



**HAL**  
open science

# Conception, optimisation et commande d'un stabilisateur actif pour la compensation des vibrations des robots parallèles à câbles

Maximilian Lesellier

## ► To cite this version:

Maximilian Lesellier. Conception, optimisation et commande d'un stabilisateur actif pour la compensation des vibrations des robots parallèles à câbles. Automatique / Robotique. Université Montpellier, 2019. Français. NNT : 2019MONT004 . tel-02283308

**HAL Id: tel-02283308**

**<https://theses.hal.science/tel-02283308v1>**

Submitted on 10 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR  
DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER**

**En robotique**

**École doctorale : Information, Structures, Systèmes**

**Unité de recherche LIRMM**

**Conception, optimisation et commande d'un stabilisateur  
actif pour la compensation des vibrations des robots  
parallèles à câbles**

**Présentée par Maximilian LESELLIER**

**le 27 février 2019**

**Sous la direction de Jacques GANGLOFF et Marc GOUTTEFARDE**

**Devant le jury composé de**

<b>Gabriel ABBA</b>	Professeur	Université de Lorraine	Président
<b>Éric COURTEILLE</b>	Maître de Conférences HDR	INSA de Rennes	Rapporteur
<b>Jean-Baptiste IZARD</b>	Ingénieur R&D	Tecnalia France	Examineur
<b>Marc GOUTTEFARDE</b>	Directeur de Recherche	CNRS	Directeur doctoral
<b>Jacques GANGLOFF</b>	Professeur	Université de Strasbourg	Co-directeur
<b>Loïc CUVILLON</b>	Maître de Conférences	Université de Strasbourg	Encadrant



**UNIVERSITÉ  
DE MONTPELLIER**





---

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Notations</b>	<b>xi</b>
Conventions de notation . . . . .	xi
Glossaire . . . . .	xii
Notations utilisées . . . . .	xii
<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
1.1 Les robots parallèles à câbles . . . . .	5
1.2 Description du projet DexterWide . . . . .	5
1.3 Le RPC <i>CoGiRo</i> . . . . .	6
1.4 Description de la problématique . . . . .	8
1.5 Contributions . . . . .	9
<b>2 État de l'art</b>	<b>11</b>
2.1 État de l'art des RPC . . . . .	12
2.1.1 Définition d'un RPC . . . . .	12
2.1.2 Configuration des RPC . . . . .	14
2.1.3 Avantages et inconvénients . . . . .	15
2.1.4 Applications des RPC . . . . .	18
2.2 Stabilisation . . . . .	23



2.2.1	Les différentes approches de stabilisation	23
2.2.2	Stabilisation par ajout d'actionneurs	29
2.3	Optimisation	31
2.3.1	Le processus d'optimisation	31
2.3.2	Métaheuristiques	32
2.4	Commande	33
2.4.1	Stratégies de commande	33
2.4.2	Répartition des tensions	34
2.4.3	Commande des RPC	35
2.4.4	Commande des RPC soumis à des vibrations	37
<b>3</b>	<b>Modélisation</b>	<b>40</b>
3.1	Modélisation dynamique d'un robot parallèle à câbles	41
3.1.1	Modélisation des câbles	41
3.1.2	Modèle dynamique de la plate-forme	43
3.2	Modélisation des dispositifs de stabilisation attachés à la plate-forme	45
3.2.1	Solide $j$ quelconque	45
3.2.2	Roue à inertie	49
3.2.3	Actionneur gyroscopique	51
3.2.4	Masselotte actionnée en translation	53
3.2.5	Bras en rotation	55
3.3	Modèle dynamique d'une plate-forme de RPC munie de stabilisateurs embarqués	57
3.3.1	Bilan des efforts au CDG de la plate-forme	57
3.3.2	Matrice de masse	58
3.3.3	Effet de Coriolis	58
3.3.4	Action de la pesanteur	59
3.3.5	Écriture complète du modèle avec $J$ dispositifs embarqués de stabilisation	59
3.4	Choix du dispositif embarqué et réécriture simplifiée du modèle	61
3.4.1	Choix du dispositif embarqué	61
3.4.2	Exemple de stabilisateur à 2 bras	62
3.4.3	Formulation du modèle avec stabilisateur embarqué composé de bras en rotation	65
3.4.4	Conclusion	67
<b>4</b>	<b>Optimisation du placement des actionneurs</b>	<b>70</b>
4.1	Simplification du modèle dynamique autour de son point de fonctionnement	71
4.2	Simplification du torseur d'efforts $\boldsymbol{w}_{j/p}$	72
4.3	Définitions des variables du problème	76
4.4	Contraintes	77

4.4.1	Définition de l'espace de travail d'un câble . . . . .	78
4.4.2	Non collision des bras avec leur environnement . . . . .	84
4.4.3	Faisabilité des torseurs d'effort . . . . .	86
4.5	Fonction de coût . . . . .	87
4.6	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	88
4.7	Résultats d'optimisation . . . . .	89
4.7.1	Choix de l'algorithme . . . . .	89
4.7.2	Paramétrage . . . . .	90
4.7.3	Exemple à 3 DDL et 4 bras . . . . .	91
4.7.4	Exemple plan à 3 DDL et 3 bras . . . . .	93
4.7.5	Conclusion . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Commande</b> . . . . .	<b>96</b>
5.1	Modélisation du système en fonction de la pose et de la coordonnée articulaire des bras . . . . .	97
5.2	Conception de la loi de commande . . . . .	100
5.2.1	Commande par découplage non-linéaire . . . . .	100
5.2.2	Commande en couple calculé de la plateforme . . . . .	102
5.2.3	Commande des bras du stabilisateur . . . . .	102
5.2.4	Loi de commande . . . . .	103
5.3	La théorie des perturbations singulières . . . . .	104
5.3.1	Présentation de la théorie des perturbations singulières . . . . .	104
5.3.2	Applications de la théorie des perturbations singulières . . . . .	107
5.4	Preuve de stabilité . . . . .	108
5.4.1	Séparation par échelle de temps . . . . .	108
5.4.2	Sous-système lent . . . . .	109
5.4.3	Sous-système rapide . . . . .	110
5.4.4	Stabilité globale . . . . .	111
5.5	Conclusion . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Simulations</b> . . . . .	<b>113</b>
6.1	Description des RPC simulés . . . . .	114
6.1.1	Robot plan . . . . .	114
6.1.2	<i>CoGiRo</i> . . . . .	117
6.2	Modèle de simulation . . . . .	119
6.3	Résultats en simulation . . . . .	121
6.3.1	Robot plan . . . . .	121
6.3.2	<i>CoGiRo</i> . . . . .	126
6.3.3	Essais de robustesse . . . . .	131
6.4	Conclusion . . . . .	132

<b>7 Conclusion</b>	<b>135</b>
7.1 Synthèse . . . . .	136
7.2 Perspectives . . . . .	138
<b>Annexes</b>	<b>141</b>
<b>A Paramétrage des angles d'Euler</b>	<b>143</b>
<b>B Identification et commande des moteurs</b>	<b>147</b>
B.1 Identification . . . . .	147
B.2 Correcteur RST . . . . .	150
<b>C Mesure des vibrations de la plate-forme de RPC</b>	<b>155</b>
C.1 Mesure des vibrations sur <i>CoGiRo</i> . . . . .	155
C.2 Mesure des vibrations en simulation . . . . .	157
<b>D L'optimisation par essaim de particules</b>	<b>159</b>



---

# Table des figures

<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
1.1 Le RPC <i>CoGiRo</i> équipé d'un bras série <i>SIA20F</i> de Yaskawa	6
1.2 Le RPC <i>CoGiRo</i> à 8 câbles et 6 DDL	7
<b>2 État de l'art</b>	<b>11</b>
2.1 Exemple de robot à 8 câbles et 6 DDL	14
2.2 Robot pleinement contraint à 4 câbles et 3 DDL	15
2.3 Robot suspendu à 3 câbles et 3 DDL	15
2.4 Précurseurs des RPC suspendus	19
2.5 Premiers concepts de RPC suspendus	19
2.6 Le RPC <i>CoGiRo</i> à 8 câbles et 6 DDL	20
2.7 Exemples de très grands RPC	20
2.8 Exemples de RPC pleinement contraints rapides	21
2.9 Exemples de RPC pleinement contraints utilisés comme interface haptique	22
2.10 Exemples de RPC déployables	22
2.11 Principe de l'amortissement passif	23
2.12 La masse d'amortissement passif de Taipei 101	24
2.13 Fréquence de vibration verticale de <i>CoGiRo</i>	25
2.14 Principe de l'amortissement actif par les actionneurs des enrouleurs	25
2.15 <i>Comiro</i>	27
2.16 Principe de l'amortissement actif par ajout d'actionneur	27
2.17 Ajout d'actionneurs sur deux RPC	28
2.18 Amortissement à deux étages	29

2.19	Commande dans l'espace dual . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Modélisation</b>	<b>40</b>
3.1	Schéma général d'un robot à câbles muni d'un stabilisateur embarqué . . . . .	43
3.2	Solide quelconque attaché à la plate-forme . . . . .	45
3.3	Roue à inertie attachée à la plate-forme d'un RPC . . . . .	50
3.4	Actionneur gyroscopique attaché à la plate-forme . . . . .	52
3.5	Actionneur en translation attaché à la plate-forme . . . . .	54
3.6	Bras attaché à la plate-forme . . . . .	55
3.7	Principe de génération d'un torseur d'effort avec deux bras . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Optimisation du placement des actionneurs</b>	<b>70</b>
4.1	Valeur maximale des torseurs par effet . . . . .	75
4.2	Cône généralisé contenant toutes les positions de câbles . . . . .	80
4.3	Enveloppe convexe des positions du câble $A_i$ . . . . .	81
4.4	Volume englobant l'espace de travail du câble $i$ . . . . .	82
4.5	Faces du polyèdre $\mathcal{P}$ . . . . .	83
4.6	Faces du polyèdre $\mathcal{P}$ . . . . .	83
4.7	Faces du polyèdre $\mathcal{P}$ . . . . .	83
4.8	Espace de travail des câbles de CoGiRo . . . . .	84
4.9	Espace occupé par le bras . . . . .	85
4.10	Topologie en anneau des particules, voisinage de 1 en pointillés . . . . .	89
4.11	Configurations initiales particulières de l'OEP . . . . .	91
4.12	Solution optimale de placement des bras . . . . .	93
4.13	Valeur initiale de placement des bras utilisée dans [Lesellier <i>et al.</i> , 2018] . . . . .	93
4.14	Solution optimale de placement des bras dans le cas plan . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Commande</b>	<b>96</b>
5.1	Schéma de commande par couple calculé . . . . .	101
5.2	Schéma de commande . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Expérimentations</b>	<b>113</b>
6.1	Espace de travail en fonction de $L_2/L_1$ . . . . .	114
6.2	Représentation du RPC suspendu plan à 3 DDL avec un stabilisateur 3 bras embarqué . . . . .	115
6.3	Représentation du RPC <i>CoGiRo</i> . . . . .	117
6.4	Représentation des câbles sous <i>Simulink</i> ® . . . . .	120
6.5	Schéma de la simulation . . . . .	120
6.6	Position selon l'axe $y_0$ . . . . .	122

6.7	Position selon l'axe $z_0$	123
6.8	Position angulaire $\alpha$ autour de l'axe $x_0$	123
6.9	Positions angulaires des bras du stabilisateur	125
6.10	Position angulaire du bras 2	125
6.11	Vitesses de vibration de la plate-forme, sans stabilisateur en pointillés et avec stabilisateur en trait plein	126
6.12	Position selon l'axe $z_0$	128
6.13	Position angulaire des bras	129
6.14	Pose du CDG de la plate-forme avec et sans stabilisateur	130
6.15	Schéma de la simulation avec perturbations	131
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>
	<b>Annexes</b>	<b>141</b>
B.1	Schéma de principe d'un moteur électrique	147
B.2	Caractéristique expérimentale du moteur	148
B.3	Détermination de $\tau_p$ à partir de la caractéristique $\omega$ en fonction du temps du moteur	149
B.4	Couple moteur $C_m$ en fonction de $\omega$ en régime permanent	150
B.5	Principe du contrôleur RST	150
B.6	Comparaison des performances des moteurs en boucle ouverte (BO) et en boucle fermée (BF), courbes représentant la position angulaire $\theta$ du moteur en fonction du temps	153
C.1	Commande dans l'espace dual	156
C.2	Valeurs des vitesses et position de la plate-forme en fonction du temps	157
C.3	Vitesse de la plate-forme en fonction du temps	158
D.1	Déplacement d'une particule [Lepagnot, 2011]	160
D.2	Pseudocode de la méthode d'OEP	161
D.3	Schéma-bloc de la méthode d'OEP	162





---

# Liste des tableaux

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>État de l'art</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Modélisation</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>Optimisation du placement des actionneurs</b>	<b>70</b>
4.1	Valeurs des paramètres du RPC suspendu plan à 3 DDL avec un stabilisateur 3 bras embarqué . . . . .	75
4.2	Points d'attache des câbles de <i>CoGiRo</i> . . . . .	90
4.3	Position optimale des bras dans le cas à 3 DDL et 4 bras . . . . .	92
4.4	Position optimale des bras dans le cas plan . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Commande</b>	<b>96</b>
<b>6</b>	<b>Expérimentations</b>	<b>113</b>
6.1	Valeurs des paramètres du RPC suspendu plan à 3 DDL avec un stabilisateur 3 bras embarqué . . . . .	116
6.2	Points d'attache des câbles de <i>CoGiRo</i> . . . . .	118
6.3	Valeurs des paramètres de <i>CoGiRo</i> avec un stabilisateur à 4 bras embarqué . . .	118
6.4	Gains de commande . . . . .	122



6.5	EMQ avec et sans stabilisateur . . . . .	124
6.6	EMQ avec et sans stabilisateur pour le deuxième essai sur le RPC plan . . . . .	124
6.7	Gains de commande . . . . .	127
6.8	EMQ avec et sans stabilisateur pour le premier essai sur <i>CoGiRo</i> . . . . .	128
6.9	EMQ avec et sans stabilisateur pour le deuxième essai sur <i>CoGiRo</i> . . . . .	129
6.10	EMQ avec et sans stabilisateur, avec des paramètres incertains . . . . .	132
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>
	<b>Annexes</b>	<b>141</b>
B.1	Paramètres des moteurs du RPC plan . . . . .	148



---

# Notations

## Conventions de notation

Tout au long de cette thèse, les conventions suivantes seront respectées :

- les vecteurs sont notés en gras minuscule, par exemple  $\mathbf{u}$
- le produit scalaire de deux vecteurs est noté d'un point  $\cdot$
- le produit vectoriel de deux vecteurs est noté d'une croix  $\times$
- le produit de torseurs est noté  $\odot$
- la norme du vecteur  $\mathbf{u}$  est notée  $\|\mathbf{u}\|$
- la matrice de pré-produit vectoriel d'un vecteur  $\mathbf{u}$  est notée  $\mathbf{u}^\times$
- les matrices sont notées en gras majuscule, comme  $\mathbf{M}$
- un vecteur entre deux points  $A_i$  et  $B_i$  est noté  $\overrightarrow{A_i B_i}$
- $\mathbf{I}_{n \times m}$  et  $\mathbf{0}_{n \times m}$  désignent respectivement une matrice identité et une matrice nulle de dimension  $n \times m$
- $\underline{\mathbf{J}}_i$  désigne un tenseur d'ordre 2 exprimé au centre de gravité du solide  $i$
- la dérivée par rapport au temps d'une fonction scalaire  $e$  est notée  $\dot{e}$  et sa dérivée seconde est notée  $\ddot{e}$

- la dérivée temporelle du vecteur  $\mathbf{u}$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_p$  est notée  ${}^p\dot{\mathbf{u}}$
- la transposée d'un vecteur  $\mathbf{u}$  (respectivement d'une matrice  $\mathbf{M}$ ) est notée  $\mathbf{u}^\top$  (resp.  $\mathbf{M}^\top$ )
- l'inverse d'une matrice  $\mathbf{M}$  est notée  $\mathbf{M}^{-1}$
- l'inverse généralisée de Moore-Penrose d'une matrice  $\mathbf{M}$  est notée  $\mathbf{M}^+$
- les fonctions  $\sin(\theta)$  et  $\cos(\theta)$  sont abrégées en  $s_\theta$  et  $c_\theta$
- les bornes de l'intervalle qui contient le scalaire ou le vecteur  $u$  sont notées  $\underline{u}$  pour la borne inférieure et  $\bar{u}$  pour la borne supérieure
- $\mathbf{M}^{ab}$  est la composante de la matrice  $\mathbf{M}$  située sur sa  $a^{\text{ième}}$  ligne et sa  $b^{\text{ième}}$  colonne

## Glossaire

**BOZ** Bloqueur d'Ordre Zéro. [147](#)

**CDG** Centre de Gravité. [ii](#), [vii](#), [7](#), [16](#), [17](#), [42](#), [45](#), [46](#), [49](#), [50](#), [53](#), [57](#), [63](#), [72](#), [73](#), [75](#), [87](#), [89–92](#), [121](#), [127](#), [129–131](#), [157](#)

**DDL** Degré de Liberté. [iii](#), [v](#), [vi](#), [ix](#), [6](#), [9](#), [14](#), [19–21](#), [26](#), [29](#), [30](#), [34](#), [35](#), [45](#), [49](#), [61](#), [66](#), [67](#), [75](#), [78](#), [90–93](#), [97](#), [104](#), [114–117](#), [121](#), [132](#), [137](#), [138](#)

**EMQ** Erreur Moyenne Quadratique. [x](#), [124](#), [126–129](#), [132](#), [133](#)

**ETC** Espace de Travail du Câble. [xv](#), [78–82](#), [84](#), [85](#), [88](#), [137](#)

**OEP** Optimisation par Essaim de Particules. [vi](#), [vii](#), [32](#), [33](#), [89–91](#), [93](#), [137](#), [138](#), [159–162](#)

**PD** Correcteur Proportionnel-Dérivé. [35](#), [36](#), [101](#)

**PFD** Principe Fondamental de la Dynamique. [44](#), [48](#), [57](#), [61](#), [97](#), [107](#), [149](#)

**RPC** Robot Parallèle à Câbles. [i–vi](#), [ix](#), [x](#), [xv](#), [4–24](#), [26](#), [28–38](#), [40–43](#), [50](#), [57](#), [59](#), [61–63](#), [65–67](#), [71](#), [72](#), [75](#), [77–81](#), [84](#), [86](#), [88–90](#), [94](#), [96](#), [97](#), [102](#), [104](#), [107](#), [111–117](#), [119–121](#), [124](#), [126](#), [127](#), [129–133](#), [135–139](#), [141](#), [148](#), [155–158](#)

## Notations utilisées

<b>Notation</b>	<b>Description</b>
$\llbracket 1..J \rrbracket$	ensemble des entiers compris entre 1 et J
N	le nombre de câbles, indicés $i$ , $i \in \llbracket 1..N \rrbracket$
H	le nombre de masses en rotation attachées à la plate-forme, indicées $h$ , $h \in \llbracket 1..H \rrbracket$
K	le nombre de masselottes en translation attachées à la plate-forme, indicées $k$ , $k \in \llbracket 1..K \rrbracket$
L	le nombre d'actionneurs gyroscopiques attachés à la plate-forme, indicés $l$ , $l \in \llbracket 1..L \rrbracket$
M	le nombre de roues à inertie attachées à la plate-forme, indicées $m$ , $m \in \llbracket 1..M \rrbracket$
J	le nombre de dispositifs de stabilisation (incluant les actionneurs gyroscopiques, masses en translation, masses en rotation etc.) attachés à la plate-forme, indicés $j$ , $j \in \llbracket 1..J \rrbracket$
$\mathcal{R}_0$	le repère galiléen de référence, dont l'origine est le point O
$\mathcal{R}_p$	le repère attaché à la plate-forme, centré au point $G_p$ , le centre de gravité de la plate-forme
$\mathcal{R}_j$	le repère attaché au solide $j$ , centré en $O_j$
$\mathbf{R}_{p0}$	la matrice de rotation donnant l'orientation du repère $\mathcal{R}_p$ dans $\mathcal{R}_0$
$A_i$	le point d'attache du câble $i$ au cadre
$B_i$	le point d'attache du câble $i$ à la plate-forme
$\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$	le vecteur position de $A_i$ dans $\mathcal{R}_0$
$\mathbf{b}_i = \overrightarrow{G_p B_i}$	le vecteur position de $B_i$ dans $\mathcal{R}_p$
$\tau_i$	la tension du câble $i$
$\mathbf{u}_i = \overrightarrow{A_i B_i}$	le vecteur directeur du câble $i$
$l_i = \left\  \overrightarrow{A_i B_i} \right\ $	la longueur à vide du câble $i$
$\mathbf{J}$	la matrice jacobienne du robot
$\mathbf{p} = \overrightarrow{OG_p}$	la position du point $G_p$ dans $\mathcal{R}_0$
$\boldsymbol{\theta}_p$	position angulaire de la plate-forme dans $\mathcal{R}_0$

**Notation** $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_p)$ 

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_p) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_p) {}^0\dot{\boldsymbol{\theta}}_p$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{p}^\top \quad \boldsymbol{\theta}_p^\top]^\top$$

 $\boldsymbol{\theta}_j$ 

$$\boldsymbol{\omega}_j = {}^j\dot{\boldsymbol{\theta}}_j$$

 $G_p$  $G_j$ 

$$\mathbf{r}_j = \overrightarrow{G_p O_j}$$

 $\boldsymbol{\theta}_{j0}$ 

$$\boldsymbol{\lambda}_j = \overrightarrow{O_j G_j}$$

 $\boldsymbol{\omega}_j$  $m_p$  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}_p$  $m_j$  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}_j$  $m_T$  $\mathbf{g}$  $k_c$  $k_s$  $E$  $A_c$  $\boldsymbol{\theta}_j$  $\boldsymbol{\theta}$ **Description**

matrice jacobienne liant la dérivée de la position angulaire à la vitesse angulaire de la plate-forme

matrice jacobienne d'orientation du solide dans le repère galiléen

vitesse angulaire de la plate-forme par rapport à  $\mathcal{R}_0$

la pose du robot

position angulaire du solide  $j$  dans le repère  $\mathcal{R}_p$

vitesse angulaire du solide  $j$  par rapport à  $\mathcal{R}_p$

le centre de gravité de la plate-forme

le centre de gravité du solide  $j$  attaché à la plate-forme

le vecteur position du point  $O_j$  dans  $\mathcal{R}_p$

le vecteur position angulaire initiale des dispositifs du stabilisateur dans le repère  $\mathcal{R}_p$

le vecteur position du centre de gravité  $G_j$  dans le repère  $\mathcal{R}_j$

vecteur vitesse angulaire du solide  $j$  par rapport à  $\mathcal{R}_p$

la masse de la plate-forme

le tenseur d'inertie en  $G_p$  de la plate-forme

la masse du solide  $j$  attaché à la plate-forme

le tenseur d'inertie en  $G_j$  du solide  $j$  attaché à la plate-forme

la masse de l'ensemble constitué de la plate-forme et des  $J$  stabilisateurs embarqués

le vecteur d'accélération de la pesanteur

raideur d'un câble, exprimée en N

raideur spécifique d'un câble, exprimée en  $\text{Nm}^{-1}$

le module d'Young

la section d'un câble

la coordonnées articulaire du bras  $j$  du stabilisateur

le vecteur des coordonnées articulaires de tous les bras dans le repère  $\mathcal{R}_p$

<b>Notation</b>	<b>Description</b>
$\mathbf{x}_s$	la pose en équilibre statique de la plate-forme
$\Delta \mathbf{x}$	le petit déplacement de la plate-forme dû aux vibrations
$\boldsymbol{\kappa}$	le vecteur des couples des moteurs des bras
$\mathbf{M}_T$	matrice de masse globale du système composé de la plate-forme du <a href="#">RPC</a> et du stabilisateur embarqué
$\mathbf{C}_T$	matrice de Coriolis globale du système composé de la plate-forme du <a href="#">RPC</a> et du stabilisateur embarqué
$\mathbf{w}_c$	le torseur d'effort provoqué par les câbles sur la plate-forme en $G_p$
$\mathbf{w}_G$	le torseur d'effort provoqué par la gravité sur la plate-forme en $G_p$
$\mathbf{w}_e$	le torseur d'effort provoqué par les dispositifs d'actionnement embarqué sur la plate-forme en $G_p$
$\mathbf{w}_1$	le torseur des composantes actives en accélération angulaire des bras du torseur d'effort provoqué par le stabilisateur embarqué sur la plate-forme en $G_p$
$\mathbf{w}_2$	le torseur des composantes actives en vitesse angulaire des bras du torseur d'effort provoqué par le stabilisateur embarqué sur la plate-forme en $G_p$
$\xi$	la variable d'optimisation
$\theta_M$	la limite de la valeur de la coordonnée angulaire
$\mathcal{X}$	l'intervalle de définition de la variable d'optimisation $\xi$
$\mathcal{W}$	l'espace de travail prescrit du <a href="#">RPC</a>
$\mathcal{T}$	l'espace des torseurs générables du <a href="#">RPC</a>
$\mathcal{B}$	la parallélépipède englobant l'espace de travail prescrit du <a href="#">RPC</a> $\mathcal{W}$
$\mathcal{E}_i$	le polyèdre englobant l' <a href="#">ETC</a> du câble $i$
$\mathbf{n}_{k_i}$	le vecteur normal à la $k^{\text{ième}}$ face du polyèdre $\mathcal{E}_i$ englobant l' <a href="#">ETC</a> du câble $i$
$\mathcal{S}_j$	l'espace de travail prescrit du $j^{\text{ième}}$ dispositif du stabilisateur
$S_j$	un point de $\mathcal{S}_j$

**Notation** $\mathcal{P}(\boldsymbol{w})$  $\sigma_e$ **Description**la puissance générée par le torseur  $\boldsymbol{w}$ l'erreur moyenne quadratique sur la variable  $e$



---

## Remerciements

L'expérience dans le monde de la recherche et le travail décrit dans cette thèse n'auraient pu se faire sans l'aide et le soutien de mes encadrants, mes collègues et mes proches, que je tiens à remercier particulièrement ici.

Je tiens, en premier lieu, à exprimer ma gratitude envers Marc GOUTTEFARDE, mon directeur de thèse, très attentif à mes difficultés et soucieux de suivre régulièrement mon travail. Merci pour ton implication de tout instant et nos échanges très enrichissants.

Je remercie également Jacques GANGLOFF, mon co-directeur, pour son encadrement rigoureux et exigeant. Merci de m'avoir présenté la recherche lors de mes stages au laboratoire ICUBE et de m'avoir motivé à poursuivre dans cette voie. Ta confiance et ta sincérité ont été d'un grand secours tout au long de cette thèse.

Je remercie également mon encadrant Loïc CUVILLON qui n'a pas ménagé ses efforts pour m'aider et y a laissé quelques nuits. Merci pour ta disponibilité, ton soutien sans relâche, ton sens du détail et ta passion pour la bibliographie, qui ont tant apporté aux travaux de cette thèse.

Je remercie Joseph MASSIN sans qui les expérimentations n'auraient pas pu voir le jour. Merci de t'être attelé à la réalisation mécanique et à la programmation afin de concrétiser le stabilisateur. Merci aussi pour avoir tenu la tension des derniers instants de ma thèse !

J'adresse mes remerciements suivants à Pierre-Élie HERVÉ et Jean-Baptiste IZARD de l'entreprise TECNALIA France pour les discussions très instructives sur les choix techniques et pour m'avoir quelquefois remis les pieds sur terre. Merci également à Jean-Baptiste d'avoir accepté de figurer dans mon jury.



Je tiens à remercier ensuite Gabriel ABBA, présidente du jury et Éric COURTEILLE, rapporteur, qui malgré leur charge de travail ont accepté la tâche pénible de relire mon travail.

Enfin, je tiens à remercier mes collègues doctorants et stagiaires, d'ICUBE et du LIRMM, pour le climat d'entraide et d'amitié qui a régné durant toute ma thèse. Les discussions autour d'un café, les conseils et les petits coups de main ont beaucoup compté pour moi. DP, Chinmay, Ana, Imane, Lijia, Quentin, Jérémy, Mouna, Guillaume, João, Laure, Vinayak, Lucas, Maxence, David, Hussein et Hussein, Maxime, Julien, Franfran et Jun, Nico, Jocelyn et tous les autres, merci pour tous les excellents moments passés ensemble.

*Last but not least*, je remercie particulièrement Xavier et Anne. Merci à Xavier de m'avoir fait découvrir le monde de la recherche et les Robots Parallèles à Câbles. Merci enfin à Anne de m'avoir accompagné durant toute cette thèse, merci pour tout soutien au quotidien et tes relectures attentives.

Pour finir, je remercie l'Agence Nationale de la Recherche pour le financement de la thèse.



## CHAPITRE

**1****Introduction****Préambule**

*Cette thèse s'intitule « Conception, optimisation et commande d'un stabilisateur actif pour la compensation des vibrations des robots parallèles à câbles ». Elle a été préparée sous la direction de Jacques GANGLOFF et de Marc GOUTTEFARDE et avec l'encadrement de Loïc CUVILLON. Cette thèse a été réalisée conjointement au sein de l'équipe Automatique, Vision et Robotique (AVR) du laboratoire ICube à Strasbourg et de l'équipe DEXTER du LIRMM à Montpellier. Elle s'inscrit dans un projet financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR), qui vise entre autres à corriger les problèmes de vibrations des robots parallèles à câbles. Une solution pour y remédier est proposée, puis sa topologie est optimisée et enfin une loi de commande est synthétisée pour réaliser un système de compensation de ces vibrations.*

*La première partie de ce chapitre donne la définition d'un robot parallèle à câbles. En deuxième partie, le contexte du projet ANR DexterWide est présenté. Puis le robot parallèle à câbles CoGiRo est décrit. Ensuite, la problématique de cette thèse est introduite dans la quatrième partie et enfin les contributions sont présentées dans la dernière partie.*

**Sommaire**


---

1.1	Les robots parallèles à câbles . . . . .	5
1.2	Description du projet DexterWide . . . . .	5
1.3	Le RPC CoGiRo . . . . .	6
1.4	Description de la problématique . . . . .	8
1.5	Contributions . . . . .	9

---

## 1.1 Les robots parallèles à câbles

Les Robots Parallèles à Câbles (RPC) sont constitués d'une partie mobile appelée la plate-forme reliée par des câbles à une structure fixe. La position et l'orientation de la plate-forme sont contrôlées par l'intermédiaire des longueurs des câbles. Les RPC suspendus, pour lesquels tous les câbles sont situés au-dessus de la plate-forme et qui utilisent leur propre poids pour maintenir les câbles en tension, sont étudiés dans cette thèse.

Leur architecture confère aux RPC de nombreux avantages : un espace de travail important, une charge utile importante et un rapport entre masse propre et charge utile faible, qui permet des dynamiques rapides, une faible consommation d'énergie et un coût très faible. Il est également possible de construire des RPC de très grandes dimensions. De plus, ne pas avoir de câbles en-dessous de la plate-forme permet aux RPC suspendus de se servir de l'espace ainsi libéré sous la plate-forme à d'autres fins. Il est donc possible d'utiliser des RPC dans de grands volumes encombrés ou encore pour déplacer des objets au sol.

Cependant, le contrepoint de ces avantages est dû à l'utilisation de câbles pour réaliser l'actionnement du RPC. Les câbles doivent rester en tension, un câble ne pouvant exercer un effort que dans un seul sens. L'actionnement par câbles présente donc une difficulté de commande supplémentaire puisqu'il faut veiller à la faisabilité de la tension demandée.

En outre, le modèle des câbles est aussi un paramètre à prendre en compte dans le comportement des RPC. En effet, un câble pesant est soumis à l'effet de *sagging*, il s'affaisse sous son propre poids. Cet effet est en général négligé, les câbles étant le plus souvent considérés comme des solides au comportement linéaire élastique.

Enfin, les câbles étant flexibles ; la raideur des RPC est de ce fait limitée, ce qui les rend sujets à des vibrations parasites potentiellement très importantes. Ce défaut réduit la capacité des RPC à effectuer certaines tâches. Cet inconvénient peut être atténué par l'augmentation de la tension dans les câbles pour certaines configurations de RPC, mais dans le cas suspendu cette solution n'est pas envisageable.

## 1.2 Description du projet DexterWide

Le travail de recherche exposé dans la présente thèse a été réalisé dans le cadre du projet DexterWide [DexterWide]. Ce projet, financé par l'Agence Nationale de la Recherche sous la convention d'aide ANR-15-CE10-0006, regroupe un consortium de quatre parties : les laboratoires ICUBE – laboratoire des sciences de l'Ingénieur, de l'Informatique et de l'Imagerie (UMR7357) – et LIRMM – Laboratoire d'Informatique de Robotique et de Microélectronique de Montpellier (UMR5506) – ainsi que les entreprises Reel NFM et Tecna-lia France.

Un des principaux objectifs du projet est d'embarquer sur la plate-forme d'un RPC de

grandes dimensions un manipulateur industriel afin de cumuler les bénéfices du grand espace de travail d'un RPC et de la dextérité des robots sériels. Le manipulateur choisi est un bras robotique sériel *SIA20F* du fabricant Yaskawa.

Ce système composé de deux robots répond au besoin de certaines applications qui nécessitent l'exécution de tâches précises sur un grand espace de travail, par exemple pour des applications de manipulation ou d'inspection dans les secteurs de la construction navale, de l'aéronautique, du nucléaire et du génie civil.

Dans le cadre de ce projet, trois applications ont été retenues pour des démonstrations expérimentales : une application sans contact, la peinture à la bombe, et deux applications en contact qui sont la découpe et le perçage de matériaux.

La faible raideur de la plate-forme mobile du RPC constitue l'un des principaux défis de ce projet. En effet, à cause de celle-ci, l'influence du robot industriel embarqué sur la plate-forme mobile du RPC ne peut pas être négligée.

Deux des tâches retenues pour les démonstrations expérimentales, la découpe et le perçage, font interagir le système avec son environnement. Ces actions génèrent un torseur d'effort sur le robot industriel qui est transmis au RPC. Compte tenu de la faible raideur du RPC, ce torseur d'effort provoque les vibrations de la plate-forme mobile.



Figure 1.1: Le RPC *CoGiRo* équipé d'un bras série *SIA20F* de Yaskawa

### 1.3 Le RPC *CoGiRo*

Le projet *DexterWide* est consacré aux RPC pourvus d'actionneurs embarqués. Parmi les moyens fournis par Tecnia et le LIRMM se trouve le RPC de grandes dimensions *CoGiRo*. Il s'agit d'un RPC suspendu à 8 câbles pour 6 degrés de liberté (DDL), ce qui en fait un robot à redondance d'actionnement.



Figure 1.2: Le RPC CoGiRo à 8 câbles et 6 DDL

Le robot *CoGiRo* est le résultat du précédent projet de recherche du même nom – pour *Control of Giant Robots* –, financé par l’ANR. La plate-forme de *CoGiRo* est un cube de 1 m de côté. La disposition des câbles de ce RPC est le fruit d’une optimisation [Gouttefarde *et al.*, 2015a], visant à maximiser la distance entre le centre géométrique de la plate-forme et son CDG au travers d’un espace de travail donné. Le RPC ainsi conçu présente l’avantage d’avoir une charge utile importante.

Les dimensions de *CoGiRo* sont importantes, de même que ses autres caractéristiques physiques, les principales sont :

- longueur : 15 m
- largeur : 11 m
- hauteur : 6 m
- masse de la plate-forme : 300 kg
- charge utile : 200 kg

À noter que la masse importante de la plate-forme provient du fait qu’elle est chargée du robot sériel *SIA20F*, du stabilisateur et de leurs contrôleurs respectifs.

À cause de la configuration particulière de *CoGiRo*, sa plate-forme est sujette à des vibrations dont la fréquence propre est faible, de l’ordre de grandeur du Hertz [Yuan *et al.*, 2017].

## 1.4 Description de la problématique

Le but de cette thèse est de concevoir un système actif permettant de compenser les vibrations de la plate-forme mobile des **RPC** suspendus. Dans cette thèse, le robot industriel série embarqué n'est pas étudié, seuls les problèmes engendrés par les vibrations de la plate-forme le sont.

Puisque ces vibrations sont inhérentes à la nature des **RPC**, il est nécessaire d'utiliser des techniques d'amortissement des vibrations pour stabiliser le système. Il existe trois techniques d'amortissement des vibrations :

- l'amortissement passif, qui consiste à ajouter un ensemble masse-raideur dimensionné pour amortir les vibrations à une fréquence donnée ;
- l'amortissement actif qui consiste à inclure dans la commande des enrouleurs un signal de correction des erreurs de positionnement dues aux vibrations. Cette technique nécessite une bonne connaissance du modèle du **RPC** ;
- l'amortissement actif qui consiste à générer sur la plate-forme du **RPC** un torseur d'efforts produit à l'aide de dispositifs actionnés embarqués dédiés.

Les autres solutions ne permettant que partiellement de compenser les vibrations, le moyen choisi pour amortir les vibrations est l'ajout de dispositifs actionnés embarqués sur la plate-forme du **RPC**. L'ensemble de ces dispositifs est nommé stabilisateur.

Les emplacements des dispositifs constituant le stabilisateur doivent être déterminés afin de permettre de compenser au mieux les vibrations de la plate-forme. Ceci constitue un problème d'optimisation qui vise à trouver le meilleur emplacement et la meilleure orientation des dispositifs selon un critère choisi pour représenter l'influence du stabilisateur et en respectant des contraintes de faisabilité de la solution.

À cause du grand nombre de solutions et de la complexité des relations entre les paramètres, les techniques d'optimisation déterministes ne peuvent permettre d'atteindre la solution optimale qu'au terme d'un temps de calcul prohibitif. La résolution de ce problème se fait par l'utilisation d'une méta-heuristique évolutionniste.

Ensuite, une fois le stabilisateur totalement défini, une commande doit être synthétisée pour l'utilisation du **RPC** muni de son stabilisateur. Ce système, composé de deux sous-systèmes effectuant des tâches à des échelles de temps différentes – temps long pour le déplacement de la plate-forme du **RPC** et rapide pour le stabilisateur – peut être analysé au moyen des outils de la théorie des perturbations singulières.

Enfin, une validation en simulation permet de démontrer l'intérêt d'utiliser un stabilisateur composé de dispositifs embarqués sur la plate-forme du **RPC** pour la compensation active des vibrations.

