



HAL
open science

Nouvelles frontières pour le cadre Arlequin en élastodynamique HF localisées - Application à la propagation des fissures

Khalil Abben

► **To cite this version:**

Khalil Abben. Nouvelles frontières pour le cadre Arlequin en élastodynamique HF localisées - Application à la propagation des fissures. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COmUE), 2019. Français. NNT : 2019SACLCO58 . tel-02278673

HAL Id: tel-02278673

<https://theses.hal.science/tel-02278673>

Submitted on 4 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nouvelles frontières pour le cadre Arlequin en élastodynamique HF localisées - Application à la propagation des fissures

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à CentraleSupélec

Ecole doctorale n°579 Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et
géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat : Génie Mécanique

Thèse présentée et soutenue à Gif-sur-Yvette , le 03 juillet 2019, par

KHALIL ABBEN

Composition du Jury :

Marc Bonnet Directeur de recherche, ENSTA ParisTech (Unité de Mathématiques Appliquées)	Président
Étienne Balmes Professeur, ENSAM (Laboratoire Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux)	Rapporteur
Jean-Charles Passieux Professeur, INSA Toulouse (Modélisation des Systèmes et Microsystèmes Mécaniques)	Rapporteur
Hachmi Ben Dhia Professeur des Universités, CentraleSupélec (Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux)	Directeur de thèse

Résumé

L'objectif principal de ce travail de thèse est de consolider et rendre opérationnelle l'extension du cadre multi-modèles et multi-échelles Arlequin à la modélisation et la simulation (par éléments finis) en élasto-dynamique, en faisant l'hypothèse de localisation des ondes hautes fréquences, tenant ainsi compte de phénomènes physiques dissipatifs divers. Parmi les applications visées par ces travaux, citons i) la propagation dans le sol d'ondes sismiques et leurs impacts sur des infrastructures critiques, ii) l'analyse multi-résolutions du comportement dynamique d'une structure impactée ou iii) encore la propagation de fissures en dynamique dans des matériaux. Les contraintes que l'on s'impose dans ce travail sont doubles. La première est que l'on s'interdit de polluer la ou les zones critiques localisées. La seconde est que l'on souhaite aussi approcher le plus correctement possible le comportement des champs mécaniques dans les zones approchées plus grossièrement. Une étude de l'ensemble des paramètres Arlequin est menée. Des préconisations pratiques sont fournies, en étant étayées par des simulations 1D et une simulation 2D. Une attention toute particulière est portée à l'opérateur de couplage Arlequin en volume (dont on rappelle et souligne le caractère incontournable pour les problèmes de dynamique multi-échelle ; les couplages en surfaces étant inopérants, pour ces problèmes). Sur ce sujet, un des faits saillants de ces travaux de thèse est le développement d'un nouvel opérateur de couplage Arlequin réduit : tirant profit d'une représentation modale des champs de multiplicateurs de Lagrange, définis dans la zone de couplage, d'une notion de $(1 - \varepsilon)$ - *Compatibilité* de modèles (initiée dans [Dhi01]) et du caractère multi-résolution des champs primaux du problème, dans la même zone de superposition Arlequin, cet opérateur permet de réduire considérablement les coûts des calculs des problèmes dynamiques multi-échelles abordés ici, par rapport à un couplage classique, tout en assurant des transmissions plus précises que celles données par deux autres méthodes de réduction, rappelées et mises en oeuvre dans cette thèse. Ces avantages sont étayés pour une barre élastique, en statique et en dynamique. Les approches développées sont utilisées et validées, par comparaison avec des résultats de la littérature, pour l'application phare de ce travail, consistant à simuler le comportement dynamique d'une structure fissurée, dans le cas d'une fissure fixe et celui d'une fissure propagative, en utilisant l'enrichissement par la fonction Level-Set à la X-Fem dans le modèle grossier et des éléments finis fins au voisinage du fond de fissure.

Abstract

The main objective of this thesis work is to consolidate and make operational the extension of the multi-model and multi-scale Arlequin framework to modeling and simulation (using finite element) in elastodynamic, by making the hypothesis of localization of high frequency waves, thus taking into account various dissipative physical phenomena. Applications targeted by this work include i) ground propagation of seismic waves and their impact on critical infrastructures, ii) multi-resolution analysis of the dynamic behavior of an impacted structure or iii) the dynamic propagation of cracks. The constraints imposed on this work are twofold. The first is that one is prohibited from polluting the localized or critical areas. The second is that we also want to approach as accurately as possible the behavior of the mechanical fields in the coarsely approximated areas. A study of all dynamic Arlequin parameters is conducted. Practical recommendations are provided and supported by 1D and 2D simulations. Particular attention is paid to the volume Arlequin coupling operator (whose essential character for coupling in multi-scale dynamic problems is recalled and underlined ; surface couplings being inoperative in this context). On this subject, one of the highlights of these thesis works is the development of a new reduced Arlequin coupling operator : taking advantage of a modal representation of the Lagrange multiplier fields defined in the coupling zone, a concept of $(1 - \varepsilon) - \textit{Compatibility}$ of models (initiated in [Dhi01]) and the multi-resolution character of the overlaid primal fields, this operator makes it possible to reduce considerably the computational costs of the multiscale dynamic problem discussed here (when compared to a classical coupling) while ensuring transmissions more accurately than those given by two other reduction methods, recalled and implemented in this thesis. These benefits are supported by an elastic bar test, both in static and dynamic regimes. The developed approaches are used and validated, in comparison with results of the literature, for the flagship application of this work consisting of simulating the dynamic behavior of a cracked structure in the case of a fixed crack and that of a propagative crack using enrichment by the Level-Set function *à la X-Fem* in the coarse model and fine finite elements near the crack tip.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Table des matières	viii
Table des figures	xii
Liste des tableaux	xiii
Introduction	1
1 Bref état de l’art en lien avec les thématiques de la thèse	5
1.1 Introduction	6
1.2 Les méthodes multi-échelles classiques	6
1.2.1 Méthodes multi-grilles	7
1.2.1.1 Description et principe des méthodes multi-grilles	7
1.2.1.2 Applications et critiques	8
1.2.2 Méthodes de raffinement de maillage adaptatif	8
1.2.3 Méthodes de décomposition de domaine	10
1.2.3.1 Méthodes sans recouvrement	10
1.2.3.2 Méthodes avec recouvrement	11
1.3 Le cadre Arlequin	12
1.3.1 Généralité	12
1.3.2 Ingrédients du cadre Arlequin	13
1.3.2.1 La zone de superposition	13
1.3.2.2 La zone de couplage	14
1.3.2.3 L’espace médiateur	14
1.3.2.4 L’opérateur de couplage	14
1.3.2.5 Les fonction de partition des énergies	14
1.3.3 Applications diverses	15
1.3.3.1 La jonction	15
1.3.3.2 La substitution	16
1.3.3.3 Modélisation d’une fissure sur une plaque 2D	16
1.3.3.4 Endommagement et propagation d’une fissure en statique	16
1.3.3.5 Couplage multi-patch d’une aube de turbine multi-perforée	16
1.3.3.6 Le zoom	17
1.3.3.7 Couplage discret-continue	17
1.4 Formulations continues et discrètes du problème d’élastodynamique linéaire	17
1.4.1 Formulation locale du problème mono-modèle (\mathcal{P}_{dyn}^{loc})	18

1.4.2	Formulation dynamique faible primale continue du problème (φ_{dyn}^{var})	19
1.4.3	Discrétisation	20
1.4.3.1	Semi-discrétisation spatiale - Méthode Galarkin	20
1.4.3.2	Discrétisation du problème (φ_{dyn}^{faible}) par la méthode des différences finies	21
1.5	Méthodes numérique pour la mécanique de la rupture	24
1.5.1	Méthode des éléments finis	24
1.5.1.1	Méthode de déboutonnage des nœuds	25
1.5.1.2	Méthode de remaillage	25
1.5.2	Méthode des éléments de frontière	25
1.5.3	Méthode sans maillage	26
1.5.4	Méthode des éléments finis étendue (X-FEM)	26
1.5.4.1	Les fonctions de niveau	26
1.5.4.2	Discrétisation spatiale	27
1.6	Objectifs et positionnement de notre étude, apports et concepts fondamentaux	28
2	Extension du cadre Arlequin au régime dynamique	31
2.1	Introduction	33
2.2	Formulation Arlequin du problème dynamique	34
2.2.1	Formulation Arlequin continue équivalente à (φ_{dyn}^{var}) : (φ_{dyn}^{arl})	35
2.2.2	Semi-discrétisation par la MEF du problème (φ_{dyn}^{Arl})	37
2.2.3	Discrétisation par différences finies du problème (φ_{dyn}^{Arl-sd})	38
2.3	Choix des paramètres Arlequin en dynamique	40
2.3.1	Représentation monomodèle du cas test 1D	42
2.3.2	Représentation Arlequin bi-modèle	43
2.3.3	Choix de l'espace médiateur	45
2.3.3.1	Choix d'un espace médiateur fin : blocage des ondes HF	46
2.3.3.2	Choix d'espace médiateur grossier : entrée des ondes dans la zone de couplage	48
2.3.3.3	Traitement de la réflexion des ondes dans la zone de couplage	49
2.3.4	Influence des paramètres de partition des énergies dans la zone Ω_c	50
2.3.4.1	Fonctions constantes	50
2.3.4.2	Fonctions linéaires et cubiques	53
2.3.5	Coefficient d'amortissement	54
2.3.6	Influence de la compatibilité et l'incompatibilité des maillages	60
2.4	Application en 2D à une propagation simplifiée des ondes sismiques : couplage Gefdyn-Arlequin	64
2.4.1	Motivations	64
2.4.2	Description du modèle	65
2.4.3	tests et résultats numériques	66
2.5	Conclusion	69
3	Réduction de modèles de couplage	75
3.1	Introduction	76
3.2	Réduction de l'opérateur de couplage	77
3.2.1	Forme générique de l'équation du couplage réduit	78
3.2.2	Appariement de modes propres	78
3.2.3	Appariement par proximité cinématique des modèles superposés	79

3.2.4	Couplage par appariement par projection	80
3.3	Réduction du couplage Arlequin en statique	81
3.3.1	Formulation continue du problème	81
3.3.2	Discrétisation du problème	81
3.3.3	Application numérique	82
3.3.3.1	Couplage par appariement	83
3.3.3.2	Couplage par minimisation de l'écart	84
3.3.3.3	Couplage par accommodation	85
3.3.3.4	Comparaison entre les 3 approches	85
3.4	Réduction du couplage Arlequin en dynamique	87
3.4.1	Formulation du problème	87
3.4.2	Analyse modale sur la zone de couplage	88
3.4.3	Adaptation de l'amortissement sélectif	89
3.4.4	Illustration numérique	91
3.4.4.1	Couplage par appariement	91
3.4.4.2	Couplage par minimisation de l'écart cinétique	91
3.4.4.3	Couplage par accommodation	93
3.4.4.4	Erreur de représentation modale	93
3.5	Conclusions	95
4	Rupture fragile en dynamique : une approche multi-échelle réduite	97
4.1	Introduction	99
4.2	Problème de référence d'un solide fissuré	100
4.2.1	Formulation continue du problème monomodèle	100
4.2.2	Fissure fixe ($\dot{a} = 0$)	102
4.2.3	Fissure en propagation ($\dot{a} \neq 0$)	104
4.2.3.1	Critère énergétique : taux de restitution d'énergie G	104
4.2.3.2	Calcul de la vitesse de propagation	105
4.2.3.3	Les FICs en dynamique	106
4.2.3.4	L'intégrale d'interaction en dynamique	107
4.2.3.5	Critère global de propagation	109
4.3	Solide fissuré dans le cadre Arlequin	110
4.3.1	Modélisation du problème multi-échelle d'un solide fissuré	110
4.3.2	Formulation Arlequin continue du problème	111
4.3.3	Discrétisation du problème ($\varphi_{arl}^{cr\grave{a}}$)	113
4.3.3.1	Formulation discrète du problème Arlequin avec XFEM	113
4.3.3.2	Considérations numériques de modélisation du patch initial	114
4.3.3.3	Calcul numérique du pas d'avance de la fissure	115
4.3.3.4	Remaillage du patch et projection des états	116
4.3.4	Algorithme de résolution	118
4.4	Applications numériques	118
4.4.1	Poutre fissurée en flexion 3 points : Mode I pur	119
4.4.1.1	Modélisation	119
4.4.1.2	Données numériques	120
4.4.1.3	Analyse des résultats	120
4.4.1.4	Influence de la géométrie du patch	122
4.4.1.5	Couplage Arlequin réduit	123
4.4.2	Modes mixtes	126
4.4.2.1	Description de l'expérience de Kalthoff et Winkler	126

4.4.2.2	Modélisation	126
4.4.2.3	Données numériques	128
4.4.2.4	Analyse des résultats	129
4.5	Conclusions	135
Conclusions et quelques perspectives		137
Bibliographie		141

Table des figures

1.1	Mono-modèle de référence en statique	6
1.2	Exemples de parcours des grilles dans les cas 2,3 ou 4 grilles	8
1.3	Exemples de déformation de maillage par la méthode p	9
1.4	Exemples de déformation de maillage par la méthode r	9
1.5	Exemples de déformation de maillage par la méthode h	10
1.6	Décomposition en 2 sous-domaine sans recouvrement	10
1.7	Décomposition en 2 sous-domaines avec recouvrement	12
1.8	Exemple de superposition de deux modèles	13
1.9	Exemple de couplage Arlequin entre deux modèles superposés	14
1.10	Exemple de fonctions de partition de l'énergie pour deux modèles couplés	15
1.11	Application de l'opération jonction pour le cas d'une poutre en flexion .	16
1.12	Application d'une opération de substitution pour introduire une fissure sur modèle sein	17
1.13	Application de l'opération zoom pour un problème d'indentation	17
1.14	Configuration mécanique de référence	18
1.15	Stabilité du schéma newmark en fonction de ses paramètres	23
1.16	Illustration de la méthode de déboutonnage des nœuds	25
1.17	Illustration de la définition de ψ	27
1.18	Illustration des enrichissements par X-FEM	29
2.1	Bi-modèle Arlequin couplant d'un schéma de Newmark et un schéma HHT	33
2.2	Modèle Arlequin de référence	35
2.3	Monomodèle de référence 1D	41
2.4	Signal initial	41
2.5	4 Snapshots illustrant la propagation du signal sur la barre monomodèle 1D	42
2.6	Modèle discret de la barre Arlequin 1D	43
2.7	Modèle discret de la barre Arlequin 1D	43
2.8	4 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D avec maillages conformes	44
2.9	Variation des énergies du modèle Arlequin avec maillage uniforme	45
2.10	Données numériques de la barre Arlequin 1D	46
2.11	4 Snapshots illustrant la propagation du signal dans la barre 1D	47
2.12	4 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D	48
2.13	Fonctions constantes de partition de l'énergie par paliers	50
2.14	variation du coefficient de réflexion en fonction des couples des fonctions de partition de l'énergie	51
2.15	4 Snapshots de la propagation et la réflexion parasite du signal sur la barre Arlequin 1D $\alpha_k^1 = \alpha_m^1 = 0.6$	52

2.16	2 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour $\alpha_k^1 = \alpha_m^1 = 0$	52
2.17	4 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour des fonctions de partition de l'énergie linéaires (ou cubiques)	53
2.18	Fonctions linéaires de partition de l'énergie	54
2.19	Forme du signal sur la barre Arlequin 1D lorsque la HF atteint le bord	54
2.20	la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour un amortissement relativement fort	57
2.21	la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour un amortissement relativement fort	59
2.22	Maillages totalement compatibles	60
2.23	Incompatibilités des maillages -a-incompatibilité (I_f) de frontière,-b-incompatibilité (I_m) de maillage	60
2.24	Représentation du signal initial	61
2.25	Signal après propagation : Signal transmis à droite et signal réfléchi à gauche	61
2.26	Signal après propagation dans le cas d'incompatibilité I_f : Signal transmis à droite et signal réfléchi à gauche	62
2.27	Signal après propagation dans le cas d'incompatibilité I_m : Signal transmis à droite et signal réfléchi à gauche	63
2.28	Modèle 2D avec une faille contrainte au centre	65
2.29	Modèle Arlequin 2D	66
2.30	Distribution d'isovaleurs de contrainte de cisaillement à 4 instants du temps	67
2.31	Signal initial sur 3 rangées d'élément pour $x = 1000m, 2000m, 3000m$ (de haut en bas)	68
2.32	Signal initial sur 3 rangées d'élément pour $y = -3500m, -3500m, -2000m$ (de haut en bas)	69
2.33	Maillage du modèle Arlequin	69
2.34	Maillage du modèle Arlequin	70
2.35	6 snapshots de la propagation du signal en 2D sans amortissement	71
2.36	6 snapshots de la propagation du signal en 2D avec amortissement	72
3.1	Mono-modèle (à gauche) et bi-modèle Arlequin (à droite) d'une barre soumise à son propre poids	81
3.2	Modèle de barre 1D soumise à un effort volumique	83
3.3	Analyse du couplage par appariement des modes propres	83
3.4	Analyse du couplage par minimisation de l'écart cinématique	84
3.5	Analyse du couplage par accommodation	85
3.6	Couplage par appariement en statique	86
3.7	Couplage par minimisation de l'écart en statique	86
3.8	Couplage par accommodation en statique	86
3.9	Représentation spectrale du signal initial	88
3.10	Le signal après propagation pour un couplage réduit par appariement	92
3.11	Le signal après propagation pour un couplage réduit par minimisation de l'écart cinématique	92
3.12	Le signal après propagation pour un couplage réduit par accommodation	93
3.13	Représentation des 5 premiers modes sur la zone de couplage	94
3.14	Écart dans la représentation des modes sur le patch et le substrat	94
3.15	Deux snapshots de la propagation du signal pour un couplage sur-réduit	95

3.16	Deux snapshots de la propagation du signal pour un couplage réduit $\varepsilon = 0.001$	95
3.17	Deux snapshots de la propagation du signal pour un couplage réduit $\varepsilon = 0.001$ avec amortissement sélectif	96
4.1	Domaine fissuré Ω_0 (à gauche) et domaine fissuré Ω_t après propagation (à droite)	101
4.2	Repère local à la fissure en 2D	103
4.3	Champ d'extension virtuel \underline{q}	109
4.4	Critère de propagation d'une fissure pour une charge et une décharge	110
4.5	Modèles Arlequin de solide fissuré	111
4.6	Modèle Arlequin fissuré	113
4.7	Les différentes étape de calcul d'un modèle Ω_i à discrétisation évolutive	116
4.8	Test de la poutre en flexion 3 points	119
4.9	Maillages (à gauche) et champs de la norme des déplacements (à droite) à l'instant $t = 75\mu s$ pour les 3 cas	120
4.10	Maillage (à gauche) et Champs de contraintes de Von-Mises (à droite) à l'instant $t = 75\mu s$ pour les 3 cas	121
4.11	Facteur d'intensité de contrainte K_I pour les différents modèles numériques	121
4.12	Trois différentes dimensions du rayon du patch Arlequin	122
4.13	Facteur d'intensité de contrainte pour différents choix des rayons du patch Arlequin	122
4.14	Un couple de modes appariés du substrat (à gauche) et du patch (à droite) - représentation normale (en haut) et représentation vectorielle(en bas)	123
4.15	Un couple de modes calculés par par minimisation de l'écart cinématique du substrat (à gauche) et du patch (à droite) - représentation normale (en haut) et représentation vectorielle(en bas)	124
4.16	Un couple de modes calculés par appariement du substrat (à gauche) et du patch (à droite) - représentation normale (en haut) et représentation vectorielle(en bas)	125
4.17	Variation des facteurs d'intensité de contrainte pour les 3 approches différentes de réduction	125
4.18	Schéma de principe de l'expérience de Kalthoff et Winkler - Schéma tiré de [Kal00]	127
4.19	modèle de plaque fissurée sollicitée en mode mixte	127
4.20	Variation de la vitesse du projectile	128
4.21	modèle géométrique de demi-plaque fissurée impactée	128
4.22	bi-modèle Arlequin d'une demi-plaque fissurée	129
4.23	Évolution du trajet de la fissure simulation de l'expérience de Kalthoff et Winkler ($V_0 = 16ms^{-1}$) pour $t = 20\mu s$, $t = 34\mu s$, $t = 48\mu s$, $t = 62\mu s$, $t = 72\mu s$, et $t = 90\mu s$	130
4.24	Trajet de la fissure pour une vitesse d'impact $V_0 = 16.5ms^{-1}$	130
4.25	Comparaison de plusieurs méthodes numériques sur le cas de Kalthoff : (a) Résultat expérimental, (b ₁) et (b ₂) Méthode d'élimination d'éléments avec un maillage structuré et non structuré, (c ₁) et (c ₂) Méthode des zone cohésives avec des maillages structurés 50×50 et 100×100 , (d) Méthode X-FEM avec un maillage structuré 100×100	131
4.26	Variation de la vitesse de propagation de la fissure au cours du temps	131

4.27	Évolution de la vitesse sur la simulation de l'expérience de Kalthoff et Winkler pour $t = 20\mu s$, $t = 34\mu s$, $t = 48\mu s$, $t = 62\mu s$, $t = 72\mu s$, et $t = 90\mu s$	132
4.28	Champs de contraintes de Von-Mises pour la simulation de l'expérience de Kalthoff et Winkler pour $t = 20\mu s$, $t = 34\mu s$, $t = 48\mu s$, $t = 62\mu s$, $t = 72\mu s$, et $t = 90\mu s$	133
4.29	Variation des facteurs d'intensité des contraintes au cours du temps . . .	133
4.30	Variation de l'indice de compatibilité I_c en fonction du temps	134
4.31	Comparaison des trajectoires de la propagation d'une fissure entre un couplage classique et un couplage réduit par accommodation pour $\varepsilon = 1^{-4}$	134

Liste des tableaux

1.1	Quelques algorithmes de la famille de Newmark	23
2.1	Les données matériau	67
3.1	Évaluation du temps de calcul pour 3 différents approches de couplage réduit	87
4.1	Les données matériau	120
4.2	Évaluation du temps de calcul pour 3 différents approches de couplage réduit	126
4.3	Paramètres matériau de l'acier Maraging 18Ni1900	128

Introduction

Contexte

Que ce soit pour la conception de nouveaux objets aux chocs, l'amélioration d'objets existants, la détection non intrusive d'un défaut dans une structure ou encore l'analyse du degré de nocivité de ce défaut, notamment en cas de propagation brutale si le défaut est une fissure, ou l'analyse d'une zone localisée d'un domaine solide ayant subi un choc (de type impact ou de type séisme) et l'influence de cet événement sur le restant du milieu (notamment dans le cas d'un séisme ou encore d'un crash de véhicule), etc., il est aujourd'hui nécessaire d'avoir recours à la modélisation et la simulation numérique pour qu'en complément ou alternative à l'expérimentation (off- ou on-line) pour prédire le comportement dynamique local et global, généré par ces différents chargement localisés en espace et en temps. C'est à une contribution à ce domaine de modélisation, analyse et simulation du comportement dynamiques des structures sous chocs que sont dédiés ces travaux de thèse, développés dans le cadre d'un Contrat Doctoral d'Excellence Paris-Saclay, au sein du Laboratoire MSSMat, UMR CNRS 8579 de CentraleSupélec. Les trois exemples types ciblés par ces travaux sont la propagation des ondes sismiques ; de la source sismique à la base des infrastructures critiques situées à une distance suffisamment importante de la source, l'analyse des zones d'impacts, avec un souci pour le restant, ainsi que la propagation dynamique de fissures.

Tous les sujets que l'on vient d'évoquer ont un lien fort avec le comportement dynamique transitoire des structures soumises à des chocs violents, de type impact ou de déclenchement brutal d'amorçage de fissuration ou encore de glissements brutaux au niveau d'une interface, libérant instantanément une grande quantité d'énergie de déformation interne dans le voisinage du glissement relatif, énergie accumulés lors d'une phase d'adhérence des surfaces de l'interface ; le système étant continuellement chargé, par ailleurs (cas des séismes, par exemple). La nature des chargements localisés et brutaux fait naître une réponse très riches en fréquences au voisinage des zones subissant un chargement brutal et localisé. Dans le contexte décrit ci-dessus, la volonté d'avoir des informations sur la propagation des ondes et les possibles détériorations, au voisinage du lieu d'impact et bien au-delà de cette zone subissant l'impact, fait que, traiter numériquement le problème avec la finesse exigée par le chargement dynamique initial, dans ce voisinage et bien au-delà, de manière monolytique est irréaliste, même si l'on disposait de machines de calcul très puissantes. Il suffirait de penser à la simulation de la propagation d'ondes sismiques dans le sol, avec des hypothèses d'élasticité, du lieu de la source sismique, avec des fréquences pouvant aller jusqu'à 'une vingtaine de Hertz, aux fondations d'une infrastructure située au-delà de la centaine de kilomètres, tout en transmettant fidèlement le contenu fréquentiel de ce chargement initial. Le problème est donc comment procéder dans ces situations et apporter des réponses acceptables, en des temps raisonnables ?

L'objectif de ces travaux de thèse est de contribuer à l'apport d'éléments nouveaux et

pertinents de réponses à la question posée, reposant sur des hypothèses simplificatrices que nous estimons acceptables, dans cette phase de développements, en poussant plus loin les frontières du Cadre de modélisation multi-modèle et multi-échelle Arlequin initié dans [Dhi98, BD99].

Une hypothèse très importante que nous faisons dans ce travail est que les ondes hautes fréquences restent localisées. Par ailleurs, nous adoptons les hypothèses de l'élasticité linéaire et des petites perturbations. Nous entendons par localisation des ondes hautes fréquences le fait que ces dernières sont seulement à prendre en considération dans une zone circonscrite, par exemple à un impact extérieur à la structure étudiée (ou à l'intérieur, en cas d'auto-choc ou de relâchement brutal et localisé d'énergies internes, comme dans le cas de la fissuration fragile ou des failles sismiques). Et dans ces conditions, on suppose que le signal naissant dans cette zone localisée sera, suffisamment loin de cette zone, dépouillé de ses ondes hautes fréquences. Ces hypothèses ouvrent la voie à une modélisation multi-résolution ou multi-échelle du problème, sachant, comme dit plus haut, que la résolution mono-échelle, raffinée sur tout le (grand) domaine de propagation au niveau exigé par la représentation des ondes hautes fréquences, serait impossible.

Pour sa très grande flexibilité et son potentiel, porté par les différents mécanismes / paramètres qu'il introduit, à coupler des modèles et des échelles très différents d'un même objet, potentiel qui ne cesse d'être exploité dans le monde de la modélisation et de la simulation, nous utilisons ici le cadre de modélisation Arlequin. Dans ce cadre, nous formulons nos problèmes élasto-dynamiques transitoires pour connaître le comportement dynamique de solides chargés brutalement dans une zone localisée (ou plusieurs zones, au besoin). Pour cela nous partitionnons le domaine occupé par le solide étudié en un domaine qu'on qualifie de macroscopique, supposé occuper la majeure partie du domaine complet, et un domaine microscopique (ou patch Arlequin), occupant une petite partie (pouvant changer de place, au besoin) du domaine global. Les deux domaines se chevauchent dans un domaine volumique, avec, en général et en suivant les recommandations Arlequin, une partition du patch en deux sous-zones (sans superposition) : une première zone critique (parfois appelée zone libre du patch) dans laquelle la finesse du patch est exploitée (sans couplage avec le domaine grossier) pour prendre en charge les phénomènes physiques fins et une autre zone, appelée zone de couplage (en volume) des deux modèles.

L'hypothèse que nous faisons de localisation des zones critiques en dynamique est, comme nous venons de le dire, nécessaire pour la faisabilité du calcul du comportement dynamique du solide considéré. En discret (pensons h-éléments finis), cela suppose que l'on utilise un maillage très fins pour approcher les champs dans le patch et un maillage grossier pour approcher ceux dans le modèle grossier. Cette situation discrète génère, en dynamique, beaucoup plus de problèmes que ceux en statique et ce, en particulier, à cause du phénomène de piégeage des ondes dans le patch, par réflexion d'ondes à des fréquences non admissibles par le modèle éléments finis grossiers. Ce sujet soulève la question pratique du comment choisir les différents mécanismes/paramètres du cadre Arlequin pour répondre à l'objectif fixé ci-dessus, à savoir obtenir, dans ce cadre, une simulation captant, et la finesse locale (zone de l'épicentre sismique, pour l'exemple d'un séisme) dans le voisinage de l'excitation dynamique initiale, sans pollutions parasites, et faire que la partie d'énergie transmise, assez loin de la zone critique, par la modélisation grossière du modèle, soit la plus représentative possible de ce que percevrait, dans une réalité complexe (granulaire, rocheuse, aléatoires, etc, dans le cas d'un séisme) d'autres objets d'intérêt (fondations d'une centrale nucléaire ou d'un barrage, par exemple).

Le manuscrit comporte 4 chapitres. Dans le premier chapitre, on fait un état des lieux, non exhaustif, de travaux touchant aux thématiques principales abordées dans la thèse. Nous y rappelons aussi quelques éléments techniques portant sur des piliers numériques classiques utilisés dans nos approches, comme la famille des schémas de Différences Finies de Newmark et leurs stabilités, les méthodes numériques de calcul à la rupture fragile et notamment la Méthode X-FEM, instance puissante de la PUM. Nous y évoquons aussi quelques méthodes multi-échelles et y détaillons, tout particulièrement, le cadre de modélisation multi-modèle et échelle Arlequin. Nous fournissons des éléments sur ses usages variés en statique et quasi-statique de ce cadre. Un bref historique portant sur l'utilisation de ce cadre en dynamique et en discret permet de mettre en perspectives les principales nouvelles avancées des frontières de ce cadre, réalisés dans ces travaux de thèse, pour la résolution de problèmes, avec l'hypothèse de localisation de Hautes fréquences. Ces éléments sont déployés dans le chapitre 2. Ce dernier porte sur l'étude des différents paramètres des problèmes Arlequin discrets. Le chapitre 3 est dédié à un nouvel aspect très important, à savoir la réduction du modèle de couplage Arlequin, avec son amortissement adapté, en dynamique et ses apports, tant à la précision qu'à la réduction des coûts des calculs. Ces deux chapitres sont éclairés principalement par une application 1D. Une application 2D, très intéressante est donnée en fin du chapitre 2. Dans cette application, des résultats 2D de simulation par le Code Gfdyn (du MSSMat) de la création d'un signal sismique par glissement frottant en Mode II sur une faille sismique sont récupérés et couplés, dans le cadre Arlequin, dans un Code-Arlequin (prototype développé au MSSMat) afin de propager proprement la partie basses fréquences dans le domaine Grossier, à la distance souhaitée.

Le dernier chapitre de la thèse est consacré à une application importante des outils développés dans les deux chapitres précédents à l'étude du comportement d'une structure fissurée, sous chargement dynamique, en considérant le cas où la fissure (zone critique ici) est fixe, puis le cas où la fissure peut se propager. Des éléments techniques, comme la projection des états calculés à une étape de temps t_n pour l'étape d'après, ainsi que le contrôle des pas de temps ou la suppression, à chaque pas de temps, des éléments du maillage grossier, entièrement contenus dans la zone libre du patch, sont développés.

Chapitre 1

Bref état de l'art en lien avec les thématiques de la thèse

Figures

1.1	Mono-modèle de référence en statique	6
1.2	Exemples de parcours des grilles dans les cas 2,3 ou 4 grilles	8
1.3	Exemples de déformation de maillage par la méthode p	9
1.4	Exemples de déformation de maillage par la méthode r	9
1.5	Exemples de déformation de maillage par la méthode h	10
1.6	Décomposition en 2 sous-domaine sans recouvrement	10
1.7	Décomposition en 2 sous-domaines avec recouvrement	12
1.8	Exemple de superposition de deux modèles	13
1.9	Exemple de couplage Arelquin entre deux modèles superposés	14
1.10	Exemple de fonctions de partition de l'énergie pour deux modèles couplés	15
1.11	Application de l'opération jonction pour le cas d'une poutre en flexion	16
1.12	Application d'une opération de substitution pour introduire une fissure sur modèle sein	17
1.13	Application de l'opération zoom pour un problème d'indentation	17
1.14	Configuration mécanique de référence	18
1.15	Stabilité du schéma newmark en fonction de ses paramètres	23
1.16	Illustration de la méthode de déboutonnage des nœuds	25
1.17	Illustration de la définition de ψ	27
1.18	Illustration des enrichissements par X-FEM	29

Tableaux

1.1	Quelques algorithmes de la famille de Newmark	23
-----	---	----

1.1 Introduction

L'étude du comportement d'une structure contenant une défaillance ou une singularité très localisé, du type fissuration ou endommagement, nécessite une échelle d'étude très fine qui peut aller jusqu'à la représentation atomique du matériau. Bien que l'échelle la plus fine soit la plus pertinente pour décrire le comportement de la manière la plus réaliste possible, elle est toujours limitée par la capacité des calculateurs actuels, tels puissants qu'ils soient. Les méthodes multi-échelles émergent, ainsi, comme étant un outil permettant de relier des échelles très fines à des échelles, considérées plus grandes. L'échelle macroscopique est destinée pour décrire le comportement global de la structure et l'échelle microscopique ou fine est une représentation locale des phénomènes critiques tels que la propagation d'une fissure.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques méthodes multi-échelles les plus utilisées dans la mécanique des solides et nous consacrons, la deuxième section, à la présentation du cadre Arlequin en statique, ses différents ingrédients et ses applications les plus pertinentes. Dans la troisième section nous présentons, synthétiquement, un bref état de l'art des méthodes numériques utilisées pour la mécanique de la rupture. Finalement, nous définissons les objectifs, les motivations et le cadre des travaux constituant cette thèse.

1.2 Les méthodes multi-échelles classiques

Dans la littérature, on trouve plusieurs méthodes multi-échelles, dont l'application varie selon l'intérêt. Certaines méthodes ont prouvé plus d'efficacité que d'autres pour traiter des problèmes à plusieurs échelles en statique ou en dynamique. Ces méthodes peuvent être classées sous différentes catégories qu'on rappellera, les plus utilisées en mécanique des solides, en ce qui suit.

Pour des raisons de simplicité, et sans perte de généralité, le problème générique considéré consiste à déterminer l'équilibre d'une structure tridimensionnelle occupant l'adhérence de l'ouvert connexe Ω . Sur une partie S_u (de mesure non nulle) de la frontière $\partial\Omega$, cette structure est encastée, tandis que sur une partie distincte S_σ , elle subit l'action d'un champ de forces surfaciques \underline{F}_d . En outre, elle est soumise sur tout son volume, à un champ de forces volumiques \underline{f}_v .

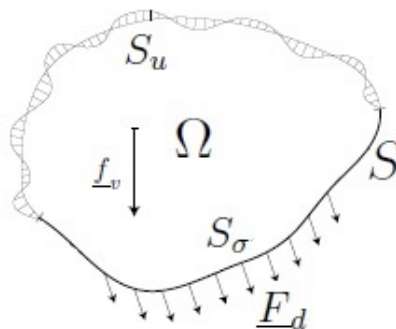


FIGURE 1.1 – Mono-modèle de référence en statique

Le problème local s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & - \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{f}}_v; \text{ sur } \Omega \\ & \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{0}}; \text{ sur } S_u \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (1.1) \\ & (1.2) \end{aligned} \\
 & \left. \begin{aligned} & \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{F}}_d; \text{ sur } S_\sigma \end{aligned} \right\} (1.3)
 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est le tenseur des déformations et $\underline{\underline{n}}$ est la normale sortante.

1.2.1 Méthodes multi-grilles

Historiquement, les premiers développements de ces méthodes ont été faits par Southwell [Sou35] et Brandt [Bra77] sur des systèmes linéaires elliptiques à une et deux dimensions. Depuis, de nombreux travaux étudiants et améliorants les différents éléments des méthodes et leurs adaptabilités aux différents problèmes de la physique (équation de Poisson, Navier Stokes, ...) ont été effectués. La littérature à ce sujet est très exhaustive et on peut se référer aux travaux [BM⁺00, DL00, Hem90, Ket82, McC82] pour plus de détails sur les méthodes multi-grilles et leurs applications.

1.2.1.1 Description et principe des méthodes multi-grilles

Après une discrétisation du problème linéaire (φ_{stat}^{loc}) par la méthode des éléments finis, le système linéaire est mis sous une forme matricielle. Les méthodes multi-grilles reposent, principalement, sur une résolution itérative du problème linéaire introduisant un paramètre de relaxation. Soit Ω^h une triangulation du domaine Ω par des éléments de taille h . L'approximation du déplacement sur les N point de la discrétisation Ω^h est noté \underline{U}^h .

Le système à résoudre s'écrit alors :

$$\underline{\underline{K}}\underline{U}^h = \underline{F} \text{ sur } \Omega^h \quad (1.4)$$

$\underline{\underline{K}}$ représentant la matrice de rigidité, \underline{F} est le vecteur second membre. On note $\underline{U}^{h,a}$ la solution exacte du problème. On définit l'erreur algébrique par $\underline{e}^h = \underline{U}^{h,a} - \underline{U}^h$ et le résidu par $\underline{r}^h = \underline{F} - \underline{\underline{K}}\underline{U}^h$ vérifiant l'équation résiduelle suivante : Le système à résoudre s'écrit alors :

$$\underline{\underline{K}}\underline{e}^h = \underline{r}^h \text{ sur } \Omega^h \quad (1.5)$$

La résolution de l'équation 1.5 revient à résoudre le système 1.4. La résolution du système 1.4 se fait moyennant des méthodes itératives. Le principe des méthodes multi-grilles à deux niveaux pour la résolution du système linéaire se pose sur 2 grands principes :

1. La réduction des hautes fréquences de l'erreur par une méthode de relaxation, comme la méthode Jacobi à titre d'exemple, sur une grille fine à travers une décomposition en série de Fourier et vérifiant une propriété de lissage. Cette propriété permet de réduire les hautes fréquences de l'erreur mais, elle a du mal à éliminer ses basses fréquences. La vérification de cette propriété de la méthode de relaxation se fait à travers une analyse de Fourier.
2. La réduction des basses fréquences avec une correction par une grille grossière qui se fait, en première étape par résolution directe ou par une méthode de relaxation de l'équation 1.5 sur une grille grossière. Ensuite, la solution est interpolée sur

la grille fine pour la solution fine. Cette étape est appelée "correction par grille grossière".

La résolution présentée ci-dessus considère seulement deux grilles, mais il est possible de l'effectuer d'une manière récursive sur plusieurs grilles, en considérant à chaque fois la grille fine comme une grille grossière. L'augmentation de nombre de grilles permet de diminuer la taille du domaine fréquentiel correspondant aux hautes fréquences pour chaque résolution. Dans ce cas, un large choix de grilles peut être fait et il est croissant avec le nombre de grilles considérés comme le montre la figure 1.2. Plusieurs autres algorithmes de résolution multi-grilles plus complets et complexes peuvent être trouvés dans les travaux [TOS01].

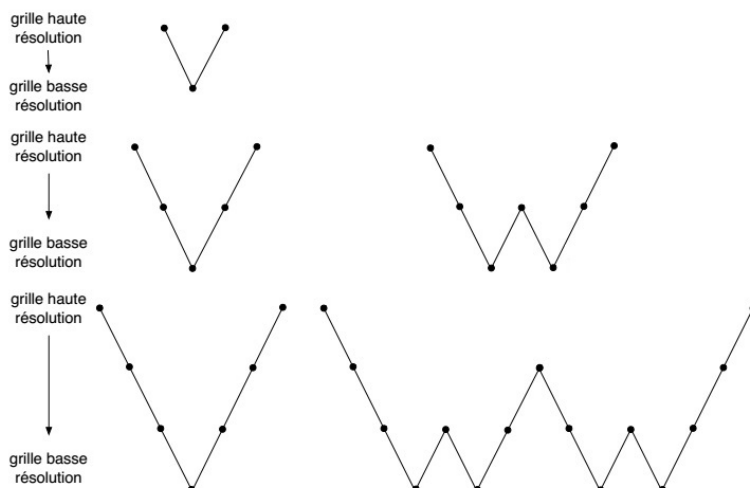


FIGURE 1.2 – Exemples de parcours des grilles dans les cas 2,3 ou 4 grilles

1.2.1.2 Applications et critiques

Afin de couvrir un large rayon d'application, plusieurs algorithmes ont été développés depuis la création des méthodes multi-grilles. Hackbusch [Hac85] a détaillé dans son livre différentes applications des méthodes multi-grilles et succédé par plusieurs autres travaux qui ont étendu le champs d'application de ces méthodes pour des problèmes de la mécanique linéaires et non linéaires.

On distingue des méthodes multi-grilles géométriques et algébriques. Les premiers sont très faciles à mettre en œuvres sur des maillages structurés. Lorsque le maillage devient non-structuré, il est difficile de définir une grille grossière. Dans ce cas, les méthodes multi-grilles dites "algébrique" sont utilisées où la grille grossière est définit au sens algébrique.

L'avantage des méthodes multi-grilles algébrique est qu'elle donne une résolution plus rapide, robuste et très effective pour des solveurs séparés. Cependant, elles sont plus coûteuses en termes de mémoire de stockage à cause de la définition des grilles grossières. Les opérations de passage entre grilles engendrent des coûts supplémentaires et sont difficiles à paralléliser. De plus, des solveurs couplés ne sont pas bien adapté aux algorithmes multi-grilles algébriques.

1.2.2 Méthodes de raffinement de maillage adaptatif

Pour capter des phénomènes locaux qui apparaissent de manière quelconque au cours du temps, des méthodes vairées de raffinement de maillage ont été développées. Chacune de

ces méthodes prouve son efficacité pour un problème bien spécifique. Donc, il convient de choisir la méthode la mieux adaptée au problème à traiter.

Plusieurs méthodes ont été développés dont on rappelle, brièvement, les plus utilisées :

1. Méthode p : Le même maillage est considéré, ayant un nombre de nœuds fixe. Le raffinement, dans ce cas, est obtenu en augmentant l'ordre des fonctions d'interpolation des éléments finis dans la zone critique où une forte précision est requise. Cette solution a été développée par Basu [BP83] dans le cadre continu dans des écoulements fluides. Elle est très utilisée dans le cadre des éléments finis, mais reste difficile à utiliser dans la cadre discontinue à cause de l'instabilité des schémas d'ordre élevé (cf. [Bak97]).

La figure 1.3 montre la déformation apporté sur un maillage régulier par la méthode p .

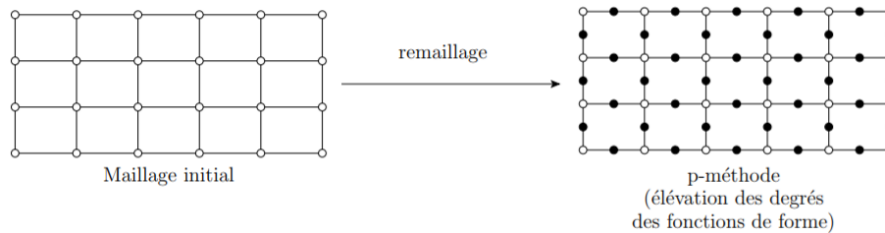


FIGURE 1.3 – Exemples de déformation de maillage par la méthode p

2. Méthode r : En fixant l'ordre des fonctions d'interpolation des éléments finis et le nombre de nœuds de maillage, on fait déplacer les nœuds du maillage dans les zones critiques où un raffinement est nécessaire pour obtenir la précision souhaitée. Cette méthode a montré ses performances pour traiter des problèmes d'écoulement compressible non visqueux sur des maillages structurés (cf [Pal88]).

La figure 1.4 présente un exemple de raffinement de maillage par la méthode r .

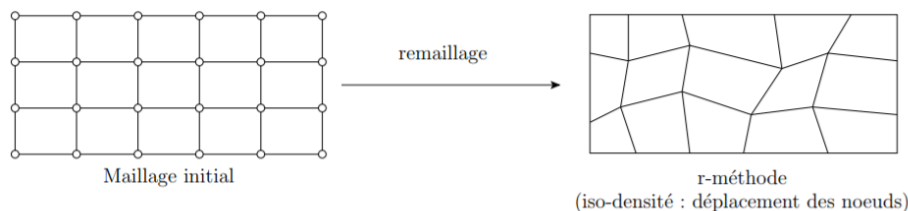


FIGURE 1.4 – Exemples de déformation de maillage par la méthode r

3. Méthode h : Cette méthode consiste à fixer l'ordre du schéma, et varier le maillage et le nombre de nœuds au cours du temps. Des nœuds sont rajoutés sur les zones considérées critiques et des nœuds sont éliminés sur les zones où le maillage est considéré très fin. Cette méthode est la plus utilisée dans la communauté scientifique. Elle a été développée, d'abord, par Berger [BC89] pour des écoulements incompressibles. Elle a été employée pour traiter des problèmes de mécanique de la rupture [MM00] et la mécanique vibratoire [FDAG02] ou encore pour modéliser le comportement des matériaux élastoplastiques [HW00].

La figure 1.5 donne un exemple de raffinement par la méthode h d'un maillage initial structuré.

Une combinaison entre ces méthodes peut être faite pour avoir plus d'avantages. Ainsi, d'autres méthodes font apparition telles que la méthode hp [GB86] et la méthode rh [SZ92].

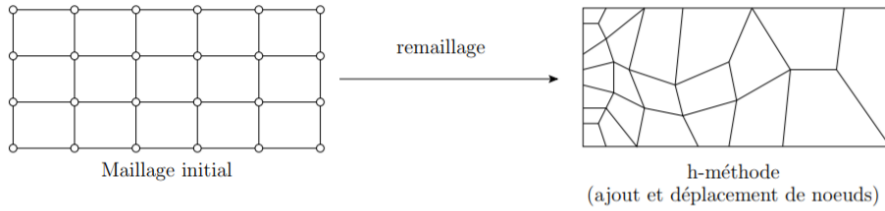


FIGURE 1.5 – Exemples de déformation de maillage par la méthode h

1.2.3 Méthodes de décomposition de domaine

La méthode de décomposition de domaine consiste à créer des sous domaines Ω_i dont l'union constitue le domaine Ω . Cette technique donne la possibilité de résoudre un système sur plusieurs processeurs. Ainsi, plusieurs possibilités de décompositions de domaine sont envisageables qu'on peut classer en deux grandes catégories : les méthodes sans recouvrement et les méthodes avec recouvrement.

1.2.3.1 Méthodes sans recouvrement

Les méthodes sans recouvrement sont fréquemment utilisées en Mécanique des milieux continus. Ces méthodes sont dérivées historiquement des travaux de Przemienieski en 1963 pour des calculs aéronautiques. Principalement, ils reposent sur la décomposition d'un domaine Ω en deux sous-domaine Ω_1 et Ω_2 disjoints, voire plus, dont la liaison est assuré par l'interface S_{12} , comme le montre la figure 1.6.

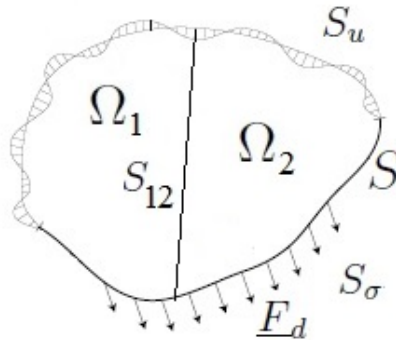


FIGURE 1.6 – Décomposition en 2 sous-domaine sans recouvrement

Le raccord entre les deux sous-domaine est assuré par une relation de continuité des efforts et des déplacement sur l'interface S_{12} . Après formation du complément de Schur par rapport aux variables intérieures, un système portant sur les variables d'interface est résolu en premier lieu puis les inconnues intérieures sont déduites. La résolution du problème se fait moyennant une méthode de Schur primale, duale ou FETI.

Méthode de Schur primale L'idée de cette méthode repose sur la considération d'un déplacement unique à l'interface S_{12} . En notant les inconnues $\underline{U}^h = [\underline{U}_1^h, \underline{U}_2^h, \underline{U}_S^h]$, le problème 1.4 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & 0 & \underline{\underline{K}}_{1S} \\ 0 & \underline{\underline{K}}_{22} & \underline{\underline{K}}_{2S} \\ \underline{\underline{K}}_{S1} & \underline{\underline{K}}_{S2} & \underline{\underline{K}}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^h \\ \underline{U}_2^h \\ \underline{U}_S^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_2 \\ \underline{F}_S \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Le système à trois blocs est condensé sur l'équation de continuité à l'interface, ce qui revient à résoudre l'équation suivante :

$$\underline{\underline{K}}_{Schur} \underline{U}_S = \underline{F}_{Schur} \quad (1.7)$$

avec $\underline{\underline{K}}_{Schur} = \underline{\underline{K}}_{SS} - \underline{\underline{K}}_{S1} \underline{\underline{K}}_{11}^{-1} \underline{\underline{K}}_{1S} - \underline{\underline{K}}_{S2} \underline{\underline{K}}_{22}^{-1} \underline{\underline{K}}_{2S}$ est la matrice du complément de Schur primal et $\underline{F}_{Schur} = \underline{F}_S - \underline{\underline{K}}_{S1} \underline{\underline{K}}_{11}^{-1} \underline{F}_1 - \underline{\underline{K}}_{S2} \underline{\underline{K}}_{22}^{-1} \underline{F}_2$. Cette approche crée un nouveau système réduit sur l'interface et peut être résolu soit d'une manière directe ou itérative.

Méthode de Schur duale On se repose dans cette approche sur l'introduction d'une variable d'interface comme une dérivée du déplacement sur l'interface, ce qui donne pour le cas unidimensionnel :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \lambda, \text{ sur } S_{12} \quad (1.8)$$

De même que la méthode primale, la condensation du système discret sur l'équation de continuité de l'interface $u_1/S_{12} - u_2/S_{12} = 0$, on obtient le problème de Schur duale sur l'interface de la forme :

$$\left(\underline{\underline{K}}_{1,Schur} + \underline{\underline{K}}_{2,Schur} \right)^{-1} \lambda = h \left(\underline{\underline{K}}_{2,Schur}^{-1} \underline{F}_{2,Schur} - \underline{\underline{K}}_{1,Schur}^{-1} \underline{F}_{1,Schur} \right) \quad (1.9)$$

avec $\underline{\underline{K}}_{1,Schur} = \frac{1}{2} \underline{\underline{K}}_{SS} - \underline{\underline{K}}_{S1} \underline{\underline{K}}_{11}^{-1} \underline{\underline{K}}_{1S}$, $\underline{\underline{K}}_{2,Schur} = \frac{1}{2} \underline{\underline{K}}_{SS} - \underline{\underline{K}}_{S2} \underline{\underline{K}}_{22}^{-1} \underline{\underline{K}}_{2S}$ et $\underline{F}_{1,Schur} = \underline{F}_S / S_{12} - \underline{\underline{K}}_{S1} \underline{\underline{K}}_{11}^{-1} \underline{F}_1$, $\underline{F}_{2,Schur} = \underline{F}_S / S_{12} - \underline{\underline{K}}_{S2} \underline{\underline{K}}_{22}^{-1} \underline{F}_2$.

Méthode FETI La méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) est une méthode de type Schur dual où les matrices $\underline{\underline{K}}_{schur,i}$ ne sont pas inversible.

Dans ce cas, un problème naturel et défini est considéré sur une grille grossière et les sous domaines présentent des conditions d'interface de type Neumann. La solution est défini à un mouvement solide rédige près, moyennant l'introduction des pseudo-inverses de $\underline{\underline{K}}_{schur,i}$.

1.2.3.2 Méthodes avec recouvrement

Les méthode de décomposition de domaines avec recouvrement se basent sur la partition d'un domaine ω en des sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , par exemple, tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Cette famille de méthodes est appelée les méthodes de Schwarz.

La méthode de Schwarz alternée (multiplicative) a été introduite par H.A. Schwarz en 1870 et qui consiste à calculer, d'une manière itérative, une solution de 1.4 qu'on note $\underline{U}^h = [\underline{U}_1^{h,n}, \underline{U}_2^{h,n}]$. Soit S_1 la frontière du domaine ω_1 sur Ω_2 et S_2 la frontière du domaine ω_2 sur Ω_1 . Dans chaque itération $k + 1$, connaissant l'état du système à l'itération k , on résout l'équilibre sur chaque sous-domaine en considération, en plus, les conditions de frontière suivantes :

$$\begin{cases} \underline{U}_1^{h,n+1} / S_1 = \underline{U}_2^{h,n} / S_1 & (1.10) \\ \underline{U}_2^{h,n+1} / S_2 = \underline{U}_1^{h,n+1} / S_2 & (1.11) \end{cases}$$

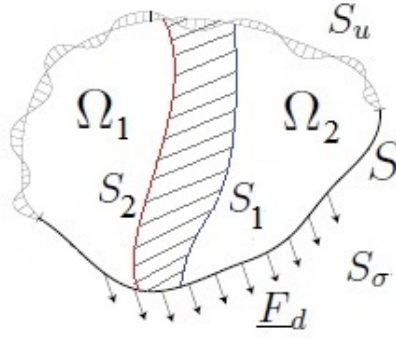


FIGURE 1.7 – Décomposition en 2 sous-domaines avec recouvrement

Dans la pratique, la résolution se fait moyennant des méthodes du type Gauss-Seidel et Jacobi par bloc. On attribue souvent l'adjectif "multiplicative" à cette approche parce que les corrections successives de l'erreur au cours d'une itération se font par projection sur les deux sous-domaines.

La méthode de Schwarz parallèle (additive) Cette approche procède comme la méthode de Schwarz alternée, mais, en considérant que $\underline{U}_2^{h,n+1}/S_2 = \underline{U}_2^{h,n}/S_2$. C'est une autre façon de rendre la parallélisation de la méthode de Schwarz plus efficace, réécrire l'algorithme en projetant l'erreur simultanément sur chaque sous-domaine et additionnant la suite des corrections locale sur le domaine global.

1.3 Le cadre Arlequin

La méthode Arlequin est un cadre plus large des méthodes de décomposition de domaine par recouvrement avec une partition de l'unité. Elle a été développée, il y a une vingtaine d'années dans le laboratoire MSSMat par Hachmi BEN DHIA (cf. [Dhi98]). Depuis, plusieurs travaux contribuant dans le développement de la méthode et ses applications pour traiter des problèmes industriels ont été réalisés. Dans cette section, on rappelle, synthétiquement, le cadre Arlequin dans sa généralité. A travers une formulation d'un problème Arlequin en statique, on souligne ses différents ingrédients faisant la base de la méthode. Finalement, on présente quelques applications des différents travaux réalisés, tout en appuyant sur sa grande flexibilité à traiter des problèmes multi-échelles et multi-modèles.

1.3.1 Généralité

Étant une méthode de couplage entre modèles/échelles, par des techniques de superposition, la méthode Arlequin s'applique sur des problèmes de la mécanique dont le domaine d'étude peut être partitionné en plusieurs sous-domaines à différentes représentations du matériau. La méthode consiste à mener des calculs multi-échelle, simultanés ou parallèles, en étant flexible et précis, avec un minimum de coût en temps machine. Elle repose, principalement, sur 3 étapes :

1. Superposer des modèles/échelles pour définir des zones de superposition des états mécaniques entre modèles.

2. Partitionner les énergies des modèles sur une zone de couplage afin d'éviter le dédoublement des énergies sur cette zone.
3. Couplage entre les modèles moyennant un opérateur de couplage.

Ces principes constituent la base opératoire du cadre Arlequin. Pour ce faire, il est important de définir les différentes zones de coexistence des modèles. La flexibilité de la méthode donne la possibilité de coupler des modèles non pas sur une interface, mais sur un volume de superposition, où les modèles peuvent se recouvrir partiellement ou totalement. Cette représentation multi-échelle distingue trois différentes opérations de modélisation couplage : la jonction, le zoom et la substitution. Ces opérations de couplage sont illustrés par des exemples de la littérature dans la sous-section 1.3.3.

1.3.2 Ingrédients du cadre Arlequin

Sur la base des principes du cadre Arlequin, nous développons ses différents ingrédients, à travers l'écriture d'une formulation Arlequin d'un problème mécanique générique. Signalant que la méthode Arlequin peut être utilisée avec des matériaux non linéaires, nous présentons cette formulation dans le cadre de l'élasticité linéarisée, par souci de clarté.

1.3.2.1 La zone de superposition

Partant du principe de la superposition des états mécaniques, on définit deux modèles sur deux ouverts connexes Ω_1 et Ω_2 formant une partition du domaine Ω :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (1.12)$$

Les surfaces S_u et S_σ sont partitionnés, par conséquent, sur les frontières $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ des modèles respectifs Ω_1 et Ω_2 . On note, ainsi, $S_{u,1}$, $S_{u,2}$, $S_{\sigma,1}$ et $S_{\sigma,2}$ les partitions des parties de la frontière encastéré et chargé sur chacun des domaines Ω_1 et Ω_2 respectivement, comme le montre la figure .

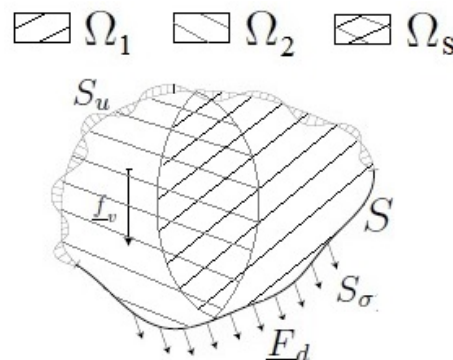


FIGURE 1.8 – Exemple de superposition de deux modèles

Les deux domaines se superposent sur une zone de mesure non nul $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Cette zone constitue le premier ingrédient de la méthode qui la zone de superposition qu'on note Ω_s . Sur cette zone, les états mécaniques des modèles superposés coexistent indépendamment. Cette remarque, introduit le deuxième ingrédient de la méthode Arlequin.

1.3.2.2 La zone de couplage

Afin d'établir un raccord entre les deux modèles superposés, on applique des forces de couplage sur une partie ou la totalité de la zone de superposition. Ces forces "fictive" tendent à raccorder les états mécaniques des modèles superposés : déplacements, contraintes,... en réduisant les écarts. La zone sur laquelle ces forces sont appliquées est appelée zone de couplage ou zone de collage qu'on note Ω_c . Cette zone est contenu dans la zone de superposition entre les deux modèles $\Omega_c \subseteq \Omega_s$. La partie complémentaire de Ω_c sur Ω_s est appelé zone libre qu'on note Ω_{fz} .

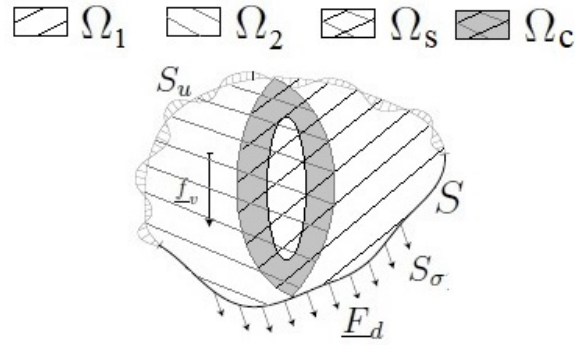


FIGURE 1.9 – Exemple de couplage Arlequin entre deux modèles superposés

1.3.2.3 L'espace médiateur

Les efforts introduits pour établir le raccord entre les modèles sont exprimés sous la forme de multiplicateurs de Lagrange, notés $\underline{\lambda}$. Ses efforts sont appliqués à certains composants ou même certains modes qui servent à comparer les états mécaniques et assurer le bon transfert d'information entre les modèles. L'ensemble de définition des efforts assurant le dialogues entre modèles supposés forme un espace pivot, appelé "espace médiateur" qu'on note M . L'importance du choix de cet espace apparaît lorsqu'on couple des modèles différents. On peut écrire dans le cas général :

$$M = \{\forall \underline{\lambda} \in L^2(\Omega_c) \text{ tels que } \langle \underline{\lambda}, \underline{u}_1 - \underline{u}_2 \rangle = 0\} \quad (1.13)$$

1.3.2.4 L'opérateur de couplage

La réduction de l'écart entre les états mécaniques des modèles superposés se fait à travers un opérateur de projection des champs sur l'espace médiateur. Cet opérateur de couplage, qu'on note Π peut être défini de plusieurs manière, comme on peut le constater dans la littérature et qui sollicitera notre intérêt dans le chapitre 3. On peut coupler les champs d'une manière rigide avec une approche Lagrangienne, d'une manière élastique par pénalisation, ou même avec un opérateur énergétique. Cet opérateur bilinéaire, défini et positif sert à contrôler d'une manière faible et en moyenne des écarts des champs entre les modèles superposés.

1.3.2.5 Les fonction de partition des énergies

Partant du troisième principe du cadre Arlequin qui consiste à distribuer l'énergie entre les modèles, les travaux virtuels associé à chacun des modèles sont pondérés par des fonctions, qui forment une partition de l'unité sur le domaine Ω . Ces fonctions ont pour rôle d'éviter le dédoublement de l'énergie du système sur la zone de couplage Ω_c . Pour chaque travail d'une force, on peut associer un couple de fonctions. Dans notre

cas, on note (α_1^k, α_2^k) pour le travail des forces internes et (α_1^f, α_2^f) pour celui des forces externes. Ces fonctions sont définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k^1 : \Omega_1 \rightarrow [0, 1] \\ \alpha_k^2 : \Omega_2 \rightarrow [0, 1] \\ \alpha_f^1 : \Omega_1 \rightarrow [0, 1] \\ \alpha_f^2 : \Omega_2 \rightarrow [0, 1] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1.14) \\ (1.15) \\ (1.16) \\ (1.17) \end{array}$$

$$\alpha_k^1 = \alpha_f^1 = \alpha_1^1 = 1 \quad \text{sur } \Omega_1 \setminus \Omega_s \quad (1.18)$$

$$\alpha_k^1 + \alpha_k^2 = 1; \alpha_f^1 + \alpha_f^2 = 1; \alpha_1^1 + \alpha_1^2 = 1 \quad \text{sur } \Omega_s \quad (1.19)$$

$$\alpha_k^2 = \alpha_f^2 = \alpha_1^2 = 1 \quad \text{sur } \Omega_2 \setminus \Omega_s \quad (1.20)$$

Les fonctions de partition de l'énergie sont d'une très grande importance parce qu'ils donnent la possibilité d'accorder différents niveaux de confiance et d'équilibrer la balance énergétique entre les deux modèles.

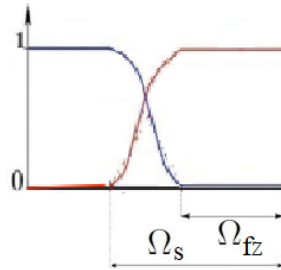


FIGURE 1.10 – Exemple de fonctions de partition de l'énergie pour deux modèles couplés

1.3.3 Applications diverses

Durant les dernières 20ème d'années, plusieurs travaux de recherche ont été menés dans le cadre Arlequin, en vue de traité des problèmes variés de la mécanique. Ces application ont montré la grande flexibilité de la méthode pour coupler des échelles différentes ou des modèles qui non pas la même nature. Nous citons dans cette section quelques applications de couplage possibles traitées dans la littérature. Nous les classons selon l'opération de couplage Arlequin employée.

1.3.3.1 La jonction

L'opération de jonction consiste à superposer deux modèles partiellement sur une zone notés. La liaison entre les deux modèles, dans ce cas, se fait totalement sur la zone superposition. Cette modélisation peut être appliquée pour coupler des modèles de natures différentes.

Enrichissement d'une poutre 1D en flexion par un modèle de plaque 2D

Dans le travaux de G. Rateau [Rat03], L'opération de jonction est appliqué pour couplé un modèle de poutre 1D à un modèle de plaque 2D en flexion. Ce dernier représente la zone critique où un enrichissement est nécessaire pour visualiser les singularités au niveau de l'encastrement. Plus loin, un modèle moins riche décrivant l'état global de la poutre par un modèle 1D. Le raccord entre les deux modèles est assuré par un couplage Arlequin. Les résultats de la simulation sont représenté par la figure 1.11.

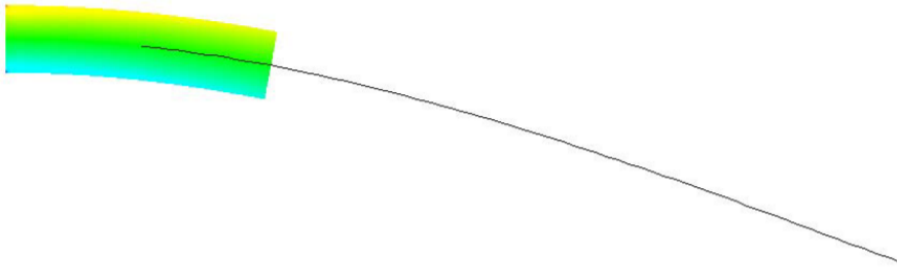


FIGURE 1.11 – Application de l'opération jonction pour le cas d'une poutre en flexion

Modélisation thermomécanique d'une brique Dans le cadre de la thèse de Ahmed SRDI avec le constructeur de brique en terre cuite Bouyer-Leroux, une nouvelle modélisation de la structure de la brique a été mise en place. La conception consiste à coupler des modèles de plaques 2D pour les parois des alvéoles de la brique à des modèles 3D sur les intersections entre les plaques. Cette représentation a donné une solution plus facile pour l'aide à la conception en réduisant les coûts de calcul de la simulation de la tenue d'un mur en brique au feu.

1.3.3.2 La substitution

L'opération de substitution consiste à superposer un modèle totalement sur un autre. Le couplage, dans ce cas, est réalisé sur un sous-domaine strict de la zone de superposition. Cette opération donne naissance à une zone sans couplage appelé zone flottante. Sur cette zone, on peut considérer plusieurs modélisations, en agissant sur la partition des énergies, où un modèle peut être privilégié par rapport à un autre. Cette modélisation permet de substituer localement un modèle par un autre sans modifier le modèle initial.

1.3.3.3 Modélisation d'une fissure sur une plaque 2D

Une des applications les plus intéressantes qu'on trouve dans les travaux de G. Rateau [Rat03] est le problème de fissuration en statique. En effet, sur un modèle grossier sein, un patch fin contenant une fissure est couplé pour substituer une zone considérée critique.

1.3.3.4 Endommagement et propagation d'une fissure en statique

De la même manière, O. Jamond, dans ses travaux [Jam11] s'est intéressé à la modélisation de la propagation de l'endommagement et de la fissure en quasi-statique sur des structures de pneu avec Michelin. L'idée était de représenter un patch qui évolue au cours du temps pour suivre l'avance de la fissure substituant la zone d'endommagement autour de son front. Cette application est illustrée par la figure

1.3.3.5 Couplage multi-patch d'une aube de turbine multi-perforée

Dans le cadre des travaux de N. ELkhodja [Elk10], l'opération de substitution a été appliquée pour introduire plusieurs patch contenant des perforation sur un modèle d'aube de turbine sein. Cette solution donne la possibilité de traiter le problème sur un solveur parallèle et gagner énormément en temps de calcul et montre la grande flexibilité apportée par la modélisation Arlequin.

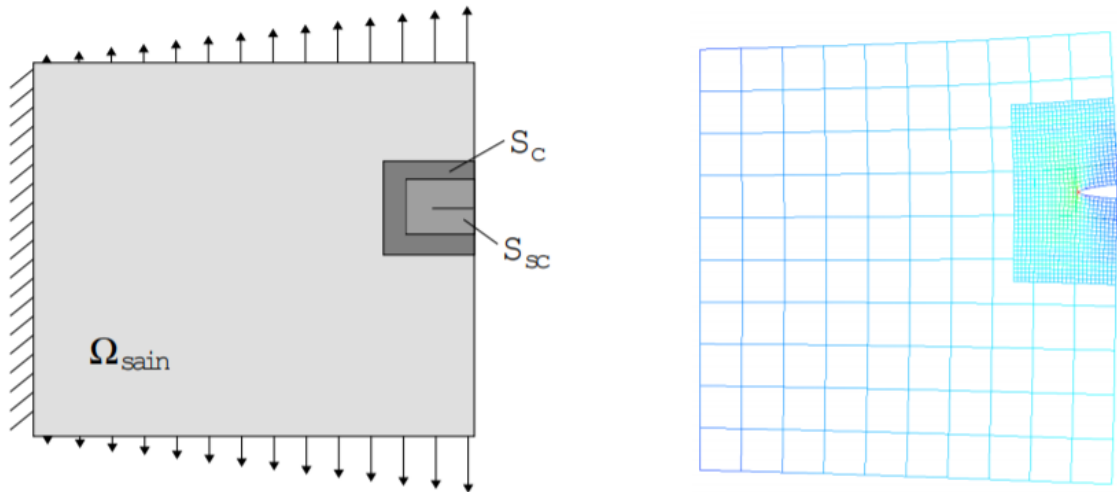


FIGURE 1.12 – Application d'une opération de substitution pour introduire une fissure sur modèle sein

1.3.3.6 Le zoom

L'opération du zoom consiste à superposer une représentation fine sur une plus grossière afin d'enrichir la solution du grossier sur cette zone. La zone de superposition, dans ce cas, est entièrement la zone de couplage qui est en même temps le modèle fin. Cette représentation, considère que l'enrichissement de la solution sur la zone de couplage est réalisé par des fonctions de partition de l'énergie.

1.3.3.7 Couplage discret-continue

Pour ce type d'opération, on cite les problèmes de contact ou d'impact, où un modèle fin est employé au niveau de la zone impacté afin de représenter avec plus de précision la solution sur cette zone. La figure 1.13 montre un calcul réalisé par le codes Aster d'EDF où les solides rigides sont approché par des solides très raides.

