotation sont souvent constatés (Braconnier et al. (2018), Dreizin (1996), Fabignon et al. (2003), Bucher et al. (1996), Bucher et al. (1999)). Ces phénomènes de combustion disruptive en fin de vie de gouttes sont également observés pour d'autres gouttes métallisées comme l'étain (Li et al. (2018)). Ce mécanisme reste assez méconnu et difficile à caractériser mais il doit être pris en compte car la dynamique de fin de vie des gouttes joue un rôle important sur l'instabilité thermoacoustique (Genot et al. (2019), Annexe C). Ce phénomène d'extinction brutale est illustré pour une goutte d'étain à la figure 1.10. On remarque que dans le cas de l'étain ou de l'aluminium, la goutte cesse de brûler à un diamètre de taille non-négligeable par rapport au diamètre initial (figure 1.9 pour l'aluminium).

Selon Braconnier et al. (2018), à haute pression, l'accumulation d'oxyde peut être telle que l'extinction peut être induite par deux phénomènes. Soit la couche d'oxyde est éjectée par un phénomène d'explosion avant l'extinction. Soit la couche d'oxyde recouvre la surface de la goutte empêchant la combustion de continuer et une partie non négligeable d'aluminium reste imbrûlée. Dans ces deux cas, l'arrêt de la combustion est abrupt.

Le modèle de combustion ASSM (chapitre 3, sous-section 3.1.4) intègre une modélisation particulière pour ce type d'extinction en prenant en compte un arrêt brutal du processus de combustion, par une fonction Heaviside.

### 1.3.5 Résidus inertes d'alumine

Après combustion, des résidus d'alumine de taille non négligeable (quelques dizaines de micromètres), ainsi que des fumées micrométriques (voir figure 1.6) sont ensuite transportés dans l'ensemble de la chambre de combustion. Ces résidus présentent l'avantage d'amortir les ondes acoustiques (Temkin and Dobbins (1966), Culick (2006)) et notamment les ondes liées aux modes radiaux ou tangentiels (Karnesky and Colucci (1975)). Par contre, ces particules inertes chauffées induisent un rayonnement thermique dans la chambre (Beckstead (2002)) et dans le panache de fumée à la sortie du moteur (Binauld et al. (2019), Binauld et al. (2018)), sont à l'origine de pertes diphasiques dans les moteurs à propergol solide (Powell et al. (2018)), et forment des flaques d'alumines qui

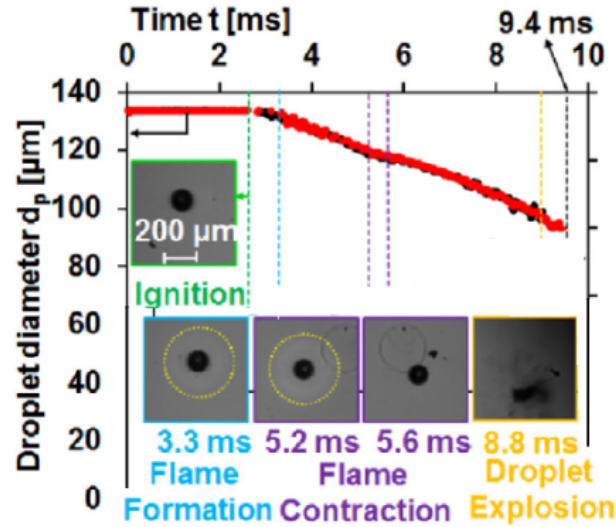


FIGURE 1.10 – Evolution du diamètre de gouttes Etain/Xylène au cours de la combustion et les différentes phases de combustion. (Li et al. (2018))

s'accumulent au fond arrière du moteur (Salita (1995)).

Dans la suite de ce chapitre, l'écoulement moyen et les instabilités sont décrits. La modélisation de la combustion des gouttes d'aluminium fait l'objet du chapitre 3.

## 1.4 Écoulement stationnaire de Taylor-Culick

La combustion des gouttes dépend en partie de l'écoulement gazeux. La modélisation et la compréhension de la structure de cet écoulement est donc nécessaire pour étudier l'instabilité.

Pour décrire l'écoulement dans un MPS, on présente la description incompressible 2D-axisymétrique, monophasique de Taylor-Culick (Taylor (1956), Culick (1966)). Ce modèle est une description simplifiée de l'écoulement moyen du gaz dans une chambre de MPS cylindrique, sans combustion des gouttes d'aluminium.

Le nombre de Mach est faible dans la chambre de combustion d'un MPS (Kuentzmann (2004)). On suppose ici que l'écoulement moyen est incompressible, stationnaire, non-visqueux et 2D axisymétrique. Soit  $\Psi$  la fonction de courant, on peut alors définir les vitesses axiale  $u_0$  et radiale  $v_0$  du champ

moyen comme :

$$v_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad u_0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (1.3)$$

La fonction de courant vérifie l'équation suivante dans le cas d'un écoulement incompressible, 2D axisymétrique :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = r^2 g(\Psi) \quad (1.4)$$

La fonction  $g$  est initialement une fonction non-spécifiée, elle est reliée aux conditions limites du problème. Les conditions limites dans un MPS sont :

$$\begin{aligned} u_0(r, x = 0) &= 0 \\ u_0(r = R, x) &= 0 \\ v_0(r = R, x) &= -v_i < 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec  $v_i$  la vitesse d'injection des gaz. La fonction  $g$  est donc définie comme (Culick (1966)) :

$$g = \pi \Psi \quad (1.6)$$

On obtient alors la solution suivante pour l'écoulement moyen :

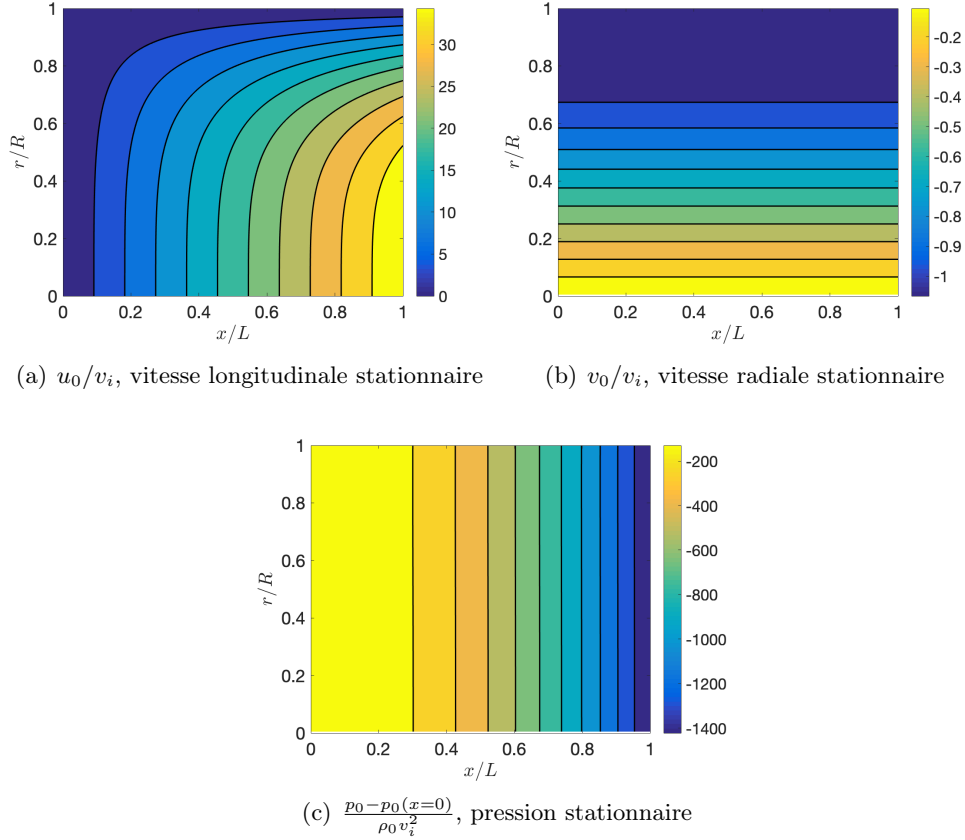
$$\begin{aligned} \Psi &= -xRv_i \sin \Theta \\ v_0 &= -\frac{R}{r} v_i \sin \Theta \\ u_0 &= \pi \frac{x}{R} v_i \cos \Theta \\ \nabla \times \mathbf{u}_0 &= \frac{\pi^2 r x v_i}{R^3} \sin \Theta \mathbf{e}_\theta \\ p_0 &= p_0(x = 0) - \frac{\rho_0 v_i^2}{2} \left( \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \Theta + \frac{\pi^2 x^2}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

avec  $\mathbf{e}_\theta$  le vecteur azimuthal,  $p_0$  la pression stationnaire dans la chambre,  $p_0(x = 0)$  la pression au fond avant (en  $x = 0$ ) et  $\Theta$  correspond à :

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (1.8)$$

Les modèles pour le champ de vitesse ( $u_0, v_0$ ) et le champ de pression sont illustrés à la figure 1.11, pour un rapport  $L/R = 12$  où  $L$  est la longueur de la chambre et  $R$  le rayon de la chambre. Le rapport  $L/R = 12$  est du même ordre de grandeur que celui de la géométrie utilisée dans les simulations de l'écoulement présentées dans ce manuscrit. On observe que le champ de pression stationnaire peut être supposé 1D (invariant radialement, Fig 1.11(c)) et





**FIGURE 1.11** – Champ de vitesse et de pression suivant la description incompressible de Taylor-Culick ( $L/R = 12$ ). La paroi du propergol (et d'injection) est à  $r/R = 1$

décroit longitudinalement. De plus, le champ de vitesse radial  $v_0$  est invariant longitudinalement et décroît en valeur absolue en s'approchant de l'axe. La vitesse axiale  $u_0$  croît avec  $x$  et décroît avec  $r$  (Fig. 1.11(a)).

Dans la sous-section suivante, le champ instationnaire est commenté. En particulier, les instabilités rencontrées dans les MPS et le champ acoustique attendu sont présentés.

## 1.5 Instationnarités de l'écoulement

Des instabilités peuvent apparaître dans l'écoulement au sein des MPS. Ces instabilités résultent de couplages qui peuvent entraîner des oscillations de pression (Culick (2006)). Ces oscillations de pression, même à des faibles niveaux, peuvent être problématiques car elles induisent de forts niveaux de vibration du

moteur (Anthoine (2013)), elles-mêmes pouvant mettre en vibration l'ensemble du lanceur et sa charge utile ou entraîner des défaillances de moteur dans les situations les plus critiques (Blomshield (2001)). Pour contrôler les oscillations de pression, il faut donc identifier et comprendre les sources de ces oscillations.

Les instabilités identifiées aujourd'hui sont de différentes natures (Culick (2006)). Il existe des instabilités hydrodynamiques et des instabilités de combustion (voir figure 1.12). Les instabilités hydrodynamiques ont pour origine la formation de tourbillons par des obstacles (VSO : Vortex Shedding d'Obstacle), des angles (VSA : Vortex Shedding d'Angle) et des parois (VSP : Vortex Shedding de Paroi) (Ballereau et al. (2003), Vuillot (1995)). Les instabilités de combustion sont associées respectivement aux deux processus de combustion décrits dans les sections précédentes qui siègent dans ces moteurs. La combustion du propergol solide (Culick (1968), Blomshield (2001)) peut être sensible aux oscillations de pression. La combustion des gouttes d'aluminium peut également être influencée par le champ acoustique (Gallier and Godfroy (2009), Brooks and Beckstead (1995)). Dans la section suivante, on détaille brièvement l'état de l'art sur les

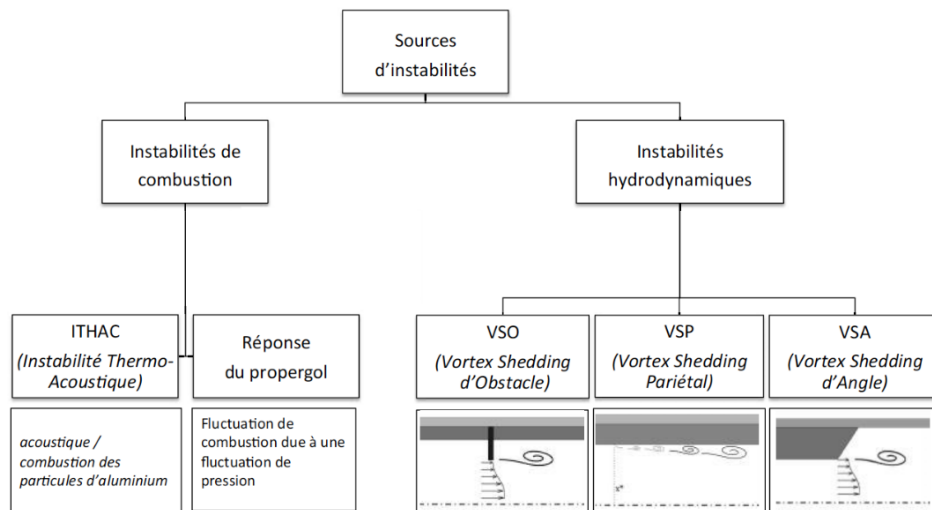


FIGURE 1.12 – Les instabilités dans les moteurs à propergol solide (Lacassagne (2017))

instabilités observées dans les MPS.

### 1.5.1 Instabilités hydrodynamiques

Pour les plus gros moteurs, les oscillations de pression sont souvent dues à des instabilités hydrodynamiques, comme pour les MPS d'Ariane 5 (Culick

(2006), Fabignon et al. (2003), Ballereau et al. (2006)). Les instabilités hydrodynamiques sont des phénomènes associés à la production de structures cohérentes tourbillonnaires. Trois lieux de formation ont été identifiés pour ces structures. Elles peuvent être générées par des obstacles, des angles et au niveau des parois injectantes.

### 1.5.1.1 Vortex Shedding d'Obstacle (VSO)

Le premier mode de détachement tourbillonnaire est le détachement par obstacle, illustré par la figure 1.13. Ce détachement de tourbillons a pour origine une couche de cisaillement instable. Ces phénomènes sont souvent corrélés à

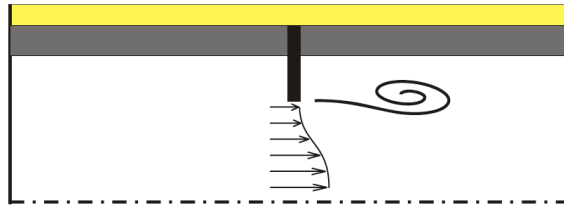
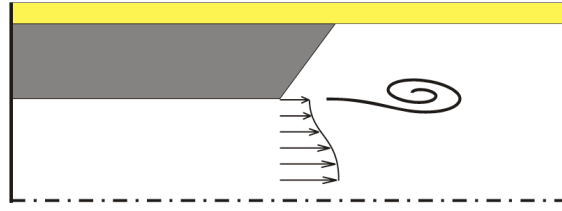


FIGURE 1.13 – *Vortex Shedding d'Obstacle (VSO)* (Simoes (2006))

la présence de protections thermiques, séparant différents segments de propergol solide, qui émergent à mesure que régresse le propergol. Cela a été mis en évidence par l'intermédiaire de nombreux essais expérimentaux (Brown et al. (1981), Shu et al. (1986), Couton et al. (1996), Vetel (2001), Anthoine (2001)). Les travaux de Ballereau et al. (2003) et de Traineau et al. (1997) ont également mis en évidence l'influence de la forme et de la position de la protection thermique sur l'instabilité.

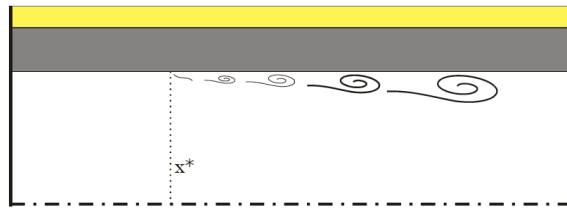
### 1.5.1.2 Vortex Shedding d'Angle (VSA)

La deuxième origine de formation de tourbillons dans un MPS est un angle ou variation brusque de la géométrie du propergol solide qui entraîne l'apparition d'une couche de cisaillement potentiellement instable selon les conditions d'écoulement (figure 1.14). Cette instabilité a été observée expérimentalement par Goncalves de Miranda (2000) et Dupays (1996). Ils ont démontré les effets d'une phase particulière sur la formation des tourbillons par VSA dans les MPS. Les particules entraînent généralement une diminution des niveaux des oscillations de pression et de la fréquence excitée. Lacassagne (2017) et Lupoglazoff et al. (2002) et Orlandi et al. (2017) ont également observé, par simulation, que la présence de gouttes d'aluminium réactives modifie les niveaux d'oscillation de pression induits par l'instabilité hydrodynamique.

FIGURE 1.14 – *Vortex Shedding d'Angle (VSA)* (Simoes (2006))

### 1.5.1.3 Vortex Shedding de Paroi (VSP)

L'instabilité hydrodynamique VSP (Vortex Shedding de Paroi) est une instabilité intrinsèque de l'écoulement de Taylor-Culick (Fabignon et al. (2003)). Elle se déclenche pour des moteurs de longueur relativement importante. Des études théoriques (Casalis et al. (1998), Griffond and Casalis (2001)) ont permis de mettre en évidence une position critique  $x^*/R$  avec  $R$  rayon du canal, à partir de laquelle l'instabilité VSP peut se développer pour une configuration 2D. Cette instabilité a également été étudiée expérimentalement par Avalon et al.

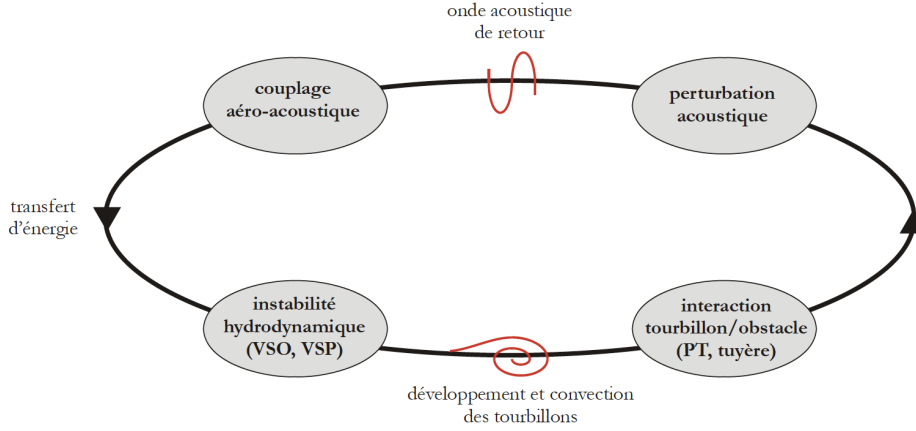
FIGURE 1.15 – *Vortex Shedding de Paroi (VSP)* (Simoes (2006))

(1998) et Chedevergne (2007). Enfin, Orlandi et al. (2017) ont mis en évidence un couplage possible entre le VSP et la combustion des gouttes d'aluminium dans leurs simulations numériques de ces écoulements.

### 1.5.1.4 Couplage aéroacoustique

Les tourbillons formés par instabilité hydrodynamique sont ensuite convectés par l'écoulement. Ces tourbillons de grande échelle produisent des oscillations de pression au niveau de la tuyère du fait de la présence de cavités (Anthoine et al. (2002), Gallier et al. (2009), Hirschberg et al. (2018)), de la contraction (Hirschberg et al. (2017)) et par l'ingestion de tourbillons (Brown et al. (1981), Vuillot (1995), Matveev (2005)). Ce dernier phénomène peut être considéré négligeable devant la première contribution selon Hirschberg et al. (2018).

Les perturbations acoustiques générées au niveau de la tuyère remontent



**FIGURE 1.16** – Mécanisme physique à l'origine des oscillations de pression induites par les instabilités hydrodynamiques. (Simoes (2006))

alors l'écoulement et interagissent avec la formation de nouveaux tourbillons, pouvant entraîner un couplage aéroacoustique qui s'auto-entretient (figure 1.16).

## 1.5.2 Acoustique d'un moteur

Dans un MPS, les modes excités sont généralement longitudinaux (Culick (2006)). Il s'agit souvent du premier mode longitudinal pour une instabilité induite par la combustion de l'aluminium (Gallier and Godfroy (2009)). Les conditions limites acoustiques au fond-avant et à la tuyère sont une vitesse acoustique nulle et un gradient de pression nul, c'est-à-dire, fermé-fermé. Pour un tube fermé-fermé, les fluctuations de pression  $p_1$  et de vitesse  $v_1$  longitudinales s'expriment classiquement (Culick and Yang (1992)) :

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \psi_n, \quad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{\eta}_n}{\gamma p_0 k_n^2} \nabla \psi_n \quad (1.9)$$

avec  $p_0 = p - p_1$  la pression moyenne,  $\eta_n$  l'amplitude des fluctuations de pression,  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques du gaz ( $\gamma = C_{P,p}/C_{V,g}$ ),  $k_n$  la longueur d'onde du n-ième mode et  $\psi_n$  le mode de pression tel que :

$$\psi_n = \cos(k_n x), \quad k_n = \omega_n / a_0 \quad (1.10)$$

où  $a_0$  est la vitesse du son,  $\omega_n$  la fréquence angulaire pour un mode longitudinal  $n$  :

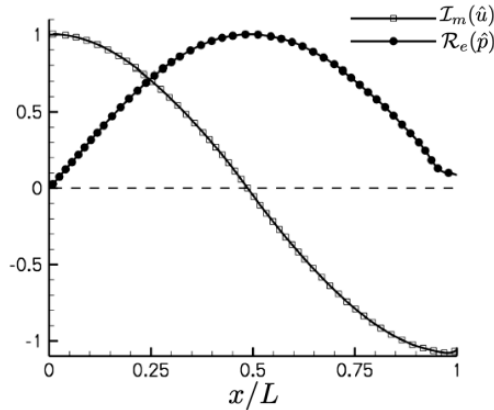
$$\omega_n = 2\pi f_n, \quad f_n = n f_{1L} = n \frac{a_0}{2L} \quad (1.11)$$

avec  $f_n$  la fréquence acoustique en Hz du n-ième mode de pression,  $L$  la longueur de la chambre. La fréquence  $f_n$  est donné dans le cas d'un tube simple

sans tuyère, ni écoulement, ni particules. Cette fréquence acoustique, une fois excitée, peut être amenée à glisser en fonction de l'écoulement. On distingue notamment les instabilités hydrodynamiques des instabilités de combustion par un glissement fréquentiel plus important (Vuillot (1995)).

Pour un MPS, en particulier pour la géométrie étudiée dans ce manuscrit, la simulation de Gallier and Godfroy (2009) montre un mode de pression (presque) fermé-fermé. Sa structure est représentée à la figure 1.17. Il s'agit une forme cosinoïdale pour les fluctuations de pression et sinusoïdale pour les fluctuations de vitesse sur l'axe ( $r/R = 0$ ). La modélisation des modes pour un tube simple peut donc être étendue à la géométrie de Gallier and Godfroy (2009). C'est cette géométrie qui sera utilisée dans cette thèse. Les modes excités seront donc longitudinaux et de cette forme.

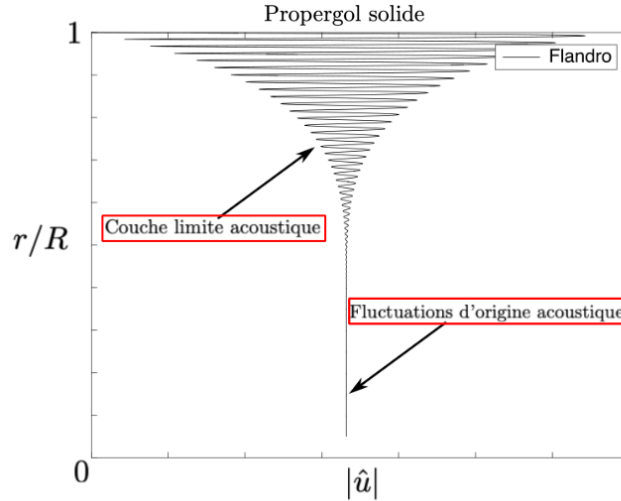
Avec une condition de non-glissement à la paroi en  $r/R = 1$ , pour un tube



**FIGURE 1.17** – Structure de la pression acoustique et vitesse acoustique longitudinale calculés par simulation sur l'axe  $r = 0$  d'un MPS. La chambre est de longueur  $L$ . (Gallier and Godfroy (2009))

sans injection, dans une région fine proche de la surface, la condition de non glissement impose une vitesse nulle à la surface. Dans cette zone, des ondes de vorticité sont cr es et modifient le champ de fluctuations de vitesse (Flandro (1995)). Cette zone est appel e couche limite acoustique. En dehors de cette région, les fluctuations peuvent ˆtre suppos es purement acoustiques, indépendantes de la viscosité (Mikhail and El-Tantawy (1994)). Avec injection radiale en  $r/R = 1$ , la couche limite acoustique occupe une grande partie de la chambre et a une structure particulière (Flandro (1995), Flandro et al. (2000), Culick (2006), Majdalani and Van Moorhem (1997)). Cette couche limite acoustique est illustr e par un modèle analytique (Flandro et al. (2000))   la figure 1.18. Le module des fluctuations de vitesse longitudinale du gaz, tracé le long du rayon

de la chambre  $R$ , montre une contribution acoustique proche de l'axe  $r = 0$  et la couche limite acoustique proche injection  $r = R$ .



**FIGURE 1.18** – Exemple de couche limite acoustique dans un MPS, calculée à partir du modèle analytique de Flandro. Le module des fluctuations de vitesse longitudinale du gaz est tracé suivant le rayon de la chambre, de l'axe de symétrie ( $r/R = 0$ ) à la paroi du propergol solide ( $r/R = 1$ ). (Flandro et al. (2000))

### 1.5.3 Instabilités de combustion

Deux réactions de combustion sont identifiées dans les moteurs à propergol solide. Le propergol solide brûle en surface. Les gouttes d'aluminium brûlent sous forme d'une combustion distribuée dans le volume de la chambre. Un couplage est possible en surface du propergol mais est négligée ici.

#### 1.5.3.1 Instabilités induites par la combustion du propergol solide

La combustion instationnaire du propergol solide répond aux fluctuations de pression, entraînant une fluctuation du débit massique injecté, comme illustré à la figure 1.19 (Culick (2006)). Ces fluctuations de débit sont induites par des fluctuations du dégagement de chaleur associées aux fluctuations du gaz à la surface. L'inertie thermique du propergol solide induit un déphasage.

On notera que par conservation de la masse, la vitesse débitante des produits de combustion fluctue. On parle de réponse de la combustion du propergol  $R_b$  aux fluctuations acoustiques pour définir la fonction de transfert entre fluctua-

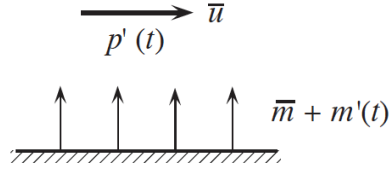


FIGURE 1.19 – Couplage acoustique-combustion du propergol (Culick (2006))

tions de débit et fluctuations de l'écoulement gazeux :

$$\frac{\hat{m}_i}{\dot{m}_{i,0}} = R_b \frac{\hat{p}}{\gamma p_0} \quad (1.12)$$

avec  $\hat{\cdot}$  les fluctuations dans l'espace de Fourier, l'indice 0 pour les quantités moyennées sur la période acoustique,  $\dot{m}_i$  le débit massique injecté depuis la surface du propergol,  $p$  le champ de pression et  $\gamma$  le rapport des capacités calorifiques du gaz.

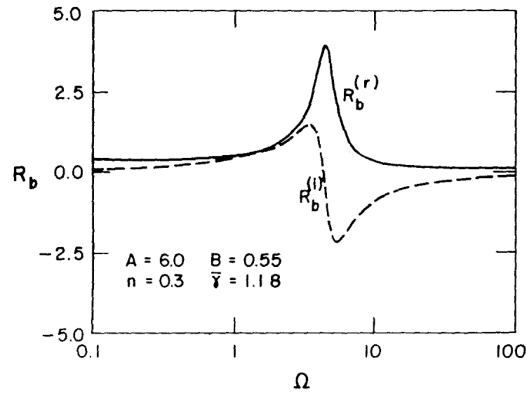
Ce phénomène instationnaire peut s'auto-entretenir. Des instabilités de combustion du propergol solide naissent alors. Ces instabilités se développent généralement dans les moteurs de petites tailles, parce que la combustion du propergol répond préférentiellement à des oscillations de pression de hautes fréquences (Culick and Yang (1992), Vuillot and Lupoglazoff (1996)). Ce résultat est illustré par la figure 1.20 qui montre une réponse non nulle pour  $\Omega \propto f > 1$  où  $f$  est la fréquence du forçage acoustique. La grandeur  $\Omega$  compare la période de l'onde thermique dans le propergol solide avec la période acoustique ( $T = 1/f$ ). Suivant la figure 1.20, l'instabilité de combustion du propergol solide est rencontrée pour des fréquences acoustiques relativement élevées.

Dans notre cas, la géométrie sur laquelle sont réalisées les simulations numériques étudiées dans ce manuscrit est longue avec une fréquence du premier mode propre longitudinal de 76 Hz. Les fréquences longitudinales sont donc suffisamment basses pour négliger les problèmes d'instabilités liées à la réponse du propergol solide.

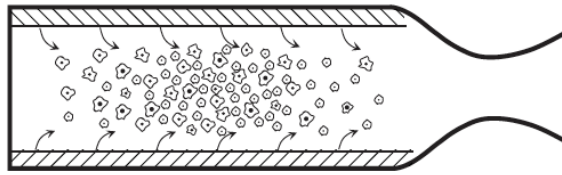
### 1.5.3.2 Instabilités induites par la combustion des gouttes d'aluminium

Dans les propergols aluminisés, des gouttes d'aluminium sont libérées dans la chambre (Fabignon et al. (2003), Babuk et al. (1999), Devillers et al. (2017), figure 1.21).





**FIGURE 1.20** – Réponse de la combustion du propergol  $R_b$  à l'acoustique en fonction de  $\Omega$  produit de la période thermique dans le propergol solide et de la fréquence acoustique. (Culick and Yang (1992))



**FIGURE 1.21** – Gouttes d'aluminium dans la chambre. (Culick (2006))

La combustion de ces gouttes constitue une contribution énergétique supplémentaire à la combustion du propergol. Les produits de combustion gazeux libérés par la combustion des gouttes se condensent pour former des gouttes inertes d'oxyde d'aluminium (ou alumine). Ces gouttes résiduelles provoquent des pertes acoustiques pour les oscillations de pression (Temkin and Dobbins (1966), Culick (2006), Blomshield (2001)) et entravent le développement de modes tangentiels ou radiaux (Karnesky and Colucci (1975)).

Dans le moteur de défense antimissile balistique Sentry (Blomshield (2001)), la combustion de l'aluminium a toutefois été soupçonnée de conduire à des instabilités. Dans plusieurs dispositifs de laboratoire de type brûleur de Rijke, il a été prouvé expérimentalement, analytiquement et numériquement que la combustion de gouttes d'aluminium peut entraîner des instabilités thermoacoustiques (Brooks and Beckstead (1995), Beckstead (2002), Raun and Beckstead (1993)). En outre, des expériences sur des propulseurs en T avec un propergol aluminisé mettent en évidence la réponse de la combustion des gouttes d'aluminium et une instabilité induite (Beckstead and Butcher (1974), Orlandi et al. (2017), Gallier et al. (2019)), comme illustré à la figure 1.23.

Par exemple, pour le propulseur en T étudié par Gallier et al. (2019) et schématisé en figure 1.22, on constate une croissance exponentielle de l'amplitude des oscillations de pression, avec un taux de croissance  $\alpha > 0$ , à la figure 1.23. Cette croissance exponentielle à faible amplitude est typique d'un comportement linéaire qui précède l'apparition des effets de saturation non-linéaires associés à un cycle limite d'amplitude constante.

La manière dont la combustion des gouttes en aluminium se couple au champ

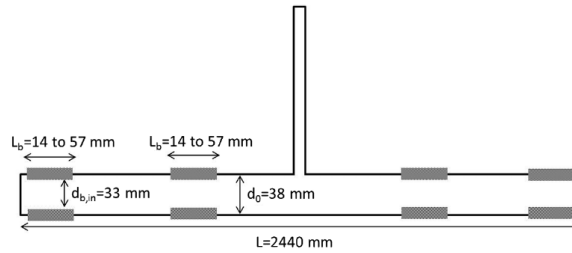


FIGURE 1.22 – Schéma de propulseur en T (Gallier et al. (2019))

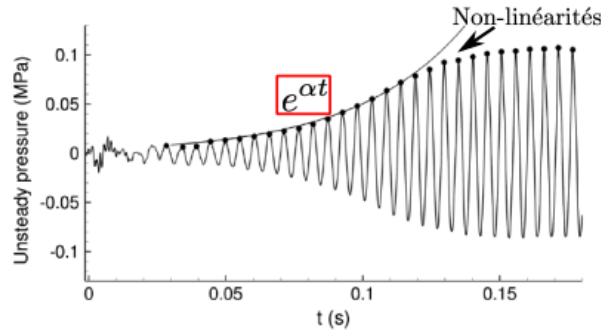


FIGURE 1.23 – Croissance des oscillations de pression dans un propulseur en T, induit par l'instabilité de combustion de l'aluminium (Gallier et al. (2019))

acoustique pour des petites fluctuations de pression ou des fluctuations plus importantes reste toutefois méconnue dans les moteurs à propergol solide. L'objectif de ce travail de thèse est d'explorer les mécanismes à l'origine de ces phénomènes.



## Chapitre 2

# Instabilité thermoacoustique

*L'instabilité induite par le couplage entre la combustion des gouttes d'aluminium et l'acoustique de la chambre est une instabilité thermoacoustique. Dans ces conditions, la source de l'instabilité est associée au couplage des fluctuations du taux de dégagement de chaleur induit par la combustion des gouttes et l'acoustique du moteur. Ces fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont ici induites par la réponse de la combustion aux fluctuations de l'écoulement. Une rapide vue d'ensemble des méthodes utilisées pour prévoir ces instabilités dans le cadre d'applications différentes est proposée. Ensuite, l'état de l'art sur les mécanismes physiques à l'origine de l'instabilité étudiée dans ce manuscrit est décrit. Finalement, les objectifs de la thèse sont présentés.*

### 2.1 Instabilité THERmoACoustique (ITHAC)

Dans la communauté française de propulsion solide, l'instabilité provoquée par la combustion des gouttes d'aluminium porte le nom d'ITHAC pour Instabilité THERmoACoustique (Orlandi et al. (2017)), car il s'agit, effectivement, d'une instabilité d'origine thermoacoustique. En présence d'une source volumique de chaleur  $\dot{q}$ , une équation d'onde pour les fluctuations de pression  $p_1$  peut être dérivée avec un terme source dépendant de la dérivée temporelle des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}_1$  (Crighton et al. (1992)) :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \rho_0 a_0^2 \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) = (\gamma - 1) \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial t} \quad (2.1)$$

où  $\rho_0$  et  $a_0$  sont la masse volumique et la vitesse du son de l'écoulement moyen. Cette expression montre que des ondes acoustiques  $p_1$  sont générées et se propagent dans un milieu dès lors qu'il existe des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}_1$ . La contribution de la source est d'autant plus importante

que les taux de variation du taux de dégagement de chaleur  $\partial\dot{q}_1/\partial t$  sont élevés et brutaux (Candel et al. (2009)). L'expression Eq. (2.1) est une représentation idéalisée des fluctuations de pression dans une chambre de combustion. Il est possible qu'elle soit bien plus complexe dans un MPS, mais elle permet de comprendre le principal mécanisme à l'origine d'instabilités thermoacoustiques.

Le couplage thermoacoustique se produit lorsqu'il y a résonance, c'est-à-dire accumulation de l'énergie acoustique dans un ou plusieurs modes propres de la chambre de combustion (Culick (2006)). On définit l'énergie acoustique  $E_a$  de la chambre de volume  $V$ , moyennée sur une période d'oscillation  $T$ , comme (Poinsot and Veynante (2005); Nicoud and Poinsot (2005)) :

$$E_a = \frac{1}{T} \int_T \int_V \left( \frac{\rho_0}{2} \mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2\rho_0 a_0^2} p_1^2 \right) dV dt \quad (2.2)$$

avec  $\rho_0$  la masse volumique dans la chambre,  $a_0$  la vitesse du son,  $\mathbf{u}_1$  les fluctuations de vitesse,  $p_1$  les fluctuations de pression. Pour un mélange diphasique, il semble plus cohérent de définir l'énergie acoustique avec les propriétés du mélange (annexe B). Un bilan d'énergie acoustique peut alors être établi à partir des expressions précédentes (Eqs. (2.1) et (2.2)) et de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial E_a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_a = \mathcal{S} + \mathcal{D} \quad (2.3)$$

avec  $\mathcal{S}$  le terme source,  $\mathcal{D}$  le terme de dissipation et  $\mathbf{F}_a$  les flux surfaciques. Ces grandeurs sont moyennées sur la période acoustique. On trouve que la puissance de la source thermoacoustique  $\int_V \mathcal{S} dV$  est égale à l'intégrale de Rayleigh (Durox et al. (2009)) :

$$\int_V \mathcal{S} dV = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0 T} \int_T \int_V p_1 \dot{q}_1 dV dt \quad (2.4)$$

où le produit des fluctuations de pression  $p_1$  par les fluctuations du taux de dégagement de chaleur a été moyenné sur l'ensemble du volume du moteur  $V$  et sur une période d'oscillation  $T = 1/f$  associée à l'un des modes propres de la chambre. On constate que si les oscillations de  $p_1$  et  $\dot{q}_1$  sont en quadrature alors  $\mathcal{S}$  est nul. Il n'y a aucune action des perturbations de la combustion sur l'acoustique de la chambre. Si  $p_1$  et  $\dot{q}_1$  sont en opposition de phase ou proches de cette condition,  $\mathcal{S}$  est négatif et l'énergie acoustique décroît dans la chambre. La combustion agit dans ce cas comme une source puissante permettant d'atténuer les ondes sonores. Si au contraire, les fluctuations de pression et du taux de dégagement de chaleur sont en phase ou proches de cette condition, alors l'intégrale de Rayleigh est positive et l'énergie acoustique peut croître dans le système. Dans ces conditions, la combustion amplifie les ondes sonores. Si cette

amplification est plus importante que l'ensemble des mécanismes d'atténuation représenté par  $\mathcal{D}$  dans l'Eq. (2.3), la chambre est le siège d'une instabilité dite thermoacoustique synchronisée par le mode en question.

Le taux d'amplification  $\alpha$  des oscillations acoustiques peut être déterminé selon [Cantrell and Hart \(1964\)](#) à partir de :

$$2\alpha \equiv \int_V \frac{\partial E_a}{\partial t} dV / \int_V E_a dV \quad (2.5)$$

En substituant l'équation (2.3) dans cette expression, on trouve une expression reliant le taux de croissance de l'instabilité avec les termes sources, de dissipation et les flux surfaciques de l'énergie acoustique ([Poinsot and Veynante \(2005\)](#)) :

$$\alpha = \frac{\int_V (\mathcal{S} - \nabla \cdot \mathbf{F}_a - \mathcal{D}) dV}{2 \int_V E_a dV} \quad (2.6)$$

On remarque donc que le taux de croissance  $\alpha$  de l'instabilité est positif (le système est alors instable) si ([Durox et al. \(2009\)](#)) :

$$\int_V \mathcal{S} dV > \int_S \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathcal{D} dV \quad (2.7)$$

On peut également séparer le taux de croissance  $\alpha$  en deux taux de croissance. Le premier  $\alpha_{ITHAC}$  correspond à la source de l'instabilité. Les autres contributions (de volume et de surface) correspondent essentiellement à des pertes acoustiques, *a priori*,  $\alpha_l$  (*l* pour "losses") :

$$\alpha = \underbrace{\frac{\int_V \mathcal{S}}{2 \int_V E_a dV}}_{\alpha_{ITHAC}} + \underbrace{\frac{-\int_S \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathcal{D} dV}{2 \int_V E_a dV}}_{\alpha_l} \quad (2.8)$$

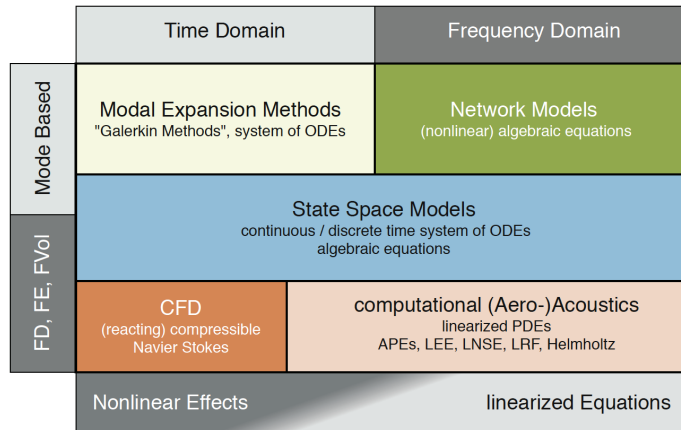
## 2.2 Méthodes de prévision d'une instabilité thermoacoustique

Malgré la simplicité de ces expressions, il est difficile de prévoir les instabilités de combustion ([Candel \(2002\)](#)). Il n'existe pas de méthode générale, ni de modèle universel pour prévoir ces phénomènes, car il existe une grande variété d'écoulements et de modes de combustion, qui dépendent notamment de l'application industrielle.

Pour étudier les instabilités thermoacoustiques, il existe des approches analytiques, numériques, expérimentales ou intermédiaires basées sur des modèles

d'ordre réduit, qui incorporent des observations et des modélisations faites par les approches précédentes. Pour prévoir la stabilité, on s'appuie le plus souvent sur une hypothèse d'un comportement linéaire des fluctuations de pression et de dégagement de chaleur. Dans ce cadre simplifié, on utilise usuellement des Fonctions de Transfert de Flamme (FTF) qui permettent de relier les fluctuations du taux de dégagement de chaleur aux fluctuations acoustiques (Crocco (1969), Candel (2002)). Celles-ci peuvent être déterminées par des données expérimentales, des simulations numériques (LES, DNS) et, dans certaines situations relativement simples, analytiquement. De même, en non-linéaire, il existe un formalisme équivalent appelé Fonction Descriptive de Flamme (FDF) qui fait intervenir une dépendance avec le niveau acoustique atteint dans le foyer (Noiray et al. (2008)). Ces modélisations, définies dans l'espace fréquentiel, peuvent ensuite être combinées avec des bilans d'énergie acoustique ou fluctuante (Nicoud and Poinso (2005)).

D'autres approches sont basées sur les équations d'Euler linéarisées, sur l'équation de Helmholtz ou sur les modèles de réseaux d'éléments compacts, etc. Si l'on préfère modéliser les fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans l'espace temporel, on a la possibilité d'utiliser la méthode de Galerkin (Culick and Yang (1992)), des représentations sous forme d'espace d'état de Schuermans (2003) ou des simulations numériques avec des choix de modélisation plus ou moins complexe pour prévoir la stabilité linéaire et l'amplitude du cycle limite en non-linéaire. L'ensemble de ces différentes modélisations pour prévoir les instabilités thermoacoustiques est schématisé à la figure 2.1.

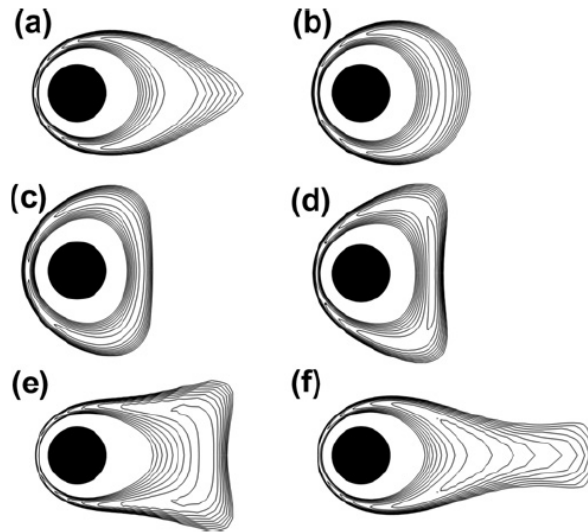


**FIGURE 2.1** – Modélisations pour la prédiction d'instabilités thermoacoustiques. (Poliifke (2015))

## 2.3 Etat de l'art sur l'ITHAC

Dans les moteurs à propergol solide, ce sont souvent les premiers modes acoustiques longitudinaux de la chambre qui sont impliqués dans des instabilités thermoacoustiques (Gallier and Godfroy (2009)). Les modes à plus hautes fréquences sont essentiellement atténués par les particules inertes d'alumine (Culick (2006), Karnesky and Colucci (1975)). Les oscillations de pression induites par l'instabilité peuvent atteindre des niveaux importants, de l'ordre de quelques bars (Orlandi et al. (2017)). Les gouttes d'aluminium, présentes dans le propergol et brûlant proche de la surface, sont très sensibles aux perturbations de l'écoulement. De plus, la couche limite acoustique de l'écoulement proche des parois se trouve être le siège de la combustion des gouttes d'aluminium. La couche limite acoustique joue donc un rôle important dans la réponse de la combustion des gouttes d'aluminium à l'acoustique.

Gallier and Godfroy (2009) ont mis en évidence cette instabilité thermoacous-



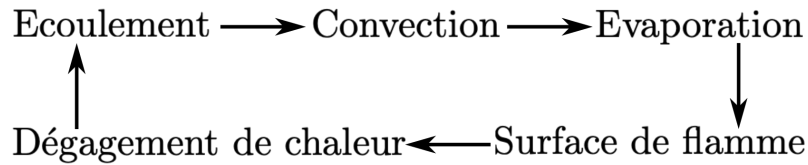
**FIGURE 2.2** – Oscillations de la flamme autour d'une goutte en combustion (Gallier et al. (2011))

tique dans un MPS par des simulations numériques des écoulements. Par des études paramétriques, la dépendance de l'instabilité à des paramètres tels que l'épaisseur du volume de combustion (ou le temps de combustion des gouttes), l'enthalpie de réaction, la distribution spatiale du dégagement de chaleur et l'effet de la fréquence acoustique ont été identifiés.

Des travaux ont été entrepris par Gallier et al. (2011) pour comprendre la réponse de la combustion d'une goutte d'aluminium sur la base de simulations



directes d'une goutte sphérique fixe, à diamètre constant, dans un écoulement oscillant. Comme illustré à la figure 2.2, les iso-contours de monoxyde d'aluminium  $AlO$  fluctuent autour de la goutte. Le monoxyde d'aluminium étant un des principaux produits de combustion gazeux, les iso-contours permettent également de représenter les oscillations de flamme. On observe que la flamme fluctue. Ces étirements et contractions de flamme induisent des fluctuations de surface de la flamme. Ces fluctuations de surface de flamme sont donc à l'origine des fluctuations du taux de dégagement de chaleur de la goutte qui brûle. L'ensemble de cette dynamique est illustrée à la figure 2.3.



**FIGURE 2.3** – Effet de l'écoulement sur le dégagement de chaleur de la goutte qui brûle

Gallier et al. (2011) montrent que les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}$  de la goutte sont corrélées aux fluctuations du taux d'évaporation de la goutte d'aluminium  $\dot{m}_{Al}$ . Un lien clair entre les oscillations de la vitesse de l'écoulement autour d'une position d'équilibre et les oscillations de taux d'évaporation a été établi (Gallier et al. (2011), Gallier and Godfroy (2009)) et peut être modélisé par une fonction de réponse  $R_u$  (pour une particule fixe) :

$$\frac{\dot{m}_{Al,1}}{\dot{m}_{Al,0}} = R_u \frac{u_1}{u_0} \quad (2.9)$$

Les indices 0 et 1 correspondent aux grandeurs moyennes et fluctuantes de la vitesse  $u$  du gaz et du taux d'évaporation de la goutte d'aluminium  $\dot{m}_{Al}$ . La fonction  $R_u$  traduit cette sensibilité. Un calcul d'ordre de grandeur montre également que dans les conditions qui règnent dans les MPS,  $|R_u| \gg |R_p|$  ou  $|R_T|$  où  $R_p$  et  $R_T$  sont respectivement les réponses de la goutte aux perturbations de pression et de température du gaz (Gallier et al. (2011)). Un modèle pour cette réponse peut être obtenu par linéarisation de la corrélation de Ranz and Marshall (1952) valable dans le cadre d'une approche quasi-stationnaire (chapitre 7).

L'expression Eq. (2.9) a été obtenue pour une seule goutte. Or, l'instabilité thermoacoustique est associée à la dynamique du nuage de gouttes. Un modèle analytique a été proposé par Gallier and Godfroy (2009) où les fluctuations du

taux de dégagement de chaleur induites par l'acoustique peut s'écrire comme :

$$\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_0} = R_u \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} u_1, \quad \delta \mathbf{u}_{p,0} = \underbrace{(u_{p,0} - u_0)}_{\delta u_{p,0}} \mathbf{e}_x + \underbrace{(v_{p,0} - v_0)}_{\delta v_{p,0}} \mathbf{e}_r \quad (2.10)$$

avec une correction par rapport à l'équation (2.9) pour la prise en compte d'une vitesse particulaire  $\mathbf{u}_p$  non nulle. Les vecteurs  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_x$  correspondent respectivement aux vecteurs radial et axial du repère cylindrique. Cette expression n'a pas été comparée avec la simulation numérique. Ces fonctions de transfert sont des FTF distribuées, au sens où ce sont des expressions linéaires et locales. Cette expression pour les fluctuations locales du taux de dégagement de chaleur Eq. (2.10) a ensuite été utilisée pour identifier des nombres adimensionnels qui contrôlent cette instabilité (Casalis et al. (2011)) :

$$S_{tk} = \frac{\omega \rho_p D^2}{18\mu}, \quad S_r = \frac{\omega R}{v_i}, \quad S_c = \frac{\omega \delta_{c,0}}{v_i} \quad (2.11)$$

avec  $S_{tk}$  le nombre de Stokes,  $S_r$  le nombre de Strouhal de l'écoulement,  $S_c$  le nombre de Strouhal de combustion,  $\omega = 2\pi f$  la fréquence angulaire et  $f$  la fréquence,  $\rho_p$  la masse volumique de la particule,  $\mu$  la viscosité du gaz,  $D$  le diamètre des particules,  $v_i$  la vitesse en surface propergol et  $\delta_{c,0}$  l'épaisseur moyenne de la zone de combustion. Casalis et al. (2011) explique que la source de l'instabilité dépend peu du nombre de Strouhal  $S_r$  et est maximum pour un nombre de Strouhal de combustion  $S_c = 1$ .

Pour conclure sur l'état de l'art, des travaux dans le domaine linéaire et des calculs numériques ont montré la possibilité d'instabilités thermoacoustiques dans les MPS. Les modèles linéaires (comme Eq. (2.10)) n'ont pas été comparés aux calculs numériques. Une étude paramétrique par simulation (Gallier and Godfroy (2009)) a démontré que l'instabilité est dépendante de grandeurs physiques qui interviennent dans des nombres adimensionnels définis à partir de modèles analytiques linéaires (Casalis et al. (2011)). Enfin, aucune publication ne fait état d'études sur les phénomènes non-linéaires de cette instabilité, c'est-à-dire la convergence vers un cycle limite.

Dans la section suivante, les objectifs et la démarche entreprise dans ce manuscrit, pour étudier l'ITHAC, sont détaillés.

## 2.4 Objectifs de la thèse

Les instabilités de combustion résultant de couplages thermo-acoustiques sont des problèmes récurrents dans les systèmes de propulsion, et probablement

aussi dans les moteurs à propergol solide, qui peuvent entraîner des défaillances du lanceur ou des vibrations importantes transmises à la charge utile.

Il n'existe pas de méthode de prévision universelle et fiable de ces phénomènes lors de la conception d'un moteur, si ce n'est éventuellement des calculs  $3D$  diphasiques, avec une géométrie qui évolue au cours de la simulation par la régression du propergol, au coût de calcul très important et avec des modèles physiques potentiellement incomplets. Toute modification de technologie du moteur peut donc éventuellement entraîner le développement de nouvelles oscillations auto-entretenues indésirables.

Ces oscillations résultent d'un couplage résonant faisant intervenir plusieurs mécanismes d'interactions entre l'écoulement, la combustion et l'acoustique qui peuvent s'avérer très complexes. Il est donc nécessaire de prendre en compte au cas par cas ces phénomènes par le biais de la modélisation et de la simulation le plus tôt possible lors des phases de conception d'un moteur. L'objectif général est d'identifier la nature de ces couplages, de comprendre quels sont les principaux mécanismes générateurs, de prévoir les fréquences et les niveaux de ces oscillations et d'étudier les moyens de les réduire.

L'objectif des travaux menés est de modéliser les instabilités thermoacoustiques observées dans les simulations numériques, afin de comprendre leur origine, leur nature et d'en déduire des modèles simplifiés qui permettront de prévoir leur occurrence. Ces travaux sont des préalables nécessaires pour développer des outils utiles à l'ingénieur pour conduire des analyses de sensibilité, et d'une façon générale, guider la conception de ces systèmes pour empêcher ou limiter le développement d'instabilités.

## 2.5 Plan du manuscrit

Les instabilités traitées dans ce travail dépendent du modèle de combustion de gouttes d'aluminium choisi qui, aujourd'hui, n'est ni universel ni consensuel. Un état de l'art sur les différents modèles de combustion est donc rappelé au chapitre 3.

Dans le chapitre 4, une simulation numérique de référence est présentée pour mettre en évidence l'instabilité et analyser sa dynamique.

Au chapitre 5, une simulation stable pulsée à différentes amplitudes permet d'étudier les phénomènes non-linéaires associés à la source  $\mathcal{S}$  de l'instabilité. Les non-linéarités de la réponse de la combustion de l'aluminium à l'acoustique

sont notamment mises en évidence. Une étude paramétrique est ensuite menée et permet d'illustrer l'impact de la modélisation du taux de dégagement de chaleur en fin de vie des gouttes sur l'instabilité. Une comparaison qualitative est finalement faite entre deux modèles de combustion issus de la littérature scientifique.

Pour déterminer la stabilité linéaire d'un MPS, les pertes et sources acoustiques doivent être modélisées. Le chapitre 6 est consacré à la dérivation des pertes acoustiques à partir des équations bilans. On rappelle que la source, ici, est la source thermoacoustique liée à la réponse de la combustion des gouttes à l'acoustique.

Dans le chapitre 7, le calcul stable, utilisé au chapitre 5, est ensuite étudié pour un forçage à une amplitude relativement faible afin d'observer un comportement linéaire de la source thermoacoustique. Un modèle analytique linéaire pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  est développé et validé avec une simulation pulsée. Ce modèle linéaire présente des améliorations importantes par rapport à l'état de l'art. Il reproduit relativement bien la simulation numérique et permet, *a priori*, d'être utilisé dans un modèle d'ordre réduit pour la prévision de la stabilité linéaire d'un MPS.

L'ingénieur qui souhaite concevoir le moteur peut être intéressé par le développement d'outils d'ordre réduit mais également par des paramètres dimensionnants qui contrôlent l'instabilité. La démarche entreprise au chapitre 8 est donc de dériver des nombres adimensionnels qui sont obtenus à partir du modèle linéaire développé pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur.

Le dernier chapitre 9 propose un outil d'ordre réduit pour la prédiction du cycle limite lors d'instabilités thermoacoustiques. Il intègre une modélisation non-linéaire du taux de dégagement de chaleur. Cet outil en développement ouvre la voie à des études plus approfondies sur l'étude des non-linéarités et la sensibilité du cycle limite aux données d'entrée (géométrie, propérgol, granulométrie, ...).



Deuxième partie

Simulations de l'instabilité  
thermoacoustique dans un  
Moteur à Propergol Solide



## Chapitre 3

# Modélisation de la combustion de l'aluminium

*La modélisation de la combustion des gouttes d'aluminium est un point clé pour comprendre les instabilités thermoacoustiques qui peuvent se déclencher dans les MPS. Les principaux mécanismes observés lors de la combustion de l'aluminium dans les conditions de fonctionnement d'un moteur sont examinés dans ce chapitre. Les différentes modélisations proposées pour la combustion de gouttes d'aluminium sont également décrites.*

### 3.1 Modèles de la combustion de gouttes d'aluminium

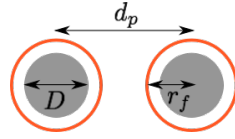
Les principaux modèles de combustion de l'aluminium sont brièvement exposés dans cette section. Ils reposent tous sur une combustion de gouttes isolées, hypothèse vérifiée dans un premier temps.

#### 3.1.1 Effet de combustion de groupe

On cherche dans un premier temps à valider l'hypothèse de goutte isolée pour les conditions suivantes : la masse volumique des gouttes égale à  $\rho_p = 2000$  kg/m<sup>3</sup> et la masse volumique du gaz environnant à  $\rho_g = 10$  kg/m<sup>3</sup>. Ces valeurs sont typiques de celles rencontrées en moteur ([Gallier and Godfroy \(2009\)](#)).

La combustion de l'aluminium est généralement supposée comme étant une combustion distribuée de gouttes individuelles ([Bind et al. \(2012\)](#); [Beckstead \(2002\)](#)). Cependant, cette hypothèse n'est pas toujours vraie pour toutes les





**FIGURE 3.1** – Deux gouttes en combustion de diamètre  $D$  et de rayon de flamme  $r_f$  séparées d'une distance  $d_p$

conditions opératoires et doit donc être vérifiée. Les effets de combustion de groupe sont généralement évalués par l'approche de Chiu (Chiu and Liu (1977); Chiu et al. (1982)). Nakamura et al. (2005) ont identifié deux régimes de combustion diphasique, une combustion de type prémélangée et une combustion de type diffusion. Dans une combustion de type prémélangée, l'oxydant est initialement présent autour de chaque goutte individuelle alors que dans une combustion de type diffusion, l'oxydant est présent seulement à l'extérieur du nuage de gouttes. Pour une combustion de type prémélangée, le critère de Chiu surestime le comportement de combustion de groupe parce qu'il ne prend pas en compte la présence initiale d'oxydant autour des gouttes (Nakamura et al. (2005); Kitano et al. (2014)).

Les gouttes d'aluminium, qui sont injectées dans le moteur, sont entourées des produits gazeux de la combustion du propergol solide qui jouent le rôle de gaz oxydants. Ainsi, la combustion de l'aluminium est classifiée comme étant une combustion de type prémélangée et l'approche de Chiu n'est donc pas pertinente pour valider l'hypothèse de combustion de gouttes isolées. Il est donc plus adapté de considérer la distance moyenne inter-particules par rapport au rayon de flamme  $r_f$  comme illustré dans la figure 3.1 (Borghì and Destriau (1998); Bind et al. (2012); Annamalai et al. (1994)). De la théorie de percolation, une limite pour l'hypothèse de gouttes isolées peut être déduite (Borghì and Destriau (1998); Kerstein and Law (1982)) :

$$\frac{r_f}{d_p} < 0.43 \quad (3.1)$$

La distance moyenne inter-particules  $d_p$  peut être évaluée en fonction de la fraction volumique  $\alpha_p$  des gouttes dans la chambre du moteur et du diamètre des gouttes  $D$  (Schwarzkopf et al. (2011); Bind et al. (2012)) :

$$\frac{d_p}{D} = \left( \frac{6\alpha_p}{\pi} \right)^{-1/3} \quad (3.2)$$

Les gouttes d'aluminium étant oxydées essentiellement par deux réactifs  $\text{CO}_2$  et  $\text{H}_2\text{O}$ , il est difficile d'avoir une bonne estimation du rayon de flamme

de la théorie (Kerstein and Law (1982)). Les mesures de Bucher et al. (1998) et Bucher et al. (1996) donnent :

$$\frac{r_f}{D} \simeq 3 \tag{3.3}$$

On rappelle qu'il y a des grandes gouttes provenant de la fusion d'agglomérats et des gouttes de petites tailles non agglomérées (comme décrit dans le chapitre 1 à la sous-section 1.3.2). On ne considère que les grandes gouttes provenant d'agglomérats (comme Gallier and Godfroy (2009)) car les petites se consomment plus rapidement. Dans ce cas, cela revient à un tiers de la fraction massique de l'aluminium, soit une fraction massique de  $\kappa = 6\%$  pour un moteur d'Ariane 5 (Duterque et al. (1999)). On a alors :

$$\alpha_p = \frac{\rho_g \kappa}{\rho_p} = 3 \cdot 10^{-4} \ll 1 \quad \frac{r_f}{d_p} = 0.25 < 0.43 \tag{3.4}$$

La fraction volumique  $\alpha_p$  reste petite et permet de supposer une phase particulaire diluée. Le rapport  $r_f/d_p$  est aussi assez petit pour négliger les effets de combustion de groupe et considérer une combustion distribuée de gouttes brûlant individuellement.

### 3.1.2 La loi du $D^2$

Ce premier modèle est une base commune à tous les autres modèles de combustion de goutte présentés par la suite. Il s'agit d'un modèle désigné par la loi du  $D^2$  car le diamètre de la goutte au carré varie linéairement par rapport au temps pour un milieu ambiant constant (Spalding (1951); Sirignano (1999); Kuo (1986); Law (2006)). Pour établir ce modèle, on utilise les approximations suivantes :

- masse volumique de la goutte constante
- goutte isolée
- régime stationnaire
- symétrie sphérique
- un seul oxydant est pris en compte
- nombre de Lewis unitaire ( $Le = 1$ )
- chimie infiniment rapide
- température uniforme de la goutte correspondant à un petit nombre de Biot  $Bi \ll 1$  (vérifiée pour l'aluminium Gallier et al. (2011))

Le bilan de masse d'une goutte sphérique de diamètre  $D$  nous donne (Spalding (1951)) :

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{4\dot{m}}{\pi D \rho_p} \tag{3.5}$$

où  $\rho_p$  est la masse volumique de la goutte et  $\dot{m}$  le débit massique d'aluminium émanant de la surface de la goutte qui s'exprime suivant la loi du  $D^2$  :

$$\dot{m} = \dot{m}_{D^2} = \pi D \frac{\mu}{\text{Pr}} \ln(1 + B) \text{Sh} \quad (3.6)$$

où  $\dot{m}_{D^2}$  est le taux de consommation pour une goutte suivant la loi du  $D^2$ ,  $\mu$  la viscosité du gaz, Pr le nombre de Prandtl, B le nombre de Spalding qui est défini ci-dessous, Sh le nombre de Sherwood qui caractérise l'effet de la convection et est défini dans la section 3.2. Sans convection, le nombre de Sherwood vaut  $\text{Sh} = 2$ .

L'équation (3.5) se réécrit donc :

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{4\dot{m}}{\pi D \rho_p} = -\frac{4\mu \ln(1 + B) \text{Sh}}{\text{Pr} \rho_p} \quad (3.7)$$

Si le terme de droite de l'équation (3.7) peut être supposé constant, on obtient la relation suivante :

$$D^2(t) = D_i^2 - \left[ \frac{4\mu \ln(1 + B) \text{Sh}}{\text{Pr} \rho_p} \right] t \quad (3.8)$$

où  $D_i$  est le diamètre initial de la goutte à  $t = 0$ . Avec ce modèle, il est possible de déterminer un temps de combustion d'une goutte  $t_c$  pour lequel il n'y a plus de masse à brûler ( $D^2(t = t_c) = 0$ ) et est donné par :

$$t_c = \frac{\text{Pr} \rho_p D_i^2}{4\mu \ln(1 + B) \text{Sh}} \quad (3.9)$$

La définition du nombre de Spalding B peut varier. Si on suppose un nombre de Lewis unitaire, quelle que soit la définition retenue, on obtient la même valeur pour ce nombre. On reproduit, ici, trois définitions pour le nombre de Spalding B utilisé dans la loi du  $D^2$  par la combustion de gouttes :

$$\begin{aligned} B_{Al, Ox} &= \frac{Y_{Ox, \infty} / s + Y_{Al, S}}{1 - Y_{Al, S}}, & B_{Al, T} &= \frac{C_{P, g}(T_\infty - T_S) - Y_{Al, S} \Delta H_r}{L_v + \Delta H_r (Y_{Al, S} - 1)} \\ B_{Ox, T} &= \frac{C_{P, g}(T_\infty - T_S) + Y_{Ox, \infty} \Delta H_r / s}{L_v} \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $Y$  est la fraction massique,  $C_{P, g}$  correspond à la capacité calorifique du gaz environnant à pression constante,  $S$  correspond aux conditions en proche surface de la goutte dans le gaz,  $\infty$  loin de la goutte dans le gaz,  $\Delta H_r$  est l'enthalpie de réaction,  $Al$  identifie le carburant ici l'aluminium,  $L_v$  correspond à la chaleur latente de vaporisation et  $s$  est le rapport des fractions massiques oxydant-carburant à la stœchiométrie :

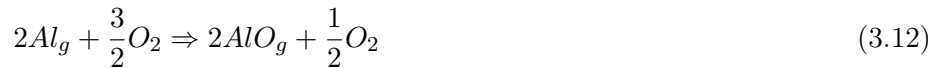
$$s = \left( \frac{Y_{Ox}}{Y_{Al}} \right)_{st} \quad (3.11)$$

avec l'indice  $st$  qui indique l'état à la stœchiométrie. Au cours de la combustion de l'aluminium dans des conditions de type MPS d'Ariane 5, les oxydants sont essentiellement du dioxyde de carbone et de la vapeur d'eau. Ces deux oxydants sont à considérer, il est difficile d'en négliger un. La loi du  $D^2$  ne prévoit pas cette possibilité. Elle a été établie pour un seul oxydant. Il faut donc évaluer  $Y_{O_x, \infty}$  et  $s$  avec un modèle. De plus, les réactions sont multiples. L'aluminium se vaporise, réagit avec l'un des oxydants, puis certains produits gazeux se condensent. Dans ces produits liquides, certains rétro-diffusent vers la goutte d'aluminium et modifient la forme des gouttes d'aluminium comme on l'a vu précédemment (sous-section 1.3.3). L'enthalpie de réaction et la fraction massique d'aluminium gazeux à la surface de la goutte sont donc d'autres inconnues à déterminer.

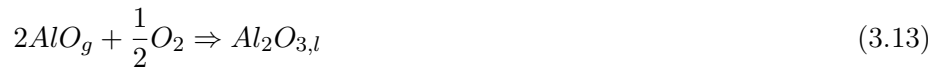
### 3.1.3 Modèle de Law

Le modèle de Law (Law (1973), Cesco (1997)) est une adaptation d'un modèle de flamme de diffusion pour la combustion des gouttes d'aluminium. Pour prendre en compte la condensation de l'alumine, Law (1973) introduit deux paramètres. Il s'agit de  $\theta$ , la fraction d'oxydes sous forme vapeur et  $\eta$ , fraction de ces oxydes qui diffusent vers la surface de la goutte et qui se condensent.

Dans ce modèle simple, seul l'alumine gazeux  $Al_2O_3$ , qui est le produit majoritaire, est considéré parmi tous les produits gazeux de combustion  $Al_2O_3$ ,  $AlCl$ ,  $AlCl_2$ ,  $AlCl_3$ ,  $AlClO$ ,  $AlOH_2$ ,  $Al$ ,  $AlO$ ,  $Al_2O$ . Le système réactionnel de Law (1973) est donc :



avec l'indice  $g$  qui indique l'état gazeux et une enthalpie de la réaction qui vaut  $\Delta H_r = 9530$  kJ/kg et une condensation partielle en alumine liquide :



où l'indice  $l$  indique l'état liquide. Les équations de conservation de masse des espèces (sous forme vapeur) et de l'énergie conduisent à un système de six équations. La résolution de ce système donne le débit de combustible évaporé, les deux paramètres  $\theta$  et  $\eta$ , le rayon de la flamme  $r_f$ , la fraction massique d'oxydes (produits de combustion) sous forme vapeur au niveau de la flamme et la fraction massique de combustible  $Y_{Al,s}$  à la surface de la goutte. Ce modèle est basé sur un modèle de diffusion avec un seul oxydant puis a été amélioré par différents auteurs (Brooks and Beckstead (1995), DesJardin et al. (2005)). Cependant, il ne donne pas toujours des résultats cohérents avec les résultats

physiques attendus (Cesco (1997)). Nous choisissons alors de l'abandonner pour un modèle plus simple, le modèle issu du groupe de travail ASSM (Aerodynamics of Segmented Solid Motors), présenté ci-dessous.

### 3.1.4 Modèle ASSM

Le modèle ASSM, utilisé dans les codes de simulation d'ArianeGroup, a été développé dans le cadre d'un programme de recherche français Aerodynamics of Segmented Solid Motors (Lupoglazoff et al. (2002); Vuillot and Kuentzmann (1995)). Il s'agit d'un modèle simplifié de la combustion de l'aluminium, issu de la loi du  $D^2$ , et mono-espèce. Pour prendre en compte la formation de résidus d'oxydes d'aluminium, condensats de produits de combustion (Beckstead (2002); Zarko and Glotov (2013)), la combustion est arrêtée par une fonction Heaviside lorsque la goutte atteint une taille de résidu  $D_r$ . Cette modélisation de l'extinction par un arrêt abrupt du processus de combustion (sous-section 1.3.4) permet également de modéliser plus simplement les résidus. De plus, le modèle ASSM est mono-espèce. Il n'est pas nécessaire de déterminer les fractions massiques  $Y_k$  de l'oxydant et du réducteur. L'expression du nombre de Spalding est, dans ce cas, simplifiée. Le taux de consommation s'exprime alors comme :

$$\dot{m} = \dot{m}_{D^2} \mathcal{H}(D - D_r) = \pi D \frac{\mu}{\text{Pr}} \ln(1 + B) \text{Sh} \mathcal{H}(D - D_r) \quad (3.14)$$

Dans cette expression, le nombre de Spalding B correspond à une simplification de  $B_{O_x, T}$  de l'équation Eq. (3.10), tel que :

$$B = \frac{C_{P,g}(T_\infty - T_S) + \Delta H_r}{L_v} \quad (3.15)$$

où  $C_{P,g}$  est la capacité calorifique du gaz environnant à pression constante,  $\Delta H_r$  l'enthalpie de réaction de combustion et  $L_v$  la chaleur latente de vaporisation de l'aluminium.

L'enthalpie de réaction  $\Delta H_r$  est calculée de la même façon que pour le modèle de Law à partir de l'équation Eq. (3.12). On suppose donc que  $\Delta H_r = 9530$  kJ/kg.

Le diamètre suit donc la loi du  $D^2$  avec une fonction Heaviside pour la condition d'arrêt :

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{4\dot{m}}{\pi D \rho_p} = -\frac{4\mu \ln(1 + B) \text{Sh}}{\text{Pr} \rho_p} \mathcal{H}(D - D_r) \quad (3.16)$$

Lorsque le diamètre de la goutte est supérieur au diamètre résiduel  $D_r$ , la goutte d'aluminium brûle selon la loi du  $D^2$ . Si le diamètre est inférieur ou égal à  $D_r$ , la goutte est inerte et correspond à une goutte d'alumine. Le temps

de combustion d'une telle goutte est donc défini par (pour un terme source constant de l'équation (3.16)) :

$$t_c = \frac{\rho_p \text{Pr}(D_i^2 - D_r^2)}{4\text{Sh}\mu \ln(1 + B)} \quad (3.17)$$

Ce modèle sera préféré aux autres dans l'essentiel du manuscrit car il modélise deux phases considérées comme essentielles dans la dynamique : (i) la phase symétrique et (ii) l'extinction abrupte (voir chapitre 1).

### 3.1.5 Modélisation simple du lobe d'alumine : modèle de la calotte sphérique

Beckstead (2002), Brooks and Beckstead (1995) et Widener and Beckstead (1998) démontrent que la consommation des gouttes d'aluminium dévie de la loi du  $D^2$ , du fait de la présence d'alumine dans la goutte (Fig. 3.2). En effet, la surface d'échange aluminium-oxydant est d'autant diminuée que le lobe d'alumine est grand et la combustion est modifiée. En considérant la goutte aluminium-alumine sphérique, on peut en déduire une hauteur de dépôt  $h$  d'alumine qui peut être déterminée par l'équation (Beckstead (2002)) :

$$h^3 - \frac{3}{2}Dh^2 + \frac{3V_{Al_2O_3}}{\pi} = 0 \quad (3.18)$$

où  $V_{Al_2O_3}$  représente le volume d'alumine liquide présent dans la goutte,  $D$  le diamètre de la goutte aluminium-alumine. Le volume total de la goutte  $V$  est :

$$V = \frac{\pi}{6}D^3 \quad (3.19)$$

Le volume d'aluminium  $V_{Al}$  et le volume d'oxyde d'aluminium  $V_{Al_2O_3}$  sont :

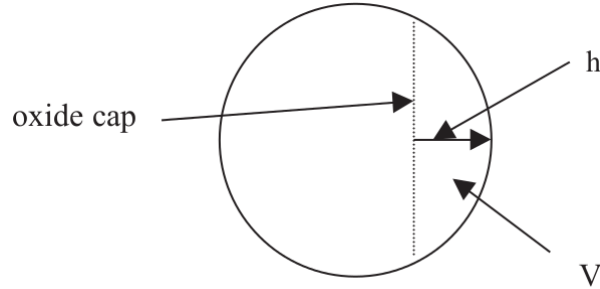
$$V_{Al_2O_3} = \frac{\pi}{6}(D_i^3 - D^3) \frac{\beta^3}{1 - \beta^3}, \quad V_{Al} = V - V_{Al_2O_3} \quad (3.20)$$

avec  $D_i$  le diamètre initial et  $\beta$  le nombre adimensionnel suivant :

$$\beta = \frac{D_r}{D_i} \left( \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Al_2O_3}} \right)^{1/3} \quad (3.21)$$

où  $D_r$  est le diamètre résiduel,  $\rho_{Al}$  la masse volumique de l'aluminium liquide et  $\rho_{Al_2O_3}$  la masse volumique de l'alumine liquide. Le diamètre  $D$  de la goutte aluminium-alumine évolue selon la loi du  $D^2$  pour une goutte sphérique bi-composant mais avec un taux de consommation de l'aluminium  $\dot{m}$  différent de la loi du  $D^2$  classique :

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{4\dot{m}}{\pi D \rho_{Al}} \quad (3.22)$$



**FIGURE 3.2** – Modélisation de la couche d'alumine dans la goutte / Calotte sphérique (Beckstead (2002))

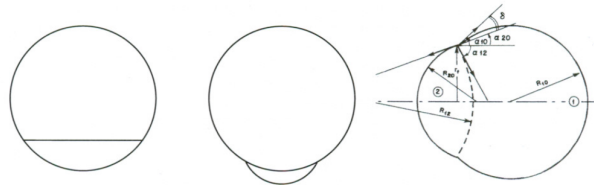
Dans ces conditions, le taux de consommation  $\dot{m}$ , en considérant la recondensation en alumine, est donné par :

$$\dot{m} = \pi(D - h) \frac{\mu}{\text{Pr}} \ln(1 + B) \text{Sh}(1 - \beta^3) \quad (3.23)$$

Le diamètre de la goutte suit donc l'équation suivante :

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{4\mu}{\rho_{Al}\text{Pr}} \ln(1 + B) \text{Sh} \left(1 - \frac{h}{D}\right) (1 - \beta^3) \quad (3.24)$$

D'autres modèles ont été proposés par Duterque et al. (1999) et par Kuentzmann (1973). Duterque et al. (1999) représentent la situation en considérant une sphère d'alumine incluse partiellement dans une sphère d'aluminium. Kuentzmann (1973) calcule en fonction des efforts de tension superficielle la position de l'alumine par rapport à la goutte d'aluminium. Ces deux modèles ne seront pas présentés dans ce manuscrit de thèse. La figure 3.3 représente ces trois modèles.



**FIGURE 3.3** – Différentes géométries du lobe d'alumine : calotte sphérique présentée ici (à gauche), géométrie de Duterque (au centre), de Kuentzmann (à droite) (Duterque et al. (1999), Kuentzmann (1973))

Le modèle issu de l'équation Eq. (3.24) est rapidement étudié dans le manuscrit lors d'une étude paramétrique présentée dans le chapitre 5.