Les objectifs de la thèse sont :

1. choisir les dispositifs actionnés composant le stabilisateur ;
2. sélectionner l'architecture du stabilisateur la plus adaptée au problème actuel ;
3. synthétiser une loi de commande pour le système composé du RPC et du stabilisateur.

Les travaux réalisés au cours de cette thèse se veulent les plus généraux possibles. Tous les développements sont valides pour n'importe quel RPC suspendu, quels que soient le nombre de câbles et de DDL de la plate-forme et quel que soit le nombre et la nature des dispositifs actionnés utilisés pour la stabilisation.

L'état de l'art de la robotique parallèle à câbles, en particulier les problèmes de vibrations des RPC, est abordé dans le chapitre 2, ainsi que l'état de l'art des systèmes d'amortissement des vibrations puis celui de la commande des RPC.

Les modèles mécaniques utilisés pour décrire le comportement dynamique de la plate-forme du RPC et de différents types de dispositifs de compensation de vibrations sont donnés dans le chapitre 3. Ces modèles permettent de réaliser un choix technologique pour le dispositif de compensation des vibrations. Un exemple d'utilisation du stabilisateur ainsi obtenu est ensuite donné.

Le chapitre 4 explique le processus utilisé pour l'optimisation de l'architecture du stabilisateur. Ce chapitre explicite notamment le problème d'optimisation, décrit les contraintes, la méthode et les résultats obtenus.

Ensuite, le chapitre 5 décrit la synthèse de la loi de commande utilisée pour piloter conjointement le RPC et le stabilisateur. Puis, en utilisant la théorie des perturbations singulières, une preuve de stabilité de la commande est formulée.

Enfin le chapitre 6 montre les résultats expérimentaux obtenus à l'aide de simulations sur deux plate-formes expérimentales. La première est un RPC suspendu plan et la seconde est le RPC suspendu à 6 DDL *CoGiRo*.

## 1.5 Contributions

L'étude de différents types de dispositifs élémentaires d'actionnement embarqués pour la compensation des vibrations nécessite une modélisation générique des dispositifs permettant de les comparer. Une première contribution est la modélisation sous forme de torseur d'effort appliqué à la nacelle des contributions des différents dispositifs, cette approche permettant de décrire tous les dispositifs quels qu'ils soient. Cette modélisation



permet un choix éclairé de type de dispositif en fonction de la compensation désirée pour les vibrations.

Le choix de tels dispositifs pour concevoir un stabilisateur actif capable de compenser les vibrations de la plate-forme mobile d'un RPC dans différentes directions est également une contribution de cette thèse.

La troisième contribution de cette thèse est la modélisation d'un volume représentant l'espace de travail des câbles afin de prouver l'absence de collision entre un câble et un dispositif embarqué sur la plate-forme mobile d'un RPC de manière peu coûteuse en temps de calcul. L'absence de collision étant alors un test léger à réaliser, elle peut être introduite comme une contrainte dans un processus d'optimisation du placement de dispositifs sur la plate-forme.

Enfin, la dernière contribution est la synthèse d'une loi de commande du système couplé de la plate-forme et de son stabilisateur embarqué basée sur le fonctionnement à deux échelles de temps différentes.

## Préambule

*Ce chapitre définit en premier lieu les Robots Parallèles à Câbles (RPC) et dresse un état de l'art des RPC existants, de leurs principales propriétés ainsi que de leurs utilisations. En particulier, la faible raideur de l'actionnement caractéristique des robots parallèles à câbles est à l'origine de certains de leurs principaux avantages et inconvénients. Parmi ceux-ci, la faible raideur des RPC provoque des vibrations de la plateforme. Différents moyens de compensation de ces vibrations sont étudiés dans un second temps.*

*Ensuite, le besoin d'optimisation du dispositif de compensation des vibrations choisi étant mis en évidence, les techniques d'optimisation les plus à même de répondre à ce besoin sont décrites.*

*Enfin, certaines des propriétés des RPC ont une influence importante sur leur commande. L'avancement de l'état de l'art en commande des RPC est dressé dans une dernière partie.*

## Sommaire

---

2.1	État de l'art des RPC	12
2.2	Stabilisation	23
2.3	Optimisation	31
2.4	Commande	33

---

## 2.1 État de l'art des RPC

### 2.1.1 Définition d'un RPC

Les Robots Parallèles à Câbles (RPC) consistent en une partie mobile appelée la plate-forme reliée par des câbles à une structure, fixe le plus souvent. C'est en agissant sur les longueurs de ces câbles qu'on modifie la position et l'orientation de la plate-forme.

Un mécanisme série est formé d'une seule chaîne cinématique, c'est à dire qu'il n'existe qu'une seule succession de segments reliant le premier élément au dernier. Un mécanisme parallèle est composé d'au moins deux chaînes cinématiques, qui sont chacune un mécanisme avec les mêmes premier et dernier éléments.

Dans le cas d'un RPC, chaque câble relie un point de sortie rattaché à la structure fixe du robot à un point d'attache situé sur la plate-forme mobile. Chaque câble d'un RPC peut être identifié à une chaîne cinématique puisqu'il relie la plate-forme mobile au bâti fixe. Les RPC constituent donc une classe de mécanismes parallèles à N fermetures cinématiques, N étant le nombre de câbles. Des dispositifs enrouleurs de câble sont généralement situés sur la structure fixe, même si on trouve certains contrexemples où le but est d'embarquer l'enroulement des câbles sur la plate-forme, comme par exemple dans [Weber *et al.*, 2015]. Le plus souvent, les enrouleurs de câbles se composent de tambours couplés à des moteurs, soit directement soit au moyen de réducteurs. Les longueurs des câbles sont modifiées en actionnant les enrouleurs, permettant ainsi de modifier la position et l'orientation de la plate-forme.

Les points d'attache des câbles sur la plate-forme sont considérés équivalents à des liaisons cardans et les points de sortie des câbles peuvent être considérés comme fixes ou mobiles. La position du point de sortie d'un câble enroulé sur une poulie évolue dans le temps autour de la poulie [Pott, 2012]. Ce problème peut être réglé au moyen d'une poulie de renvoi, c'est le cas sur le RPC *CoGiRo* par exemple, cependant la plupart des travaux négligent ce phénomène. Enfin des actionneurs supplémentaires peuvent aussi faire varier la position des points d'attache ou de sortie des câbles, on parle alors de RPC reconfigurables, comme par exemple [Gagliardini *et al.*, 2015].

Dans certains travaux, les câbles sont combinés à d'autres mécanismes d'actionnement pour améliorer leurs performances. Il peut s'agir d'autres types de chaînes cinématiques liant le bâti à la plate-forme ; par exemple sur le RPC de [Trevisani *et al.*, 2006] un bras 2R-SCARA passif est ajouté en parallèle aux câbles pour améliorer la précision du RPC et dans [Seriani *et al.*, 2015] le même type de bras est ajouté pour augmenter l'espace de travail du RPC. Les outils utilisés au cours de cette thèse ne permettent pas de traiter ces cas, les RPC désignent ici des mécanismes parallèles dont les chaînes cinématiques sont toutes des câbles.

Un RPC est ainsi défini comme un robot dont la plate-forme mobile est liée au bâti par

des câbles uniquement, et actionné en faisant varier la longueur des câbles ou la position de leurs points d'attache dans le cas des RPC reconfigurables. Des actionneurs embarqués peuvent aussi être ajoutés sur la plate-forme, par exemple dans [Weber *et al.*, 2014]. Bien qu'ils contribuent à son mouvement, ces actionneurs sont considérés comme externes au RPC. Leur contribution au mouvement du RPC est comptabilisée comme la contribution d'éléments extérieurs.

Contrairement aux mécanismes parallèles classiques, les chaînes cinématiques des RPC ne sont pas rigides, mais composées de câbles flexibles. Un câble est un solide déformable dont l'une des dimensions est très grande devant les deux autres.

Le câble ne peut agir sur la plate-forme qu'en traction. En effet le câble prend une forme rectiligne lorsque une force de traction lui est appliquée – sa tension est alors positive – et il flambe sans opposer de résistance lorsqu'il est soumis à une sollicitation en compression (tension négative). Lorsqu'un ou plusieurs câbles sont détendus, le RPC perd un ou plusieurs degrés d'actionnement, cela peut empêcher la plate-forme d'atteindre avec précision la pose désirée. Cette particularité est au centre des questions de commande des RPC.

Le comportement d'un câble de masse nulle est en général considéré comme linéaire et élastique : le câble s'allonge proportionnellement à la tension qui lui est appliquée par le poids de la plate-forme ou l'action des autres câbles.

Au contraire, un câble de masse non nulle s'affaisse sous son propre poids, on parle du phénomène de *sagging*. Il faut alors considérer l'affaissement du câble dans le modèle géométrique du robot [Riehl, 2011]. La forme du câble est alors généralement décrite par le modèle de la caténaire élastique donné par [Irvine, 1981] : l'affaissement augmente en fonction du poids linéique du câble et diminue en fonction de la tension mais son amplitude maximale augmente non-linéairement en fonction de la longueur du câble. Si l'affaissement est faible, il est possible de modéliser le câble par une parabole [Riehl, 2011]. Dans les cas où la masse du câble ne peut pas être négligée, il faut estimer sa déflexion due au *sagging* pour déterminer la longueur de câble déroulée.

Dans sa thèse, Bouchard propose des outils pour déterminer si l'effet de *sagging* est négligeable [Bouchard, 2008]. La masse des câbles est souvent négligée devant celle de la plate-forme et de son chargement, ce qui permet d'utiliser un modèle mécanique purement élastique. Dans cette thèse la masse des câbles sera négligée et leur déformation sera considérée comme élastique et linéaire à la tension.

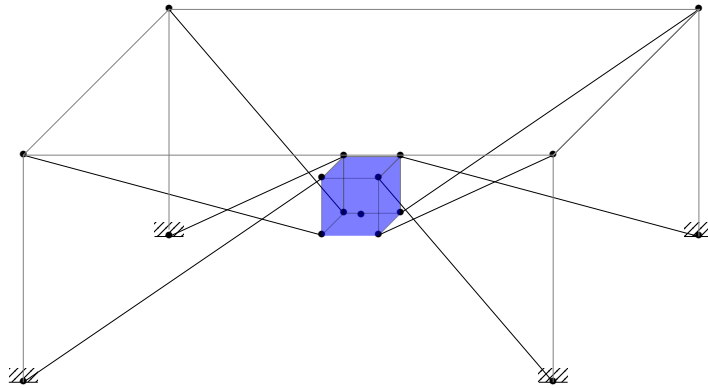


Figure 2.1: Exemple de robot à 8 câbles et 6 DDL

### 2.1.2 Configuration des RPC

Une représentation schématique d'un RPC entraîné par huit câbles est présentée à la Figure 2.1. Le croisement de certains câbles résulte de l'optimisation de la géométrie du robot pour améliorer ses performances. L'optimisation de la configuration des RPC n'est pas abordée dans cette thèse. Ce sujet est notamment discuté dans [Barrette et Gosselin, 2005; Riehl, 2011; Zhou *et al.*, 2012; Gouttefarde *et al.*, 2015a; Hussein *et al.*, 2018].

Les diverses possibilités de configurations des RPC – le placement des points d'attache à la structure et à la plate-forme – permettent d'envisager différentes géométries. Celles-ci sont généralement divisées en deux classes, les RPC pleinement contraints et suspendus.

**Configuration pleinement contrainte.** La configuration est dite pleinement contrainte si les câbles peuvent générer des forces et des moments sur la plate-forme dans toutes les directions. Une condition nécessaire mais non suffisante pour obtenir un RPC en configuration pleinement contrainte est qu'il y ait au moins un câble de plus que le RPC ne possède de DDL [Kawamura et Ito, 1993]. Un exemple de RPC pleinement contraint est donné à la Figure 2.2.

**Configuration suspendue.** En configuration suspendue, tous les câbles sont situés au-dessus de la plate-forme et tendus par son poids. Un avantage notable de cette configuration est de réduire le risque de collision entre le robot et son environnement dans un cadre industriel. Un RPC suspendu utilise le poids de la plate-forme comme force constante assurant la tension des câbles. Ce type de robot n'est pas nécessairement redondant, il suffit d'autant de câbles que de DDL pour le commander dans toutes les directions. Par opposition à la classe précédente, cette configuration est dite partiellement contrainte, le robot ne peut générer que des efforts limités dans certaines directions, il ne peut générer qu'un

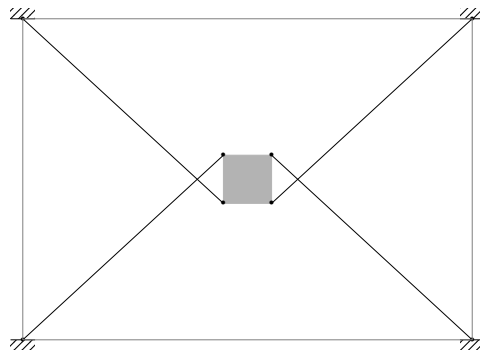


Figure 2.2: Robot pleinement contraint à 4 câbles et 3 DDL

faible effort vertical vers le bas par exemple. Un exemple en est donné à la Figure 2.3. Tous les robots utilisés dans cette thèse sont en configuration suspendue.

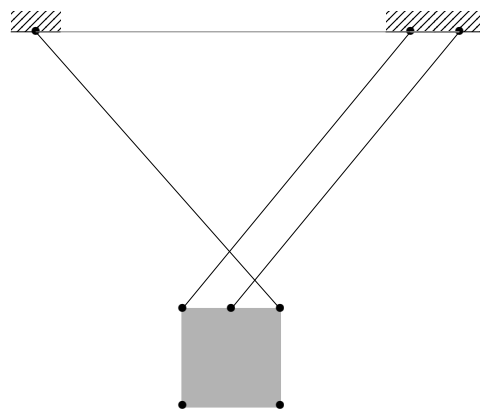


Figure 2.3: Robot suspendu à 3 câbles et 3 DDL

### 2.1.3 Avantages et inconvénients

Les mécanismes parallèles sont très utilisés en robotique notamment en raison de leurs propriétés qui permettent d'atteindre des dynamiques importantes et un rapport charge utile-masse élevé [Merlet, 2006].

L'utilisation de câbles au lieu de jambes rigides dans le cas des RPC permet de réduire fortement les masses et les inerties des pièces mécaniques en mouvement pendant le fonctionnement du robot. De plus, les câbles pouvant porter de lourdes charges, cette propriété permet de construire des robots dont la charge utile est très importante par rapport à leur masse [Albus *et al.*, 1993; Gouttefarde *et al.*, 2015a]. Enfin, cela permet aux RPC d'atteindre des performances dynamiques élevées [Kawamura *et al.*, 1995; Bruckmann *et al.*, 2013].

Les chaînes cinématiques simples des RPC les rendent facilement transportables et reconfigurables [Merlet et Daney, 2010; Gagliardini *et al.*, 2015]. La géométrie de ces robots peut rapidement être modifiée, ce qui permet de changer leur modèle géométrique.

En outre, l'emploi de câbles flexibles et légers, qu'il est possible de dérouler, permet d'utiliser des câbles très long – jusqu'à plusieurs centaines de mètres [CableCam] – et permet donc aux RPC d'atteindre une taille importante [Nahon *et al.*, 2002; Bouchard et Gosselin, 2006; Li *et al.*, 2013].

La notion d'espace de travail d'un robot décrit l'ensemble des poses (positions et orientations) qu'il peut atteindre et où il peut appliquer un torseur d'effort donné [Verhoeven et Hiller, 2000]. Trois contraintes doivent être satisfaites pour qu'une pose appartienne à l'espace de travail [Merlet, 2004]. La première est qu'elle respecte la longueur maximale et minimale des câbles. La deuxième contrainte est que les collisions des câbles entre eux et avec la plate-forme doivent être évitées dans l'espace de travail. La gestion de la collision des câbles a notamment été traitée dans [Merlet, 2004; Bouchard, 2008; Nguyen et Gouttefarde, 2015]. Les interférences entre câbles peuvent aussi être considérées comme des perturbations et corrigées par la commande [Otis *et al.*, 2009]. La dernière contrainte est que la tension dans les câbles doit être admissible, c'est à dire qu'elle doit être comprise dans intervalle de tensions donné tel que le câble conserve un comportement linéaire élastique.

L'espace de travail des RPC est principalement limité par la capacité à générer un torseur d'effort donné au Centre de Gravité (CDG) de la plate-forme. En effet, les câbles n'étant pas capables de pousser, il existe de nombreuses situations où produire des efforts dans certaines directions est impossible. Par exemple, un RPC suspendu ne peut fournir vers le bas qu'un effort inférieur ou égal au poids de la plate-forme. L'unilatéralité de l'actionnement et l'admissibilité des tensions dans les câbles sont des facteurs limitant l'espace de travail des RPC.

Il existe différentes définitions de l'espace de travail des mécanismes parallèles à câbles, dont deux sont détaillées ici. La première est l'espace des poses polyvalentes ou *wrench closure workspace* en anglais, définie comme l'ensemble des poses pour lesquelles les câbles sont capables d'exercer n'importe quel torseur d'effort sur la plate-forme [Gouttefarde et Gosselin, 2006]. Cet ensemble dépend uniquement de la géométrie du robot. Le calcul de cet espace s'avère complexe dans le cas général, mais des méthodes de calcul ont été développées [Gouttefarde et Gosselin, 2005; Merlet, 2013].

La seconde, l'espace des torseurs générables ou *Wrench-Feasible Workspace (WFW)* en anglais, désigne l'ensemble des poses pour lesquelles tous les torseurs d'un ensemble donné peuvent être générés à l'aide de tensions dans les câbles comprises entre deux bornes [Bosscher *et al.*, 2006]. Cette définition plus pratique dans le cadre de la conception permet de déterminer l'espace dans lequel le RPC est à même de fournir un torseur d'effort connu à l'avance.

Parmi les autres définitions, Barette définit un espace de travail dynamique [Barrette et Gosselin, 2005] qui contient les poses accessibles avec des accélérations atteignables en conservant des tensions strictement positives.

Quelle que soit la définition retenue, l'espace de travail d'un RPC peut avoir des formes et des tailles très variées selon sa géométrie. Il est à noter que le rapport entre le volume occupé par le robot et son espace de travail peut être très important.

En contrepartie, l'utilisation de jambes flexibles diminue drastiquement la matrice de raideur du robot. La raideur d'un RPC dépend de la tension dans les câbles, de la matrice jacobienne du RPC et de la dérivée de cette jacobienne [Behzadipour et Khajepour, 2006]. En considérant les câbles comme des segments de droite, d'après [Behzadipour et Khajepour, 2006; Bolboli *et al.*, 2018], on obtient la matrice décrivant la raideur du robot dans toutes les directions de l'espace en sommant les deux termes suivants :

1. la matrice de la raideur due aux câbles. Dans le cas simple où les câbles sont considérés comme des ressorts linéaires [Diao et Ma, 2009] :  $\mathbf{K}_e = \mathbf{J}^\top \mathbf{K}_c \mathbf{J}$ , avec  $\mathbf{K}_c$  la matrice diagonale contenant les raideurs axiales de chacun des câbles,  $\mathbf{J}$  la matrice Jacobienne du robot qui dépend de sa géométrie.
2. la matrice de la raideur due à la tension dans les câbles,  $\mathbf{K}_f$ . En notant,  $\mathbf{e}^\times$  la matrice de pré-produit vectoriel associée au vecteur  $\mathbf{e}$ ,  $i$  l'indice du câble,  $i \in [1..N]$ ,  $\mathbf{u}_i$  le vecteur directeur du  $i^{\text{ème}}$  câble,  $l_i$  sa longueur,  $\mathbf{b}_i$  le vecteur entre le CDG de la plateforme et le point d'attache du  $i^{\text{ème}}$  câble et  $\tau_i$  la tension dans le  $i^{\text{ème}}$  câble. D'après [Behzadipour et Khajepour, 2006],  $\mathbf{K}_f$  se calcule ainsi :

$$\mathbf{K}_f = \sum_{i=1}^N \frac{\tau_i}{l_i} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top & (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top) \mathbf{b}_i^{\times \top} \\ \mathbf{b}_i^\times (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top) & \mathbf{b}_i^\top (\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top) \mathbf{b}_i^{\times \top} - l_i \mathbf{u}_i^\times \mathbf{b}_i^\times \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Alors, selon Behzadipour, la raideur totale vaut :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_f \quad (2.2)$$

Comme les chaînes cinématiques du RPC sont des câbles flexibles, les termes de la matrice  $\mathbf{K}_c$  contenant leurs raideurs axiales sont faibles. Alors, compte tenu de la géométrie des RPC suspendus, les termes de la matrice  $\mathbf{K}_e$  sont relativement faibles.  $\mathbf{K}_e$  dépend également de la configuration du RPC, à proximité de la singularité  $\mathbf{K}_e$  tend à devenir nulle. En configuration pleinement contrainte, il est possible d'augmenter les efforts internes du système et donc sa raideur en tirant avec tous les câbles, et donc d'augmenter la valeur du terme  $\mathbf{K}_f$ . Cependant, ceci n'est pas possible en configuration suspendue. Donc la raideur totale des RPC suspendus est faible par nature.



Le modèle élasto-dynamique d'un RPC permet de prendre en compte la dynamique d'un câble élastique et pesant dans la modélisation de son comportement dynamique. Ce modèle est obtenu à partir de la raideur dynamique [Yuan *et al.*, 2014] de chaque câble, qui prend en compte à la fois la masse et l'élasticité. Dans [Baklouti *et al.*, 2018], une analyse de sensibilité aux incertitudes paramétriques est menée en utilisant ce modèle.

La connaissance de la raideur dynamique permet l'identification des fréquences propres du RPC [Yuan *et al.*, 2017; Jiang *et al.*, 2018]. À cause de leur faible raideur, les RPC suspendus ont des fréquences naturelles de vibration très basses, de l'ordre du Hertz [Kawamura *et al.*, 2000; Weber, 2016]. Ces basses fréquences sont associées à des amplitudes de vibrations parfois importantes [Yuan *et al.*, 2017] et à cause du faible amortissement des câbles, à un temps de stabilisation long.

#### 2.1.4 Applications des RPC

Leurs spécificités, notamment un coût relativement faible, leurs tailles éventuellement très grandes, leur grand espace de travail ou encore leur facilité de reconfiguration et de transport, permettent des utilisations très diverses des RPC. L'utilisation de mécanismes ou de structures exploitant l'enroulement de câbles remonte à l'antiquité notamment pour soulever des charges (grues) mais aussi pour générer un mouvement comme sur le chariot d'Héron d'Alexandrie [d'Alexandrie, I siècle].

Une des premières utilisations de RPC date de 1984 dans la thèse de Landsberger, où les jambes d'une plate-forme de Stewart-Gough sont remplacées par des câbles [Landsberger, 1984]. Ce robot, représenté à la Figure 2.4a, se compose d'une plate-forme actionnée par 6 câbles situés sous la plate-forme qui la tirent vers le bas et un vérin vertical pour maintenir les câbles en tension en appliquant une force sur la plate-forme. D'après la définition utilisée dans cette thèse, ce manipulateur parallèle n'entre pas dans la définition de RPC utilisée ici, comme il n'est pas actionné uniquement par des câbles.

Le premier exemple de RPC qui rentre dans cette définition est la *Skycam* [Cone, 1985]. Il s'agit d'un robot parallèle à quatre câbles suspendu au-dessus d'un stade avec une caméra fixée sur la plate-forme, voir Figure 2.4b. La caméra doit pouvoir se mouvoir dans un grand espace et le système doit être invisible depuis la caméra et discret dans le stade pour ne pas déranger les personnes présentes. Ce robot étant piloté à distance, la question de son asservissement n'est pas traitée. La *Skycam* effectue uniquement des mouvements de translation, la caméra est munie d'un support pan-tilt qui effectue les rotations et comprend également des stabilisateurs passifs embarqués (roues à inertie) pour compenser les vibrations.

Des RPC ont été utilisés à des fins de manipulation comme des grues robotisées pour déplacer des charges dans un vaste espace de travail. Le premier de ces travaux a été présenté par Dagalakis et Albus dans [Dagalakis *et al.*, 1989]; il concerne un dispositif pour

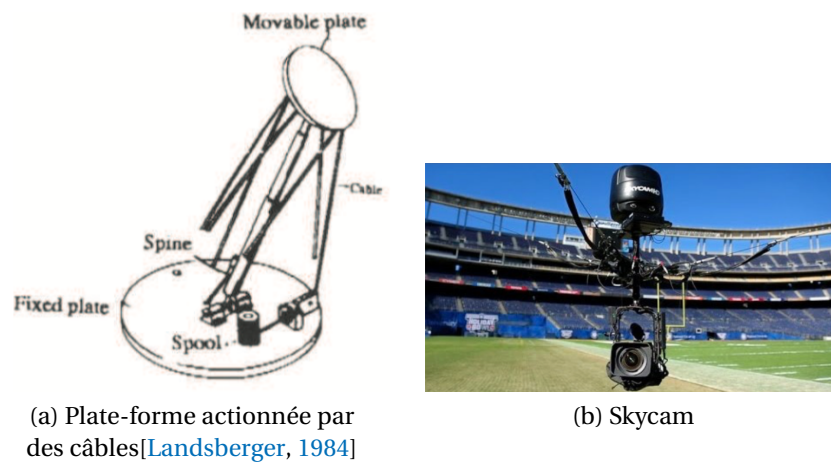


Figure 2.4: Précurseurs des RPC suspendus

contrôler une lourde charge sur plusieurs DDL à l'aide d'une plate-forme de Stewart-Gough inversée et pilotée par des câbles, tel que montré Figure 2.5a. Ces travaux ont été précurseurs des premiers RPC suspendus, comme par exemple le *NIST-ROBOCRANE* [Albus *et al.*, 1993]. Ce dernier robot est suspendu et muni de 6 câbles pour 6 DDL, voir Figure 2.5b. Ce genre de manipulateur qui permet de manipuler de lourdes charges sur un grand espace de travail correspond très bien aux avantages des RPC. D'autres robots de ce type ont été développés plus récemment, comme par exemple le manipulateur suspendu *CoGiRo* montré à la Figure 2.6, qui est un RPC suspendu redondant puisque muni de 8 câbles pour 6 DDL [Gouttefarde *et al.*, 2015a].

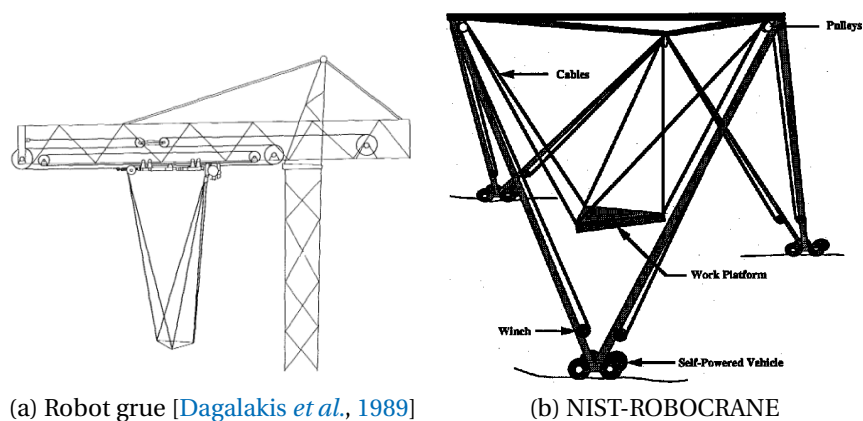


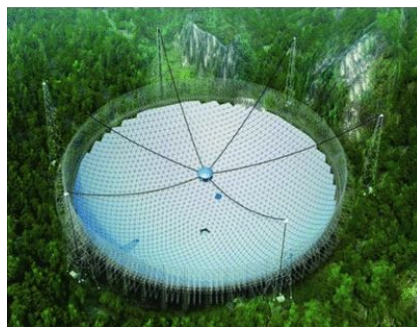
Figure 2.5: Premiers concepts de RPC suspendus

L'aptitude des RPC à travailler à de très grandes échelles est également exploitée dans

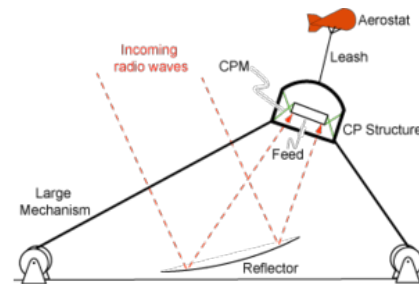


Figure 2.6: Le RPC CoGiRo à 8 câbles et 6 DDL

certaines projets. Par exemple, le collecteur du radio-télescope FAST en Chine [Li *et al.*, 2013], représenté à la Figure 2.7a, est un RPC suspendu dont les câbles ont une longueur de plusieurs centaines de mètres. De même le collecteur du télescope LAR au Canada (Figure 2.7b) est un robot suspendu inversé d'une taille de l'ordre de la centaine de mètres dont les câbles sont tendus par un ballon d'hélium attaché à la nacelle [Dewdney *et al.*, 2002; Nahon *et al.*, 2002; Meunier *et al.*, 2009]. Un prototype à échelle réduite de ce télescope a déjà été réalisé et testé [Lambert *et al.*, 2007].



(a) Radio-télescope FAST



(b) Principe du collecteur du LAR

Figure 2.7: Exemples de très grands RPC

Les grandes dynamiques qui peuvent être atteintes par des RPC ont également donné lieu à des développements. Des RPC pleinement contraints ont été développés pour des applications de manipulation d'objets avec des dynamiques importantes. Le premier travail sur les RPC rapides a été le *FALCON-7* [Kawamura *et al.*, 1995]. Il s'agit d'un RPC pleinement contraint à 7 câbles pour 6 DDL, il est représenté à la Figure 2.8a. De même le *SEGESTA* est aussi un robot pleinement contraint redondant à 7 câbles développé pour at-

teindre de grandes dynamiques [Hiller *et al.*, 2005]. Des robots à 8 câbles pour 6 DDL ont également été réalisés pour des applications industrielles, par exemple les deux versions de *IPAnema* [Pott *et al.*, 2013] représentées à la Figure 2.8b.

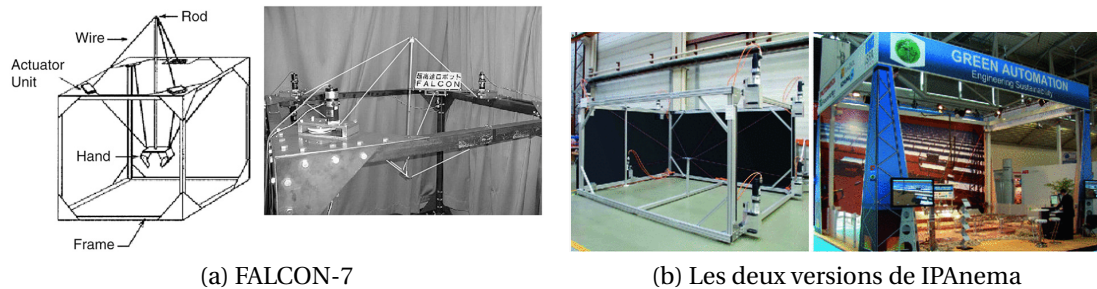


Figure 2.8: Exemples de RPC pleinement contraints rapides

La capacité des RPC pleinement contraints à produire des torseurs d'efforts dans toutes les directions tout en minimisant les perturbations visuelles est intéressante dans le domaine haptique. L'objectif est de donner à l'utilisateur la sensation de toucher un environnement virtuel. Cette application nécessite des réactions très rapides de l'interface et donc une grande dynamique de la plate-forme. Parmi les premiers RPC pleinement contraints développés pour réaliser une interface haptique se trouve l'interface de [Lindemann et Tessar, 1989] pour réaliser de la télé-opération, voir Figure 2.9a. Ce concept a été repris notamment dans [Kawamura et Ito, 1993] et dans les différents développements du SPIDAR [Sato *et al.*, 1992], une interface haptique de réalité virtuelle constituée d'un ou deux RPC pleinement contraints selon les versions. [Williams II, 1998] décrit les RPC comme plus légers et plus faciles à manipuler que les interfaces haptiques traditionnelles. Enfin la compagnie HAPTION SA commercialise l'interface haptique à taille humaine *INCA 6D™*, équipée de 8 câbles pour 6 DDL, représentée à la Figure 2.9b.

Enfin la facilité de transport et de reconfiguration des RPC a été mise à profit pour imaginer des robots suspendus transportables. La simplicité, la flexibilité et la légèreté des RPC a permis la conception de robots rapidement déployables conçus pour porter assistance à des victimes de catastrophes [Bosscher *et al.*, 2005]. Dans ces travaux le RPC à 3 câbles est attaché à des poteaux mobiles, voir Figure 2.10a.

Le *MARIONET-crane* décrit dans [Merlet et Daney, 2010], est un robot à 6 câbles, conçu pour être déployé rapidement ; il est présenté à la Figure 2.10b.

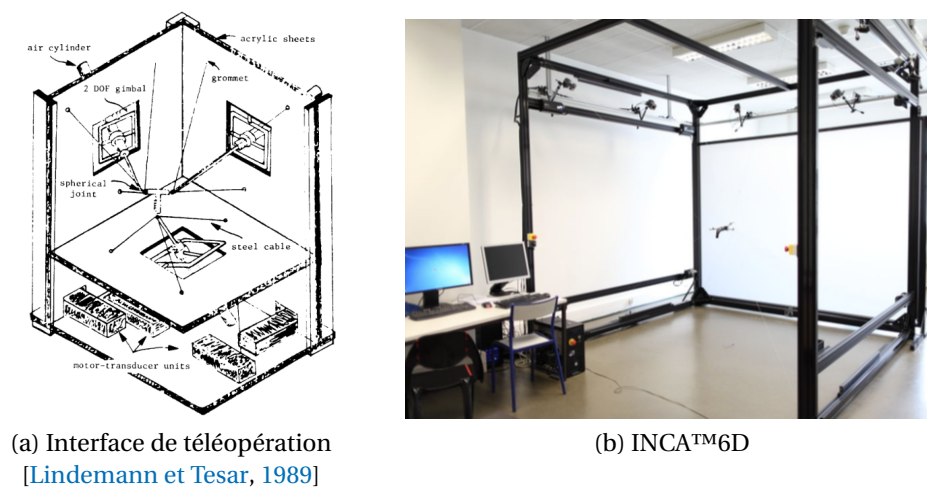


Figure 2.9: Exemples de RPC pleinement contraints utilisés comme interface haptique

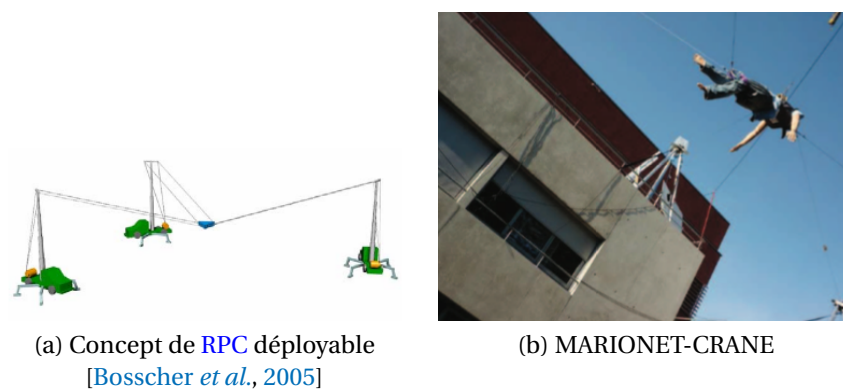


Figure 2.10: Exemples de RPC déployables

## 2.2 Stabilisation

### 2.2.1 Les différentes approches de stabilisation

Les chaînes cinématiques d'un RPC étant des câbles flexibles et non des ensembles de solides rigides, certaines difficultés apparaissent quand la longueur des câbles est grande ou que leur raideur est faible. En utilisant des câbles fins, la raideur des RPC suspendus est très faible. Ces robots ont des fréquences naturelles de vibration très basses et des amplitudes de vibrations importantes.

Une approche proposée pour les robots pleinement contraints et redondants est d'augmenter la tension dans les câbles pour augmenter la raideur du système [Kawamura *et al.*, 1995; Behzadipour et Khajepour, 2006], comme vu à l'équation (2.2). Cette approche n'est cependant pas adaptée aux RPC suspendus.

Pour résoudre les problèmes de vibrations de RPC suspendus, les approches classiques existant dans la littérature se divisent en deux catégories :

- l'amortissement passif qui permet d'amortir les vibrations sans utiliser d'actionneur
- l'amortissement actif qui consiste à créer un torseur d'effort qui permet de dissiper l'énergie d'oscillation. Deux techniques existent :
  - soit en utilisant les actionneurs des enrouleurs, il s'agit de modifier la commande des actionneurs du système déjà présents pour générer ce torseur
  - soit en ajoutant des actionneurs supplémentaires dédiés à la compensation des vibrations

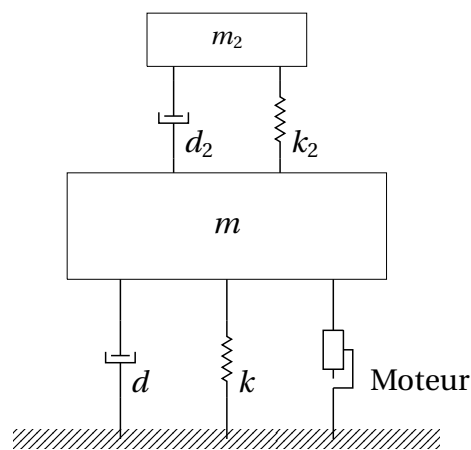


Figure 2.11: Principe de l'amortissement passif



**Amortissement passif.** Le concept de l'amortissement passif des vibrations est montré à la Figure 2.11. Au système composé d'une masse  $m$  reliée au bâti par une liaison de raideur  $k$  et d'amortissement  $d$ , et mû par un moteur est ajoutée une masse  $m_2$  en mouvement non actionnée et liée à la première par une liaison de raideur  $k_2$  et d'amortissement  $d_2$ . L'ensemble composé de cette masse et de sa liaison avec le premier système devant avoir la même fréquence naturelle que ce dernier. Ce principe d'amortissement, parfois appelé amortisseur harmonique, est de par sa simplicité de mise en oeuvre utilisé dans des applications très différentes. Un exemple d'utilisation est la stabilisation en torsion les oscillations du vilebrequin dans les moteurs de voiture afin de diminuer significativement l'usure des pièces et le niveau sonore du moteur [Henrich, 1957]. Ce système a aussi été utilisé pour réduire l'amplitude des vibrations de bâtiment pendant les séismes [Petersen, 1980]. Dans [Connor, 2003], l'auteur donne une méthode pour dimensionner les masses, ressorts et amortisseurs afin de concevoir un système d'amortissement sur mesure pour un bâtiment. Un exemple célèbre est l'utilisation d'une masse pour amortir les vibrations de la tour Taipei 101 illustré à la Figure 2.12. Il s'agit d'une sphère de 5,5 m de diamètre pesant 600 tonnes et amortie par 6 vérins.