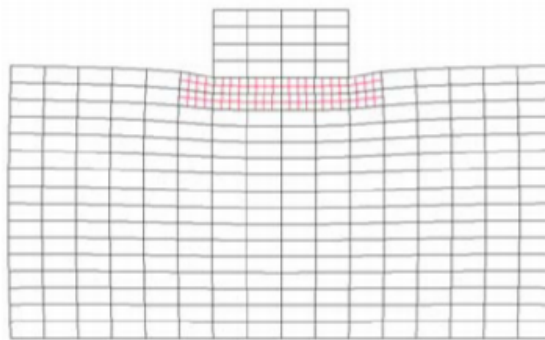


FIGURE 1.13 – Application de l'opération zoom pour un problème d'indentation

1.4 Formulations continues et discrètes du problème d'élastodynamique linéaire

Dans cette section, on rappelle une formulation forte et la formulation faible primale, mono-modèle, d'un problème mécanique de dynamique transitoire d'un solide dans le

cadre de l'élasticité linéaire. On rappelle aussi les discrétisations classiques, en espace et en temps, qui nous serviront ultérieurement.

1.4.1 Formulation locale du problème mono-modèle (\mathcal{P}_{dyn}^{loc})

On considère un solide élastique linéaire homogène et isotrope et on se place dans le cadre des Hypothèses de Petites Perturbations (*HPP*). Le solide occupe l'adhérence d'un domaine Ω , borné et régulier de l'espace \mathcal{R}^3 . Ce volume est délimité par une frontière, notée $\partial\Omega$, divisée en deux parties complémentaires : S_u supposée être soumise à un déplacement \underline{u}_d donné et S_σ soumise à une densité surfacique d'efforts imposée \underline{F}_d . On note \underline{f}_v la densité d'efforts volumiques appliquée au solide (voir figure (1.14)).

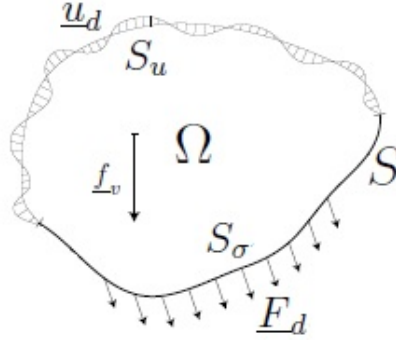


FIGURE 1.14 – Configuration mécanique de référence

Étant donné l'état initial du solide à $t = 0$, on souhaite calculer son état (déplacements et vitesses) à chaque instant t de l'intervalle d'étude $I =]0, T]$, où T est l'instant final de l'étude. Pour cela, on doit résoudre le système d'équations suivant :

$$\left(\mathcal{P}_{dyn}^{loc} \right) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Connaissant l'état initial } \begin{cases} \underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{u}_0^d(\underline{x}) \\ \underline{\dot{u}}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0^d(\underline{x}) \end{cases}, \\
 \forall t \in I, \forall \underline{x} \in \Omega, \text{ Trouver } \underline{u}(\underline{x}, t) \text{ tel que :} \\
 \text{Équations d'équilibre de la dynamique linéaire} \\
 \text{div}(\underline{\sigma}(\underline{x}, t)) + \underline{f}_v(\underline{x}, t) = \rho \underline{\ddot{u}}(\underline{x}, t) \quad (1.21) \\
 \text{Comportement élastique linéaire} \\
 \underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) \quad (1.22) \\
 \text{Équations de compatibilité} \\
 \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}(\underline{u}(\underline{x}, t)) + \underline{\nabla}(\underline{u}(\underline{x}, t))^t) \quad (1.23) \\
 \text{Conditions aux limites} \\
 \underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^d(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in S_u \quad \forall t \in I \quad (1.24) \\
 \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = \underline{F}_d(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in S_\sigma \quad \forall t \in I \quad (1.25) \\
 \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = \underline{F}_d(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in S_\sigma \quad \forall t \in I \quad (1.26) \\
 \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = \underline{F}_d(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in S_\sigma \quad \forall t \in I \quad (1.27)
 \end{array} \right.$$

où \underline{u} est le champs de déplacement, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est le tenseur des déformations linéarisés, $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes et $\underline{\underline{R}}$ est le tenseur des rigidités élastiques (dont les expression ne dépendent que du module d'Young E et du coefficient de poisson ν du matériau).

Remarque 1.1 :

Les champs scalaires, vectoriels et tensoriels dépendent de l'espace et du temps. Pour simplifier l'écriture, on omet de référer à cette dépendance dans toute la suite, sauf quand la clarté du propos l'exige. De plus, les dérivées temporelles seront représentées par des notations classiques. Ainsi, pour une grandeur A , dépendante de l'espace et du temps,

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{et} \quad \ddot{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

La solution de ce problème dynamique est souvent impossible à calculer analytiquement, notamment lorsque le domaine occupé par le solide est complexe géométriquement. C'est la raison pour laquelle on a recours aux méthodes d'approximation numérique. C'est la méthode des éléments finis qui est la plus utilisée en mécanique des solides pour la discrétisation en espace du problème. Cette méthode, de type Galerkin, s'applique aux formulations faibles des problèmes classiques de la mécanique et de la physique régis par des EDP. Nous allons donner celle primale du problème (φ_{dyn}^{loc}) dans la section qui suit.

1.4.2 Formulation dynamique faible primale continue du problème (φ_{dyn}^{var})

La formulation faible primale du problème dynamique local, défini par (1.21)-(1.27), s'obtient classiquement, en dérivant le Principe des Travaux Virtuels des équations d'équilibre (1.21) et ce

1. en faisant travailler, en tout point de Ω , toutes les forces impliquées par (1.21) dans des champs cinématiquement admissibles à 0 sur la partie S_u de la frontière,
2. en en dérivant l'équilibre résultant des travaux de tous les efforts impliqués,
3. en opérant une intégration par parties (Formule de Green) pour affaiblir la régularité demandée au tenseur des contraintes,
4. en utilisant les conditions aux limites de type statique.

La formulation dynamique faible primale est alors obtenue en utilisant la relation de comportement de Hooke (1.22) et les équations dites de compatibilité (1.23) pour ne garder que le champ primal \underline{u} comme champ inconnu du problème. En bilan, étant donné les conditions initiales $\underline{u}(\cdot, 0) = \underline{u}_0^d$ et $\dot{\underline{u}}(\cdot, 0) = \underline{v}_0^d$, le problème faible primal s'écrit, alors :

Pour tout temps $t \in I =]0, T]$,

$$(\varphi_{dyn}^{var}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{u}(t) \in C^1(]0, T[; W_{u_d}) \text{ tel que } \forall \underline{w} \in \underline{W}_0, \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{w}) : \underline{\underline{R\varepsilon}}(\underline{u}(t)) \, d\Omega + \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \rho \underline{u}(t) \cdot \underline{w} \, d\Omega \\ - \int_{\Omega} \underline{f}_v \cdot \underline{w} \, d\Omega = \int_{S_\sigma} \underline{F}_d(t) \cdot \underline{w} \, dS \\ W_{u_d} = \{ \underline{w} \in (H^1(\Omega))^3; \underline{w} = \underline{u}^d(\cdot, t), \text{ sur } S_u \} \end{array} \right. \quad (1.28)$$

$$W_{u_d} = \{ \underline{w} \in (H^1(\Omega))^3; \underline{w} = \underline{u}^d(\cdot, t), \text{ sur } S_u \} \quad (1.29)$$

Sous des hypothèses classiques de régularité des données (le domaine Ω , les chargement externes, la donnée \underline{u}_0 et les données initiales et des paramètres matériau), il est bien connu que le problème (φ_{dyn}^{var}) admet une solution unique qui satisfait, en plus :

$$\underline{u} \in C^2([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^1(\Omega)) \quad (1.30)$$

Mais il est aussi bien connu que le calcul analytique de cette solution n'est pas possible, dans le cas général. C'est la raison pour laquelle nous allons procéder à l'approximation numérique de ce problème dynamique transitoire.

Dans la suite, on suppose, pour alléger l'écriture, que $\underline{u} = \underline{0}$ et que les conditions initiales sont nulles (Sachant qu'on peut traiter les cas $\underline{u}_d \neq \underline{0}$ et les cas de CI non homogènes). En conséquence, on note W_0 l'espace des champs des déplacements admissibles.

1.4.3 Discrétisation

Tel que formulé, le problème faible continu (φ_{dyn}^{var}) présente une double infinitude. La première, spatiale, est liée à la dimension infinie de l'espace des champs cinématiquement admissibles. La seconde, temporelle, est liée à l'infinité d'instant de temps dans l'intervalle de temps I . Il ne peut donc être résolu numériquement, même si l'on disposait des ordinateurs les plus puissants. Ce problème ne peut alors qu'être approché, en utilisant, par exemple, une méthode de discrétisation en espace et un schéma d'intégration en temps. Une discrétisation classique consiste à utiliser la méthode des éléments finis conformes en espace (eg. [ZT00]) et la méthode des différences finies en temps (eg. [Ame14]). Ces discrétisations sont celles utilisées dans tout le document.

1.4.3.1 Semi-discrétisation spatiale - Méthode Galarkin

Soit W_{0h} un sous-espace vectoriel de dimension finie n_h de l'espace des champs cinématiquement admissibles W_0 . Soient $\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \dots, \underline{\phi}_{n_h}$ n_h fonctions linéairement indépendantes de W_{0h} . Ces fonctions constituent une base du sous-espace W_{0h} . On la note \mathcal{B}_{n_h} . On approche le champ de déplacement \underline{u} , à l'instant t , par un champ \underline{u}_h , décomposé dans la base \mathcal{B}_{n_h} comme suit :

$$\underline{u}_h(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_h} u_i(t) \underline{\phi}_i(\underline{x}) \quad (1.31)$$

Ce champ est solution du problème semi-discrétisé $(\varphi_{dyn}^{var})_h$ suivant : $\forall t \in I$,

$$(\varphi_{dyn}^{var})_h \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_i(t))_{1 \leq i \leq n_h} ; \forall 1 \leq j \leq n_h \\ \int_{\Omega} \left\{ \underline{\varepsilon}(\underline{\phi}_j) : \underline{R} \sum_{i=1}^{n_h} \underline{\varepsilon}(\underline{\phi}_i) u_i(t) + \sum_{i=1}^{n_h} \rho \ddot{u}_i(t) \underline{\phi}_i \cdot \underline{\phi}_j \right\} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \underline{\phi}_j \cdot \underline{f}_v d\Omega + \int_{S_\sigma} \underline{F}_d(t) \cdot \underline{\Phi}_j dS, \\ \underline{u}_h(\cdot, 0) = \underline{0}, \dot{\underline{u}}_h(\cdot, 0) = \underline{0} \end{array} \right. \quad (1.32)$$

$$(1.33)$$

On en déduit que le système discret $(\varphi_{dyn}^{var})_h$, défini par (1.32) - (1.33), est équivalent à la résolution du système linéaire d'équations différentielles ordinaires de second ordre en temps suivant :

$$\left(\mathcal{S}_{dyn}^{faible} \right) \left\{ \begin{array}{l}
 \underline{KU}_h(t) + \underline{M}\ddot{\underline{U}}_h(t) = \underline{F}_h(t) \quad \forall t \in I \quad (1.34) \\
 \text{avec} \\
 K_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{\phi}_i) : \underline{R\varepsilon}(\underline{\phi}_j) \, d\Omega, 1 \leq i, j \leq n_h \quad (1.35) \\
 M_{ij} = \int_{\Omega} \rho \underline{\phi}_i \cdot \underline{\phi}_j \, d\Omega, \forall 1 \leq i, j \leq n_h \quad (1.36) \\
 \underline{F}_h(t)_i = \int_{\Omega} \underline{\phi}_i \cdot \underline{f}_v \, d\Omega + \int_{S_{\sigma}} \underline{\phi}_i \cdot \underline{F}_d \, dS, 1 \leq i \leq n_h \quad (1.37) \\
 (\underline{U}_h)_i = u_i, 1 \leq i \leq n \quad (1.38) \\
 (\ddot{\underline{U}}_h)_i = \ddot{u}_i, 1 \leq i \leq n_h \quad (1.39) \\
 \underline{U}_h(0) = \underline{U}^0 \quad (1.40) \\
 \underline{V}_h(0) = \underline{V}^0 \quad (1.41)
 \end{array} \right.$$

où \underline{U}^0 et \underline{V}^0 désignent, respectivement, les composantes interpolés des champs \underline{u}_0^d et \underline{u}_0^d sur \underline{W}_{0h} .

La discrétisation temporelle du système (1.34)-(1.39) fait l'objet de la sous-section suivante.

1.4.3.2 Discrétisation du problème $(\mathcal{S}_{dyn}^{faible})$ par la méthode des différences finies

On rappelle que le système (1.34)-(1.41) peut être résolu par une approche modale. Cette dernière consiste à prendre comme fonctions de base la base hilbertienne de \underline{W}_{0h} formée par les vecteurs propre du problème permettant de fournir la solution analytiquement par un développement utilisant les valeurs et les vecteurs propres. Dans ce travail, pour des considérations de généralité, nous optons pour une méthode de résolution de ce système qui a une portée plus générale que la méthode modale. Il s'agit de la méthode des Différences Finies (MDF)(cf. [HHT77]), qui est fondée sur des développements de Taylor.

La MDF la plus couramment utilisée en mécanique des solides est celle de Newmark [New59]. Il s'agit en fait d'une famille de schémas à deux paramètres β et γ , intervenant respectivement dans l'approximation du déplacement et de la vitesse.

Pour être précis, commençons par opérer un découpage de l'intervalle de temps I en N sous-intervalles égaux. On définit le pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$. On introduit les instants discrets t_n avec $0 = t_0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_n = n\Delta t < \dots < t_N = N\Delta t = T$. En notant alors $(\underline{U}^n, \dot{\underline{U}}^n)$ une approximation en temps de coordonnées de la phase $(\underline{U}(t_n), \dot{\underline{U}}(t_n))$. La famille de schémas de Newmark propose d'approcher le coordonnées de la phase (dans la base \mathcal{B}_{n_h}) $(\underline{U}(t_n + \Delta t), \dot{\underline{U}}(t_n + \Delta t))$ comme suit :

$$\underline{U}(t_n + \Delta t) \approx \underline{U}(t_n) + \Delta t \dot{\underline{U}}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta) \ddot{\underline{U}}(t_n) + 2\beta \ddot{\underline{U}}(t_n + \Delta t) \right] \quad (1.42)$$

$$\dot{\underline{U}}(t_n + \Delta t) \approx \dot{\underline{U}}(t_n) + \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{\underline{U}}(t_n) + \gamma \ddot{\underline{U}}(t_n + \Delta t) \right] \quad (1.43)$$

La question, à présent, est comment calculer la quantité $\ddot{\underline{U}}(t_n + \Delta t)$?

En fait, cette quantité est obtenue par la résolution du système composé par l'équation d'équilibre dynamique (1.34) et les développements (1.42)-(1.43).

Au premier pas de calcul, on peut exploiter directement les conditions initiale $\dot{\underline{U}}(0)$ et $\underline{U}(0)$ en choisissant $\beta = 0$, à condition d'avoir $\gamma \neq 1$ pour calculer $\ddot{\underline{U}}(0)$.

On constate, alors, que, connaissant \underline{U}^0 , $\underline{\dot{U}}^0$ et $\underline{\ddot{U}}^0$, on peut calculer \underline{U}^1 , $\underline{\dot{U}}^1$ et $\underline{\ddot{U}}^1$ en résolvant (1.34) où on remplace $\underline{U}(t_1)$ et $\underline{\dot{U}}(t_1)$ par leurs expressions données par (1.42) et (1.43).

De manière générique, on procède comme suit :

1. $\underline{U}(0) = \underline{U}^0$, $\underline{\dot{U}}(0) = \underline{\dot{U}}^0$ connus, on peut d'abord observer que l'on peut calculer $\underline{\ddot{U}}^0$ par la résolution de $\underline{M}\underline{\ddot{U}}^0 = \underline{F}^0 - \underline{K}\underline{U}^0$.
2. On peut imaginer que l'on dispose à l'instant n , des champs de \underline{U}^n , $\underline{\dot{U}}^n$ et $\underline{\ddot{U}}^n$. Le schéma de Newmark consiste à approcher \underline{U}^{n+1} , $\underline{\dot{U}}^{n+1}$ et $\underline{\ddot{U}}^{n+1}$ par :

$$\underline{U}^{n+1} = \underline{U}^n + \Delta t \underline{\dot{U}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta) \underline{\ddot{U}}^n + 2\beta \underline{\ddot{U}}^{n+1} \right] \quad (1.44)$$

$$\underline{\dot{U}}^{n+1} = \underline{\dot{U}}^n + \Delta t \left[(1 - \gamma) \underline{\ddot{U}}^n + \gamma \underline{\ddot{U}}^{n+1} \right] \quad (1.45)$$

3. Sachant que :

$$\underline{M}\underline{\ddot{U}}^{n+1} + \underline{K}\underline{U}^{n+1} = \underline{F}^{n+1} \quad (1.46)$$

Ce qui permet d'avancer le schéma. En effet, en injectant (1.44) dans (1.46), on a :

$$\underline{M}\underline{\ddot{U}}^{n+1} + \underline{K}\underline{U}^n + \Delta t \underline{K}\underline{\dot{U}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \underline{K}\underline{\ddot{U}}^n + \Delta t^2 \beta \underline{K}\underline{\ddot{U}}^{n+1} = \underline{F}^{n+1} \quad (1.47)$$

soit

$$\left[\underline{M} + \beta \Delta t^2 \underline{K} \right] \underline{\ddot{U}}^{n+1} = \underline{\tilde{F}}^{n+1} \quad (1.48)$$

$$\underline{\tilde{F}}^{n+1} = \underline{F}^{n+1} - \underline{K}\underline{U}^n - \Delta t \underline{K}\underline{\dot{U}}^n - \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \underline{K}\underline{\ddot{U}}^n \quad (1.49)$$

On note $\underline{M} + \beta \Delta t^2 \underline{K} = \underline{M}_{eff}$

4. On résout $\underline{M}_{eff} \underline{\ddot{U}}^{n+1} = \underline{\tilde{F}}^{n+1}$

5. Ayant $\underline{\ddot{U}}^{n+1}$ on calcule \underline{U}^{n+1} par (1.44) et $\underline{\dot{U}}^{n+1}$ par (1.45).

Rappelons ici que la stabilité des schémas numériques de Newmark dépend du choix des coefficients β et γ . On a des schémas inconditionnellement stables si on choisit des coefficients vérifiant :

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (1.50)$$

et les schémas sont conditionnellement stables si on choisit des paramètres tels que :

$$\gamma > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta < \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (1.51)$$

Dans ce cas, la stabilité est conditionnée par le choix du pas de temps qui, pour assurer la stabilité, doit respecter l'inégalité (1.52).

$$\Delta t \leq \frac{T_{min}}{\pi} \left(\left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 - 4\beta \right) \quad (1.52)$$

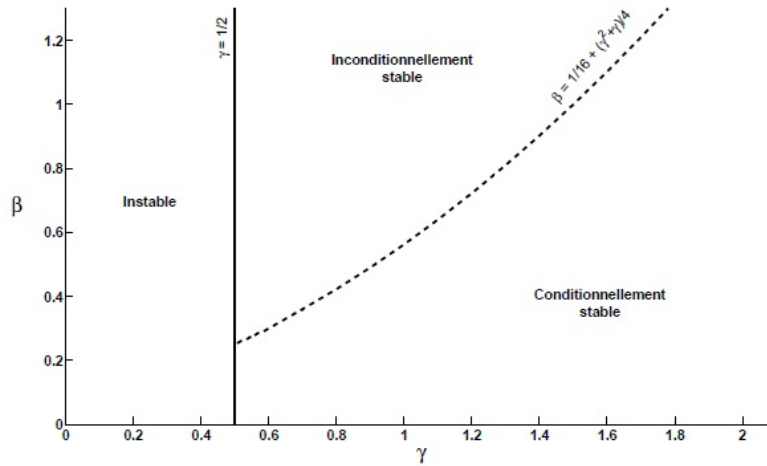


FIGURE 1.15 – Stabilité du schéma newmark en fonction de ses paramètres

où T_{min} est la plus petite période de vibration du système étudié. La figure (1.15) fait la synthèse de la stabilité des schémas de Newmark selon le choix des paramètres β et γ .

La figure (1.15) montre, en fonction des choix des paramètres β et γ , les zones d'instabilité, de stabilité non conditionnelle et de stabilité conditionnelle.

Quelques algorithmes de la famille des schémas de Newmark qui ont une particularité, notamment d'ordre de l'erreur en temps, sont donnés dans le tableau (1.1).

Algorithme	γ	β	Limite de stabilité	Erreur d'amplification	Erreur sur la période
Différence centrée	$\frac{1}{2}$	0	2	0	$-\frac{\omega^2 \Delta t^2}{24}$
Fox&Goodin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	2.45	0	$O(\Delta t^3)$
Accélération linéaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	3.46	0	$\frac{\omega^2 \Delta t^2}{24}$
Accélération moyenne	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	∞	0	$-\frac{\omega^2 \Delta t^2}{12}$
Accélération moyenne modifiée (HHT)	$\frac{1}{2} + \alpha$	$\frac{(1 + \alpha)^2}{4}$	∞	$-\alpha \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2}$	$-\frac{\omega^2 \Delta t^2}{12}$

TABLE 1.1 – Quelques algorithmes de la famille de Newmark

Pour terminer, rappelons la notion de schéma explicite et de schéma implicite.

Un **schéma** est dit **explicite** si on peut déterminer les inconnues à l'instant actuel explicitement en fonction des seules quantités calculées aux incréments de temps précédents. Pour cela, ce schéma est d'abord choisi de sorte que l'on soit amené à inverser une matrice de masse pour la résolution du système linéaire d'équilibre dynamique, à chaque pas de temps.

Dans un second temps, on utilise une des procédures numériques classiques pour condenser la matrice masse sur sa diagonale, rendant la résolution du système explicite, diminuant ainsi considérablement les coûts de résolution à chaque pas de temps.

Ce gain en temps a une contrepartie, à savoir que les schémas explicites sont conditionnellement stables : le pas de temps Δt est contrôlé. Il s'agit de la condition CFL. Cette condition fait intervenir la vitesse des ondes dans le solide considéré, ainsi que la taille des éléments. Le pas de temps est contraint par la taille du plus petit élément du maillage utilisé.

Un schéma est dit **implicite** dans le cas contraire où il faut inverser un système linéaire (non condensable sur la diagonale) pour déterminer les inconnus à l'instant courant. Pour les schémas de Newmark, il faut inverser la matrice $\underline{\underline{M}}_{eff}$. La résolution, à chaque pas de temps, est alors plus coûteuse que celle avec des schémas explicites. Mais les schémas implicites assurent une stabilité inconditionnelle, permettant d'utiliser des grands pas de temps, même s'il faut, dans ce cas, contrôler les erreurs en temps.

Remarque 1.2 :

Une amélioration de la famille des schémas de Newmark a été proposée par Hilbert, Hugues et Taylor [HHT77]. Elle a conduit à la méthode HHT ou α -HHT. Cette méthode consiste à rajouter un troisième paramètre α à la famille des schémas de Newmark.

$$\underline{\underline{M}}\ddot{U}^{n+1} + (1 + \alpha)\underline{\underline{K}}U^{n+1} - \alpha\underline{\underline{K}}U^n = F(t_n + (1 + \alpha)\Delta t) \quad (1.53)$$

avec $\alpha \in [-\frac{1}{3}, 0]$ pour préserver la stabilité des schémas. La particularité de ces schémas est qu'ils dissipent numériquement l'énergie. On peut estimer l'amortissement numérique apporté par un schéma HHT sur une onde donnée $\frac{1}{T}$, où T est sa période, par l'expression suivante :

$$\xi = \alpha \frac{\pi \Delta t}{T} + o\left(\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2\right) \quad (1.54)$$

expression à partir de laquelle on constate que les schémas HHT amortissent plus les hautes fréquences. Cet amortissement vient s'ajouter à l'amortissement physique, éventuellement présent.

1.5 Méthodes numériques pour la mécanique de la rupture

Vu la complexité du phénomène de rupture en dynamique, la recherche d'une bonne méthode numérique adéquate pour la simulation d'un tel type de phénomènes est un sujet d'actualité. Dans la littérature, on trouve diverses méthodes développées afin de prévoir numériquement la propagation des fissures tout en tenant compte des phénomènes de la dynamique. Nishioka a fait un état de l'art de certaines méthodes de simulation de la rupture en dynamique [NA86], mais les plus récentes n'en font pas partie. Dans cette section, on s'intéresse à présenter synthétiquement certaines de ces méthodes. On consacre la majeure partie à la présentation de la méthode des éléments finis étendus (XFEM).

1.5.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est couramment utilisée pour simuler des problèmes de la mécanique, particulièrement les problèmes de propagation de fissure. Dans ce cas, la fissure est décrite explicitement par la géométrie. Afin de tenir compte des singularités

du problème la fissure, le maillage doit être très fin au voisinage de la pointe de la fissure. En outre, Barsoum [Bar74] a développé une technique pour améliorer la représentation des champs singuliers au voisinage de la pointe de la fissure qui consiste à introduire des éléments contenant des nœuds supplémentaires sur les arrêtes, ce qui permet d'intégrer mieux la singularité. Lors de la simulation de propagation de la fissure, une difficulté se pose au niveau du maillage. Alors, on peut distinguer deux familles de méthodes :

1.5.1.1 Méthode de déboutonnage des nœuds

Pour des fissures qui se propagent purement en mode I, la fissure évolue selon une ligne droite. Alors, on connaît à priori le trajet de la fissure. Par conséquent, le maillage doit être construit de manière qu'on tient compte de son trajet. Pour représenter la propagation de la fissure, on utilise la technique de déboutonnage ou encore dite "relâchement des nœuds" [MS89a, MS89b, SDN03, SR05, SR06]. Elle consiste à appliquer des forces nodales afin de relâcher les nœuds progressivement (voir fig 1.16). Cependant cette méthode présente certaines difficultés au choix de l'instant de propagation et à la définition des efforts nodales de relâchement.

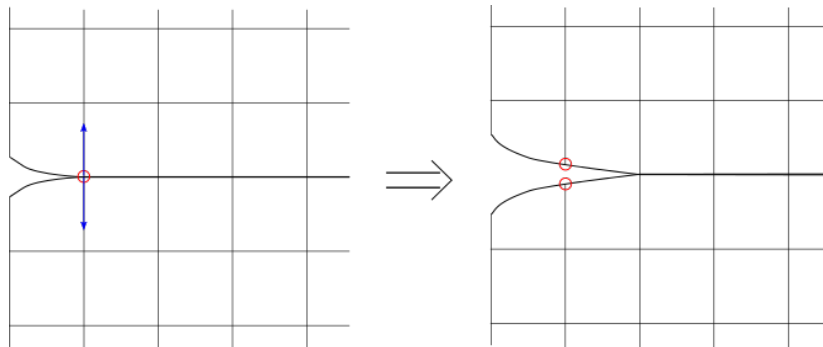


FIGURE 1.16 – Illustration de la méthode de déboutonnage des nœuds

1.5.1.2 Méthode de remaillage

Pour des fissures qui se propagent en mode mixte, on ne peut pas prévoir la trajectoire de propagation de la fissure, ce qui rend le problème plus complexe. Alors, d'autres techniques sont adoptées pour représenter la propagation de la fissure. On cite principalement, les méthodes de remaillage [BWIS96, BBCT00, BBC03] et les méthodes des éléments d'interface à zones cohésives [NROR01]. Pour les méthodes avec remaillage, il est nécessaire de projeter les champs de l'ancien maillage sur le nouveau. Cette famille de méthodes fait poser des questions sur sa stabilité et sur son application pour les matériaux non-linéaires. Pour les méthodes des éléments d'interface à zones cohésives, la trajectoire de propagation est influencée par le choix de la discrétisation et de la loi de décohésion de l'interface.

1.5.2 Méthode des éléments de frontière

Dans la littérature, de nombreux développements des méthodes par éléments de frontière pour la mécanique de la rupture ont été fait [YND95]. Cette méthode consiste à représenter les fissures comme des frontières du domaine, ce qui rend leur évolution plus simple. Cependant, il est nécessaire d'intégrer, à chaque pas temps, les solutions en espace et en temps, ce qui peut engendrer des problèmes de conditionnement des matrices et de stockage des données.

1.5.3 Méthode sans maillage

Les méthodes sans maillage sont très connues par leur capacité à simuler des phénomènes représentant des discontinuités en espace ou en temps, comme l'écrasement, le crash. En mécanique de la rupture, la méthode la plus utilisée est la méthode EFG (Element Free Galerkin Method) proposée par Belytshko [BLG94]. L'avantage que présente cette méthode est l'absence de discrétisation de la fissure, alors la propagation de la fissure s'effectue en minimisant la contribution de certains nœud à l'approximation des champs [BB99]. Cette méthode est coûteuse à cause des relations qu'il faut établir entre les nœuds voisins. De plus, la définition des conditions aux limites est très délicate.

1.5.4 Méthode des éléments finis étendue (X-FEM)

nite element method Tech University of Maryland Institute for Physical Science and College Park MD

La méthode des éléments finis étendue s'appuie sur le concept de la partition de l'unité (PUM), proposée par Melenk et Babuska [MB97]. Ce dernier consiste à enrichir l'approximation de la méthode des éléments finis avec des fonctions capables de mieux représenter les champs d'un problème donné. Cette méthode est appliquée à la mécanique de la rupture afin de représenter la discontinuité et les singularités d'une fissure dans un domaine d'étude. L'avantage de cette méthode est qu'elle n'a pas besoin d'un nouveau maillage pour suivre la propagation de la fissure. Pour chaque avancée de la fissure, on ne fait qu'ajouter à des nouveaux éléments des fonctions d'enrichissement. Les premiers travaux sur la méthode des éléments finis étendue sont attribués à Benzley [Ben74]. Puis, elle a été développée en quasi-statique par Belytshko et Black [BB99] et Dolbow et Belytshko [DB99]. Ensuite, plusieurs travaux ont été menés pour appliquer la méthode sur des problème de propagation de fissure en 2D [PCGM07, MRCB06], en 3D [DHLT01, MGB02, GMB02], avec contact entre les lèvres de la fissure [DMB01] ou en introduisant un segment cohésif le long d'une fissure [MB02]. Finalement, des travaux récents ont essayé d'étendre la méthode à la propagation dynamique de la fissure [RGC04, Rét05, GMRC07].

1.5.4.1 Les fonctions de niveau

La représentation de la discontinuité et son évolution au cours du temps peuvent être effectuées de deux manière différentes : soit par maillage de la fissure à chaque évolution par des segments en 2D ou des triangles en 3D. Soit par l'intermédiaire de fonctions qui localisent la fissure appelées fonctions de niveau ("level-set"). Ce type de problèmes consiste à chercher les iso-zéros d'un champ donné pour localiser l'interface. Ainsi, l'évolution de la dernière ne dépend que de la vitesse normale de la surface.

La première application des fonctions de niveau date de 1994 [SSO94]. Plusieurs travaux ont contribué à son amélioration dont on cite [Set99, Set01, SS03]. Ce type de fonctions est beaucoup utilisé en mécanique des fluides pour calculer l'évolution de surface entre deux fluides non miscibles. Ensuite, la méthode a été appliquée pour décrire l'évolution de fissure dans l'espace [MGB02, GMB02, VXB02, VBB03].

Dans le cas du problème de propagation de fissure, on considère que la fonction de niveau $\psi(\underline{x}, t)$ utilisé pour localiser un point \underline{x} par rapport à la fissure Γ fonction est une fonction de distance signée (voir fig 1.17). Cette fonction consiste à calculer la distance minimale du point de la fissure (représentée sous la forme d'une ligne en 2D).

Le signe est attribué par projection sur la normale à la fissure, définie dans le sens direct à la tangente dans le sens de propagation.

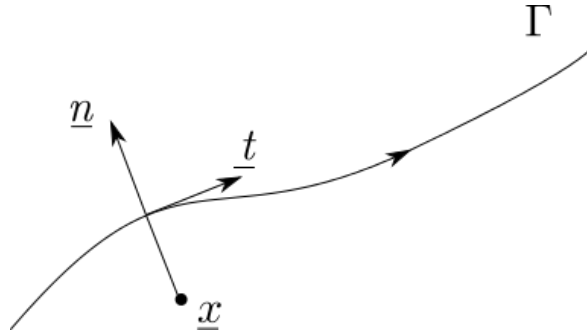


FIGURE 1.17 – Illustration de la définition de ψ

1.5.4.2 Discrétisation spatiale

On considère le problème posé dans le paragraphe 4.2.1. On fait recours à la méthode des éléments finis pour discrétiser le domaine Ω_0 . On construit, ainsi, la triangulation Ω_{0h} . Soit $B_0 = \text{vect}\{\Phi_i, i = 1, N\}$ la base éléments finis associé. La définition de ces fonctions de forme doit satisfaire les conditions aux limites. Alors, le champ de déplacement en tout point \underline{x} de Ω_0 à chaque instant t s'écrit :

$$\underline{u}_t^e(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\underline{x}) \underline{U}_{it}^e \quad (1.55)$$

L'équation 1.55 décrit l'approximation éléments finis standard du champ de déplacement. De la même manière, les champs de vitesse et d'accélération sont approximés. Jusqu'à présent, la discontinuité et les singularités de la fissure ne sont pas encore pris en compte. L'avantage que présente la méthode X-FEM est qu'on ne maille pas la fissure. En effet, la fissure se propage sur des fonctions de niveau $\psi(\underline{x}, t)$ en coupant des éléments. Parmi ces éléments, il y a ceux qui sont totalement coupés et il y a d'autres qui sont partiellement coupés. Ces éléments ne peuvent pas être correctement approximés par des polynômes de Lagrange, comme en éléments finis standards. Alors, l'idée de base de la méthode consiste à enrichir les fonctions de forme par des fonctions qui représentent la discontinuité par un saut en déplacement et donnent une meilleure approximation de la singularité sur la pointe de la fissure par des modes asymptotiques [DB99]. Par conséquent, le passage à la discrétisation X-FEM distingue deux types d'enrichissements.

Enrichissement Heaviside : Tout le long de la fissure, la discontinuité des entités cinématiques est représentée par un saut. Alors, on introduit de nouveaux degrés de libertés \underline{a}_{jt} associés aux nœuds j dont le support des fonctions des formes sont entièrement traversés par la fissure C_0 (voir figure 1.18). Ces degrés de liberté ont pour objectif de quantifier le saut en déplacement. On note l'ensemble des éléments entièrement découpés par Ω_{0h}^c et $B_0^{cut} = \text{vect}\{H(\psi(\underline{x}))\Phi_j, j = 1, N^{cut}/\text{supp}(\Phi_i) \cap C_0 \neq \emptyset\}$ et la base associé de dimension N^{cut} . Alors, le déplacement enrichit par des fonctions de signe Heaviside s'écrit sous la forme :

$$\underline{u}_t^a(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{N^{cut}} H(\psi(\underline{x})) \Phi_j(\underline{x}) \underline{U}_{jt}^a \quad (1.56)$$

où $H(\psi(\underline{x}))$ est la fonction de signe appliquée à la fonction de niveau au point \underline{x} qu'on définit dans l'équation 1.57.

$$H(\psi(\underline{x}, t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(\underline{x}) > 0 \\ -1 & \text{si } \psi(\underline{x}) < 0 \end{cases} \quad (1.57)$$

Enrichissement asymptotique en fond de fissure : Au niveau de la pointe de la fissure, on est situé à une zone de forte singularité. Dans cette zone, les contraintes sont amplifiées. Alors, un deuxième enrichissement est introduit dans l'approximation du champ des déplacements à l'aide de fonctions F_α dérivées du développement asymptotique des champs à la pointe de la fissure (voir paragraphe ??). En élasticité linéaire, et en deux dimensions, on introduit dans le cas d'une fissure droite les fonctions de Westergaard suivantes :

$$\{F_\alpha, \alpha = 1, \dots, 4\} = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (1.58)$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires d'un point dans un repère local centré sur la pointe de la fissure. Cet enrichissement est appliqué sur les nœuds voisins à la pointe de la fissure (voir fig 1.18). La restriction de la triangulation voisine à Γ est noté Ω_{0h}^t et $B_0^{tip} = \text{vect}\{F_\alpha \Phi_k, k = 1, N^{tip}, \alpha = 1, 4/\Gamma \in \text{supp}(\Phi_k)\}$ est la base associée. Les degrés de liberté rajoutés sont désignés par $U_{k\alpha t}^b$. Finalement, on écrit le champ de déplacement enrichi par les fonctions de signe et la singularité comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{u}_t(\underline{x}) = & \underbrace{\sum_{i=1}^N \Phi_i(\underline{x}) U_{it}^e}_{\text{Approximation EF standard}} \\ & + \underbrace{\sum_{j=1}^{N^{cut}} H(\psi(\underline{x}, t)) \Phi_j(\underline{x}) U_{jt}^a}_{\text{Enrichissement discontinu}} \\ & + \underbrace{\sum_{k=1}^{N^{tip}} \sum_{\alpha=1}^4 F_\alpha(\underline{x}) \Phi_k(\underline{x}) U_{k\alpha t}^b}_{\text{Approximation singulier}} \end{aligned} \quad (1.59)$$

1.6 Objectifs et positionnement de notre étude, apports et concepts fondamentaux

Ces travaux de thèse visent principalement à consolider, en rendant opérationnels des travaux déjà réalisés sur l'extension du cadre Arlequin à l'élastodynamique, avec une non linéarité de type propagation dynamique d'une fissure, sous une hypothèse fondamentale de localisation des ondes hautes fréquences. Les applications visées nécessitent deux ou plusieurs échelles d'étude. Citons, à titre d'exemples, la propagation des signaux créés sur l'interface d'une faille sismique ou l'évolution des fissures en dynamique dans des matériaux fragiles. Comme nous l'avons évoqué dans la première partie, plusieurs autres méthodes multi-échelles existent dans la littérature et qui ont donné des solutions en statiques qu'en dynamique pour la simulation des problèmes avec plusieurs

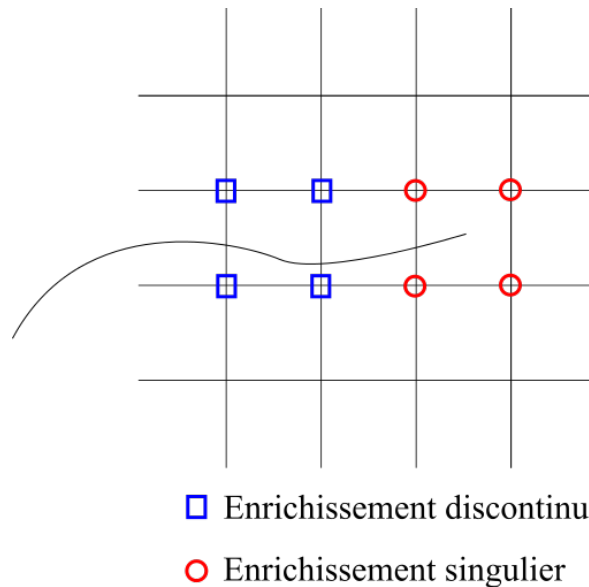


FIGURE 1.18 – Illustration des enrichissements par X-FEM

échelles de représentation, mais elles présentent certaines limites du point de vue coûts de calcul importants et flexibilité de la modélisation. Le cadre Arlequin a montré une grande flexibilité à travers ses différentes applications, principalement en statique ou quasi-statique, tout en couplant des échelles très différentes (atomistique-continuum), des représentations variées (déterministe-stochastique, linéaire-non linéaire, structure-solide, etc). La possibilité formelle d'étendre le Cadre Arlequin en dynamique a été évoquée, dès la première publication de la méthode [Dhi98]. Des écritures formelles ont été également écrites (H. Ben Dhia 1998, document de travail personnel, non publié). Une première thèse, celle de C. Zammali [Zam05] (encadrée par H. Ben Dhia et réalisée au MSSMat, dans le cadre d'un contrat avec EDF Clamart). Les travaux menés dans cette thèse ont donné lieu à des publications portant sur la modélisation et la simulation fine de problèmes de contact en dynamique (impact), utilisant le cadre Arlequin. La première extension formalisée du Cadre Arlequin en dynamique a été faite dans le cadre de ces travaux [BDZ04, DC05]. Le cadre Arlequin, parfois appelé autrement, a été aussi utilisé par Belytschko et Xiao en 2004 pour coupler, en dynamique, des modèles atomistiques à des modèles du Continuum. D'autres travaux ont été faits, depuis, dans ce cadre [SN13, GNBTA13, FKKL11].

Dans l'état de l'art, nous avons présenté les différentes solutions qui s'offraient à nous pour réaliser nos objectifs et solutionner le problème majeur qu'est le traitement des ondes dans la zone de couplage. Les réflexions d'ondes doivent être évitées au maximum car elles « polluent » les résultats numériques de la simulation multi-échelle du solide à l'échelle très fine. Dans ce contexte, la méthode multi-grille a été écartée car cette dernière engendre des coûts importants pour établir le passage entre grilles et nécessite beaucoup de mémoire pour le stockage des solutions calculées sur chaque grille.

Autant en régime statique ou quasi-statique, les méthodes utilisant des décomposition de domaines avec couplages aux interfaces surfaciques, sont appropriées et performantes (moins pour les composites) pour traiter des problèmes multi-échelles (e. g. [FR91, PLN10, PRGB13]), autant en régime dynamique, ces méthodes de couplages de sous domaines sont, par la nature même de leurs opérateurs de couplage, inaptes à faire passer des ondes HF, parvenant d'un sous-domaine fin où ces ondes sont admissibles, à un sous-domaine domaine où elles sont inadmissibles.

C'est la raison pour laquelle, nous nous sommes centrés sur les méthodes de couplage

avec recouvrement. Et dans cette veine, la méthode Arlequin constitue, à notre sens, la solution la plus intéressante. Pour terminer ce chapitre, observons que, dans ce cadre, Arlequin, des développements ont déjà été réalisés dans [BCXZ03] où les auteurs utilisent l'idée de la superposition et la partition d'énergie Arlequin, mais un couplage Arlequin fort (local) inapproprié à la dynamique. Les travaux réalisés par Ben Dhia et Zammali [BDZ04] sont beaucoup plus intéressants, mais manquent d'analyse systématique des paramètres Arlequin en discret. Cette dernière approche sera décrite, plus dans les détails, dans le chapitre suivant et la suite de ces travaux s'attachera à faire de propositions opérationnelles des multiples paramètres Arlequin, en discret et en dynamique et fournira des exemples significatifs d'application, toujours dans le cadre de l'hypothèse des HF localisées.

Chapitre 2

Extension du cadre Arlequin au régime dynamique

Figures

2.1	Bi-modèle Arlequin couplant d'un schéma de Newmark et un schéma HHT	33
2.2	Modèle Arlequin de référence	35
2.3	Monomodèle de référence 1D	41
2.4	Signal initial	41
2.5	4 Snapshots illustrant la propagation du signal sur la barre monomodèle 1D	42
2.6	Modèle discret de la barre Arlequin 1D	43
2.7	Modèle discret de la barre Arlequin 1D	43
2.8	4 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D avec maillages conformes	44
2.9	Variation des énergies du modèle Arlequin avec maillage uniforme	45
2.10	Données numériques de la barre Arlequin 1D	46
2.11	4 Snapshots illustrant la propagation du signal dans la barre 1D	47
2.12	4 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D	48
2.13	Fonctions constantes de partition de l'énergie par paliers	50
2.14	variation du coefficient de réflexion en fonction des couples des fonctions de partition de l'énergie	51
2.15	4 Snapshots de la propagation et la réflexion parasite du signal sur la barre Arlequin 1D $\alpha_k^1 = \alpha_m^1 = 0.6$	52
2.16	2 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour $\alpha_k^1 = \alpha_m^1 = 0$	52
2.17	4 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour des fonctions de partition de l'énergie linéaires (ou cubiques)	53
2.18	Fonctions linéaires de partition de l'énergie	54
2.19	Forme du signal sur la barre Arlequin 1D lorsque la HF atteint le bord	54
2.20	la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour un amortissement relativement fort	57
2.21	la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour un amortissement relativement fort	59
2.22	Maillages totalement compatibles	60

2.23	Incompatibilités des maillages -a-incompatibilité (I_f) de frontière,-b-incompatibilité (I_m) de maillage	60
2.24	Représentation du signal initial	61
2.25	Signal après propagation : Signal transmis à droite et signal réfléchi à gauche	61
2.26	Signal après propagation dans le cas d'incompatibilité I_f : Signal transmis à droite et signal réfléchi à gauche	62
2.27	Signal après propagation dans le cas d'incompatibilité I_m : Signal transmis à droite et signal réfléchi à gauche	63
2.28	Modèle 2D avec une faille contrainte au centre	65
2.29	Modèle Arlequin 2D	66
2.30	Distribution d'isovaleurs de contrainte de cisaillement à 4 instants du temps	67
2.31	Signal initial sur 3 rangées d'élément pour $x = 1000m, 2000m, 3000m$ (de haut en bas)	68
2.32	Signal initial sur 3 rangées d'élément pour $y = -3500m, -3500m, -2000m$ (de haut en bas)	69
2.33	Maillage du modèle Arlequin	69
2.34	Maillage du modèle Arlequin	70
2.35	6 snapshots de la propagation du signal en 2D sans amortissement	71
2.36	6 snapshots de la propagation du signal en 2D avec amortissement	72

Tableaux

2.1	Les données matériau	67
-----	--------------------------------	----

2.1 Introduction

Dans le chapitre 1, nous avons rappelé le cadre de modélisation Arlequin, en statique. Nous visons, dans ce chapitre, son extension au cadre dynamique. Notons que, de manière formelle, i.e., dans le sens où l'on réplique les idées fondatrices du cadre Arlequin, à savoir la superposition de modèles, la partition des énergies et le couplage entre les accommodés des modèles en volume [Dhi98], cette extension, ne pose a priori pas de difficultés particulières de faisabilité, comme énoncé formellement dans un papier non publié de Ben Dhia (1998 papier non publié). Elle a aussi été testée dans un cadre d'analyse harmonique (calculs de valeurs et vecteurs propres) dans le code OOFE par D. Lucas, en collaboration avec H. Ben Dhia au Laboratoire MSSMat (1998). Des extensions plus formalisées ont fait l'objet d'autres travaux. Citons d'abord le papier de Belytschko et Xiao [BCXZ03] où le cadre Arlequin a été utilisé pour le couplage, en dynamique transitoire, d'un modèle de mécanique des milieux continus avec un modèle de dynamique moléculaire. Cette extension utilise un couplage ponctuel fort entre les atomes (modèle atomistique fin) et les champs éléments finis (modèle grossier) dans la zone de collage. Une version plus conforme avec l'esprit Arlequin, a été développée par Ben Dhia et Zammali [BDZ04]. Le piégeage parasite des ondes "hautes fréquences" dans la zone du modèle fin, écueil spécifique aux approches multi-échelles en dynamique est traité dans ce dernier travail comme suit (voir figure (2.1)). Un schéma conservatif de Newmark est utilisé pour un premier modèle fin et un schéma HHT pour un second modèle fin de transition. Ce modèle de transition permettant d'atténuer les ondes HF sans trop affecter les ondes BF, est raccordé d'une manière surfacique classique avec un troisième modèle grossier, utilisant un schéma conservatif de Newmark.

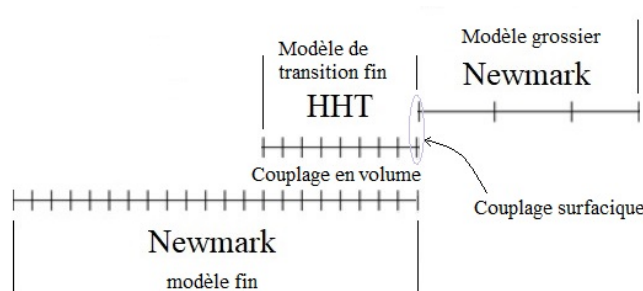


FIGURE 2.1 – Bi-modèle Arlequin couplant d'un schéma de Newmark et un schéma HHT

Dans ce papier [BDZ04], le couplage volumique (qui s'avère, soulignons-le ici, essentiel en dynamique multi-échelle) a été réalisé en écrivant que le déplacement du modèle grossier valait la projection orthogonale, par rapport à un produit scalaire énergétique, du déplacement du modèle fin restreint au domaine de couplage (cf. figure 2.1) sur l'espace grossier restreint à ce même domaine. Cette égalité faible entre déplacements, (assurant celles entre vitesses et accélérations, en modèles continus), permet d'établir la conservation de l'énergie en continue, mais pas en discret. Dans [DR05], un remède à cette non conservation, inspiré des travaux de Moreau pour les interactions dynamiques entre solides [Mor99] et plus explicitement de travaux de Gravouil et Combescure [GC01], développés pour des problématiques de sous-structurations en dynamique, a été utilisé. Cela consiste à remplacer le couplage faible en déplacements par un couplage faible en vitesses (les deux couplages étant, rappelons-le, équivalents en continu, mais pas en discret). D'autres travaux d'extension de la méthode Arlequin (parfois appelée autrement) en dynamique ont été menés depuis [SN13, GNBTA13, FKLL11].

Tous ces développements relèvent, si besoin est, le fait que l'approximation multi-échelle d'un problème de dynamique est significativement plus complexe que celle en statique. Et, pour ce qui concerne spécialement l'extension du cadre multi-échelle Arlequin à la dynamique, en dépit des travaux importants déjà réalisés, les rôles croisés, joués par la multitude de paramètres intervenant dans un problème Arlequin multi-échelle, en dynamique, discrétisé en espace et en temps, requièrent des investigations complémentaires.

L'objectif dans ce chapitre est d'aboutir à la formulation Arlequin et surtout aux formulations Arlequin discrètes (permettant l'analyse multi-modèle) de problèmes élasto-dynamiques (mono-modèle) dont on suppose que les Hautes fréquences sont localisées. En vue de simplifier et d'avoir plus de contrôle de l'extension de la méthode Arlequin pour le transfert de signaux, avec un contenu riche en fréquences, entre un modèle fin et un modèle grossier, nous menons une étude approfondie de l'influence des paramètres Arlequin. Plus explicitement, on s'intéresse, en particulier, à l'étude de l'influence sur la réponse dynamique de la structure des opérateurs de couplage Arlequin, des fonctions de partition de l'énergie, des paramètres d'amortissement, ainsi que l'influence de la compatibilité entre les maillages. Certains de ces travaux ont fait l'objet de communications dans des congrès avec Actes [ABD14, AD15]. Ils sont inscrits dans la veine d'un travail initié dans [Dhi01] (cours de contact) par le couplage en volume Arlequin et continué par des travaux de couplage surfaciques (sous-domaines) classiques [DB03, DRBDL09].

Ce chapitre comporte trois sections, dans la section 2.2, on écrit le problème mono-modèle de la dynamique des structures dans le cadre multi-échelle Arlequin, en introduisant les ingrédients complémentaires, spécifiques au régime dynamique, par rapport au régime statique. Dans la section 2.3, on étudie les différents paramètres du problème Arlequin dynamique multi-échelle pour dégager les bons choix ; choix dont la pertinence est éclairée par des tests, en mono-dimensionnel. Une application 2D est menée dans la section 2.4. Elle concerne l'étude de la propagation des ondes surfaciques dans le sol, et de leurs impacts sur une infrastructure critique, toujours sous l'hypothèse de localisation des ondes HF.

2.2 Formulation Arlequin du problème dynamique

Pour la simulation des structures sollicitées par des impacts très localisés par exemple, la bonne approximation du comportement dynamique locale de la structure, au voisinage de la zone impactée, requiert des modélisations physiques et numérique fines dont l'usage dans l'ensemble de la structure générerait un problème difficile, voire impossible de résoudre même sur des ordinateurs puissants. Or, pour une classe de ces problèmes, les raffinements ne sont nécessaires que dans certaines zones critiques (voisinage de la zone impactée, pour l'exemple de l'impact considéré) ; le restant de la structure pouvant être présenté d'une manière plus grossière. Ce type de représentation nécessite des méthodes multi-modèles et/ou multi-échelles. C'est à la méthode Arlequin (dont la flexibilité et la pertinence en statique sont reconnues) que nous nous intéressons ici. Nous l'étendons, dans cette section, au cadre dynamique, tout en ayant un bon contrôle de ses différents paramètres.

2.2.1 Formulation Arlequin continue équivalente à $(\varphi_{dyn}^{var}) : (\varphi_{dyn}^{arl})$

Pour avoir la formulation Arlequin mixte continue du problème (φ_{dyn}^{var}) , on suit formellement la démarche classique ([Dhi98, BD99, BDR01, BDR02, Rat03, DR05, Dhi06, DER08]). Cela consiste en :

1. Décomposer le domaine Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 qui se superposent, en volume, sur une zone Ω_{12} .
2. Associer à chaque sous-domaine ses propres champs.
3. Introduire des fonctions "poids de modèles" formant une partition de l'unité en tout point de Ω .
4. Écrire le couplage faible entre les champs inconnus dans la zone de couplage $\Omega_c \subseteq \Omega_{12}$.
5. Écrire l'équilibre faible de chacun des modèles, tenant compte de la partition des travaux virtuels en dynamique et des travaux virtuels des efforts de couplage.

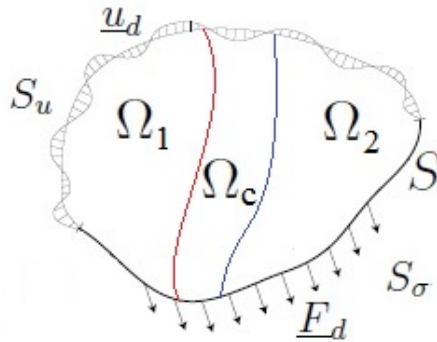


FIGURE 2.2 – Modèle Arlequin de référence

Afin de simplifier la présentation, nous supposons que $\Omega_c = \Omega_{12}$ et $S_{u,1} = \partial\Omega_1 \cap S_u$, $S_{u,2} = S_u \cap \partial\Omega_2 \setminus S_{u,1}$, $\underline{F}_{/S_{\sigma,1}} = \underline{F}_{d,1}$ et $\underline{F}_{/S_{\sigma,2}} = \underline{F}_{d,2}$. De plus, nous supposons que les domaines ne changent pas en fonction du temps. Tout ceci nous amène à l'écriture du problème Arlequin continu (φ_{dyn}^{arl}) suivant :

$$\left(\mathcal{P}_{dyn}^{Arl} \right) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Connaissant } \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_1^0 = \underline{u}^0 / \Omega_1; \quad \underline{u}_2^0 = \underline{u}^0 / \Omega_2 \\ \dot{\underline{u}}_1^0 = \underline{v}^0 / \Omega_1; \quad \dot{\underline{u}}_2^0 = \underline{v}^0 / \Omega_2 \end{array} \right. , \quad (2.1) \\
 \forall t \in I, \text{ trouver } (\underline{u}_1(t), \underline{u}_2(t), \underline{\lambda}(t)) \in \underline{W}_1 \times \underline{W}_2 \times \underline{M}; \\
 k_1(\underline{u}_1(t), \underline{w}_1; \alpha_k^1) + m_1(\ddot{\underline{u}}_1(t), \underline{w}_1; \alpha_m^1) \\
 + c(\underline{\lambda}(t), \underline{w}_1) = f_1(\underline{w}_1; \alpha_1^1); \forall \underline{w}_1 \in \underline{W}_1 \quad (2.2) \\
 k_2(\underline{u}_2(t), \underline{w}_2; \alpha_k^2) + m_2(\ddot{\underline{u}}_2(t), \underline{w}_2; \alpha_m^2) \\
 - c(\underline{\lambda}(t), \underline{w}_2) = f_2(\underline{w}_2; \alpha_1^2); \forall \underline{w}_2 \in \underline{W}_2 \quad (2.3) \\
 c(\underline{\mu}, \dot{\underline{u}}_1 - \dot{\underline{u}}_2) = 0; \forall \underline{\mu} \in \underline{M} \quad (2.4) \\
 \text{avec} \\
 \underline{W}_1 = \{ \underline{w}_1 \in (H^1(\Omega_1)); \underline{w}_1 = 0, \text{ sur } S_{u,1} \} \quad (2.5) \\
 \underline{W}_2 = \{ \underline{w}_2 \in (H^1(\Omega_2)); \underline{w}_2 = 0, \text{ sur } S_{u,2} \} \quad (2.6) \\
 \text{où } S_{u,1} = S_u \cap \partial\Omega_1, S_{u,2} = S_u \cap \partial\Omega_2 \setminus S_{u,1} \quad (2.7)
 \end{array} \right.$$

Le couplage Arlequin fait intervenir des multiplicateurs de Lagrange qui imposent l'égalité des vitesses des deux modèles dans la zone de couplage. On introduit un opérateur de couplage énergétique "moyennant" qui permet d'assouplir les conditions cinématique par rapport au couplage fort introduit par Belytschko [BCXZ03]. L'équation de couplage est écrite sous sa forme faible comme suit :

$$c(\underline{\mu}, \dot{\underline{u}}_1 - \dot{\underline{u}}_2) = \int_{\Omega_c} (\dot{\underline{u}}_1 - \dot{\underline{u}}_2) \underline{\mu} + l^2 \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\mu}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\dot{\underline{u}}_1 - \dot{\underline{u}}_2) d\Omega = 0; \quad \forall \underline{\mu} \in \underline{M} \quad (2.8)$$

où l est une épaisseur, pour homogénéiser l'opérateur. Si $l = 0$ on retrouve l'opérateur L^2 , sinon l'opérateur de couplage est H^1 . Les travaux virtuels k_1, k_2, m_1, m_2, f_1 et f_2 sont définis comme suit :

$$k_1(\underline{u}_1, \underline{w}_1; \alpha_k^1) = \int_{\Omega_1} \alpha_k^1 \underline{\underline{\varepsilon}}_1(\underline{u}_1) : \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_1(\underline{w}_1) d\Omega \quad (2.9)$$

$$k_2(\underline{u}_2, \underline{w}_2; \alpha_k^2) = \int_{\Omega_2} \alpha_k^2 \underline{\underline{\varepsilon}}_2(\underline{u}_2) : \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_2(\underline{w}_2) d\Omega \quad (2.10)$$

$$m_1(\ddot{\underline{u}}_1, \underline{w}_1; \alpha_m^1) = \int_{\Omega_1} \alpha_m^1 \rho(\ddot{\underline{u}}_1) \underline{w}_1 d\Omega \quad (2.11)$$

$$m_2(\ddot{\underline{u}}_2, \underline{w}_2; \alpha_m^2) = \int_{\Omega_2} \alpha_m^2 \rho(\ddot{\underline{u}}_2) \underline{w}_2 d\Omega \quad (2.12)$$

$$f_1(\underline{u}_1, \underline{w}_1; \alpha_1^1) = \int_{\Omega_1} \alpha_1^1 \underline{f}_v \underline{w}_1 d\Omega + \int_{S_{\sigma,1}} \alpha_1^1 \underline{F}_{d,1} \underline{w}_1 dS \quad (2.13)$$

$$f_2(\underline{u}_2, \underline{w}_2; \alpha_1^2) = \int_{\Omega_2} \alpha_1^2 \underline{f}_v \underline{w}_2 d\Omega + \int_{S_{\sigma,2}} \alpha_1^2 \underline{F}_{d,2} \underline{w}_2 dS \quad (2.14)$$

$$\text{où } S_{\sigma,1} = S_\sigma \cap \partial\Omega_1, S_{\sigma,2} = S_\sigma \cap \partial\Omega_2 \setminus S_{\sigma,1} \quad (2.15)$$

On multiplie les travaux virtuels par des fonctions de partition d'énergie afin d'éviter le dédoublement des énergies dans la zone de couplage. En effet, on définit pour chaque type d'énergie une fonction de partition associée $(\alpha_m^i, \alpha_k^i, \alpha_1^i)_{i=1,2}$. Les choix classiques sont des fonctions constantes, linéaires ou cubiques qui vérifient les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_m^1 = \alpha_k^1 = \alpha_1^1 = 1 & \text{dans } \Omega_1 \setminus \Omega_c \quad (2.16) \\ \alpha_m^1 + \alpha_m^2 = 1; \alpha_k^1 + \alpha_k^2 = 1; \alpha_1^1 + \alpha_1^2 = 1 & \text{sur } \Omega_c \quad (2.17) \\ \alpha_m^2 = \alpha_k^2 = \alpha_1^2 = 1 & \text{dans } \Omega_2 \setminus \Omega_c \quad (2.18) \end{array} \right.$$

Pour simplifier, on suppose que les fonctions $(\alpha_m^i, \alpha_k^i, \alpha_1^i)_{i=1,2}$ sont indépendantes du temps.

Les équations (2.2) et (2.3) décrivent l'équilibre respectivement sur les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Ces équations font apparaître les intégrales sur la zone couplage Ω_c qui représentent les travaux virtuels dus aux efforts de couplage. Par ailleurs, la condition de couplage est considérée sous une forme faible dont l'opérateur peut être défini comme un produit scalaire de type L^2 ou H^1 homogénéisé comme indiqué dans l'équation (2.8). On peut montrer que ce problème admet une solution unique $(\underline{u}_1(t), \underline{u}_2(t), \underline{\lambda}(t))$ [BDR01]. Par ailleurs, en utilisant la fait que le problème dynamique monomodèle admet une solution unique \underline{u} , $\underline{u}_1 = \underline{u}/\Omega_1$ et $\underline{u}_2 = \underline{u}/\Omega_2$, qui donne consistance à la méthode Arlequin.

Remarque 2.1 :

On peut montrer, en utilisant les conditions initiales que le couplage $c(.,.)$ assurant l'égalité faible des champs de déplacement \underline{u}_1 et \underline{u}_2 est équivalent au couplage assurant l'égalité faible des champs des vitesses $\underline{\dot{u}}_1$ et $\underline{\dot{u}}_2$ ou des champs des accélérations $\underline{\ddot{u}}_1$ et $\underline{\ddot{u}}_2$.

En effet, si $\underline{u}_1(t) - \underline{u}_2(t) = \underline{0} \forall t$ alors $\underline{\dot{u}}_1 - \underline{\dot{u}}_2 = \underline{0}$ et donc $\underline{\ddot{u}}_1 - \underline{\ddot{u}}_2 = \underline{0}$. De l'autre côté, si $[[\underline{\dot{u}}]] = \underline{0} \forall t$ alors $[[\underline{\ddot{u}}]] = \underline{0}$. Par ailleurs, $[[\underline{u}]] = [[\underline{u}]](0) + \int_0^t [[\underline{\dot{u}}(\xi)]] d\xi = 0$. Ces équivalences en continu permettent d'utiliser, indifféremment, l'un ou l'autre des trois couplages.

Mais les équivalences en continu en temps ne sont plus nécessairement vraies en discret. Elles ne le sont qu'à la limite sur le pas de temps. Dès lors, on peut imaginer que l'écriture du système de couplage Arlequin, en dynamique, peut se faire a priori par utilisation et discrétisation de l'un des trois opérateurs de couplage, en restant vigilant sur des considérations de type conservation des quantités mécaniques telle que l'énergie.

2.2.2 Semi-discrétisation par la MEF du problème (\wp_{dyn}^{Arl})

Une fois le problème Arlequin est bien défini, l'étape suivante consiste à introduire une discrétisation en espace via la MEF et en temps à l'aide de schémas de différences finies.

Soient \underline{W}_{h_1} , \underline{W}_{h_2} et $\underline{M}_{h_\lambda}$ des sous-espaces vectoriels de dimensions finies n_h^1 , n_h^2 et n_h^λ des espaces des champs cinématiquement admissibles \underline{W}_1 et \underline{W}_2 et de l'espace multiplicateurs de Lagrange \underline{M} respectivement. Soient $(\phi_i^1)_{1 \leq i \leq n_h^1}$, $(\phi_i^2)_{1 \leq i \leq n_h^2}$ et $(\phi_i^\lambda)_{1 \leq i \leq n_h^\lambda}$ des fonctions de base des sous sous-espace \underline{W}_{h_1} , \underline{W}_{h_2} et $\underline{M}_{h_\lambda}$, respectivement. On les note, respectivement, $\mathcal{B}_{n_h^1}$, $\mathcal{B}_{n_h^2}$ et $\mathcal{B}_{n_h^\lambda}$. On approche les champs de déplacement \underline{u}_1 , \underline{u}_2 et le champs multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}$, à l'instant t , par les champs respectifs \underline{u}_{h_1} , \underline{u}_{h_2} et $\underline{\lambda}_h$ comme suit :

$$\underline{u}_{h_1}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_h^1} U_{1,i}(t) \phi_i^1(\underline{x}) \quad (2.19)$$

$$\underline{u}_{h_2}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_h^2} U_{2,i}(t) \phi_i^2(\underline{x}) \quad (2.20)$$

$$\underline{\lambda}_h(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_h^\lambda} \Lambda_i(t) \phi_i^\lambda(\underline{x}) \quad (2.21)$$

En reprenant la même démarche que celle utilisée au paragraphe (1.4.3.1) et en utilisant les mêmes notations, on aboutit à un système d'équations matricielles semi-discrétisées

en espace qui s'écrit de la manière suivante :

$$\left(\mathcal{P}_{dyn}^{Arl-sd} \right) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Connaissant } \left\{ \begin{array}{l} \underline{U}_1(0) = \underline{U}_1^0; \quad \underline{U}_2(0) = \underline{U}_2^0 \\ \dot{\underline{U}}_1(t=0) = \underline{V}_1^0; \quad \dot{\underline{U}}_2(t=0) = \underline{V}_2^0 \end{array} \right. , \quad (2.22) \\
 \forall t \in I, \text{ Trouver } (\underline{U}_1(t), \underline{U}_2(t), \underline{\Lambda}(t)) \in \underline{W}_{h_1} \times \underline{W}_{h_2} \times \underline{M}_{h_\lambda}; \text{ tel que :} \\
 \underline{K}_1(\alpha_1^k) \underline{U}_1(t) + \underline{M}_1(\alpha_1^m) \ddot{\underline{U}}_1(t) + \underline{C}_1^T \underline{\Lambda}(t) = \underline{F}_1(t; (\alpha_1^1)) \quad (2.23) \\
 \underline{K}_2(\alpha_2^k) \underline{U}_2(t) + \underline{M}_2(\alpha_2^m) \ddot{\underline{U}}_2(t) - \underline{C}_2^T \underline{\Lambda}(t) = \underline{F}_2(t; (\alpha_2^1)) \quad (2.24) \\
 \underline{C}_1 \dot{\underline{U}}_1(t) - \underline{C}_2 \dot{\underline{U}}_2(t) = 0 \quad (2.25) \\
 \text{avec} \\
 (\underline{U}_1(t))_i = U_{1,i}(t), \quad 1 \leq i \leq n_h^1 \quad (2.26) \\
 (\underline{U}_2(t))_i = U_{2,i}(t), \quad 1 \leq i \leq n_h^2 \quad (2.27) \\
 \underline{\Lambda}_i(t) = \lambda_i(t), \quad 1 \leq i \leq n_h^\lambda \quad (2.28)
 \end{array} \right.$$

On désigne par les matrices $\underline{M}_1(\alpha_1^m)$ et $\underline{M}_2(\alpha_2^m)$ les matrices de masse, $\underline{K}_1(\alpha_1^k)$ et $\underline{K}_2(\alpha_2^k)$ les matrices de rigidité et $\underline{F}_1(t; \alpha_1^1)$ et $\underline{F}_2(t; \alpha_2^1)$ les vecteurs des efforts extérieurs, associés respectivement au sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Ces quantités peuvent être obtenues de manière très classique et ne sont pas données ici. Les matrices \underline{C}_1 et \underline{C}_2 sont les matrices de couplage qui lient respectivement les déplacements \underline{U}_1 et \underline{U}_2 au multiplicateur de Lagrange $\underline{\Lambda}$. Pour construire ces matrices, on doit d'abord construire l'espace médiateur discret $\underline{M}_{h_\lambda}$ et, par conséquent, l'opérateur de couplage. Ces choix, en statique, comme en dynamique, sont importants parce qu'ils conditionnent la stabilité des problèmes.

2.2.3 Discrétisation par différences finies du problème $(\mathcal{P}_{dyn}^{Arl-sd})$

Le problème $(\mathcal{P}_{dyn}^{Arl-sd})$ est un système différentiel en temps et fini en espace. Il garde une dimension infinie en temps. Comme pour le problème mono-modèle abordé en section 1.4, nous proposons d'utiliser la méthode des DF pour le discrétiser en temps.

Du fait que l'on dispose de deux modèles, on peut clairement utiliser des schémas DF différents avec différents pas de discrétisation pour chacun. Cette modélisation multi-échelle en temps a été étudiée dans la littérature par plusieurs auteurs. On peut citer la méthode para-réel [LMT01, PRV⁺02] qui est une méthode de décomposition de domaine en temps. Elle permet de faire des calculs sur des sous-domaines parallèlement, en réduisant le temps de calcul. Une autre approche de sous-cyclage a été développée par Collino [CFJ03]. Elle consiste à créer des sous-cycles de temps sur les zones locales fines. Le plus pratique dans ce cas est d'utiliser des schémas explicites, en tenant compte des conditions de stabilité sur le choix des sous pas temps. On peut également citer les travaux importants de Combescure et Gravouil [CG02] pour coupler des schémas de Newmark de natures différentes sur des sous-domaines. Cette méthode donne la possibilité de coupler un schéma explicite global à des schémas implicites locaux. Dans toutes ces approches, la question est comment coupler les champs, définis dans les sous-domaines, sur les interfaces? Deux algorithmes sont proposés dans la littérature. Le premier consiste à coupler aux pas de temps fins [CG02]. Cette démarche donne une bonne précision de la solution sur les interfaces des sous-domaines, mais elle s'avère dissipative et coûteuse puisqu'on est amené à résoudre le problème d'interface à chaque

sous pas de temps pour corriger la solution du grossier. Le deuxième algorithme, proposé par [PH04], consiste à résoudre le problème de l'interface sur le pas de temps grossier. L'évolution donc de la solution est libre aux pas de temps fins est corrigée à chaque pas de temps grossier sur le modèle fin. Cette approche est moins coûteuse parce qu'on réduit le nombre de résolution du problème d'interface et elle conserve l'énergie.