## 3.2 Effet de l'écoulement sur la combustion d'une goutte

Dans cette section, les effets de convection et de traînée associés à l'écoulement autour de la goutte sont décrits. Différents modèles pour prendre en compte ces phénomènes sont présentés. Si la goutte est transportée par le milieu ambiant avec une différence de vitesse entre celle de la goutte et celle de l'écoulement gazeux, des efforts hydrodynamiques s'exercent sur la goutte. Cet écoulement externe n'est pas pris en compte dans la loi du  $D^2$ . Il faut donc la corriger via la corrélation de [Ranz and Marshall \(1952\)](#). On notera que les effets de convection sont forcément différents pour une goutte avec une calotte d'alumine, néanmoins cet aspect n'est pas pris en compte dans le manuscrit. Enfin, comme la goutte se vaporise, un écoulement normal à l'interface de la goutte s'établit. L'écoulement externe étant modifié, les efforts hydrodynamiques diffèrent également.

Cette section est organisée comme suivant : (i) une première sous-section qui traite la modélisation de l'effet de l'écoulement sur une goutte inerte, (ii) une seconde au sujet de l'effet de l'évaporation ou de la combustion sur l'écoulement et (iii) une dernière qui propose une modélisation de l'effet de l'écoulement sur la goutte en combustion.

### 3.2.1 Goutte inerte dans un écoulement gazeux

On traite dans cette partie la modélisation choisie pour la force de traînée et les échanges thermiques pour une particule inerte, par exemple pour les gouttes résiduelles d'alumine, après combustion dans un moteur à propergol solide.

#### 3.2.1.1 Forces hydrodynamiques

On définit un nombre de Reynolds basé sur la différence entre la vitesse du centre de masse de la goutte et la vitesse de l'écoulement loin de la goutte :

$$\text{Re}_p = \frac{\rho_g \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}\| D}{\mu} = \frac{\rho_g \|\delta \mathbf{u}_p\| D}{\mu} \quad (3.25)$$

avec  $\|\delta \mathbf{u}_p\| = \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}\|$ , vitesse relative de la goutte liquide par rapport à l'écoulement externe,  $\rho_g$  la masse volumique du gaz,  $D$  le diamètre de la goutte et  $\mu$  la viscosité du gaz.

La goutte peut être soumise à une force de traînée, de portance, de gravité et une poussée d'Archimède, mais aussi à des effets de masse ajoutée, d'instationnarité de l'écoulement, de Magnus et une force d'histoire. Avec l'hypothèse



de sphéricité de la goutte, d'une masse ajoutée négligeable ( $\rho_p \gg \rho_g$ ) et de faible nombre de Reynolds  $Re_p$ , seule la force de traînée, qui est dirigée selon  $\delta \mathbf{u}_p$ , est à considérer.

La force de traînée et son temps caractéristique associé dépendent d'un coefficient de traînée  $C_d$  :

$$\mathbf{F}_d = -\frac{C_d}{8} \pi D^2 \rho_g \|\delta \mathbf{u}_p\| \delta \mathbf{u}_p, \quad \tau_d = \frac{4\rho_p D}{3\rho_g C_d \|\delta \mathbf{u}_p\|} \quad (3.26)$$

où  $\rho_p$  est la masse volumique de la goutte liquide et  $\rho_g$  la masse volumique du gaz.

Dans le cas de gouttes dans un gaz en l'absence d'évaporation, l'interface liquide-gaz joue un rôle prépondérant. Contrairement à une particule solide, où une adhérence est observée, la contrainte tangentielle à l'interface est continue, entraînant ainsi un mouvement fluide dans la goutte, mais aussi une diminution de la contrainte des gaz sur celle-ci. A faible nombre de Reynolds  $Re_p$ , on peut supposer que la sphéricité de la goutte est conservée. Dans ces conditions, la formule d'Hadamard donne pour le coefficient de traînée :

$$C_d = C_{d,\dot{m}=0} = \frac{8}{Re_p} \frac{2 + 3\kappa_\mu}{1 + \kappa_\mu} \quad (3.27)$$

où l'indice  $\dot{m} = 0$  indique l'état inerte (sans évaporation),  $\kappa_\mu = \mu_p/\mu$  est le rapport des viscosités de la particule et du fluide environnant. Cette formule est valable pour une particule solide, une goutte liquide et une bulle. Pour de l'aluminium pur liquide à haute température, la viscosité est de l'ordre de  $\mu_p = \mu_{Al} \approx 10^{-3}$  Pa.s (Vargel (2005)). La viscosité du gaz est de l'ordre de  $\mu = 9 \times 10^{-5}$  Pa.s, (Gallier and Godfroy (2009)). De plus, selon Vargel (2005), l'alumine présent dans la goutte augmente la viscosité moyenne  $\mu_p$  de la goutte  $Al-Al_2O_3$ , donc  $\mu_p > \mu_{Al} > \mu$ . On suppose alors que le rapport des viscosités est très grand devant 1 ( $\kappa_\mu \gg 1$ ). Pour  $Re_p < 1$ , on obtient alors, sans évaporation, à partir de la formule d'Hadamard (Eq. (3.27)) :

$$C_{d,\dot{m}=0} = \frac{24}{Re_p} \quad (3.28)$$

Le coefficient de traînée  $C_d$  d'une goutte d'aluminium correspond donc à un coefficient de traînée pour une particule solide. Dans ce cas-là, le temps de relaxation  $\tau_d$  associé à la force de traînée est donné par :

$$\tau_d = \frac{4\rho_p D}{3\rho_g C_d \|\delta \mathbf{u}\|} = \frac{\rho_p D^2}{18\mu} \quad (3.29)$$

Les corrélations Eqs. (3.26), (3.28) et (3.29) ne sont valables qu'à faibles nombres de Reynolds particulaire ( $Re_p < 1$ ). Pour étendre la modélisation à de

plus hauts nombres de Reynolds, il faut vérifier que la goutte conserve sa sphéricité en présence de l'écoulement (le lobe d'alumine n'est pas pris en compte ici). On donne dans un premier temps l'extension de la modélisation ainsi que ses bornes de validité et on vérifiera la sphéricité dans ce domaine.

Pour un nombre de Reynolds supérieur à 1 et inférieur à 800, dans le cas d'une conservation de la sphéricité, on peut utiliser la corrélation de Schiller and Naumann (Schiller and Naumann (1933); Naumann and Schiller (1935)) :

$$C_{d,\dot{m}=0} = \frac{24(1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687})}{\text{Re}_p} \quad (3.30)$$

Le temps caractéristique associé à la force de traînée de la particule s'écrit donc :

$$\tau_d = \frac{1}{1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687}} \frac{\rho_p D^2}{18\mu} \quad (3.31)$$

Le temps caractéristique associé à l'inertie est défini comme :  $\tau_I = \frac{D}{\|\delta\mathbf{u}_p\|}$ . On peut donc définir un nombre de Stokes de la goutte :

$$\text{Stk} = \frac{\tau_d}{\tau_I} = \frac{1}{1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687}} \frac{\rho_p D \|\delta\mathbf{u}_p\|}{18\mu} \quad (3.32)$$

En utilisant les valeurs pour la masse volumique particulaire  $\rho_p$ , la vitesse relative  $\|\delta\mathbf{u}_p\|$ , le diamètre particulaire  $D$  de Gallier and Godfroy (2009) et pour  $\text{Re}_p < 800$ , on trouve  $\text{Stk} > 1$ . On en déduit alors que l'inertie de la goutte est grande devant les effets visqueux (ici la traînée).

A hauts nombres de Reynolds ( $1 < \text{Re}_p < 800$ ), la goutte reste sphérique si la tension superficielle est suffisamment grande devant les autres forces aérodynamiques (inertie, force de traînée, gravité, ...). Si on suppose que les effets d'inertie sont les plus importants, alors il suffit de les comparer à la tension superficielle pour vérifier la sphéricité de la goutte. Le nombre de Weber, rapport des forces d'inertie et de la tension superficielle, est défini par :

$$\text{We} = \frac{\rho_g \|\delta\mathbf{u}_p\|^2 D}{\sigma} \quad (3.33)$$

où  $\sigma$  est la tension superficielle entre la goutte et le gaz. Selon Vargel (2005), on peut évaluer la tension superficielle de la goutte à  $\sigma \approx 0.6 \text{ N/m}$  (pour une température de 2791 K). Pour  $\text{Re}_p < 800$ , le nombre de Weber est inférieur à :

$$\text{We} < 0.2 \quad (3.34)$$

On supposera que le nombre de Weber est suffisamment petit ( $We \ll 1$ ) pour considérer que la sphéricité est conservée. La force de traînée  $\mathbf{F}_d$  et le temps caractéristique  $\tau_d$  correspondant, pour  $Re_p < 800$ , s'expriment donc :

$$\mathbf{F}_d = -3(1 + 0.15Re_p^{0.687})\pi D\mu\delta\mathbf{u}_p, \quad \tau_d = \frac{1}{1 + 0.15Re_p^{0.687}} \frac{\rho_p D^2}{18\mu} \quad (3.35)$$

### 3.2.1.2 Échanges thermiques par convection entre une goutte et son environnement

On suppose un nombre de Biot petit. La température  $T_p$  de la goutte est donc supposée uniforme. Sans combustion ou évaporation, les échanges thermiques, à la surface de la goutte, sont des échanges de type conducto-convectif dont le flux est donné par :

$$Q_v = \pi\lambda_g D Nu (T_g - T_p) \quad (3.36)$$

où  $\lambda_g$  est la conductivité thermique du gaz environnant, Nu est le nombre de Nusselt et  $T_g$  la température du gaz environnant. Pour une goutte sphérique dans un écoulement où la vitesse est imposée, le nombre de Nusselt est donné par (Kuo (1986)) :

$$Nu = 2 + 0.6Re_p^{1/2} Pr^{1/3} \quad (3.37)$$

avec Pr le nombre de Prandtl et  $Re_p$  le nombre de Reynolds particulaire. Avec combustion/évaporation, on supposera que la convection apportera la chaleur nécessaire au liquide pour s'évaporer :

$$Q_v = \dot{m}L_v \quad (3.38)$$

où  $\dot{m}$  est le taux massique d'aluminium consommé en  $kg/s$  et  $L_v$  la chaleur latente de vaporisation.

### 3.2.2 Effet de l'évaporation/combustion sur la force de traînée

L'évaporation de la goutte modifie le comportement des deux fluides, notamment à l'interface. La couche limite est soufflée par le flux d'évaporation normal à la surface de la goutte. La force de traînée diminue alors. Pour un nombre de Reynolds modéré, une modélisation simple consiste à modifier le coefficient de traînée défini précédemment par  $1/(1 + B)$  avec B le nombre de Spalding (Renksizbulut and Yuen (1983)) :

$$C_d = \frac{C_{d,\dot{m}=0}}{1 + B} \quad (3.39)$$

On supposera, dans les conditions de fonctionnement des MPS considérés pour lesquels  $Re_p < 100$ , que cette corrélation est toujours vraie.

Pour un nombre de Reynolds particulaire compris entre 1 et 100, le temps caractéristique associé à la force de traînée de la particule s'écrit donc :

$$\tau_d = \frac{1 + B}{1 + 0.15Re_p^{0.687}} \frac{\rho_p D^2}{18\mu}, \quad \mathbf{F}_d = -3\pi \frac{1 + 0.15Re_p^{0.687}}{1 + B} D\mu\delta\mathbf{u}_p \quad (3.40)$$

### 3.2.3 Effet de la convection sur l'évaporation/combustion

De la même façon que l'évaporation a un effet sur l'écoulement extérieur, l'écoulement extérieur modifie le taux d'évaporation et le débit massique de l'aluminium  $\dot{m}$ . Quel que soit le modèle utilisé, on a :

$$\dot{m} \propto Sh \quad (3.41)$$

Le nombre de Sherwood  $Sh$  compare le transfert par convection de masse au transfert par diffusion. La loi la plus utilisée pour le nombre de Sherwood pour une sphère plongée dans un écoulement est la corrélation empirique de Ranz-Marshall :

$$Sh = 2 + 0.6Re_p^{1/2}Pr^{1/3} \quad (3.42)$$

Cette relation montre que l'écoulement externe (via le nombre de Reynolds  $Re_p$ ) modifie le taux d'évaporation des gouttes  $\dot{m}$ . On remarque que lorsque le nombre de Reynolds  $Re_p$  augmente, le taux d'évaporation  $\dot{m}$  augmente également.

L'hypothèse quasi-stationnaire, nécessaire à loi du  $D^2$  et à la corrélation de Ranz-Marshall, est discutée en suivant.

### 3.2.4 Hypothèse quasi-stationnaire

D'un point de vue dynamique, Gallier et al. (2011) ont démontré, par simulation numérique directe de l'écoulement autour d'une goutte d'aluminium qui brûle dans l'air, que la réponse de la flamme autour de la goutte à une oscillation acoustique est contrôlée par le processus de convection et que la dynamique de la chimie n'est pas altérée. De plus, dans le domaine fréquentiel  $f < 5$  kHz, Gallier et al. (2011) observent que la réponse numérique correspond à la linéarisation de la corrélation (Eq. (3.42)) de Ranz and Marshall (1952). A plus haute fréquence, l'hypothèse quasi-stationnaire n'est donc plus valide.

Sujith et al. (2000) définissent un critère théorique pour valider l'hypothèse quasi-stationnaire :

$$\frac{u_1}{\omega D} \geq 0.75 \quad (3.43)$$

qui compare les fluctuations de vitesse du gaz  $u_1$ , la fréquence acoustique  $\omega = 2\pi f$  et le diamètre de la goutte  $D$ . La validité de l'hypothèse quasi-stationnaire est donc dépendante de l'amplitude des fluctuations de vitesse  $u_1$  et de la fréquence acoustique  $f$ . Gallier et al. (2009) ont vérifié la relation pour une simulation très similaire à celles effectuées dans ce manuscrit.

On supposera donc que l'hypothèse quasi-stationnaire est vérifiée dans l'ensemble des simulations effectuées dans ce travail.

On notera que la présence et le rayonnement de fumées et la calotte d'alumine ont été négligés dans les échanges gaz-aluminium.

## Chapitre 4

# Simulation numérique instable de référence

*Ce chapitre présente les modèles physiques et numériques utilisés dans les simulations numériques qui sont menées. Une simulation instable de référence sert de point de départ de l'ensemble des analyses faites dans ce manuscrit. Elle permet d'illustrer les mécanismes physiques mis en jeu au cours d'une instabilité thermoacoustique. Ce calcul est étudié en examinant la structure de l'écoulement, la distribution du taux de dégagement de chaleur induit par la combustion de l'aluminium, le terme source de Rayleigh à l'origine de l'instabilité thermoacoustique et le taux de croissance de l'instabilité.*

### 4.1 Modélisation physique de l'écoulement dans les simulations numériques

Les simulations numériques de l'écoulement (CFD) sont effectuées avec le code CPS (Code de Propulsion Spatiale), un code interne CNES/ArianeGroup ([Durand et al. \(2000\)](#)), présenté brièvement en annexe A.

Dans un MPS, il existe essentiellement deux classes de gouttes d'aluminium qui brûlent, des gouttes de petite taille et des gouttes de plus grande taille provenant d'une agglomération de particules solides avant la fusion (voir la sous-section 1.3.2). Les petites gouttes d'aluminium réactives sont considérées comme étant négligeables pour l'instabilité thermoacoustique étudiée, puisqu'elles brûlent très rapidement et dans une zone à la surface du propergol où les fluctuations acoustiques sont très faibles. Pour le régime inerte (après combustion), deux classes de gouttes d'alumine peuvent également être identi-

fiées : des fumées avec des petites gouttes inertes et des gouttes inertes de taille comparable aux gouttes d'aluminium injectées (sous-section 1.3.3). Les petites gouttes inertes ne vont intervenir que sur l'amortissement d'oscillations à des fréquences élevées (Culick and Yang (1992)) et sont donc négligeables pour les modes longitudinaux à basse fréquence qui sont les modes sur lesquels l'instabilité thermoacoustique apparaît généralement (Gallier and Godfroy (2009)).

Dans nos simulations, nous considérons donc une seule classe de gouttes : les gouttes réactives de grande taille provenant des agglomérats et qui correspondent à un tiers de la masse totale de l'aluminium présent dans le propergol (sous-section 1.3.2) puis les résidus inertes de grande taille en régime inerte. On rappelle également qu'il s'agit d'une combustion distribuée de gouttes (sous-section 3.1.1), modélisée par un des modèles décrits dans le chapitre 3.

Les équations de conservation, résolues par le code CPS, sont les équations de Navier-Stokes compressibles avec la loi des gaz parfaits, dans un formalisme eulérien-eulérien pour une phase particulière diluée (fraction volumique particulière  $\alpha_p \ll 1$ ) et monodisperse (Equations de Marble (1963); Lupoglazoff et al. (2002)) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_g \\ \mathbf{W}_p \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}_g \\ \mathbf{F}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_g \\ \mathbf{S}_p \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{W}_g$  et  $\mathbf{W}_p$  désignent le vecteur des grandeurs conservatives, respectivement pour la phase gazeuse et la phase particulière :

$$\mathbf{W}_g = \begin{pmatrix} \rho_g \\ \rho_g \mathbf{u} \\ \rho_g E_g \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_p = \begin{pmatrix} \rho_p \alpha_p \\ \rho_p \alpha_p \mathbf{u}_p \\ \rho_p \alpha_p E_p \\ N_p \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$\mathbf{F}_g$  et  $\mathbf{F}_p$  sont les flux associés à chaque phase :

$$\mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} \rho_g \mathbf{u} \\ \rho_g \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{P} \\ \rho_g \mathbf{u} E_g - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_p = \begin{pmatrix} \rho_p \alpha_p \mathbf{u}_p \\ \rho_p \alpha_p \mathbf{u}_p \otimes \mathbf{u}_p \\ \rho_p \alpha_p \mathbf{u}_p E_p \\ \mathbf{u}_p N_p \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Les vecteurs  $\mathbf{S}_g$  et  $\mathbf{S}_p$  sont les termes sources :

$$\mathbf{S}_g = \begin{pmatrix} N_p \dot{m} \\ N_p \dot{m} \mathbf{u}_p - \mathbf{F}_d \\ N_p \dot{m} (E_p + L_v + \Delta H_r) - Q_v - \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{u}_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_p = \begin{pmatrix} -\mathbf{S}_g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Dans ces équations,  $\rho_g$  est la masse volumique du gaz,  $\rho_p$  la masse volumique des gouttes (supposée constante),  $\mathbf{u}$  le vecteur vitesse du gaz,  $\mathbf{u}_p$  le vecteur

vitesse des gouttes,  $E_g$  l'énergie totale du gaz,  $E_p$  l'énergie totale de la phase particulaire,  $N_p$  le nombre de gouttes par unité de volume. Les phénomènes de coalescence et de rupture de goutte ne sont pas considérés. Le taux d'évaporation  $\dot{m}$  d'une goutte d'aluminium est décrit par l'un des modèles dérivés dans le chapitre 3. Les autres quantités sont  $L_v$  la chaleur latente de vaporisation,  $\Delta H_r$  l'enthalpie de réaction,  $Q_v$  le flux de chaleur échangé par convection,  $\mathbf{F}_d$  la force de traînée et  $\mathbf{P}$  le tenseur des contraintes donné pour un fluide newtonien par :

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \mu \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \right) \quad (4.5)$$

où  $p$  est la pression du gaz,  $\mu$  la viscosité dynamique du gaz et  $\mathbf{I}$  la matrice identité.

Dans chaque cellule du maillage, nous supposons une seule valeur de diamètre de goutte  $D$  pour toutes les gouttes et donc  $D$  peut être calculé par :

$$D = \left( \frac{6\alpha_p}{\pi N_p} \right)^{1/3} \quad (4.6)$$

Les termes sources Eq. (4.4) changent en fonction de l'état des gouttes. Soit la goutte brûle, soit elle est inerte. Ces deux états dépendent du diamètre de la goutte  $D$ . La combustion réduit la masse d'aluminium disponible et le diamètre  $D$  de la goutte diminue. La combustion s'arrête lorsque le diamètre  $D$  atteint le diamètre de résidu d'alumine  $D_r$ , valeur définie initialement par l'utilisateur.

La force de traînée  $\mathbf{F}_d$  est donnée pour  $N_p$  gouttes sphériques, en utilisant la corrélation de Schiller et Naumann (Naumann and Schiller (1935); Schiller and Naumann (1933); Grace et al. (1978)) :

$$\mathbf{F}_d = - \frac{18\mu\alpha_p (1 + 0.15Re_p^{0.687})}{D^2(1 + B)} \delta \mathbf{u}_p \quad (4.7)$$

Pendant le processus de combustion, les gouttes d'aluminium sont supposées isothermes. La température des gouttes est constante et portée à la température de saturation de l'aluminium  $T_p = T_{sat}$ . Nous supposons que toute la chaleur transmise par l'écoulement à la goutte est utilisée pour alimenter l'évaporation :

$$Q_v = N_p \dot{m} L_v \quad (4.8)$$

ce qui simplifie les termes sources  $\mathbf{S}_g$  et  $\mathbf{S}_p$  (en cas de combustion). Pour les gouttes inertes ( $D = D_r$ ), le modèle de convection est défini en sous-section 3.2.1.2.



Les deux phases liquide et gazeuse sont monoconstituantes et la thermodynamique de chacune des deux phases est supposée constante.

## 4.2 Modélisation numérique

Pour toutes les simulations numériques du manuscrit, les équations de conservation sont résolues sur la base d'une méthode de volumes finis sur un maillage non structuré. Les schémas numériques utilisés pour discrétiser les équations sont d'ordre 2 en espace (approche MUSCL) et en temps (Runge-Kutta à deux étapes, explicite). Le pas de temps est défini par un critère de Courant-Friedrichs-Lewy fixé à  $CFL = 0.55$ . Les simulations sont réalisées dans un formalisme 2D-axisymétrique par le code CPS (Durand et al. (2000), annexe A). Le moteur considéré est donc cylindrique, avec une injection radiale de masse de gaz et de gouttes d'aluminium modélisant la combustion du propergol solide. L'écoulement généré est éjecté par une tuyère indiquée aux figures 4.1 et 4.3. La régression du propergol solide est négligée dans les simulations qui sont menées car la vitesse du son est beaucoup plus élevée que la vitesse de régression du propergol solide (Kuentzmann (2004)) et que les temps de simulations sont trop courts pour observer des changements de géométrie. La géométrie calculée est représentée à la figure 4.1. La chambre a un rayon  $R = 0.593$  m, une longueur  $L = 7$  m et un axe de symétrie à  $r = 0$ . Le col de tuyère a un rayon  $R_t = 0.175$  m et est situé à  $x_t = 7.3$  m. Le fond avant, une paroi solide, est en  $x = 0$ . Pour les moteurs de faible longueur  $L$ , la turbulence peut être négligée

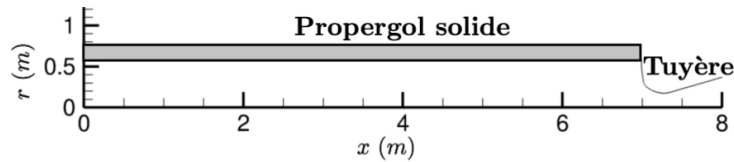


FIGURE 4.1 – Géométrie 2D-axi du moteur

(Apte and Yang (2001); Apte and Yang (2002)), puisque l'écoulement est entre un état laminaire et transitionnel vers la turbulence (Varapaev and Yagodkin (1969), Beddini (1986)). Pour le vérifier, on peut faire une analyse du nombre de Reynolds dans un moteur. On définit le nombre de Reynolds à l'injection comme :

$$\text{Re}_i = \frac{\rho v_i R}{\mu} \quad (4.9)$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $v_i$  la vitesse d'injection des gaz à la paroi du propergol solide,  $R$  le rayon de la chambre et  $\mu$  la viscosité dynamique des gaz. Le

nombre de Reynolds longitudinal qui permet d'analyser le régime d'écoulement est :

$$\text{Re}_x = \frac{\rho u_0(r=0, x)R}{\mu} \quad (4.10)$$

avec  $u_0$  la vitesse longitudinale du gaz moyenne et  $u_0(r=0, x)$  la valeur sur l'axe  $r=0$ . [Beddini \(1986\)](#) propose une évaluation du nombre de Reynolds critique  $\text{Re}_c$  en dessous duquel l'écoulement moyen correspond à la théorie laminaire avec des niveaux potentiellement élevés de fluctuations turbulentes de l'écoulement. Cette valeur critique est déterminée à partir du nombre de Reynolds à l'injection  $\text{Re}_i$ . Pour notre configuration moteur, le nombre de Reynolds à l'injection est de  $\text{Re}_i \approx 1.6 \times 10^5$ . A partir de [Varapaev and Yagodkin \(1969\)](#) et [Beddini \(1986\)](#), on trouve un nombre de Reynolds critique correspondant de l'ordre de :

$$\text{Re}_c = 10^7 \quad (4.11)$$

On observe, à la figure 4.2, que dans l'ensemble de la chambre ( $x < L$ ), l'écoulement moyen peut être supposé laminaire.

Pour simplifier l'écoulement, dans un objectif de compréhension du couplage combustion-acoustique, on supposera également que les fluctuations turbulentes sont négligeables devant les fluctuations acoustiques. Il reste néanmoins intéressant d'investiguer et d'évaluer le rôle de la turbulence dans des travaux postérieurs à cette thèse.

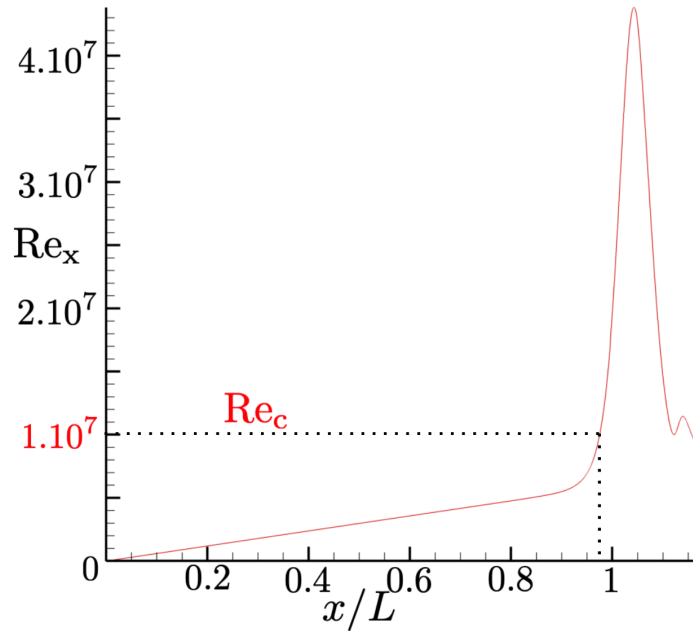
### 4.3 Simulation instable de référence

Afin d'illustrer le phénomène de l'instabilité thermoacoustique induite par la combustion de l'aluminium et d'analyser l'écoulement dans un moteur à propergol solide (MPS), une simulation de référence est analysée.

#### 4.3.1 Modélisations numérique et physique

Dans cette partie, la modélisation physico-numérique du calcul de référence est décrite.

Le maillage retenu est composé de 170 000 quadrilatères avec environ 600 points dans la direction axiale et 280 points dans la direction radiale. Il est raffiné proche de la surface de propergol solide pour résoudre la combustion distribuée des gouttes d'aluminium. Une analyse *a posteriori* montre qu'environ 70 points sont présents dans la zone de combustion de l'aluminium. La maille la plus



**FIGURE 4.2** – Nombre de Reynolds axial  $Re_x$  de l'écoulement moyen, en  $x = 0$ , dans le moteur

petite est de 1 mm selon la direction radiale et se situe à la surface du propergol solide. Une convergence en maillage a été effectuée avec un maillage plus raffiné de 440 000 points et aucune différence significative n'a été observée pour le champ de pression, de vitesse et du taux de dégagement de chaleur.

La combustion du propergol solide est modélisée par une condition d'injection de débit. Le débit massique injecté est pris constant le long du propergol. Les phases d'accélération, d'agglomération et de fusion des particules et d'allumage sont supposées infiniment rapides. Les gouttes sont donc injectées à l'équilibre hydrodynamique avec le gaz de sorte que leur vitesse selon la direction normale à la paroi soit égale à la vitesse normale des gaz :  $v_{p,i} = v_{g,i} = -v_i$ , avec  $v_i > 0$ . Les parois au fond avant et la tuyère d'éjection sont modélisées par des conditions de non-glissement pour les deux phases (gaz et particules). La sortie du gaz et des particules par la tuyère est modélisée par une condition limite sur la pression qui est fixée à la pression atmosphérique. Cette modélisation est suffisante car la tuyère est amorcée.

Les propriétés thermodynamiques du gaz et de la phase particulaire sont définies dans le Tableau 4.1, où  $\mu$  est la viscosité dynamique du gaz,  $Pr$  le nombre de Prandtl,  $D_i$  le diamètre d'injection des gouttes d'aluminium,  $D_r$  le diamètre résiduel de ces gouttes,  $(\rho v)_i$  le débit massique surfacique injecté par

la combustion du propergol (mélange gaz-particules),  $\Delta H_r$  l'enthalpie de réaction,  $\kappa_i$  la fraction massique de gouttes d'aluminium injectée,  $L_v$  la chaleur latente de vaporisation de l'aluminium,  $T_{g,i}$  la température des gaz injectés,  $T_{sat}$  la température de saturation de la goutte d'aluminium et température de la goutte qui brûle,  $C_{P,g}$  la capacité calorifique à pression constante de la phase gazeuse,  $C_{P,p}$  la capacité calorifique à pression constante de la phase particulaire,  $\gamma = C_{P,g}/C_{V,g}$  le rapport entre les capacités calorifiques du gaz à pression et à volume constants et  $\rho_p$  la masse volumique des gouttes. Ces valeurs sont typiques de celles rencontrées dans un MPS (Gallier and Godfroy (2009)).

TABLE 4.1 – Propriétés du gaz et des gouttes d'aluminium

$\mu$	$9.1 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$	Pr	0.4
$D_i$	120 $\mu\text{m}$	$D_r$	60 $\mu\text{m}$
$(\rho v)_i$	24.6 $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$	$\Delta H_r$	$9.53 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$
$\kappa_i$	6%	$L_v$	$10.8 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$
$T_{g,i}$	3450 K	$T_{sat}$	2791 K
$C_{P,g}$	2000 $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$C_{P,p}$	1177 $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$\gamma$	1.16	$\rho_p$	2000 $\text{kg.m}^{-3}$

Le modèle choisi pour déterminer le taux d'évaporation des gouttes d'aluminium est le modèle ASSM (voir la sous-section 3.1.4, Eq. (3.14)) :

$$\dot{m} = \pi D \frac{\mu}{\text{Pr}} \text{Sh} \ln(1 + B) \mathcal{H}(D - D_r) \quad (4.12)$$

Dans cette expression, le nombre de Spalding B est donné par (Eq. (3.15)) :

$$B = \frac{C_{P,g}(T_g - T_p) + \Delta H_r}{L_v} \quad (4.13)$$

Le taux de dégagement de chaleur volumique induit par  $N_p$  gouttes d'aluminium par unité de volume est défini comme (voir annexe ??) :

$$\dot{q} = N_p \dot{m} \left( \Delta H_r + C_{V,p} T_p - C_{V,g} T_g + \frac{\delta \mathbf{u}_p^2}{2} \right) \quad (4.14)$$

Le comportement instationnaire du dégagement de chaleur  $\dot{q}$  constitue la source principale de l'instabilité thermoacoustique (Gallier and Godfroy (2009)).

### 4.3.2 Etude de l'instabilité

Pour ces conditions de fonctionnement, la simulation indique que le régime d'écoulement est instable avec des oscillations de pression auto-entretenues (voir

la figure 4.6). Dans cette simulation, la réponse du propergol solide aux oscillations acoustiques et les instabilités hydrodynamiques sont évitées. L'injection du gaz et des particules est maintenue constante et uniforme le long du propergol. Il n'y a pas d'obstacle ou angle pouvant générer des tourbillons. Le rapport longueur sur rayon de la chambre  $L/R$  est modéré. Seule la réponse aux oscillations acoustiques des gouttes d'aluminium qui brûlent dans l'écoulement constitue une source d'oscillations de pression pour l'instabilité étudiée (Gallier and Godfroy (2009)).

La combustion de l'aluminium a lieu très proche de la surface du propergol solide comme illustré à la figure 4.3 et montré à la figure 4.7. Dans cette même figure, on observe également quelques lignes de courant du champ moyen gazeux. Le gaz est injecté par la paroi du propergol solide, transporté dans la chambre et sort par la tuyère.

La figure 4.4 montre la vitesse moyenne du gaz  $u_0$  et  $v_0$ , respectivement dans

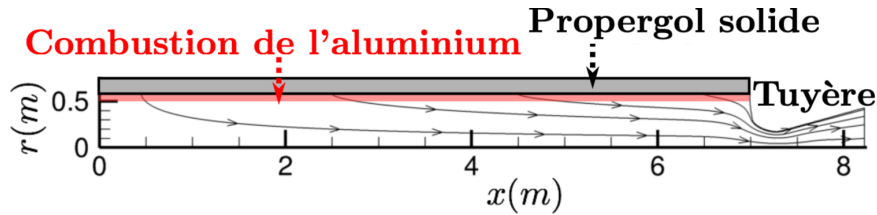


FIGURE 4.3 – Zone de combustion des gouttes d'aluminium (en rouge) et lignes de courant du champ moyen gazeux dans la géométrie de calcul

les directions longitudinale et radiale, dans la zone de combustion. La zone inerte est en blanc. On observe que la vitesse radiale  $v_0$  est quasiment inchangée entre fond avant et fond arrière, contrairement à la vitesse longitudinale  $u_0$ , dans la zone de combustion. On observe donc une augmentation de la vitesse longitudinale  $u_0$  du gaz entre fond avant et fond arrière. Cette observation est relativement similaire au comportement du modèle incompressible et sans combustion de Taylor-Culick, présenté au chapitre 1.

La figure 4.5 illustre les nombres de Reynolds particulaire moyen  $Re_{p,0}$  et de Sherwood moyen  $Sh_0$ . L'augmentation de la vitesse  $u_0$  du fond avant au fond arrière induit une asymétrie entre fond avant et fond arrière du nombre de Reynolds moyen  $Re_{p,0}$  et donc du nombre de Sherwood  $Sh_0$  qui en dépend.

Comme illustré à la figure 4.6, l'oscillation de pression dans le moteur atteint un cycle limite, correspondant à un point fixe où pertes et sources thermoacoustiques s'équilibrent pour une certaine amplitude de pression acoustique  $\hat{\eta}$  et une certaine fréquence  $f$ . Les oscillations de pression acoustique se stabilisent autour d'une fréquence  $f \approx 70.5$  Hz, proche de la fréquence du premier mode

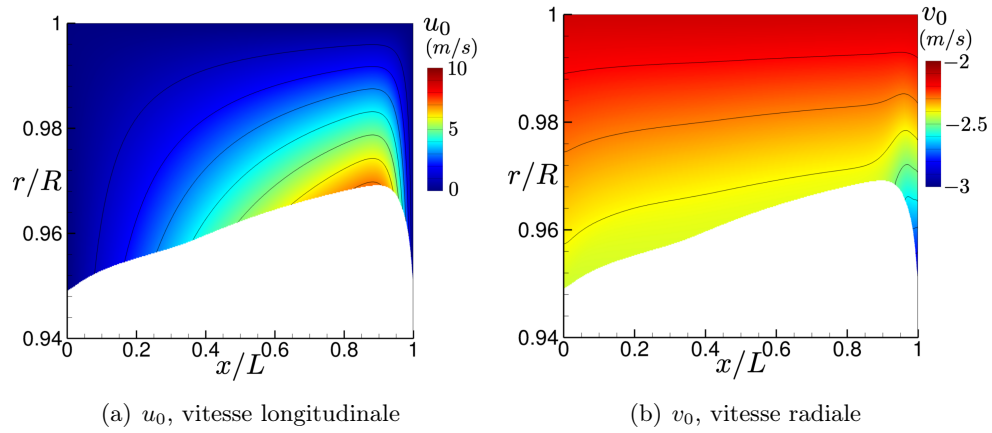


FIGURE 4.4 – Champ de vitesse moyen du gaz dans la zone de combustion

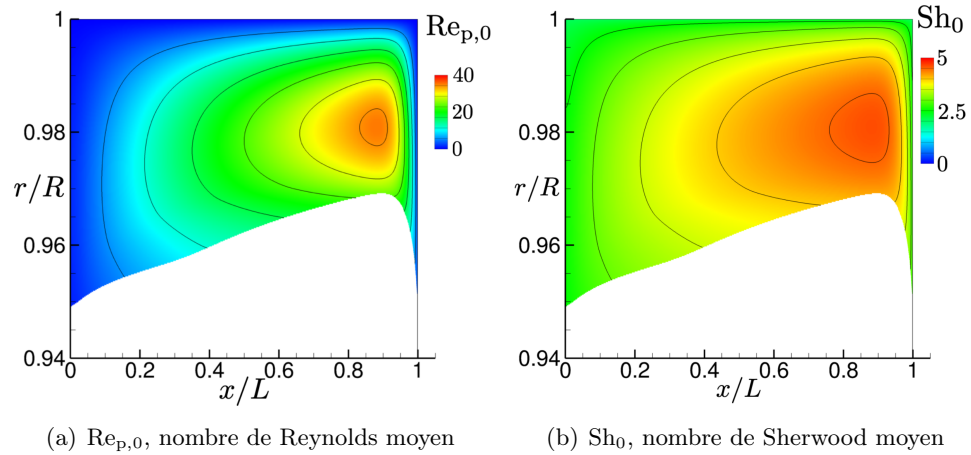
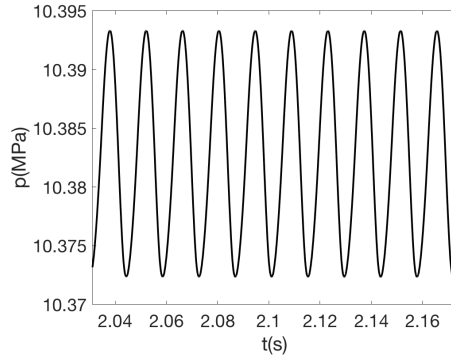


FIGURE 4.5 – Champs moyen des nombres de Reynolds particulaire et de Sherwood dans la zone de combustion

acoustique  $f_{1L} = a_0/(2L) = 76$  Hz ( $a_0$  la vitesse du son et  $L$  la longueur de la chambre), et à une amplitude  $\hat{\eta} = 10.5$  kPa, pour une pression moyenne dans la chambre égale à  $p_0 = 10.38$  MPa.

Le comportement du dégagement de chaleur induit par la combustion de l’alu-



**FIGURE 4.6** – *Signal de pression au fond avant ( $x = 0.025$  m,  $r = 0.25$  m) pour la simulation de référence*

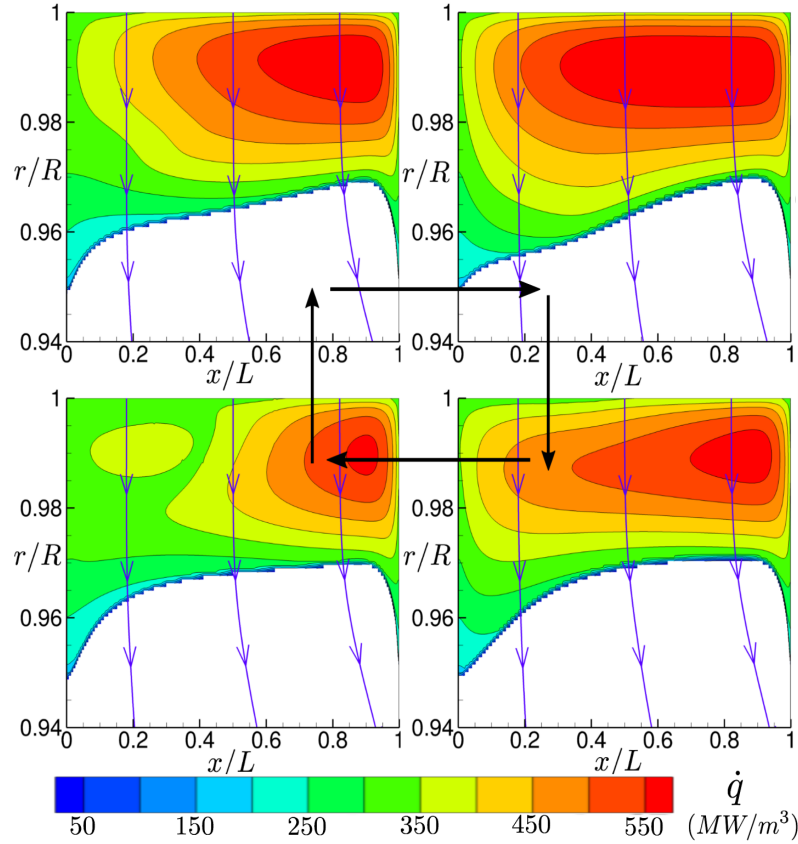
minium, au cours d’une période acoustique, est illustré à la figure 4.7.

La dynamique du taux de dégagement de chaleur est ici couplée au premier mode longitudinal acoustique. Les lignes de courant de la phase particulière, à la figure 4.7, exhibent une trajectoire quasi-1D dans la zone de combustion de l’aluminium, normale à la paroi du propergol solide.

Proche du fond arrière du moteur entre  $0.5 \leq x/L \leq 1$ , le taux de dégagement de chaleur volumique  $\dot{q}$  est plus élevé et l’épaisseur de la zone de combustion est plus fine qu’au fond avant, car l’écoulement est plus rapide (voir figure 4.4) et les effets de convection sont alors plus importants (figure 4.5). Ces phénomènes de convection étirent davantage les flammes autour des gouttes et donc accélèrent le processus de combustion et d’évaporation des gouttes<sup>1</sup> (comme illustré à la figure 4.8).

Des fluctuations longitudinales du taux de dégagement de chaleur volumique  $\dot{q}$  peuvent aussi être clairement identifiées dans le volume de la zone en combustion. Cette contribution est associée à la réponse des flammes individuelles entourant les gouttes. Ce mécanisme est étudié en détail au chapitre 7 et décrit

1. Le taux de dégagement de chaleur propre à chaque goutte est la directe conséquence de la surface de flamme (comme expliqué au chapitre 2, dans la section 2.3). On rappelle que l’on suppose que l’évaporation contrôle la dynamique de flamme. Si la flamme est étirée par l’écoulement, le taux de dégagement de chaleur augmente par l’intermédiaire du nombre de Sherwood.



**FIGURE 4.7** – Distribution du taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}$  dans la chambre cylindrique du MPS à quatre instants du cycle limite de l'instabilité thermoacoustique induite par la combustion des gouttes d'aluminium. Quelques lignes de courant de la phase particulaire sont tracés en superposition. Zoom sur la zone de combustion des gouttes d'aluminium (en rouge figure 4.3). La coordonnée radiale a été étirée

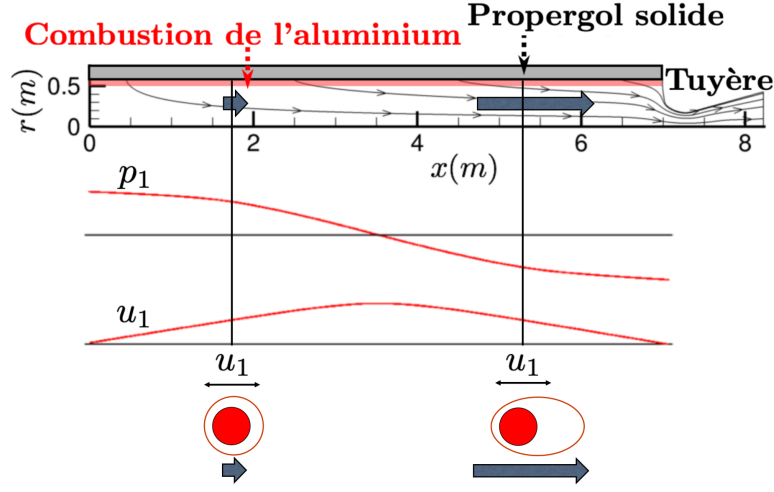
par Gallier, Sibe, and Orlandi (2011). De plus, un mouvement de battement de la frontière entre la zone réactive (illustré en couleur sur la figure 4.7) et la zone inerte (en blanc sur la figure 4.7) est remarqué. Ce mouvement prend place essentiellement dans la direction radiale, alors que le mode acoustique est longitudinal.

On identifie la moyenne temporelle des grandeurs physiques par l'indice 0 et leur fluctuations par l'indice 1. Elles sont définies telles que :

$$X = X_0 + X_1 \quad X_0 = \frac{1}{T} \int_T X dt \quad (4.15)$$

avec  $T$  la période d'oscillation de la fluctuation de la variable  $X$ , soit  $T = 1/f$ , où  $f$  est la fréquence d'excitation. Pour un signal de période  $T$ , la transformée





**FIGURE 4.8** – Effet de l'écoulement sur la combustion des gouttes : Asymétrie de l'écoulement moyen entre fond avant et fond arrière. Le champ acoustique est représenté pour un mode 1L fermé-fermé

de Fourier de la fluctuation s'écrit :

$$\hat{X} = \int_T X \exp(-i\omega t) dt \quad \omega = 2\pi f \quad (4.16)$$

où  $\hat{\cdot}$  correspond à la fluctuation dans l'espace de Fourier et la transformée inverse est définie par (pour un signal harmonique) :

$$X_1 = \mathcal{R}_e \left( \hat{X} \exp(i\omega t) \right) \quad (4.17)$$

L'instabilité déclenchée par la combustion de l'aluminium est une instabilité thermoacoustique. Le système est instable lorsque le critère de Rayleigh est vérifié (Durox et al. (2009)) :

$$\underbrace{\frac{\gamma - 1}{\gamma p_0 T} \int_V \int_T p_1 \dot{q}_1 dt dV}_{\text{Source}} > \underbrace{\int_S \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathcal{D} dV}_{\text{Pertes acoustiques}} \quad (4.18)$$

avec  $S$  la surface frontière du volume  $V$  de la chambre,  $p_1$  et  $\dot{q}_1$  les fluctuations de pression et du taux de dégagement de chaleur associées à la combustion des gouttes d'aluminium,  $p_0$  la pression moyenne,  $\mathbf{F}_a$  les flux d'énergie acoustique au niveau des frontières du moteur et  $\mathcal{D}$  les dissipations volumiques d'énergie acoustique, moyennés sur la période acoustique  $T$ . Pour caractériser comment la combustion de l'aluminium contribue à l'instabilité thermoacoustique, la figure 4.9 présente la distribution de l'indice de Rayleigh local  $\mathcal{S}$  dans la zone de

combustion des gouttes d'aluminium :

$$\mathcal{S} = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0 T} \int_T p_1 \dot{q}_1 dt \quad (4.19)$$

avec  $T$  la période acoustique ( $T = 1/f$ ),  $\gamma$  le rapport des capacités calorifiques du gaz,  $p_0$  la pression moyenne,  $p_1$  les fluctuations de pression et  $\dot{q}_1$  les fluctuations de dégagement de chaleur. Dans cette figure, on identifie que le fond avant entre  $0 \leq x \leq 0.5$  déstabilise le système ( $\mathcal{S} > 0$ ), alors que le fond arrière  $0.5 \leq x \leq 1$  stabilise le moteur ( $\mathcal{S} < 0$ ). L'intégrale volumique  $\int_V \mathcal{S} dV > 0$  est positive et conduit à une instabilité.

L'écoulement moyen s'accélère le long de la chambre par l'injection de masse le long de la surface du propergol solide (voir figure 4.4). L'effet de l'asymétrie de l'écoulement moyen entre fond avant et fond arrière sur la combustion est représenté par les deux gouttes avec une flamme plus ou moins étirée dans la figure 4.8.

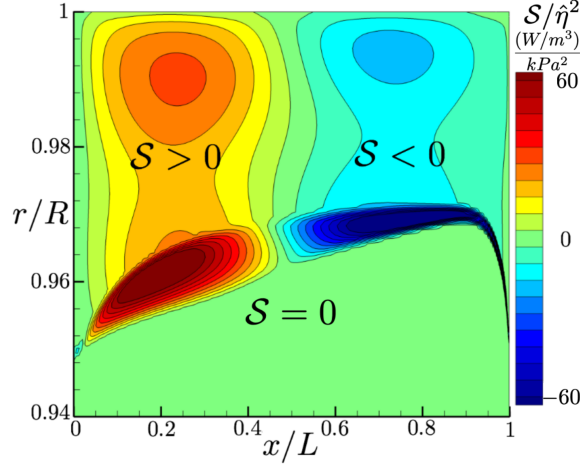
Par contre, le champ acoustique, illustré à la même figure 4.8, est symétrique en module car il s'agit du premier mode longitudinal de type demi-onde qui est excité. Par exemple, entre les positions  $x/L = 1/4$  et  $x/L = 3/4$ , les fluctuations de vitesse  $u_1$  sont en phase à même amplitude et les fluctuations de pression  $p_1$  sont en opposition de phase à même amplitude. Relativement au taux de dégagement de chaleur moyen, les fluctuations induites par l'acoustique du taux de dégagement de chaleur sont donc plus importantes au fond avant qu'au fond arrière.

L'asymétrie des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}_1$  est donc liée à l'accélération de l'écoulement dans la chambre. L'opposition de phase sur les fluctuations de pression  $p_1$  entre le fond avant et le fond arrière du moteur se traduit par un changement de signe de l'indice de Rayleigh local  $\mathcal{S}$ . En particulier, le fond avant déstabilise ( $\mathcal{S} > 0$ ) et le fond arrière stabilise ( $\mathcal{S} < 0$ ) les perturbations acoustiques. Par l'asymétrie des fluctuations du taux de dégagement de chaleur, on a alors un fond avant plus déstabilisant que le fond arrière ne stabilise, c'est-à-dire que le couplage combustion acoustique est une source ( $\int_V \mathcal{S} dV > 0$ ).

Dans la figure 4.9, on peut également définir deux zones, en fonction du niveau des fluctuations. La première est une zone en fin de combustion des gouttes, à la frontière du nuage de gouttes réactives. La seconde est une zone dans le volume du nuage de gouttes. Ces deux zones seront référencées comme "contribution frontière" et "contribution volume" à la source de l'instabilité dans la suite du manuscrit. Ces niveaux de  $\mathcal{S}$  sont liés à la dynamique du nuage de gouttes observée précédemment à la figure 4.7. Le nuage présente un mouvement de sa

frontière et des fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans le volume.

La figure 4.10 illustre, à un quart de la chambre ( $x/L = 1/4$ ), le module des



**FIGURE 4.9** – Distribution de l'indice de Rayleigh local normalisé par le niveau de l'amplitude des fluctuations de pression au carré  $S/\hat{\eta}^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma p_0 T \hat{\eta}^2} \int_T p_1 \dot{q}_1 dt$  dans la zone de combustion de l'aluminium

fluctuations du taux de dégagement  $\hat{q}$  de chaleur relatif au taux de dégagement de chaleur moyenné sur la période acoustique  $\dot{q}_0$  et le module des fluctuations de vitesse du gaz  $\hat{u}$  relatif à une vitesse moyenne :

$$-\frac{|\delta\mathbf{u}_{\mathbf{p},0}|^2}{\delta u_{p,0}}, \quad \text{avec} \quad \delta\mathbf{u}_{\mathbf{p},0} = \underbrace{(u_{p,0} - u_0)}_{\delta u_{p,0}} \mathbf{e}_x + \underbrace{(v_{p,0} - v_0)}_{\delta v_{p,0}} \mathbf{e}_r \quad (4.20)$$

où  $\delta u_{p,0}$  est la vitesse des particules relative au gaz dans la direction longitudinale,  $\delta\mathbf{u}_{\mathbf{p},0}$  le vecteur vitesse des particules relatif au gaz. Cette vitesse moyenne intervient dans le modèle analytique de Gallier and Godfroy (2009) (voir chapitre 7) :

$$\frac{\hat{q}}{\dot{q}_0} = \frac{\text{Sh}_0 - 2\omega\tau_{d,0}(i + \omega\tau_{d,0})}{2\text{Sh}_0(1 + \omega^2\tau_{d,0}^2)} \left( -\frac{\delta u_{p,0}}{|\delta\mathbf{u}_{\mathbf{p},0}|^2} \right) \hat{u} \quad (4.21)$$

où  $\hat{u}$  sont les fluctuations longitudinales de vitesse du gaz dans l'espace de Fourier et on suppose que :

$$|\delta\mathbf{u}_{\mathbf{p},0}| \approx |\delta\mathbf{u}_{\mathbf{p}}|_0 \quad (4.22)$$

avec  $\text{Sh}_0$  le nombre de Sherwood moyen,  $\omega = 2\pi f$  la fréquence angulaire,  $\tau_{d,0}$  le temps caractéristique de trainée moyen. Cette dernière simplification n'est,

*a priori*, valide seulement dans le cas de petites fluctuations. Le modèle analytique Eq. (4.21) sera comparé aux résultats de simulation au chapitre 7.

La figure 4.10 montre des fluctuations de vitesse de gaz, en rouge, qui varient

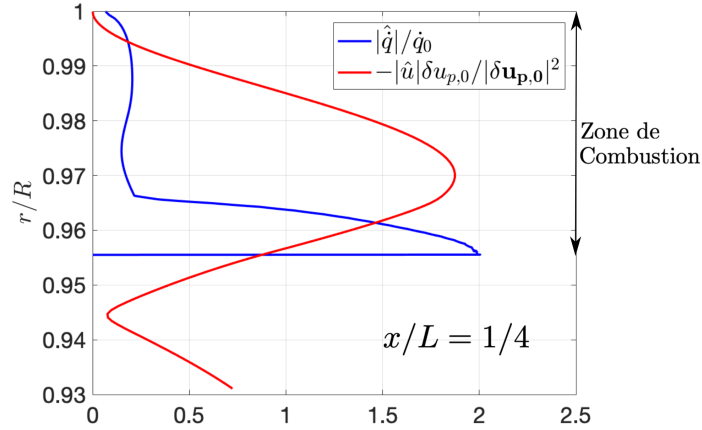


FIGURE 4.10 – Fluctuations du taux de dégagement de chaleur et couche limite acoustique à un quart de la chambre  $x/L = 1/4$

dans la zone en combustion à un quart de la chambre. Ce comportement est lié à la couche limite acoustique. Les fluctuations du taux de dégagement chaleur, en bleu, montrent deux zones distinctes : une zone  $0.965 \leq r/R \leq 1$  de niveaux modérés par rapport au champ moyen et une zone  $0.955 \leq r/R \leq 0.965$  de niveaux de fluctuations supérieurs au champ moyen en fin de zone de combustion (dynamique localement non-linéaire). Ces deux zones correspondent aux contributions volume et frontière de la figure 4.9. Le maximum des fluctuations de vitesse se situe au milieu de la zone en combustion.

Pour modéliser les fluctuations du taux de dégagement de chaleur et ainsi la source de l'instabilité, il faut :

- Prendre en compte la couche limite acoustique
- Distinguer deux zones (volume et frontière)
- Considérer la non-linéarité locale des fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans la contribution associée à la dynamique de la frontière

Le taux de croissance de l'instabilité donne également des indications sur la dynamique globale du système. Après identification des pertes acoustiques, il est également possible d'associer un taux de croissance propre à la source thermoacoustique. En utilisant un bilan d'énergie acoustique comme montré

au chapitre 2, on peut définir le taux de croissance de l'instabilité :

$$\alpha = \alpha_{ITHAC} + \alpha_l \quad (4.23)$$

où  $\alpha_{ITHAC}$  identifie le terme source de l'instabilité thermoacoustique et  $\alpha_l$  les termes associés aux pertes acoustiques. Le système est linéairement instable si  $\alpha > 0$ , soit :

$$\alpha_{ITHAC} > -\alpha_l \quad (4.24)$$

Lorsque le système se déstabilise, il finit dans la plupart des cas par converger vers un point fixe, un cycle limite à une certaine amplitude de pression acoustique  $\hat{\eta}$  (pour laquelle  $\alpha = 0$ ). Cette convergence vers un cycle limite résulte des non-linéarités des phénomènes qui saturent lorsque l'amplitude des oscillations augmente.

Le taux de croissance  $\alpha_{ITHAC}$  ne peut donc pas être directement déterminé du cycle limite observé dans la simulation.

Nous utilisons alors la méthode suivante pour un calcul instable. Une fois le cycle limite atteint, si la source  $\mathcal{S}$  est annulée, l'amplitude de pression décroît avec un taux  $\alpha_l$ , correspondant aux pertes acoustiques. Pour y parvenir, il faut mettre à zéro les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}_1$  qui sont à l'origine de la source. Le taux de dégagement de chaleur issu des gouttes dépend directement du nombre de Sherwood qui caractérise l'impact de la convection sur le taux d'évaporation des gouttes (chapitre 3) :

$$\dot{q} \propto \text{Sh} \quad (4.25)$$

Gallier et al. (2011) précise que la réponse de la combustion à l'acoustique est contrôlée par la convection, c'est-à-dire par les fluctuations du nombre de Sherwood. Dans l'approche quasi-stationnaire développée dans ce travail, les fluctuations du nombre de Sherwood  $\text{Sh}_1$  dépendent des fluctuations du nombre de Reynolds particulaire  $\text{Re}_{p,1}$  (corrélation de Ranz and Marshall (1952)). Pour mettre à zéro les fluctuations du taux de dégagement de chaleur associées aux perturbations acoustiques, on impose au nombre de Reynolds particulaire une valeur constante qui est prise en moyennant les résultats obtenus sur une période du cycle limite :

$$\text{Re}_p = \text{Re}_{p,0} \quad \text{Re}_{p,1} = 0 \quad (4.26)$$

Le résultat de cette procédure est illustré à la figure 4.11. Pour les instants  $t \leq 2$  s, le système oscille au cycle limite. A  $t = 2$  s, on supprime les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}$ , en fixant le nombre de Reynolds  $\text{Re}_p = \text{Re}_{p,0}$

dans les simulations. Le niveau des oscillations de pression dans les MPS chute alors.

Une fois que le niveau des fluctuations de pression a atteint une valeur négligeable, les fluctuations du nombre de Reynolds particulaire sont réactivées dans les simulations. Le système libre se déstabilise de nouveau avec un taux de croissance  $\alpha = \alpha_{ITHAC} + \alpha_l$ . On prend soin de mesurer les taux de croissance à des amplitudes faibles où la croissance et la décroissance des oscillations sont exponentielles (donc dans le domaine linéaire). Par la différence des deux taux de croissance mesurés, on peut en déduire le taux de croissance associé à la source thermoacoustique  $\alpha_{ITHAC}$ .

Cette procédure permet également de confirmer que l'instabilité observée est bien induite par la combustion de l'aluminium couplée à l'acoustique du moteur. On appellera cette procédure méthode du nombre Reynolds particulaire moyenné (méthode RPM).

Pour le calcul de référence instable illustré figure 4.11, on trouve :

$$\alpha_{ITHAC} = 15 \text{ s}^{-1} \quad \alpha_l = -14 \text{ s}^{-1} \quad (4.27)$$

La marge d'erreur d'évaluation du taux de croissance numérique par cette méthode est jugée de l'ordre de  $1 \text{ s}^{-1}$ .

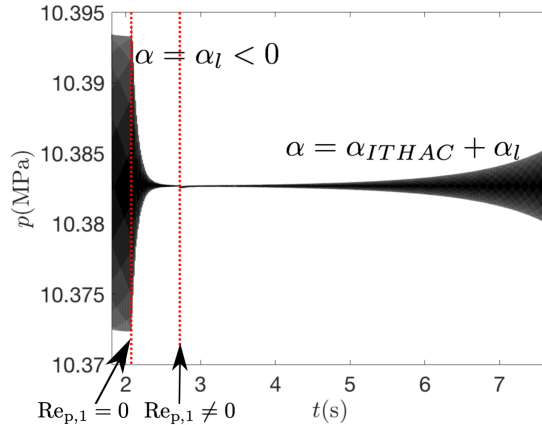


FIGURE 4.11 – Taux de croissance, obtenus par la méthode du nombre de Reynolds particulaire moyenné (méthode RPM)

Dans ce chapitre, on a étudié, par une simulation instable, la dynamique du taux de dégagement de chaleur, la croissance de l'instabilité et son cycle limite. On a montré que le premier mode longitudinal est excité avec un faible glissement fréquentiel. Le taux de dégagement de chaleur moyen est plus fort au fond-arrière qu'au fond avant, à cause de l'accélération de l'écoulement. Sachant que le fond avant est déstabilisant et le fond arrière stabilisant, cette

accélération de l'écoulement induit un couplage thermoacoustique global positif. Ce couplage constitue la source de l'instabilité. Enfin, deux contributions à la source ont pu être identifiées. La première est une contribution volume associée aux fluctuations du taux d'évaporation des gouttes individuelles, contrôlées par le processus de convection autour des gouttes. La seconde est une contribution frontière correspondant au mouvement de la frontière du nuage réactif.

La suite des travaux consiste à essayer de comprendre d'avantage les origines des contributions volume et frontière de la source. L'objectif est, en particulier, de caractériser et de modéliser ces contributions en fonction du modèle de combustion choisi.

## Chapitre 5

# Effets du modèle de combustion sur l'ITHAC

*L'objectif de ce chapitre est d'identifier, par la simulation numérique, les non-linéarités à l'origine des cycles limites observées pour le modèle de combustion de référence. Les contributions aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur associées à la dynamique des gouttes dans le volume de combustion et au niveau de la frontière sont examinées pour différents paramètres du modèle. Les effets d'une variation de l'amplitude de forçage acoustique, d'une modification du diamètre de fin de vie de la goutte réactive et d'un changement de modèle de combustion sont en particulier analysés.*

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, la simulation est utilisée pour réaliser une étude paramétrique. L'instabilité observée par simulation est induite par les fluctuations du taux de dégagement de chaleur, liées au modèle de combustion. La combustion de l'aluminium est encore mal connue et plusieurs modèles ont été présentés au chapitre 3. Les conditions limites, le maillage et les schémas numériques utilisés par les simulations et les modèles de combustion étudiés dans ce chapitre sont rappelés dans les deux sous-sections en suivant. Dans les sections 5.2–5.4, les simulations réalisées sont présentées et les résultats selon le modèle de combustion utilisé sont montrés. Cette étude a plusieurs objectifs : (i) mettre en évidence les non-linéarités de la réponse de la dynamique de la combustion des gouttes d'aluminium, (ii) observer l'effet du choix du diamètre de fin de combustion et (iii) caractériser la sensibilité des résultats au modèle de combustion choisi (voir chapitre 4).



### 5.1.1 Modèles et paramètres numériques

Les modélisations numériques et physiques utilisées pour l'étude paramétrique sont assez similaires au calcul introductif de l'instabilité, présentées au chapitre 4. Le maillage est composé de 171550 quadrilatères avec 600 points dans la direction axiale et 290 dans la direction radiale, avec un raffinement proche paroi, dans la zone de combustion de l'aluminium. La zone de battement de frontière a notamment été suffisamment raffinée pour bien intégrer l'impact du mouvement de la frontière sur l'instabilité. Les mailles les plus petites sont à la surface du propergol solide et sont de l'ordre de  $10^{-3}$  m.

La combustion du propergol solide est modélisée par une condition d'injection à débit massique et uniforme. Une seule classe de gouttes réactives est injectée à l'équilibre hydrodynamique avec le gaz ( $v_{p,i} = v_{g,i} = -v_i$ , avec  $v_i > 0$ ). L'injection à l'équilibre se justifie par les processus initiaux d'agglomération et de fusion des particules (chapitre 3) et d'allumage des gouttes liquides qui ne sont pas considérés dans la simulation. On suppose en effet que les agglomérats solides accélèrent rapidement en quittant la surface et que les gouttes résultant de la fusion ont alors atteint la vitesse d'équilibre avant de rentrer en combustion.

La sortie du gaz et des particules par la tuyère est simplement modélisée par une condition limite de pression (fixée à la pression atmosphérique). Cette modélisation est suffisante car la tuyère est amorcée et l'écoulement y est supersonique.

Les parois de la tuyère sont modélisées par des conditions de non-glissement pour les deux phases (gaz et particules). Pour les calculs stables, à la condition limite du fond avant, un faible flux gazeux fluctuant est imposé, pour effectuer un forçage acoustique. Le flux moyen est nul et la température injectée est égale à la température de la chambre (après combustion). L'amplitude des fluctuations de flux impose l'amplitude  $\eta$  de la pression acoustique fluctuante  $p_1$ , définie comme :

$$p_1(x, t) = \underbrace{\hat{\eta} \cos(\omega t)}_{\eta} \psi(x) \quad (5.1)$$

où  $\eta$  est l'amplitude de pression,  $\hat{\eta}$  est le niveau des fluctuations de pression,  $\psi$  est le mode de pression. Le mode de pression  $\psi$  est pour une chambre fermée-fermée :

$$\psi = \cos(kx), \quad k = \omega/a_0 \quad (5.2)$$

avec  $a_0$  la vitesse du son,  $k$  la longueur d'onde et  $\omega = 2\pi f$  la fréquence angulaire. Pour les calculs instables, le forçage est inutile car l'acoustique s'auto-

entretient au cycle limite. La condition limite au fond avant est une condition de non-glissement pour le gaz et les particules.

Les propriétés thermodynamiques du gaz et de la phase particulaire, pour le calcul du chapitre 3 sont définies dans le tableau 5.1, où  $\mu$  est la viscosité dynamique du gaz, Pr le nombre de Prandtl,  $D_i$  le diamètre d'injection,  $D_r$  le diamètre résiduel,  $(\rho v)_i$  le débit massique injecté par la combustion du propergol (mélange gaz-particules),  $\Delta H_r$  l'enthalpie de réaction,  $\kappa_i$  la fraction massique de goutte d'aluminium injectée,  $L_v$  la chaleur latente de vaporisation de l'aluminium,  $T_{g,i}$  la température de gaz injecté,  $T_{sat}$  la température de saturation de la goutte d'aluminium,  $C_{P,g}$  la capacité calorifique à pression constante de la phase gazeuse,  $C_{P,p}$  la capacité calorifique à pression constante de la phase particulaire,  $\gamma = C_{P,g}/C_{V,g}$  le rapport des capacités calorifiques du gaz à pression et à volume constants et  $\rho_p$  la masse volumique des gouttes. Les

**TABLE 5.1** – Propriétés du gaz et des gouttes d'aluminium. Les variables en rouge changent en fonction du diamètre résiduel  $D_r$ .

$\mu$	$9.1 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$	Pr	0.4
$D_i$	120 $\mu\text{m}$	$D_r$	60 $\mu\text{m}$
$(\rho v)_i$	24.6 $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$	$\Delta H_r$	$9.53 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$
$\kappa_i$	6%	$L_v$	$10.8 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$
$T_{g,i}$	3450 K	$T_{sat}$	2791 K
$C_{P,g}$	2000 $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$C_{P,p}$	1177 $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$\gamma$	1.16	$\rho_p$	2000 $\text{kg.m}^{-3}$

variables en rouge, dans le tableau 5.1, sont ajustées de façon à conserver les conditions de chambre identiques quel que soit le diamètre d'arrêt  $D_r$  (pression et température). Les autres sont invariantes. L'étude paramétrique numérique est détaillée dans la sous-section suivante.

### 5.1.2 Modèles de combustion étudiés : ASSM et Lobe

Le modèle de combustion de base à l'étude est le modèle ASSM rappelé ci-dessous :

$$\dot{m} = \pi D \frac{\mu}{\text{Pr}} \ln(1 + \text{B}) \text{Sh} \mathcal{H}(D - D_r) \quad (5.3)$$

avec  $D$  le diamètre des gouttes,  $\mu$  la viscosité du gaz, Pr le nombre de Prandtl, B le nombre de Spalding, Sh le nombre de Sherwood,  $\mathcal{H}$  la fonction Heaviside et  $D_r$  le diamètre résiduel de goutte inerte. Le nombre de Spalding B est défini

par :

$$B = \frac{C_{P,g}(T_g - T_p) + \Delta H_r}{L_v} \quad (5.4)$$

avec  $C_{P,g}$  la capacité calorifique du gaz,  $T_g$  la température du gaz,  $T_p$  la température de la particule qui est constante et égale à la température de saturation  $T_{sat}$ ,  $\Delta H_r$  l'enthalpie de réaction et  $L_v$  la chaleur latente de vaporisation. Le nombre de Sherwood  $Sh$  suit la corrélation de Ranz-Marshall ([Ranz and Marshall \(1952\)](#)) :

$$Sh = 2 + 0.6Re_p^{1/2}Pr^{1/3} \quad (5.5)$$

où le nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  s'écrit :

$$Re_p = \frac{\rho_g |\delta \mathbf{u}_p| D}{\mu} \quad (5.6)$$

avec  $\rho_g$  la masse volumique du gaz et  $\delta \mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p - \mathbf{u}$  la vitesse de la particule relative au gaz. Le diamètre particulaire  $D$  suit la loi en  $D^2$  suivante :

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{4\mu \ln(1+B)Sh}{Pr\rho_p} \mathcal{H}(D - D_r) \quad (5.7)$$

La première étude paramétrique concerne l'effet de l'amplitude de la pression acoustique sur la source thermoacoustique et pour décrire les non-linéarités que l'on peut observer.

Dans un second temps, on étudie l'effet du diamètre résiduel  $D_r$  des gouttes, qui fixe la taille des résidus, le taux de dégagement de chaleur en fin de vie et le temps de combustion des gouttes. Lorsqu'on diminue  $D_r$ , on consomme davantage de masse d'aluminium et libère davantage d'énergie dans le moteur. Pour conserver les mêmes conditions de température et de pression dans la chambre et les mêmes propriétés thermodynamiques, l'énergie injectée par la condition limite doit être diminuée, en diminuant la température du gaz injecté  $T_{g,i}$  et en modifiant les propriétés thermodynamiques du gaz ( $\gamma$ ,  $C_{v,g}$ ). Ces grandeurs sont évaluées, *a priori*, par un outil `0D` d'ArianeGroup par des équations de conservation.

A la fin de ce chapitre, on examine également le modèle de combustion avec lobe (chapitre 3). Pour simplifier le problème, on suppose que les masses volumiques de l'aluminium ou de l'alumine sont égales (à ces températures).

$$\dot{m} = \chi \pi (D - h) \frac{\mu}{Pr} \ln(1+B) Sh (1 - \beta^3) \quad (5.8)$$

avec  $\chi$  un paramètre de contrôle qui est ajusté pour modifier le temps de combustion et  $D$ , le diamètre particulaire, qui suit la loi suivante :

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{4\chi\mu}{\rho_p\text{Pr}} \ln(1+B)\text{Sh}\left(1 - \frac{h}{D}\right)(1 - \beta^3) \quad (5.9)$$

où  $\beta$  est le rapport du diamètre d'injection et du diamètre résiduel et  $h$  la hauteur du lobe, corrélée au diamètre  $D$  par l'équation suivante :

$$\beta = \frac{D_r}{D_i}, \quad h^3 - \frac{3}{2}Dh^2 + \frac{D_i^3 - D^3}{2} \frac{\beta^3}{1 - \beta^3} = 0 \quad (5.10)$$

L'équation pour la hauteur de lobe  $h$  est résolue numériquement par la méthode de Newton.

## 5.2 Impact de l'amplitude de forçage : Non-linéarités de combustion

Dans cette section, on analyse la source de l'instabilité à différentes amplitudes de forçage pour comprendre son comportement. Cette étude est faite en pulsant un calcul stable sans forçage.

Le calcul instable de référence, décrit au chapitre 4, est réalisé avec des gouttes de diamètres d'injection et résiduel :  $D_i = 120 \mu\text{m}$  et  $D_r = 60 \mu\text{m}$ . Au chapitre 7, il est démontré que la configuration avec  $D_i = 120 \mu\text{m}$  et  $D_r = 50 \mu\text{m}$ , proche de la configuration précédente, est stable. La première étude paramétrique réalisée concerne la dynamique de la source thermoacoustique pour différentes amplitudes de forçage pour un calcul stable avec  $D_i = 120 \mu\text{m}$  et  $D_r = 50 \mu\text{m}$ . Cette étude peut ainsi permettre de comprendre d'avantage le calcul instable de référence.

La fréquence du cycle limite du cas instable  $D_r = 60 \mu\text{m}$  est  $f = 70.5 \text{ Hz}$ . On suppose que le cas stable pour  $D_i = 120 \mu\text{m}$  et  $D_r = 50 \mu\text{m}$  a un glissement fréquentiel du même ordre de grandeur par rapport au mode acoustique pur que le cas instable obtenu pour  $D_i = 120 \mu\text{m}$  et  $D_r = 60 \mu\text{m}$ . La fréquence de forçage acoustique est donc fixée à celle du cas instable, soit  $f = 70.5 \text{ Hz}$ .

Au fond avant, la pression moyenne est de l'ordre de 103 bars dans les simulations réalisées (voir figure 4.6). Les niveaux de forçage acoustique  $\hat{\eta}$  examinés sont : 4200 Pa (soit relativement à la pression moyenne  $\hat{\eta}/p_0 \sim 4.08 \times 10^{-4}$ ), 9100 Pa ( $\sim 8.83 \times 10^{-4}$ ), 10000 Pa ( $\sim 9.71 \times 10^{-4}$ ), 11750 Pa ( $\sim 1.14 \times 10^{-3}$ ), 12500 Pa ( $\sim 1.21 \times 10^{-3}$ ), 13200 Pa ( $\sim 1.28 \times 10^{-3}$ ), 14100 Pa ( $\sim 1.37 \times 10^{-3}$ ),

35000 Pa ( $\sim 3.40 \times 10^{-3}$ ), 50000 Pa ( $\sim 4.85 \times 10^{-3}$ ), 188000 Pa ( $\sim 1.83 \times 10^{-2}$ ), 384000 Pa ( $\sim 3.73 \times 10^{-2}$ ).

Le cas de calcul pour  $\hat{\eta} = 4200$  Pa est utilisé comme référence pour valider un modèle linéaire pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  (chapitre 7). De plus, on vérifie au dernier chapitre du manuscrit (chapitre 9), par l'outil non-linéaire d'ordre réduit, que cette amplitude se situe dans le domaine linéaire de la réponse de la dynamique de la combustion. On en conclut donc que pour cette amplitude la réponse de la combustion est linéaire. Les autres amplitudes peuvent présenter des non-linéarités.

On rappelle que l'indice de Rayleigh local est donné par (chapitre 2) :

$$\mathcal{S} = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0 T} \int_T p_1 \dot{q}_1 dt \quad (5.11)$$

Ce terme source apparaît dans le bilan d'énergie acoustique (Durox et al. (2009)) :

$$\frac{\partial E_a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_a = \mathcal{S} + \mathcal{D} \quad (5.12)$$

où  $\mathbf{F}_a = p_1 \mathbf{u}_1$  est le flux d'énergie acoustique et  $\mathcal{D}$  la dissipation d'énergie acoustique  $E_a$ . En régime linéaire, dans le bilan d'énergie acoustique, chaque terme dépend également quadratiquement de  $\hat{\eta}$ . En supposant une réponse linéaire de la combustion au forçage acoustique, on trouve :

$$\mathcal{S} \propto \hat{\eta}^2 \quad (5.13)$$

L'indice de Rayleigh global, qui caractérise la production d'énergie acoustique, s'exprime :

$$\int_V \mathcal{S} dV = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0 T} \int_V \int_T p_1 \dot{q}_1 dt dV \quad (5.14)$$

Il vient en régime linéaire :

$$\int_V \mathcal{S} dV \propto \hat{\eta}^2 \quad (5.15)$$

La quantité  $\int_V \mathcal{S} dV / \hat{\eta}^2$ , en régime linéaire, est donc constante en fonction du niveau du signal de pression  $\hat{\eta}$ .