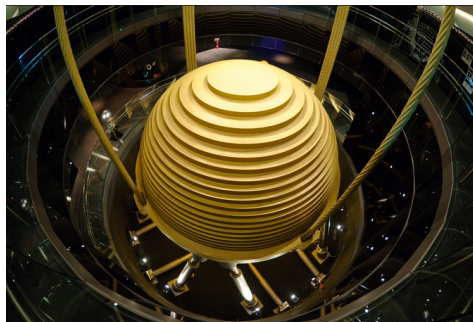


Figure 2.12: La masse d'amortissement passif de Taipei 101

Ces dispositifs ont l'inconvénient d'être conçus pour amortir les vibrations à une fréquence donnée. Or, cette fréquence dépend fortement de la raideur du système, qui dans le cas d'un RPC dépend elle-même de la pose de la plate-forme, voir l'équation (2.2). Par exemple, la fréquence de vibrations selon l'axe vertical en fonction des coordonnées selon les deux autres axes, notés  $x$  et  $y$ , de la plate-forme du robot *CoGiRo* est donnée Figure 2.13. La variation des fréquences d'oscillations en fonction de la pose pour un RPC plan a entre autres été étudiée dans [Montgomery et Vaughan, 2017].

On constate à la fois que la fréquence d'oscillation de *CoGiRo* est faible et que l'influence de sa position dans l'espace sur celle-ci est forte. Ce type d'amortissement n'est donc pas adapté pour un robot à câbles suspendu.

**Amortissement actif par les actionneurs du système.** Cette technique, aussi nommée modelage d'entrées, est illustrée à la Figure 2.14. Le système composé d'une masse  $m$  re-

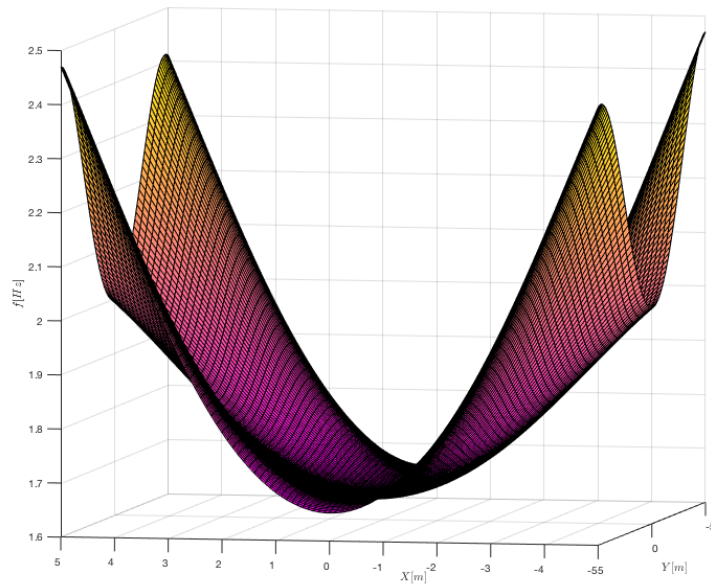


Figure 2.13: Fréquence de vibration verticale de *CoGiRo* en fonction de sa position en  $x$  et  $y$

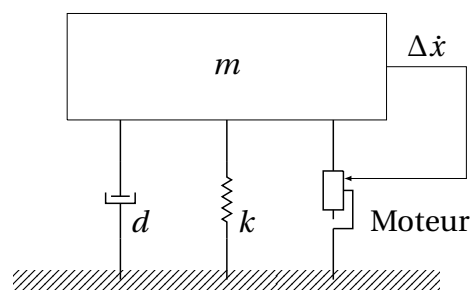


Figure 2.14: Principe de l'amortissement actif par les actionneurs des enrouleurs



liée au bâti par une liaison de raideur  $k$  et d'amortissement  $d$ , produit un signal de commande pour annuler ses propres vibrations avec une valeur mesurée ou estimée de son erreur de positionnement. C'est à dire que les actionneurs qui pilotent le système servent aussi à atténuer les vibrations qu'il créent. À cette fin, il faut déterminer les paramètres vibratoires – répartition des masses et matrice de raideur – du système à partir d'une bonne connaissance de sa modélisation.

L'utilisation des actionneurs du système pour l'amortissement actif est une technique très utilisée, permettant l'amortissement des vibrations en boucle ouverte ou en boucle fermée. Cette technique a été utilisée sur des RPC dans différents contextes, en boucle ouverte ou en boucle fermée [Yanai *et al.*, 2002; Yoon *et al.*, 2016; Montgomery et Vaughan, 2017; Begey *et al.*, 2018]. Si les impulsions de la commande sont bien choisies, alors le système en boucle ouverte ne produira que peu de vibrations. Les amplitudes et fréquences d'oscillations sont obtenues à partir du modèle du système [Singhose, 1997], les vibrations résultant de perturbations ne sont donc pas amorties. Cette technique est bien adaptée pour les systèmes linéaires, mais elle a pu être utilisée dans des contextes non-linéaires. Son utilisation sur des systèmes non-linéaires est généralement lourde en calcul. De plus, la majorité des résultats se limite à des systèmes vibrant selon un seul mode [Kozak *et al.*, 2004], ce qui n'est pas le cas des RPC.

Sur le robot suspendu à 8 câbles et 6 DDL CoMiRo, voir Figure 2.15, une mesure de l'erreur en vitesse de la plate-forme est utilisée pour déterminer les vibrations. Cette mesure projetée dans l'espace modal<sup>1</sup> permet de concevoir un contrôleur *Single Input-Single Output* pour chacun des moteurs afin de rejeter les vibrations affectant la plate-forme du robot [Weber *et al.*, 2015].

Ces méthodes peuvent être rendues robustes aux erreurs paramétriques du système [Kozak *et al.*, 2004]. Cependant, ces méthodes nécessitent des moteurs ayant une bande passante élevée pour donner de bons résultats [Weber, 2016]. Pour une bande passante trop basse, les actionneurs du robot se révèlent incapables de suivre une consigne s'opposant aux vibrations.

**Amortissement actif par ajout d'actionneurs.** Le principe de fonctionnement général de l'amortissement actif par ajout de dispositifs actionnés est illustré par la Figure 2.16. Au système composé d'une masse  $m$  reliée au bâti par une liaison de raideur  $k$  et d'amortissement  $d$ , et mû par un moteur est ajouté un second système, composé d'une masse  $m_2$  en mouvement non actionnée et liée à la première par une liaison de raideur  $k_2$  et d'amortissement  $d_2$  et actionnée par un second moteur dont la commande dépend de la mesure des vibrations. La commande de ces dispositifs étant indépendante de celle du RPC, ils peuvent fonctionner avec une motorisation de bande passante adéquate. De plus, ils sont indépendants de la géométrie du RPC.

<sup>1</sup>Espace dont les vecteurs de la base sont les directions principales de vibration du système

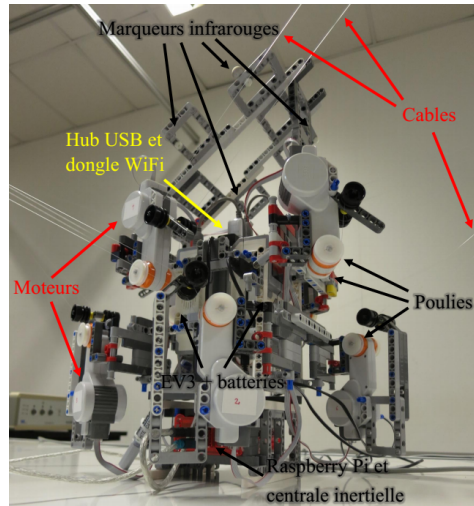


Figure 2.15: Comiro

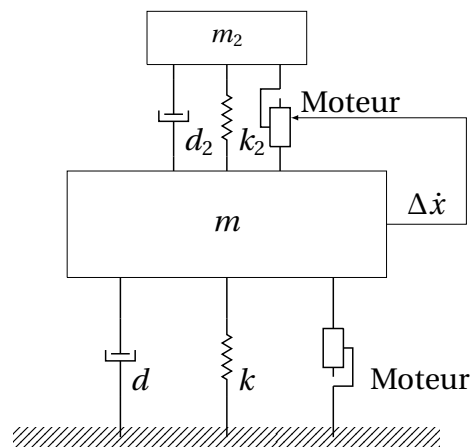
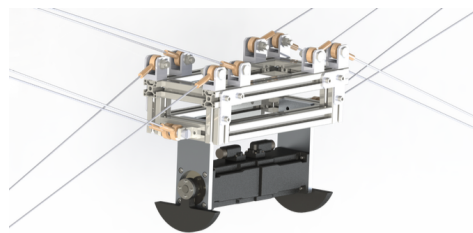
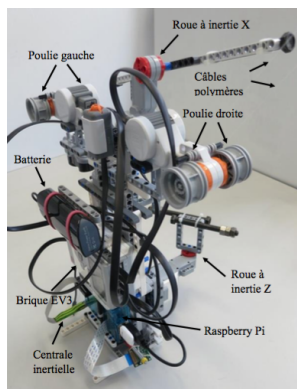


Figure 2.16: Principe de l'amortissement actif par ajout d'actionneur

Par exemple, dans le cas de l'*Active Damping Device* de *Micromega Dynamics*<sup>TM</sup> qui a été utilisé pour réduire les vibrations d'une machine à commande numérique et d'un robot de *pick-and-place* [Zulaika et Campa, 2009], des dispositifs d'amortissement sont utilisés pour atténuer les vibrations dues au contact de l'outils sur l'objet lors des opérations d'usinage numérique.

Sur le RPC plan *CaWiRo* présenté Figure 2.17a, des roues à inertie ont été utilisée pour compenser les oscillations en rotation de la plate-forme dans [Weber et al., 2014].

Sur un autre RPC plan, deux pendules actionnés sont utilisés pour compenser les vibrations hors-plan du robot [Rushton, Mitchell, 2016], voir Figure 2.17b. Ces pendules, dont le positionnement sur la plate-forme du robot est le résultat d'un calcul d'optimisation [Rushton et Khajepour, 2016], sont commandés par une commande proportionnelle à l'erreur de position mesurée.



(a) *CaWiRo* [Weber et al., 2014] (b) Pendules actionnés [Rushton, Mitchell, 2016]

Figure 2.17: Ajout d'actionneurs sur deux RPC

Il est possible pour les RPC dont le mouvement est de faible amplitude, de réaliser des amortissements à deux étages [Connor, 2003]. Il s'agit d'un couple composé d'un amortisseur passif qui amortit une fréquence proche de celle du robot et d'un amortisseur actif dont le rôle est de régler la fréquence de l'ensemble pour amortir les vibrations du robot, comme présenté sur la Figure 2.18.

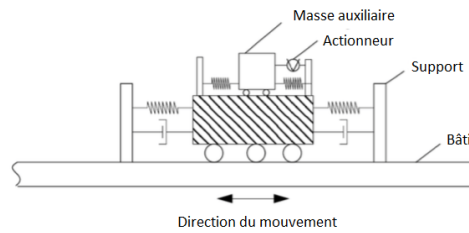


Figure 2.18: Amortissement à deux étages

### 2.2.2 Stabilisation par ajout d'actionneurs

L'ajout de dispositifs actionnés pour stabiliser la plate-forme d'un RPC est la méthode qui sera retenue dans cette thèse. Le choix du type de dispositif en fonction des performances retenues sera discuté au chapitre 3. Le stabilisateur est le nom donné à l'ensemble composé d'un ou plusieurs de ces dispositifs qui agissent de concert pour compenser les vibrations.

**Roue à inertie.** Une roue à inertie est un solide en rotation autour d'un axe qui génère un couple. Une roue à inertie produit un couple sur son axe de rotation, en accord avec le troisième principe de Newton (principe de réaction). Le couple exercé par une roue à inertie sur son support est l'opposé du couple moteur appliqué à la roue. Des roues à inertie peuvent être utilisées pour générer un couple sur un robot afin de compenser des vibrations.

Par exemple, sur le robot *CaWiRo* présenté Figure 2.17a ci-dessus, des roues à inertie sont utilisées pour compenser les vibrations en rotation du robot [Weber *et al.*, 2014].

Les roues à inertie sont fréquemment utilisées pour contrôler l'orientation de satellites [Ismail et Varatharajoo, 2010]. Dans [Garrard et Clark, 1969] plusieurs roues à inertie sont utilisées pour contrôler l'orientation selon les 3 DDL de satellites.

**Actionneur gyroscopique.** Un actionneur gyroscopique est un dispositif constitué d'une roue formant un volant d'inertie et tournant généralement à vitesse élevée constante ainsi que d'un moteur actionnant un axe perpendiculaire à l'axe de rotation de la roue. Contrairement à une roue à inertie, un système gyroscopique produit un moment autour d'un axe orthogonal à l'axe de rotation de son volant d'inertie et à l'axe du moteur d'inclinaison de la roue, proportionnel à la vitesse de ce dernier.

Ce dispositif est également souvent utilisé pour contrôler et modifier l'orientation de systèmes. Les actionneurs gyroscopiques sont souvent utilisés sur des objets sans contact avec le sol, comme par exemple dans le domaine spatial [Lappas *et al.*, 2002], pour la stabi-

lisation en roulis d'un navire [Townsend *et al.*, 2006] ou encore dans le milieu sous-marin [Thornton *et al.*, 2007].

Même si cela est beaucoup plus rare, des actionneurs gyroscopiques ont pu être utilisés comme stabilisateurs actifs, dans le domaine du génie civil par exemple [Higashiyama *et al.*, 1998]. On peut également citer un exemple d'utilisation en robotique médicale, avec la stabilisation active des mouvements cardiaques dans [Gagne *et al.*, 2012].

**Masse en translation.** Une masselotte actionnée en translation génère, selon le principe de réaction de Newton, une force qui est l'opposée de la force qui lui est appliquée.

Ce type de dispositif est utilisé dans l'industrie pour la compensation active de vibrations. Par exemple, des masses en translation sont utilisées dans le guidage de systèmes spatiaux et aéronautiques [Zimmerman *et Inman*, 1990], ou pour la stabilisation d'un bâtiment [Diaz *et Reynolds*, 2009].

**Bras en rotation.** Ce dispositif est composé d'une masselotte disposée au bout d'un bras de longueur fixe et actionné en rotation. Ce type d'actionnement embarqué est parfois dénommé pendule actionné, et a déjà été utilisé dans la stabilisation active de RPC.

Par exemple dans [Trimpe *et D'Andrea*, 2012], six bras sont utilisés pour stabiliser le robot *Cubli* dans un contexte statique par compensation du décalage du centre de masse. Le robot de forme cubique peut ainsi rester en équilibre sur une table sur un de ses coins en résistant à certaines perturbations.

Dans [Rushton *et Khajepour*, 2016], deux bras sont placés sous la plate-forme d'un RPC plan à 3 DDL. Ces bras sont commandés pour réaliser la compensation active d'efforts hors plan, y compris dans un contexte dynamique.

La dynamique d'un bras actionné est utilisée pour générer un torseur d'efforts. C'est aussi l'effet utilisé dans [Chang-Siu *et al.*, 2011], où un pendule actionné est fixé sur une base mobile. Le pendule actionné est utilisé pour générer un couple sur la plate-forme afin d'éviter le basculement de la base pendant un saut, à la manière d'une queue de lézard utilisée pour la stabilisation pendant un saut.

De même dans [He *et al.*, 2008], deux bras servent à générer le torseur d'efforts pour faire décoller un robot sauteur et le stabiliser en vol.

Ces différents dispositifs de stabilisation seront modélisés et étudiés dans le chapitre 3, afin de réaliser le choix d'un ou de plusieurs pour la stabilisation active d'un RPC.

## 2.3 Optimisation

### 2.3.1 Le processus d'optimisation

La position des dispositifs de stabilisation définit leur action sur la plate-forme du [RPC](#). En particulier, il existe une ou plusieurs positions pour lesquelles l'emplacement des actionneurs maximise la faculté du stabilisateur à agir sur la plate-forme. Le processus qui consiste à comparer entre elles différentes positions alternatives et à les sélectionner en fonction d'un critère défini est un processus d'optimisation.

Ce critère est exprimé sous la forme d'une fonction mathématique, appelée fonction objectif ou fonction de coût. La solution optimale, ou la meilleure solution, correspond à la valeur de l'argument qui minimise (ou maximise suivant le cas) une fonction de coût, l'argument de cette fonction étant la variable à optimiser.

La variable d'optimisation ou la fonction de coût peuvent être sujettes à des contraintes, la faisabilité d'une solution est vérifiée avant son évaluation.

Les problèmes d'optimisation sont utilisés dans de nombreux travaux, dont certains sur les [RPC](#) tels que les problèmes de conception [[Rosati et al., 2011](#); [Azizian et Cardou, 2012](#)], d'ordonnancement [[Gouttefarde et al., 2015a](#); [Khakpour et al., 2014](#)], de planification [[Oh et Agrawal, 2006](#)], mais également les domaines économiques et financiers, philosophiques etc.

Pour un problème d'optimisation complexe [[Dréo et al., 2003](#)], soit en raison du grand nombre d'inconnues ou soit en raison de la formulation complexe, il est rare de pouvoir trouver une solution analytique exacte. Le problème est alors résolu au moyen d'algorithmes numériques d'optimisation itératifs qui permettent d'approcher pas à pas une solution. Selon le problème d'optimisation à résoudre, certains algorithmes peuvent être efficaces ou au contraire complètement inopérants [[Elbeltagi et al., 2005](#)].

Deux approches de recherche du minimum – ou du maximum – de la fonction de coût existent : l'approche déterministe et l'approche stochastique.

**Approche déterministe.** L'approche déterministe permet de résoudre les problèmes de manière exacte dans un temps fini. Ces méthodes supposent généralement que la fonction de coût est convexe, au moins localement, continue et dérivable. Cette approche est fréquemment utilisée en ingénierie pour optimiser la conception de systèmes, cependant dans le cas d'un espace de recherche important – grand nombre de variables ou grand nombre de valeurs possibles pour les variables – ces techniques se révèlent lentes. De plus, quand la fonction d'optimisation n'est pas convexe, l'existence de nombreux minima locaux augmente les chances de ne pas trouver une solution optimale au problème. Cette approche inclut notamment les méthodes basées sur la descente de gradient, dont font partie

la méthode d'Euler ou celle des points intérieurs. Ces deux méthodes sont celles utilisées par la fonction *fmincon* de MATLAB®.

**Approche stochastique.** L'approche stochastique est parfois appelée approche de Monte-Carlo en raison de l'utilisation des tirages aléatoires pour fournir une solution approchée. Les méthodes stochastiques permettent de trouver une solution approchée à un problème lorsque la solution est inconnue ou qu'il n'existe pas de méthode déterministe pour le résoudre en un temps raisonnable. Cette approche possède certaines propriétés que les algorithmes déterministes n'ont pas pour accélérer la recherche ou encore s'extraire des minima locaux [Hoos et Stützle, 2004]. Parmi ces algorithmes, certains possèdent un principe générique adaptable à différents problèmes, on les appelle des méta-heuristiques.

Les méta-heuristiques sont des processus stochastiques, généralement itératifs, qui progressent vers un optimum global, sans garantie de l'atteindre, en évaluant une fonction objectif à chaque pas de calcul. Elles se comportent comme des algorithmes de recherche en apprenant les caractéristiques d'un problème pour en trouver une solution approchée. Ces méthodes utilisent un haut niveau d'abstraction, ce qui leur permet d'être adaptées à un large éventail de problèmes différents. Les algorithmes évolutionnistes appartiennent à cette catégorie, dont font partie entre autres les algorithmes génétiques ou encore l'Optimisation par Essaim de Particules (OEP).

Dans le cas de l'optimisation du placement des dispositifs constituant le stabilisateur embarqué sur la plate-forme d'un RPC, l'espace des paramètres est très important, 6 variables par dispositif, et ces paramètres s'influencent mutuellement. Il s'agit d'un problème d'optimisation difficile, l'utilisation d'une méta-heuristique est donc adaptée [Dréo *et al.*, 2003].

### 2.3.2 Métaheuristiques

La méthode du recuit simulé est inspirée de la métallurgie et a été présentée dans [Kirkpatrick *et al.*, 1983]. Il s'agit en métallurgie de réchauffer rapidement et de refroidir lentement le matériau pour minimiser son énergie mécanique. En optimisation, l'énergie du système représente la fonction de coût. L'état courant du système est modifié par un terme qui dépend de son état et par un terme aléatoire. Ce nouvel état peut soit faire baisser l'énergie du système soit l'augmenter. L'ajout d'un terme aléatoire permet de s'extraire d'un minimum local en augmentant l'espace de recherche, ce qui évite à l'algorithme de s'enfermer trop vite dans la recherche d'un optimum local.

Les algorithmes génétiques appliquent à un ensemble de solutions potentielles – appelées chromosomes – du problème d'optimisation des méthodes issues de la sélection naturelle [Goldberg, 1989], notamment :



- des mutations, modification aléatoire des chromosomes
- des croisements, l'échange de deux caractères d'un chromosomes
- de la sélection, où les gènes les moins aptes sont éliminés

Après le processus de sélection, de nouveaux chromosomes sont créés en mélangeant les caractères de ceux qui ont passé le test de sélection.

La méthode d'OEP, ou *Particle Swarm Optimization* en anglais, a été développée dans [Kennedy et Eberhart, 1995]. Cet algorithme s'inspire également du monde vivant, notamment de la socio-psychologie. Le déplacement des solutions potentielles – nommées individus – est basé sur la collaboration avec les autres individus. Tous les individus de l'essaim convergent ainsi progressivement vers l'optimum global. Cette méthode est expliquée plus en détail dans l'annexe D.

Les principales méthodes stochastiques ont été comparées sur différents *benchmark* dans [Elbeltagi et al., 2005]. Cet article s'intéresse au choix d'une métaheuristique dans le cadre d'un problème d'optimisation complexe sans connaissance a priori du problème, les algorithmes classiques sont testés pour différentes classes de problèmes. Il en résulte que l'OEP a la chance de succès la plus élevée et des solutions de meilleure qualité que les autres algorithmes, en ayant un temps calcul parmi les plus courts.

## 2.4 Commande

La commande des manipulateurs parallèles est un sujet abondamment traité dans la littérature. Si un certain nombre de ces travaux peut être utilisé tel quel sur des RPC, leurs particularités, notamment l'unilatéralité de l'actionnement par des câbles, nécessitent certaines précautions. Si certaines stratégies de commande spécifiques aux RPC ont été développées, celles-ci restent peu nombreuses.

Les outils classiques de la commande, comme le découplage non-linéaire ou la commande par anticipation sont à la base de ces stratégies de commande. La stabilité des stratégies de commande doit être démontrée, on utilise en général des fonctions de Lyapunov à cette fin.

### 2.4.1 Stratégies de commande

**Découplage non-linéaire.** Les stratégies de commande par découplage non-linéaire visent à produire un signal de commande qui linéarise le système en utilisant l'inverse du modèle dynamique du robot. Dans cette famille de stratégies, la plus connue et la plus employée est la commande dynamique ou commande par couple calculé, plus connue sous son nom anglais *computed torque*, décrite à la section 5.2.1 du chapitre 5. L'inconvénient



majeur de cette méthode est que sa mise en oeuvre nécessite une connaissance approfondie du système et une bonne identification de ses paramètres. Cette commande peut être synthétisée soit dans l'espace opérationnel du robot – l'espace cartésien dans lequel sont représentées les coordonnées de la plate-forme – soit dans son espace articulaire – l'espace paramétré par les positions des actionneurs du robot.

**Commande par anticipation.** La commande par anticipation, plus communément appelée par son nom anglais *feedforward*, consiste en l'anticipation du comportement futur du système, d'où la notion de prédiction. Ce genre de commande nécessite une bonne connaissance a priori du comportement du système et est la plupart du temps couplé avec une boucle de rétroaction. Cette méthode peut être utilisée en complément d'une commande par couple calculé.

Dans le cas des **RPC**, par la connaissance précise du modèle dynamique, il est possible d'anticiper les erreurs de suivi de trajectoire. Cette méthode de commande a deux inconvénients : nécessiter une bonne connaissance du modèle du robot et connaître a priori les perturbations qui affectent le robot.

## 2.4.2 Répartition des tensions

L'une des difficultés majeures de la commande des **RPC** est l'impossibilité pour les câbles de pousser. Cette particularité, qui se traduit par l'obligation de définir une consigne positive pour la tension dans chaque câble est traitée différemment suivant que le robot ait strictement plus de câbles que de **DDL** – c'est alors un système sur-contraint – ou non.

Pour obtenir la meilleure répartition possible des tensions dans les câbles, l'approche la plus fréquemment utilisée est d'utiliser un calcul d'optimisation. Le but est de maintenir la tension du câble dans un intervalle admissible tout en optimisant un critère sur la somme des tensions : soit la minimiser pour minimiser la consommation électrique des moteurs, soit la maximiser pour augmenter la rigidité du système.

Dans le cas où le nombre de câbles est égal au nombre de **DDL** du **RPC**, il existe un seul jeu de tensions de câbles capable de produire un torseur d'effort donné à la plate-forme.

Dans [Oh et Agrawal, 2006], les contraintes de faisabilité des tensions sont exprimées sous forme d'inégalités et un algorithme de planification de trajectoire qui respecte ces contraintes est proposé. Un algorithme de planification de trajectoires dynamiques qui garantit une tension positive dans les câbles est donné dans [Jiang et al., 2018].

Il est également possible d'utiliser les effets dynamiques pour actionner plus de **DDL** que le robot n'a de câbles. Dans ce cas, les efforts dynamiques ou inertiels sont utilisés comme un actionnement supplémentaire [Cunningham et Asada, 2009; Gosselin et al., 2010]. Cela permet d'atteindre certaines positions auxquelles il n'est pas possible de s'arrêter.

Dans le cas où un **RPC** possède plus d'actionneurs que de **DDL**, cela signifie qu'il existe plusieurs distributions de tensions de câbles possibles pour générer un torseur d'effort donné.

Pour résoudre ce problème, la programmation linéaire ou la programmation quadratique ont été proposées. La programmation linéaire [Fang *et al.*, 2004] est une procédure simple et systématique, mais qui ne garantit pas la continuité des tensions ce qui peut provoquer une instabilité de la commande. La programmation quadratique [Behzadipour et Khajepour, 2004; Bruckmann *et al.*, 2006] garantit la continuité, mais le temps de calcul variable et potentiellement important peut être problématique en temps réel.

Des algorithmes plus performants qui utilisent la projection alternée [Hassan et Khajepour, 2007] ou des méthodes basées les barycentres [Mikelsons *et al.*, 2008] ont été introduits pour les robots ayant deux câbles de plus que de **DDL**. Toujours dans le même cas d'application, [Gouttefarde *et al.*, 2015b] démontre que l'espace des tensions de câbles faisables est un polygone et, en se basant sur cette définition propose un algorithme qui permet de déterminer une répartition optimale des tensions dans les câbles qui prend en compte la faisabilité de la solution.

Enfin, la répartition des tensions influence la raideur des **RPC**. Dans [Jamshidifar *et al.*, 2017], la répartition des tensions est réalisée par une commande optimale de manière à maximiser la raideur du **RPC**.

### 2.4.3 Commande des **RPC**

Le premier schéma de commande dédié aux **RPC** a été proposé dans [Ming, 1994]. La loi de commande introduite dans cet article compare la longueur de câble mesurée à une longueur désirée fournie par un algorithme de génération de trajectoire. Un découplage non-linéaire basé sur le modèle dynamique du **RPC** est réalisé avec un correcteur proportionnel sur l'erreur.

Dans [Kawamura *et al.*, 1995], un contrôleur **PD** est utilisé pour la commande du **RPC** *FALCON-7*. Cette commande dans l'espace articulaire ne compense que le poids de la plate-forme, connu à l'avance. La stabilité de cette loi de commande est démontrée en utilisant une fonction de Lyapunov.

Un schéma de commande très similaire au précédent est proposé dans [Alp et Agrawal, 2002; Oh et Agrawal, 2005], mais il compense également les effets dynamiques. Cette commande utilise également un correcteur **PD** dans l'espace articulaire, qui est un contrôleur à rétroaction, à l'aide duquel le système est linéarisé. Les auteurs s'assurent que les tensions dans les câbles restent admissibles lors de la planification de la trajectoire. Cette commande a pu être validée sur un démonstrateur de **RPC** suspendu.

Dans [Khosravi et Taghirad, 2013], les auteurs développent un contrôleur

Proportionnel-Intégral-Dérivé en cascade pour commander la plate-forme du robot. Ce contrôleur est composé de deux boucles : la première boucle contrôle la position du robot dans l'espace articulaire. La seconde boucle vise à satisfaire à l'exigence de tension positive dans les câbles en comparant la sortie de la première boucle à la tension actuelle des câbles.

Dans [Gholami *et al.*, 2008], un schéma de commande avec correcteur PD a été proposé dans l'espace articulaire du robot. Cette commande s'enrichit d'une commande par couple calculé dans l'espace opérationnel pour prendre en compte la dynamique de la plate-forme. Une version améliorée de cette commande, qui propose de calculer les erreurs dans l'espace opérationnel et d'ajouter un second contrôleur en cascade pour la compensation des erreurs articulaires, est introduite dans [Vafaei *et al.*, 2010].

D'autres méthodes utilisant l'approche de la commande par anticipation ont également été utilisées sur les RPC. Par exemple un contrôleur PD muni d'une boucle d'anticipation pour compenser la dynamique de la plate-forme dans l'espace articulaire a été décrit dans [Fang *et al.*, 2004]. Cette commande a été validée expérimentalement sur le RPC pleinement contraint SEGESTA.

L'idée de commander le RPC dans l'espace opérationnel du robot tout en contrôlant les effets au niveau articulaire, notamment pour prendre en compte les effets des câbles et implémenter un algorithme de gestion de tension a donné lieu aux contrôleurs dits dans l'espace dual (ou *dual space* en anglais) [Lamaury et Gouttefarde, 2013; Lamaury *et al.*, 2013]. Dans cette stratégie de commande, dont le schéma est donné Figure 2.19, le suivi de trajectoire est réalisé dans l'espace opérationnel puis projeté dans l'espace articulaire comme entrée de l'algorithme de distribution de tensions. Deux *feedforward* dans l'espace articulaire compensent les effets de la dynamique de la plate-forme et la dynamique des enrouleurs.

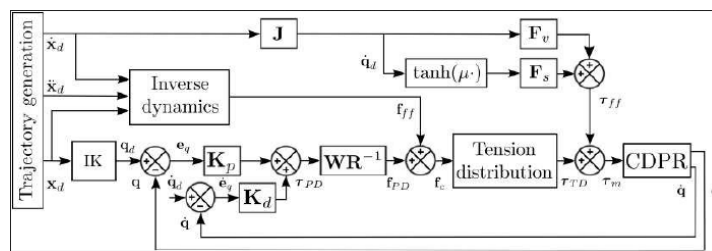


Figure 2.19: Commande dans l'espace dual

Dans le cadre de l'étude de systèmes composés de plusieurs robots fonctionnant à des échelles de temps différentes, la théorie des perturbations singulières est souvent utilisée. Dans [Khosravi et Taghirad, 2014], elle est utilisée pour démontrer qu'un correcteur composite constituée d'une commande par couple calculé considérant un modèle rigide des câbles et d'un correcteur dérivateur sur l'élongation des câbles permet d'amortir les vi-

brations tout en assurant le positionnement de la nacelle. D'autres résultats issus de cette théorie seront étudiés au chapitre 5.

Enfin, d'autres travaux ont utilisé des méthodes de commande moins conventionnelles sur des RPC. Dans [Laroche *et al.*, 2013], l'auteur explore l'utilisation de la commande robuste  $\mathcal{H}_\infty$  sur un RPC en prenant en compte l'élongation des câbles, un modèle dynamique de la plate-forme qui tient compte des frottements ainsi que des contraintes sur les tensions. Dans [Zi *et al.*, 2008], un correcteur Proportionnel-Intégral à logique floue est utilisé pour compenser les perturbations provoquées par le vent sur les câbles. Enfin une commande adaptative minimisant les erreurs dues aux incertitudes sur la position des actionneurs est développée dans [Kino *et al.*, 2007], mais les paramètres dynamiques du RPC ne sont pas pris en compte.

#### 2.4.4 Commande des RPC soumis à des vibrations

Les vibrations de la plate-forme étant un enjeux primordiaux des RPC, diverses stratégies de commande prenant en compte ces vibrations ont été proposées. Notamment, des stratégies de commande robuste, considérant les vibrations comme de perturbations ont été développées.

La commande par mode glissant, *sliding mode control* en anglais, vise à amener le système commandé dans un état d'où il converge vers un point d'équilibre. Un tel état constitue un plan de commutation stable, aussi nommé surface de glissement. Cette stratégie de commande robuste est utilisée en considérant les vibrations comme des perturbations. Dans [Ren et Sun, 2018], l'auteur utilise une fonction de Lyapunov pour déterminer les gains de la commande et une analyse par intervalles pour vérifier la faisabilité de la commande.

De même, dans [Korayem *et al.*, 2015], l'auteur utilise une commande par mode glissant pour compenser les vibrations liées aux raideurs axiales des câbles et aux flexibilités des enrouleurs. Les équations de la dynamique sont linéarisées à l'aide d'une transformée de Fourier, puis une fonction de Lyapunov est utilisée pour déterminer les gains de la commande.

Dans [Jamshidifar *et al.*, 2015, 2018], l'auteur considère comme négligeable les termes de vibration d'ordre 2 et plus en considérant l'apport de la redondance à la raideur d'un RPC pleinement contraint. Le modèle de vibrations obtenu est alors un modèle linéaire à paramètres variants (LPV), auquel peut être appliquée une commande  $\mathcal{H}_\infty$ , robuste aux erreurs de position.

La commande adaptative est une technique de commande robuste qui ne nécessite pas de linéarisation du système, ni de connaissance a priori de l'intervalle de variation des incertitudes. Dans [Babaghasabha *et al.*, 2015, 2016], les vibrations sont considérées comme des incertitudes ajoutées à la mesure de position. La commande adaptative est alors utili-

sée pour modifier le comportement de la loi de commande en réponse aux perturbations générées par les vibrations. De plus, dans [Babaghasabha *et al.*, 2016], la loi de commande proposée est composée de deux parties, une commande adaptative et un terme qui est ajouté pour contrôler les vibrations longitudinales dans les câbles. La démonstration de la stabilité de cette approche se fait en utilisant la théorie des perturbations singulières.

La commande par anticipation permet d'ajouter à la commande un terme de *feedforward* en fonction de la raideur du RPC qui anticipe les vibrations provoquées par les câbles. Dans [Baklouti *et al.*, 2019], un terme de *feedforward* est obtenu à partir du modèle élasto-dynamique inverse d'un RPC et ajouté à la commande pour compenser les effets dynamiques et le comportement oscillatoire de la plate-forme mobile dus à l'élasticité des câbles.



## CHAPITRE

## 3

**Modélisation****Préambule**

*Ce chapitre décrit les outils de modélisation, les hypothèses de validité et les modèles physiques exploités dans cette thèse. La mécanique newtonienne fournit le modèle dynamique ou loi de mouvement de la plate-forme d'un RPC, en prenant en compte une modélisation linéaire élastique des câbles. Une formulation de ce modèle dans le cas de petits déplacements dus aux vibrations est alors donnée.*

*Dans un deuxième temps, les dispositifs actionnés embarqués sur la plate-forme afin de réaliser une stabilisation active en compensant ses vibrations sont étudiés. Divers dispositifs sont évalués et les effets qu'ils exercent sur la plate-forme sont considérés par l'intermédiaire de leurs torseurs d'effort.*

*Une fois tous les dispositifs envisagés modélisés, il est possible de choisir un dispositif pour réaliser un stabilisateur embarqué sur la plate-forme. La configuration de stabilisateur retenue n'utilise qu'un seul type de dispositif de stabilisation, des bras actionnés terminés par des masselottes. Enfin, le modèle de la plate-forme embarquant les pendules actionnés est simplifié en fonction du type de stabilisateur choisi.*

**Sommaire**


---

3.1	Modélisation dynamique d'un robot parallèle à câbles . . . . .	41
3.2	Modélisation des dispositifs de stabilisation attachés à la plate-forme . . .	45
3.3	Modèle dynamique d'une plate-forme de RPC munie de stabilisateurs embarqués . . . . .	57
3.4	Choix du dispositif embarqué et réécriture simplifiée du modèle . . . . .	61

---

## 3.1 Modélisation dynamique d'un robot parallèle à câbles

### 3.1.1 Modélisation des câbles

Pour tous les RPC étudiés au cours de cette thèse, l'écart entre la masse des câbles et celle de la plate-forme est de plusieurs ordres de grandeurs. D'après [Bouchard, 2008], cela permet d'ignorer l'effet de l'affaissement des câbles – aussi appelé *sagging* – sur le comportement du RPC.

Sur un câble purement rectiligne sans *sagging*, la tension est en général considérée comme uniforme sur toute la longueur. Cependant, la tension de la partie enroulée du câble varie car le frottement statique du câble sur le tambour de l'enrouleur engendre un effort différent d'un côté et de l'autre de la poulie. Ainsi la tension du câble sur sa partie enroulée dépend de la tension de la partie déroulée au moment de l'enroulement, on parle de la « mémoire de tension » du câble [Snow, 1993].

La portion de câble enroulée est également affectée par le glissement du câble sur le tambour. Une hypothèse couramment employée pour modéliser ce phénomène, et qui est reprise dans cette thèse, suppose que la portion enroulée du câble l'est toujours à une tension nulle, ce qui implique que le mouvement du tambour modifie directement la longueur à vide du câble.