Par soucis de clarté, nous considérons, dans ce travail, un seul schéma en temps pour les deux modèles avec un même pas de temps constant.

On procède alors de la même manière que dans la sous-section 1.4.3.2 pour le problème mono-modèle, en reprenant les mêmes notations et en utilisant la famille des schémas de Newmark pour discrétiser le problème (φ_{dyn}^{ArI-sd}).

En considérant des étapes de temps $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = n\Delta t < \dots < t_N = N\Delta t = T$ en supposant connu l'état initial ($\underline{U}_1^0 = \underline{U}_1(t_0), \underline{U}_2^0 = \underline{U}_2(t_0), \underline{\dot{U}}_1^0 = \underline{\dot{U}}_1(t_0), \underline{\dot{U}}_2^0 = \underline{\dot{U}}_2(t_0)$) alors, le système à résoudre (φ_{dyn}^{ArI-d}) s'écrit comme suit :

$$(\varphi_{dyn}^{ArI-d}) \left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq n \leq N, \text{ Trouver } (\underline{U}_1^n, \underline{U}_2^n, \underline{\Lambda}^n) \text{ tel que :} \\ \underline{K}_1 \underline{U}_1^n + \underline{M}_1 \underline{\ddot{U}}_1^n - \underline{C}_1^T \underline{\Lambda}^n = \underline{F}_1^n \\ \underline{K}_2 \underline{U}_2^n + \underline{M}_2 \underline{\ddot{U}}_2^n + \underline{C}_2^T \underline{\Lambda}^n = \underline{F}_2^n \\ \underline{C}_1 \underline{\dot{U}}_1^n - \underline{C}_2 \underline{\dot{U}}_2^n = 0 \end{array} \right. \quad (2.29)$$

$$(2.29)$$

$$(2.30)$$

$$(2.31)$$

On peut calculer facilement les champs des accélérations ($\underline{\ddot{U}}_1^0, \underline{\ddot{U}}_2^0$) par résolution directe du système régis par les équations (2.29)-(2.31) à l'instant $t_0 = 0$.

On suppose que l'on connaît à l'instant n des champs ($\underline{U}_1^n, \underline{U}_2^n, \underline{\dot{U}}_1^n, \underline{\dot{U}}_2^n, \underline{\ddot{U}}_1^n, \underline{\ddot{U}}_2^n$). Le schéma de Newmark consiste à approcher les champs ($\underline{U}_1^{n+1}, \underline{U}_2^{n+1}, \underline{\dot{U}}_1^{n+1}, \underline{\dot{U}}_2^{n+1}, \underline{\ddot{U}}_1^{n+1}, \underline{\ddot{U}}_2^{n+1}$) par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{U}_1^{n+1} = \underline{U}_1^n + \Delta t \underline{\dot{U}}_1^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta) \underline{\ddot{U}}_1^n + 2\beta \underline{\ddot{U}}_1^{n+1} \right] \\ \underline{\dot{U}}_1^{n+1} = \underline{\dot{U}}_1^n + \Delta t \left[(1 - \gamma) \underline{\ddot{U}}_1^n + \gamma \underline{\ddot{U}}_1^{n+1} \right] \end{array} \right. \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{U}_2^{n+1} = \underline{U}_2^n + \Delta t \underline{\dot{U}}_2^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta) \underline{\ddot{U}}_2^n + 2\beta \underline{\ddot{U}}_2^{n+1} \right] \\ \underline{\dot{U}}_2^{n+1} = \underline{\dot{U}}_2^n + \Delta t \left[(1 - \gamma) \underline{\ddot{U}}_2^n + \gamma \underline{\ddot{U}}_2^{n+1} \right] \end{array} \right. \quad (2.34)$$

$$(2.35)$$

Ensuite, considérant le système (2.29)-(2.31) à l'instant t_{n+1} , on peut avancer le schéma en y injectant les équations (2.32) - (2.35). À ce niveau, trois cas de couplage Arlequin en discret, pour coupler les modèles, sont envisageables : en déplacement, en vitesse ou en accélération.

Dans leur article [CG02], A. Combescure et A. Gravouil développent un algorithme de couplage multi-échelle par la méthode de sous-domaines, avec des multiplicateurs de Lagrange surfacique, en utilisant des schémas et des échelles de discrétisation de temps différents. La convergence et la stabilité des schémas dans les différents cas de couplage entre les sous-domaines ont été analysées, en établissant un bilan énergétique. Ces analyses montrent que pour le couplage en accélérations (continuité des accélérations) et en déplacement (continuité des déplacements), la stabilité est assurée sous certaines conditions. Seul le couplage en vitesse entre les modèles est stable et conserve l'énergie sans conditions. A partir de ces conclusions, nous considérons, dans le reste de ce document, que le couplage en dynamique est assuré par une équation de continuité des vitesses dans la zone de couplage.

L'algorithme de résolution du problème Arlequin bi-modèle s'écrit comme suit (cf Algorithme (1)) :

Algorithme 1 : Algorithme mono-échelle en temps

Données : Maillage (E, ρ)

Sollicitations $\underline{F}(x, t)$

Conditions initiales $\underline{U}_1^0, \dot{\underline{U}}_1^0, \underline{U}_2^0, \dot{\underline{U}}_2^0$

Assemblage de $\underline{K}_1, \underline{K}_2, \underline{M}_1, \underline{M}_2, \underline{C}_1, \underline{C}_2$

$$\text{Assemblage de } \underline{M}_{eff} = \left(\begin{bmatrix} \underline{M}_1 & 0 & \underline{C}_1^T \\ 0 & \underline{M}_2 & -\underline{C}_2^T \\ \underline{C}_1 & -\underline{C}_2 & 0 \end{bmatrix} + \beta \Delta t^2 \begin{bmatrix} \underline{K}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{K}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Initiation : Calcul de $\underline{\ddot{U}}_1^0, \underline{\ddot{U}}_2^0$ par les équations (2.29) et (2.30) pour $n = 0$.

Construction de $\underline{M}_{1,eff} = \underline{M}_1 + \beta \Delta t^2 \underline{K}_1$ et $\underline{M}_{2,eff} = \underline{M}_2 + \beta \Delta t^2 \underline{K}_2$

Boucle d'incrément de temps : pour $n = 0, 1, 2, \dots, N$

(1) **Étape de prédiction** :

$$\underline{U}_{1,pred}^{n+1} = \underline{U}_1^n + \Delta t \dot{\underline{U}}_1^n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - \beta) \ddot{\underline{U}}_1^n; \dot{\underline{U}}_{1,pred}^{n+1} = \dot{\underline{U}}_1^n + \Delta t \ddot{\underline{U}}_1^n$$

$$\underline{U}_{2,pred}^{n+1} = \underline{U}_2^n + \Delta t \dot{\underline{U}}_2^n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - \beta) \ddot{\underline{U}}_2^n; \dot{\underline{U}}_{2,pred}^{n+1} = \dot{\underline{U}}_2^n + \Delta t \ddot{\underline{U}}_2^n$$

(2) **Actualisation des seconds membres** :

$$\underline{F}_{1,eff}^{n+1} = \underline{F}_1^{n+1} - \underline{K}_1 \underline{U}_{1,pred}^{n+1}$$

$$\underline{F}_{2,eff}^{n+1} = \underline{F}_2^{n+1} - \underline{K}_2 \underline{U}_{2,pred}^{n+1}$$

$$\underline{F}_\lambda^{n+1} = \underline{C}_2 \dot{\underline{U}}_{2,pred}^{n+1} - \underline{C}_1 \dot{\underline{U}}_{1,pred}^{n+1}$$

(3) **Résolution du système linéaire** :

$$\underline{M}_{eff} \begin{pmatrix} \dot{\underline{U}}_1^{n+1} \\ \dot{\underline{U}}_2^{n+1} \\ \underline{\Lambda}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_{1,eff}^{n+1} \\ \underline{F}_{2,eff}^{n+1} \\ \underline{F}_\lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

(4) **Étape de correction** :

$$\underline{U}_1^{n+1} = \underline{U}_{1,pred}^{n+1} + \Delta t \gamma \dot{\underline{U}}_1^{n+1}$$

$$\underline{U}_2^{n+1} = \underline{U}_{2,pred}^{n+1} + \Delta t \gamma \dot{\underline{U}}_2^{n+1}$$

2.3 Choix des paramètres Arlequin en dynamique

Arlequin offre un cadre de modélisation flexible. En contrepartie, ce cadre fait intervenir plusieurs paramètres tels que les fonctions de partition des énergies, l'espace médiateur et la géométrie de la zone de couplage dont les choix appropriés sont à étudier et à préciser. L'extension de la méthode à la dynamique, en comparaison à la statique, rajoute d'autres paramètres liés aux discrétisations temporelles et à l'amortissement (comme nous le verrons plus loin). Le croisement de tous ces paramètres entre eux requiert une attention et un soin particuliers. Des investigations sont menées, dans cette section, sur ces paramètres et leurs croisements afin de définir les bons choix; ceux permettant d'obtenir la solution numérique visée.

Dans cette section, pour simplifier l'étude des paramètres mis en jeu dans le cadre Arlequin et ceux liés aux discrétisations temporelles et spatiales, on considère un problème dynamique monodimensionnel.

On considère une barre occupant l'adhérence d'un domaine $\Omega =]0, L[$. La barre est élastique, homogène et isotrope, de masse volumique ρ et de module d'élasticité E .



FIGURE 2.3 – Monomodèle de référence 1D

On considère un signal initial composé de deux ondes : une onde haute fréquence et une onde basse fréquence. Ce signal est représenté par la figure (2.4a). Le spectre d'amplitude est montré par la figure (2.4b).

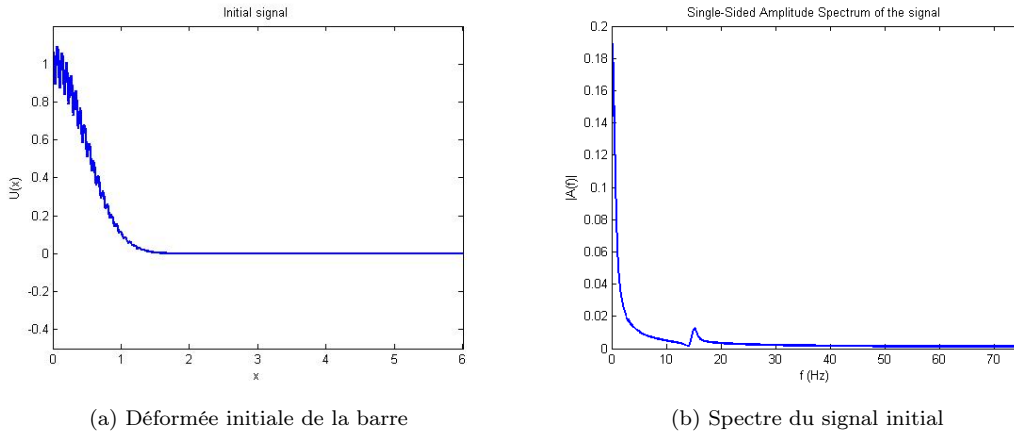


FIGURE 2.4 – Signal initial

On approche ce signal (que l'on considère comme une donnée déplacement initial pour la barre) par :

$$u_d(x, 0) = \begin{cases} A \frac{e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)^2}} \left(1 + b \cos\left(\frac{2\pi x}{H}\right) \right) & \text{si } x \leq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.36)$$

où A est l'amplitude de la fenêtre exponentielle de largeur σ , b est l'amplitude de l'onde HF et H est sa période.

On complète les conditions initiales par :

$$\dot{u}_d(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega \quad (2.37)$$

Dans l'application numérique, on considèrera que la longueur de la barre est $L = 10$. Les données matériau sont normalisées ($E = 1, \rho = 1$). On utilise un schéma Newmark d'accélération moyenne ($\beta = 0.25; \gamma = 0.5$) pour la discrétisation du temps.

2.3.1 Représentation monomodèle du cas test 1D

Le problème faible monomodèle de la barre s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \text{Connaissant } \begin{cases} u^0 = u_d \\ \dot{u}^0 = 0 \end{cases}, \\ (\mathcal{P}_{dyn}^{mono}) \quad \forall t \in I, \text{trouver } u(t) \in W ; \\ \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} E \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^L \rho \ddot{u} w dx = 0; \forall w \in W \end{cases} \quad (2.38)$$

où $W = H^1(]0, L[)$ est les espaces des champs cinématiquement admissibles, définis sur le domaine Ω .

On approche l'espace W par une famille d'espaces éléments finis P1 classiques. On note W_h un espace de champ éléments finis de cette famille (h étant le paramètre de la famille).

Comme exemple, on utilise une discrétisation EF, uniformément fine, de taille $\Delta x = 0.006$ (qui donne 1500 éléments P1 uniformes). Le pas de discrétisation de temps est fixé à $\Delta t = 0.02s$.

La propagation du signal, pour ce cas, est illustrée par la figure (2.5).

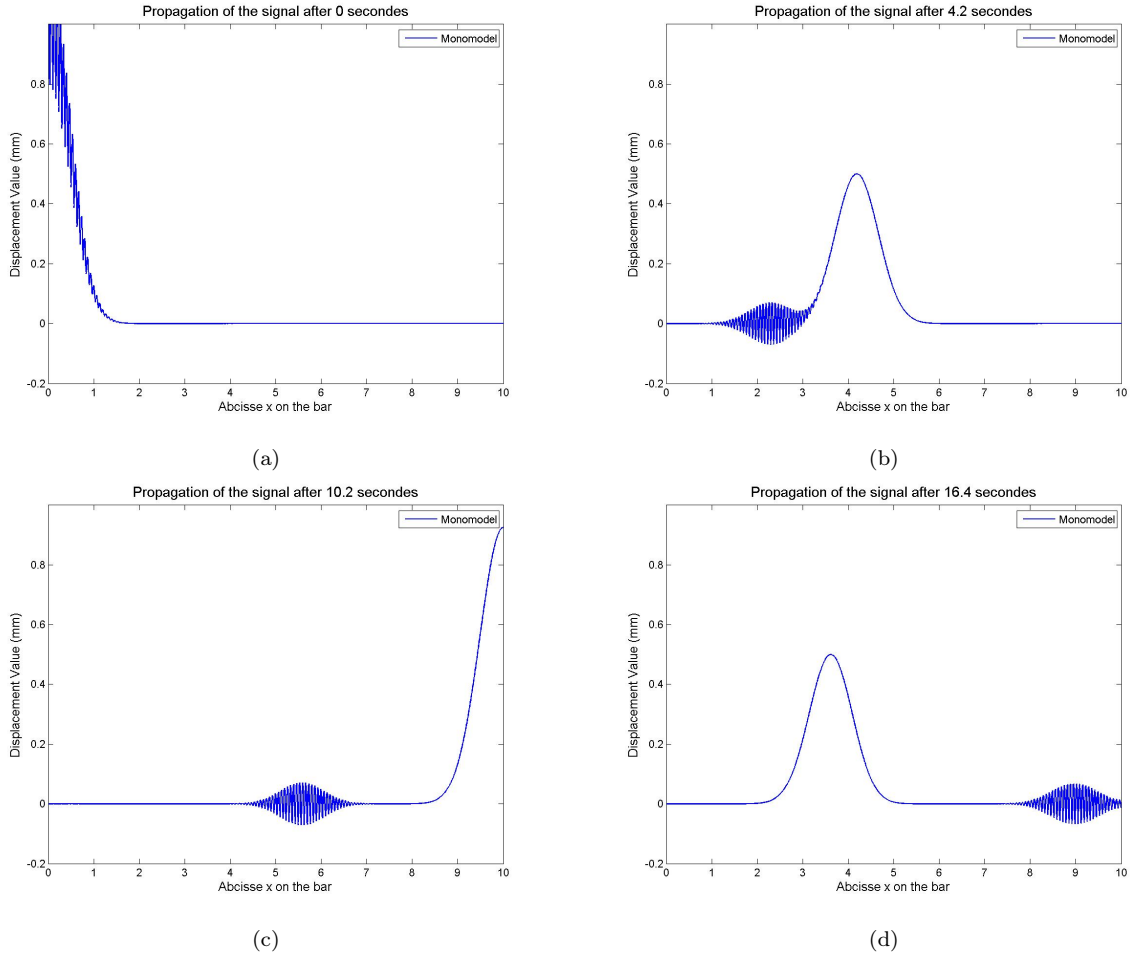


FIGURE 2.5 – 4 Snapshots illustrant la propagation du signal sur la barre monomodèle 1D

La figure (2.5a) donne le signal initial contenant l'onde BF (obtenue en lissant le signal) et l'onde HF représenté par les ondulations autour de la BF.

Dans la figure (2.5b), on observe que les deux ondes se sont propagées dans la barre avec des vitesses différentes. Cette différence de vitesse est liée au phénomène de la

dispersion numérique qui fait que la vitesse de propagation d'une onde dans un espace discret dépend de sa fréquence.

Dans les deux figures (2.5c) et (2.5d), les ondes ont continué à se propager dans la barre et ont été réfléchies lorsqu'elles sont arrivées à l'extrémité libre L de la barre. On remarque que les ondes ont gardé la même phase après réflexion, à cause de la condition de bord libre.

2.3.2 Représentation Arlequin bi-modèle

On traite ici le même problème dans le cadre Arlequin, en couplant un modèle EF fin P1 utilisé dans une partie du domaine à un autre modèle EF grossier dans une autre partie du domaine chevauchant la première. Plus précisément, le domaine Ω est partitionné en deux sous-domaines $\Omega_2 =]0, A[$ et $\Omega_1 =]B, L[$ qui se recouvrent sur un domaine $\Omega_c =]B, A[$ qui permet de faire la jonction volumique entre Ω_1 et Ω_2 , comme le montre la figure (2.6).

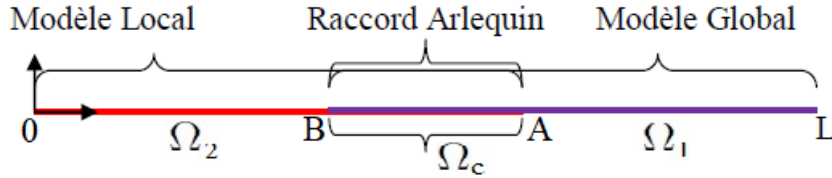


FIGURE 2.6 – Modèle discret de la barre Arlequin 1D

La même forme du signal initial du problème monomodèle est considérée pour le cas bi-modèle Arlequin.

Le problème Arlequin de la barre bi-modèle s'écrit comme suit.

$$\left(\varphi_{dyn}^{A1D} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{Connaissant } \begin{cases} u_1^0 = u_d / \Omega_1; & \underline{u}_2^0 = u_d / \Omega_2 \\ \dot{u}_1^0 = 0; & \dot{u}_2^0 = 0 \end{cases} \quad (2.40) \\ \forall t \in I, \text{ trouver } (u_1(t), u_2(t), \lambda(t)) \in W_1 \times W_2 \times M; \\ \int_0^A \alpha_k^1 \frac{\partial u_1}{\partial x} E \frac{\partial w_1}{\partial x} dx + \int_0^A \alpha_m^1 \ddot{u}_1 \rho w_1 dx + c(\lambda(t), w_1) = 0; \forall w_1 \in W_1 \quad (2.41) \\ \int_B^L \alpha_k^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} E \frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \int_B^L \alpha_m^2 \ddot{u}_2 \rho w_2 dx - c(\lambda(t), w_2) = 0; \forall w_2 \in W_2 \quad (2.42) \\ c(\mu, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0; \forall \mu \in M \quad (2.43) \end{array} \right.$$

où $W_1 = H^1(]B, L[)$ et $W_2 = H^1(]0, A[)$ sont les espaces des champs cinématiquement admissibles définis sur les domaine Ω_1 et Ω_2 , respectivement.

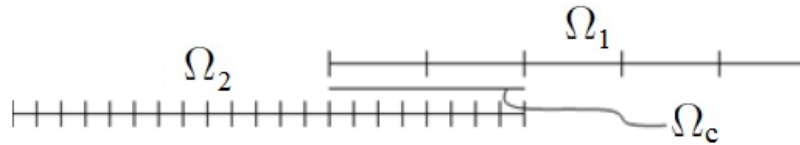


FIGURE 2.7 – Modèle discret de la barre Arlequin 1D

Considérons le test numérique de validation simple : On choisit $\Omega_1 =]4, 10[$ et $\Omega_2 =]0, 6[$ avec un maillage de taille $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.006$ correspondant à la taille du maillage du cas monomodèle. Les éléments des deux maillages sur la zone de couplage sont

parfaitement superposés, on a, donc, un maillage conforme. On considère des fonctions de partition des énergies constante sur la zone de couplage $\alpha_1^k = \alpha_1^m = 0.5$. Avec ces données, nous avons mené la simulation numérique de la propagation du signal dans la barre sur une durée de 20s, avec un pas temps fixe $\Delta t = 0.02s$.

On illustre par les figures (2.8a)-(2.8d), l'évolution du signal dans les 4 mêmes instants que le monomodèle de la barre de la figure (2.5). Dans la figure (2.9), nous traçons la variation de l'énergie du modèle grossier (en bleu), du modèle fin (en rouge) et l'énergie totale du système (en vert) au cours du temps.

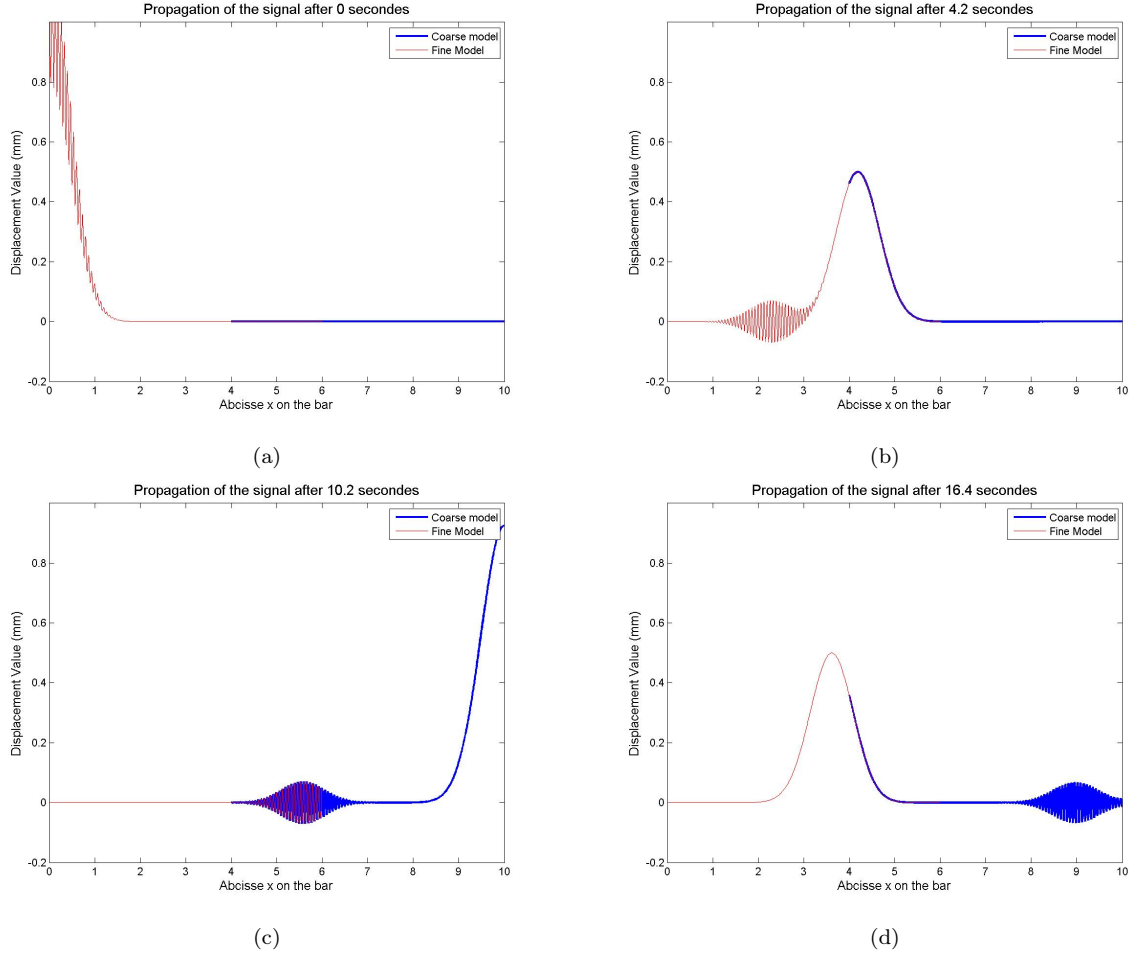


FIGURE 2.8 – 4 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D avec maillages conformes

La propagation du signal et la variation de l'énergie sur le bi-modèle de barre est identique à celle observée pour un mono-modèle de barre. Le transfert du signal d'un modèle à un autre se fait, à travers les multiplicateurs de Lagrange, de manière à assurer le passage de la partie BF (représenté par la gaussienne) et de celle HF (les oscillations fortes). Nous observons, aussi, sur les courbes des énergies le transfert progressif de l'énergie apporté par le modèle en rouge au modèle en bleu à partir de l'instant 5.5s jusqu'à l'instant 12.5s. A partir de l'instant 13s, l'onde basse fréquence est retransmise au modèle rouge après réflexion sur l'extrémité gauche de la barre, supposé libre. Il y a conservation de l'énergie.

La représentation ci-dessus montre la consistance, en discret, de la modélisation bi-modèle (mono-échelle) Arlequin. On rappelle, comme expliqué dans l'introduction, que l'intérêt de la modélisation Arlequin est de coupler des échelles différentes. De ce fait, on considère dans le reste de cette section que dans Ω_1 on définit un modèle fin dont le pas de maillage est suffisamment petit pour représenter les ondes HF du signal donné,

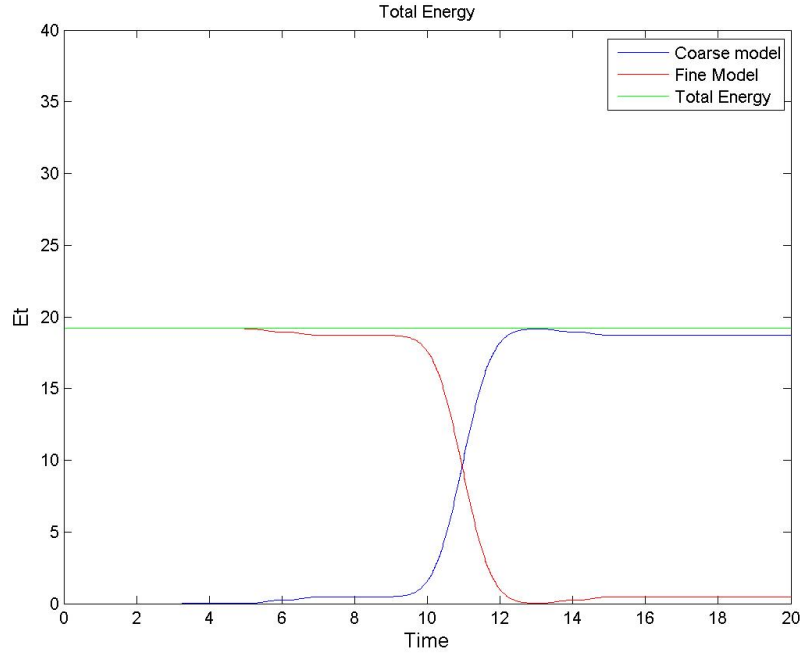


FIGURE 2.9 – Variation des énergies du modèle Arlequin avec maillage uniforme

et que dans Ω_2 on définit un modèle EF grossier de pas plus grand. C'est cette situation qui soulève de nouvelles questions que nous allons aborder.

2.3.3 Choix de l'espace médiateur

La méthode Arlequin génère des problèmes mixtes, aussi bien en statique qu'en dynamique. Pour la discrétisation des problèmes Arlequin en espace, une question importante est de bien choisir des espaces éléments finis M_{h_λ} approchant l'espace des multiplicateurs de Lagrange M , avec des espaces éléments finis donnés W_{h_2} (espace fin) et W_{h_1} (espace grossier), utilisés pour l'approximation des espaces des déplacements W_1 et W_2 . Ce choix doit être fait de sorte à assurer l'existence et l'unicité de la solution discrète (en élasticité linéaire) du problème Arlequin discret, d'une part, la bonne précision de la solution Arlequin discrète, d'autre part. Comme pour tous les problèmes mixtes, une première condition délicate à satisfaire alors est celle du choix d'espaces éléments finis pour les multiplicateurs, compatibles avec ceux des déplacements. Mathématiquement, cela revient, principalement, à faire des choix qui garantissent la condition de coercivité et la condition Inf-Sup, appelée aussi condition de Babuska-Brezzi. (cf. [Bab73, Bre74]).

En élasticité linéaire, ces conditions ont été établies pour les problèmes Arlequin par Ben Dhia et Rateau [BDR01] et sous des conditions plus faibles dans [Dhi08] que dans [BDR01]. Des choix compatibles ont été définis dans ces travaux. Les plus pratiques d'entre eux consistent à prendre comme espace médiateur discret M_{h_λ} , soit W_{h_2}/Ω_c (restriction de l'espace fin à la zone de couplage), soit W_{h_1}/Ω_c (restriction de l'espace grossier à la zone de couplage).

Dans la majorité des cas (et toujours en élasticité linéaire), et en particulier dans tous les cas où l'on couple, dans le cadre Arlequin, des modèles qui ne diffèrent que par la discrétisation éléments finis, pour peu que l'on procède à des raffinements idoines des modèles éléments finis, on peut alors assurer l'obtention de résultats numériques suffisamment précis avec l'un ou l'autre de ces choix pour l'espace médiateur. Toutefois, comme montré dans [DR05, Dhi08], dans certains cas (ceux, par exemple, de

couplage de modèles structuraux différents de type couplage Arlequin Coque-3D), le choix de $M_{h_\lambda} = W_{h_2}/\Omega_c$ (médiateur 3D) ne peut pas assurer une précision escomptée (cf. [DR05]) à cause d'un phénomène de bridage du modèle 3D sur le modèle coque. En utilisant, en particulier, les outils développés dans [BDR01], il a été tout récemment démontré dans [ADIR18] que l'on a des résultats d'existence et d'unicité de la solution (à tout instant t) pour un problème Arlequin d'élasto-dynamique linéaire, en choisissant les mêmes espaces médiateurs que dans le régime statique, ainsi que les mêmes choix pratiques des autres paramètres.

La question que l'on se pose dans cette section est quid de la précision des résultats, précision mise en perspective de la classe particulière des problèmes multi-échelles étudiés dans le cadre de cette thèse ? Pour la sous-section qui suit, nous allons étudier l'impact du choix en dynamique, de l'un ou l'autre des deux espaces médiateurs pratiques, à savoir $M_{h_\lambda} = W_{h_1}/\Omega_c$ et $M_{h_\lambda} = W_{h_2}/\Omega_c$, en considérant par l'aspect numérique le même cas 1D de la barre élastique.

2.3.3.1 Choix d'un espace médiateur fin : blocage des ondes HF

Pour discrétiser le champ des multiplicateurs de Lagrange, on utilise la restriction de l'espace éléments finis fins au domaine de couplage Ω_c ($M_{h_\lambda} = W_{h_2|_{\Omega_c}}$). On peut montrer que dans le cas considéré, nous avons nécessairement $u_{h_1} = u_{h_2}$ dans Ω_c [BDR01], d'où le mot bridage ou "verrouillage" de la solution fine par ou sur la solution grossière dans Ω_c .

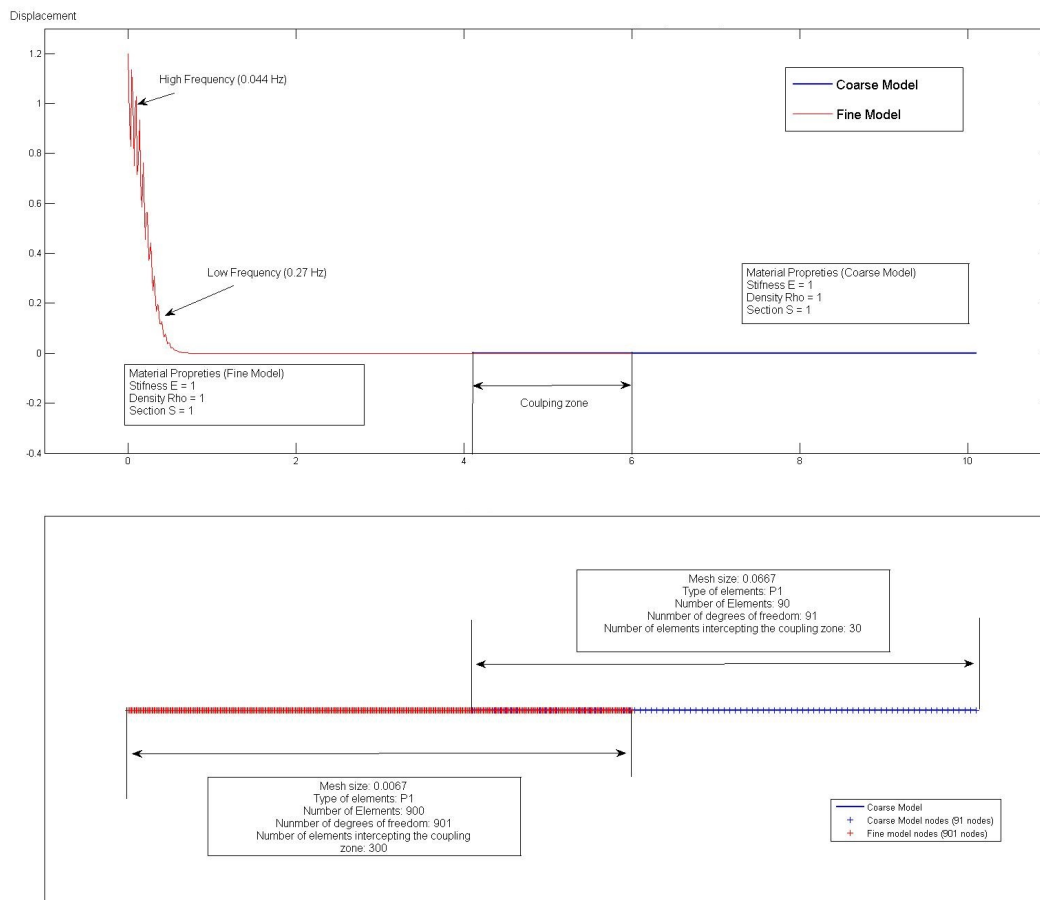


FIGURE 2.10 – Données numériques de la barre Arlequin 1D

Pour notre test numérique 1D, on considère les mêmes données numériques de la sous-

section (2.3.2). Les fonctions de partition des énergies sont des fonctions constantes dans la zone de couplage $\alpha_1^k = \alpha_1^m = 0.1$. On visualise la propagation du signal dans la barre sur une durée de 20s, avec un pas temps fixe $\Delta t = 0.02s$. Dans la figure (2.11), on illustre la déformée du bi-modèle Alequin de la barre 1D à 4 instants différents.

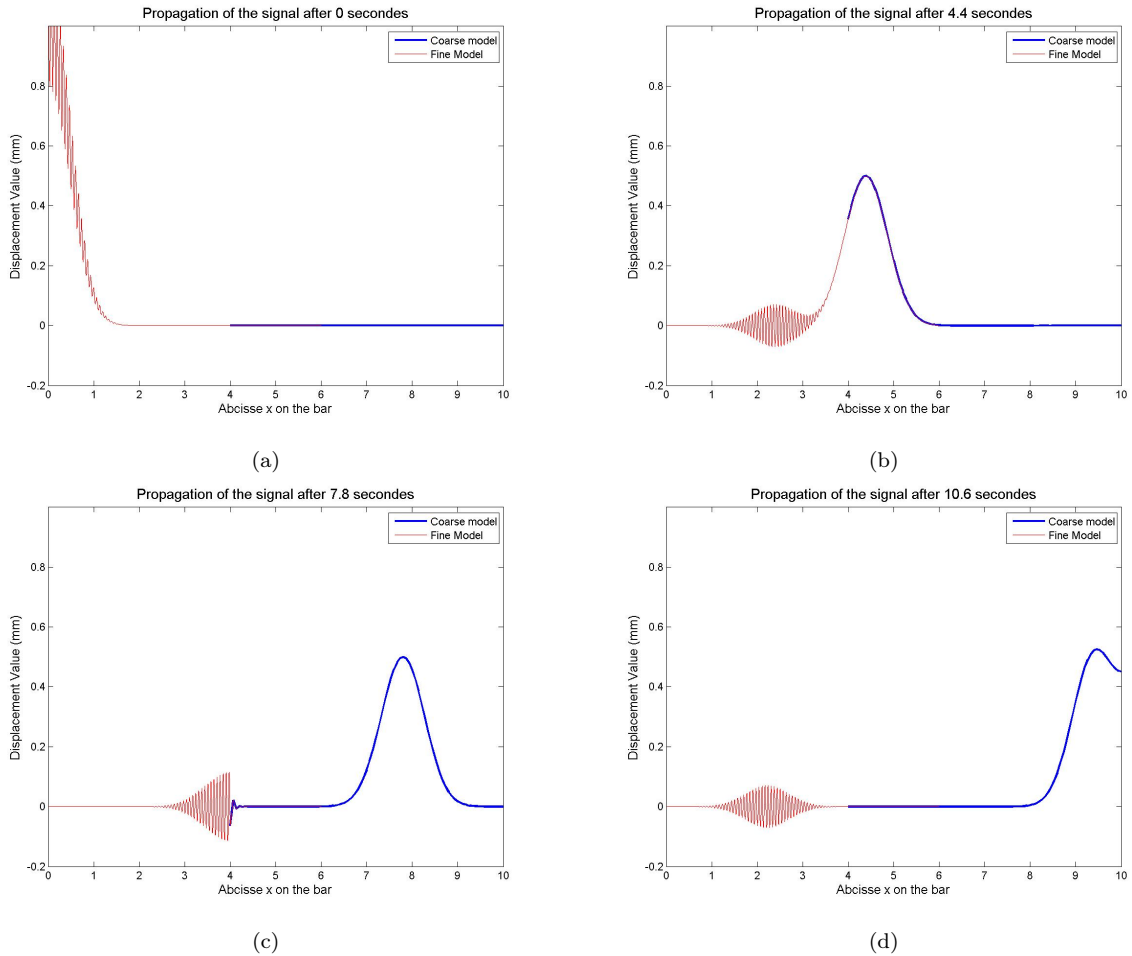


FIGURE 2.11 – 4 Snapshots illustrant la propagation du signal dans la barre 1D

Sur la figure (2.11b), on constate que le couplage Arlequin en volume permet de faire passer la basse fréquence du modèle fin au modèle grossier. En revanche, l'onde haute fréquence se réfléchit dès son arrivée à l'extrémité B de la zone de couplage, comme montré par la figure (2.11c), et reste piégée dans la zone pure du modèle fin qui est une zone critique. Le non-passage de l'onde HF s'explique par un problème de non admissibilité des ondes hautes fréquences pour le maillage du modèle grossier. L'onde HF ne pénètre pas dans la zone de couplage. On a, ainsi, un phénomène de bridage comme en statique. En effet, lorsque on considère un espace médiateur fin, le couplage fait que : (pour simplifier, on considère les cas de maillages compatibles dans Ω_c)

$$u_{h_2|\Omega_c} = \Pi_2(u_{h_1}/\Omega_c) \quad (2.44)$$

où Π_2 désigne l'opérateur de projection orthogonale (au sens du produit scalaire $c(\cdot, \cdot)$) sur W_{h_2}/Ω_c . Ceci implique $u_{h_2}(t)/\Omega_c = u_{h_1}(t)/\Omega_c$.

Ce bridage (comme dans le cadre statique) empêche les ondes HF d'être représentées dans la zone de couplage. Pire, il les réfléchit, à l'instar d'une barrière rigide, dans la zone critique $\Omega_2 \setminus \Omega_c$.

En conclusion, alors que le bridage en statique est tout-à-fait acceptable dans le cadre Arlequin, pour les problèmes où la précision du modèle grossier est suffisante dans

la zone de couplage Ω_c , ce bridage est interdit en dynamique à cause de la pollution introduite dans une zone d'intérêt, par piégeage dans cette zone des ondes ne pouvant en sortir à cause du couplage choisi.

2.3.3.2 Choix d'espace médiateur grossier : entrée des ondes dans la zone de couplage

Dans ce paragraphe, on choisit un espace médiateur discret $M_{h_\lambda} = W_{h_1/\Omega_c}$. Dans ce cas, le couplage fait que :

$$u_{h_1|\Omega_c} = \Pi_1(u_{h_2}/\Omega_c) \quad (2.45)$$

où Π_1 désigne l'opérateur de projection orthogonale (au sens de $c(\cdot, \cdot)$) sur W_{h_1/Ω_c} . Pour le test numérique, on reprend les données du cas test exposé au paragraphe 2.3.3.1. On illustre, dans la figure (2.12), la propagation du signal dans la barre en montrant la déformée à 4 instants différents.

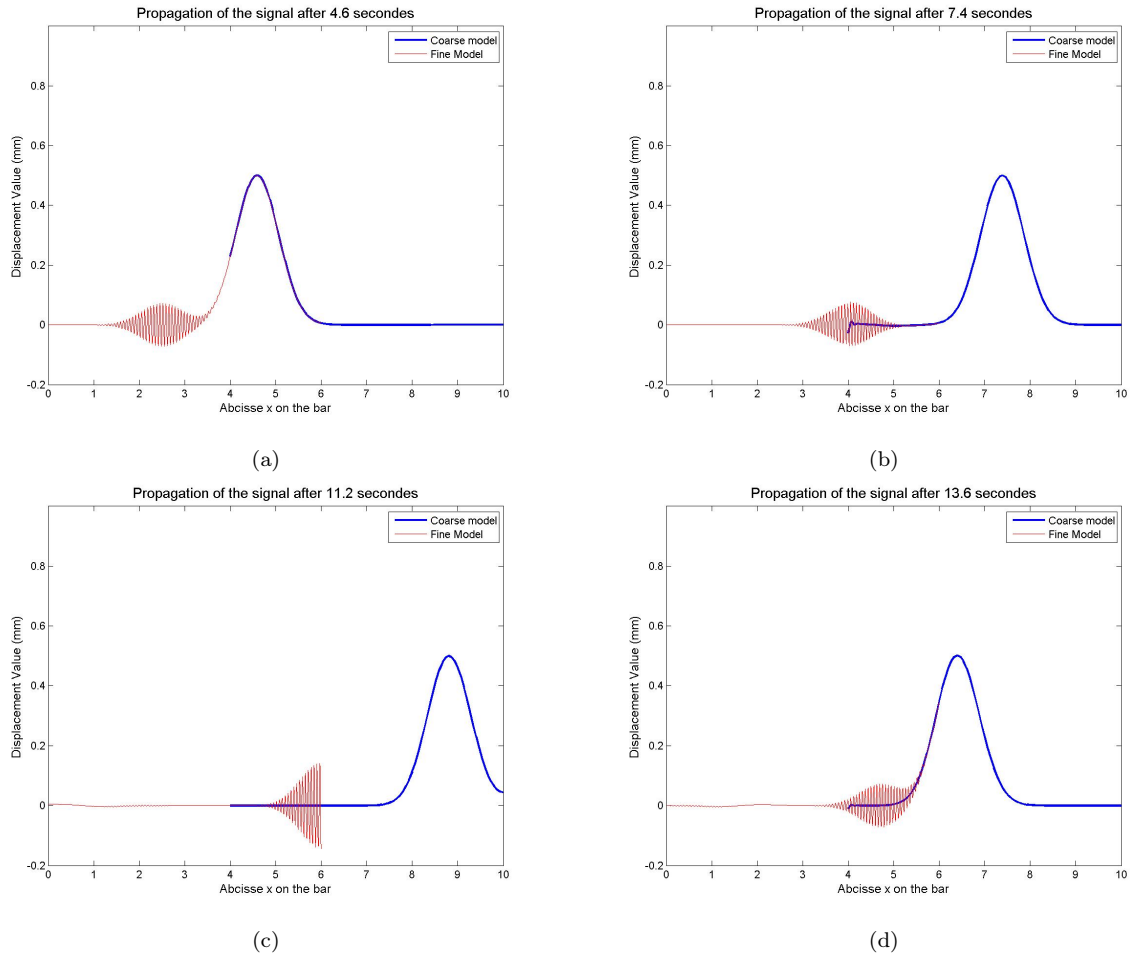


FIGURE 2.12 – 4 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D

Dans les figures (2.12a)-(2.12d), on observe que tout le signal pénètre dans la zone de couplage. Comme précédemment, l'onde basse fréquence représentée est parfaitement transmise du modèle fin au modèle grossier. Mais, à l'inverse du cas précédent, l'onde haute fréquence pénètre dans la zone de collage. Toutefois, il lui est impossible de se propager dans le domaine grossier à partir du point A, point qui marque la frontière du domaine fin, et ce pour l'impossibilité pour cette onde HF de continuer à se propager dans le domaine grossier, en lien avec le théorème de Nyquist-Shannon au sujet de

l'échantillonnage, à savoir que "La représentation discrète d'un signal exige des échantillons régulièrement espacés à une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal" [Sha49].

En conclusion, contrairement à des couplages classiques de sous-domaines en surface, le couplage en volume Arlequin permet, moyennant un bon choix de l'espace médiateur M_{h_λ} de faire transiter les ondes HF (par le point frontière B) dans la zone de couplage. Ceci représente, en dynamique, un avantage du couplage Arlequin volumique par rapport à tous les couplages surfaciques. Ceci étant, comme observé, à l'intersection du bord de la zone fine Ω_{h_1} avec la frontière de la zone de couplage Ω_c (point frontière A, pour le test 1D considéré), le phénomène de réflexion des HF se produit "naturellement" et peut sembler poser la question de l'intérêt du couplage Arlequin en volume par rapport à un couplage en surface, plus simple. Sembler seulement car le fait que le piégeage se passe dans la zone de couplage permet de donner une réponse pertinente à cette question ; réponse qui est donnée dans la sous-section qui suit.

2.3.3.3 Traitement de la réflexion des ondes dans la zone de couplage

Le phénomène de réflexion d'ondes HF observé dans la sous-section précédente doit être traité pour éviter de piéger ces ondes et polluer la solution dans la zone critique $\Omega_2 \setminus \Omega_c$.

Dans la littérature on peut relever deux solutions différentes. La première solution consiste à superposer au modèle fin, défini dans Ω_2 , un modèle Patch Arlequin ayant la même finesse et défini dans Ω_c (servant de modèle de transition). Un schéma de Newmark conservatif est alors utilisé dans Ω_2 alors qu'un schéma de type HHT amortissant est utilisé dans Ω_c . Enfin, un schéma de Newmark conservatif est utilisé pour un troisième modèle, grossier, défini dans $\Omega_1 \setminus \Omega_c$. Les domaines Ω_c et $\Omega_1 \setminus \Omega_c$ sont alors raccordés en surface par la méthode des multiplicateurs de Lagrange surfaciques classiques. Cette solution a été développée dans le cadre des travaux de thèse de C. Zammali sous la direction de H. Ben Dhia [BDZ04, DC05, Zam05]. Elle est efficace pour éliminer les ondes réfléchies. Mais aucune indication précise n'est donnée sur les choix des paramètres numériques permettant de contrôler les taux d'amortissement des ondes dans Ω_c . Par conséquent, on peut, par exemple, se trouver à utiliser une zone de couplage inutilement grande, occasionnant des coûts de calcul pouvant être épargnés. La deuxième solution consiste à introduire une force qui amortit les ondes piégées au sein même de la zone de couplage, ne polluant ainsi pas la solution en zone critique. Cette solution a été développée et testée dans le cadre de mon stage de fin d'études (au laboratoire MSSMat sous la direction de H. Ben Dhia [K.13, ABD14]). Cette force visqueuse est donnée par :

$$\underline{f}_{amor} = -\mu(\underline{\dot{u}}_1 - \underline{\dot{u}}_2), \text{ dans } \Omega_c \quad (2.46)$$

où μ est un coefficient d'amortissement positif. Une analyse du contenu fréquentiel du signal permet de choisir la valeur du coefficient d'amortissement qui permet, en même temps, la propagation de toutes les ondes dans la zone de couplage et de filtrer celles dont les fréquences sont telles que, sans filtrage, elles restent piégées dans la zone critique.

Le bon choix du paramètre μ fait rentrer en jeu un autre paramètre en plus de ceux déjà listés de la méthode Arlequin, à savoir l'épaisseur de la zone couplage. Dans la suite, nous nous intéressons aux choix pertinents de tous ces paramètres en commençant par les fonctions de partition de l'énergie.

2.3.4 Influence des paramètres de partition des énergies dans la zone Ω_c

Les fonctions de partition des énergies, caractéristiques de la méthode Arlequin, sont introduites afin d'éviter le dédoublement des énergies dans la zone de superposition des modèles. Le choix de ces fonctions définit la contribution des énergies de chaque modèle pour décrire l'état du système dans cette zone. On considère ici des fonctions de partition différentes pour chacune des énergies. En variant le choix de ces fonctions, on observe et on analyse leurs influences sur les résultats. Trois types de fonctions de partition des énergies sont examinés : des fonctions constantes, des fonctions linéaires et des fonctions cubiques.

2.3.4.1 Fonctions constantes

On considère, dans un premier temps, des fonctions de partition constantes sur la zone de couplage pour partitionner l'énergie cinétique et l'énergie interne d'un bi-modèle de barre 1D comme montré dans la figure (2.13).

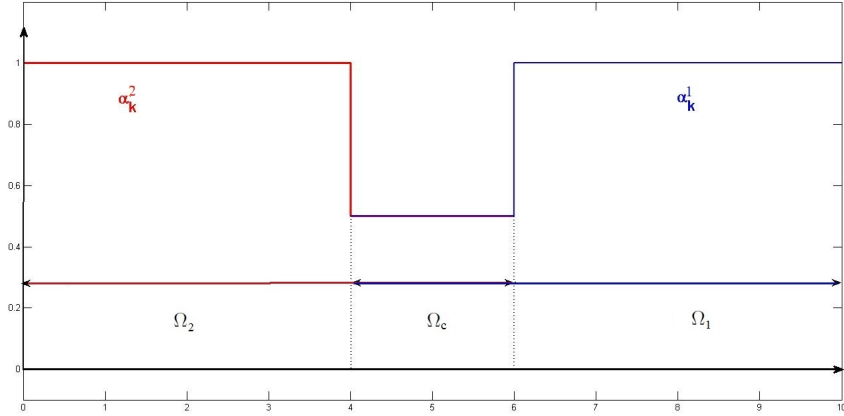


FIGURE 2.13 – Fonctions constantes de partition de l'énergie par paliers

On fait varier les constantes avec un pas de 0.1 dans l'intervalle $[0, 1]$. On considère la propagation du signal initial de la figure (2.4) pour 1000 pas de temps constant sur un l'intervalle d'étude de $[0, 20s]$. Pour chaque cas, on calcule le coefficient T_r de transmission d'énergie du modèle fin au modèle grossier défini par :

$$T_r = \frac{E_{tra}}{E_{tot}} \quad (2.47)$$

duquel on déduit le coefficient de réflexion R_f , défini par :

$$R_f = \frac{E_{ref}}{E_{tot}} = 1 - T_r \quad (2.48)$$

où E_{tra} est l'énergie transmise, E_{ref} est l'énergie réfléchie et E_{tot} est l'énergie totale du système.

Les résultats obtenus sont donnés sur la figure (2.14) où sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, on représente, respectivement, les poids associés aux énergies interne et cinétique du modèle grossier dans Ω_c . Sur l'axe des altitudes, on représente le coefficient de transmission T_r .

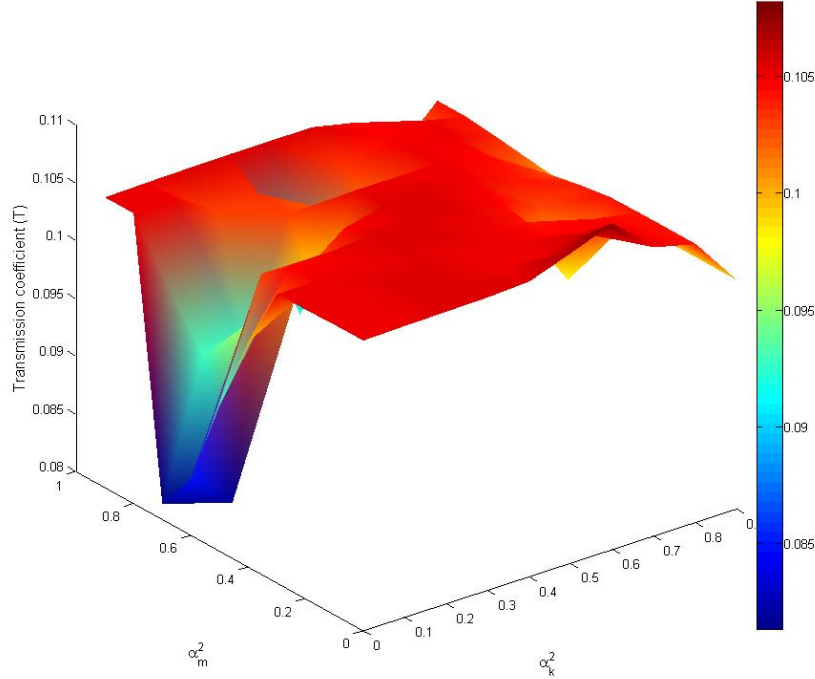


FIGURE 2.14 – variation du coefficient de réflexion en fonction des couples des fonctions de partition de l'énergie

Sur cette figure, on remarque que la valeur du coefficient de transmission varie entre 0.08 et 0.11 en fonction du couple de valeurs des fonctions de partitions des énergies α_k^1 et α_m^1 . Cela montre bien que, pour des finesses différentes des modèles superposés, le choix des valeurs des fonctions de partition de l'énergie affecte la transmission globale de l'information du modèle fin au modèle grossier. Dans le cas présent, l'énergie transmise du modèle fin au modèle grossier est celle des ondes basses fréquences dont l'énergie représente 10% de celle du signal initial. Par ailleurs, on constate que le coefficient de transmission est meilleur pour des valeurs égales des poids des énergies interne (α_k^1) et cinétique (α_m^1).

Lorsque les valeurs des fonctions de partition des énergies sont différentes, certaines ondes de fréquences a priori admissibles par le modèle grossier (et également fin) ne le sont plus (de par les partitions Arlequin) sur sa restriction à la zone de couplage. Ces ondes associées sont, par conséquent, réfléchies sur la frontière B de la zone de couplage.

Sur la diagonale où $\alpha_k^1 = \alpha_m^1$, on observe l'apparition de réflexions HF "parasites" (voir figure (2.15)) au niveau de la frontière B de la zone de couplage. En effet, les ondes basses fréquences sont transmises totalement, alors que les ondes hautes fréquences pénètrent partiellement dans la zone de couplage et une coupure du signal en deux parties est observée sur la figure (2.15c). Ces réflexions "parasites" des ondes HF croissent lorsque on augmente la valeur de $\alpha_k^1 (= \alpha_m^1)$. En effet, les fonctions de partition de l'énergie définissent la contribution des modèles dans la zone de couplage. L'augmentation des poids des énergies grossières dans la zone de couplage renforce la contribution du modèle grossier sur cette zone ce qui filtre certaines ondes HF dès leur premier contact avec la zone de couplage.

Pour conclure, seules les valeurs faibles et constantes de fonctions des partitions des énergies grossières permettent de transférer proprement les ondes basses fréquences et de réduire les réflexions parasites sur les frontières de la zone de couplage. Pour

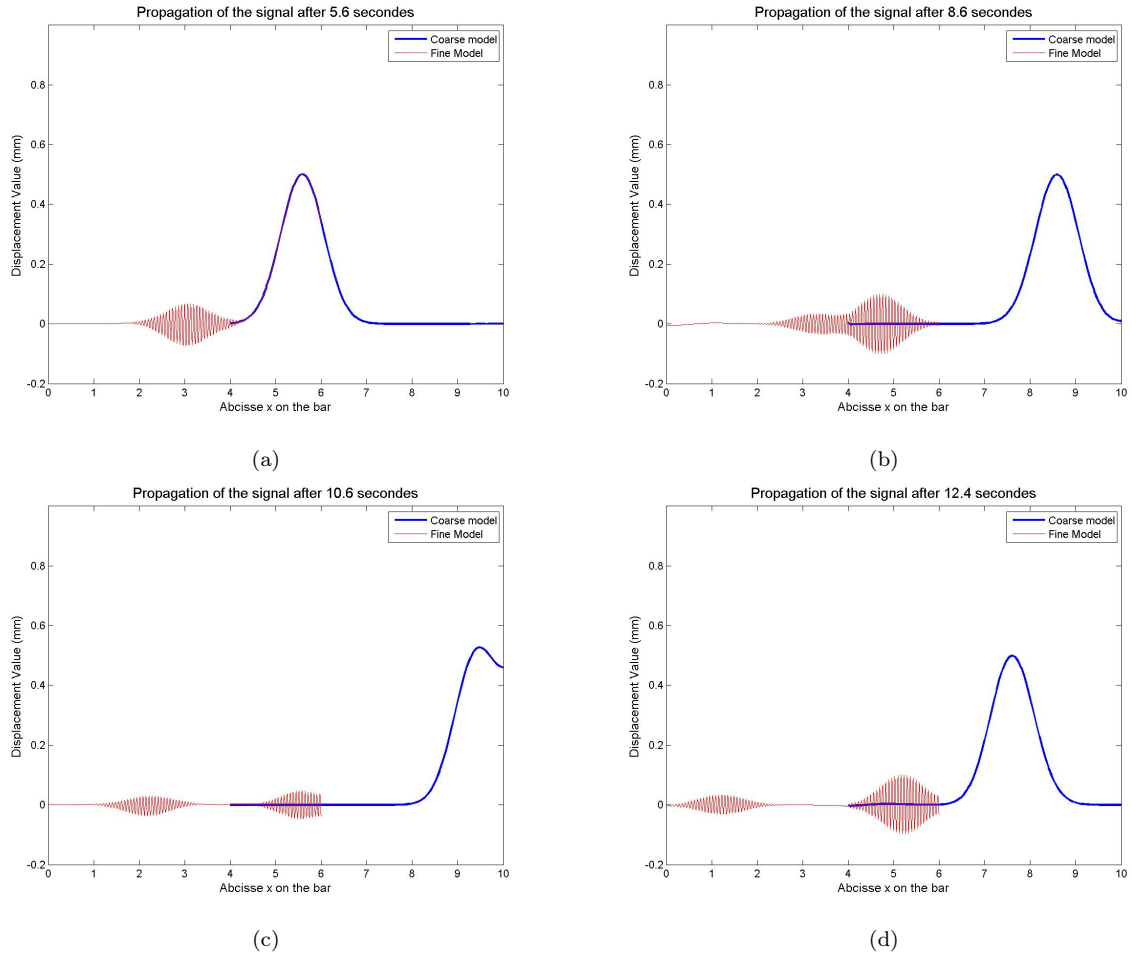


FIGURE 2.15 – 4 Snapshots de la propagation et la réflexion parasite du signal sur la barre Arlequin 1D $\alpha_k^1 = \alpha_m^1 = 0.6$

$\alpha_k^1 = \alpha_m^1 = 0$ dans Ω_c , les réflexions parasites des ondes HF sont totalement éliminées (voir figure (2.16)).

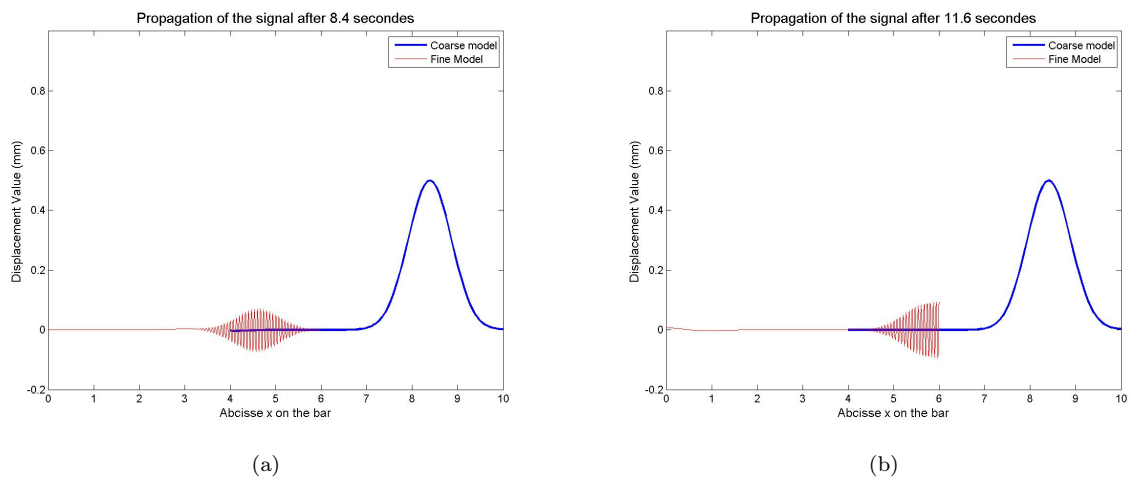


FIGURE 2.16 – 2 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour $\alpha_k^1 = \alpha_m^1 = 0$

Dans ce cas, la restriction du modèle grossier sur Ω_c est considéré de rigidité et de masse nulles. La restriction du modèle grossier sur la zone de couplage étant sans énergie, sa déformée n'est plus guidée que par l'équation du couplage. Ce choix de paramètres des fonctions de partitions constantes des énergies semble être le bon pour le cas de la jonction.

2.3.4.2 Fonctions linéaires et cubiques

Dans une deuxième série de tests numériques, on prend des fonctions de partition de l'énergie qui sont, soit linéaires, soit cubiques dans la zone de couplage. Ces fonctions sont continues sur les frontières de la zone de couplage et donnent plus de régularité à la partition des énergies dans la zone de couplage. Comme précédemment, on fait propager le signal multifréquences sur le modèle de la barre 1D avec des fonctions de partition linéaires et cubiques. On représente dans la figure (2.17) les déformées à 4 instants différents.

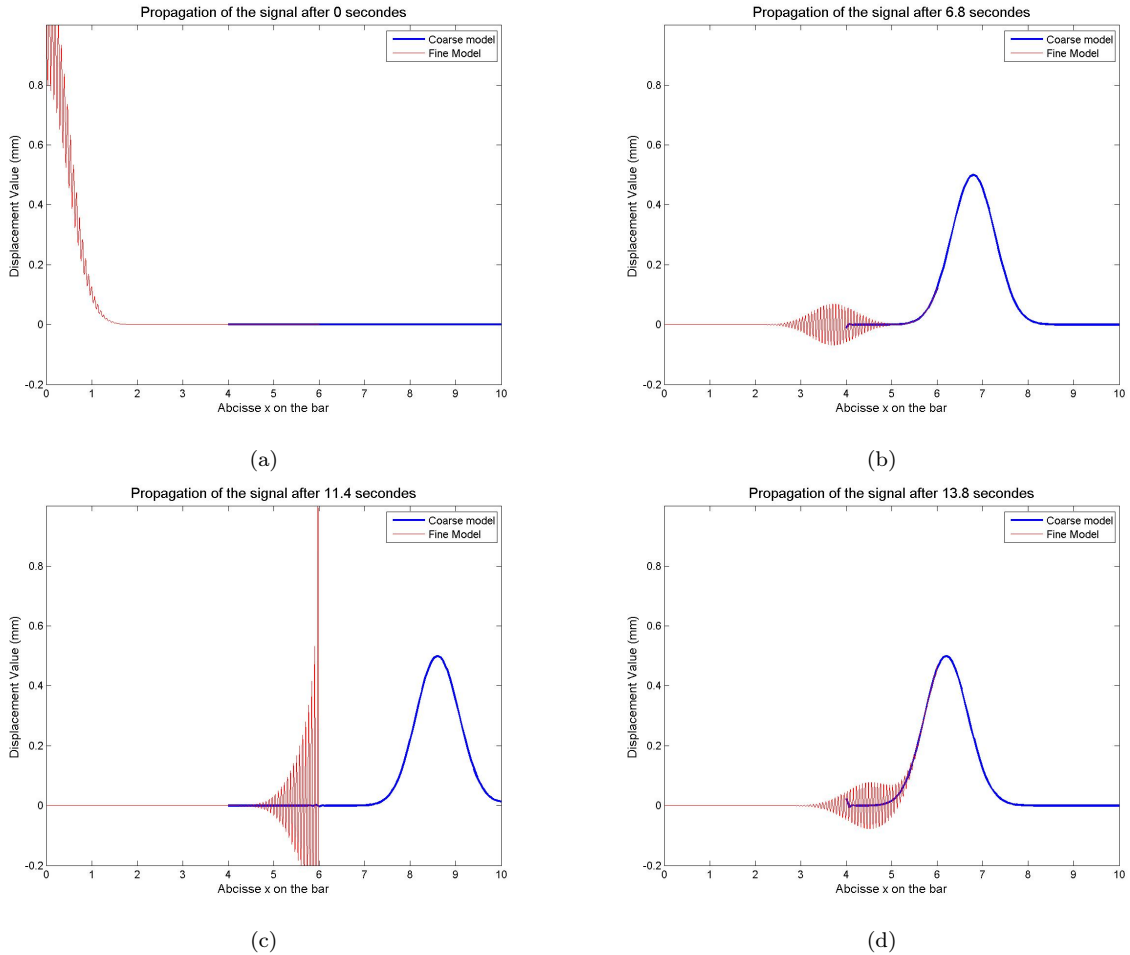


FIGURE 2.17 – 4 Snapshots de la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour des fonctions de partition de l'énergie linéaires (ou cubiques)

Dans la figure (2.17b), la partie basse fréquence du signal initial, représenté dans la figure (2.17a), est bien transmise du modèle fin au modèle grossier et l'onde HF commence à pénétrer dans la zone de couplage sans réflexions parasites observées sur le bord B de la zone de couplage. Mais, dans la figure (2.17c), on observe des oscillations de fortes amplitudes lorsque l'onde HF arrive sur le bord A du modèle fin. Rappelons ici que le couplage est assuré avec un espace médiateur M_{h_λ} grossier ($M_{h_\lambda} = W_{h_1/\Omega_c}$). Observons qu'un phénomène semblable pour les mêmes choix de paramètres est observé et commenté en statique (cf. [Dhi08]). Cette amplification de l'amplitude d'ondes HF est due à "l'évanescence" du matériau fin sur le bord du modèle fin, liée au fait que la valeur $\alpha^1(x)$ du poids attribuée aux des énergies fines tend vers 0 lorsque x tend vers A . Afin d'éviter ce problème, on diminue ici les valeurs de $\alpha_k^2(x)$ et $\alpha_m^2(x)$ d'une quantité $\varepsilon > 0$, et augmentant ainsi α_k^1 et α_m^1 de la même quantité, comme montré sur la figure (2.18).

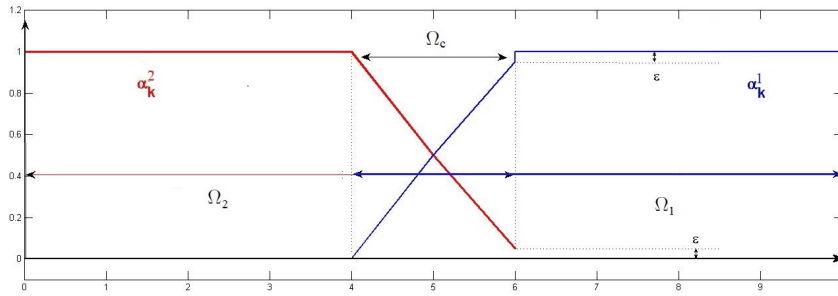


FIGURE 2.18 – Fonctions linéaires de partition de l'énergie

L'application de ces fonctions de partition de l'énergie sur le modèle de la barre 1D donne le résultat de la figure (2.19). Dans cette figure, les ondes HF arrivent sur le bord du modèle fin et se réfléchissent sans localisation forte au niveau du bord comme dans le cas précédent.