La figure 5.1 montre, pour les différents niveaux de forçage  $\hat{\eta}$ , l'indice de Rayleigh global  $\int_V \mathcal{S} dV$  et l'indice normalisé par le niveau au carré  $\int_V \mathcal{S} dV / \hat{\eta}^2$  en fonction du niveau de forçage  $\hat{\eta}$ . La figure 5.2 montre les mêmes quantités seulement pour les niveaux faibles ( $\hat{\eta}/p_0 \in [4.08 \times 10^{-4}; 1.37 \times 10^{-4}]$ ), afin de

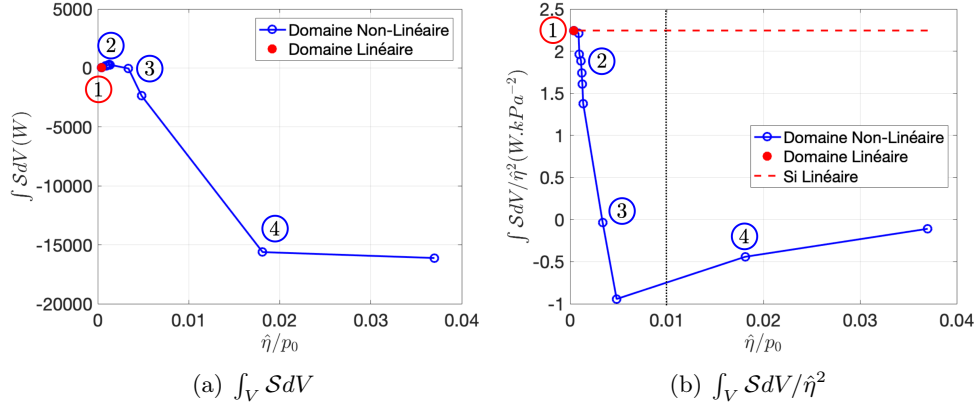


FIGURE 5.1 – Dépendance du critère de Rayleigh au niveau de l'amplitude de pression acoustique. Le point rouge correspond à une configuration linéaire, les points bleus sont des situations où la source présente des non-linéarités. La délimitation noire sur la figure 5.1(b) permet de distinguer deux sous-domaines non-linéaires

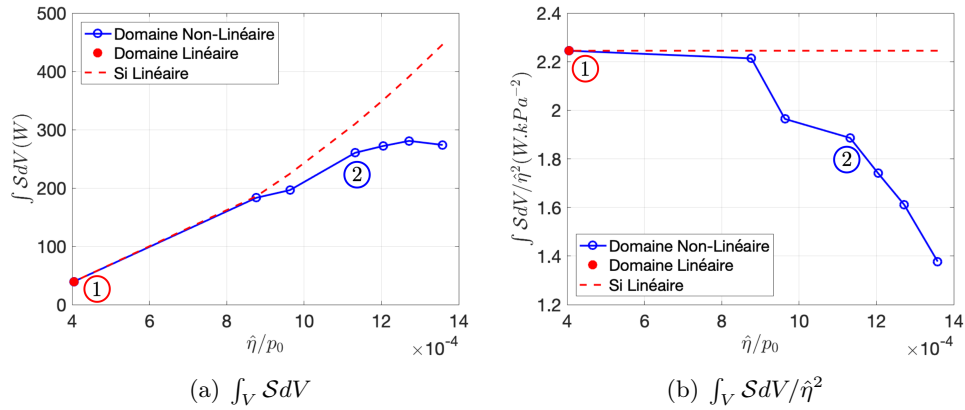


FIGURE 5.2 – Dépendance du critère de Rayleigh au niveau de l'amplitude de pression acoustique pour des amplitudes faiblement non-linéaires. Le point rouge correspond à une configuration linéaire, les points bleus sont des situations où la source présente des non-linéarités.

mieux mettre en évidence ce domaine. Sur l'ensemble de ces figures, le comportement de la source est représenté en bleu et les pointillés rouges correspondent à son comportement si elle est linéaire.

Dans les figures 5.1(a), 5.1(b), 5.2(a), 5.2(b), on définit 4 situations pour la suite de l'analyse. Le point ①, pour le niveau le plus faible ( $\hat{\eta}/p_0 = 4.08 \times 10^{-4}$ ), correspond à une réponse linéaire de la combustion. Le point ②, pour un niveau de fluctuations de pression  $1.14 \times 10^{-3}$ , est de l'ordre du niveau du cycle limite

du cas instable obtenu pour  $D_i = 120 \mu\text{m}$  et  $D_r = 60 \mu\text{m}$  (chapitre 4). Les points ③ et ④ correspondent respectivement à des niveaux de fluctuations de  $3.40 \times 10^{-3}$  et de  $1.83 \times 10^{-2}$  qui sont plus élevées que les niveaux atteints au cycle limite.

Aux figures 5.2(a) et 5.2(b), on observe qu'avec une augmentation du niveau de pression  $\hat{\eta}$ , la puissance acoustique de la source thermoacoustique  $\int_V \mathcal{S}dV$  s'écarte du régime linéaire (courbe rouge pointillée). Hormis le calcul réalisé avec un niveau de forçage de  $4.08 \times 10^{-4}$  (le point ①), toutes les autres situations montrent une réponse non-linéaire de la source thermoacoustique au forçage imposé. Le comportement de la source est donc non-linéaire pour des niveaux d'amplitudes inférieurs à celui du point ② ( $\hat{\eta}/p_0 = 1.14 \times 10^{-3}$ ).

Pour des amplitudes plus grandes, comme illustré à la figure 5.1(a), la source  $\int_V \mathcal{S}dV$  décroît (points ③ et ④).

On distingue également, sur la figure 5.1(b), deux comportements distincts dans le domaine non-linéaire, un premier sous-domaine non-linéaire où la source normalisée  $\int_V \mathcal{S}dV/\hat{\eta}^2$  décroît avec le niveau de l'amplitude  $\hat{\eta}$  et un second sous-domaine où la source  $\int_V \mathcal{S}dV/\hat{\eta}^2$  croît avec l'amplitude  $\hat{\eta}$  tout en se rapprochant de 0.

Selon Gallier and Godfroy (2009) et Gallier et al. (2011), le processus de convection contrôle l'instabilité et les effets de vitesse sont prépondérants. Le taux de dégagement de chaleur est proportionnel au nombre de Sherwood Sh qui dépend du nombre de Reynolds  $\text{Re}_p$  (Ranz and Marshall (1952)) :

$$\dot{q} \propto \text{Sh} \propto \text{Re}_p^{1/2} \propto (-\delta u_p)^{1/2} \quad (5.16)$$

avec  $\delta u_p = u_p - u$  la vitesse relative particulaire selon la direction longitudinale. De même pour le taux de dégagement de chaleur moyen  $\dot{q}_0$ , on a :

$$\dot{q}_0 \propto (-\delta u_{p,0})^{1/2} \quad (5.17)$$

L'indice 0 correspond au champ moyen et l'indice 1 aux fluctuations. Comme  $\delta u_p = \delta u_{p,0} + \delta u_{p,1}$ , les fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont donc proportionnelles à :

$$\dot{q}_1 = \dot{q} - \dot{q}_0 \propto (-\delta u_{p,0})^{1/2} (\sqrt{1 + \epsilon} - 1), \quad \text{où } \epsilon = \frac{\delta u_{p,1}}{\delta u_{p,0}} \quad (5.18)$$

Pour une modulation acoustique linéaire, les fluctuations de pression et de vitesses (gaz et particules) sont linéaires et les fluctuations de vitesses sont faibles devant le champ moyen :

$$\epsilon = \frac{\delta u_{p,1}}{\delta u_{p,0}} \ll 1 \quad \epsilon \propto \hat{\eta} \quad p_1 \propto \hat{\eta} \quad (5.19)$$

Comme l'acoustique est supposée linéaire, c'est la non-linéarité de la réponse du taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}_1$  qui est à l'origine de la non-linéarité de la source thermoacoustique. Vu que  $\epsilon \ll 1$ , il est possible de faire un développement limité de l'équation (5.18). En se limitant à l'ordre 3, il vient :

$$\dot{q}_1 \underset{\epsilon \ll 1}{\propto} (-\delta u_{p,0})^{1/2} \left( \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \frac{\epsilon^3}{16} \right) \quad (5.20)$$

En combinant les expressions Eqs. (5.19), (5.20) et (5.14), l'indice de Rayleigh global est proportionnel (pour un développement limité à l'ordre 3) à :

$$\int_V \mathcal{S}dV \propto \hat{\eta} \left( \hat{\eta} - \frac{\hat{\eta}^2}{4} + \frac{\hat{\eta}^3}{8} \right) = \hat{\eta}^2 - \frac{\hat{\eta}^3}{4} + \frac{\hat{\eta}^4}{8} \quad (5.21)$$

On rappelle pour un comportement linéaire, la source  $\int_V \mathcal{S}dV$  est quadratique et augmente avec l'amplitude  $\hat{\eta}$  :

$$\int_V \mathcal{S}dV \propto \hat{\eta}^2, \text{ si linéaire} \quad (5.22)$$

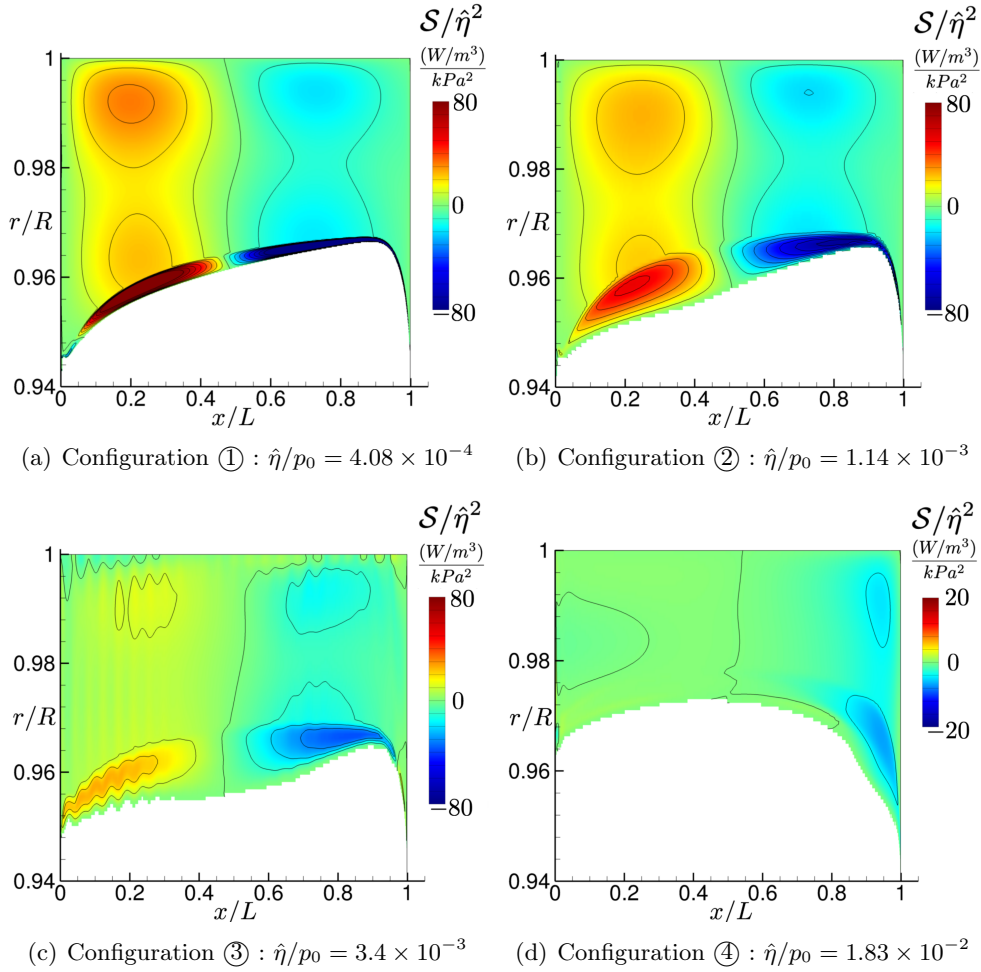
Le développement à l'ordre 3 (Eq. (5.21)) met en exergue des non-linéarités en  $\hat{\eta}^3$  et  $\hat{\eta}^4$ . Le terme  $-\hat{\eta}^3/4$  est de signe opposé au terme en  $\hat{\eta}^2$  qui est associé au régime linéaire. Il contribue donc à atténuer l'effet de la source thermoacoustique. C'est ce terme qui est lié au premier sous-domaine non-linéaire où  $\int_V \mathcal{S}dV/\hat{\eta}^2$  décroît avec le niveau  $\hat{\eta}$ . Le terme  $\hat{\eta}^4/8$  est de même signe que  $\hat{\eta}^2$  donc il contribue positivement à la source lorsque le niveau  $\hat{\eta}$  augmente. Ce terme d'ordre 4 est donc à l'origine du second sous-domaine en non-linéaire, à plus forte amplitude, où  $\int_V \mathcal{S}dV/\hat{\eta}^2$  croît.

Les non-linéarités de la réponse du taux de dégagement de chaleur amènent le système à saturation qui converge vers un cycle limite (premier sous-domaine, ②). Ces non-linéarités sont quadratiques (voir Eq. (5.20)).

Ce comportement non-linéaire pour des niveaux proches du cycle limite où la source  $\int_V \mathcal{S}dV$  s'écarte du régime linéaire permet de supposer que c'est elle qui est à l'origine de la convergence vers le cycle limite et que la non-linéarité des pertes peut être négligée. C'est l'hypothèse faite au chapitre 9.

Ces 4 situations (①, ②, ③, ④) sont illustrées à la figure 5.3, où l'indice de Rayleigh local  $\mathcal{S}/\hat{\eta}^2$ , normalisé par le niveau d'amplitude au carré, est tracé dans la chambre, zoomé sur la zone de combustion de l'aluminium et étiré dans la direction radiale. Dans cette figure 5.3, on peut observer la dynamique de la source pour les 4 niveaux de forçage.





**FIGURE 5.3** – Champ de l'indice de Rayleigh local  $\mathcal{S}$  normalisé par le niveau de l'amplitude des oscillations de pression au carré  $\hat{\eta}^2$  pour les 4 configurations choisies. Les images sont des zooms sur la zone de combustion et sont étirées dans la direction radiale

Pour la situation ①, les niveaux de  $\mathcal{S}/\hat{\eta}^2$  sont relativement modérés dans le volume du nuage réactif, en particulier, par rapport aux niveaux atteints par les fluctuations à la frontière. Cette frontière semble battre symétriquement autour de sa position sans fluctuation. Cette observation est retenue pour dériver un modèle analytique en régime linéaire au chapitre 7 et à l'Annexe C.

La situation ② montre une frontière qui bat avec une plus grande amplitude. On peut observer que cette frontière a un mouvement légèrement asymétrique, avec le battement qui s'affaïsse vers l'intérieur de la chambre entre le quart et la moitié de la chambre. Cette situation correspond à des niveaux d'amplitude

atteints au cycle limite de calculs instables (chapitre 4). Ce comportement atypique du battement de la frontière constitue donc un marqueur de non-linéarité de la source. Cette frontière est définie par une condition sur le diamètre des gouttes d'aluminium qui cessent de brûler. Son mouvement asymétrique est donc dû à des fluctuations de diamètre non-linéaires (Annexe C). On démontrera dans le chapitre 7 que les fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont corrélées aux fluctuations de diamètre. La présence de non-linéarités pour les fluctuations de diamètre induit donc des fluctuations du taux de dégagement de chaleur non-linéaires, permettant ainsi la convergence vers un cycle limite. On observe également que les niveaux de  $\mathcal{S}/\hat{\eta}^2$  sont plus faibles que pour la situation ① ce qui corrobore la décroissance de  $\int_V \mathcal{S}dV/\hat{\eta}^2$  en fonction du niveau du forçage  $\hat{\eta}$  (figure 5.2(b)).

La situation ③ présente des caractéristiques assez proches de la situation ② avec néanmoins une dégradation de la source, notamment en termes de niveaux atteints par l'indice de Rayleigh local normalisé  $\mathcal{S}/\hat{\eta}^2$ . Les situations ② et ③ se situent dans le premier sous-domaine non-linéaire lié, *a priori*, à une réponse quadratique du taux de dégagement de chaleur. La situation ③ est caractérisée par une source  $\int \mathcal{S}dV/\hat{\eta}^2$  moins intense que la situation ②. La diminution de la source  $\int \mathcal{S}dV/\hat{\eta}^2$  est alors liée directement à une diminution en module de chaque point de  $\mathcal{S}/\hat{\eta}^2$  dans la zone de combustion.

La situation ④ montre une plus forte dégradation du terme source avec des niveaux de  $\mathcal{S}/\hat{\eta}^2$  plus faibles encore que la situation ③.

On peut observer un autre phénomène non-linéaire, associé à la réduction de la zone de combustion qui est due à la réduction du temps de combustion des gouttes (Carvalho et al. (1997), Sujith (2005), Sujith et al. (2000)). En effet, le temps de combustion est proportionnel au nombre de Sherwood  $Sh$ , qui dépend de la racine carrée du nombre de Reynolds et donc de la vitesse relative :

$$t_c \propto Sh^{-1} \propto Re_p^{-1/2} \propto \delta u_p^{-1/2} \quad (5.23)$$

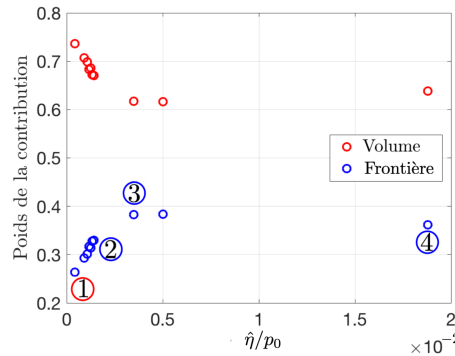
Le temps de combustion dépend donc non-linéairement de la vitesse selon l'inverse d'une corrélation en racine carrée. Pour des niveaux relativement importants de fluctuations de vitesse, le temps de combustion moyen est alors réduit. En effet, la situation ④ se situe dans le second sous-domaine, avec un terme cubique non négligeable de la réponse de la combustion de l'aluminium à l'amplitude de niveau  $\hat{\eta}$ , c'est-à-dire à une amplitude relativement grande. Comme le temps de combustion moyen est réduit, on constate que l'ensemble du champ moyen est également modifié à cette amplitude de forçage. Il y a donc plusieurs non-linéarités pour la situation ④ : (i) un terme cubique non négligeable de la réponse de la combustion à l'acoustique et (ii) une modification du champ

moyen.

La contribution frontière correspond à l'intégrale de  $\mathcal{S}$  sur la zone de battement de frontière. La contribution volume est l'intégrale de Rayleigh sur le volume de combustion sans la zone de battement. On cherche à caractériser la contribution volume et la contribution frontière en fonction du niveau de forçage. Pour y parvenir, on intègre la zone de battement (zone de hauts niveaux en fin de vie) sur 6 tranches radiale 1D (sur l'axe des  $x$ , de  $x = 1$  m à  $x = 6$  m, tous les mètres) et on fait la moyenne de ces tranches. On fait ensuite de même pour la zone volume. On peut alors en déduire des contributions, mesurées numériquement, de frontière (*b.c.* pour "boundary contribution") et de volume (*v.c.* pour "volume contribution") à la source :

$$\int_V \mathcal{S} dV = \int_{V_{v.c.}} \mathcal{S} dV + \int_{V_{b.c.}} \mathcal{S} dV \quad (5.24)$$

La figure 5.4 montre les poids respectifs des contributions volume  $\int_{V_{v.c.}} \mathcal{S} dV / \int_V \mathcal{S} dV$  et frontière  $\int_{V_{b.c.}} \mathcal{S} dV / \int_V \mathcal{S} dV$  pour différents niveaux d'amplitudes de forçage. On observe que la contribution de frontière augmente avec



**FIGURE 5.4** – Poids des contributions issues des fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans le volume et à la frontière du nuage de gouttes pour différents niveaux d'amplitude, évalués par intégration de l'indice de Rayleigh local  $\mathcal{S}$

le niveau de forçage (premier sous-domaine non-linéaire, terme quadratique) avant de décroître pour la situation ④ (deuxième sous-domaine non-linéaire, terme cubique non négligeable). Ceci est donc une autre manifestation des non-linéarités de la réponse de la dynamique de la combustion à l'excitation acoustique.

Dans cette sous-section, on a forcé une simulation stable à différent niveau de forçage acoustique et à même fréquence. Les non-linéarités de source de l'instabilité ont pu être identifiées. Elles sont dues à une réponse quadratique de

la combustion au forçage acoustique à des niveaux de cycles limites observés pour des calculs instables et un terme cubique dans la réponse non négligeable au-delà. Certains marqueurs de non-linéarités ont également pu être observés comme l'asymétrie du battement de frontière induite par le comportement non-linéaire des fluctuations de diamètre de goutte, la diminution des niveaux de la source normalisée par le niveau de l'amplitude au carré en fonction du niveau  $\hat{\eta}$  de l'amplitude et la modification du champ moyen à relativement haute amplitude illustrée par la réduction du temps de combustion moyen. L'asymétrie du battement et le comportement non-linéaire des fluctuations de diamètre apparaissent aux amplitudes de cycle limites observées pour des calculs instables. La réduction du temps de combustion est une non-linéarité observée à des niveaux plus importants. De plus, la contribution frontière devient de plus en plus importante par rapport à la contribution volume avec le niveau de l'amplitude de forçage dans le premier sous-domaine non-linéaire, puis le phénomène semble s'inverser dans le second. Enfin, quelle que soit l'amplitude, on observe que la dynamique de la frontière n'est jamais négligeable et contribue entre 25% et 40% aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans la chambre.

Dans cette étude et dans l'ensemble des calculs, il a été supposé que le modèle empirique de Ranz-Marshall ([Ranz and Marshall \(1952\)](#)) était valable quelle que soit l'amplitude de la modulation. Il est tout à fait possible que des phénomènes non-linéaires ne soient pas modélisés ici. Par exemple, [Hirschberg \(2007\)](#) met en évidence un phénomène non-linéaire pour le tube de Rijke : le blocage du transfert de chaleur quand l'air chaud du sillage revient vers l'obstacle (la grille pour le tube de Rijke). On parle d'effet mémoire du sillage. On pourrait alors imaginer, par analogie, des dynamiques non-linéaires de sillage autour des gouttes. Dans des travaux futurs, il serait donc intéressant de vérifier la validité du modèle de Ranz-Marshall par des simulations directes d'une goutte d'aluminium en combustion soumise à un champ acoustique à différentes amplitudes de forçage.

Dans la sous-section suivante, on conserve le modèle de combustion ASSM (chapitre 3) et on étudie l'effet du diamètre de fin de vie des gouttes réactives  $D_r$  sur la source thermoacoustique  $\int_V S dV$  sans imposer de forçage acoustique.

### 5.3 Modèle ASSM : Impact du diamètre résiduel

L'étude paramétrique de cette sous-section consiste à modifier le diamètre résiduel  $D_r$  des gouttes d'aluminium lorsque la combustion cesse. Ce diamètre définit le diamètre de la goutte d'aluminium en fin de vie et celui des résidus d'alumine. Le taux de dégagement de chaleur, suivant la loi du  $D^2$  ou le modèle

ASSM (Eq. (5.3)), dépend linéairement du diamètre de gouttes :

$$\dot{q} \propto D \quad (5.25)$$

Le taux de dégagement de chaleur en fin de vie dépend, dans le modèle ASSM, du diamètre en fin de vie qui correspond au diamètre des résidus  $D_r$ . Modifier le diamètre résiduel  $D_r$  influe donc directement sur le taux de dégagement de chaleur en fin de vie, mais change également le temps de combustion des gouttes d'aluminium  $t_c$ . Son expression analytique pour un écoulement moyen uniforme est donnée ci-dessous :

$$t_c = \frac{\rho_p \text{Pr}(D_i^2 - D_r^2)}{4\text{Sh}\mu \ln(1 + B)} \quad (5.26)$$

L'augmentation du temps de combustion  $t_c$  conduit à une augmentation du volume du nuage réactif des gouttes.

L'étude paramétrique numérique est réalisée pour les diamètres suivants. Le diamètre d'injection est fixé à  $D_i = 120 \mu\text{m}$  et les diamètres résiduels  $D_r$  choisis sont 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 5, 2 et 1  $\mu\text{m}$ . Ces tailles de résidus  $D_r$  permettant de balayer des grandes tailles de résidus jusqu'aux fumées (Salita (1995), Marion et al. (1996)).

En modifiant le diamètre résiduel  $D_r$ , on modifie l'énergie totale dégagée par combustion dans la chambre. Pour conserver la même énergie après combustion des gouttes dans la chambre, on modifie la température du gaz injecté et ses propriétés thermodynamiques (voir tableau 5.2). Pour chacun de ces calculs, on en déduit le niveau de l'amplitude de la pression acoustique  $\hat{\eta}$  et la fréquence  $f$  des instabilités auto-entretenues, sans forçage par le fond avant. Pour les cas stables, cette amplitude est nécessairement nulle. Pour les cas instables, on donne les valeurs au cycle limite.

Pour chacune de ces simulations numériques, la figure 5.5 représente le temps de combustion  $t_{c,0}$  moyenné sur la période acoustique et moyenné spatialement suivant  $x$ .

On vérifie bien que plus  $D_r$  est grand et proche de  $D_i$ , plus le temps de combustion  $t_{c,0}$  est court. On note que les diamètres résiduels de 1 à 10  $\mu\text{m}$  ont le même temps de combustion. En effet, sachant que le temps de combustion  $t_{c,0}$  dépend quadratiquement des diamètres d'injection  $D_i$  et résiduel  $D_r$  (voir Eq. (5.26)), si le diamètre  $D_r$  est faible devant le diamètre  $D_i$ , changer légèrement le diamètre  $D_r$  n'aura aucun impact sur le temps de combustion  $t_{c,0}$ .

Entre chaque cas de calcul, plusieurs paramètres sont donc modifiés en même

TABLE 5.2 – Paramètres physiques pour chaque calcul

$D_r$ ( $\mu m$ )	$T_{g,i}$ (K)	$C_{P,g}$ (J/kg/K)	$\gamma$	$\hat{\eta}$ (kPa)	$f$ (Hz)
100	3547.01	2023.21	1.16307	0	—
90	3514.05	2015.04	1.16201	12.0	75.5
80	3487.26	2008.61	1.16116	14.7	73.9
70	3466.17	2003.68	1.16051	13.7	71.8
60	3450.18	2000.00	1.16002	10.7	70.5
50	3438.65	1997.39	1.15967	0	—
40	3430.89	1995.65	1.15944	0	—
30	3426.17	1994.60	1.15930	0	—
20	3423.75	1994.06	1.15923	0	—
10	3422.85	1993.86	1.15920	0	—
5	3422.74	1993.84	1.15901	0	—
2	3422.72	1993.83	1.15900	0	—
1	3422.72	1993.83	1.15900	0	—

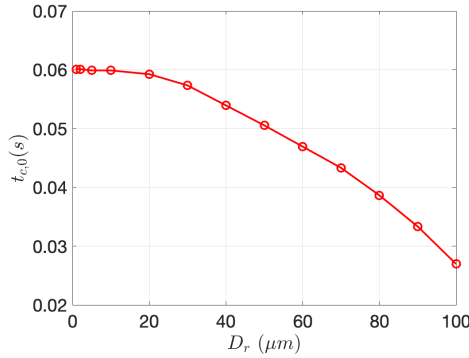


FIGURE 5.5 – Temps de combustion moyen  $t_{c,0}$  (moyenné spatialement suivant  $x$ ) par rapport au diamètre résiduel  $D_r$  ( $D_i = 120 \mu m$ ), déduit des simulations

temps par  $D_r$  : (i) le taux de dégagement de chaleur en fin de vie, (ii) le temps de combustion des gouttes et donc le volume du nuage réactif, (iii) la taille des résidus inertes après combustion, (iv) les conditions d'injection. L'analyse va maintenant porter sur les taux de croissance (source et pertes) du premier mode et les contributions volume et frontière de la source thermoacoustique  $\int_V S dV$  en fonction du diamètre résiduel  $D_r$ .

Dans la figure 5.6, les taux de croissance correspondant aux pertes acoustiques  $\alpha_l$  et au terme source  $\alpha_{ITHAC}$  sont tracés en fonction du diamètre résiduel  $D_r$ . Les deux taux de croissance sont calculés en bloquant les fluctuations du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  comme indiqué au chapitre 4 (méthode

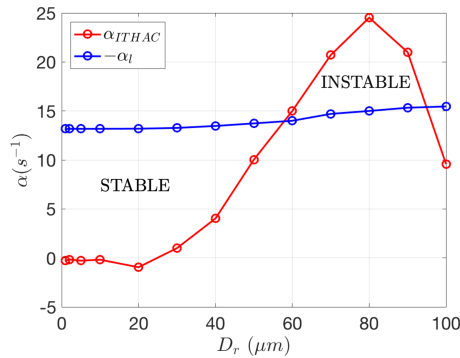
RPM).

La figure 5.6 montre que les pertes acoustiques varient faiblement par rapport à la taille des résidus. La perte acoustique associée aux résidus inertes est donc faible par rapport aux autres pertes acoustiques.

On observe aussi que le système est instable ( $\alpha_{ITHAC} > -\alpha_l > 0$ ) pour  $D_r \in [60; 90] \mu\text{m}$  et stable ( $\alpha_{ITHAC} < -\alpha_l$ ) pour  $D_r \in [1; 50] \cup [90; 100] \mu\text{m}$ . Les diamètres résiduels de 1 à 10  $\mu\text{m}$ , qui ont le même temps de combustion (Fig. 5.5), ont également le même taux de croissance de l'instabilité (Fig. 5.6), proche de 0. L'instabilité thermoacoustique dépend donc fortement du diamètre résiduel  $D_r$ .

On souhaite maintenant observer la dynamique de chacune des contributions volume et frontière en fonction du diamètre résiduel  $D_r$ . La contribution de frontière est identifiée comme correspondant à la zone de battement. La contribution volume est le volume du nuage réactif sans la zone de battement. Le poids de chaque contribution est évalué comme indiqué dans la section précédente (section 5.2).

La figure 5.7 montre les deux contributions volume et frontière par leur poids



**FIGURE 5.6** – Taux de croissance de la source de l'instabilité thermoacoustique  $\alpha_{ITHAC}$  et des pertes acoustiques  $\alpha_l$ . Le système est instable si  $\alpha_{ITHAC} > -\alpha_l$

respectifs et leurs taux de croissance  $\alpha_{v.c.}$  et  $\alpha_{b.c.}$  associés. L'indice *v.c.* signifie "volume contribution" et l'indice *b.c.* correspond à "boundary contribution".

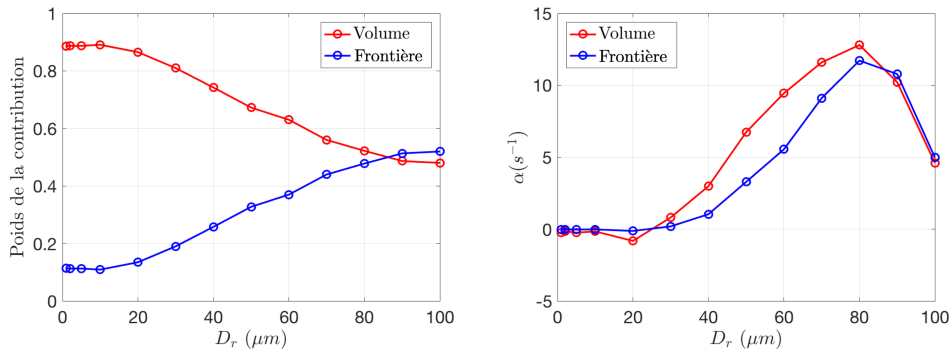
On voit à la figure 5.7(a) que plus le diamètre résiduel  $D_r$  est grand, plus la contribution frontière devient importante, voire dominante pour  $D_r > 90 \mu\text{m}$ .

Ce comportement, pour  $D_r > 20 \mu\text{m}$ , a deux explications possibles : (i) le volume de combustion diminue et la contribution de volume qui est l'intégrale

de ce volume diminue d'autant, (ii) le taux de dégagement de chaleur avant extinction augmente avec  $D_r$  donc les fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans la zone de battement sont plus intenses et la contribution frontière augmente. Sachant que les courbes sont linéaires, le mécanisme qui contrôle le rapport entre les deux contributions dépend, *a priori*, linéairement de  $D_r$ . L'équation (5.25) montre une dépendance linéaire du taux de dégagement de chaleur au diamètre de goutte. Le rapport entre les deux contributions volume et frontière est donc essentiellement contrôlé par le taux de dégagement de chaleur juste avant extinction des gouttes d'aluminium.

Pour les plus petits diamètres  $D_r < 20 \mu\text{m}$ , on remarque également que la contribution frontière est non nulle alors que le taux de dégagement de chaleur en fin de vie devient infime<sup>1</sup>.

La figure 5.7(b) montre néanmoins que les deux taux de croissance volume et frontière suivent les mêmes tendances en fonction de  $D_r$ . Ceci signifie qu'elles sont liées à un même mécanisme. On suppose que les conditions d'injection ont un effet négligeable. Le taux de dégagement de chaleur avant extinction et le temps de combustion sont donc les deux seuls mécanismes possibles.



(a) Poids de chacune des contributions aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur du nuage de gouttes réactives et du mouvement de frontière (b) Taux de croissance induits par la source de l'instabilité  $\alpha_{ITHAC} = \alpha_{v.c.} + \alpha_{b.c.}$ . Le terme  $\alpha_{v.c.}$  est associé à la contribution de volume et  $\alpha_{b.c.}$  à la contribution de la frontière

FIGURE 5.7 – Evolution des deux contributions (volume et frontière) à la source de l'instabilité en fonction du diamètre résiduel  $D_r$ .

1. On peut trouver numériquement que les fluctuations de diamètre de la loi du  $D^2$  est le mécanisme prépondérant dans la dynamique du taux de dégagement de chaleur en fin de vie des gouttes, pour des diamètres résiduels de très petites tailles. Cette conclusion mérite d'être encore étayée et ne fera pas l'objet d'une étude plus approfondie dans ce manuscrit, mais interroge sur la dynamique de combustion diphasique modélisée par la loi du  $D^2$  (sans fonction Heaviside) quelle que soit l'application industrielle.



Les taux de croissance de la figure 5.7(b) ne sont pas des courbes monotones. Le taux de dégagement de chaleur avant extinction ne peut donc être le mécanisme dominant, car il est proportionnel à  $D_r$ . Le temps de combustion est donc le mécanisme qui prédomine le taux de croissance  $\alpha_{ITHAC} = \alpha_{v.c.} + \alpha_{b.c.}$  de l'instabilité.

Les deux mécanismes (i) taux de dégagement de chaleur avant extinction et (ii) temps de combustion des gouttes jouent un rôle prépondérant sur l'instabilité thermoacoustique.

Le premier contrôle le rapport entre les contributions du volume et de la frontière aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Plus le diamètre résiduel est grand, plus le taux de dégagement de chaleur est intense et la contribution frontière non négligeable voire dominante. La dépendance de l'instabilité au taux de dégagement de chaleur en fin de vie, avant extinction, n'avait pas été identifié comme important dans la bibliographie jusqu'à présent.

Le second semble contrôler les deux contributions volume et frontière et donc l'instabilité dans son ensemble. Le maximum du taux de croissance  $\alpha_{ITHAC}$  est obtenu pour  $D_r = 80 \mu m$ . Cette dépendance forte de l'instabilité au temps de combustion corrobore les constats de Gallier and Godfroy (2009) et Casalis et al. (2011) qui identifient le nombre de Strouhal de combustion :

$$S_c = \omega t_{c,0}, \quad \omega = 2\pi f \quad (5.27)$$

avec  $f$  la fréquence excitée, comme un nombre adimensionnel important pour l'instabilité.

On a également observé que les pertes acoustiques dépendent peu du diamètre  $D_r$  des résidus inertes par rapport à la source  $\int_V \mathcal{S} dV$ .

Dans la prochaine sous-section, on compare la dynamique de la combustion de l'aluminium pour deux modèles de combustion : (i) le modèle ASSM utilisé jusqu'ici et (ii) le modèle avec lobe (chapitre 3).

## 5.4 Modèle Lobe

On rappelle le modèle de combustion avec lobe d'alumine :

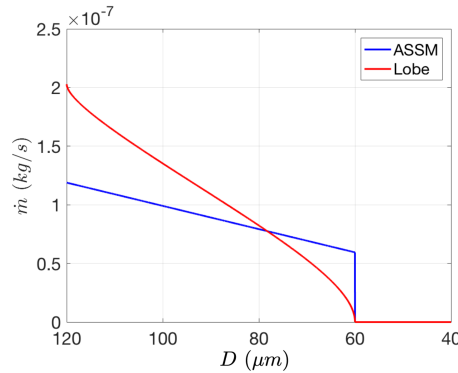
$$\dot{m} = \chi\pi(D-h)\frac{\mu}{Pr}\ln(1+B)\text{Sh}(1-\beta^3) \quad (5.28)$$

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{4\chi\mu}{\rho_p Pr}\ln(1+B)\text{Sh}\left(1-\frac{h}{D}\right)(1-\beta^3) \quad (5.29)$$

$$\beta = \frac{D_r}{D_i}, \quad h^3 - \frac{3}{2}Dh^2 + \frac{D_i^3 - D^3}{2} \frac{\beta^3}{1 - \beta^3} = 0 \quad (5.30)$$

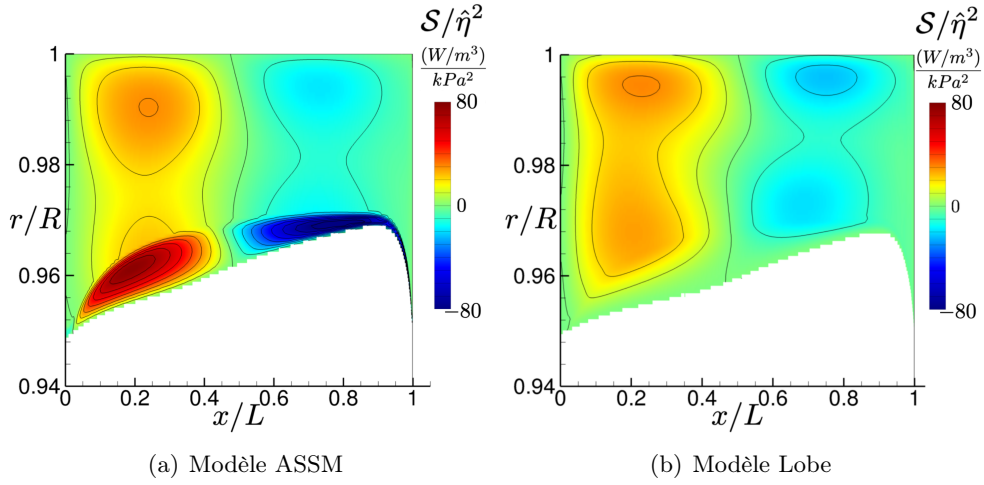
Ce modèle Lobe est comparé dans cette sous-section au modèle ASSM. Le coefficient  $\chi$  est fixé à  $\chi = 1.95$  (ajusté numériquement), afin de conserver le même temps de combustion quel que soit le modèle utilisé. La dynamique de ces deux modèles est comparée à la figure 5.8 où les taux de consommation  $\dot{m}$  sont tracés en fonction du diamètre particulaire  $D$ , pour un nombre de Sherwood  $Sh$  égal à 2 (pas d'effet de convection), un nombre de Spalding  $B$  à 1, un nombre de Prandtl  $Pr$  à 0.4. On peut observer que le modèle ASSM présente une discontinuité en taux d'évaporation (fonction Heaviside) alors que le modèle Lobe est continu jusqu'à l'extinction ( $D = D_r$ ). La dynamique en fin de vie est donc différente. De plus, avec le modèle Lobe, le taux de consommation est plus élevé pour des gouttes supérieures à  $D > 80 \mu m$  (car  $\chi > 1$ ).

Ce modèle de combustion de type Lobe a donc été implémenté dans le code CPS. Le calcul avec ce modèle est instable comme le calcul avec le modèle ASSM pour un diamètre d'injection à  $120 \mu m$  et un diamètre résiduel à  $60 \mu m$  (Calcul de référence, chapitre 3). Le premier mode longitudinal est excité, à une fréquence  $f = 72.8$  Hz. Le niveau d'amplitude mesurée est de  $\hat{\eta} = 15$  kPa. Alors qu'avec le modèle ASSM, on avait un niveau de  $\hat{\eta} = 10.5$  kPa et une fréquence de  $f = 70.5$  Hz. Le critère de Rayleigh local, calculé par ce modèle Lobe, est



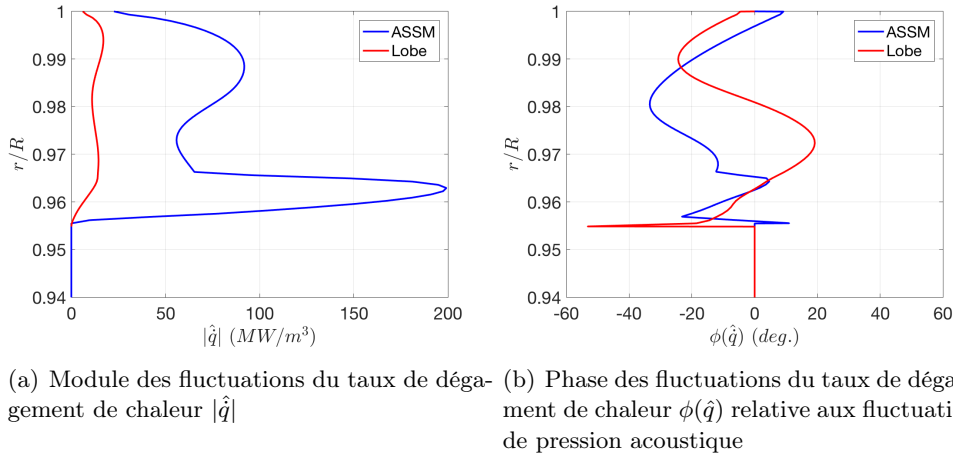
**FIGURE 5.8** – Comparaison du taux de consommation  $\dot{m}$  calculé par les deux modèles de combustion : le modèle ASSM (en bleu) et le modèle Lobe (en rouge). Les nombres adimensionnels suivants sont fixés :  $Sh = 2$ ,  $B = 1$ ,  $Pr = 0.4$ ,  $D_i = 120 \mu m$ ,  $D_r = 60 \mu m$

illustré par la figure 5.9. On observe que la dynamique dans le volume est finalement assez similaire, par contre il n'y a pas de contribution de frontière. Ceci s'explique par le taux de dégagement de chaleur en fin de vie qui n'est



**FIGURE 5.9** – Comparaison d'indice de Rayleigh local normalisé par l'amplitude d'oscillations de pression au carré  $\mathcal{S}/\hat{\eta}^2$ . Les figures, zoomées sur la zone de combustion de l'aluminium, ont été étirées radialement

pas discontinu. La dynamique de dégagement de chaleur induite par les deux modèles est montrée par le module et la phase des fluctuations de dégagement de chaleur ( $|\hat{q}|, \phi(\hat{q})$ ) à un quart  $x/L = 1/4$  de la chambre, à la figure 5.10.



**FIGURE 5.10** – Fluctuations du taux de dégagement de chaleur induit par la combustion des gouttes à un quart de la chambre  $x/L = 1/4$ . Comparaison entre le modèle ASSM et le modèle Lobe

Le module des fluctuations de chaleur induit par le modèle Lobe est plus faible avec absence de frontière. Par contre sa phase est plus proche de zéro, donc

plus en phase avec les fluctuations de pression et donc présente un couplage plus fort du point de vue de Rayleigh. Ceci peut contribuer à expliquer les niveaux d'instabilité plus forts avec le modèle Lobe et un glissement fréquentiel plus faible.

## 5.5 Conclusion

L'impact de trois paramètres a été analysé : l'amplitude du forçage acoustique, le diamètre résiduel des gouttes après extinction de la combustion et le modèle de combustion retenu pour décrire la combustion d'une goutte.

Modifier l'amplitude de forçage a permis de mettre en évidence la réponse de la dynamique de la combustion et le comportement de la source thermoacoustique à cette amplitude.

Trois comportements distincts ont été identifiés : une réponse linéaire, une réponse quadratique et un terme cubique non négligeable dans la réponse.

Augmenter l'amplitude des fluctuations de pression provoque également : (i) une diminution des niveaux de la source thermoacoustique, (ii) une asymétrie du battement de la frontière du nuage de gouttes réactives, (iii) une réduction du temps de combustion moyen  $t_{c,0}$  et (iv) une diminution de la contribution à la source de l'instabilité issue des fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans le volume de combustion devant la contribution associée à la dynamique de la frontière du nuage de gouttes réactives.

L'effet du diamètre résiduel  $D_r$  modifie le temps de combustion des gouttes  $t_{c,0}$ , le taux de dégagement de chaleur en fin de vie et les pertes acoustiques liées aux particules inertes.

On constate également que la source dépend plus fortement du diamètre résiduel  $D_r$  des gouttes que les pertes acoustique. En effet, celui-ci impacte la dynamique de fin de vie des gouttes, par la valeur du taux de dégagement de chaleur avant extinction, et le volume de la zone de combustion dépend du temps de combustion.

Les contributions aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur issus du volume de combustion et de sa frontière suivent les mêmes tendances et peuvent être associées à un nombre de Strouhal de combustion  $S_c = \omega t_{c,0}$ . Néanmoins, la contribution frontière augmente relativement à la contribution volume en fonction du diamètre résiduel  $D_r$  car le taux de dégagement de chaleur en fin de vie augmente.

Pour une très faible valeur de diamètre de résidus  $D_r$ , le modèle ASSM re-

vient à la loi du  $D^2$ . La fonction Heaviside ne joue donc plus aucun rôle, et pourtant une contribution frontière a été identifiée. La loi du  $D^2$  implique donc une dynamique de fin de vie particulière identifiable, qui justifierait d'être approfondie.

Les résultats de simulations avec le modèle ASSM et le modèle Lobe ont finalement été comparés. Les deux modèles induisent des amplitudes et des fréquences légèrement différentes. Néanmoins, l'instabilité est observée dans les deux cas. Ce modèle Lobe ne présente aucune dynamique particulière en fin de vie, une dynamique en volume plus faible mais est plus en phase avec la pression acoustique que le modèle ASSM. Bien que le modèle Lobe semble plus sophistiqué, il ne présente pas de modélisation particulière pour la fin de vie mais une combustion complète.<sup>2</sup> De plus, rien ne permet de démontrer que ce modèle Lobe a une dynamique plus représentative dans la zone de combustion que le modèle ASSM, qui a permis de reproduire et de prédire les instabilités pour des moteurs à propergol solides (Gallier and Godfroy (2009), Guéry et al. (2001), Ballereau et al. (2003), Ballereau et al. (2006)). Les chapitres suivants sont donc traités avec le modèle ASSM.

---

2. Une alternative pour la fin de vie serait un modèle représentatif des micro-explosions de goutte (combustion quasi-instantanée de la masse restante de l'aluminium).

Troisième partie

Analyse linéaire de stabilité



## Chapitre 6

# Stabilité linéaire dans un MPS

*Dans ce chapitre, la méthode de dérivation des pertes et des sources responsables de l'instabilité est explicitée. Les méthodes proposées par Flandro et par Culick pour analyser la stabilité sont d'abord décrites. Une modélisation des pertes acoustiques dans le régime linéaire est proposée. En particulier, les taux de croissance et glissements fréquentiels induits par les pertes sont définis. La source associée à la dynamique de la combustion de l'aluminium est développée au chapitre suivant.*

### 6.1 Approches théoriques pour la stabilité linéaire dans les MPS

#### 6.1.1 Stabilité linéaire

Lors d'une instabilité, le plus souvent, plusieurs comportements peuvent être identifiés : un comportement linéaire et un comportement non-linéaire. Le premier a lieu à la naissance de l'instabilité, c'est-à-dire, à très faible amplitude. Le second permet de converger vers un cycle limite. A très faible amplitude, la croissance ou la décroissance de l'amplitude peut être assimilée à une fonction exponentielle avec un taux de croissance  $\alpha$  (figure 6.1). Ce taux de croissance dépend de pertes et sources acoustiques linéarisées. De plus, ces sources et pertes acoustiques induisent un glissement fréquentiel par rapport aux modes propres de la chambre.

Les pertes et les sources linéaires peuvent être quantifiées à partir de la linéarisation des équations de conservation et font apparaître des expressions complexes (annexe B).

Elles peuvent être simplifiées au regard de la structure de l'écoulement et



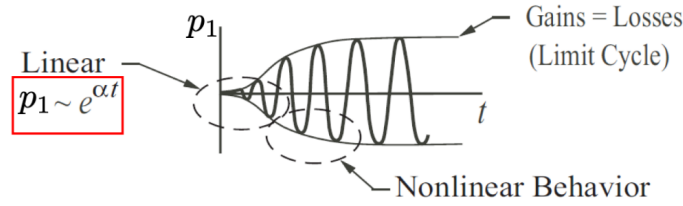


FIGURE 6.1 – Instabilité, croissance de l’amplitude de pression (Culick (2006))

du champ acoustique dans le moteur à propergol solide. Essentiellement, deux approches simplicatrices existent pour évaluer les pertes acoustiques : une approche irrotationnelle (Culick (1966), Culick and Yang (1992)) et une approche rotationnelle (Flandro (1995), Flandro and Majdalani (2003), Majdalani et al. (2005)). On se propose dans un premier temps d’étudier rapidement la bibliographie sur ces deux approches. La validité de ces deux approches est dépendante du champ des fluctuations de l’écoulement. La sous-section suivante présente donc des résultats de simulation.

### 6.1.2 Champ acoustique et rotation de l’écoulement

Le champ acoustique dans un moteur à propergol solide est analysé dans cette sous-section. Le calcul servant d’illustration est le calcul instable de référence du chapitre 4. Gaz et particules sont injectés radialement et sortent ensuite par la tuyère, longitudinalement. L’écoulement tourne alors dans le moteur pour changer de direction (voir figure 6.2). Dans cette même figure, la zone de combustion des gouttes d’aluminium est illustrée très proche du propergol solide (condition limite d’injection). Après analyse du calcul instable dans le

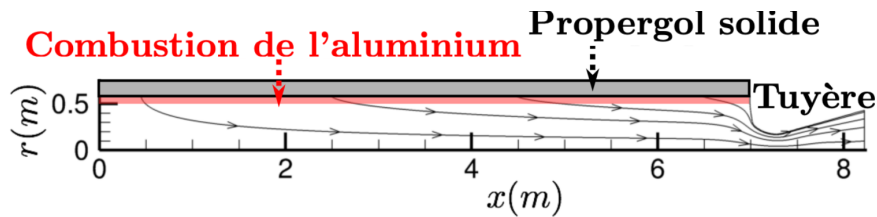


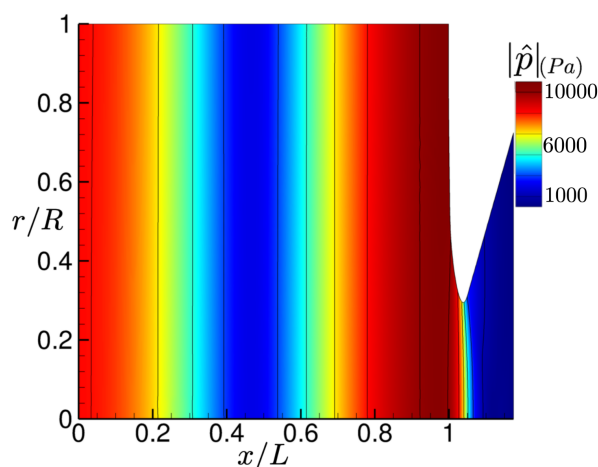
FIGURE 6.2 – Zone de combustion des gouttes d’aluminium (en rouge) et lignes de courant du champ moyen gazeux dans la géométrie de calcul

chapitre 4, on sait que l’instabilité prend place sur le premier mode longitudinal acoustique ( $1L$ ), avec un léger glissement fréquentiel de  $-5.5$  Hz :

$$f = 70.5 \text{ Hz}, \quad f_{1L} = 76 \text{ Hz} \quad (6.1)$$

$f$  est la fréquence d'excitation et  $f_{1L}$  le premier mode acoustique naturel. Ce glissement fréquentiel est induit par des sources et pertes acoustiques (dont la combustion de l'aluminium).

Par une transformée de Fourier du champ de pression, on peut en extraire le module des fluctuations de pression illustré à la figure 6.3.



**FIGURE 6.3** – Module des fluctuations de pression  $|\hat{p}|$  dans le moteur à propegol solide

D'après la figure 6.3, le champ des fluctuations de pression est invariant en radial. La combustion de l'aluminium ne déforme donc pas localement le champ de pression acoustique. La variation observée des fluctuations de pression est seulement dans le sens longitudinal. Le module  $|\hat{p}|$  varie comme la valeur absolue d'une fonction cosinus. Cela correspond à un mode  $1L$  fermé-fermé. Il y a néanmoins une légère asymétrie entre fond avant et fond arrière. On suppose que cette asymétrie est due à la présence de la tuyère.

*A priori*, on peut donc considérer que les fluctuations de pression sont strictement acoustiques, sans contribution rotationnelle ou entropique.

On suppose donc également que la rotation du champ moyen (induit par l'injection radiale) et les gouttes inertes ne perturbent pas non plus localement le champ local des fluctuations de pression.

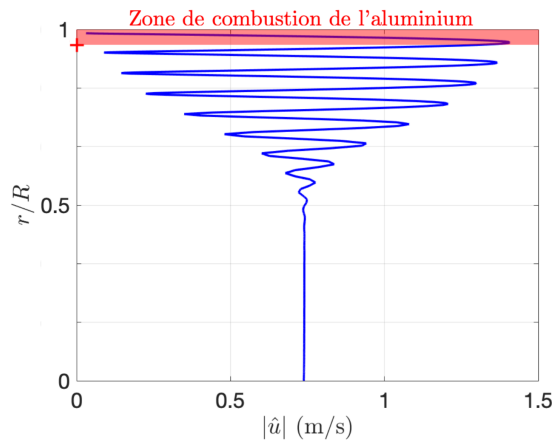
On sait aussi que les fluctuations de vitesse longitudinale (mode  $1L$ ) jouent un rôle important pour l'instabilité puisqu'elles sont à l'origine de l'instationnarité de la combustion (Gallier and Godfroy (2009), Gallier et al. (2011)). Dans les chambres des MPS, la structure des fluctuations longitudinales de vitesse

du gaz est particulière. Elle comprend une couche limite acoustique occupant une grande partie de la chambre (chapitre 1). Flandro et al. (2000) parlent de contributions acoustique (onde plane) et rotationnelle (couche limite acoustique).

Cette structure peut être observée par simulation, illustrée à la figure 6.4, par le module des fluctuations de vitesse longitudinale  $|\hat{u}|$  à un quart de la chambre du moteur  $x/L = 1/4$ . Sur cette figure, la zone de combustion de l'aluminium est également montrée et on peut observer qu'elle est dans une zone où la vitesse fluctuante varie fortement en radial. La forte variation des fluctuations de vitesse  $\hat{u}$  devra être prise en compte dans la modélisation de la source, associée à la réponse en combustion aux fluctuations du gaz (chapitre 7).

On identifie deux zones distinctes dans la figure 6.4 : une zone de forte variation radiale de vitesse  $\hat{u}$  ( $r/R \in [0.4; 1]$ ) et une zone où la variation radiale est inexistante ( $r/R \in [0; 0.4]$ ). La première zone correspond à la couche limite acoustique. Dans la seconde, la vitesse fluctuante est purement acoustique (Flandro et al. (2000), chapitre 1). La combustion de l'aluminium, en rouge dans la figure 6.4, est localisée dans la zone de forte variation de vitesse  $\hat{u}$ . Celle-ci devra être prise en compte dans la modélisation des fluctuations du taux de dégagement de chaleur.

En cas de mode longitudinal excité, des fluctuations de vitesses radiales du gaz



**FIGURE 6.4** – Evolution radiale du module  $|\hat{u}|$  en  $x/L = 1/4$  et zone de combustion des gouttes d'aluminium

apparaissent également. Néanmoins, elles sont négligeables par rapport aux fluctuations longitudinales (Flandro et al. (2000), Flandro (1995)). Garcia-Schäfer and Linan (2001) proposent un modèle analytique pour ces fluctuations radiales

qui intègrent des effets acoustiques et rotationnels.

Dans cette sous-section, on a observé des fluctuations de pression de nature principalement acoustiques et des fluctuations de vitesse d'origine acoustique et rotationnelle, avec une couche limite acoustique. Dans la sous-section suivante, on s'appuiera sur ces observations pour définir un cadre théorique à la modélisation des pertes et sources acoustiques.

### 6.1.3 Approches irrotationnelle et rotationnelle

Dans la section 6.2, le taux de croissance  $\alpha$  et le glissement fréquentiel  $\delta\omega$  seront exprimés à partir des équations de conservation linéarisées (stabilité linéaire). Néanmoins, le taux de croissance et le glissement fréquentiel doivent être définis à partir de simplifications de l'écoulement. On sait que la vitesse fluctuante présente des contributions rotationnelles et acoustiques mais que les ondes de pression peuvent être considérées comme acoustiques. Dans un MPS, il existe deux approches pour exprimer le taux de croissance et le glissement fréquentiel, une approche irrotationnelle et une approche rotationnelle.

La première est une approche acoustique et irrotationnelle développée par Culick pour la propulsion solide (Culick (1966), Culick and Yang (1992)) avec une correction pour la rotation de l'écoulement moyen induit par l'injection radiale.

L'approche rotationnelle est dérivée par Flandro (Flandro (1995)). Flandro justifie cette approche par la nécessité de prendre les fluctuations d'origine rotationnelle. Cette approche permet de justifier l'origine du terme dit de flow-turning. Elle fait également intervenir une contribution rotationnelle en fluctuations de pression.

Or, comme identifié par simulation, les fluctuations de pression sont planes, donc *a priori*, les fluctuations de pression sont strictement acoustique. Cette observation a également été faite par d'autres auteurs (Gallier et al. (2018), Roh et al. (1995), Apte and Yang (2002), Chu et al. (2003)).

Finalement, Gallier et al. (2018) démontrent que l'approche à la Culick (acoustique) reproduit mieux les résultats numériques si on considère le terme de flow-turning. En effet, ils justifient cela par une erreur d'admittance dans l'approche à la Flandro (Flandro (1995)). Après correction, les deux méthodes sont équivalentes.

On optera donc pour l'approche irrotationnelle de Culick, *a priori* la plus simple. A noter qu'il a été vérifié que les approches sont équivalentes pour le taux de

croissance, mais il n'en est rien concernant le glissement fréquentiel. On suppose donc ici que le glissement fréquentiel est également bien modélisé par l'approche à la Culick.

On exprime le taux de croissance et le glissement fréquentiel induit par les sources et pertes acoustiques, à la Culick, à partir d'une équation d'onde sur les fluctuations de pression  $p_1$ . Cette équation peut être dérivée à partir de la linéarisation des équations de conservation (voir Annexe B). Le terme source associé à la combustion de l'aluminium est modélisé au chapitre suivant. Seules les contributions restantes seront donc développées.

## 6.2 Expression des pertes et sources acoustiques

Dans cette section, les pertes et sources acoustiques sont développées suivant l'approche à la Culick, à partir des équations de conservation (voir Annexe B). Dans un premier temps, on dérive, à partir d'une équation d'onde, des expressions pour le taux de croissance de l'instabilité  $\alpha$  et le glissement fréquentiel induit  $\delta\omega$ . Cette équation d'onde intègre des termes sources et pertes acoustiques. Cette dérivation est valable dans le domaine linéaire et pour des fluctuations de pression  $p_1$  pouvant être décomposées sur une base orthogonale.

### 6.2.1 Taux de croissance et glissement fréquentiel

Dans le cas général, le système à résoudre s'exprime comme une équation d'onde représentée par les fluctuations de pression  $p_1$  :

$$\begin{cases} \nabla^2 p_1 - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = h & (6.2) \\ \mathbf{n} \cdot \nabla p_1 = -f & (6.3) \end{cases}$$

Dans nos calculs, les instabilités thermoacoustiques rencontrées en MPS excitent des fréquences très proches des fréquences des modes propres, acoustiques pur sans sources ou pertes acoustiques (voir section 6.1.2 et chapitre 5). On note  $\psi_n$  ces modes de pression, qui obéissent à l'équation de Helmholtz homogène ( $n$  pour le  $n^{\text{ième}}$  mode acoustique) :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0 & (6.4) \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \psi_n = 0 & (6.5) \end{cases}$$

Les  $\psi_n$  composent une base orthogonale. On suppose que le champ acoustique  $p_1$  peut être décomposé sur cette base orthogonale des modes acoustiques  $\psi_n$  :

$$p_1(\mathbf{x}, t) = \sum_n \eta_n(t) \psi_n(\mathbf{x}), \quad \int_V \psi_n \psi_m dV = \delta_{nm} \int_V \psi_n^2 dV \quad (6.6)$$

où  $\eta_n$  correspond à l'amplitude du  $n^{\text{ième}}$  mode acoustique et  $\delta_{nm}$  le symbole de Kronecker.

On définit  $k_n$  et  $\omega_n$  respectivement la longueur d'onde et la fréquence angulaire correspondant au  $n^{\text{ième}}$  mode acoustique pur, sans sources ou pertes acoustiques.

La suite du développement consiste à exprimer les écarts en longueur d'onde  $k - k_n$ , en fréquence angulaire  $\delta\omega = \omega - \omega_n$  et le taux de croissance de l'amplitude de pression  $\alpha$  induits par la présence de sources et pertes acoustiques.

Pour ce faire, on multiplie l'équation (6.2) par  $\psi_n$ , l'équation (6.4) par  $p_1$  et on soustrait les deux équations. On obtient après intégration sur le volume de la chambre :

$$\int_V (\psi_n \nabla^2 p_1 - p_1 \nabla^2 \psi_n) dV - \int_V \frac{\psi_n}{a_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} dV - k_n^2 \int_V p_1 \psi_n dV = \int_V \psi_n h dV \quad (6.7)$$

où  $V$  est le volume total de la chambre et  $S$  la surface aux frontières. En remarquant que  $\psi_n \nabla^2 p_1 - p_1 \nabla^2 \psi_n = \nabla \cdot (\psi_n \nabla p_1) - \nabla \cdot (p_1 \nabla \psi_n)$ , on peut utiliser le théorème de Green-Ostrogradski pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \int_S \left( \underbrace{\psi_n \nabla p_1 \cdot \mathbf{n}}_{=-f \text{ (Eq. (6.3))}} - \underbrace{p_1 \nabla \psi_n \cdot \mathbf{n}}_{=0 \text{ (Eq. (6.5))}} \right) dS - \int_V \frac{\psi_n}{a_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} dV - k_n^2 \int_V p_1 \psi_n dV \\ = \int_V \psi_n h dV \quad (6.8) \end{aligned}$$

L'équation (6.8) s'écrit avec les équations Eq. (6.3) et Eq. (6.5) :

$$- \int_V \frac{\psi_n}{a_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} dV - k_n^2 \int_V p_1 \psi_n dV = \int_V \psi_n h dV + \int_S \psi_n f dS \quad (6.9)$$

avec  $a_0$  la vitesse du son dans la chambre. On injecte ensuite la forme des fluctuations de pression Eq. (6.6) dans l'équation Eq. (6.9). Les modes propres étant orthogonaux entre eux ( $\int \psi_m \psi_n = E_n^2 \delta_{mn}$ ) on obtient pour chaque mode acoustique une équation à résoudre sur les amplitudes  $\eta_n$  :

$$\ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = - \frac{a_0^2}{E_n^2} \left( \int_V \psi_n h dV + \int_S \psi_n f dS \right) \text{ avec } E_n^2 = \int_V \psi_n^2 dV \quad (6.10)$$

où  $\omega_n = k_n a_0$ . Cette équation d'amplitude, si elle intègre des termes non-linéaires, peut être résolue numériquement (voir chapitre 9). En linéaire, on peut généralement la résoudre (Culick and Yang (1992)). Pour exprimer le taux de croissance et le glissement fréquentiel induits par les sources et pertes acoustiques, il faut exprimer cette équation Eq. (6.10) dans l'espace de Fourier. On suppose alors que l'amplitude en chaque point est harmonique :

$$\eta_n(t) = \hat{\eta}_n(t) e^{i\omega t} = \hat{\eta}_n(t=0) e^{ia_0 k t} \text{ avec } k = (\omega - i\alpha)/a_0 \quad (6.11)$$

où  $k$  est la longueur d'onde,  $k_n$  la longueur d'onde en l'absence de sources ou pertes acoustiques,  $a_0$  est la vitesse du son,  $\omega$  est la fréquence angulaire excitée (proche de la fréquence du mode propre associé  $\omega_n$ ),  $\alpha$  est le taux d'amplification de l'amplitude du  $n^{\text{ième}}$  mode acoustique. Par convention on suppose que l'enveloppe est dans les réels  $\hat{\eta}_n \in \mathbb{R}$ . On obtient alors à partir de Eq. (6.10) la relation suivante pour la longueur d'onde  $k$  autour de la longueur d'onde du mode propre  $k_n$  :

$$k^2 - k_n^2 = \frac{1}{E_n^2 \hat{\eta}_n} \left( \int_V \psi_n \hat{h} dV + \int_S \psi_n \hat{f} dS \right) \quad (6.12)$$

où  $\hat{h}$ ,  $\hat{f}$  définis par  $h = \hat{h} e^{ia_0 k t}$  et  $f = \hat{f} e^{ia_0 k t}$ . A partir de l'équation (6.12), on peut extraire les relations suivantes pour la fréquence angulaire  $\omega$  et le taux de croissance  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \omega^2 - \alpha^2 - \omega_n^2 &= \mathcal{R}_e \left\{ \frac{a_0^2}{E_n^2 \hat{\eta}_n} \left( \int_V \psi_n \hat{h} dV + \int_S \psi_n \hat{f} dS \right) \right\} \\ -2\alpha\omega &= \mathcal{I}_m \left\{ \frac{a_0^2}{E_n^2 \hat{\eta}_n} \left( \int_V \psi_n \hat{h} dV + \int_S \psi_n \hat{f} dS \right) \right\} \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{R}_e$  et  $\mathcal{I}_m$ , respectivement, la partie réelle et la partie imaginaire. Supposant que  $\alpha \ll \omega$  et  $\omega \sim \omega_n$  on peut exprimer le décalage fréquentiel  $\delta\omega$  (par rapport au mode non perturbé) et le taux d'amplification de l'instabilité  $\alpha$  :

$$\delta\omega = \omega - \omega_n = \frac{a_0^2}{2E_n^2 \omega_n} \left( \int_V \frac{\psi_n \mathcal{R}_e(\hat{h})}{\hat{\eta}_n} dV + \int_S \frac{\psi_n \mathcal{R}_e(\hat{f})}{\hat{\eta}_n} dS \right) \quad (6.13)$$

$$\alpha = -\frac{a_0^2}{2E_n^2 \omega_n} \left( \int_V \frac{\psi_n \mathcal{I}_m(\hat{h})}{\hat{\eta}_n} dV + \int_S \frac{\psi_n \mathcal{I}_m(\hat{f})}{\hat{\eta}_n} dS \right) \quad (6.14)$$

avec  $\hat{h}$  et  $\hat{f}$  les termes sources-pertes du système Eqs. (6.2) et (6.3), exprimés dans l'espace de Fourier.

Dans la suite de cette section, les sources et pertes acoustiques sont modélisées par l'approche de [Culick and Yang \(1992\)](#). Si on exclut la combustion de l'aluminium, les taux de croissance et les glissements fréquentiels les plus importants sont : (i) combustion du propergol solide, (ii) particules inertes (hydrodynamique et thermique), (iii) impédance tuyère et (iv) flow-turning. Les expressions de chacune de ces contributions au bilan d'énergie acoustique peuvent être déduites de l'annexe B, où  $h$  et  $f$  sont explicitées. Le terme source associé à la combustion de l'aluminium est abordé au chapitre suivant (chapitre 7).

### 6.2.2 Combustion du propergol solide

Le propergol solide se situe à la condition limite  $r = R$ . Sa combustion est modélisée comme une condition d'injection (chapitre 1 et 4). Le taux de croissance et le glissement fréquentiel induits par la combustion du propergol solide peuvent être dérivés à partir des équations Eqs. (6.13) et (6.14) :

$$\alpha_i = -\frac{\rho_0 a_0^2}{2E_n^2} \int_{S_i} \left( \frac{\psi_n \mathcal{R}_e(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})}{\hat{\eta}_m} + \frac{\psi_n^2 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}}{\gamma p_0} \right) dS \quad (6.15)$$

$$\delta\omega_i = \frac{\rho_0 a_0^2}{2E_n^2} \int_{S_i} \frac{\psi_n \mathcal{I}_m(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})}{\hat{\eta}_m} dS \quad (6.16)$$

où  $\hat{\mathbf{u}}$  sont les fluctuations de vitesse dans l'espace de Fourier,  $S_i$  correspond à la surface du propergol solide et l'indice  $i$  est relatif à l'injection due à la combustion du propergol solide. Le débit surfacique massique du mélange gaz-particules à l'injection s'écrit :

$$\dot{m}_i = -\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i \quad (6.17)$$

À la condition limite, on impose un débit massique constant  $\dot{m}_i = \dot{m}_{i,0}$  (l'indice 0 correspond au débit massique moyenné sur la période acoustique). Dans ce cas de figure, la combustion du propergol solide ne répond pas à l'acoustique contrairement à ce qui est attendu généralement (voir chapitre 1). Il s'agit d'une simplification permettant d'éviter toute interaction entre les deux instabilités de combustion. Donc la linéarisation de l'équation (6.17) donne :

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_i}{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_i} = -\frac{\hat{\rho}}{\rho_0} \quad (6.18)$$

où  $\rho$  correspond à la masse volumique du gaz dans la chambre et  $\hat{\rho}$  aux fluctuations dans l'espace de Fourier,  $\mathbf{n}_i$  à la normale à l'injection et l'indice 0 au



champ moyen. La loi des gaz parfaits permet d'exprimer les fluctuations de  $\hat{\rho}$  en fonction des fluctuations de pression  $\hat{p}$  et de température du gaz  $\hat{T}$  :

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_i}{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_i} = -\frac{\hat{p}}{p_0} + \frac{\hat{T}}{T_0} \quad (6.19)$$

Si on suppose les fluctuations de température nulles (la température est imposée à la condition limite d'injection) :

$$\frac{\hat{T}}{T_0} = 0 \quad (6.20)$$

On obtient donc pour les fluctuations de vitesse à la surface la relation suivante :

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_i}{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_i} = -\frac{\hat{p}}{p_0} \quad (6.21)$$

Sachant que par convention  $\hat{p}, \hat{\eta}_n \in \mathbb{R}$ , le taux de croissance peut s'exprimer :

$$\alpha_i = -\frac{\rho_0 a_0^2}{2E_n^2} \int_{S_i} \left( -\frac{\psi_n \hat{p}}{\hat{\eta}_n p_0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_i + \frac{\psi_n^2 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_i}{\gamma} \right) dS \quad (6.22)$$

Les fluctuations de pression peuvent s'exprimer, pour un seul mode, comme  $\hat{p} = \hat{\eta}_n \psi_n$ . On trouve finalement pour un débit massique constant à l'injection :

$$\alpha_i = \frac{\rho_0 a_0^2 (\gamma - 1)}{2E_n^2 \gamma p_0} \int_{S_i} \psi_n^2 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_i dS \quad (6.23)$$

Le débit massique est supposé uniforme le long de la paroi du propergol solide, dans le cadre de ce manuscrit. On peut donc simplifier l'équation précédente et on obtient :

$$\alpha_i = -\frac{v_i (\gamma - 1)}{R} = -\frac{a_0 \mathcal{M}_i (\gamma - 1)}{R} < 0 \quad (6.24)$$

avec  $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_i = -v_i < 0$  la vitesse radiale d'injection et  $\mathcal{M}_i = \frac{v_i}{a_0} > 0$  le nombre de Mach à l'injection. La contribution du propergol solide, ici, en l'absence de réponse en combustion, est négative. Il s'agit donc d'une perte acoustique.

On sait que l'admittance du propergol solide (Eq. (6.21)) est strictement réelle donc le glissement fréquentiel associé au propergol solide est nul :

$$\delta\omega_i = 0 \quad (6.25)$$

Pour une injection à débit constant et uniforme, la combustion du propergol solide est une perte acoustique qui n'induit pas de glissement fréquentiel. Dans la sous-section suivante, l'impact des particules inertes sur l'acoustique du moteur est étudié.

### 6.2.3 Particules inertes

Les particules inertes constituent une autre perte acoustique à considérer pour le taux de croissance et le glissement fréquentiel (Culick and Yang (1992), Culick (1975), Temkin and Dobbins (1966)). Les particules interviennent par l'intermédiaire des termes sources de l'équation de quantité de mouvement  $\mathcal{F}_1$  et de pression  $\mathcal{Q}_1$ . Si on ne considère pas la combustion des gouttes, on a (Eqs. (B.14) et (B.21)) :

$$\mathcal{F}_1 = \delta\mathbf{F}_1 \approx -\alpha_p \rho_p \frac{\partial \delta \mathbf{u}_p}{\partial t} \quad (6.26)$$

$$\mathcal{Q}_1 \approx \delta\mathbf{Q}_1 \approx -\alpha_p \rho_p C \frac{\partial \delta T}{\partial t} \quad (6.27)$$

avec 1 l'indice des perturbations dans l'espace temporel,  $\alpha_p$  est la fraction volumique de particules (à ne pas confondre avec un taux de croissance),  $\delta T = T_p - T_g$  la température particulaire relative à la température du gaz et  $\delta \mathbf{u}_p = (u_p - u)\mathbf{e}_x + (v_p - v)\mathbf{e}_r$  la vitesse particulaire relative à la vitesse du gaz. Le taux de croissance  $\alpha_{inert}$  et le glissement fréquentiel  $\delta\omega_{inert}$  induits par les particules inertes peuvent donc s'écrire de la façon suivante à partir des équations Eqs. (6.13) et (6.14) :

$$\alpha_{inert} = -\frac{a_0^2}{2\omega_n E_n^2} \left( \frac{k_n(\gamma-1)}{a_0} C \alpha_p \rho_p \int \frac{\psi_n}{\hat{\eta}_n} \mathcal{R}_e(ia_0 k \widehat{\delta T}) dV + \alpha_p \rho_p \int \frac{\nabla \psi_n}{\hat{\eta}_n} \cdot \mathcal{I}_m(ia_0 k \widehat{\delta u}_p) dV \right) \quad (6.28)$$

$$\delta\omega_{inert} = -\frac{a_0^2}{2\omega_n E_n^2} \left( \frac{k_n(\gamma-1)}{a_0} C \alpha_p \rho_p \int \frac{\psi_n}{\hat{\eta}_n} \mathcal{I}_m(ia_0 k \widehat{\delta T}) dV - \alpha_p \rho_p \int \frac{\nabla \psi_n}{\hat{\eta}_n} \cdot \mathcal{R}_e(ia_0 k \widehat{\delta u}_p) dV \right) \quad (6.29)$$

A partir des équations (B.8), (B.9) et (B.11), (B.12), on peut dériver des équations de transport pour les fluctuations des différentielles de vitesse et de température :

$$\frac{d\delta u_{p,1}}{dt} + \frac{\delta u_{p,1}}{\tau_d} = -\frac{du_1}{dt} \quad (6.30)$$

avec  $\tau_d$  le temps caractéristique de trainée. Ici, on le simplifiera à l'expression suivante (régime de Stokes,  $\text{Re}_p < 1$ ) :

$$\tau_d = \frac{\rho D_r^2}{18\mu} \quad (6.31)$$

où  $D_r$  est le diamètre des résidus inertes. Et pour la température particulaire relative  $\delta T$ , on a :

$$\frac{d\delta T_1}{dt} + \frac{\delta T_1}{\tau_t} = -\frac{dT_1}{dt} \quad (6.32)$$

avec  $\tau_t$  le temps caractéristique thermique particulaire :

$$\tau_t = \left( \frac{3}{2} \frac{C_{Pr}}{C_P} \right) \tau_d \quad (6.33)$$

où Pr est le nombre de Prandtl du mélange,  $C$  la capacité calorifique des gouttes et  $C_P$  la capacité calorifique du mélange à pression constante. On considère les fluctuations de vitesse strictement acoustiques et les fluctuations de température isentropiques (dans la chambre, éloigné de la surface d'injection, sans combustion) :

$$\hat{u} = \frac{ia_0}{k_n} \hat{\eta}_n \nabla \psi_n \quad \hat{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} T_0 \hat{\eta}_n \psi_n \quad (6.34)$$

En négligeant les termes advectifs des équations (6.30) (6.32), on en déduit, après quelques étapes de calculs, le taux de croissance et le glissement fréquentiel induits par les particules inertes :

$$\alpha_{inert} = -\frac{1}{2} \frac{\kappa}{1 + \kappa} \left( \frac{\omega_n^2 \tau_d}{1 + \omega^2 \tau_d^2} \frac{1}{E_n^2} \int \left( \frac{\nabla \psi_n}{k_n} \right)^2 dV + (\gamma - 1) \frac{C}{C_P} \frac{\omega^2 \tau_t}{1 + \omega^2 \tau_t^2} \right) \quad (6.35)$$

$$\delta\omega_{inert} = -\frac{1}{2} \frac{\kappa}{1 + \kappa} \left( \frac{\omega_n^3 \tau_d^3}{1 + \omega^2 \tau_d^2} \frac{1}{E_n^2} \int \left( \frac{\nabla \psi_n}{k_n} \right)^2 dV + (\gamma - 1) \frac{C}{C_P} \frac{\omega^3 \tau_t^2}{1 + \omega^2 \tau_t^2} \right) \quad (6.36)$$

avec  $\kappa$  la fraction massique de particules inertes (après combustion).