Les câbles sont modélisés comme des solides purement élastiques, ils ont donc des modes de vibrations propres [Yuan *et al.*, 2017]. Pourtant, pour un grand nombre d'applications, le fort rapport entre la masse de la plate-forme et celle des câbles permet cependant de ne pas tenir compte des vibrations transmises par les câbles [Diao et Ma, 2009]. C'est pourquoi les masses des câbles sont dorénavant négligées.

Des modèles plus complexes existent pour décrire les câbles sans masse. En particulier, la tension n'est plus proportionnelle à l'allongement dans un câble déformé très rapidement, par exemple dans le cas d'oscillations rapides ou de changement de longueur soudain. Dans [Baklouti *et al.*, 2017], le modèle de câble utilisé tient compte du comportement non-linéaire du câble dans ces cas de figure, en particulier il met en évidence une diminution de la raideur du câble soumis à de fortes contraintes. Les vibrations longitudinales le long des câbles sont ignorées dans cette thèse, ainsi que les vibrations transversales, les câbles étant considérés rectilignes. De plus, il est estimé que la commande des enrouleurs de câbles évite les changements soudains de longueur de câble, il n'est alors pas nécessaire de modéliser le comportement des câbles dans ce cas.

Les deux types de câbles utilisés pour actionner les robots étudiés durant cette thèse sont soit des câbles polymères, soit des câbles en acier tressé. Ces deux types de câbles présentent souvent des non-linéarités importantes [Riehl *et al.*, 2010]. Cependant, il est possible de linéariser ces caractéristiques : dans ce cas le modèle linéarisé est précis pour un certain intervalle de tensions [Riehl, 2011]. Cette restriction sur les valeurs des tensions



peut être assurée par l'utilisation de différents algorithmes de gestion des tensions, comme par exemple [Oh et Agrawal, 2005; Mikelsons *et al.*, 2008; Lim *et al.*, 2014; Gouttefarde *et al.*, 2015a]. L'effet d'amortissement dépend lui aussi de la nature du câble. Les effets de non-linéarité et d'amortissement sont supposés faibles en regard de l'élasticité des câbles pour les cas retenus dans cette thèse. Leur effet est donc négligé ci-après, les câbles ont alors un comportement supposé linéaire et élastique.

Le modèle de câble linéaire élastique ne tient pas compte de l'affaissement du câble sous son propre poids ni des frottements entre le câble et le tambour de l'enrouleur, mais il tient compte de l'allongement du câble chargé. Dans ce modèle, l'allongement, c'est à dire la différence de longueur entre le câble sous charge et le câble à vide – avec une tension nulle – est proportionnel à la tension, le coefficient de proportionnalité étant la raideur spécifique du câble.

On introduit le vecteur des longueurs de câble à vide  $\mathbf{l}_1 = [l_{1_1} \dots l_{1_i} \dots l_{1_N}]^\top$  où  $l_{1_i}$  est le vecteur des longueurs de câble  $i$  déroulées. Le vecteur des longueurs en charge des  $N$  câbles est noté  $\mathbf{l}_2 = [l_{2_1} \dots l_{2_i} \dots l_{2_N}]^\top$ . La raideur spécifique  $k_s$  correspond à la raideur par unité de longueur du câble :  $k_s = EA_c$ , sous l'hypothèse que les propriétés mécaniques sont homogènes.

La longueur  $\mathbf{l}_2$  se déduit à partir d'une pose  $\mathbf{x}$  donnée du CDG de la plate-forme. La pose  $\mathbf{x}$  de la plate-forme du RPC est définie par  $\mathbf{x} = \left[ \mathbf{p}^\top \quad \boldsymbol{\theta}_p^\top \right]^\top$ , avec  $\mathbf{p}$  le vecteur donnant la position de la plate-forme et  $\boldsymbol{\theta}_p$  le vecteur des angles d'Euler (voir Annexe A) donnant son orientation dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .  $\mathbf{l}_2$  s'obtient par l'application du modèle géométrique inverse, on note  $\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_2(\mathbf{x})$ . Dans chaque câble  $i$ , on a la relation suivante entre la tension  $\tau_i$  et l'élongation du câble  $l_{2_i}(\mathbf{x}) - l_{1_i}$  :

$$\tau_i = \frac{k_s}{l_{1_i}} (l_{2_i}(\mathbf{x}) - l_{1_i}) \quad (3.1)$$

Pour un robot à câbles, le torseur d'effort exercé par l'ensemble des câbles sur la plate-forme, noté  $\mathbf{w}_c$ , est donné par l'équation (3.2). Le vecteur des tensions dans les câbles du RPC est noté  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \dots \tau_i \dots \tau_N]^\top$ .

$$\mathbf{w}_c = -\mathbf{J}^\top \boldsymbol{\tau} \quad (3.2)$$

où la matrice Jacobienne du robot  $\mathbf{J}$  est définie comme suit :

$$\dot{\mathbf{l}}_2 = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{J}} \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.3)$$

avec  $\dot{\mathbf{l}}_2$  les vitesses articulaires du robot et  ${}^0\dot{\mathbf{x}}$  sa vitesse en coordonnées opérationnelles. La définition de la matrice jacobienne  $\tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}_p)$  qui relie la vitesse angulaire de la plate-forme  $\boldsymbol{\omega}_p$  et la dérivée du vecteur décrivant son orientation  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_p$  est donnée en Annexe A.

### 3.1.2 Modèle dynamique de la plate-forme

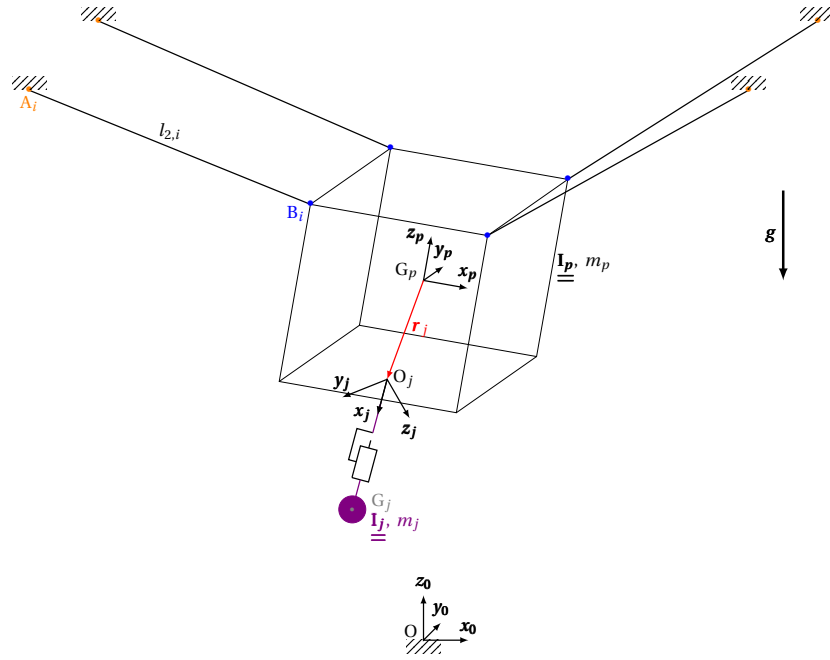


Figure 3.1: Schéma général d'un robot à câbles muni d'un stabilisateur embarqué

On considère en premier lieu le cas de la plate-forme sans stabilisateur embarqué. Celle-ci est considérée comme un seul solide rigide. Mis à part les câbles, certains autres composants d'un RPC sont susceptibles de présenter un comportement flexible. Les axes de sortie des actionneurs, les poulies, les pièces de la plate-forme, les liaisons mécaniques et même la structure à laquelle sont attachés les câbles possèdent une certaine raideur. Ces raideurs seront négligées dans le présent travail. Ces liaisons mécaniques présentent également des frottements [Kraus *et al.*, 2015; Korayem *et al.*, 2015], qui seront eux aussi négligés dorénavant.

Soient les deux repères  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$ , la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}_1$  dans  $\mathcal{R}_0$  est notée  $\boldsymbol{\omega}_{(1/0)}$  et la dérivée du vecteur  $\mathbf{v}$  dans  $\mathcal{R}_1$  est notée  ${}^1\dot{\mathbf{v}}$ . D'après la formule de Bour, la dérivée du vecteur  $\mathbf{v}$  dans  $\mathcal{R}_0$  vaut :  ${}^0\dot{\mathbf{v}} = {}^1\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega}_{(1/0)} \times \mathbf{v}$

Le repère galiléen  $\mathcal{R}_0$  est centré en O. Le repère est attaché à la plate-forme,  $\mathcal{R}_p$ , est centré en  $G_p$ . Les coordonnées de  $\mathcal{R}_p$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$  sont données par le vecteur  $\mathbf{p}$ . La représentation d'un RPC suspendu muni d'un stabilisateur est donnée Figure 3.1.

La vitesse du centre d'inertie  $G_p$  de la plate-forme exprimée dans le repère galiléen  $\mathcal{R}_0$  est donnée par :

$${}^0\mathbf{v}_{G_p} = \frac{{}^0d}{dt} \overrightarrow{OG_p} = {}^0\dot{\mathbf{p}} \quad (3.4)$$

De même l'accélération de  $G_p$  dans  $\mathcal{R}_0$  vaut :

$${}^0\boldsymbol{\Upsilon}_{G_p} = \frac{{}^0d}{dt} {}^0\mathbf{v}_{G_p} = {}^0\ddot{\mathbf{p}} \quad (3.5)$$

La somme des forces exercées par les câbles au centre de gravité de la plate-forme est notée  $\mathbf{f}_c$  et la somme des moments  $\mathbf{n}_c$ . On peut écrire  $\mathbf{w}_c = [\mathbf{f}_c^\top \quad \mathbf{n}_c^\top]^\top$ .

La résultante dynamique correspond à la réaction d'un solide aux forces qui lui sont appliquées. Elle est obtenue par utilisation du Théorème de la Résultante Dynamique :

$$\begin{aligned} m_p {}^0\boldsymbol{\Upsilon}_{G_p} &= \Sigma \overrightarrow{\mathbf{F}} (\text{ext} \rightarrow p) \\ m_p {}^0\ddot{\mathbf{p}} &= m_p \mathbf{g} + \mathbf{f}_c \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le moment dynamique est le nom donné au torseur des quantités d'accélération. Le moment dynamique  $\boldsymbol{\delta}_{G_p}$  s'obtient par dérivation du moment cinétique. Avec  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}_p$  le tenseur d'inertie de la plate-forme exprimé en  $G_p$ , le moment cinétique en  $G_p$  est exprimé par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{G_p} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \boldsymbol{\omega}_p \quad (3.7)$$

Le vecteur vitesse angulaire entre les repères  $\mathcal{R}_p$  et  $\mathcal{R}_0$ , noté  $\boldsymbol{\omega}_{p/0}$ , est abrégé en  $\boldsymbol{\omega}_p$ . Donc en dérivant le moment cinétique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_{G_p} &= \frac{{}^0d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_{G_p} \\ &= \frac{{}^p d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_{G_p} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\sigma}_{G_p} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \dot{\boldsymbol{\omega}}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \boldsymbol{\omega}_p \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le Théorème du Moment Dynamique permet d'obtenir la résultante dynamique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_{G_p} &= \Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}} (\text{ext} \rightarrow p) \\ \mathbf{n}_c &= \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \dot{\boldsymbol{\omega}}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \boldsymbol{\omega}_p \end{aligned} \quad (3.9)$$

En regroupant les équations (3.6) et (3.9) sous forme matricielle on obtient la formulation classique du PFD :

$$\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_p \times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{w}_c + \mathbf{w}_e \quad (3.10)$$

où le terme  $\mathbf{w}_e$  désigne le torseur d'effort généré au CDG de la plate-forme par tout dispositif extérieur et  $\mathbf{w}_c$  le torseur d'effort appliqué par les câbles sur la plate-forme en  $G_p$ . D'après la partie précédente,  $\mathbf{w}_c = -\mathbf{J}^\top \boldsymbol{\tau}$ .

## 3.2 Modélisation des dispositifs de stabilisation attachés à la plate-forme

La plate-forme du robot étant soumise à des vibrations, une compensation de celles-ci peut s'avérer nécessaire. La solution retenue est de réaliser une compensation active des vibrations en produisant au moyen de masses mobiles actionnées un torseur d'effort qui génère un mouvement opposé à celui dû aux vibrations. Une masse en mouvement génère un torseur d'effort qui dépend de sa dynamique.

La Figure 3.2 présente un système, ci-après nommé solide quelconque, composé d'une masselotte de masse  $m_j$  ayant l'inertie décrite par le tenseur  $\underline{\underline{I}}_j$ . Cette masselotte peut être actionnée pour réaliser les déplacements suivants : une translation selon un axe et une rotation autour d'un axe quelconque passant par  $O_j$ . Une fois ce système décrit, les différentes simplifications possibles quand un seul de ces 4 DDL est motorisé seront considérées dans les sections 3.2.2, 3.2.4 et 3.2.5. Le cas de la stabilisation avec des actionneurs gyroscopiques sera également étudié dans la partie 3.2.3.

### 3.2.1 Solide $j$ quelconque

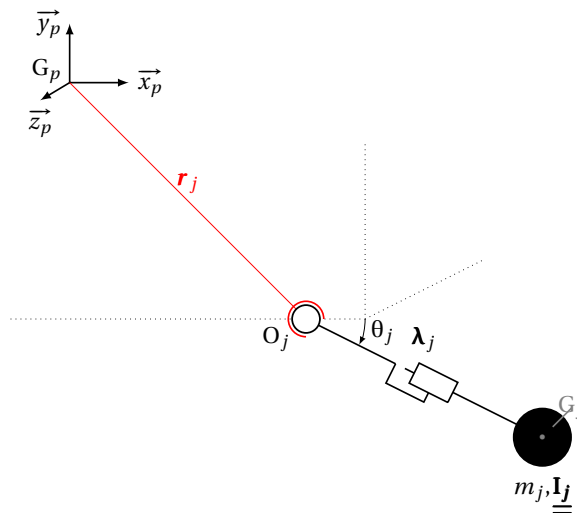


Figure 3.2: Solide quelconque attaché à la plate-forme

Tel que montré à la Figure 3.2, le repère  $\mathcal{R}_j$  attaché au solide  $j$  est centré en  $O_j$ . Le solide  $j$  de masse  $m_j$  est attaché à la plate-forme en  $O_j$ , avec  $\overrightarrow{G_p O_j} = \mathbf{r}_j$ . Son inertie  $\underline{\mathbf{I}}_j$  est exprimée en  $G_j$ , défini tel que  $\overrightarrow{O_j G_j} = \boldsymbol{\lambda}_j$ . L'orientation du repère  $\mathcal{R}_j$  dans  $\mathcal{R}_p$  est donnée par le vecteur  $\boldsymbol{\theta}_j$  contenant les angles d'Euler, selon la définition donnée en Annexe A.

La vitesse de  $G_j$ , le CDG du solide  $j$ , exprimé dans le repère monde  $\mathcal{R}_0$  vaut :

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{v}_{G_j} &= \frac{{}^0d}{dt} \overrightarrow{OG_j} = \frac{{}^0d}{dt} (\mathbf{p} + \mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j) \\ &= {}^0\dot{\mathbf{p}} + \frac{{}^p d}{dt} \mathbf{r}_j + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_j + \frac{{}^j d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_j + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j \\ &= {}^0\dot{\mathbf{p}} + {}^j\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_j + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pour plus de clarté, on note  $\boldsymbol{\omega}_{p/0} = \boldsymbol{\omega}_p$  et  $\boldsymbol{\omega}_{j/p} = \boldsymbol{\omega}_j$ . Comme le solide  $j$  est attaché à la plate-forme en  $O_j$ , le vecteur  $\mathbf{r}_j$  est fixe dans le repère  $\mathcal{R}_p$  donc  ${}^p \frac{d}{dt} \mathbf{r}_j = \mathbf{0}$

L'accélération de  $G_j$  dans  $\mathcal{R}_0$  s'obtient en dérivant l'équation (3.11) :

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\Upsilon}_{G_j} &= \frac{{}^0d}{dt} {}^0\mathbf{v}_{G_j} \\ &= \frac{{}^0d}{dt} ({}^0\dot{\mathbf{p}} + {}^j\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_j + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j) \\ &= {}^0\ddot{\mathbf{p}} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_j + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_j) + {}^j\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_j + ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j + (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j \\ &\quad + 2(\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times {}^j\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times ((\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Les moments cinétique et dynamique du solide  $j$  en  $G_j$  sont tous deux dépendants de la vitesse de rotation de la plate-forme  $\boldsymbol{\omega}_p$ . Leur expression est la suivante :

$${}^0\boldsymbol{\sigma}_{G_j} = \underline{\mathbf{I}}_j (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \quad (3.13)$$

$${}^0\boldsymbol{\delta}_{G_j} = \frac{{}^0d}{dt} {}^0\boldsymbol{\sigma}_{G_j} = \underline{\mathbf{I}}_j ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j) + \underline{\mathbf{I}}_j (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times \underline{\mathbf{I}}_j (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \quad (3.14)$$

La relation de Varignon, ou relation d'équi-projectivité des torseurs, permet en connaissant la résultante  $\mathbf{r}$  et le moment  $\mathcal{M}_A$  en un point A d'un torseur, de calculer

le moment en un autre point B du même solide ainsi :  $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}_A + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{r}$ . On peut écrire le moment dynamique en  $G_p$  grâce à la relation de Varignon :

$$\begin{aligned}
 {}^0\delta_{G_p} &= {}^0\delta_{G_j} + (\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j) \times m_j \cdot {}^0\Upsilon_{G_j} \\
 &= \underline{\mathbf{I}}_j ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j) + \underline{\mathbf{I}}_j (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times \underline{\mathbf{I}}_j (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \\
 &\quad + (\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j) \times m_j \left( {}^0\ddot{\mathbf{p}} + {}^j\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_j + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_j + ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j + (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j \right. \\
 &\quad \left. + 2(\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times {}^j\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_j) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times ((\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j) \right)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Soient  $\mathbf{F}_{p/j}$  la force exercée par la plate-forme sur le dispositif de stabilisation  $j$  et  $\mathcal{M}_{G_p(p/j)}$  le moment exercé par la plate-forme sur  $j$  exprimé en  $G_p$ . Soit  $\mathbf{w}_{p/j}$  le torseur d'effort de la plate-forme sur le solide  $j$  au point  $G_p$ , noté comme suit :

$$\mathbf{w}_{p/j} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{p/j} \\ \mathcal{M}_{G_p(p/j)} \end{array} \right\} = -\mathbf{w}_{j/p}$$

Pour trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$ , l'égalité de Jacobi est la suivante :  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ . Grâce à la propriété d'antisymétrie du produit vectoriel, on peut réécrire  $(\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \boldsymbol{\lambda}_j) + \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\lambda}_j)$  comme  $\boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \boldsymbol{\lambda}_j) + \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\lambda}_j) + \boldsymbol{\lambda}_j \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j)$ . On peut simplifier ce terme en utilisant la formule de Jacobi :

$$(\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \boldsymbol{\lambda}_j) + \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\lambda}_j) = -2\boldsymbol{\omega}_p^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times \boldsymbol{\omega}_j \tag{3.16}$$

Pour plus de clarté, la notation de la matrice de pré-produit vectoriel est introduite pour remplacer les produits vectoriels. En utilisant l'équation (3.12) et la simplification donnée par (3.16), d'après le Théorème de la Résultante Dynamique :

$$\begin{aligned}
 m_j \cdot \mathbf{g} + \mathbf{F}_{p/j} &= m_j \left( {}^0\ddot{\mathbf{p}} + {}^j\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_j + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_j + ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j + (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j \right. \\
 &\quad \left. + 2(\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times {}^j\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_j) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times ((\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j) \right) \\
 &= \left[ m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad -m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \right] \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} + \left[ m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad -m_j \boldsymbol{\lambda}_j^\times \right] \begin{pmatrix} {}^j\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_j \\ {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \end{pmatrix} \\
 &\quad + 2(\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times {}^j\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j - m_j \boldsymbol{\omega}_p^\times (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \boldsymbol{\omega}_p - m_j \boldsymbol{\omega}_j^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times \boldsymbol{\omega}_j \\
 &\quad + m_j \underbrace{((\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \boldsymbol{\lambda}_j) + \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\lambda}_j))}_{-2\boldsymbol{\omega}_p^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times \boldsymbol{\omega}_j}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Selon le PFD, le moment dynamique du solide  $j$  correspond à sa quantité d'accélération angulaire. Le moment dynamique de  $j$  en  $G_p$ , obtenu d'après l'équation (3.15) vaut :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j) \times m_j \cdot \mathbf{g} + \mathcal{M}_{G_p(p/j)} &= \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \\
&+ (\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j) \times m_j \left( {}^0\ddot{\mathbf{p}} + {}^j\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_j + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_j + ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j + (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j \right. \\
&\left. + 2(\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times {}^j\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_j) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times ((\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{\lambda}_j) \right) \\
&= \begin{bmatrix} m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j - m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j - m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^j\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_j \\ {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \end{pmatrix} \\
&+ 2m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\boldsymbol{\omega}_p^\times + \boldsymbol{\omega}_j^\times) {}^j\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j - 2m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{\lambda}_j^\times\boldsymbol{\omega}_j - m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_j^\times\boldsymbol{\lambda}_j^\times\boldsymbol{\omega}_j \\
&- m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_p^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_j\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_j^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_j\boldsymbol{\omega}_j + \boldsymbol{\omega}_p^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_j\boldsymbol{\omega}_j + \boldsymbol{\omega}_j^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_j\boldsymbol{\omega}_p + \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j\boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{\omega}_j \\
&= \begin{bmatrix} m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j - m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j - m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^j\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_j \\ {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \end{pmatrix} \\
&+ 2m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\boldsymbol{\omega}_p^\times + \boldsymbol{\omega}_j^\times) {}^j\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j - m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_p + (\boldsymbol{\omega}_p^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_j + \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j\boldsymbol{\omega}_p^\times \\
&- (\underline{\underline{\mathbf{I}}}_j\boldsymbol{\omega}_p)^\times + \boldsymbol{\omega}_j^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_j - m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_j^\times\boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_j - 2m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{\lambda}_j^\times\boldsymbol{\omega}_j + \boldsymbol{\omega}_p^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_j\boldsymbol{\omega}_p \\
\end{aligned} \tag{3.18}$$

En mettant sous forme matricielle (3.17) et (3.18), on obtient :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} m_j \mathbf{g} \\ m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{p/j} \\ \mathcal{M}_{G(p/j)} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \\ m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j - m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_j \boldsymbol{\lambda}_j^\times \\ m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j - m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^j\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_j \\ {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \end{pmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 2(\boldsymbol{\omega}_p^\times + \boldsymbol{\omega}_j^\times) \\ 2m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\boldsymbol{\omega}_p^\times + \boldsymbol{\omega}_j^\times) \end{bmatrix} {}^j\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j \\
&\dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \begin{array}{c} -m_j \omega_p^\times (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \\ -m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \omega_p^\times (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) + \omega_p^\times \underline{\mathbf{I}}_j \end{array} \right] \omega_p \\
 & + \left[ \begin{array}{c} -m_j \omega_j^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times - 2m_j \omega_p^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times \\ \omega_p^\times \underline{\mathbf{I}}_j + \underline{\mathbf{I}}_j \omega_p^\times - (\underline{\mathbf{I}}_j \omega_p)^\times + \omega_j^\times \underline{\mathbf{I}}_j - m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \omega_j^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times - 2m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \omega_p^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{array} \right] \omega_j \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

On peut identifier certains termes dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_{j/p} = & \underbrace{\begin{pmatrix} m_j \mathbf{g} \\ m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \mathbf{g} \end{pmatrix}}_{\text{Contribution du poids}} - \underbrace{\begin{pmatrix} m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \\ m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \underline{\mathbf{I}}_j - m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \end{pmatrix}}_{\text{Contribution de l'accélération de la plate-forme}} \begin{pmatrix} {}^0 \ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} \\
 & - \underbrace{\begin{pmatrix} m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_j \boldsymbol{\lambda}_j^\times \\ m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \underline{\mathbf{I}}_j - m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{pmatrix}}_{\text{Contribution de l'accélération de la masselotte } j} \begin{pmatrix} {}^j \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_j \\ {}^j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \end{pmatrix} \\
 & - \underbrace{\begin{pmatrix} -m_j \omega_p^\times (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \\ -m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \omega_p^\times (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) + \omega_p^\times \underline{\mathbf{I}}_j \end{pmatrix}}_{\text{Terme dépendant de la vitesse de rotation de la plate-forme}} \omega_p \\
 & - \underbrace{\begin{pmatrix} 2(\omega_p^\times + \omega_j^\times) \\ 2m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) (\omega_p^\times + \omega_j^\times) \end{pmatrix}}_{\text{Terme dépendant de la vitesse linéaire de la masselotte } j} j \dot{\boldsymbol{\lambda}}_j \\
 & - \underbrace{\begin{pmatrix} -m_j \omega_j^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times - 2m_j \omega_p^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times \\ \omega_p^\times \underline{\mathbf{I}}_j + \underline{\mathbf{I}}_j \omega_p^\times - (\underline{\mathbf{I}}_j \omega_p)^\times + \omega_j^\times \underline{\mathbf{I}}_j - m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \omega_j^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times - 2m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \omega_p^\times \boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{pmatrix}}_{\text{Terme dépendant de la vitesse de rotation de la masselotte } j} \omega_j \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

### 3.2.2 Roue à inertie

Une simplification du solide quelconque présenté à la Figure 3.2 permet d'obtenir une roue à inertie, représentée Figure 3.3. Une roue à inertie a un seul DDL, elle est en rotation autour d'un seul axe. Dans le repère attaché à la roue à inertie cela se traduit physiquement par le fait que le vecteur vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}_m$  de la roue à inertie n'a qu'une seule composante non-nulle. De plus, le CDG d'une roue à inertie est confondu avec son point d'attache à la plate-forme :  $G_m \equiv O_m$ .



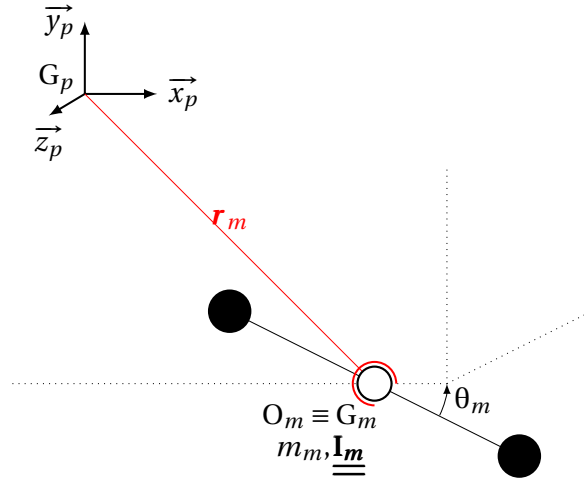


Figure 3.3: Roue à inertie attachée à la plate-forme d'un RPC

Dans le cas particulier d'une roue à inertie, le vecteur  $\overrightarrow{O_m G_m} = \boldsymbol{\lambda}_m$  du centre de rotation au centre de gravité de la roue à inertie est toujours nul. La vitesse et l'accélération du point  $G_m$ , le CDG de la roue à inertie  $m$ , dans  $\mathcal{R}_0$  peuvent alors s'obtenir en appliquant aux équations (3.11) et (3.12) les simplifications suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_j = \boldsymbol{\lambda}_m = \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_j = \dot{\boldsymbol{\lambda}}_m = \mathbf{0} \end{cases}$$

La vitesse et l'accélération du point  $G_m$  dans  $\mathcal{R}_0$  valent donc respectivement :

$${}^0 \mathbf{v}_{G_m} = \frac{{}^0 d}{dt} \overrightarrow{OG_m} = \frac{{}^0 d}{dt} (\mathbf{p} + \mathbf{r}_m) = {}^0 \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_m \quad (3.21)$$

$${}^0 \mathbf{Y}_{G_m} = \frac{{}^0 d}{dt} {}^0 \mathbf{v}_{G_m} = {}^0 \ddot{\mathbf{p}} + {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_m + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_m) \quad (3.22)$$

On en déduit les moments cinétique et dynamique de la roue à inertie  $m$  en  $G_m$  :

$${}^0 \boldsymbol{\sigma}_{G_m} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_m (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_m) \quad (3.23)$$

$${}^0 \boldsymbol{\delta}_{G_m} = \frac{{}^0 d}{dt} {}^0 \boldsymbol{\sigma}_{G_m} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_m ({}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^m \dot{\boldsymbol{\omega}}_m) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}_m (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_m) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_m) \times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_m (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_m) \quad (3.24)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 {}^0\delta_{G_p} &= {}^0\delta_{G_m} + \mathbf{r}_m \times m_m \cdot {}^0\Upsilon_{G_m} \\
 &= \underline{\mathbf{I}}_m ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^m\dot{\boldsymbol{\omega}}_m) + \underline{\mathbf{I}}_m (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_m) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_m) \times \underline{\mathbf{I}}_m (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_m) \\
 &\quad + \mathbf{r}_m \times m_m \cdot ({}^0\ddot{\mathbf{p}} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_m + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_m))
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Soit par application des théorèmes du moment dynamique et de la résultante dynamique :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_{m/p} &= \begin{pmatrix} m_m \mathbf{g} \\ m_m \mathbf{r}_m^\times \mathbf{g} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} m_m \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_m \mathbf{r}_m^\times \\ m_m \mathbf{r}_m^\times & \underline{\mathbf{I}}_m - m_m \mathbf{r}_m^\times \mathbf{r}_m^\times \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -m_m \boldsymbol{\omega}_p^\times \mathbf{r}_m^\times \\ -m_m \mathbf{r}_m^\times \boldsymbol{\omega}_p^\times + \boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\mathbf{I}}_m \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_p \\
 &\quad - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{I}}_m \end{bmatrix} m \dot{\boldsymbol{\omega}}_m - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\mathbf{I}}_m + \underline{\mathbf{I}}_m \boldsymbol{\omega}_p^\times - (\underline{\mathbf{I}}_m \boldsymbol{\omega}_p)^\times - \boldsymbol{\omega}_m^\times \underline{\mathbf{I}}_m \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_m}_{\tilde{\mathbf{w}}_{m/p}}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$\tilde{\mathbf{w}}_{m/p}$  représente la composante active du torseur d'effort  $\mathbf{w}_{m/p}$ . Ce terme représente la partie du torseur  $\mathbf{w}_{m/p}$  qui n'est pas due aux effets de couplage dynamique entre le stabilisateur et la plate-forme.  $\tilde{\mathbf{w}}_{m/p}$  représente alors les effets de la roue à inertie sur la plate-forme, produits par son accélération angulaire et sa vitesse de rotation.

### 3.2.3 Actionneur gyroscopique

Les actionneurs gyroscopiques sont étudiés ici comme des générateurs de moment d'inertie. La simplification détaillée ci-après du solide quelconque présenté à la Figure 3.2 permet d'obtenir un actionneur gyroscopique, représenté Figure 3.4. L'actionneur gyroscopique est composé d'une roue à inertie tournant à vitesse constante autour d'un axe perpendiculaire à un bras de longueur constante. Ce bras pivote autour d'un autre axe en  $O_l$ , créant un moment qui varie dans le temps. Cela se traduit physiquement par le fait que le vecteur vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}_l$  d'un actionneur gyroscopique a au moins deux composantes qui peuvent être non nulles dont une constante.

La vitesse et l'accélération du centre d'inertie  $G_l$  de l'actionneur gyroscopique  $l$  dans  $\mathcal{R}_0$  sont obtenues à partir des équations (3.11) et (3.12), en appliquant la simplification suivante :  $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j = \dot{\boldsymbol{\lambda}}_l = \mathbf{0}$ . Elles sont respectivement données par :

$${}^0\mathbf{v}_{G_l} = \frac{{}^0d}{dt} \overrightarrow{OG_l} = \frac{{}^0d}{dt} (\mathbf{p} + \mathbf{r}_l + \boldsymbol{\lambda}_l) = {}^0\dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_l + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_l) \times \boldsymbol{\lambda}_l \tag{3.27}$$

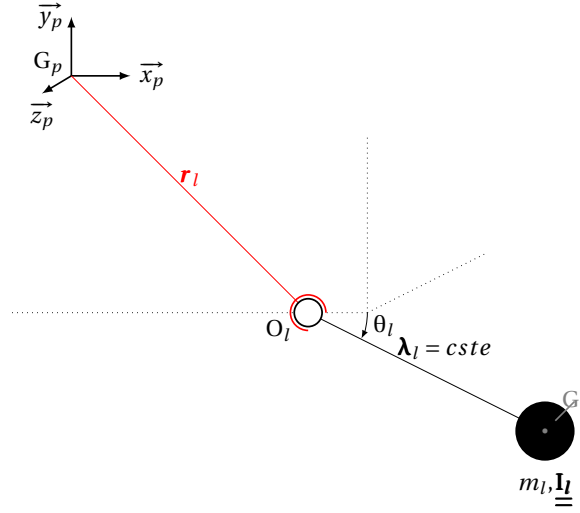


Figure 3.4: Actionneur gyroscopique attaché à la plate-forme

$$\begin{aligned}
 {}^0\Upsilon_{G_l} = \frac{{}^0d}{{}^0dt} {}^0v_{G_l} = & {}^0\ddot{\mathbf{p}} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_l + ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^l\dot{\boldsymbol{\omega}}_l) \times \boldsymbol{\lambda}_l + (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_l) \times \boldsymbol{\lambda}_l + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_l) \\
 & + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_l) \times ((\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_l) \times \boldsymbol{\lambda}_l)
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

On en déduit les moments cinétique et dynamique de l'actionneur gyroscopique  $l$  en  $G_l$  :

$${}^0\boldsymbol{\sigma}_{G_l} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_l (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_l) \tag{3.29}$$

$${}^0\boldsymbol{\delta}_{G_l} = \frac{{}^0d}{{}^0dt} {}^0\boldsymbol{\sigma}_{G_l} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_l ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^l\dot{\boldsymbol{\omega}}_l) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}_l (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_l) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_l) \times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_l (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_l) \tag{3.30}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 {}^0\boldsymbol{\delta}_{G_p} = & {}^0\boldsymbol{\delta}_{G_l} + (\mathbf{r}_l + \boldsymbol{\lambda}_l) \times m_l \cdot {}^0\Upsilon_{G_l} \\
 = & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_l ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^l\dot{\boldsymbol{\omega}}_l) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}_l (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_l) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_l) \times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_l (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_l) \\
 & + (\mathbf{r}_l + \boldsymbol{\lambda}_l) \times m_l \cdot \left( {}^0\ddot{\mathbf{p}} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_l + ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^l\dot{\boldsymbol{\omega}}_l) \times \boldsymbol{\lambda}_l + (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_l) \times \boldsymbol{\lambda}_l + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_l) \right. \\
 & \left. + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_l) \times ((\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_l) \times \boldsymbol{\lambda}_l) \right)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Soit par application des théorèmes de la dynamique :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_{l/p} = & \begin{pmatrix} m_l \mathbf{g} \\ m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \mathbf{g} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} m_l \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \\ m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) & \underline{\mathbf{I}}_l - m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0 \ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} -m_l \boldsymbol{\omega}_p^\times (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \\ -m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \boldsymbol{\omega}_p^\times (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) + \boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\mathbf{I}}_l \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_p - \begin{bmatrix} -m_l \boldsymbol{\lambda}_l \\ \underline{\mathbf{I}}_l - m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \boldsymbol{\lambda}_l^\times \end{bmatrix} {}^l \dot{\boldsymbol{\omega}}_l \\
 & - \begin{bmatrix} -m_l \boldsymbol{\omega}_l^\times \boldsymbol{\lambda}_l^\times - 2m_l \boldsymbol{\omega}_p^\times \boldsymbol{\lambda}_l^\times \\ \boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\mathbf{I}}_l + \underline{\mathbf{I}}_l \boldsymbol{\omega}_p^\times - (\underline{\mathbf{I}}_l \boldsymbol{\omega}_p)^\times + \boldsymbol{\omega}_l^\times \underline{\mathbf{I}}_l - m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \boldsymbol{\omega}_l^\times \boldsymbol{\lambda}_l^\times - 2m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \boldsymbol{\omega}_p^\times \boldsymbol{\lambda}_l^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_l
 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le terme  $\tilde{\mathbf{w}}_{l/p}$  qui donne les composantes actives du torseur d'effort appliqué par l'actionneur gyroscopique  $l$  au CDG de la plate-forme est donné par :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{w}}_{l/p} = & - \begin{bmatrix} -m_l \boldsymbol{\lambda}_l \\ \underline{\mathbf{I}}_l - m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \boldsymbol{\lambda}_l^\times \end{bmatrix} {}^l \dot{\boldsymbol{\omega}}_l \\
 & - \begin{bmatrix} -m_l \boldsymbol{\omega}_l^\times \boldsymbol{\lambda}_l^\times - 2m_l \boldsymbol{\omega}_p^\times \boldsymbol{\lambda}_l^\times \\ \boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\mathbf{I}}_l + \underline{\mathbf{I}}_l \boldsymbol{\omega}_p^\times - (\underline{\mathbf{I}}_l \boldsymbol{\omega}_p)^\times + \boldsymbol{\omega}_l^\times \underline{\mathbf{I}}_l - m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \boldsymbol{\omega}_l^\times \boldsymbol{\lambda}_l^\times - 2m_l (\mathbf{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times) \boldsymbol{\omega}_p^\times \boldsymbol{\lambda}_l^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_l
 \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.2.4 Masselotte actionnée en translation

À partir du solide quelconque de la Figure 3.2, un solide  $k$  attaché à la plate-forme et en translation pure par rapport au repère  $\mathcal{R}_p$  a une vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}_k$  nulle. L'actionneur équivalent est modélisé à la Figure 3.5. La vitesse et l'accélération du centre d'inertie  $G_k$  de la masselotte en translation  $k$  dans  $\mathcal{R}_0$  s'écrivent donc respectivement :

$${}^0 \mathbf{v}_{G_k} = \frac{{}^0 d}{dt} \overrightarrow{OG_k} = {}^0 \dot{\mathbf{p}} + {}^k \dot{\boldsymbol{\lambda}}_k + \boldsymbol{\omega}_p \times (\mathbf{r}_k + \boldsymbol{\lambda}_k) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
 {}^0 \boldsymbol{\Upsilon}_{G_k} &= \frac{{}^0 d}{dt} {}^0 \mathbf{v}_{G_k} \\
 &= {}^0 \ddot{\mathbf{p}} + {}^k \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_k + {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times (\mathbf{r}_k + \boldsymbol{\lambda}_k) + 2\boldsymbol{\omega}_p \times {}^k \dot{\boldsymbol{\lambda}}_k + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times (\mathbf{r}_k + \boldsymbol{\lambda}_k))
 \end{aligned} \quad (3.35)$$

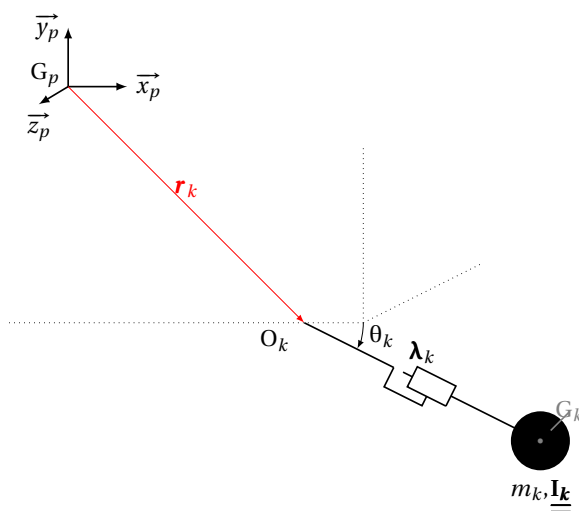


Figure 3.5: Actionneur en translation attaché à la plate-forme

Les moments cinétique et dynamique du solide  $k$  en  $G_k$  sont :

$${}^0\sigma_{G_k} = \underline{\underline{I}}_k \omega_p \quad (3.36)$$

$${}^0\delta_{G_k} = \frac{d}{dt} {}^0\sigma_{G_k} = \underline{\underline{I}}_k {}^0\dot{\omega}_p + \omega_p \times (\underline{\underline{I}}_k \omega_p) \quad (3.37)$$

donc :

$${}^0\delta_{G_p} = \underline{\underline{I}}_k {}^0\dot{\omega}_p + \omega_p \times (\underline{\underline{I}}_k \omega_p) + (\mathbf{r}_k + \boldsymbol{\lambda}_k) \times m_k \cdot \left( {}^0\ddot{\mathbf{p}} + {}^k\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_k + {}^0\dot{\omega}_p \times (\mathbf{r}_k + \boldsymbol{\lambda}_k) + 2\omega_p \times {}^k\dot{\boldsymbol{\lambda}}_k + \omega_p \times (\omega_p \times (\mathbf{r}_k + \boldsymbol{\lambda}_k)) \right) \quad (3.38)$$

En appliquant les théorèmes de la dynamique :

$$\mathbf{w}_{k/p} = \begin{pmatrix} m_k \mathbf{g} \\ m_k (\mathbf{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times) \mathbf{g} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} m_k \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_k (\mathbf{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times) \\ m_k (\mathbf{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times) & \underline{\underline{I}}_k - m_k (\mathbf{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times) (\mathbf{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\omega}_p \end{pmatrix}$$

...

$$\underbrace{- \begin{bmatrix} -m_k \boldsymbol{\omega}_p^\times (\mathbf{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times) \\ -m_k (\mathbf{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times) \boldsymbol{\omega}_p^\times (\mathbf{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times) + \boldsymbol{\omega}_p^\times \mathbf{I}_k \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_p - \begin{bmatrix} m_k \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ m_k (\mathbf{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times) \end{bmatrix} {}^k \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_k - \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\omega}_p^\times \\ 2m_k (\mathbf{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times) \boldsymbol{\omega}_p^\times \end{bmatrix} {}^k \dot{\boldsymbol{\lambda}}_k}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k/p}} \quad (3.39)$$

$\tilde{\mathbf{w}}_{k/p}$  représente les composantes actives du torseur d'effort  $\mathbf{w}_{k/p}$ . Ce terme représente la partie du torseur  $\mathbf{w}_{k/p}$  qui n'est pas due aux effets de couplage dynamique entre le stabilisateur et la plate-forme.  $\tilde{\mathbf{w}}_{k/p}$  représente alors les effets produits par l'accélération et la vitesse de la masselotte en translation sur la plate-forme.