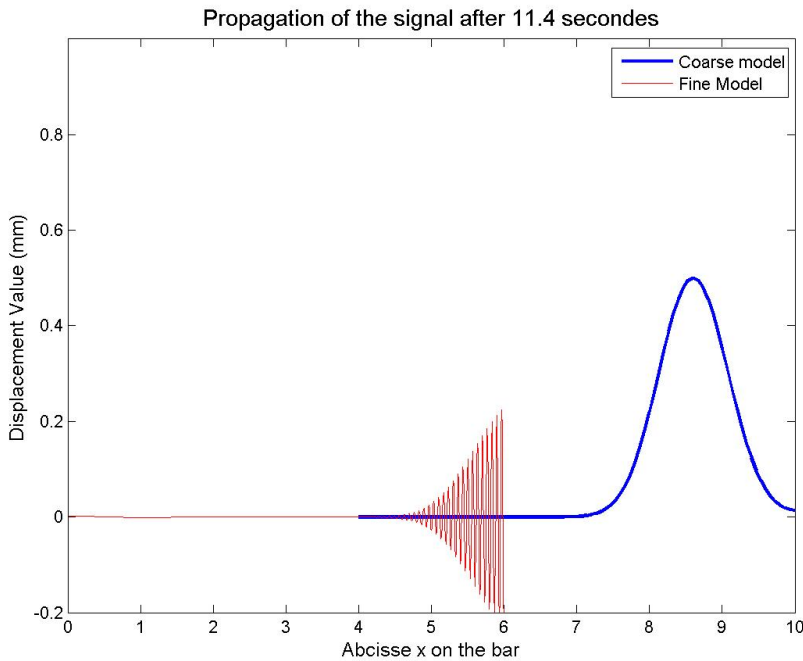


FIGURE 2.19 – Forme du signal sur la barre Arlequin 1D lorsque la HF atteint le bord

2.3.5 Coefficient d'amortissement

Physiquement, les ondes HF d'un signal multifréquence sont atténuées progressivement par un comportement dissipatif du milieu propageant et/ou par propagation dans un domaine de plus en plus étendu. Mais, la réflexion des ondes HF est dans notre approche un problème purement numérique, lié à la différence de finesses spatiales des modèles. Il est donc nécessaire d'amortir ces ondes dans la zone de couplage afin de ne pas polluer la solution dans la zone fine, tout en gardant une solution numériquement atteignable et en accord avec notre hypothèse de localisation des ondes HF.

Comme mentionné dans le paragraphe 2.3.3.3, pour amortir ces ondes, on applique une force visqueuse proportionnelle à la vitesse de la partie réfléchie de la solution du modèle fin dans l'équation (2.46). La question est, maintenant, comment choisir ce coefficient ?

L'amortissement rajoute un nouveau terme au système discret (\wp_{dyn}^{Arl-d}) en espace à l'instant t_n de l'intervalle I . Le nouveau système s'écrit :

$$\left(\wp_{amor}^{Arl-d} \right) \begin{cases} \forall 1 \leq n \leq N, \text{ Trouver } (\underline{U}_1^n, \underline{U}_2^n, \underline{\Lambda}^n) \text{ tel que :} \\ \underline{K}_1 \underline{U}_1^n + \underline{M}_1 \ddot{\underline{U}}_1^n - \underline{C}_{21}^d \dot{\underline{U}}_2^n + \underline{C}_{11}^d \dot{\underline{U}}_1^n - \underline{C}_1^T \underline{\Lambda}^n = \underline{F}_1^n & (2.49) \\ \underline{K}_2 \underline{U}_2^n + \underline{M}_2 \ddot{\underline{U}}_2^n - \underline{C}_{12}^d \dot{\underline{U}}_1^n + \underline{C}_{22}^d \dot{\underline{U}}_2^n + \underline{C}_2^T \underline{\Lambda}^n = \underline{F}_2^n & (2.50) \\ \underline{C}_1 \dot{\underline{U}}_1^n - \underline{C}_2 \dot{\underline{U}}_2^n = 0 & (2.51) \end{cases}$$

où les matrices d'amortissement \underline{C}_{11}^d , \underline{C}_{12}^d , \underline{C}_{21}^d et \underline{C}_{22}^d sont calculés comme suit :

$$(\underline{C}_{IJ}^d)_{ij} = \int_{\Omega_c} \Phi_i^I \mu \Phi_j^J, \quad 1 \leq i \leq n_h^I, \quad 1 \leq j \leq n_h^J; \quad \forall 1 \leq I, J \leq 2 \quad (2.52)$$

En effet, cet amortissement ne s'applique que sur la zone de couplage pour filtrer la partie du signal réfléchi. En outre, le signal sur le modèle fin est celui qui est le plus riche en fréquences, contenant des HF et BF. Lors du couplage, seule la partie BF est transmise au modèle grossier et les ondes HF réfléchies restent dans le modèle fin où elles seront amorties. Intéressons-nous, ainsi, uniquement à cette zone du modèle fin pour étudier le choix du coefficient d'amortissement μ . D'abord, on recourt à une décomposition modale de l'équation d'équilibre sur la restriction du modèle fin à la zone de couplage. On calcule pour cela les fréquences et les modes propres ω_i et $\underline{\Phi}_i^\omega$ de vibration du système qui sont solutions du problème discret aux valeurs propres généralisées suivant :

$$\underline{K}\{\underline{\Phi}_i^\omega\} = \omega_i^2 \underline{M}\{\underline{\Phi}_i^\omega\} \quad i = 1..N_1 \quad (2.53)$$

En normalisant les $\underline{\Phi}_i^\omega$ par rapport à la masse, la solution du problème \wp_{dyn}^{Arl-d} est décomposée sur la base modale comme suit :

$$\underline{U}_i = \sum_{i=1}^{N_1} u_i^f \underline{\Phi}_i^\omega \quad (2.54)$$

Dans cette base modale, la résolution du système (\wp_{amor}^{Arl-d}) se ramène à la résolution d'un système d'équations scalaires indépendantes de la forme suivante :

$$\ddot{u}_i^f + 2\xi_i \omega_i^f \dot{u}_i^f + (\omega_i^f)^2 u_i^f = f_i, \quad i = 1..N_1 \quad (2.55)$$

avec $f_i = \underline{\Phi}_i^{\omega T} \underline{F}$ et $\xi_i = \frac{1}{2\omega_i} \frac{\{\underline{\Phi}_i^\omega\}^T \underline{C}\{\underline{\Phi}_i^\omega\}}{\{\underline{\Phi}_i^\omega\}^T \underline{M}\{\underline{\Phi}_i^\omega\}}$ les coefficients d'amortissement du système

d'équations indépendantes et $\omega_i^2 = \frac{\{\underline{\Phi}_i^\omega\}^T \underline{K}\{\underline{\Phi}_i^\omega\}}{\{\underline{\Phi}_i^\omega\}^T \underline{M}\{\underline{\Phi}_i^\omega\}}$ les quotients de Rayleigh. Les coefficients d'amortissement correspondant aux fréquences transmises au modèle grossier doivent avoir une valeur nulle. L'amortissement est appliqué uniquement sur le paquet d'ondes qui se réfléchissent sur la frontière de la restriction du modèle fin dans la zone de couplage, contenant la bande des fréquences non admissible par le modèle grossier. D'après le théorème de Shannon-Nyquist [Sha49] "La représentation discrète d'un signal exige des échantillons régulièrement espacés à une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal", nous considérons que la fréquence d'échantillonnage correspond, dans notre cas, à l'inverse du pas de discrétisation. Sachant que nous devons disposer de 3 points au moins pour représenter une onde ayant une longueur d'onde donnée une longueur d'onde donnée,

nous définissons, alors, la fréquence maximale d'un signal se propageant sur le modèle grossier comme étant une fréquence minimale f_{min} . Le double de cette fréquence est inférieure à l'inverse de Δx_1 . Dans la pratique, nous écrivons alors :

$$f_{min} = \frac{c}{4\Delta x_1} \quad (2.56)$$

D'autre part, le modèle fin ne peut faire propager que des ondes à une bande de fréquence limitée par la finesse de ce maillage. Avec le même résonnement que précédemment, le spectre des fréquences qui se propagent dans le modèle fin est situé en dessous d'une valeur maximale, noté f_{max} , qui peut être donnée par la relation :

$$f_{max} = \frac{c}{4\Delta x_2} \quad (2.57)$$

Ainsi, les ondes ayant des fréquences inférieures à f_{min} sont capables de se propager dans le modèle grossier. La partie du signal réfléchi, qu'on note \tilde{u} est celle dont le spectre est borné par f_{min} et f_{max} .

Pour que ces ondes puissent se propager dans la zone de couplage, il faut que les équations (2.55) présentent un régime oscillatoire amorti. Ainsi, la première condition à imposer à l'amortissement est que les discriminants des équations caractéristiques de second degré, associées aux équations différentielles du second ordre (2.55) soient négatifs. Cela donne :

$$(\xi_i \omega_i)^2 - \omega_i^2 < 0 \Rightarrow \xi_i < 1; \quad i = 1, N_1 \quad (2.58)$$

Pour simplifier, le coefficient d'amortissement μ est supposé constant. Alors, sachant que le matériau est homogène et isotrope, nous pouvons monter facilement la relation entre μ et les ξ_i suivante :

$$\xi_i = \frac{\mu}{2\rho\omega_i} \quad (2.59)$$

L'équation (2.59) montre que le taux d'amortissement ξ_i est inversement proportionnel à la fréquence. De ce fait, si une onde de pulsation ω_i est amortie avec un taux d'amortissement ξ_i alors toutes les ondes dont la pulsation ω_j est supérieure à ω_i sont amorti avec un taux $\xi_j < \xi_i$. De ce fait, le coefficient μ doit permettre d'amortir toute onde dont la fréquence est au-delà d'une valeur donnée, tout en assurant sa propagation.

Finalement, on obtient la borne supérieure pour le choix du coefficient d'amortissement $\mu \leq 2\rho\min(\omega_i)$. Ce qui implique :

$$\mu \leq 4\rho\pi f_{min} = \frac{c\rho\pi}{\Delta x_1} \quad (2.60)$$

Cette relation montre qu'il y a une valeur limite μ_{min} du coefficient d'amortissement au-delà de laquelle on n'a plus de propagation. Numériquement, ça se traduit par une réflexion des ondes de fréquences supérieures à ω_i si la valeur du coefficient d'amortissement dépasse la valeur seuil de $\frac{\rho c \pi}{\Delta x_1}$. Cet aspect est étayé par l'exemple montré par la figure (2.20).

On souhaite, maintenant, que le coefficient d'amortissement soit tel qu'on élimine les ondes dont la fréquence fait qu'elles ne peuvent pas être transmises au domaine grossier. Et ce, sur un aller-retour de ces ondes dans la zone de couplage. Pour cela, on écrit la solution analytique de l'équation (2.55) pour chaque mode propre Φ_i^ω comme suit :

$$u_i^f = A_i e^{-\xi_i \omega_i t} e^{j\omega_i \sqrt{1-(\xi_i)^2} t} \quad (2.61)$$

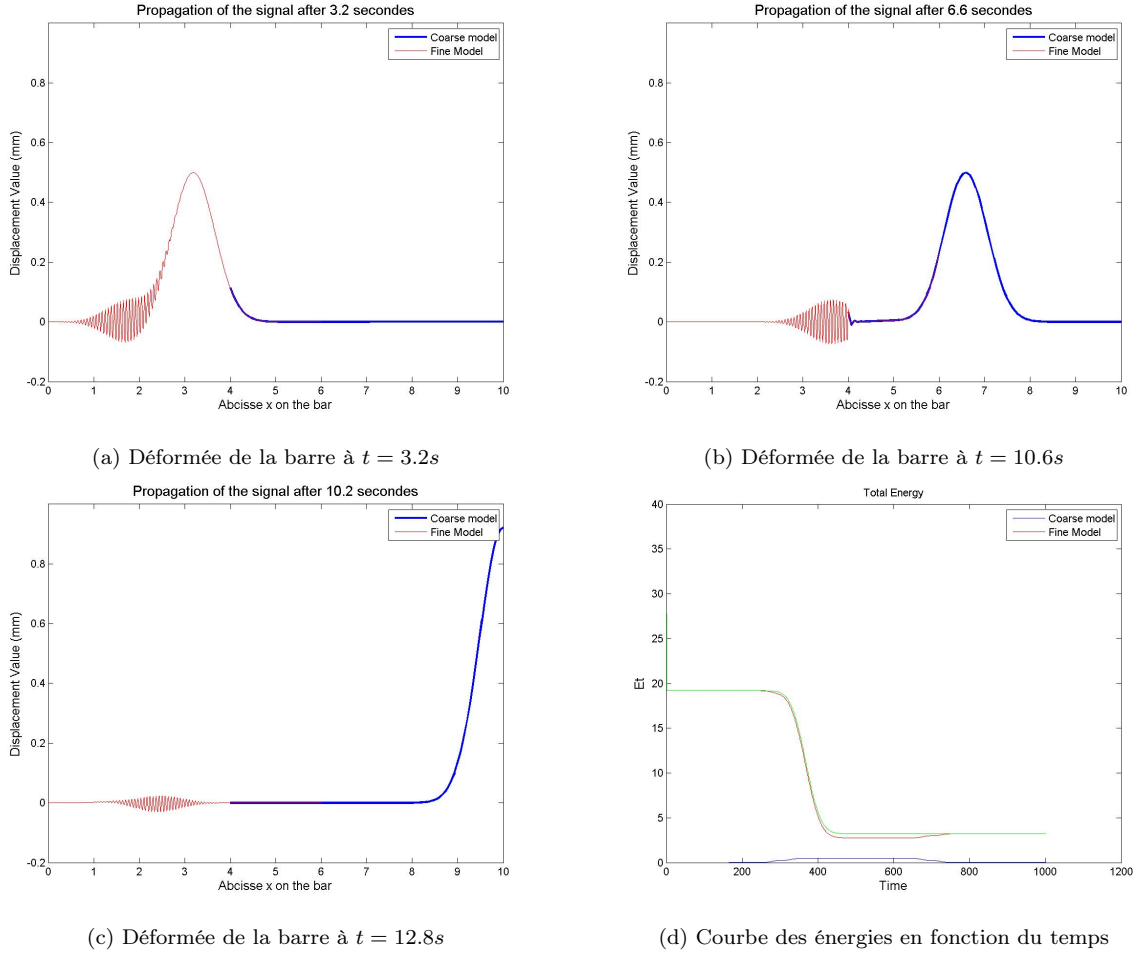


FIGURE 2.20 – la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour un amortissement relativement fort

où A_i est l'amplitude de l'onde et $j^2 = -1$.

Observons qu'en fait, on ne peut pas faire disparaître totalement les ondes parce que leurs amplitudes décroissent exponentiellement et ne sont jamais nulles. On tolère, en fait, des ondes réfléchies de très faibles amplitudes à la sortie de la zone de couplage. En pratique, on considère t_c^1 l'instant où une onde pénètre dans la zone de couplage et t_c^2 l'instant où elle quitte la zone de couplage après réflexion sur le bord. Entre les deux instants t_c^1 et t_c^2 , l'onde parcourt deux fois l'épaisseur de la zone de couplage l_c et son amplitude décroît progressivement. Alors, on écrit l'inégalité qui régit cette condition d'amortissement minimal pour toute onde de fréquence ω_i comme suit :

$$\frac{|u_i^f(t_c^2)|}{|u_i^f(t_c^1)|} \leq \varepsilon \quad (2.62)$$

ce qui est équivalent à :

$$e^{-\xi_i \omega_i (t_c^2 - t_c^1)} \leq \varepsilon \quad (2.63)$$

Sachant que :

$$t_c^2 - t_c^1 = \frac{2l_c}{c\sqrt{1-\xi_i^2}} \quad (2.64)$$

alors, nous avons :

$$e^{-\frac{2\xi_i \omega_i l_c}{c\sqrt{1-\xi_i^2}}} \leq \varepsilon \quad (2.65)$$

ce qui est équivalent à

$$\mu \geq \frac{2\rho}{\sqrt{\frac{1}{\omega_i^2} + \left(\frac{2l_c}{c \ln(\varepsilon)}\right)^2}} \quad (2.66)$$

Pour synthétiser, la valeur de l'amortissement μ est définie dans l'intervalle suivant :

$$\frac{\rho c \pi}{\sqrt{(\Delta x_2)^2 + \left(\frac{\pi l_c}{\ln(\varepsilon)}\right)^2}} < \mu < \frac{\rho c \pi}{\Delta x_1} \quad (2.67)$$

Pour garantir l'existence d'un coefficient μ qui permet à toutes les ondes de rentrer dans la zone de couplage et être amorties sur son parcours de celle-ci, il faut que la borne inférieure de l'inégalité soit strictement inférieure à la borne supérieure. Ceci nous donne la condition à imposer sur la taille de la zone de couplage, à savoir :

$$l_c > \frac{|\ln(\varepsilon)|}{\pi} \sqrt{\Delta x_1^2 - \Delta x_2^2} = l_c^{min} \quad (2.68)$$

L'inégalité présentée dans l'équation (2.68) permet de contrôler l'épaisseur de la zone de couplage qui est un ingrédient très important de la méthode Arlequin. Elle permet, en conséquence, de faire un bon choix du coefficient d'amortissement μ . Cependant, dans le développement mené ci-dessus, l'influence des partitions des énergies n'a pas été prise en compte. On suppose, en fait, qu'on utilise les mêmes partitions pour toutes les énergies d'un modèle donné, y compris pour l'énergie d'amortissement. La condition de contrôle du paramètre μ dans (2.67) n'est plus valable si on choisit des partitions pour l'énergie d'amortissement différentes de celles utilisées pour l'énergie de propagation (cinétique et interne). En effet, si on considère que :

$$\xi_i = \frac{1}{2\omega_i} \frac{\{\Phi_i^\omega\}^T \underline{C} \{\Phi_i^\omega\}}{\{\Phi_i^\omega\}^T \underline{M} \{\Phi_i^\omega\}} = \frac{p_i \mu}{2\rho \omega_i} \quad (2.69)$$

avec $p_i = \frac{\rho}{\mu} \frac{\{\Phi_i^\omega\}^T \underline{C} \{\Phi_i^\omega\}}{\{\Phi_i^\omega\}^T \underline{M} \{\Phi_i^\omega\}}$,

alors, en suivant les développements fait précédemment, on aboutit à la nouvelle inégalité suivante :

$$\frac{\rho c \pi}{\sqrt{(\Delta x_2)^2 + \left(\frac{\pi l_c}{c \ln(\varepsilon)}\right)^2}} < p_i \mu < \frac{\rho c \pi}{\Delta x_1} \quad (2.70)$$

Dans (2.70), l'entité $p_i \mu$ est bornée et le choix de μ devient plus difficile. En poussant l'inégalité au cas limite du choix de la dimension de la zone de couplage l_c , on peut avoir une approximation analytique de l'amortissement. La valeur de l'épaisseur de la zone de couplage optimale est la plus petite et qui garantit, en même temps l'amortissement de toutes onde réfléchi. On écrit, alors :

$$\lim_{l_c \rightarrow l_c^{min}} p_i \mu = \frac{\rho c \pi}{\Delta x_1} \quad (2.71)$$

Dans ce cas, on peut approximer l'expression de l'entité $p_i \mu$ comme suit :

$$p_i \mu \approx \frac{\rho c \pi}{\Delta x_1} \quad (2.72)$$

Puisque la valeur de l'amortissement est supposé constante et le matériau est homogène, un choix des mêmes fonctions de partition de l'énergie donne $p_i = 1$ et on trouve directement l'expression de $\mu = \frac{\rho c \pi}{\Delta x_1}$.

Si $p_i = \frac{\rho}{\mu} \frac{\{\Phi_i^\omega\}^T \underline{C}\{\Phi_i^\omega\}}{\{\Phi_i^\omega\}^T \underline{M}\{\Phi_i^\omega\}} < 1$, alors l'amortissement pour le i^{me} mode correspondant est amplifié. Dans cas, l'onde ayant la pulsation associée peut se comporter de plusieurs manières : soit elle est amortie partiellement et réfléchiée sur la zone de couplage puisque on risque d'avoir un amortissement non propagatif de l'onde, soit elle est complètement amortie très rapidement puisque l'amortissement est très fort.

Si $p > 1$, l'amortissement est affaibli pour l'onde ayant la fréquence associée. Alors, elle parcourt toute la zone de couplage sans être complètement amortie.

cas test numérique On considère une partition régulière (linéaire ou cubique) pour l'énergie de propagation et une fonction constante pour l'énergie d'amortissement égale à 0.5. Le facteur d'amortissement introduit satisfait la relation (2.71). On représente la propagation par 4 snapshots, à 4 instants différents, dans la figure (2.21).

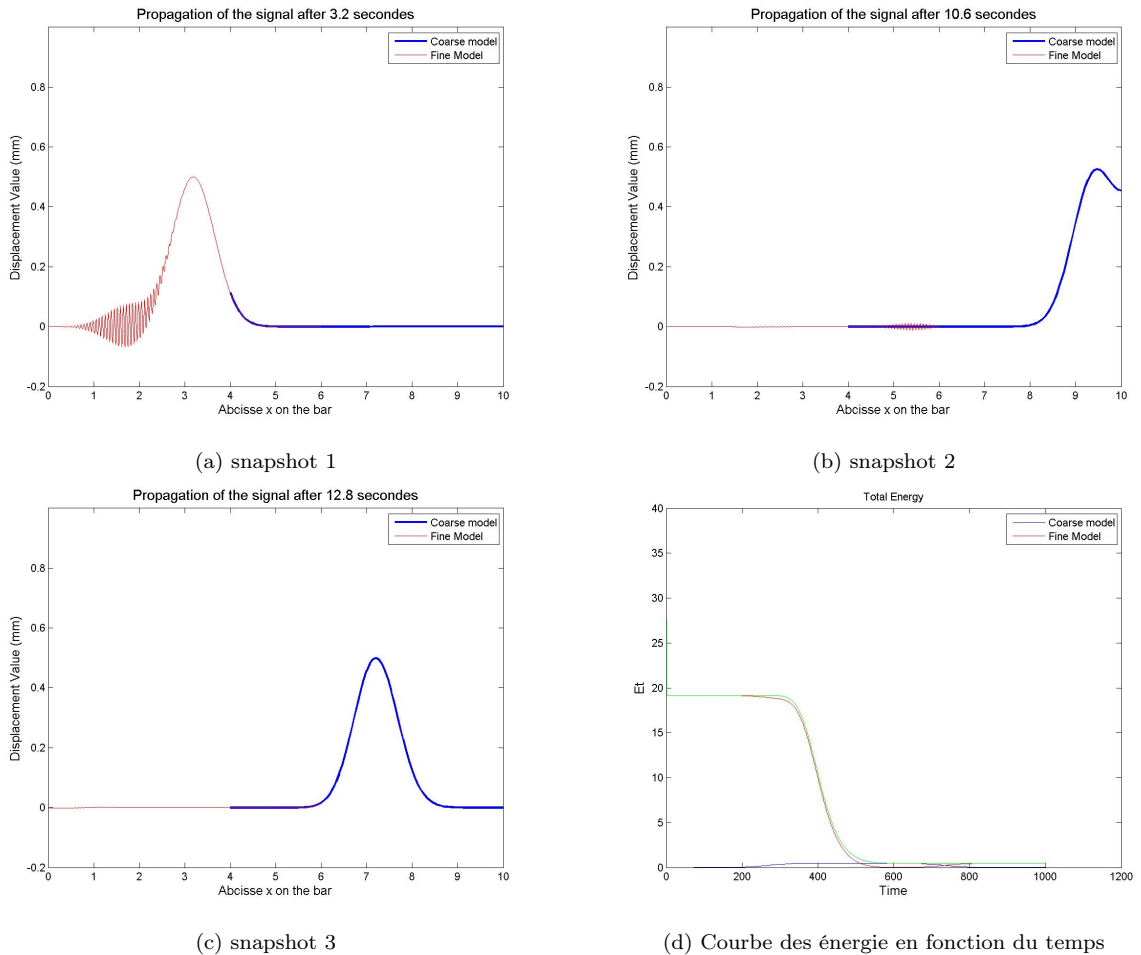


FIGURE 2.21 – la propagation du signal sur la barre Arlequin 1D pour un amortissement relativement fort

On remarque que les ondes sont amorties parfaitement avant de parcourir 2 fois la zone de couplage. Cette observation est expliquée par le fait que la contribution de l'énergie d'amortissement du modèle fin reste constante lorsque l'onde parcourt la zone de couplage, alors que la contribution de l'énergie de propagation du modèle fin décroît avec la partition linéaire, ce qui fait que la croissance de la valeur de p entraîne un amortissement croissant par l'équation (2.69).

2.3.6 Influence de la compatibilité et l'incompatibilité des maillages

Dans la zone de couplage Arlequin, deux modèles éléments finis de finesses (en h) différentes sont superposés. De plus, leurs maillages ne partagent pas nécessairement les mêmes éléments ou les mêmes nœuds, dans Ω_c . On distingue, alors, deux situations de couplage : couplage entre maillages compatibles et couplage entre maillages incompatibles.

Dans le premier cas, le maillage fin restreint à Ω_c est une subdivision du maillage grossier. L'ensemble des nœuds du maillage grossier est inclus dans celui du maillage fin, dans la zone de couplage, comme le montre la figure (2.22).

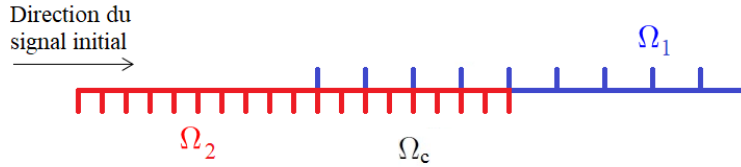


FIGURE 2.22 – Maillages totalement compatibles

Dans le deuxième cas, les maillages ne sont pas compatibles sur la zone de couplage. En conséquence, il n'y a plus de relation d'inclusion entre les espaces éléments finis discrets associés. De plus, on peut distinguer deux types d'incompatibilité : l'incompatibilité à la frontière de la zone de couplage (voir figure (2.23a)) et l'incompatibilité interne à celle-ci (voir figure (2.23b)).

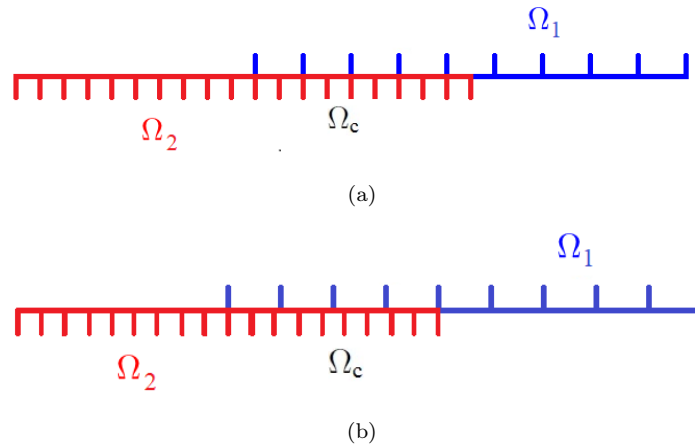


FIGURE 2.23 – Incompatibilités des maillages -a-incompatibilité (I_f) de frontière,-b-incompatibilité (I_m) de maillage

Rappelons ici que dans les cas incompatibles, le calcul des matrices de couplage nécessite des techniques particulières d'intégrations numériques, utilisant des découpages adaptatifs [BDR02] ou encore des redécoupages des éléments incompatibles (sans rajout de degrés de liberté), en éléments géométriques sur lesquels les champs à intégrer sont réguliers [Rat03, DR05, Jam11]. Notons que ces mêmes méthodes ont été préalablement introduites et utilisées pour le contact entre surfaces incompatibles par Ben Dhia et Zarroug [BDR02] (pour traiter proprement le Benchmark de contact dit de Taylor).

Nous revisitons ici ce paramètre numérique, dans le cadre dynamique étudié ici. Pour cela et pour le cas 1D considéré et les mêmes données numériques de maillage et de domaines superposés, nous faisons propager un signal de traction dont le spectre d'amplitude représente une rampe décroissante en fonction de la fréquence (voir figure (2.24a)).

L'onde correspondante à la fréquence 0 est d'amplitude égale à 1 et celle correspondante à la fréquence 75Hz est d'amplitude 0.2. Notons que dans notre cas les ondes ayant des fréquences en dessous de 7.5Hz sont considérées comme des ondes basses fréquences et celles qui ont des fréquences au-dessus sont des ondes hautes fréquences. La résolution du système dynamique est effectuée sur 40 pas de temps uniformes de 0.02s .

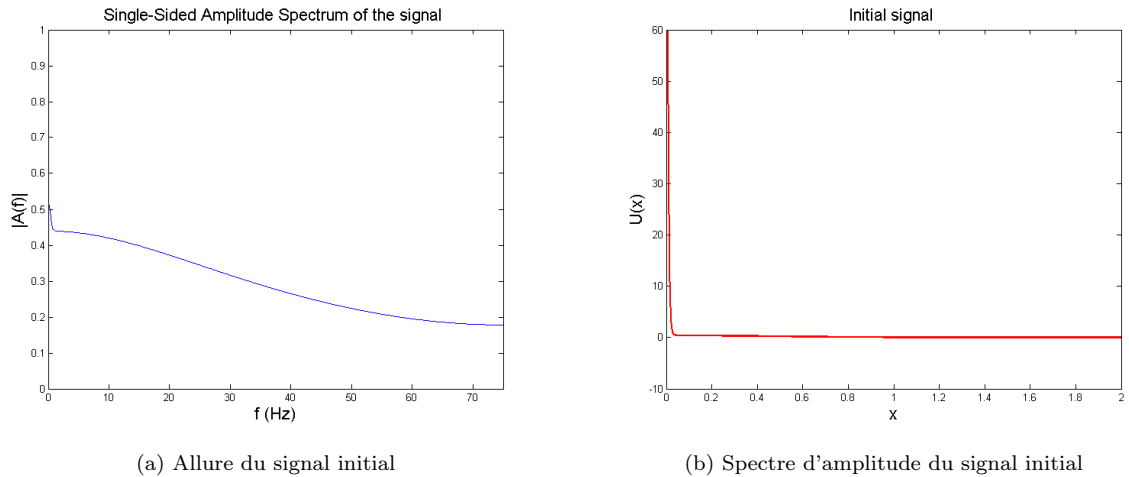


FIGURE 2.24 – Représentation du signal initial

Dans un premier temps, nous analysons la propagation du signal initial dans le cas d'un maillage compatible. Dans les figures (2.25a) et (2.25b), nous représentons le signal réfléchi dans le domaine fin Ω_2 et celui transmis au domaine grossier Ω_1 , respectivement. Dans les figures (2.25c) et (2.25d) nous traçons les spectres d'amplitude de chaque signal, respectivement.

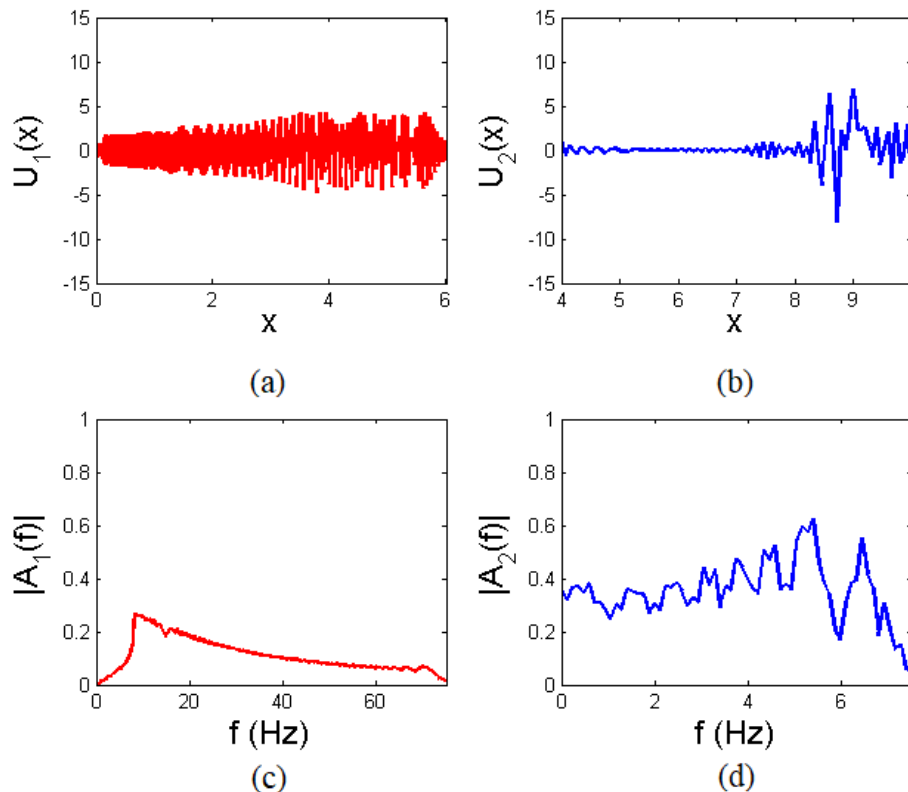


FIGURE 2.25 – Signal après propagation : Signal transmis à droite et signal réfléchi à gauche

La figure (2.25c) présente un spectre qui s'étend sur l'intervalle $[0, 75]$ qui correspond à la bande de fréquences admises par le modèle fin. Nous observons sur cette figure que l'amplitude de la partie du spectre située entre $0Hz$ et $7.5Hz$ a chuté, donc elle a été transmise du modèle fin au modèle grossier. Nous observons dans (2.25d) que la partie transmise du signal présente un spectre d'amplitude situé sur l'intervalle $[0, 7.5]$. Cet intervalle correspond à toute la bande de fréquences admissibles par la discrétisation du modèle grossier Ω_1 . Nous constatons que l'amplitude des fréquences au-dessus de $2Hz$ ne correspond pas à celle dans le signal initial. Ceci est dû à l'altération des ondes correspondant à ces fréquences par le modèle grossier. Le couplage classique n'est capable de transférer que la bande que nous jugeons que le modèle grossier arrive à la faire propager correctement.

Dans un second temps, nous reprenons le cas test précédant, en considérant juste que nous avons une incompatibilité de frontière (I_f) et compatible de maillage à l'intérieur de Ω_c . Nous comparons, dans ce cas, la transmission du signal du modèle fin au modèle grossier par rapport au cas de maillages compatibles précédent. Dans les figures (2.26d) et (2.26c), nous représentons le spectre du signal transmis à Ω_1 (voir figure (2.26b)) et celui du signal réfléchi dans Ω_2 (voir figure (2.26a)), respectivement.

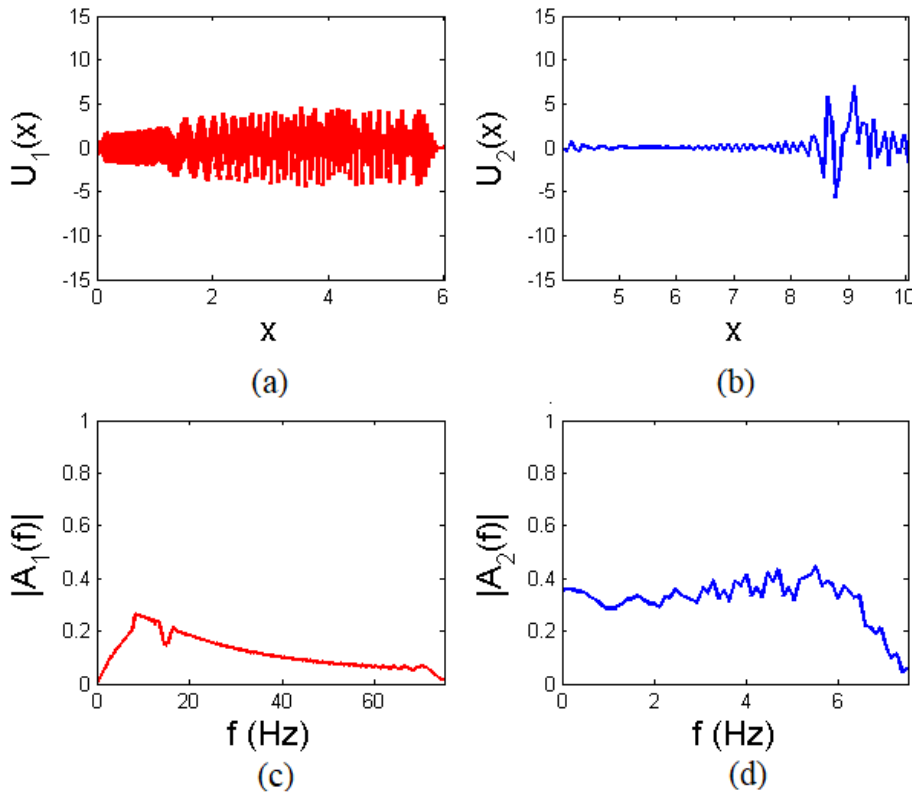


FIGURE 2.26 – Signal après propagation dans le cas d'incompatibilité I_f : Signal transmis à droite et signal réfléchi à gauche

Dans la figure (2.26d), nous observons que les amplitudes signal transmis sont plus petites de celle dans le cas d'un couplage compatible, présenté dans la figure (2.25d). Cela montre bien qu'une configuration compatible du maillage transmet plus d'information qu'une configuration présentant une incompatibilité I_f . Ce constat se confirme par la représentation du spectre des ondes réfléchies de la figure (2.26c), qui montre qu'une partie de ces ondes BF a été réfléchi après la propagation du signal. Nous pouvons tirer de ces observations que le couplage avec des maillages incompatibles sur les frontières transmet moins bien le signal du modèle fin au modèle grossier que celui compatible en frontière.

Finalement, nous considérons que les maillages du modèle fin et du modèle grossier sur la zone de couplage sont compatibles sur les frontières et incompatibles à l'intérieur de Ω_c . Nous comparons, dans ce cas, la transmission du signal du modèle fin au modèle grossier par rapport au cas de maillages compatibles. Dans les figures (2.27d) et (2.27c), nous représentons le spectre du signal transmis à Ω_1 (voir figure (2.27b)) et celui du signal réfléchi dans Ω_2 (voir figure (2.27a)), respectivement dans le cas d'incompatibilité I_m .

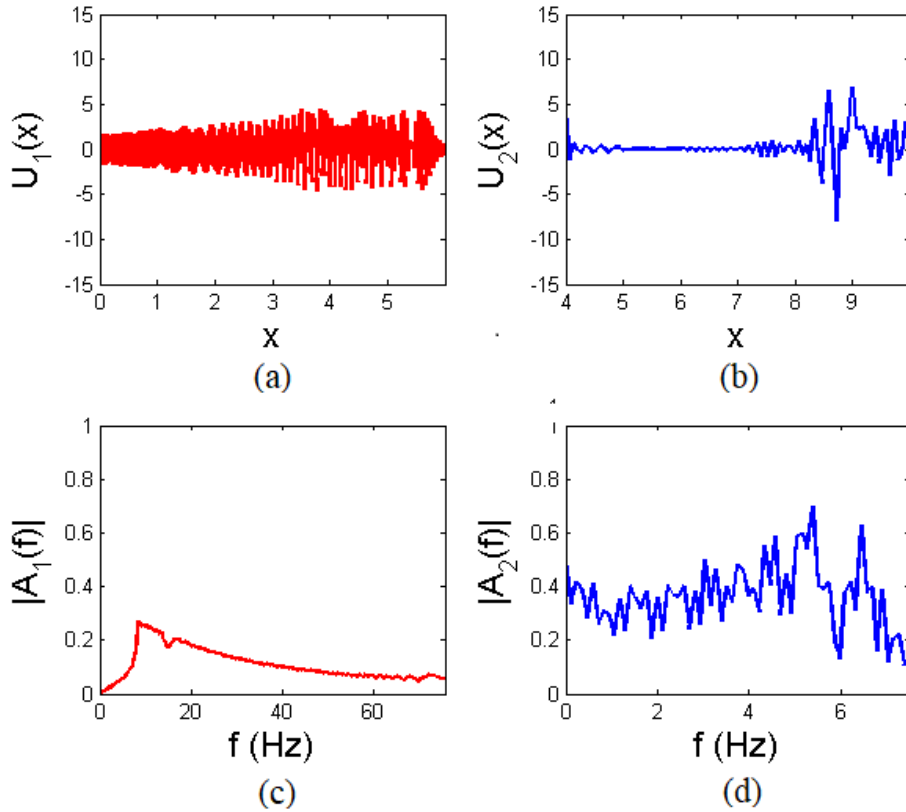


FIGURE 2.27 – Signal après propagation dans le cas d'incompatibilité I_m : Signal transmis à droite et signal réfléchi à gauche

Nous constatons que le spectre du signal réfléchi représenté dans la figure (2.27c)) et celui du signal transmis dans (2.27d)) sont semblables à ceux pour le cas de maillages compatibles. Ces résultats montrent que l'incompatibilité I_m n'a pas trop d'influence sur l'aspect global de la transmission.

Bien que l'incompatibilité des maillages aux bords du domaine de couplage a de l'influence sur la transmission des ondes BF, l'aspect le plus important qui se dégage de ces résultats numériques est que le paramètre le plus influant est celui de la différence de finesse dans les espaces EF utilisés dans les deux modèles.

Les éléments développés dans ce chapitre ont été testés, jusqu'à présent, pour un problème 1D. Dans la section qui suit, on montre des extensions 2D (les extensions 3D sont possibles aussi).

2.4 Application en 2D à une propagation simplifiée des ondes sismiques : couplage Gefdyn-Arlequin

Nous tenons à signaler ici que l'application physique considérée ici et son traitement dans le cadre Arlequin en dynamique a débuté dans le cadre du stage de fin d'études Ingénieur de Y. Zanina, sous la direction de H. Ben Dhia, avec un co-encadrement par H. Ben Dhia et K. Abben, la participation de F.L Caballero du MSSMat pour la simulation du signal source sismique par le Code Gefdyn et le financement de ce travail de stage dans le cadre du Projet financé par l'institut SEISM (collaboration ente EDF, CEA, CNRS, ECP, ENS Cachan) [ZY16]

Dans cette section, nous présentons une simulation numérique de la propagation des signaux générés par des glissements au niveau d'une faille sismique, comme application 2D de la méthode Arlequin en régime dynamique.

Pour cela, un dialogue entre deux codes locaux du laboratoire MSSMat a été mise en œuvre : le code GEFDYN [Aub, DA96] et un code Arlequin développé sur Matlab en statique dans le cadre de thèse de O. Jamond [Jam11] et étendu à la dynamique dans le cadre des travaux de thèse présentées ici. L'application visée est la propagation des ondes sismiques, de la source (ici faille sismique) à une structure ou infrastructure d'intérêt, mais supposé être suffisamment loin de la source pour que l'hypothèse d'amortissement des ondes HF qui traverse tout ce document reste raisonnable.

La simulation consiste à utiliser, dans une première étape, le code GEFDYN pour modéliser et simuler les ondes générées par un glissement brutal entre les interfaces d'une faille sismique, et ce voisinage de la zone des glissements brutaux (source du séisme). Cette zone constitue le domaine micro. Il est approché dynamiquement par un modèle numérique fin. Un domaine macro est alors joint et collé en volume, dans le cadre Arlequin dynamique, au domaine micro et dans un environnement Matlab.

Avant de donner les résultats numériques, dans un cadre 2D, nous allons donner brièvement les motivations qui sont derrière cette application, ainsi que quelques éléments sur le modèle de faille sismique.

2.4.1 Motivations

Dans la structure interne du globe terrestre, il existe des plaques tectoniques, en contact entre elles et qui, sous pressions tectoniques, se déplacent en permanence de l'ordre de quelques millimètres ou centimètres par an. Leurs mouvements relatifs créent des contraintes dues au blocage par des forces de frottement sur l'interface-faille. De l'énergie de déformation est accumulée. Lorsque les forces de frottement atteignent un certain seuil statique de glissement, un glissement dynamique brutal se produit au niveau de l'interface-faille et ramène les forces de frottement à un seuil dynamique plus faible que celui statique. Le système transforme alors brutalement de l'énergie de déformation interne en énergie cinétique, générant des ondes qui vont se propager dans le sol environnant, à partir de cette source. On appelle séisme l'arrivée de ces ondes à la surface terrestre. Ce dernier peut se produire, également, par la création de nouvelles surfaces de rupture dans les couches terrestres. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la modélisation de ce phénomène dans les deux cas. Des lois de frottement ont été développées pour modéliser le glissement frictionnel entre les plaques tectoniques [And76, MOA98]. Lors de leurs propagations, les ondes sismiques, caractérisées par une richesse relative en fréquences au niveau de la source, perdent de l'amplitude par dispersion, par différents amortissements du sol etc.. Il est important de mentionner que les ondes "HF", d'amplitudes généralement faibles et très énergétiques, finissent par disparaître au cours

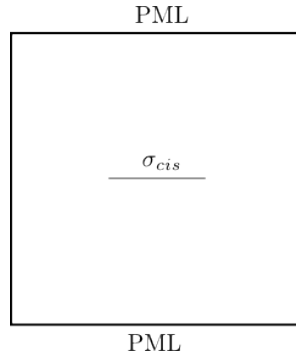


FIGURE 2.28 – Modèle 2D avec une faille contrainte au centre

de la propagation. Ainsi, à longues distances de la source sismique, en général, seules les ondes BF parviennent à impacter des infrastructures critiques. Cette réalité justifie une modélisation dynamique multi-échelle de la propagation des ondes sismiques dans le sol, en construisant des modèles relativement fins au niveau des sources sismiques et un modèle grossier, loin de ces zones. Cette modélisation doit approcher la réalité de la propagation des ondes multifréquences, sans polluer la source sismique. D'où l'intérêt de cette application dans le cadre des travaux développés dans cette thèse.

2.4.2 Description du modèle

La simulation du problème des signaux générés par une faille sismique nécessite la définition d'un modèle de faille. Comme mentionné dans le paragraphe précédent, il existe plusieurs modèles de faille dans la littérature. On choisit le plus simple. On considère un modèle 2D d'un massif rocheux présentant une faille initialement horizontale comme montré par la figure (2.28).

Sur l'interface de la faille, le comportement non linéaire est pris en compte par un modèle parfaitement plastique avec un critère de rupture cohésif, piloté par les contraintes de cisaillement, du type Mohr-Coulomb, exprimé par l'équation (2.73).

$$\tau = \sigma_{cis} \tan(\Phi_{joint}) + c_{coh} \quad (2.73)$$

où τ est la contrainte de cisaillement, σ_{cis} est la contrainte normale au plan de la faille, c_{coh} est la cohésion considéré nulle pour le cas traité et où Φ_{joint} est l'angle de frottement du joint. Une distribution aléatoire de cet angle sur l'interface de la faille, assurant un déplacement normal nul, introduit une instabilité suffisante pour générer des ondes sismiques. Loin de la faille, le matériau de la roche est considéré homogène élastique linéaire et isotrope de module de Young E_{roche} , de densité volumique ρ_{roche} et de coefficient de poisson ν_{roche} .

Le problème local contenant la faille avec le modèle de frottement décrit ainsi peut être implémenté et traité en utilisant le code Gefdyn d'une manière autonome avec un mono-modèle. Rappelons ici que la modélisation de la propagation des ondes sismique s'étend sur un domaine de l'ordre des kilomètres et que les ondes créées suite à ce phénomène sont riches en fréquence. Seules les ondes BF (entre $0Hz$ et $30Hz$) se transmettent à surface de la terre et le reste, considéré comme ondes HF localisée, est atténués en traversant les différentes couche de la terre. Pour modéliser ce phénomène en dynamique, en utilisant, le code Gefdyn sur un mono-modèle à une échelle relativement fine (mètre/millimètres) est très coûteux, voire impossible avec les calculateurs actuels, vu la taille importante du problème discret et la finesse du pas de temps à considérer. Ces limites de la modélisation monolytique constituent une vraie motivation pour avoir recours à la simulation multi-échelle développée dans ces travaux.

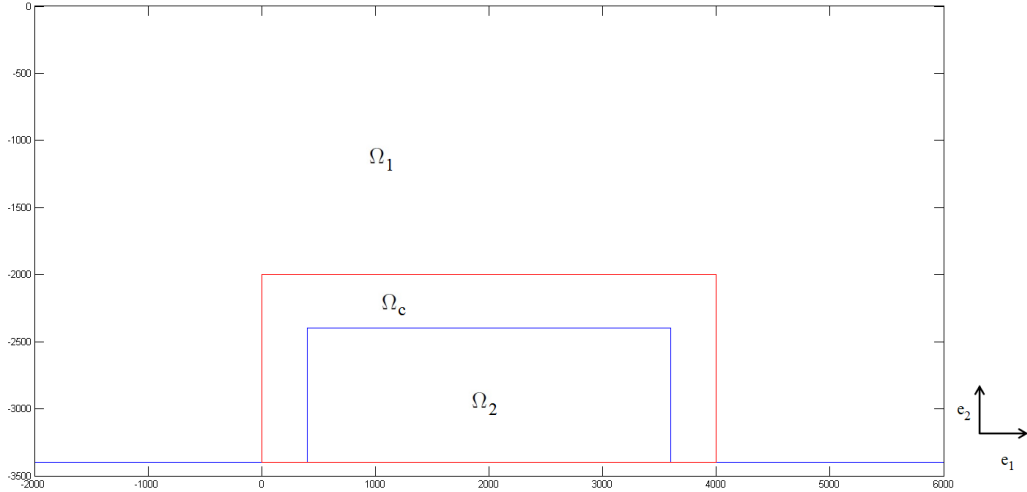


FIGURE 2.29 – Modèle Arlequin 2D

Nous proposons, alors de coupler le code Gefdyn avec un autre code, développé au cours de cette thèse, qui permet de résoudre des problèmes d'élastodynamique multi-échelles de la dynamique avec la méthode Arlequin. Assurant le même choix des paramètres d'entrée (discrétisation temporelle, matériau), le couplage entre les deux codes consiste à considérer que la solution calculée par le code Gefdyn à un instant t donnée correspond à l'état initial pour le code Arlequin. (voir figure (2.29)).

La démarche consiste à :

- résoudre du problème monomodèle de la faille sismique (cf figure (2.28)) en dynamique par le code Gefdyn sur une échelle relativement fine,
- prolonger, si nécessaire, le domaine fin pour créer une zone de propagation du signal et une zone suffisante de couplage,
- construire un modèle grossier pertinent, permettant de transmettre seulement les ondes dans une la bande de fréquences relativement basses, par rapport à celles plus HF, parmi les ondes émises par la source sismique. On considère ici que seules les ondes BF peuvent se propager loin de la source sismique et venir impacter les fondations des structures ou infrastructures critiques.
- amortir les fréquences qui sont réfléchies par le modèle grossier, avec le bon choix des paramètre Arlequin, comme présenté dans la section 2.3, afin d'éviter de polluer le voisinage de la source sismique.

2.4.3 tests et résultats numériques

On considère un domaine 2D carré de côté $4km$, discrétisé par la méthode des EF, avec un maillage régulier formé de mailles carrées, de $50m$ de côté, et des éléments finis Q1-isoparmaétriques, donnant un total de 6724 degrés de liberté. Au centre de ce domaine, une faille de longueur $1.2km$ est donnée, elle est supposée être à une profondeur de $-4000m$ de la surface de la terre. La surface de la faille est supposée être soumise à une contrainte initiale de confinement isotrope égale à $6MPa$. Pour approcher le domaine d'étude à un domaine infini, un amortissement type PML est introduit sur toute la frontière du domaine. Le calcul du problème de faille est réalisé sur une durée de $1s$ avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}s$. les paramètres matériau sont donnés dans le tableau (2.1).

Masse volumique ρ_{roche}	3000 Kg.m^{-3}
Module de Young E_{roche}	75 GPa
Coefficient de poisson μ	0.25

TABLE 2.1 – Les données matériau

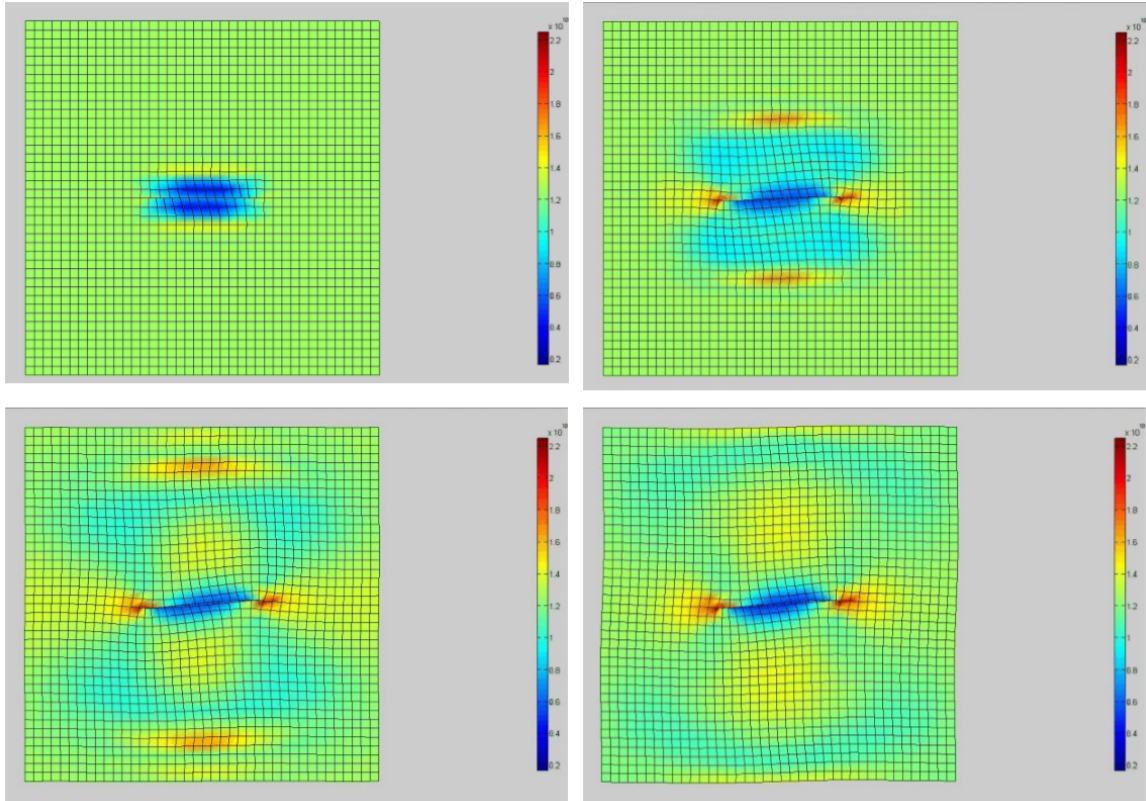


FIGURE 2.30 – Distribution d'isovaleurs de contrainte de cisaillement à 4 instants du temps

Après résolution, par le code Gefdyn [DA96], Nous représentons dans la figure (2.30), le champ de contrainte de cisaillement pour 4 instants différents.

La discrétisation de ce domaine est capable de représenter une bande de fréquence entre 0Hz et 20Hz . Dans la pratique, nous considérons que nous avons besoin d'au moins 10 nœuds pour la plus haute fréquence soit bien représentée, ce qui nous amène à considérer que jusqu'à 6Hz du signal calculé.

Pour pouvoir effectuer correctement le couplage de code GEFDYN-ARLEQUIN et éviter qu'il y a troncature du signal considéré comme l'état initial du problème Arlequin en dynamique, nous considérons qu'à l'instant t d'arrêt de calcul Gefdyn le signal ne s'est pas encore propager dans la zone de couplage Arlequin. Pour cela nous considérons les 100 couches d'éléments située à une profondeur entre 2000m et 3600m du monomodèle calculé sur Gefdyn à l'instant $t = 0.5\text{s}$. Nous représentons, dans la figure (2.32) ce signal sur 3 rangés de nœuds horizontales situées à des profondeurs 3500m , 3000m et 2500m , et sur 3 rangée verticales de nœuds au position 1000m , 2000m et 3000m dans la figure (2.31).

Le modèle tronqué constitue le patch Arlequin. Il est défini sur un domaine rectangulaire de dimension $4000\text{m} \times 1400\text{m}$. Nous construisons, un domaine Ω_1 qui englobe ce patch Ω_2 . Le couplage entre les modèles est effectué sur une épaisseur de 450m . Cette épaisseur est suffisante pour assurer un bon couplage entre les modèles : transmettre les ondes BF du modèle fin au modèle grossier et filtrer les ondes HF qui se réfléchissent dans le modèle fin. Le domaine d'étude du bi-modèle arlequin s'étend sur une largeur de 8000m et une profondeur totale de 3400m . Le patch étant maillé par

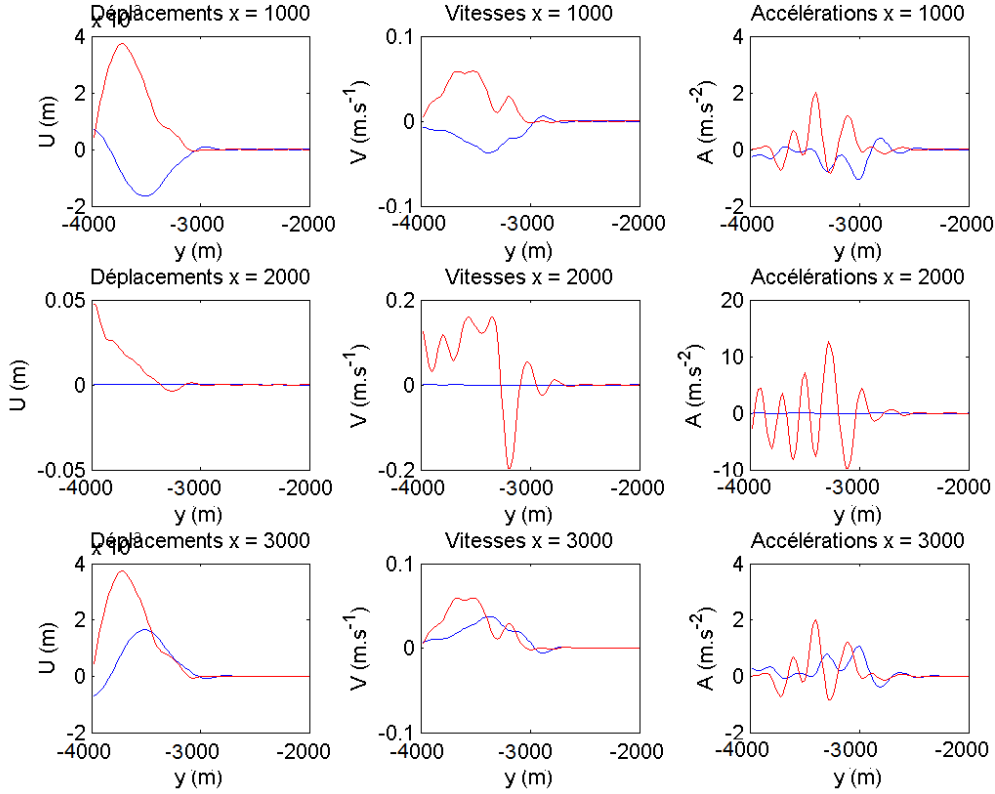


FIGURE 2.31 – Signal initial sur 3 rangées d'élément pour $x = 1000m, 2000m, 3000m$ (de haut en bas)

des éléments fin de taille $50m$, Ω_1 considéré relativement grossier est maillé par des éléments quadratique de côté $200m$. (cf figure (2.33))

Nous pouvons vérifier simplement l'existence d'un coefficient d'amortissement qui permet de filtrer proprement les ondes HF sans qu'il y est des réflexions causées par l'amortissement par l'équation (2.68) qui donne : $l_c = 450m > \frac{|\ln(10^{-3})|}{\pi} \sqrt{\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2} = 425m$ pour une partition des énergies constantes qui vaut $\alpha_k^1 = 0$.

La discrétisation en temps est effectuée par un schéma de Newmark conservatif ($\beta = 0.25, \gamma = 0.5$) avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}s$ défini sur le modèle GEFDYN. Finalement, le coefficient d'amortissement μ est calculé automatiquement comme étant la moyenne des deux bornes défini par l'inégalité (2.67), sa valeur est égale à 9510^4 . Le calcul est réalisé sur une durée de $0.6s$

Les résultats obtenus par un modèle Arlequin dynamique sans amortissement sont comparés à ceux obtenus par un modèle Arlequin dynamique avec amortissement. Dans la figure (2.34), on représente la norme des champs de vitesse V à l'instant initial. Les deux mêmes champs sont représentés à 6 instants différents sans amortissement dans (2.35) et avec amortissement (2.36),

Dans la figure (2.35), nous observons que le signal initial s'est propagé dans le modèle dans le modèle. Une partie de ce signal est transmise au modèle grossier qui représente la partie BF transmissible par la discrétisation du modèle grossier. Le reste, qui représente les ondes HF, se réfléchit sur les frontières de la zone de couplage et se propage dans la zone d'intérêt du modèle fin $\Omega_2 \setminus \Omega_c$. A la fin de la simulation, nous observons que cette zone d'intérêt est polluée par les réflexions des ondes HF.

Dans la figure (2.36), l'amortissement introduit sur la discrétisation fine dans la zone de couplage. Nous observons, que les ondes HF commencent à s'atténuer en rentrant dans la zone de couplage. Après que ces ondes parcourent au maximum un aller-retour

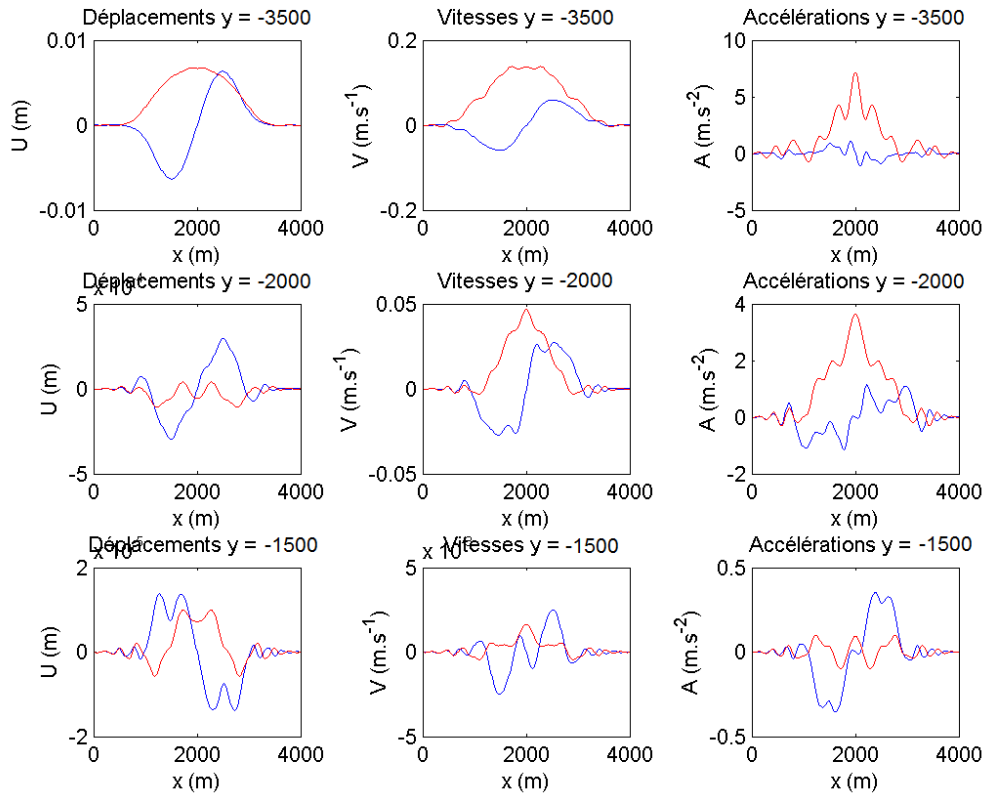


FIGURE 2.32 – Signal initial sur 3 rangées d'élément pour $y = -3500m, -3500m, -2000m$ (de haut en bas)

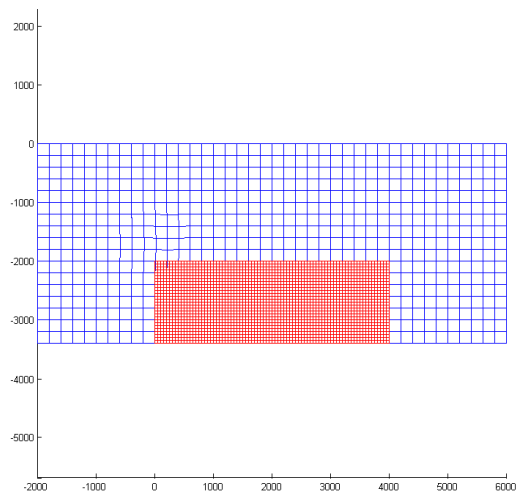


FIGURE 2.33 – Maillage du modèle Arlequin

dans la zone de couplage elles sont amorties et la zone d'intérêt est plus nette.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons consolidé l'extension du cadre Arlequin à la dynamique mono-modèle classique linéaire et ce en le rendant plus opérationnel. Nous avons également détaillé les discrétisations en espace et en temps du problème Arlequin ainsi que

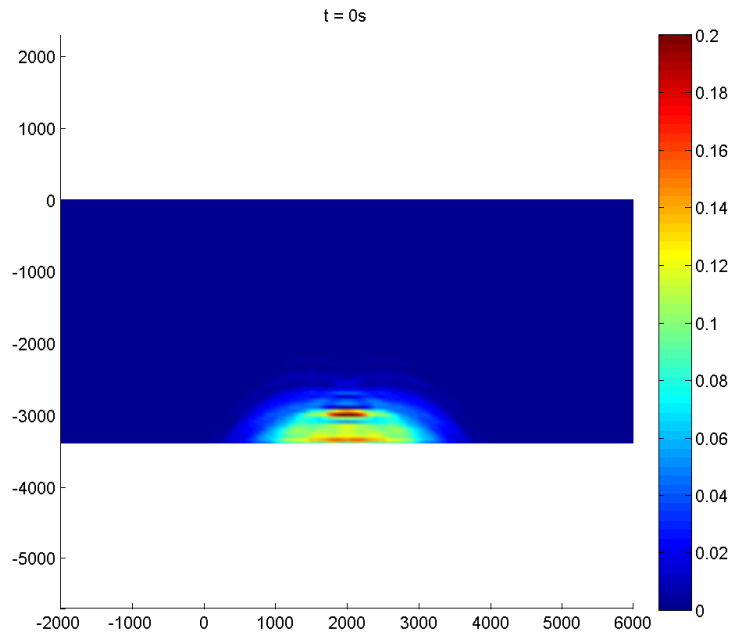


FIGURE 2.34 – Maillage du modèle Arlequin

la méthode de résolution des systèmes discrets : L'implémentation de la méthodologie globale de résolution d'un problème d'élasto-dynamique sur un bi-modèle Arlequin a été suivie d'une analyse systématique de l'impact des différents paramètres mis en jeu par la méthode sur un cas test de barre 1D. De cette analyse, on a dégagé des recommandations pratiques sur les choix de ces paramètres, dont certaines rejoignent des recommandations, déjà préconisées dans la littérature, répondant aux objectifs de traitement multi-échelle d'une classe de problèmes dynamiques, à hautes fréquences localisées. L'ensemble des recommandations sont résumées dans les points qui suivent.

1. La propagation d'un signal riche en fréquences d'un modèle local considéré fin à un modèle global grossier en terme d'échelle de représentation permet le transfert de la bande de fréquences admissible par ce dernier, considérée ondes BF, et réfléchi une partie de ce signal, considérée ondes HF. Seule la discrétisation grossière de l'espace des multiplicateurs de Lagrange, assurant le couplage entre les modèles, donne la possibilité de traiter les ondes réfléchies qui polluent la solution sur le modèle fin.
2. Les fonctions de partitions de l'énergie ont une grande influence sur la qualité de la transmission du signal entre les modèles :
 - i- Possibles potentiellement, les choix de fonctions différentes pour partitionner différentes énergies n'est pas admissible dans le cadre dynamique transitoire, objet de cette thèse.
 - ii- Nous avons distingué certaines fonctions qui permettent un bon transfert du signal BF et qui minimisent les effets des réflexions parasites. Les fonctions de partition de l'énergie constantes sur la zone de couplage défavorisant le modèle grossier sont bien adaptées pour des modèles de jonction. Les fonctions de partition de l'énergie évolutives (linéaire ou cubique) présentent, aussi, un bon choix pour un transfert progressif du signal, à condition d'éviter les valeurs nulles sur les bords.

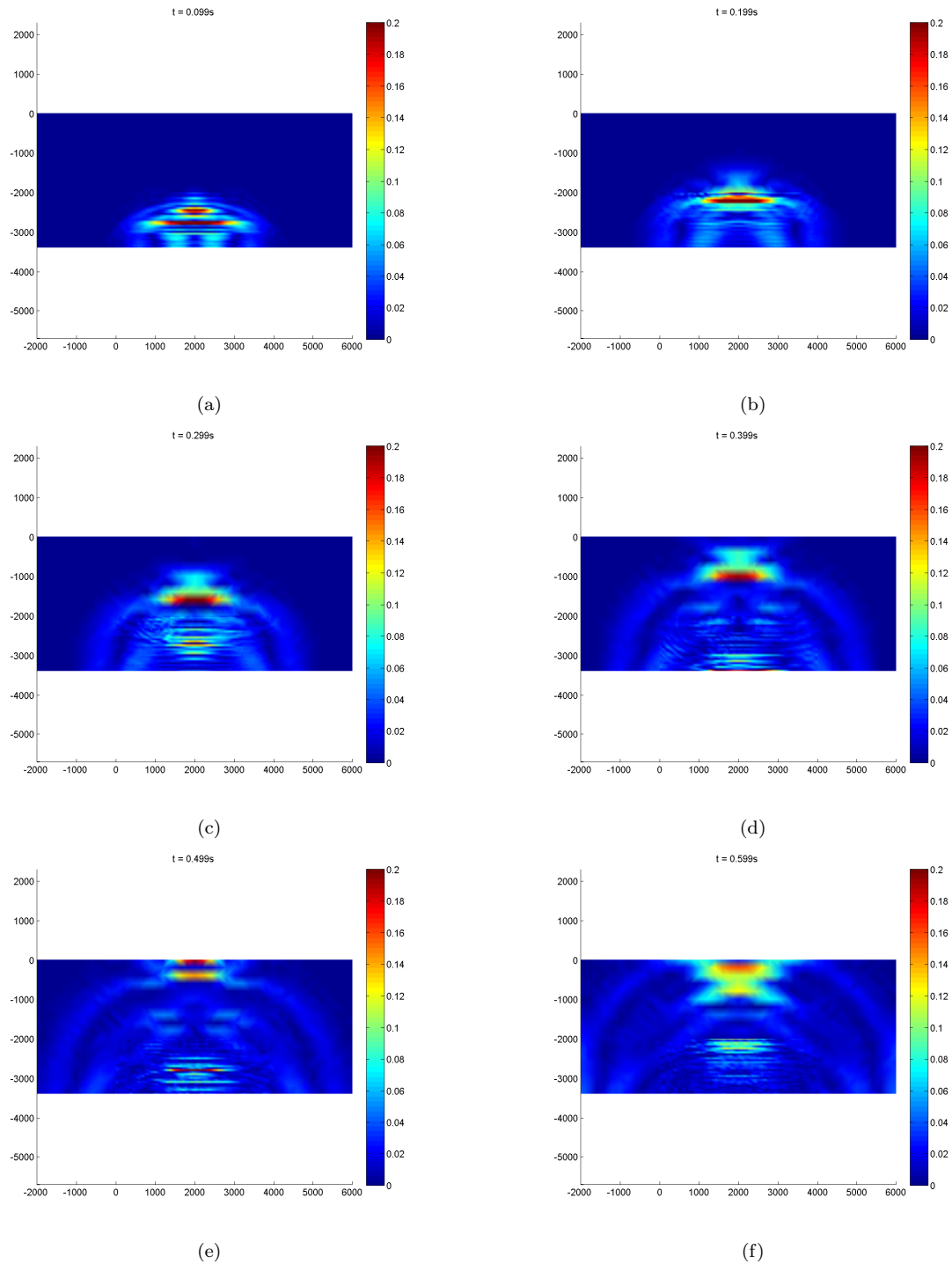


FIGURE 2.35 – 6 snapshots de la propagation du signal en 2D sans amortissement

3. Le traitement des réflexions des ondes HF dans la zone fine du modèle Arlequin (rendant la solution fine erronée) est réalisé par l'application d'un effort d'amortissement visqueux. Ce traitement introduit un paramètre fictif d'amortissement, dont le choix est analysé en fonction des autres paramètres de la méthode Arlequin pour assurer un contrôle de la méthode.
4. En particulier, le choix de l'épaisseur de la zone de couplage est fortement lié à la discrétisation des modèles et au choix du coefficient d'amortissement. Des préconisations dans le cadre 1D sont données.