Des modèles pour le taux de croissance et le glissement fréquentiel associés aux particules inertes ont été proposés. Les particules inertes constituent également une perte acoustique et induisent un glissement fréquentiel. Dans la sous-section suivante, l'effet de la tuyère est étudié.

### 6.2.4 Impédance de la tuyère

La tuyère contribue au taux de croissance et au glissement fréquentiel de l'instabilité et est pris en compte par un terme de surface (Eqs. (B.14) et (B.21)) :

$$\alpha_t = -\frac{\rho_0 a_0^2}{2E_n^2} \int_{S_t} \left( \frac{\psi_n \mathcal{R}_e(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})}{\hat{\eta}_m} + \frac{\psi_n^2 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}}{\gamma p_0} \right) dS \quad (6.37)$$

$$\delta\omega_t = \frac{\rho_0 a_0^2}{2E_n^2} \int_{S_t} \frac{\psi_n \mathcal{I}_m(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})}{\hat{\eta}_m} dS \quad (6.38)$$

où  $S_t$  est la section d'entrée du convergent. On définit l'admittance tuyère  $A_t$  et le nombre de Mach  $M_t$  à la section  $S_t$  :

$$A_t = \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} p_0}{a_0 \hat{p}} \quad M_t = \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}}{a_0} \quad (6.39)$$

Le taux de croissance et le glissement fréquentiel s'expriment donc :

$$\alpha_t = -\frac{a_0}{2E_n^2} (\mathcal{R}_e(A_t) + M_t) \int_{S_t} \psi_n^2 dS \quad (6.40)$$

$$\delta\omega_t = \frac{a_0}{2E_n^2} \mathcal{I}_m(A_t) \int_{S_t} \psi_n^2 dS \quad (6.41)$$

Ces expressions dépendent de l'admittance tuyère  $A_t$  et le nombre de Mach  $M_t$  qui sont donnés ci-dessous. D'après [Candel \(1990\)](#), on sait que le nombre de Mach dans la tuyère suit l'expression suivante (pour une section cylindrique) :

$$\frac{R_t^2}{R_c^2} = \frac{1}{M_t} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_t^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (6.42)$$

où  $R_t$  est le rayon dans la tuyère (au convergent par exemple),  $R_c$  le rayon au col. Connaissant le rayon au col  $R_c$  et le rayon d'entrée de la tuyère, qui est égal au rayon de la chambre  $R_t = R$ , on peut en déduire le nombre de Mach  $M_t$ . En dérivant l'équation (6.42) par rapport au nombre de Mach, on obtient la relation suivante :

$$\frac{1}{R_c} \frac{dR_t}{dM_t} = \frac{\sqrt{M_t}}{2(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_t^2)} \frac{M_t^2 - 1}{M_t^2} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_t^2 \right) \right)^{\frac{\gamma + 1}{4(\gamma - 1)}} \quad (6.43)$$

Cette expression est utile pour quantifier l'admittance. Pour y parvenir, il faut tout d'abord linéariser les équations d'Euler avec une équation pour l'entropie. En supposant l'écoulement isentropique dans la tuyère, on trouve l'équation

de Riccati à résoudre numériquement pour l'admittance (Plaud (2016), Crocco and Cheng (1956), Bell et al. (1973)) :

$$\begin{aligned} & \gamma M_t (1 - M_t^2) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_t^2\right) \frac{dA_t}{dM_t} \\ & = \gamma^2 M_t^2 (2 + F) A_t^2 + \gamma M_t^2 (3 - \gamma) A_t - (\gamma - 1) M_t^2 - F \end{aligned} \quad (6.44)$$

avec  $F$  une fonction complexe :

$$F = ik \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_t^2\right)^{3/2} \left(\frac{dR_t}{dx}\right)^{-1} \frac{dR_t}{dM_t} \quad (6.45)$$

qui est dépendante de la forme de la tuyère par l'intermédiaire de la dérivée du rayon de la tuyère par la position  $x$ .

Il est commun de trouver une simplification pour la partie réelle de l'admittance (Vuillot and Casalis (2004), Culick and Yang (1992)), pour des tuyères très courtes :

$$\mathcal{R}_e(A_t) = \frac{\gamma - 1}{2} M_t, \quad \mathcal{I}_m(A_t) = 0 \quad (6.46)$$

avec le nombre de Mach à l'entrée de la tuyère  $M_t = \frac{2L}{R} M_i$  pour un moteur cylindrique. Dans ce cas, on trouve :

$$\alpha_t = -\frac{a}{4E_n^2} (\gamma + 1) M_t S_t, \quad \delta\omega_t = 0 \quad (6.47)$$

avec  $S_t = \pi R^2$ . Cette simplification sera utilisée dans le manuscrit mais justifierait d'être validée pour la géométrie de calcul.

Toutes les pertes acoustiques majeures ont été exprimées (injection par la combustion du propergol, particules inertes, impédance tuyère), exceptée le "flow-turning" qui doit être ajouté.

### 6.2.5 Rotation de l'écoulement

Cette contribution n'est initialement pas présente dans la dérivation des pertes acoustiques en  $3D$  (Eq. (6.14)). Culick a développé les pertes acoustiques dans une approche  $1D$  et fait ainsi apparaître le terme de rotation de l'écoulement (Vuillot and Casalis (2004), Culick and Yang (1992)). Ce terme permet de prendre en compte les effets de rotation de l'écoulement moyen. On trouve alors que la rotation de l'écoulement modifie le taux de croissance et n'induit pas de glissement fréquentiel :

$$\alpha_{FT} = \frac{a_0}{2k_n^2 E_n^2} \int M_i (\nabla \psi_n)^2 dV, \quad \delta\omega_{FT} = 0 \quad (6.48)$$

Dans l'ensemble de ces expressions des pertes acoustiques, la traînée des particules dans le gaz a été négligée.

### 6.3 Comparaison avec la simulation de référence

Les travaux de Gallier et al. (2018) repose sur la modélisation proposé par Culick. Dans cette section, on compare les taux de croissance des pertes acoustiques  $\alpha_l$  donnés par la simulation et par la modélisation analytique. On définit le taux de croissance relatif au pertes acoustiques  $\alpha_l$  comme :

$$\alpha_l = \alpha_{FT} + \alpha_t + \alpha_i + \alpha_{inert} \quad (6.49)$$

avec  $l$  l'indice pour pertes acoustiques ("losses"),  $FT$  pour flow-turning,  $t$  pour tuyère,  $i$  pour propergol solide,  $inert$  pour particules inertes.

Dans les conditions du calcul de référence instable  $120 - 60 \mu\text{m}$  (chapitre 4), on trouve les valeurs suivantes de taux de croissance pour les pertes (à partir des expressions analytiques, pour une tuyère très courte) :

$$\alpha_{FT} = -3.7 \text{ s}^{-1}, \alpha_t = -7.6 \text{ s}^{-1}, \alpha_i = -0.6 \text{ s}^{-1}, \alpha_{inert} = -0.8 \text{ s}^{-1} \quad (6.50)$$

La perte tuyère  $\alpha_t$  est donc la perte acoustique la plus importante dans nos calculs. La perte induite par les particules inertes  $\alpha_{inert}$  est faible. Ce résultat confirme l'effet négligeable du diamètre résiduel  $D_r$  sur les pertes dans nos calculs (chapitre 5).

Le taux de croissance des pertes acoustiques  $\alpha_l$ , donné analytiquement, est de l'ordre de  $\alpha_l = -13 \text{ s}^{-1}$ , pour une valeur numérique provenant de la simulation de  $\alpha_l = -14 \text{ s}^{-1}$  (chapitre 4). La précision estimée de l'approche numérique utilisée pour la mesure du taux de croissance  $\alpha_l$  est de  $1 \text{ s}^{-1}$ . On peut donc penser que la modélisation est relativement satisfaisante.

### 6.4 Hypothèse : pertes acoustiques linéaires

Dans cette section, on souhaite vérifier si on peut supposer les pertes acoustiques linéaires dans le domaine des amplitudes rencontrées dans le manuscrit.

Les niveaux des cycles limites rencontrés en simulation sont faibles, de l'ordre de  $p_1/p_0 \approx 0.1\%$  (voir chapitre 4). De plus, à la section précédente, on a remarqué que le taux de croissance associé à la tuyère  $\alpha_t$  était le plus important parmi les pertes. Enfin, Javed and Chakraborty (2013) ont montré par simulation que le taux de croissance associé à la tuyère  $\alpha_t$  était invariant pour des amplitudes inférieures à  $p_1/p_0 \approx 15\%$ . En dessous de cette amplitude  $p_1/p_0 < 15\%$ , les pertes par la tuyère peuvent donc être supposées linéaires.

On supposera alors que l'ensemble des pertes peuvent être supposées linéaires par rapport à la source thermoacoustique qui est non-linéaire pour des niveaux de  $p_1/p_0 \approx 0.1\%$  (voir chapitre 5).

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode de Culick a été choisie pour modéliser les pertes acoustiques, dans le domaine linéaire.

Le taux de croissance et le glissement fréquentiel des pertes acoustiques dominantes associées à la rotation de l'écoulement, aux pertes par la tuyère, à la réponse de la combustion du propergol solide et à la présence de particules inertes sont donnés par :

$$\alpha_l = \alpha_{FT} + \alpha_t + \alpha_i + \alpha_{inert} < 0 \quad \delta\omega_l = \underbrace{\delta\omega_t}_{\approx 0} + \delta\omega_{inert} \quad (6.51)$$

avec  $l$  l'indice pour pertes acoustiques ("losses"),  $FT$  pour flow-turning,  $t$  pour tuyère,  $i$  pour propergol solide,  $inert$  pour particules inertes. Parmi les pertes, seules la tuyère et les particules inertes participent au glissement fréquentiel. On supposera dans la suite du manuscrit que la tuyère est suffisamment courte pour négliger le glissement fréquentiel induit par la tuyère. Cette hypothèse justifierait d'être vérifiée.

Pour le calcul de référence instable  $D_i = 120 \mu\text{m}$  et  $D_r = 60 \mu\text{m}$ , on trouve des valeurs de taux de croissance satisfaisantes par la méthode à la Culick. Ce résultat est confirmé par Gallier et al. (2018).

Pour en déduire le taux de croissance  $\alpha$  et le glissement fréquentiel  $\delta\omega$  de l'instabilité, il faut dorénavant proposer une modélisation pour la source ( $\alpha_{ITHAC}$ ,  $\delta\omega_{ITHAC}$ ) :

$$\alpha = \alpha_{ITHAC} + \alpha_l \quad \delta\omega = \delta\omega_{ITHAC} + \delta\omega_l \quad (6.52)$$

Les expressions du taux de croissance  $\alpha_{ITHAC}$  et du glissement fréquentiel  $\delta\omega_{ITHAC}$ , associées à la source de combustion des gouttes, sont développées dans le chapitre suivant (chapitre 7).

Enfin, on supposera dans l'ensemble du manuscrit que les pertes acoustiques sont strictement linéaires et que les non-linéarités permettant d'atteindre un cycle limite sont associées à la source thermoacoustique. Le chapitre 9 s'appuie notamment sur cette hypothèse.

## Chapitre 7

# Modèle analytique linéaire pour la réponse de la combustion

*Un modèle analytique est développé pour déterminer les fluctuations locales du taux de dégagement de chaleur produites par le nuage de gouttes réactives soumis à de petites perturbations acoustiques. Deux contributions aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont identifiées. La première provient des fluctuations du taux d'évaporation dues à l'écoulement oscillant autour des gouttes. La seconde est associée au mouvement de la frontière du nuage réactif, à la fin du processus de combustion des gouttes. Ce mouvement est dû aux oscillations du temps de combustion des gouttes. Les deux contributions aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont situées dans la couche limite acoustique, proche de la surface débitante du propergol solide. Des modèles quasi-stationnaires pour la réponse à l'excitation acoustique des fluctuations du diamètre des gouttes et de vitesse des gouttes sont développés. Avec un modèle de fluctuations de vitesse du gaz intégrant la couche limite acoustique, on peut finalement obtenir des expressions pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans le volume du nuage de gouttes et à sa frontière. Les résultats du modèle développé sont comparés à un modèle antérieur et à des simulations numériques. Il est montré que le nouveau modèle est plus proche de la simulation numérique. Les expressions obtenues permettent une meilleure compréhension de l'origine des fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Elles peuvent être utilisées pour prévoir la stabilité linéaire d'un moteur fusée à propergol solide à un coût de calcul réduit.*



## 7.1 Introduction

Le chapitre précédent propose une modélisation linéaire des pertes acoustiques. L'unique source d'instabilité considérée dans ce travail de thèse est le couplage thermoacoustique. Ce couplage est lié aux fluctuations de pression et aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur.

Les oscillations de pression dans le moteur peuvent être supposées acoustiques. La structure du champ acoustique correspond à celle d'un tube fermé-fermé. Pour modéliser le couplage qui constitue la source thermoacoustique, il reste à proposer une modélisation pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Ces fluctuations proviennent de la réponse des gouttes réactives à l'oscillation acoustique dans le moteur.

Ce chapitre est donc consacré à la modélisation des fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Une simulation de référence est d'abord décrite dans un premier temps. Dans un second temps, un modèle provenant de l'état de l'art et les résultats de cette simulation sont comparés. Des améliorations sont ensuite proposées. Les résultats de ce nouveau modèle sont comparés à la simulation de référence. Ce nouveau modèle pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur peut être utilisé pour déterminer le taux de croissance de l'instabilité en régime linéaire.

## 7.2 Calcul de référence stable

Dans cette section, le calcul de référence utilisé pour valider les modèles analytiques est décrit. Cette simulation est stable et forcée acoustiquement pour étudier une réponse linéaire de la combustion. L'ensemble de la modélisation utilisée est rappelée dans un premier temps. Les résultats de la simulation sont ensuite décrits.

### 7.2.1 Equations de conservation

Une seule classe de gouttes sphériques, brûlant individuellement, est considérée. Les simulations sont effectuées en résolvant les équations de Navier-Stokes compressibles avec la loi des gaz parfaits pour un écoulement diphasique modélisé par une méthode eulérienne-eulérienne. Cela donne le système d'équations de conservation suivant (Marble (1963)) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_g \\ \mathbf{W}_p \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}_g \\ \mathbf{F}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_g \\ \mathbf{S}_p \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

où  $\mathbf{W}_g$  et  $\mathbf{W}_p$  désignent les vecteurs de variable conservative pour la phase gazeuse et la phase particulaire respectivement :

$$\mathbf{W}_g = \begin{pmatrix} \rho_g \\ \rho_g \mathbf{u} \\ \rho_g E_g \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_p = \begin{pmatrix} \rho_p \alpha_p \\ \rho_p \alpha_p \mathbf{u}_p \\ \rho_p \alpha_p E_p \\ N_p \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Les vecteurs flux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie  $\mathbf{F}_g$  et  $\mathbf{F}_p$  pour chaque phase sont les suivants :

$$\mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} \rho_g \mathbf{u} \\ \rho_g \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{P} \\ \rho_g \mathbf{u} E_g - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_p = \begin{pmatrix} \rho_p \alpha_p \mathbf{u}_p \\ \rho_p \alpha_p \mathbf{u}_p \otimes \mathbf{u}_p \\ \rho_p \alpha_p \mathbf{u}_p E_p \\ \mathbf{u}_p N_p \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Les vecteurs termes source de masse, de quantité de mouvement et d'énergie  $\mathbf{S}_g$  et  $\mathbf{S}_p$  sont :

$$\mathbf{S}_g = \begin{pmatrix} N_p \dot{m} \\ N_p \dot{m} \mathbf{u}_p - \mathbf{F}_d \\ N_p \dot{m} (E_p + L_v + \Delta H_r) - Q_v - \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{u}_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_p = \begin{pmatrix} -\mathbf{S}_g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Dans ces expressions,  $\otimes$  est le produit tensoriel,  $\rho_g$  la masse volumique du gaz,  $\rho_p$  la masse volumique des gouttes supposée constante,  $\mathbf{u}$  la vitesse du gaz,  $\mathbf{u}_p$  la vitesse de gouttes,  $E_g$  l'énergie totale du gaz,  $E_p$  l'énergie totale des particules,  $N_p$  le nombre de particules par unité de volume (la coalescence et la fragmentation ne sont pas prises en compte),  $\dot{m}$  le débit massique des gouttes individuelles (par évaporation),  $L_v$  la chaleur latente de vaporisation,  $\Delta H_r$  l'enthalpie de réaction,  $Q_v$  le flux de chaleur convectif transféré des gaz chauds à la goutte,  $\mathbf{F}_d$  la force de traînée agissant sur les gouttes et  $\mathbf{P}$  le tenseur des contraintes d'un fluide newtonien donné par :

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \mu \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right) \quad (7.5)$$

avec  $p$  la pression de gaz,  $\mu$  la viscosité dynamique du gaz et  $\mathbf{I}$  la matrice d'identité. Dans ce modèle, les gouttes ont le même diamètre  $D$  dans chaque cellule de calcul donnée par :

$$D = \left( \frac{6\alpha_p}{\pi N_p} \right)^{1/3} \quad (7.6)$$

La modélisation de la combustion des gouttes d'aluminium reste toujours un problème difficile (chapitre 3). La loi du  $D^2$  donne seulement une approximation

grossière du taux d'évaporation des gouttes d'aluminium. Une déviation de la loi du  $D^2$  est observée à cause de la formation d'un lobe d'oxyde d'aluminium sur la goutte (chapitre 3). La loi du  $D^2$  est utilisée ici en première approximation pour obtenir un aperçu de la réponse d'un nuage réactif de gouttes d'aluminium transportées par un écoulement et soumises à des oscillations acoustiques. Le taux d'évaporation massique des gouttes  $\dot{m}_{D^2}$  est, sous l'hypothèse d'un nombre de Lewis unitaire, modélisé par :

$$\dot{m}_{D^2} = \pi D \frac{\mu}{\text{Pr}} \ln(1 + B) \text{Sh} \quad (7.7)$$

où Pr est le nombre de Prandtl, Sh le nombre de Sherwood et B le nombre de Spalding thermique exprimé par (Lupoglazoff et al. (2002), Gallier and Godfroy (2009)) :

$$B = \frac{C_{P,g}(T_g - T_p) + \Delta H_r}{L_v} \quad (7.8)$$

avec  $C_{P,g}$  la capacité calorifique spécifique du gaz à pression constante,  $T_g$  la température du gaz et  $T_p$  la température des gouttes (en combustion). Pour tenir compte des résidus inertes d'oxyde d'aluminium restant après combustion (Beckstead (2002), Genot et al. (2017)), la combustion est brusquement éteinte lorsque le diamètre des gouttes  $D$  tombe en dessous d'une valeur critique  $D_r$  (Braconnier et al. (2018), chapitre 3). Les gouttes de tailles  $D_r$  sont donc inertes et transportées dans la chambre. Le débit massique d'une goutte est finalement défini comme suivant :

$$\dot{m} = \dot{m}_{D^2} \mathcal{H}(D - D_r) \quad (7.9)$$

où  $\mathcal{H}$  est la fonction Heaviside. Les gouttes avec un diamètre  $D = D_r$  modélisent les résidus inertes d'oxyde d'aluminium qui persistent dans l'écoulement après arrêt de la combustion. Ce modèle n'est valide que pour les résidus inertes de grande taille. La fonction Heaviside est utilisée ici pour modéliser des dynamiques en fin de vie des gouttes assez abruptes (explosions, effets de jets), comme observées dans certaines expériences (Fabignon et al. (2003), Beckstead (2002), Li et al. (2018)). Seuls les oxydes de taille importante sont considérés, la fumée d'oxyde d'aluminium résultant de la combustion n'est pas prise en compte dans le manuscrit (chapitre 3). Cette modélisation pour le taux d'évaporation massique correspond au modèle ASSM du chapitre 3.

Des simulations numériques directes d'une goutte d'aluminium fixe et sphérique en combustion dans un écoulement oscillant ont révélé que la réponse de la goutte à l'oscillation est contrôlée par la convection (Gallier et al. (2011)). Cette réponse est bien modélisée par linéarisation de la corrélation de Ranz-Marshall (Ranz and Marshall (1952), Gallier et al. (2011)). Dans les simulations

suivantes, le nombre de Sherwood suit donc la corrélation de Ranz-Marshall :

$$\text{Sh} = 2 + 0.6\text{Re}_p^{1/2}\text{Pr}^{1/3} \quad (7.10)$$

où le nombre de Reynolds particulaire est défini comme suivant :

$$\text{Re}_p = \frac{\rho_g |\delta \mathbf{u}_p| D}{\mu} \quad \text{avec} \quad \delta \mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p - \mathbf{u} = (u_p - u)\mathbf{e}_x + (v_p - v)\mathbf{e}_r \quad (7.11)$$

avec  $\delta \mathbf{u}_p$  le vecteur vitesse relative des gouttes au gaz. La force de traînée  $\mathbf{F}_d$  agissant sur une goutte sphérique et en combustion est modélisée par la corrélation de Schiller et Naumann (Schiller and Naumann (1933), Gallier and Godfroy (2009)) :

$$\mathbf{F}_d = -\frac{18\mu\alpha_p (1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687})}{D^2(1 + B)} \delta \mathbf{u}_p \quad (7.12)$$

dans lequel  $\delta \mathbf{u}_p$  est la vitesse relative des gouttes par rapport au gaz.

Le nombre de Biot étant petit, les gouttes d'aluminium sont supposées isothermes lors de leur combustion. La température des gouttes est prise égale à la température de saturation de l'aluminium  $T_p = T_{sat}$ . Il est également supposé que tout le flux de chaleur convectif  $Q_v$  provenant des gaz chauds est utilisé pour maintenir l'évaporation des gouttes :

$$Q_v = N_p \dot{m} L_v \quad (7.13)$$

Cette approximation simplifie les termes sources  $\mathbf{S}_g$  et  $\mathbf{S}_p$  dans l'équation (7.4). Lorsque le diamètre de la goutte atteint la valeur critique  $D = D_r$ , le flux de chaleur convectif  $Q_v$  autour des particules inertes d'oxyde d'aluminium est modélisé comme dans Lupoglazoff et al. (2002) et Gallier and Godfroy (2009). Dans le cadre de ces hypothèses, le taux de dégagement de chaleur induit par la combustion de l'aluminium s'écrit :

$$\dot{q} = N_p \dot{m} \left( \Delta H_r + C_{V,p} T_p - C_{V,g} T_g + \frac{\delta \mathbf{u}_p^2}{2} \right) \quad (7.14)$$

où  $C_{V,p} = C_{P,p}$  indique la capacité thermique spécifique des gouttes et  $C_{V,g}$  représente la capacité thermique spécifique du gaz à volume constant. On définit également  $\dot{q}_{D^2}$  le taux de dégagement de chaleur qui serait produit si la combustion se poursuivait jusqu'à l'évaporation complète des gouttes d'aluminium. Dans ce cas, le taux d'évaporation massique d'aluminium  $\dot{m}$  défini par l'équation (7.9) avec l'oxyde d'aluminium est remplacé dans l'équation (7.14) par  $\dot{m}_{D^2}$  donné par Eq. (7.7) :

$$\dot{q}_{D^2} = N_p \dot{m}_{D^2} \left( \Delta H_r + C_{V,p} T_p - C_{V,g} T_g + \frac{\delta \mathbf{u}_p^2}{2} \right) \quad (7.15)$$

### 7.2.2 Modélisation physico-numérique

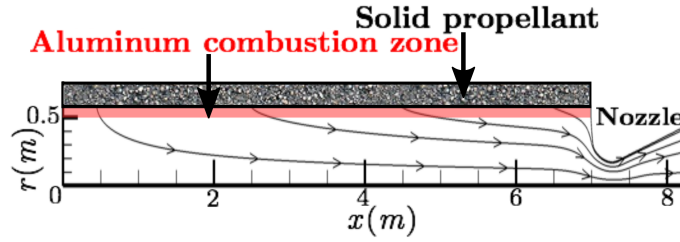
La modélisation numérique est décrite pour l'essentiel au chapitre 4. Les simulations sont réalisées avec CPS, un code de simulation numérique d'écoulement interne d'ArianeGroup (Durand et al. (2000), annexe A). Les équations de conservation sont discrétisées et résolues par une approche volume fini adaptée aux maillages non structurés. Les schémas numériques sont d'ordre 2 en espace (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) et d'ordre 2 en temps (méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre 2). Le pas de temps est limité par une condition de Courant-Friedrichs-Lewy définie à  $CFL = 0.55$ .

Les simulations présentées dans ce travail sont réalisées en 2D axisymétrique. La configuration montrée Fig. 7.1 est un moteur cylindrique, avec une injection radiale à  $r = R = 0.593$  m. Cette injection massive modélise le gaz et les gouttes d'aluminium provenant de la combustion du propergol solide. La vitesse de combustion du propergol solide est négligée car la vitesse d'écoulement et la vitesse du son sont beaucoup plus élevées que la vitesse de combustion. La géométrie est donc considérée fixe durant le temps de simulation. La chambre a un rayon  $R = 0.593$  m, une longueur  $L = 7$  m et un axe de symétrie à  $r = 0$ . L'écoulement sort par la tuyère amorcée avec une gorge de rayon  $R_t = 0.175$  m située à  $x_t = 7.3$  m du fond avant de la chambre à  $x = 0$ . Le fond avant du moteur correspond à une surface plane.

Le maillage est composé de 360 000 quadrilatères avec environ 600 points dans la direction longitudinale et 600 points dans la direction radiale. Le maillage est raffiné près de la surface de combustion du propergol pour résoudre la combustion distribuée de l'aluminium. La région où se produit la réaction de combustion de l'aluminium est indiquée en rouge sur la figure 7.1. Elle correspond à une région mince en proche surface du propergol solide. La plus petite maille est à la surface du propergol et est d'environ 0.1 mm.

La turbulence n'est pas prise en compte dans ces simulations pour centrer l'analyse sur le couplage entre l'acoustique et la combustion instationnaire de gouttes d'aluminium (Apte and Yang (2003), Gallier and Godfroy (2009)) sans aborder la complexité des interactions avec la turbulence. La convergence du maillage a été vérifiée et aucune différence significative n'a été constatée entre les résultats calculés avec ce maillage et un maillage plus grossier de 172 000 quadrilatères.

Des conditions de non-glissement sont utilisées pour les phases gazeuse et particulaire aux parois, au fond avant et à la tuyère. La combustion du propergol solide est modélisée par une condition limite en  $r = R$  (entre  $x = 0$  et



**FIGURE 7.1** – Schéma de moteur à propergol solide. La zone de combustion des gouttes est mise en évidence par la zone colorée en rouge. Quelques lignes de courant de l'écoulement stationnaire sont tracés

L) par une injection de gaz brûlés chauds à un débit massique constant avec un vecteur vitesse perpendiculaire à la surface et pointant vers l'intérieur. Des gouttes d'aluminium et de gaz sont injectées radialement à la même vitesse  $v_{p,i} = v_i$ . Le flux de masse surfacique du mélange gaz-particules libéré par la combustion du propergol solide est défini par  $(\rho v)_i = 24.6 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ . En considérant uniquement les agglomérats d'aluminium, la fraction massique de gouttes d'aluminium injectée est fixée à la valeur  $\kappa_i = 0.06$  (chapitre 4). La réponse en combustion du propergol solide aux oscillations acoustiques n'est pas considérée ici pour centrer l'analyse sur les instabilités induites par la combustion de gouttes d'aluminium.

Les gouttes d'aluminium ont un diamètre initial  $D_i = 120 \mu\text{m}$  correspondant aux agglomérats d'aluminium et le diamètre du résidu d'oxyde d'aluminium est fixé à  $D_r = 50 \mu\text{m}$  (Genot et al. (2017), Salita (1988)). Des gouttes d'aluminium sont injectées à partir de la surface du propergol solide à la température de saturation  $T_{p,i} = T_{sat} = 2791 \text{ K}$ . Le gaz injecté est à la température  $T_{g,i} = 3440 \text{ K}$ . La capacité thermique spécifique à pression constante de la phase gazeuse est fixée à  $C_{P,g} = 1997 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$  et à  $C_{P,p} = 1177 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$  pour les gouttes d'aluminium. Le rapport de capacité thermique spécifique du gaz est  $\gamma = C_{P,g}/C_{V,g} = 1.16$ . La chaleur latente de vaporisation des gouttes d'aluminium est  $L_v = 10.8 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$  et l'enthalpie de réaction, après vaporisation, est de  $\Delta H_r = 9.53 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$ . Les propriétés des gouttes d'aluminium et du gaz utilisées dans ces simulations sont résumées dans la Table 7.1.

### 7.2.3 Résultats de simulation

La configuration étudiée est thermoacoustiquement stable, ce qui signifie que des oscillations auto-entretenues ne se développent pas dans le MPS. Une excitation acoustique est donc imposée au fond avant à  $x = 0$  avec une oscillation de pression d'amplitude  $\hat{\eta} = 4200 \text{ Pa}$  bloquée sur le premier mode de

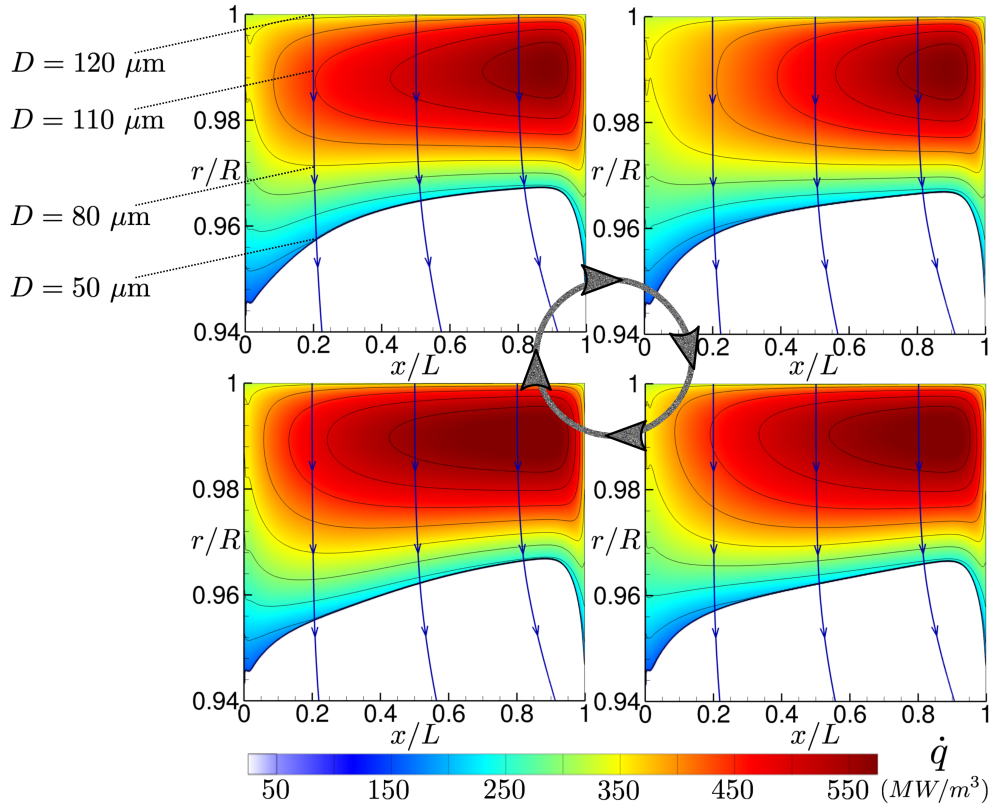
**TABLE 7.1 – Propriétés des gouttes d'aluminium et du gaz dans le MPS**

$\mu$	$9.1 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$	Pr	0.4
$D_i$	120 $\mu\text{m}$	$D_r$	50 $\mu\text{m}$
$(\rho v)_i$	24.6 $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$	$\Delta H_r$	$9.53 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$
$\kappa_i$	6%	$L_v$	$10.8 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$
$T_{g,i}$	3440 K	$T_{sat}$	2791 K
$C_{P,g}$	1997 $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$C_{P,p}$	1177 $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$\gamma$	1.16	$\rho_p$	2000 $\text{kg.m}^{-3}$
$\hat{\eta}$	4200 Pa	$f$	70.45 Hz

l'instabilité à la fréquence  $f = 70.45$  Hz. Cette fréquence est légèrement différente du premier mode acoustique pur, elle a été choisie égale à celle du cycle limite du cas de calcul instable  $D \in [120; 60] \mu\text{m}$  (chapitre 4), afin d'intégrer les effets de glissement fréquentiel des gains et des pertes acoustiques.<sup>1</sup> Le champ acoustique résultant est une onde stationnaire dans le MPS avec des conditions limites acoustiques fermée-fermée aux deux extrémités. Il a été vérifié que le niveau de forçage  $\hat{\eta}/p_0 = 4. \cdot 10^{-4}$  est suffisamment petit par rapport à la pression moyenne  $p_0 \simeq 100$  bar pour obtenir des fluctuations linéaires de la pression et du taux de dégagement de chaleur. Le niveau d'oscillation choisi pour exciter le système correspond à la moitié de l'amplitude de pression acoustique observée au cycle limite du cas instable étudié au chapitre 4.

La réponse du taux de dégagement de chaleur dû à la combustion de l'aluminium est illustrée à la figure 7.2 à quatre instants répartis régulièrement dans un cycle de forçage. Le temps entre chaque instant est  $T/4 \approx 3.5 \times 10^{-3}$  s, avec  $T = 1/f$  la période acoustique. Les axes sont étirés dans la direction radiale sur cette figure. Le cadre de vue est zoomé sur la zone de combustion en aluminium indiquée en rouge sur la figure 7.1. Les gouttes d'aluminium sont injectées à  $r/R = 1$  et quelques lignes de gouttes sont montrées dans la Fig. 7.2 par des flèches bleues. Elles illustrent que les gouttes traversent la zone de combustion avec une trajectoire quasi-radiale. La régression en diamètre de goutte le long d'une ligne de courant est aussi indiquée.

1. Les cas de calcul  $D \in [120; 60] \mu\text{m}$  et  $D \in [120; 50] \mu\text{m}$  sont jugés assez proches. En effet, bien que le cas  $D \in [120; 60] \mu\text{m}$  soit instable, il est en limite de stabilité. On peut donc penser que les sources et pertes acoustiques sont proches et en particulier que les glissements fréquentiels induits sont équivalents. Le cas  $D \in [120; 50] \mu\text{m}$  permet d'étudier la dynamique de combustion dans un cas stable pulsée à la fréquence excitée qui soit représentative de la source qui entraîne une instabilité (comme dans le cas  $D \in [120; 60] \mu\text{m}$ ). On peut alors imposer une amplitude permettant d'observer une réponse linéaire de la combustion (au cycle limite, la combustion a un comportement non-linéaire).

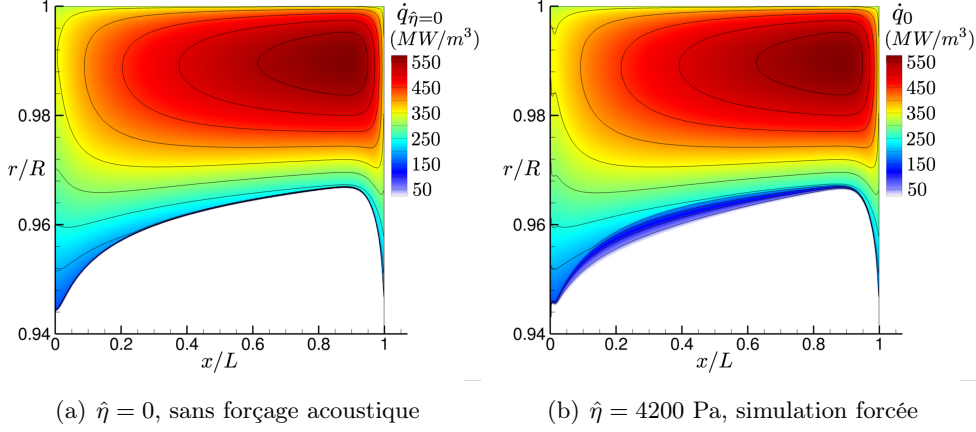


**FIGURE 7.2** – Taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}$  induit par la combustion de l'aluminium à quatre instants dans le cycle de  $f = 70.45$  Hz. Les flèches bleues correspondent à des lignes de courant de la phase particulière. Les diamètres  $D$  de gouttes sont indiqués le long d'une ligne de courant

La figure 7.2 révèle les fluctuations longitudinales du taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}$  dans tout le volume de combustion. Cette contribution est associée aux perturbations de la combustion individuelle des gouttes d'aluminium dues aux fluctuations de vitesse acoustique longitudinale imposées à l'écoulement, selon Gallier et al. (2011) et Gallier and Godfroy (2009).

La seconde caractéristique remarquable de la Fig. 7.2 est un mouvement de battement de frontière du volume de combustion correspondant à la région où le diamètre des gouttes en aluminium a atteint sa valeur critique  $D = D_r$  séparant la zone de combustion où  $D > D_r$  de la zone remplie de particules inertes d'oxyde d'aluminium de diamètre  $D_r$ . Ce mouvement se déroule essentiellement dans le sens radial tandis que le mode acoustique est contrôlé par une oscillation longitudinale. Il a été démontré que ce mouvement provient des oscillations de temps de vie des gouttes (Genot et al. (2019), annexe C).





**FIGURE 7.3** – Distribution du taux de dégagement de chaleur dû à la combustion de l'aluminium. (a) :  $\hat{q}_{\hat{\eta}=0}$  sans forçage acoustique. (b) :  $\dot{q}_0$  moyenne sur le cycle de forçage acoustique

La figure 7.3(a) montre la distribution du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}_{\hat{\eta}=0}$  sans forçage acoustique ( $\hat{\eta} = 0$ ). Cette distribution est comparée à celle de la Fig. 7.3(b) correspondant au taux de dégagement de chaleur calculé sur le cycle de forçage  $\dot{q}_0 = \frac{1}{T} \int_T \dot{q} dt$ , où  $T = 1/f$  est la période de forçage acoustique. La fréquence de forçage est  $f = 70.45$  Hz et l'amplitude de fluctuations de pression est fixée à  $\hat{\eta} = 4200$  Pa au fond avant du MPS. Loin de la frontière de la zone de combustion, la distribution du taux de dégagement de chaleur est la même dans les deux images. Les différences sont observées près de la zone de fin de combustion, où la frontière est en mouvement dans la Fig. 7.2. Ceci correspond à la zone bleue de la Fig. 7.3(b). Le taux de dégagement de chaleur répond non-linéairement au battement de frontière, malgré de faibles amplitudes. Ces effets non-linéaires doivent être pris en compte dans la modélisation des fluctuations du taux de dégagement de chaleur.

Tous les résultats suivants correspondent à la simulation forcée avec  $\hat{\eta} = 4200$  Pa et  $f = 70.45$  Hz. Pour illustrer la réponse de la combustion de l'aluminium aux oscillations acoustiques, la Fig. 7.4(a) montre le module  $|\hat{q}|$  des fluctuations du taux de dégagement de chaleur<sup>2</sup> qui en résulte dans le MPS. Comme dans la Fig. 7.2, des fluctuations relativement faibles du taux de dégagement de chaleur dégagée  $|\hat{q}|$  peuvent être identifiées en bleu dans le volume de combustion de la Fig. 7.4(a). Cette contribution est désignée comme contribution volume. Des niveaux plus élevés de fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont

2. On rappelle que  $\hat{\cdot}$  signifie les fluctuations dans l'espace de Fourier. L'indice 1 définit les fluctuations dans l'espace temporel.

observés à la frontière du volume de combustion. Le mouvement de cette frontière entraîne d'importantes fluctuations du taux de dégagement de chaleur, désignées dans ce manuscrit comme contribution de frontière.

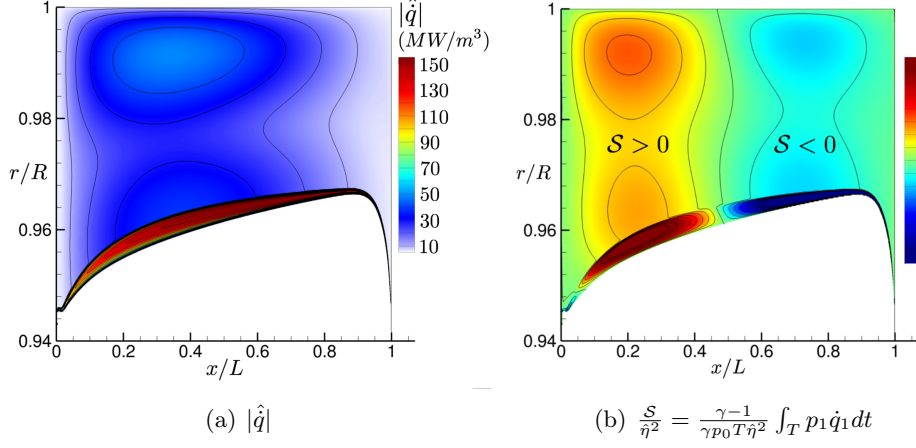
La production d'oscillations de pression dans une instabilité thermoacoustique est due au couplage entre les fluctuations de pression et du taux de dégagement de chaleur, associées ici à une combustion instationnaire des gouttes d'aluminium. Pour mettre en évidence ce couplage, le terme source local de Rayleigh  $\mathcal{S}$  apparaissant dans le bilan d'énergie acoustique est tracé dans la Fig. 7.4(b) :

$$\mathcal{S} = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0 T} \int_T p_1 \dot{q}_1 dt \quad (7.16)$$

avec  $T = 1/f$  la période acoustique. Les couleurs rouges de cette figure correspondent aux valeurs positives du terme source Rayleigh  $\mathcal{S}$  et sont associées à des régions déstabilisantes. Les couleurs bleues correspondent aux valeurs négatives de  $\mathcal{S}$  et sont associées aux régions de l'écoulement amortissant les oscillations. La figure 7.4(b) montre qu'une combustion instationnaire des gouttes au fond avant déstabilise le système, tandis que la combustion se déroulant près de la tuyère stabilise le MPS. Des contributions élevées en  $\mathcal{S}$  sont visibles dans le volume et dans la région de battement de frontière de la Fig. 7.4(b), indiquant que les contributions à la fois volume et frontière aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur identifiées dans la Fig. 7.4(a) doivent être prises en compte dans la production/amortissement de l'oscillation de pression. Pour ce calcul, par intégration de  $\mathcal{S}$ , la contribution frontière est d'environ 25% et la contribution volume de 75% de la source thermoacoustique  $\int_V \mathcal{S} dV$ , avec  $V$  le volume de la chambre.

### 7.3 Modèle de réponse linéaire de la combustion de l'aluminium

En raison de la petite taille des gouttes et des basses fréquences acoustiques étudiées dans ce travail, la réponse des gouttes aux perturbations acoustiques est supposée être quasi-stationnaire (Zhu et al. (2001), Zhu et al. (2002), Gallier et al. (2011), Sujith et al. (2000)). Cette propriété est utilisée dans la suite pour développer un modèle de combustion instationnaire avec la même approximation quasi-stationnaire et en linéarisant les équations de base présentées dans la sous-section 7.2 autour du champ moyen. On notera que Hirschberg (2007) commente la possibilité d'un délai induit par la mémoire de la couche limite thermique (pour la grille d'un tube de Rijke), qui n'est pas pris en compte dans nos modélisations numérique ou analytique pour les gouttes d'aluminium, car



**FIGURE 7.4** – (a) Module des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $|\hat{q}|$  et (b) indice de Rayleigh normalisé par l'amplitude de pression au carré  $\hat{S}/\hat{\eta}^2$

on suppose des dynamiques quasi-stationnaires.

Comme le système est soumis à un forçage harmonique acoustique à la fréquence  $f$ , tous les signaux des variables physiques sont supposés être également harmoniques à la même fréquence. Le signal  $X$  est décomposé en  $X = X_0 + X_1$ , où la moyenne est donnée par :

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_T X dt \quad (7.17)$$

avec  $T = 1/f$  la période acoustique. L'indice 1 représente l'état perturbé autour de la valeur moyenne désignée par l'indice 0. La transformée de Fourier correspond à :

$$\hat{X} = \int_T X \exp(-i\omega t) dt, \quad \omega = 2\pi f \quad (7.18)$$

où  $\hat{\cdot}$  représente la composante de Fourier de la perturbation et la transformée de Fourier inverse produit la perturbation :

$$X_1 = \text{Re} \left( \hat{X} \exp(i\omega t) \right) \quad (7.19)$$

Le modèle de [Gallier and Godfroy \(2009\)](#) pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur est brièvement rappelé et les résultats sont comparés à la simulation numérique. Des développements analytiques sont ensuite réalisés pour mieux modéliser la dynamique de gouttes et les perturbations du taux de dégagement de chaleur qui en résultent en prenant en compte les fluctuations de diamètre de gouttes et le mouvement de frontière de la zone de combustion.

### 7.3.1 Modèle de Gallier et Godfroy

Dans l'annexe A de Gallier and Godfroy (2009), Gallier et Godfroy ont dérivé une expression pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  produites par la combustion des gouttes d'aluminium quand elles sont soumises aux fluctuations acoustiques. Ce modèle est basé sur l'hypothèse que les fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont induites par des fluctuations de flamme de chaque goutte individuelle dans le nuage réactif.

Leur analyse est basée sur les mêmes équations de conservation que dans ce chapitre. Ils ont tout d'abord démontré que les fluctuations du taux de dégagement de chaleur contribuaient davantage que les effets de traînée ou les fluctuations de l'énergie cinétique à la production d'oscillations de pression. Une analyse de perturbation de l'équation (7.14) conduit dans ce cas à :

$$\hat{q} = \widehat{N_p \dot{m}} \left( \Delta H_r + C_{V,p} T_{sat} - C_{V,g} T_{g,0} + \frac{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2}{2} \right) \quad (7.20)$$

où les fluctuations de l'enthalpie de réaction sont également négligées. Le taux de dégagement de chaleur moyen correspondant  $\dot{q}_0$  est donné par :

$$\dot{q}_0 = N_{p,0} \dot{m}_0 \left( \Delta H_r + C_{V,p} T_{sat} - C_{V,g} T_{g,0} + \frac{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2}{2} \right) \quad (7.21)$$

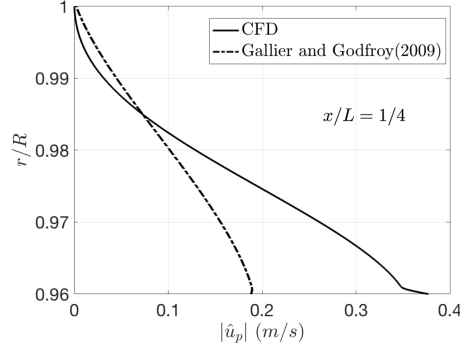
L'expression des fluctuations du taux de dégagement de chaleur sans dimension s'écrit :

$$\frac{\hat{q}}{\dot{q}_0} = \frac{\hat{N}_p}{N_{p,0}} + \frac{\hat{\dot{m}}}{\dot{m}_0} \quad (7.22)$$

Les fluctuations relatives du nombre de gouttes par volume  $\hat{N}_p/N_{p,0}$  sont des termes du second ordre par rapport aux fluctuations du taux d'évaporation massique  $\hat{\dot{m}}/\dot{m}_0$  (Gallier and Godfroy (2009)). En négligeant les fluctuations de diamètre de goutte  $\hat{D}$ , les fluctuations de température du gaz  $\hat{T}_g$ , les fluctuations de masse volumique du gaz  $\hat{\rho}_g$ , les fluctuations de vitesses radiales du gaz  $\hat{v}$  et particulaire  $\hat{v}_p$  (Gallier and Godfroy (2009), Flandro et al. (2000)), la linéarisation de  $\dot{m}$  dans Eq. (7.9) donne :

$$\frac{\hat{q}}{\dot{q}_0} = \frac{\hat{\dot{m}}}{\dot{m}_0} = \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} (\hat{u}_p - \hat{u}) \quad (7.23)$$

Dans ce modèle, les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  résultent uniquement, en fluctuations, de la vitesse longitudinale des gouttes  $\hat{u}_p$  et de la vitesse longitudinale du gaz  $\hat{u}$ . Les fluctuations de vitesse de gouttes  $\hat{u}_p$  peuvent être exprimées en fonction des fluctuations de vitesse de gaz  $\hat{u}$ . La combinaison



**FIGURE 7.5** – Module des fluctuations de vitesse longitudinale des gouttes  $|\hat{u}_p|$  à  $x/L = 1/4$  dans la zone de combustion de l'aluminium. Ligne continue : CFD (simulation numérique). En pointillés-tirets : Eq. (7.28)

de la conservation de la quantité de mouvement avec la conservation en masse de la phase des gouttes (Eqs. (7.1)-(7.4)) conduit à l'équation de transport suivante dans la direction longitudinale pour la vitesse de la phase particulaire :

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial r} = -\frac{\delta u_p}{\tau_d} \quad (7.24)$$

où  $\tau_d$  est le temps caractéristique de traînée des gouttes :

$$\tau_d = \frac{1 + B}{1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.687}} \frac{\rho_p D^2}{18\mu} \quad (7.25)$$

Négligeant les fluctuations radiales de vitesse (gaz et particules)  $v_p \simeq v_{p,0}$  (Flandro et al. (2000), Culick (2006)), Eq. (7.24) donne au premier ordre :

$$\frac{\partial u_{p,1}}{\partial t} + u_{p,1} \frac{\partial u_{p,0}}{\partial x} + u_{p,0} \frac{\partial u_{p,1}}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_{p,1}}{\partial r} = -\frac{\delta u_{p,1}}{\tau_{d,0}} + \frac{\delta u_{p,0}}{\tau_{d,0}^2} \tau_{d,1} \quad (7.26)$$

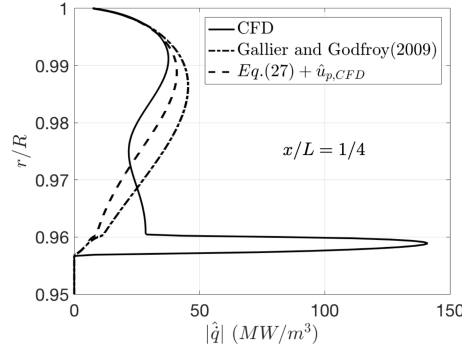
En négligeant également les termes d'advection et les fluctuations du temps caractéristique de traînée dans Eq. (7.26), on obtient :

$$\frac{\partial u_{p,1}}{\partial t} = -\frac{\delta u_{p,1}}{\tau_{d,0}} \quad (7.27)$$

Dans l'espace de Fourier, Eq. (7.27) donne :

$$\hat{u}_p = \frac{\hat{u}}{1 + i\omega\tau_{d,0}} \quad (7.28)$$

Soit l'expression dérivée par Temkin and Dobbins (1966) pour l'étude de la dispersion et de l'amortissement d'une onde acoustique  $1D$  dans un milieu



**FIGURE 7.6** – Module de fluctuation du taux de dégagement de chaleur  $|\hat{q}|$  à  $x/L = 1/4$  dans la zone de combustion de l'aluminium. Ligne continue : CFD (simulation numérique). En pointillés-tirets : Eq. (7.29). En tirets : Eq. (7.23)

diphase inerte au repos. En substituant Eq. (7.27) dans Eq. (7.23), on obtient finalement :

$$\frac{\hat{q}}{\dot{q}_0} = -\frac{\text{Sh}_0 - 2\omega\tau_{d,0}(i + \omega\tau_{d,0})}{2\text{Sh}_0} \frac{\delta u_{p,0}}{1 + \omega^2\tau_{d,0}^2} \frac{\hat{u}}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \quad (7.29)$$

Cette fonction de transfert donne les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  en fonction des propriétés d'écoulement moyen et des fluctuations de vitesse longitudinale du gaz  $\hat{u}$ . Les deux expressions Eq. (7.28) et (7.29) sont comparées aux simulations numériques illustrées aux Figs. 7.5 et 7.6, au quart de la chambre du moteur  $x/L = 1/4$  et dans la zone de combustion de l'aluminium. Pour être cohérent, les propriétés d'écoulement moyen dans les équations (7.28) et (7.29) sont extraites de la simulation numérique.

Le module des fluctuations de vitesse longitudinale de gouttes  $|\hat{u}_p|$  est tracé dans la Fig. 7.5. Le modèle analytique Eq. (7.28), dans lequel  $\hat{u}$  et  $\tau_{d,0}$  sont extraits de la simulation, reproduit à peu près le comportement observé dans la simulation près de la surface du propulseur à  $r/R \sim 1$ , mais les résultats s'écartent rapidement lorsque la distance à la surface du propergol augmente. Cela signifie que le filtre passe-bas Eq. (7.28) ne modélise pas correctement les fluctuations de vitesse longitudinale de gouttes  $\hat{u}_p$  dans la zone de combustion de l'aluminium.

La figure 7.6 montre le module des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $|\hat{q}|$  résultant de la combustion de l'aluminium. Les résultats numériques du code CPS sont comparés aux expressions analytiques Eq. (7.29) de Gallier and Godfroy (2009) et aux prédictions de Eq. (7.23), dans lesquelles les fluctuations de vitesse longitudinale du gaz  $\hat{u}$  sont prises de la simulation numérique. Dans Eq. (7.29), les fluctuations de vitesse de gouttes  $\hat{u}_p$  sont modélisées avec

Eq. (7.28) et dans Eq. (7.23) elles sont extraites des simulations numériques.

Les fluctuations du taux de dégagement de chaleur à la Fig. 7.6 ne sont pas bien reproduites par aucun des modèles. Modéliser correctement les fluctuations de vitesses gaz  $\hat{u}$  et particule  $\hat{u}_p$  améliore les prévisions près de la surface du propergol, mais le modèle des fluctuations du taux de dégagement de chaleur Eq. (7.23) ne permet pas de reproduire la tendance correcte sur l'ensemble du volume de combustion avec des différences importantes près de la frontière où la combustion des gouttes s'éteint. Le résultat CFD (de la simulation numérique) des fluctuations de dégagement de chaleur met en évidence un pic élevé à la Fig. 7.6 près de l'extrémité de la zone de combustion de l'aluminium. Ce pic résulte du mouvement de la frontière du volume de combustion et n'est pas reproduit par les modèles analytiques. Il a cependant été démontré que ce mouvement contribue largement à la source thermoacoustique (chapitre 5).

Dans la section suivante, nous développons un nouveau modèle qui reproduit mieux les fluctuations du taux de dégagement de chaleur à l'intérieur du volume de combustion et à la frontière du volume de combustion.

### 7.3.2 Nouveau modèle des fluctuations du taux de dégagement de chaleur

Le temps de vie des gouttes d'aluminium est déterminé par la condition sur le diamètre de goutte  $D = D_r$ . Cette condition est utilisée pour éteindre brutalement la combustion avec une fonction Heaviside dans l'équation (7.9). Il a été démontré en annexe C que les oscillations de temps de vie d'une goutte sont susceptibles d'induire un mouvement  $\hat{r}_c$  de la frontière du volume de combustion distribué, comme indiqué à la Fig. 7.2. Ce mouvement constitue une source supplémentaire de fluctuations du taux de dégagement de chaleur et une autre source thermo-acoustique (Genot et al. (2017), Genot et al. (2019)), comme illustré à la Fig. 7.4(b).

Les fluctuations du taux de dégagement de chaleur observées à la frontière de la zone de combustion et correspondant au fort pic de la Fig. 7.6 proviennent des fluctuations de la fonction de Heaviside et du diamètre des gouttes (Genot et al. (2019)). Dans les équations (7.9) et (7.14), négliger les fluctuations du diamètre des gouttes supprime l'impact de la fonction Heaviside et la source des fluctuations du taux de dégagement de chaleur dues aux oscillations de temps de vie des gouttes.

Considérant une réponse linéaire du taux de dégagement de chaleur, les fluc-

tuations sont décomposées en tant que somme d'une contribution volume (*v.c.*) et d'une contribution frontière (*b.c.*). En utilisant cette décomposition dans Eq. (7.9), on obtient :

$$\hat{q} = \hat{q}_{v.c.} + \hat{q}_{b.c.} = \hat{q}_{D^2} (\mathcal{H}(D - D_r))_0 + \hat{q}_{D^2,0} \widehat{\mathcal{H}(D - D_r)} \quad (7.30)$$

### 7.3.2.1 Contribution de la frontière

La contribution frontière peut être exprimée dans l'espace de Fourier par<sup>3</sup> (annexe C) :

$$\hat{q}_{b.c.} = -\hat{q}_{D^2,0} \frac{2}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{r - r_{c,0}}{|\hat{r}_c|} \right)^2 \right)^{1/2} \frac{\hat{r}_c}{|\hat{r}_c|} \quad (7.31)$$

où  $r$  est la position radiale et  $\hat{r}_c$  la composante de Fourier de la perturbation radiale autour de la position moyenne  $r_{c,0}$  de la frontière de la zone de combustion. Ce modèle est limité aux trajectoires radiales de gouttes de carburant, ce qui est une approximation raisonnable en raison de la faible épaisseur du volume de combustion (voir Fig. 7.2).

Cette contribution résulte des non-linéarités locales du taux de dégagement de chaleur à la fin du processus de combustion. La position frontière moyenne  $r_{c,0}$  est donnée par (annexe C) :

$$r_{c,0} = R + \frac{2}{D_i^2 - D_r^2} \int_{D_i}^{D_r} t_{c,0} v_p D_0 dD \quad (7.32)$$

avec  $t_{c,0}$  le temps de vie moyenne d'une goutte :

$$t_{c,0} = \frac{\rho_p \text{Pr}(D_i^2 - D_r^2)}{4\mu \ln(1 + B)\text{Sh}} \quad (7.33)$$

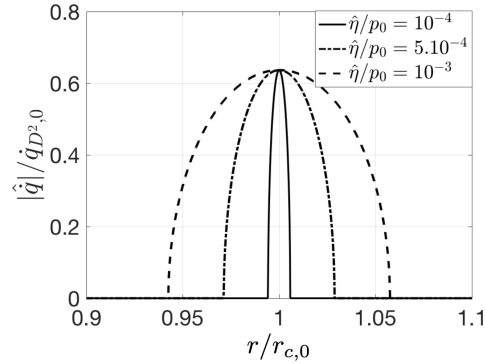
Le mouvement de la frontière du volume de combustion est lié aux fluctuations de diamètre de gouttes, par l'intermédiaire d'oscillations du temps de vie, et au champ moyen (annexe C) :

$$\hat{r}_c = \frac{2t_{c,0}v_p D_0}{D_i^2 - D_r^2} \hat{D} \quad (7.34)$$

Les fluctuations de diamètre sont exprimées dans la sous-section 7.3.2.2 et elles sont linéaires, donc dépendantes linéairement de l'enveloppe de l'amplitude de pression  $\hat{\eta}$ .

3. Le modèle de contribution frontière est la transformée de Fourier d'une fonction Heaviside qui bat symétriquement autour de la position moyenne  $r_{c,0}$  avec une période égale à la période acoustique.





**FIGURE 7.7** – Module des fluctuations du taux de dégagement de chaleur induites par la contribution frontière pour les niveaux de fluctuations de pression suivants :  $\hat{\eta} = 10^3$ ,  $5 \cdot 10^3$  et  $10^4$  Pa. La position moyenne de la frontière est  $r_{c,0}$

La figure 7.7 illustre le comportement du modèle analytique ci-dessus pour différentes amplitudes de forçage acoustique, dans un cas simplifié à un quart du tube (voir annexe C). On observe d’abord que le maximum en terme de fluctuations se trouve à la position moyenne  $r = r_{c,0}$  est invariant quelle que soit l’enveloppe de l’amplitude  $\hat{\eta}$ . Seule la quantité  $\dot{q}_{D^2,0}$  peut influencer le niveau des fluctuations du taux de dégagement de chaleur. La quantité  $\dot{q}_{D^2,0}$  représente le taux de dégagement de chaleur avant extinction de la flamme. La contribution frontière est donc directement dépendante du taux de dégagement de chaleur avant extinction<sup>4</sup>. On trouve également dans la figure 7.7 une symétrie axiale à la position  $r = r_{c,0}$ , conforme avec l’hypothèse faite pour le développement analytique, et l’amplitude de la zone battement semble croître linéairement avec  $\hat{\eta}$  ce qui est également en accord avec le modèle linéaire du battement de frontière Eq. (7.34).

### 7.3.2.2 Contribution volume

Les fluctuations de diamètre de gouttes entraînent des oscillations du temps de vie des gouttes, mais modifient également la dynamique du taux de dégagement de chaleur dans le volume de combustion. La linéarisation de l’équation (7.7) pour le débit massique  $\dot{m}_{D^2}$  donne une expression pour la contribution

4. Le taux de dégagement de chaleur avant extinction est très dépendant du diamètre  $D_r$  pour le modèle ASSM. La forte dépendance de la contribution frontière aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur, mise en évidence par le modèle analytique, conforte les analyses du chapitre 5.

volume aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur :

$$\hat{q}_{v.c} = \dot{q}_0 \left( \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} (\hat{u}_p - \hat{u}) + \left( 1 + \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \right) \frac{\hat{D}}{D_0} \right) \quad (7.35)$$

Cette expression est une extension de l'équation (7.23) en considérant que l'écoulement fluctuant modifie non seulement la vitesse de la goutte mais également son diamètre.

### 7.3.2.3 Somme linéaire des deux contributions

En sommant les contributions volume et frontière des fluctuations du taux de dégagement de chaleur, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{q}}{\dot{q}_0} = & \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} (\hat{u}_p - \hat{u}) + \left( 1 + \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \right) \frac{\hat{D}}{D_0} \\ & - \frac{\dot{q}_{D^2,0}}{\dot{q}_0} \frac{2}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{r - r_{c,0}}{|\hat{r}_c|} \right)^2 \right)^{1/2} \frac{\hat{r}_c}{|\hat{r}_c|} \end{aligned} \quad (7.36)$$

Les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  dépendent désormais des propriétés du champ moyen et des fluctuations de vitesse de gouttes  $\hat{u}_p$ , de vitesse du gaz  $\hat{u}$  et de diamètre de gouttes  $\hat{D}$ . Pour fermer le modèle Eq. (7.36), il est nécessaire d'exprimer les fluctuations de diamètre  $\hat{D}$  et de vitesse de gouttes  $\hat{u}_p$  en fonction des propriétés du champ moyen et des fluctuations de vitesse du gaz  $\hat{u}$ .

Les équations de transport qui régissent les fluctuations de diamètre  $D_1$  et de vitesse longitudinale de gouttes  $u_{p,1}$  sont définies en suivant. Dans la sous-section 7.3.1, tous les termes d'advection dans Eq. (7.26) ont été négligés. Cependant, la combustion de l'aluminium ayant lieu dans la couche limite acoustique (Fig. 6.4), les gradients radiaux de fluctuations de vitesse de goutte  $\partial u_{p,1}/\partial r$  et de vitesse du gaz  $\partial u_1/\partial r$  ne peuvent être négligés. Ceci conduit à une nouvelle équation de transport pour les fluctuations de vitesse des gouttes, simplifiant l'équation (7.26) en retenant le terme d'advection radiale et les fluctuations du temps caractéristique de traînée  $\tau_{d,1}$  :

$$\frac{\partial u_{p,1}}{\partial t} + v_p \frac{\partial u_{p,1}}{\partial r} = - \frac{\delta u_{p,1}}{\tau_{d,0}} + \frac{\delta u_{p,0}}{\tau_{d,0}^2} \tau_{d,1} \quad (7.37)$$

Une linéarisation de  $\tau_d$  donnée par Eq. (7.25) donne :

$$\frac{\tau_{d,1}}{\tau_{d,0}} = (2 - C_{Re}) \frac{D_1}{D_0} - C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} (u_{p,1} - u_1) \quad (7.38)$$

$C_{Re}$  dépend du nombre de Reynolds moyen des particules  $Re_{p,0}$  (Eq. (7.11)) :

$$C_{Re} = \frac{0.10305 Re_{p,0}}{1 + 0.15 Re_{p,0}} \quad (7.39)$$

En combinant les équations de transport Eqs. (7.1)–(7.4) pour la masse de la phase particulaire  $\alpha_p \rho_p$  et pour le nombre  $N_p$  de particules par unité de volume avec la définition du diamètre particulaire  $D$  donné par l'équation (7.6), on obtient une équation de transport pour le diamètre de goutte dans un formalisme eulérien :

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla D = - \frac{2\mu \ln(1+B) \text{Sh}}{\text{Pr} \rho_p D} \quad (7.40)$$

Cette équation est équivalente à la loi du  $D^2$ , en formalisme eulérien.

En supposant que (i) l'épaisseur de la zone de combustion reste faible avec des trajectoires de gouttes quasi-1D comme illustré à la Fig. 7.2, (ii) le taux d'injection de gouttes à la surface du propergol est uniforme dans la direction longitudinale et (iii) le mode acoustique excité est le premier mode acoustique longitudinal du moteur, c'est-à-dire que la fréquence est suffisamment basse pour valider l'hypothèse de quasi-stationnarité et la dérivée longitudinale des fluctuations est négligeable devant les autres termes :

$$\frac{\partial D_1}{\partial t} + v_p \frac{\partial D_1}{\partial r} = - \frac{2\mu \ln(1+B_0) \text{Sh}_0}{\text{Pr} \rho_p D_0} \left( \frac{\text{Sh}}{D} \right)_1 \quad (7.41)$$

avec :

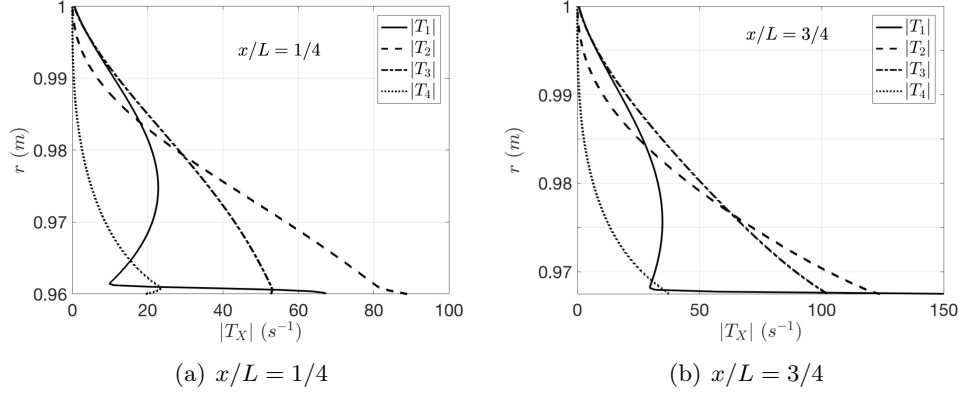
$$\left( \frac{\text{Sh}}{D} \right)_1 = \frac{\text{Sh}_0 - 2 \frac{\delta u_{p,0}(u_{p,1} - u_1)}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2}}{2\text{Sh}_0} - \frac{\text{Sh}_0 + 2 D_1}{2\text{Sh}_0 D_0} \quad (7.42)$$

Les hypothèses (i) à (iv) sont réalistes dans de nombreux moteurs à propergol solide. Dans l'espace de Fourier, Eq. (7.37) donne une équation différentielle de premier ordre, en  $r$ , pour  $\hat{u}_p$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_p}{\partial r} + \frac{\hat{u}_p}{v_p \tau_{d,0}} \left( i\omega \tau_{d,0} + 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right) &= \frac{\hat{u}}{v_p \tau_{d,0}} \left( 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right) \\ &+ \frac{\hat{D} \delta u_{p,0}}{D_0 v_p \tau_{d,0}} (2 - C_{Re}) \end{aligned} \quad (7.43)$$

Cette équation dépend des fluctuations de diamètre de gouttes  $\hat{D}$  qui sont la solution de la transformée de Fourier de Eq. (7.41) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{D}}{\partial r} + \hat{D} \left( \frac{i\omega}{v_p} - \frac{\mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 + 2)}{v_p \text{Pr} \rho_p D_0^2} \right) \\ = - \frac{\mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 - 2)}{v_p \text{Pr} \rho_p D_0 |\delta \mathbf{u}_p|_0^2 / \delta u_{p,0}} (\hat{u}_p - \hat{u}) \end{aligned} \quad (7.44)$$



**FIGURE 7.8** – Comparaison entre les modules des différents termes  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$  de Eq. (7.45), à  $x/L = 1/4$  et  $x/L = 3/4$  dans la zone de combustion

Les expressions (7.43) et (7.44) constituent un système de deux équations différentielles ordinaires couplées pour les fluctuations de vitesse  $\hat{u}_p$  et de diamètre  $\hat{D}$  de gouttes. Il n'existe pas de solution analytique simple de ce système. Il peut être résolu numériquement ou simplifié davantage pour tenter de trouver des solutions analytiques. La première stratégie présente l'avantage d'être la plus robuste et la plus précise. On peut espérer qu'elle soit valable quelles que soient les tailles de diamètre. La seconde stratégie peut permettre de poursuivre l'analyse, mais peut être limitante de part l'hypothèse simplificatrice. C'est cette dernière qui sera adoptée pour ce chapitre.

Pour ce faire, un terme du système d'équation (7.43) et (7.44) doit être supprimé. L'équation la plus appropriée à réduire est Eq. (7.43) :

$$\underbrace{\frac{\partial \hat{u}_p}{\partial r}}_{T_1} + \underbrace{\frac{\hat{u}_p}{v_p \tau_{d,0}} \left( i\omega \tau_{d,0} + 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right)}_{T_2} = \underbrace{\frac{\hat{u}}{v_p \tau_{d,0}} \left( 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right)}_{T_3} + \underbrace{\frac{\hat{D}}{D_0} \frac{\delta u_{p,0}}{v_p \tau_{d,0}} (2 - C_{Re})}_{T_4} \quad (7.45)$$

où  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$  désignent les quatre termes de l'équation Eq. (7.45).

Le module de ces termes, calculé par simulation numérique, est représenté par la figure 7.8 dans la zone de combustion, à  $x/L = 1/4$  et  $x/L = 3/4$ , où le couplage thermoacoustique est le plus élevé (Fig. 7.4(b)). La figure 7.8 montre que le terme d'advection  $T_1$  ne peut pas être négligé comme attendu et que  $T_4$  associé aux fluctuations du diamètre de gouttes est plus petit que les autres

termes. Négliger  $T_4$  conduit à une solution analytique du système différentiel ordinaire Eqs. (7.43) et (7.44). Dans ce cas, l'équation (7.43) est réduite à :

$$\frac{\partial \hat{u}_p}{\partial r} + \frac{\hat{u}_p}{v_p \tau_{d,0}} \left( i\omega \tau_{d,0} + 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right) = \frac{\hat{u}}{v_p \tau_{d,0}} \left( 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right) \quad (7.46)$$

Cette expression ne dépend pas de  $\hat{D}$ . Il convient à ce stade de rappeler que les fluctuations de vitesse radiale, de masse volumique et de température ont été négligées. Le débit massique injecté à la surface du propergol solide  $r/R = 1$  est maintenu constant et les fluctuations de vitesse longitudinale sont nulles  $\hat{u}(r = R) = 0$  à cette condition limite. En conséquence, les fluctuations de vitesse et de diamètre de gouttes au niveau de la condition limite d'injection sont donc également égales à zéro :  $\hat{u}_p(r = R) = 0$ ,  $\hat{D}(r = R) = 0$ . La solution de l'équation (7.46) pour  $\hat{u}_p(r = R) = 0$  est la suivante :

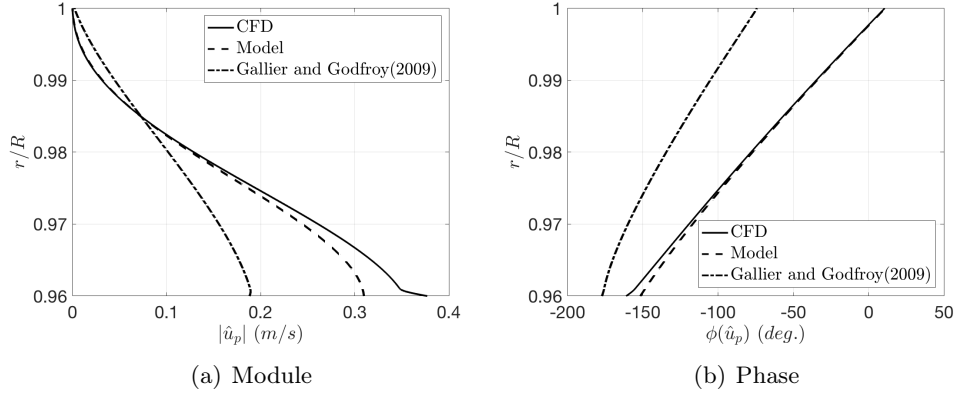
$$\begin{aligned} \hat{u}_p = \int_R^r \frac{\hat{u}}{v_p \tau_{d,0}} \left( 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right) \\ \times \exp \left( \int_r^{r'} \left( i\omega \tau_{d,0} + 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right) \frac{dr''}{v_p \tau_{d,0}} \right) dr' \quad (7.47) \end{aligned}$$

Les fluctuations de vitesse particulière  $\hat{u}_p$  sont linéaires et dépendent de la structure de la couche limite acoustique et de l'histoire des gouttes de carburant lors de leur transport, de l'injection à la position radiale courante  $r$ . L'équation (7.44) peut maintenant être résolue en remplaçant la solution Eq. (7.47) avec  $\hat{D}(r = R) = 0$  :

$$\begin{aligned} \hat{D} = - \int_R^r \frac{(\hat{u}_p - \hat{u}) \mu \ln(1 + B)(Sh_0 - 2)}{v_p \text{Pr} \rho_p D_0 |\delta \mathbf{u}_p|_0^2 / \delta u_{p,0}} \\ \times \exp \left( \int_r^{r'} \left( \frac{i\omega}{v_p} - \frac{\mu \ln(1 + B)(Sh_0 + 2)}{v_p \text{Pr} \rho_p D_0^2} \right) dr'' \right) dr' \quad (7.48) \end{aligned}$$

Les expressions Eq. (7.47) pour les fluctuations de vitesse de gouttes  $\hat{u}_p$  et Eq. (7.48) pour les fluctuations de diamètre de gouttes  $\hat{D}$  peuvent maintenant être comparées aux résultats de la simulation numérique. Le champ moyen et les fluctuations de vitesse du gaz  $\hat{u}$  sont à nouveau extraits des simulations pour évaluer les équations (7.47) et (7.48).