### 3.2.5 Bras en rotation

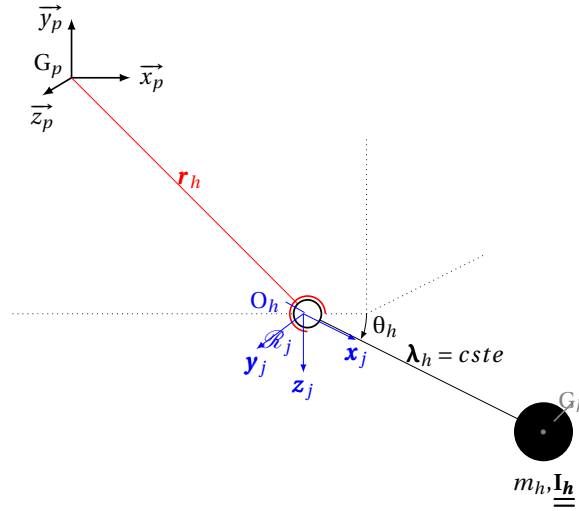


Figure 3.6: Bras attaché à la plate-forme

Un dispositif de pendule actionné  $h$ , ici nommé bras en rotation, consiste en une masselotte excentrée en  $G_h$  telle que  $\overline{O_h G_h} = \boldsymbol{\lambda}_h$ , en rotation à une vitesse  $\boldsymbol{\omega}_h$  dans le repère  $\mathcal{R}_p$ . La dynamique du bras en rotation est obtenue à partir des équations (3.11) et (3.14). La longueur du bras est constante, ce qui équivaut à la simplification :  $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_h = \mathbf{0}$ . Le système est représenté Figure 3.6.

La vitesse et l'accélération du centre d'inertie  $G_h$  du bras  $h$  dans  $\mathcal{R}_0$  valent respectivement :

$${}^0\mathbf{v}_{G_h} = \frac{{}^0d}{dt} \overrightarrow{OG_h} = {}^0\dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_h + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_h) \times \boldsymbol{\lambda}_h \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\Upsilon}_{G_h} &= \frac{{}^0d}{dt} {}^0\mathbf{v}_{G_h} \\ &= {}^0\ddot{\mathbf{p}} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_h + ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^h\dot{\boldsymbol{\omega}}_h) \times \boldsymbol{\lambda}_h + (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_h) \times \boldsymbol{\lambda}_h + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_h) \\ &\quad + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_h) \times ((\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_h) \times \boldsymbol{\lambda}_h) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Les moments cinétique et dynamique du bras  $h$  en  $G_h$  sont :

$${}^0\boldsymbol{\sigma}_{G_h} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_h (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_h) \quad (3.42)$$

$${}^0\boldsymbol{\delta}_{G_h} = \frac{{}^0d}{dt} {}^0\boldsymbol{\sigma}_{G_h} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_h ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^h\dot{\boldsymbol{\omega}}_h) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}_h (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_h) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_h) \times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_h (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_h) \quad (3.43)$$

Donc le moment dynamique du bras  $h$  en  $G_p$  est donné par :

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\delta}_{G_p} &= {}^0\boldsymbol{\delta}_{G_h} + (\mathbf{r}_h + \boldsymbol{\lambda}_h) \times m_h \cdot {}^0\boldsymbol{\Upsilon}_{G_h} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{I}}}_h ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^h\dot{\boldsymbol{\omega}}_h) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}_h (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_h) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_h) \times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_h (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_h) + (\mathbf{r}_h + \boldsymbol{\lambda}_h) \times m_h \cdot \left( {}^0\ddot{\mathbf{p}} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_h \right. \\ &\quad \left. + ({}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p + {}^h\dot{\boldsymbol{\omega}}_h) \times \boldsymbol{\lambda}_h + (\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_h) \times \boldsymbol{\lambda}_h + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_h) + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_h) \times ((\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_h) \times \boldsymbol{\lambda}_h) \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

D'après les théorèmes généraux de la dynamique :

$$\mathbf{w}_{h/p} = - \overbrace{\begin{bmatrix} m_h \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_h (\mathbf{r}_h^\times + \boldsymbol{\lambda}_h^\times) \\ m_h (\mathbf{r}_h^\times + \boldsymbol{\lambda}_h^\times) & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_h - m_h (\mathbf{r}_h^\times + \boldsymbol{\lambda}_h^\times) (\mathbf{r}_h^\times + \boldsymbol{\lambda}_h^\times) \end{bmatrix}}^{\text{Contribution de l'accélération de la plate-forme}} \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix}$$

...

$$\begin{aligned}
 & \text{Contribution de l'effet de Coriolis} \left\{ + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & m_h \boldsymbol{\omega}_p^\times (\mathbf{r}_h^\times + \boldsymbol{\lambda}_h^\times) \\ \mathbf{0} & m_h (\mathbf{r}_h^\times + \boldsymbol{\lambda}_h^\times) \boldsymbol{\omega}_p^\times (\mathbf{r}_h^\times + \boldsymbol{\lambda}_h^\times) - \boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\mathbf{I}}_h \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0 \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} m_h \mathbf{g} \\ m_h (\mathbf{r}_h^\times + \boldsymbol{\lambda}_h^\times) \mathbf{g} \end{pmatrix}}^{\text{Contribution de la gravité}} \right. \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} m_h \boldsymbol{\lambda}_h^\times \\ -\underline{\mathbf{I}}_h + m_h (\mathbf{r}_h^\times + \boldsymbol{\lambda}_h^\times) \boldsymbol{\lambda}_h^\times \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{1h}} {}^h \dot{\boldsymbol{\omega}}_h \\
 & \left. + \underbrace{\begin{bmatrix} m_h (\boldsymbol{\omega}_h^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times) \boldsymbol{\lambda}_h^\times \\ -\boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\mathbf{I}}_h - \underline{\mathbf{I}}_h \boldsymbol{\omega}_p^\times + (\underline{\mathbf{I}}_h \boldsymbol{\omega}_p)^\times - \boldsymbol{\omega}_h^\times \underline{\mathbf{I}}_h + m_h (\boldsymbol{\lambda}_h^\times + \mathbf{r}_h^\times) (\boldsymbol{\omega}_h^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times) \boldsymbol{\lambda}_h^\times \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{2h}} \boldsymbol{\omega}_h \right\} \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

$\mathbf{w}_{1h}$  et  $\mathbf{w}_{2h}$  sont les deux composantes actives du torseur d'effort  $\mathbf{w}_{h/p}$ . En effet, tandis que les autres termes résultent d'effets de couplage dynamique entre le stabilisateur et la plate-forme, les deux torseurs  $\mathbf{w}_{1h}$  et  $\mathbf{w}_{2h}$  représentent les effets produits par l'accélération et la vitesse du bras sur la plate-forme. L'accélération et la vitesse pouvant être commandées,  $\mathbf{w}_{1h}$  et  $\mathbf{w}_{2h}$  sont les composantes actives du torseur  $\mathbf{w}_{h/p}$ .

### 3.3 Modèle dynamique d'une plate-forme de RPC munie de stabilisateurs embarqués

#### 3.3.1 Bilan des efforts au CDG de la plate-forme

L'équation globale régissant la dynamique d'une plate-forme de RPC embarquant un nombre quelconque de stabilisateurs différents s'obtient en reprenant l'application du PFD donnée à l'équation (3.10). Le terme  $\mathbf{w}_e$  de cette équation prend alors la valeur de la somme des torseurs d'effort générés par les dispositifs de stabilisation embarqués :

$$\mathbf{w}_e = \sum_{j=1}^{J-H-K-L-M} \mathbf{w}_{j/p} + \sum_{h=1}^H \mathbf{w}_{h/p} + \sum_{k=1}^K \mathbf{w}_{k/p} + \sum_{l=1}^L \mathbf{w}_{l/p} + \sum_{m=1}^M \mathbf{w}_{m/p} \quad (3.46)$$

Pour pouvoir donner une écriture PFD détaillant les contributions de chacun des dispositifs de stabilisation, les termes suivants sont définis :

- $\tilde{\mathbf{w}}_{j/p}$  les composantes actives du torseur d'effort en  $G_p$  appliqué par le  $j^{\text{ième}}$  solide quelconque sur la plate-forme



- $\tilde{\boldsymbol{w}}_{h/p}$  les composantes actives du torseur d'effort en  $G_p$  appliqué par la  $h^{\text{ième}}$  masse en rotation sur la plate-forme, avec  $\tilde{\boldsymbol{w}}_{h/p} = \boldsymbol{w}_{1h} + \boldsymbol{w}_{2h}$
- $\tilde{\boldsymbol{w}}_{k/p}$  les composantes actives du torseur d'effort en  $G_p$  appliqué par la  $k^{\text{ième}}$  masselotte en translation sur la plate-forme
- $\tilde{\boldsymbol{w}}_{l/p}$  les composantes actives du torseur d'effort en  $G_p$  appliqué par le  $l^{\text{ième}}$  actionneur gyroskopique sur la plate-forme
- $\tilde{\boldsymbol{w}}_{m/p}$  les composantes actives du torseur d'effort en  $G_p$  appliqué par la  $m^{\text{ième}}$  roue à inertie sur la plate-forme
- $\mathbf{M}_T$  la matrice comprenant les masses et inerties de la plate-forme et de tous les solides attachés à celle-ci
- $\mathbf{C}_T(\mathbf{0}\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x})$  la matrice de Coriolis de la plate-forme avec tous les solides attachés
- $\boldsymbol{w}_G$  le torseur d'effort en  $G_p$  dû aux poids de la plate-forme et des dispositifs embarqués
- $\boldsymbol{w}_c$  le torseur d'effort appliqué par les câbles sur la plate-forme en  $G_p$

### 3.3.2 Matrice de masse

Le torseur d'effort généré par chacun des  $J$  dispositifs embarqués possède un terme décrivant la contribution de ce dispositif à l'accélération de la plate-forme, voir équation (3.20). Ce terme est appelée matrice de masse de  $j$  par analogie avec la matrice de masse de la plate-forme. La matrice de masse du dispositif  $j$  vaut :

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \\ m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j - m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

On en déduit donc l'expression de la matrice de masse de l'ensemble des solides :

$$\mathbf{M}_T = \begin{bmatrix} m_p \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_p \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^J \begin{bmatrix} m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \\ m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_j - m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

### 3.3.3 Effet de Coriolis

De la même manière qu'au paragraphe précédent, on peut écrire pour chacun des corps  $j$  sa contribution à l'effet de Coriolis sur le système à partir de l'équation (3.20) :

$$\mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & m_j \boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j)^\times \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \boldsymbol{\omega}_p^\times \mathbf{I}_j - m_j(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j)^\times \boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j)^\times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_p^\times \mathbf{I}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -m_j \boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j)^\times \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -m_j(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j)^\times \boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j)^\times \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Ainsi, l'effet de Coriolis total appliqué au système s'écrit :

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \boldsymbol{\omega}_p^\times \mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^J \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -m_j \boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j)^\times \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \boldsymbol{\omega}_p^\times \mathbf{I}_j - m_j(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j)^\times \boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j)^\times \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

### 3.3.4 Action de la pesanteur

Le poids de chacun des J dispositifs de stabilisation et de la plate-forme produit un moment en  $G_p$ . Pour un corps  $j$ , ce moment vaut :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{w}_{G_p, j}} = m_j(\mathbf{r}_j + \boldsymbol{\lambda}_j) \times \mathbf{g} \quad (3.51)$$

Chacun des dispositifs exerce en  $G_p$  le torseur suivant :

$$\mathbf{w}_{G_p, j} = \begin{pmatrix} m_j \mathbf{g} \\ m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

On peut donc calculer l'action de la pesanteur sur la plate-forme munie de J dispositifs embarqués :

$$\mathbf{w}_G = \begin{pmatrix} m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \begin{pmatrix} m_j \mathbf{g} \\ m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \mathbf{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_T \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ m_j(\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

où  $m_T = m_p + \sum_{j=1}^J m_j$ .

### 3.3.5 Écriture complète du modèle avec J dispositifs embarqués de stabilisation

Pour rappel des équations (3.20), (3.26), (3.32), (3.39) et (3.45), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J-H-K-L-M} \tilde{\boldsymbol{w}}_j &= \sum_{j=1}^{J-H-K-L-M} \left( \begin{bmatrix} 2(\boldsymbol{\omega}_p^\times + \boldsymbol{\omega}_j^\times) \\ 2m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\boldsymbol{\omega}_p^\times + \boldsymbol{\omega}_j^\times) \end{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\lambda}_j \right. \\
&\quad \left. - \begin{bmatrix} -m_j\boldsymbol{\omega}_j^\times\boldsymbol{\lambda}_j^\times - 2m_j\boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{\lambda}_j^\times \\ \boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{I}_j + \boldsymbol{I}_j\boldsymbol{\omega}_p^\times - (\boldsymbol{I}_j\boldsymbol{\omega}_p)^\times + \boldsymbol{\omega}_j^\times\boldsymbol{I}_j - m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_j^\times\boldsymbol{\lambda}_j^\times - 2m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \right)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\sum_{m=1}^M \tilde{\boldsymbol{w}}_{m/p} = - \sum_{m=1}^M \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} {}^m\dot{\boldsymbol{\omega}}_m + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{\omega}_p^\times - (\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{\omega}_p)^\times - \boldsymbol{\omega}_m^\times\boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_m \right) \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^L \tilde{\boldsymbol{w}}_{l/p} &= - \sum_{l=1}^L \left( \begin{bmatrix} -m_l\boldsymbol{\lambda}_l \\ \boldsymbol{I}_l - m_l(\boldsymbol{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times)\boldsymbol{\lambda}_l^\times \end{bmatrix} {}^l\dot{\boldsymbol{\omega}}_l \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} -m_l\boldsymbol{\omega}_l^\times\boldsymbol{\lambda}_l^\times - 2m_l\boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{\lambda}_l^\times \\ \boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{I}_l + \boldsymbol{I}_l\boldsymbol{\omega}_p^\times - (\boldsymbol{I}_l\boldsymbol{\omega}_p)^\times + \boldsymbol{\omega}_l^\times\boldsymbol{I}_l - m_l(\boldsymbol{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times)\boldsymbol{\omega}_l^\times\boldsymbol{\lambda}_l^\times - 2m_l(\boldsymbol{r}_l^\times + \boldsymbol{\lambda}_l^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{\lambda}_l^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_l \right)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\sum_{k=1}^K \tilde{\boldsymbol{w}}_{k/p} = - \sum_{k=1}^K \left( \begin{bmatrix} m_k\boldsymbol{I}_{3 \times 3} \\ m_k(\boldsymbol{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times)f \end{bmatrix} {}^k\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_k + \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\omega}_p^\times \\ 2m_k(\boldsymbol{r}_k^\times + \boldsymbol{\lambda}_k^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times \end{bmatrix} {}^k\dot{\boldsymbol{\lambda}}_k \right) \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{h=1}^H \tilde{\boldsymbol{w}}_{h/p} &= \sum_{h=1}^H (\boldsymbol{w}_{1h} + \boldsymbol{w}_{2h}) = \sum_{h=1}^H \left( \begin{bmatrix} m_h\boldsymbol{\lambda}_h^\times \\ -\boldsymbol{I}_h + m_h(\boldsymbol{r}_h^\times + \boldsymbol{\lambda}_h^\times)\boldsymbol{\lambda}_h^\times \end{bmatrix} {}^h\dot{\boldsymbol{\omega}}_h \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} m_h(\boldsymbol{\omega}_h^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times)\boldsymbol{\lambda}_h^\times \\ -\boldsymbol{\omega}_p^\times\boldsymbol{I}_h - \boldsymbol{I}_h\boldsymbol{\omega}_p^\times + (\boldsymbol{I}_h\boldsymbol{\omega}_p)^\times - \boldsymbol{\omega}_h^\times\boldsymbol{I}_h + m_h(\boldsymbol{\lambda}_h^\times + \boldsymbol{r}_h^\times)(\boldsymbol{\omega}_h^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times)\boldsymbol{\lambda}_h^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_h \right)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Alors, en réécrivant (3.10), l'équation du PFD appliqué au système est établie à l'équation (3.59). Le système est composé d'une plate-forme de RPC munie de J stabilisateurs (incluant les actionneurs gyroscopiques, masses en translation, masses en rotation etc.) indicés  $j$ ,  $j \in \llbracket 1..J \rrbracket$  dont :

- H masses en rotation indicées  $h$ ,  $h \in \llbracket 1..H \rrbracket$
- K masselottes en translation indicées  $k$ ,  $k \in \llbracket 1..K \rrbracket$
- L actionneurs gyroscopiques indicés  $l$ ,  $l \in \llbracket 1..L \rrbracket$
- M roues à inertie indicées  $m$ ,  $m \in \llbracket 1..M \rrbracket$

$$\mathbf{M}_T \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} + \mathbf{C}_T \begin{pmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} + \mathbf{w}_G = \mathbf{w}_c + \sum_{h=1}^H \tilde{\mathbf{w}}_{h/p} + \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{w}}_{k/p} + \sum_{l=1}^L \tilde{\mathbf{w}}_{l/p} + \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{w}}_{m/p} + \sum_{j=1}^{J-H-K-L-M} \tilde{\mathbf{w}}_{j/p} \quad (3.59)$$

## 3.4 Choix du dispositif embarqué et réécriture simplifiée du modèle

### 3.4.1 Choix du dispositif embarqué

Le stabilisateur choisi doit être capable de compenser des vibrations selon plusieurs ou tous les DDL du RPC. Il s'ensuit que le torseur d'effort produit par le stabilisateur doit avoir une composante active - c'est à dire dépendant des paramètres commandés du dispositif - selon chacun des DDL à compenser. Pour le dispositif de la roue à inertie, le torseur d'effort produit - donné à l'équation (3.26) - n'a pas de composante active en force.

Un actionneur gyroscopique nécessite 2 actionneurs pour fonctionner, un pour maintenir le volant d'inertie en rotation et l'autre pour orienter l'axe de rotation, ce qui rend le système plus difficile à embarquer. De plus les actionneurs gyroscopiques ont en pratique une course limitée et un axe  $\lambda$  très court. Leur capacité à transmettre une force au système est donc limitée même s'ils peuvent générer des moments significatifs.

Dans le cas des masselotte en translation, le torseur d'effort  $\tilde{\mathbf{w}}_{k/p}$  donné en (3.39) a une composante active selon tous les DDL du robot. L'actionnement des masselottes en translation se fait au moyen d'un seul actionneur par masselotte. Cet actionnement nécessite un actionneur linéaire et un guidage en translation pour chacune des masselottes. L'actionneur et le guidage linéaires sont deux solutions technologiques complexes et relativement coûteuses à mettre en oeuvre, le choix a donc été fait de ne pas utiliser cette solution.

Le dernier système étudié à la partie 3.2.5, les bras en rotation, cumule l'avantage de ne nécessiter qu'un seul actionneur et de pouvoir exercer des efforts selon toutes les composantes de leur torseur d'effort, d'après l'équation (3.45). Ce dispositif a l'avantage d'utiliser un actionnement simple, même s'il est encombrant puisque le bras nécessite un certain volume de travail.

Finalement, il a été décidé pour ce travail de concevoir un stabilisateur composé uniquement de bras en rotation placés sur la plate-forme du RPC.

### 3.4.2 Exemple de stabilisateur à 2 bras

Pour observer visuellement le fonctionnement d'un stabilisateur composé uniquement de bras en rotation, un exemple de couplage de deux bras symétriques est montré sur la figure 3.7. Comme illustré sur la partie de gauche, si les deux bras ont la même accélération angulaire dans le même sens, les forces qu'ils produisent selon l'axe vertical se compensent, et le torseur d'effort résultant est un moment pur. De même, lorsque les deux bras ont un mouvement opposé et de même vitesse, les moments produits par chacun se compensent et le torseur d'effort résultant est une force pure.

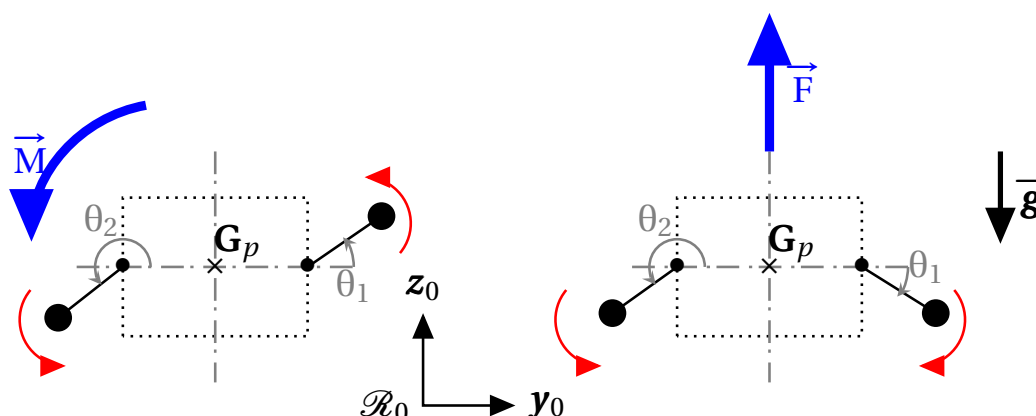


Figure 3.7: Principe de génération d'un torseur d'effort avec deux bras

Le torseur d'effort produit par deux bras est donné dans l'équation (3.60). Dans ce cas particulier symétrique, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{0} \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ m_1 = m_2 \text{ et } \underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_2 \end{cases}$$

Dans le cas plan présenté figure 3.7, les angles de rotation des bras 1 et 2 autour de l'axe perpendiculaire au plan sont notés  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respectivement. Dans ce cas le vecteur position

de  $G_1$  dans  $\mathcal{R}_0$  s'écrit :  $\boldsymbol{\lambda}_1 = [0 \ \lambda_1 c_{\theta_1} \ \lambda_1 s_{\theta_1}]^\top$  ; et de même  $\overrightarrow{O_2 G_2} = \boldsymbol{\lambda}_2 = [0 \ \lambda_1 c_{\theta_2} \ \lambda_1 s_{\theta_2}]^\top$ . En configuration initiale, on a  $\theta_{1_0} = 0$  et  $\theta_{2_0} = \pi$ . Dans cet exemple, le vecteur  $\boldsymbol{\omega}_1$  a une seule composante non-nulle et le tenseur d'inertie  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1$  est représenté par une matrice diagonale. Dans ce cas,  $\boldsymbol{\omega}_1^\times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$ .

En accord avec l'équation (3.45), on peut alors écrire le torseur d'effort appliqué par les deux bras au CDG  $G_p$  de la plate-forme :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{w}_{\{1+2\}/p} = & - \begin{bmatrix} 2m_1 \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_1 (\boldsymbol{\lambda}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \\ m_1 (\boldsymbol{\lambda}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times) & 2\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 - m_1 (\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times)(\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) - m_1 (\mathbf{r}_1^\times - \boldsymbol{\lambda}_2^\times)(\mathbf{r}_1^\times - \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0 \dot{\boldsymbol{p}} \\ {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & m_1 \boldsymbol{\omega}_p^\times (\boldsymbol{\lambda}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -2\boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 + m_1 (\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) \boldsymbol{\omega}_p^\times (\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) + m_1 (\mathbf{r}_1^\times - \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \boldsymbol{\omega}_p^\times (\mathbf{r}_1^\times - \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0 \dot{\boldsymbol{p}} \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} 2m_1 \mathbf{g} \\ m_1 (\boldsymbol{\lambda}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \mathbf{g} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 \boldsymbol{\lambda}_1^\times \\ -\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 + m_1 (\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) \boldsymbol{\lambda}_1^\times \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \begin{bmatrix} m_1 \boldsymbol{\lambda}_2^\times \\ -\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 + m_1 (-\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \boldsymbol{\lambda}_2^\times \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \\
 & + \begin{bmatrix} m_1 (\boldsymbol{\omega}_1^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times) \boldsymbol{\lambda}_1^\times \\ -\boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 \boldsymbol{\omega}_p^\times + (\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 \boldsymbol{\omega}_p)^\times + m_1 (\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) (\boldsymbol{\omega}_1^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times) \boldsymbol{\lambda}_1^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\
 & + \begin{bmatrix} m_1 (\boldsymbol{\omega}_2^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times) \boldsymbol{\lambda}_2^\times \\ -\boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 \boldsymbol{\omega}_p^\times + (\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 \boldsymbol{\omega}_p)^\times + m_1 (-\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times) (\boldsymbol{\omega}_2^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times) \boldsymbol{\lambda}_2^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

Comme le RPC choisi comme exemple est plan, on peut faire la simplification suivante :

$$m_1 (\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) \boldsymbol{\lambda}_1^\times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = m_1 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ r_{1_y} + \lambda_1 c_{\theta_1} \\ \lambda_1 s_{\theta_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 c_{\theta_1} \\ \lambda_1 s_{\theta_1} \end{pmatrix} \right) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = m_1 \begin{pmatrix} r_{1_y} \lambda_1 s_{\theta_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \quad (3.61)$$

Or, comme le RPC est plan,  $\boldsymbol{\omega}_1$  n'a de composante que selon  $\mathbf{x}_p$ , donc on a :

$$m_1 (\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) \boldsymbol{\lambda}_1^\times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \mathbf{0} \quad (3.62)$$

De même, on peut écrire :  $m_1 (\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) (\boldsymbol{\omega}_1^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times) \boldsymbol{\lambda}_1 = -m_1 (\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) \boldsymbol{\lambda}_1^\times (\boldsymbol{\omega}_1 + 2\boldsymbol{\omega}_p) = \mathbf{0}$ .

Ces deux simplifications sont aussi valides pour  $(\mathbf{r}_2^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times)\boldsymbol{\lambda}_2^\times\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$  et  $m_1(\mathbf{r}_2^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times)(\boldsymbol{\omega}_2^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times)\boldsymbol{\lambda}_2^\times$ . Dans le cas plan, l'équation du torseur d'effort appliqué par le stabilisateur à la plate-forme (3.60) se simplifie donc en :

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{\{1+2\}/p} = & - \begin{bmatrix} 2m_1\mathbf{I}_{3\times 3} & -m_1(\boldsymbol{\lambda}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \\ m_1(\boldsymbol{\lambda}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times) & 2\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 - m_1(\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times)(\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) - m_1(\mathbf{r}_1^\times - \boldsymbol{\lambda}_2^\times)(\mathbf{r}_1^\times - \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & m_1\boldsymbol{\omega}_p^\times(\boldsymbol{\lambda}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & -2\boldsymbol{\omega}_p^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 + m_1(\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) + m_1(\mathbf{r}_1^\times - \boldsymbol{\lambda}_2^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_1^\times - \boldsymbol{\lambda}_2^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m_1\mathbf{g} \\ m_1(\boldsymbol{\lambda}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_2^\times)\mathbf{g} \end{pmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} m_1\boldsymbol{\lambda}_1^\times \\ -\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \begin{bmatrix} m_1\boldsymbol{\lambda}_2^\times \\ -\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \begin{bmatrix} m_1(\boldsymbol{\omega}_1^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times)\boldsymbol{\lambda}_1^\times \\ -\boldsymbol{\omega}_p^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}_1\boldsymbol{\omega}_p^\times + (\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1\boldsymbol{\omega}_p)^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 + \begin{bmatrix} m_1(\boldsymbol{\omega}_2^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times)\boldsymbol{\lambda}_2^\times \\ -\boldsymbol{\omega}_p^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{I}}}_1\boldsymbol{\omega}_p^\times + (\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1\boldsymbol{\omega}_p)^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Si les deux bras ont la même accélération et la même vitesse, alors  $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$  et  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ . Ce mouvement ayant commencé à l'état de repos, à tout moment  $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ , donc  $\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2 = \mathbf{0}$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{\{1+2\}/p} = & - \begin{bmatrix} 2m_1\mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & 2\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 - 2m_1(\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times)(\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m_1\mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & -2\boldsymbol{\omega}_p^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 + 2m_1(\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_1^\times + \boldsymbol{\lambda}_1^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -2\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} \\ -2\boldsymbol{\omega}_p^\times\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1 - 2\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1\boldsymbol{\omega}_p^\times + 2(\underline{\underline{\mathbf{I}}}_1\boldsymbol{\omega}_p)^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Si les deux bras ont une accélération et une vitesse opposées, alors  $\boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2$  et  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = -\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ . Ce mouvement ayant commencé à l'état de repos, à tout moment  $\theta_2 = \pi - \theta_1$  et le vec-

teur  $\lambda_1 + \lambda_2$  est colinéaire à l'axe vertical du repère, et donc  $(\lambda_1^\times + \lambda_2^\times)\mathbf{g} = \mathbf{0}$ . Le mouvement ne produit pas de force horizontale. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\{1+2\}/p} = & - \begin{bmatrix} 2m_1\mathbf{I}_{3\times 3} & -m_1(\lambda_1^\times + \lambda_2^\times) \\ m_1(\lambda_1^\times + \lambda_2^\times) & 2\underline{\mathbf{I}}_1 - m_1(\mathbf{r}_1^\times + \lambda_1^\times)(\mathbf{r}_1^\times + \lambda_1^\times) - m_1(\mathbf{r}_1^\times - \lambda_2^\times)(\mathbf{r}_1^\times - \lambda_2^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & m_1\boldsymbol{\omega}_p^\times(\lambda_1^\times + \lambda_2^\times) \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & -2\boldsymbol{\omega}_p^\times\underline{\mathbf{I}}_1 + m_1(\mathbf{r}_1^\times + \lambda_1^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_1^\times + \lambda_1^\times) + m_1(\mathbf{r}_1^\times - \lambda_2^\times)\boldsymbol{\omega}_p^\times(\mathbf{r}_1^\times - \lambda_2^\times) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 2m_1\mathbf{g} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_1(\lambda_1^\times - \lambda_2^\times) \\ \mathbf{0}_{3\times 3} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \begin{bmatrix} m_1\boldsymbol{\omega}_1^\times(\lambda_1^\times + \lambda_2^\times) + 2m_1\boldsymbol{\omega}_p^\times(\lambda_1^\times - \lambda_2^\times) \\ \mathbf{0}_{3\times 3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Sur cet exemple à deux bras, l'utilisation de la symétrie permet au stabilisateur de générer une force tout en compensant le moment non-désiré produit par chaque bras (cas de gauche sur la Figure 3.7) et de générer un moment sans produire de force non-désiré (cas de droite sur la Figure 3.7). Tel que montré par les équations (3.64) et (3.65), les composantes actives du torseur d'effort permettent en effet de produire uniquement une force ou uniquement un moment. En utilisant le même principe et un nombre suffisant de bras, il est possible en couplant leurs effets de créer un torseur d'effort dans toutes les directions souhaitées.

Dans la suite de cette thèse, le stabilisateur désigne un système composé uniquement de bras en rotation fixés sur la plate-forme du RPC à stabiliser. J désignant le nombre de dispositifs de stabilisation, il désigne désormais également le nombre de bras, chacun étant indicé  $j$ .

### 3.4.3 Formulation du modèle avec stabilisateur embarqué composé de bras en rotation

De l'expression du torseur d'effort produit par un bras (3.45), on déduit l'équation (??) qui donne le torseur d'effort en  $G_p$  fourni par un stabilisateur composé de  $J$  bras en rotation indicés  $j$ .



$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^J \mathbf{w}_{j/p} = & - \left[ \begin{array}{cc} \sum_{j=1}^J m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & - \sum_{j=1}^J (m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)) \\ \sum_{j=1}^J (m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)) & \sum_{j=1}^J \mathbf{I}_j - \sum_{j=1}^J (m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)) \end{array} \right] \begin{pmatrix} {}^0 \ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} \\
& + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_p^\times \sum_{j=1}^J (m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)) \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{pmatrix} {}^0 \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} \\
& + \left( \begin{array}{c} \sum_{j=1}^J m_j \mathbf{g} \\ \sum_{j=1}^J (m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)) \mathbf{g} \end{array} \right) + \underbrace{\sum_{j=1}^J \begin{bmatrix} m_j \boldsymbol{\lambda}_j^\times \\ -\mathbf{I}_j + m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \\
& + \underbrace{\sum_{j=1}^J \begin{bmatrix} m_j (\boldsymbol{\omega}_j^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times) \boldsymbol{\lambda}_j^\times \\ -\boldsymbol{\omega}_p^\times \mathbf{I}_j - \mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_p^\times + (\mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_p)^\times - \boldsymbol{\omega}_j^\times \mathbf{I}_j + (m_j (\boldsymbol{\lambda}_j^\times + \mathbf{r}_j^\times) (\boldsymbol{\omega}_j^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times) \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_2} \boldsymbol{\omega}_j
\end{aligned}$$

On note  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  les deux vecteurs de dimension  $n$  donnant respectivement les composantes actives, dues à l'accélération et à la vitesse en rotation des bras, du torseur d'effort transmis par le stabilisateur. Les vecteurs donnant les contributions dues à l'accélération et à la vitesse en rotation d'un bras indicé  $j$  sont notées  $\mathbf{w}_{1j}$  et  $\mathbf{w}_{2j}$ , voir équation (3.45).

L'écriture du bilan des efforts d'un système muni d'un stabilisateur donnée (3.59), peut être réécrite dans le cas d'un stabilisateur composé de  $J$  bras en rotation :

$$\mathbf{M}_T \begin{pmatrix} {}^0 \ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} + \mathbf{C}_T \begin{pmatrix} {}^0 \dot{\mathbf{p}} \\ {}^0 \boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} + \mathbf{w}_G - \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = -\mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} \quad (3.66)$$

avec  $\mathbf{M}_T$  la matrice d'inertie du système,  $\mathbf{C}_T$  la matrice de Coriolis,  $\mathbf{w}_G$  le poids du système (plate-forme et stabilisateur) et  $\mathbf{J}$  la matrice Jacobienne du RPC. On note  $\mathbf{w}_1 = \sum \mathbf{w}_{1j}$  et  $\mathbf{w}_2 = \sum \mathbf{w}_{2j}$ . Soient  $n$  le nombre de DDL de la plate-forme,  $N$  le nombre de câbles du RPC et  $J$  le nombre de bras du stabilisateur,  $\mathbf{M}_T$  et  $\mathbf{C}_T$  sont deux matrices carrées de dimension  $n \times n$ ,  $\mathbf{w}_G$  est un vecteur de dimension  $n$ ,  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  sont deux vecteurs de dimension  $n$ ,  $\mathbf{J}$  est une matrice  $N \times n$  et  $\boldsymbol{\tau}$  un vecteur de dimension  $N$ .