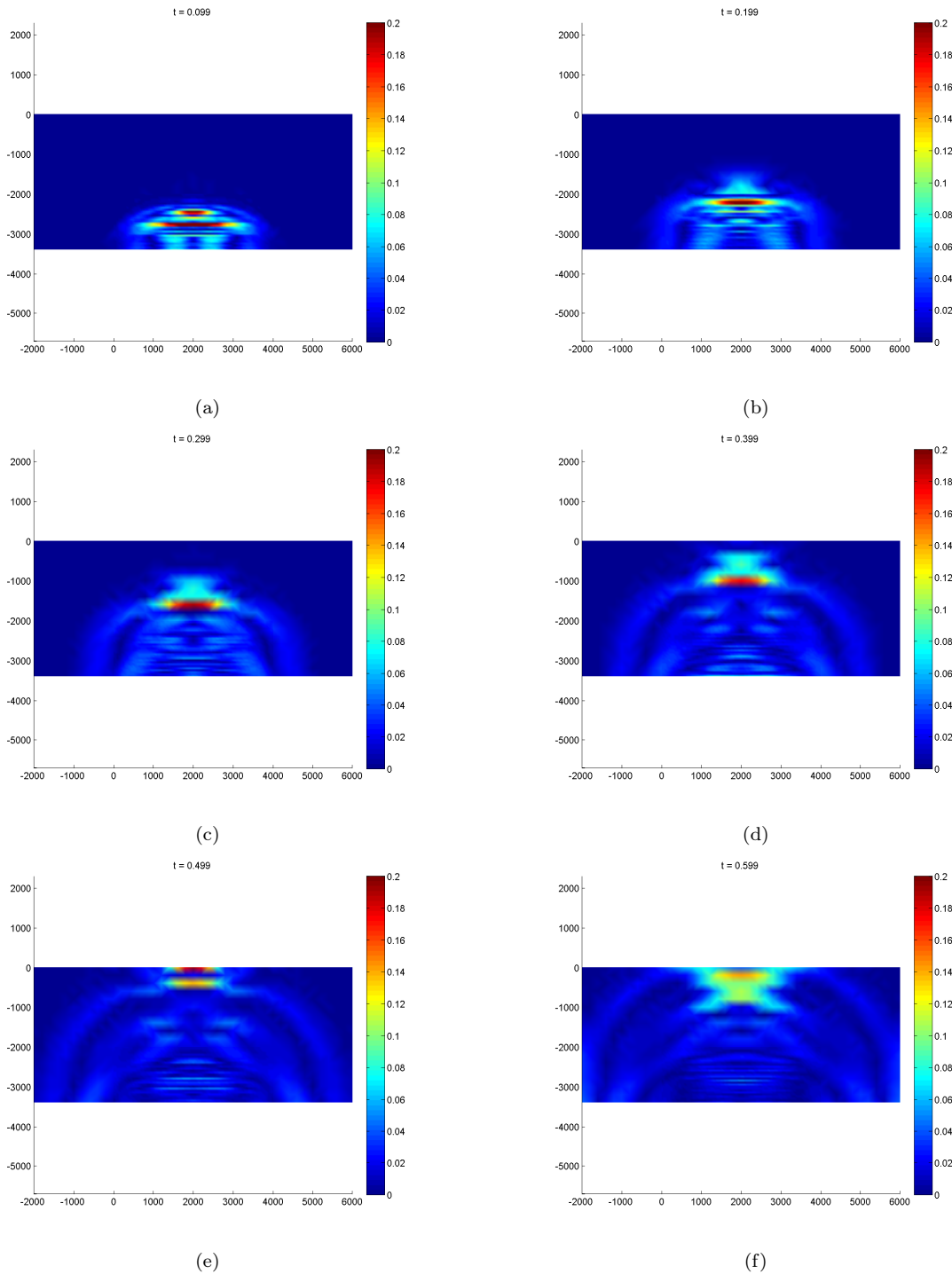


FIGURE 2.36 – 6 snapshots de la propagation du signal en 2D avec amortissement

5. L'incompatibilité, en particulier de frontières, entre les espaces de discrétisation fins et grossiers retenus à la zone de couplage est cause d'une mauvaise transmission du signal pour le choix de l'espace médiateur comme étant la restriction de l'espace éléments fins du modèle grossier sur la zone de couplage.

Vu le nombre important des paramètres de la méthode Arlequin en dynamique, ces recommandations permettent l'automatisation de leur choix afin de faciliter son application sur des cas pratiques. Étant analysés sur un cas test 1D, une application intéressante de validation en 2D de propagation d'ondes sismiques, créées sur la surface d'une faille, jusqu'aux fondations des structures et des infrastructures humaines critiques, a été mise en œuvre pour témoigner de la faisabilité de notre approche. Ces

application étant traité pour des modèles discrets compatibles (au sens de l'inclusion de l'espace) sur la zone de couplage, l'amélioration de la qualité de la transmission du signal pour des configurations incompatibles est étudié dans le chapitre 3.

Chapitre 3

Réduction de modèles de couplage

Figures

3.1	Mono-modèle (à gauche) et bi-modèle Arlequin (à droite) d'une barre soumise à son propre poids	81
3.2	Modèle de barre 1D soumise à un effort volumique	83
3.3	Analyse du couplage par appariement des modes propres	83
3.4	Analyse du couplage par minimisation de l'écart cinématique	84
3.5	Analyse du couplage par accommodation	85
3.6	Couplage par appariement en statique	86
3.7	Couplage par minimisation de l'écart en statique	86
3.8	Couplage par accommodation en statique	86
3.9	Représentation spectrale du signal initial	88
3.10	Le signal après propagation pour un couplage réduit par appariement	92
3.11	Le signal après propagation pour un couplage réduit par minimisation de l'écart cinématique	92
3.12	Le signal après propagation pour un couplage réduit par accommodation	93
3.13	Représentation des 5 premiers modes sur la zone de couplage	94
3.14	Écart dans la représentation des modes sur le patch et le substrat	94
3.15	Deux snapshots de la propagation du signal pour un couplage sur-réduit	95
3.16	Deux snapshots de la propagation du signal pour un couplage réduit $\varepsilon = 0.001$	95
3.17	Deux snapshots de la propagation du signal pour un couplage réduit $\varepsilon = 0.001$ avec amortissement sélectif	96

Tableaux

3.1	Évaluation du temps de calcul pour 3 différents approches de couplage réduit	87
-----	--	----

3.1 Introduction

Le chapitre 2 traite l’extension de la méthode Arlequin au régime dynamique, appuyée par une analyse de l’influence des paramètres de la méthode, tout en restant dans le cadre multi-échelle que nous avons retenu dans ces travaux de thèse, à savoir des problèmes dynamiques à HF localisées.

Nous avons rappelé, dans ce chapitre 2, que le cadre Arlequin avec son couplage caractéristique en volume dans une zone de superposition, notée Ω_c , d’un modèle fin défini dans Ω_2 et d’un modèle grossier, défini dans Ω_1 , permet l’entrée des ondes HF du modèle fin dans la zone de couplage Ω_c , moyennant l’utilisation d’un espace médiateur grossier $\underline{M}_{h_\lambda} = \underline{W}_{h_1} / \Omega_c$ où \underline{W}_{h_1} est l’espace EF grossier défini sur le domaine Ω_1 . Rappelons ici que cet opérateur de couplage s’écrit comme suit :

$$c(\underline{\mu}_{h_\lambda}, \underline{u}_{h_1} - \underline{u}_{h_2}) = 0, \forall \underline{\mu}_{h_\lambda} \in \underline{M}_{h_\lambda} \quad (3.1)$$

Nous avons également montré, en particulier, qu’en cas d’incompatibilité de frontière des traces des maillages superposés dans le domaine Ω_c de couplage, des phénomènes numériquement parasites se mettent en place et polluent la zone critique $\Omega_2 \setminus \Omega_c$. Signalons ici qu’un impact des incompatibilités de maillages pour des couplages surfaciques entre sous-domaines (sans superpositions) a été étudié dans [CB68, Bab73, BMP93] et que des nouveaux opérateurs de couplage ont été proposés dans ces références (citons ici l’exemple des éléments mortiers dans [BMP93]).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux couplages réduits et appropriés [DB03, Bal96b, KRV08], pour des couplages surfaciques réduits entre sous-domaines. Pour le couplage réduit en volume, nous renvoyons au travail polarisé, entre autres, par des couplages Arlequin multi-échelle en volume réduits, introduit dans [Dhi01] et à ceux, dans cette même veine et davantage dédié aux couplages Arlequin réduits en dynamique [ABD14, AD15]). Les travaux introduits dans [Dhi01] sont, en fait, fondés sur l’analyse du degré de compatibilité physique entre des espace discrets W_{h_1} / Ω_c et W_{h_2} / Ω_c (Ω_c étant l’interface volumique de couplage), permettant de dégager des nouveaux espaces médiateurs Arlequin réduits par la réduction à un espace de multiplicateurs de Lagrange, formé par des couples de champs appariés par un bon degré de compatibilité. Ici, nous allons revisiter la construction de ces espaces médiateurs, dans le cadre de notre problème d’intérêt. Nous en analysons et précisons les opérations de réduction et nous proposons un nouvel opérateur de couplage dont nous montrons, grâce à des nouveaux éclairages de la réduction, les intérêts particuliers.

Dans la section (3.2), en nous inspirant [DB03], nous donnons une écriture générique de l’opérateur de couplage réduit Arlequin, en volume. Pour la construction effective de ces opérateurs, nous présentons deux méthodes d’appariements d’espaces, par la mesure de la $(1 - \varepsilon)$ – *Compatibilité* entre espaces EF de finesse différentes dans la zone de couplage, étendant au volume (tout en exploitant des moyens physiques de mesure de la compatibilité) deux méthodes d’appariement d’espaces surfaciques (voir [DB03] et les références mentionnées dans ce papier). Ces méthodes permettent de dégager, pour chaque méthode, un espace médiateur, généré par une base de couples de champs appariés, dont la dimension est réduite par rapport à la dimension de l’espace médiateur (grossier) classique. Nous développons surtout une nouvelle méthode permettant de faire un appariement optimisé par rapport à la première méthode. Dans la section (3.3), nous utilisons l’espace médiateur réduit généré par la nouvelle méthode pour la construction de l’opérateur réduit de couplage Arlequin. Nous testons cet opérateur dans le cadre statique multi-échelle pour le cas d’une barre élastique, soumise à son propre poids. Nous étendons, dans la section (3.4), cette réduction du couplage au ré-

gime dynamique et proposons une nouvelle manière d'écrire l'amortissement sélectif sur la zone de couplage adaptée aux couplages réduits, permettant d'annuler les réflexions parasites. Cette démarche est validée, dans ce chapitre, sur le cas test de la barre élastique, sollicitée par un signal riche en fréquences. Sa validation 2D est faite dans le dernier chapitre de ces travaux de thèse, portant sur le problème de la fissuration, en dynamique. Le chapitre est fermé par quelques conclusions.

3.2 Réduction de l'opérateur de couplage

Dans la continuité des développements faits au chapitre 2, nous considérons la discrétisation de l'espace médiateur comme étant la restriction de l'espace \underline{W}_{h_1} sur Ω_c . Soient $(\underline{\phi}_i^c) = (\underline{\phi}_{i/\Omega_c}^1)$ les fonctions de la base d'approximation par éléments finis de l'espace des multiplicateurs de Lagrange et soit n_1^c sa dimension. Tout élément $\underline{\mu}_h$ de l'espace médiateur $\underline{M}_{h_\lambda}$ s'écrit, alors, sous la forme :

$$\underline{\mu}_h = \sum_{i=1}^{n_1^c} \mu_i \underline{\phi}_i^c \quad (3.2)$$

Comme l'équation (3.1) est valable pour tout $\underline{\mu}_{h_\lambda}$ dans $\underline{M}_{h_\lambda}$, elle l'est, en particulier, pour toute les fonctions de base EF $(\underline{\phi}_i^c)$ de $\underline{M}_{h_\lambda}$. Alors, l'équation de couplage discrète s'écrit aussi comme suit :

$$c(\underline{\phi}_i^c, \underline{u}_{h_1} - \underline{u}_{h_2}) = 0, \forall \underline{\phi}_i^c \in \underline{M}_{h_\lambda} \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) étant vraie pour toute les fonctions de base EF, elle l'est alors pour toute base dont les vecteurs sont une combinaison linéaire des fonctions $(\underline{\phi}_i^c)$. Nous considérons $\mathcal{B}_c = \text{vect}\{\underline{m}_i, i = 1, \dots, n_1^c\}$ une base génératrice de l'espace médiateur $\underline{M}_{h_\lambda}$. Cette base peut être, par exemple, une base de vecteurs propres ou toute autre base qui peut générer l'espace médiateur discret. Nous écrivons, ainsi, que $\underline{M}_{h_\lambda} = \underline{W}_{h_1/\Omega_c}^c = \underline{W}_{h_1}^c = \text{vect}\{\underline{m}_i, i = 1, \dots, n_1^c\}$.

Comme nous l'avons étudié dans (2.3.6), il peut y avoir des configurations de maillages compatibles ou incompatibles. Dans les deux cas, un couplage en moyenne utilisant les espaces éléments finis, tout en considérant tout l'espace $\underline{W}_{h_1}^c$ comme médiateur, se trouve dans la difficulté de faire propager des ondes bien qu'admissibles par la discrétisation du modèle grossier, du modèle fin au grossier. De plus, si les maillages superposés sont incompatibles sur les frontières, la qualité du couplage est détériorée et les fréquences en question ne sont que partiellement transmises. Ce manque de contrôle de ces erreurs de couplage met en question le choix de l'espace médiateur \underline{W}_{1h}^c . Nous proposons donc de réduire l'espace médiateur afin d'améliorer la transmission des ondes BF, tout en compressant les coûts du calcul.

Pour cela, nous considérons \mathcal{B}_c^a une sous base de \mathcal{B}_c qui génère le sous-espace réduit $\underline{M}_{h_\lambda}^a \subseteq \underline{M}_{h_\lambda}$ de dimension n_a^c plus petite que n^c .

$$\underline{\mu}_h^a = \sum_{i=1}^{n_a^c} l_i \underline{m}_i \quad (3.4)$$

Ce qui nous ramène à au couplage approché suivant :

$$c(\underline{\mu}_h^a, \underline{u}_{h_1}) - c(\underline{\mu}_h^a, \underline{u}_{h_2}) = 0, \forall \underline{\mu}_h^a \in \underline{M}_{h_\lambda}^a \quad (3.5)$$

Une question très importante à laquelle il faut répondre, en réduisant l'espace médiateur, est l'existence et l'unicité de la solution du problème Arlequin ; question que nous avons évoquée dans (2.3.3) et dont la réponse affirmative est conditionnée par la vérification de la condition Inf-Sup et la condition de coercivité. Or, le fait que $\underline{M}_{h_\lambda}^a$ soit inclus dans $\underline{M}_{h_\lambda} = \underline{W}_{h_1}^c$ permet de répondre positivement à cette question de stabilité, en utilisant les résultats établis dans [BDR01].

Une autre question importante et opérationnelle est comment choisir $\underline{M}_{h_\lambda}^a$? La réponse à cette question repose sur la notion d'appariement d'espaces par la mesure de leur compatibilité, introduite dans le Polycopié du Cours de Contact de H. Ben Dhia, Annexe2, intitulée *Espaces de $(1 - \varepsilon)$ -compatibilité* (ou proximité) [Dhi01].

3.2.1 Forme générique de l'équation du couplage réduit

La notion de *Espaces de $(1 - \varepsilon)$ -compatibilité* [Dhi01] permet de construire des espaces médiateurs réduits qui sont de sous-espaces de l'espace produit $\underline{W}_{h_1}^c \times \underline{W}_{h_2}^c$, de dimension n_r^c . On les note $\underline{M}_{h_\lambda}^r = \underline{W}_{h_1}^{cr} \times \bar{\underline{W}}_{h_1}^{cr}$. Dans ce dernier produit, le second espace est dit apparié au premier par une mesure de $(1 - \varepsilon)$ -compatibilité ou proximité. Par ailleurs, on appellera indice de compatibilité le rapport $I_c = \frac{n_r^c}{n_1^c}$.

Dans [DB03, Bal96b, KRV08], des opérateurs de couplage surfaciques réduits pour raccorder des sous-domaines (sans recouvrements) sur leurs interfaces sont réalisés en utilisant différentes mesures de compatibilité ou de proximité permettent de dégager des espaces de multiplicateurs de Lagrange produits de deux sous espaces réduits de champs surfaciques. Étendant ces approches au cadre Arlequin, des opérateurs de couplages Arlequin en volume réduits sont développés dans [ABD14, AD15], en statique et en dynamique. La forme générique de ces opérateurs de couplage s'écrit comme suit.

$$c(\underline{\mu}_h^r, \underline{u}_{h_1}) - c(\bar{\underline{\mu}}_h^r, \underline{u}_{h_2}) = 0, \forall \underline{\mu}_{h_\lambda}^r = (\underline{u}_h^r, \bar{\underline{u}}_h^r) \in \underline{M}_{h_\lambda}^r = \underline{W}_{h_1}^{cr} \times \bar{\underline{W}}_{h_1}^{cr} \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) représente le nouveau couplage Arlequin réduit qui assure, de manière faible, la continuité cinématique compatible entre les deux modèles, dans Ω_c . Observons que le calcul de chacun des deux termes du couplage (3.6) devient moins coûteux que dans le couplage classique.

Comme nous venons de le dire, plusieurs formes d'espaces médiateurs réduits peuvent être dérivées. Dans la sous-section suivante, nous adaptions deux possibilités d'appariements existantes au couplage Arlequin en volume. Nous en proposons une troisième.

3.2.2 Appariement de modes propres

La première approche [Dhi01, ABD14, AD15] est la plus intuitive, tout en ayant un fondement physique. Elle consiste à :

- Résoudre le problème mécanique aux valeurs propres pour le domaine Ω_c , en utilisant l'espace discret grossier $\underline{W}_{h_1}^c$. On note $\underline{m}_i^1, 1 \leq i \leq n_1^c$ les vecteurs propres, formant la base \mathcal{B}_c^1 ,
- Résoudre le même problème aux valeurs propres que celui du point 1, en utilisant l'espace éléments finis $\underline{W}_{h_2}^c$ qu'on note $\underline{m}_j^2, 1 \leq j \leq n_2^c$. On note \mathcal{B}_c^2 la seconde base, ainsi créée,

— Pour chaque vecteur $(\underline{m}_i^1)_{i=1..n_1^c}$ de la base \mathcal{B}_c^1 , on calcule coefficient c_i , défini par :

$$c_i = \sup_{\underline{m}_j^2 \in \mathcal{B}_c^2 \setminus \{\underline{m}_k^2\}_{k < j}} \left| \frac{(\underline{m}_i^1, \underline{m}_j^2)_{W_h^{1 \rightarrow 2}}}{\|\underline{m}_i^1\|_{W_{h_1}^c} \|\underline{m}_j^2\|_{W_{h_2}^c}} \right|; \quad i = 1, \dots, n_1^c \quad (3.7)$$

où $(\cdot, \cdot)_{W_h^{1 \rightarrow 2}}$ et $\|\cdot\|_{W_{h_1}^c}$ désignent le produit scalaire $(L^2(\Omega_c))^d$ et la norme associée. On appelle c_i le coefficient de compatibilité du mode \underline{m}_i^1 par rapport à la base modale \mathcal{B}_c^2 , en notant $\bar{\underline{m}}_i$ le vecteur propre \underline{m}_j^2 qui atteint la valeur c_i . Ce vecteur est nommé aussi vecteur apparié à \underline{m}_i^1 .

Ces opérations étant faites, moyennant la donnée d'un paramètre ε suffisamment petit, on définit l'espace médiateur réduit comme étant celui généré par les couples de vecteurs propres appariés, tels que $1 - \varepsilon \leq c_i \leq 1$. Ce sont les paires

Remarque 3.1 :

On observe qu'il n'y a pas besoin de calculer tous les modes propres pour la discrétisation fine. En général, en prenant les modes dans l'ordre croissant des valeurs propres, on peut se contenter des n_1^c premiers modes fins. On peut même réduire davantage la dimension de la base réduite, en tenant compte du fait qu'un nombre significativement plus faibles de modes grossiers peut être retenu, vu l'hypothèse que l'y-on fait sur la nature de nos problèmes.

3.2.3 Appariement par proximité cinématique des modèles superposés

L'approche présentée, en (3.2.2), s'appuie sur un appariement modal sur les deux sous-domaines permettant de construire des espaces de couples modaux, dont les bases sont sélectionnées par une mesure de $(1 - \varepsilon)$ – *compatibilité*. Nous avons observé qu'une troncature modale permet de réduire significativement cet espace. Dans cette sous-section, nous étendons au couplage Arlequin en volume une autre méthode d'appariement. Cette méthode est utilisée dans [DB03, DRBDL09] pour construire des couples de multiplicateurs de Lagrange appariés par proximité cinématique pour construire un opérateur de couplage surfacique réduit. Plus précisément, nous étendons, dans cette sous-section, la méthode d'appariement par proximité cinématique au couplage volumique Arlequin pour définir l'espace médiateur réduit et de construire ainsi l'opérateur de couplage réduit. On résout, alors, le problème de minimisation de Ritz qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\min_{(\underline{w}_{h_1}, \underline{w}_{h_2}) \in W_{h_1}^c \times W_{h_2}^c} \frac{1}{2} \|\underline{w}_{h_1} - \underline{w}_{h_2}\|^2 \quad (3.8)$$

$\|\cdot\|$ est la norme L^2 . Nous pouvons aussi utiliser une autre, comme, la norme H^1 ou une norme énergétique.

En écrivant que les solutions du problème défini par (3.8) vérifient nécessairement la condition d'Euler, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_{11} & -\underline{\underline{C}}_{12} \\ -\underline{\underline{C}}_{21} & \underline{\underline{C}}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{C}}_{11} U_1 - \underline{\underline{C}}_{12} U_2 = 0 \\ \underline{\underline{C}}_{21} U_1 - \underline{\underline{C}}_{22} U_2 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Le premier système du système global défini par (3.9), représente la discrétisation du couplage Arlequin, utilisant, comme médiateur l'espace grossier. En traitant sa matrice

rectangulaire par la méthode SVD, on obtient les valeurs propres singulières $(c_i)_{(1 \leq i \leq n_1^c)}$ de cette matrice et les modes singuliers associés, formés de couples $(U_1, U_2)_{i, (1 \leq i \leq n_1^c)}$. Les couples appariés par proximité sont ceux pour lesquels $c_i \leq \epsilon$, pour un ϵ suffisamment petit donné.

3.2.4 Couplage par appariement par projection

Nous proposons, ici, une nouvelle approche de construction d'un espace médiateur réduit généré par des couples de vecteurs appariés par projection des modes propres du modèle grossier sur l'espace fin dans la zone de couplage, nous l'appelons aussi couplage par accommodation. Nous procédons, alors de la manière suivante :

- Résolvons le problème mécanique aux valeurs propres pour le domaine Ω_c , en utilisant l'espace discret grossier $\underline{W}_{h_1}^c$. Notons $\underline{m}_i^1, 1 \leq i \leq n_1^c$ les vecteurs propres qui forment la base \mathcal{B}_c^1 . Tous vecteur \underline{m}_i^1 s'écrit dans la base éléments finis $\underline{W}_{h_1}^c$ sous la forme suivante :

$$\underline{m}_i^1 = \sum_{j=1}^{n_1^c} a_{ij} \underline{\phi}_j^c, i = 1..n_1^c \quad (3.10)$$

où les $\underline{\phi}_j^c = \underline{\phi}_j^1 / \Omega_c$.

- Procédons par projection au sens du produit $L^2(\Omega_c)$ des vecteurs \underline{m}_i^1 de la base modale \mathcal{B}_c^1 sur l'espace $\underline{W}_{h_2}^c$. Notons $\underline{\bar{m}}_i$ le projeté de \underline{m}_i^1 sur l'espace $\underline{W}_{h_2}^c$, formant la base $\bar{\mathcal{B}}_c^1$:

$$\underline{\bar{m}}_i = \Pi_{\underline{W}_{h_2}^c} \underline{m}_i^1 = \sum_{j=1}^{n_1^c} \bar{a}_{ij} \bar{\phi}_j^c, i = 1, \dots, n_1^c \quad (3.11)$$

où $\bar{\phi}_j^c = \underline{\phi}_j^2 / \Omega_c$. Sachant que la base éléments finis n'est pas une base orthogonale, la projection modale se ramène à résoudre le système matriciel suivant

$$[(\bar{\phi}_k^c, \bar{\phi}_l^c)] [\bar{a}_{il}] = [(\phi_k^c, \phi_j^c)] [a_{ij}], i, k = 1..n_1^c \quad (3.12)$$

- Pour chaque couple de vecteurs $(\underline{m}_i, \underline{\bar{m}}_i), i_1, \dots, n_1^c$ on calcule le coefficient c_i défini par :

$$c_i = \frac{\|\underline{\bar{m}}_i\|_{\underline{W}_{h_2}^c}}{\|\underline{m}_i^1\|_{\underline{W}_{h_1}^c}}, \forall i = 1..n_1^c \quad (3.13)$$

On appelle c_i le coefficient de compatibilité du mode \underline{m}_i^1 de la base \mathcal{B}_c^1 par rapport à son $\underline{\bar{m}}_i$, de la base modale $\bar{\mathcal{B}}_c^1$. Ce vecteur est nommé aussi vecteur apparié à \underline{m}_i^1 par accommodation ou projection.

Ces opérations étant faites, moyennant la donnée d'un paramètre ϵ suffisamment petit, on définit l'espace médiateur réduit comme étant celui généré par les couples de vecteurs propres appariés, tels que $1 - \epsilon \leq c_i \leq 1$. Le nombre de ces couples donne la dimension n_r^c de l'espace médiateur réduit, généré par ces paires de couples $(\underline{m}_i^1, \underline{\bar{m}}_i)$.

Remarque 3.2 :

La matrice $[(\bar{\phi}_k^c, \bar{\phi}_l^c)]$ est un symétrique, vue la symétrie du produit scalaire. Dans les cas des éléments finis 1D, elle est tri-diagonale. L'inversion de cette matrice en 2D ou en 3D est plus coûteuse qu'en 1D. Pour réduire le coût de l'inversion de cette matrice, il est possible de faire une diagonalisation par condensation comme les techniques

utilisées pour la diagonalisation de la matrice de masse. Cette simplification, certes, réduit considérablement le temps de calcul des projetés de modes, mais elle réduit aussi la précision de calcul des modes projetés. L'équation (3.12), après condensation, s'écrit sous la forme suivante

$$[\bar{a}_{ik}] = [a_{ij}] \left[\frac{(\Phi_j^1, \Phi_k^2)}{\sigma_i} \right], i = 1..n_1^c \quad (3.14)$$

3.3 Réduction du couplage Arlequin en statique

3.3.1 Formulation continue du problème

Nous considérons le problème d'une barre 1D élastique et homogène de module d'Young E et de masse volumique ρ , occupant l'adhérence du domaine $\Omega =]O, L[$ partitionnée en deux sous-domaines $\Omega_1 =]B, L[$ et $\Omega_2 =]O, A[$. Les deux domaines se recouvrent dans une zone de superposition $\Omega_c =]B, A[$. La barre est supposée être encadrée à l'extrémité O et soumise à l'action de son propre poids (cf. (3.1)).

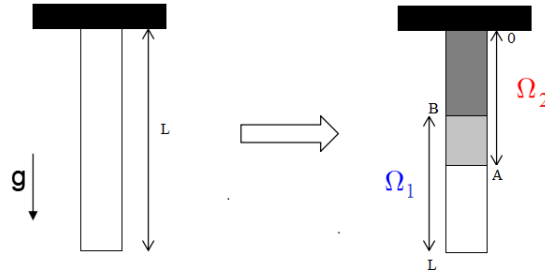


FIGURE 3.1 – Mono-modèle (à gauche) et bi-modèle Arlequin (à droite) d'une barre soumise à son propre poids

La formulation statique faible continue du problème Arlequin s'écrit comme suit

$$\left(\varphi_{arl}^{stat} \right) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } (u_1, u_2, (\lambda, \bar{\lambda})) \in W_1 \times W_2 \times M, \text{ tel que :} \\
 k_1(\alpha_1^k, u_1, w_1) + c(\lambda, w_1) = f_1(\alpha_1^l, w_1) ; \forall w_1 \in W_1 \quad (3.15) \\
 k_2(\alpha_2^k, u_2, w_2) - c(\lambda, w_2) = f_2(\alpha_2^l, w_2) ; \forall w_2 \in W_2 \quad (3.16) \\
 c(\mu, u_1) - c(\bar{\mu}, u_2) = 0, \quad \forall (\mu, \bar{\mu}) \in M; \quad (3.17) \\
 \text{avec} \\
 \mu = \bar{\mu} \quad (3.18) \\
 W_1 = \{w_1 \in H^1(\Omega_1), w(0) = \underline{0}\} \quad (3.19) \\
 W_2 = \{w_2 \in H^1(\Omega_2)\} \quad (3.20) \\
 M \subseteq W_1/\Omega_c \times W_2/\Omega_c \quad (3.21)
 \end{array} \right.$$

où pour $i=1,2$ les (k_i) et les (f_i) réfèrent aux travaux virtuels internes et externes liées aux sous-domaines (Ω_i) respectivement et où $c(., .)$ est l'opérateur de couplage, $i = 1, 2$.

3.3.2 Discrétisation du problème

La discrétisation en espace des champs définis sur les deux domaines du problème Arlequin continu (φ_{arl}^{stat}) est effectuée par la MEF. Les domaines Ω_1 et Ω_2 sont liés par un modèle de jonction. Le domaine Ω_1 est le support du modèle EF grossier et

le domaine (Ω_2) est celui du modèle EF fin. L'espace médiateur est discrétisé selon le couplage réduit choisi : appariement modal, accommodation ou minimisation de l'écart. Nous choisissons une partition constante des énergies avec $\alpha_k^1 = 0.5$ dans Ω_c .

Soient W_{h_1} et W_{h_2} des sous-espaces vectoriels de dimensions finies n_1 et n_2 des espaces des champs cinématiquement admissibles W_1 et W_2 respectivement. Soit M_h^r le sous-espace vectoriel, composé par le croisement des sous-espaces modales $M_{\lambda_h}^r$ et $\bar{M}_{\lambda_h}^r$ des espaces W_1^c et W_2^c , ayant la même dimension n_r^c , de l'espace multiplicateurs de Lagrange M . Soient $(\phi_i^1)_{1 \leq i \leq n_1}$ et $(\phi_i^2)_{1 \leq i \leq n_2}$ des fonctions de base des sous sous-espace W_{h_1} et W_{h_2} , respectivement. Nous approchons les champs de déplacement u_1 , u_2 et le champs multiplicateur de Lagrange λ par les champs respectifs u_{h_1} , u_{h_2} , λ_h^r et $\bar{\lambda}_h^r$ comme suit :

$$u_{h_1} = \sum_{i=1}^{n_1} U_{1,i} \phi_i^1 \quad (3.22)$$

$$u_{h_2} = \sum_{i=1}^{n_2} U_{2,i} \phi_i^2 \quad (3.23)$$

$$\lambda_h = \sum_{i=1}^{n_r^c} l_i \sum_{j=1}^{n_1^c} a_{ij} \phi_j^c \quad (3.24)$$

$$\bar{\lambda}_h = \sum_{i=1}^{n_r^c} l_i \sum_{j=1}^{n_2^c} \bar{a}_{ij} \phi_j^c \quad (3.25)$$

La formulation statique discrète du problème Arlequin 1D avec couplage réduit s'écrit comme suit

$$\left(\mathcal{P}_{arl}^{discret} \right) \begin{cases} \text{Trouver}(\underline{U}_1, \underline{U}_2, (\underline{\Lambda}^r, \bar{\underline{\Lambda}}^r)) \in W_{h_1} \times W_{h_2} \times M_{\lambda_h}^r, \text{ tel que :} \\ \underline{K}_1(\alpha_1^k) \underline{U}_1 + \underline{C}_1^t [\underline{m}_{n_r^c}] \underline{\Lambda}^r = \underline{F}(\alpha_1^l)_1 \quad (3.26) \\ \underline{K}_2(\alpha_2^k) \underline{U}_2 - \underline{C}_2^t [\bar{\underline{m}}_{n_r^c}] \bar{\underline{\Lambda}}^r = \underline{F}(\alpha_2^l)_2 \quad (3.27) \\ [\underline{m}_{n_r^c}]^t \underline{C}_1 \underline{U}_1 - [\bar{\underline{m}}_{n_r^c}]^t \underline{C}_2 \underline{U}_2 = 0 \quad (3.28) \end{cases}$$

On désigne par les matrices $\underline{K}_1(\alpha_1^k)$ et $\underline{K}_2(\alpha_2^k)$ les matrices de rigidité et $\underline{F}_1(\alpha_1^l)$ et $\underline{F}_2(\alpha_2^l)$ les vecteurs des efforts extérieurs, associés respectivement au sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Les matrices $[\underline{m}_{n_r^c}]$ et $[\bar{\underline{m}}_{n_r^c}]$ sont les matrices des modes appariés exprimés dans les sous-espaces $W_{h_1}^c$ et $W_{h_2}^c$.

3.3.3 Application numérique

Pour illustrer numériquement le couplage réduit en statique, nous considérons les mêmes donnée pour la barre à savoir $L = 10$, $x_A = 6$ et $x_B = 4$ (cf. figure (3.2)).

Nous considérons aussi que l'effort linéique appliqué est unitaire $\rho g = 1$

Nous considérons un maillage uniforme fin de pas $\Delta x_2 = 0.01$ pour Ω_2 et un autre maillage uniforme pour Ω_1 de pas de pas plus grand $\Delta x_1 = 0.1$. Des éléments finis P_1 sont utilisés pour les 2 modèles. Ces choix génèrent deux maillages compatibles de la zone $\Omega_c = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Observons que dans ce cadre statique nous utilisons un couplage en déplacement.

Afin d'analyser l'influence de l'incompatibilité sur la qualité du couplage Arlequin, on part du modèle compatible présenté ci-dessus et on fait décaler progressivement les maillages recouverts avec demi-pas du maillage fin qu'on note $\Delta L = 0.005$. Alors,

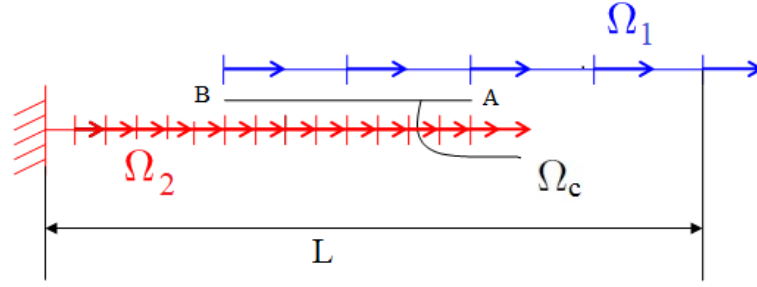


FIGURE 3.2 – Modèle de barre 1D soumise à un effort volumique

la variation de l'abscisse du point B par rapport à la position initiale $x_B = 4$ est notée par δ_r . Cette opération nous permet d'obtenir des configurations de maillages compatibles, de maillages compatibles sur la frontière et incompatibles à l'intérieur de la zone de couplage et de maillages compatibles à l'intérieur de Ω_c et incompatibles sur les frontières. Sachant la variation de la dimension de la zone de couplage suite à cette opération de décalage n'a pas d'influence sur la qualité du couplage, nous nous intéressons à la variation des indices de compatibilité et des erreurs de couplages par rapport aux résultats analytiques.

Pour les trois types de couplages réduits proposés, nous varions pour chacun δ_r et ε et nous traçons la variation de l'indice de compatibilité I_c et la norme infinie de l'erreur e_r du déplacement par rapport à celui calculé analytiquement donné par l'équation suivante

$$e_r = \sup_{\Omega} \frac{U_{ar1q} - U_{ana}}{U_{ana}} \quad (3.29)$$

3.3.3.1 Couplage par appariement

Nous représentons dans la figure (3.3a), la variation de l'indice de compatibilité I_c et dans (3.3b) la variation de l'erreur en fonction de ε et du décalage normalisé par Δx_2 pour un couplage par appariement.

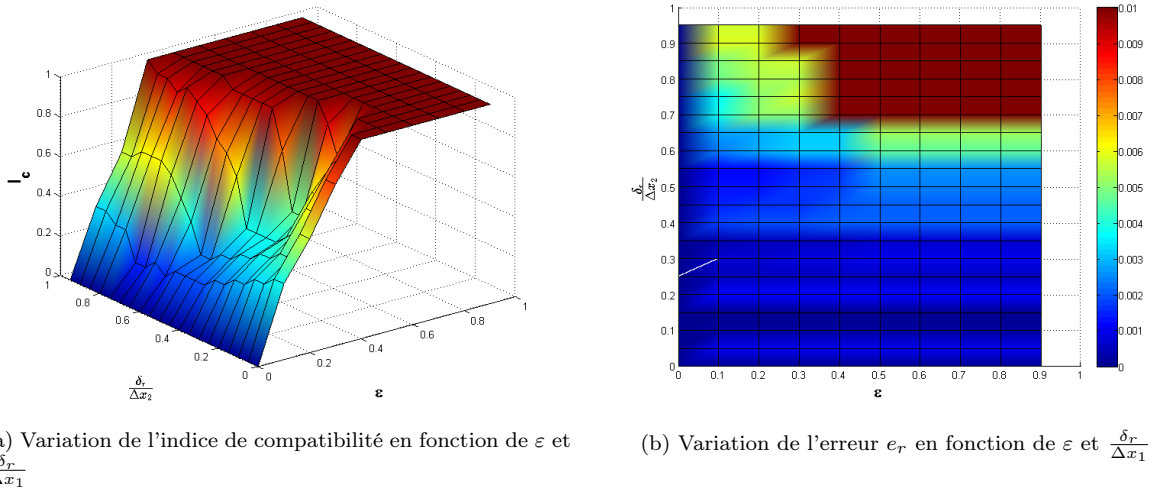


FIGURE 3.3 – Analyse du couplage par appariement des modes propres

Dans les figures (3.3a), nous observons que l'indice de compatibilité est croissant en fonction de ε jusqu'à atteindre un palier pour des valeurs de $\varepsilon > 0.5$. Cette variation est attendue puisque l'augmentation de la valeur ε élargit le filtre de couple de modes

propres appariés avec un coefficient de compatibilité plus grand, et, par conséquent, l'indice de compatibilité suit cette croissance. Cependant, l'augmentation du nombre de couple appariés augmente aussi l'erreur comme l'on peut observer dans la figure (3.3b). Nous observons dans cette figure que l'erreur est une fonction croissante de ε . Nous constatons, aussi, que pour des valeur de $0 < \varepsilon < 0.5$, I_c est décroissant en fonction de δ_r jusqu'à $\delta_r = 0.5\Delta x_1$ et puis croissant pour $0.5 < \frac{\delta_r}{\Delta x_1} < 0.9$. Cela signifie que le maximum d'incompatibilité de frontière apparait lorsque $\delta_r = 0.5\Delta x_2$. Cette observation montre l'influence des effets de bord dans l'appariement de modes propres. La remontée de l'indice I_c lorsque $\delta_r > 0.5\Delta x_1$ montre que le couplage rejette la contribution de l'élément, cause de l'incompatibilité de frontière, ce qui est valider par la valeur de l'erreur qui augment sur cet intervalle surtout pour de valeurs de ε élevées, comme le montre la figure (3.3b)

3.3.3.2 Couplage par minimisation de l'écart

Pour ce type de couplage, nous avons remarqué que les valeurs des coefficients de compatibilité sont toujours très proches de 0 de l'ordre de 10^{-10} ou moins. Au-delà de cette valeur, il n'y a pas de réduction de l'espace médiateur. Pour cela, nous analysons la variation de ε sur un intervalle entre 0 et 10^{-11} . Dans la figure (3.4a) nous représentons la variation de l'indice de compatibilité et dans la figure (3.4b), nous représentons la variation de l'erreur par rapport au résultat analytique.

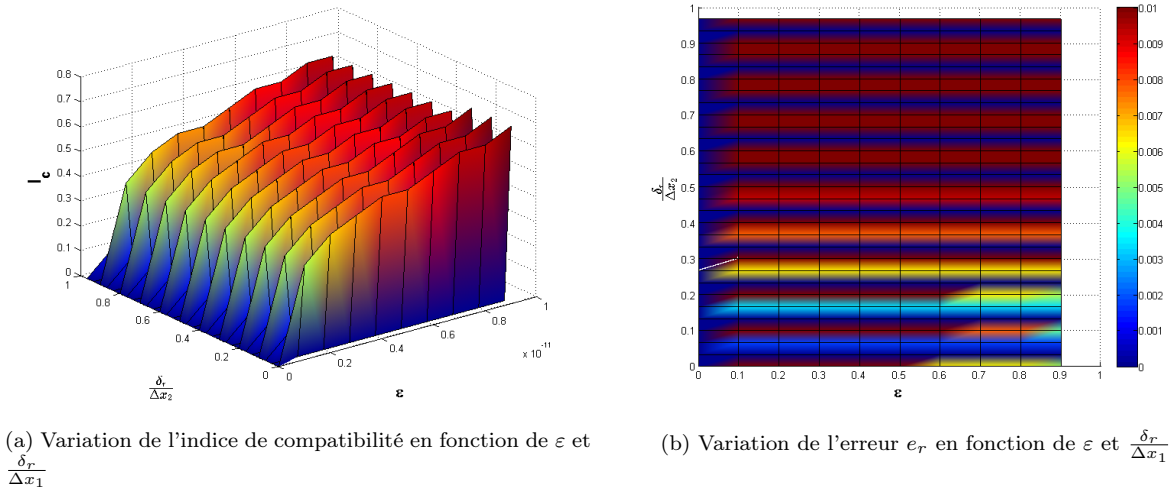


FIGURE 3.4 – Analyse du couplage par minimisation de l'écart cinématique

Dans la figure (3.4a), l'indice de compatibilité croit linéairement avec ε pour toute valeur de δ_r de 0 jusqu'à 0.7. Cette variation s'explique par l'augmentation de nombre de modes considérés au couplage selon la tolérance du noyau de l'opérateur de couplage. L'erreur correspondant à cette variation est quasiment invariant en fonction de ε comme le montre la figure (3.4b).

Observons, aussi, que pour une valeur de ε donnée, l'indice de compatibilité est oscillant en fonction de δ_r . Par exemple, pour $\varepsilon = 0.4$ et pour $\delta_r = 0, 0.1\Delta x_1, 0.2\Delta x_1, \dots, 0.9\Delta x_1$ les indices de compatibilité sont égaux et valent 0.5. Ces valeurs correspondent à la valeur de compatibilité de maillage, sachant que pour toute valeur de δ les maillages sont incompatibles sur les frontières. La valeur de l'erreur oscille aussi inversement à la variation de l'indice de compatibilité. Lorsque I_c augmente la valeur de l'erreur diminue jusqu'à un ordre de 10^{-3} ce qui est très acceptable.

3.3.3.3 Couplage par accommodation

Nous représentons dans la figure (3.5a), la variation de l'indice de compatibilité I_c et dans (3.5b) la variation de l'erreur e_r en fonction de ε et du décalage normalisé par Δx_2 pour un couplage par accommodation des modes propre du modèle grossier au modèle fin.

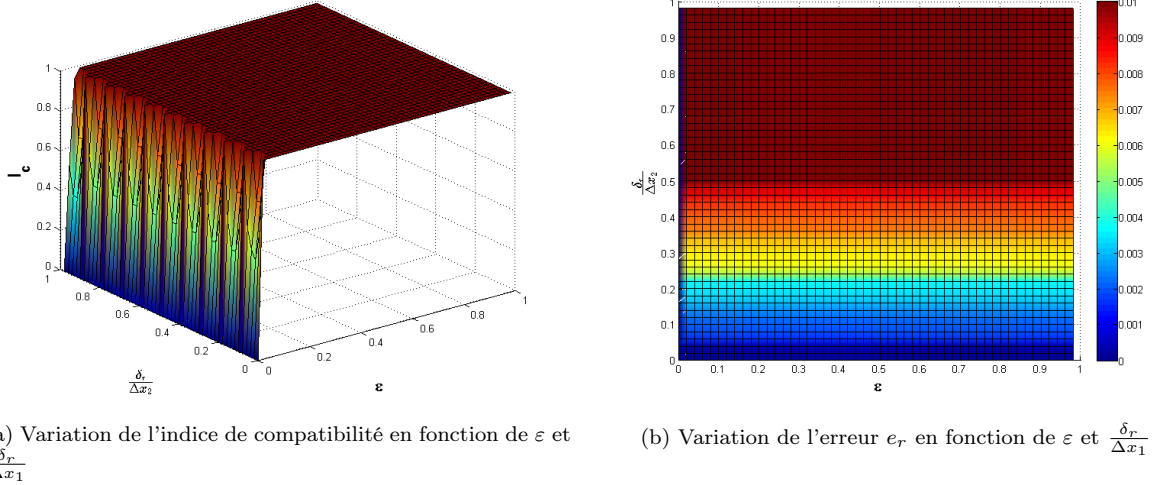


FIGURE 3.5 – Analyse du couplage par accommodation

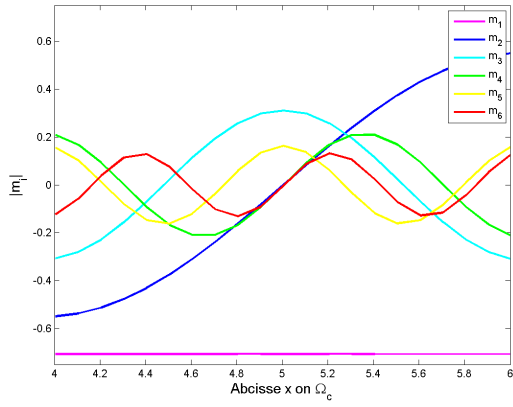
Dans la figure (3.5a), l'indice I_c varie linéairement pour de très faibles valeurs de ε pour atteindre rapidement un plateau à partir de $\varepsilon = 0.1$. Nous remarquons, aussi, les oscillations de la valeur de I_c en fonction de δ_r qui correspondent aux valeurs qui convergent plus vite vers 1 pour les cas de compatibilité de maillage. De point de vue variation de l'erreur de modélisation, nous observons dans la figure (3.5b) des valeurs d'erreur quasiment nulles pour le cas compatible ($\delta_r = 0$) et pour de très faibles valeurs de ε . Lorsque ε augmente l'erreur est constante, ce qui est en accord avec la variation de I_c . Cependant, nous observons une variation linéaire de l'erreur en fonction de δ_r pour peut dépasser 0.01. Cette approche est la plus sensible à l'incompatibilité de frontière.

3.3.3.4 Comparaison entre les 3 approches

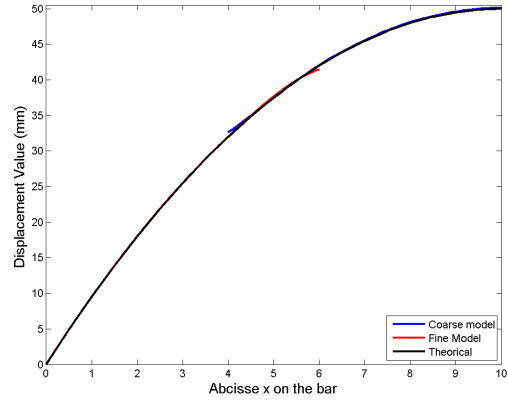
Après l'analyse de la variation des indices de compatibilités et des erreurs résultants de la réduction de l'espace médiateur pour les trois approches de couplage réduit en statique, nous les comparons entre eux à travers un exemple. Dans cet exemple, nous cherchons pour chacune des approches la valeur de ε qui permet de réduire à 30% la dimension de l'espace médiateur $M_{h,\lambda}$.

Nous traçons dans (3.6a) (3.7a) et (3.8a) les modes statiques appariés \underline{m}_i correspondant à 30% de la réduction pour le couplage par appariement, par minimisation de l'écart et par accommodation, respectivement. Nous comparons dans (3.6b), (3.7b) et (3.8b) les courbes de détetes pour chacune des approche respectives par rapport au résultat théorique.

Nous observons que, pour les trois approches, nous ne trouvons pas nécessairement les mêmes modes. Les modes dans les figures (3.6a) et (3.8a) sont, effet les mêmes modes à un signe près puisque nous les obtenons par décomposition en modes propre statique dans Ω_1 . La représentation modale dans la figure (3.7a) est calculé avec une procédure différente, mais, les modes sont proches des modes propres. Remarquons que nous avons trouvé le même nombre de modes (correspond à 30% du dimension de $W_{h_1}^c$) pour des valeurs différentes de ε pour chaque couplage réduit. L'écart entre

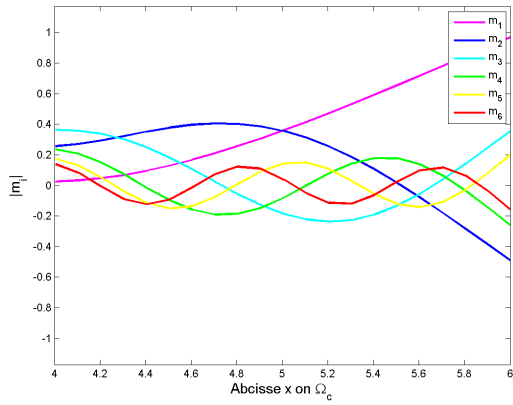


(a) Les 6 premiers modes pour à $\varepsilon = 0.0544$

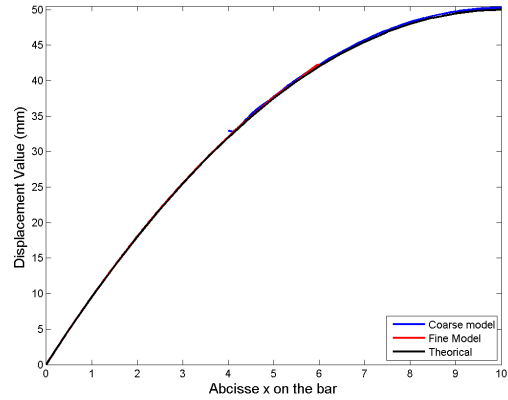


(b) La courbe de détente du modèle Arlequin à couplage réduit

FIGURE 3.6 – Couplage par appariement en statique

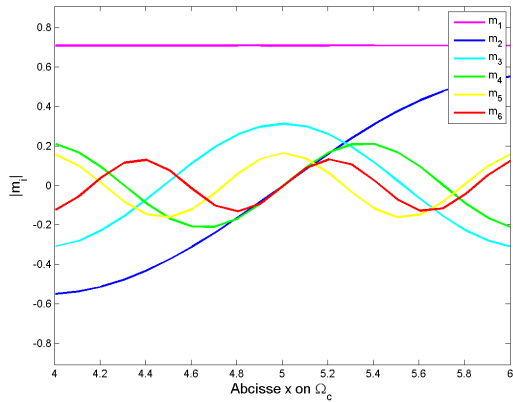


(a) Les 6 premiers modes pour $\varepsilon = 0.0064$

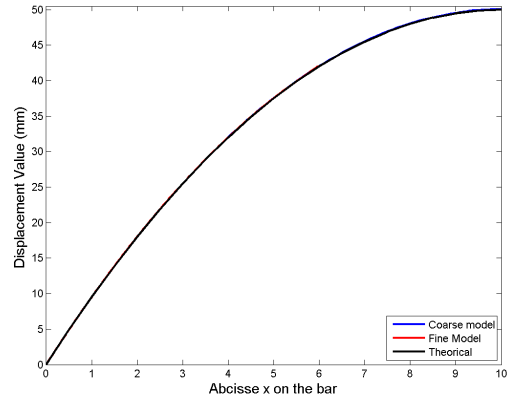


(b) La courbe de détente du modèle Arlequin à couplage réduit

FIGURE 3.7 – Couplage par minimisation de l'écart en statique



(a) Les 6 premiers modes pour $\varepsilon = 0.0059$



(b) La courbe de détente du modèle Arlequin à couplage réduit

FIGURE 3.8 – Couplage par accommodation en statique

les valeurs de ε étant faible, donnent aussi des bon résultats. Nous observons, dans les figures (3.6b) et (3.7b), un faible relâchement sur les bords de la zone de couplage. Ce relâchement est local et il n'affecte pas pas la solution globale. Dans la figure (3.8b), la solution Arlequin réduite par accommodation (modèle grossier en bleu modèle fin en rouge) est parfaitement égale à la solution théorique (en noir).

Approche de réduction	Appariement	Minimisation de l'écart	Accommodation
Temps de calcul	14.025s	12.243s	13.100s

TABLE 3.1 – Évaluation du temps de calcul pour 3 différents approches de couplage réduit

Pour finir avec les comparaisons entre les couplages réduits en statique, nous avons évalué les temps de résolution pour chaque approche qui sont donnés par le tableau (3.1).

Nous remarquons que l'approche la moins coûteuse en temps de calcul est le couplage par minimisation de l'écart, suivie par le couplage par accommodation et puis le couplage par appariement. Ces résultats sont attendus puisque la décomposition en valeurs singulières (pour la minimisation de l'écart) est moins coûteuse qu'une résolution d'un problème aux valeurs propres (1 fois pour le couplage par accommodation et 2 fois par le couplage par appariement), pour la même dimension l'espace médiateur réduit.

3.4 Réduction du couplage Arlequin en dynamique

3.4.1 Formulation du problème

Soit le problème Arlequin dynamique d'une barre élastique tel qu'il est décrit au chapitre 2. le domaine $\Omega = [0, L]$ est partitionné en deux zones $\Omega_1 = [B, L]$ et $\Omega_2 = [0, A]$. Les deux domaines se recouvrent sur une zone de superposition $\Omega_c = [B, A]$. En donnant les conditions initiales en déplacement et en vitesse, satisfaisant les conditions aux limites cinématiques, La formulation faible continue du problème Arlequin s'écrit comme suit :

$$\left(\mathcal{S}_{arl}^{faible} \right) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Connaissant l'état initial } \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_i(t=0) = u_d \text{ sur } \Omega_i \quad \forall i = 1, 2 \\ \underline{\dot{u}}_i(t=0) = \dot{u}_d \text{ sur } \Omega_i \quad \forall i = 1, 2 \end{array} \right. , \quad (3.30) \\
 \forall t \in I, \text{ Trouver } \left\{ \begin{array}{l} (u_1, u_2) \in W_1 \times W_2; \\ \lambda \in M \end{array} \right. , \text{ tel que :} \\
 k_1(u_1(t), w_1) + m_1(\ddot{u}_1(t), w_1) + c(\lambda(t), w_1) = f_1(w_1) ; \quad \forall w_1 \in W_1 \quad (3.31) \\
 k_2(u_2(t), w_2) + m_2(\ddot{u}_2(t), w_2) - c(\lambda(t), w_2) = f_2(w_2) ; \quad \forall w_2 \in W_2 \quad (3.32) \\
 c(\mu, \dot{u}_1(t)) - c(\bar{\mu}, \dot{u}_2(t)) = 0, \quad \forall (\mu, \bar{\mu}) \in M; \quad (3.33) \\
 \text{avec} \\
 W_1 = \{w_1 \in (H^1(\Omega_1))\} \quad (3.34) \\
 W_2 = \{w_2 \in (H^1(\Omega_2))\} \quad (3.35) \\
 M \subseteq W_1/\Omega_c \text{ ou } W_2/\Omega_c \quad (3.36)
 \end{array} \right.$$

où les (k_i) , les (m_i) et les (f_i) sont, respectivement, les travaux virtuels internes, cinétiques et externes liées aux sous-domaines (Ω_i) et où $c(., .)$ est l'opérateur de couplage.

Les champs u_d et \dot{u}_d forment le signal initial positionné sur la zone $[0, x_0]$. Il contient N_{freq} fréquences du domaine Ω fenêtrées par une fonction exponentielle. Ce signal est

donné par les équations (3.37)-(3.38).

$$u_d = \begin{cases} \frac{e^{-(\frac{x}{\sigma})^2} - e^{-(\frac{x_0}{\sigma})^2}}{1 - e^{-(\frac{x_0}{\sigma})^2}} \left(\sum_{i=0}^{N_{freq}-1} A_i \cos\left(\frac{2i\pi x}{N_{freq}\Delta x_{min}}\right) \right) & \text{si } x \leq x_0 \ll L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\dot{u}_d = 0, \forall x \in \Omega_1 \quad (3.38)$$

où A_i sont les amplitudes des ondes associées à chaque fréquence, σ est la largeur de la fenêtre exponentielle, x_0 est la largeur sur laquelle le signal initial est considéré être non nul, Δx_{min} est la longueur d'onde la plus petite. Le spectre d'amplitude de ce signal est donné par la figure (3.9).

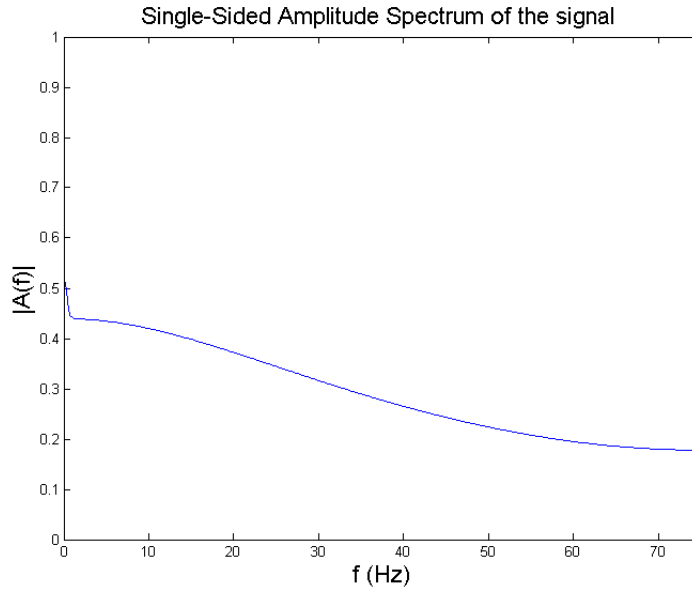


FIGURE 3.9 – Représentation spectrale du signal initial

La discrétisation en espace des champs définis sur les différents domaines du problème Arlequin continu (φ_{arl}^{faible}) est effectuée par la MEF. Le domaine Ω_1 est le support du modèle grossier et le domaine (Ω_2) est celui du modèle fin. Pour la discrétisation en temps, on utilise un schéma mono-échelle en temps, de pas Δt uniforme, de la famille des schémas de Newmark, paramétrée par β et γ . L'espace médiateur M est considéré comme la restriction de l'espace grossier W_{h_1} à Ω_c . On choisit des fonctions de partition des énergies qui varient linéairement sur Ω_c . Dans un premier temps, on ne considère pas l'amortissement des ondes HF sur la zone de couplage.

3.4.2 Analyse modale sur la zone de couplage

Dans la dynamique des structures élastiques, l'analyse modale d'un modèle discret permet de mieux appréhender ses différentes manières de se déformer. Cette analyse fournit des modes de déformation, dits modes propres, associés à des fréquences propres. Ces derniers sont des données intrinsèques qui dépendent de la géométrie de la structure, du matériau constitutif et des conditions aux limites. Pour un problème Arlequin dynamique discrétisé, plusieurs modèles coexistent dans la zone de superposition et chacun est caractérisé par la finesse de sa discrétisation. Alors, pour chaque modèle on peut calculer ses modes et fréquences propres sur le domaine de couplage. Pour aboutir à ce calcul, on considère le problème dynamique libre pour la restriction du modèle (Ω_1)

donné sur la zone de couplage (Ω_c). Le système obtenu est équivalent à celui dans l'équation (1.34) avec un vecteur d'effort externes nul $\underline{F} = 0$.

Pour des raisons de clarté, on considère que dans toute la suite les développements sont effectués sur les intersections des domaines avec les zones de couplage.

Alors le système dynamique libre sur $(\Omega_i \cap \Omega_c)_{i=1,2}$ s'exprime par l'équation suivante :

$$\underline{\underline{K}}_i \underline{U}_i + \underline{\underline{M}}_i \ddot{\underline{U}}_i = 0, i = 1, 2 \quad (3.39)$$

La solution générale d'une telle équation est :

$$\underline{U}_i = \widehat{\underline{U}}_i e^{j\omega_i t}, i = 1, 2, t \in I =]0, T] \quad (3.40)$$

où $\widehat{\underline{U}}_i$ est l'amplitude, ω_i désigne la pulsation et j est le nombre complexe tels que $j^2 = -1$.

L'injection de (3.40) dans (3.39) donne l'équation suivante :

$$\underline{\underline{K}}_i \widehat{\underline{U}}_i = \omega_i^2 \underline{\underline{M}}_i \widehat{\underline{U}}_i, i = 1, 2 \quad (3.41)$$

La résolution de l'équation (3.41) conditionne que son déterminant soit nul $\det(\underline{\underline{K}}_i - \omega_i^2 \underline{\underline{M}}_i) = 0$. Cette dernière permet de retrouver les n_i valeurs propres $(\omega_i^k)_{k=1..n_i}$ et les vecteurs propres (modes propres) associés $(\widehat{\underline{U}}_i^k)_{k=1..n_i}$. Les vecteurs propres, de chaque espace, sont normalisés par rapport à la matrice de masse $(\widehat{\underline{U}}_i^k)^T \underline{\underline{M}}_i \widehat{\underline{U}}_i^k = 1)_{k=1..n_i}$. Dans la pratique, la détermination de toutes les valeurs propre directement par la recherche des zéros du polynôme résultant de l'équation (3.41) est impossible. Généralement, on fait recourt à des méthodes d'analyse numérique qui permettent d'approcher les modes et les valeurs propres.

Alors, l'espace médiateur $(\underline{M}_{h_\lambda}^r) \times (\underline{M}_{h_\lambda}^r)$ est générés par des couple de modes, formant une sous-base des bases modales associées à $\underline{W}_{h_1}^c$ et $\underline{W}_{h_2}^c$ tels que :

$$\underline{W}_{h_2}^c = \text{vect}\{\widehat{\underline{U}}_2^k, k = 1..n_2^c\}, \quad (3.42)$$

$$\underline{W}_{h_1}^c = \text{vect}\{\widehat{\underline{U}}_1^k, k = 1..n_1^c\}, \quad (3.43)$$

3.4.3 Adaptation de l'amortissement sélectif

La modélisation de certains problèmes physiques dans un cadre multi-échelle discrétisé nécessite un traitement particulier des ondes qui ne sont pas transmissibles d'un modèle à un autre. Dans le cas classique, seules le HF provenant d'un modèle local fin ne se propagent pas dans le modèle global grossier. Ces ondes sont amorties d'une manière sélective sur la zone de couplage comme on a montré dans le paragraphe (2.3.4) afin d'éviter les réflexions parasites qui polluent la solution dans la zone critique. Cependant, l'introduction d'un nouveau couplage réduisant l'espace médiateur modifie la manière avec laquelle les signaux sont transmis entre les deux modèles couplés et de nouvelles réflexions apparaissent. Afin d'adapter l'amortissement sélectif au couplage réduit, il est nécessaire de comprendre la nature des signaux transmis et réfléchis.

Dans les différents types de couplage présentés dans les sous-sections (3.2.2), (3.2.3) et (3.2.4), on se base sur base construites de modes propres de chaque domaine, afin d'apparier les espaces des champs cinématiques des deux modèles. Ces modes sont représentatifs à des fréquences de propagation, déterminant ainsi les modes de propagation contribuant dans l'opération de couplage. Alors, cette opération restreint le

couplage sur la partie du signal représentée par des modes de couplage pour être couplée avec son apparié sur le modèle opposé. Dans ce cas, seulement les fréquences associées à ces modes, autrement la projection des signaux sur ces modes, seront transmises alors que toute autre fréquence sera réfléchi. Alors, en désignant par \tilde{u}_1 et \tilde{u}_2 les parties réfléchies des signaux lors du couplage sur Ω_c provenant de Ω_1 et Ω_2 , respectivement. Ils s'écrivent :

$$\tilde{u}_1 = u_1 - \Pi_2 u_1, \quad (3.44)$$

$$\tilde{u}_2 = u_2 - \Pi_1 u_2, \quad (3.45)$$

D'une manière analogue à l'amortissement sélectif classique, Deux forces d'amortissement visqueux sont définis dans la zone de couplage. Le rôle de ces forces est de réduire les parties réfléchies des signaux au cours de l'opération de couplage. On désigne par f_1^{amor} et f_2^{amor} les forces d'amortissement visqueux définies sur Ω_c pour amortir les ondes réfléchies dans le modèles grossier et le modèle fin respectivement. Elles sont exprimées comme suit :

$$f_2^{amor} = -\mu_2 \dot{\tilde{u}}_2, \quad (3.46)$$

$$f_1^{amor} = -\mu_1 \dot{\tilde{u}}_1, \quad (3.47)$$

où μ_2 et μ_1 sont les coefficient d'amortissement sélectif, respectifs.

Par l'application de ces forces d'amortissement, les parties des signaux réfléchies suite à la réduction de l'opérateur de couplage sont atténuées. L'efficacité de l'amortissement dépend du choix des coefficients μ_1 et μ_2 . Par ailleurs, pour des valeurs suffisamment grandes de ces coefficients, Il peut y avoir réflexion de certaines ondes sans pénétration dans la zone de couplage. Elles verront la frontière de Ω_c comme un mur infranchissable. La question est alors comment choisir le bon coefficient d'amortissement pour assurer que le signal entre entièrement à la zone de couplage sans qu'il y est des réflexions parasites sur les bords de Ω_c .

Pour cela, nous reprenons le développement fait dans la sous-section (2.3.5) pour chacun des modèles restreint à Ω_c , nous en déduisons facilement les relations suivantes :

$$\frac{2\rho}{\sqrt{\frac{1}{(2\pi f_{1,max}^r)^2} + \left(\frac{2l_c}{c \ln(\varepsilon)}\right)^2}} < \mu_1 < 4\rho\pi f_{1,min}^r \quad (3.48)$$

$$\frac{2\rho}{\sqrt{\frac{1}{(2\pi f_{2,max}^r)^2} + \left(\frac{2l_c}{c \ln(\varepsilon)}\right)^2}} \leq \mu_2 \leq 4\rho\pi f_{2,min}^r, \quad (3.49)$$

où ε est une valeur entre 0 et 1 indicatrice du taux d'amortissement, ρ est la masse volumique, c est la célérité des ondes, $f_{1,min}^r$ et $f_{2,min}^r$ sont les fréquences minimales des ondes réfléchies dans Ω_1 et Ω_2 , respectivement, et $f_{1,max}^r$ et $f_{2,max}^r$ sont leurs fréquences maximales respectives. Ces fréquences sont calculées directement à partir des valeurs propres associées aux modes propres non contribuant aux espaces appariés intervenant dans le couplage entre les modèles fin et grossier.

Pour assurer l'existence des coefficients μ_2 et μ_1 , il faut que la borne inférieur soit strictement inférieure à la borne supérieure des deux inégalités (3.48) et (3.49). Une condition sur la largeur de la zone de couplage l_c en découle. Elle s'écrit :

$$l_c > \frac{c|\ln(\varepsilon)|}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{(f_{2,min}^r)^2} - \frac{1}{(f_{2,max}^r)^2}} \quad (3.50)$$

En résumé, nous avons mis à jour l'amortissement sélectif pour s'adapter avec le couplage réduit, permettant d'atténuer les nouvelles réflexions d'ondes suite à cette réduction.