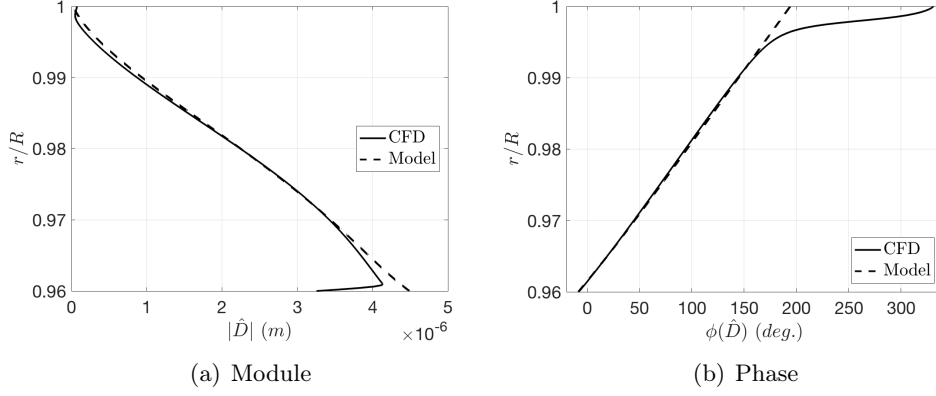
Le module et la phase des fluctuations de vitesse de goutte  $\hat{u}_p$  calculés avec l'équation (7.47), avec l'équation (7.28) de modèle de Gallier et Godfroy et à partir de la simulation sont comparés à la Fig. 7.9 dans la zone de combustion de l'aluminium au quart de la chambre  $x/L = 1/4$ . Sur toutes les figures suivantes,



**FIGURE 7.9** – *Fluctuations de vitesse de gouttes  $\hat{u}_p$  dans la zone de combustion de l'aluminium à  $x/L = 1/4$ . Ligne continue : CFD (simulation numérique). En tirets : Eq. (7.47). En pointillés-tirets : Eq. (7.29)*

la phase est exprimée par rapport à la pression acoustique. Le nouveau modèle Eq. (7.47) correspond mieux aux résultats numériques que Eq. (7.28), justifiant de prendre en compte le terme d'advection, en raison de la présence de la couche limite acoustique, et les fluctuations du temps caractéristique de la traînée dans Eq. (7.46). Une légère différence est observée entre ce nouveau modèle et les résultats de simulation en fin de zone de combustion ( $0.96 \leq r/R \leq 0.98$ ) car le terme  $T_4$  dans l'équation Eq. (7.45) qui correspond au terme de fluctuations de diamètre de gouttes a été négligées dans le modèle de fluctuations de vitesse de gouttes. Le modèle Eq. (7.47) pour  $\hat{u}_p$  donne également une bonne correspondance avec les résultats de simulation aux autres positions axiales dans la chambre du MPS.

L'équation (7.48) donne un modèle pour les fluctuations de diamètre de gouttes  $\hat{D}$  dans un écoulement forcé acoustiquement. Il convient de rappeler que les fluctuations de diamètre Eq. (7.48) dépendent des fluctuations de vitesse des gouttes  $\hat{u}_p$  (Eq. (7.47)). L'équation (7.48), modèle des fluctuations de diamètre  $\hat{D}$ , est comparée aux résultats de simulation de la Fig. 7.10 pour le module et la phase au quart du tube  $x/L = 1/4$  dans la zone de combustion de l'aluminium. On rappelle que la phase est exprimée par rapport à la pression acoustique. Le modèle donne des résultats très proches de la simulation dans tout le volume de la zone de combustion, même en fin de processus de combustion. Cela prouve le faible impact de l'hypothèse  $T_4$  dans Eq. (7.45) pour cette simulation. Près de l'injection pour  $0.995 \leq r/R \leq 1$ , la phase modélisée présente des écarts à la simulation numérique, certainement parce que les fluctuations de vitesse radiale ont été négligées  $v_p = v_{p,0}$  dans Eq. (7.48). Cependant, comme le module de



**FIGURE 7.10** – Fluctuations de diamètre de gouttes  $\hat{D}$  dans la zone de combustion de l'aluminium à  $x/L = 1/4$ . Ligne continue : CFD (simulation numérique). En tirets : Eq. (7.48)

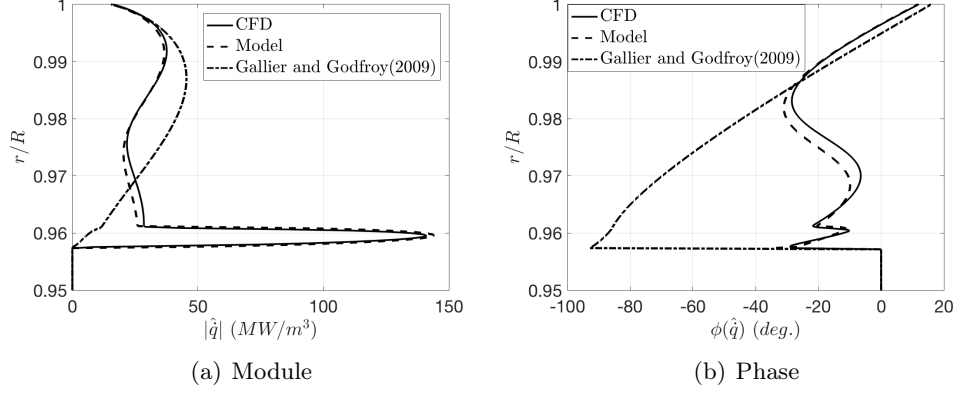
diamètre  $|\hat{D}|$  est proche de zéro dans cette région, cet écart ne modifie pas le résultat. Il a été vérifié que le modèle Eq. (7.48) donne des résultats similaires à d'autres positions axiales dans le MPS.

La nouvelle expression pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  est rappelée ici :

$$\frac{\hat{q}}{\dot{q}_0} = \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} (\hat{u}_p - \hat{u}) + \left( 1 + \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \right) \frac{\hat{D}}{D_0} - \frac{\dot{q}_{D^2,0}}{\dot{q}_0} \frac{2}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{r - r_{c,0}}{|\hat{r}_c|} \right)^2 \right)^{1/2} \frac{\hat{r}_c}{|\hat{r}_c|} \quad (7.49)$$

$$\hat{r}_c = \frac{2t_{c,0}v_p D_0}{D_i^2 - D_r^2} \hat{D} \quad (7.50)$$

$$\hat{u}_p = \int_R^r \frac{\hat{u}}{v_p \tau_{d,0}} \left( 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right) \times \exp \left( \int_r^{r'} \left( i\omega \tau_{d,0} + 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right) \frac{dr''}{v_p \tau_{d,0}} \right) dr' \quad (7.51)$$



**FIGURE 7.11** – Fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  dans la zone de combustion de l'aluminium à  $x/L = 1/4$ . Ligne continue : CFD (simulation numérique). En tirets : Eq. (7.49). En pointillés-tirets : Eq. (7.29)

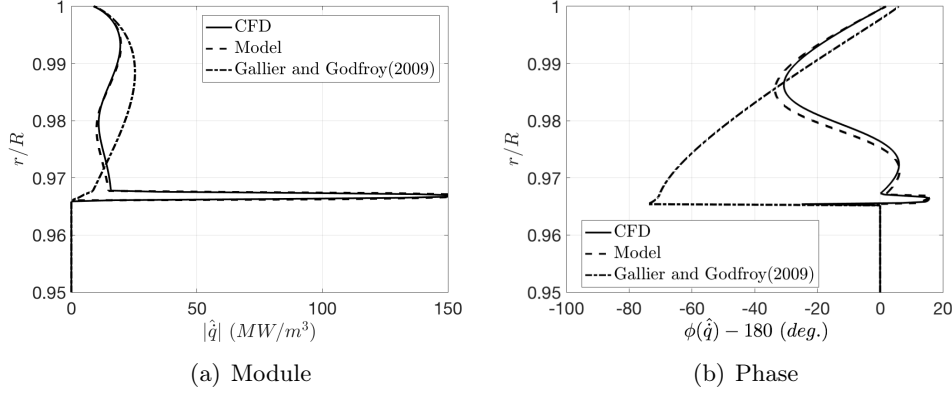
$$\hat{D} = - \int_R^r \frac{(\hat{u}_p - \hat{u})\mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 - 2)}{v_p \text{Pr} \rho_p D_0 |\delta \mathbf{u}_p|_0^2 / \delta u_{p,0}} \times \exp \left( \int_r^{r'} \left( \frac{i\omega}{v_p} - \frac{\mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 + 2)}{v_p \text{Pr} \rho_p D_0^2} \right) dr'' \right) dr' \quad (7.52)$$

Ce modèle définit les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  du nuage réactif de gouttes d'aluminium comme une fonction du champ moyen et des fluctuations longitudinales de vitesse du gaz  $\hat{u}$ . Pour comparer ce modèle aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur calculées par le solveur numérique, le champ moyen et les fluctuations de vitesse sont extraites de la simulation.

Les figures 7.11 et 7.12 comparent les modules et phases des fluctuations du taux de dégagement de chaleur données par le nouveau modèle, par le modèle de Gallier and Godfroy (2009) et par la simulation aux deux positions  $x/L = 1/4$  et  $x/L = 3/4$  dans la zone de combustion de l'aluminium. Ces positions correspondent aux extrémaux du terme source  $\mathcal{S}$  local de Rayleigh, montré en figure 7.4(b).

Le nouveau modèle est très proche des résultats de la simulation aux deux positions axiales et apporte une nette amélioration par rapport au modèle de Gallier and Godfroy (2009) (Figs. 7.11 et 7.12). Dans le volume de combustion, aucune différence significative ne peut être observée permettant de valider l'hypothèse faite sur  $T_4$  dans l'équation (7.45) et l'expression dérivée pour modéliser la contribution volume  $\hat{q}_{v.c.}$  aux fluctuations du taux de dégagement de





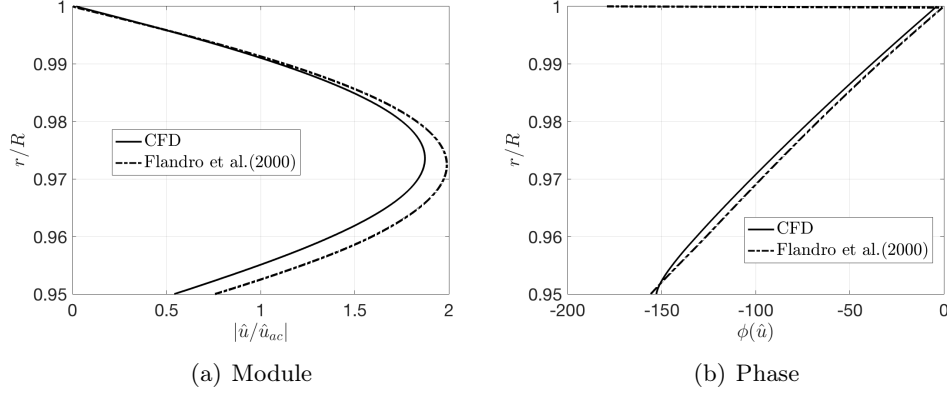
**FIGURE 7.12** – Fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  dans la zone de combustion de l'aluminium à  $x/L = 3/4$ . Ligne continue : CFD (simulation numérique). En tirets : Eq. (7.49). En pointillés-tirets : Eq. (7.29)

chaleur. Le mouvement de battement de frontière  $\hat{r}_c$  est également bien reproduit. Le module et la phase du taux de dégagement de chaleur sont aussi très proches des résultats numériques dans cette région. Les fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans la zone de battement dépendent essentiellement de  $\hat{q}_{b.c.}$ , qui sont directement liées au module du mouvement de battement  $|\hat{r}_c|$  et à l'amplitude de pression  $\hat{\eta}$  (sous-section 7.3.2.1, annexe C). Dans l'expression de  $\hat{q}_{b.c.}$ , le mouvement de battement a été supposé symétrique par rapport à sa position moyenne et des comparaisons avec des simulations permettent de valider cette hypothèse dans le régime linéaire.

L'accord entre le nouveau modèle et la simulation a été vérifié à d'autres positions axiales dans le moteur. Les légères différences qui peuvent être observées entre le modèle et les résultats de simulation dans les figures 7.11 et 7.12 sont dues aux différentes approximations faites en négligeant  $T_4$  et en supposant que  $\hat{v} = 0$ ,  $\hat{v}_p = 0$ ,  $\hat{T}_g = 0$ ,  $\hat{\rho}_g = 0$ ,  $\hat{N}_p = 0$  et  $\partial/\partial x = 0$ .

### 7.3.3 Modèle de fluctuations de vitesse longitudinale du gaz dans la zone de combustion de l'aluminium

Dans la section précédente, les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  ont été calculées en fonction des propriétés du champ moyen et des fluctuations de vitesse longitudinale du gaz  $\hat{u}$ . Ces dernières quantités ont été extraites de la simulation numérique. Pour obtenir un modèle analytique complet pour  $\hat{q}$  qui ne nécessite pas de simulation diphasique réactive, il faut proposer un modèle pour les fluctuations de vitesse longitudinale  $\hat{u}$  dans la zone



**FIGURE 7.13** – Fluctuations de vitesse longitudinale du gaz  $\hat{u}$  dans la zone de combustion de l'aluminium à  $x/L = 1/4$ . Ligne continue : CFD (simulation numérique). En pointillés-tirets : Eq. (7.53)

de combustion de l'aluminium.

Flandro et al. (2000) ont proposé une expression pour les fluctuations de vitesse dans la couche limite acoustique d'un écoulement isentropique. Dans ce modèle, les fluctuations de vitesse sont scindées en une partie acoustique et une partie rotationnelle :

$$\hat{u} = \hat{u}_{ac} + \hat{u}_{rot} \quad (7.53)$$

où la composante acoustique est supposée correspondre au premier mode longitudinal d'une chambre fermée-fermée :

$$\hat{u}_{ac} = -\frac{i\hat{\eta}}{a_0\rho} \sin(kx) \quad \text{où} \quad k = \frac{\omega}{a_0} \quad (7.54)$$

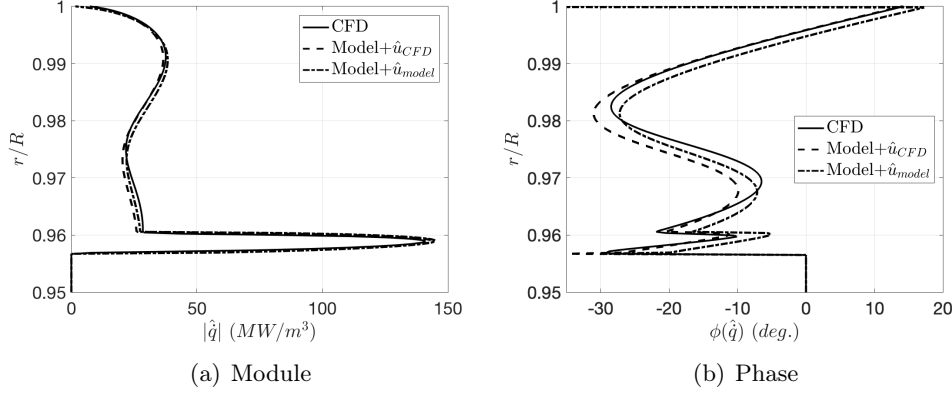
avec  $a_0$  la vitesse du son,  $\rho = \alpha_p\rho_p + \rho_g$  la masse volumique du mélange diphasique et  $\hat{\eta}$  l'enveloppe d'amplitude de pression. La contribution rotationnelle dans l'équation (7.53) est donnée par :

$$\hat{u}_{rot} = -\frac{i\hat{\eta}}{a_0\rho} \left[ \beta \frac{r}{R} \sin(kx \sin \Theta) \exp \left( \Phi + i \frac{S_r}{\pi} \ln \left( \tan \frac{\Theta}{2} \right) \right) \right] \quad (7.55)$$

avec  $\Phi$  une expression complexe donnée dans Flandro et al. (2000),  $\Theta = \frac{\pi}{2} (r/R)^2$  et  $\beta$  est égal à :

$$\beta = \frac{C_\beta}{S_r} \left( \frac{r}{R} \sin \Theta + i \frac{\xi R}{S_r r \sin \Theta} \right) \quad (7.56)$$

où  $R$  est le rayon de la chambre,  $S_r$  le nombre de Strouhal de l'écoulement,  $\xi$  un paramètre visqueux et  $C_\beta$  une constante d'intégration. Ces quantités sont



**FIGURE 7.14** – Fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  dans la zone de combustion de l'aluminium à  $x/L = 1/4$ . Ligne continue : CFD (simulation numérique). En tirets : Eq. (7.49) avec  $\hat{u}$  à partir de la simulation numérique. En pointillés-tirets : Eq. (7.49) avec  $\hat{u}$  donné par Eq. (7.53)

données dans Flandro et al. (2000) :

$$S_r = \frac{\omega R}{v_i} \quad \xi = \frac{S_r^2}{Re_i} \quad C_\beta = -\frac{S_r^3 ((S_r^2 + \xi) - iS_r\xi)}{(S_r^2 + \xi)^2 + (S_r\xi)^2} \quad (7.57)$$

avec  $v_i$  la vitesse d'injection (radiale) du gaz et  $Re_i = (\rho v_i R)/\mu$  le nombre de Reynolds injecté,  $\rho$  la masse volumique du mélange et  $\mu$  la viscosité dynamique.

Les profils radiaux du module et de la phase des fluctuations de vitesse longitudinale du gaz  $\hat{u}$ , calculés avec l'équation (7.53) dans la zone de combustion de l'aluminium à  $x/L = 1/4$ , sont représentés à la Fig. 7.13. Les résultats sont comparés à la simulation numérique. Sur cette figure, la phase est à nouveau exprimée par rapport à la pression acoustique et le module est normalisé par les fluctuations de vitesse acoustique  $\hat{u}_{ac}$  qui sont invariantes dans la direction radiale. De légères différences peuvent être observées pour le module des fluctuations de vitesse longitudinale entre ce modèle et les résultats numériques en raison des déviations de l'écoulement réel par rapport à un écoulement parfaitement isentropique et monophasique, comme supposé dans le modèle analytique. Pour la phase, la simulation et les résultats du modèle sont très proches. Ces comparaisons donnent des résultats similaires à toutes les positions axiales dans le MPS. On peut alors conclure que la contribution entropique associée au taux de dégagement de chaleur des fluctuations de vitesse  $\hat{u}$  peut être négligée dans le MPS.

Une dernière comparaison est faite en analysant l'impact de ce modèle sur les estimations des fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Les résul-

tats des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  donnés par la simulation sont comparés au modèle Eq. (7.49) avec les fluctuations de vitesse  $\hat{u}$  extraites de la simulation et avec les fluctuations de vitesse  $\hat{u}$  modélisées par l'équation (7.53) au quart du tube  $x/L = 1/4$ , dans la zone de combustion en aluminium, dans la Fig. 7.14. Dans ce dernier cas, les fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont déduites de la connaissance du champ moyen, de la fréquence angulaire de forçage  $\omega$  et de l'amplitude de pression  $\hat{\eta}$ . Les résultats obtenus avec ce modèle entièrement analytique sont très proches des autres résultats de la Fig. 7.14. Les mêmes observations peuvent être faites à d'autres positions axiales dans le MPS.

Ces comparaisons indiquent que le modèle analytique développé dans ce travail prédit bien les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$ , à condition que les propriétés du champ moyen et que la structure modale du mode acoustique soient connues à travers le MPS et que les fluctuations de vitesse et de diamètre de gouttes soient linéaires. Ce modèle peut à son tour être utilisé pour effectuer une analyse de stabilité linéaire pour différentes conditions de fonctionnement du MPS. La section suivante propose l'expression du taux de croissance et du glissement fréquentiel induits par les fluctuations de dégagement de chaleur, dans le domaine linéaire.

## 7.4 Modèle pour la stabilité linéaire

L'objectif de cette section est d'illustrer comment la combustion de l'aluminium contribue au taux de croissance de l'instabilité et au décalage fréquentiel dans un MPS. La décomposition suivante est utilisée pour les fluctuations de pression (Culick and Yang (1992), Culick (2006)) :

$$p_1 = \hat{p}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t) \quad \text{avec} \quad \hat{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\eta}_n \psi_n(\mathbf{x}) \quad (7.58)$$

$\hat{\eta}_n$  est la  $n^{\text{ième}}$  amplitude des fluctuations de pression acoustique et  $\psi_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  mode acoustique non perturbé correspondant à la solution de l'équation de Helmholtz. Dans la simulation, la distribution modale dans le MPS est proche du mode acoustique non perturbé d'une chambre fermée-fermée acoustiquement aux deux conditions limites et est invariante dans la direction radiale (Gallier and Godfroy (2009)). On suppose qu'il n'y a aucun effet rotationnel ou entropique dans les fluctuations de pression (chapitre 6) :

$$\psi_n = \cos(k_n x) \quad \text{et} \quad k_n = \frac{\omega_n}{a_0} \quad (7.59)$$

Les modes de pression constituent une base orthogonale. Une analyse de stabilité linéaire donne pour chaque mode le taux de croissance de l'instabilité  $\alpha$

et un décalage fréquentiel  $\delta\omega$  à partir de l'état non perturbé (Culick and Yang (1992), Culick (2006)) :

$$\alpha_n = \alpha_{n,ITHAC} + \alpha_{n,l} \quad \text{et} \quad \delta\omega_n = \delta\omega_{n,ITHAC} + \delta\omega_{n,l} \quad (7.60)$$

où l'indice *ITHAC* désigne les sources acoustiques associées à la combustion instationnaire de l'aluminium et l'indice *l* représente les autres contributions qui correspondent principalement à des pertes acoustiques. Les pertes ont été définies au chapitre 6.

La contribution de la combustion d'aluminium au taux de croissance de l'instabilité est exprimée par :

$$\alpha_{n,ITHAC} = \frac{(\gamma - 1)}{E_n^2} \int_V \psi_n \mathcal{R}e \left( \frac{\hat{q}}{\hat{\eta}_n} \right) dV \quad (7.61)$$

où  $\mathcal{R}e$  représente la partie réelle,  $V$  le volume de la chambre et  $E_n^2$  l'énergie acoustique du mode  $n$  :

$$E_n^2 = \int_V \psi_n^2 dV \quad (7.62)$$

Pour le moteur cylindrique étudié dans ce travail, on a  $dV = r dr d\theta dx$ . Le décalage fréquentiel correspondant induit par une combustion instationnaire de l'aluminium est de :

$$\delta\omega_{n,ITHAC} = \frac{(\gamma - 1)}{E_n^2} \int_V \psi_n \mathcal{I}m \left( \frac{\hat{q}}{\hat{\eta}_n} \right) dV \quad (7.63)$$

avec  $\mathcal{I}m$  la partie imaginaire.

Deux contributions aux perturbations de dégagement de chaleur ont été identifiées dans ce travail : une contribution volume *v.c.* due à la réponse individuelle de chaque goutte et une contribution frontière *b.c.* due aux oscillations de temps de vie des gouttes. Le taux de croissance et le décalage fréquentiel associés à chacune de ces contributions peuvent être divisés de la même manière :

$$\alpha_{n,ITHAC} = \alpha_{n,v.c} + \alpha_{n,b.c} \quad \text{et} \quad \delta\omega_{n,ITHAC} = \delta\omega_{n,v.c} + \delta\omega_{n,b.c} \quad (7.64)$$

La contribution volume du taux de croissance et du décalage fréquentiel peut s'écrire comme suit :

$$\alpha_{n,v.c.} = \frac{2(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \psi_n \int_0^R \mathcal{R}e \left( \frac{\hat{q}_{v.c.}}{\hat{\eta}_n} \right) r dr dx \quad (7.65)$$

$$\delta\omega_{n,v.c.} = \frac{2(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \psi_n \int_0^R \mathcal{I}m \left( \frac{\hat{q}_{v.c.}}{\hat{\eta}_n} \right) r dr dx \quad (7.66)$$

dans lequel  $\hat{q}_{v.c.}$  peut être remplacé par les expressions Eqs. (7.35), (7.48) et (7.47). Cette opération génère de nouvelles formulations pour  $\alpha_{n,v.c.}$  et  $\delta\omega_{n,v.c.}$  qui ne dépendent que du champ moyen dans le MPS et du mode acoustique. En régime linéaire, ces expressions ne dépendent pas de l'amplitude de pression.

Pour la contribution frontière, l'expression de  $\hat{q}_{b.c.}$  dépend de l'amplitude du mouvement de la frontière  $|\hat{r}_c|$  tel que donné par Eq. (7.31). Autrement dit, l'expression de  $\alpha_{n,b.c.}$  est non-linéaire et doit être linéarisée. On peut procéder comme suit pour linéariser son expression. Le taux de croissance de l'instabilité est *a priori* donné par :

$$\alpha_{n,b.c.} = \frac{2(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \psi_n \int_0^R \mathcal{R}e \left( \frac{\hat{q}_{b.c.}}{\hat{\eta}_n} \right) r dr dx \quad (7.67)$$

En substituant  $\hat{q}_{b.c.}$  par Eq. (7.31), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_{n,b.c.} = & \frac{-2(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \psi_n \\ & \times \int_0^R \dot{q}_{D^2,0} \frac{2}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{r - r_{c,0}}{|\hat{r}_c|} \right)^2 \right)^{1/2} \mathcal{R}e \left( \frac{\hat{r}_c}{|\hat{r}_c| \hat{\eta}_n} \right) r dr dx \quad (7.68) \end{aligned}$$

On voit que  $\alpha_{n,b.c.}$  dépend de l'amplitude  $|\hat{r}_c|$  de la perturbation  $\hat{r}_c$ , mais la zone de battement de frontière est située entre  $r \in [r_{c,0} - |\hat{r}_c|, r_{c,0} + |\hat{r}_c|]$  dans la direction radiale. Comme cette zone est mince (fluctuations de faibles amplitudes) par rapport à l'épaisseur de la combustion,  $\dot{q}_{D^2,0} \hat{r}_c / |\hat{r}_c|$  peut être supposé invariant dans la zone de battement et être pris à  $r = r_{c,0}$ . Avec cette hypothèse<sup>5</sup>, on a :

$$\frac{2}{\pi |\hat{r}_c|} \int_{r_{c,0} - |\hat{r}_c|}^{r_{c,0} + |\hat{r}_c|} \left( 1 - \left( \frac{r - r_{c,0}}{|\hat{r}_c|} \right)^2 \right)^{1/2} r dr = r_{c,0} \quad (7.69)$$

5. L'uniformité de  $\dot{q}_{D^2,0} \hat{r}_c / |\hat{r}_c|$  dans la zone de battement de frontière n'est généralement pas vérifiée par la simulation numérique. Néanmoins, cela reste la seule hypothèse mathématiquement et physiquement acceptable pour linéariser le taux de croissance associé au mouvement de la fonction Heaviside. En effet, cette fonction est monotone dans la zone de battement, la considérer constante et fixer sa valeur à celle en position moyenne  $r = r_{c,0}$  est donc une approximation acceptable et pragmatique dans un contexte industriel pour développer un outil de stabilité linéaire. A noter que le taux de croissance de la source n'est donc, en théorie, pas strictement linéaire, même dans le domaine de toutes petites fluctuations.

L'équation (7.68) se réduit dans ce cas à :

$$\alpha_{n,b.c.} = \frac{-(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \dot{q}_{D^2,0} \psi_n r_{c,0} \mathcal{R}e \left( \frac{\hat{r}_c}{\hat{\eta}_n} \right) dx \quad (7.70)$$

La même méthode peut être utilisée pour déterminer le décalage de fréquence angulaire correspondant. L'expression générale *a priori* s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\omega_{n,b.c.} &= \frac{-2(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \psi_n \\ &\times \int_0^R \dot{q}_{D^2,0} \frac{2}{\pi} \left( 1 - \left( \frac{r - r_{c,0}}{|\hat{r}_c|} \right)^2 \right)^{1/2} \mathcal{I}m \left( \frac{\hat{r}_c}{|\hat{r}_c| \hat{\eta}_n} \right) r dr dx \quad (7.71) \end{aligned}$$

Avec la même approximation, cette expression se réduit à :

$$\delta\omega_{n,b.c.} = \frac{-(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \dot{q}_{D^2,0} \psi_n r_{c,0} \mathcal{I}m \left( \frac{\hat{r}_c}{\hat{\eta}_n} \right) dx \quad (7.72)$$

Le mouvement de la frontière  $\hat{r}_c$  donné par Eq. (7.34) est linéaire. Les expressions Eqs. (7.70) et (7.72) donnent un taux de croissance d'instabilité et un décalage fréquentiel associé à la contribution frontière des fluctuations du taux de dégagement de chaleur qui ne dépendent pas de l'amplitude de pression acoustique. Elles peuvent être déterminées une fois les structures de l'écoulement moyen et du mode acoustique définies.

Le taux de croissance de la source de l'instabilité  $\alpha_{n,ITHAC} = \alpha_{n,v.c.} + \alpha_{n,b.c.}$  n'est pas validé dans le cadre de ce manuscrit. Des travaux sont en cours à ArianeGroup pour le développement d'un outil de stabilité linéaire intégrant ces développements analytiques avec des validations avec des simulations numériques CPS. Il serait également intéressant de comparer cette modélisation analytiques aux données expérimentales de propulseurs en T, montrant des instabilités induites par la combustion d'aluminium. Ce travail non effectué dans le cadre de la thèse pourrait permettre de déterminer des inconnues dans le modèle de combustion.

## 7.5 Conclusion

La façon dont les perturbations acoustiques entraînent des perturbations du taux de dégagement de chaleur provenant de la combustion de gouttes d'aluminium a été étudiée numériquement et théoriquement dans un MPS générique.

Des simulations numériques de ces écoulements ont été utilisées pour analyser l'origine des instabilités thermo-acoustiques induites par la dynamique de combustion des gouttes d'aluminium en évitant soigneusement d'autres mécanismes de couplage liés aux instabilités hydrodynamiques dans une configuration d'écoulement laminaire. Ces simulations sont basées sur un formalisme eulérien, pour les phases gazeuse et dispersée, dans lequel la combustion de gouttes dispersées est modélisée par la loi du  $D^2$  jusqu'à un diamètre d'arrêt, permettant de modéliser la formation de résidus d'oxyde d'aluminium et la fin de combustion (modèle ASSM).

L'analyse du taux de dégagement de chaleur et de la distribution du terme source de Rayleigh à travers la chambre du moteur a révélé deux contributions aux oscillations de la pression acoustique. La première correspond aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur produites dans le volume du nuage de gouttes réactives. La deuxième source de perturbations du taux de dégagement de chaleur provient du battement de frontière du nuage de gouttes réactives. La contribution volume aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur résulte de la réponse individuelle de chaque goutte d'aluminium à l'écoulement instationnaire qui est synchronisé par le forçage acoustique. Cet écoulement produit une traînée instationnaire sur chaque goutte et modifie la vitesse et le diamètre de la goutte, entraînant à leur tour des perturbations du taux de consommation de gouttes. La seconde contribution est due aux oscillations de temps de vie des gouttes induites par l'histoire de leur dynamique dans l'écoulement perturbé acoustiquement. Ces fluctuations entraînent à leur tour un mouvement de la frontière du volume de combustion, ce qui implique d'importantes fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Cette contribution frontière est très sensible à la valeur du taux de dégagement de chaleur juste avant extinction des gouttes. La modélisation de la fin de la combustion des gouttes d'aluminium requiert plus d'approfondissement et est ici une fonction Heaviside qui éteint brutalement la combustion quand le diamètre de goutte atteint une valeur d'arrêt.

Des modèles analytiques ont été dérivés pour ces deux contributions aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur et ont été comparés aux résultats de la simulation numérique. Ces modèles incluent à la fois des fluctuations de diamètre de goutte et des fluctuations de vitesse de gouttes en réponse au forçage acoustique. Elles sont utilisées pour déterminer les fluctuations du taux de dégagement de chaleur provenant de la dynamique des gouttes dans le nuage en combustion et provenant du mouvement de la frontière du nuage.

Différents niveaux d'approximations ont été réalisés pour obtenir une solution hybride combinant des résultats numériques et analytiques. Un modèle entièrement analytique a également été élaboré, dans lequel la structure de



l'écoulement moyen et la structure du mode acoustique sont les seules entrées. Il a été démontré que ce modèle fournit des estimations fiables de la distribution des fluctuations du taux de dégagement de chaleur à travers le MPS dans la limite de petites perturbations acoustiques (domaine linéaire). Ces modèles reproduisent bien la dynamique observée dans les simulations numériques d'écoulement.

Ce modèle de fluctuations du taux de dégagement de chaleur est bien adapté pour effectuer une analyse de stabilité linéaire de la dynamique du système et peut être utilisé pour faciliter la prévision des instabilités thermoacoustiques dans les moteurs à propergol solide ou les propulseurs en T pilotés par la combustion de gouttes en aluminium. Il a également permis de mieux comprendre ces phénomènes dynamiques sans nécessiter de nombreuses simulations numériques diphasiques.

## Chapitre 8

# Simplification du modèle source et nombres adimensionnels

*La démarche entreprise dans ce chapitre est de poursuivre la simplification du modèle local et linéaire des fluctuations du taux de dégagement de chaleur. En s'appuyant sur des hypothèses d'uniformité pour les écoulements, il est possible d'identifier les nombres adimensionnels qui contrôlent la source de l'instabilité thermoacoustique. Ces développements sont menés à partir de l'expression du taux de croissance de l'instabilité induit par les fluctuations du taux de dégagement de chaleur.*

### 8.1 Introduction

L'instabilité thermoacoustique dépend des pertes acoustiques et de la réponse de la combustion de l'aluminium aux oscillations acoustiques. La simplification du terme source peut permettre de faire apparaître les nombres adimensionnels qui contrôlent l'instabilité. Ces nombres permettent également d'orienter la recherche sur les paramètres clés de la modélisation de la combustion de l'aluminium. On rappelle ici la modélisation du taux de croissance associé à la source de l'instabilité (chapitre 7) :

$$\alpha_{n,ITHAC} = \alpha_{n,v.c} + \alpha_{n,b.c} \quad (8.1)$$

avec  $n$  le  $n$ -ième mode. Les deux contributions de volume  $v.c.$  et frontière  $b.c.$  sont dans un moteur cylindrique données par :

$$\alpha_{n,v.c.} = \frac{2(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \psi_n \int_0^R \frac{\mathcal{R}_e(\hat{q}_{v.c.})}{\hat{\eta}_n} r dr dx \quad (8.2)$$

$$\alpha_{n,b.c.} = \frac{-2(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \dot{q}_{D^2,0} \psi_n r_{c,0} \frac{\mathcal{R}_e(\hat{r}_c)}{\hat{\eta}_n} dx \quad (8.3)$$

où les fluctuations du taux de dégagement de chaleur associées à la contribution volume  $\hat{q}_{v.c.}$  et le mouvement de la frontière  $\hat{r}_c$  sont donnés ci-dessous :

$$\frac{\hat{q}_{v.c.}}{\dot{q}_0} = \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} (\hat{u}_p - \hat{u}) + \left(1 + \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0}\right) \frac{\hat{D}}{D_0} \quad (8.4)$$

$$\hat{r}_c = \frac{2t_{c,0} v_p D_0}{D_i^2 - D_r^2} \hat{D} \quad (8.5)$$

Dans ces deux dernières relations, les fluctuations de vitesse particulière  $\hat{u}_p$ , de diamètre  $\hat{D}$  et de vitesse gaz  $\hat{u}$  interviennent :

$$\hat{u}_p = \int_R^r \frac{\hat{u}}{v_p \tau_{d,0}} \left(1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2}\right) e^{\int_r^{r'} \left(i\omega \tau_{d,0} + 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2}\right) \frac{dr''}{v_p \tau_{d,0}}} dr' \quad (8.6)$$

$$\hat{D} = - \int_R^r \frac{\mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 - 2)}{v_p \text{Pr} \rho_p D_0 |\delta \mathbf{u}_p|_0^2 / \delta u_{p,0}} (\hat{u}_p - \hat{u}) e^{\int_r^{r'} \left(\frac{i\omega}{v_p} - \frac{\mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 + 2)}{v_p \text{Pr} \rho_p D_0^2}\right) dr''} dr' \quad (8.7)$$

Les fluctuations de vitesse gaz  $\hat{u}$  sont modélisées en utilisant les expressions proposées par [Flandro et al. \(2000\)](#) :

$$\hat{u} = \hat{u}_{ac} + \hat{u}_{rot} \quad (8.8)$$

où la partie acoustique est donné pour une chambre fermée-fermée :

$$\hat{u}_{ac} = -\frac{i\hat{\eta}}{a_0 \rho} \sin(kx), \quad k = \frac{\omega}{a_0} \quad (8.9)$$

et la partie rotationnelle correspond à :

$$\hat{u}_{rot} = -\frac{i\hat{\eta}}{a_0 \rho} \left(\beta \frac{r}{R} \sin(kx \sin \Theta) e^{\Phi + i \frac{\xi}{\pi} \ln(\tan \frac{\Theta}{2})}\right) \quad (8.10)$$

avec  $\Phi$  une expression complexe donnée par [Flandro et al. \(2000\)](#),  $\Theta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2$  et  $\beta$  :

$$\beta = \frac{C_\beta}{S_r} \left(\frac{r}{R} \sin \Theta + i \frac{\xi R}{S_r r \sin(\Theta)}\right) \quad (8.11)$$

où  $R$  est le rayon de la chambre,  $S_r$  est le nombre de Strouhal de l'écoulement,  $\xi$  un paramètre de viscosité et  $C_\beta$  une constante d'intégration donnée par (Flandro et al. (2000)) :

$$S_r = \frac{\omega R}{v_i}, \quad \xi = \frac{S_r^2}{Re_i}, \quad C_\beta = -\frac{S_r^3 ((S_r^2 + \xi) - iS_r\xi)}{(S_r^2 + \xi)^2 + (S_r\xi)^2} \quad (8.12)$$

avec  $v_i$  la vitesse d'injection du gaz et  $Re_i = \frac{\rho_g v_i R}{\mu}$  le nombre de Reynolds à l'injection.

Il est possible de simplifier ces expressions pour déterminer des nombres adimensionnels contrôlant l'instabilité. En particulier, il faut éliminer les expressions avec des intégrales en conservant une modélisation valide.

A la section suivante, un modèle simplifié pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur est développé. Ses résultats sont comparés aux résultats de la simulation numérique du chapitre 7 et au modèle simple sans intégrale de Gallier and Godfroy (2009). La troisième section présente l'état de l'art sur les nombres adimensionnels dérivés à partir de la modélisation des fluctuations du taux de dégagement de chaleur de Gallier and Godfroy (2009). Sachant les limitations du modèle de Gallier and Godfroy (2009) (voir chapitre 7), un nouveau développement de la source thermoacoustique en fonction de nombres adimensionnels sera proposé à partir du modèle simplifié développé dans la section antérieure pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur. La sensibilité de la source thermoacoustique aux nombres adimensionnels sera finalement étudiée.

## 8.2 Simplification de la modélisation des fluctuations locales du taux de dégagement de chaleur

Pour simplifier les expressions précédentes pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur, il faut chercher à éliminer les intégrales des expressions. Pour cela, il faut utiliser une hypothèse d'uniformité, quand elle est valable, et intégrer analytiquement les phénomènes qui varient fortement. On prendra soin, en particulier, de considérer la couche limite acoustique.

Le taux de croissance  $\alpha_{n,ITHAC}$  (Eq. (8.1)) est fonction de la contribution volume des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}_{v.c.}$  et du mouvement de la frontière  $\hat{r}_c$  (Eqs. (8.4) et (8.5)). Ces deux dernières variables dépendent de des fluctuations de la différentielle de vitesse  $\hat{u}_p - \hat{u}$  et des fluctuations de diamètre particulaire  $\hat{D}$ . Les expressions de  $\hat{u}_p$  et de  $\hat{D}$  (Eqs. (8.6) et (8.7)) sont des intégrales radiales du champ moyen et des fluctuations de vitesse gaz  $\hat{u}$ .

Dans un premier temps, des simplifications pour la vitesse de glissement fluctuante  $\hat{u}_p - \hat{u}$  et pour le diamètre particulaire fluctuant  $\hat{D}$  sont proposées. Ensuite, ces simplifications sont utilisées pour simplifier l'expression des fluctuations de dégagement de chaleur  $\hat{q}$ .

L'ensemble de ces modèles simples sont comparés aux résultats numériques de la simulation du chapitre 7 et au modèle de [Gallier and Godfroy \(2009\)](#).

### 8.2.1 Modèles simplifiés pour les fluctuations de vitesse gaz et particules et de diamètre particulaire

On rappelle les deux expressions de fluctuations de vitesse particulaire et de diamètre particulaire à simplifier :

$$\hat{u}_p = \int_R^r \frac{\hat{u}}{v_p \tau_{d,0}} \left( 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right) e^{\int_r^{r'} \left( i\omega \tau_{d,0} + 1 + C_{Re} \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \right) \frac{dr''}{v_p \tau_{d,0}}} dr' \quad (8.13)$$

$$\hat{D} = - \int_R^r \frac{\mu \ln(1+B)(Sh_0 - 2)}{v_p Pr \rho_p D_0 |\delta \mathbf{u}_p|_0^2 / \delta u_{p,0}} (\hat{u}_p - \hat{u}) e^{\int_r^{r'} \left( \frac{i\omega}{v_p} - \frac{\mu \ln(1+B)(Sh_0 + 2)}{v_p Pr \rho_p D_0^2} \right) dr''} dr' \quad (8.14)$$

Ces deux expressions sont des intégrales radiales. Sachant que les gouttes sont injectées à l'équilibre dynamique dans nos calculs, on peut supposer que leur vitesse est quasi-invariante et leur trajectoire quasi-radiale. Soit la vitesse particulaire dans la zone de combustion égale à la vitesse d'injection :

$$v_p \approx -v_i < 0 \quad (8.15)$$

Cette hypothèse sera vérifiée au chapitre 9 (pour une injection gaz-particules à l'équilibre). On suppose donc, de plus, qu'il est acceptable de sortir le champ moyen de l'intégrale radiale. Néanmoins, dans ce processus de simplification, on prendra en compte la présence de la couche limite acoustique qui impose une forte dépendance des fluctuations de vitesse gaz  $\hat{u}$  à la position radiale (chapitres 1, 6 et 7). Son expression (Eq. (8.8)) n'est pas intégrable analytiquement, car trop complexe. Il faut donc la simplifier avant de l'intégrer. Considérant le développement au premier ordre à proximité du propergol (près de l'injection, dans la zone de combustion de l'aluminium), [Gallier and Godfroy \(2009\)](#) ont proposé une simplification du modèle de Flandro :

$$\hat{u} = \hat{u}_{ac} (1 - e^{-iS_r \epsilon}), \quad \epsilon = 1 - \frac{r}{R} \ll 1, \quad S_r = \frac{\omega R}{v_i} \quad (8.16)$$

avec  $S_r$  le nombre de Strouhal de l'écoulement. Ce modèle (Eq. (8.16)) sera utilisé pour l'intégration radiale de l'expression des fluctuations de vitesse particulaire  $\hat{u}_p$  (Eq. (8.13)). Dans son expression, la constante  $C_{Re}$  est associée aux

fluctuations du temps caractéristique de trainée induites par les fluctuations de vitesse. Cette contribution est faible et compte tenu des fortes hypothèses utilisées (quasi-uniformité du champ moyen radial, simplification de  $\hat{u}$ ), on la négligera ( $C_{Re} = 0$ ). On obtient donc après quelques étapes de calcul (Eqs. (8.13) et (8.16)) :

$$\hat{u}_p - \hat{u} = -\hat{u}_{ac} \frac{\omega\tau_{d,0}}{\omega\tau_{d,0} - i} \left( 1 - e^{\frac{i\omega\tau_{d,0}+1}{v_p\tau_{d,0}}(R-r)} \right) \quad (8.17)$$

Cette expression fait apparaître un filtre passe-bas avec un effet de couche limite acoustique sur l'advection (fonction exponentielle). On peut comparer ce modèle sans intégrale aux résultats de la simulation numérique (CFD) et à un autre modèle sans intégrale, celui de Gallier and Godfroy (2009), Dupays and Vuillot (1998) et Temkin and Dobbins (1966) :

$$\hat{u}_p = \frac{\hat{u}}{1 + i\omega\tau_{d,0}} \quad (8.18)$$

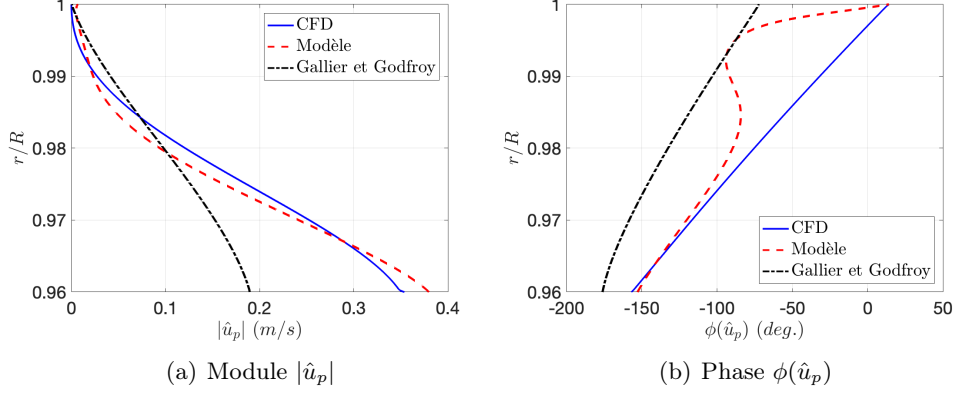
Ce dernier modèle fait également intervenir un filtre passe-bas mais l'advection radiale des particules n'est pas prise en compte (voir chapitre 7).

Pour comparer les modèle Eq. (8.17) et Eq. (8.18) et la simulation numérique, le champ moyen et les fluctuations de vitesse acoustique  $\hat{u}_{ac}$  sont donnés par la simulation numérique. Les figures 8.1 et 8.2 comparent les profils de fluctuations de vitesse particulière  $\hat{u}_p$  à un quart et trois quarts du tube ( $x/L = 1/4$  et  $x/L = 3/4$ ), dans la zone de combustion, donnés par le modèle simplifié (Eq. (8.17)), par le modèle simple de Gallier and Godfroy (2009) et par la CFD (simulation numérique).

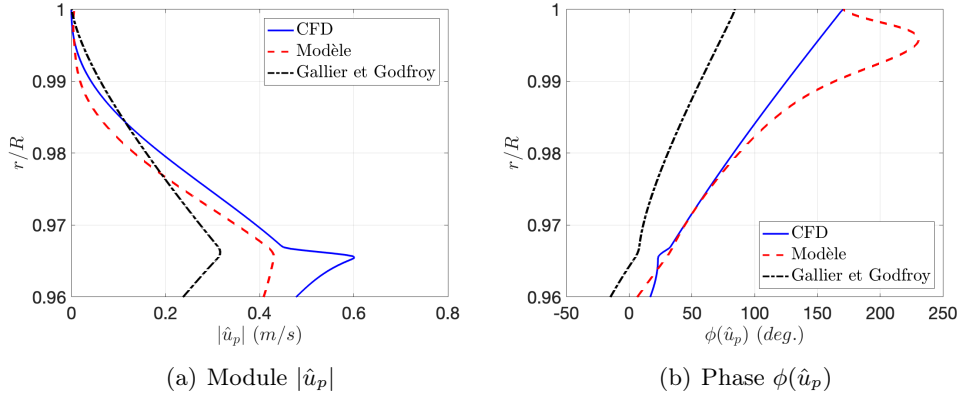
On rappelle que le modèle Eq. (8.17) est une simplification du modèle de  $\hat{u}_p$  avec intégrale (Eq. (8.13)) qui n'est pas montré dans les figures 8.1 et 8.2. Pour une comparaison du modèle intégrale Eq. (8.13) avec la CFD (simulation numérique), il faut se référer au chapitre 7, dans lequel on peut observer que les résultats sont très proches en module ou en phase.

Dans les figures 8.1 et 8.2 (à  $x/L = 1/4$  et  $x/L = 3/4$ ), on observe que le modèle Eq. (8.17) en module est très proche des résultats CFD (de la simulation numérique) et en phase il y a quelques écarts mais reste plus performant que le modèle de Gallier and Godfroy (2009) (Eq. (8.18)). Compte tenu des hypothèses et des résultats, on considère que le modèle Eq. (8.17) est suffisant et permet de poursuivre l'analyse.

A partir du modèle de vitesse particulière fluctuante (Eq. (8.17)), on peut dériver de la même façon un modèle pour les fluctuations de diamètre. Après



**FIGURE 8.1** – Module et phase (relative aux fluctuations de pression) à un quart de la chambre du moteur ( $x/L = 1/4$ ) des fluctuations de vitesse particulaire longitudinale  $\hat{u}_p$  dans la zone de combustion des gouttes. Comparaison entre le modèle simplifié (Eq. (8.17)), le modèle de Gallier et Godfroy (Eq. (8.18)) et les résultats CFD (de la simulation numérique)



**FIGURE 8.2** – Module et phase (relative aux fluctuations de pression) aux trois quarts de la chambre du moteur ( $x/L = 3/4$ ) des fluctuations de vitesse particulaire longitudinale  $\hat{u}_p$  dans la zone de combustion. Comparaison entre le modèle simplifié (Eq. (8.17)), le modèle de Gallier et Godfroy (Eq. (8.18)) et les résultats CFD (de la simulation numérique)

quelques étapes de calcul, on peut simplifier le modèle Eq. (8.14) :

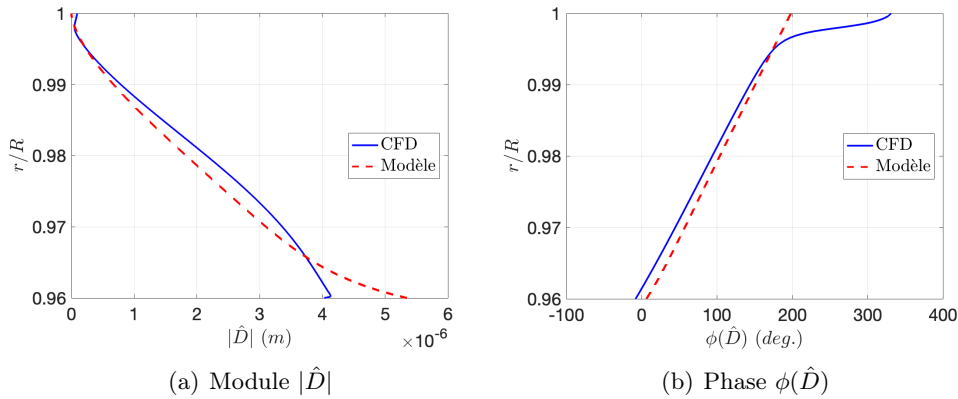
$$\hat{D} = -B_D \hat{u}_{ac} \frac{\omega \tau_{d,0}}{\omega \tau_{d,0} - i} \left( \frac{1 - e^{A_D(R-r)}}{A_D} - \frac{e^{\frac{i\omega \tau_{d,0} + 1}{v_p \tau_{d,0}}(R-r)} - e^{A_D(R-r)}}{A_D - \frac{i\omega \tau_{d,0} + 1}{v_p \tau_{d,0}}} \right) \quad (8.19)$$

avec :

$$A_D = \frac{i\omega}{v_p} - \frac{\mu \ln(1+B)(Sh_0+2)}{v_p Pr \rho_p D_0^2} \quad B_D = -\frac{\mu \ln(1+B)(Sh_0-2)}{v_p Pr \rho_p D_0 |\delta \mathbf{u}_{p,0}|^2 / \delta u_{p,0}} \quad (8.20)$$

Il n'existe pas, dans l'état de l'art, d'autres modèles sans intégrale quantifiant les fluctuations de diamètre particulaire (en eulérien).

On peut donc faire une comparaison entre ce modèle pour les fluctuations de diamètre (Eq. (8.19)) et les résultats CFD (de la simulation numérique). Le champ moyen et la vitesse acoustique  $\hat{u}_{ac}$  sont extraits de la CFD (simulation numérique). Les figures 8.3 et 8.4 présentent le module et la phase des fluctuations de diamètre particulaire  $\hat{D}$ , respectivement à un quart ( $x/L = 1/4$ ) et trois quarts de la chambre ( $x/L = 3/4$ ), dans la zone de combustion de l'aluminium, calculés par la CFD (simulation numérique) et par le modèle simple (Eq. (8.19)).

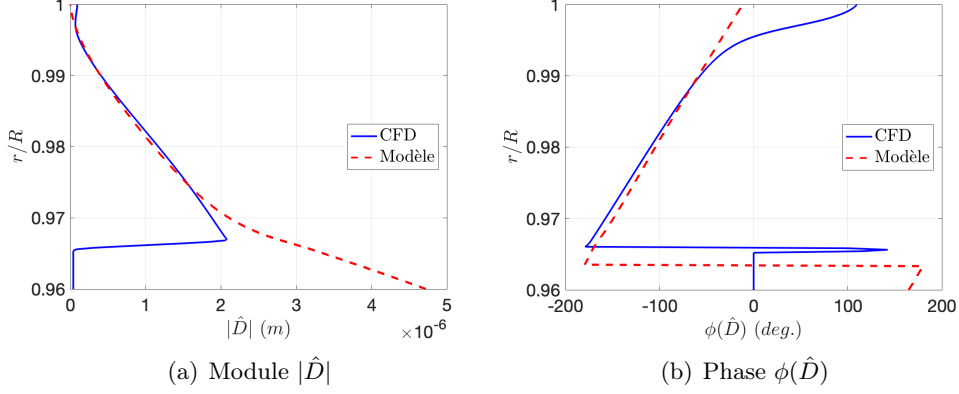


**FIGURE 8.3** – Module et phase (relative aux fluctuations de pression) à un quart de la chambre du moteur ( $x/L = 1/4$ ) des fluctuations de diamètre particulaire  $\hat{D}$  dans la zone de combustion. Comparaison entre le modèle simplifié (Eq. (8.19)) et les résultats CFD (de la simulation numérique)

Le modèle simplifié (Eq. (8.19)) est très proche des résultats CFD (aux deux positions, en module et en phase) avec un faible écart en fin de vie des gouttes. Cet écart est retrouvé avec le modèle avec intégrale Eq. (8.14) (voir comparaison avec la simulation numérique (CFD) au chapitre 7). Le modèle simplifié des fluctuations de vitesse particulaire (Eq. (8.17)) est donc suffisant pour reproduire les fluctuations de diamètre  $\hat{D}$ .

Pour conclure sur cette section, deux nouveaux modèles sans intégrale sont proposés (Eqs. (8.17) et (8.19)), respectivement pour les fluctuations de vitesse particulaire relative  $\hat{u}_p - \hat{u}$  et de diamètre particulaire  $\hat{D}$ .





**FIGURE 8.4** – *Module et phase (relative aux fluctuations de pression) aux trois quarts de la chambre du moteur ( $x/L = 3/4$ ) des fluctuations de diamètre particulaire  $\hat{D}$  dans la zone de combustion, délimitée par  $|\hat{D}| > 0$ . Comparaison entre le modèle simplifié (Eq. (8.19)) et les résultats CFD (de la simulation numérique)*

Dans la sous-section suivante, on validera la modélisation simplifiée des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  induite par ces nouveaux modèles pour les fluctuations de vitesse relative et de diamètre particulaire (Eqs. (8.17) et (8.19)).

### 8.2.2 Validation du modèle des fluctuations du taux de dégagement de chaleur

Le modèle de fluctuations de dégagement de chaleur, développé au chapitre 7, s'écrit :

$$\hat{q} = \hat{q}_{v.c.} + \hat{q}_{b.c.} \quad (8.21)$$

avec  $\hat{q}_{v.c.}$  la contribution volume dépendant des fluctuations de diamètre  $\hat{D}$  et de vitesse relative  $\hat{u}_p - \hat{u}$  :

$$\hat{q}_{v.c.} = \dot{q}_0 \left( \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_{p,0}|^2} (\hat{u}_p - \hat{u}) + \left( 1 + \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \right) \frac{\hat{D}}{D_0} \right) \quad (8.22)$$

et la contribution frontière  $\hat{q}_{b.c.}$  se dérive comme :

$$\hat{q}_{b.c.} = -\dot{q}_{D^2,0} \frac{2 \left( 1 - \left( \frac{r-r_{c,0}}{|\hat{r}_c|} \right)^2 \right)^{1/2}}{\pi |\hat{r}_c|} \hat{r}_c \quad (8.23)$$

où  $\hat{r}_c$  le battement de frontière est dépendant des fluctuations de diamètre  $\hat{D}$  :

$$\hat{r}_c = \frac{2t_{c,0}v_p D_0}{D_i^2 - D_r^2} \hat{D} \quad (8.24)$$

Les fluctuations de diamètre et de vitesse sont, dans cette sous-section, données par les modèles sans intégrale (Eqs. (8.17) et (8.19)). Cette modélisation des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  est donc également sans intégrale. Ce modèle est une simplification du modèle dérivé au chapitre 7 où les fluctuations de diamètre et de vitesse sont exprimées par des expressions intégrales (Eqs. (8.13) et (8.14)).

Pour comparaison, on rappelle le modèle simple de Gallier et Godfroy pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$ , qui ne prend pas en comptes les fluctuations de diamètre et où les fluctuations de vitesse particulière sont modélisées par le filtre passe-bas Eq. (8.18) (chapitre 7, Gallier and Godfroy (2009)) :

$$\frac{\hat{q}}{\dot{q}_0} = -\frac{\text{Sh}_0 - 2\omega\tau_{d,0}(i + \omega\tau_{d,0})}{2\text{Sh}_0} \frac{\delta u_{p,0}}{1 + \omega^2\tau_{d,0}^2} \frac{\hat{u}}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \quad (8.25)$$

Ce modèle est également un modèle sans intégrale. Dans les figures 8.5 et 8.6, une comparaison est proposée pour le module et la phase des fluctuations du taux dégagement de chaleur  $\hat{q}$ , entre le nouveau modèle simplifié, le modèle de Gallier et Godfroy (Eq. (8.25)) et les résultats CFD (du chapitre 7), dans la zone de combustion des gouttes, à un quart ( $x/L = 1/4$ ) et trois quarts ( $x/L = 3/4$ ) de la chambre du moteur. Le champ moyen et les fluctuations de vitesse du gaz  $\hat{u}$  sont extraits de la simulation numérique (CFD) pour les modèles analytiques.

Pour le module et la phase, à  $x/L = 1/4$  ou  $x/L = 3/4$ , on observe que les résultats proposés par ce nouveau modèle sont plus proches de la simulation numérique (CFD) que ceux du modèle de Gallier et Godfroy (Eq. (8.25)). On peut donc en conclure que le modèle des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  est satisfaisant et permet de simplifier le taux de croissance associé.

On rappelle le taux de croissance induit par la combustion de l'aluminium :

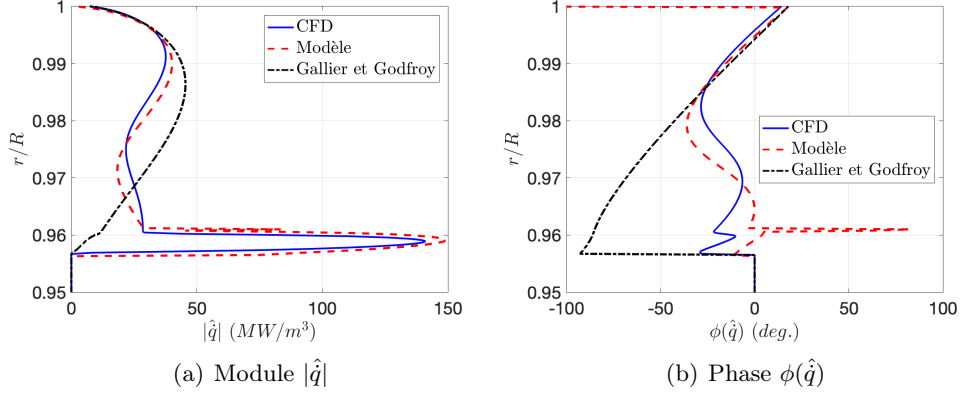
$$\alpha_{n,ITHAC} = \alpha_{n,v.c} + \alpha_{n,b.c} \quad (8.26)$$

avec les deux contributions de volume et frontière :

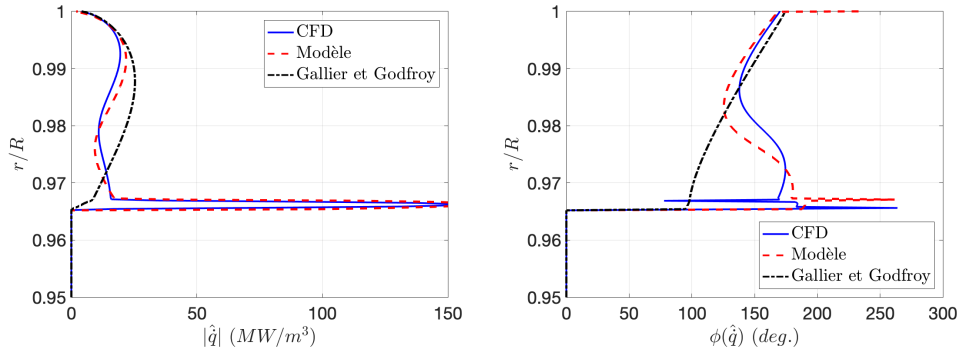
$$\alpha_{n,v.c} = \frac{2(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \psi_n \int_0^R \frac{\mathcal{R}_e(\hat{q}_{v.c.})}{\hat{\eta}_n} r dr dx \quad (8.27)$$

$$\alpha_{n,b.c} = \frac{-2(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \dot{q}_{D^2,0} \psi_n r_{c,0} \frac{\mathcal{R}_e(\hat{r}_c)}{\hat{\eta}_n} dx \quad (8.28)$$

Le taux de croissance est dépendant de la dynamique de combustion dans le volume  $\hat{q}_{v.c.}$  et du mouvement de la frontière  $\hat{r}_c$ . Dans les figures 8.5 et 8.6, on



**FIGURE 8.5** – Module et phase (relative aux fluctuations de pression) à un quart de la chambre du moteur ( $x/L = 1/4$ ) des fluctuations de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  dans la zone de combustion des gouttes d'aluminium, délimitée par  $|\hat{q}| > 0$ . Comparaison entre le modèle simplifié (Eq. (8.17)), le modèle de Gallier et Godfroy (Eq. (8.25)) et les résultats CFD (de la simulation numérique)



**FIGURE 8.6** – Module et phase (relative aux fluctuations de pression) aux trois quarts de la chambre du moteur ( $x/L = 3/4$ ) des fluctuations de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  dans la zone de combustion des gouttes d'aluminium, délimitée par  $|\hat{q}| > 0$ . Comparaison entre le modèle simplifié (Eq. (8.17)), le modèle de Gallier et Godfroy (Eq. (8.18)) et les résultats CFD (de la simulation numérique)

peut vérifier, en particulier, que la dynamique dans le volume et que le battement de frontière sont bien reproduits.

On a donc une modélisation locale, simplifiée et sans intégrale, pour les grandeurs  $\hat{q}_{v.c.}$  et  $\hat{r}_c$ , dont dépend directement le taux de croissance  $\alpha_{ITHAC} = \alpha_{v.c.} + \alpha_{b.c.}$  (Eqs. (8.26), (8.27) et (8.28)).

### 8.3 Nombres adimensionnels

Le domaine de la zone de combustion est défini radialement en  $r \in [r_{c,0}(x), R]$  et longitudinalement en  $x \in [0, L]$ . Le taux de dégagement de chaleur est nul hors de la zone de combustion. La contribution volume du taux de croissance source peut donc se simplifier (Eq. (8.27)) :

$$\alpha_{n,v.c.} = \frac{2(\gamma - 1)}{R^2 \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \psi_n \int_{r_{c,0}(x)}^R \frac{\mathcal{R}_e(\hat{q}_{v.c.})}{\hat{\eta}_n} r dr dx \quad (8.29)$$

Pour faire apparaître les nombres adimensionnels qui contrôlent l'instabilité, il faut s'appuyer sur l'hypothèse d'uniformité. Le champ des fluctuations de pression est uniforme en radial (voir chapitre 6). On fera l'hypothèse que le champ moyen varie faiblement dans la direction radiale. Cette hypothèse se justifie également par une zone de combustion assez fine et des diamètres résiduels de tailles comparables et assez proches des tailles de gouttes injectées. On définit la moyenne radiale sur l'épaisseur de combustion de la quantité  $X(r, x)$  telle que :

$$\overline{X(r, x)}^r = \frac{2}{R^2 - r_{c,0}^2} \int_{r_{c,0}(x)}^R X r dr \quad (8.30)$$

Avant de poursuivre la simplification avec le modèle développé dans ce chapitre, une première sous-section est consacrée à la présentation des travaux de [Casalis et al. \(2011\)](#) qui dérivent des nombres adimensionnels quantifiant la source de l'instabilité. Cette dérivation a été faite à partir du modèle de fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  de [Gallier and Godfroy \(2009\)](#). Comme ce modèle de fluctuations du taux de dégagement de chaleur a été amélioré au chapitre 7, il est nécessaire de refaire cette analyse par nombres adimensionnels. Cette analyse est rendue possible par les modèles dérivés précédemment avec des modèles sans intégrale mais plus aboutis que ceux de [Gallier and Godfroy \(2009\)](#). Il y a donc une deuxième sous-section en suivant qui propose une analyse par nombres adimensionnels avec cette nouvelle modélisation pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur :

$$\hat{q}_{v.c.} = \dot{q}_0 \left( \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_{p,0}|_0^2} (\hat{u}_p - \hat{u}) + \left( 1 + \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \right) \frac{\hat{D}}{D_0} \right) \quad (8.31)$$

et la contribution frontière  $\hat{q}_{b.c.}$  se dérive comme :

$$\hat{q}_{b.c.} = -\dot{q}_{D^2,0} \frac{2 \left( 1 - \left( \frac{r - r_{c,0}}{|\hat{r}_c|} \right)^2 \right)^{1/2}}{\pi |\hat{r}_c|} \hat{r}_c \quad (8.32)$$

où  $\hat{r}_c$  le battement de frontière est dépendant des fluctuations de diamètre  $\hat{D}$  :

$$\hat{r}_c = \frac{2t_{c,0}v_p D_0}{D_i^2 - D_r^2} \hat{D} \quad (8.33)$$

et les fluctuations de vitesse relative  $\hat{u}_p - \hat{u}$  sont :

$$\hat{u}_p - \hat{u} = -\hat{u}_{ac} \frac{\omega\tau_{d,0}}{\omega\tau_{d,0} - i} \left( 1 - e^{\frac{i\omega\tau_{d,0}+1}{v_p\tau_{d,0}}(R-r)} \right) \quad (8.34)$$

et les fluctuations de diamètre particulaire  $\hat{D}$  :

$$\hat{D} = -B_D \hat{u}_{ac} \frac{\omega\tau_{d,0}}{\omega\tau_{d,0} - i} \left( \frac{1 - e^{A_D(R-r)}}{A_D} - \frac{e^{\frac{i\omega\tau_{d,0}+1}{v_p\tau_{d,0}}(R-r)} - e^{A_D(R-r)}}{A_D - \frac{i\omega\tau_{d,0}+1}{v_p\tau_{d,0}}} \right) \quad (8.35)$$

avec les fonctions :

$$A_D = \frac{i\omega}{v_p} - \frac{\mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 + 2)}{v_p \text{Pr} \rho_p D_0^2} \quad B_D = -\frac{\mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 - 2)}{v_p \text{Pr} \rho_p D_0 |\delta \mathbf{u}_{\mathbf{p},0}|_0^2 / \delta u_{p,0}} \quad (8.36)$$

et la vitesse acoustique est (en fermé-fermé) :

$$\hat{u}_{ac} = -\frac{i\hat{\eta}}{a_0\rho} \sin(kx), \quad k = \frac{\omega}{a_0} \quad (8.37)$$

### 8.3.1 Etat de l'art

Le modèle de fluctuations du taux de dégagement de chaleur de [Gallier and Godfroy \(2009\)](#) s'écrit comme :

$$\frac{\hat{q}}{\hat{q}_0} = \frac{\hat{q}_{v.c.}}{\hat{q}_0} = -\frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \frac{\omega\tau_{d,0}(i + \omega\tau_{d,0})}{1 + \omega^2\tau_{d,0}^2} \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}|_0^2} \hat{u} \quad (8.38)$$

On définit le nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$  et le nombre de Stokes particulaire  $S_{tk}$  tels que :

$$S_r = \frac{\omega R}{v_i}, \quad S_{tk} = \omega\tau_{d,0} \quad (8.39)$$

avec  $\tau_{d,0}$  le temps caractéristique de trainée<sup>1</sup> :

$$\tau_{d,0} = \frac{\rho_p D_0^2}{18\mu} \quad (8.40)$$

---

1. Ici, le temps caractéristique de trainée est simplifié à son écriture suivant la loi de Stokes, car, en principe, un paramètre adimensionnel est un paramètre que l'on estime sans connaître le détail de l'écoulement.

avec l'indice 0 correspondant au champ moyen. Gallier and Godfroy (2009) ont observé par études numériques et analyses de leur modèle pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur que (i) les nombres de Strouhal de combustion  $S_c$  et de l'écoulement  $S_r$  peuvent jouer un rôle important (cela a notamment été démontré par une étude en fréquence), et (ii) le nombre de Stokes  $S_{tk}$  impacte notablement l'instabilité.

A partir du modèle de Gallier and Godfroy (2009) des fluctuations du taux de dégagement de chaleur  $\hat{q}$  (Eq. (8.38)), Casalis et al. (2011), après simplifications et moyenne en radial, obtiennent un taux de croissance correspondant à la source de l'instabilité :

$$\alpha_{n,ITHAC} \approx \int_0^L \frac{3(\gamma-1)\pi RL}{8\pi E_n^2} \frac{v_i}{\delta u_{p,0}} \frac{D_i^2 - D_r^2}{D_0^2} \frac{Sh_0 - 2}{Sh_0} \frac{\kappa \Delta H_r \omega}{(1+\kappa)a_0^2} \mathcal{A} \sin\left(2\frac{\omega}{a_0}x\right) dx \quad (8.41)$$

où  $R$  est le rayon de la chambre,  $L$  sa longueur,  $E_n$  l'énergie acoustique,  $v_i$  la vitesse d'injection,  $\delta u_{p,0} = u_{p,0} - u_0$  la différentielle de vitesse longitudinale,  $D_i$  le diamètre d'injection,  $D_r$  le diamètre résiduel,  $D_0$  le diamètre moyen,  $Sh_0$  le nombre de Sherwood moyen,  $\kappa$  la fraction massique de gouttes,  $\Delta H_r$  l'enthalpie de réaction,  $a_0$  la vitesse du son et  $\omega = 2\pi f$  la fréquence angulaire.

La fonction  $\mathcal{A}$  de l'équation (8.41) peut être décomposée comme la somme d'une contribution acoustique  $\mathcal{A}_{ac}$  et d'une contribution rotationnelle (couche limite acoustique)  $\mathcal{A}_{rot}$  :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ac} + \mathcal{A}_{rot} \quad (8.42)$$

avec les deux contributions suivantes :

$$\mathcal{A}_{ac} = \frac{S_{tk}}{1 + S_{tk}^2} \frac{1}{S_c} \left( S_c - \frac{S_c^2}{2S_r} \right) \quad (8.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{rot} &= \frac{-S_{tk}}{1 + S_{tk}^2} \frac{1}{S_c S_r} \\ &\times (1 - S_r S_{tk} + \cos(S_c)[-1 + S_r S_{tk} - S_{tk} S_c] + \sin(S_c)[S_r + S_{tk} - S_c]) \end{aligned} \quad (8.44)$$

où  $S_c$  est le nombre de Strouhal de combustion :

$$S_c = \omega t_{c,0} \quad (8.45)$$

avec  $t_{c,0}$  le temps de combustion.

Ces trois fonctions  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_{ac}$  et  $\mathcal{A}_{rot}$  sont dépendantes des nombres adimensionnels suivants : (i)  $S_{tk}$  le nombre de Stokes particulaire, (ii)  $S_c$  le nombre de Strouhal de combustion et (iii)  $S_r$  le nombre de Strouhal de l'écoulement.

Casalis et al. (2011) démontrent, avec le modèle de Gallier and Godfroy (2009), que le nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$  n'a que peu d'effet sur l'instabilité thermoacoustique, dans le cadre des hypothèses qui ont été faites dans le manuscrit de thèse (injection à l'équilibre des gouttes, modèle ASSM). L'étude en fréquence de Gallier and Godfroy (2009) met donc, en particulier, en évidence une dépendance de l'instabilité au nombre de Strouhal de combustion  $S_c$  et au nombre de Stokes  $S_{tk}$  définis par rapport à la fréquence (Eqs. (8.39) et (8.45)).

L'étude de Casalis et al. (2011) est reprise et approfondie dans cette section.

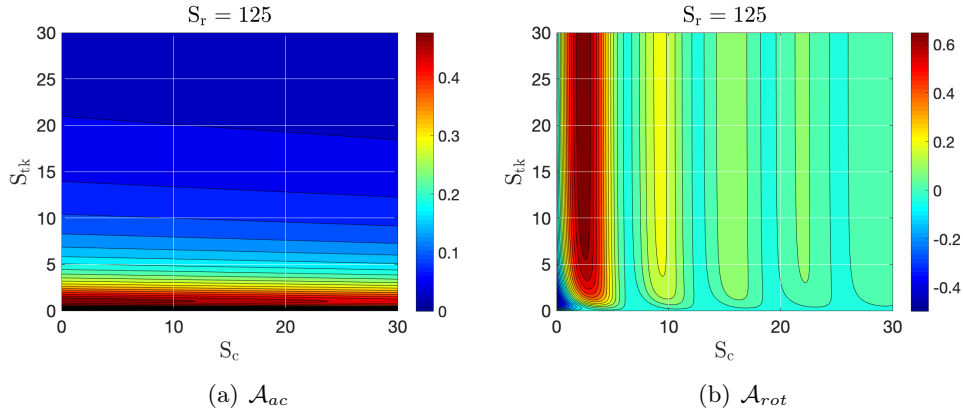
On suppose que les mécanismes physiques à l'origine de la déstabilisation entre fond avant et fond arrière ne sont pas liés à la variation de la fonction  $\mathcal{A}$  en fonction de  $x$  mais plutôt aux autres termes de l'expression intégrale du taux de croissance  $\alpha_{n,ITHAC}$  (Eq. (8.41)). Il suffit alors de chercher le maximum de  $\mathcal{A}$  pour en déduire les situations où la source de l'instabilité va être la plus forte et inversement, les minimums de  $\mathcal{A}$  sont les situations où l'instabilité va être la plus faible.

En particulier, le terme  $1/\delta u_{p,0}$  de l'équation Eq. (8.41) connaît une variation forte en  $x$  par rapport aux autres termes à cause de l'accélération de l'écoulement dans le moteur. On suppose alors qu'il est à l'origine du fait que le taux de croissance  $\alpha_{n,ITHAC}$  est positif. En effet, tous les autres facteurs de l'intégrale de Eq. (8.41) sont dépendants du champ de vitesse  $\delta u_{p,0}$  au plus à la puissance 1/2 (comme le nombre de Sherwood). Leur variation longitudinale peut donc être négligée en comparaison de  $\delta u_{p,0}$ . Cette brève analyse renforce les commentaires du chapitre 4 concernant l'effet de l'évolution de l'écoulement le long de la chambre qui serait à l'origine de l'asymétrie entre fond avant et fond arrière pour le critère de Rayleigh.