### 3.4.4 Conclusion

La modélisation présentée dans cette partie est générique pour un **RPC** muni d'un stabilisateur embarqué, quels que soient le nombre de câbles, la nature ou le nombre des dispositifs actionnés utilisés pour la stabilisation active. Les équations issues de cette modélisation ont ensuite servi au choix d'un dispositif adapté à une utilisation pour un **RPC** soumis à des petites vibrations selon tous ses **DDL**. Ce sont des pendules actionnés à 1 **DDL** qui ont été choisis pour l'actionnement embarqué du stabilisateur. Une fois ce choix réalisé et la modélisation paramétrique du stabilisateur obtenue, l'étape suivante est de trouver la topologie qui lui permet de maximiser l'effet des composantes actives de son torseur d'effort sur la plate-forme. La mise en équations du **RPC** est également une étape nécessaire à la mise en place de la commande qui s'applique au **RPC** et au stabilisateur. Dans la suite de cette thèse, des exemples d'implémentation d'amortissement actif de vibrations sont proposés pour deux robots, l'un plan et l'autre à 6 **DDL**, développés pour dans le cadre du projet DexterWide.





## CHAPITRE

## 4

# Optimisation du placement des actionneurs

## Préambule

*Les bras du stabilisateurs ayant pour but de compenser les vibrations par leur mouvement, il s'agit de déterminer leur nombre, leurs masses, leurs longueurs et où placer les bras pour obtenir la compensation la plus efficace possible. Pour ce travail, le nombre, la masse et la longueur des bras sont fixés à priori, il reste à déterminer l'emplacement des bras et leur orientation initiale par une procédure d'optimisation.*

*Les principales étapes d'une procédure d'optimisation sont les suivantes :*

1. choisir les variables d'optimisation
2. définir l'intervalle des valeurs prises par les variables
3. formuler les contraintes
4. construire la fonction de coût
5. choisir un algorithme d'optimisation

*Ce chapitre commence par une étape de simplification des équations obtenues précédemment puis décrit le processus d'optimisation du placement des bras en détaillant ces étapes et ensuite présente les résultats.*

## Sommaire

4.1	Simplification du modèle dynamique autour de son point de fonctionnement . . . . .	71
4.2	Simplification du torseur d'efforts $w_{j/p}$ . . . . .	72
4.3	Définitions des variables du problème . . . . .	76
4.4	Contraintes . . . . .	77
4.5	Fonction de coût . . . . .	87
4.6	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	88
4.7	Résultats d'optimisation . . . . .	89

## 4.1 Simplification du modèle dynamique autour de son point de fonctionnement

La pose  $\mathbf{x}$  de la plate-forme du RPC est définie par  $\mathbf{x} = [\mathbf{p}^\top \ \boldsymbol{\theta}_p^\top]^\top$ , avec  $\mathbf{p}$  le vecteur donnant la position de la plate-forme et  $\boldsymbol{\theta}_p$  le vecteur des angles d'Euler (voir Annexe A) donnant son orientation dans le repère  $\mathcal{R}_0$ . Dans le cas de petites oscillations autour d'une position d'équilibre statique de la plate-forme, la pose de la plate-forme se décompose en deux sous parties :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \Delta\mathbf{x}$ , où  $\mathbf{x}_s$  est la partie correspondant à la pose en équilibre statique et  $\Delta\mathbf{x}$  le petit déplacement dû aux vibrations. Par hypothèse,  $\Delta\mathbf{x}$  est petit. La dérivée et la dérivée seconde de  $\Delta\mathbf{x}$  sont notées respectivement :

$$\begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x} \\ \Delta\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2}{dt^2}\Delta\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.1)$$

Autour d'un équilibre statique, la vitesse et l'accélération de la plate-forme sont causées uniquement par les vibrations, on peut donc écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} [\dot{\mathbf{p}}^\top \ \boldsymbol{\omega}_p^\top]^\top = \tilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{x}} \simeq \tilde{\mathbf{S}}\Delta\dot{\mathbf{x}} \\ [\ddot{\mathbf{p}}^\top \ \dot{\boldsymbol{\omega}}_p^\top]^\top = \tilde{\mathbf{S}}\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\tilde{\mathbf{S}}}\dot{\mathbf{x}} \simeq \tilde{\mathbf{S}}\Delta\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\tilde{\mathbf{S}}}\Delta\dot{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (4.2)$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta})$  abrégée en  $\tilde{\mathbf{S}}$  est donnée en annexe A.

La formulation de la matrice de masse  $\mathbf{M}_T$  à un instant donné dépend de la pose de la plate-forme, on peut donc la noter  $\mathbf{M}_T(\mathbf{x})$ .  $\mathbf{M}_T(\mathbf{x})$  peut être approchée par un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$\mathbf{M}_T(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_T(\mathbf{x}_s) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{M}_T(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \quad (4.3)$$

Comme par hypothèse  $\Delta\mathbf{x}$  est petit, les variations de la matrice  $\mathbf{M}$  peuvent être négligées pour un petit déplacement de la plate-forme. On a alors :

$$\mathbf{M}_T(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{M}_T(\mathbf{x}_s)$$

Ce raisonnement peut être répété pour le vecteur du poids  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  et la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ , qui toutes dépendent de la pose  $\mathbf{x}$  de la plate-forme à un instant donné. La matrice de Coriolis  $\mathbf{C}_T$  est fonction de la pose de la plate-forme et de sa vitesse à un instant donné, on a donc  $\mathbf{C}_T(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{x}}) \simeq \mathbf{C}_T(\mathbf{x}_s, \tilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{x}}_s)$ .

Soient les matrices  $\tilde{\mathbf{M}}_T(\mathbf{x}_s)$  et  $\tilde{\mathbf{C}}_T(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{x}})$  telles que :

- $\widetilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{M}_{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_s)\widetilde{\mathbf{S}}$
- $\widetilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}_{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{x}})\widetilde{\mathbf{S}} + \dot{\widetilde{\mathbf{S}}}$

Finalement, d'après l'équation (3.59), l'équation régissant le mouvement d'une plate-forme de RPC en petits déplacements s'écrit :

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_s)\Delta\ddot{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_s, \Delta\dot{\mathbf{x}})\Delta\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{w}_G - \sum_{j=1}^J (\mathbf{w}_{1j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_j, \dot{\boldsymbol{\theta}}_j) - \mathbf{w}_{2j}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}_j, \dot{\boldsymbol{\theta}}_j)) = -\mathbf{J}^{\top}\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_s) \quad (4.4)$$

avec  $\mathbf{w}_{1j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_j, \dot{\boldsymbol{\theta}}_j)$  et  $\mathbf{w}_{2j}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}_j, \dot{\boldsymbol{\theta}}_j)$  les composantes actives du torseur d'effort du bras  $j$  du stabilisateur sur la plate-forme, et le torseur d'effort des câbles sur la plate-forme  $\mathbf{w}_c$  donné par sa valeur  $-\mathbf{J}^{\top}\boldsymbol{\tau}$ .

## 4.2 Simplification du torseur d'efforts $\mathbf{w}_{j/p}$

Le principe de fonctionnement du stabilisateur est de compenser les efforts qui provoquent des vibrations de la plate-forme en produisant un torseur d'effort en son CDG par des rotations combinées de ses bras. En rappel de l'équation (3.45), l'expression du torseur d'effort fourni par un stabilisateur à  $J$  bras s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{j/p} = & \overbrace{\begin{bmatrix} m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_j(\mathbf{r}_j^{\times} + \boldsymbol{\lambda}_j^{\times}) \\ m_j(\mathbf{r}_j^{\times} + \boldsymbol{\lambda}_j^{\times}) & \underline{\mathbf{I}}_j - m_j(\mathbf{r}_j^{\times} + \boldsymbol{\lambda}_j^{\times})(\mathbf{r}_j^{\times} + \boldsymbol{\lambda}_j^{\times}) \end{bmatrix}}^{\text{Contribution de l'accélération de la plate-forme}} \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} \\ & \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -m_j \boldsymbol{\omega}_p^{\times}(\mathbf{r}_j^{\times} + \boldsymbol{\lambda}_j^{\times}) \\ \mathbf{0} & -m_j(\mathbf{r}_j^{\times} + \boldsymbol{\lambda}_j^{\times})\boldsymbol{\omega}_p^{\times}(\mathbf{r}_j^{\times} + \boldsymbol{\lambda}_j^{\times}) + \boldsymbol{\omega}_p^{\times}\underline{\mathbf{I}}_j \end{bmatrix}}_{\text{Contribution de la gravité}} \begin{pmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_j \mathbf{g} \\ m_j(\mathbf{r}_j^{\times} + \boldsymbol{\lambda}_j^{\times})\mathbf{g} \end{pmatrix} \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} m_j \boldsymbol{\lambda}_j^{\times} \\ -\underline{\mathbf{I}}_j + m_j(\mathbf{r}_j^{\times} + \boldsymbol{\lambda}_j^{\times})\boldsymbol{\lambda}_j^{\times} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{1j}} {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \\ & \dots \end{aligned}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} m_j(\boldsymbol{\omega}_j^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times)\boldsymbol{\lambda}_j^\times \\ -\boldsymbol{\omega}_p^\times \underline{\mathbf{I}}_j - \underline{\mathbf{I}}_j \boldsymbol{\omega}_p^\times + (\underline{\mathbf{I}}_j \boldsymbol{\omega}_p)^\times - \boldsymbol{\omega}_j^\times \underline{\mathbf{I}}_j + m_j(\boldsymbol{\lambda}_j^\times + \boldsymbol{r}_j^\times)(\boldsymbol{\omega}_j^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times)\boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{w}_{2j}} \boldsymbol{\omega}_j \quad (4.5)$$

Dans le cas considéré de petites oscillations autour d'une pose en équilibre statique, on a  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{\Delta x}$ , où  $\boldsymbol{x}_s$  correspond à l'équilibre statique et  $\boldsymbol{\Delta x}$  au déplacement dû aux vibrations. Par hypothèse  $\boldsymbol{\Delta x}$  est petit.

Avec les matrices  $\mathbf{M}_j$  et  $\mathbf{C}_j$ , données au chapitre 3, respectivement dans les équations (5.3) et (3.50), on définit les deux matrices suivantes :

$$\widetilde{\mathbf{M}}_j = \begin{bmatrix} m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \\ m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\mathbf{I}}_j - m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \end{bmatrix} \quad \widetilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\mathbf{S} \\ m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\mathbf{I}}_j \mathbf{S} - m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)\mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -m_j(\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)^\times(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \\ \mathbf{0} & -m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)(\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)^\times(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) + (\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)^\times \underline{\mathbf{I}}_j \end{bmatrix} \widetilde{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_T \dot{\widetilde{\mathbf{S}}} \quad (4.7)$$

Le torseur d'efforts exercé par le stabilisateur sur le CDG de la plate-forme dans le cas de petites vibrations s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \boldsymbol{w}_{j/p} = & - \sum_{j=1}^J \widetilde{\mathbf{M}}_j \boldsymbol{\Delta \ddot{x}} - \sum_{j=1}^J \widetilde{\mathbf{C}}_j \boldsymbol{\Delta \dot{x}} + \left( \begin{array}{c} \sum_{j=1}^J m_j \boldsymbol{g} \\ \sum_{j=1}^J (m_j(\boldsymbol{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)) \boldsymbol{g} \end{array} \right) + \boldsymbol{w}_1 \\ & + \begin{bmatrix} m_j(\boldsymbol{\omega}_j^\times + 2(\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)^\times)\boldsymbol{\lambda}_j^\times \\ -(\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)^\times \underline{\mathbf{I}}_j - \underline{\mathbf{I}}_j (\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)^\times + (\underline{\mathbf{I}}_j \mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)^\times - \boldsymbol{\omega}_j^\times \underline{\mathbf{I}}_j + m_j(\boldsymbol{\lambda}_j^\times + \boldsymbol{r}_j^\times)(\boldsymbol{\omega}_j^\times + 2(\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)^\times)\boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

La masselotte fixée au bout du bras est considérée comme ponctuelle pour la modélisation, cependant cette simplification étant physiquement impossible, on considèrera qu'il s'agit d'un solide de petites dimensions. Une boule est l'objet dont les propriétés inertielles se rapprochent le plus d'un point, la masselotte sera donc représentée par une boule pleine de petit diamètre. Le tenseur d'inertie d'une boule s'écrit  $\underline{\mathbf{I}}_j = \frac{2m_j\rho^2}{5}\mathbf{I}_{3 \times 3}$ , avec  $m_j$  la masse



de la boule et  $\rho$  son rayon. Comme le rayon  $\rho$  de la boule est petit, le tenseur d'inertie  $\underline{\mathbf{I}}_j$  de la masselotte au bout du bras  $j$  est petit.  $\underline{\mathbf{I}}_j$  est petit donc  $(\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)^\times \underline{\mathbf{I}}_j (\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p) \simeq \mathbf{0}$

Des mesures expérimentales permettent de déterminer les vitesses de vibration de la plate-forme, voir Annexe C. On note respectivement  $\underline{\Delta\dot{\mathbf{x}}}$  et  $\overline{\Delta\dot{\mathbf{x}}}$  les bornes de l'intervalle contenant les vitesses de vibration. En considérant ces faibles vitesses de vibrations, la supposition suivante peut être faite :  $(\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)^\times \sum_{j=1}^J (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) (\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\theta}}_p) \simeq \mathbf{0}$ . En outre, comme les vitesses de vibrations sont considérés comme petites, on suppose  $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{0}_{6 \times 6}$ .

De plus, le but du stabilisateur étant de parcourir des distances plutôt courtes en fournissant une accélération élevée, une loi de commande favorisant les fortes accélérations sera choisie pour contrôler le stabilisateur. Par construction de la commande, les vitesses de rotation des actionneurs du stabilisateur  $\boldsymbol{\omega}_j$  sont faibles par rapport aux accélérations angulaires  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_j$ . Donc :

$$\sum_{j=1}^J \boldsymbol{w}_{j/p} \simeq - \left[ \begin{array}{cc} \sum_{j=1}^J m_j \mathbf{I}_{3 \times 3} & - \sum_{j=1}^J m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \mathbf{S} \\ \sum_{j=1}^J m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \sum_{j=1}^J (\underline{\mathbf{I}}_j \mathbf{S} + (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)) \end{array} \right] \Delta\ddot{\mathbf{x}} + \underbrace{\left( \begin{array}{c} \sum_{j=1}^J m_j \mathbf{g} \\ \sum_{j=1}^J (m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times)) \mathbf{g} \end{array} \right)}_{\boldsymbol{w}_G} + \boldsymbol{w}_1 \quad (4.9)$$

Pour déterminer l'influence des différents termes composant le torseur  $\sum_{j=1}^J \boldsymbol{w}_{j/p}$ , une simulation de robot suspendu à 3 câbles muni de 3 bras est réalisée dans le logiciel de calcul MATLAB® en utilisant la boîte à outils de programmation graphique *Simulink*® et le moteur de simulation physique *Simscape Multibody*™.

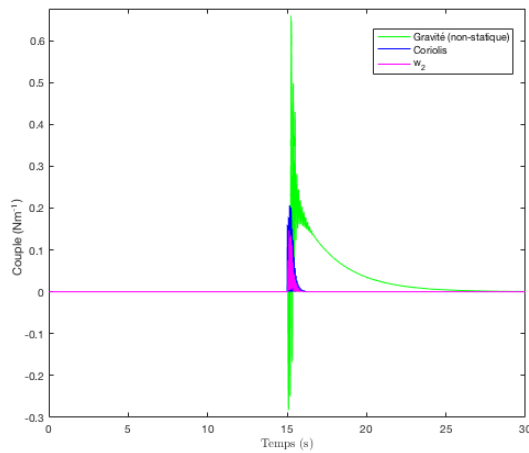
Les paramètres de la simulation sont donnés dans le tableau 4.1. Ce système dont la consigne est de demeurer statique est perturbé à 15 s par un effort vertical de 30 N, ce qui met en fonctionnement le stabilisateur.

Les valeurs des différentes composantes du torseur d'efforts produit par le stabilisateur sur la plate-forme dans ce cas est donné Figure 4.1. On constate que les composantes reflétant l'effet de Coriolis et celles du torseur  $\boldsymbol{w}_2$  sont petites par rapport aux autres.

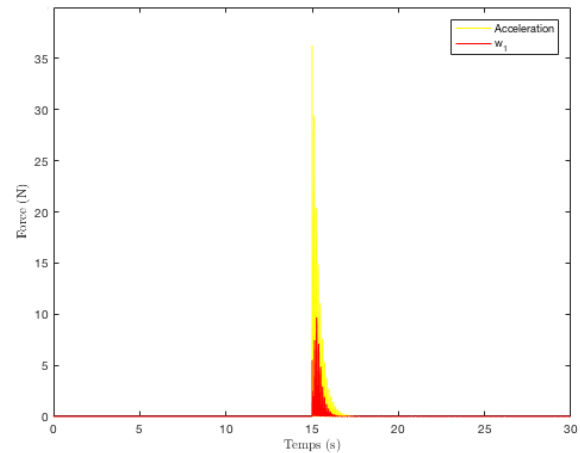
Enfin, l'équation (3.59) du chapitre précédent peut être simplifiée en (4.10) en suppo-

Tableau 4.1: Valeurs des paramètres du RPC suspendu plan à 3 DDL avec un stabilisateur 3 bras embarqué

Paramètre	Notation	Valeur
Position des points d'attache des câbles au bâti	$\mathcal{R}_0 \mathbf{A}$	$\begin{bmatrix} 0\text{m} & 0,24\text{m} & -2\text{m} \\ 0\text{m} & 0\text{m} & 0\text{m} \end{bmatrix}$
Position des points d'attache des câbles à la plate-forme	$\mathcal{R}_p \mathbf{B}$	$\begin{bmatrix} -0,12\text{m} & 0,12\text{m} & 0\text{m} \\ 0,15\text{m} & 0,15\text{m} & 0,15\text{m} \end{bmatrix}$
Raideur des câbles	$k_c$	$500\text{Nm}^{-1}$
Pose initiale du CDG de la plate-forme	$\mathbf{x}_0$	$\begin{bmatrix} -0,94\text{m} & -1\text{m} & 0\text{rad} \end{bmatrix}^T$
Position des points d'attache des bras du stabilisateur	$\mathcal{R}_p \mathbf{r}_j$	$\begin{bmatrix} 0,12\text{m} & -0,12\text{m} & 0\text{m} \\ 0\text{m} & 0\text{m} & -0,15\text{m} \end{bmatrix}$
Orientation initiale du stabilisateur	$\boldsymbol{\theta}_0$	$\begin{bmatrix} 0\text{rad} & \pi\text{rad} & \frac{-\pi}{2}\text{rad} \end{bmatrix}^T$
Masse de la plate-forme	$m_p$	$3,2\text{kg}$
Longueur des bras	$\lambda_j$	$0,1\text{m}$
Masse des bras	$m_j$	$0,15\text{kg}$



(a) Valeur des couples



(b) Valeur des forces

Figure 4.1: Valeur maximale des torseurs par effet

sant que  $\Delta \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{w}_2$  et les effets de Coriolis peuvent être négligés autour d'un équilibre statique.

$$\begin{bmatrix} (m_p + \sum_{j=1}^J m_j) \mathbf{I}_{3 \times 3} & - \sum_{j=1}^J m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \mathbf{S} \\ \sum_{j=1}^J m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) & \underline{\mathbf{I}}_p \mathbf{S} + \sum_{j=1}^J \underline{\mathbf{I}}_j \mathbf{S} + \sum_{j=1}^J (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \end{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{w}_G - \mathbf{w}_1 = -\mathbf{J}^\top \boldsymbol{\tau} \quad (4.10)$$

### 4.3 Définitions des variables du problème

La détermination de la topologie du stabilisateur qui permet d'obtenir la compensation des vibrations de la plate-forme la plus efficace possible constitue un problème d'optimisation.

Pour ce problème, les variables d'optimisation sont les positions des points d'attache des bras, notées  $\mathbf{r}_j = [r_{j_x} \ r_{j_y} \ r_{j_z}]^\top$  et leur orientations initiales, notées  $\boldsymbol{\theta}_{j_0} = [\alpha_{j_0} \ \beta_{j_0} \ \gamma_{j_0}]^\top$  pour le bras  $j$ . Les positions des points d'attache des bras correspondent aux positions des points de sortie des moteurs actionnant les bras, lesdits moteurs étant solidaires de la plate-forme. L'orientation initiale de chaque bras notée  $\boldsymbol{\theta}_{j_0}$  est exprimée par rapport à la la plate-forme, elle décrit l'orientation du repère  $\mathcal{R}_j$  dans le repère  $\mathcal{R}_p$ .

Les valeurs de longueur des bras  $\lambda_j$  et de leur masse  $m_j$  sont définies a priori, ces paramètres ne sont pas optimisés. De même, le nombre de bras  $J$  n'est pas optimisé dans la suite de ce travail.

Chacun des bras du stabilisateur est défini par la position de son point d'attache à la plate-forme  $\mathbf{r}_j$  et par  $\boldsymbol{\theta}_{j_0}$ , son orientation initiale dans  $\mathcal{R}_p$ . Chaque bras est ainsi défini par deux vecteurs à 3 composantes, soit 6 scalaires. Donc, la variable d'optimisation du problème d'optimisation de la topologie du stabilisateur est un vecteur à  $6J$  composantes,  $J$  étant le nombre de bras.

Finalement, la variable d'optimisation du problème est notée  $\boldsymbol{\xi}$ , telle que :  $\boldsymbol{\xi} = \{\mathbf{r}_j, \boldsymbol{\theta}_{j_0}\}$ ,  $j \in [1 \dots J]$ .

Les valeurs des paramètres dimensionnels du stabilisateur sont définies dans un intervalle compatible avec sa réalisation technique. L'expression de ces intervalles pour chacun des paramètres permet de borner le torseur d'effort. En outre, l'encadrement de la variable d'optimisation dans un certain intervalle permet de réduire la taille de l'espace de recherche, et donc le temps de convergence de l'algorithme.

En premier lieu, les bras sont fixés sur la plate-forme, donc les composantes du vecteur  $\mathbf{r}_j$  sont comprises dans le pavé formé par la plate-forme du robot. Les coordonnées de ce

vecteur,  $r_{j_x}$ ,  $r_{j_y}$  et  $r_{j_z}$ , sont exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_p$  attaché à la plate-forme. De plus, les points d'attache des bras devant se trouver sur une face de la plate-forme, au moins une de ces coordonnées a pour valeur le minimum ou le maximum de son intervalle.

Les paramètres de la position du point de sortie des actionneurs  $\mathbf{r}_j$  ont également un impact sur la limite de l'orientation initiale des bras : puisqu'il faut éviter les collisions avec la plate-forme, l'angle initial doit être tel que les positions angulaires maximale  $\theta_M$  et minimale  $-\theta_M$  ne provoquent pas de collision entre le bras et la plate-forme.  $\theta_M$  est défini comme l'angle maximal entre le bras et la plate-forme dans le repère  $\mathcal{R}_p$ . Pour qu'un bras, dont le point de sortie n'est pas situé sur une arête de la plate-forme, n'entre pas en collision avec celle-ci,  $\theta_M$  est donc limité à  $\frac{\pi}{2}$  rad.

La course des bras, en rotation dans le repère  $\mathcal{R}_j$ , est fixée à  $\pm \frac{\pi}{4}$  rad. Il faudra alors vérifier que les angles obtenus en sommant cette course avec  $\theta_{j_0}$  demeurent dans l'intervalle  $[-\theta_M \ \theta_M]$ .

Pour en rendre compte, on note  $\mathcal{X}$  l'intervalle comprenant la variable  $\xi$ .

## 4.4 Contraintes

Les contraintes représentent des relations entre les variables d'optimisation et d'autres paramètres qui visent à représenter des phénomènes physiques ou des limitations du système. Dans la plupart des cas, ces contraintes peuvent s'exprimer sous la forme d'égalités ou d'inégalités.

Une solution envisageable pour le placement des bras est de les orienter vers l'intérieur de la plate-forme, afin d'assurer l'évitement de collisions avec les câbles. Cette solution n'a pas été retenue car, en pratique, l'espace à l'intérieur de la plate-forme est occupé par la motorisation du stabilisateur, la centrale inertielle de la plate-forme et, sur *CoGiRo*, par le contrôleur du robot sériel.

Dans le cas présent, ces contraintes sont l'assurance que l'action du stabilisateur ne peut faire sortir la plate-forme du *RPC* de son espace des torseurs faisables et l'évitement des collisions entre les bras du stabilisateur et leur environnement. Afin de déterminer l'éventualité de collisions entre les bras et les câbles, il faut en premier lieu déterminer l'espace occupé par les câbles.

Puisque les bras composant le stabilisateur sont attachés à la plate-forme, la variable d'optimisation  $\xi$  est donnée dans le repère attaché à la plate-forme. L'espace occupé par un bras vu depuis la plate-forme a une expression simple, ce qui rend simple l'évaluation de la collision dans le repère de la plate-forme. Reste alors à obtenir une définition de la région occupée par le câble dans le repère attaché à celle-ci, cette région est nommée espace de travail du câble.

#### 4.4.1 Définition de l'espace de travail d'un câble

Au cours des déplacements de la plate-forme mobile, la position de chacun des câbles change. L'ensemble des positions prises par un câble pour toutes les poses de la plate-forme dans son espace de travail est nommée ci-après l'espace de travail du câble (ETC). Dans cette section, on cherche à modéliser l'espace de travail d'un câble avant de généraliser pour les  $N$  câbles de robot.

Pour s'assurer d'éviter les collisions entre un câble et la plate-forme ou un objet placé sur celle-ci, il suffit qu'il n'y ait pas intersection entre l'espace occupé par cet objet et l'espace de travail des câbles.

Les câbles sont approximés par des segments de droite entre les points de sortie  $A_i$  et les points d'attache à la plate-forme  $B_i$ . Le vecteur directeur du câble  $i$ ,  $\mathbf{u}_i$  a pour valeur :

$${}^0\mathbf{u}_i = {}^0\mathbf{p} + \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_p)^p\mathbf{b}_i - {}^0\mathbf{a}_i \quad (4.11)$$

où  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_p)$  est la rotation de la plate-forme dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .

L'espace de travail prescrit  $\mathcal{W}$  pour un RPC à 6 DDL est défini comme suit :

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{x} = [{}^0\mathbf{p}^\top \quad \boldsymbol{\theta}_p^\top]^\top \mid \{ {}^0\mathbf{p} \in [\underline{x} \quad \bar{x}] \times [\underline{y} \quad \bar{y}] \times [\underline{z} \quad \bar{z}] \} \right. \\ \left. \parallel \{ \boldsymbol{\theta}_p \in [\underline{\alpha}_p \quad \bar{\alpha}_p] \times [\underline{\beta}_p \quad \bar{\beta}_p] \times [\underline{\gamma}_p \quad \bar{\gamma}_p] \} \right\} \quad (4.12)$$

Pour une orientation  $\boldsymbol{\theta}_p$  donnée, l'ensemble des positions à l'intérieur de  $\mathcal{W}$  forme un polyèdre. L'espace de travail prescrit est considéré comme inclus dans l'espace des torseurs générables (voir chapitre 2), donc toutes les poses de  $\mathcal{W}$  peuvent être atteintes par un ensemble de tensions de câbles faisable [Bosscher *et al.*, 2006; Gouttefarde *et al.*, 2011].

L'ETC du câble  $i$  dans  $\mathcal{R}_0$  est défini par :  ${}^0\text{ETC}_i = \{ {}^0\mathbf{u}_i \mid \mathbf{x} \in \mathcal{W} \}$ . Le vecteur  ${}^0\mathbf{u}_i$  est défini dans (4.11). D'après cette formulation et l'équation (4.12),  ${}^0\text{ETC}_i$  peut être exprimé comme la somme de Minkowski [De Berg *et al.*, 1997] de trois ensembles, ces ensembles étant :

- le parallélépipède contenant toutes les positions du vecteur  $\mathbf{p} : [\underline{x} \quad \bar{x}] \times [\underline{y} \quad \bar{y}] \times [\underline{z} \quad \bar{z}]$
- la portion de sphère décrite par les rotations  $\boldsymbol{\theta}_p : \{ \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_p)^p\mathbf{b}_i \mid \boldsymbol{\theta}_p \in [\underline{\alpha}_p \quad \bar{\alpha}_p] \times [\underline{\beta}_p \quad \bar{\beta}_p] \times [\underline{\gamma}_p \quad \bar{\gamma}_p] \}$
- le point  $A_i$ , dont les coordonnées sont exprimées dans  $\mathcal{R}_0$  par le vecteur  ${}^0\mathbf{a}_i$

Du point de vue d'un observateur situé sur la plate-forme, le point  $B_i$  étant fixé à la plate-forme, son vecteur position  ${}^p\mathbf{b}_i$  est constant pour tout  $i$ . De même, le vecteur  ${}^0\mathbf{a}_i$

est constant car  $A_i$  est fixe dans le repère  $\mathcal{R}_0$ . Donc, lorsque l'ensemble d'angles d'Euler  $[\underline{\alpha}_p \ \overline{\alpha}_p] \times [\underline{\beta}_p \ \overline{\beta}_p] \times [\underline{\gamma}_p \ \overline{\gamma}_p]$  n'est pas réduit à un point, l'ETC est un objet géométrique complexe, pas nécessairement convexe, y compris pour la définition simple de l'espace de travail  $\mathcal{W}$  donnée à l'équation (4.12).

Le seul travail s'intéressant à l'espace occupé par les câbles d'un RPC a été réalisé dans [Pott, 2018]. Dans cet article, le volume choisi pour représenter le sous-espace contenant tous les segments  $A_i B_i$ , pour une orientation  $\boldsymbol{\theta}_p$  donnée de la plate-forme, est un cône généralisé. La forme de la section de ce cône généralisé est un polygone, qui n'est pas nécessairement convexe. Ce polygone est obtenu en triant les segments  $A_i B_i$  obtenus par la discrétisation de l'espace de travail  $\mathcal{W}$  selon l'algorithme de *polar sorting*.

Représenter l'espace occupé par les câbles comme un volume permet de déterminer l'éventualité de collision entre le câble et un objet fixe dans le repère de la plate-forme : si un point appartenant à un objet appartient au volume, alors une collision entre le câble et l'objet est possible. Pour le câble  $i$ , l'ETC exprimé dans le repère attaché à la plate-forme  $\mathcal{R}_p$  est défini comme  ${}^p\text{ETC}_i = \{-{}^p\mathbf{u}_i \mid \mathbf{x} \in \mathcal{W}\}$ , avec :

$$-{}^p\mathbf{u}_i = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_p)^\top ({}^0\mathbf{a}_i - {}^0\mathbf{p}) - {}^p\mathbf{b}_i \quad (4.13)$$

L'équation (4.13) est obtenu en multipliant les deux parties de l'équation (4.11) par la matrice de rotation  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_p)^\top$ . L'expression  ${}^p\text{ETC}_i$  de l'ETC dans  $\mathcal{R}_p$  correspond donc à une translation de l'ensemble  $\{\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_p)^\top ({}^0\mathbf{a}_i - {}^0\mathbf{p}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{W}\}$  par le vecteur  ${}^p\mathbf{b}_i$ . Cet ensemble correspond au volume occupé par le pavé  $\{{}^0\mathbf{a}_i - {}^0\mathbf{p} \mid {}^0\mathbf{p} \in [\underline{x} \ \overline{x}] \times [\underline{y} \ \overline{y}] \times [\underline{z} \ \overline{z}]\}$  quand il subit la rotation  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_p)$  pour tout  $\boldsymbol{\theta}_p$  dans  $[\underline{\alpha}_p \ \overline{\alpha}_p] \times [\underline{\beta}_p \ \overline{\beta}_p] \times [\underline{\gamma}_p \ \overline{\gamma}_p]$ . Pour le câble  $i$ , l'ETC  ${}^p\text{ETC}_i$  exprimé dans  $\mathcal{R}_p$ , de manière similaire à  ${}^0\text{ETC}_i$  calculé dans  $\mathcal{R}_0$ , est un objet géométrique tridimensionnel complexe et qui n'est pas nécessairement convexe.

Dans [Pott, 2018], l'ETC obtenu par discrétisation, exprimé dans  $\mathcal{R}_0$ , apparaît comme un cône généralisé (ou cône polyédrique). La même méthode peut être appliquée pour obtenir  ${}^p\text{ETC}_i$ . Le cône généralisé n'est pas nécessairement un polyèdre convexe et sa base peut être définie par un grand nombre de sommets, selon la discrétisation de l'espace de travail  $\mathcal{W}$  sélectionnée.

Par exemple, le test pour déterminer l'appartenance d'un point quelconque Q au cône généralisé est le suivant. Le cône considéré dans l'exemple a une expression plus simple qu'un cône généralisé quelconque puisqu'il est convexe. Les étapes pour déterminer si le point Q est à l'intérieur du cône sont données par un algorithme proposé ci-après. L'algorithme proposé, illustré Figure 4.2, réalise les opérations suivantes :

1. obtenir  $Q'$  le projeté de Q sur l'axe du cône, ce qui définit le rapport  $k$  entre la distance du sommet du cône à  $Q'$  et la longueur de l'axe

2. appliquer le facteur  $k$  aux distances entre les points du polygone à la base du cône et le centre de ce polygone. Le nouveau polygone ainsi obtenu est nommé  $P'$ , il s'agit de la section du cône au point  $Q'$
3. tester l'appartenance de  $Q$  à ce polygone, en utilisant une des méthodes classiques [O'Rourke, 1998] (*ray casting*, somme des angles, etc.)

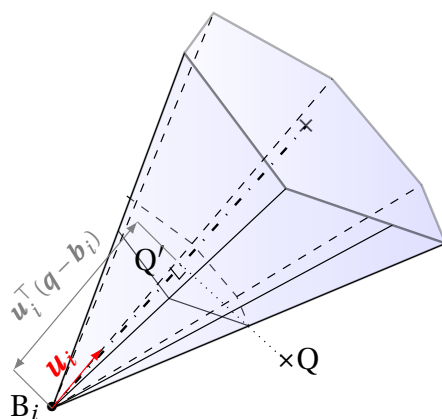


Figure 4.2: Cône généralisé contenant toutes les positions de câbles

La complexité algorithmique de ce test d'appartenance est  $\mathcal{O}(n)$ , avec  $n$  étant le nombre de sommets du polygone à la base du cône. L'approximation de l'ETC par un cône généralisé peut ne pas être convexe ou, dépendant de la discrétisation de  $\mathcal{W}$  choisie, être définie par un grand nombre de sommets. Cette méthode peut alors devenir lourde à mettre en œuvre si l'espace de travail du robot est discrétisé avec un nombre important de points, le test d'appartenance d'un point au volume peut alors s'avérer long.

Une méthode plus intéressante en temps de calcul et suffisamment précise pour représenter fidèlement l'ETC sous forme d'un volume consiste à déterminer les faces du cône polyédrique. Ces faces peuvent être obtenues pendant l'opération de *polar sorting* ou bien par le calcul d'une enveloppe convexe au cône. Dans ce cas, le point  $Q$  est à l'intérieur du cône polyédrique si, et seulement si, il se trouve du même côté de chacun des plans portant les faces du cône. Cette seconde approche est également de complexité algorithmique  $\mathcal{O}(n)$  avec  $n$  le nombre de sommets de la base du cône.

Le nombre de sommets  $n$  dépend du nombre de points utilisés pour discrétiser l'espace de travail prescrit du RPC. Donc le temps de calcul nécessaire pour déterminer si un ensemble de points donné n'interfère pas avec ce sous-espace, c'est à dire l'opération d'assurer l'absence de collision, dépend de  $n$ . En outre, ce test est à effectuer pour chacun des  $N$  câbles. Utiliser l'une des deux méthodes précédemment décrites lors d'un calcul itératif, par exemple une optimisation, est prohibitif lorsque  $n$  est grand. Il est donc nécessaire de

définir un volume englobant l'ETC qui soit plus simple tout en évitant d'être trop conservatif.

Un volume englobant l'ETC du câble  $i$   ${}^p\text{ETC}_i$  peut être obtenu à partir de la discrétisation de l'espace de travail prescrit  $\mathcal{W}$  du RPC. Dans le repère  $\mathcal{R}_p$  lié à la plate-forme mobile, le point  $B_i$  est fixe et le vecteur  ${}^p\mathbf{a}_i$  donnant la position du point  $A_i$  a pour expression  ${}^p\mathbf{a}_i = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_p)^\top ({}^0\mathbf{a}_i - {}^0\mathbf{p})$ , et dépend donc de la pose de la plate-forme mobile  $\mathbf{x} = [{}^0\mathbf{p}^\top \ \boldsymbol{\theta}_p^\top]^\top \in \mathcal{W}$ . Dans  $\mathcal{R}_p$ , la discrétisation de  $\mathcal{W}$  engendre un ensemble de positions du point  $A_i$  dont l'enveloppe convexe est un polyèdre convexe. Le pas de quantification de la discrétisation doit être assez fin pour que ce polyèdre convexe soit une bonne approximation de toutes les positions possibles de  $A_i$  dans  $\mathcal{R}_p$  quand  $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ . Comme vu précédemment, le nombre de sommets de ce polyèdre doit être faible. À cette fin, le plus petit parallélépipède englobant cette enveloppe convexe est calculé, il est noté  $\mathcal{B}$ . Les faces de la boîte englobante  $\mathcal{B}$  sont alignées avec les axes de  $\mathcal{R}_p$ , les arêtes de ce parallélépipède sont obtenues en déterminant les coordonnées maximales et minimales selon les axes de  $\mathcal{R}_p$  des arêtes de l'enveloppe convexe.

Le volume  $\mathcal{B}$  contient alors toutes les positions des points  $A_i$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ , comme illustré Figure 4.3. Le câble  $i$  étant considéré comme un segment de droite entre les points  $A_i$  et  $B_i$ , le polyèdre obtenu en connectant le point fixe  $B_i$  aux sommets de  $\mathcal{B}$  est un volume englobant  ${}^p\text{ETC}_i$ . Ce volume tel que toutes les positions de  $[A_i B_i]$  pour tout  $\mathbf{x}$  compris dans l'espace de travail discrétisé  $\mathcal{W}$  est compris dans le polyèdre. Donc ce polyèdre contient l'ETC du câble  $i$ , il est nommé  $\mathcal{E}$  dans la suite.