3.4.4 Illustration numérique

Reprenons le problème Arlequin en dynamique ($\mathcal{S}_{arl}^{faible}$) d'une barre 1D sollicitée par un signal multi-fréquences. On considère, alors, que la barre est de longueur $L = 10mm$, avec un matériau standard ($E = 1, \rho = 1$). Ω_2 occupe l'adhérence du domaine $[0, 6]$ et Ω_1 occupe l'adhérence du domaine $[4, 10]$ couplés sur la zone de couplage $\Omega_c = [4, 6]$. Ω_2 et Ω_1 sont maillés par des éléments segments P1 avec des pas de maillage uniformes, respectivement, $\Delta x_2 = 0.002mm$ considéré fin et $\Delta x_1 = 0.02mm$ considéré grossier. Le temps est discrétisé par un schéma de Newmark d'accélération moyenne de pas $\Delta t = 0.02s$.

Pour illustrer, comme en statique, l'approche de réduction de couplage développée ainsi, nous considérons que les modèles de la barre Arlequin présente des incompatibilités de frontière sur la zone de couplage. Sur le bord O de Ω_2 , nous faisons propager, initialement, un signal riche en fréquences (450 fréquences) dont le spectre d'amplitude est donné par la figure (3.9).

Les analyses des variations des indices de compatibilité sont identiques à celle développés en statiques. Nous nous contentons de ces résultats en cas de besoin pour la dynamique.

Comme nous l'avons souligné dans la sous-section (2.3.6), La discrétisation du modèle grossier trouve une difficulté à représenter proprement les ondes de fréquence au-delà de 15% de la bande de fréquence admissible par ce modèle. De ce constat, nous choisissons le 15% premiers modes propres de l'espace grossier que nous déterminons la valeur de ε correspondante pour réduire l'espace médiateur. Nous analysons l'influence de la réduction sur le spectre du signal transmis pour les 3 méthodes de couplage réduit.

3.4.4.1 Couplage par appariement

L'analyse du signal initial peut nous donner une idée sur le choix de la réduction selon la précision avec laquelle nous souhaitons représenter les ondes qui se propagent dans le modèle grossier. Nous réduisons l'espace médiateur à 15% de sa dimension, ce qui nous ramène à choisir un $\varepsilon = 0.003$. Nous représentons dans la figure (3.10a) le signal réfléchi dans Ω_2 après, dans la figure (3.10b) le signal transmis à Ω_1 et dans (3.10c) et (3.10d) leurs spectres d'amplitude respectivement.

La réduction de l'espace médiateur avec un $\varepsilon = 0.003$ donne 10 couple de modes qui génèrent l'espace de $(1 - \varepsilon)$ - *compatibilité*. La figure (3.10b) montre le signal transmis dans le modèle Ω_1 . Il ne contient pas des ondes très oscillantes comme dans le cas d'un couplage classique. Nous observons, aussi, dans les figures (3.10a) et (3.10b) que la bande de fréquence transmise s'est réduite à l'intervalle $[0, 2.5]$. La réduction du couplage a fait de du couplage sélectif et la troncature modale définit très clairement la bande de fréquence transmise.

3.4.4.2 Couplage par minimisation de l'écart cinétique

Nous représentons dans la figure (3.11) les signaux et leurs spectres d'amplitude du signal transmis et réfléchis à un instant t pour un $\varepsilon = 5.7257e - 08$. Nous représentons dans la figure (3.11a) le signal réfléchi dans Ω_2 après, dans la figure (3.11b) le signal transmis à Ω_1 et dans (3.11c) et (3.11d) leurs spectres d'amplitude respectivement.

La figure (3.11c) montre que les premières fréquences ne sont pas réfléchis et ils sont transmis de Ω_2 à Ω_1 comme le confirme la figure (3.11d). Nous observons, que la réduction de la base calculée par minimisation de l'écart ne définit pas d'une manière

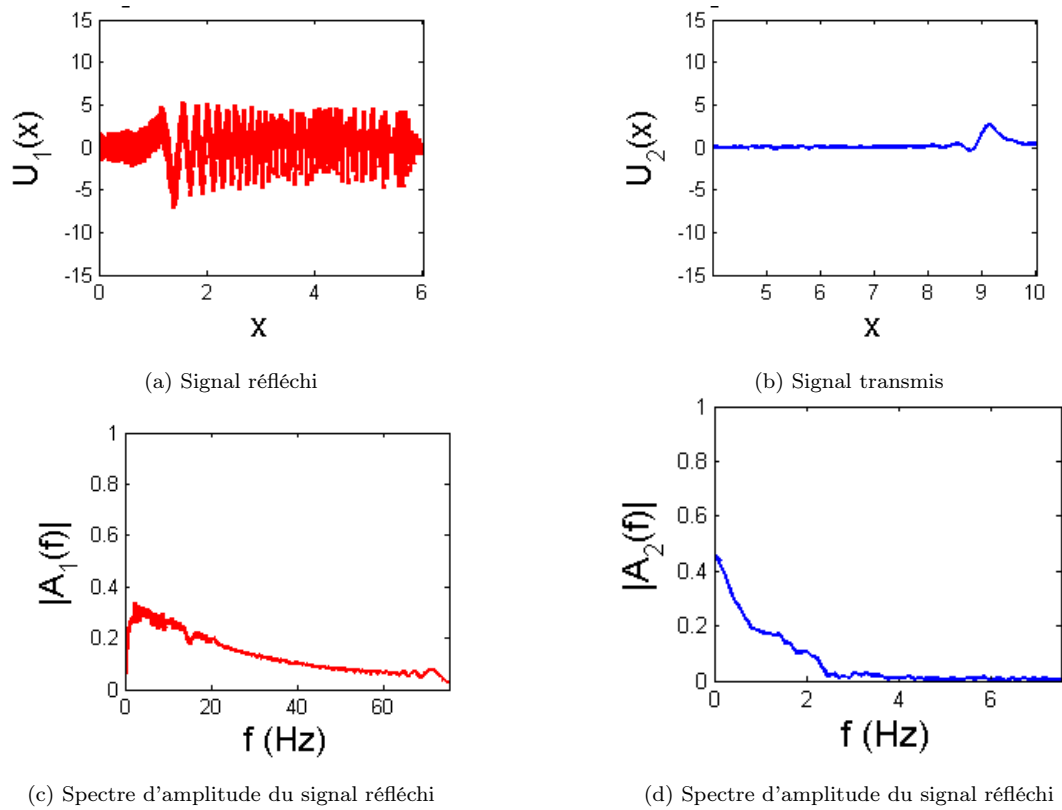


FIGURE 3.10 – Le signal après propagation pour un couplage réduit par appariement

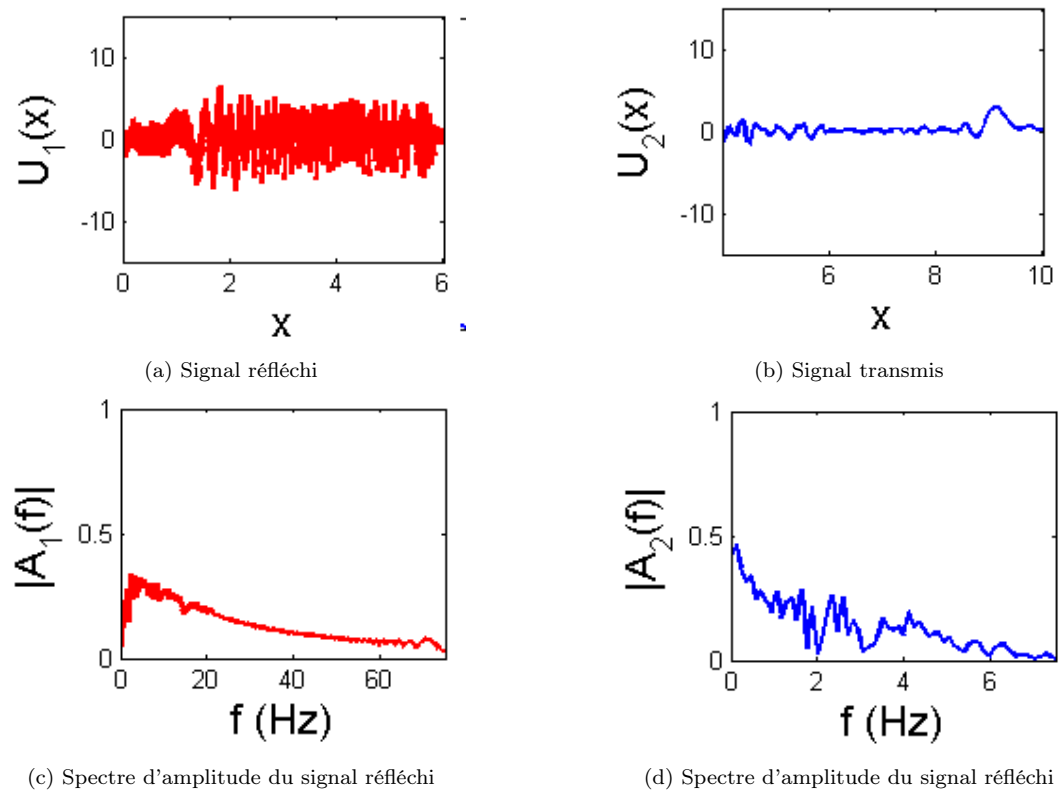


FIGURE 3.11 – Le signal après propagation pour un couplage réduit par minimisation de l'écart cinématique

très nette la bande de fréquence transmise, ce qui se manifeste par la transmission de quelques ondes, dans la figure (3.11b), dont la fréquence dépasse $2.5Hz$.

3.4.4.3 Couplage par accommodation

Nous représentons dans la figure (3.12) les signaux et leurs spectres d'amplitude du signal transmis et réfléchi à un instant t pour un $\varepsilon = 0.0003$. Nous représentons dans la figure (3.12a) le signal réfléchi dans Ω_2 après, dans la figure (3.12b) le signal transmis à Ω_1 et dans (3.12c) et (3.12d) leurs spectres d'amplitude respectivement.

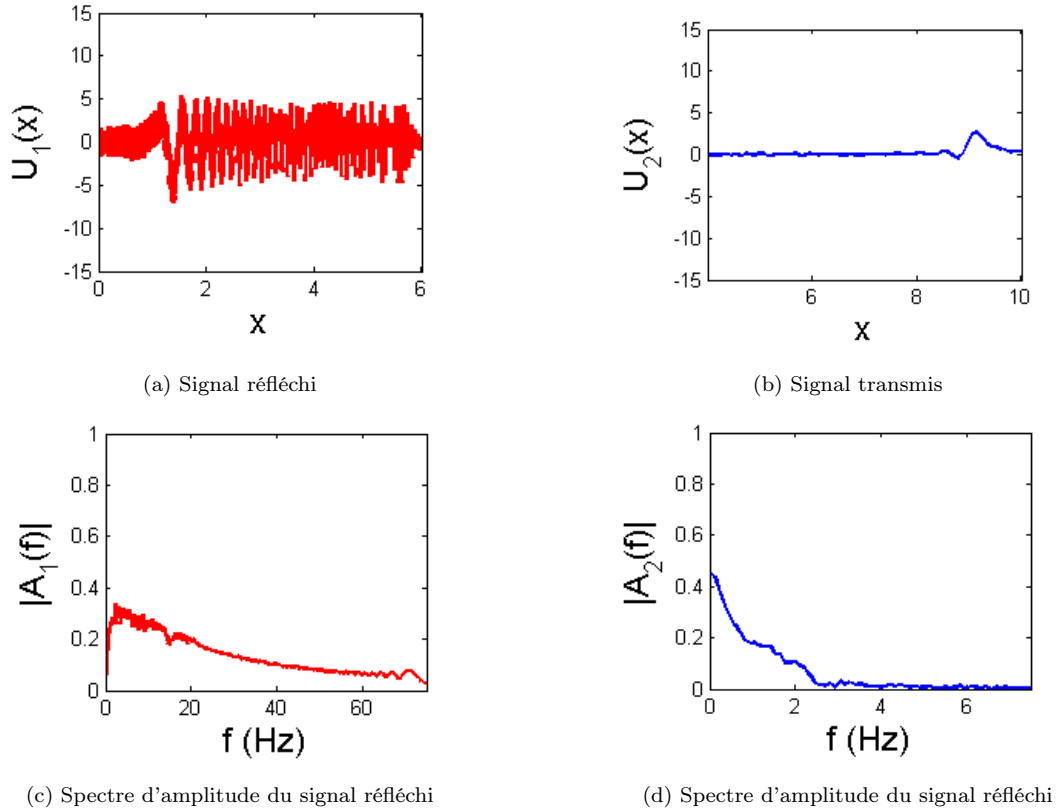


FIGURE 3.12 – Le signal après propagation pour un couplage réduit par accommodation

L'accommodation des modes propre de l'espace grossier restreint à Ω_c à l'espace fin montre des résultats nette similaires à celle obtenu pour l'appariement des modes propres. Cette similarité est lié au fait que nous considérons les mêmes modes dans les deux cas. De plus, pour la même valeur de ε nous avons eu la même dimension de l'espace réduit. Cependant, comme nous l'avons expliqué dans la section (3.3.3.4), la méthode de couplage par appariement est plus coûteuse que celle par accommodation.

3.4.4.4 Erreur de représentation modale

On propose de représenter quelques modes appariés calculés sur le patch et le substrat restreints à la zone de couplage. Dans la figure (3.13), on représente les 5 premiers modes propres appariés.

Sur les deux figures, les modes appariés sont représentés par la même couleur. On observe que l'association de deux couples de modes sur des maillages de finesses différentes engendre des écarts dans la représentation des fréquences lors de l'opération du couplage. Cet écart est faible pour des modes à faible variation (premiers modes) et augmente pour les modes propres associés au hautes fréquences propres, comme le montre un zoom sur la représentation du 3ème mode apparié sur le patch (en rouge) et le substrat (en bleu) dans la figure (3.14).

On observe que lorsqu'on procède par un couplage par appariement, les modes couplés ne collent pas parfaitement. Cette différence est liée à la différence de la discrétisation

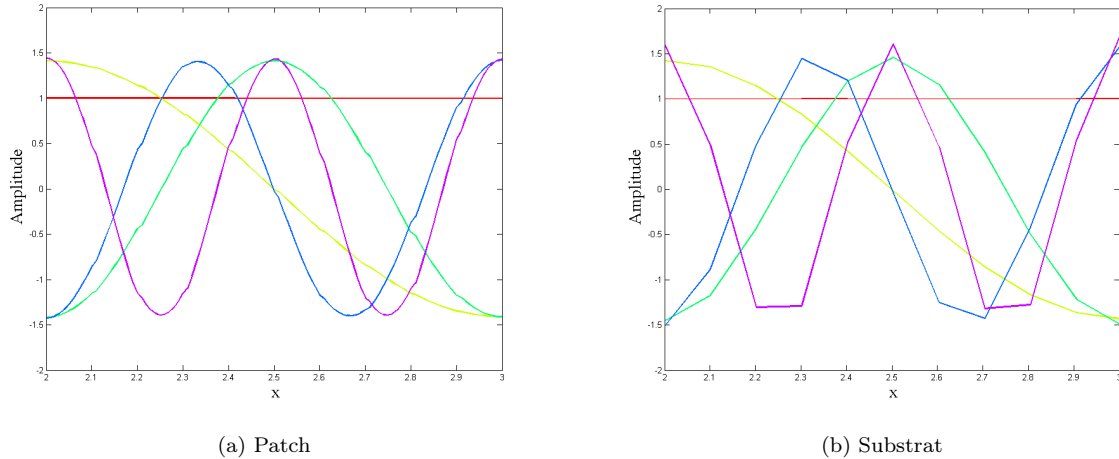


FIGURE 3.13 – Représentation des 5 premiers modes sur la zone de couplage

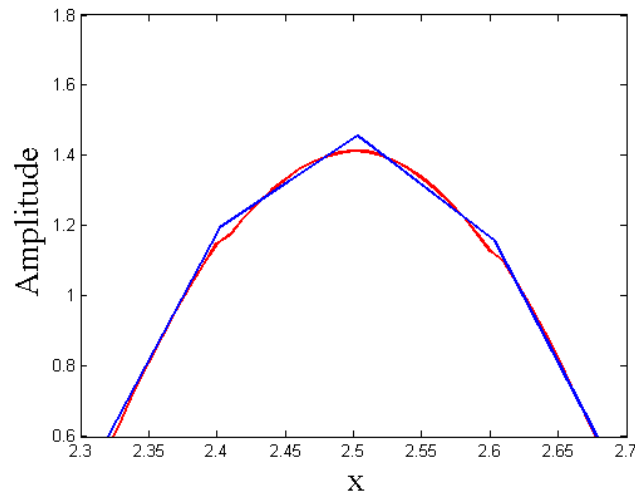


FIGURE 3.14 – Écart dans la représentation des modes sur le patch et le substrat

en espace des deux modèles. Cela explique que les modes qui varient faiblement sont ceux bien appariés alors que les modes très variables sont ceux qui sont filtrés selon le choix de l'espace de $1 - \varepsilon$ -compatibilité. Par conséquent, cela affecte la qualité de la transmission de l'information entre les modèles.

Reprenons le cas test de la section sec :choixparametres du avec des fonctions de partition de l'énergie linéaire sur Ω_c , et on réduit l'espace médiateur on choisissant une faible valeur de $\varepsilon = 10^{-5}$ pour le couplage par appariement et on choisit les trois premiers modes à projeter pour le couplage par accommodation. On trace les déformées de de la barre, dans les deux couplages, dans deux instants différents.

On observe dans les figures ci-dessus, que le couplage réduit permet de transmettre une partie du signal. La gaussienne contient une bande de fréquence autour de 0. Un couplage faisant intervenir que 3 paires de modes n'est pas suffisant pour transmettre proprement le signal BF et on remarque qu'une partie de la gaussienne n'a pas été réfléchi après propagation sur la restriction du modèle fin à la zone de couplage. La "sur-réduction" joue le rôle d'un filtre qui ne fait transférer que les ondes dont la fréquence est inférieure à celle du dernier mode de couplage. Alors, la réduction est conditionnée par la fréquence du signal qu'on souhaite transmettre du modèle fin au modèle grossier.

Un bon choix des paramètres de la réduction doit être fait pour pouvoir coupler correctement entre modèles tout en réduisant l'opération de couplage. Pour cela, une analyse

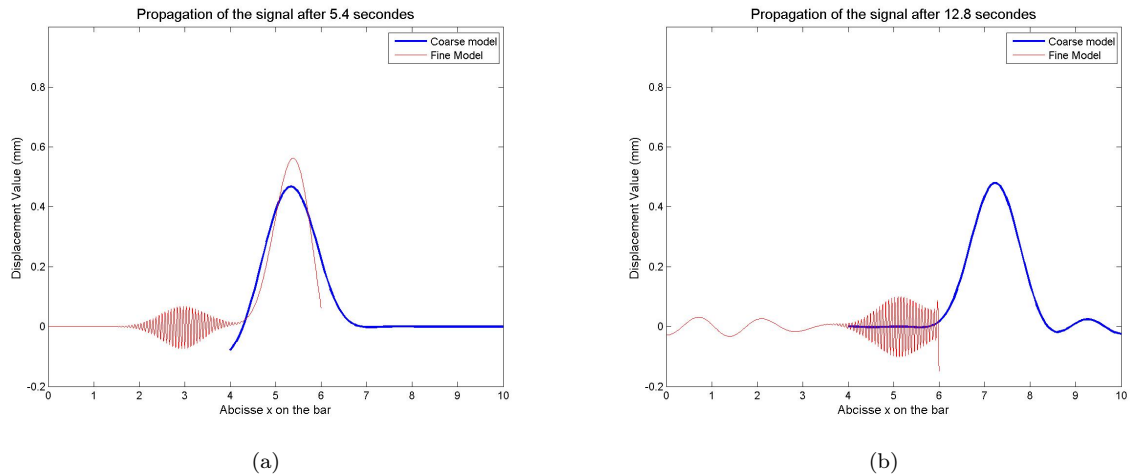
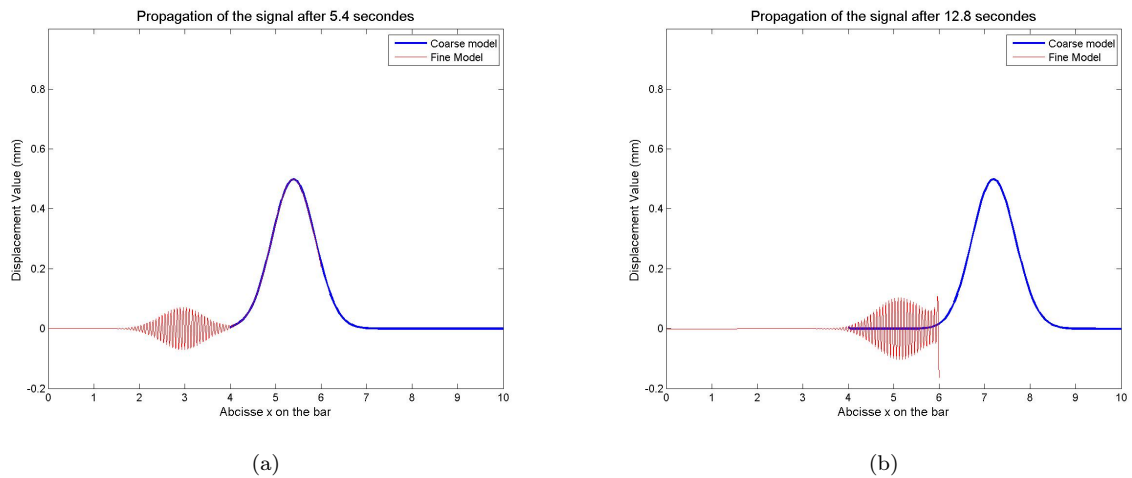


FIGURE 3.15 – Deux snapshots de la propagation du signal pour un couplage sur-réduit

spectrale du signal initial doit être faite avant toute réduction du couplage. Le choix optimal de ε pour un couplage par appariement ou le nombre de modes à projeter pour un couplage par appariement est celui qui permet de réduire l'espace médiateur et couple entre les modèles en assurant le transfert de la basse fréquence proprement. Dans notre cas, on choisit $\varepsilon = 0.001$ qui assure un couplage sur au minimum 5 paires de modes et on trace la propagation du signal bi-fréquence en deux instants différents dans la figure (3.16).


 FIGURE 3.16 – Deux snapshots de la propagation du signal pour un couplage réduit $\varepsilon = 0.001$

On constate que $\varepsilon = 0.001$ est un bon choix du paramètre de réduction. La BF est transmise du modèle fin au modèle grossier proprement est les ondes HF pénètrent la zone de couplage et restent piégé dans la zone critique. Pour amortir ses ondes, qui pollue la solution dans la zone d'intérêt, on applique l'amortissement "mis à jour" présenté dans la section (3.4.3). On peut calculer facilement les valeurs des coefficients d'amortissement vérifiant les inégalités (3.48) et (3.49). Finalement, on représente 2 snapshot de la propagation du signal initial avec un couplage réduit et l'amortissement adapté dans la figure (3.17).

3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons accordé une attention particulière à l'opérateur de couplage volumique Arlequin tout en considérant que le choix de l'espace médiateur

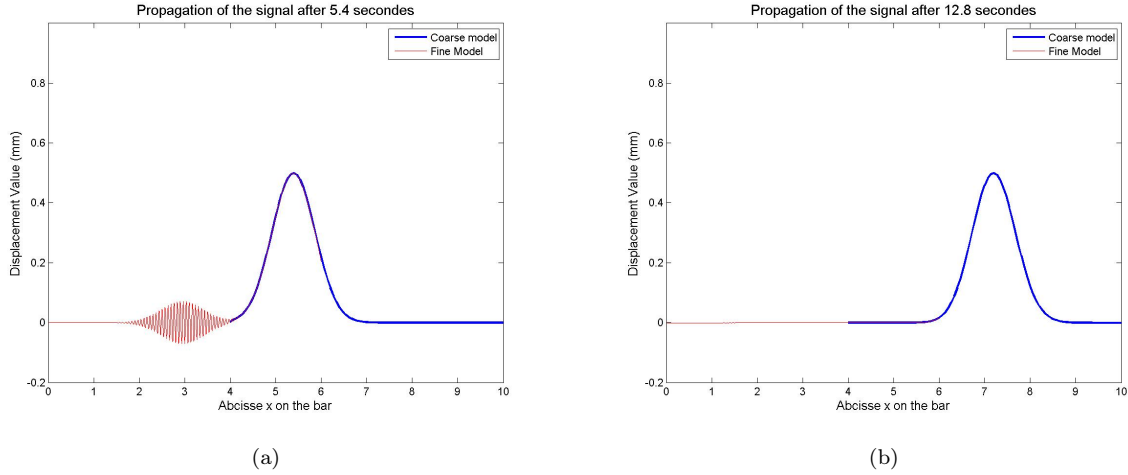


FIGURE 3.17 – Deux snapshots de la propagation du signal pour un couplage réduit $\varepsilon = 0.001$ avec amortissement sélectif

$\underline{M}_{h_\lambda} \subseteq \underline{W}_{h_1}^c$ est le plus adéquat au régime dynamique, dans la continuité des développements étayés dans le chapitre 2. Cette importance découle de son rôle pour assurer la transmission des ondes BF d'un modèle fin à un modèle grossier, pour des problèmes de la dynamique multi-échelle où les ondes HF sont localisées. Dans cette optique, nous avons développé une nouvelle forme de couplage réduit moyennant une notion de $(1 - \varepsilon)$ -compatibilité développée dans [Dhi01] et une analyse modale [Bal96a]. De cette étude, nous avons proposé 3 approches de couplage par appariements différents, soit un appariement modal, un appariement par minimisation de l'écart cinématique entre deux modèles et enfin un appariement par projection des modes propres du modèles grossier sur l'espace fin. Nous avons analysé et développé la démarche à suivre pour construire un espace réduit $(1 - \varepsilon)$ -compatible auquel un indice qui sert à quantifier la compatibilité entre les espaces couplés a été associé, appelé indice de compatibilité. Ces trois approches ont été testées, en statique puis en dynamique multi-échelles, sur un bi-modèle Arlequin d'une barre 1D, où, un modèle fin et un modèle grossier sont couplés. En statique, l'analyse de l'influence de l'incompatibilité de frontière I_f sur la qualité des résultats calculés a montré que, globalement, une bonne précision est assurée par les différentes approches proposées et que particulièrement pour certaines valeurs de ε , la solution théorique est mieux approchée. Deux notions importantes peuvent être dégagées quel que soit l'appariement utilisé. La première est que l'appariement devient discriminant dans le cas de maillages incompatibles. Le deuxième et probablement le plus important est que la réduction est très fortement liée au rapport de finesse entre le maillage fin et le maillage grossier, le tout en lien avec la richesse fréquentielle de la sollicitation subie par le modèle fin.

En régime dynamique, nous avons ajusté les forces d'amortissement, pour éliminer toute autre réflexion d'ondes résultant de la réduction de l'opérateur de couplage. Les 3 différentes approches ont montré leur efficacité sur un problème 1D d'une barre élastique multi-échelle sollicitée par un signal riche en fréquences, présentant des maillages incompatibles sur la zone de couplage. La réduction de modèle de couplage sera mise en œuvre pour l'étude du comportement dynamique d'un solide fissuré 2D, dans le cas où la fissure est fixe et dans celui où elle peut se propager. Ces applications sont abordées dans le chapitre qui suit.

Chapitre 4

Rupture fragile en dynamique : une approche multi-échelle réduite

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.2	Les méthodes multi-échelles classiques	6
1.3	Le cadre Arlequin	12
1.4	Formulations continues et discrètes du problème d'élasto-dynamique linéaire	17
1.5	Méthodes numérique pour la mécanique de la rupture	24
1.6	Objectifs et positionnement de notre étude, apports et concepts fondamentaux	28

Figures

4.1	Domaine fissuré Ω_0 (à gauche) et domaine fissuré Ω_t après propagation (à droite)	101
4.2	Repère local à la fissure en 2D	103
4.3	Champ d'extension virtuel \underline{q}	109
4.4	Critère de propagation d'une fissure pour une charge et une décharge	110
4.5	Modèles Arlequin de solide fissuré	111
4.6	Modèle Arlequin fissuré	113
4.7	Les différentes étape de calcul d'un modèle Ω_i à discrétisation évolutive	116
4.8	Test de la poutre en flexion 3 points	119
4.9	Maillages (à gauche) et champs de la norme des déplacements (à droite) à l'instant $t = 75\mu s$ pour les 3 trois cas	120
4.10	Maillage (à gauche) et Champs de contraintes de Von-Mises (à droite) à l'instant $t = 75\mu s$ pour les 3 trois cas	121
4.11	Facteur d'intensité de contrainte K_I pour les différents modèles numériques	121
4.12	Trois différentes dimensions du rayon du patch Arlequin	122
4.13	Facteur d'intensité de contrainte pour différents choix des rayons du patch Arlequin	122
4.14	Un couple de modes appariés du substrat (à gauche) et du patch (à droite) - représentation normale (en haut) et représentation vectorielle(en bas)	123

4.15	Un couple de modes calculés par minimisation de l'écart cinématique du substrat (à gauche) et du patch (à droite) - représentation normale (en haut) et représentation vectorielle(en bas)	124
4.16	Un couple de modes calculés par appariement du substrat (à gauche) et du patch (à droite) - représentation normale (en haut) et représentation vectorielle(en bas)	125
4.17	Variation des facteurs d'intensité de contrainte pour les 3 approches différentes de réduction	125
4.18	Schéma de principe de l'expérience de Kalthoff et Winkler - Schéma tiré de [Kal00]	127
4.19	modèle de plaque fissurée sollicitée en mode mixte	127
4.20	Variation de la vitesse du projectile	128
4.21	modèle géométrique de demi-plaque fissurée impactée	128
4.22	bi-modèle Arlequin d'une demi-plaque fissurée	129
4.23	Évolution du trajet de la fissure simulation de l'expérience de Kalthoff et Winkler ($V_0 = 16ms^{-1}$) pour $t = 20\mu s$, $t = 34\mu s$, $t = 48\mu s$, $t = 62\mu s$, $t = 72\mu s$, et $t = 90\mu s$	130
4.24	Trajet de la fissure pour une vitesse d'impact $V_0 = 16.5ms^{-1}$	130
4.25	Comparaison de plusieurs méthodes numériques sur le cas de Kalthoff : (a) Résultat expérimental, (b ₁) et (b ₂) Méthode d'élimination d'éléments avec un maillage structuré et non structuré, (c ₁) et (c ₂) Méthode des zone cohésives avec des maillages structurés 50×50 et 100×100 , (d) Méthode X-FEM avec un maillage structuré 100×100	131
4.26	Variation de la vitesse de propagation de la fissure au cours du temps	131
4.27	Évolution de la vitesse sur la simulation de l'expérience de Kalthoff et Winkler pour $t = 20\mu s$, $t = 34\mu s$, $t = 48\mu s$, $t = 62\mu s$, $t = 72\mu s$, et $t = 90\mu s$	132
4.28	Champs de contraintes de Von-Mises pour la simulation de l'expérience de Kalthoff et Winkler pour $t = 20\mu s$, $t = 34\mu s$, $t = 48\mu s$, $t = 62\mu s$, $t = 72\mu s$, et $t = 90\mu s$	133
4.29	Variation des facteurs d'intensité des contraintes au cours du temps	133
4.30	Variation de l'indice de compatibilité I_c en fonction du temps	134
4.31	Comparaison des trajectoires de la propagation d'une fissure entre un couplage classique et un couplage réduit par accommodation pour $\varepsilon = 1^{-4}$	134

Tableaux

4.1	Les données matériau	120
4.2	Évaluation du temps de calcul pour 3 différents approches de couplage réduit	126
4.3	Paramètres matériau de l'acier Maraging 18Ni1900	128

4.1 Introduction

La mécanique de la rupture est l'un des domaines de la mécanique de grand intérêt pour les chercheurs et les ingénieurs intéressés par la tenue des structures sous différentes contraintes mécaniques dans le cas général, et en dynamique, plus particulièrement. La modélisation et la simulation de la propagation des fissures dans un milieu solide accompagnée par des phénomènes dynamiques de propagation d'ondes, est un thème de recherche très actif depuis plusieurs décennies. Plusieurs travaux théoriques et expérimentaux ont contribué au développement de modèles permettant de prévoir le comportement des structures jusqu'à leur ruine en régime dynamique [Bui78, Fre98, KP85, RGC04, PCGM07], inspirés des théories développées en statique et des essais empiriques. Dans la littérature, on trouve des travaux qui portent sur la rupture fragile de matériaux, tels que les céramiques. La rupture dynamique fragile est caractérisée par la propagation rapide de fissures, avec une faible consommation d'énergie. On trouve aussi des travaux qui traitent de la rupture ductile ou de l'endommagement, se transformant en fissures propagatives. D'un autre côté, différentes méthodes numériques, mono et multi-échelles, ont été développées pour approcher la propagation fragile d'une fissure. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, les méthodes à *la PUM* telle que la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) ou de la Méthode des Éléments Finis Généralisés [BB99, MDB99, PCGM07, MRCB06, DHLT01] a prouvé une bonne flexibilité et efficacité pour le traitement de ces problèmes de ruptures fragiles. Cependant, la méthode X-FEM, par exemple, n'échappe pas à des limitations de modélisations numériques qui sont en lien avec, soit la discrétisation spatiale, soit la stabilité des schémas de discrétisation en temps. La problématique de la propagation des fissures a été traitée aussi par des méthodes multi-échelles, surtout en quasi-statique. Cependant, en régime dynamique, la transformation brutale et localisée de l'énergie interne en énergie cinétique suite à la propagation d'une fissure donne naissance à des ondes très riches en fréquences. La détection de celle HF, au niveau du fond/front de la fissure, nécessite des discrétisations spatiales et temporelles fines. Dans le chapitre 2, nous avons souligné la difficulté que rencontrent les méthodes multi-échelles classiques en régime dynamique et, pour ce thème, nous avons retenu le cadre de Modélisation multi-modèle et multi-échelle Arlequin pour son potentiel à surmonter ces difficultés et pour sa grande flexibilité à coupler des modèles très différents et des échelles de représentations très différentes (ainsi que pour le potentiel qu'il possède à aller au-delà du cadre continuum pour la simulation multi-échelle des problèmes de mécanique de rupture fragile, comme nombre de travaux, en statique, extensibles à la dynamique, peuvent en témoigner, telles ceux où sont réalisées des couplages de modèles atomistiques locaux à des modèles du continuum globaux (cf e.g. [DCOP11]). Rappelons ici qu'en dynamique, ce cadre permet, non seulement de laisser les ondes HF dans la zone de couplage Arlequin volumique, mais aussi, moyennant les consolidations réalisées dans le cadre de ces travaux de thèse, de filtrer les ondes HF, admissibles pour le modèle fin, dans cette zone, mais non transmissibles pour le modèle global grossier.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'extension de l'application des travaux développés dans les deux chapitres précédents au cas important de modélisation et simulation multi-échelle du comportement elasto-dynamique d'une structure fissurée, soumise à un chargement dynamique dans le cadre Arlequin, en restant avec l'hypothèse de hautes fréquences localisées. Pour cela, on procède en deux étapes. Dans la première étape, on considère le cas où la fissure est donnée et fixe dans le domaine occupé par la structure. Dans la seconde étape, on aborde le cas d'une structure comportant une

fissure pouvant se propager. Pour ces applications, nous détaillons et expliquons l'ensemble des points techniques que nous avons dû développer, en sus de ceux développés aux 2 chapitres précédents, pour atteindre nos objectifs.

Dans la deuxième section, on pose le problème de référence, à un instant t , d'un solide élastique fissuré en régime dynamique et on rappelle la forme des solutions théoriques autour de la pointe de la fissure, moyennant l'introduction des facteurs d'intensité des contraintes pour une fissure supposée être fixe (vitesse de propagation nulle) et pour une fissure pouvant se propager à une vitesse variable. Dans la section (4.3), nous développons la formulation élasto-dynamique continue multi-échelle Arlequin du problème d'un solide fissuré. Une partition de domaines évolutive est considérée. Nous optons, dans la discrétisation temporelle et spatiale, pour un bi-modèle. Un modèle de patch fin évolutif, discrétisé par la méthode des EF, représente la zone locale attachée à la pointe de la fissure (dans sa possible évolution) et un modèle global EF grossier représente la zone loin de la pointe de la fissure, tout en intégrant une partie de la discontinuité matière par un enrichissement à la *PUM/XFEM*, utilisant une fonction Level-Set (pouvant évoluer). Différentes considérations numériques de modélisation du patch dans le cas de fissure fixe et de mise à jour des champs à chaque étape de l'évolution du patch assistent ces développements et nous amène à l'élaboration de l'algorithme global de résolution implémenté dans le prototype Code-Arlequin (développé dans Matlab, au sein de MSSMat, dans le Groupe de Travail "Interactions Structure-Structure, animé par H. Ben Dhia). Dans la section (4.4), des applications de ces développements et ceux présentés dans le chapitre 3 pour la réduction de couplage sont mises en œuvre et analysées pour deux cas tests de référence. Le premier est une poutre (2D) en flexion 3 points, avec une fissure fixe, sollicitée en mode I pur. Le second traite la propagation d'une fissure en mode mixte dans une plaque 2D. Nous terminons ce chapitre par quelques conclusions.

4.2 Problème de référence d'un solide fissuré

Dans cette section, on présente, dans un premier temps, le problème de référence d'un solide fissuré en régime dynamique et on formule le système des équations locales qui régissent ce problème. Dans un deuxième temps, on rappelle sa solution théorique autour de la pointe de la fissure, avant et après amorçage, sous la forme d'un développement asymptotique des champs des déplacements et des contraintes. Ces développements sont importants pour compléter la formulation du problème par un critère global qui régit les conditions de l'initiation de la propagation, de la propagation (après initiation) et de l'arrêt de la fissure en dynamique.

4.2.1 Formulation continue du problème monomodèle

On considère un solide fissuré, supposé élastique, homogène et isotrope et on se place dans le cadre des hypothèses de petites perturbations. Le solide occupe initialement, à $t_0 = 0$, l'adhérence du domaine Ω_0 , délimitée par la frontière S_0 . Soit $\Omega(t)$ le domaine dont l'adhérence occupée par le solide à l'instant $t > 0$. La dépendance par rapport au temps du domaine occupé par le solide est liée à la présence de la fissure et sa propagation au cours du temps. Nous pouvons, ainsi, représenter le domaine $\Omega(t)$ comme étant un domaine sain Ω , privé de la fissure à l'instant t qu'on note $\Gamma(t)$, i.e.,

$$\Omega(t) = \Omega_t = \Omega \setminus \Gamma(t) \quad (4.1)$$

On suppose, par ailleurs, que Ω est un domaine borné, contenu dans l'espace \mathbb{R}^d , ($d = 1, 2, 3$), en pratique, muni d'un repère orthonormé $(O, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d)$. On suppose, enfin, que Ω est de frontière suffisamment régulière.

La figure 4.1 montre le domaine fissuré, à l'instant t .

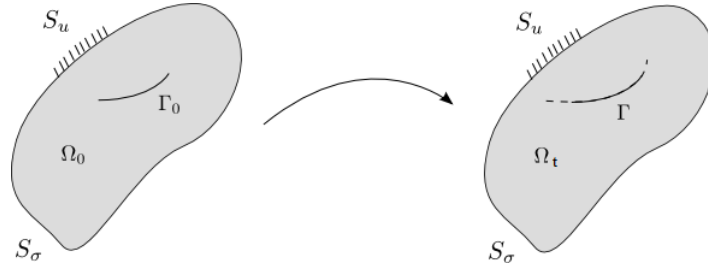


FIGURE 4.1 – Domaine fissuré Ω_0 (à gauche) et domaine fissuré Ω_t après propagation (à droite)

À l'instant t , le solide $B(t)$ est représenté par le domaine $\Omega(t)$ et son adhérence $S(t)$. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, la fissure $\Gamma(0)$ est connue. Ainsi, le domaine initial $\Omega(0)$ est supposé être connu. De plus, on suppose que $\Gamma(t_1) \subseteq \Gamma(t_2), \forall t_2 > t_1$. Cette hypothèse traduit le fait qu'il ne peut y avoir de cicatrisation même partielle de la fissure $\Gamma(t)$. Le domaine $\Omega(t)$ est délimité par la frontière $S(t)$, divisée en 3 parties complémentaires : une partie S_u supposée encastree, une partie S_σ soumise à des efforts imposés $\underline{F}_d(t)$ et la fissure $\Gamma(t)$ dont les lèvres sont considérées, dans ce document, être des surfaces libres pour simplifier le problème. On note par $C(t)$ le fond de la fissure à l'instant t . La frontière s'exprime alors par l'équation 4.2 :

$$S(t) = S_u \cup S_\sigma \cup \Gamma(t) \quad (4.2)$$

On note par $\underline{f}_v(t)$ les forces volumiques appliquées sur $\Omega(t)$.

Pour chaque instant t de l'intervalle d'étude $]0, T]$, nous cherchons à déterminer les champs des déplacements $\underline{u}(t)$ en tout point du domaine $\Omega(t)$ et l'avance $\underline{a}(t)$ en tout point du fond de la fissure $C(t)$. Afin de faire cela, on doit résoudre le système d'équations locales suivant :

$$\left. \begin{array}{l}
\text{Connaissant l'état initial} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(0) \\ \underline{u}(0) = \underline{u}_0^d \text{ dans } \Omega(0) \\ \underline{\dot{u}}(0) = \underline{v}_0^d \text{ dans } \Omega(0) \\ \underline{\dot{a}}(0) = \underline{0} \text{ dans } \Gamma(0) \end{array} \right. \\
\forall t \in]0, T], \text{ en supposant connues } \Gamma(t') \text{ et } \underline{a}(t'), \forall t' \in]0, T], t' < t \\
\text{Trouver } \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(t) \\ \underline{u}(t) \text{ dans } \Omega(t) \end{array} \right. \text{ tels que :} \\
\text{Problème de la dynamique linéaire} \\
\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}(t)) + \underline{f}_v(t) = \rho \underline{\underline{\ddot{u}}}(t) \quad (4.3) \\
\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \quad (4.4) \\
\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla}(\underline{u}(t)) + \underline{\nabla}(\underline{u}(t))^t) \quad (4.5) \\
\text{Conditions aux limites} \\
\underline{u}(t) = \underline{u}_d(t) \text{ sur } S_u \quad (4.6) \\
\underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot \underline{n} = \underline{F}_d(t) \text{ sur } S_f \quad (4.7) \\
\underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \Gamma(t) \quad (4.8) \\
\text{Propagation de la fissure} \\
\underline{\dot{a}}(t) = \underline{\dot{a}}(\Gamma(t), \underline{u}(t), K) \quad (4.9)
\end{array} \right\} \quad (\varphi_{dyn}^{cra})$$

Le matériau est défini par la donnée de la masse volumique ρ , le tenseur de rigidité $\underline{\underline{R}}$ et la ténacité K . L'équation 4.9 traduit la dépendance de la vitesse de propagation de la fissure de la géométrie et de la distribution du champ des déplacements du solide à un instant t . Il reste à préciser les conditions sous lesquelles la fissure va se propager et la manière avec laquelle elle se propage pour compléter le problème ci-dessus. Ces points ont occasionné beaucoup de travaux dont l'origine remonte à ceux de Griffith [Gri21] et Irwin [Irw57], dans le cadre de la statique, ainsi qu'à H.D. Bui [Bui78], en statique et en dynamique et à Freund [Fre98] en dynamique. Remarquons, enfin, que par la conditions aux limites (4.8), nous ne considérons pas ici les possibles interactions de contacts/impacts entre les lèvres de la fissure.

4.2.2 Fissure fixe ($\dot{a} = 0$)

Dans la résolution du problème, la fissure ne peut se propager que lorsque l'énergie cumulée au voisinage proche de sa pointe atteint un certain seuil pour rompre les liaisons interatomiques et faire propager la discontinuité. On parle alors de condition d'amorçage. Pendant la phase de non propagation, la fissure est stationnaire et sa vitesse de propagation $\underline{\dot{a}}$ est nulle.

Dans la littérature classique consacrée à ce sujet, les solutions du problème autour du front de la fissure obtenues en régime dynamique ont été dérivées par extension de méthodes développée en régime statique. Les plus utilisées, en mécanique de la rupture fragile, se fondent sur l'évaluation des facteurs d'intensité des contraintes. Ces derniers ont été mis en évidence grâce aux travaux d'Irwin [Irw57], appuyés sur les développements analytique réalisés par Inglis [Ing13], pour le problème d'un défaut elliptique dans un milieu infini dans le cadre statique. Irwin a montré que pour une

fissure dans un milieu semi-infini, le développement asymptotique des contraintes, dans un voisinage du fond de la fissure s'écrit en coordonnées polaires, sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode I} \\ \text{Mode II} \\ \text{Mode III} \end{array} \right. \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \\ \cos\frac{\theta}{2}(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode II} \\ \text{Mode III} \end{array} \right. \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}) \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode III} \end{array} \right. \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Et les développements asymptotiques des champs des déplacements sont donnés, dans le même système de coordonnées, comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode I} \\ \text{Mode II} \\ \text{Mode III} \end{array} \right. \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) \\ \sin\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode II} \\ \text{Mode III} \end{array} \right. \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}(\kappa + \cos\theta + 2) \\ -\cos\frac{\theta}{2}(\kappa + \cos\theta - 2) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode III} \end{array} \right. u_3 = \frac{K_{III}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \quad (4.15)$$

où les K_I , K_{II} et K_{III} ont été appelés les facteurs d'intensité des contraintes et (r, θ) sont les coordonnées polaires dans un repère local lié à la fissure en régime statique.

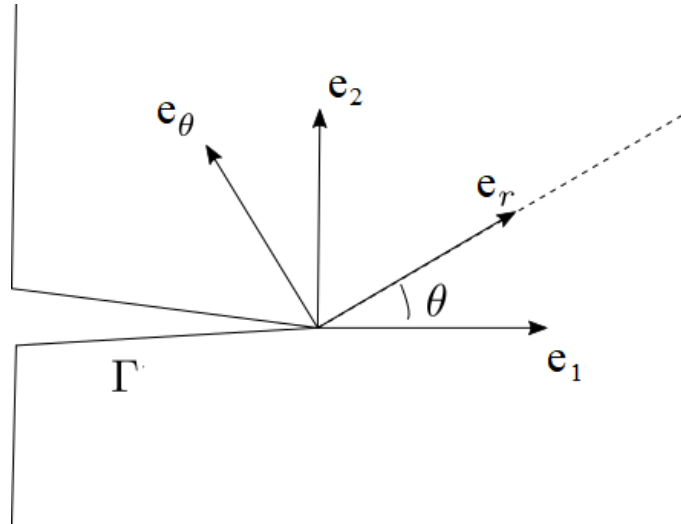


FIGURE 4.2 – Repère local à la fissure en 2D

Dans le cas d'une fissure en dynamique, ces développements restent valables lorsque la fissure est fixe (vitesse de propagation nulle). Alors, dans cette phase de la description de la fissure en dynamique, les développements ci-dessus sont adoptés pour approcher les champs de contraintes et de déplacements au voisinage du front de fissure. Ces développements sont très importants dans l'établissement d'un critère global d'amorçage moyennant les facteurs d'intensité des contraintes. Dans la pratique, le calcul de ces facteurs revient à évaluer une intégrale J (en dynamique) équivalente à l'intégrale de Rice [Ric68] en statique.

4.2.3 Fissure en propagation ($\dot{a} \neq 0$)

La fissure, une fois amorcée, se propage dans le solide selon une trajectoire définie par un critère. Dans la littérature, on trouve des critères locaux basés sur l'évaluation des états de contraintes proche de la pointe de la fissure, tout en tenant compte des différents phénomènes locaux tels que la plasticité ou l'endommagement. On trouve aussi des critères globaux s'appuyant sur la minimisation de la somme de l'énergie de surfaces potentielles de rupture et des autres énergies classiques du solide considéré [FM98]. Dans la suite de cette section, nous présentons succinctement des éléments de la littérature portant sur la thématique de la rupture fragile. Ces éléments permettront de compléter le problème du solide fissuré. Plus précisément, nous donnons des critères d'initiation de la propagation, un critère de propagation, après initiation ainsi qu'une orientation de la propagation et enfin un critère d'arrêt de la propagation.

4.2.3.1 Critère énergétique : taux de restitution d'énergie G

Dans cette section, on cherche à compléter le problème de référence présenté dans la section 4.2.1 par un critère énergétique global. Pour cela, on recourt aux théories énergétiques classiques de la mécanique de la rupture qu'on peut trouver dans la littérature (cf. [Gri21, Ric68, Irw57, Fre98, Bui78]). Griffith [Gri21] fut l'un des premiers qui ont compris l'importance de l'évaluation de la variation de l'énergie lors de l'avancement de la fissure. Il a défini une quantité qui représente l'énergie de création de nouvelles surfaces de fissure, noté G , qui s'appelle taux de restitution de l'énergie. Cette quantité est une intégrale, appelée l'intégrale de Rice. Cette notion a été définie par Cherepanov [Che67] qui a donné la première forme intégrale pour une fissuration en mode d'ouverture dans la direction \underline{e}_1 qui s'écrit :

$$G = \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \left(\left(\underline{\sigma} : \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2} \rho \dot{\underline{u}}^2 \right) n_1 - \underline{u}_{,1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \right) d\Gamma_\epsilon \quad (4.16)$$

où Γ_ϵ est un contour entourant la pointe de la fissure et suivant sont mouvement. Une approximation de cette intégrale près de la pointe de la fissure présente des limites, vu sa dépendance du choix du contour. En conséquence, d'autres expressions équivalentes de G ont été développées afin d'assurer son indépendance du contour choisi. Ces développements constituent le point de départ pour déterminer l'intégrale J qu'on détaillera dans la sous-section (4.2.3.4).

Le phénomène de propagation de fissure est un processus dissipatif de l'énergie. Cette dissipation est, généralement, accompagnée d'une augmentation de la température en amont de la pointe de fissure [BEN81, Rit98]. Cependant, l'étude du couplage thermomécanique de la propagation de la fissure en dynamique est assez complexe. Pour simplifier, on considère que l'évolution de la fissure est isotherme. Alors, seule la contribution d'une énergie de fissuration est rajoutée au bilan énergétique. Cette énergie est proportionnelle à l'accroissement d'aire de la fissure [Gri21]. En introduisant cette énergie de surface dans le bilan énergétique et en négligeant les aspects thermiques, le premier principe de la thermodynamique s'écrit comme suit.

$$\frac{\partial W_{elas}(t)}{\partial t} + \frac{\partial W_{cin}(t)}{\partial t} = \frac{\partial W_{ext}(t)}{\partial t} + 2\gamma \frac{\partial A(t)}{\partial t} \quad (4.17)$$

où, à l'instant t , $W_{elas}(t)$ est l'énergie élastique, $W_{cin}(t)$ est l'énergie cinétique, W_{ext} est le travail des efforts extérieurs, γ est un paramètre du matériau qui représente l'énergie nécessaire par unité de surface pour propager une fissure et $A(t)$ est la surface d'une lèvres de la fissure.

En factorisant par le terme d'accroissement de la surface de fissuration par rapport au temps, on exprime la variation de l'énergie cinétique par rapport au temps par l'équation 4.18.

$$\left(\frac{\partial W_{ext}(t)}{\partial A(t)} - \frac{\partial W_{elas}(t)}{\partial A(t)} - \frac{\partial W_{cin}(t)}{\partial A(t)} \right) \frac{\partial A(t)}{\partial t} = (G - 2\gamma) \frac{\partial A(t)}{\partial t} \quad (4.18)$$

Puisque le processus de rupture est irréversible, on a $\frac{\partial A(t)}{\partial t} \geq 0$ et on pose le critère énergétique suivant :

$$\begin{cases} G < 2\gamma & \text{Pas de propagation} & (4.19) \\ G = 2\gamma & \text{Propagation stable} & (4.20) \\ G > 2\gamma & \text{Propagation instable} & (4.21) \end{cases}$$

Le taux de restitution de l'énergie constitue un critère global de propagation de fissure. En revanche, cette valeur scalaire ne permet pas de prévoir la direction de propagation. Pour déterminer cette dernière, des informations supplémentaires sont nécessaires. Bui établi une relation liant le taux de restitution d'énergie dynamique [Bui78] et des facteurs d'intensité des contraintes dynamiques et cinématiques. Cette relation est donnée par :

$$G_{dyn} = \frac{2}{E^*} \left(K_I^{cin} K_I^{dyn} + K_{II}^{cin} K_{II}^{dyn} \right) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^{cin} K_{III}^{dyn} \quad (4.22)$$

$$\text{où } E^* = \begin{cases} E & \text{en contraintes planes} \\ \frac{E}{(1 - \nu^2)} & \text{en déformations planes} \end{cases}$$

Cette relation nous ramène à la nécessité du calcul des facteurs d'intensité des contraintes K_i^{dyn} et K_i^{cin} pour définir un critère qui sert à déterminer la vitesse de l'avancée de la fissure.

4.2.3.2 Calcul de la vitesse de propagation

Disposant du critère dans (4.19)-(4.21), en dynamique, il reste, pour être opérationnel, à évaluer les facteurs d'intensité des contraintes du problème. Là-encore, il existe plusieurs manières de le faire. La plus simple consiste à utiliser la discontinuité du déplacement d'ouverture de la fissure. Cette quantité n'est pas accessible, en général. Elle peut être approchée numériquement, suite à un calcul EF préalable, par exemple. Mais cette approche est très sensible à l'endroit de l'évaluation du saut. Une autre manière de procéder consiste à utiliser l'intégrale J équivalente à celle de Rice [Ric68] pouvant donner les FIC, en dynamique, tout en étant plus stable. Ces travaux de calcul de l'intégrale J ont été étendus au cadre dynamique, en premier, par Bui [Bui78] qui a établi un critère de propagation en mode mixte en fatigue reposant sur l'évaluation de la contrainte circonférentielle maximale et Freund [LF90] qui a développé des nouvelles approximations des champs de déplacements et contraintes autour de la pointe de la fissure dépendant de sa vitesse d'avancée de la fissure. Ces développements que nous considérons pour une fissure qui se propage à vitesse variable.

Posons, alors la vitesse de la pointe de la fissure sous la forme suivante :

$$\underline{\dot{a}}_t = \dot{a}(t) \underline{d}_{\theta_c}(t) \quad (4.23)$$

où $\dot{a}(t)$ est la norme de la vitesse et $\underline{d}_\theta(t)$ est le vecteur normalisé indiquant la direction de propagation de la fissure définie par l'angle θ_c . Il est pris dans les directions admissibles d'avancement de la fissure, i.e., celles qui permettent l'avancement dans la matière, en évitant la fermeture.

4.2.3.3 Les FICs en dynamique

L'évaluation de la norme et de la direction de la vitesse, pour un critère global, nécessite l'évaluation des FIC en régime dynamique. On distingue deux FIC en dynamique : des FIC dits cinématiques pour les déplacements et des FIC dits dynamique pour les contraintes. Les déplacements au voisinage du fond de fissure s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode I} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_I^{cin}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} (\alpha_2^2 + 1) \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} - 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \\ -2\alpha_1 (\alpha_2^2 + 1) \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} + 2\alpha_1 \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \end{pmatrix} \\ \text{Mode II} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_{II}^{cin}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} - \alpha_2 (\alpha_2^2 + 1) \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \\ 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} - (\alpha_2^2 + 1) \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \end{pmatrix} \\ \text{Mode III} \quad u_3 = \frac{K_{III}^{cin}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \end{array} \right. \quad (4.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode I} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_I^{cin}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} (\alpha_2^2 + 1) \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} - 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \\ -2\alpha_1 (\alpha_2^2 + 1) \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} + 2\alpha_1 \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \end{pmatrix} \\ \text{Mode II} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_{II}^{cin}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} - \alpha_2 (\alpha_2^2 + 1) \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \\ 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} - (\alpha_2^2 + 1) \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \end{pmatrix} \\ \text{Mode III} \quad u_3 = \frac{K_{III}^{cin}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \end{array} \right. \quad (4.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode I} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_I^{cin}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} (\alpha_2^2 + 1) \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} - 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \\ -2\alpha_1 (\alpha_2^2 + 1) \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} + 2\alpha_1 \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \end{pmatrix} \\ \text{Mode II} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_{II}^{cin}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} - \alpha_2 (\alpha_2^2 + 1) \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \\ 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{r_1} - (\alpha_2^2 + 1) \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \end{pmatrix} \\ \text{Mode III} \quad u_3 = \frac{K_{III}^{cin}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{r_2} \end{array} \right. \quad (4.26)$$

où $(r_i, \theta_i)_{i=1,2}$ sont définis, en fonction de (r, θ) , comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_i = r \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}(t) \sin \theta}{c_i} \right)^2} \\ \theta_i = \text{atan}(\alpha_i \tan \theta) \end{array} \right. \quad (4.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_i = r \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}(t) \sin \theta}{c_i} \right)^2} \\ \theta_i = \text{atan}(\alpha_i \tan \theta) \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Pour les contraintes, nous avons les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode I} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_I^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} (\alpha_2^2 + 1)(2\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 1) \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - 4\alpha_1 \alpha_2 \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \\ -(\alpha_2^2 + 1)^2 \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} + 4\alpha_1 \alpha_2 \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \\ 2\alpha_1 (\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - 2\alpha_1 (\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \end{pmatrix} \\ \text{Mode II} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{2K_{II}^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \alpha_2^2 \left((\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} \right) \\ \alpha_2^2 (\alpha_2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - \alpha_2 (\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \\ 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{2} (\alpha_2^2 + 1)^2 \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \end{pmatrix} \\ \text{Mode III} \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \frac{K_{III}^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\alpha_2 \sqrt{r_2}} \\ \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode I} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_I^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} (\alpha_2^2 + 1)(2\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 1) \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - 4\alpha_1 \alpha_2 \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \\ -(\alpha_2^2 + 1)^2 \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} + 4\alpha_1 \alpha_2 \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \\ 2\alpha_1 (\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - 2\alpha_1 (\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \end{pmatrix} \\ \text{Mode II} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{2K_{II}^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \alpha_2^2 \left((\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} \right) \\ \alpha_2^2 (\alpha_2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - \alpha_2 (\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \\ 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{2} (\alpha_2^2 + 1)^2 \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \end{pmatrix} \\ \text{Mode III} \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \frac{K_{III}^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\alpha_2 \sqrt{r_2}} \\ \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mode I} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_I^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} (\alpha_2^2 + 1)(2\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 1) \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - 4\alpha_1 \alpha_2 \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \\ -(\alpha_2^2 + 1)^2 \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} + 4\alpha_1 \alpha_2 \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \\ 2\alpha_1 (\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - 2\alpha_1 (\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \end{pmatrix} \\ \text{Mode II} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{2K_{II}^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \alpha_2^2 \left((\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} \right) \\ \alpha_2^2 (\alpha_2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - \alpha_2 (\alpha_2^2 + 1) \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \\ 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{2} (\alpha_2^2 + 1)^2 \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \end{pmatrix} \\ \text{Mode III} \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \frac{K_{III}^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{\alpha_2 \sqrt{r_2}} \\ \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sqrt{r_2}} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

On définit, alors, les facteurs d'intensité des contraintes cinématiques et dynamiques comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(\theta = 0) \\ K_{II}^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(\theta = 0) \\ K_{III}^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0) \end{array} \right. \quad (4.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(\theta = 0) \\ K_{II}^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(\theta = 0) \\ K_{III}^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0) \end{array} \right. \quad (4.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(\theta = 0) \\ K_{II}^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(\theta = 0) \\ K_{III}^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0) \end{array} \right. \quad (4.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I^{cin} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [[u_2(\theta = \pi)]] \\ K_{II}^{cin} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [[u_1(\theta = \pi)]] \\ K_{III}^{cin} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [[u_3(\theta = \pi)]] \end{array} \right. \quad (4.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I^{cin} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [[u_2(\theta = \pi)]] \\ K_{II}^{cin} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [[u_1(\theta = \pi)]] \end{array} \right. \quad (4.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{III}^{cin} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [[u_3(\theta = \pi)]] \end{array} \right. \quad (4.37)$$

On déduit, donc, la relation entre les facteurs cinématiques et les facteurs dynamiques [Bui78] par l'expression :

$$K_i^{cin} = f_i(\dot{a}) K_i^{dyn}; \quad i = I, II, III \quad (4.38)$$

où les f_i désignent les fonctions dites universelles qui s'expriment par les équations 4.39, 4.40.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(\dot{a}) = \frac{4\alpha_i(1 - \alpha_2^2)}{(\kappa + 1)D(\dot{a})} \quad i \in \{1, 2\} \end{array} \right. \quad (4.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_3(\dot{a}) = \frac{1}{\alpha_2} \end{array} \right. \quad (4.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_i}\right)^2}, \quad i \in \{1, 2\} \end{array} \right. \quad (4.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\dot{a}) = 4\alpha_1\alpha_2 - (1 + \alpha_2^2)^2 \end{array} \right. \quad (4.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \begin{cases} \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{en contraintes planes} \\ 3 - 4\nu & \text{en déformations planes} \end{cases} \end{array} \right. \quad (4.43)$$

Où c_1 et c_2 sont respectivement les célérités des ondes de traction et de cisaillement qui s'expriment comme suit :

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (4.44)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (4.45)$$

4.2.3.4 L'intégrale d'interaction en dynamique

Le calcul de facteurs d'intensité de contrainte dynamique revient à évaluer une intégrale J en dynamique équivalente à l'intégrale de Rice [Ric68] en statique. Plusieurs auteurs ont proposé différentes formes de cette intégrale en dynamique : Nilsson [Nil73] était parmi les premiers à proposer une extension de cette intégrale en dynamique stationnaire. Freund [Fre98] a proposé une autre forme de cette intégrale qui ne dépend pas des quantités cinématiques, Kishimoto [KAS80a, KAS80b] a repris l'intégrale de Rice en rajoutant des termes qui prennent compte des effets de l'inertie. Cette intégrale est toujours évaluée en définissant un contour fermé autour de la pointe de la fissure. L'indépendance de cette intégrale du contour choisi a été contesté par Nishioka et Atluri [NA83] qui l'ont complétée par un terme sur un contour proche de la pointe de la fissure. Réthoré [Rét05] propose une intégrale qu'il a évalué à partir d'une intégrale de surface de l'énergie sous une forme lagrangienne. Les différentes intégrales J , proposées dans la littérature, sont généralement fondées sur des hypothèses de stationnarité locale de la fissure et s'appuient sur un passage à la limites des domaines d'intégration. Ils

donnent numériquement des valeurs très proches et sont de ce fait considérées, comme étant équivalentes.

On donne l'intégrale $J^{Réthoré}$, indépendante du contour, développée par Réthoré [Rét05] par l'équation (4.46)

$$J^{Réthoré} \approx \frac{1}{\dot{a}} \left(\int_{S_2} \left((w^{def} + w^{cin}) \cdot \underline{\dot{a}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{u}} \right) \cdot \underline{n} dS - \int_{\Omega_{S_2}} \sigma_{ij} (u_i + \dot{a}_k u_{i,k})_{,j} + \rho \dot{u}_i (\ddot{u}_i + \dot{a}_k \dot{u}_{i,k}) d\Omega \right) \quad (4.46)$$

Cette intégrale est valide pour le cas d'une fissure propagatrice. Cependant, cette intégrale est incapable de dissocier les différents modes de rupture afin de calculer les FIC(s). C'est ainsi qu'on fera recours la technique d'intégrale d'interaction de Yau, Wang et Corten [WYC80]. On considère que la solution se décompose en deux termes : un terme \underline{u}^r qui décrit l'état réel satisfaisant les conditions aux limites, et un terme \underline{u}^{aux} décrivant un état auxiliaire fictif. On écrit alors :

$$\underline{u} = \underline{u}^r + \underline{u}^{aux} \quad (4.47)$$

En injectant l'équation 4.47 dans l'expression de l'intégrale J dans 4.46, on retrouve l'expression de l'intégrale d'interaction. En réalité, plusieurs travaux ont mené à différentes expressions de l'intégrale d'interaction, mais elles sont toutes équivalentes. On s'intéresse à celle proposée par Réthoré qui s'exprime par l'équation 4.48 : (cf. [Rét05] pour les détails)

$$I^{int} = - \int_A q_{k,j} [(\sigma_{pq}^{aux} u_{p,q} - \rho \dot{u}_p \dot{u}_p^{aux}) \delta_{kj} - (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,k} + \sigma_{ij} u_{i,k}^{aux})] dS + \int_A q_k [(\sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,k} + \rho \ddot{u}_i \dot{u}_{i,k}^{aux}) + (\rho \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_{i,k} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}^{aux})] dS \quad (4.48)$$

Où A est l'intérieur du domaine délimité par les deux contours autour de la fissure et les lèvres de la fissure. Le champ \underline{q} est appelé champ d'extension virtuel. Il est illustré dans la figure 4.3 et défini comme suit :

$$\begin{cases} q = 0 & \text{en dehors de } S_2 \\ \|q\| = 1 & \text{à l'intérieur de } S_1 \\ \|q\| & \text{varie linéairement dans } S_2 \\ \underline{q} & \text{est tangent aux lèvres de la fissure entre } S_1 \text{ et } S_2 \end{cases}$$

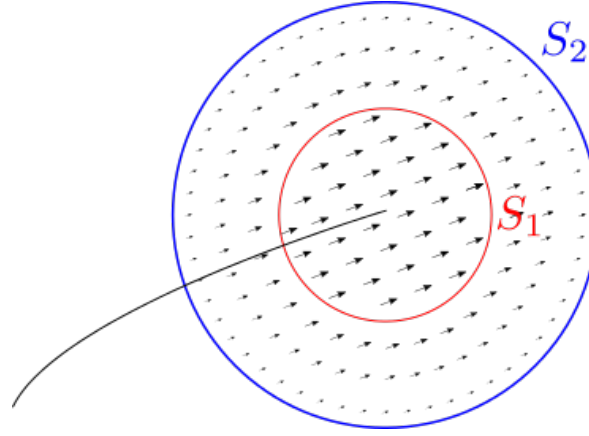
Afin de calculer l'intégrale d'interaction, il est nécessaire de choisir un champ auxiliaire. Pour cela, on considère les champs asymptotiques $\underline{\underline{\sigma}}$ et \underline{u} associés au modes I, II et III , donnés par par (4.24)-(4.29) et (4.25)-(4.30), respectivement.

Remarque 4.1 :

L'équation 4.48 est valide pour une fissure de géométrie quelconque.

Pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes, la première étape consiste à calculer l'intégrale d'interaction I^{int} pour chaque mode du champs auxiliaire. En considérant l'introduction du champ auxiliaire, on réécrit l'équivalent de la formule d'Irwin en dynamique sous la forme :

$$I^{int} = \frac{2}{E^*} \left(f_I(\dot{a}) K_I^{aux} K_I^{dyn} + f_{II}(\dot{a}) K_{II}^{aux} K_{II}^{dyn} \right) + \frac{1}{\mu} f_{III}(\dot{a}) K_{III}^{aux} K_{III}^{dyn} \quad (4.49)$$


 FIGURE 4.3 – Champ d'extension virtuel \underline{q}

Par conséquent, K_I^{dyn} , K_{II}^{dyn} et K_{III}^{dyn} sont calculés pour les choix des champs auxiliaires successivement tels que $(K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0, K_{III}^{aux} = 0)$, $(K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1, K_{III}^{aux} = 0)$, $(K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 0, K_{III}^{aux} = 1)$.

Observons que lorsque $\dot{a} = 0$, les fonctions universelles f_I, f_{II}, f_{III} valent toutes 1.

Dans la suite, vu qu'on s'intéresse dans le cadre de ces travaux à la fissuration bidimensionnelle, on ne considèrera plus le facteur d'intensité de contrainte K_{III} ($K_{III} = 0$).

4.2.3.5 Critère global de propagation

Les FICs étant calculés, on tire un FIC équivalent par la maximisation de la contrainte circonfroncielle, donné par [LF90] :

$$K_{eq}^{dyn} = \cos^3\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \langle K_I^{dyn} \rangle - \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \sin(\theta_c) K_{II}^{dyn} \quad (4.50)$$

Grâce à cette dernière quantité, on peut décider si la fissure va se propager ou pas, selon différents scénarios :

1. Dans le cas où $K_{eq}^{dyn} < K_{1d}$ (ténacité dynamique d'initiation), la fissure ne se propage pas ($\dot{a} = 0$)
2. Dans le cas où $K_{eq}^{dyn} = K_{1d}$ alors la propagation de la fissure est initiée avec ($\dot{a} \neq 0$) dans une direction définie par l'angle θ_c défini comme suit :

$$\theta_c = 2 \arctan \left(\frac{1}{4} \left(\frac{K_I^{dyn}}{K_{II}^{dyn}} - \text{sign}(K_{II}^{dyn}) \sqrt{8 + \left(\frac{K_I^{dyn}}{K_{II}^{dyn}} \right)^2} \right) \right) \quad (4.51)$$

3. Tant que $K_{eq}^{dyn} \geq K_{1a}$ (ténacité dynamique d'arrêt), la fissure continue à se propager, avec une vitesse déduite de la formule de de Kanninen [KP85], donné par l'expression :

$$\dot{a} = \left(1 - \frac{K_{1M}}{K_{eq}^{dyn}} \right)^{\frac{1}{m}} c_r \quad (4.52)$$

où K_{1M} , c_r et m sont des données du matériau, identifiées expérimentalement.

4. autrement, elle s'arrête.