On peut donc tracer les fonctions  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_{ac}$  et  $\mathcal{A}_{rot}$  et rechercher leurs maximums et minimums. Si on considère les trois premiers modes longitudinaux, l'ordre de grandeur pour des MPS des nombres de Strouhal de combustion  $S_c$  et de Stokes  $S_{tk}$  est dans le domaine  $]0; 30]$ . Sur une échelle de nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$  de 80 à 300, on peut vérifier que ces fonctions sont quasi-invariantes. On se contentera donc d'une analyse en fonction des nombres adimensionnels suivants : (i)  $S_{tk}$  le nombre de Stokes particulaire et (ii)  $S_c$  le nombre de Strouhal de combustion pour un nombre de Strouhal de l'écoulement fixé à  $S_r = 125$ , choisi en fonction des simulations numériques faites dans ce

manuscrit.

Les figures 8.7(a), 8.7(b) et 8.8 présentent respectivement la contribution acoustique  $\mathcal{A}_{ac}$ , la contribution rotationnelle (couche limite acoustique)  $\mathcal{A}_{rot}$  et  $\mathcal{A}$  la somme des deux en fonction des nombres de Strouhal de combustion  $S_c$  et de Stokes  $S_{tk}$ .



**FIGURE 8.7** – Dépendance des fonctions  $\mathcal{A}_{ac}$  et  $\mathcal{A}_{rot}$ , représentant respectivement les contributions acoustique et rotationnelle de la source, aux nombres adimensionnels  $S_{tk}$  et  $S_c$ , pour  $S_r = 125$

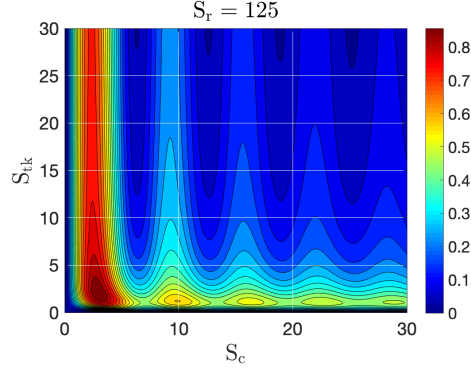
La figure 8.7(a) montre que la contribution acoustique  $\mathcal{A}_{ac}$  dépend fortement du nombre de Stokes  $S_{tk}$  et son maximum est à  $S_{tk} = 1$ . Le nombre de Strouhal de combustion  $S_c$  a un effet négligeable  $\mathcal{A}_{ac}$ .

La figure 8.7(b) illustre la contribution rotationnelle (couche limite acoustique)  $\mathcal{A}_{rot}$  de la source. Cette contribution a un comportement oscillant avec amortissement par rapport au nombre de Strouhal de combustion  $S_c$ , ceci rappelle la structure de la couche limite acoustique (chapitres 1 et 6). Contrairement à la contribution acoustique,  $\mathcal{A}_{rot}$  dépend faiblement du nombre de Stokes  $S_{tk}$ . Le maximum de  $\mathcal{A}_{rot}$  se situe à  $S_c = 2.5$  et  $S_{tk} > 5$ .

La figure 8.8 représente la somme  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ac} + \mathcal{A}_{rot}$  par rapport aux nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$ . La fonction  $\mathcal{A}$  présente un comportement oscillant avec amortissement en fonction du nombre  $S_c$  comme la contribution rotationnelle  $\mathcal{A}_{rot}$  et une dépendance en fonction du nombre  $S_{tk}$  comme la contribution acoustique  $\mathcal{A}_{ac}$ . Le domaine où  $\mathcal{A}$  est maximal se situe à  $2 < S_c < 4$  et  $1 < S_{tk} < 4$ . Dans ce domaine, l'instabilité est donc maximale.

Cette analyse donne des indications au premier ordre sur l'instabilité et son contrôle. Néanmoins, elle s'appuie sur le modèle de Gallier et Godfroy (Eq. (8.38))





**FIGURE 8.8** – Dépendance de la fonction  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ac} + \mathcal{A}_{rot}$  aux nombres adimensionnels  $S_{tk}$  et  $S_c$ , pour  $S_r = 125$

qui est incomplet (chapitre 7). Le modèle développé dans ce chapitre permet donc de prendre en compte plus de physique et de vérifier ces conclusions.

### 8.3.2 Nouveau développement en nombres adimensionnels

Dans cette sous-section, une analyse similaire en nombres adimensionnels va être développée pour la contribution volume (Eq. (8.29)) puis pour la contribution frontière (Eq. (8.28)).

Après réécriture de la contribution volume (Eq. (8.29)), on obtient finalement pour la contribution volume :

$$\alpha_{v.c.} = \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \sin(2kx) \frac{\dot{q}_0 a_0 \text{Sh}_0 - 2}{p_0} \frac{\overline{\delta u_{p,0}}^{\mathbf{r}}}{|\delta \mathbf{u}_{\mathbf{p}}|_0^2} \mathcal{B}_{v.c.} dx \quad (8.46)$$

avec la fonction  $\mathcal{B}_{v.c.}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{v.c.} &= \frac{S_{tk}}{1 + S_{tk}^2} \\ &\times \left( \cos(S_c)(C_1 e^{-S_c/S_{tk}} + C_2 e^{S_v}) + \sin(S_c)(C_3 e^{-S_c/S_{tk}} + C_4 e^{S_v}) + C_5 \right) \end{aligned} \quad (8.47)$$

où les fonctions  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  et  $C_5$  :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-S_{tk}}{(1 + S_{tk}^2)S_r^2} \left( S_r - S_c - \frac{S_{tk}(1 - S_{tk}^2)}{(1 + S_{tk}^2)} - S_{tk}^2(S_r - S_c) \right. \\ &\quad \left. + 2S_{tk}^3 + \frac{2S_{tk}(S_r - S_c)}{S_v S_{tk} + S_c} + \frac{4S_{tk}^2/(1 + S_{tk}^2)}{S_v S_{tk} + S_c} \right) \end{aligned} \quad (8.48)$$

$$C_2 = \frac{-2S_v S_c^2}{S_v^2 + S_c^2} \left( \frac{S_{tk} - S_r + S_c}{S_v S_{tk} + S_c} - \frac{S_v(S_v^2 + 3S_c^2)}{(S_v^2 + S_c^2)^2} - \frac{2S_v(S_r - S_c)S_{tk}}{S_r^2(S_v^2 + S_c^2)} \right. \\ \left. - \frac{S_c(S_v^2 + 3S_c^2)}{S_r^2(S_v^2 + S_c^2)} + \frac{(S_r - S_c)S_{tk}^2}{S_r^2(S_v S_{tk} + S_c)} + \frac{2S_v S_{tk}^2}{(S_v^2 + S_c^2)S_r^2} \right) \quad (8.49)$$

$$C_3 = \frac{-1}{(1 + S_{tk}^2)} \left( \frac{2S_{tk}^2(S_c - S_r)}{S_r^2} + \frac{S_{tk}^3(3 - S_{tk}^2)}{S_r^2(S_{tk}^2 + 1)} + \frac{4S_{tk}S_c S_v/(1 + S_{tk}^2)}{S_r(S_v^2 + S_c^2)} \right. \\ \left. - \frac{2S_c S_v(S_r - S_c)}{S_r(S_v^2 + S_c^2)} + \frac{2S_{tk}^3(S_r - S_c)}{S_r^2(S_v S_{tk} + S_c)} + \frac{2S_{tk}^4/(1 + S_{tk}^2)}{S_r^2(S_v S_{tk} + S_c)} \right) \quad (8.50)$$

$$C_4 = \frac{-S_c}{S_v^2 + S_c^2} \left( \frac{S_v(S_c - S_r)}{S_r(S_v^2 + S_c^2)} + \frac{3S_v^2 + S_c^2}{(S_v^2 + S_c^2)^2} + \frac{(S_c - S_r)S_{tk}}{S_r(S_v S_{tk} + S_c)} \right. \\ \left. + \frac{S_v S_{tk}}{(S_v S_{tk} + S_c)(S_v^2 + S_c^2)} + \frac{2S_v S_{tk}(S_r - S_c)}{S_r^2} + \frac{2S_c S_v^2 S_{tk}(S_v^2 + 3S_c^2)}{S_r^2(S_v^2 + S_c^2)^2} \right. \\ \left. + \frac{2S_{tk}^2 S_v(S_r - S_c)}{(S_v S_{tk} + S_c)S_r^2} + \frac{2S_c S_{tk}}{(S_v S_{tk} + S_c)S_r^2} \right) \quad (8.51)$$

$$C_5 = \frac{-1}{S_r} \left( S_c \left( 2 - \frac{S_c}{S_r} \right) + \frac{S_{tk}^2(1 - 3S_{tk}^2)}{(1 + S_{tk}^2)S_r} + \frac{S_{tk}(S_{tk}^2 - 1)}{(1 + S_{tk}^2)} \right. \\ \left. + \frac{(2 - S_c)S_c S_v}{2S_r(S_v^2 + S_c^2)} + \frac{S_c}{(S_v^2 + S_c^2)} + \frac{S_v S_c^2(S_v^2 + 3S_c^2)}{S_r(S_v^2 + S_c^2)} \right. \\ \left. + \frac{S_{tk}^2}{(S_v S_{tk} + S_c)(1 + S_{tk}^2)} + \frac{S_{tk}^3(1 - S_{tk}^2)}{(S_v S_{tk} + S_c)(1 + S_{tk}^2)S_r} \right) \quad (8.52)$$

dépendent du nombre de Stokes  $S_{tk}$ , du nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ , du nombre de Strouhal de combustion  $S_c$  et d'un nouveau nombre adimensionnel  $S_v$  :

$$S_r = \frac{\omega R}{v_i}, \quad S_{tk} = \omega \tau_{d,0}, \quad S_c = \omega t_{c,0}, \quad S_v = \frac{t_{c,0}}{t_{v,0}} \quad (8.53)$$

avec  $\omega = 2\pi f$  la fréquence angulaire,  $v_i$  la vitesse d'injection,  $R$  le rayon de la chambre,  $\tau_{d,0}$  le temps caractéristique de trainée,  $t_{c,0}$  le temps de combustion et  $t_{v,0}$  le temps caractéristique suivant :

$$t_{v,0} = \frac{\text{Pr} \rho_p D_0^2}{\mu \ln(1 + B)(\text{Sh}_0 + 2)} \quad (8.54)$$

Ce temps caractéristique provient de l'équation de transport des fluctuations de diamètre  $D_1$  :

$$\frac{\partial D_1}{\partial t} + v_p \frac{\partial D_1}{\partial r} = - \frac{\mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 - 2)}{\text{Pr} \rho_p D_0 |\delta \mathbf{u}_p|_0^2 / \delta u_{p,0}} (u_{p,1} - u_1) + \underbrace{\frac{\mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 + 2)}{\text{Pr} \rho_p D_0^2}}_{D_1/t_{v,0}} D_1 \quad (8.55)$$

Le temps caractéristique  $t_{v,0}$  quantifie les effets convectifs sur les fluctuations de diamètre, induits par l'écart en diamètre  $D_1$ .

Le nombre  $S_v$  compare donc le temps de combustion  $t_{c,0}$  avec le temps de convection  $t_{v,0}$  (Eq. (8.54)) :

$$S_v = \frac{t_{c,0} \mu \ln(1+B)(\text{Sh}_0 + 2)}{\text{Pr} \rho_p D_0^2} \quad (8.56)$$

Si on considère l'écoulement moyen externe à la goutte invariant au cours de sa vie, le temps de combustion peut se simplifier comme (modèle ASSM, chapitre 3) :

$$t_{c,0} = \frac{\text{Pr} \rho_p (D_i^2 - D_r^2)}{4\mu \ln(1+B)\text{Sh}_0} \quad (8.57)$$

Le nombre  $S_v$  s'écrit alors :

$$S_v = \frac{(\text{Sh}_0 + 2)(D_i^2 - D_r^2)}{4\text{Sh}_0 D_0^2} \quad (8.58)$$

Pour le calcul instable de référence (chapitre 4), le nombre  $S_v$  est défini dans le domaine  $S_v \in [0.3; 1.5]$ . La variation longitudinale de ce nombre est négligeable, il varie radialement de sa valeur minimale (à l'injection) à sa valeur maximale (à la fin du processus de combustion). La valeur moyenne de ce nombre, pour ce calcul, est :

$$S_v = 0.6 \quad (8.59)$$

On cherche maintenant à exprimer la contribution frontière en fonction de ces mêmes nombres adimensionnels. Le taux de croissance de la contribution frontière (Eq. (8.28)) peut être simplifié comme :

$$\alpha_{n,b.c.} = \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma \int_0^L \psi_n^2 dx} \int_0^L \sin(2kx) \frac{\dot{q}_{D^2,0}}{p_0} \frac{\delta u_{p,0}}{|\delta \mathbf{u}_p|_0^2} \frac{\text{Sh}_0 - 2}{2\text{Sh}_0} \mathcal{B}_{b.c.} dx \quad (8.60)$$

avec les variables physiques définies à la position  $r = r_{c,0}$  et la fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  :

$$\mathcal{B}_{b.c.} = \frac{2S_c(S_r - S_c)}{S_v S_r^2} \left( -\frac{S_c S_v}{S_c^2 + S_v^2} + \cos(S_c) \frac{S_c S_v}{S_v^2 + S_c^2} e^{S_v} - \sin(S_c) \left( \frac{S_v^2}{S_c^2 + S_v^2} e^{S_v} + \frac{e^{-S_c/S_{tk}} - e^{S_v}}{1 + \frac{S_c}{S_v S_{tk}}} \right) \right) \quad (8.61)$$

qui dépend des nombres adimensionnels suivants : (i) le nombre de Strouhal de combustion  $S_c$ , (ii) le nombre de Stokes  $S_{tk}$ , (iii) le nouveau nombre  $S_v$  qui compare temps caractéristique de l'effet de la convection sur les fluctuations de diamètre par rapport au temps de combustion des gouttes et (iv) le nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ . Cette fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  doit être prise en  $r = r_{c,0}$ . A la frontière pour le calcul de référence (chapitre 4), le nombre  $S_v$  est différent de la valeur moyenne :

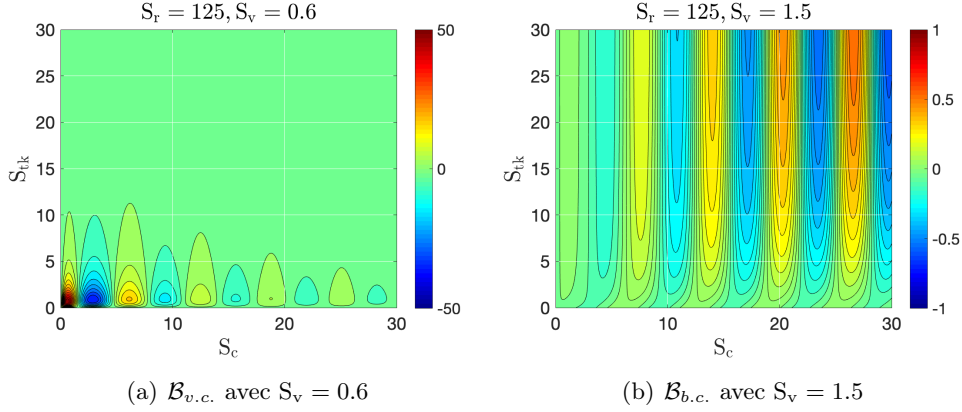
$$r = r_{c,0}, \quad S_v = 1.5 \quad (8.62)$$

Cette différence est liée à la variation en diamètre particulaire moyen  $D_0$  en fonction de la position  $r$  dans la zone de combustion. Les autres nombres adimensionnels peuvent être supposés invariants.

Les fonctions volume  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et frontière  $\mathcal{B}_{b.c.}$  sont tracées, pour  $S_r = 125$ , en fonction des nombres adimensionnels  $S_{tk}$  et  $S_c$ , respectivement aux figures 8.9(a) et 8.9(b).

Pour la contribution volume  $\mathcal{B}_{v.c.}$ , le nombre  $S_v$  est fixé à la valeur moyenne dans la zone de combustion  $S_v = 0.6$ . On observe que le maximum de  $\mathcal{B}_{v.c.}$  se situe à  $S_c \in [0.4, 0.8]$  et  $S_{tk} \in [0.5, 1]$ . La dynamique suivant le nombre de Strouhal de combustion  $S_c$  est alternativement positive puis négative et s'amortit. Ce comportement oscillant avec amortissement fait penser au phénomène de couche limite acoustique. Cette dynamique est plus marquée que pour la fonction  $\mathcal{A}$  développée par Casalis et al. (2011) (Eq. (8.42)). De même, la localisation des valeurs maximales de la fonction  $\mathcal{B}_{v.c.}$  est différente de la fonction  $\mathcal{A}$ . Enfin, il y a une plus forte dépendance au nombre de Stokes  $S_{tk}$  de la fonction  $\mathcal{B}_{v.c.}$  que de la fonction  $\mathcal{A}$ .

La fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  n'a pas de comparaison possible avec l'état de l'art puisque l'effet d'une contribution frontière a été mis en évidence dans le cadre de ce travail de thèse (chapitre 7 et annexe C). On fixe le nombre  $S_v$  à sa valeur à la frontière  $S_v = 1.5$  (calcul chapitre 7). On observe à la figure 8.9(b) une faible dépendance au nombre de Stokes  $S_{tk}$  (mais non négligeable) et une dépendance assez marquée au nombre de Strouhal de combustion  $S_c$ , où l'on retrouve un comportement oscillant, typique de la couche limite acoustique, tout comme la



**FIGURE 8.9** – Dépendance des fonctions  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}$ , représentant respectivement les contributions volume et frontière de la source, aux nombres adimensionnels  $S_{ik}$  et  $S_c$ , pour  $S_r = 125$

contribution volume  $\mathcal{B}_{v.c.}$ . Contrairement à la contribution volumique  $\mathcal{B}_{v.c.}$ , la contribution frontière  $\mathcal{B}_{b.c.}$  tend à s'amplifier par rapport au nombre de Strouhal de combustion  $S_c$ . Ce constat est discuté davantage ci-dessous, pour permettre une meilleure analyse de l'étude numérique autour du diamètre résiduel  $D_r$  du chapitre 5.

On sait que  $\alpha_{n,b.c.} \propto \dot{q}_{D^2,0} \mathcal{B}_{b.c.}$ . Lors de l'étude paramétrique numérique (chapitre 5), il a été observé que diminuer le diamètre résiduel  $D_r$  augmente le temps de combustion  $t_{c,0}$  (donc également le Strouhal de combustion  $S_c$ ), diminue le taux de dégagement de chaleur à la frontière  $\dot{q}_{D^2,0}(r_{c,0})$  et diminue le taux de croissance associé à la frontière  $\alpha_{n,b.c.}$ . L'augmentation du nombre de Strouhal  $S_c$  et la diminution du taux de croissance  $\alpha_{n,b.c.}$  est contradictoire avec l'analyse précédente de la fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  qui tend à s'amplifier. On en conclut donc que l'effet du nombre de Strouhal de combustion  $S_c$  sur le taux de croissance frontière  $\alpha_{n,b.c.}$  est faible par rapport à l'effet de la diminution du taux de dégagement de chaleur à la frontière  $\dot{q}_{D^2,0}(r_{c,0})$  induit par le diamètre  $D_r$ . L'étude paramétrique du chapitre 5 sur le diamètre résiduel  $D_r$  revient donc essentiellement à une étude de l'effet du taux de dégagement de chaleur en fin de vie.

Pour poursuivre l'analyse, il est également intéressant de comparer les contributions volume et frontière. Le rapport des deux taux de croissance des contributions volume/fronière donne :

$$\frac{\alpha_{n,v.c.}}{\alpha_{n,b.c.}} \propto \frac{\overline{\dot{q}_0^r}}{\dot{q}_{D^2,0}(r_{c,0})} \frac{\overline{\mathcal{B}_{v.c.}^r}}{\mathcal{B}_{b.c.}(r_{c,0})} \quad (8.63)$$

avec  $\bar{q}^{\mathbf{r}}$  le taux de dégagement de chaleur moyen dans la zone de combustion et  $\dot{q}_{D^2,0}(r_{c,0})$  le taux de dégagement de chaleur avant extinction. Ce rapport volume/frontière montre donc une dépendance avec les fonctions  $\overline{\mathcal{B}_{v.c.}^{\mathbf{r}}}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}(r_{c,0})$  et le rapport entre taux de dégagement de chaleur dans le volume et en fin de vie.

La figure 8.10 illustre le rapport entre les deux fonctions  $\overline{\mathcal{B}_{v.c.}^{\mathbf{r}}}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}(r_{c,0})$  avec une fonction log décimale :

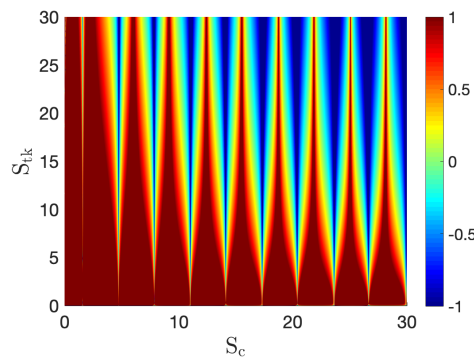
$$\log(|\overline{\mathcal{B}_{v.c.}^{\mathbf{r}}}/\mathcal{B}_{b.c.}(r_{c,0})|) \quad (8.64)$$

en fonction des nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$ . Si on suppose un taux de dégagement de chaleur dans le volume et à la frontière du même ordre de grandeur  $\bar{q}_0^{\mathbf{r}} \sim \dot{q}_{D^2,0}(r_{c,0})$ , la figure 8.10 illustre également le rapport entre les taux de croissance volume et frontière, entre contribution volume et contribution frontière :

$$\text{Si } \bar{q}_0^{\mathbf{r}} \sim \dot{q}_{D^2,0}(r_{c,0}), \quad \log(|\overline{\mathcal{B}_{v.c.}^{\mathbf{r}}}/\mathcal{B}_{b.c.}(r_{c,0})|) \sim \log(|\alpha_{v.c.}/\alpha_{b.c.}|) \quad (8.65)$$

Dans la figure 8.10, les couleurs proches du rouge montrent les zones dans lesquelles la contribution volume est dominante (10 fois plus grande,  $\log_{10}(10) = 1$ ) et les couleurs proches du bleu où la contribution frontière est dominante (10 fois plus grande,  $\log_{10}(0.1) = -1$ ).

On observe que plus les nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$  sont importants, moins la contribution frontière est négligeable voire majoritaire (zone en bleu).



**FIGURE 8.10** – Comparaison entre les deux fonctions  $\overline{\mathcal{B}_{v.c.}^{\mathbf{r}}}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}|_{r_{c,0}}$ . Valeur absolue du rapport en échelle log décimale :  $\log_{10}(|\overline{\mathcal{B}_{v.c.}^{\mathbf{r}}}/\mathcal{B}_{b.c.}(r_{c,0})|)$

Dans cette sous-section, à partir du modèle de fluctuations du taux de dégagement de chaleur développé à la section 8.2, une analyse par nombres adimensionnels a été effectuée. Ce modèle pour les fluctuations du taux de dégagement

de chaleur intègre davantage de physique que le modèle de Gallier et Godfroy (Eq. (8.38)) utilisé pour une analyse dimensionnelle effectuée par Casalis et al. (2011) brièvement présentée à la sous-section 8.3.1. La nouvelle analyse dérivée dans cette section fait intervenir un autre nombre adimensionnel  $S_v$  qui compare un temps de convection associé aux fluctuations de diamètre avec le temps de combustion des gouttes. La dynamique observée avec cette nouvelle modélisation physique est différente de celle identifiée par Casalis et al. (2011) et présente une certaine cohérence par rapport à ce qui peut être attendu physiquement.

Néanmoins, cette modélisation conserve des hypothèses qui peuvent être limitantes : (i) hypothèse d'uniformité pour  $\mathcal{B}_{v.c.}$ , (ii) injection à l'équilibre de vitesse entre les deux phases, (iii) simplification de l'équation des fluctuations de diamètre  $D_1$  (hypothèse  $T_4$  du chapitre 7), (iv) utilisation du modèle Eq. (8.16) pour les fluctuations de vitesse.

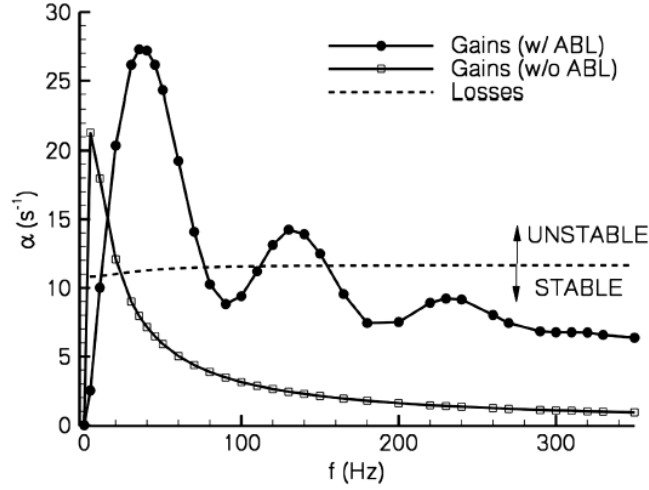
Dans la sous-section suivante, on analyse les calculs de Gallier and Godfroy (2009) à partir de ces nouvelles analyses par nombres adimensionnels.

### 8.3.3 Comparaison qualitative avec le calcul

Dans cette sous-section, on analyse le comportement du taux de croissance source  $\alpha_{ITHAC}$ . Toute l'analyse précédente n'intègre pas d'intégration longitudinale, car la combustion est distribuée le long du mode acoustique et rend trop complexe l'intégration. Il est donc impossible de faire une confrontation directe entre un taux de croissance  $\alpha_{ITHAC}$  numérique et analytique en fonction des nombres adimensionnels.

Néanmoins, il est possible de faire une comparaison qualitative avec des calculs numériques et l'analyse précédente. Gallier and Godfroy (2009) ont fait une étude paramétrique sur le taux de croissance  $\alpha_{ITHAC}$  en fonction de la fréquence excitée  $f$ , comme le montre la figure 8.11. On se contentera d'analyser le cas avec couche limite acoustique que nous avons intégrer dans notre modélisation ( $w/ABL$ ).

On observe à la figure 8.11 que le taux de croissance oscille et tend à diminuer lorsque la fréquence acoustique  $f$  augmente. Considérons que le taux de croissance  $\alpha_{ITHAC}$  et les fonctions  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}$  sont indépendantes du nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ . Dans ce cas, augmenter la fréquence acoustique  $f$  revient à augmenter (i) le nombre de Stokes  $S_{tk}$  et (ii) le nombre de Strouhal de combustion  $S_c$ . La figure 8.11 illustre donc un taux de croissance  $\alpha_{ITHAC}$  qui a un comportement oscillant et s'atténue avec les nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de combustion  $S_c$ .



**FIGURE 8.11** – Taux de croissance source de l'instabilité  $\alpha_{ITHAC}$  mesuré par le calcul (avec ou sans couche limite acoustique, ABL pour "Acoustic Boundary Layer", w/ pour "avec", w/o pour "sans") (Gallier and Godfroy (2009))

L'étude paramétrique de Gallier and Godfroy (2009) a été faite avec les diamètres de gouttes suivants : un diamètre d'injection  $D_i = 120 \mu m$  et un diamètre résiduel  $D_r = 60 \mu m$ . Suivant le chapitre 5, la contribution volume est majoritaire pour ce calcul.

On remarque à la figure 8.9(a) que la  $\mathcal{B}_{v.c.}$  oscille avec l'augmentation du nombre de Strouhal de combustion  $S_c$  et s'atténue avec l'augmentation des nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$ .

Cette analyse est donc en accord avec les résultats numériques (figure 8.11) et permet de valider qualitativement l'analyse par nombres adimensionnels.

Il a été supposé précédemment que la sensibilité des fonctions  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}$  aux nombres  $S_r$  et  $S_v$  n'était pas d'ordre 1, puisque l'analyse a été centrée sur les nombres de Stokes  $S_{tk}$  et Strouhal de combustion  $S_c$ . Leur impact sur la source est donc étudié à la sous-section suivante.

### 8.3.4 Etude de sensibilité aux nombres adimensionnels $S_r$ et $S_v$

Suivant Casalis et al. (2011), la source de l'instabilité est quasi-indépendante du nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ . Néanmoins, la modélisation physique choisie étant trop simpliste, il est important de vérifier cette analyse avec une modélisation des fluctuations du taux de dégagement de chaleur plus aboutie comme celle proposée dans la sous-section 8.3.2. On analysera donc les fonc-



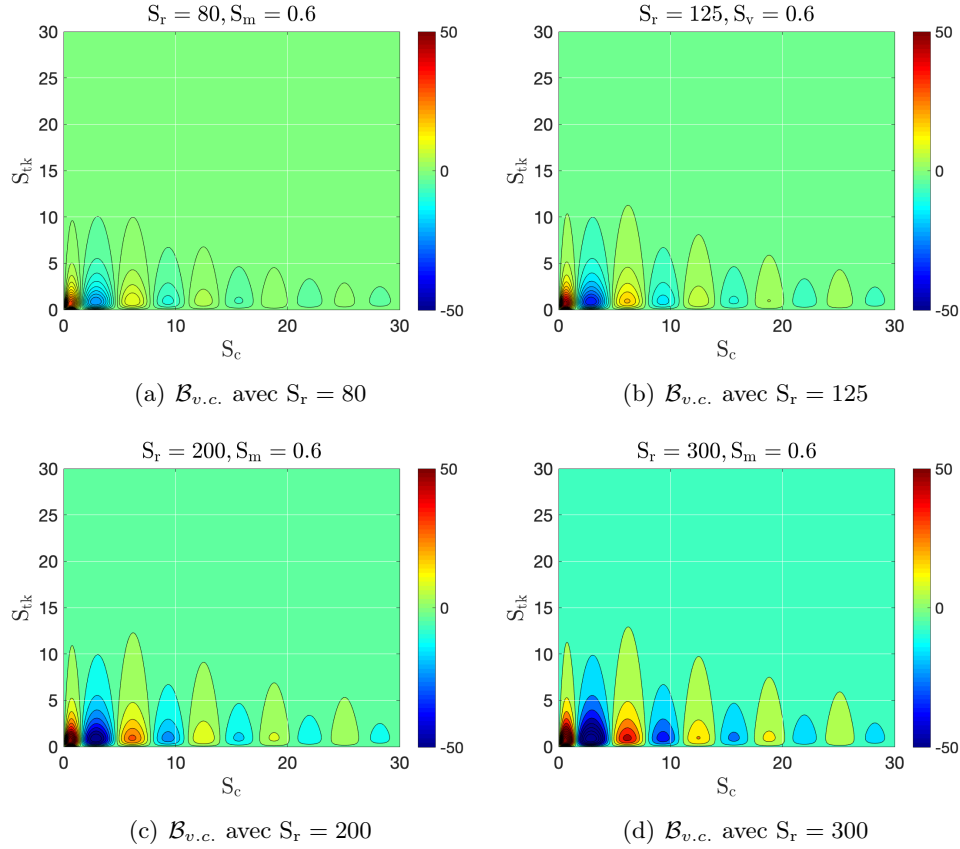
tions  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}$ , respectivement représentatives des contributions volume et frontière de la source de l'instabilité, en fonction du nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ . En suivant, on étudiera la sensibilité des fonctions  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}$  au nombre de convection  $S_v$  nouvellement identifié.

La figure 8.12 montre la fonction  $\mathcal{B}_{v.c.}$  (contribution volume) en fonction du nombre de Stokes  $S_{tk}$  et du nombre de Strouhal de combustion  $S_c$  pour 4 nombres de Strouhal de l'écoulement différents  $S_r \in [80; 125; 200; 300]$  et un nombre de convection  $S_v = 0.6$ . L'échelle de couleur a été fixée à celle de référence  $S_r = 125$ . On observe que la dépendance en fonction des nombres  $S_{tk}$  et  $S_c$  n'est pas perturbée en fonction de  $S_r$ . Néanmoins, les niveaux s'intensifient avec le nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ . La contribution volume, contrairement à l'analyse faite par [Casalis et al. \(2011\)](#), est donc dépendante du nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ , mais cette dépendance n'est pas de premier ordre par rapport aux nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$ .

La figure 8.13 présente la fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  (contribution frontière) en fonction des nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$  pour 4 nombres de Strouhal de l'écoulement différents  $S_r \in [80; 125; 200; 300]$  et un nombre de convection  $S_v = 1.5$ . Le nombre de convection  $S_v = 1.5$  est pris à une valeur plus importante puisque la valeur à la frontière est plus élevée qu'en moyenne dans le volume. L'échelle de couleur a été fixée à celle de référence  $S_r = 125$ . On observe que le nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$  n'influe pas sur la dynamique de la fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  en fonction des nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$ . Cependant, la fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  s'atténue avec le nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ . Ce comportement de la contribution frontière est contraire à la contribution volume qui s'amplifie avec le nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ . Ces comportements contraires des fonctions  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}$  ne permettent donc pas d'atténuer la source en modifiant simplement le nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ .

La suite de cette sous-section consiste maintenant à observer la sensibilité des fonctions  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}$  au nombre de convection  $S_v$ .

La figure 8.14 montre la fonction  $\mathcal{B}_{v.c.}$  en fonction des nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$  pour 4 nombres de convection  $S_v \in [0.4; 0.6; 0.8; 1]$ . Le nombre de Strouhal de l'écoulement est fixé à  $S_r = 125$ . On observe que la fonction  $\mathcal{B}_{v.c.}$  s'amplifie notablement avec le nombre de convection  $S_v$ . La dépendance à ce nombre est donc forte et non négligeable.



**FIGURE 8.12** – Sensibilité de la fonction  $\mathcal{B}_{v.c.}$  au nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$  pour  $S_v = 0.6$

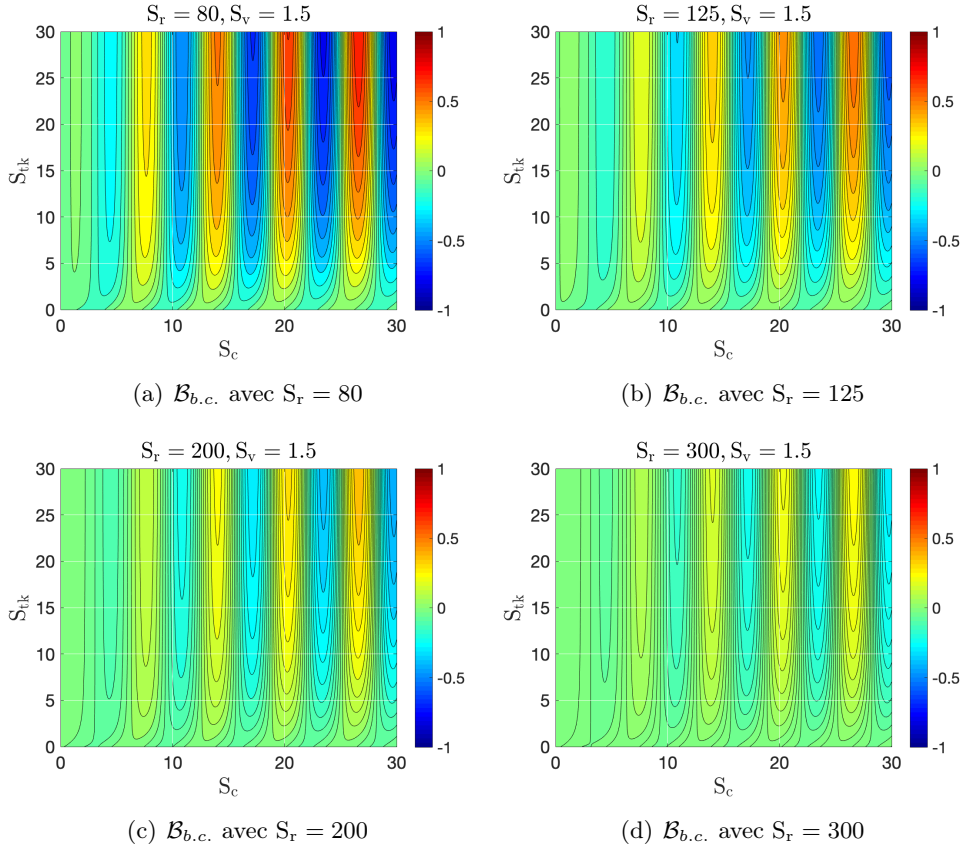
La figure 8.14 représente la fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  en fonction des nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$  pour 4 nombres de convection  $S_v \in [1; 1.5.2.1; 3]$ . Le nombre de Strouhal de l'écoulement est fixé à  $S_r = 125$ . On remarque que la fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  s'amplifie très fortement lorsque le nombre de convection  $S_v$  augmente.

Les fonctions  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}$  ont un comportement similaire lorsque le nombre de convection  $S_v$  augmente. Ce nombre adimensionnel  $S_v$  peut donc être utilisé pour minimiser la source. Plus  $S_v$  est faible, plus la source a de possibilités d'être dominée par les pertes acoustiques.

Cette étude de sensibilité des fonctions  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}$  a montré que :

- si  $S_r$  augmente,  $\mathcal{B}_{v.c.}$  s'amplifie et  $\mathcal{B}_{b.c.}$  s'atténue
- si  $S_v$  augmente,  $\mathcal{B}_{v.c.}$  et  $\mathcal{B}_{b.c.}$  s'amplifient.

Diminuer le nombre  $S_v$  peut donc permettre de minimiser ces deux fonctions en même temps, contrairement au nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ .



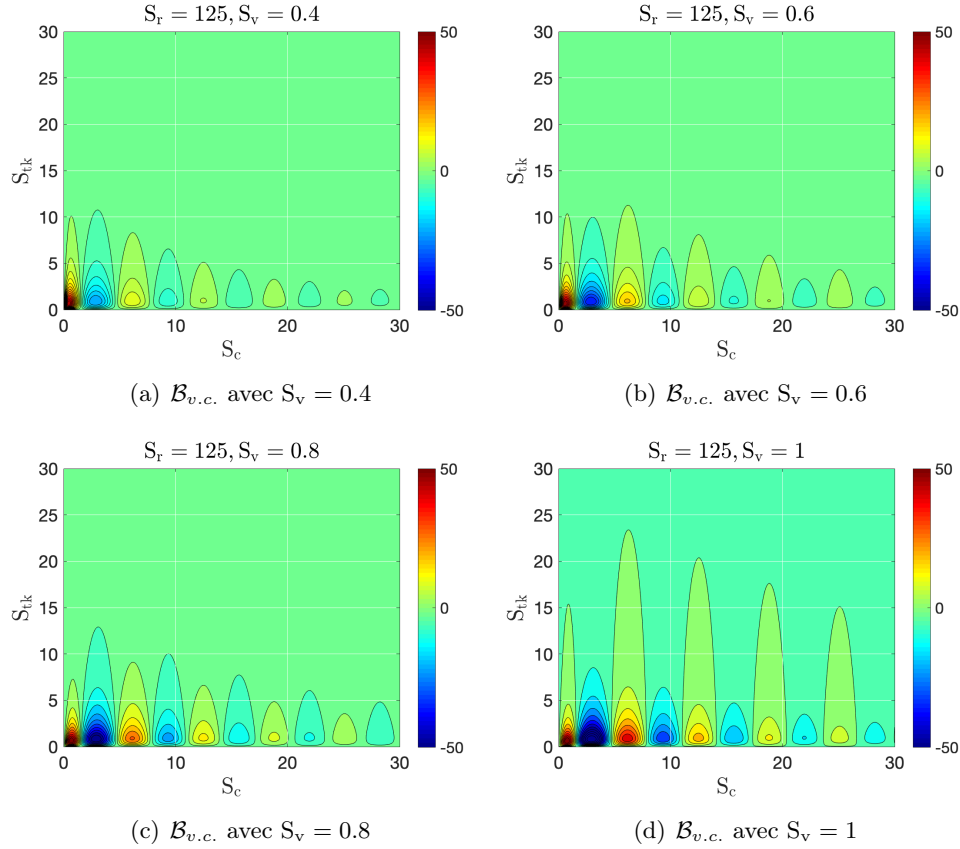
**FIGURE 8.13** – Sensibilité de la fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  au nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$  pour  $S_v = 1.5$

## 8.4 Conclusion

Une modélisation simplifiée pour les fluctuations de la vitesse des gouttes, de leur diamètre et de taux de dégagement de chaleur a été réalisée. Les expressions développées ne font pas intervenir d'intégrales.

Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats numériques et aux modèles de Gallier and Godfroy (2009). Le modèle simplifié des fluctuations du taux de dégagement de chaleur intègre davantage de physique que le modèle de Gallier and Godfroy (2009) et est tout à fait satisfaisant par rapport aux résultats numériques du chapitre 7.

Les développements réalisés reposent sur les hypothèses simplificatrices suivantes : (i) une vitesse d'injection gaz-particules à l'équilibre, (ii) une variation négligeable du champ moyen dans la direction radiale, (iii) un modèle de fluctuations de vitesse gaz tiré de Gallier and Godfroy (2009) et (iv) l'hypothèse

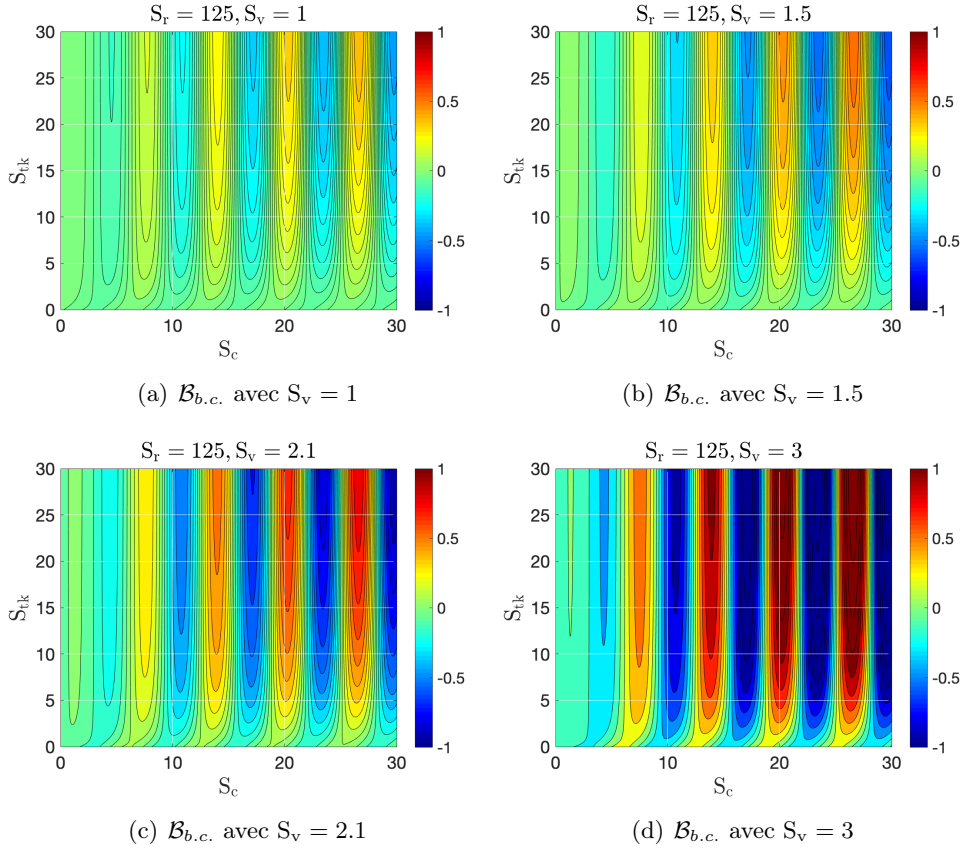


**FIGURE 8.14** – Sensibilité de la fonction  $\mathcal{B}_{v.c.}$  au nombre de convection  $S_v$  pour  $S_r = 125$

$T_4$  du chapitre 7. L'ensemble des conclusions de ce chapitre n'est donc valable que dans le cadre de ces hypothèses.

L'expression des fluctuations du taux de dégagement de chaleur permet de déterminer le taux de croissance  $\alpha_{ITHAC}$  induit par la source thermoacoustique. Casalis et al. (2011) ont fait une dérivation similaire à partir du modèle de Gallier and Godfroy (2009) et trouvent trois nombres adimensionnels : (i) le nombre de Stokes  $S_{tk}$ , (ii) le nombre de Strouhal de combustion  $S_c$  et (iii) le nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ . Dans leur analyse, les auteurs expliquent que le taux de croissance  $\alpha_{ITHAC}$  associé à la source est quasi-indépendant du nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$ . Néanmoins, leur analyse repose sur le modèle de Gallier and Godfroy (2009) pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur qui est incomplet (voir chapitre 7).

La démarche de Casalis et al. (2011) a donc été reprise à partir de la nou-



**FIGURE 8.15** – Sensibilité de la fonction  $\mathcal{B}_{b.c.}$  au nombre de convection  $S_v$  pour  $S_r = 125$

velle modélisation pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Un nouveau nombre adimensionnel est alors identifié : le nombre  $S_v$  qui compare le temps de combustion d'une goutte par rapport à un temps caractéristique des effets convectifs sur les fluctuations de diamètre.

On observe également que la dépendance de l'instabilité aux nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$  est quelque peu différente de l'analyse de [Casalis et al. \(2011\)](#). De plus, la contribution associée à la dynamique de la frontière, identifiée durant ce travail de thèse, est évaluée en fonction de ces deux nombres.

Il ressort que cette contribution frontière ne peut pas être négligée et peut dans certains cas être plus importante que la contribution volume, lorsque les nombres de Stokes  $S_{tk}$  et de Strouhal de combustion  $S_c$  augmentent.

De plus, une étude de sensibilité a montré que la dépendance de l'instabilité au

nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$  et au nombre  $S_v$  n'était pas négligeable.

Enfin, lorsque  $S_v$  diminue, les contributions volume et frontière s'atténuent quels que soient les autres nombres adimensionnels. Il s'agit du seul nombre parmi les quatre pour lequel ces contributions ont un même comportement monotone. Modifier le nombre  $S_v$  permet donc de minimiser les deux contributions de la source de l'instabilité.

Dans la prochaine partie, un outil d'ordre réduit, intégrant une modélisation pour les non-linéarités, est proposé. Cet outil permet de reproduire l'amplitude (niveau et fréquence) d'instabilités observées dans les simulations numériques CPS.



Quatrième partie

Analyse faiblement non-linéaire





## Chapitre 9

# Modèle d'ordre réduit faiblement non-linéaire

*Ce chapitre propose une méthodologie pour le calcul de l'amplitude des instabilités thermoacoustiques dans un MPS. Les développements sont réalisés pour un modèle de combustion qui peut évoluer après ce travail de doctorat. Une méthode est développée afin de proposer un outil qui peut s'adapter à tout type de modèle de combustion. Une équation d'amplitude pour des régimes faiblement non-linéaires et une modélisation physique d'ordre réduit pour le champ moyen, pour la source et les pertes acoustiques sont développées. Ces développements s'appuient sur les observations réalisées dans les chapitres précédents et sur des simulations numériques CPS. Cet outil, à ce stade, ne peut être considéré comme prédictif, mais permet d'apporter des éléments de compréhension nouveaux.*

### 9.1 Méthode des moyennes

Dans ce chapitre, un outil d'ordre réduit faiblement non-linéaire est détaillé. Dans un premier temps, l'approche dite "averaging method" est rappelée. Cette méthode est utilisée généralement pour des résolutions analytiques et est étendue ici à une utilisation numérique, d'ordre réduit, pour prédire l'instabilité thermoacoustique dans un MPS. Cette méthode est adoptée car des modèles analytiques utilisés pour la modélisation de l'instabilité ne sont valables que pour des signaux harmoniques. Ces modèles peuvent être étendus à un système faiblement non-linéaire, c'est-à-dire pour des variations lentes du taux de croissance et de la fréquence excitée par rapport à la période d'oscillation. De plus, la méthode des moyennes ("averaging method") permet de lisser les signaux

temporels calculés et éviter des effets à temps courts.

Cette section est inspirée du cours de [Strogatz \(2018\)](#). On suppose que le champ de fluctuations de pression  $p_1(x, t)$  peut se décomposer en une base orthogonale de n-modes acoustiques  $\psi_n$  :

$$p_1(x, t) = \sum_n \eta_n(t) \psi_n(x) \quad (9.1)$$

où  $\eta_n$  correspond à l'amplitude du n<sup>ième</sup> mode acoustique. On définit dans le chapitre 6 une équation d'amplitude pour chaque mode tel que (Eq. (6.10)) :

$$\ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = F_n \quad (9.2)$$

où  $F_n$  représente l'ensemble des termes sources et pertes, potentiellement non-linéaires, et  $\omega_n$  la fréquence angulaire du n<sup>ième</sup> mode acoustique.

On suppose que les non-linéarités sont faibles et que l'équation d'amplitude peut s'écrire comme (pour un seul mode) :

$$\ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = \epsilon h(\eta_1, \dot{\eta}_1) \quad (9.3)$$

avec  $0 \leq \epsilon \ll 1$ . Pour le cas  $\epsilon = 0$ , on trouve la solution suivante à l'équation :

$$\eta_1 = \hat{\eta}_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad \dot{\eta}_1 = -\omega_1 \hat{\eta}_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \quad (9.4)$$

avec  $\hat{\eta}_1$  le niveau du signal et  $\phi_1$  le déphasage constants. Pour  $\epsilon \neq 0$ , on peut supposer que cela induit une évolution temporelle lente de  $\hat{\eta}_1$  et  $\phi_1$  par rapport aux oscillations de fréquence angulaire  $\omega_1$ . On obtient donc la solution suivante à l'équation (9.3) :

$$\eta_1 = \hat{\eta}_1(t) \cos(\omega_1 t + \phi_1(t)), \quad \dot{\eta}_1 = -\omega_1 \hat{\eta}_1(t) \sin(\omega_1 t + \phi_1(t)) \quad (9.5)$$

avec  $\hat{\eta}_1(t)$  et  $\phi_1(t)$  fonctions temporelles à résoudre. On peut redéfinir, à partir de Eq. (9.5), les grandeurs  $\hat{\eta}_1(t)$  et  $\phi_1(t)$  :

$$\hat{\eta}_1 = \sqrt{\eta_1^2 + \frac{\dot{\eta}_1^2}{\omega_1^2}}, \quad \tan(\omega_1 t + \phi_1) = -\frac{\dot{\eta}_1}{\omega_1 \eta_1} \quad (9.6)$$

Ces équations sont dépendantes des grandeurs  $\eta_1$  et  $\dot{\eta}_1$ , on peut les réécrire comme dépendantes du terme source  $\epsilon h$ . En mettant l'expression de  $\hat{\eta}_1$  au carré et après dérivation, on a :

$$\hat{\eta}_1 \frac{d\hat{\eta}_1}{dt} = \eta_1 \dot{\eta}_1 + \frac{\dot{\eta}_1 \ddot{\eta}_1}{\omega_1^2} \quad (9.7)$$

La dérivée seconde  $\ddot{\eta}_1$  peut être remplacée par l'équation (9.3) et on trouve donc :

$$\frac{d\hat{\eta}_1}{dt} = -\frac{\epsilon h}{\omega_1} \sin(\omega_1 t + \phi_1) \quad (9.8)$$

avec  $\epsilon h$  le terme sources-pertes (Eq. (9.3)). De plus, sachant Eq. (9.5), on peut trouver pour le glissement fréquentiel induit par les sources et pertes acoustiques  $d\phi_1/dt$  :

$$\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{\epsilon h}{\hat{\eta}_1 \omega_1} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (9.9)$$

On peut alors définir une nouvelle fréquence d'oscillation  $\omega$  telle que :

$$\omega = \omega_1 + \frac{d\phi_1}{dt} \quad (9.10)$$

A partir des solutions Eqs. (9.8) et (9.9), on peut observer que le niveau  $\hat{\eta}_1$  et la phase  $\phi_1$  évoluent lentement pour  $\epsilon$  petit :

$$\frac{d\hat{\eta}_1}{dt} = \mathcal{O}(\epsilon), \quad \frac{d\phi_1}{dt} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (9.11)$$

Les équations (9.8) et (9.9) peuvent être résolues directement. Néanmoins, pour lisser les effets à temps courts, on peut moyenniser sur la période acoustique ("averaging method"). Ceci est correct car les variations de la phase et du niveau d'amplitude sont lentes (Eqs. (9.11)). On définit donc la moyenne à l'instant  $t$  telle que :

$$\frac{d\overline{\hat{\eta}_1}}{dt} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} -\frac{\epsilon h}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau + \phi_1) d\tau \quad (9.12)$$

$$\frac{d\overline{\phi_1}}{dt} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} -\frac{\epsilon h}{\hat{\eta}_1 \omega_1} \cos(\omega_1 \tau + \phi_1) d\tau \quad (9.13)$$

avec la période acoustique  $T = 2\pi/\omega_1$ . L'approximation faite en substituant  $\hat{\eta}_1$  par  $\overline{\hat{\eta}_1}$  est de l'ordre de  $\epsilon$  dans l'équation (9.3). Il en est de même pour la phase  $\phi_1$  :

$$\hat{\eta}_1 = \overline{\hat{\eta}_1} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \phi_1 = \overline{\phi_1} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (9.14)$$

On trouve alors que l'approximation faite sur la dérivée est de l'ordre de  $\epsilon^2$  :

$$\frac{d\overline{\hat{\eta}_1}}{dt} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} -\frac{\epsilon h(\overline{\hat{\eta}_1}, \overline{\phi_1})}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau + \phi_1) d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (9.15)$$

$$\frac{d\overline{\phi_1}}{dt} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} -\frac{\epsilon h(\widehat{\eta}_1, \overline{\phi_1})}{\widehat{\eta}_1 \omega_1} \cos(\omega_1 \tau + \phi_1) d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (9.16)$$

Cette approche présentée est la méthode des moyennes ("averaging method") et est équivalente à l'approche "two-timing" (Strogatz (2018)). Sachant que  $h$  est une fonction présentant des non-linéarités, elle est usuellement une fonction polynomiale de  $\eta_1$  et  $\dot{\eta}_1$  de type oscillateur de Van der Pol comme dans les articles suivants :Strogatz (2018), Noiray et al. (2011), Bonciolini et al. (2017), Moeck et al. (2018).

Dans la section suivante, on propose une modélisation inspirée de l'approche "averaging method" où  $\epsilon h$  est une fonction simplifiée par des modélisations d'ordre réduit mais évaluée numériquement à chaque pas de temps.

## 9.2 Approche non-linéaire pour l'ITHAC

### 9.2.1 Pertes et source acoustiques linéaires

On cherche maintenant à exprimer la fonction  $\epsilon h$  sous la forme de taux de croissance  $\alpha$  et de glissements fréquentiels  $\delta\omega$ .

En linéaire, on suppose que le signal de pression est une fonction de n-signaux (pour n-modes) du type (chapitre 6) :

$$\eta_n = \underbrace{\widehat{\eta}_{n,0} \exp(\alpha_n t)}_{\widehat{\eta}_n(t)} \cos(\omega t) \quad (9.17)$$

avec  $\widehat{\eta}_n$  le niveau du signal,  $\alpha_n$  le taux de croissance et  $\omega = \omega_n + \delta\omega_n$  la fréquence angulaire qui intègre un glissement fréquentiel  $\delta\omega_n$  par rapport au mode acoustique pur  $\omega_n$ . La dérivée première peut donc s'écrire comme :

$$\dot{\eta}_n = \widehat{\eta}_{n,0} \exp(\alpha_n t) [\alpha_n \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)] \quad (9.18)$$

Sa dérivée seconde est égale à :

$$\ddot{\eta}_n = \widehat{\eta}_{n,0} \exp(\alpha_n t) [\alpha_n (\alpha_n \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)) - \alpha_n \omega \sin(\omega t) - \omega^2 \cos(\omega t)] \quad (9.19)$$

En substituant l'équation (9.17) dans l'expression précédente, on trouve :

$$\ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = -(2\omega_n \delta\omega_n + \delta\omega_n^2 - \alpha_n^2) \widehat{\eta}_n^2 - 2\alpha_n (\omega_n + \delta\omega_n) \widehat{\eta}_n \sin((\omega_n + \delta\omega_n)t) \quad (9.20)$$

Comme on suppose que le système est faiblement non-linéaire, le glissement fréquentiel et le taux de croissance sont faibles par rapport à la fréquence :

$$\alpha_n^2 \ll \omega_n \delta\omega_n, \quad \delta\omega \ll \omega_n \quad (9.21)$$

On a donc l'équation d'amplitude suivante :

$$\ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = -2\omega_n \delta\omega_n \eta_n^2 - 2\alpha_n (\omega_n + \delta\omega_n) \hat{\eta}_n \sin((\omega_n + \delta\omega_n)t) \quad (9.22)$$

On peut réécrire  $\eta_n$  sous la forme suivante (comme dans la section 9.1) :

$$\eta_n = \hat{\eta}_n(t) \cos(\omega_n t + \phi_n(t)) \quad (9.23)$$

et le glissement fréquentiel  $\delta\omega_n$  est donné par définition par :

$$\delta\omega_n = \frac{d\phi_n}{dt} \quad (9.24)$$

L'équation d'amplitude (9.22) peut donc s'écrire comme :

$$\ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = -2\omega_n \frac{d\phi_n}{dt} \eta_n^2 - 2\alpha_n (\omega_n + \frac{d\phi_n}{dt}) \hat{\eta}_n \sin(\omega_n t + \phi_n(t)) \quad (9.25)$$

Par identification dans les Eqs. (9.3) et (9.25), on trouve :

$$\epsilon h = -2\omega_n \frac{d\phi_n}{dt} \eta_n^2 - 2\alpha_n (\omega_n + \frac{d\phi_n}{dt}) \hat{\eta}_n \sin(\omega_n t + \phi_n(t)) \quad (9.26)$$

On suppose que les pertes acoustiques sont linéaires et que seule la source présente des non-linéarités permettant de converger vers un cycle limite (chapitres 6 et 5). Dans le chapitre 6, des expressions analytiques pour les pertes acoustiques ont été données sous la forme d'un taux de croissance  $\alpha_l$  et d'un glissement fréquentiel  $\delta\omega_l$  tel que :

$$\alpha_l = \alpha_{FT} + \alpha_t + \alpha_i + \alpha_{inert}, \quad \delta\omega_l = \delta\omega_t + \delta\omega_{inert} \quad (9.27)$$

avec les indices  $l$ ,  $FT$ ,  $t$ ,  $i$ ,  $inert$  correspondant, respectivement, aux pertes acoustiques, au "flow-turning", à la tuyère, à l'injection (par le propergol) et aux particules inertes. Dans l'outil, on ne modélise pas pour l'instant le glissement fréquentiel induit par la tuyère ( $\delta\omega_t = 0$ ), car on suppose qu'elle est très courte.

### 9.2.2 Source non-linéaire

Dans cette sous-section, on décompose le terme de droite de l'équation (9.25) en termes source et pertes acoustiques. La source est définie par  $\mathcal{S}_{ITHAC}$  et les pertes par un glissement fréquentiel  $\delta\omega_l$  et un taux de croissance  $\alpha_l$ . On suppose

qu'il n'y a pas de couplage non-linéaire entre la source et les pertes. Seule la source intégrera des non-linéarités.

Par décomposition linéaire de l'équation (9.25), on trouve l'équation suivante :

$$\ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = \underbrace{-2\omega_n \delta\omega_l \eta_n^2 - 2\alpha_l \left(\omega_n + \frac{d\phi_n}{dt}\right) \hat{\eta}_n \sin(\omega_n t + \phi_n(t))}_{\epsilon h} + \mathcal{S}_{ITHAC} \quad (9.28)$$

avec  $d\phi_n/dt$  le décalage fréquentiel induit par les pertes acoustiques ( $\alpha_l$ ,  $\delta\omega_l$ ) et la source de combustion  $\mathcal{S}_{ITHAC}$ .

Les pertes acoustiques ( $\alpha_l$  et  $\delta\omega_l$ ) sont données au chapitre 6. La source non-linéaire  $\mathcal{S}_{ITHAC}$  est explicitée dans la sous-section suivante. Cette équation Eq. (9.28) peut être utilisée en multi-fréquentiel ou mono-fréquentiel.

Pour du multi-fréquentiel, des transferts d'énergie acoustique entre modes n'auront lieu que par le terme source  $\mathcal{S}_{ITHAC}$  non-linéaire et non orthogonal associé à la combustion de l'aluminium.

On rappelle que l'on se limitera à du mono-fréquentiel car en multi-fréquentiel le système peut devenir chaotique (dimension de l'espace de phase supérieure ou égale à 3, [Strogatz \(2018\)](#)). En particulier, la modélisation faiblement non-linéaire ne peut être valable en multi-fréquentiel qu'à condition d'un couplage très faible entre les modes.

Le terme source  $\mathcal{S}_{ITHAC}$  de l'équation d'amplitude Eq. (9.28) se définit comme :

$$\mathcal{S}_{ITHAC} = \frac{\gamma - 1}{E_n^2} \int_V \psi_n \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} dV \quad (9.29)$$

avec  $\psi_n$  le  $n^{\text{ième}}$  mode acoustique,  $E_n^2$  l'énergie acoustique correspondante et  $\partial \dot{q}/\partial t$  la dérivée temporelle du taux de dégagement de chaleur. On rappelle pour l'énergie acoustique la relation suivante :

$$E_n^2 = \left( \int_V \psi_n^2 dV \right) \quad (9.30)$$

Pour une géométrie cylindrique fermée-fermée, le  $n^{\text{ième}}$  mode de pression  $\psi_n$  peut s'écrire :

$$\psi_n = \cos(kx), \quad k = \frac{\omega_n + d\phi_n/dt}{a_0}, \quad \delta\omega_n = d\phi_n/dt \quad (9.31)$$

avec  $k$  la longueur d'onde,  $a_0$  la vitesse du son et  $d\phi_n/dt$  le glissement fréquentiel.

Dans l'équation (9.29), on remarque la nécessité de modéliser la dérivée temporelle du taux de dégagement de chaleur local induit par la combustion des gouttes  $\partial\dot{q}/\partial t$ . Cette quantité est à l'origine du comportement non-linéaire du système. La non-linéarité est donc très liée à l'instationnarité de la combustion de l'aluminium. Or, notre connaissance de la combustion de l'aluminium est incomplète (chapitre 3). De plus, il n'y a pas d'essais expérimentaux sur des MPS qui permettraient d'évaluer empiriquement le terme source  $\mathcal{S}$  par des polynômes, comme cela est fait généralement pour une instabilité thermoacoustique (Strogatz (2018), Noiray et al. (2011), Bonciolini et al. (2017), Moeck et al. (2018)).

Comme dans l'ensemble du manuscrit, on maintient le choix du modèle ASSM pour la combustion des gouttes mais la modélisation non-linéaire de  $\mathcal{S}$  doit être relativement flexible au changement de modèle de combustion.

La dérivation analytique d'une modélisation linéaire est assez complexe pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur, même pour un modèle aussi simple que le modèle ASSM (chapitre 7). La linéarisation suppose de ne considérer que les termes de fluctuations d'ordre 1. Pour le faiblement non-linéaire, cela présuppose d'intégrer en plus les termes d'ordre 2, voire d'ordre 3. Ceci est possible analytiquement mais implique des expressions assez complexes et des développements beaucoup plus lourds. De plus, ces développements analytiques pour le non-linéaire seraient limités au modèle de combustion choisi, donc ne permettent pas aisément de changer de modèle.

On sait également depuis les chapitres 5 et 7 que le taux de dégagement de chaleur moyen local évolue en fonction de l'amplitude. Donc, il ne suffit pas de modéliser seulement les fluctuations du taux de dégagement de chaleur autour du champ moyen. Il faut également évaluer la dépendance du champ moyen du taux de dégagement de chaleur à l'amplitude.

Pour répondre à une flexibilité du choix de modèle de combustion, éviter des développements analytiques trop lourds et intégrer la dépendance du champ moyen, le plus raisonnable est de calculer le taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}(r, x, t)$  à tout instant et pour chaque point du maillage, comme cela est fait par simulation numérique CPS. Par contre, la réduction d'ordre sera effectuée sur la modélisation de grandeurs dont le taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}$  dépend.

On rappelle l'expression du taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}$  suivant le mo-



dèle ASSM (chapitre 3) :

$$\dot{q} = N_p \pi D \frac{\mu}{\text{Pr}} \ln(1 + \text{B}) \text{Sh} (\Delta H_r + C T_{sat} - C_{v,g} T_g) \mathcal{H}(D - D_r) \quad (9.32)$$

avec  $\mu$  la viscosité du gaz et  $\text{Pr}$  le nombre de Prandtl supposés constants et connus (donnés dans les conditions de la simulation CPS),  $N_p$  le nombre de gouttes par volume,  $D$  le diamètre de gouttes,  $\text{B}$  le nombre de Spalding,  $\text{Sh}$  le nombre de Sherwood,  $\Delta H_r$  l'enthalpie de réaction,  $C$  la capacité calorifique des gouttes,  $T_{sat}$  la température des gouttes en réaction,  $C_{v,g}$  la capacité calorifique du gaz à volume constant,  $T_g$  la température du gaz et  $D_r$  le diamètre résiduel.

Pour réduire la modélisation du taux de dégagement de chaleur (Eq. (9.32)), on propose de simplifier la modélisation des grandeurs suivantes :  $N_p$ ,  $\text{B}$ ,  $\text{Sh}$  et  $D$ .

L'effet des fluctuations du nombre de particules par volume  $N_p$  est négligeable sur le taux de dégagement de chaleur dans le domaine linéaire (chapitre 7). Sachant que l'on suppose le système faiblement non-linéaire, on négligera ici également les fluctuations du nombre de particules par volume  $N_p \approx N_{p,0}$ .

On rappelle l'expression du nombre de Spalding  $\text{B}$  (modèle ASSM, chapitre 3) :

$$\text{B} = \frac{C_{p,g}(T_g - T_{sat}) + \Delta H_r}{L_v} \quad (9.33)$$

avec  $L_v$  la chaleur latente de vaporisation. Les variables physiques dans le nombre de Spalding  $\text{B}$  sont constantes sauf la température des gaz  $T_g$  qui doit être modélisée. Dans le domaine linéaire, l'impact des fluctuations de température du gaz  $T_g$  sur le taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}$  peuvent être négligées (chapitre 7). Si on suppose que cette hypothèse se vérifie aussi en faiblement non-linéaire, il suffit donc de modéliser la température moyenne du gaz  $T_g \approx T_{g,0}$ .

Le nombre de Sherwood modélise les effets de convection et est donné par la corrélation de Ranz-Marshall :

$$\text{Sh} = 2 + 0.6 \text{Re}_p^{1/2} \text{Pr}^{1/3}, \quad \text{Re}_p = \frac{\rho_g |\delta \mathbf{u}_p| D}{\mu} \quad (9.34)$$

Le nombre de Reynolds  $\text{Re}_p$  dépend de grandeurs calculées :  $\rho_g$  la masse volumique,  $\delta \mathbf{u}_p$  la vitesse relative particulaire et  $D$  le diamètre des gouttes.

Dans le domaine linéaire, au chapitre 7, il a été mis en évidence que les fluctuations de masse volumique  $\rho_g$  étaient négligeables, on peut supposer qu'il en

est de même dans le domaine faiblement non-linéaire. Seule la masse volumique moyenne du gaz doit être modélisée  $\rho_g \approx \rho_{g,0}$ .

Les variations temporelles de vitesse  $\delta \mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p - \mathbf{u}$  et de diamètre particulaire  $D$  sont importantes à considérer puisque ces deux variables sont à l'origine des fluctuations du taux de dégagement de chaleur (chapitre 7). Néanmoins, on peut supposer que les fluctuations de vitesse radiales sont négligeables (chapitre 7) :

$$v \approx v_0, \quad v_p \approx v_{p,0} \quad (9.35)$$

Pour calculer l'évolution temporelle du taux de dégagement de chaleur, on doit donc modéliser les grandeurs suivantes :  $N_p \approx N_{p,0}$ ,  $\rho_g \approx \rho_{g,0}$ ,  $\delta v_p \approx \delta v_{p,0}$ ,  $T_g \approx T_{g,0}$ ,  $\delta u_p(t)$  et  $D(t)$ . Les modèles de ces variables physiques sont proposées dans la section suivante.

### 9.3 Modélisations physiques d'ordre réduit

Les modèles des grandeurs nécessaires au taux de dégagement de chaleur sont présentés dans cette section en deux sous-sections : les grandeurs du champ particulaire ( $N_p$ ,  $v_p$ ,  $D(t)$ ,  $u_p(t)$ ) et les grandeurs du champ gazeux ( $u(t)$ ,  $v_0$ ,  $\rho_g$ ,  $T_g$ ), correspondant respectivement à la sous-section 9.3.1 et à la sous-section 9.3.2. Certains de ces modèles nécessitent d'être discrétisés sur un maillage.

Les dérivées longitudinales sont négligées. Le maillage correspond alors à du 2D-axi simplifié par des tranches radiales  $1D$  le long de la chambre.

#### 9.3.1 Champ particulaire

Dans l'analyse linéaire de la source (chapitre 7), on a supposé que les particules avaient une trajectoire quasi-radiale et les fluctuations du taux de dégagement de chaleur ont pu être correctement reproduites par le modèle. Pour le faiblement non-linéaire, on suppose donc également que les particules ont une trajectoire quasi-radiale. Soit l'équation de conservation des  $N_p$  gouttes par volume (chapitre 7) :

$$\frac{dN_p}{dt} = -N_p \nabla \cdot \underbrace{\mathbf{u}_p}_{1D} \approx -N_p \frac{\partial v_p}{\partial r} \quad (9.36)$$

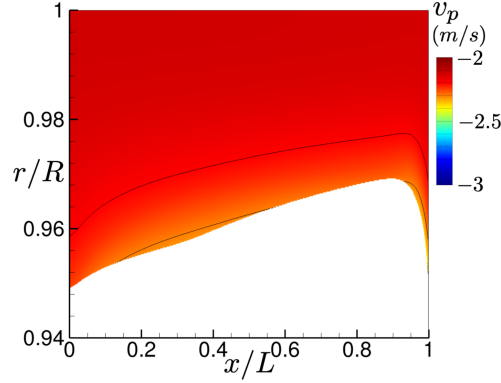


FIGURE 9.1 – Vitesse particulaire radiale  $v_p \approx v_{p,0}$

Pour modéliser la grandeur  $N_p$ , il est donc nécessaire de modéliser la vitesse particulaire radiale  $v_p$ . On suppose que les fluctuations de vitesse radiale particulaire sont négligeables  $v_p = v_{p,0}$  (chapitre 7). Pour proposer une modélisation de la vitesse particulaire, il faut tout d'abord l'observer dans un cas générique de simulation numérique. On prendra le cas instable de référence (chapitre 4), dont on rappelle les principales caractéristiques : diamètre d'injection  $D_i = 120 \mu\text{m}$ , diamètre résiduel  $D_r = 60 \mu\text{m}$ , injection à l'équilibre gaz-particules  $v_{p,i} = -v_i < 0$ .

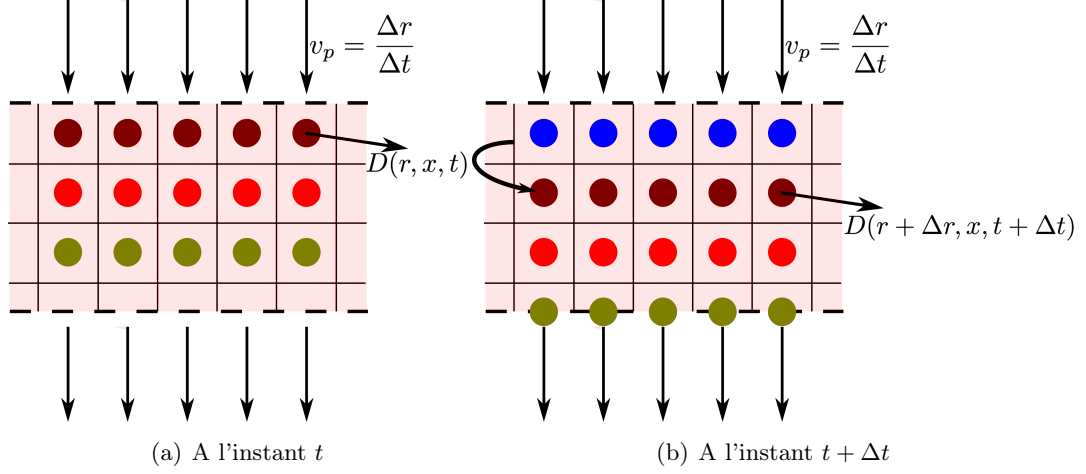
On montre à la figure 9.1 le champ de vitesse particulaire  $v_p$  (moyenné temporellement) pour ce calcul instable, zoomé sur l'épaisseur de combustion. Hors de cette zone de combustion, en régime inerte, le champ est laissé en blanc (mais est calculé par la simulation numérique).

La figure 9.1 montre que la vitesse particulaire  $v_p$  décroît très faiblement en valeur absolue. Les iso-contours sont tous les  $0.1 \text{ m/s}$ . On observe donc que la vitesse  $v_p$  peut être supposée constante dans la zone de combustion et égale à la vitesse d'injection, si on accepte une erreur de 10% en fin de vie des gouttes :

$$v_p = -v_i \quad (9.37)$$

On présuppose que cette observation peut être étendue à d'autres configurations de diamètres d'injection et résiduel, tant que les gouttes sont injectées à l'équilibre. Comme la vitesse particulaire est uniforme, l'équation de conservation de  $N_p$  (Eq. (9.36)) se simplifie donc :

$$\frac{dN_p}{dt} \approx 0 \quad (9.38)$$



**FIGURE 9.2** – Modélisation Lagrangienne "parcel" du champ particulaire. Trajectoires radiales 1D

Le nombre de gouttes  $N_p$  se conserve donc le long de la trajectoire (radiale) des gouttes. On adopte une modélisation lagrangienne du champ particulaire car elle permet de gérer facilement plusieurs classes de gouttes. Dans ce manuscrit, on rappelle que l'on se limite néanmoins à une seule classe de goutte.

Compte tenu du nombre de particules à suivre en lagrangien ( $N_p \approx 3.8 \times 10^8$ , chapitre 4), il est préférable de ne modéliser qu'une partie d'entre elles, des gouttes "pilotes", représentatives d'un ensemble de gouttes dans un volume donné. L'approche choisie appartient à la famille des "Point-volume parcel representations" (Loth (2000), Crowe and Willoughby (1967), O'Rourke (1981)). Elle est représentée à la figure 9.2. On sait que les gouttes se déplacent radialement à une vitesse  $v_p$  constante. A chaque pas de temps  $\Delta t$  les gouttes se situent à une position  $r_p + \Delta r_p$ , pour une position initiale  $r_p$ , tel que :

$$\Delta r_p = v_p \Delta t \quad (9.39)$$

On définit donc une cellule dans le maillage de taille  $\Delta r = \Delta r_p$ . Ainsi, à chaque pas de temps  $\Delta t$ , la goutte "pilote" passe d'une cellule à sa voisine, dans la direction radiale.

Pour la phase particulaire, des modèles ont été proposés pour  $N_p$  et  $v_p$  et le formalisme lagrangien est privilégié pour la phase particulaire. Il reste à proposer une modélisation pour  $D$  et  $u_p$ , dans ce formalisme lagrangien.

Dans la modélisation lagrangienne, chacune des gouttes "pilotes" suit simplement la loi du  $D^2$  jusqu'à la condition  $D = D_r$  (modèle ASSM, chapitre 3) :

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{4\mu \ln(1+B)\text{Sh}}{\text{Pr}\rho_p} \mathcal{H}(D - D_r) \quad (9.40)$$

avec le nombre de Sherwood  $\text{Sh}$  qui dépend de l'écoulement gaz-particules. Cette équation est discrétisée dans l'outil sur le maillage représenté à la figure 9.2.