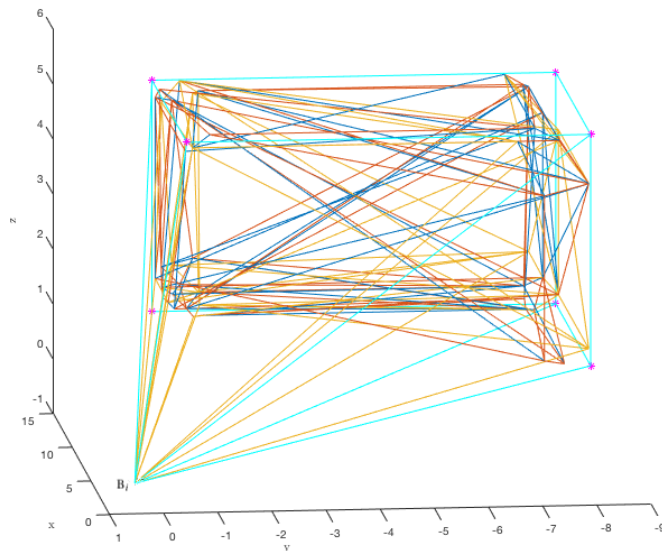


Figure 4.3: Enveloppe convexe des positions du câble  $A_i$



Un exemple de polyèdre englobant l'ETC d'un câble sur le robot *CoGiRo* est donné Figure 4.4. On peut voir sur cette figure qu'il s'agit de l'union du volume englobant  $\mathcal{B}$  et d'une pyramide de sommet  $B_i$ .

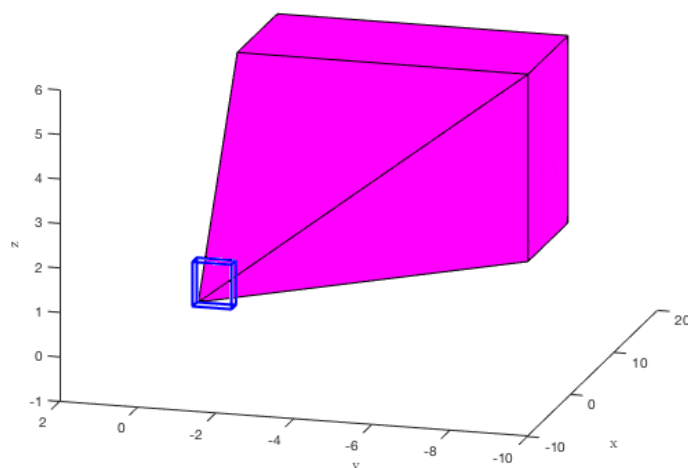


Figure 4.4: Volume englobant l'espace de travail du câble  $i$

Assurer la non-collision entre un câble et un dispositif attaché à la plate-forme revient à prouver que l'espace occupé par ce dispositif n'intersecte pas l'ETC. Pour vérifier qu'un point ou un ensemble de points n'est pas compris dans l'ETC – ce qui implique qu'il n'y a pas de collision possible avec le câble – il faut déterminer les faces du polyèdre  $\mathcal{E}$ . En effet, il peut être défini comme l'intersection de toutes les partitions de l'espace par les plans portant ses faces, ce qui se traduit mathématiquement par un ensemble d'inégalités. Alors, un point ou un ensemble n'est pas à l'intérieur du polyèdre  $\mathcal{E}$  si, et seulement s'il n'est pas inclus dans l'une de ces partitions de l'espace, c'est à dire s'il ne respecte pas une de ces inégalités.

Le polyèdre  $\mathcal{E}$  englobant l'ETC d'un câble peut être décrit comme l'union d'un parallélépipède  $\mathcal{B}$  et d'une pyramide de sommet  $B_i$ . Le nombre de faces du polyèdre  $\mathcal{E}$  dépend du nombre de faces du pavé  $\mathcal{B}$  visibles du point  $B_i$ . On distingue trois cas :

- si seulement une face de  $\mathcal{B}$  est visible depuis  $B_i$  : comme illustré Figure 4.5,  $\mathcal{E}$  a neuf faces. Quatre de ces faces forment la pyramide dont  $B_i$  est le sommet et les cinq autres sont les cinq faces de  $\mathcal{B}$  qui ne sont pas visibles depuis  $B_i$
- si deux faces de  $\mathcal{B}$  sont visibles depuis  $B_i$  : comme illustré Figure 4.6,  $\mathcal{E}$  a dix faces. Six de ces faces forment la pyramide dont  $B_i$  est le sommet et les quatre autres sont les faces de  $\mathcal{B}$  qui ne sont pas visibles depuis  $B_i$

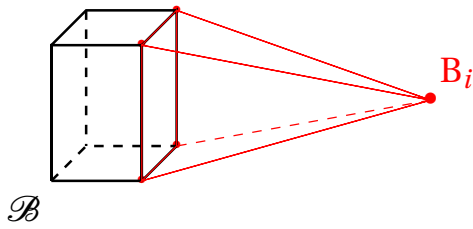


Figure 4.5: Faces du polyèdre  $\mathcal{P}$   
si seulement une face est visible depuis  $B_i$

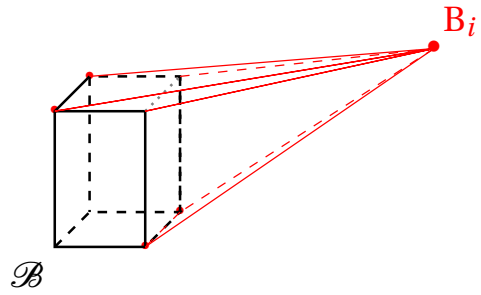


Figure 4.6: Faces du polyèdre  $\mathcal{P}$   
si deux faces sont visibles depuis  $B_i$

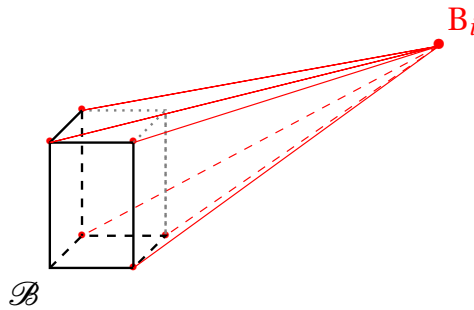


Figure 4.7: Faces du polyèdre  $\mathcal{P}$   
si trois faces sont visibles depuis  $B_i$

- si trois faces de  $\mathcal{B}$  sont visibles depuis  $B_i$  : comme illustré Figure 4.7,  $\mathcal{E}$  a neuf faces. Six de ces faces forment la pyramide dont  $B_i$  est le sommet et les trois autres sont les faces de  $\mathcal{B}$  qui ne sont pas visibles depuis  $B_i$

En plus de ces trois cas, certains cas particuliers doivent être traités : lorsque le point  $B_i$  appartient à l'un des plan portant les faces de  $\mathcal{B}$ . Ces cas particuliers ne sont pas traités dans ce travail, cette difficulté n'ayant pas été rencontrée ici.

La description mathématique des faces du polyèdre englobant  $\mathcal{E}$  est basée sur la caractérisation de ses faces. Deux éléments suffisent pour exprimer la description mathématique de la  $k^{\text{ième}}$  face du polyèdre  $\mathcal{E}$ , un point  $P_k$  de la face et le vecteur  $\mathbf{n}_k$  normal à celle-ci et dirigé vers l'extérieur de  $\mathcal{E}$ . Ces deux éléments décrivent le plan contenant la  $k^{\text{ième}}$  face de  $\mathcal{E}$ . Un point  $Q$  est hors du polyèdre si, et seulement si, pour au moins une face  $k$  de  $\mathcal{E}$ , il n'est pas du même côté de ce plan que  $\mathcal{E}$ , c'est à dire si, et seulement si il existe un  $k$  tel que  $\overrightarrow{P_k Q} \cdot \mathbf{n}_k > 0$ .

Dans le cas où la face  $k$  de  $\mathcal{E}$  est aussi une face de  $\mathcal{B}$  (un rectangle), le point  $P_k$  peut être un des sommets de ce rectangle ou alors son centre, et le vecteur  $\mathbf{n}_k$  la normale à ce rectangle pointant vers l'extérieur de  $\mathcal{B}$ . Si la face  $k$  est une face de la pyramide, cette

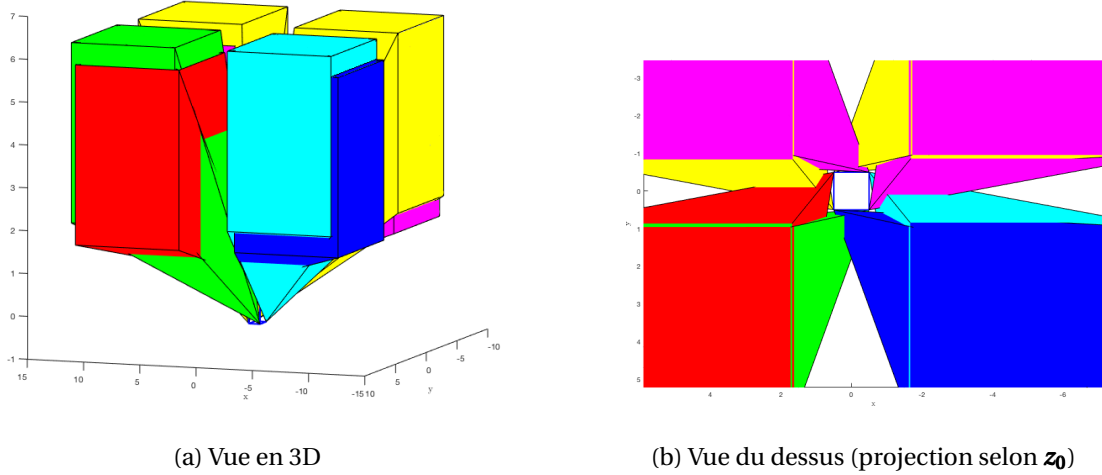


Figure 4.8: Espace de travail des câbles de CoGiRo

face est un triangle dont les trois sommets sont connus, donc le point  $P_k$  et le vecteur  $\mathbf{n}_k$  peuvent être obtenus aisément.

Par exemple sur le robot *CoGiRo*, dont les dimensions sont données au tableau 4.2, l'ensemble des espaces de travail de tous les câbles, occupe un espace important, voir Figure 4.11. En particulier, on constate sur la Figure 4.8b que cet espace englobe la plateforme. Ceci est dû notamment aux choix de l'arrangement des câbles lors de la conception de *CoGiRo* [Gouttefarde *et al.*, 2015a].

La détermination des faces de  $\mathcal{E}$  et leur description peuvent être effectuées hors-ligne, c'est à dire avant d'utiliser la définition de  $\mathcal{E}$  pour vérifier l'absence de collision entre un câble et un dispositif embarqué sur la plate-forme mobile du RPC. Cet algorithme permet donc de n'effectuer comme test pendant un processus itératif, par exemple le calcul d'optimisation, que des produits scalaires  $\overrightarrow{P_k Q} \cdot \mathbf{n}_k > 0$  qui présentent l'avantage d'être très rapides.

#### 4.4.2 Non collision des bras avec leur environnement

Pour tester la collision entre un bras et un câble  $i$ , il suffit de matérialiser le sous-espace des positions occupées par le bras et de tester l'intersection entre ce sous-espace et l'ETC. Soit  $\theta_j$  la variable de position angulaire du bras autour de son axe de rotation.

Le bras effectuant un mouvement de rotation autour d'un axe, l'espace qu'ils parcourent est une portion de disque. Cette portion de disque est incluse dans un triangle isocèle de hauteur  $\lambda$ . La longueur des côtés égaux de ce triangle vaut  $\frac{\lambda}{\cos(\frac{1}{2}(\theta-\underline{\theta}))}$ , où l'angle

au sommet de ce triangle isocèle représente le débattement du bras compris entre  $\underline{\theta}$  et  $\bar{\theta}$ . Cette simplification est illustrée Figure 4.9.

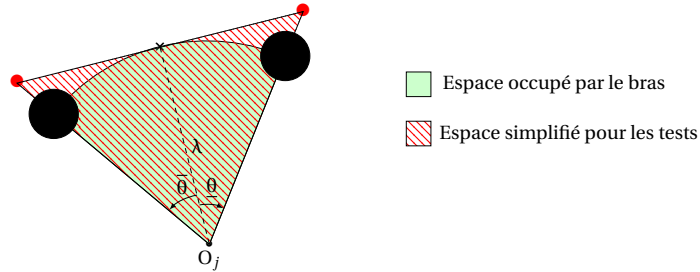


Figure 4.9: Espace occupé par le bras

Chaque ETC et le bras sont tous deux attachés à la plate-forme, ces deux points ont au moins une composante égale. Si l'espace de travail du bras intersecte l'ETC d'un câble, cela signifie que l'un au moins des points du triangle représentant le débattement du bras est inclus dans le volume de l'espace occupé par le câble.

Soient  $\mathcal{E}_i$  l'espace occupé par le câble  $i$  et  $\mathcal{S}_j$  l'espace occupé par un bras, soit  $S_j$  un point de  $\mathcal{S}_j$ . Le bras  $j$  est bien placé si  $\mathcal{S}_j$  n'intersecte  $\mathcal{E}_i$  pour aucun câble  $i$ . Soit  $V$  le nombre de facettes du polyèdre  $\mathcal{E}_i$ . D'après les résultats de la méthode ci-dessus, on a l'équivalence suivante :

$$\mathcal{S}_j \cap \mathcal{E}_i = \emptyset \Leftrightarrow \forall S_j \in \mathcal{S}_j, \exists k \in [2 \dots V] \mid \text{signe}(\overrightarrow{P_{k_i} S_j} \cdot \mathbf{n}_{k_i}) \neq \text{signe}(\overrightarrow{P_{1_i} S_j} \cdot \mathbf{n}_{1_i}) \quad (4.14)$$

, avec  $P_{k_i}$  un des sommets de la  $k^{\text{ième}}$  face de l'ETC  $i$ . La fonction  $\text{signe}(x)$  retourne le signe de  $x$ .

En pratique, la forme de l'ETC sur le robot *CoGiRo* est du type illustré Figure 4.7.  $\mathcal{E}_i$  a 9 faces, dont six sont les faces d'une pyramide de base  $B_i$ . Le point d'attache du bras à la plate-forme  $O_j$  et  $B_i$  sont coplanaires sur *CoGiRo*. Comme les dimensions de l'ETC sont bien plus importantes que celles de l'espace occupé par un bras, alors si l'espace de travail du bras intersecte l'ETC d'un câble, cela signifie que l'un au moins des sommets du triangle représentant le débattement du bras est inclus dans la pyramide. Pour tester l'intersection  $\mathcal{S}_j$  et  $\mathcal{E}_i$ , il suffit alors de tester l'appartenance des trois sommets du triangle à la pyramide constituant l'ETC.

De même pour tester les collisions des bras avec la plate-forme, il suffit de tester l'appartenance des sommets du triangle au volume de la plate-forme. On s'en assure par conception en vérifiant que pour tous les bras  $j$ , le point  $O_j$  est toujours placé sur une face et que la condition suivante sur les angles est vérifiée :  $\theta_j \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ .

Enfin, la dernière forme de collision à tester, est la collision entre deux bras. Pour s'assurer que deux bras ne se touchent pas, il faut s'assurer que les surfaces de l'espace occupé

par les bras ne se coupent pas. Pour cela, les triangles contenant l'espace de travail des bras sont projetés selon les 3 axes du repère  $\mathcal{R}_p$ , la projection de ce triangle sur un plan est un triangle. Deux surfaces s'intersectent si et seulement si au moins un point du premier triangle est à l'intérieur du second dans les 3 projections. L'appartenance d'un point à un triangle est calculée avec la méthode de *ray casting* [O'Rourke, 1998].

### 4.4.3 Faisabilité des torseurs d'effort

Comme la position, la vitesse et l'accélération angulaire des bras du stabilisateur sont limitées par le choix d'actionnement et comme l'amplitude des vibrations est comprise dans un intervalle, alors tous les torseurs de la partie de gauche de l'équation (4.10) sont bornés et donc la partie de gauche de cette équation est bornée. Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble contenant tous ces torseurs. On note  $\boldsymbol{w}$  un élément de  $\mathcal{F}$ , tel que, selon l'équation (4.10), on a :  $\boldsymbol{w} = \tilde{\mathbf{M}}_T \Delta \ddot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_G$

Les torseurs d'effort produits par le stabilisateur ne doivent pas impliquer un jeu de tensions des câbles que ceux-ci ne peuvent pas fournir. Il faut donc vérifier qu'à tout moment le RPC et le stabilisateur puissent effectuer leurs tâches tout en conservant des tensions admissibles.

Les tensions des câbles du RPC doivent être comprises entre des tensions minimales et maximales, pour chaque câble  $i$ ,  $N$  étant le nombre de câbles, on a :  $\tau_i \in [\underline{\tau} \quad \bar{\tau}]$ . L'espace des tensions admissibles dans les câbles noté  $\mathcal{T}$  est défini par :

$$\mathcal{T} = \{\boldsymbol{\tau} | \tau_i \in [\underline{\tau} \quad \bar{\tau}]\} \quad (4.15)$$

Puisque le stabilisateur est composé de bras actionnés disposés sur la plate-forme d'un RPC, sa conception doit prendre en compte une tension maximale et minimale dans chaque, la tension minimale étant strictement positive. Pour tout torseur d'effort  $\boldsymbol{w} \in \mathcal{F}$ , un ensemble de tensions de câbles admissibles doit exister, autrement dit :

$$\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{F} \exists \boldsymbol{\tau} \in [\underline{\tau} \quad \bar{\tau}]^N \mid -\mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{w} \Leftrightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{T} \quad (4.16)$$

D'après l'expression (4.16), tout  $\boldsymbol{w}$  de  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{T}$ . Or, d'après [Bouchard *et al.*, 2010],  $\mathcal{T}$  est un zonotope, c'est à dire un polytope obtenu comme somme de Minkowski d'un certain nombre de segments dans un espace de dimension  $N$ . La condition donnée à l'équation (4.16) peut alors être exprimée par une inéquation, qui est alors :

$$\mathbf{C}\boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{d} \quad (4.17)$$

La matrice  $\mathbf{C}$  et le vecteur  $\mathbf{d}$  peuvent être obtenus par un calcul hors ligne en utilisant certains algorithmes déjà développés, par exemple la méthode expliquée dans [Bouchard et al., 2010; Gouttefarde et Krut, 2010].

## 4.5 Fonction de coût

La fonction objectif, appelée fonction de coût par abus de langage, est la fonction qui doit être maximisée ou minimisée. Elle doit être une fonction scalaire afin de pouvoir comparer entre elles les valeurs qu'elle prend pour différents arguments. Comme la procédure d'optimisation sert à améliorer la conception d'un système donné, la fonction de coût doit être descriptive du système, et donc sa formulation est postérieure à la modélisation.

D'après l'équation (4.10), plus l'effet du torseur  $\mathbf{w}_1$  est grand, plus l'influence du stabilisateur sur la plate-forme est importante et donc la stabilisation efficace. L'efficacité du stabilisateur actif peut être décrite par la puissance qu'il peut apporter de manière active à la plate-forme. D'après l'équation (4.10), il s'agit de la puissance apportée par le torseur  $\mathbf{w}_1$ . D'après cette même équation,  $\mathbf{w}_1 = \sum_{j=1}^J \mathbf{w}_{1j}$

Soit  $\mathcal{P}(\mathbf{w})$  la puissance apportée par le torseur  $\mathbf{w}$  au CDG de la plate-forme.

Le produit de torseurs – aussi nommé comoment – est noté  $\odot$  tel que pour deux torseurs  $\mathbf{S}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{Bmatrix}$  et  $\mathbf{S}_2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix}$  définis en un même point on a :

$$\mathbf{S}_1 \odot \mathbf{S}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1$$

La puissance fournie par le stabilisateur est la somme des puissances fournies par chacun des bras. Pour un bras  $j$ , la puissance  $\mathcal{P}(\mathbf{w}_{1j})$  est le résultat du comoment du torseur cinématique du bras par le torseur d'effort  $\mathbf{w}_{1j}$  :

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}_{1j}) = \begin{Bmatrix} {}^p \mathbf{v}_{G_j} \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{Bmatrix} \odot \mathbf{w}_{1j/p}$$

avec  ${}^p \mathbf{v}_{G_j}$  la vitesse de déplacement du CDG  $G_j$  de la masselotte exprimée dans le repère  $\mathcal{R}_p$  et  $\boldsymbol{\omega}_j$  la vitesse angulaire du bras  $j$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_p$ . Le torseur cinématique utilisé est celui fourni par le bras à sa pose initiale  $[\mathbf{r}_j^\top \quad \boldsymbol{\theta}_{j0}^\top]^\top$ , à une vitesse angulaire constante choisie arbitrairement et avec la plate-forme considérée comme statique. En pratique on choisit  $\boldsymbol{\omega}_j = [0 \quad \pi \text{ rad s}^{-1} \quad 0]^\top$ , avec une plate-forme statique, on a d'après

l'équation (3.40) :  ${}^p \mathbf{v}_{G_j} = \boldsymbol{\omega}_j \times \boldsymbol{\lambda}_j$ . Ce torseur est construit de sorte à ne dépendre que la pose initiale  $[\mathbf{r}_j^\top \quad \boldsymbol{\theta}_{j_0}^\top]^\top$  de chaque bras.

Par définition, on a donc :

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}_1) = \mathcal{P} \left( \sum_{j=1}^J \mathbf{w}_{1j} \right) = \sum_{j=1}^J \mathcal{P}(\mathbf{w}_{1j}) \quad (4.18)$$

Pour un stabilisateur composé de  $j$  bras, la puissance fournie par le torseur  $\mathbf{w}_1$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{w}_1) &= \sum_{j=1}^J \mathcal{P}(\mathbf{w}_{1j}) = \sum_{j=1}^J \left( \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \times \boldsymbol{\lambda}_j \end{array} \right\} \odot \mathbf{w}_{1j} \right) = \sum_{j=1}^J \left( \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \times \boldsymbol{\lambda}_j \end{array} \right\} \odot \left[ \begin{array}{c} -m_j \boldsymbol{\lambda}_j^\times \\ \underline{\mathbf{I}}_j - m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \boldsymbol{\lambda}_j^\times \end{array} \right] \right) {}^j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \\ &= \sum_{j=1}^J \left[ \boldsymbol{\omega}_j \cdot (\underline{\mathbf{I}}_j - m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \dot{\boldsymbol{\omega}}_j - m_j (\boldsymbol{\omega}_j \times \boldsymbol{\lambda}_j) \cdot (\boldsymbol{\lambda}_j \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_j) \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

## 4.6 Formulation du problème d'optimisation

Le choix de l'actionnement des bras donne les limites des valeurs de  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_j$  et  $\boldsymbol{\omega}_j$ . La masse  $m_j$  et la longueur  $\lambda_j$  sont constantes pour un bras donné. Les derniers paramètres qui influencent  $\mathbf{w}_1$  sont ceux de la position initiale du bras ; la position du point de sortie du moteur actionnant le bras, notée  $\mathbf{r}_j$ , et son orientation initiale exprimée dans le repère  $\mathcal{R}_p$ , notée  $\boldsymbol{\theta}_{j_0}$ .

$\lambda_j$  et  $m_j$  étant connus pour chaque bras  $j$ , la position initiale optimale du stabilisateur est le couple  $\{\mathbf{r}_j, \boldsymbol{\theta}_{j_0}\} \forall j \in [1..J]$  qui maximise le scalaire  $\mathcal{P}(\mathbf{w}_1)$ , en assurant que le stabilisateur n'interfère pas avec les câbles et que le RPC puisse réaliser tous les torseurs tels que leurs composantes sont dans un intervalle donné. Dorénavant la simplification suivante est faite : toutes les masses  $m_j$  des bras sont égales de même que toutes les longueurs  $\lambda_j$ .

Le problème d'optimisation pour déterminer la topologie du stabilisateur qui permet sa plus grande efficacité consiste en la recherche de la variable  $\boldsymbol{\xi}$  telle que la composante active du torseur d'efforts  $\mathbf{w}_1$ , dont la formulation dépend de  $\boldsymbol{\xi}$ , maximise  $\mathcal{P}(\mathbf{w}_1)$ , tout en respectant les deux contraintes suivantes :

- pour aucun des bras du stabilisateur l'espace de travail du bras n'intersecte l'ETC

d'un câble, c'est à dire, d'après l'équation (4.14) :

$$\forall i \in [1 \dots N], \forall j \in [1 \dots J], \mathcal{S}_j \cap \mathcal{E}_i = \emptyset \Leftrightarrow \forall i \in [1 \dots N], \forall j \in [1 \dots J] \forall S_j \in \mathcal{S}_j, \exists k \in [2 \dots V_i] \\ |\text{signe}(\overrightarrow{P_{k_i} S_j} \cdot \mathbf{n}_{k_i}) \neq \text{signe}(\overrightarrow{P_{1_i} S_j} \cdot \mathbf{n}_{1_i})$$

- l'action du stabilisateur ne fait pas sortir le RPC de son espace des torseurs admissibles, c'est à dire que quelle que soit la valeur de  $\mathbf{w}_1$ , le torseur de la somme des efforts au CDG de la plate-forme vérifie  $\mathbf{C}\mathbf{w} \leq \mathbf{d}$ , avec  $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{M}}_T \Delta \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_G$

La recherche de la solution optimale à ce problème peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} & \max_{\xi \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(\mathbf{w}_1(\xi)) \\ \text{tel que } & \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}, \mathbf{C}\mathbf{w} \leq \mathbf{d} \text{ avec } \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{M}}_T \Delta \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_G \\ \text{tq } \forall i \in [1 \dots N] \forall j \in [1 \dots J] \mathcal{S}_j \cap \mathcal{E}_i = \emptyset \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.20)$$

## 4.7 Résultats d'optimisation

### 4.7.1 Choix de l'algorithme

La métaheuristique d'optimisation choisie est l'optimisation par essaim de particules (OEP), décrite en Annexe D. La notion de voisinage retenue pour les particules est le voisinage social (voir Annexe D). Les particules sont virtuellement placées en anneau de sorte que chacune ait deux voisins, comme représenté Figure 4.10.

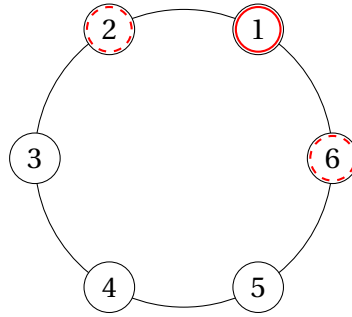


Figure 4.10: Topologie en anneau des particules, voisinage de 1 en pointillés



### 4.7.2 Paramétrage

Le calcul applicatif de l'optimisation du placement des bras a été réalisé pour placer les bras d'un stabilisateur sur la plate-forme du **RPC CoGiRo**. La masse utilisée pour décrire *CoGiRo* est de 340kg et ses paramètres géométriques mesurés sont donnés table 4.2. L'algorithme d'OEP a été utilisé pour trouver l'emplacement des bras du stabilisateur qui permet de fournir la puissance mécanique maximale au **CDG** de la plate-forme de *CoGiRo*. L'espace de recherche de l'emplacement des bras est limité à la taille de la plate-forme. Une analogie physique entre le fait de déplacer les bras pour trouver leur meilleure position et les déplacements de la particule peut être faite.

Tableau 4.2: Points d'attache des câbles de *CoGiRo*

	${}^0x$ (m)	${}^0y$ (m)	${}^0z$ (m)		${}^p_x$ (m)	${}^p_y$ (m)	${}^p_z$ (m)
$a_0$	-7.1775	-5.4361	5.3911	$b_0$	0.495	-0.5075	-0.458
$a_1$	-7.4594	-5.1504	5.3999	$b_1$	-0.500	0.3560	0.542
$a_2$	-7.3911	5.1940	5.3976	$b_2$	-0.500	-0.2625	-0.458
$a_3$	-7.1026	5.4753	5.4094	$b_3$	0.500	0.3410	0.542
$a_4$	7.2398	5.3759	5.4093	$b_4$	-0.495	0.5075	-0.458
$a_5$	7.5208	5.0851	5.4200	$b_5$	0.500	-0.3560	0.542
$a_6$	7.4461	-5.2539	5.3874	$b_6$	0.500	0.2625	-0.458
$a_7$	7.1608	-5.5342	5.3973	$b_7$	-0.500	-0.3410	0.542

La contraintes de faisabilité des torseurs d'effort par les câbles peut être représentée par des inéquations grâce à l'algorithme de [Gouttefarde et Krut, 2010]. Les contraintes de non-collision des bras sont quant à elles exprimées par des opérateurs booléens et peuvent donc aussi être exprimées comme des contraintes d'inégalités.

La masse des bras  $m_j$  est fixée à une même valeur pour tous les bras, de même pour leur longueur  $\lambda_j$ . Enfin, afin de simplifier le problème, il est déterminé que les vibrations ne seront compensées que selon 3 **DDL**, qui correspondent aux trois modes propres du **RPC** dont la fréquence de vibrations est la plus basse. Il s'agit de la translation verticale selon Z et les rotations selon les axes X et Y.

Compte tenu de la forme de l'espace de travail des câbles, illustré en Figure 4.11, les bras ne peuvent être fixés sur les côtés de la plate-forme. Il est donc possible de restreindre encore l'espace des positions possibles des bras. De plus, il est techniquement difficile de fixer les bras sur la face du dessus de la plate-forme de *CoGiRo*, celle-ci embarquant déjà d'autres outils pour d'autres applications. Pour une raison de simplicité technique, il est décidé a priori que les bras sont tous fixés sur la face inférieure de la plate-forme.

### 4.7.3 Exemple à 3 DDL et 4 bras

Dans la présente application, chaque particule de l'essaim a pour position dans l'espace paramétrique  $\xi$ . La dimension de l'espace paramétrique est donc de 24. La taille de l'essaim choisie est de 30 particules, toutes initialisées de façon aléatoires sauf 3, qui ont été choisies pour évaluer les solutions « naturelles », à savoir :

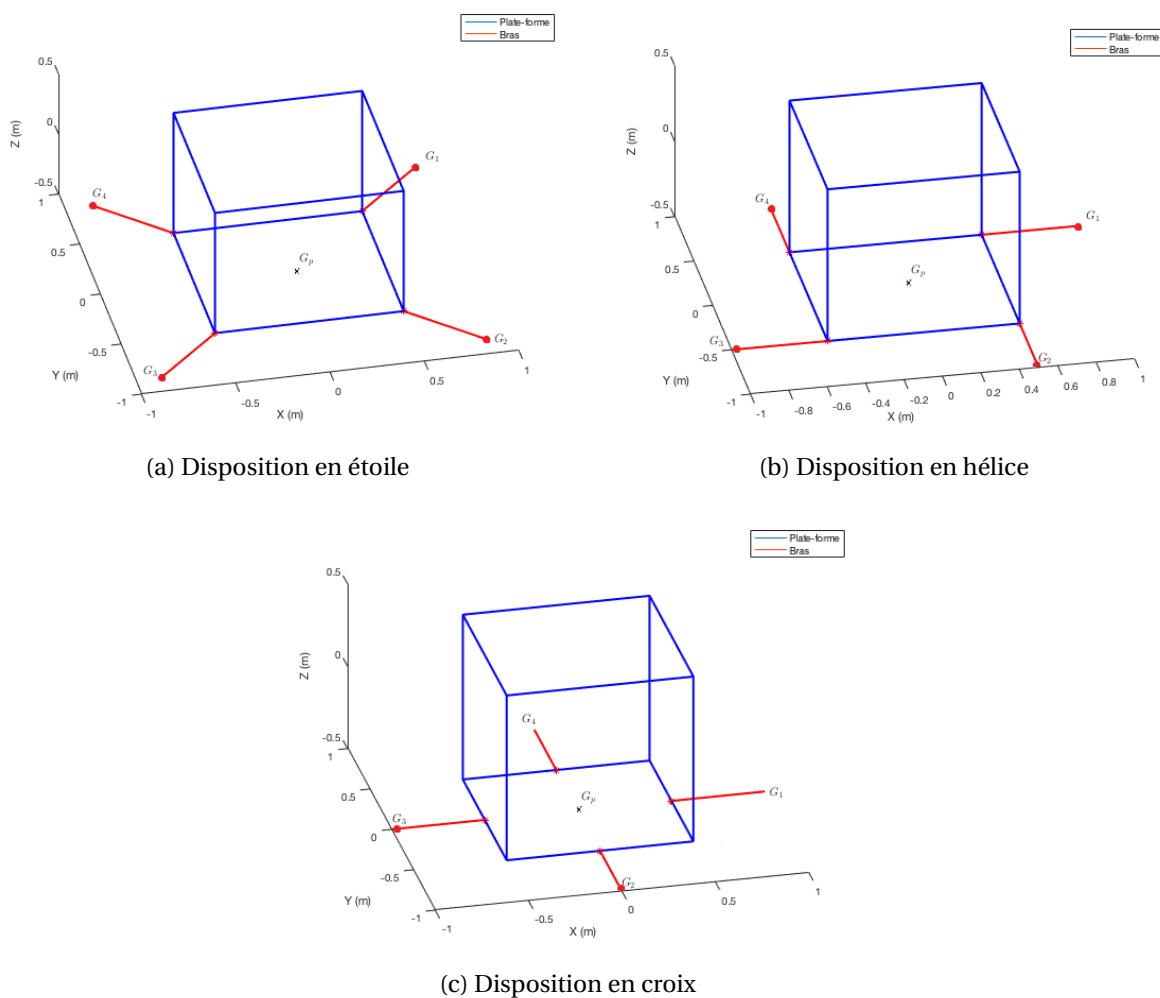


Figure 4.11: Configurations initiales particulières de l'OEP

1. la disposition en étoile (voir Figure 4.11a) qui maximise les distances entre les masselottes et le CDG de la plateforme
2. la disposition en hélice (voir Figure 4.11a) qui est la plus facile à réaliser techniquement

Tableau 4.3: Position optimale des bras dans le cas à 3 DDL et 4 bras

Paramètre	Bras 1	Bras 2	Bras 3	Bras 4
$r_{j_x}$	0.5	0.5	-0.5	-0.5
$r_{j_y}$	0.5	-0.5	-0.5	0.5
$r_{j_z}$	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
$\alpha_{j_0}$	4.53066e-17	6.51109e-17	-9.16043e-18	2.07608e-17
$\beta_{j_0}$	-4.24912e-17	1.33895e-17	-2.90179e-18	3.04094e-17
$\gamma_{j_0}$	1.43754e-13	-1.5708	-3.14159	1.5708

- la disposition en croix (voir Figure 4.11a) qui minimise les distances entre les masselottes et le CDG de la plate-forme

Pour chacune de ces particules préprogrammées, on peut parler de leader puisqu'elles ont pour rôle d'influencer la trajectoire de leur voisinage. Pour ces leaders, les rotations initiales  $\theta_{j_0}$  ont une composante nulle autour des axes  $\mathbf{x}_p$  et  $\mathbf{y}_p$ .

Les coefficients  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  ont été choisis avec des valeurs très inférieures à celles préconisées dans [Clerc, 2005], des valeurs plus fortes ne permettant pas d'assurer la convergence de l'essaim. De plus, les valeurs de  $c_2$  et  $c_3$  choisies sont très différentes puisque  $c_3$  vaut le double de  $c_2$ . L'algorithme tel que réglé ici privilégie le comportement en essaim au comportement égoïste qui n'atteint pas forcément l'optimum global. Les valeurs retenus sont :

- $c_1 = 0.05$
- $c_2 = 0.1$
- $c_3 = 0.2$

Pour cet exemple, la masse de chaque bras  $m_j$  a été fixée à 2 kg et sa longueur  $\lambda_j$  à 0,5 m. Avec de telles valeurs, l'algorithme converge pour tous les essais vers la valeur de  $\xi$  interprétée dans le tableau 4.3 et illustrée à la Figure 4.12. Cette convergence est obtenue dans chacun des essais en moins de 300 000 itérations.

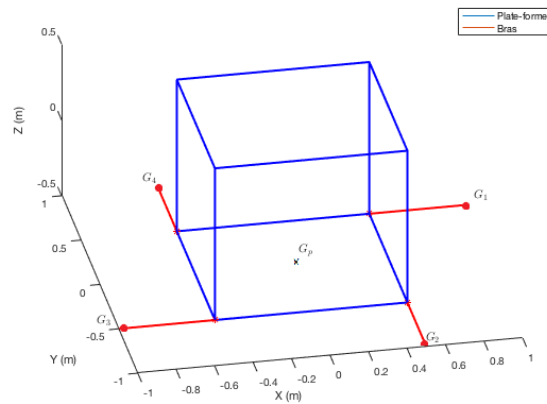
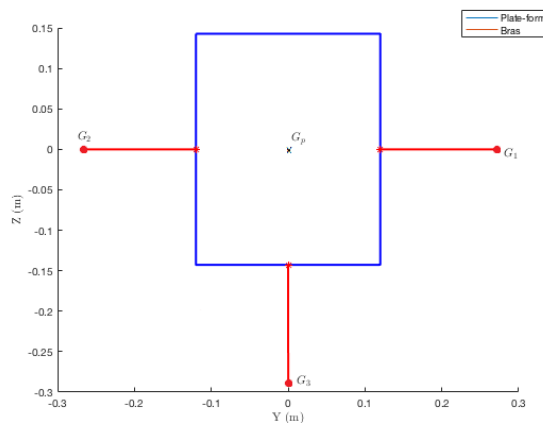


Figure 4.12: Solution optimale de placement des bras

#### 4.7.4 Exemple plan à 3 DDL et 3 bras

Pour cet essai, chaque particule de l'essaim est composée de 3 bras ayant chacun 3 paramètres, l'espace des paramètres comporte donc seulement 9 dimensions. La taille de l'essaim choisie est de 30 particules, toutes initialisées de façon aléatoires sauf deux, qui ont été initialisées à une valeur donnée. Cette disposition des bras est celle utilisée dans l'article [Lesellier *et al.*, 2018], et présentée Figure 4.13.

Figure 4.13: Valeur initiale de placement des bras utilisée dans [Lesellier *et al.*, 2018]

Les valeurs des coefficients de l'OEP restant les mêmes que précédemment, l'algorithme converge vers le résultat donné dans le tableau 4.4 et illustrée à la Figure 4.14. Cette convergence est obtenue dans chacun des essais en moins de 200 000 itérations.