Remarque 4.2 :

En faisant l'hypothèse de la stationnarité en pointe de fissure [Fre98, Bui78], nous

pouvons facilement dériver les champs de vitesse et d'accélération au voisinage de la fissure, dans un repère local lié à la fissure, à partir des développements asymptotiques, par les équations 4.53 et 4.54.

$$\begin{cases} \dot{u}_i = -\dot{a}u_{i,1} & i \in \{1, 2, 3\} \\ \ddot{u}_i = -\ddot{a}u_{i,1} - \dot{a}\dot{u}_{i,1} & i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (4.53)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_i = -\dot{a}u_{i,1} & i \in \{1, 2, 3\} \\ \ddot{u}_i = -\ddot{a}u_{i,1} - \dot{a}\dot{u}_{i,1} & i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (4.54)$$

Pour faire la synthèse, on écrit le critère adopté pour les calculs numériques de l'initiation, la propagation et l'arrêt de la fissure comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } K_{eq}^{dyn} < K_{1d} & \text{Pas d'initiation} & (4.55) \\ \text{si } K_{eq}^{dyn} = K_{1d}, \quad \theta = \theta_c & \text{Initiation} & (4.56) \\ \text{si } K_{eq}^{dyn} \geq K_{1a}, \quad \dot{a} = \left(1 - \frac{K_{1M}}{K_{eq}^{dyn}}\right)^{\frac{1}{m}} C_r & \text{Propagation} & (4.57) \\ \text{si } K_{eq}^{dyn} \leq K_{1a} & \text{Arrêt} & (4.58) \end{cases}$$

La figure 4.4, on trace le critère présenté ci-dessus lors d'une charge et une décharge.

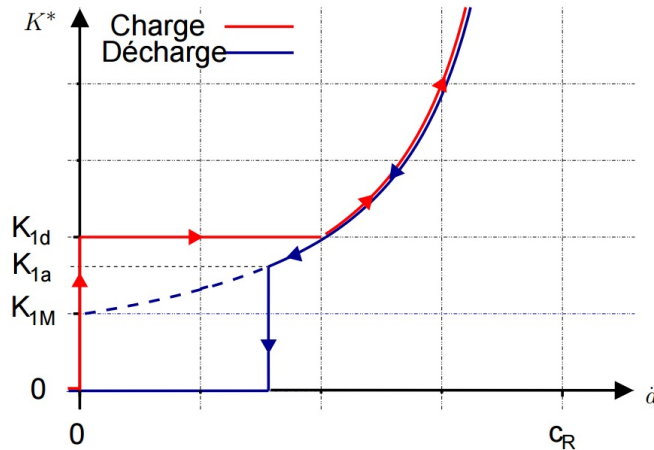


FIGURE 4.4 – Critère de propagation d'une fissure pour une charge et une décharge

Le critère présenté ci-dessus permet de compléter le problème de propagation d'une fissure en régime dynamique.

4.3 Solide fissuré dans le cadre Arlequin

Dans cette section, nous présentons la formulation faible Arlequin du problème d'un solide avec une fissure fixe. Ensuite, nous présentons la stratégie suivie pour le résoudre.

4.3.1 Modélisation du problème multi-échelle d'un solide fissuré

Reprenons le problème (\mathcal{P}_{dyn}^{cra}) de solide fissuré en dynamique en mono-modèle. Ce problème, telle qu'il est posé, décrit toutes les configurations possible de fissure (fissure interne, fissure sur la frontière). Dans la description Arlequin du problème de la fissure, nous considérons que la modélisation Arlequin du problème d'une fissure interne présente moins de difficulté et de généralité que celle d'une fissure qui se déclenche

sur la frontière est peut se propager vers l'intérieur du domaine. Pour rester dans la généralité, nous nous intéressons au dernier cas. Nous considérons, alors, que la zone critique locale est située autour de la pointe de fissure. Loin de la fissure est aussi considéré comme une zone critique qui décrit un comportement global de la structure. La zone critique locale est représentée, dans le cadre Arlequin, par un patch centré sur la pointe de la fissure. Cette modélisation crée une partition du domaine $\Omega(t)$ qui peut nous ramener, par conséquence, à partitionner la frontière dans certain cas, à un instant t donné. Étant, $\Omega(t) = \Omega \setminus \Gamma(t)$, nous notons $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ et $\Gamma_1(t) = \Gamma(t) \cap \Omega_1(t)$ et $\Gamma_2(t) = \Gamma(t) \cap \Omega_2(t)$ est une partition de $\Gamma(t)$. Dans cette partition de $\Omega(t)$, $\Omega_1(t)$ représente le sous-domaine (global) de $\Omega_1(t)$ que nous appelons substrat et $\Omega_2(t)$ est le sous-domaine (local) appelé patch, à l'instant t . La zone de couplage entre les modèles est notée $\Omega_c(t)$. La zone de superposition sans couplage s'appelle "zone libre" notée $\Omega_{1_f}(t) = \Omega_2(t) \setminus \Omega_c(t)$ sur le sur le patch et $\Omega_{2_f}(t) = \Omega_1(t) \cap \Omega_{1_f}(t)$ sur le substrat. Pour définir les frontières des sous-domaines, deux situations sont envisageables :

- Lorsque la fissure $\Omega_2(t)$ est assez proche de la frontière du domaine d'étude $S(t)$, Le patch $\Omega_2(t)$ peut intercepter les frontières S_u et S_σ du domaine $\Omega(t)$. Dans ce cas, nous définissons les partitions $S_{u,1}(t) = \partial\Omega_1(t) \cap S_u$ et $S_{\sigma,1}(t) = \partial\Omega_1(t) \cap S_\sigma$ sur la frontière $\partial\Omega_1(t)$ du substrat et $S_{u,2}(t) = \partial\Omega_2(t) \cap S_u \setminus S_{u,1}$ et $S_{\sigma,2}(t) = \partial\Omega_2(t) \cap S_\sigma \setminus S_{\sigma,1}$ sur la frontière $\partial\Omega_2$ du patch (voir figure (4.5a)).
- Lorsque le patch $\Omega_2(t)$ est strictement à l'intérieur de de $\Omega(t)$, alors $S_{u,1} = S_u$ et $S_{\sigma,1} = S_\sigma$ sur la frontière $\partial\Omega_1$ du substrat et $S_{u,2}(t) = \emptyset$ et $S_{\sigma,2} = \emptyset$ (voir figure (4.5b)). Notons, ici, que nous considérons que la géométrie du patch à l'intérieur est invariante dans le temps et que seule sa position varie pour suivre l'évolution de la fissure.



FIGURE 4.5 – Modèles Arlequin de solide fissuré

La modélisation que nous avons considérée dans ce chapitre considère que la fissure est partagée par le patch et le substrat [DJ10, Jam11] pour des propagations quasi-statiques de fissures, dans le cadre Arlequin. Cette configuration est plus générique que celle où le patch intègre toute la fissure [JD09] dans ses évolutions puisqu'elle garde les mêmes proportions géométriques lorsque la fissure se propage. Elle est, de plus, moins coûteuse. Notons, toutefois, que la modélisation où la zone libre du patch englobe toute la fissure peut être utile pour enrichir les modèles au niveau et au voisinage de toute la fissure, en tenant compte de l'impact entre les lèvres de la fissure, par exemple.

4.3.2 Formulation Arlequin continue du problème

Le modèle Arlequin étant défini, nous nous intéressons dans cette sous-section à la formulation variationnelle continue du problème de la fissure dynamique multi-échelle.

A l'instant $t = 0$, La fissure $\Gamma(0)$ est supposé connue. les sous-domaines initiaux $\Omega_1(0)$ et $\Omega_2(0)$ sont supposé existant. Pour simplifier l'écriture, nous écrivons qu'à un instant t , la dépendance d'une grandeur est exprimé par l'indice t . Nous écrivons le problème arlequin avec un couplage classique en vitesse, et en introduisant l'amortissement numérique comme suit :

$$\left(\mathcal{P}_{arl}^{cra} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{l'état initial} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1(0) \cup \Gamma_2(0) = \Gamma(0) = \Gamma_0 \\ \underline{u}_1(0) = \underline{u}_0^d / \Omega_1(0) \\ \underline{u}_2(0) = \underline{u}_0^d / \Omega_2(0) \\ \dot{\underline{u}}_1(0) = \underline{v}_0^d / \Omega_1(0) \\ \dot{\underline{u}}_2(0) = \underline{v}_0^d / \Omega_2(0) \\ \dot{\underline{a}}(0) = \dot{\underline{a}}_0 \end{array} \right. , \\ \forall t \in]0, T], \text{ trouver } (\underline{u}_{1,t}, \underline{u}_{2,t}, \underline{\lambda}_t, \dot{\underline{a}}_t) \\ \text{tels que,} \\ \forall \underline{w}_1 \in \underline{W}_{1,t}, \forall \underline{w}_2 \in \underline{W}_{2,t}, \forall \underline{\mu} \in \underline{M}_t \\ k_1(\underline{u}_{1,t}, \underline{w}_1) + m_1(\ddot{\underline{u}}_{1,t}, \underline{w}_1) + c(\underline{\lambda}_t, \underline{w}_1) = f_1(\underline{w}_1, t) \quad (4.59) \\ k_2(\underline{u}_{2,t}, \underline{w}_2) + m_2(\ddot{\underline{u}}_{2,t}, \underline{w}_2) - c(\underline{\lambda}_t, \underline{w}_2) = f_2(\underline{w}_2, t) \quad (4.60) \\ c(\underline{\mu}, \dot{\underline{u}}_{1,t} - \dot{\underline{u}}_{2,t}) = 0 \quad (4.61) \\ \dot{\underline{a}}(t) = \dot{\underline{a}}(\Gamma(t), \underline{u}_{2,t}) \quad (4.62) \end{array} \right.$$

On désigne par $\underline{W}_{1,t}$, $\underline{W}_{2,t}$ les espaces des champs cinématiquement admissibles associés aux deux modèles respectivement définis sur $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ et \underline{M}_t est l'espace médiateur, défini dans $\Omega_c(t)$. Les travaux virtuels k_1, k_2, m_1, m_2, f_1 et f_2 sont définies comme suit :

$$k_1(\underline{u}_{1,t}, \underline{w}_1) = \int_{\Omega_1(t)} \alpha_k^1 \underline{\underline{\varepsilon}}_1(\underline{u}_{1,t}) : \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_1(\underline{w}_1) d\Omega \quad (4.63)$$

$$k_2(\underline{u}_{2,t}, \underline{w}_2) = \int_{\Omega_2(t)} \alpha_k^2 \underline{\underline{\varepsilon}}_2(\underline{u}_{2,t}) : \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_2(\underline{w}_2) d\Omega \quad (4.64)$$

$$m_1(\ddot{\underline{u}}_{1,t}, \underline{w}_1) = \int_{\Omega_1(t)} \alpha_m^1 \rho \ddot{\underline{u}}_{1,t} \underline{w}_1 d\Omega \quad (4.65)$$

$$m_2(\ddot{\underline{u}}_{2,t}, \underline{w}_2) = \int_{\Omega_2(t)} \alpha_m^2 \rho \ddot{\underline{u}}_{2,t} \underline{w}_2 d\Omega \quad (4.66)$$

$$f_{1,t}(\underline{u}_{1,t}, \underline{w}_1) = \int_{\Omega_1(t)} \alpha_f^1 \underline{f}_{v,t} \underline{w}_1 d\Omega + \int_{S_{\sigma,1}(t)} \underline{F}_{d,1,t} \underline{w}_1 dS \quad (4.67)$$

$$f_{2,t}(\underline{u}_{2,t}, \underline{w}_2) = \int_{\Omega_2(t)} \alpha_f^2 \underline{f}_{v,t} \underline{w}_2 d\Omega + \int_{S_{\sigma,2}(t)} \underline{F}_{d,2,t} \underline{w}_2 dS \quad (4.68)$$

$$(4.69)$$

Le couplage entre les modèles se fait moyennant des multiplicateurs de Lagrange. L'opérateur de couplage c est construit dans le cas général pour un couplage classique, d'abord. Puis, en se basant sur les développements faits au chapitre 3, le couplage est réduit dans le cas 2D de la fissure en dynamique.

4.3.3 Discrétisation du problème (\mathcal{P}_{arl}^{cra})

4.3.3.1 Formulation discrète du problème Arlequin avec XFEM

Pour la discrétisation spatiale du problème du solide fissuré, en suivant [DJ10] et [Jam11] pour des travaux de propagation quasi-statiques de fissures dans le cadre Arlequin, nous considérons :

1. Le modèle global fissuré approché par des Éléments Finis grossiers, enrichis, à la *PUM/XFEM* par des fonctions de discontinuité du type Heaviside pour tenir compte, de manière très économique de la présence d'une partie (sans fond) de la fissure.
2. Un modèle local fin, qui a la forme d'un disque centré sur la pointe de fissure, approché par des éléments finis fins pour représenter le plus fidèlement possible le comportement du solide fissuré dans cette zone critique, y compris la géométrie de la fissure.

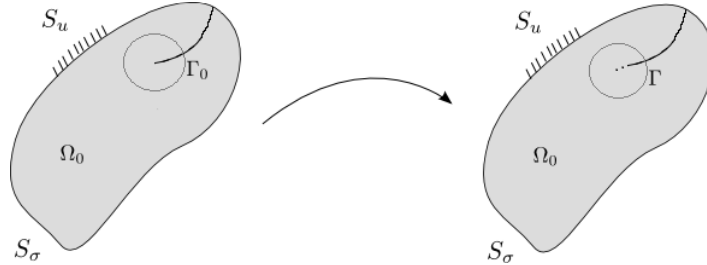


FIGURE 4.6 – Modèle Arlequin fissuré

Soient à l'instant t , $\Omega_{h_1}(t)$ et $\Omega_{h_2}(t)$ un maillage du substrat et un maillage du patch supposé être plus fine que $\Omega_{h_1}(t)$. La discrétisation éléments finis du substrat est supposée fixe pour tout instant t . Soient $B_1 = \{\phi_i^1\}_{i=1, n_1}$ la base éléments finis de dimension n_1 associée au maillage $\Omega_{h_1}(t)$, générant $\underline{W}_{h_1}^e$ l'espace éléments finis. Sur la base des éléments exposés dans la sous-section 1.5.4, l'espace $\underline{W}_{h_1}^e$ est enrichi par des fonctions qui représentent la discontinuité au niveau des lèvres de la fissure. Ces fonctions enrichissent les degrés de liberté dont l'intérieur du support des fonctions de base EF est entièrement traversé par la fissure $\Gamma_1(t)$. Soit X_{1H} l'ensemble des indices de ces degrés de liberté. Soit $W_{h_1}^{at}$ l'espace d'enrichissement discontinu généré par $\{H(\Psi_j^1)\phi_j^1, j \in X_{1H}\}$ où $H(\Psi_j^1)$ est la fonction de signe comme définie dans le paragraphe 1.5.4.2. Nous construisons, alors, l'espace éléments finis enrichi $\underline{W}_{h_1, t}$ comme suit :

$$\underline{W}_{h_1, t} = \underline{W}_{h_1}^e \oplus W_{h_1, t}^a = \text{vect}\{(\phi_i^1)_{i=1, n_1}\} \oplus \text{vect}\{(H(\Psi_j^1)\phi_j^1)_{j \in X_{1H}}\} \quad (4.70)$$

Soit maintenant $B_2(t) = \{\phi_i^2\}_{i=1, n_2}$ la base éléments finis construite sur $\Omega_{h_2}(t)$, génératrice de $\underline{W}_{h_2, t}$ l'espace éléments finis fins. L'espace médiateur est un sous espace de l'espace $\underline{W}_{h_1, t}$. Il est défini par :

$$\underline{M}_{h_\lambda, t} = \text{vect}\{(\phi_i^1 / \Omega_c)_{i=1, n_h^c}\} = \text{vect}\{(\phi_i^c)_{i=1, n_h^c}\} \quad (4.71)$$

où n_h^c est le nombre de degrés de liberté de l'espace médiateur $\underline{M}_{h_\lambda, t}$. D'autres choix d'espaces médiateur réduits peuvent être utilisés (cf. chapitre 3).

Le problème Arlequin dynamique, discrétisé en espace, pour un problème de structure comportant une fissure fixe s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Connaissant l'état initial}(\underline{u}_{h_1,0}^e, \underline{u}_{h_1,0}^a, \underline{u}_{h_2,0}, \dot{\underline{u}}_{h_1,0}^e, \dot{\underline{u}}_{h_1,0}^a, \dot{\underline{u}}_{h_2,0}) \\
\forall t \in]0, T], \text{ Trouver } (\underline{u}_{h_1,t}^e, \underline{u}_{h_1,t}^a, \underline{u}_{h_2,t}, \underline{\lambda}_{h,t}) \in \underline{W}_{h_1}^e \times \underline{W}_{h_1}^a \times \underline{W}_{h_2,t} \times \underline{M}_{h_\lambda,t} \\
k_1(\underline{u}_{h_1,t}^e, \underline{w}_{h_1}^e) + k_1(\underline{u}_{h_1,t}^a, \underline{w}_{h_1}^e) + m_1(\underline{u}_{h_1,t}^e, \underline{w}_{h_1}^e) + \\
\qquad m_1(\underline{u}_{h_1,t}^a, \underline{w}_{h_1}^e) + c(\underline{\lambda}_{h,t}, \underline{w}_{h_1}^e) = f_{1,t}(\underline{w}_{h_1}^e) \tag{4.72} \\
k_1(\underline{u}_{h_1,t}^e, \underline{w}_{h_1}^a) + k_1(\underline{u}_{h_1,t}^a, \underline{w}_{h_1}^a) + m_1(\underline{u}_{h_1,t}^e, \underline{w}_{h_1}^a) + \\
\qquad m_1(\underline{u}_{h_1,t}^a, \underline{w}_{h_1}^a) + c(\underline{\lambda}_{h,t}, \underline{w}_{h_1}^a) = f_{1,t}(\underline{w}_{h_1}^a) \tag{4.73} \\
k_2(\underline{u}_{h_2,t}, \underline{w}_{h_2}) + m_2(\underline{u}_{h_2,t}, \underline{w}_{h_2}) - c(\underline{\lambda}_{h,t}, \underline{w}_{h_2}) = f_{2,t}(\underline{w}_{h_2}) \tag{4.74} \\
c(\underline{\mu}_{h,t}, \dot{\underline{u}}_{h_1}^e - \dot{\underline{u}}_{h_2}) + c(\underline{\mu}_{h,t}, \dot{\underline{u}}_{h_1}^a) = 0; \tag{4.75}
\end{array} \right.$$

La discrétisation en temps par un schéma d'accélération moyenne de la famille des schémas de Newmark. Soient $\{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_N = T\}$ ($N + 1$) instants de l'intervalle $]0, T]$, tels que $t_i - t_{i-1} = dt, i = 1, \dots, N$ définissent un pas de temps constant. Finalement, la formulation discrète en espace et en temps du problème Arlequin d'un solide fissuré en dynamique s'établit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Connaissant l'état à l'instant } t_i(\underline{U}_{1,i}^e, \underline{U}_{1,i}^a, \underline{U}_{2,i}, \dot{\underline{U}}_{1,i}^e, \dot{\underline{U}}_{1,i}^a, \dot{\underline{U}}_{2,i}) \\
\text{Trouver à l'instant } t_{i+1}(\underline{U}_{1,i+1}^e, \underline{U}_{1,i+1}^a, \underline{U}_{2,i+1}, \underline{\Lambda}_{i+1}) \text{ tels que} \\
(\underline{M}_1^e + \beta \Delta t^2 \underline{K}_1^e) \ddot{\underline{U}}_{1,i+1}^e + \underline{C}_1^{et} \underline{\Lambda}_{i+1} = \underline{F}_{1,i+1}^e - \underline{K}_1^e \underline{U}_{1eff,i}^e \tag{4.76} \\
(\underline{M}_1^a + \beta \Delta t^2 \underline{K}_1^a) \ddot{\underline{U}}_{1,i+1}^a + \underline{C}_1^{at} \underline{\Lambda}_{i+1} = \underline{F}_{1,i+1}^a - \underline{K}_1^a \underline{U}_{1eff,i}^a \tag{4.77} \\
(\underline{M}_2 + \beta \Delta t^2 \underline{K}_2) \ddot{\underline{U}}_{2,i+1} - \underline{C}_2^t \underline{\Lambda}_{i+1} = \underline{F}_{2,i+1} - \underline{K}_2 \underline{U}_{2eff,i} \tag{4.78} \\
\underline{C}_1^e \ddot{\underline{U}}_{1,i+1}^e - \underline{C}_2 \ddot{\underline{U}}_{2,i+1} + \underline{C}_1^a \ddot{\underline{U}}_{1,i+1}^a = \frac{1}{\gamma \Delta t} (\underline{C}_2 \dot{\underline{U}}_{2eff,i} - \underline{C}_1^e \dot{\underline{U}}_{1eff,i}^e - \underline{C}_1^a \dot{\underline{U}}_{1eff,i}^a) \tag{4.79} \\
\dot{\underline{U}}_{1,i+1}^e = \dot{\underline{U}}_{1,i}^e + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\underline{U}}_{1,i}^e + \gamma \Delta t \ddot{\underline{U}}_{1,i+1}^e \tag{4.80} \\
\dot{\underline{U}}_{1,i+1}^a = \dot{\underline{U}}_{1,i}^a + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\underline{U}}_{1,i}^a + \gamma \Delta t \ddot{\underline{U}}_{1,i+1}^a \tag{4.81} \\
\dot{\underline{U}}_{2,i+1} = \dot{\underline{U}}_{2,i} + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\underline{U}}_{2,i} + \gamma \Delta t \ddot{\underline{U}}_{2,i+1} \tag{4.82} \\
\underline{U}_{1,i+1}^e = \underline{U}_{1,i}^e + \Delta t \dot{\underline{U}}_{1,i}^e + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{\underline{U}}_{1,i}^e + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_{1,i+1}^e \tag{4.83} \\
\underline{U}_{1,i+1}^a = \underline{U}_{1,i}^a + \Delta t \dot{\underline{U}}_{1,i}^a + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{\underline{U}}_{1,i}^a + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_{1,i+1}^a \tag{4.84} \\
\underline{U}_{2,i+1} = \underline{U}_{2,i} + \Delta t \dot{\underline{U}}_{2,i} + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{\underline{U}}_{2,i} + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_{2,i+1} \tag{4.85}
\end{array} \right.$$

On va s'intéresser à présent à des éléments numériques additifs, liés à l'aspect propagation de la fissure et au fait que l'on utilise le cadre de modélisation Arlequin pour la simulation du comportement dynamique de structures fissurés, avec une fissure pouvant se propager.

4.3.3.2 Considérations numériques de modélisation du patch initial

Rappelons que le patch Arlequin est composé, en général, de deux domaines ne se recouvrant pas, soit un domaine libre (sans couplage avec le substrat) et un domaine

de couplage. Dans la modélisation Arlequin étudiée pour la fissuration, en dynamique, il est naturellement supposé que le fond de fissure $C(t)$ est contenu dans la zone libre du patch. Comme en statique, on exige que cette zone libre du patch ait au moins une taille permettant de contenir tous les éléments macroscopiques, affectés par l'erreur de pollution induite par la présence du fond de la fissure, sans quoi la solution Arlequin serait fautive [DER08, Elk10]. Pour la dynamique, nous supposons en plus que la zone de couplage du patch contient au moins un élément du modèle grossier et ce pour des considérations de précision de la solution numérique et qu'elle permet le traitement des ondes HF sans qu'il y ait réflexion sur les bords de la zone de couplage (cf chapitre 2). Par ailleurs, l'élimination des éléments formant les supports des fonctions de base grossières, entièrement contenus dans la zone libre du patch, et par conséquent l'élimination des fonctions de base grossières elles-mêmes (cf. [Dhi06]) est La Bonne Manière de Procéder, même en statique : il s'agit d'une manipulation simple à réaliser, donc n'affectant que très marginalement la flexibilité d'Arlequin et permettant, en prime, d'éviter de se poser des questions au sujet des faibles poids ε affectés à la zone libre pour le modèle grossier, évitant ainsi le mauvais conditionnement du système global en statique. Elle est actuellement utilisée dans le Groupe de recherche Structure-Structure du MSSMat pour la thermique transitoire, dans le cadre de la thèse de Romain Ruysen (en cours) et dans [ADIR18] pour le scattering. En dynamique, pour des considérations de stabilité des schémas numériques, cette élimination est nécessaire, sinon fortement recommandée. En effet, une autre manière de procéder pour résoudre ce problème, sans toucher au maillage initial consiste à introduire amortissement fictif dans le modèle grossier au niveau de la zone libre du patch pour éliminer les ondes qui n'ont pas été transmises au patch fin et se sont infiltrées dans cette zone. Cette proposition n'a pas été testée.

4.3.3.3 Calcul numérique du pas d'avance de la fissure

Nous nous intéressons maintenant à l'intégration en temps du pas d'avance de la fissure, sachant que la vitesse de propagation est variable. Nous proposons un schéma d'intégration sous la forme d'une loi trapézoïdale, comme dans la littérature, qui s'écrit comme suit :

$$\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n} = (1 - \alpha_a)\Delta t \dot{a}_n + \alpha_a \Delta t \dot{a}_{n+1}, i = 1, 2 \quad (4.86)$$

où α_a est un réel positif compris entre 0 et 1.

On peut remarquer que selon le choix de α_a on utilise soit un schéma explicite ($\alpha_a = 0$) ou un schéma implicite. L'utilisation d'un schéma explicite pour le calcul de l'avance de la fissure nécessite une étude de stabilité de schéma d'intégration conditionné par la taille du maillage du patch. Pour l'utilisation d'un schéma explicite pour l'équilibre tels que celui de la différence centrée conditionne que le choix du pas de temps doit être majoré par une valeur critique (pas temps critique relatif à la propagation des ondes élastiques) dépendante de la taille des éléments proches de la pointe de la fissure et de la célérité des ondes de Rayleigh. Lors de la propagation de la fissure avec une vitesse variable, il est possible que le pas temps dépasse le pas temps critique et donc la condition de stabilité ne soit pas satisfaite.

Dans notre cas, nous utilisons un schéma d'accélération moyenne qui est inconditionnellement stable pour l'équilibre dynamique. Ce choix garantit seulement la stabilité du problème d'équilibre multi-échelle. Dans ce cas, un choix de schéma explicite pour le calcul de l'avance de la fissure semble incohérent et risque d'introduire des instabilités lors de la propagation de fissure, alors, il est plus raisonnable de choisir un schéma

implicite ($\alpha_a \neq 0$). Nous considérons, dans la suite un schéma de différence centré pour le calcul du pas d'avance de la fissure, $\alpha_a = 0.5$.

4.3.3.4 Remaillage du patch et projection des états

Au cours de l'opération de propagation de la fissure, la géométrie globale change pour tenir compte des nouvelles surfaces créées au niveau de la pointe de fissure, en plus du fait que la position du patch a un lien avec le mouvement du fond/front de fissure. Dans le cadre de la modélisation Arlequin, cette opération se fait localement en reconstruisant un nouveau patch qui suit l'évolution de la fissure entre deux instants successifs. En discrétisant le problème, il est nécessaire de procéder à des remaillages et des mises à jour des états mécaniques, à chaque fois que la fissure se propage. La discrétisation en espace est effectuée par la méthode des éléments finis pour le patch et la méthode des éléments finis étendus pour le substrat. Pour la discrétisation en temps on utilise le même schéma de la famille de Newmark paramétré par β et γ . Soit un vecteur d'état (déplacement, vitesse, accélération) calculé à l'instant t_n sur une discrétisation en espace définie à l'instant t_n . On notera ce vecteur par $\underline{X}_{i,n}^m$ le vecteur d'état à l'instant n évalué sur la discrétisation du modèle Ω_i de l'instant m , $i = 1, 2$. Pour calculer le vecteur d'état à l'instant t_{n+1} sur la discrétisation en espace de l'instant t_{n+1} , il faut, d'abord, projeter l'état de l'instant t_n sur la discrétisation en espace de l'instant t_{n+1} , comme il est schématisé dans la figure (4.7).

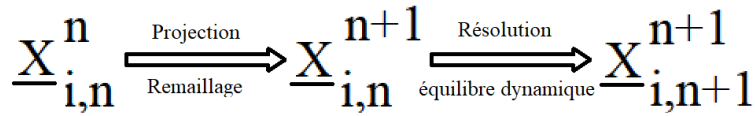


FIGURE 4.7 – Les différentes étapes de calcul d'un modèle Ω_i à discrétisation évolutive

Dans notre modélisation multi-échelle, les étapes de calcul à discrétisation variable s'appliquent sur le substrat comme sur le patch. Pour le substrat, la fissure est décrite par des fonctions level-set qu'on doit mettre à jour à chaque fois qu'il y a propagation. Le patch garde une géométrie globale constante, toujours centrée sur la pointe de la fissure et la description géométrique de la fissure évolue pour tenir compte géométriquement du pas d'avance de la fissure. On note l'opérateur de projection d'un état calculé sur la discrétisation d'un modèle Ω_i à l'instant t_n sur une discrétisation d'un modèle Ω_j à l'instant m par $\underline{\Pi}_{n,m}^{i,j}$ et on écrit :

$$\underline{X}_{j,n}^m = \underline{\Pi}_{n,m}^{i,j} \underline{X}_{i,n}^n \quad (4.87)$$

Sachant qu'un tenseur calculé à l'instant t_n sur une discrétisation t_n d'un modèle Ω_i est noté $\underline{X}_{i,n}^n$. On peut écrire alors :

$$\underline{X}_{i,m}^m = (\underline{\Pi}_{n,m}^{i,i})^t \underline{X}_{i,n}^n \underline{\Pi}_{n,m}^{i,i} \quad (4.88)$$

Le problème Arlequin de la fissure avec patch évolutif discrétisé peut être posé comme suit.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Connaissant } \underline{U}_{1,n}^{e,n}, \underline{U}_{1,n}^{a,n}, \underline{U}_{2,n}^n, \underline{\dot{U}}_{1,n}^{e,n}, \underline{\dot{U}}_{1,n}^{a,n}, \underline{\dot{U}}_{2,n}^n, \Gamma_n, \underline{\dot{a}}_n \\
 \text{Trouver } \left\{ \begin{array}{l}
 \underline{U}_{1,n}^{e,n+1}, \underline{U}_{1,n}^{a,n+1}, \underline{U}_{2,n}^{n+1}, \underline{\dot{U}}_{1,n}^{e,n+1}, \underline{\dot{U}}_{1,n}^{a,n+1}, \underline{\dot{U}}_{2,n}^{n+1} \\
 \underline{U}_{1,n+1}^{e,n+1}, \underline{U}_{1,n+1}^{a,n+1}, \underline{U}_{2,n+1}^{n+1}, \underline{\dot{U}}_{1,n+1}^{e,n+1}, \underline{\dot{U}}_{1,n+1}^{a,n+1}, \underline{\dot{U}}_{2,n+1}^{n+1} \\
 \Gamma_{n+1}, \underline{\dot{a}}_{n+1}
 \end{array} \right. \\
 \underline{M}_{1,n+1}^{e,n+1} \underline{\ddot{U}}_{1,n+1}^{e,n+1} + \underline{K}_{1,n+1}^{e,n+1} \underline{U}_{1,n+1}^{e,n+1} + (\underline{C}_{1,n+1}^{e,n+1})^t \underline{\Lambda}_{n+1} = \underline{F}_{1,n+1}^{e,n+1} \quad (4.89) \\
 \underline{M}_{1,n+1}^{a,n+1} \underline{\ddot{U}}_{1,n+1}^{a,n+1} + \underline{K}_{1,n+1}^{a,n+1} \underline{U}_{1,n+1}^{a,n+1} + (\underline{C}_{1,n+1}^{a,n+1})^t \underline{\Lambda}_{n+1} = \underline{F}_{1,n+1}^{a,n+1} \quad (4.90) \\
 \underline{M}_{2,n+1}^{n+1} \underline{\ddot{U}}_{2,n+1}^{n+1} + \underline{K}_{2,n+1}^{n+1} \underline{U}_{2,n+1}^{n+1} - (\underline{C}_{2,n+1}^{n+1})^t \underline{\Lambda}_{n+1} = \underline{F}_{2,n+1}^{n+1} \quad (4.91) \\
 \underline{C}_{1,n+1}^{e,n+1} \underline{\dot{U}}_{1,n+1}^{e,n+1} + \underline{C}_{1,n+1}^{a,n+1} \underline{\dot{U}}_{1,n+1}^{a,n+1} - \underline{C}_{2,n+1}^{n+1} \underline{\dot{U}}_{2,n+1}^{n+1} = 0 \quad (4.92) \\
 \underline{U}_{1,n+1}^{e,n+1} = \underline{U}_{1,n}^{e,n+1} \Delta t \underline{\dot{U}}_{1,n}^{e,n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1-2\beta) \underline{\ddot{U}}_{1,n}^{e,n+1} + 2\beta \underline{\ddot{U}}_{1,n+1}^{e,n+1} \right] \quad (4.93) \\
 \underline{U}_{1,n+1}^{a,n+1} = \underline{U}_{1,n}^{a,n+1} \Delta t \underline{\dot{U}}_{1,n}^{a,n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1-2\beta) \underline{\ddot{U}}_{1,n}^{a,n+1} + 2\beta \underline{\ddot{U}}_{1,n+1}^{a,n+1} \right] \quad (4.94) \\
 \underline{U}_{2,n+1}^{n+1} = \underline{U}_{2,n}^{n+1} \Delta t \underline{\dot{U}}_{2,n}^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1-2\beta) \underline{\ddot{U}}_{2,n}^{n+1} + 2\beta \underline{\ddot{U}}_{2,n+1}^{n+1} \right] \quad (4.95) \\
 \underline{\dot{a}}_{n+1} = \underline{\dot{a}}_{n+1}(\Gamma_n, \underline{\dot{a}}_n, \underline{U}_{2,n+1}^{n+1}, \underline{\dot{U}}_{2,n+1}^{n+1}, \underline{\dot{U}}_{2,n+1}^{n+1}) \quad (4.96) \\
 \Gamma_{n+1} = \Gamma_{n+1}(\Gamma_n, \underline{\dot{a}}_n, \underline{\dot{a}}_{n+1}) \quad (4.97)
 \end{array} \right.$$

Dans cette formulation discrète, on fait apparaître des nouveaux termes des champs d'état (déplacement, vitesse, accélérations) calculés à l'instant t_n et projetés sur les discrétisations de l'instant t_{n+1} . L'opération de projection considère les intersections entre tous les modèles discrets des instants t_n et t_{n+1} et la connaissance des états à l'instant t_n .

Le maillage du substrat est non variable durant toute les instants de calcul, seuls les degrés de liberté d'enrichissement discontinu doivent être mis à jour à chaque fois la fissure se propage. En couplant le substrat avec le patch sur $\Omega_c(t_n)$, une zone libre est créée. Cette zone est définie comme la zone de superposition entre le substrat et le patch, qui n'intervient pas dans le couplage désigné par $\Omega_{1_f}(t_n) = (\Omega_1(t_n) \cap \Omega_2(t_n)) \setminus \Omega_c(t_n)$. Sur cette restriction du domaine grossier, la solution $\underline{U}_{1,n}^n / \Omega_{1_f}(t_n)$ est considérée fautive et elle est substitué par celle calculé sur le patch $\underline{U}_{2,n}^n / \Omega_{1_f}(t_n)$. La translation du patch lors de la propagation de la fissure $\Omega_2(t)(t_n) \rightarrow \Omega_2(t_{n+1})$ entraîne, aussi, la translation de cette zone à la zone $\Omega_{1_f}(t_n) \rightarrow \Omega_{1_f}(t_{n+1})$. Il est, alors, obligatoire de corriger la solution du substrat sur la restriction $\Omega_{1_f}(t_n) \cap \Omega_{1_f}(t_{n+1})$. Pour se faire, on projette la solution du patch restreinte à cette cette zone pour corriger la solution du modèle grossier considéré fautive à l'instant t_n . Étant donné $\underline{U}_{1,n}^{n+1} = \underline{U}_{1,n}^{e,n+1} + \underline{U}_{1,n}^{a,n+1}$ On écrit, alors

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \underline{U}_{1,n}^{e,n+1} = \begin{cases} \underline{\Pi}_{n,n+1}^{2,1} \underline{U}_{2,n}^n & \text{sur } \Omega_{1_f}(t_n) \cap \Omega_{1_f}(t_{n+1}) \\ \underline{U}_{1,n}^{e,n} & \text{sur } \Omega_1(t) \setminus (\Omega_{1_f}(t_n) \cap \Omega_{1_f}(t_{n+1})) \end{cases} \\
 \underline{U}_{1,n}^{a,n+1} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega_{1_f}(t_n) \cap \Omega_{1_f}(t_{n+1}) \\ \underline{U}_{1,n}^{a,n} & \text{sur } \Omega_1(t) \setminus (\Omega_{1_f}(t_n) \cap \Omega_{1_f}(t_{n+1})) \end{cases}
 \end{array} \right.$$

La mise à jour des états mécaniques sur le nouveau patch crée après évolution $\Omega_2(t_{n+1})$ est effectué sur deux parties. La première partie représente l'intersection entre le patch

$\Omega_2(t_n)$ et le patch $\Omega_2(t_{n+1})$ où la solution est la projection des états du patch $\Omega_2(t_n)$ calculés à l'instant t_n sur le nouveau patch. La deuxième partie prend la solution du grossier relativement loin de la pointe de la fissure où la solution modèle grossier est considéré correcte. Le déplacement $\underline{U}_{2,n}^{n+1}$ est calculé comme suit :

$$\underline{U}_{2,n}^{n+1} = \begin{cases} \underline{\Pi}_{n,n+1}^{2,2} \underline{U}_{2,n}^n & \text{sur } \Omega_2(t_n) \cap \Omega_{h_2}(t)(t_{n+1}) \\ \underline{\Pi}_{n,n+1}^{1,2} \underline{U}_{1,n}^{e,n} & \text{sur } \Omega_2(t_{n+1}) \setminus \Omega_2(t_n) \cap \Omega_2(t_{n+1}) \end{cases}$$

4.3.4 Algorithme de résolution

Pour implémenter le système, il est nécessaire d'établir l'algorithme étayant la résolution du problème de la fissure stationnaire en dynamique dans le cadre Arlequin.

Algorithme 2 : Algorithme de résolution en 2D

Input : État initiale du substrat Ω_1 avec une fissure Γ_0 , conditions aux limites et conditions initiales

output : État finale à T du substrat Ω_1 , du patch $\Omega_2(T)$ et de la fissure $\Gamma(T)$

- 1 Création de la géométrie du patch $\Omega_2(0)$;
- 2 Maillage du patch initial;
- 3 Initialisation : $t_i \leftarrow 0$; *propagation fissure* \leftarrow *faux*;
- 4 **tant que** $t_i \leq T$ **faire**
- 5 **si** *propagation fissure* **alors**
- 6 Propagation de la fissure $\Gamma(t_i)$ (mise à jour des level-sets);
- 7 Construction du nouveau patch $\Omega_2(t_i)$;
- 8 Discrétisation EF du patch $\Omega_2(t_i)$;
- 9 Projections des états mécaniques
- 10 **fin**
- 11 Calcul des matrices de rigidité, de masse et d'amortissement;
- 12 Calcul des intersections et des matrices de couplage et assemblage;
- 13 Introduction des conditions au limites;
- 14 Initialisation des champs déplacement, vitesse et accélération;
- 15 Initialisation : *propagation fissure* \leftarrow *faux*;
- 16 **tant que** *non propagation fissure* et $t_i \leq T$ **faire**
- 17 Résolution par schéma de Newmark du problème Arlequin à t_i ;
- 18 Interprétation des champs des contraintes, déformations et énergies;
- 19 Évaluation du critère de propagation de la fissure sur $\Omega_2(t_i)$;
- 20 **si** *propagation fissure* **alors**
- 21 Calcul de la vitesse et de la direction de propagation $\dot{\underline{a}}(t_i)$
- 22 **fin**
- 23 Incrémentation du pas du temps t_i
- 24 **fin**
- 25 **fin**

4.4 Applications numériques

On présente ici des exemples numériques de structures fissurées sollicitées en dynamique, pour le cas d'une fissure chargée en mode I pur et celui d'une fissure en mode mixte, en testant différents choix de couplages Arlequin. Les résultats de calculs sont

comparés avec des résultats obtenus par des approches mono-modèles et des résultats théoriques présentés dans la littérature.

4.4.1 Poutre fissurée en flexion 3 points : Mode I pur

Dans cette sous-section, nous traitons le problème d'une structure fissurée sollicitée en mode I pur. L'objectif de ce cas test est de répondre aux questions suivantes :

Est-ce que nous avons toujours besoin de raffiner la discrétisation autour de la pointe de fissure ?

Pour la modélisation Arlequin d'une fissure en dynamique, comment choisissons-nous la discrétisation des multiplicateurs de Lagrange ?

Est-il nécessaire de réduire l'opération de couplage pour la simulation du comportement dynamique d'une structure fissurée ? Et quelle est la limite de cette réduction ?

Pour répondre à ces questions, nous considérons le cas où la fissure est fixe et nous comparons la modélisation bi-modèle Arlequin à un monomodèle discrétisé par la méthode X-FEM.

4.4.1.1 Modélisation

On considère une poutre 2D fissurée en son milieu et sollicitée en flexion trois points (voir figure 4.8). Elle est de longueur L , de hauteur H et d'épaisseur e . Les appuis sont situés symétriquement par rapport au plan milieu de la poutre et ils sont distants d'une longueur D . On suppose qu'il existe, initialement, une fissure verticale, située au niveau du milieu du bord inférieur de la poutre et de longueur a_0 . Soit F_s un effort surfacique constant appliqué sur une largeur l du bord supérieur de la poutre (cf. figure 4.8).

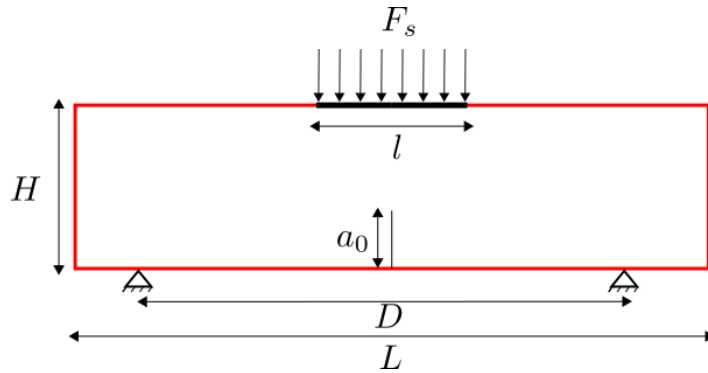


FIGURE 4.8 – Test de la poutre en flexion 3 points

On suppose que la poutre est homogène isotrope et élastique de module d'Young E , de coefficient de poisson ν et de masse volumique ρ .

Étant donné que la fissure est sollicitée en mode I, on calcule, à chaque instant t , le facteur d'intensité de contrainte $K_I^{dyn}(\dot{a} = 0)$. D'après [Bui78], la variation du facteur d'intensité de contrainte peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta K_I^{dyn} = K_{I,max}^{dyn} - K_{I,min}^{dyn} = 2K_I^{stat} = 2\sigma\sqrt{\pi a_0}F\left(\frac{a}{H}\right) \quad (4.98)$$

où $F(\frac{a}{H})$ est une fonction sans dimension et σ est la contrainte à la pointe de la fissure. Ils sont exprimés respectivement par les équations 4.99 et 4.100.

$$\begin{cases} F(x) = 1.09 - 1.735x + 8.2x^2 - 14.18x^3 + 14.57x^4 & (4.99) \\ \sigma = \frac{6DlF_s}{4eH^2} & (4.100) \end{cases}$$

4.4.1.2 Données numériques

On donne la longueur de la poutre $L = 0.05m$, la hauteur $H = 0.01m$ et l'épaisseur $e = 1m$. Les appuis sont situés à une distance $D = 0.04m$ et on applique un chargement $F_s = 400Pa$ sur une longueur $l = 0.002m$. Initialement, la fissure est de longueur $a_0 = 0.005m$. Les paramètres matériau sont donnés par le tableau (4.1).

Module de Young	E	$190GPa$
Masse volumique	ρ	$800Kg.m^{-3}$
Coefficient de Poisson	ν	0.25
Ténacité dynamique d'initiation, propagation et arrêt	$K_{Id} = K_{IM} = K_{Ia}$	$68MPa\sqrt{m}$

TABLE 4.1 – Les données matériau

Par la donnée numérique de la géométrie et des paramètres matériau, on propose de faire 3 calculs sur différents modèles. Le premier est un mono-modèle ayant un maillage grossier (10×50 éléments). Le deuxième est un mono-modèle avec un maillage plus fin (20×100 éléments). Le troisième calcul est un bi-modèle Arlequin dont le substrat est maillé grossièrement. Le patch Arlequin est centré sur la pointe de la fissure avec un rayon $r_p = 0.0035m$. Il est couplé avec le substrat sur une épaisseur de $0.0012m$. Le patch est maillé par des éléments Q4 de taille $6.10^{-5}m$ (voir figure (4.9)).

Pour l'intégration temporelle, on utilise un schéma de Newmark d'accélération moyenne. Le calcul est fait sur une durée $T = 300\mu s$, avec un pas de temps $\Delta t = 1\mu s$. On suppose que la fissure est fixe et que le domaine d'intégration de J est circulaire de rayon $d \leq r_p$.

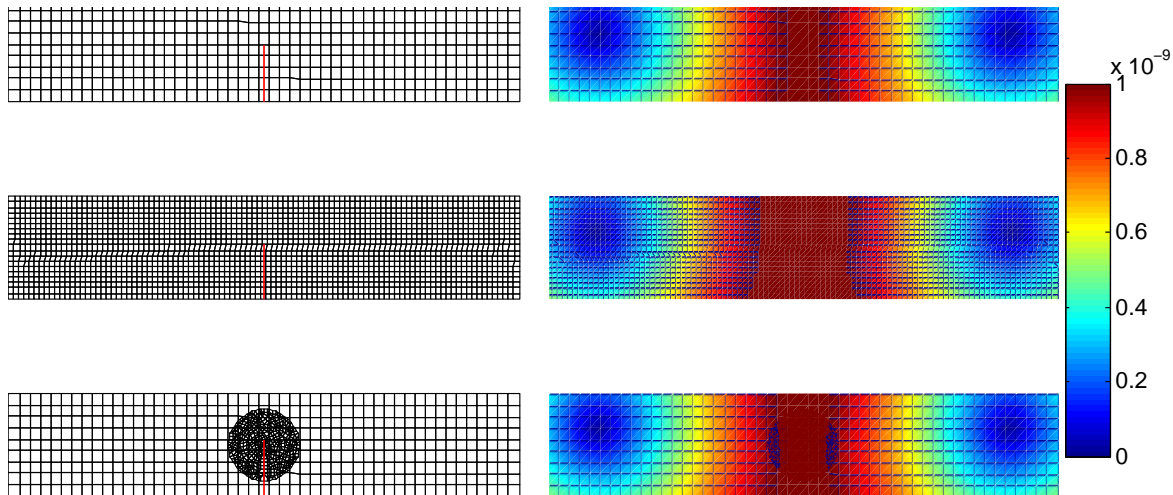


FIGURE 4.9 – Maillages (à gauche) et champs de la norme des déplacements (à droite) à l'instant $t = 75\mu s$ pour les 3 cas

4.4.1.3 Analyse des résultats

Le but de ces calculs est d'analyser l'influence de la finesse du maillage sur la qualité de la détection de la zone de concentration de contrainte. Pour ce faire, on trace pour chaque cas le champ de contraintes de Von-Mises (voir figure (4.10)).

Sur la figure (4.10), on observe bien que dans le cas du mono-modèle avec un maillage grossier, les contraintes de Von-Mises sont concentrées autour de la pointe de la fissure mais pas autant que dans le cas où l'on utilise un maillage plus fin pour le mono-modèle.

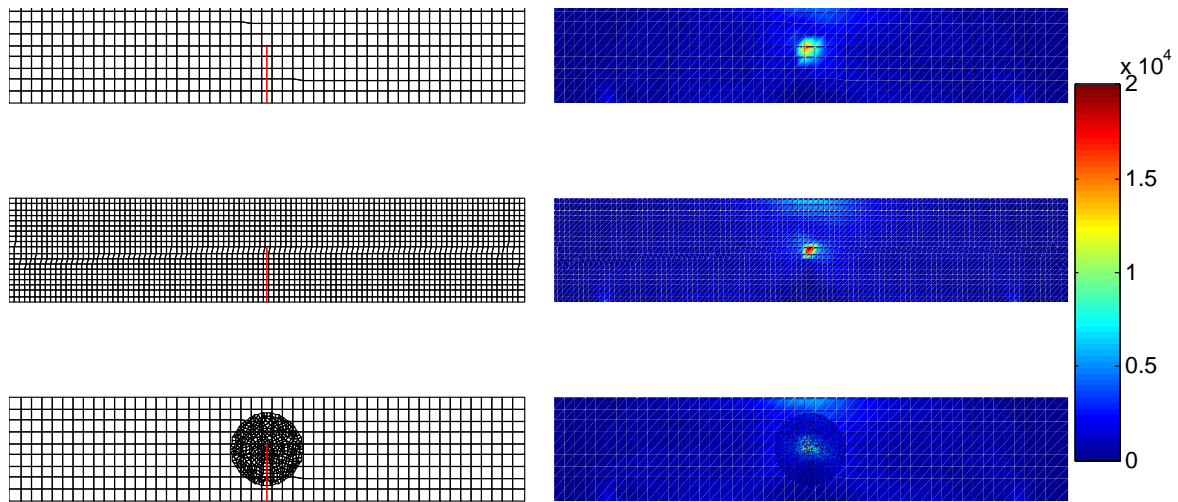


FIGURE 4.10 – Maillage (à gauche) et Champs de contraintes de Von-Mises (à droite) à l’instant $t = 75\mu s$ pour les 3 trois cas

Pour un bi-modèle Arlequin, avec un patch très fin, utilisé au voisinage de la pointe de fissure et un substrat grossier, comme le montre le 3ème cas de la figure (4.10), on observe que la zone de concentration du champ de contraintes de Von-Mises, proche de la pointe de la fissure, n’a plus la forme d’un disque comme dans les deux cas mono-modèles. Elle prend la même forme que celle que donne le champ théorique asymptotique. Ainsi, non seulement la solution Arlequin est plus proche de la solution théorique, mais elle est plus économe en temps calcul.

La fissure étant sollicitée en mode I, nous comparons les facteurs d’intensité des contraintes dans les trois cas cités précédemment. On trace dans la figure (4.11) les facteurs de concentration des contraintes K_I en fonction du temps : en bleu pour le mono-modèle avec un maillage grossier, en vert pour le mono-modèle avec un maillage fin et en rouge pour le bi-modèle Arlequin avec un patch fin et un substrat grossier.

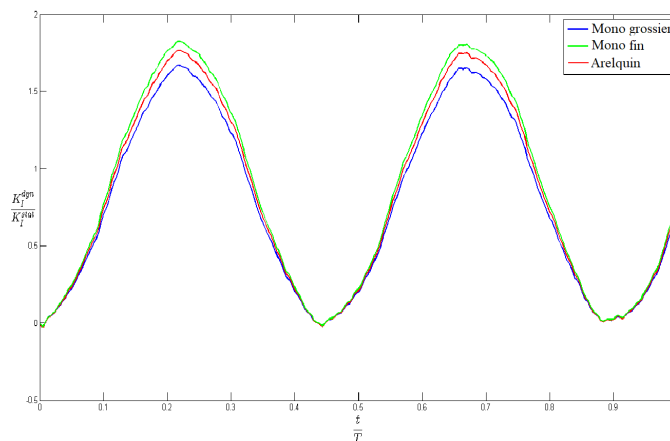


FIGURE 4.11 – Facteur d’intensité de contrainte K_I pour les différents modèles numériques

On observe dans la figure (4.11) la valeur maximale des facteurs d’intensité des contraintes dynamiques valent quasiment 2 fois le facteur d’intensité de contrainte statique, comme montré par Bui dans (4.98) théoriquement. Les trois courbes varient de manière synchrone au cours du temps, mais présentent une légère différence au niveau de leurs maxima. Les maxima des courbes en vert (mono-modèle fin) et en rouge (bi-modèle Arlequin) ont une valeur autour de 1.8. Elle est proche de la valeur théorique. Alors que

les maxima de la courbe en bleu (mono-modèle grossier) est plus proche de 1.6, soit un écart de plus de 10 pour cent, par rapport au modèle fin. Ces résultats consolident les résultats précédents et montrent encore une fois la pertinence de la modélisation Arlequin pour capter la singularité due à la fissuration.

4.4.1.4 Influence de la géométrie du patch

Maintenant, on s'intéresse à l'influence de la taille du patch Arlequin. On considère 3 rayons différents du patch Arlequin : 0.0015m (en jaune), 0.0025 (en rouge) et 0.0035 (en bleu) comme montré dans la figure (4.12).

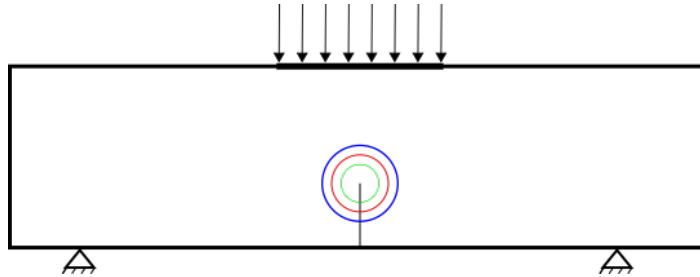


FIGURE 4.12 – Trois différentes dimensions du rayon du patch Arlequin

Dans la figure 4.13, on présente par les mêmes couleurs l'évolution du facteur d'intensité de contrainte en mode I au cours du temps pour chaque rayon du patch. L'axe temporel est normalisé par la durée d'étude T et les facteurs d'intensité des contraintes sont normalisé par K_I^{stat} .

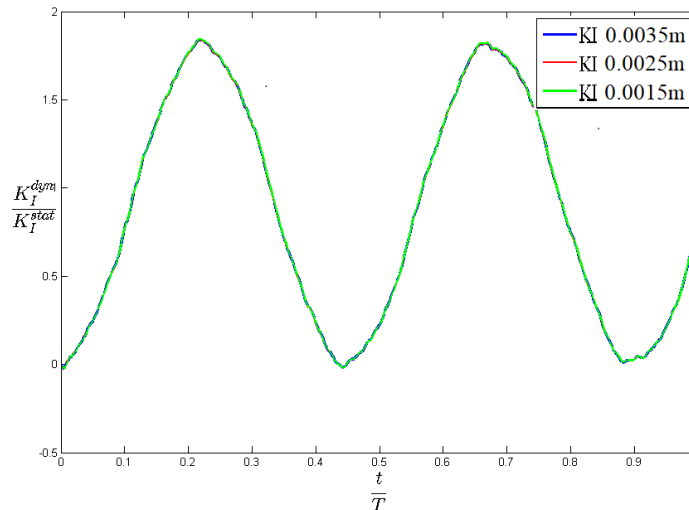


FIGURE 4.13 – Facteur d'intensité de contrainte pour différents choix des rayons du patch Arlequin

Pour différentes valeurs du rayon r_p du patch, les trois courbes représentées sont quasiment confondues, ce qui traduit l'indépendance du calcul du facteur d'intensité de contrainte du rayon du patch choisi, d'où la robustesse de la méthode. Ce résultat donne plus de flexibilité quant au choix du rayon du patch fin attaché au fond de la fissure. Sachant que nous avons utilisé un couplage classique avec un espace médiateur discret grossier, nous analysons en ce qui les 3 approche couplage réduit par appariement et leur influence sur le calcul des facteurs de concentration des contraintes.

4.4.1.5 Couplage Arlequin réduit

On propose maintenant de tester les différents opérateurs de couplage développés dans le chapitre 3 sur le même cas d'une fissure fixe sollicitée en mode I.

Couplage par appariement modaux Nous souhaitons dans ce paragraphe réduire le couplage Arlequin par l'appariement des modes propres dynamiques. Nous calculons, d'abord, les modes propres du patch et du substrat restreints à la zone de couplage. Nous considérons, pour cela, des conditions aux limites de bord libre. Le résultat de la résolution des deux problèmes aux valeurs propres donne 320 modes pour le substrat et 2238 modes pour le patch. Nous représentons dans la figure (4.14) un exemple de couple de modes appariés.

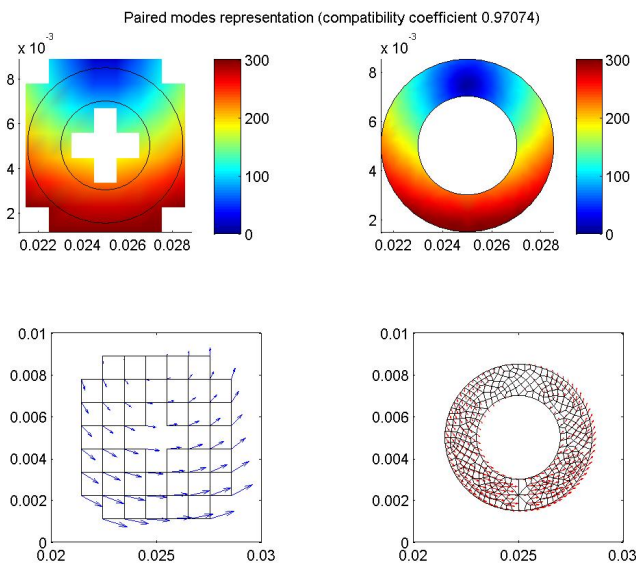


FIGURE 4.14 – Un couple de modes appariés du substrat (à gauche) et du patch (à droite) - représentation normale (en haut) et représentation vectorielle(en bas)

Les modes propres du substrat sont calculés sur tous les degrés de libertés dont le support des fonctions de forme intercepte la zone de couplage et, ensuite, l'opération d'appariement est évaluée seulement sur la zone de couplage par un produit L^2 . On observe, dans la représentation de la norme des modes, une vraie ressemblance sur la zone de couplage (limitée par les deux cercles en noir). Cette ressemblance est quantifiée par un coefficient de compatibilité qui est de 0.964 pour ces modes. Ce coefficient sert à filtrer les couples de mode qu'on juge non compatible par la méthode de $(1 - \varepsilon)$ - *compatibilité*, comme expliqué dans le chapitre 3.

Pour une valeur de $\varepsilon = 1$, nous considérons l'espace de 0 - *compatibilité*. Cet espace est généré par tous les couples de modes appariés. Avec un tel espace, le couplage est de très mauvaise qualité. Il ne permet pas de transmettre les signaux entre les deux modèles. Il est, donc, nécessaire, de réduire l'espace par un choix de ε suffisamment petit afin de ne garder que les couples de modes qui permettent d'obtenir le maximum de transmission. La meilleure solution est de considérer un espace totalement compatible ($\varepsilon = 0$). Mais les modes propres évalués numériquement ne peuvent pas être toujours exactement égaux, alors, nous tolérons une faible incompatibilité entre les modes appariés pour tenir compte des erreurs numériques dans le calcul des vecteurs propres.

Couplage par appariement par minimisation de l'écart cinématique Différemment au couplage par appariement modaux, ce couplage est basé sur la décomposition en valeurs singulière de la matrice de couplage. Dans la figure (4.15), nous représentons un exemple de couple de modes appariés par minimisation de l'écart cinématique.

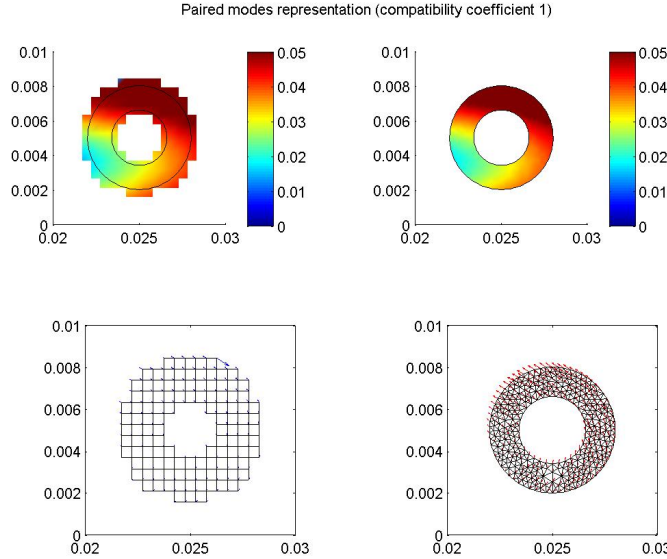


FIGURE 4.15 – Un couple de modes calculés par par minimisation de l'écart cinématique du substrat (à gauche) et du patch (à droite) - représentation normale (en haut) et représentation vectorielle(en bas)

On constate que le couple de modes de la figure (4.15) qui est de même ordre que les ceux des figures (4.14) et (4.16) et est différent. Ce résultat est attendu puisque dans les deux cas précédents nous calculons des modes physiques qui dépendent de la nature du matériau tandis que les modes calculé par la minimisation de l'écart cinématiques sont des vecteurs indépendants des paramètres du matériau et représentent une décomposition de l'opérateur de couplage. En effet, les modes dont la valeur singulière associée est nulle sont ceux qui minimisent l'écart entre les vitesses et par conséquent sont générateurs du noyau de l'opérateur de couplage. En discret, ce noyau est approximé par les vecteurs dont la valeur singulière est proche de 0 à un ε prêt.

Couplage par appariement par projection/accommodation Ce troisième couplage consiste à construire des couple de modes appariés en projetant, par rapport au produit scalaire de couplage les vecteurs propres du modèle substrat réduit à la zone $\Omega_c(t)$ sur $\underline{W}_{h_2}(t)/\Omega_c(t)$. Cette opération génère moins d'erreurs d'appariement que le couplage précédent. Par exemple, dans la figure (4.16), nous représentons un exemple de couple de modes calculés par accommodation.

On observe que le coefficient de compatibilité dans le cas de l'appariement par accommodation est égal à 1, ce qui signifie que ce couple de modes est un vecteur de base de l'espace totalement compatible alors qu'il ne l'était pas dans le cas du couplage par appariement modal. Cela signifie qu'on peut réduire encore d'avantage l'espace médiateur en utilisant cette approche en comparaison au couplage par appariement modal.

Pour comparer ces trois méthodes de couplage réduit, nous considérons que $\varepsilon = 10^{-4}$ pour les couplage par appariement modal et par appariement par projection et $\varepsilon = 10^{-10}$ pour l'appariement par minimisation (proximité cinématique des modèles superposés). Ce choix des valeurs de ε correspond à une même réduction de l'espace

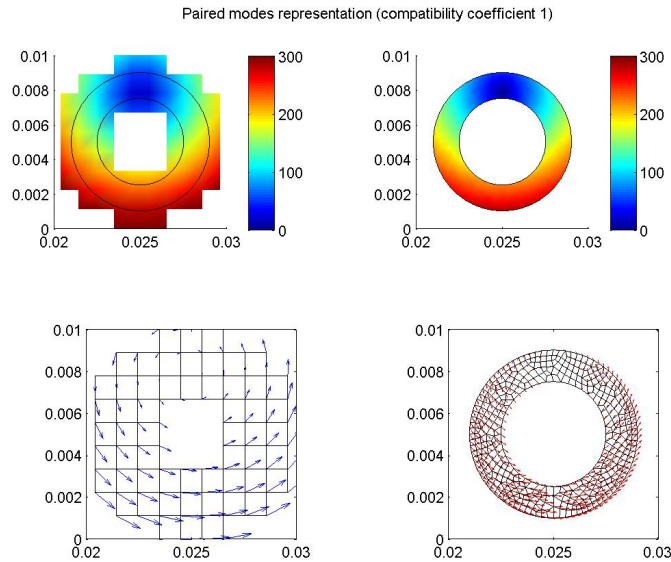


FIGURE 4.16 – Un couple de modes calculés par appariement du substrat (à gauche) et du patch (à droite) - représentation normale (en haut) et représentation vectorielle(en bas)

médiateur exprimé par un indice de compatibilité $I_c = 0.12$. Évaluons, donc, la variation des facteurs d'intensité des contraintes K_I pour chaque méthode de couplage réduit par appariement (voir figure (4.17)).

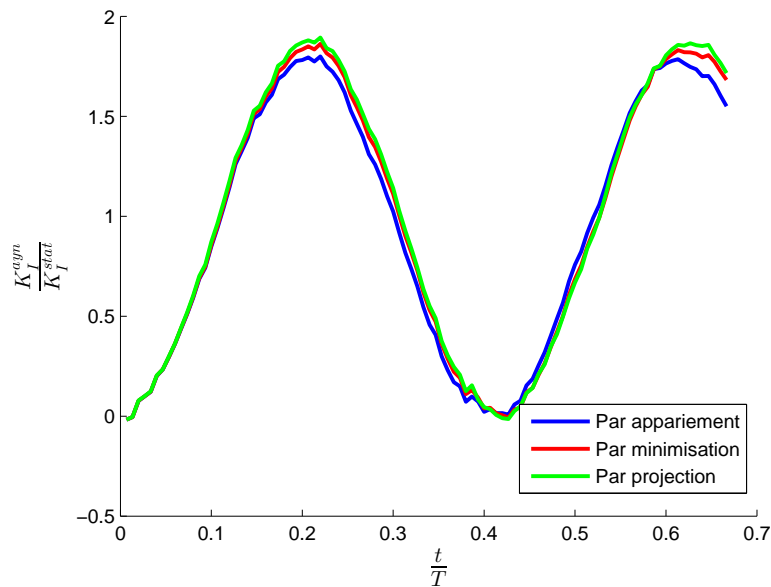


FIGURE 4.17 – Variation des facteurs d'intensité de contrainte pour les 3 approches différentes de réduction

Nous observons, dans la figure (4.17), que la variation du facteur d'intensité des contraintes du mode d'ouverture K_I pour un couplage réduit suit la même que celle pour un couplage classique (cf. (4.13)). Les courbes correspondants au couplage par projection (en vert) et par minimisation (en rouge) sont très proches et atteignent une amplitude maximale d'environ 1.8. La courbe correspondante à un couplage par appariement modal (en bleu) montre une amplitude maximale légèrement en dessous de 1.8, qui est dû au manque de précision de couplage moyennant cette approche.

Pour comparer les coûts de calculs, nous avons évalué les temps de calcul des matrices de couplage et de résolution pour chaque approche dans le tableau (4.2).

Couplage	par appariement modal	par minimisation de l'écart	par appariement par projection	classique
Temps de calcul des matrices de couplage	59s	49s	50s	34s
Temps de résolution	2m29s	2m29s	2m29s	3m16s

TABLE 4.2 – Évaluation du temps de calcul pour 3 différents approches de couplage réduit

Dans le tableau (4.2), nous observons que la réduction utilisant l'une ou l'autre des approches de réduction par appariement est pénalisante en temps de calcul des matrices de couplage qui se fait dans la phase du prétraitement. Parmi ses approches, l'appariement par minimisation de l'écart et par projection nécessitent moins de temps de calcul pour l'évaluation des matrices de couplage par rapport à l'appariement modal. Cependant, nous remarquons qu'il y a un gain considérable en temps de résolution par rapport à l'approche classique de couplage qui considère tout l'espace grossier restreint à la zone de couplage.

Ces résultats sont satisfaisants pour des applications multi-échelles en dynamique 2D ayant un patch Arlequin et une zone de couplage fixe. La situation peut être plus délicate lorsque le patch devient évolutif, ce qui motive les tests numériques que nous présenterons en ce qui suit.

4.4.2 Modes mixtes

Il s'agit maintenant de simuler un essai de propagation proposé dans la littérature afin de tester les modifications apportées par la modélisation multi-échelle Arlequin. On propose de réaliser le cas test de Kalthoff et Winkler [KW88] qui sollicite une plaque en mode mixte (mode I et mode II).

4.4.2.1 Description de l'expérience de Kalthoff et Winkler

L'expérience de Kalthoff et Winkler [KW88] consiste à impacter une éprouvette de forme rectangulaire qui contient, initialement, deux entailles parallèles entre elles et identiques par le billet d'un projectile cylindrique (cf. figure 4.18). Selon la vitesse du projectile ou la nature du matériau ou la température de l'expérience. Suivant la vitesse du chargement, la trajectoire de la fissure change en sollicitant différents modes.

Pour des vitesses faibles du projectile, l'essai montre que la fissure se propage suivant un angle de 70° par rapport à la direction de l'entaille donnée initialement. Cette direction de propagation est importée par la sollicitation en mode I de traction.

En effet, la fissure dans cette expérience est sollicitée en mode mixte, mais selon la vitesse de l'impact un des deux modes importe. Alors, dans cette sous-section, nous nous intéressons à la modélisation de cet essai avec un bi-modèle Arlequin. Pour valider les résultats des calculs, on se réfère à [Kal00, Rét05] pour comparer les résultats numériques avec ceux trouvés dans la littérature.

4.4.2.2 Modélisation

L'éprouvette de l'essai est une plaque rectangulaire contenant initialement deux fissures identiques, situées symétriquement par rapport au plan médian, divisant la plaque en

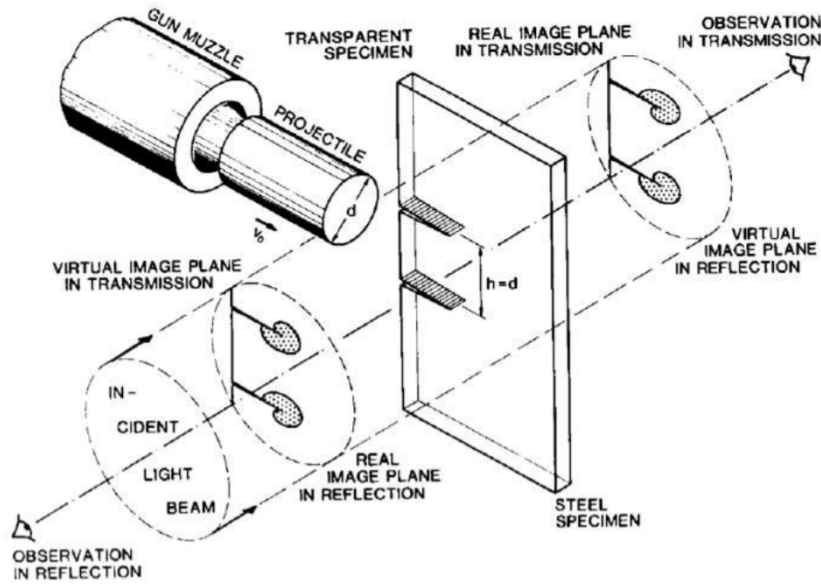


FIGURE 4.18 – Schéma de principe de l'expérience de Kalthoff et Winkler - Schéma tiré de [Kal00]

deux (cf. figure (4.19)).