Tout comme l'acoustique, on suppose que le champ de vitesse particulaire peut être supposé linéaire (au vu des faibles niveaux atteints en cyle limite (chapitre 4) et se décompose comme :

$$u_p(t) = u_{p,0} + u_{p,1}(t) \quad (9.41)$$

avec  $u_{p,0}$  la vitesse particulaire longitudinale sans fluctuations et  $u_{p,1}$  les fluctuations de vitesse particulaire longitudinales. La vitesse sans fluctuations  $u_{p,0}$  suit l'équation de transport suivant :

$$\frac{du_{p,0}}{dt} = \frac{u_0 - u_{p,0}}{\tau_{d,0}} \quad (9.42)$$

avec  $dt = dr/v_p$  et le temps caractéristique de trainée sans fluctuations  $\tau_{d,0}$  (Eq. (3.29)) :

$$\tau_{d,0} = \frac{1+B}{1+0.15\text{Re}_{p,0}^{0.687}} \frac{\rho_p D_0^2}{18\mu} \quad (9.43)$$

avec  $\rho_p$  la masse volumique des gouttes, donnée en condition initiale,  $D_0$  le diamètre de gouttes sans fluctuations qui doit être calculé par :

$$\frac{dD_0^2}{dt} = -\frac{4\mu \ln(1+B)\text{Sh}_0}{\text{Pr}\rho_p} \mathcal{H}(D_0 - D_r) \quad (9.44)$$

Pour exprimer les fluctuations de vitesse particulaire  $u_{p,1}$ , on fait le choix ici d'utiliser un modèle sans intégration sur la trajectoire de la goutte (pour éviter le cumul d'erreurs). Dans l'outil, c'est le modèle de [Temkin and Dobbins \(1966\)](#) qui est implémenté<sup>1</sup> :

$$u_{p,1} = \mathcal{R}_e(\hat{u}_p \exp(i\omega_n t + \phi_n)), \quad \hat{u}_p = \frac{\hat{u}}{1 + i\omega_n \tau_d} \quad (9.45)$$

où  $\tau_d$  est le temps caractéristique de trainée de la goutte,  $\hat{\cdot}$  indique les fluctuations dans l'espace de Fourier.

Pour compléter la modélisation de la combustion des gouttes, il faut maintenant proposer des modèles pour le champ gazeux.

1. Ce modèle peut être incomplet comme cela a été démontré au chapitre 7. Il serait intéressant dans les travaux futurs d'utiliser un modèle plus abouti, soit celui avec intégrale du chapitre 7 soit celui sans intégrale du chapitre 8.

### 9.3.2 Champ gazeux

Pour le champ gazeux, il faut modéliser les grandeurs suivantes :

- la masse volumique du gaz dans la zone de combustion  $\rho_g$
- la température du gaz dans la zone de combustion  $T_g$
- la vitesse longitudinale sans fluctuations  $u_0$
- la vitesse radiale sans fluctuations  $v_0$
- les fluctuations de vitesse longitudinale  $u_1$

La modélisation du gaz choisie est basée sur une modélisation eulérienne simplifiée.

Les fluctuations de vitesse gaz  $u_1$  sont modélisées par le modèle de Flandro (Flandro et al. (2000), voir chapitre 7) :

$$u_1 = \mathcal{R}_e (\hat{u} \exp(i\omega_n t + \phi_n)), \quad \hat{u} = \hat{u}_{ac} + \hat{u}_{rot} \quad (9.46)$$

où la partie acoustique est définie comme pour une chambre fermée-fermée :

$$\hat{u}_{ac} = -\frac{i\hat{\eta}_n}{a_0\rho} \sin(kx), \quad k = \frac{\omega_n + d\phi_n/dt}{a_0} \quad (9.47)$$

avec  $k$  la longueur d'onde,  $a_0$  la vitesse du son,  $\rho$  la densité du mélange gaz-particules et  $\hat{\eta}_n$  le niveau du signal du  $n^{\text{ième}}$  mode de pression. La partie rotationnelle de la vitesse par le modèle de Flandro s'exprime :

$$\hat{u}_{rot} = -\frac{i\hat{\eta}_n}{a_0\rho} \left( \beta \frac{r}{R} \sin(kx \sin \Theta) e^{\Phi + i\frac{S_r}{\pi} \ln(\tan \frac{\Theta}{2})} \right) \quad (9.48)$$

avec  $\Phi$  une expression complexe donné par Flandro et al. (2000),  $\Theta = \frac{\pi}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2$  et  $\beta$  :

$$\beta = \frac{C_\beta}{S_r} \left( \frac{r}{R} \sin \Theta + i \frac{\xi R}{S_r r \sin(\Theta)} \right) \quad (9.49)$$

où  $R$  est le rayon de la chambre,  $S_r$  est le nombre de Strouhal de l'écoulement et  $\xi$  un paramètre de viscosité et  $C_\beta$  une constante d'intégration donnée par Flandro et al. (2000) :

$$S_r = \frac{\omega R}{v_i}, \quad \xi = \frac{S_r^2}{Re_i}, \quad C_\beta = -\frac{S_r^3 ((S_r^2 + \xi) - iS_r\xi)}{(S_r^2 + \xi)^2 + (S_r\xi)^2} \quad (9.50)$$

avec  $v_i$  la vitesse d'injection et  $Re_i = \frac{\rho_g v_i R}{\mu}$  le nombre de Reynolds à l'injection.

La masse volumique  $\rho_g$  et la température du gaz  $T_g$  évoluent dans la zone de combustion, néanmoins, on supposera que leur évolution est faible et elles

peuvent être approximées par la moyenne aux deux bornes de la zone de combustion ( $i$  : injection,  $pc$  : post-combustion, dans la chambre après combustion des gouttes) :

$$\rho_g \approx \frac{\rho_{g,i} + \rho_{g,pc}}{2}, \quad T_g \approx \frac{T_{g,i} + T_{g,pc}}{2} \quad (9.51)$$

On cherche maintenant à modéliser la vitesse moyenne du gaz ( $u_0$ ,  $v_0$ ) dans la zone de combustion.

Dans la chambre d'un MPS, les vitesses moyennes axiale  $u_0$  et radiale  $v_0$  du champ gazeux sans combustion distribuée de gouttes d'aluminium sont classiquement modélisées par le modèle de Taylor-Culick (Culick (1966), Taylor (1956), chapitre 1), rappelé en suivant. On utilise l'indice  $TC$  pour le modèle de Taylor-Culick :

$$\begin{aligned} v_{TC} &= -\frac{R}{r} v_i \sin \Theta \\ u_{TC} &= \pi \frac{x}{R} v_i \cos \Theta \end{aligned} \quad (9.52)$$

avec  $\Theta$  défini comme :

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (9.53)$$

Néanmoins, ce modèle ne peut s'appliquer directement dans le cas où l'on a une combustion distribuée qui modifie l'écoulement.

Après combustion de l'aluminium, on peut supposer que l'écoulement de Taylor-Culick est correct, si cette zone est suffisamment mince. Ceci reviendrait à substituer la condition d'injection ( $v_i$ ) par la condition de l'écoulement après combustion de l'aluminium ( $v_{pc}$ ). La vitesse radiale post-combustion  $v_{pc}$  peut être évaluée en supposant l'écoulement strictement radial dans cette zone. Par conservation du débit injecté on a :

$$v_{pc} \approx \frac{\rho_i v_i}{\rho_{g,pc}} \quad (9.54)$$

avec  $\rho_i$  la masse volumique du mélange gaz-particules à l'injection (équilibre dynamique gaz-particules) et  $\rho_{g,pc}$  la masse volumique du gaz dans la chambre après combustion de l'aluminium (on suppose que la fraction particules inertes après combustion est négligeable). Il est possible de prendre en compte de nouveau la variation longitudinale de cette grandeur (chapitre 1). Ici, on se contentera de la valeur au fond-avant ( $\rho_{g,pc} \approx \rho_{g,pc}(x = 0)$ ).

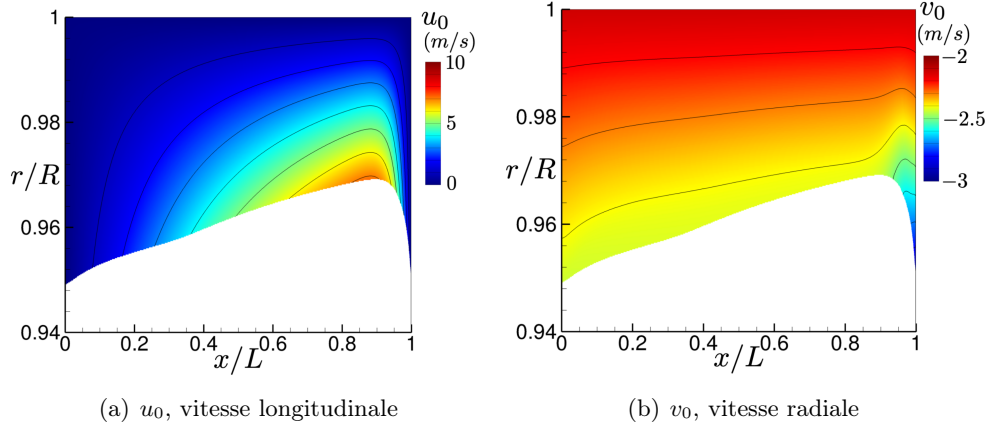


FIGURE 9.3 – Champ de vitesse moyen du gaz dans la zone de combustion

Pour étendre le modèle de Taylor-Culick dans la zone de combustion, on se propose d'abord d'observer numériquement les champs de vitesse moyenne ( $u_0, v_0$ ) dans la zone de combustion à la figure 9.3 pour la situation  $120 - 60 \mu\text{m}$  (chapitre 4).

La figure 9.3(b) illustre la variation de la vitesse  $v_0$  dans la zone de combustion de l'aluminium. On trouve que la variation de  $v_0$  est négligeable dans la direction longitudinale et faible dans la direction radiale. *A priori*, l'épaisseur de la zone de combustion n'étant pas connue, on propose la modélisation simple suivante (où  $v_0$  est une constante) :

$$v_0 = \frac{v_i + v_{pc}}{2} \quad (9.55)$$

On rappelle qu'il n'est pas nécessaire de modéliser l'écoulement hors de la zone de combustion.

La figure 9.3(a) montre une augmentation de la vitesse  $u_0$  avec la position  $x$  et avec un éloignement de la surface du propergol, ce qui est typique de la solution de Taylor-Culick. L'effet du fond-arrière ne se fait ressentir qu'à partir de la position  $x/L = 0.9$ . On peut donc penser que la tendance de la solution de Taylor-Culick, rappelée ci-dessous, peut être suffisante :

$$u_0 \sim u_{TC} = -\pi \frac{x}{R} v_{i,TC} \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \quad (9.56)$$

Pour approximer au mieux  $u_0$  par  $u_{TC}$ , on suppose que la grandeur  $v_{i,TC}$  dans l'équation (9.56) est un paramètre libre à déterminer. Compte tenu de l'effet de la combustion, on s'attend à ce que ce paramètre libre ne soit pas nécessairement la vitesse d'injection  $v_i$ .



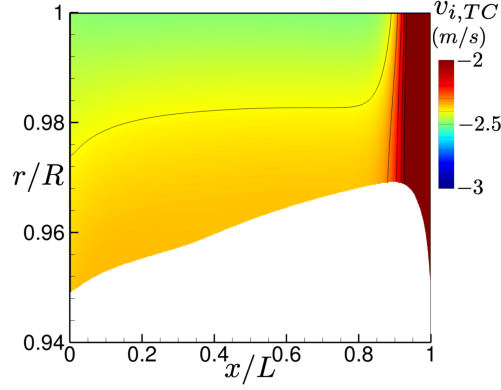


FIGURE 9.4 – Champ de vitesse d'injection  $v_{i,TC}$  (Eq. (9.57))

Soit  $u_0 \approx u_{TC}$ , on se propose d'observer la valeur  $v_{i,TC}$ , tel que (Eq. (9.56)) :

$$v_{i,TC} = -\frac{u_0}{\pi \frac{x}{R} \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} \quad (9.57)$$

La figure 9.4 montre la valeur de la vitesse d'injection  $v_{i,TC}$  qu'il faudrait pour l'égalité  $u_0 = u_{TC}$  dans la zone de combustion des gouttes d'aluminium. On observe que la valeur  $v_{i,TC}$  est quasiment constante dans la zone de combustion. Cela valide donc la possibilité d'utiliser le modèle de Taylor-Culick. On peut y lire la valeur numérique à utiliser, elle se situe aux alentours de :

$$v_{i,TC} \approx 2.4 \text{ m/s} \quad (9.58)$$

Pour les paramètres physiques suivants (cas de calcul  $D \in [120, 60] \mu\text{m}$ , chapitre 4) : (i)  $\rho_i v_i = 24.6337 \text{ kg/m}^2/\text{s}$  et (ii)  $\rho_{g,Chambre} = 0.445 \text{ kg/m}^3$ , on trouve analytiquement une vitesse post-combustion des gaz de (Eq. (9.54)) :

$$v_{pc} \approx 2.3584 \text{ m/s} \quad (9.59)$$

et la vitesse d'injection vaut :

$$v_i = 2.1236 \text{ m/s} \quad (9.60)$$

Par la figure 9.4, on trouve donc que la vitesse d'injection la plus adéquate avec le modèle de Taylor-Culick est celle de la vitesse post-combustion :

$$v_{i,TC} = v_{pc} \quad (9.61)$$

Soit :

$$u_0 = -\pi \frac{x}{R} v_{pc} \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \quad (9.62)$$

Dans cette section, des modèles physiques ont été proposés pour le nombre de particules par volume  $N_p$ , la vitesse radiale particulaire  $v_p$ , le diamètre particulaire  $D(t)$ , la vitesse particulaire longitudinale  $u_p(t)$ , la vitesse longitudinale du gaz  $u(t)$ , la vitesse radiale du gaz  $v_0$ , la masse volumique du gaz  $\rho_g$  et la température du gaz  $T_g$ .

Des hypothèses fortes ont été utilisées pour la modélisation du champ moyen et justifieraient d'être remises en cause. En effet, souhaiter capturer les non-linéarités revient à devoir modéliser la réponse de la combustion à l'ordre 2 en fluctuations (chapitre 5) alors que le champ moyen correspond à l'ordre 0. Cette modélisation a été adoptée pour une première analyse et ne permet pas à ce stade d'assurer de délivrer un outil prédictif.

Dans la section suivante, on aborde l'algorithme de résolution de l'outil d'ordre réduit.

## 9.4 Résolution numérique

Suite à la description des modèles physiques, on aborde ici la structure du code qui résout le système d'équations et les schémas numériques utilisés. En particulier, l'algorithme général de l'outil numérique d'ordre réduit est présenté. Il est schématisé à la figure 9.5.

Le code débute par une phase d'initialisation où (i) le maillage est défini (tranches  $1D$  radiales, figure 9.2), (ii) les conditions initiales, à l'injection et dans la chambre sont données, (iii) les modèles pour le champ moyen sont dérivés.

Pour le champ moyen, des équations différentielles ordinaires (présentant une dérivée radiale) sont discrétisées : (iii)a. une équation de transport pour la vitesse longitudinale particulaire  $u_{p,0}$  (Eq. (9.42)) et (iii)b. une équation de transport pour le diamètre particulaire  $D_0$  (Eq. (9.44)). Pour ces deux équations, un simple schéma d'ordre 1 est utilisé.

Ensuite, on rentre dans la boucle temporelle, où l'amplitude est résolue avec une décomposition en niveau  $\hat{\eta}$  et phase  $\phi$ , utilisant la "averaging method" (Eqs. (9.63) et (9.64)) :

$$\frac{d\hat{\eta}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{t-T}^t -\epsilon h \sin(\omega_1 \tau + \phi) d\tau \quad (9.63)$$

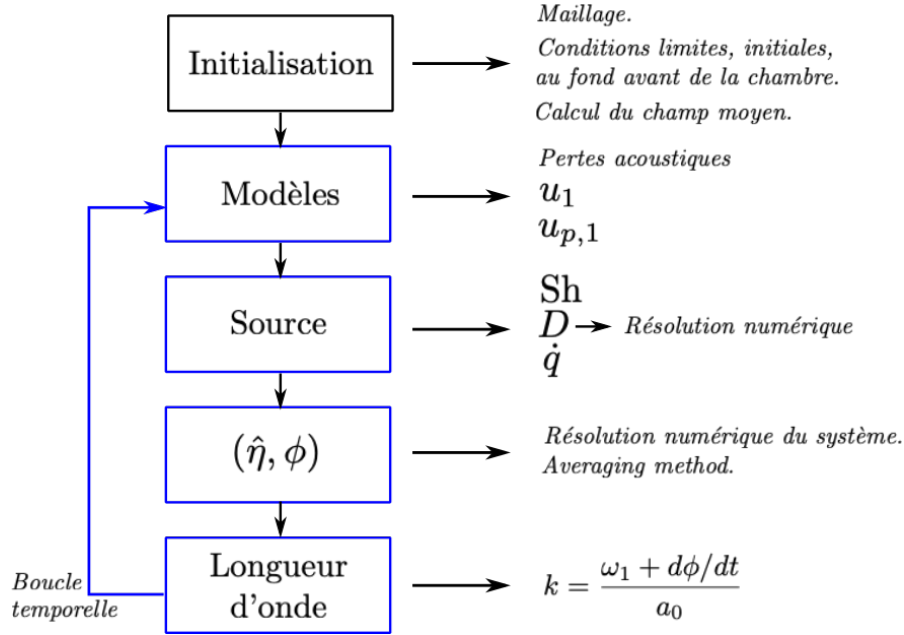


FIGURE 9.5 – Algorithme de l'outil d'ordre réduit

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{t-T}^t -\frac{\epsilon h}{\hat{\eta}} \cos(\omega_1 \tau + \phi) d\tau \quad (9.64)$$

avec  $T = 2\pi/\omega_1 = 1/f_1$  la période acoustique,  $\omega_1$  le fréquence angulaire du mode acoustique pur,  $\omega = \omega_1 + d\phi/dt$  la fréquence excitée à l'instant  $t$  et :

$$\epsilon h = -2\omega_1 \delta\omega_l \eta^2 - 2\alpha_l \left(\omega_1 + \frac{d\phi}{dt}\right) \hat{\eta} \sin(\omega_1 t + \phi) + \mathcal{S} \quad (9.65)$$

avec  $\mathcal{S}$  le terme source induit par la combustion de l'aluminium (Eq. (9.29)),  $\alpha_l$  le taux de croissance relatif aux pertes acoustiques et  $\delta\omega_l$  le glissement fréquentiel induit par les pertes acoustiques.

La discrétisation temporelle utilisée pour le système Eqs (9.63) et (9.64) est de type Euler explicite avec un pas de temps défini tel que (sous-section 9.3.1) :

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{|v_p|} \quad (9.66)$$

avec  $\Delta r$  la taille de maille (uniforme) et  $v_p$  la vitesse particulaire constante. Afin de minimiser le temps de calcul, il faut éviter de mailler la zone inerte. Le maillage doit donc être défini initialement au plus près de la zone de combustion.

On remarque que la moyenne temporelle (Eqs. (9.63) et (9.64)) est décentrée amont, c'est-à-dire de  $t - T$  à  $t$ . L'intégration numérique est une intégration de type rectangle.

Ce système d'équations pour l'amplitude (Eqs. (9.63) et (9.64)) dépend des pertes acoustiques et de la source  $\mathcal{S}_{ITHAC}$  à calculer. Des modèles linéaires pour les pertes acoustiques sont alors définis. Ils prennent en compte la fréquence excitée  $\omega$  ainsi que la longueur d'onde  $k$ , définies à l'instant  $t$ . La source  $\mathcal{S}_{ITHAC}$  est fonction des fluctuations de l'écoulement.

Les fluctuations de vitesse gaz et particules ( $u_1, u_{p,1}$ ) sont donc modélisées dans un premier temps (Eqs. (9.46) et (9.45)) puis le nombre de Sherwood est évalué à l'instant  $t$  pour chaque goutte "pilote" de diamètre  $D$ . Les gouttes s'évaporant, le diamètre  $D$  des gouttes régresse. Sa régression dépend de l'écoulement. Une équation différentielle ordinaire est donc discrétisée pour le diamètre particulaire  $D$  à chaque instant et pour chaque position (Eq. (9.40), formalisme lagrangien). La discrétisation de  $D$  a été supposée nécessairement précise afin de capturer efficacement les fluctuations. Un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 4 a donc été mis en place. L'évaporation non-linéaire des gouttes induit un taux de dégagement de chaleur  $\dot{q}(r, x, t)$ . La variation temporelle du taux de dégagement de chaleur  $\partial\dot{q}/\partial t$  est calculé avec un schéma explicite d'ordre 1. On peut alors définir le terme source  $\mathcal{S}$ .

L'amplitude  $\eta$  fonction de  $(\hat{\eta}, \phi)$  peut donc enfin être évaluée. La phase  $\phi$  modifie également la longueur d'onde qui est recalculée à chaque instant  $t$ . Le glissement en longueur d'onde  $k$  a été estimé comme potentiellement non négligeable, notamment pour la source  $\mathcal{S}$  (Eqs. (9.30) et (9.31)) car la combustion est distribuée le long de la chambre, le long du mode acoustique. La nouvelle longueur d'onde est donc calculé à chaque instant à partir de la fréquence  $\omega$  :

$$k = \frac{\omega}{a_0} = \frac{\omega_1 + d\phi/dt}{a_0} \quad (9.67)$$

La boucle temporelle se répète ensuite jusqu'au temps final défini par l'utilisateur.

## 9.5 Résultats de l'outil développé

L'outil précédemment présenté est testé dans cette section, comparé à des simulations numériques CPS<sup>2</sup> et les résultats de l'outil sont analysés. On confronte l'outil d'ordre réduit à des simulations numériques CPS effectuées dans le manuscrit de thèse au chapitre 5. Il s'agit des calculs avec le modèle de combustion ASSM où le diamètre résiduel  $D_r$  est le paramètre libre. Ils sont résumés à la table 9.1 :  $D_r \in [50, 60, 70] \mu\text{m}$ . On se limitera à ces cas à proximité du cas de référence  $D_r = 60 \mu\text{m}$  pour lequel les modèles du champ moyen ont été dérivés et validés (section 9.3). Les taux de croissance  $\alpha$ , niveau du signal au cycle limite  $\hat{\eta}$  et fréquence au cycle limite  $f$  obtenus par les simulations numériques CPS sont rappelés à la table 9.1.

Pour la validation entre l'outil d'ordre réduit et les simulations numériques CPS, les paramètres d'entrée sont identiques, excepté la fréquence du mode propre  $\omega_1$ . Sachant que la géométrie de la tuyère n'est pas intégrée dans l'outil, celle-ci induisant un glissement fréquentiel (chapitre 7), la fréquence  $\omega_1 = 2\pi f_1$  est ajustée au cas  $D_r = 60 \mu\text{m}$  pour obtenir la bonne fréquence au cycle limite. L'amplitude est très dépendante de la fréquence excitée. La fréquence du mode propre devrait être théoriquement  $f_1 = 76 \text{ Hz}$  et celle utilisée ici est  $f_1 = 72.5 \text{ Hz}$ .

Les mailles de l'outil sont de taille  $\Delta r = 3.10^{-4} \text{ m}$  et  $\Delta x = 0.2 \text{ m}$ . Pour le maillage des simulations CPS, les mailles sont du même ordre en radial et dix fois plus raffinées en longitudinal (chapitre 5).

**TABLE 9.1** – Paramètres physiques et résultats pour chaque simulation numérique CPS

$D_r$ ( $\mu\text{m}$ )	$T_{g,i}$ (K)	$C_{P,g}$ ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )	$\gamma$	$\hat{\eta}$ (kPa)	$f$ (Hz)	$\alpha$ ( $\text{s}^{-1}$ )
70	3466.17	2003.68	1.16051	13.7	71.8	6
60	3450.18	2000.00	1.16002	10.7	70.5	1
50	3438.65	1997.39	1.15967	0	–	–3.7

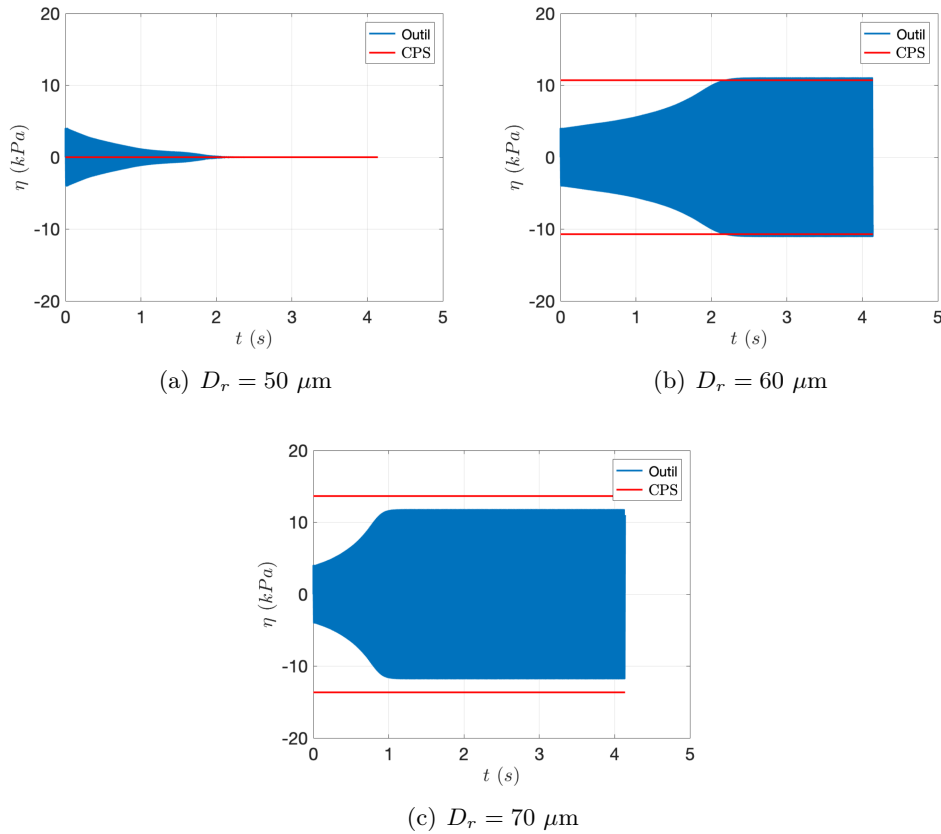
L'initialisation du calcul a été faite à  $\hat{\eta} = 4 \text{ kPa}$  et  $\phi = 0$ . En-dessous de cette amplitude initiale, le cas de calcul  $D_r = 60 \mu\text{m}$  est stable<sup>3</sup>. Par CPS, l'initialisation se fait par une simulation monophasique dans laquelle on injecte des

2. CPS : Code pour la Propulsion Spatiale utilisé pour effectuer les simulations numériques de ce manuscrit. L'annexe A définit ses fonctionnalités.

3. On vérifiera dans les analyses suivantes que ce cas de calcul est en limite de stabilité et que dans le domaine dit "linéaire" le taux de croissance augmente légèrement avec l'amplitude. Les autres cas de calcul ne sont pas en limite de stabilité et l'initialisation n'a donc pas d'impact sur leur stabilité.

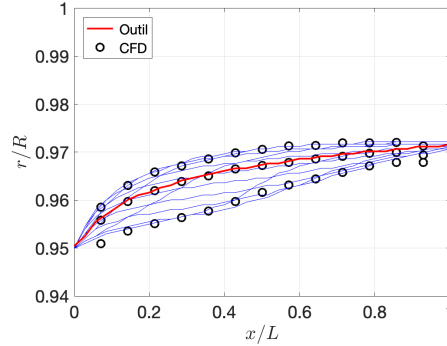
particules en combustion. On peut donc penser que cela revient à une perturbation d'au moins 4 kPa à l'instant initial. La figure 9.6 compare les amplitudes des cycles limites obtenus par CPS et les évolutions des amplitudes calculées par l'outil d'ordre réduit.

Le cas  $D_r = 50 \mu\text{m}$  est stable conformément à CPS. L'amplitude des cas  $D_r = 60 \mu\text{m}$  et  $D_r = 70 \mu\text{m}$  est bien reproduite par rapport à CPS. La proximité des résultats permet de valider l'hypothèse de pertes acoustiques linéaires et que la convergence vers un cycle limite est essentiellement liée aux non-linéarités de la source  $\mathcal{S}$ .



**FIGURE 9.6** – Amplitude de pression en fonction du temps : (i) en bleu le résultat de l'outil, (ii) en rouge le niveau au cycle limite obtenue par CPS

Au cycle limite du cas  $D_r = 60 \mu\text{m}$ , la capacité de l'outil à calculer la position de la frontière a également été évaluée (figure 9.7). En effet, il a été observé que le temps de combustion moyen et ses fluctuations jouaient un rôle important pour l'instabilité : l'instabilité dépend fortement du nombre de Strouhal



**FIGURE 9.7** – Mouvement de frontière au cycle limite : (i) en rouge, position sans fluctuations, (ii) en bleu, différentes positions données par l'outil, (iii) en noir, CPS

de combustion  $S_c = \omega t_{c,0}$  et le mouvement de frontière induit des fluctuations du taux de dégagement de chaleur (chapitres 7 et 8, annexe C).

A la figure 9.7, les positions extrémales et moyenne de la frontière calculées par la simulation CPS sont représentées par des cercles noirs. Les lignes représentent les résultats de l'outil, en rouge la position sans oscillations acoustiques, en bleu, à différents instants du cycle limite.

Dans la figure 9.7, on trouve donc une position quasi-identique de frontière moyenne entre l'outil (ligne rouge) et CPS (cercles noirs), avec une légère différence proche du fond arrière  $x/L > 0.9$ . Cette faible différence est liée au modèle de vitesse moyenne longitudinale  $u_0$  (voir figure 9.4). Cette faible différence reste néanmoins tout à fait acceptable compte tenu des hypothèses faites. La modélisation du champ moyen pour le calcul  $D_r = 60 \mu\text{m}$  est donc suffisante pour reproduire la position moyenne de frontière.

Le battement de frontière calculé par l'outil (lignes bleues) se trouve dans le domaine de battement calculé par CPS (cercles noirs). On trouve donc la bonne amplitude de battement de frontière, à une même amplitude d'oscillations de pression (Fig. 9.6).

On retrouve également une asymétrie du battement de frontière en  $x/L \in [0.2; 0.6]$  par l'outil. Cette asymétrie est notamment un marqueur de non-linéarités comme cela a été souligné au chapitre 5.

Le taux de croissance  $\alpha$  évalué numériquement par l'outil est défini comme le rapport de la dérivée temporelle du niveau  $d\hat{\eta}/dt$  sur le niveau  $\hat{\eta}$  du signal :

$$\alpha = \frac{d\hat{\eta}}{\hat{\eta}dt} \quad (9.68)$$

Cette grandeur est calculée à tout instant par l'outil et est comparée au taux

de croissance mesuré dans la simulation CPS (à faibles amplitudes) dans la figure 9.8.

Les taux de croissance  $\alpha$  du cas  $D_r = 50 \mu\text{m}$  de l'outil et de CPS sont négatifs (calcul stable). Durant tout le calcul, on peut supposer une réponse de la combustion linéaire (faible amplitude). Néanmoins, le taux de croissance donné par l'outil varie fortement en  $t \in [1, 2] \text{ s}$  (Fig. (9.8(a))). On remarque, à la figure 9.8(a), que l'amplitude de pression  $\eta$  tend vers 0 dans cette zone.

Dans ce domaine de très faible amplitude, le maillage est critique et ne permet plus de résoudre correctement le système.<sup>4</sup> Le taux de croissance calculé n'est donc plus valable.

Cette problématique peut également être attendue avec CPS. Le taux de croissance CPS est moyenné des petites à amplitudes modérées en linéaire. La valeur CPS se retrouve entre les deux valeurs maximale et minimale de l'outil, on peut donc penser que l'outil reproduit correctement le taux de croissance pour ce cas de calcul.

Les deux autres cas  $D_r \in [60; 70] \mu\text{m}$  sont représentés respectivement en figures 9.8(b) et 9.8(c). Suivant CPS, les deux cas sont instables ( $\alpha(t) \geq 0$ ).

Les deux taux de croissance  $\alpha(t)$ , calculés par l'outil, pour ces deux cas instables, montrent d'abord une croissance faible puis une décroissance plus forte. La croissance faible correspond à la zone linéaire ( $L.$ ). C'est dans cette zone que le taux de croissance est à comparer à la valeur CPS. Théoriquement, le taux de croissance, en linéaire est constant. Numériquement, on observe une variation qui peut être associée aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur induit par le battement de frontière qui sont strictement non-linéaires même dans le domaine de petites fluctuations (chapitre 7, annexe C).

La stabilité linéaire, avec l'expression de taux de croissance linéarisés (chapters 6 et 7), peut donc parfois être trop approximative pour représenter le comportement de l'instabilité dans le domaine de petites fluctuations.

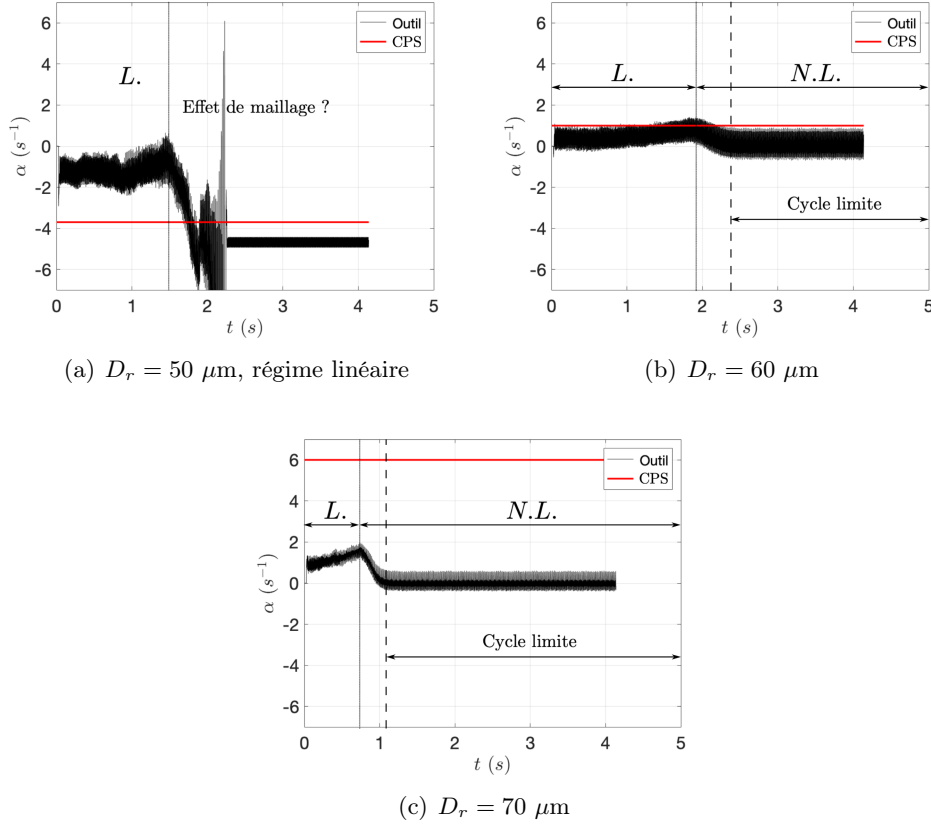
La décroissance, en non-linéaire ( $N.L.$ ), est liée à la réponse quadratique du taux de dégagement de chaleur<sup>5</sup>, identifiée au chapitre 5. A  $\alpha = 0$ , on a atteint le cycle limite.

Dans la zone linéaire ( $L.$ ), le cas  $D_r = 60 \mu\text{m}$  est très bien reproduit par l'outil, alors que le cas  $D_r = 70 \mu\text{m}$  présente un écart non-négligeable. Ceci peut s'expliquer par la modélisation du champ moyen qui a été dérivée à partir

4. Il a été vérifié que des maillages plus raffinés ou plus grossier donnaient des résultats différents à ces très faibles amplitudes.

5. On rappelle que seul le taux de dégagement de chaleur peut être non-linéaire. Les pertes acoustiques sont linéarisées.

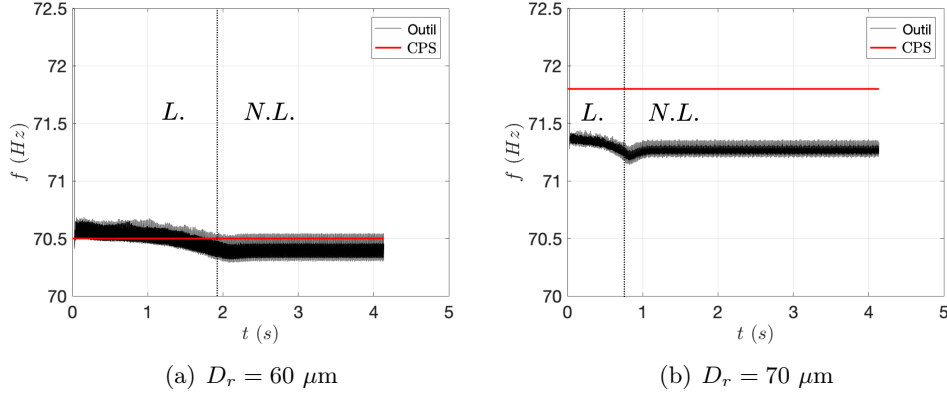




**FIGURE 9.8** – Taux de croissance de l’oscillation de pression en fonction du temps : (i) en noir le résultat de l’outil, (ii) en rouge la valeur CPS.  $L.$  : linéaire,  $N.L.$  : non-linéaire

du cas  $D_r = 60 \mu\text{m}$  et qui pourrait ne pas convenir pour le cas  $D_r = 70 \mu\text{m}$ . De plus, la méthode utilisée pour mesurer le taux de croissance  $\alpha$  dans CPS peut être remise en cause. En effet, on estime une erreur de  $1 \text{ s}^{-1}$  dans la mesure du taux de croissance. Enfin, dans la zone linéaire, pour  $D_r = 70 \mu\text{m}$ , la croissance de  $\alpha$ , calculée par l’outil, est non négligeable et signifie qu’il ne s’agit pas d’une croissance strictement exponentielle du niveau. La méthode utilisée par CPS suppose une exponentielle. Cette hypothèse peut donc induire une autre erreur d’évaluation du taux de croissance CPS.

On rappelle que la fréquence du mode propre a été fixée à  $72.5 \text{ Hz}$  au lieu de  $76 \text{ Hz}$  pour compenser l’absence de la modélisation de l’effet de la tuyère sur le glissement fréquentiel. Cette fréquence a été définie par rapport à la simulation CPS  $D_r = 60 \mu\text{m}$  afin de retrouver la bonne fréquence au cycle limite par l’outil.



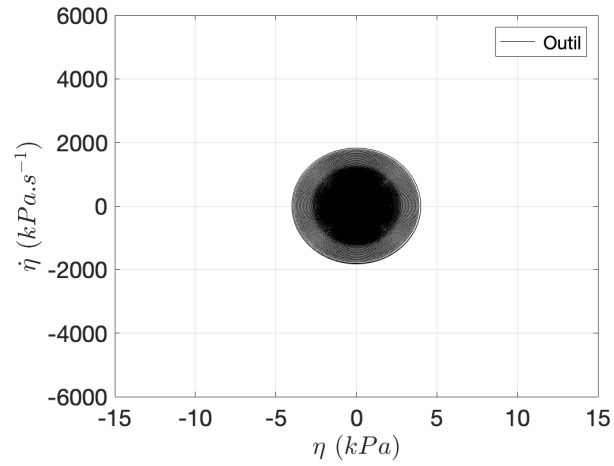
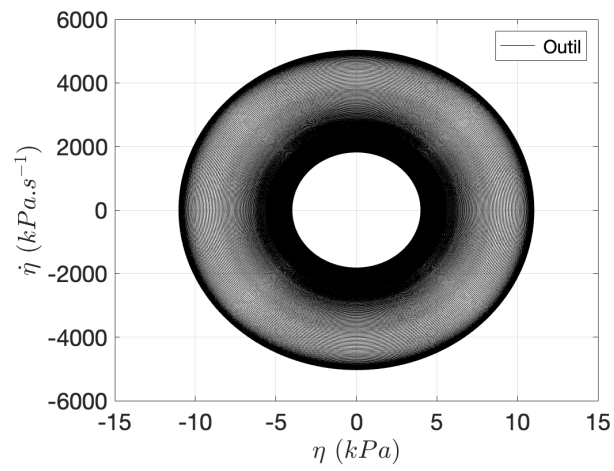
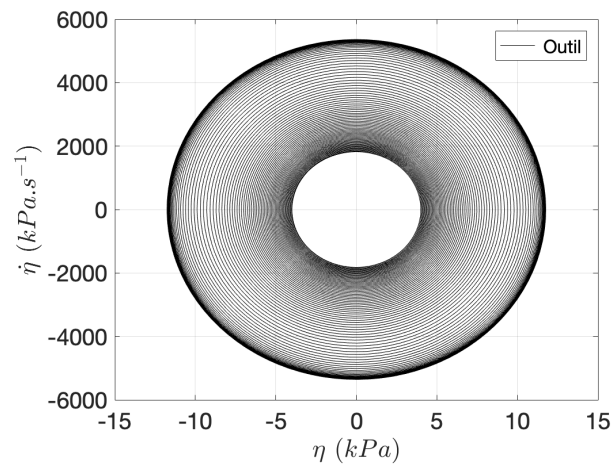
**FIGURE 9.9** – Fréquence de l’oscillation en fonction du temps : (i) en bleu le résultat de l’outil, (ii) en rouge la valeur CPS au cycle limite

La figure 9.9 montre l’évolution de la fréquence pour les deux cas de calculs instables  $D_r = 60 \mu\text{m}$  et  $D_r = 70 \mu\text{m}$ . Proche de  $t = 0$ , les pertes et source acoustiques peuvent être supposés linéaires (petite amplitude) et induisent un glissement fréquentiel par rapport à  $f = 72.5 \text{ Hz}$ . La fréquence pour les deux cas évoluent faiblement jusqu’à se stabiliser à une valeur (cycle limite). Cette faible variation de la fréquence entre domaine linéaire et domaine non-linéaire implique que connaître la fréquence dans le domaine linéaire est suffisant pour prédire la fréquence du cycle limite.

L’espace des phases  $(\dot{\eta}, \eta)$  est tracé pour chacun des cas de calculs. On rappelle que l’initiation des calculs se fait à  $\hat{\eta} = 4 \text{ kPa}$ . Le calcul  $D_r = 50 \mu\text{m}$  est stable. On observe donc une convergence vers le point  $(\dot{\eta}, \eta) = (0, 0)$  pour ce cas. Les calculs  $D_r = [60, 70] \mu\text{m}$  sont instables. On observe pour ces deux derniers un éloignement du cercle initial au cours du temps pour une convergence vers un cycle limite. Le cas  $D_r = 60 \mu\text{m}$  est plus lent que le cas  $D_r = 70 \mu\text{m}$  pour la convergence vers le cycle limite (lignes plus reserrées) et le cycle limite atteint est de plus faible amplitude. Cette observation est en accord avec les figures 9.8 et 9.6. Les dynamiques des trois cas sont effectivement faiblement non-linéaires car les lignes sont très reserrées, c’est-à-dire proches de fonctions harmoniques.

## 9.6 Conclusion

Un outil basé sur une modélisation faiblement non-linéaire de la dynamique du système permet de déterminer le niveau  $\hat{\eta}$  et la phase  $\phi$ , par une méthode

(a)  $D_r = 50 \mu\text{m}$ (b)  $D_r = 60 \mu\text{m}$ (c)  $D_r = 70 \mu\text{m}$ FIGURE 9.10 – Espace des phases ( $\dot{\eta}$ ,  $\eta$ )

des moyennes. Cette résolution permet d'utiliser des modèles analytiques développés pour des signaux harmoniques. Les pertes acoustiques ont été supposées linéaires et la source a été calculée à partir d'un champ moyen et de fluctuations de l'écoulement modélisés. Ces modèles ont été validés pour un cas de calcul unique  $D_r = 60 \mu\text{m}$  et mériteraient d'être revisités pour améliorer la précision de l'outil.

De plus, la modélisation choisie de la source correspond au couplage du mode de pression avec la dérivée temporelle des fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Le mode de pression est un mode fermé-fermé avec une forme de demi-onde ( $1L$ ). Les fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont modélisées par une réponse de la combustion aux fluctuations de vitesse (gaz et particules) et de diamètre particulaire (comme le chapitre 7), sans linéarisation. La réponse de la combustion calculée par l'outil peut donc être non-linéaire.

Les résultats permettent de confirmer que la non-linéarité de la réponse du taux de dégagement de chaleur libéré par la combustion des gouttes est à l'origine de la convergence vers un cycle limite. En particulier, on retrouve un comportement quadratique, qui se manifeste par une décroissance du taux de croissance (comme identifié au chapitre 5).

Il a également été mis en évidence que le taux de croissance en régime linéaire n'est pas strictement constant. Ce constat est en accord avec la note en pied de page en fin du chapitre 7 qui explique que, même pour de très petites fluctuations, la contribution frontière (fonction Heaviside) n'est pas strictement linéarisable. Le taux de croissance de la source n'est donc pas strictement linéaire à cause du battement de frontière et ici cela se vérifie par l'outil d'ordre réduit.

De plus, la fréquence excitée n'évolue que très peu entre les régimes linéaire et non-linéaire. L'estimation de la fréquence dans le domaine linéaire est donc une approximation acceptable pour la fréquence au cycle limite.

En perspective pour l'outil, il faudrait améliorer le champ moyen et le valider davantage pour proposer un outil prédictif mono-fréquentiel ( $1L$ ). Enfin, il serait intéressant de le tester pour du multi-fréquentiel ( $1L, 2L, 3L, \dots$ ) afin de caractériser le transfert d'énergie acoustique entre modes induit par le modèle de combustion. En parallèle de ces travaux, il est également nécessaire d'améliorer le modèle de combustion des gouttes d'aluminium dans un moteur à propergol solide par validation avec des essais expérimentaux et de l'intégrer dans cet outil d'ordre réduit et dans le code CPS.



# Conclusion

Une instabilité thermoacoustique a été étudiée par le biais de simulations numériques avec le code CPS, de modèles analytiques développés pour des petites fluctuations de l'écoulement, de nombres adimensionnels et d'un outil d'ordre réduit faiblement non-linéaire.

L'instabilité thermoacoustique, étudiée dans ce travail, est due à la combustion instationnaire des gouttes d'aluminium induite par l'acoustique. La source de l'instabilité dépend du produit des fluctuations de la pression avec les fluctuations du taux de dégagement de chaleur induit par la combustion distribuée des gouttes.

Les fluctuations du taux d'évaporation des gouttes d'aluminium sont contrôlées par les fluctuations de l'écoulement gazeux autour des gouttes. Elles entraînent alors des mouvements de flammes autour de gouttes. Ces mouvements de flamme autour des gouttes induisent finalement des fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Les fluctuations du taux de dégagement de chaleur détectées dans les simulations sont donc fortement liées à la modélisation de la dynamique de la phase dispersée (évaporation, combustion, convection, interactions gaz-particules).

Concernant la combustion des gouttes d'aluminium, il n'y a pas de réel consensus dans sa modélisation. On a supposé dans ce travail qu'il n'y a pas d'effet de groupe, c'est-à-dire que les gouttes brûlent individuellement et sont isolées les unes des autres. Trois phases ont été identifiées pour la combustion d'une goutte d'aluminium isolée dans un environnement au repos : *(i)* une flamme symétrique autour de la goutte, *(ii)* une asymétrie engendrée par la présence d'un lobe d'alumine, *(iii)* une extinction abrupte pour une taille finie de la goutte d'aluminium/alumine. Lors de la première phase *(i)*, la loi du  $D^2$  est utilisée pour déterminer le taux d'évaporation et de dégagement de chaleur. En supposant que la phase *(ii)* asymétrique est courte par rapport au temps de combustion de la goutte, on en conclut qu'elle est peu impactante sur l'instabi-

lité et peut donc être négligée. La phase *(iii)* de fin de vie de la goutte nécessite une modélisation abrupte pour représenter la chute du taux de dégagement de chaleur, par exemple une fonction Heaviside. Le modèle ASSM a donc été choisi pour traiter la combustion des gouttes d'aluminium car il suit la loi du  $D^2$  et la fin de vie est modélisée par une fonction Heaviside définie sur le diamètre  $D$  des gouttes.

Avec ce modèle de combustion, une simulation de l'écoulement dans un moteur générique d'un cas instable, qui sert de référence, a été présentée. Elle a permis de mettre en évidence la dynamique de l'écoulement lors de l'instabilité. La combustion des gouttes d'aluminium a lieu proche de la surface du propergol solide, dans la couche limite acoustique, tout le long de la chambre. La combustion de gouttes d'aluminium interagit avec le mode acoustique longitudinal basé sur la longueur de la chambre. L'épaisseur de la zone réactive est de quelques centimètres pour un rayon du canal de l'ordre du mètre. Dans cette zone réactive, on observe que le fond avant du moteur déstabilise, alors que le fond arrière (proche tuyère) stabilise le système. Le critère de Rayleigh reste positif et le système instable car l'écoulement s'accélère le long de la chambre. Deux sources de perturbations du taux de dégagement de chaleur du nuage réactif ont également été identifiées : des fluctuations dans le volume du nuage et un battement de frontière entre la zone réactive et la zone inerte. On parle alors de contributions volume et frontière à la source de l'instabilité.

Pour mieux appréhender les effets du modèle de combustion et comprendre les mécanismes non-linéaires menant à un cycle limite, trois études paramétriques ont été effectuées : *(a)* variation de l'amplitude de forçage acoustique pour une simulation stable, *(b)* variation du diamètre résiduel post-combustion et *(c)* comparaison du modèle de combustion ASSM avec un autre modèle tiré de la littérature scientifique.

La première étude *(a)* concerne la réponse de la combustion des gouttes à des forçages acoustiques pour différentes amplitudes de forçage acoustique. La configuration numérique choisie est stable avec des conditions limites et un modèle de combustion proches du cas instable de référence. Cette étude met en évidence trois types de réponse de la combustion à l'acoustique : une réponse linéaire, une réponse quadratique et une réponse cubique. Cette identification et interprétation des simulations numériques peuvent se faire notamment par un développement limité de l'expression de la corrélation de Ranz-Marshall, le modèle de la convection sur les gouttes.

La deuxième étude *(b)* montre en premier lieu que le diamètre résiduel a deux effets. Modifier le diamètre résiduel change le temps de combustion et le taux

de dégagement de chaleur en fin de vie. Modifier le temps de combustion augmente ou diminue le volume de combustion et modifie la contribution volume aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur en conséquence. Modifier le taux de dégagement de chaleur en fin de vie impacte directement la hauteur de la fonction Heaviside qui modélise la fin de vie des gouttes réactives. La contribution frontière dépend donc, *a priori*, fortement du taux de dégagement de chaleur en fin de vie. On observe par simulations que l'instabilité dépend fortement du taux de dégagement de chaleur en fin de vie et du temps de combustion. De plus, le poids de chaque contribution (volume et frontière) est très dépendant du taux de dégagement de chaleur en fin de vie. On note également que pour de petits diamètres résiduels la contribution frontière est non négligeable. Une autre dynamique que celle de la fonction Heaviside est donc à mettre en cause pour de petits diamètres résiduels. Le temps de combustion et le taux de dégagement de chaleur en fin de vie sont donc deux paramètres importants pour l'instabilité.

Dans la troisième étude (*c*), le modèle ASSM est comparé au modèle Lobe. Ce modèle Lobe n'a pas de fonction Heaviside en fin de vie, la loi du taux d'évaporation est différente de la loi du  $D^2$ . A iso-temps de combustion et pour un diamètre résiduel de  $D_r = 60 \mu\text{m}$ , les deux simulations sont instables avec des niveaux de fluctuations atteints au cycle limite et des glissements fréquents du même ordre de grandeur. Par contre, les modules et phases des fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont notablement différents. Enfin, il n'y a pas de contribution frontière pour le modèle Lobe. La contribution frontière identifiée pour le modèle ASSM est donc associée à la fonction Heaviside pour des résidus de taille importante.

Pour comprendre d'avantage l'instabilité, une démarche analytique pour des faibles amplitudes de fluctuations, c'est-à-dire, pour des fluctuations linéaires, a été entreprise. Les pertes acoustiques principales ont été exprimées à partir des équations de conservation pour des fluctuations de pression strictement acoustiques et un nouveau modèle des fluctuations du taux de dégagement de chaleur a été proposé et validé. Concernant l'origine des fluctuations du taux de dégagement de chaleur, l'état de l'art ne fait référence qu'à une réponse de la combustion aux fluctuations de la vitesse du gaz et des gouttes. Des fluctuations de diamètres des gouttes et des oscillations du temps de combustion sont identifiées comme étant importantes pour exprimer les fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Les oscillations du temps de vie, avec une fonction Heaviside en fin de vie, sont à l'origine de la contribution frontière précédemment identifiée. Des nouveaux modèles pour les fluctuations de la vitesse des gouttes, de leur diamètre et de leur temps de combustion sont également dérivés. L'ensemble de cette modélisation peut maintenant être utilisée dans un outil de



stabilité linéaire.

Cette nouvelle modélisation des fluctuations du taux de dégagement de chaleur est complétée par une analyse dimensionnelle de la source de l'instabilité. Quatre nombres adimensionnels sont identifiés : (i) un nombre de Stokes  $S_{tk}$ , (ii) un nombre de Strouhal de combustion  $S_c$ , (iii) un nombre de Strouhal de l'écoulement  $S_r$  et (iv)  $S_v$  un nouveau nombre adimensionnel, comparant le temps de combustion des gouttes avec un temps de convection agissant sur les fluctuations du diamètre des gouttes. Le nombre de Strouhal de combustion  $S_c$  dépend du temps de combustion des gouttes qui a été identifié par simulation comme un paramètre important de l'instabilité. Lorsque le nombre de Stokes  $S_{tk}$  croît, la contribution volume de la source décroît rapidement et la contribution frontière augmente faiblement. Lorsque le nombre de Strouhal de combustion  $S_c$  croît, les deux contributions oscillent avec un faible amortissement pour la contribution volume et un faible accroissement pour la contribution frontière. Le nombre de Strouhal  $S_r$  de l'écoulement a un impact faible mais non négligeable par rapport aux autres nombres adimensionnels. S'il augmente, la contribution volume augmente et la contribution frontière diminue. Enfin lorsque le nouveau nombre  $S_v$  augmente les deux contributions issues des dynamiques observées dans le volume et à la frontière augmentent. Diminuer le nombre  $S_v$  permet donc de diminuer l'ensemble de la source de l'instabilité.

La dernière partie de ce travail de thèse concerne le développement d'un outil numérique d'ordre réduit pour mener des analyses faiblement non-linéaires. Cet outil suppose des pertes acoustiques linéaires et une source non-linéaire. Autrement dit, on suppose que la non-linéarité des fluctuations du taux de dégagement de chaleur est à l'origine de la convergence vers un cycle limite. La modélisation de la source non-linéaire est réduite aux grandeurs physiques les plus importantes identifiées : diamètre des gouttes, vitesse du gaz et des gouttes, temps de combustion. Cette approche permet aisément de faire évoluer la modélisation de la combustion de gouttes d'aluminium en fonction d'avancées scientifiques futures. La modélisation du gaz est eulérienne et celle des gouttes est lagrangienne de type "parcel". Le système est résolu pour un seul mode acoustique avec des termes sources moyennés sur la période acoustique. Avec cet outil, l'instabilité converge vers un cycle limite d'amplitude du même ordre de grandeur que ceux observés par simulations numériques des écoulements avec le code CPS. Ceci permet de confirmer que les non-linéarités sont bien associées aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur. On a pu également identifier deux régimes en fonction de l'amplitude : un régime de faibles amplitudes et un régime permettant la convergence vers le cycle limite. Le régime de faibles amplitudes n'est pas strictement linéaire puisque le taux de croissance dépend faiblement de l'amplitude. Cette dépendance est due à la fonction Heaviside

du modèle de combustion qui n'est pas strictement linéarisable. Le régime permettant la convergence vers le cycle limite est non-linéaire et se manifeste par une décroissance du taux de croissance. Cette décroissance est induite par une réponse quadratique de la combustion à l'acoustique. Enfin, la fréquence évolue peu entre les régimes de faibles amplitudes et non-linéaire. La fréquence dans le régime de faibles amplitudes est donc une bonne estimation de la fréquence au cycle limite.

Les perspectives à donner à cette thèse sont proposées en suivant.



# Perspectives

Des simulations numériques des écoulements et des analyses ont été établies à partir d'hypothèses et de choix de modélisations qui peuvent être remis en question. Notamment, les principales hypothèses, communes aux simulations et aux développements analytiques, sont la quasi-stationnarité des phénomènes et l'injection des gouttes à l'équilibre avec le gaz. L'hypothèse quasi-stationnaire est nécessaire à l'utilisation de modèles quasi-stationnaires comme la corrélation de Ranz-Marshall pour la convection, la loi du  $D^2$ , le modèle de Schiller et Naumann pour la trainée, ...

*A priori*, pour les basses fréquences, l'hypothèse quasi-stationnaire se vérifie. Néanmoins, une correction devrait être ajoutée pour les hautes fréquences. Elle prendrait notamment en compte un délai induit par la dynamique de la couche limite thermique autour des gouttes.

De même, il serait intéressant de faire une DNS d'une goutte d'aluminium intégrant d'avantage de physique (comme un lobe et des fumées d'alumine) et soumise à différentes amplitudes pour vérifier si le modèle empirique de Ranz-Marshall permet de reproduire la dynamique linéaire et non-linéaire de la combustion des gouttes.

Enfin, la vitesse d'injection des gouttes a été supposée à l'équilibre gaz, ce qui implique implicitement que l'on considère que toute la phase de formation des agglomérats permet leur accélération jusqu'à l'équilibre dans une distance infiniment courte. Cette hypothèse mérite d'être davantage discutée, voire remise en cause.

La modélisation de la combustion des gouttes d'aluminium est également importante à continuer à étudier puisqu'il n'y a pas de consensus. Par ces travaux de thèse, la fin de vie des gouttes est un des aspects qui a été mis en évidence dans cette thèse comme pouvant agir fortement sur l'instabilité et doit être une des priorités dans le processus de compréhension de la combustion de ces gouttes. Le temps de combustion est également un paramètre important à modéliser finement puisque la source dépend fortement du nombre de Strouhal de

combustion  $S_c$ .

Un modèle linéaire pour les fluctuations du taux de dégagement de chaleur a été dérivé mais en supposant une certaine modélisation de combustion. Ce modèle doit donc être amené à évoluer et à être de nouveau validé à mesure que la modélisation de la combustion évolue. À partir de cette modélisation de source, un outil de stabilité linéaire peut être développé (comme cela est prévu en interne à ArianeGroup). Néanmoins, il serait intéressant de poursuivre au-delà d'une approche linéaire car (1) dans le domaine linéaire le taux de croissance n'est pas strictement constant et (2) le niveau des oscillations de pression est plus critique que le taux de croissance. Il est donc préférable d'aller vers des outils d'ordre réduit non-linéaire, comme ce qui a été amorcé au dernier chapitre. Cet outil devrait être amélioré dans sa modélisation physique de l'écoulement et présente l'intérêt d'être facilement adaptable au changement de modèle de combustion.

Enfin, l'ensemble de ces travaux de thèse correspond à des comparaisons croisées entre simulations numériques, modèles analytiques et d'ordre réduit. Expérimentalement, il n'existe pas d'essais de moteurs à propergol solide publiés permettant une validation. Des données de propulseurs en T mettant clairement en évidence cette instabilité sont disponibles dans la bibliographie. Des comparaisons entre simulations, essais expérimentaux et modèles analytiques sur une configuration de propulseur en T permettraient d'autres analyses et avancées dans la modélisation de cette instabilité thermoacoustique.

## Annexe A

# Description du code CPS, Code pour la Propulsion Spatiale

*Cette annexe est inspirée de l'article de [Durand et al. \(2000\)](#). L'outil de simulation des écoulements compressibles et diphasiques CPS qui a été utilisé dans ce travail est un code à vocation industrielle pour la propulsion liquide et solide. Il utilise des schémas numériques permettant de résoudre des problèmes 3D instationnaires par une discrétisation des équations bilans sur la base de volumes finis et de maillages non-structurés. Les modèles implémentés permettent de réaliser des simulations d'écoulements réactifs turbulents, multi-espèces et diphasiques.*

### A.1 Introduction

CPS (Code pour la Propulsion Spatiale) développé par Bertin Technologies et SNPE Propulsion est le produit de la convergence de deux codes de calculs : Thésée ([Hulin et al. \(1995\)](#)) et Patrick<sup>®</sup> ([Tissier et al. \(1992\)](#)). Le code CPS est utilisé pour simuler l'aérothermochimie des moteurs à propulsion liquide et à propulsion solide, suite à cette convergence datant des années 2000 ([Durand et al. \(2000\)](#)).

Dans l'environnement de travail ArianeGroup, au Centre de Recherche du Bouchet, ce code est en constante amélioration pour reproduire les oscillations de pression dans les chambres de moteurs à propergol solide. Ceci présuppose un code capable de simuler l'acoustique, la turbulence, la combustion et le diphasique. La modélisation physique proposée dans ce code est abordée à la section suivante, suivi par un descriptif de la modélisation numérique disponible.

## A.2 Modélisation physique

CPS est conçu pour résoudre l'aérodynamique interne avec des écoulements compressibles (acoustique linéaire et non-linéaire) ou incompressibles. Il propose divers modèles turbulents ainsi que des modèles de combustion. De plus, deux modélisations pour la phase particulaire de l'écoulement sont possibles : le suivi de particules lagrangien ou une approche eulérienne. L'ensemble de ces modélisations physiques est décrit ci-dessous.

### A.2.1 Modèles turbulents

Pour modéliser la turbulence, un système de deux équations supplémentaires est résolu, soit un système Launder & Jones  $k-\epsilon$ , soit un système Coakley  $q-\omega$ . Un traitement particulier est proposé aux parois par une loi logarithmique de Van Driest.

Dans le cadre de ce travail doctoral, la turbulence n'est pas prise en compte, l'écoulement est supposé laminaire avec une viscosité constante.

### A.2.2 Modélisation de la combustion

Dans CPS, la cinétique chimique est modélisée par une loi d'Arrhénius. La combustion est décrite soit par le modèle Eddy Break Up soit par une équation de transport de surface de flamme (modèle CFM).

Pour nos simulations, la chimie est supposée infiniment rapide et on suppose que l'écoulement est homogène en espèces. L'évaporation des gouttes d'aluminium contrôle donc la combustion. L'enthalpie de réaction est supposée indépendante des fractions massiques mais dépendante du transfert d'enthalpie entre les deux phases et donc dépendante des températures du gaz et des gouttes.

### A.2.3 Ecoulement diphasique

Les deux approches eulérienne ou lagrangienne sont disponibles dans CPS pour modéliser la phase dispersée. Pour les deux approches, on suppose une faible densité de particules (solides ou liquides), sphériques, sans interaction particule-particule (coalescence ou fragmentation).

Pour l'approche lagrangienne, un traitement statistique est fait sur la population de gouttes. Les termes d'échanges entre phases sont la vaporization et

les forces visqueuses.

Pour l'approche eulérienne, le volume de la phase liquide est supposé négligeable et utilise les équations de conservation de [Marble \(1963\)](#).

### A.3 Modélisation numérique

CPS est un code à volume fini, présentant des schémas temporels implicites ou explicites.

Les schémas explicites sont d'ordre 1, 2 ou 4 en temps et jusqu'à 3 en espace. L'implicite est disponible pour l'aérodynamique et la turbulence.

Les flux non-visqueux sont calculés aux interfaces de cellules par l'approximation de Roe du problème de Riemann, étendu aux mélanges de gaz parfaits non idéaux suivant l'approche de Toumi pour calculer les moyennes de Roe.

La résolution du système linéaire est réalisé par les algorithmes de Jacobi ou de Gauss-Seidel.

La discrétisation de second ordre en espace est réalisée avec une approche MUSCL dans laquelle les variables physiques sont extrapolées avec un limiteur fort, faible ou absent.

La discrétisation des équations dans les simulations du manuscrit sont explicite d'ordre 2 en temps et en espace avec un limiteur faible. Ce limiteur n'a quasiment pas d'impact sur les modes de basses fréquences (premiers modes), mais permet d'éliminer des modes élevées présents dans certaines simulations. Cela permet, en particulier, de reproduire artificiellement la présence de fumées, de résidus de petites tailles qui amortissent les fréquences élevées.

### A.4 Conclusion

Dans le cadre de cette thèse, ce code a été utilisé en eulérien-eulérien, avec une modélisation laminaire et de chimie infiniment rapide, sans suivi d'espèces. Un nouveau modèle de combustion-évaporation a été implémenté (modèle Lobe) ainsi que des variables de sorties supplémentaires pour des validations de modèles.





## Annexe B

# Linéarisation des équations de conservation

*Dans cette annexe, les équations de conservation pour un mélange diphasique réactif sont linéarisées. Une équation d'onde faisant apparaître l'ensemble des sources et pertes acoustiques du système est obtenue. De plus, les conditions limites du gradient des fluctuations de pression sont définies.*

### B.1 Equations de conservation pour un mélange diphasique réactif

On décrit ici les équations de transfert de l'écoulement diphasique avec les approximations utilisées. Dans notre étude, on suppose que les chaleurs massiques des deux phases sont constantes (indépendantes des fractions massiques et de la température). On suppose également que les phases sont homogènes. Les fractions massiques de chaque phase n'ont donc pas besoin d'être résolues et on suit le gaz et les particules uniquement.

Dans le moteur, on considère donc une phase gazeuse et une phase particulaire. Pour la phase particulaire, on suppose que les chaleurs massiques à pression et à volume constants sont égales  $C_{V,p} = C_{P,p} = C$ . La phase dense correspond aux gouttes constituées d'aluminium et d'alumine. Elles proviennent initialement des particules d'aluminium présentes dans le propergol. La masse d'aluminium représente typiquement 18% de la masse du propergol et environ seulement un tiers d'entre elles (soit 6%) donnent des gouttes de taille importante (par agglomération, chapitre 3). Seules ces gouttes provenant d'agglomérats sont considérées. On calcule, à l'injection, une fraction volumique initiale de gouttes d'aluminium très faible dans le mélange diphasique :  $\alpha_{p,i} \leq 0.001$ . Sa-

chant que les gouttes d'alumine sont de diamètre plus faible que les gouttes initiales d'aluminium, on suppose que la fraction volumique en tout lieu du moteur est inférieure ou de l'ordre de la fraction initiale d'aluminium  $\alpha_p \leq \alpha_{p,i} \leq 0.001$ . Un mélange gaz-particule dilué peut donc être supposé.

Sous forme conservative, le système d'équations pour un mélange diphasique dilué est le suivant (chapitre 4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_g \mathbf{u} = N_p \dot{m} \quad (\text{B.1}) \\ \frac{\partial \rho_g \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_g \mathbf{u}^2 + \nabla p = N_p \dot{m} \mathbf{u}_p - \mathbf{F} \quad (\text{B.2}) \\ \frac{\partial \rho_g E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g E + p) \mathbf{u} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_p - Q_v + N_p \dot{m} (L_v + E_p) \quad (\text{B.3}) \\ \frac{\partial \alpha_p \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p = -N_p \dot{m} \quad (\text{B.4}) \\ \frac{\partial \alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p^2 = -N_p \dot{m} \mathbf{u}_p + \mathbf{F} \quad (\text{B.5}) \\ \frac{\partial \alpha_p \rho_p E_p}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_p \rho_p E_p \mathbf{u}_p = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_p + Q_v - N_p \dot{m} (L_v + E_p) \quad (\text{B.6}) \end{array} \right.$$

où  $\rho_g$  est la densité du gaz,  $\alpha_p \rho_p$  est la densité apparente de la phase particulaire,  $\mathbf{u}$  est la vitesse du gaz,  $\mathbf{u}_p$  est la vitesse de la phase particulaire,  $N_p \dot{m}$  est le taux de production de gaz par combustion/évaporation des  $N_p$  gouttes,  $\mathbf{F}$  la force de traînée par unité de volume,  $Q_v$  la puissance par unité de volume des échanges thermiques entre les deux phases (essentiellement par convection),  $L_v$  la chaleur latente de vaporisation de l'aluminium. L'énergie totale massique  $E$  du gaz est égale à la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique :  $E = C_{V,g} T + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$  où  $C_{V,g}$  est la chaleur massique à volume constant de la phase gazeuse. Pour les particules, on définit cette énergie comme  $E_p = C T_p + \frac{1}{2} \mathbf{u}_p^2 + \Delta H_r$ , où  $C$  est la chaleur massique de la phase dense. La quantité  $\Delta H_r$  est l'enthalpie de réaction fixée *a priori*, puisque la chimie n'est pas résolue.

Le système précédent s'écrit sous forme non conservative :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_g = -\rho_g \nabla \cdot \mathbf{u} + N_p \dot{m} \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_g \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_g \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + N_p \dot{m} (\delta \mathbf{u}_p) - \mathbf{F} \end{array} \right. \quad (\text{B.8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_g C_{V,g} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_g C_{V,g} \mathbf{u} \cdot \nabla T = -p \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u}_p - Q_v \\ \quad + N_p \dot{m} (L_v + CT_p - C_{V,g} T + \Delta H_r + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}_p^2) \end{array} \right. \quad (\text{B.9})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_p \rho_p}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla \alpha_p \rho_p + \alpha_p \rho_p \nabla \cdot \mathbf{u}_p = -N_p \dot{m} \end{array} \right. \quad (\text{B.10})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_p \rho_p \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + \alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p \cdot \nabla \mathbf{u}_p = \mathbf{F} \end{array} \right. \quad (\text{B.11})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_p \rho_p C \frac{\partial T_p}{\partial t} + \alpha_p \rho_p C \mathbf{u}_p \cdot \nabla T_p = Q_v - N_p \dot{m} L_v \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

où  $\delta \mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p - \mathbf{u}$  est la vitesse relative entre les deux phases. On s'intéresse ici à un écoulement constitué d'un mélange gaz-particules. Les équations ci-dessus sont combinées afin d'obtenir un système décrivant l'évolution du mélange. La masse volumique du mélange est définie par  $\rho = \rho_g + \alpha_p \rho_p$ . De même, la chaleur spécifique moyenne est définie par  $C_V = \rho_g C_{V,g} + \alpha_p \rho_p C$ . Les équations portant sur le mélange développées ci-dessus peuvent donc se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \mathcal{W} \quad (\text{B.13})$$

avec  $\mathcal{W} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\alpha_p \rho_p \delta \mathbf{u}_p)$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = N_p \dot{m} (\delta \mathbf{u}_p) + \delta \mathbf{F} = \mathcal{F} \quad (\text{B.14})$$

avec  $\delta \mathbf{F} = -\alpha_p \rho_p \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}_p}{\partial t} + \delta \mathbf{u}_p \cdot \nabla \delta \mathbf{u}_p + \delta \mathbf{u}_p \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}_p \right)$  et  $\mathcal{F}$  le terme source associé aux effets des particules sur le champ gazeux.

$$\rho C_V \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_V \mathbf{u} \cdot \nabla T + p \nabla \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u}_p + N_p \dot{m} (CT_p - C_{V,g} T + \Delta H_r + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}_p^2) + \delta \mathbf{Q} \quad (\text{B.15})$$

avec  $\delta \mathbf{Q} = -\alpha_p \rho_p c \left( \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \delta \mathbf{u}_p \cdot \nabla \delta T + \delta \mathbf{u}_p \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta T \right)$  et  $\delta T = T_p - T$ . Les expressions de la force de traînée  $\mathbf{F}$  et du taux de création de masse  $N_p \dot{m}$  sont :

$$\mathbf{F} = -\alpha_p \rho_p \frac{1}{\tau_v} \delta \mathbf{u}_p \quad \text{avec} \quad \tau_v = \frac{4}{3} \frac{1}{C_d} \frac{\rho_p}{\rho_g} D \frac{1}{|\delta \mathbf{u}_p|} \quad (\text{B.16})$$

$$N_p \dot{m} = 2\pi \frac{\mu}{\text{Pr}} N_p D \ln(1+B) [1 + 0.3 \text{Re}_p^{1/2} \text{Pr}^{1/3}] \quad (\text{B.17})$$

avec les nombres adimensionnels :

$$\text{Pr} = \frac{\mu C_{P,g}}{\lambda_g} \quad \text{B} = \frac{C_{P,g}(T - T_p) + \Delta h_r}{L_v} \quad (\text{B.18})$$

$$\text{Re}_p = \frac{\rho_g |\delta \mathbf{u}_p| D}{\mu} \quad C_d = \frac{24(1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.687})}{\text{Re}_p(1 + \text{B})} \quad (\text{B.19})$$

où B le nombre de Spalding est donné par le modèle de combustion ASSM (chapitre 3),  $N_p$  est le nombre de particules par unité de volume,  $D$  le diamètre de la goutte et  $\mu$  la viscosité du gaz. La loi d'état du gaz est la loi des gaz parfaits :

$$p = \rho r T \quad (\text{B.20})$$

On peut alors établir l'équation de la pression du gaz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = & \frac{r}{C_V} [-C_V T \nabla \cdot \alpha_p \rho_p \delta \mathbf{u}_p \\ & - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u}_p + N_p \dot{m} (C T_p - C_{V,g} T + \Delta H_r + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}_p^2) + \delta \mathbf{Q}] \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

On remarque le terme de combustion qui vaut dans cette équation :

$$\dot{q} = N_p \dot{m} (C T_p - C_{V,g} T + \Delta H_r + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}_p^2).$$

On définit  $\mathcal{Q}$  le terme source de l'équation précédente (Eq. (B.21)) tel que :

$$\mathcal{Q} = -C_V T \nabla \cdot \alpha_p \rho_p \delta \mathbf{u}_p - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u}_p + \dot{q} + \delta \mathbf{Q} \quad (\text{B.22})$$

L'équation (B.21) se réécrit donc :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} + (\gamma - 1) \mathcal{Q} \quad (\text{B.23})$$

Dans la sous-section suivante, les équations de conservation (Eqs. (B.13), (B.14) et (B.23)) sont linéarisées pour obtenir les expressions du taux de croissance et du glissement fréquentiel.

## B.2 Linéarisation des équations

Pour linéariser, on peut supposer que toutes les grandeurs s'écrivent comme la somme d'une composante moyenne et d'une fluctuation :  $X(\mathbf{x}, t) = X_0(\mathbf{x}) + X_1(\mathbf{x}, t)$  où les fluctuations sont supposées petites devant la valeur moyenne  $\frac{X_1}{X_0} = \epsilon \ll 1$ . Les équations vérifiées par les fluctuations sont (l'écoulement moyen, vérifiant ses propres équations, se simplifie) :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \rho_1 = \mathcal{W}_1 - \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_1 \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 \right) + \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_1 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \\ + \rho_1 \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 + \rho_1 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \rho_1 \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 + \mathcal{F}_1 \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla p_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_1 = -\gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 - \gamma p_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_0 - \gamma p_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + (\gamma - 1) \mathcal{Q}_1 \quad (\text{B.26})$$

Pour la stabilité linéaire, on peut négliger les termes d'ordre 2 en fluctuations. Les équations deviennent donc :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \rho_1 = \mathcal{W}_1 \quad (\text{B.27})$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \right) + \rho_1 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 = -\nabla p_1 + \mathcal{F}_1 \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla p_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 = -\gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 - \gamma p_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_0 + (\gamma - 1) \mathcal{Q}_1 \quad (\text{B.29})$$

Sans combustion de l'aluminium, l'injection pariétale par la combustion du propergol solide modifie la vitesse du son  $a_0$  le long de la chambre. Mais cette variation est faible, de l'ordre du Mach d'injection  $M_i \approx 10^{-3}$  (Malhotra (2004)). La combustion de l'aluminium est distribuée le long du mode acoustique. Les gradients de la vitesse du son sont donc négligeables. On suppose que la vitesse du son  $a_0$  est donc quasi-homogène dans l'ensemble de la chambre.