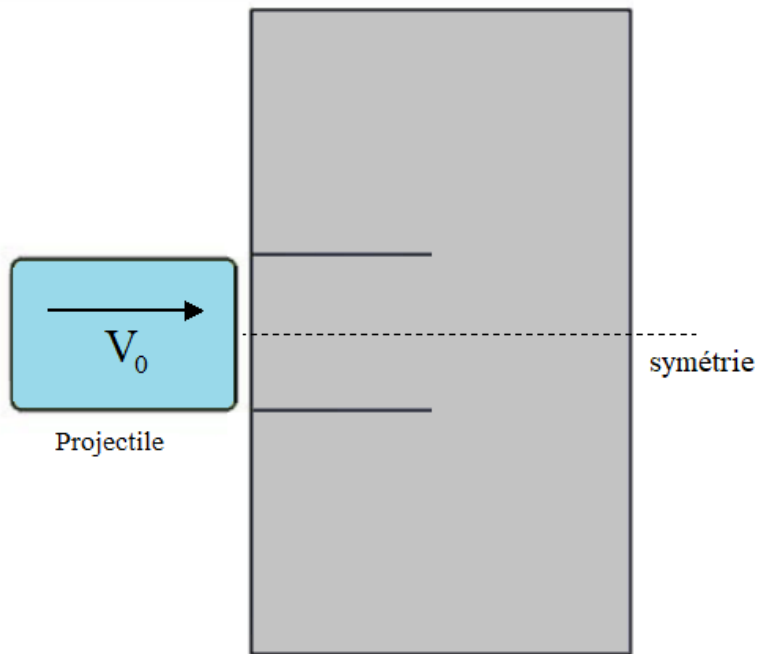


FIGURE 4.19 – modèle de plaque fissurée sollicitée en mode mixte

Le projectile impacte la plaque avec une vitesse constante. Pour réduire la dépendance à la discrétisation spatiale du signal généré suite à l'impact, nous modélisons la variation de la vitesse par une rampe sur une faible durée de $3\mu s$ pour atteindre la valeur constante de l'essai (voir figure (4.20)).

Le problème étant symétrique, nous ne considérons que la moitié de la plaque qui est rectangulaire, élastique, homogène et isotrope de dimension $L \times H \times e$. La plaque est encadrée sur l'arrête supérieure et nous introduisons une condition de bords de symétrie sur l'arrête inférieure (voir fig 4.21). On considère que la fissure initiale est horizontale, de longueur a_0 et située à une hauteur l . La plaque est sollicitée par un impact d'un projectile à une vitesse v_0 .

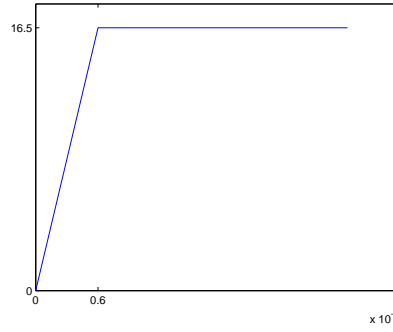


FIGURE 4.20 – Variation de la vitesse du projectile

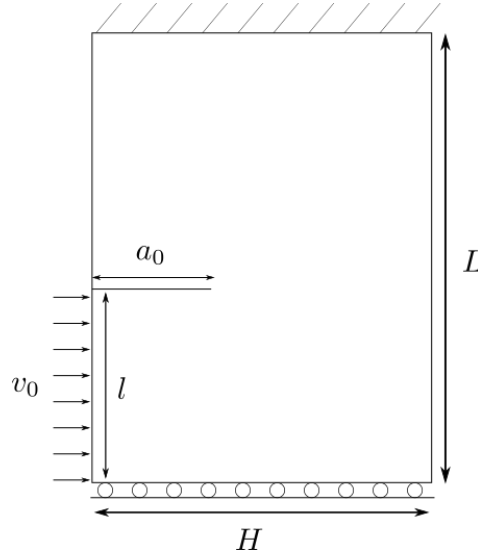


FIGURE 4.21 – modèle géométrique de demi-plaque fissurée impactée

Pour ce cas test, on souhaite étudier la propagation dynamique de la fissure en mode mixte pour une modélisation Arlequin et analyser les différents résultats et les comparer aux résultats trouvés dans la littérature afin de soulever les avantages apportés par cette modélisation multi-échelle. Pour cela, on se réfère à la solution analytique développée par [LF90] et aux essais menés par Kalthoff [Kal00].

4.4.2.3 Données numériques

La largeur de la plaque est considéré $H = 0.1m$ et sa longueur est $L = 0.1m$. La fissure initiale est de longueur $a_0 = 0.05m$ située à une hauteur $l = 0.03m$ et la vitesse du projectile est constante de valeur $v_0 = 16.5m.s^{-1}$. Le matériau considéré est un acier Maraging 18Ni1900 avec une loi élastique linéaire isotrope donné par le tableau 4.3. Pour la discrétisation temporelle, nous considérons un schéma de Newmark d'accélération moyenne sur un intervalle de longueur $2\mu s$ avec 100 pas de temps.

Module de Young	E	$200GPa$
Masse volumique	ρ	$7830Kg.m^{-3}$
Coefficient de Poisson	ν	0.3
Célérité des ondes de Rayleigh	c_R	$2800m.s^{-1}$
Ténacité dynamique d'initiation, propagation et arrêt	$K_{Id} = K_{IM} = K_{Ia}$	$68MPa\sqrt{m}$

TABLE 4.3 – Paramètres matériau de l'acier Maraging 18Ni1900

Pour la discrétisation en espace, nous considérons un bi-modèle Arlequin : un substrat maillé avec des éléments Q4 de taille $0.002m$ et un patch centré sur la pointe maillé par des éléments (triangles T3 et quadrangle Q4) plus fins de rapport de taille de 6. Les tailles du patch et de la zone de couplage sont calculées automatiquement de telle à satisfaire les considérations numériques de modélisations exposées dans la sous-section (4.3.3.2) (voir figure (4.22)). Cela donne un rayon de patch $r_p = 0.014m$ et une largeur de zone de couplage de $0.0082m$.

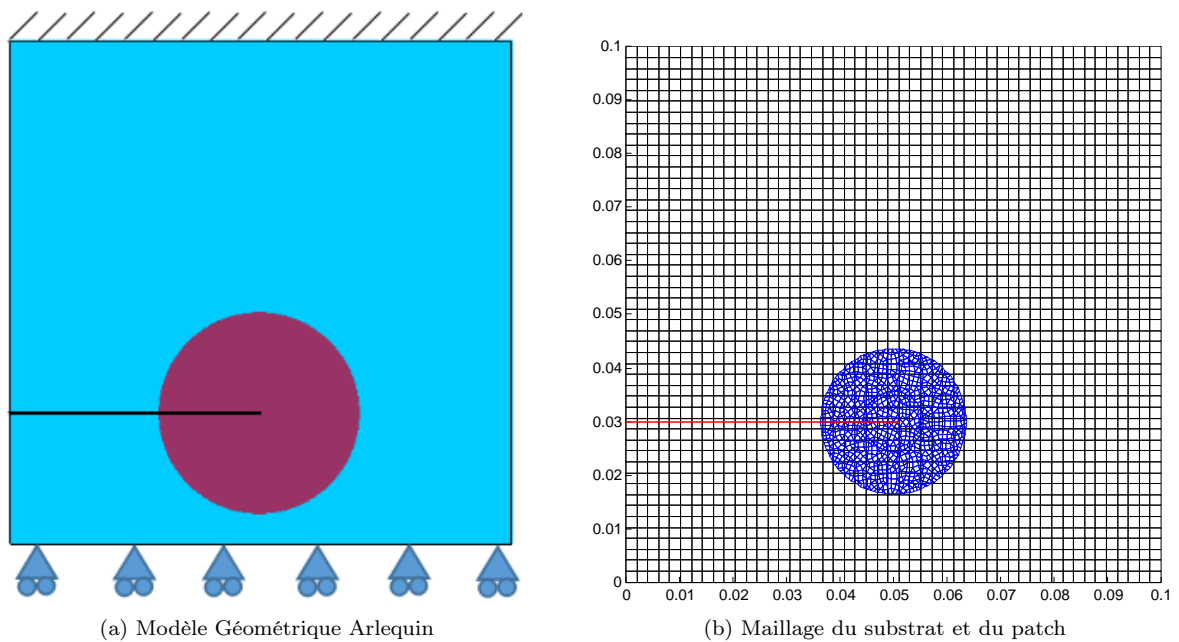


FIGURE 4.22 – bi-modèle Arlequin d'une demi-plaque fissurée

Pour partitionner les énergies, nous utilisons des fonctions de partition d'énergie constantes tels que $\alpha_1^k = \alpha_1^m = 0.01$. Le coefficient d'amortissement est de l'ordre de $4e^9$, ce qui satisfait la condition établie dans (2.67).

4.4.2.4 Analyse des résultats

Pour une vitesse de projectile $V_0 = 16.5ms^{-1}$, nous représentons la déformée du maillage du modèle Arlequin à deux échelles de représentation dans la figure(4.23). La déformation représentée est amplifiée par une échelle de ($\times 2$). Nous représentons pour 6 instants différent l'évolution du patch Arlequin pour suivre l'avancement de la fissure au cours du temps.

Nous observons que la fissure bifurque dès le premier pas d'avance à l'instant $t = 34\mu s$. A partir de cet instant jusqu'à l'instant $t = 90\mu s$, elle suit une trajectoire presque droite. La propagation de la fissure est accompagnée par une évolution du patch Arlequin remaillé, à chaque instant où la fissure avance, pour représenter le plus précisément possible sa géométrie, localement, proche du fond de la fissure. Nous affichons la trajectoire finale parcourue par la fissure dans la figure (4.24) au bout de 50 pas de calcul. Nous observons que la trajectoire de la fissure présente un angle de propagation autour de 70° . Ce résultat correspond à la trajectoire caractéristique de la rupture fragile du même problème obtenu avec d'autres méthodes dans la littérature et validée expérimentalement, comme les différents résultats, montrés dans la figure (4.25) (tiré de [SWB08]).

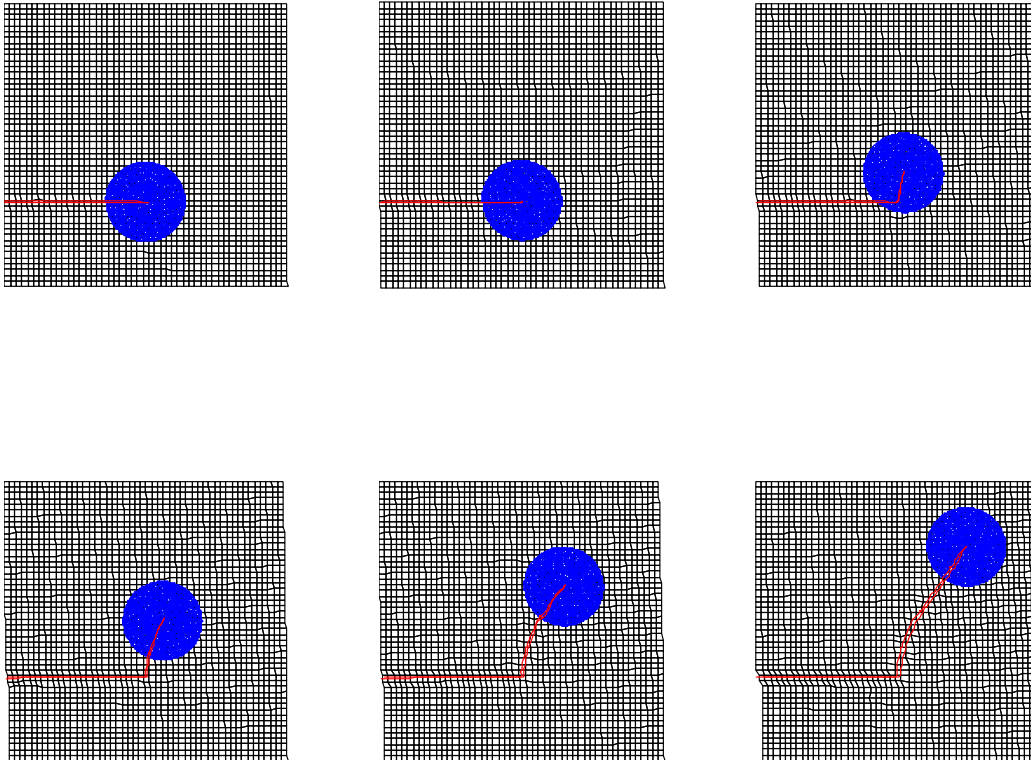


FIGURE 4.23 – Évolution du trajet de la fissure simulation de l'expérience de Kalthoff et Winkler ($V_0 = 16ms^{-1}$) pour $t = 20\mu s$, $t = 34\mu s$, $t = 48\mu s$, $t = 62\mu s$, $t = 72\mu s$, et $t = 90\mu s$

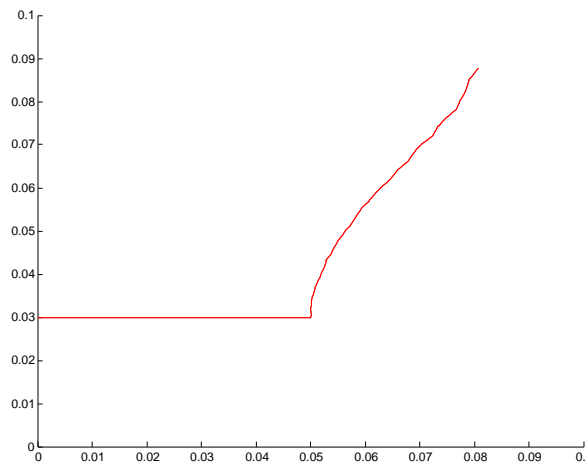


FIGURE 4.24 – Trajet de la fissure pour une vitesse d'impact $V_0 = 16.5ms^{-1}$

Observons ici que le cadre de modélisation multi-échelle Arlequin, utilisé ici, mettant en jeu une discrétisation EF sur le patch et une discrétisation EF enrichie du substrat par la seule fonction Level-Set à la *X-FEM*, (reproduisant ainsi simplement la coupe matière, comme dans citer Ben Dhia, Jamond, 2010, en quasi-statique) offre plus de flexibilité, par rapport à la méthode X-FEM en mono-modèle, pour le traitement de problèmes de propagation de fissures, en général (on peut, par exemple, envisager d'autres types de comportements ou même de représentations physiques locaux du matériau, au voisinage du fond de fissure). De plus, sachant que le pas d'avance de la fissure dépend, en général de sa vitesse de propagation, même dans le cadre élastique, le cadre Arlequin permet de lever une limitation importante de la méthode X-FEM classique liée au fait que, par cette approche la fissure ne peut pas être propagée, progressivement, dans un même élément, entre deux instants successifs de propagation, à

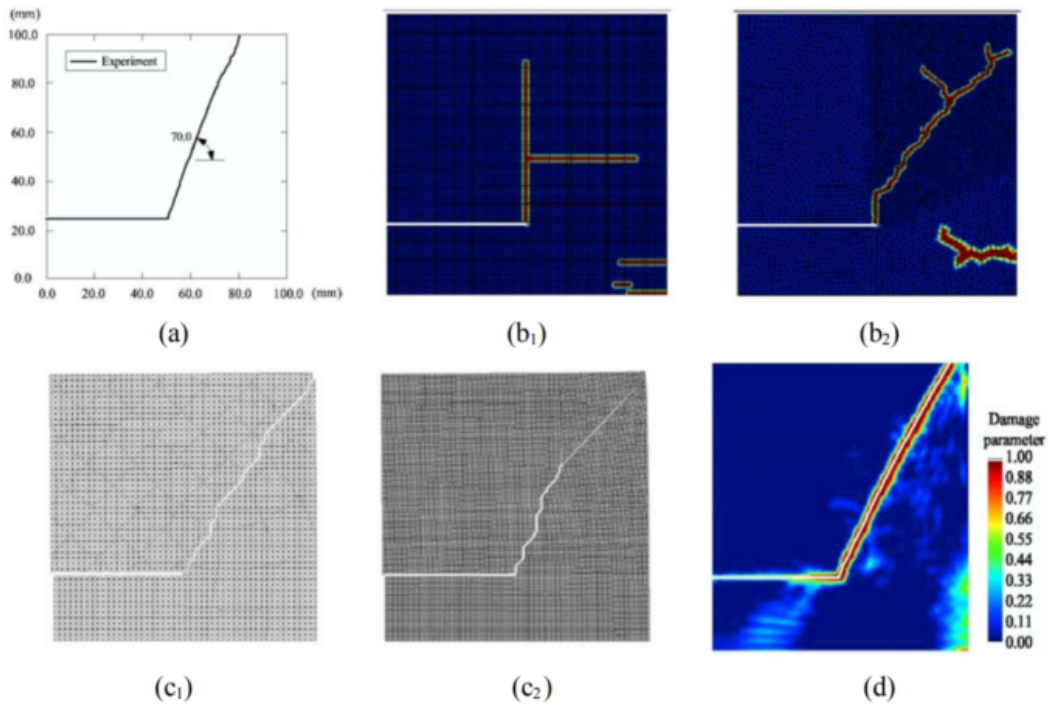


FIGURE 4.25 – Comparaison de plusieurs méthodes numériques sur le cas de Kalthoff : (a) Résultat expérimental, (b₁) et (b₂) Méthode d'élimination d'éléments avec un maillage structuré et non structuré, (c₁) et (c₂) Méthode des zone cohésives avec des maillages structurés 50 × 50 et 100 × 100, (d) Méthode X-FEM avec un maillage structuré 100 × 100.

moins de recourir à un raffinement de maillage au voisinage du fond de fissure, diminuant ainsi un des plus grands intérêt pratiques de cette méthode. Pour la modélisation multi-échelle dynamique de la fissure que nous détaillons dans ce chapitre, ce problème ne se pose pas l'ajustement du patch Arlequin fin qui permet, a priori, de représenter avec autant de précision que voulue la géométrie de la fissure et du maillage situés dans son voisinage.

Dans la problématique traitée, c'est en utilisant le critère énoncé dans l'équation (4.52) qu'on calcule la vitesse de propagation de la fissure à tout instant (de discrétisation temporelle). Nous représentons, alors, la variation de la vitesse de propagation de la vitesse au cours de la simulation dans la figure (4.26) pour le test de Kalthoff.

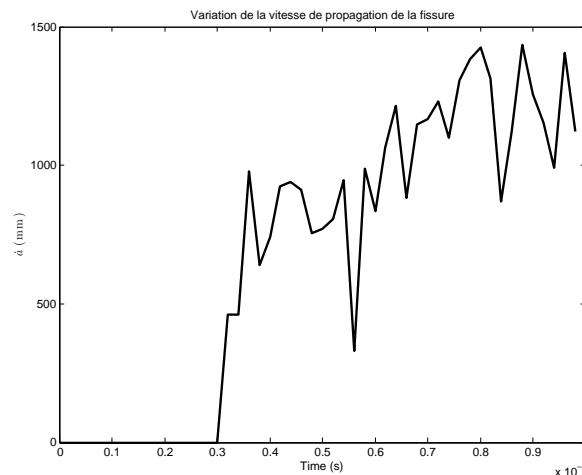


FIGURE 4.26 – Variation de la vitesse de propagation de la fissure au cours du temps

Constatons, ici, que la fissure se propage à une vitesse variable. Cette variabilité de la

vitesse de propagation induit une variation du pas d'avance de la fissure qui dépend, bien évidemment, de la discrétisation du patch. Pour cela, nous considérons dans ce travail que, lorsque la fissure se propage, le patch Arlequin garde la même finesse après remaillage.

En plus de la précision de la représentation géométrique de la fissure, le raffinement de la discrétisation autour de la pointe de la fissure permet, potentiellement de capter des ondes de surfaces libres au niveau des lèvres de la fissure, dans sa propagation au cours du temps. Nous représentons dans la figure (4.27) l'évolution du champ de vitesse à 6 instants différents de la simulation. Sur certains snapshots ($t = 72\mu s, 90\mu$), nous pouvons observer clairement ce phénomène, dans le patch, ainsi que les propagations induites dans le restant de la plaque. Nous rappelons, ici, qu'un amortissement dont le coefficient est choisi automatiquement en respectant les conditions avancés au chapitre 2, est appliqué sur la zone de couplage pour amortir les ondes HF qui ne sont pas admissibles par le modèle substrat grossier.

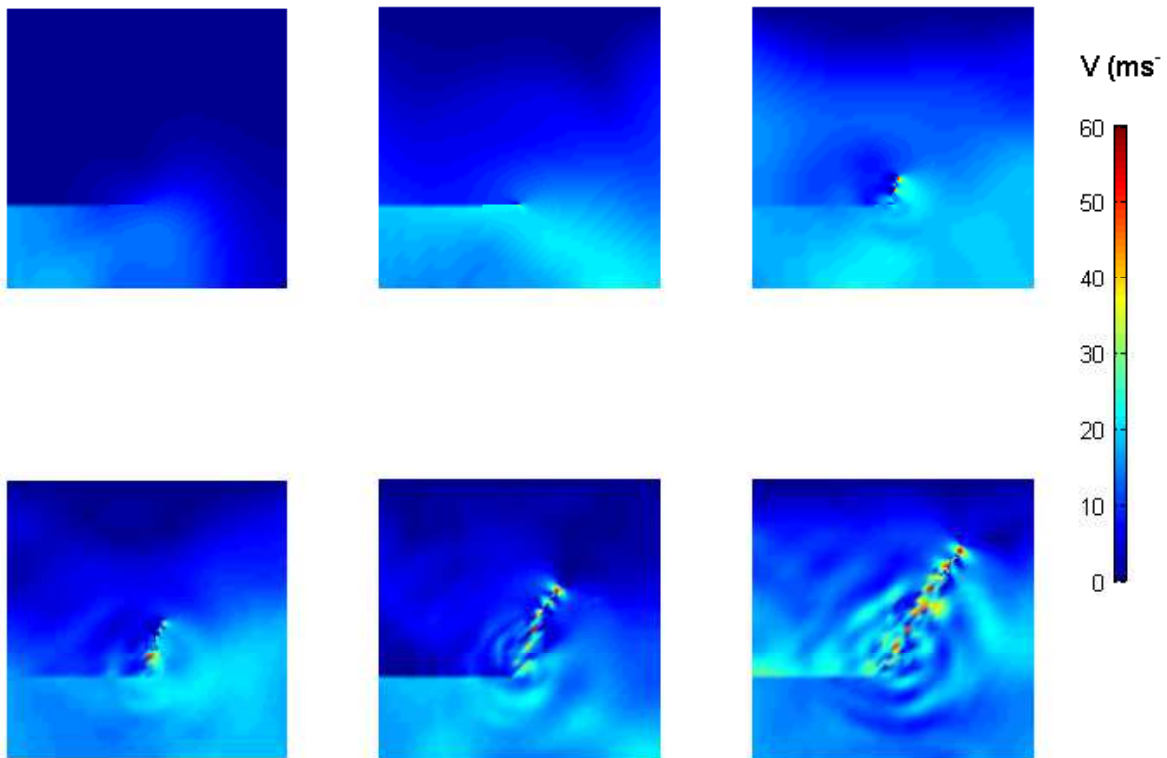


FIGURE 4.27 – Évolution de la vitesse sur la simulation de l'expérience de Kalthoff et Winkler pour $t = 20\mu s, t = 34\mu s, t = 48\mu s, t = 62\mu s, t = 72\mu s, \text{ et } t = 90\mu s$

Dans le même cadre, nous représentons dans la figure (4.28) l'évolution du champ de contraintes de Von-Mises au cours de la propagation.

Pour finir avec les résultats obtenus par simulation dynamique multi-échelle Arlequin avec un couplage classique du cas test de propagation de fissure considéré, nous représentons l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes, aux 6 instants différents considérés, par la figure (4.29).

Nous constatons que les modes I et II de fissuration sont sollicités dans la phase non-propagatrice (mode mixte). Ce résultat est proche des résultats obtenus par les développements théoriques présentés par Freund [Fre73], qui prouve que l'évolution du facteur d'intensité de contrainte est en \sqrt{t} . On constate aussi que le mode de propagation I l'emporte sur le mode II, dès que la propagation de la fissure est initiée. Ce résultat

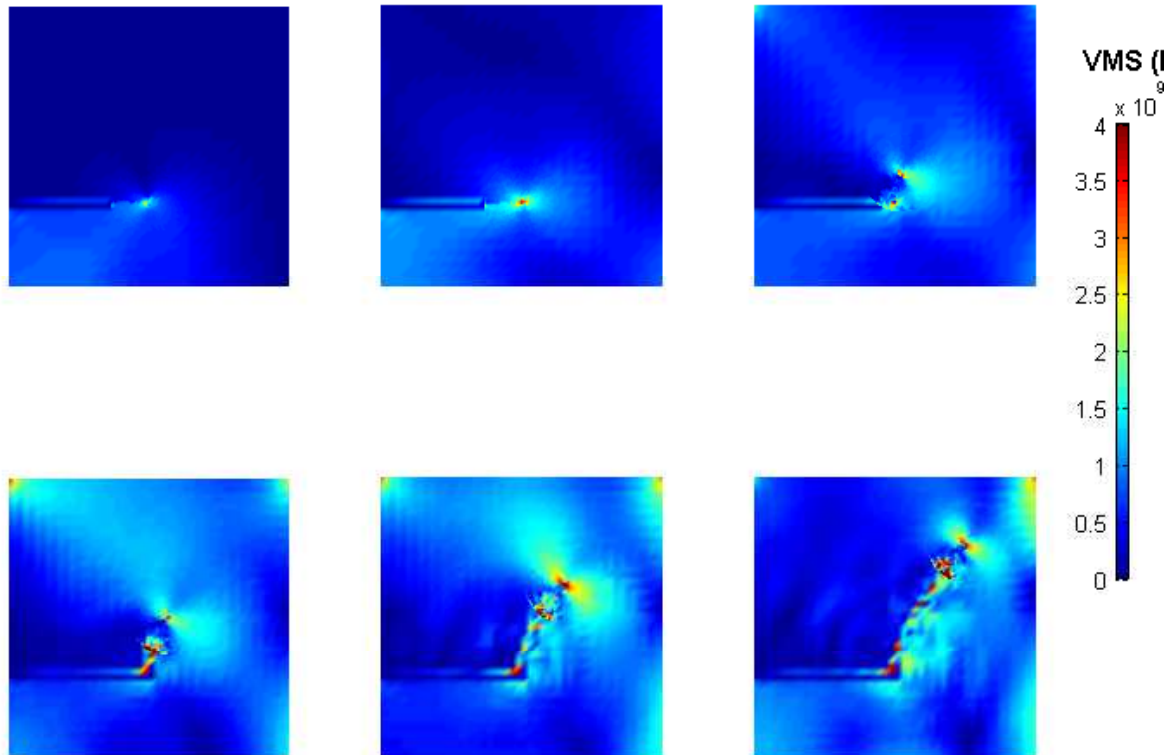


FIGURE 4.28 – Champs de contraintes de Von-Mises pour la simulation de l'expérience de Kalthoff et Winkler pour $t = 20\mu s$, $t = 34\mu s$, $t = 48\mu s$, $t = 62\mu s$, $t = 72\mu s$, et $t = 90\mu s$

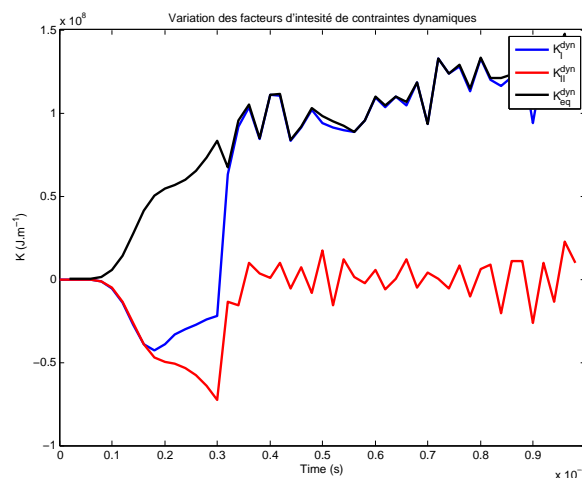


FIGURE 4.29 – Variation des facteurs d'intensité des contraintes au cours du temps

rejoint les travaux de la littérature cités dans la sous sous-section (4.4.2.1) pour une plaque impactée par un projectile à une vitesse $V_0 = 16.5 m.s^{-1}$.

Finalement, pour analyser l'influence de la réduction de l'opérateur de couplage, nous utilisons l'approche d'appariement par projection orthogonale de modes discrets du modèle grossier, restreint à la zone de couplage, sur l'espace EF fin du patch, restreint à la même zone de couplage. Nous identifions alors les couples de fonctions de bases appariées, formant l'espace médiateur réduit (cf. chapitre 3), en utilisant la notion de $(1 - \varepsilon \text{compatibilité})$, permettant de former l'opérateur de couplage réduit. Nous avons pris une valeur de $\varepsilon = 10^{-4}$. Notons que cette méthode d'appariement a été retenue ici parce qu'elle est la moins couteuse et la plus précise comme étayé dans le chapitre 3.

Dans cette application, nous considérons les mêmes données numériques que pour le cas traitant le couplage classique. Nous fournissons la variation de l'indice de compatibilité, au cours de la propagation de la fissure, que nous traçons en fonction du temps dans la figure (4.30).

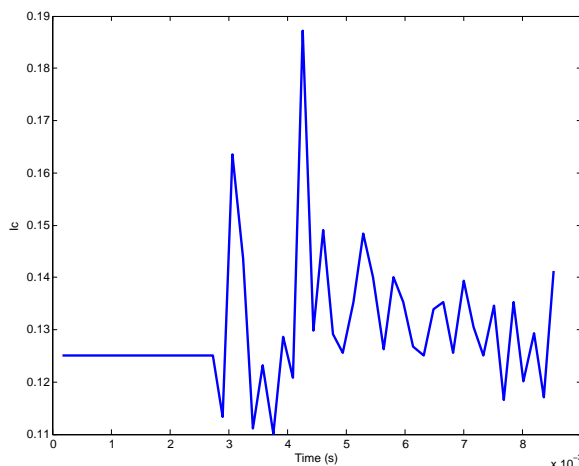


FIGURE 4.30 – Variation de l'indice de compatibilité I_c en fonction du temps

Nous constatons que, pour une valeur constante de ε , la valeur de I_c est presque constante au cours de la propagation du patch qui suit la pointe de la fissure. Avec $\varepsilon = 10^{-4}$, l'espace médiateur classique a été réduit d'environ 87% par rapport à l'espace classique. Cette réduction est très importante et affecte énormément le coût de la résolution du problème multi-échelle de la dynamique de fissuration avec un couplage volumique. La trajectoire de propagation de la fissure qui est montré par la figure (4.31).

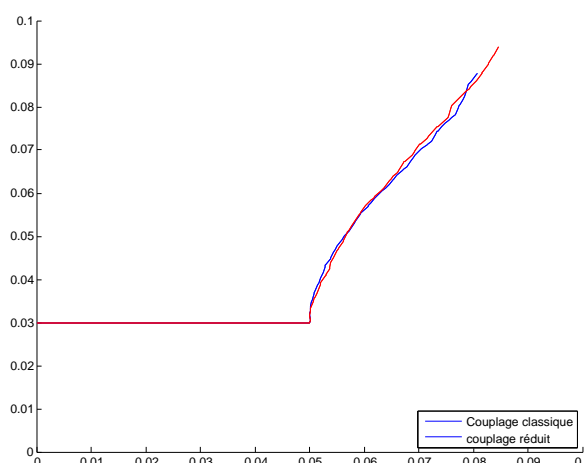


FIGURE 4.31 – Comparaison des trajectoires de la propagation d'une fissure entre un couplage classique et un couplage réduit par accommodation pour $\varepsilon = 10^{-4}$

De plus, nous relevons que, pouvant corroborer des résultats donnés au chapitre 3, la réduction de l'opérateur de couplage donne une trajectoire de propagation de la fissure (cf. figure (4.31)) qui nous semble meilleure que celle obtenue par le couplage Arlequin classique, non réduit, par comparaison aux résultats montrés dans la figure (4.25) et notamment (plutôt rassurant) par comparaison avec le résultat de la figure (4.25c2), obtenu en utilisant un modèle de zone cohésive et un maillage très fin !

4.5 Conclusions

Après avoir rappelé des éléments classiques de la Mécanique de la rupture fragile nécessaires à notre besoin de propagation de fissures, en statique et en dynamique, ce chapitre a été dédié aux formulations continues et discrètes, ainsi qu'à la simulation numérique d'un problème de propagation d'une fissure dans une structure élastique linéaire et bidimensionnelle (pour simplifier la présentation) et ce dans le cadre multi-échelle Arlequin, avec l'hypothèse de localisation des ondes HF. Nous avons pour cela utilisé et éprouvé par une application exigeante tous les éléments que nous avons développés dans les deux chapitres précédents (choix de paramètres, réduction de modèles de couplage, amortissement des ondes non transmissibles,..) en rajoutant des éléments propres à la fissuration en dynamique, tout en nous appuyant sur des travaux réalisés, au sein de l'équipe d'Interactions Structure-Structure du MSSMat tels ceux portant sur la propagation quasi-statique des fissures (en retouchant parfois à certains aspects). Citons, en particulier :

1. La gestion contrôlée des croissances possibles d'une fissure, dans le cadre dynamique ; croissances non forfaitaires comme pour la propagation en quasi-statique, mais gérée par un modèle de croissance, avec une vitesse calculée et un pas de temps physique donné. Et ce, en exploitant la possibilité de raffiner le patch, de la manière la plus appropriée à nos besoins de précision. Ce point nous semble être différenciant de l'approche multi-échelle dynamique développée ici par rapport à une approche de type X-FEM, par exemple. En effet, pour cette dernière, la propagation de la fissure intra-élémentaire n'est pas contrôlable.
2. Tous les tests étudiés dans les chapitres précédents relèvent d'un couplage de type jonction. En revanche, le patch étant attaché à la pointe de la fissure se déplaçant ainsi avec cette pointe, il est constitué par une zone libre (contenant la pointe et sans couplage avec le substrat) et une zone de couplage. Ces situations sont rencontrées et traitées en statique, en accordant un poids très faible au modèle grossier (substrat). Cette façon de faire est possible en statique. En dynamique, elle n'est plus acceptable parce que cela génère des signaux incontrôlables au sein même de la zone libre d'intérêt. Dans ce travail, en tirant profit d'une remarque introduite dans [Dhi06] pour supprimer tous les supports des fonctions de base (EF), entièrement contenus dans la zone libre du patch, tout en supprimant aussi les degrés de liberté portés par ces fonctions de bases. Cette opération a redressé complètement la situation.
3. Enfin (et pas le moindre), nous avons, moyennant la gestion et la programmation de la complexité introduite ici par le cadre Arlequin, pour obtenir des résultats numériques dont la validation a été faite sur la base de tests suffisamment pertinents, tel celui de Kalthoff pour une propagation de fissure en mode mixte, tout en réduisant significativement les coûts des calculs, par l'aspect multi-échelle, mais également par la réduction très importante de l'opérateur de couplage Arlequin.

Conclusions et quelques perspectives

Le travail accompli dans cette thèse vise le traitement par simulation numérique, en des temps acceptables, de problèmes élasto-dynamiques multi-échelles tels la propagation d'ondes sismiques dans le sol, de la source sismique aux fondations d'une structure ou infrastructure d'intérêt (supposées être à une distance suffisamment grande de la source sismique), la propagation dynamique d'une fissure dans un milieu fragile ou le comportement d'un corps élastique impacté, etc.

Pour cela, moyennant une hypothèse de localisation des ondes Hautes Fréquences (HF), contenues dans la source excitatrice, un choix motivé du cadre multi-modèle et multi-échelle Arlequin est fait. Ce cadre, très souple par les paramètres qu'il introduit, permet de coupler des modèles et des échelles très différents d'un même objet mécanique. En contrepartie, il demande, dans ses versions discrètes en particulier, de maîtriser ces paramètres. Plusieurs travaux (aux applications diverses) dont certains sont mentionnés dans ce document ont examiné les bons choix de ces paramètres pour leurs applications. Peu d'entre eux ont été réalisés dans le régime dynamique considéré ici.

Le premier objectif de ce travail est donc de consolider et de rendre davantage fonctionnelle l'extension du cadre Arlequin à la dynamique, en dégageant des choix idoines des paramètres standards impliqués par ce cadre et de ceux, nouveaux, nécessités par l'application. Un autre objectif est de travailler, tout particulièrement, sur l'opérateur de couplage Arlequin, particulièrement sensible en dynamique, avec un fort enjeu sur la précision et les coûts calcul. Le dernier objectif est de valider les choix proposés par des applications allant des plus simples aux plus élaborées, telle celle de la propagation dynamique d'une fissure dans un milieu fragile.

Ces trois objectifs ont formé les sujets des trois chapitres principaux de cette thèse, à savoir les chapitres 2, 3 et 4.

Les conclusions/recommandations principales dégagées du chapitre 2, dédiées aux choix des différents paramètres sont les suivantes.

- Recommandation essentielle : (déjà mentionnée dans d'autres travaux cités dans ce document. Elle est rappelée ici, pour son importance, en dynamique) Le couplage Arlequin en volume, par superposition, est nécessaire en dynamique multi-résolution (sous une forme ou sous une autre). Tout couplage surfacique entre des résolutions différentes verrait les ondes HF, provenant du modèle fin, rebondir sur la surface de couplage. De plus, avec les choix classiques d'espaces de multiplicateurs de Lagrange, appelés espaces Médiateurs (dans le langage Arlequin), seul l'espace grossier peut assurer le couplage entre les modèles grossiers et fins, en permettant la rentrée des ondes HF dans la zone volumique de couplage, puis en donnant la possibilité de traiter les ondes HF réfléchies en bout de zone de couplage.

- Recommandation : les fonctions de partition des énergies ont de l'importance sur la qualité de la transmission du signal entre les modèles :
 - i- pour chacun des modèles superposés, les fonctions de partitions des différentes énergies doivent être les mêmes,
 - ii- les fonctions de partition de l'énergie constantes sur la zone de couplage, mettant peu de poids sur le modèle grossier, sont bien adaptées pour des modèles de jonction. Les fonctions évolutives (linéaire ou cubique) de partition des énergies sont aussi des bons choix pour un transfert progressif du signal, à condition d'éviter les valeurs nulles sur le bord faisant partie du domaine fin et du domaine de couplage. Une solution simple est proposée. Un autre choix est possible en adaptant une proposition faite dans le cadre statique.
- Conclusion : le traitement des réflexions des ondes HF, en bout domaine fin, dans la zone de couplage Arlequin (faussant la solution fine) est réalisé par l'application d'un effort d'amortissement visqueux sélectif, simplement défini. Ce traitement introduit un paramètre fictif d'amortissement, dont le choix est analysé en fonction des autres paramètres de la méthode Arlequin pour assurer la qualité des résultats.
- Conclusion : le choix de l'épaisseur de la zone de couplage est fortement lié à la discrétisation des modèles et au choix du coefficient d'amortissement. Des préconisations sont données.
- Conclusion : l'incompatibilité, en particulier celle de frontières, entre les maillages fins et grossiers, restreints à la zone de couplage, offre une flexibilité de modélisation. Mais elle génère des réflexions d'ondes, non désirables, dans la zone d'intérêt du modèle fin. Le traitement de cette pathologie est fait dans le chapitre 3

A cause de problèmes de mauvaises transmissions, liées à l'incompatibilité de maillages dans la zone volumique de couplage Arlequin, relevés au chapitre 2 (dont le dernier point ci-dessus fait mention), nous avons consacré le chapitre 3 à la construction d'opérateurs de couplage Arlequin en volume, réduits. Pour cela, nous nous sommes laissés guider par des propositions de couplages Arlequin en volume, initiés dans [Dhi01] dont la construction utilise une méthode d'appariements modaux et introduit une notion de $(1 - \varepsilon)$ - *Compatibilité* physique entre les restrictions à la zone de couplage des espaces éléments fins et grossiers permettant de définir les espaces médiateurs réduits. Nous nous sommes également appuyés sur le travail réalisé dans [DB03] (voir aussi les références mentionnées dans ce papier) pour des couplages surfaciques réduits entre sous-domaines (sans recouvrement) pour approfondir la notion de réduction de l'opérateur de couplage Arlequin en volume. Nous avons construit des espaces médiateurs réduits, formés par des couples appariés $(1 - \varepsilon)$ - *Compatibles*. L'appariement a été réalisé par trois méthodes différentes dont une appelée "méthode d'appariement par projection" a été développée dans le cadre de ces travaux de thèse, en s'appuyant sur une remarque donnée dans [Dhi01]. Cette méthode s'est avérée être particulièrement intéressante, en pratique. Un point remarquable (sans être surprenant) est que les espaces médiateurs réduits sont, pour les problèmes de couplages type Fin-Grossier que nous étudions ici, de dimension quasiment dix fois plus petite que la dimension de l'espace médiateur Arlequin grossier. Ils réduisent donc par un facteur dix, environ, la taille du système d'équations de couplage. Un autre fait saillant de ce chapitre est que, en plus de la réduction très importante des coûts de résolution des systèmes Arlequin,

avec un opérateur de couplage fortement réduit (en utilisant des méthodes d'inversion des systèmes Arelequin mixtes appropriées [DER08]), on améliore aussi la qualité de la transmission du modèle fin au modèle grossier, avec ces opérateurs réduits. Notons enfin, pour ce chapitre 3, que ces opérateurs de couplages réduits, pour le cadre Arlequin en dynamique, ont nécessité l'ajustement de l'amortissement sélectif au sein de la zone de couplage pour éviter la pollution des modèles fins et grossiers.

Tous les développements nouveaux réalisés ont été implémentés dans un Code-Arlequin, prototype, développé au sein d'un Groupe de Recherche Interaction Structure-Structure au Laboratoire MSSMat (sous la direction de H. Ben Dhia). Ils ont permis de valider les choix faits et les méthodes proposées pour des cas tests 1D et 2D. Deux de ces tests sont particulièrement intéressants. Le premier cas test concerne la problématique de propagation d'ondes sismiques dans le sol, de la source à des infrastructures critiques, supposées être suffisamment éloignées de la source. Un test 2D a été traité de manière doublement-prometteuse et innovante au MSSMat, en additionnant les savoir-faire du Laboratoire MSSMat, et ce, en couplant des résultats de simulation dynamiques sortis du Code Gfdyn [Aub, DA96] développé au MSSMat avec le Prototype Code-Arlequin, développé aussi au MSSMat et enrichi par les développements en dynamique mentionnés. Le deuxième cas concerne la problématique de propagation dynamique d'une fissure dans une structure 2D élastique et linéaire, avec l'hypothèse de localisation des ondes HF. Les conclusions du chapitre 4, consacrées à cette thématique, témoignent principalement du fait que cette problématique a été traitée de manière pertinente et prometteuse, en utilisant tous les ingrédients développés aux chapitre 2 et 3 et en codant des éléments techniques spécifiques à la simulation Arlequin, en dynamique, d'un domaine élastique avec une fissure qui évolue dynamiquement. Les résultats numériques obtenus au chapitre 4 pour des tests comme celui de Kalthoff sont remarquables. Ils montrent le potentiel du cadre Arlequin, enrichi ici par des apports significatifs, en ingrédients dynamiques, à traiter efficacement ces problèmes dynamiques multi-échelles complexes.

Beaucoup de développements et de recherches restent à faire. On se contente ici de citer toutes les extensions à la dynamique des travaux déjà réalisés dans le cadre Arlequin en statique, quasi-statiques et pour différentes modélisations structurales et différentes échelles de représentations de la matière, intégrant des non linéarités diverses et croisant avec des aspects stochastiques. Mais, même en restant dans le cadre des hypothèses cadrant le travail de thèse restitué dans ce document, nous pouvons mentionner :

- une meilleure prise en compte des ondes de Love sur les surfaces libres des lèvres de la fissure,
- (en croisant avec le premier item, tout en compliquant singulièrement le scénario) une prise en considération de l'impact entre lèvres de la fissure et une évaluation de l'impact de ces impacts sur les résultats et les implications que cela a sur les choix des paramètres, et notamment la forme du patch,
- introduire les éléments permettant la capture des bifurcations des fissures,
- étudier l'intérêt d'utilisation d'autres schémas d'intégration temporelle pour la problématique considérée, notamment le mixage de schémas explicites pour le patch avec des schémas implicites pour le substrat, et ce pour la fissuration en dynamique (pour l'utilisation de schémas explicite dans le cadre Arlequin, en dynamique, nous renvoyons à [FFJ17])
- Etudier les méthodes de réduction de modèles dans le cadre Arlequin (en étendant des travaux faits en statique [NDC16, NBL14])

Bibliographie

- [ABD14] K Abben and H Ben-Dhia. Extending the multiscale arlequin framework to coupling of models in dynamic regime. In *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)*, 2014.
- [AD15] Khalil Abben and Hachmi Ben Dhia. Une approche multi-échelle en dynamique des structures. In *12e Colloque national en calcul des structures*, 2015.
- [ADIR18] J Albella, Hachmi Ben Dhia, Sebastien Imperiale, and J Rodriguez. Mathematical and numerical study of transient wave scattering by obstacles with the arlequin method. 2018.
- [Ame14] William F Ames. *Numerical methods for partial differential equations*. Academic press, 2014.
- [And76] DJ Andrews. Rupture velocity of plane strain shear cracks. *Journal of Geophysical Research*, 81(32) :5679–5687, 1976.
- [Aub] *GEFDYN : Logiciel d'Analyse de Comportement Mécanique des Sols par Eléments Finis avec Prise en Compte du Couplage Sol-Eau-Air*.
- [Bab73] Ivo Babuška. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3) :179–192, 1973.
- [Bak97] Timothy J Baker. Mesh adaptation strategies for problems in fluid dynamics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25(3-4) :243–273, 1997.
- [Bal96a] Etienne Balmes. Optimal ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition. *AIAA journal*, 34(6) :1256–1260, 1996.
- [Bal96b] Etienne Balmès. Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis. *OFFICE NATIONAL D ETUDES ET DE RECHERCHES AEROSPATIALES ONERA-PUBLICATIONS-TP*, 1996.
- [Bar74] Roshdy S Barsoum. Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 10(4) :603–605, 1974.
- [BB99] Ted Belytschko and Tom Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 45(5) :601–620, 1999.
- [BBC03] Pierre-Olivier Bouchard, François Bay, and Yvan Chastel. Numerical modelling of crack propagation : automatic remeshing and comparison of different criteria. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(35) :3887–3908, 2003.
- [BBCT00] Pierre-Olivier Bouchard, François Bay, Yvan Chastel, and Isabelle Tovenca. Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 189(3) :723–742, 2000.

- [BC89] Marsha J Berger and Phillip Colella. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of computational Physics*, 82(1) :64–84, 1989.
- [BCXZ03] Ted Belytschko, Hao Chen, Jingxiao Xu, and Goangseup Zi. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *International journal for numerical methods in engineering*, 58(12) :1873–1905, 2003.
- [BD99] H Ben Dhia. Numerical modelling of multiscale problems : the arlequin method. *CD ECCM99*, pages 1–1, 1999.
- [BDR01] Hachmi Ben Dhia and Guillaume Rateau. Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series I Mathematics*, 332(7) :649–654, 2001.
- [BDR02] Hachmi Ben Dhia and Guillaume Rateau. Application of the arlequin method to some structures with defects. *Revue Européenne des Éléments*, 11(2-4) :291–304, 2002.
- [BDZ04] Hachmi Ben Dhia and Chokri Zammali. Level-sets and arlequin framework for dynamic contact problems. *Revue Européenne des Elements*, 13(5-7) :403–414, 2004.
- [Ben74] SE Benzley. Representation of singularities with isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8(3) :537–545, 1974.
- [BEN81] HD Bui, A e Ehrlacher, and QS Nguyen. Etude expérimentale de la dissipation dans la propagation de fissure par thermographie infrarouge. *CR Acad. Sci*, 293 :1015–1018, 1981.
- [BLG94] Ted Belytschko, Yun Yun Lu, and Lei Gu. Element-free galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2) :229–256, 1994.
- [BM⁺00] William L Briggs, Steve F McCormick, et al. *A multigrid tutorial*, volume 72. Siam, 2000.
- [BMP93] Christine Bernardi, Yvon Maday, and Anthony T Patera. Domain decomposition by the mortar element method. In *Asymptotic and numerical methods for partial differential equations with critical parameters*, pages 269–286. Springer, 1993.
- [BP83] Prodyot K Basu and Alberto Peano. Adaptivity in p-version finite element analysis. *Journal of Structural Engineering*, 109(10) :2310–2324, 1983.
- [Bra77] Achi Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of computation*, 31(138) :333–390, 1977.
- [Bre74] Franco Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (S4) :1–26, 1974.
- [Bui78] Huy Duong Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978.
- [BWIS96] TN Bittencourt, PA Wawrzynek, AR Ingraffea, and JL Sousa. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2d lefm problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(2) :321–334, 1996.
- [CB68] Roy Craig and Mervyn Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.

- [CFJ03] Francis Collino, Thierry Fouquet, and Patrick Joly. A conservative space-time mesh refinement method for the 1-d wave equation. part i : Construction. *Numerische mathematik*, 95(2) :197–221, 2003.
- [CG02] Alain Combescure and Anthony Gravouil. A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(11-12) :1129–1157, 2002.
- [Che67] Genady P Cherepanov. Crack propagation in continuous media : Pmm vol. 31, no. 3, 1967, pp. 476–488. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 31(3) :503–512, 1967.
- [DA96] Arézou Modaresi Denis Aubry. *GEFDyn*. Ecole Centrale Paris, LMSS-Mat, 1996. Manuel scientifique.
- [DB99] JOHN Dolbow and Ted Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 46(1) :131–150, 1999.
- [DB03] H Ben Dhia and E Balmes. Mesure de compatibilité et application aux problèmes de sous-structuration. In *Colloque National en Calcul des Structures, Giens*, 2003.
- [DC05] Hachmi Ben Dhia and Zammali Chokri. Multiscale analysis of impacted thin structures. In *Computational of Shell and Spacial Structures*, pages 1–4, 2005.
- [DCOP11] H Ben Dhia, Ludovic Chamoin, J Tinsley Oden, and Serge Prudhomme. A new adaptive modeling strategy based on optimal control for atomic-to-continuum coupling simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(37-40) :2675–2696, 2011.
- [DER08] Hachmi Ben Dhia, Nadia Elkhodja, and François-Xavier Roux. Multimodeling of multi-alterated structures in the arlequin framework : Solution with a domain-decomposition solver. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 17(5-7) :969–980, 2008.
- [Dhi98] Hachmi Ben Dhia. Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(12) :899–904, 1998.
- [Dhi01] Hachmi Ben Dhia. *Cours de contact*. Ecole Centrale Paris, 2001.
- [Dhi06] Hachmi Ben Dhia. Global-local approaches : the arlequin framework. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15(1-3) :67–80, 2006.
- [Dhi08] Hachmi Ben Dhia. Further insights by theoretical investigations of the multiscale arlequin method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3), 2008.
- [DHLT01] CA Duarte, ON Hamzeh, TJ Liszka, and WW Tworzydlo. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(15) :2227–2262, 2001.
- [DJ10] Hachmi Ben Dhia and Olivier Jamond. On the use of xfm within the arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 199(21-22) :1403–1414, 2010.

- [DL00] Doreen Rona Naomi De Leon. Wavelet operators applied to multigrid methods. 2000.
- [DMB01] John Dolbow, Nicolas Moës, and Ted Belytschko. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(51) :6825–6846, 2001.
- [DR05] Hashmi Ben Dhia and Guillaume Rateau. The arlequin method as a flexible engineering design tool. *International journal for numerical methods in engineering*, 62(11) :1442–1462, 2005.
- [DRBDL09] Guillaume Vermot Des Roches, Etienne Balmès, Hachmi Ben Dhia, and Rémi Lemaire. Mesure de compatibilité et recherche de solutions régulières en contact pénalisé. In *9e colloque national en calcul des structures*, 2009.
- [Elk10] Nadia Elkhodja. *Approches de structures complexes dans des cadres adaptés de la méthode Arlequin*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2010.
- [FDAG02] FJ Fuenmayor, FD Denia, J Albelda, and E Giner. H-adaptive refinement strategy for acoustic problems with a set of natural frequencies. *Journal of sound and vibration*, 255(3) :457–479, 2002.
- [FFJ17] Alexandre Fernier, Vincent Faucher, and Olivier Jamond. Multi model arlequin method for fast transient dynamics in explicit time integration. In *13e colloque national en calcul des structures*, 2017.
- [FKKL11] Konstantin Fackeldey, Dorian Krause, Rolf Krause, and Christoph Lenzen. Coupling molecular dynamics and continua with weak constraints. *Multiscale Modeling & Simulation*, 9(4) :1459–1494, 2011.
- [FM98] Gilles A Francfort and J-J Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1319–1342, 1998.
- [FR91] Charbel Farhat and Francois-Xavier Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6) :1205–1227, 1991.
- [Fre73] LB Freund. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading—iii. stress wave loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21(2) :47–61, 1973.
- [Fre98] L Benjamin Freund. *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge university press, 1998.
- [GB86] B Guo and I Babuška. The hp version of the finite element method. *Computational Mechanics*, 1(1) :21–41, 1986.
- [GC01] Anthony Gravouil and Alain Combescure. Multi-time-step explicit–implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(1) :199–225, 2001.
- [GMB02] Anthony Gravouil, Nicolas Moës, and Ted Belytschko. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets—part ii : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11) :2569–2586, 2002.
- [GMRC07] David Grégoire, Hubert Maigre, Julien Rethore, and Alain Combescure. Dynamic crack propagation under mixed-mode loading—comparison between experiments and x-fem simulations. *International Journal of Solids and Structures*, 44(20) :6517–6534, 2007.

- [GNBTA13] Assaf GHANEM, Thouraya NOURI BARANGER, Mohamed TOR-KHANI, and Guillaume ALTMAYER. Modélisation des machines tournantes dans le cadre arlequin. *21ème Congrès Français de Mécanique, 26 au 30 août 2013, Bordeaux, France (FR)*, 2013.
- [Gri21] Alan A Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221 :163–198, 1921.
- [Hac85] Wolfgang Hackbusch. Multi-grid methods and applications((book)). *Berlin and New York, Springer-Verlag(Springer Series in Computational Mathematics.*, 4, 1985.
- [Hem90] PW Hemker. On the order of prolongations and restrictions in multi-grid procedures. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 32(3) :423–429, 1990.
- [HHT77] Hans M Hilber, Thomas JR Hughes, and Robert L Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3) :283–292, 1977.
- [HW00] Chung-Souk Han and Peter Wriggers. An h-adaptive method for elastoplastic shell problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 189(2) :651–671, 2000.
- [Ing13] Charles Edward Inglis. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Trans Inst Naval Archit*, 55 :219–241, 1913.
- [Irw57] GR Irwin. Relation of stresses near a crack to the crack extension force. *9th Cong. App. Mech., Brussels*, 1957.
- [Jam11] Olivier Jamond. *Propagation numérique de zones critiques dans un pneumatique par approches multi-modèles*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris, 2011.
- [JD09] Olivier Jamond and Hachmi Ben Dhia. Propagation of local alterations using level-sets within the arlequin framework. In *9e Colloque national en calcul des structures*, 2009.
- [K.13] Abben K. Extending the multiscale arlequin framework to coupling of models in dynamic regime. Master’s thesis, Centrale Paris, 2013.
- [Kal00] Joerg F Kalthoff. Modes of dynamic shear failure in solids. *International Journal of Fracture*, 101(1-2) :1–31, 2000.
- [KAS80a] K Kishimoto, S Aoki, and M Sakata. Dynamic stress intensity factors using j-integral and finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 13(2) :387–394, 1980.
- [KAS80b] K Kishimoto, S Aoki, and M Sakata. On the path independent integral-j. *Engineering Fracture Mechanics*, 13(4) :841–850, 1980.
- [Ket82] Rob Kettler. Analysis and comparison of relaxation schemes in robust multigrid and preconditioned conjugate gradient methods. In *Multigrid methods*, pages 502–534. Springer, 1982.
- [KP85] MF Kanninen and CH Popelar. Advanced fracture mechanics. 1985. *chapter*, 4 :555, 1985.
- [KRV08] D de Klerk, Daniel J Rixen, and SN Voormeeren. General framework for dynamic substructuring : history, review and classification of techniques. *AIAA journal*, 46(5) :1169–1181, 2008.

- [KW88] JF Kalthoff and S Winkler. Failure mode transition at high rates of shear loading. *DGM Informationsgesellschaft mbH, Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials*, 1 :185–195, 1988.
- [LF90] YJ Lee and LB Freund. Fracture initiation due to asymmetric impact loading of an edge cracked plate. *Journal of Applied Mechanics*, 57(1) :104–111, 1990.
- [LMT01] Jacques-Louis Lions, Yvon Maday, and Gabriel Turinici. Résolution d'edp par un schéma en temps «pararéel». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 332(7) :661–668, 2001.
- [MB97] JM Melenk and I Babuska. Approximation with harmonic and generalized harmonic polynomials in the partition of unity method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4 :607–632, 1997.
- [MB02] Nicolas Moës and Ted Belytschko. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering fracture mechanics*, 69(7) :813–833, 2002.
- [McC82] SF McCormick. An algebraic interpretation of multigrid methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(3) :548–560, 1982.
- [MDB99] Nicolas Moës, John Dolbow, and Ted Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 46(1) :131–150, 1999.
- [MGB02] Nicolas Moës, Anthony Gravouil, and Ted Belytschko. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets—part i : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11) :2549–2568, 2002.
- [MM00] KSRK Murthy and M Mukhopadhyay. Adaptive finite element analysis of mixed-mode crack problems with automatic mesh generator. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(8) :1087–1100, 2000.
- [MOA98] R Madariaga, K Olsen, and R Archuleta. Modeling dynamic rupture in a 3d earthquake fault model. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(5) :1182–1197, 1998.
- [Mor99] Jean-Jacques Moreau. Some basics of unilateral dynamics. In *IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts*, pages 1–14. Springer, 1999.
- [MRCB06] Thomas Menouillard, Julien Rethore, Alain Combescure, and Harridh Bung. Efficient explicit time stepping for the extended finite element method (x-fem). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68(9) :911–939, 2006.
- [MS89a] RC McClung and H Sehitoglu. On the finite element analysis of fatigue crack closure—1. basic modeling issues. *Engineering Fracture Mechanics*, 33(2) :237–252, 1989.
- [MS89b] RC McClung and H Sehitoglu. On the finite element analysis of fatigue crack closure—2. numerical results. *Engineering Fracture Mechanics*, 33(2) :253–272, 1989.
- [NA83] T Nishioka and SN Atluri. Path-independent integrals, energy release rates, and general solutions of near-tip fields in mixed-mode dynamic fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 18(1) :1–22, 1983.
- [NA86] T Nishioka and SN Atluri. Computational methods in dynamic fracture. *Computational methods in the mechanics of fracture*, 2 :335–384, 1986.

- [NBLC14] S Mohamed Nazeer, Felipe Bordeu, Adrien Leygue, and Francisco Chiresta. Arlequin based pgd domain decomposition. *Computational Mechanics*, 54(5) :1175–1190, 2014.
- [NDC16] David Néron, Hachmi Ben Dhia, and Régis Cottreau. A decoupled strategy to solve reduced-order multimodel problems in the pgd and arlequin frameworks. *Computational Mechanics*, 57(4) :509–521, 2016.
- [New59] Nathan M Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3) :67–94, 1959.
- [Nil73] Fred Nilsson. A path-independent integral for transient crack problems. *International Journal of Solids and Structures*, 9(9) :1107–1115, 1973.
- [NROR01] O Nguyen, EA Repetto, Michael Ortiz, and RA Radovitzky. A cohesive model of fatigue crack growth. *International Journal of Fracture*, 110(4) :351–369, 2001.
- [Pal88] B Palmerio. A two-dimensional fem adaptive moving-node method for steady euler flow simulations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 71(3) :315–340, 1988.
- [PCGM07] Benoit Prabel, Alain Combescure, Anthony Gravouil, and Stéphane Marie. Level set x-fem non-matching meshes : application to dynamic crack propagation in elastic–plastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(8) :1553–1569, 2007.
- [PH04] A Prakash and KD Hjelmstad. A feti-based multi-time-step coupling method for newmark schemes in structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(13) :2183–2204, 2004.
- [PLN10] J-C Passieux, Pierre Ladevèze, and David Néron. A scalable time–space multiscale domain decomposition method : adaptive time scale separation. *Computational Mechanics*, 46(4) :621–633, 2010.
- [PRGB13] Jean-Charles Passieux, Julien Réthoré, Anthony Gravouil, and Marie-Christine Baietto. Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid x-fem solver. *Computational Mechanics*, 52(6) :1381–1393, 2013.
- [PRV⁺02] Christophe Prud’Homme, Dimitrios V Rovas, Karen Veroy, Luc Machiels, Yvon Maday, Anthony T Patera, and Gabriel Turinici. Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations : Reduced-basis output bound methods. *Journal of Fluids Engineering*, 124(1) :70–80, 2002.
- [Rat03] Guillaume Rateau. *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles*. PhD thesis, École Centrale Paris, 2003.
- [Rét05] Julien Réthoré. *Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : application à la propagation dynamique des fissures*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2005.
- [RGC04] Julien Rethore, Anthony Gravouil, and Alain Combescure. A stable numerical scheme for the finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(42) :4493–4510, 2004.
- [Ric68] James R Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of applied mechanics*, 35(2) :379–386, 1968.

- [Rit98] D Rittel. Experimental investigation of transient thermoelastic effects in dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 35(22) :2959–2973, 1998.
- [SDN03] Kiran Solanki, SR Daniewicz, and JC Newman. Finite element modeling of plasticity-induced crack closure with emphasis on geometry and mesh refinement effects. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(12) :1475–1489, 2003.
- [Set99] James Albert Sethian. *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 3. Cambridge university press, 1999.
- [Set01] James A Sethian. Evolution, implementation, and application of level set and fast marching methods for advancing fronts. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :503–555, 2001.
- [Sha49] Claude E Shannon. Communication theory of secrecy systems. *Bell system technical journal*, 28(4) :656–715, 1949.
- [SN13] Wenzhe Shan and Udo Nackenhorst. Selective damping method for the weak-arlequin coupling of molecular dynamics and finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 96(3) :176–202, 2013.
- [Sou35] Richard Vynne Southwell. Stress-calculation in frameworks by the method of" systematic relaxation of constraints". i and ii. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 151(872) :56–95, 1935.
- [SR05] M Sander and HA Richard. Finite element analysis of fatigue crack growth with interspersed mode i and mixed mode overloads. *International Journal of Fatigue*, 27(8) :905–913, 2005.
- [SR06] M Sander and HA Richard. Experimental and numerical investigations on the influence of the loading direction on the fatigue crack growth. *International journal of fatigue*, 28(5) :583–591, 2006.
- [SS03] JA Sethian and Peter Smereka. Level set methods for fluid interfaces. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35(1) :341–372, 2003.
- [SSO94] Mark Sussman, Peter Smereka, and Stanley Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational physics*, 114(1) :146–159, 1994.
- [SWB08] Jeong-Hoon Song, Hongwu Wang, and Ted Belytschko. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture. *Computational Mechanics*, 42(2) :239–250, 2008.
- [SZ92] W Sun and NG Zamani. An adaptive h-r boundary element algorithm for the laplace equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(3) :537–552, 1992.
- [TOS01] Ulrich Trottenberg, Cornelis W Oosterlee, and Anton Schüller. Multigrid. with guest contributions by a. brandt, p. oswald, k. stüben, 2001.
- [VBB03] Giulio Ventura, E Budyn, and T Belytschko. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(10) :1571–1592, 2003.
- [VXB02] Giulio Ventura, JX Xu, and T Belytschko. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by efg. *International Journal for numerical methods in engineering*, 54(6) :923–944, 2002.

- [WYC80] SS Wang, JF Yau, and HT Corten. A mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity. *International Journal of Fracture*, 16(3) :247–259, 1980.
- [YND95] AM Yan and H Nguyen-Dang. Multiple-cracked fatigue crack growth by bem. *Computational mechanics*, 16(5) :273–280, 1995.
- [Zam05] Chokri Zammali. *Contribution à la modélisation mécanique et numérique des problèmes de contact-impact*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2005.
- [ZT00] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method : The basis*. Fluid Dynamics. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [ZY16] Ben Dhia H. Zanina Y., Abben K. Etudes mécaniques et numériques multi-domaines de l'évolution des failles sismiques. Master's thesis, CentraleSupélec, 2016.

Titre : Nouvelles frontières pour le cadre Arlequin en élastodynamique à HF localisées-Application à la propagation des fissures

Mots clés : Multi-échelle, Arlequin, Dynamique des structures, Fissures, Réduction de modèles

Résumé : L'objectif principal de ce travail de thèse est de consolider et rendre opérationnelle l'extension du cadre multi-modèles et multi-échelles Arlequin à la modélisation et la simulation (par éléments finis) en élasto-dynamique, en faisant l'hypothèse de localisation des ondes HF, intégrant des phénomènes physiques dissipatifs. Parmi les applications visées, citons i) la propagation dans le sol d'ondes sismiques et leurs impacts sur des infrastructures critiques ii) la propagation de fissures en dynamique dans des structures. Les contraintes qu'on s'impose dans ce travail sont doubles. La première est qu'on s'interdit de polluer la/les zones critiques localisées. La seconde est qu'on souhaite aussi approcher au mieux le comportement des champs mécaniques dans les zones approchées plus grossièrement. Une étude de l'ensemble des paramètres Arlequin est menée. Des préconisations pratiques sont fournies et étayées par des simulations 1D et une simulation 2D. Une attention particulière est portée à l'opérateur de couplage Arlequin en volume (dont on rappelle et souligne le caractère incontournable pour les problèmes de dynamique multi-échelle; les couplages en surfaces étant inopérants, pour ces problèmes). Sur ce

sujet, un des faits saillants de ces travaux de thèse est le développement d'un nouvel opérateur de couplage Arlequin réduit: tirant profit d'une représentation modale des champs de multiplicateurs de Lagrange, définis dans la zone de couplage, d'une notion de $(1 - \epsilon)$ - *Compatibilité* de modèles et du caractère multi-résolution des champs primaux du problème, dans la même zone de superposition Arlequin, cet opérateur permet de réduire considérablement les coûts des calculs des problèmes dynamiques multi-échelles abordés ici, par rapport à un couplage classique, tout en assurant des transmissions plus précises que celles données par deux autres méthodes de réduction, rappelées et mises en œuvres dans cette thèse. Ces avantages sont étayés pour une barre élastique, en statique et en dynamique. Les approches développées sont utilisées et validées, par comparaison avec des résultats de la littérature, pour l'application phare de ce travail, consistant à simuler le comportement dynamique d'une structure fissurée, dans le cas d'une fissure fixe et celui d'une fissure propagative, en utilisant l'enrichissement par la fonction Level-Set à *la X-Fem* dans le modèle grossier et des EF fins au voisinage du fond de fissure.

Title : New frontiers for the Arlequin framework in localized HF elastodynamics-Application to crack propagation

Keywords : Multiscale, Arlequin framework, Dynamics, Cracks, Models réduction

Abstract : The main objective of this thesis work is to consolidate and make operational the extension of the multi-model and multi-scale Arlequin framework to modeling and simulation (using FE) in elastodynamic, by making the hypothesis of localization of HF waves, due to physical dissipative phenomena. Targeted applications include i) ground propagation of seismic waves and their impact on critical infrastructures ii) the dynamic propagation of cracks. The constraints imposed on this work are twofold. The first is that it is prohibited to pollute the localized critical areas. The second is that we also want to approach as accurately as possible the behavior of the mechanical fields in the coarsely approximated areas. A study of all dynamic Arlequin parameters is conducted. Practical recommendations are provided and supported by 1D and 2D simulations. Particular attention is paid to the volume Arlequin coupling operator (whose essential character for coupling in multi-scale dynamic problems is recalled and underlined; surface couplings being inoperative in this context). On this subject, one

of the highlights of these thesis works is the development of a new reduced Arlequin coupling operator: taking advantage of a modal representation of the Lagrange multiplier fields defined in the coupling zone, a concept of $(1 - \epsilon)$ -*Compatibility* of models and the multi-resolution character of the overlaid primal fields, this operator makes it possible to reduce considerably the computational costs of the multiscale dynamic problem discussed here (when compared to a classical coupling) while ensuring transmissions more accurately than those given by two other reduction methods, recalled and implemented in this thesis. These benefits are supported by an elastic bar test, both in static and dynamic regimes. The developed approaches are used and validated, in comparison with results of the literature, for the flagship application of this work consisting of simulating the dynamic behavior of a cracked structure in the case of a fixed crack and that of a propagative crack using enrichment by the Level-Set function à *la X-Fem* in the coarse model and fine FE near the crack tip.