A partir des équations (B.28) et (B.29), il est possible d'obtenir une équation d'onde non homogène de la pression acoustique  $p_1$ . On applique la relation  $\nabla \cdot (\text{B.28}) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (\text{B.29})$ , avec  $a_0$  la vitesse du son :

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = h \quad (\text{B.30})$$

On définit  $h$  le second membre de l'équation (B.30) tel que :

$$h = -\rho_0 \nabla \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0) + \nabla \cdot \mathcal{F}_1 + \frac{\mathbf{u}_0}{a_0^2} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} p_1 - \frac{\gamma - 1}{a_0^2} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial t} \quad (\text{B.31})$$

A partir de l'équation (B.28), on définit également  $f$ , pour la condition limite du gradient de pression acoustique  $p_1$ , tel que :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p_1 = -f = -\mathbf{n} \cdot \left( \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \right) - \mathcal{F}_1 \right) \quad (\text{B.32})$$







## Annexe C

# Thermo-acoustic instabilities driven by fuel droplet lifetime oscillations

*A new mechanism of thermo-acoustic destabilization of combustors powered by burning droplets is investigated. Acoustic induced heat release disturbances are found to be driven by oscillations of droplet lifetime during the final stage of the droplet combustion before their extinction. The mechanism is the following. Synchronized acoustic disturbances alter the droplet evaporation rate and modify their diameter. Perturbations of the droplet diameter along the droplet trajectories lead to fluctuations of their lifetime. These fluctuations trigger in turn an oscillating motion of the burning droplet cloud boundary that is synchronized by the acoustic excitation. This leads to large heat release fluctuations before droplet extinction and constitutes a thermo-acoustic source. This mechanism is found to be particularly important in solid rocket motors in which aluminum droplets released from the propellant burn individually and are quenched as the droplet diameter falls below a critical residue diameter associated to an inert particle. Analytical models are derived in an idealized configuration where acoustic forcing takes place in the transverse direction to the droplet trajectories. Expressions are derived in the frequency space for the droplet diameter oscillations, the motion of the droplet cloud boundary and the resulting heat release disturbances, that take the form of a distributed Flame Describing Function. This model is used to reveal effects of the acoustic pressure level and of the residue diameter on the resulting motion of the combustion volume boundary and corresponding heat release disturbances. It is further extended to consider the peculiar flow in a solid rocket motor and the heat release disturbance model is compared to results from numerical flow simulations of the motor.*

*While highlighted in the context of solid propulsion, the observations made are believed to be more general and the same mechanisms may persist in acoustically perturbed spray flames from hydrocarbon fuel droplets.*

## C.1 Introduction

Aero and rocket engines are prone to combustion instabilities (Culick (2006); Lieuwen and Yang (2005); Candel et al. (2013)). In systems powered by fuel sprays, acoustic oscillations may trigger mixture fraction disturbances (i) by modifying the droplet size distribution at the injector inlet (Zhu et al. (2002); Eckstein et al. (2005)), (ii) by segregation of large from small droplets during their transport in the pulsed flow (Giuliani et al. (2002)) and (iii) by reducing the droplet evaporation time due to the additional drag from the pulsed flow (Carvalho et al. (1997), Brooks and Beckstead (1995), Gallier et al. (2011)). Each of these mechanisms alter the flame dynamics.

In numerical simulations of liquid propellant rocket engines, transverse acoustic oscillations were shown to lead to shorter flames due to acceleration of mixing and evaporation of the propellant injected as liquid droplets (Sattelmayer et al. (2015)), a phenomenon which is also observed in experiments and simulations conducted at transcritical conditions (Méry et al. (2013), Hakim et al. (2015)). Longitudinal high-amplitude acoustic oscillations were also found to reduce the length of liquid fuel sprays (Sujith (2005)). Carvalho et al. (1997) observed a reduction in the mean droplet lifetime due to acoustic forcing in their numerical model of a Rijke tube burning liquid droplets. Blaszczyk (1991) showed experimentally a dependence of the droplet consumption rate and of the mean droplet lifetime on the acoustic amplitude and frequency. These different studies reveal that acoustic oscillations interacting with fuel droplets often lead to changes of the spray and flame structures.

A new contribution to heat release rate fluctuations associated to oscillations of the droplet lifetime is investigated in this study. These disturbances are shown to constitute an additional thermo-acoustic source of destabilization of the combustor. The mechanism is reminiscent of the displacement of a flame interface in an acoustic field as observed in some high frequency instabilities coupled to transverse modes (Sattelmayer et al. (2015), Méry (2017)).

This article focuses on aluminum burning droplets in an acoustic field transverse to the droplet trajectory, because the phenomenon has been recently highlighted in solid rocket motors (SRMs) (Gallier and Godfroy (2009), Orlandi et al. (2017)), but the analytical results are valid for any system with quasi one dimensional droplet trajectories burning individually.

Flame quenching induced by acoustic excitation (McKinney and Dunn-Rankin (2000)) is not considered in this study in which acoustic disturbances remain small and in the linear regime. Also, the acoustic radiation force (Tanabe et al. (2000)) can be neglected in comparison with the drag force exerted by the flow. With these hypotheses, droplet lifetime and its fluctuations are only driven by changes of the mass consumption rate along the droplet trajectory. A reduction of the mean droplet lifetime may also be observed in numerical simulations at high acoustic levels, but the following study is limited to the low-amplitude acoustic response in which case the mean droplet lifetime remains invariant.

The article is organized as follows. Section C.2 highlights the mechanism identified in a generic SRM featuring a self-sustained thermo-acoustic instability. Section C.3 develops the analytical model in an idealized configuration with a uniform flow. The analytical approach is extended to include SRM specificities and is compared to simulation results in section C.4.

## C.2 Illustration in a SRM

It was recently shown that the combustion dynamics of aluminum droplets may lead to self-sustained thermo-acoustic oscillations in SRM (Gallier and Godfroy (2009); Orlandi, Plaud, Godfroy, Larrieu, and Cesco (2017)). In these simulations, dilute aluminum droplet combustion is modeled by the  $D^2$  law (group combustion is neglected (Bind et al. (2012), Beckstead (2002), Genot et al. (2017))) :

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{4\mu \ln(1+B)\text{Sh}}{\rho_p \text{Pr}} \quad (\text{C.1})$$

with  $D$  the fuel droplet diameter,  $\rho_p$  the droplet density,  $\mu$  the gas viscosity,  $\text{Pr}$  the Prandtl number,  $B$  the Spalding number taken from Gallier and Godfroy (2009) and  $\text{Sh}$  the Sherwood number. To reproduce experimental observations (Beckstead (2002)), the combustion reaction is stopped when the particle diameter reaches the aluminum oxide residue diameter  $D_r$  :

$$\dot{q} = \dot{q}_{D^2} \mathcal{H}(D - D_r) \quad (\text{C.2})$$

where  $\mathcal{H}$  is the Heaviside function and  $\dot{q}_{D^2}$  denotes the rate of heat released from  $N_p$  droplets per unit volume which are burning individually and are moving with a velocity  $\mathbf{u}_p$  in a gas flow at velocity  $\mathbf{u}$ . The burning rate is enhanced by flow convection around the fuel droplets :

$$\dot{q}_{D^2} = N_p \Delta h_r \pi D \frac{\mu}{\text{Pr}} \ln(1+B)\text{Sh} \quad (\text{C.3})$$

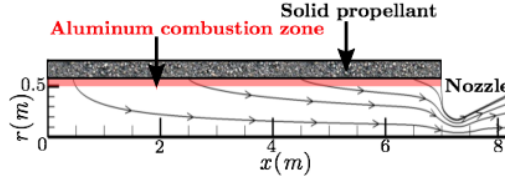


FIGURE C.1 – Cylindrical solid rocket motor (SRM) geometry and computed gas streamlines in the numerical domain.

where  $\Delta h_r$  is the reaction enthalpy and the Sherwood number  $Sh$  is deduced from the Ranz-Marshall correlation (Ranz and Marshall (1952)) :

$$Sh = 2 + 0.6Re_p^{1/2}Pr^{1/3} \quad Re_p = \frac{\rho_g |\delta \mathbf{u}_p| D}{\mu} \quad (C.4)$$

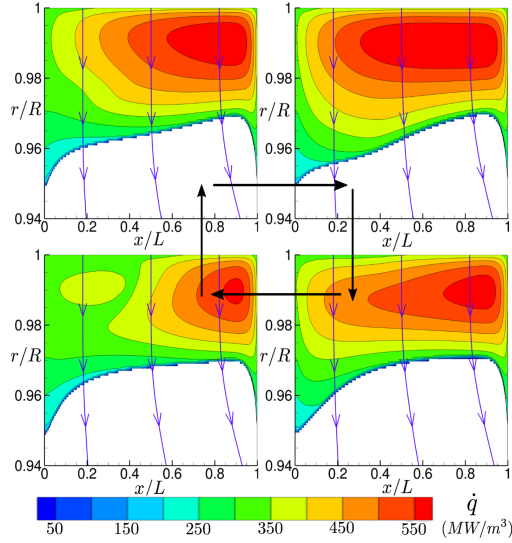
with  $\rho_g$  the gas density and  $|\delta \mathbf{u}_p| = |\mathbf{u}_p - \mathbf{u}|$  the norm of the particle relative velocity. In the case of a uniform flow, the lifetime of the burning droplet is given by :

$$t_c = \frac{\rho_p Pr (D_i^2 - D_r^2)}{4\mu \ln(1 + B) Sh} \quad (C.5)$$

where  $D_i$  and  $D_r$  are the initial and residual diameters of the fuel droplet. Transient droplet heating is neglected, the droplet temperature being considered constant and equal to the saturation temperature.

An example of simulation in a thermo-acoustically unstable state is now briefly described to illustrate the system dynamics. More details about the numerical flow model are given in section C.4.1. Figure C.1 shows the gas streamlines of the mean flow and delineates the aluminum combustion zone in the numerical flow domain. The SRM chamber has a length  $L = 7$  m and a constant radius  $R = 0.593$  m. Propellant burning is modeled with an imposed burning rate normal to the propellant boundary. Aluminum droplets are injected radially, from the solid propellant wall at  $r = R$  at the gas phase velocity  $\mathbf{u}_p = \mathbf{u}$  and burn in the boundary layer along the solid propellant. A single class of droplets is injected with an initial diameter  $D_i$  taken from the baseline configuration of Gallier and Godfroy (2009) and the residual diameter is fixed to  $D_r = D_i/2$ .

Figure C.2 illustrates the dynamics of the SRM during one oscillation cycle. The combustion oscillation is here coupled to the first longitudinal acoustic mode of the motor. The droplet streamlines in Fig. C.2 have a quasi 1D-trajectory normal to the aluminum combustion zone. Close to the nozzle for  $0.5 \leq x/L \leq 1$ , the volumetric heat release rate  $\dot{q}$  takes higher values and the volume occupied by the burning droplets is thinner than in the first section of the motor, due to higher flow velocities. Longitudinal fluctuations of

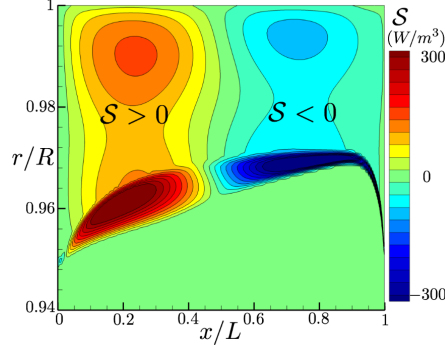


**FIGURE C.2** – Heat release rate distribution  $\dot{q}$  in the cylindrical chamber of a SRM at four regularly distributed instants of a limit cycle of a thermo-acoustic instability driven by aluminum droplet combustion. A few droplet streamlines are superimposed in blue. The radial coordinate is stretched here so as to make the thin aluminum droplet combustion zone more visible.

the volumetric heat release rate  $\dot{q}$  can also be clearly identified in the combustion volume. This contribution is associated to disturbances of the combustion rate of aluminum droplets due to acoustic velocity fluctuations as described in Gallier et al. (2011) and Gallier and Godfroy (2009). Also, a flapping motion of the boundary between the combustion zone and the inert zone (white region in Fig. C.2) is remarkable. This motion essentially takes place in the radial direction, while the acoustic mode is controlled by longitudinal acoustic oscillations.

This simulation is further analyzed by examining the local Rayleigh index  $\mathcal{S}$  (Durox et al. (2009)) corresponding to the thermo-acoustic source coupling acoustic pressure  $p_1$  and heat release rate  $\dot{q}_1$  fluctuations. This index is plotted in Fig. C.3 over the entire flow. As the instability is locked on the first acoustic mode, aluminum combustion produces pressure oscillations ( $\mathcal{S} > 0$ ) close to the head end, whereas pressure oscillations are damped close to the nozzle ( $\mathcal{S} < 0$ ). The low frequency pressure fluctuations are invariant in the radial direction (Gallier and Godfroy (2009)), and the radial variations observed for the Rayleigh index in Fig. C.3 are due to heat release rate fluctuations.

The high values of the Rayleigh index at the aluminum combustion zone boundary contribute up to 30% of the global Rayleigh index  $\int_V \mathcal{S} dV$  integrated over the whole flow volume  $V$  (Genot et al. (2017)). They are due to the flapping



**FIGURE C.3** – Distribution of the local Rayleigh index  $\mathcal{S} = \frac{\gamma-1}{\gamma p_0 T} \int_T p_1 \dot{q}_1 dt$  through the SRM.  $T$  is the acoustic period ( $T = 1/f$ ),  $\gamma$  the specific heat ratio,  $p_0$  the mean pressure,  $p_1$  the pressure fluctuations and  $\dot{q}_1$  the heat release rate fluctuations.

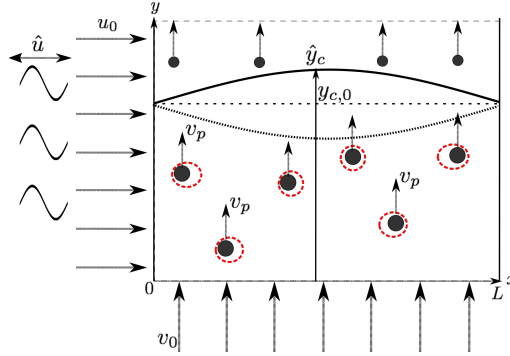
motion of the combustion volume boundary observed in Fig. C.2, which is itself associated to the dynamics of aluminum droplets as they reach their residual diameters. It is demonstrated in this study that the heat release fluctuations originating from the combustion volume boundary result from oscillations of aluminum droplet lifetime. An analytical model is developed to determine the resulting heat release disturbances. The heat release rate fluctuations produced inside the combustion volume are deliberately discarded in the following analytical developments to better highlight the contribution from the boundary. This leads to neglecting the fluctuations of  $\dot{q}_{D^2}$  in Eq. (C.2).

### C.3 Analytical model

The model aims at reproducing the heat release fluctuations associated with droplet lifetime oscillations and at identifying the main parameters controlling this dynamics. It is developed for harmonic, linear and low frequency traveling or standing sound waves. Droplet lifetime oscillations are driven by their dynamics as they approach the residue droplet diameter  $D = D_r$ . A linear model for perturbations of the droplet lifetime is derived from Eq. (C.1) and reads in the Fourier space :

$$\hat{t}_c = \frac{2t_{c,0}D_0}{D_i^2 - D_r^2} \hat{D} \quad (\text{C.6})$$

where  $\hat{\cdot}$  denotes the Fourier component of the perturbation at frequency  $f$ . In the following, the subscript 0 designates the mean value and the subscript 1 stands for the perturbed state :  $X(t) = X_0 + X_1(t)$ , where  $X_1 = \mathcal{R}_e(\hat{X} \exp(i\omega t))$ ,  $\mathcal{R}_e$  denotes the real part and  $\omega = 2\pi f$  the angular frequency.



**FIGURE C.4** – Isolated burning droplets crossing an uniform flow in the transverse direction, which is acoustically perturbed.

### C.3.1 Idealized configuration

The problem is not directly tackled on the SRM but first examined on a simpler and idealized configuration which reproduces the main features of the dynamics observed in SRMs. One considers the configuration sketched in Fig. C.4. Fuel droplets are released vertically at  $y = 0$  in an oxidizer gaseous stream characterized by a uniform mean velocity  $u_0$  plus an harmonic fluctuation  $u_1$  in the axial direction. Droplet trajectories are assumed to be quasi-1D, with a small axial particle velocity compared to their vertical component  $u_p \ll v_p$ . The mean diameter  $D_0$  is taken here, as a first approximation, as the mean value between the initial and the residue value. The combustion zone boundary is delimited by  $y_c$  in Fig. C.4 :

$$y_c = v_p t_c \quad (\text{C.7})$$

where  $v_p$  is the vertical droplet velocity, which is here taken constant. In this model, the boundary  $y_c$  moves if the droplet lifetime fluctuates and this motion leads in turn to heat release rate fluctuations.

Equation (C.2) can be rewritten as :

$$\dot{q} = \dot{q}_{D^2,0} \mathcal{H}(D(t) - D_r) = \dot{q}_{D^2,0} \mathcal{H}(y_c(t) - y) \quad (\text{C.8})$$

where  $y_c$  designates the position verifying  $D = D_r$ . At the boundary  $y_c$ , one has :

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = \frac{\partial y_c}{\partial t} \dot{q}_{D^2,0} \delta(y_c(t) - y) \quad (\text{C.9})$$

where  $\delta$  denotes the Dirac distribution. This equation is reminiscent of expressions of heat release disturbances associated to high frequency transverse flow disturbances (Sattelmayer et al. (2015); Méry (2017)). The next step is to link

the disturbances of the boundary  $y_c$  to disturbances of the droplet fuel diameter  $D$ , which depends itself on the gas velocity  $u$ .

At low forcing frequencies, the droplet response to acoustic perturbations remains quasi-steady (Zhu, Dowling, and Bray (2001); Zhu, Dowling, and Bray (2002); Gallier, Sibe, and Orlandi (2011)) and effects of acoustic pressure, gas temperature, gas density and number of droplets disturbances can be neglected (Brooks and Beckstead (1995), Gallier and Godfroy (2009)). The droplet lifetime, as the heat release rate, is only altered by fluctuations of the droplet diameter  $D$ , droplet velocity  $u_p$  and gas velocity  $u$ .

The following expressions are derived for small disturbances linking the particle velocity  $u_p$  and the droplet diameter  $D$  to the gas velocity  $u$ . The derivation is based on the system of conservative eulerian equations given by Gallier and Godfroy (Gallier and Godfroy (2009)).

For disturbances of the droplet axial velocity  $u_{p,1}$ , one is left with :

$$\frac{\partial u_{p,1}}{\partial t} = -\frac{\delta u_{p,1}}{\tau_{v,0}} + \frac{\delta u_{p,0}\tau_{v,1}}{\tau_{v,0}^2} \quad (\text{C.10})$$

where  $\delta u_p = u_p - u$  is the difference between the axial particle and gas velocities and  $\tau_v$  is the droplet relaxation time given by Grace et al. (1978); Gallier and Godfroy (2009) :

$$\tau_v = \frac{1 + B}{1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687}} \frac{\rho_p D^2}{18\mu} \quad (\text{C.11})$$

Gradients acting on velocity disturbances are neglected in Eq. (C.10) by setting  $\nabla u_{p,1} = 0$ .

Equation (C.1) is now used to determine a transport equation for disturbances  $D_1$  of the droplet diameter in an eulerian framework :

$$\frac{\partial D_1}{\partial t} + v_p \frac{\partial D_1}{\partial y} = -\frac{(D_i^2 - D_r^2)}{2D_0 t_{c,0}} \left( \frac{\text{Sh}_1}{\text{Sh}_0} - \frac{D_1}{D_0} \right) \quad (\text{C.12})$$

For small oscillations at the frequency  $f$ , Eq. (C.10) yields in the Fourier space :

$$\hat{u}_p \left( i\omega\tau_{v,0} + 1 + \frac{C_{Re}\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_{p,0}|^2} \right) = \hat{u} \left( 1 + \frac{C_{Re}\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_{p,0}|^2} \right) + \frac{\hat{D}}{D_0} \delta u_{p,0} (2 - C_{Re}) \quad (\text{C.13})$$

where  $C_{Re}$  is a mean quantity due to fluctuations of the drag characteristic time :

$$C_{Re} = \frac{0.687 \times 0.15\text{Re}_{p,0}^{0.687}}{1 + 0.15\text{Re}_{p,0}^{0.687}} \quad (\text{C.14})$$



TABLE C.1 – Model input parameters.

$\mu$	$9.1 \cdot 10^{-5}$ kg/m/s	Pr	0.4
$D_0$	$\frac{D_i + D_r}{2}$	$v_0$	0 m/s
$\delta u_{p,0}$	1 m/s	$v_p$	2 m/s
$B$	1	$p_0$	$10^7$ Pa
$\rho_g$	10 kg/m <sup>3</sup>	$\gamma$	1
$a_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_g}}$	1000 m/s	$L$	10 m
$\rho_p$	2000 kg/m <sup>3</sup>	$f$	50 Hz

Fluctuations of the droplet diameter given by Eq. (C.12) obey in the Fourier space to :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{D}}{\partial y} + \hat{D} \left( \frac{i\omega}{v_p} - \frac{(\text{Sh}_0 + 2)(D_i^2 - D_r^2)}{4v_p t_{c,0} \text{Sh}_0 D_0^2} \right) = \\ - \frac{(\text{Sh}_0 - 2)(D_i^2 - D_r^2)}{4v_p t_{c,0} \text{Sh}_0 D_0 |\delta \mathbf{u}_{\mathbf{p},0}|^2 / \delta u_{p,0}} (\hat{u}_p - \hat{u}) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

In the absence of diameter fluctuations at the injection boundary  $y = 0$ , substitution of Eq. (C.13) in Eq. (C.15), assuming a mean uniform flow, yields the transfer function linking the droplet diameter to the axial gas stream velocity fluctuation :

$$\frac{\hat{D}}{D_0} = \frac{K_B}{K_A} \left( 1 - e^{K_A y / D_0} \right) \frac{\hat{u}}{\delta u_{p,0}} \quad (\text{C.16})$$

where  $K_A$  and  $K_B$  are constant numbers that only depend on the mean flow properties :

$$\begin{aligned} K_A = \frac{i\omega D_0}{v_p} - \frac{(D_i^2 - D_r^2)/D_0}{4v_p t_{c,0} \text{Sh}_0} \\ \times \left( \text{Sh}_0 + 2 - \frac{(\text{Sh}_0 - 2)(2 - C_{Re}) \frac{\delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_{\mathbf{p},0}|^2}}{(i\omega \tau_{v,0} + 1 + \frac{C_{Re} \delta u_{p,0}^2}{|\delta \mathbf{u}_{\mathbf{p},0}|^2})} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$K_B = - \frac{(D_i^2 - D_r^2)(\text{Sh}_0 - 2)i\omega \tau_{v,0}}{4v_p t_{c,0} D_0 \text{Sh}_0 |\delta \mathbf{u}_{\mathbf{p},0}|^2 / \delta u_{p,0}^2} \quad (\text{C.18})$$

The dynamics of the combustion zone boundary  $y_c$  where the droplet diameter has reached the residue diameter  $D = D_r$  is deduced from Eqs. (C.6) and (C.7) :

$$\hat{y}_c = v_p \hat{t}_c = \frac{2t_{c,0} v_p D_0}{D_i^2 - D_r^2} \hat{D} \quad y_{c,0} = v_p t_{c,0} \quad (\text{C.19})$$

where droplet diameter disturbances  $\hat{D}$  are given by Eq. (C.16). Taking the Fourier transform of Eq. (C.9), one finally finds for the resulting heat release rate disturbances :

$$\frac{\hat{q}}{\dot{q}_{D^2,0}} = F_y \hat{y}_c, \quad F_y = \frac{2 \left( 1 - \left( \frac{y-y_{c,0}}{|\hat{y}_c|} \right)^2 \right)^{1/2}}{\pi |\hat{y}_c|} \quad (\text{C.20})$$

This expression yielding the volumetric heat release rate response to the acoustic forcing is nonlinear because the transfer function  $F_y$  depends on the amplitude of the motion of  $y_c$ . This is due to the Dirac distribution appearing in Eq. (C.9). Equation (C.20) thus corresponds to a distributed Flame Describing Function (Noiray et al. (2008)).

### C.3.2 Parametric analysis

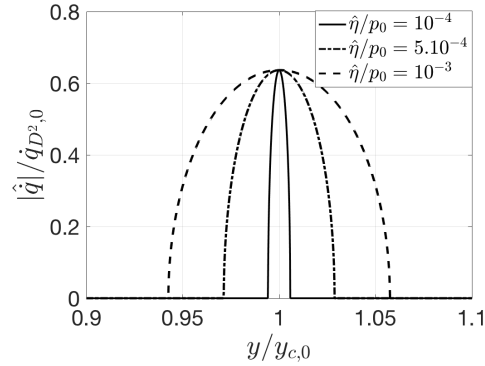
The model derived in the previous section is now used to examine effects of the residual particle diameter  $D_r$  and acoustic pressure amplitude  $\hat{\eta}$  on the motion of the combustion boundary  $\hat{y}_c$  and the resulting heat release rate disturbances  $\hat{q}$ . The input parameters for the calculations are synthesized in Tab. C.1 and are selected to mimic conditions prevailing in a SRM, except  $v_0$  sets to zero to maximize convection effects.

One also chooses here to mimic the modal structure of the acoustic field observed in an acoustically closed-closed chamber, as a SRM chamber, undergoing a self-sustained thermo-acoustic oscillation at  $f = 50$  Hz coupled to the first longitudinal 1L mode, with droplets injected in the transverse direction. The Fourier component  $\hat{u}$  of the axial acoustic velocity vanishes at  $x = 0$  and  $x = L$  and is expressed as (Culick (2006)) :

$$\hat{u} = \frac{-i\hat{\eta}}{a_0\rho_g} \sin(kx) \quad (\text{C.21})$$

where  $\hat{\eta}$  is the acoustic pressure amplitude and  $k = 2\pi f/a_0$  the wave number and  $a_0$  the speed of sound.

Model results are shown in Fig. C.5 for three acoustic pressure levels  $\hat{\eta} = 10^3, 5.10^3$  and  $10^4$  Pa and a residue diameter  $D_r = D_i/2$  equal to half the initial aluminum droplet diameter. The evolution of the modulus of the relative heat release rate fluctuation  $|\hat{q}|/\dot{q}_{D^2,0}$  calculated with Eq. (C.20) is plotted along the  $y$ -axis for a cut at  $x/L = 1/4$ . This figure shows that heat release disturbances associated to droplet lifetime oscillations only take place close to the mean position of the combustion volume boundary  $y_{c,0}$ . The motion amplitude increases as the acoustic pressure level rises in the chamber, whereas



**FIGURE C.5** – Heat release rate fluctuations around the combustion volume boundary  $y_{c,0}$  at  $x/L = 1/4$  for different pressure levels  $\hat{\eta} = 10^3$ ,  $5 \cdot 10^3$  and  $10^4$  Pa. The residue diameter is fixed to  $D_r = D_i/2$ .

the heat release rate fluctuation peak value remains independent of the pressure level.

The impact of the residue diameter is investigated in Fig. C.6 by considering three different residue to initial diameter ratios, and an acoustic pressure oscillation level fixed to  $\hat{\eta} = 10^3$  Pa. The amplitude of the displacement  $\hat{y}_c$  of the combustion boundary increases as the size of the residue diameter  $D_r$  increases. It nonetheless does not vanish even for small residues when  $D_r = D_i/100$  (dashed lines) meaning that even for complete evaporation of the droplets, as for example in the case of liquid hydrocarbon fuel droplets burning in air, a motion of the combustion boundary persists due to droplet lifetime oscillations. For small residue diameters, the resulting heat release fluctuations remain however small at the boundary. For high residue diameters, as for example for aluminum droplet combustion, droplet lifetime oscillations may lead to large heat release rate fluctuations.

## C.4 Application to a cylindrical SRM

The previous model has been derived for a uniform gaseous flow in a 2D context. It can easily be extended to non-uniform flows in 2D axisymmetric geometries, considering slight changes of the analytical formalism, which are not reproduced here for concision. Analytical predictions are compared to numerical flow simulations in a SRM configuration.

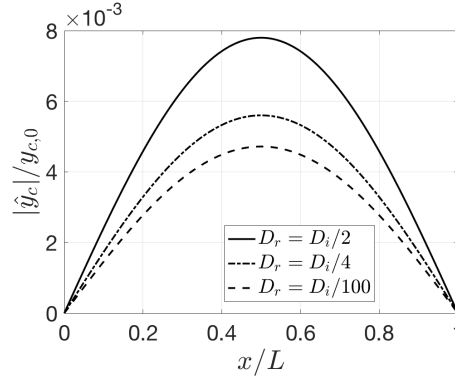
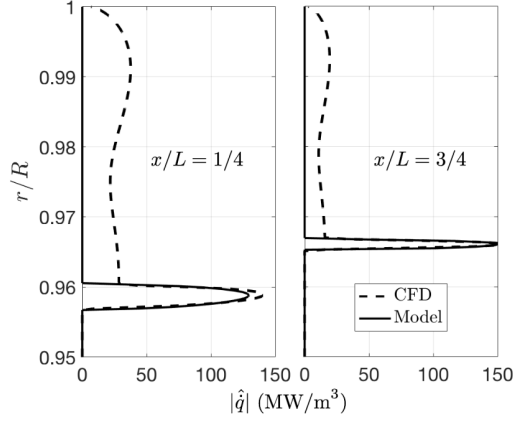


FIGURE C.6 – Modulus of the motion of the combustion volume boundary for different residue diameters  $D_r$ . The acoustic pressure level is fixed to  $\hat{\eta} = 10^3$  Pa.

#### C.4.1 Numerical model

The simulation is carried out in a 2D axisymmetric framework with the numerical model from Gallier and Godfroy (2009). A cylindrical motor, with a radial injection of mass modeling the solid propellant combustion (gas and aluminum droplets) and with a nozzle, is simulated with CPS, an in-house ArianeGroup flow solver (Durand et al. (2000)). The configuration is shown in Fig. C.1. The chamber has a radius  $R = 0.593$  m, a length  $L = 7$  m and a symmetry axis at  $r = 0$ . The nozzle has a throat of radius  $R_t = 0.175$  m, which is located at  $x_t = 7.3$  m away from the motor head-end  $x = 0$ . The computational grid is composed of 360,000 quads with about 600 points in the axial direction and 600 points in the radial direction. The grid is clustered near the propellant burning surface to resolve the aluminum distributed combustion indicated in red in Fig. C.1, with about 20 grid points in the flapping zone (Fig. C.3). The smallest grid spacing at the propellant surface is about 0.1 mm. Gas and aluminum particle properties are taken from Dupays and Vuillot (1998); Gallier and Godfroy (2009). It is worth mentioning that turbulence is not taken into account in this simulation to focus the analysis on the coupling between acoustics and aluminum droplet unsteady combustion.

No-slip conditions are used for the gaseous and particle phases at the wall boundaries. Solid propellant burning ( $r = R$ ) is modeled through the lateral boundary of the numerical domain between  $x = 0$  and  $L$  by injection of gas at a constant mass flow rate with a velocity vector normal to the surface and pointing inward. Only a single class of droplets is considered with an initial diameter  $D_i$  taken from the baseline configuration of Gallier and Godfroy (2009) and the aluminum oxide residue diameter is fixed to  $D_r = D_i/2.4$ . Aluminum particles are injected at the dynamic equilibrium with the gas  $\mathbf{u}_{p,i} \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_r$ .



**FIGURE C.7** – Comparison between numerical flow simulations and analytical results for the modulus  $|\hat{q}|$  of the heat release rate fluctuations at  $x/L = 1/4$  and  $x/L = 3/4$ . Only the contribution originating from the boundary is modeled here.

This configuration is found to be thermo-acoustically stable. A pulsation of 5000 Pa is imposed at the head-end boundary. This forcing level is small enough to assume linear fluctuations of the flow variables.

#### C.4.2 Model validation

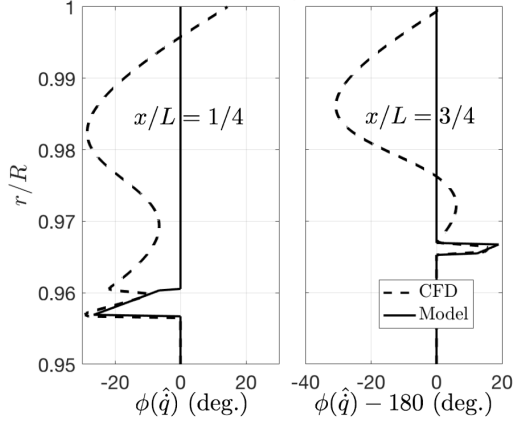
Aluminum droplets are injected uniformly and radially at the solid propellant boundary at  $r = R$  and the aluminum combustion takes place very close to the solid propellant surface as illustrated in red in Fig. C.1. The small thickness of the combustion volume allows to assume a quasi-1D trajectory in the radial direction of the aluminum droplets which are released within the flow.

In a SRM, the mean flow field is not uniform and the longitudinal velocity fluctuations also depend on the radial position within the motor due to the particular structure of the acoustic boundary layer in these systems with mass injection from the lateral walls (Flandro et al. (2000); Culick (2006); Flandro (1995)). Due to these complexities, the expressions derived in the previous section are not valid, but analytical solutions to Eqs. (C.13) and (C.15) can still be obtained assuming a one-dimensional droplet trajectory and neglecting the influence of the droplet diameter fluctuations on the droplet velocity fluctuations.

Equation (C.19) remains unchanged in this new configuration :

$$\hat{r}_c = \frac{2t_{c,0}v_p D_0}{D_i^2 - D_r^2} \hat{D} \quad (\text{C.22})$$

where  $\hat{r}_c$  corresponds to the Fourier component of the radial displacement of



**FIGURE C.8** – Comparison between numerical flow simulations and analytical results for the phase lag  $\phi$  of the heat release rate fluctuations  $\hat{q}$  with respect to the acoustic pressure at  $x/L = 1/4$  and  $x/L = 3/4$ . Only the boundary contribution is modeled here.

the combustion boundary in Fig. C.1 at the frequency  $f$ . The mean position  $r_{c,0}$  of this boundary in a non-uniform flow is :

$$r_{c,0} = R + \frac{2}{D_i^2 - D_r^2} \int_{D_i}^{D_r} t_{c,0} v_p D_0 dD \quad (\text{C.23})$$

The corresponding heat release rate fluctuation is identically given by (no difference between  $2D$  and  $2D$  axisymmetric configurations) :

$$\frac{\hat{q}}{\hat{q}_{D^2,0}} = - \frac{2 \left( 1 - \left( \frac{r - r_{c,0}}{|\hat{r}_c|} \right)^2 \right)^{1/2}}{\pi |\hat{r}_c|} \hat{r}_c \quad (\text{C.24})$$

Figures C.7 and C.8 compare the modulus and phase lag of the heat release rate fluctuations taken from the numerical flow simulation and from Eq. (C.24) at two positions  $x/L = 1/4$  and  $x/L = 3/4$  in the SRM. To be fully consistent, the mean quantities appearing in the different analytical expressions are here taken from the simulation. The phase lag in Fig. C.8 is expressed with respect to the acoustic pressure. The numerical data from the flow solver are well reproduced by the analytical model at the end of the combustion zone (where the boundary is oscillating) at both positions  $x/L = 1/4$  and  $x/L = 3/4$  in the motor chamber. One recalls that the heat release rate fluctuations taking place inside the combustion volume are voluntarily not considered in the analytical model developed in this study. The same match between analytical and numerical data is found at the other positions in the SRM confirming that the model well reproduce the flow simulations and that droplet lifetime oscillations

constitute a source of unsteady heat release at the boundary of the combustion volume. This contribution to the overall heat release oscillation is found to be particularly high in simulations carried out with aluminum droplets in which combustion is abruptly quenched (Genot et al. (2017)).

## C.5 Conclusion

Distributed combustion of fuel droplets has been modeled by the  $D^2$  law and is abruptly stopped when the droplet diameter falls below a residual diameter  $D_r$ . This is used to model the existence of combustion residues, as the ones produced by aluminum burning droplets. It has been shown that the response of this model to acoustic disturbances leads to large heat release rate oscillations. These oscillations have been found to be related to oscillations of the lifetime of the burning droplets leading to a motion of the combustion volume boundary. A series of analytical expressions have been derived for the fluctuations of the droplet lifetime as a function of the droplet diameter fluctuations, which have been themselves related to acoustic velocity fluctuations of the gaseous phase. For droplets released in the transverse direction to the acoustic forcing, it has been demonstrated that oscillations of the droplet lifetime lead to a motion of the iso-line  $D = D_r$ . If the heat release rate at this iso-line remains finite, high levels of fluctuations can be observed. The heat release rate response associated to the motion of this boundary has been modeled by an Heaviside function and a distributed Flame Describing Function in the Fourier space. Finally, this model has been successfully compared with numerical flow simulations in a solid rocket motor configuration in which the combustion of acoustically perturbed droplets may be quenched.

## Acknowledgments

This work is cofunded by the French space agency Centre National d'Etudes Spatiales (CNES) and ArianeGroup.

# Références

- Annamalai, K., W. Ryan, and S. Dhanapalan (1994). Interactive processes in gasification and combustion—part iii : Coal/char particle arrays, streams and clouds. *Progress in Energy and Combustion Science* 20(6), 487–618. (p. 40)
- Anthoine, J. (2001). *Experimental and numerical study of aeroacoustic phenomena in large solid propellant boosters, with application to the Ariane 5 solid rocket motor*. Ph. D. thesis, Université Libre de Bruxelles. (p. 18)
- Anthoine, J. (April 2013). Solid propellant pressure oscillations. *VKI / STO-AVT-206 Lecture Series on Fluid Dynamics Associated to Launcher Developers, von Kármán Inst., Rhode-Saint-Genèse, Belgium*. (p. 17)
- Anthoine, J., J. Buchlin, and A. Hirschberg (2002). Effect of nozzle cavity on resonance in large SRM : theoretical modeling. *Journal of Propulsion and Power* 18(2), 304–311. (p. 19)
- Apte, S. and V. Yang (2001). Unsteady flow evolution in porous chamber with surface mass injection, part 1 : Free oscillation. *AIAA Journal* 39(8), 1577–1586. (p. 56)
- Apte, S. and V. Yang (2002). Unsteady flow evolution in porous chamber with surface mass injection, part 2 : Acoustic excitation. *AIAA Journal* 40(2), 244–253. (p. 56, 99)
- Apte, S. and V. Yang (2003). A large-eddy simulation study of transition and flow instability in a porous-walled chamber with mass injection. *Journal of Fluid Mechanics* 477, 215–225. (p. 116)
- Avalon, G., G. Casalis, and J. Griffond (1998). Flow instabilities and acoustic resonance of channels with wall injection. In *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, pp. 3218. (p. 19)
- Babuk, V., V. Vasilyev, and M. Malakhov (1999). Condensed combustion products at the burning surface of aluminized solid propellant. *Journal of Propulsion and Power* 15(6), 783–793. (p. 23)
- Ballereau, S., F. Godfroy, J. Guery, and D. Ribereau (2003). Assessment on analysis and prediction method applied on thrust oscillations of Ariane 5



- solid rocket motor. *Powered Flight- The Next Century*. (p. 17, 18, 92)
- Ballereau, S., F. Godfroy, O. Orlandi, and D. Ballion (2006). Numerical simulations and searching methods of thrust oscillations for solid rocket motors. In *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, pp. 4425. (p. 18, 92)
- Beckstead, M. and A. Butcher (1974). The velocity coupled T-burner. In *12th Aerospace Sciences Meeting*, pp. 200. (p. 24)
- Beckstead, M. W. (May 2002). A summary of aluminum combustion. *VKI special course on "internal aerodynamics in solid rocket propulsion"*. Report number *RTO-EN-023*, von Kármán Inst., Rhode-Saint-Genèse, Belgium. (p. 11, 12, 13, 24, 39, 44, 45, 46, 114, 226)
- Beddini, R. A. (1986). Injection-induced flows in porous-walled ducts. *AIAA Journal* 24(11), 1766–1773. (p. 56, 57)
- Bell, W., B. Daniel, and B. Zinn (1973). Experimental and theoretical determination of the admittances of a family of nozzles subjected to axial instabilities. *Journal of Sound and Vibration* 30(2), 179–190. (p. 108)
- Belyaev, A., Y. V. Frolov, and A. Korotkov (1968). Combustion and ignition of particles of finely dispersed aluminum. *Combustion, Explosion and Shock Waves* 4(3), 182–185. (p. 11)
- Bigot, B., Y. d'Escatha, and L. Collet-Billon (18 Mai 2009). L'enjeu d'une politique européenne de lanceurs : assurer durablement à l'europe un accès autonome à l'espace. Technical report, Rapport public à la demande du premier ministre français. (p. 4)
- Binauld, Q., J.-M. Lamet, L. Tessé, P. Rivière, and A. Soufiani (2019). Numerical simulation of radiation in high altitude solid propellant rocket plumes. *Acta Astronautica* 158, 351–360. (p. 13)
- Binauld, Q., P. Rivière, and A. Soufiani (2018). A note on radiation preheating of some hydrocarbons by combustion products. *Combustion and Flame* 194, 128–134. (p. 13)
- Bind, V. K., S. Roy, and C. Rajagopal (2012). A reaction engineering approach to modeling dust explosions. *Chemical engineering journal* 207, 625–634. (p. 39, 40, 226)
- Błaszczuk, J. (1991). Acoustically disturbed fuel droplet combustion. *Fuel* 70(9), 1023–1025. (p. 225)
- Blomshield, F. (2001). Historical perspective of combustion instability in motors-case studies. In *37th Joint Propulsion Conference and Exhibit*, pp. 3875. (p. 17, 24)
- Bonciolini, G., E. Boujo, and N. Noiray (2017). Output-only parameter identification of a colored-noise-driven van-der-pol oscillator : Thermoacoustic instabilities as an example. *Physical Review E* 95(6), 062217. (p. 180, 183)

- Borghì, R. and M. Destriau (1998). *Combustion and flame : chemical and physical principles*. Editions Technip. (p. 40)
- Braconnier, A., C. Chauveau, F. Halter, and S. Gallier (2018). Detailed analysis of combustion process of a single aluminum particle in air using an improved experimental approach. *International Journal of Energetic Materials and Chemical Propulsion*. (p. 11, 12, 13, 114)
- Braconnier, A., S. Gallier, C. Chauveau, and F. Halter (2018). Combustion of a single aluminum droplet burning in O<sub>2</sub>/CO<sub>2</sub>/N<sub>2</sub> mixtures. In *37th International Symposium on Combustion*. (p. 13)
- Brooks, K. P. and M. W. Beckstead (1995). Dynamics of aluminum combustion. *Journal of Propulsion and Power* 11(4), 769–780. (p. 11, 17, 24, 43, 45, 225, 231)
- Brown, R., R. Dunlap, S. Young, and R. Waugh (1981). Vortex shedding as a source of acoustic energy in segmented solid rockets. *Journal of Spacecraft and Rockets* 18(4), 312–319. (p. 18, 19)
- Bucher, P., R. Yetter, F. Dryer, E. Vicenzi, T. Parr, and D. Hanson-Parr (1999). Condensed-phase species distributions about al particles reacting in various oxidizers. *Combustion and Flame* 117(1-2), 351–361. (p. 13)
- Bucher, P., R. A. Yetter, F. L. Dryer, T. P. Parr, and D. Hanson-Parr (1998). Plif species and ratiometric temperature measurements of aluminum particle combustion in O<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub> and N<sub>2</sub>O oxidizers, and comparison with model calculations. *Symposium (International) on Combustion* 27(2), 2421–2429. (p. 41)
- Bucher, P., R. A. Yetter, F. L. Dryer, T. P. Parr, D. M. Hanson-Parr, and E. P. Viceni (1996). Flames structure measurement of single, isolated aluminum particles burning in air. In *Symposium (International) on Combustion*, Volume 26, pp. 1899–1908. Elsevier. (p. 13, 41)
- Candel, S. (1990). *Mécanique des fluides*. Dunod. (p. 107)
- Candel, S. (2002). Combustion dynamics and control : Progress and challenges. *Proceedings of the combustion institute* 29(1), 1–28. (p. 29, 30)
- Candel, S., D. Durox, S. Ducruix, A.-L. Birbaud, N. Noiray, and T. Schuller (2009). Flame dynamics and combustion noise : progress and challenges. *International Journal of Aeroacoustics* 8(1), 1–56. (p. 28)
- Candel, S., D. Durox, T. Schuller, N. Darabiha, L. Hakim, and T. Schmitt (2013). Advances in combustion and propulsion applications. *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 40, 87–106. (p. 225)
- Cantrell, R. and R. Hart (1964). Interaction between sound and flow in acoustic cavities : Mass, momentum, and energy considerations. *The Journal of the Acoustical Society of America* 36(4), 697–706. (p. 29)
- Carvalho, J., M. McQuay, and P. Gotac (1997). The interaction of liquid

- reacting droplets with the pulsating flow in a Rijke-tube combustor. *Combustion and Flame* 108(1-2), 87–103. (p. 81, 225)
- Casalis, G., G. Avalon, and J.-P. Pineau (1998). Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls. *Physics of Fluids* 10(10), 2558–2568. (p. 19)
- Casalis, G., G. Boyer, and E. Radenac (2011). Some recent advances in the instabilities occurring in long solid rocket motors. In *47th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, pp. 5642. (p. 33, 88, 155, 157, 158, 163, 166, 167, 168, 171, 172)
- Cesco, N. (1997). *Etude et modélisation de l'écoulement diphasique à l'intérieur des propulseurs à poudre*. Ph. D. thesis, Toulouse, ENSAE. (p. 43, 44)
- Chedevergne, F. (2007). *Instabilités intrinsèques des moteurs à propergol solide*. Ph. D. thesis, Toulouse, ENSAE. (p. 19)
- Chiu, H. H., H. Y. Kim, and E. J. Croke (1982). Internal group combustion of liquid droplets. *Symposium (international) on combustion* 19(1), 971–980. (p. 40)
- Chiu, H. H. and T. M. Liu (1977). Group combustion of liquid droplets. *Combustion Science and Technology* 17(3-4), 127–142. (p. 40)
- Chu, W.-W., V. Yang, and J. Majdalani (2003). Premixed flame response to acoustic waves in a porous-walled chamber with surface mass injection. *Combustion and Flame* 133(3), 359–370. (p. 99)
- Couton, D., F. Plourde, and S. Doan-Kim (1996). Cold gas simulation of a solid propellant rocket motor. *AIAA Journal* 34(12), 2514–2522. (p. 18)
- Crighton, D., A. Dowling, J. F. Williams, M. Heckl, and F. Leppington (1992). Thermoacoustic sources and instabilities. In *Modern Methods in Analytical Acoustics*, pp. 378–405. Springer. (p. 27)
- Crocco, L. (1969). Research on combustion instability in liquid propellant rockets. In *Symposium (International) on Combustion*, Volume 12, pp. 85–99. Elsevier. (p. 30)
- Crocco, L. and S.-I. Cheng (1956). Theory of combustion instability in liquid propellant rocket motors. Technical report, Princeton Univ NJ. (p. 108)
- Crowe, C. T. and P. G. Willoughby (1967). A study of particle growth in a rocket nozzle. *AIAA Journal* 5(7), 1300–1304. (p. 187)
- Culick, F. (1968). A review of calculations for unsteady burning of a solid propellant. *AIAA Journal* 6(12), 2241–2255. (p. 17)
- Culick, F. (1975). Stability of three-dimensional motions in a combustion chamber. *Combustion Science and Technology* 10(3-4), 109–124. (p. 105)
- Culick, F. (2006). *Unsteady motions in combustion chambers for propulsion systems*. AGARDograph, NATO/RTO-AG-AVT-039. (p. 5, 6, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 31, 96, 124, 139, 140, 225, 233, 236)

- Culick, F. E. C. (1966). Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket. *AIAA Journal* 4(8), 1462–1464. (p. 14, 15, 96, 99, 190)
- Culick, F. E. C. and V. Yang (1992). Prediction of the stability of unsteady motions in solid propellant rocket motors. In L. De Luca, E. W. Price, and M. Summerfield (Eds.), *Nonsteady burning and combustion stability of solid propellants*, Volume 143, Chapter 18, pp. 719–779. Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA Washington, DC. (p. 20, 23, 24, 30, 54, 96, 99, 102, 103, 105, 108, 139, 140)
- Davenas, A. (2012). *Solid rocket propulsion technology*. Newnes. (p. 5)
- DesJardin, P. E., J. D. Felske, and M. D. Carrara (2005). Mechanistic model for aluminum particle ignition and combustion in air. *Journal of Propulsion and Power* 21(3), 478–485. (p. 43)
- Devillers, R. W., G. Le Besnerais, M. Nugue, and N. Cesco (2017). Experimental analysis of solid-propellant surface during combustion with shadowgraphy images : new tools to assist aluminum-agglomeration modelling. In *7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences, Milan (Italy)*. (p. 23)
- Dreizin, E. L. (1996). Experimental study of stages in aluminium particle combustion in air. *Combustion and Flame* 105(4), 541–556. (p. 13)
- Dupays, J. (1996). *Contribution à l'étude du rôle de la phase condensée dans la stabilité d'un propulseur à propergol solide pour lanceur spatial*. Ph. D. thesis, Toulouse, INPT. (p. 18)
- Dupays, J. (2009). Synthèse sur la modélisation de la combustion des gouttes d'aluminium. *ONERA, Rapport technique RT 9/14116 DEFA*. (p. 10)
- Dupays, J. and F. Vuillot (1998). Propagation of an acoustic wave in a two-phase reactive medium. In *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, pp. 3696. (p. 149, 235)
- Durand, P., B. Vieille, H. Lambare, P. Vuillermoz, G. Boure, P. Steinfeld, F. Godfroy, and J. Guery (June 2000). CPS-A three dimensional CFD code devoted to space propulsive flows. *AIAA paper 2000*, 3864. (p. 53, 56, 116, 213, 235)
- Durox, D., T. Schuller, N. Noiray, A.-L. Birbaud, and S. Candel (2009). Rayleigh criterion and acoustic energy balance in unconfined self-sustained oscillating flames. *Combustion and Flame* 156(1), 106–119. (p. 28, 29, 64, 76, 228)
- Duterque, J., R. Hilbert, and G. Lengellé (January 1999). Agglomération et combustion de l'aluminium dans les propergols solides. *ONERA, Rapport technique 3/6274 DMAE/Y/DEFA*. (p. 9, 41, 46)
- Eckstein, J., E. Freitag, C. Hirsch, T. Sattelmayer, R. Von der Bank, and T. Schilling (2005). Forced low-frequency spray characteristics of a generic

- airblast swirl diffusion burner. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 127(2), 301–306. (p. 225)
- ESA (24 November 2005). Boosters (EAP). [http://www.esa.int/Our\\_Activities/Launchers/Launch\\_vehicles/Boosters\\_EAP](http://www.esa.int/Our_Activities/Launchers/Launch_vehicles/Boosters_EAP). Accès : le 23 Mai 2016. (p. 5)
- Fabignon, Y., J. Dupays, G. Avalon, F. Vuillot, N. Lupoglazoff, G. Casalis, and M. Prévost (2003). Instabilities and pressure oscillations in solid rocket motors. *Aerospace science and technology* 7(3), 191–200. (p. 18, 19)
- Fabignon, Y., J. F. Trubert, D. Lambert, O. Orlandi, and J. Dupays (2003). Combustion of aluminum particles in solid rocket motors. In *39th AIAA/ASME/SAE/ASEE*, pp. 4807. (p. 13, 23, 114)
- Flandro, G., W. Cai, and V. Yang (2000). Turbulent transport in rocket motor unsteady flowfield. *Solid Propellant Chemistry, Combustion, and Motor Interior Ballistics* 185, 837–858. (p. 21, 22, 98, 123, 124, 137, 138, 146, 147, 189, 236)
- Flandro, G. A. (1995). Effects of vorticity on rocket combustion stability. *Journal of Propulsion and Power* 11(4), 607–625. (p. 21, 96, 98, 99, 236)
- Flandro, G. A. and J. Majdalani (2003). Aeroacoustic instability in rockets. *AIAA Journal* 41(3), 485–497. (p. 96)
- Gallier, S. (2014). *Simulation numérique de suspensions frictionnelles. Application aux propergols solides*. Ph. D. thesis, Université Nice Sophia Antipolis. (p. 6)
- Gallier, S., B. Briquet, and M. Yiao (2019). Aluminum combustion can drive instabilities in solid rocket motors : T-burner study. *Journal of Propulsion and Power* 35(1), 159–172. (p. 24, 25)
- Gallier, S. and F. Godfroy (2009). Aluminum combustion driven instabilities in solid rocket motors. *Journal of propulsion and power* 25(2), 509–521. (p. 17, 20, 21, 31, 32, 33, 39, 41, 48, 49, 54, 59, 60, 66, 78, 88, 92, 97, 114, 115, 116, 119, 122, 123, 125, 135, 139, 147, 148, 149, 153, 155, 156, 157, 158, 166, 167, 170, 171, 225, 226, 227, 228, 231, 235)
- Gallier, S., M. Prevost, J. Hijlkema, and M. Roumy (2009). Effects of cavity on thrust oscillations in subscale solid rocket motors. In *45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, pp. 5253. (p. 19)
- Gallier, S., E. Radenac, and F. Godfroy (2009). Thermoacoustic instabilities in solid rocket motors. In *45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, pp. 5252. (p. 52)
- Gallier, S., F. Sibe, and O. Orlandi (2011). Combustion response of an aluminum droplet burning in air. *Proceedings of the Combustion Insti-*

- tute* 33(2), 1949–1956. (p. 31, 32, 41, 51, 63, 68, 78, 97, 114, 119, 121, 225, 228, 231)
- Gallier, S., G. Sire, and M. Plaud (2018). Bridging rotational and irrotational theory for linear stability predictions of solid rocket motors. In *2018 Joint Propulsion Conference*, pp. 4787. (p. 99, 109, 110)
- Garcia-Schäfer, J. and A. Linan (2001). Longitudinal acoustic instabilities in slender solid propellant rockets : linear analysis. *Journal of Fluid Mechanics* 437, 229–254. (p. 98)
- Genot, A., S. Gallier, and T. Schuller (2019). Thermo-acoustic instabilities driven by fuel droplet lifetime oscillations. *Proceedings of the Combustion Institute* 37(4), 5359–5366. (p. 13, 119, 126)
- Genot, A., S. Gallier, and T. Schuller (July 2017). A numerical analysis of the aluminium combustion driven instability in solid rocket motors. In *7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences, Milan (Italy)*. (p. 114, 117, 126, 226, 228, 238)
- Giuliani, F., P. Gajan, O. Diers, and M. Ledoux (2002). Influence of pulsed entries on a spray generated by an air-blast injection device : An experimental analysis on combustion instability processes in aeroengines. *Proceedings of the Combustion Institute* 29(1), 91–98. (p. 225)
- Goncalves de Miranda, F. (2000). *Étude numérique de l'écoulement instationnaire diphasique dans les propulseurs à propergol solide d'Ariane 5*. Ph. D. thesis, Toulouse, ENSAE. (p. 18)
- Grace, J. R., R. Clift, and M. E. Weber (1978). Bubbles, drops and particles. *Academic Press, New York*. (p. 55, 231)
- Griffond, J. and G. Casalis (2001). On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow. *Physics of Fluids* 13(6), 1635–1644. (p. 19)
- Guéry, J., S. Gallier, P. Della Pietra, F. Godfroy, A. Guichard, P. Le Breton, and D. Ribéreau (2001). Numerical simulation of thrust oscillations of segmented ap/al solid rocket motors. In *International Astronautical Congress, IAF-01-S, Volume 2*. (p. 92)
- Hakim, L., T. Schmitt, S. Ducruix, and S. Candel (2015). Dynamics of a transcritical coaxial flame under a high-frequency transverse acoustic forcing : Influence of the modulation frequency on the flame response. *Combustion and Flame* 162(10), 3482–3502. (p. 225)
- Hirschberg, A. (2007). Introduction to aero-acoustics of internal flows. In *Basics of Aeroacoustics and Thermoacoustics*. Von Karman Institute for Fluid Dynamics. (p. 83, 121)
- Hirschberg, L., T. Schuller, J. Collinet, C. Schram, and A. Hirschberg (2018). Analytical model for the prediction of pulsations in a cold-gas scale-model

- of a solid rocket motor. *Journal of Sound and Vibration* 419C, 452–468. (p. 19)
- Hirschberg, L., T. Schuller, C. Schram, J. Collinet, M. Yiao, and A. Hirschberg (2017). Interaction of a vortex with a contraction in a 2-dimensional channel : incompressible flow prediction of sound pulse. *23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 3701. (p. 19)
- Hulin, A., L. Lequette, P. Steinfeld, and E. Znaty (1995). Thesee : A tool for modeling aerothermochemistry of cryotechnic engines. *Conference on Propulsive Flows in Space Transportation Systems, Bordeaux, France*. (p. 213)
- Javed, A. and D. Chakraborty (2013). Damping coefficient prediction of solid rocket motor nozzle using computational fluid dynamics. *Journal of Propulsion and Power* 30(1), 19–23. (p. 109)
- Karnesky, A. and S. Colucci (1975). Recent occurrences of combustion instability in solid rocket motors-an overview. *Journal of Spacecraft and Rockets* 12(1), 33–38. (p. 5, 13, 24, 31)
- Kerstein, A. R. and C. K. Law (1982). Percolation in combusting sprays i : Transition from cluster combustion to percolate combustion in non-premixed sprays. *Symposium (International) on Combustion* 19(1), 961–969. (p. 40, 41)
- Kitano, T., J. Nishio, R. Kurose, and S. Komori (2014). Effects of ambient pressure, gas temperature and combustion reaction on droplet evaporation. *Combustion and Flame* 161(2), 551–564. (p. 40)
- Kuentzmann, P. (1973). Formation de la phase condensée dans un propulseur à propergol solide métallisé. *ONERA, NT N 210*. (p. 46)
- Kuentzmann, P. (2004). Introduction to solid rocket propulsion. Technical report, DTIC Document. (p. 7, 14, 56)
- Kuo, K. K. (1986). *Principles of combustion*. (p. 41, 50)
- Lacassagne, L. (2017). *Simulations et analyses de stabilité linéaire du détachement tourbillonnaire d'angle dans les moteurs à propergol solide*. Ph. D. thesis, Université de Toulouse. (p. 17, 18)
- Law, C. K. (1973). A simplified theoretical model for the vapor-phase combustion of metal particles. *Combustion Science and Technology* 7(5), 197–212. (p. 43)
- Law, C. K. (2006). *Combustion physics*. Cambridge university press. (p. 41)
- Lengelle, G., J. Duterque, and J. Trubert (2000). Physico-chemical mechanisms of solid propellant combustion. *Solid propellant chemistry, combustion, and motor interior ballistics* 185, 287–332. (p. 6, 8, 10)
- Lengellé, G., J. Duterque, and J. Trubert (27-31 May 2002). Combustion of solid propellants. Technical report, from Internal Aerodynamics of Solid

- Rocket Motor, Special Course at the Von Karman Institute for Fluid Dynamics. (p. 8, 9, 10, 11)
- Li, H., C. D. Rosebrock, Y. Wu, T. Wriedt, and L. Mädler (2018). Single droplet combustion of precursor/solvent solutions for nanoparticle production : Optical diagnostics on single isolated burning droplets with micro-explosions. *Proceedings of the Combustion Institute*. (p. 13, 14, 114)
- Lieuwen, T. C. and V. Yang (2005). Combustion instabilities in gas turbine engines (operational experience, fundamental mechanisms and modeling). *Progress in astronautics and aeronautics*. (p. 225)
- Loth, E. (2000). Numerical approaches for motion of dispersed particles, droplets and bubbles. *Progress in energy and combustion science* 26(3), 161–223. (p. 187)
- Lupoglazoff, N., F. Vuillot, J. Dupays, and Y. Fabignon (2002). Numerical simulations of the unsteady flow inside segmented solid-propellant motors with burning aluminum particles. In *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, pp. 784. (p. 18, 44, 54, 114, 115)
- Majdalani, J., G. Flandro, and S. Fischbach (2005). Some rotational corrections to the acoustic energy equation in injection-driven enclosures. *Physics of fluids* 17(7), 074102. (p. 96)
- Majdalani, J. and W. Van Moorhem (1997). Multiple-scales solution to the acoustic boundary layer in solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power* 13(2), 186–193. (p. 21)
- Malhotra, S. (2004). *On combustion instability in solid rocket motors*. Ph. D. thesis, California Institute of Technology. (p. 221)
- Marble, F. E. (1963). Dynamics of a gas containing small solid particles. In *Proceedings of the 5th AGARD Combustion and Propulsion Symposium*. Pergamon Press, New York. (p. 54, 112, 215)
- Marion, M., C. Chauveau, and I. Gökalp (1996). Studies on the ignition and burning of levitated aluminum particles. *Combustion science and technology* 115(4-6), 369–390. (p. 84)
- Matveev, K. I. (2005). Reduced-order modeling of vortex-driven excitation of acoustic modes. *Acoustics Research Letters Online* 6(1), 14–19. (p. 19)
- McKinney, D. and D. Dunn-Rankin (2000). Acoustically driven extinction in a droplet stream flame. *Combust. Sci. Technol.* 161(1), 27–48. (p. 226)
- Méry, Y. (2017). Impact of heat release global fluctuations and flame motion on transverse acoustic wave stability. *Proceedings of the Combustion Institute* 36(3), 3889–3898. (p. 225, 230)
- Méry, Y., L. Hakim, P. Scoufflaire, L. Vingert, S. Ducruix, and S. Candel (2013). Experimental investigation of cryogenic flame dynamics under



- transverse acoustic modulations. *Comptes Rendus Mécanique* 341(1-2), 100–109. (p. 225)
- Mikhail, M. N. and M. R. El-Tantawy (1994). The acoustic boundary layers : a detailed analysis. *Journal of computational and applied mathematics* 51(1), 15–36. (p. 21)
- Moeck, J. P., D. Durox, T. Schuller, and S. Candel (2018). Nonlinear thermoacoustic mode synchronization in annular combustors. *Proceedings of the Combustion Institute*. (p. 180, 183)
- Nakamura, M., F. Akamatsu, R. Kurose, and M. Katsuki (2005). Combustion mechanism of liquid fuel spray in a gaseous flame. *Physics of Fluids* 17(12), 123301. (p. 40)
- Naumann, Z. and L. Schiller (1935). A drag coefficient correlation. *Z. Ver Deutsch. Ing* 77, 318–323. (p. 49, 55)
- Nicoud, F. and T. Poinsot (2005). Thermoacoustic instabilities : Should the Rayleigh criterion be extended to include entropy changes? *Combustion and Flame* 142(1-2), 153–159. (p. 28, 30)
- Noiray, N., M. Bothien, and B. Schuermans (2011). Investigation of azimuthal staging concepts in annular gas turbines. *Combustion Theory and Modelling* 15(5), 585–606. (p. 180, 183)
- Noiray, N., D. Durox, T. Schuller, and S. Candel (2008). A unified framework for nonlinear combustion instability analysis based on the flame describing function. *Journal of Fluid Mechanics* 615, 139–167. (p. 30, 233)
- Orlandi, O., M. Plaud, F. Godfroy, S. Larrieu, and N. Cesco (July 2017). Aluminium droplets combustion and SRM instabilities. In *7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences, Milan (Italy)*. (p. 18, 19, 24, 27, 31, 225, 226)
- O'Rourke, P. J. (1981). Collective drop effects on vaporizing liquid sprays. Technical report, Los Alamos National Lab., NM (USA). (p. 187)
- Plaud, M. (2016). Manuel utilisateur bilacou. Technical report, Document interne Herakles. (p. 108)
- Poinsot, T. and D. Veynante (2005). *Theoretical and numerical combustion*. RT Edwards, Inc. (p. 28, 29)
- Polifke, W. (2015). Six lectures on thermoacoustic combustion instability. In *21st CISM-IUTAM Int. Summer School on Measurement, Analysis and Passive Control of Thermoacoustic Oscillations*, pp. 87–Seiten. (p. 30)
- Powell, M. S., I. W. Gunduz, W. Shang, J. Chen, S. F. Son, Y. Chen, and D. R. Guildenbecher (2018). Agglomerate sizing in aluminized propellants using digital inline holography and traditional diagnostics. *Journal of Propulsion and Power*, 1–13. (p. 13)
- Price, E. and R. Sigman (2000). Combustion of aluminized solid propellants. *Solid propellant chemistry, combustion, and motor interior ballistics(A*

- 00-36332 09-28), Reston, VA, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. (*Progress in Astronautics and Aeronautics*. 185, 663–687. (p. 9)
- Ranz, W. E. and W. R. Marshall (1952). Evaporation from drops. *Chemical Engineering Progress* 48(3), 141–146. (p. 32, 47, 51, 68, 74, 78, 83, 114, 227)
- Raun, R. and M. Beckstead (1993). A numerical model for temperature gradient and particle effects on Rijke burner oscillations. *Combustion and flame* 94(1-2), 1–24. (p. 24)
- Renksizbulut, M. and M. Yuen (1983). Experimental study of droplet evaporation in a high-temperature air stream. *Journal of heat transfer* 105(2), 384–388. (p. 50)
- Roh, T.-S., I.-S. Tseng, and V. Yang (1995). Effects of acoustic oscillations on flame dynamics of homogeneous propellants in rocket motors. *Journal of Propulsion and Power* 11(4), 640–650. (p. 99)
- Rosenband, V. (2004). Thermo-mechanical aspects of the heterogeneous ignition of metals. *Combustion and Flame* 137(3), 366–375. (p. 10)
- Salita, M. (1988). Quench bomb investigation of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  formation from solid rocket propellants (part ii) : Analysis of data. *25th JANNAF Combustion Meeting*, 185–197. (p. 117)
- Salita, M. (1995). Deficiencies and requirements in modeling of slag generation in solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power* 11(1), 10–23. (p. 14, 84)
- Sattelmayer, T., M. Schmid, and M. Schulze (2015). Impact of injector mass flow fluctuations on combustion dynamics in liquid engines. *Journal of Spacecraft and Rockets*. (p. 225, 230)
- Schiller, L. and A. Naumann (1933). Über die grundlegenden berechnungen bei der schwerkraftaufbereitung. *Z. Ver. Dtsch. Ing* 77(12), 318–320. (p. 49, 55, 115)
- Schuermans, B. (2003). Modeling and control of thermoacoustic instabilities. Technical report, EPFL. (p. 30)
- Schwarzkopf, J. D., M. Sommerfeld, C. T. Crowe, and Y. Tsuji (2011). *Multiphase flows with droplets and particles*. CRC press. (p. 40)
- Shu, P., R. Sforzini, and W. Foster Jr. (1986). Vortex shedding from solid rocket propellant inhibitors. In *22nd Joint Propulsion Conference*, pp. 1418. (p. 18)
- Simoës, M. (2006). *Modélisation eulérienne de la phase dispersée dans les moteurs à propergol solide, avec prise en compte de la pression particulière*. Ph. D. thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse. (p. 18, 19, 20)

- Sirignano, W. A. (1999). *Fluid dynamics and transport of droplets and sprays*. Cambridge University Press. (p. 41)
- Spalding, D. B. (1951). Combustion of fuel particles. *Fuel* 30(1), 121–130. (p. 41)
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press. (p. 178, 180, 182, 183)
- Sujith, R. (2005). An experimental investigation of interaction of sprays with acoustic fields. *Experiments in Fluids* 38(5), 576–587. (p. 81, 225)
- Sujith, R., G. Waldherr, J. Jagoda, and B. Zinn (2000). Experimental investigation of the evaporation of droplets in axial acoustic fields. *Journal of Propulsion and Power* 16(2), 278–285. (p. 52, 81, 121)
- Tanabe, M., T. Morita, K. Aoki, K. Satoh, T. Fujimori, and J. Sato (2000). Influence of standing sound waves on droplet combustion. *Proceedings of the Combustion institute* 28(1), 1007–1013. (p. 226)
- Taylor, G. (1956). Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Volume 234, pp. 456–475. The Royal Society. (p. 14, 190)
- Temkin, S. and R. A. Dobbins (1966). Attenuation and dispersion of sound by particulate-relaxation processes. *The Journal of the Acoustical Society of America* 40(2), 317–324. (p. 5, 13, 24, 105, 124, 149, 188)
- Tissier, P., F. Godfroy, and P. Jacquemin (1992). Simulation of three dimensional flows inside solid propellant rocketmotors using a second order finite volume method-application to the study of unstable phenomena. In *28th Joint Propulsion Conference and Exhibit*, pp. 3275. (p. 213)
- Traineau, J., M. Prévost, F. Vuillot, P. Le Breton, J. Cuny, N. Preioni, R. Bec, J. Traineau, M. Prevost, F. Vuillot, et al. (1997). A subscale test program to assess the vortex shedding driven instabilities in segmented solid rocket motors. In *33rd Joint Propulsion Conference and Exhibit*, pp. 3247. (p. 18)
- Varapaev, V. and V. Yagodkin (1969). Flow stability in a channel with porous walls. *Fluid Dynamics* 4(5), 60–62. (p. 56, 57)
- Vargel, C. (2005). Propriétés générales de l'aluminium et de ses alliages. *Techniques de l'ingénieur. Matériaux métalliques* (M4661). (p. 48, 49)
- Vetel, J. (2001). *Interaction des structures pariétales sur le développement instationnaire d'écoulements cisailés en milieu confiné : rôle de l'injection différentielle*. Ph. D. thesis, Poitiers. (p. 18)
- Vieille, P. (1893). Etude sur le mode de combustion des substances explosives. *Paris, France : Gauthier-Villars*. (p. 7, 9)

- Vuillot, F. (1995). Vortex-shedding phenomena in solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power* 11(4), 626–639. (p. 17, 19, 21)
- Vuillot, F. and G. Casalis (2004). Motor flow instabilities-part 1. Technical report, DTIC Document. (p. 108)
- Vuillot, F. and P. Kuentzmann (1995). Programme de R & T ASSM (aerodynamics of segmented solid motors). *Tiré à part—Office national d'études et de recherches aérospatiales*. (p. 44)
- Vuillot, F. and N. Lupoglazoff (1996). Combustion and turbulent flow effects in 2-D unsteady navier-stokes simulations of oscillatory rocket motors. *AIAA Paper 96 884*, 15–18. (p. 23)
- Widener, J. and M. Beckstead (1998). Aluminum combustion modeling in solid propellant combustion products. In *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, pp. 3824. (p. 45)
- Yetter, R. A., G. A. Risha, and S. F. Son (2009). Metal particle combustion and nanotechnology. *Proceedings of the Combustion Institute* 32(2), 1819–1838. (p. 9)
- Zarko, V. E. and O. G. Glotov (2013). Formation of al oxide particles in combustion of aluminized condensed systems. *Science and Technology of Energetic Materials* 74(6), 139–143. (p. 44)
- Zhu, M., A. Dowling, and K. Bray (2001). Self-excited oscillations in combustors with spray atomizers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123(4), 779–786. (p. 121, 231)
- Zhu, M., A. Dowling, and K. Bray (2002). Forced oscillations in combustors with spray atomizers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 124(1), 20–30. (p. 121, 225, 231)





**Titre :** Instabilités thermoacoustiques dans les moteurs à propergol solide

**Mots clés :** Modélisation d'ordre réduit, Thermoacoustique, Aluminium, Ecoulement Diphasique, Moteurs à propergol solide

**Résumé :** Dans un moteur à propergol solide, des instabilités thermoacoustiques auto-entretenues, induites par le couplage de la dynamique de la combustion des gouttes d'aluminium, libérées par la combustion du propergol, avec le champ acoustique peuvent induire des oscillations de pression.

L'analyse menée tout au long de ce manuscrit repose sur un ensemble d'hypothèses simplificatrices : (i) la réponse de la combustion de gouttes d'aluminium aux perturbations acoustiques est contrôlée par l'écoulement local autour de la goutte, (ii) le processus de combustion peut être supposé quasi-stationnaire pour la gamme de fréquences et les amplitudes acoustiques étudiées et (iii) la combustion de l'aluminium est brusquement arrêtée lorsque le diamètre de la goutte d'aluminium diminue en dessous d'un diamètre résiduel.

L'instabilité thermoacoustique est étudiée au moyen de simulations numériques de l'écoulement dans un moteur générique et d'analyses théoriques. Le diamètre résiduel des gouttes d'aluminium après la combustion, l'amplitude de la perturbation acoustique et la durée de la combustion des gouttes d'alumi-

nium figurent parmi les principaux paramètres modifiant l'instabilité. En outre, trois comportements de réponse de la combustion à l'acoustique sont identifiés : un comportement linéaire pour les faibles niveaux de pression acoustique puis un comportement quadratique (faiblement non-linéaire) et enfin un comportement fortement non-linéaire quand l'amplitude des oscillations augmente.

Ensuite, deux aspects importants de la réponse des gouttes d'aluminium sont identifiés. Ils sont associés aux oscillations de la durée du temps de combustion des gouttes, identifiables à la frontière du nuage de gouttes, et aux fluctuations du taux d'évaporation contrôlées par la convection de l'écoulement gazeux autour de chaque goutte. Tenant compte de ces dynamiques, des expressions analytiques sont obtenues permettant de reproduire avec précision les résultats numériques des simulations de l'écoulement. Quatre nombres sans dimension qui régissent la dynamique de ces instabilités sont également identifiés. Inspiré de l'analyse théorique précédente, un modèle numérique d'ordre réduit faiblement non linéaire est finalement développé pour prédire des cycle limites.

**Title :** Thermo-acoustic instabilities in solid rocket motors

**Keywords :** Reduced-order modeling, Thermo-acoustic, Aluminum, Two-phase flow, Solid Rocket Motor

**Abstract :** In a solid rocket motor, self-sustained thermo-acoustic instabilities, induced by the coupling of the combustion dynamics of aluminum droplets released by the burning propellant with the acoustic field can induce pressure oscillations.

The analysis conducted throughout this manuscript relies thus on a set of simplifying hypothesis by assuming (i) that the response of the combustion of aluminum droplets to acoustic perturbations is controlled by the oscillating drag exerted by the local flow around the droplet, (ii) that this unsteady combustion process can be assumed quasi-steady for the range of frequencies and acoustic amplitudes studied and (iii) that aluminum combustion is abruptly quenched when the aluminum droplet diameter falls below a residual diameter.

The thermo-acoustic instability is studied first by numerical flow simulations in a generic solid rocket motor and theoretical analyses. The post-combustion residual diameter of the aluminum particles, the amplitude of acoustic perturbation and the lifetime of the burning aluminum droplets are among the main para-

meters altering the instability. Also, three combustion response behaviors to acoustics are identified : a linear behavior for small acoustic pressure levels followed by a quadratic behavior then a highly non-linear behavior when the pressure amplitude increases in the motor chamber.

Moreover, two important features of the response of aluminum droplets are identified. They are associated to oscillations of the droplet lifetime at the boundary of the droplet cloud and to fluctuations of the droplet evaporation rate, controlled by convection. The dynamics of the droplets highly depends on gas and droplet velocity fields and on droplet diameter. Taking these features into account, yields analytical expressions that allow to reproduce with accuracy the numerical results from the flow simulations. Four dimensionless numbers are then identified. They govern the dynamics of these instabilities.

Inspired from the previous theoretical analysis, a weakly nonlinear low-order numerical model is finally developed to predict limit cycles.