Tableau 4.4: Position optimale des bras dans le cas plan

Paramètre	Bras 1	Bras 2	Bras 3
$r_{j_y}$	0.12	-0.12	-4.53066e-17
$r_{j_z}$	6.72858e-10	8.62206e-10	-0.1428
$\alpha_{j_0}$	-2.17892e-08	3.14159	-1.5708

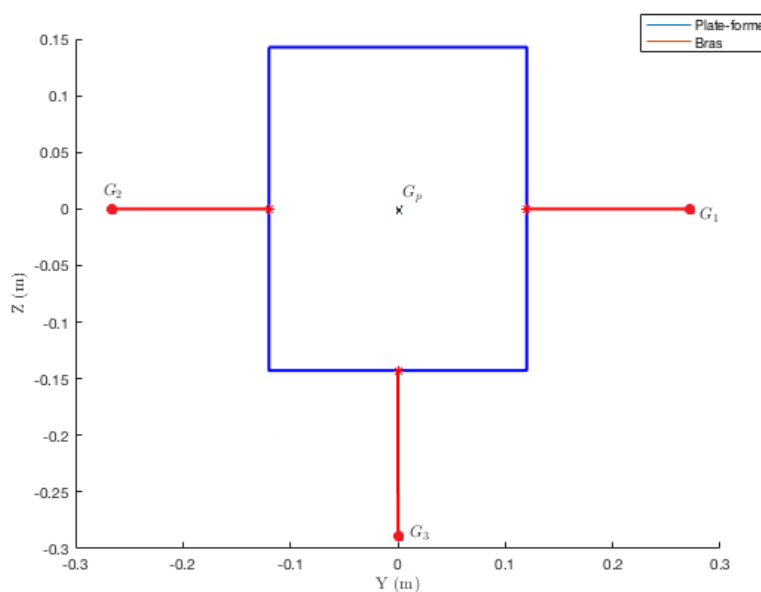


Figure 4.14: Solution optimale de placement des bras dans le cas plan

#### 4.7.5 Conclusion

La méthode présentée ici permet de déterminer la position optimale d'un nombre donné de bras pour transmettre la plus grande puissance possible sur la plate-forme, en respectant des contraintes de non-collision et de faisabilité des torseurs. Cette méthode ne garantit pas que le nombre de bras soit suffisant pour assurer la commandabilité du stabilisateur. Cette méthode ne permet pas non plus de déterminer le nombre idéal de bras pour effectuer la stabilisation active d'un RPC. L'optimisation au cours de ce travail n'a concerné que la position et l'orientation initiale de bras, dont la longueur et la masse sont fixées a priori.

Le résultat de ce processus d'optimisation détermine une configuration du stabilisateur. La connaissance de cette configuration permet, au chapitre suivant, de calculer une loi de commande du stabilisateur pour compenser les vibrations de la plate-forme.



# Commande

## Préambule

*Ce chapitre propose une loi de commande globale du système composé du RPC et de son stabilisateur embarqué. La stabilité de cette commande est ensuite étudiée.*

*En préalable, le modèle du système formulé précédemment aux chapitres 3 et 4 est reformulé en fonction de la pose et de la coordonnée articulaire des bras, afin de pouvoir utiliser les approches classiques de commande.*

*Dans un premier temps, une loi de commande pour le système global composé du RPC et de son stabilisateur embarqué est conçue. La stratégie de commande choisie a un but différent pour chaque partie : contrôler la pose pour la plate-forme du RPC et compenser des vibrations pour le stabilisateur. À ces deux tâches s'ajoute une troisième qui consiste à ramener les bras du stabilisateur dans leur position nominale, sans interférer avec la compensation des vibrations.*

*Comme ces tâches s'effectuent à deux échelles de temps différentes, il est possible de prouver la stabilité du système global pour la loi de commande choisie par la méthode des perturbations singulières. Cette méthode est décrite en seconde partie de ce chapitre.*

*Enfin, en dernière partie, le système est séparé par échelle de temps et la stabilité du système global muni de la loi de commande est prouvée en utilisant la seconde méthode de Lyapunov.*

## Sommaire

5.1	Modélisation du système en fonction de la pose et de la coordonnée articulaire des bras . . . . .	97
5.2	Conception de la loi de commande . . . . .	100
5.3	La théorie des perturbations singulières . . . . .	104
5.4	Preuve de stabilité . . . . .	108
5.5	Conclusion . . . . .	112

## 5.1 Modélisation du système en fonction de la pose et de la coordonnée articulaire des bras

L'implémentation pratique d'un schéma de commande requiert la connaissance du modèle dynamique du système. Pour pouvoir appliquer une stratégie de commande le modèle est réécrit de façon à pouvoir isoler un vecteur contenant tous les paramètres commandés. Le modèle du robot obtenu au chapitre 3 est donc reformulé en fonction de la pose et des coordonnées articulaires des bras.

Pour rappel, l'application du PFD au système composé de la plate-forme du RPC à N câbles et d'un stabilisateur embarqué composé de J bras, exprimée dans le chapitre 3 par l'équation (3.66), est rappelée ici :

$$\mathbf{M}_T \begin{pmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{p}} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_p \end{pmatrix} + \mathbf{C}_T \begin{pmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_p \end{pmatrix} + \mathbf{w}_G - \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = -\mathbf{J}^\top \boldsymbol{\tau} \quad (5.1)$$

Comme explicité dans le chapitre 4, les matrices  $\mathbf{M}_T$ ,  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{C}_T$  ainsi que le vecteur  $\mathbf{w}_G$  sont fonction de la pose de la plate-forme  $\mathbf{x}$  ou de sa vitesse. Les torseurs représentant les composantes actives du stabilisateur sur la plate-forme  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  sont fonction de la pose et de la vitesse de la plate-forme ainsi que des coordonnées et vitesses articulaires des bras.

Les bras du stabilisateur n'ont chacun qu'un seul DDL actionné, la rotation autour de  $\mathbf{y}_j$  (voir Figure 3.6 de la section 3.2.5) notée  $\theta_j$ . Soit  $\boldsymbol{\theta}$  le vecteur de dimension J des coordonnées articulaires de tous les bras dans le repère  $\mathcal{R}_p$ . Il est obtenu par concaténation des coordonnées articulaires  $\theta_j$  de chacun des bras :  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \cdots \theta_j \cdots \theta_J]^\top$ . Sa dérivée temporelle dans le repère  $\mathcal{R}_p$  est notée  ${}^p\dot{\boldsymbol{\theta}}$ . Le vecteur  $\boldsymbol{\omega}_j$  donne la vitesse angulaire de  $\mathcal{R}_j$  dans  $\mathcal{R}_p$  selon les trois angles d'Euler, avec le formalisme décrit annexe A. Soit  $\boldsymbol{\kappa}$  le vecteur de dimension J qui contient les couples moteur de chacun des actionneurs des J bras.

La plate-forme mobile du RPC et le stabilisateur sont couplés, ils forment un système dont la variable est  $[\mathbf{x}^\top \ \boldsymbol{\theta}^\top]^\top$  et la variable de commande  $[\boldsymbol{\tau}^\top \ \boldsymbol{\kappa}^\top]^\top$ . On peut alors construire les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{C}$  et le vecteur  $\mathbf{G}$  tels que le modèle dynamique de ce système soit décrit par l'équation suivante :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{J}^\top \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$



La matrice  $\mathbf{M}$  peut être décomposée en blocs :

$$\mathbf{M} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \hline \mathbf{M}_{12}^\top & \mathbf{M}_{22} \end{array} \right] \quad (5.3)$$

où le bloc  $\mathbf{M}_{11}$  est une matrice carrée de dimension  $n \times n$  et  $\mathbf{M}_{22}$  une matrice  $J \times J$ . La matrice  $\mathbf{M}_{12}$  est de dimension  $n \times J$ .

Pour rappel, la matrice  $\tilde{\mathbf{S}}$ , détaillée en annexe A, est telle que  $[\dot{\mathbf{p}}^\top \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_p^\top]^\top = \tilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{x}}$ . Alors,  $[\ddot{\mathbf{p}}^\top \quad \ddot{\boldsymbol{\omega}}_p^\top]^\top = \tilde{\mathbf{S}}\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\tilde{\mathbf{S}}}\dot{\mathbf{x}}$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{{}^0G_p G_j}$  exprimé dans le repère galiléen  $\mathcal{R}_0$  est donné par :

$${}^0\overrightarrow{G_p G_j} = \left[ x_{G_j} \quad y_{G_j} \quad z_{G_j} \right]^\top \quad (5.4)$$

On peut donc exprimer le tenseur d'inertie du bras  $j$  en  $G_p$  en utilisant le théorème d'Huygens :

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}}_{j,G_p} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_{j,G_j} - m_j \begin{bmatrix} y_{G_j}^2 + z_{G_j}^2 & -x_{G_j}y_{G_j} & -x_{G_j}z_{G_j} \\ -x_{G_j}y_{G_j} & x_{G_j}^2 + z_{G_j}^2 & -y_{G_j}z_{G_j} \\ -x_{G_j}z_{G_j} & -y_{G_j}z_{G_j} & x_{G_j}^2 + y_{G_j}^2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

On note  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}_{j,G_j}^{ab}$  la composante du tenseur d'inertie d'ordre 2  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}_{j,G_j}$  située sur la  $a^{\text{ième}}$  ligne et la  $b^{\text{ième}}$  colonne.

Les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{C}$  et le vecteur  $\mathbf{G}$  sont obtenus à partir des équations (3.44) et (3.41) du modèle dynamique d'un bras. La rotation  $\theta_j$  s'effectuant autour de  $\mathbf{y}_j$ , on a :

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_T \tilde{\mathbf{S}} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{M}_{12} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -m_j \lambda_1^\times \mathbf{y}_1 & \cdots & -m_j \lambda_j^\times \mathbf{y}_j & \cdots & \cdots & -m_j \lambda_j^\times \mathbf{y}_j \\ \underline{\underline{\mathbf{I}}}_{1,G_1} \mathbf{y}_1 - m_j (\mathbf{r}_1^\times + \lambda_1^\times) \lambda_1^\times \mathbf{y}_1 & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_{j,G_j} \mathbf{y}_j - m_j (\mathbf{r}_j^\times + \lambda_j^\times) \lambda_j^\times \mathbf{y}_j & \cdots & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_{J,G_J} \mathbf{y}_J - m_j (\mathbf{r}_J^\times + \lambda_J^\times) \lambda_J^\times \mathbf{y}_J & \cdots \end{array} \right] \quad (5.7)$$

$$\mathbf{M}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\underline{1},G_p}^{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \mathbf{I}_{\underline{j},G_p}^{22} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{I}_{\underline{j},G_p}^{22} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

De même, la matrice  $\mathbf{C}$  peut être séparée en deux sous-matrices  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  de dimensions respectives  $(n+J) \times n$  et  $(n+J) \times J$ , et le vecteur  $\mathbf{G}$  peut être séparé en  $\mathbf{G}_1$  et  $\mathbf{G}_2$ , de dimensions  $n$  et  $J$ . Ces termes sont donnés ci-après :

$$\mathbf{C}_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_T \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_T \tilde{\dot{\mathbf{S}}} & \cdots & -m_j(\boldsymbol{\omega}_j^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times)\boldsymbol{\lambda}_j^\times \mathbf{y}_j & \cdots \\ \cdots & (\boldsymbol{\omega}_p^\times \mathbf{I}_j \mathbf{y}_j + \mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_p^\times \mathbf{y}_j + (\mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_p)^\times \mathbf{y}_j - m_j(\boldsymbol{\lambda}_j^\times + \mathbf{r}_j^\times)(\boldsymbol{\omega}_j^\times + 2\boldsymbol{\omega}_p^\times)\boldsymbol{\lambda}_j^\times) \mathbf{y}_j & \cdots \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{C}_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1^\times \mathbf{I}_{\underline{1},G_p}^{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \mathbf{0}_{J \times n} & 0 & \boldsymbol{\omega}_j^\times \mathbf{I}_{\underline{j},G_p}^{22} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \boldsymbol{\omega}_J^\times \mathbf{I}_{\underline{j},G_p}^{22} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} (m_p + \sum_{j=1}^J m_j) \mathbf{g} \\ \sum_{j=1}^J m_j (\mathbf{r}_j^\times + \boldsymbol{\lambda}_j^\times) \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} m_j \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \mathbf{g} \\ \vdots \\ m_j \boldsymbol{\lambda}_j \cdot \mathbf{g} \\ \vdots \\ m_j \boldsymbol{\lambda}_J \cdot \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Avec ces notations l'équation (5.2) peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}_{12} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) & = -\mathbf{J}^\top \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{M}_{12}^\top \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}_{22} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}_2(\boldsymbol{\theta}) & = \boldsymbol{\kappa} \end{cases} \quad (5.13a)$$

$$(5.13b)$$

Par définition la matrice de masse  $\mathbf{M}$  est définie positive, elle est donc inversible. L'inverse d'une matrice écrite sous forme de blocs peut être obtenue de façon analytique :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \\ -(\mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C})^{-1} & -(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C})^{-1} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

L'inverse  $\mathbf{H}$  de  $\mathbf{M}$  s'écrit :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{12}^\top & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

où  $\mathbf{H}_{11}$  est une matrice  $n \times n$ ,  $\mathbf{H}_{12}$  une matrice  $n \times J$ ,  $\mathbf{H}_{21}$  une matrice  $J \times n$  et  $\mathbf{H}_{22}$  une matrice carrée  $J \times J$ .

## 5.2 Conception de la loi de commande

### 5.2.1 Commande par découplage non-linéaire

Le principe de la commande par découplage non-linéaire est de linéariser le système par une commande qui utilise le modèle dynamique du robot. La forme de découplage

non-linéaire la plus courante est la commande par couple calculé, le plus souvent appelée par son nom anglais *computed torque* [Cheng et al., 2003]. Par abus de langage, l'appellation couple calculé qualifie communément toutes les commandes par découplage non-linéaire. Le principe de cette méthode est donné Figure 5.1. Ce type de commande a pour inconvénient de nécessiter une modélisation fidèle du système, qui en reflète une connaissance précise.

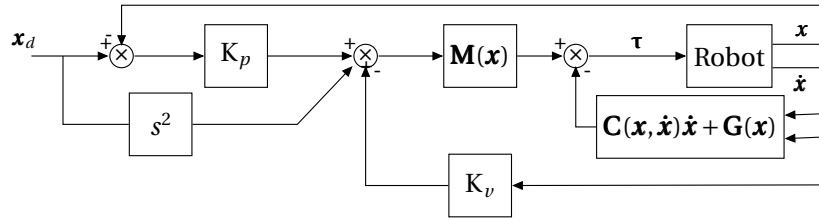


Figure 5.1: Schéma de commande par couple calculé

Le modèle dynamique générique d'un robot parallèle à câbles est donné par :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.16)$$

$\mathbf{M}$  étant la matrice de masse du robot,  $\mathbf{C}$  modélise les effets fonctions de la vitesse (Coriolis et centrifuges),  $\mathbf{G}$  les effets de la gravité,  $\boldsymbol{\tau}$  l'action des actionneurs sur le robot et  $\mathbf{x}$  sa pose. L'objectif de la commande est de suivre une trajectoire de référence  $\mathbf{x}_d$  dans l'espace opérationnel. Le principe de la commande par couple calculé est de produire des couples avec les actionneurs qui annulent les non-linéarités du modèle, par exemple :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{y} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \quad (5.17)$$

$\mathbf{y}$  étant un vecteur de commande choisi.

En remplaçant la commande calculée en (5.17) dans le modèle dynamique du robot dans (5.16), on obtient la dynamique en boucle fermée du système :  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$ . L'implémentation la plus courante de ce type de commande se fait avec un correcteur Proportionnel-Dérivé (PD) sur l'erreur en position. Cela correspond au choix suivant pour  $\mathbf{y}$  :

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}_p(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) \quad (5.18)$$

$\mathbf{K}_p$  étant la matrice des gains du correcteur proportionnel et  $\mathbf{K}_v$  la matrice des gains du correcteur dérivé.

La dynamique en boucle fermée du système est alors celle d'un système autonome (c'est à dire indépendant du temps) et linéaire :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}_p(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) \quad (5.19)$$

### 5.2.2 Commande en couple calculé de la plateforme

Une commande par couple calculé est utilisée pour piloter la pose de la plate-forme. La plate-forme peut être vue comme un sous-système de l'ensemble composé de la plate-forme et du stabilisateur embarqué. On note avec un indice  $d$  la valeur désirée de chaque variable. Soit  $\Delta \mathbf{x}$  l'erreur de pose de la plate-forme telle que  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$ . La forme choisie pour l'entrée de commande de ce sous-système,  $\boldsymbol{\tau}$  est la suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = -(\mathbf{J}^T)^+ \left( \mathbf{M}_{11} \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{C}_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{H}_{11}^{-1} (\mathbf{K}_v \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{x}) \right) \quad (5.20)$$

avec  $\mathbf{K}_p$  et  $\mathbf{K}_v$  deux matrices de gain définies positives et diagonales qui représentent respectivement les gains des correcteurs proportionnel et dérivé de la commande. L'introduction du terme  $\mathbf{H}_{11}^{-1}$  se justifie par les simplifications qu'il permet ultérieurement dans l'équation (5.33).

Cette commande permet de linéariser l'équation (5.13a). L'équation régissant ce sous-système en boucle fermée est donnée par :

$$\mathbf{M}_{11} \Delta \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}_{12} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{K}_v \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

### 5.2.3 Commande des bras du stabilisateur

Pour le stabilisateur, le second sous-système de l'ensemble décrit à l'équation (5.13b), la loi de commande utilisée a deux buts

- compenser les vibrations ;
- ramener les bras en position nominale.

En premier lieu, la visée du stabilisateur étant de compenser les vibrations de la plate-forme en créant un torseur d'effort par le mouvement des bras, une commande proportionnelle à la vitesse de vibrations  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$  est proposée.

Le travail d'optimisation présenté au chapitre 4 détermine les orientations des bras qui maximisent la puissance transmise à la plate-forme d'un RPC par un stabilisateur embarqué. En particulier à la section 4.7, ces orientations optimales sont données pour deux exemples d'applications différents. Pour rester efficaces, les bras doivent pouvoir revenir à leur position angulaire optimale, qui est choisie comme leur position initiale. Cette position, qui est aussi nommée position nominale du stabilisateur, est représentée par l'état  $\Theta_0$  qui est défini comme :  $\Theta_0 = \left\{ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{0}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}_d = \mathbf{0} \right\}$  où  $\boldsymbol{\theta}_d = \mathbf{0}$  est le vecteur des positions nominales de chaque bras. Pour rejeter les perturbation et assurer le retour en

position nominale des bras ainsi que le rejet de perturbations, une régulation par couple calculé est proposée pour le sous-système (5.13b).

Le premier effet de la commande doit être rapide pour pouvoir fournir les vitesses et accélérations adéquates afin de compenser les vibrations de la plate-forme, alors que le second effet de cette commande doit être suffisamment lent pour ne pas interférer avec les effets de la première. Finalement pour commander le sous-système (5.13b), une loi composite est mise en place : le vecteur du couple appliqué aux moteurs du stabilisateur  $\boldsymbol{\kappa}$  est la somme de deux commandes,  $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_f$ , avec  $\boldsymbol{\kappa}_f$  la commande rapide de rejet de vibrations et  $\boldsymbol{\kappa}_s$  la commande lente pour ramener les bras en position nominale.

La commande rapide  $\boldsymbol{\kappa}_f$  est une commande proportionnelle à la vitesse de vibrations  $\Delta\dot{\boldsymbol{x}}$ . Avec  $\mathbf{K}_\eta$  une matrice diagonale et positive de gains et  $\mathbf{H}_{12}^+$  la pseudo-inverse de  $\mathbf{H}_{12}$ , qui permet des simplifications ultérieures dans (5.31), la forme choisie de  $\boldsymbol{\kappa}_f$  est :

$$\boldsymbol{\kappa}_f = \mathbf{H}_{12}^+ \mathbf{K}_\eta \Delta\dot{\boldsymbol{x}} \quad (5.22)$$

En second lieu, pour ramener le stabilisateur dans la configuration  $\Theta_0$  qui permet de maximiser les efforts transmis à la plate-forme, une commande lente  $\boldsymbol{\kappa}_s$  est conçue. En utilisant la commande par couple calculée suivante, la forme choisie de  $\boldsymbol{\kappa}_s$  est :

$$\boldsymbol{\kappa}_s = \mathbf{M}_{12}^\top \ddot{\boldsymbol{x}}_d + \mathbf{C}_2(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}_2(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} \quad (5.23)$$

avec  $\mathbf{K}_\theta$  et  $\mathbf{K}_\omega$  deux matrices de gains diagonales définies positives et de valeurs faibles devant  $\mathbf{K}_\eta$  (d'un ordre de grandeur).

#### 5.2.4 Loi de commande

En substituant les équations (5.20), (5.22) et (5.23) dans l'écriture du système (5.13) en boucle ouverte s'obtient l'écriture de ce système en boucle fermée :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11} \Delta\ddot{\boldsymbol{x}} - \mathbf{M}_{12} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{K}_\nu \Delta\dot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{K}_p \Delta\boldsymbol{x} & = \mathbf{0} & (5.24a) \\ \mathbf{M}_{12}^\top \Delta\ddot{\boldsymbol{x}} - \mathbf{M}_{22} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}_{12}^+ \mathbf{K}_\eta \Delta\dot{\boldsymbol{x}} - \mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} & = \mathbf{0} & (5.24b) \end{cases}$$

Les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$  sont dépendantes du temps puisqu'elles dépendent des variables  $\boldsymbol{x}_d$ ,  $\Delta\boldsymbol{x}$  et  $\boldsymbol{\theta}$ .

Le schéma-bloc de cette commande est donné à la Figure 5.2. La commande par couple calculé de la plate-forme est entourée de bleu, la première boucle de commande du stabilisateur est entourée de rouge et la seconde est entourée de vert.

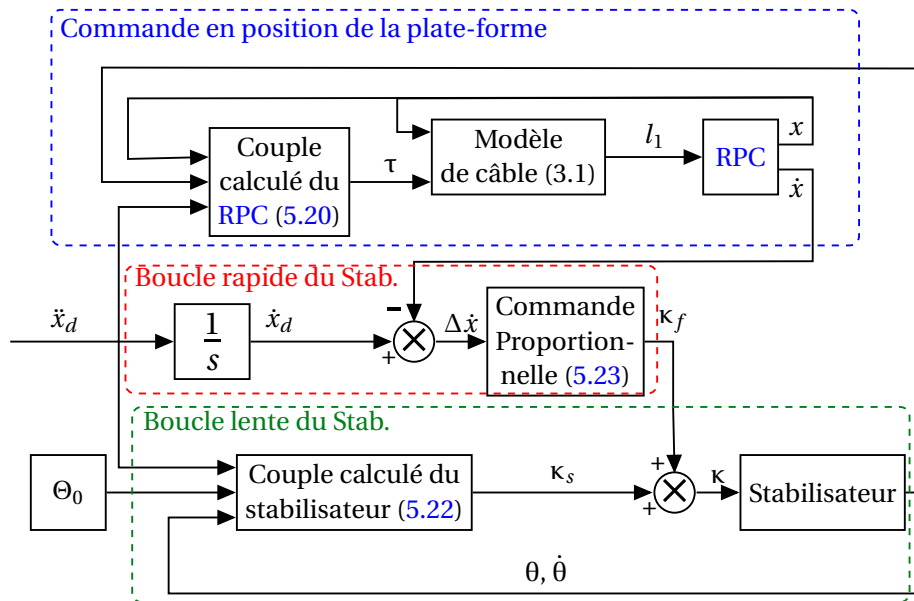


Figure 5.2: Schéma de commande

Ces trois boucles de commande peuvent être divisées en deux boucles lentes et une boucle rapide. Les deux boucles lentes sont la boucle sur la commande en position de la plate-forme du RPC et la boucle qui ramène les bras du stabilisateur en position nominale. La boucle rapide commande les bras pour compenser les vibrations de la plate-forme. Puisque ces boucles fonctionnent à des échelles de temps différentes, la théorie des perturbations singulières peut être utilisée pour prouver la stabilité du système asservi.

## 5.3 La théorie des perturbations singulières

### 5.3.1 Présentation de la théorie des perturbations singulières

Le résultat de la modélisation d'un RPC embarquant un stabilisateur composé de plusieurs bras est un système d'équations non-linéaires, couplées et dépendant d'un relativement grand nombre de variables : les  $n$  DDL de la plate-forme et le nombre  $J$  de bras. Ceci complique la formulation d'une commande pour le robot et une analyse de stabilité de cette commande.

Il est donc intéressant de chercher à réduire la complexité de ce modèle. Quand le système étudié fonctionne à différentes échelles de temps, il est possible de réduire celui-ci à plusieurs sous-systèmes ne comportant chacun qu'une seule échelle de temps. Les relations de couplage entre les sous-systèmes ainsi obtenus sont alors vues comme des pertur-

bations. Les modèles de dimensions réduites de ces sous-systèmes se prêtent alors mieux à une analyse de stabilité.

La théorie des perturbations singulières, appelée plus communément par son nom anglais *singular perturbation theory*, s'intéresse aux systèmes hiérarchisés par échelle de temps. Cette théorie a pour origine l'étude des phénomènes de couches limites dans les écoulements des fluides, certains termes sont donc issus de ce domaine. Cette théorie est utilisée entre autres pour l'analyse de stabilité de systèmes possédant deux échelles de temps distinctes [Kokotovic *et al.*, 1976; Fenichel, 1979].

Les systèmes sont explicités dans des coordonnées qui ne sont pas nécessairement celles avec lesquelles le modèle a été obtenu. Les systèmes pour lesquelles cette théorie s'applique doivent pouvoir être écrits sous la forme dite standard [Khalil, 2001]. Dans cette écriture, le système est divisé en deux ou plusieurs sous-systèmes chacun étant considéré à une échelle de temps différente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{\mathbf{z}} = g(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{z}, \varepsilon) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.25a) \\ (5.25b) \end{array}$$

avec  $\mathbf{u}$  un vecteur de commande,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ ;  $\varepsilon$  est un paramètre strictement positif et suffisamment petit, qui exprime le rapport entre les deux échelles de temps des variables  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ . L'approche par perturbation singulière consiste à prédire le comportement dynamique du système dans deux situations : l'une lente et l'autre rapide.

L'état  $\mathbf{z}$  atteint son équilibre asymptotique en un temps  $\varepsilon$ . Si la commande appliquée au système (5.25) est un retour d'état lent tel que  $\mathbf{u} = h(\mathbf{y})$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit le système admet un point d'équilibre. Soit  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  cet équilibre asymptotiquement stable de l'état  $\mathbf{z}$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, la dynamique de la partie rapide converge instantanément vers son équilibre, on a alors  $\mathbf{z} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ .

**Théorème 5.3.1** *S'il existe un équilibre asymptotiquement stable  $\mathbf{z} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ , alors, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la solution du système (5.25) tend vers la solution dégénérée du système :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \varepsilon) \\ \mathbf{z} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \end{array} \right.$$

L'état  $\mathbf{z}$  tend vers son équilibre asymptotiquement stable. Ce théorème est l'interprétation partielle à l'état lent du théorème de Tikhonov [Roussel, 2005; Fenichel, 1979]. Dans ce cas, seules les variables lentes du système sont considérées. Le système lent (5.25a) est alors :  $\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{u}), \mathbf{u}, 0)$ . Le sous-système lent est considéré comme perturbé par le sous-système rapide.



Le cas rapide est étudié après avoir effectué un changement de variable temporelle : le temps rapide  $\bar{t}$  est introduit tel que :

$$\bar{t} = \frac{t}{\varepsilon} \quad (5.26)$$

Ce changement d'échelle temporelle permet de visualiser les phénomènes transitoires rapides en considérant les variables lentes comme statiques. La théorie des perturbations singulières est toujours vérifiée avec ce temps, le critère étant de choisir une échelle temporelle qui permette d'isoler l'état rapide en figeant l'état lent.

On note avec  $\zeta'$  la dérivée de de la variable  $\zeta$  par rapport au temps  $\bar{t}$ , telle que :

$$\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta}{d\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{\zeta'}{\varepsilon} \quad (5.27)$$

L'introduction de cette échelle de temps permet une réécriture du système (5.25) :

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \varepsilon f(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \varepsilon) & (5.28a) \\ \mathbf{z}' = g(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{z}, \varepsilon) & (5.28b) \end{cases}$$

Par hypothèse, il existe un point d'équilibre tel que  $\mathbf{y}$  est stable. À cette échelle de temps  $\varepsilon \rightarrow 0$  fige effectivement la dynamique du système lent ( $\dot{\mathbf{y}} = 0$ ) et permet d'analyser la dynamique des variables rapides et leur convergence ou non vers l'équilibre.

Le théorème de Tikhonov, donné au paragraphe 11.4 du livre [Khalil, 2001], se formule alors ainsi :

**Théorème 5.3.2 (Théorème de Tikhonov)** Si :

- les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues
- il existe une solution  $\mathbf{z} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$
- le système (5.25) est asymptotiquement stable quand  $\varepsilon \rightarrow 0$
- le système (5.28) admet un point d'équilibre asymptotiquement stable en 0
- $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  est dans le domaine d'attraction de cet équilibre

Alors, il existe un  $\varepsilon$  suffisamment petit tel que le système (5.25) est exponentiellement stable à l'origine.

### 5.3.2 Applications de la théorie des perturbations singulières

La théorie des perturbations singulières a notamment été utilisée en robotique dans le contexte de l'approche micro-macro : un robot de petites dimensions et aux grandes dynamiques embarqué sur un robot aux grandes dimensions et faibles dynamiques.

Dans [Lee et Book, 1990], cette théorie a été utilisée pour commander un robot série de petites dimensions placé sur un robot plus grand et destiné à compenser les vibrations liées aux flexibilités de ce dernier. Dans cet article, le robot flexible est commandé par couple calculé et le micro-robot embarqué a une commande proportionnelle à l'erreur en vitesse du macro-robot. La théorie des perturbations singulières est utilisée dans ce cadre pour simplifier les équations et pour effectuer une preuve de stabilité de la commande.

Le même principe est utilisé dans un contexte similaire de réduction de vibrations avec un système micro-robot/macro-robot dans [Lew et Moon, 2001] ou encore dans [Siciliano et Book, 1989]. Dans ces deux références, la forme standard de la théorie de la perturbation singulière, donnée à l'équation (5.25), est obtenue par inversion du modèle obtenu par le PFD.

Dans [Nenchev et al., 1999], la théorie des perturbations singulières est appliquée à la commande d'un système micro-robot/macro-robot dont le macro-robot possède une architecture redondante. Les deux systèmes ne sont pas séparés par des vitesses de fonctionnement différentes mais par le fait que le macro-robot ait un espace nul, ce qui permet une utilisation du micro-robot sans influence sur le macro-robot. Une preuve de stabilité d'une commande comprenant les deux systèmes est donnée dans l'article.

Dans [Babaghasabha et al., 2016], une loi de commande composite est proposée : une partie lente consiste en une commande adaptative pour rejeter les perturbations dues aux incertitudes paramétriques de la modélisation du RPC et une partie rapide qui est ajoutée pour contrôler les vibrations longitudinales dans les câbles. De même dans [Vafaei et al., 2011], la théorie des perturbations singulières est utilisée pour proposer une commande pour un RPC en tenant compte de sa flexibilité puis pour en démontrer la stabilité.

Enfin, dans [Khosravi et Taghirad, 2014], la théorie des perturbations singulières est utilisée pour démontrer qu'un contrôleur composite constitué d'un *computed torque* considérant un modèle rigide des câbles et d'un correcteur dérivateur sur l'élongation des câbles permet d'amortir les vibrations tout en assurant la commande en position de la plateforme. Les enrouleurs sont pilotés en couple et la stabilité analysée par la théorie des perturbations singulières.

## 5.4 Preuve de stabilité

### 5.4.1 Séparation par échelle de temps

Avant d'appliquer la théorie des perturbations singulières afin de procéder à une analyse de sa stabilité, il est nécessaire de réécrire l'équation du système (5.24) en boucle fermée sous la forme standard correspondant à l'équation (5.25).

Pour cela, en premier lieu, un changement de variable est réalisé en introduisant la variable  $[\Delta \mathbf{x}^\top \quad -\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top]^\top$ . Le système (5.24) est réécrit avec cette nouvelle variable :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{12}^\top & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{x}} \\ -\ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{K}_\nu & 0 \\ \mathbf{H}_{12}^+ \mathbf{K}_\eta & \mathbf{K}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}} \\ -\dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{K}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ -\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Ce résultat est ensuite multiplié par  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{H}$  pour obtenir l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Delta \ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}_\nu \Delta \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_\eta \Delta \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{x} + \mathbf{H}_{12} (\mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}) & (5.30a) \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{H}_{12}^\top \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{K}_\nu \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_{22} \mathbf{H}_{12}^+ \mathbf{K}_\eta \Delta \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}_{12}^\top \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{x} - \mathbf{H}_{22} (\mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}) & (5.30b) \end{cases}$$

Soient  $\mathbf{K}_\eta$ ,  $\mathbf{K}_p$  et  $\mathbf{K}_\nu$  des matrices de gain diagonales, et soient  $\mathbf{K}_\theta$  et  $\mathbf{K}_\omega$  deux matrices de gains de valeurs faibles par rapport à  $\mathbf{K}_\eta$ . Soit  $\varepsilon$  un paramètre scalaire strictement positif et considéré comme petit. Par choix, les matrices  $\mathbf{K}_\theta$  et  $\mathbf{K}_\omega$  sont de l'ordre de grandeur  $\mathcal{O}(1)$ , la matrice  $\mathbf{K}_p$  de l'ordre de grandeur  $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$ , et les matrices  $\mathbf{K}_\nu$  et  $\mathbf{K}_\eta$  de l'ordre  $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ .

On pose  $\mathbf{K}_p = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I}_{n \times n}$ . Soient  $\widetilde{\mathbf{K}}_\nu = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{K}_\nu$  et  $\widetilde{\mathbf{K}}_\eta = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{K}_\eta$  deux matrices de gain diagonales et d'ordre de grandeur  $\mathcal{O}(1)$ .

On introduit la variable  $\mathbf{z} = \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{x} = \frac{1}{\varepsilon} \Delta \mathbf{x}$  afin de pouvoir transcrire le système (5.30) sous la forme standard de la théorie des perturbations singulières [Siciliano et Book, 1989] :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\mathbf{z}} = -\sqrt{\varepsilon} (\widetilde{\mathbf{K}}_\nu + \widetilde{\mathbf{K}}_\eta) \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{z} + \mathbf{H}_{12} (\mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}) & (5.31a) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{H}_{21} \mathbf{H}_{11}^{-1} \widetilde{\mathbf{K}}_\nu \dot{\mathbf{z}} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{H}_{22} \mathbf{H}_{12}^+ \widetilde{\mathbf{K}}_\eta \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}_{21} \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{z} - \mathbf{H}_{22} (\mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}) & (5.31b) \end{cases}$$

Pour une valeur suffisamment faible de  $\varepsilon$ , ce système devient un système à deux échelles de temps avec une variable  $\boldsymbol{\theta}$  évoluant lentement et une variable rapide  $\mathbf{z}$ . L'évolution de la variable rapide est dans ce cas indépendant de celle de la variable lente consi-

dérée comme quasi-statique. Dans ce cas on peut écrire :

$$\begin{cases} \varepsilon \rightarrow 0 \\ \|\dot{\mathbf{z}}\| \gg \|\ddot{\boldsymbol{\theta}}\| \end{cases}$$

Le modèle ayant été écrit sous une forme standard il devient possible d'utiliser la théorie des perturbations singulières pour déterminer la stabilité du système (5.31) [Ghorbel *et al.*, 1989].

### 5.4.2 Sous-système lent

Le modèle à l'état lent ou quasi-statique est obtenu à partir de la forme standard (5.31) en posant  $\varepsilon = 0$ . On obtient alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{0} = -\mathbf{z} + \mathbf{H}_{12}(\mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}) & (5.32a) \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{H}_{12}^\top \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{z} - \mathbf{H}_{22}(\mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}) & (5.32b) \end{cases}$$

En divisant les deux côtés de l'équation (5.31a) par  $\varepsilon$ , on obtient une valeur de  $\dot{\mathbf{z}}$  qui devient très grande quand  $\varepsilon$  tend vers 0. On peut alors considérer que  $\mathbf{z}$  converge instantanément vers la valeur  $\mathbf{z}_s$ , qui est la solution de l'équation (5.32a) quand  $\varepsilon = 0$ . En substituant  $\mathbf{z}$  par  $\mathbf{z}_s$  dans l'équation (5.31b) quand  $\varepsilon = 0$  on obtient le modèle dans le cas lent ou quasi-statique pour le système (5.31) :

$$\begin{cases} \mathbf{z}_s = \mathbf{H}_{12}(\mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}) & (5.33a) \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21} \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{H}_{12})(-\mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}) & (5.33b) \end{cases}$$

Enfin, en considérant la relation suivante :

$$\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21} \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{H}_{12} = \mathbf{M}_{22}^{-1} \quad (5.34)$$

Le sous-système lent (5.33b) devient :

$$\mathbf{z}_s = -\mathbf{H}_{12} \mathbf{M}_{22} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (5.35)$$

La fonction candidate de Lyapunov  $V_s$  choisie pour déterminer la stabilité du système dans le cas quasi-statique est donnée par (5.36). Cette fonction est construite comme la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique du système.

$$V_s = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{M}_{22} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} \quad (5.36)$$

Par construction la matrice  $\mathbf{K}_\theta$  est constante et définie positive. La matrice  $\mathbf{M}_{22}$  est symétrique définie positive. D'après la relation (5.35), la dérivée de  $V_s$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V}_s &= \dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{M}_{22} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} \\ &= \dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{M}_{22} \mathbf{M}_{22}^{-1} (-\mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}) + \dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} \\ &= -\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{K}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}\quad (5.37)$$

Comme la matrice  $\mathbf{K}_\omega$  est définie positive, alors  $\dot{V}_s$  est strictement négative pour tout  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  non nul. Donc le point d'équilibre du modèle du sous-système lent est exponentiellement stable.

### 5.4.3 Sous-système rapide

La convergence immédiate de  $\mathbf{z}$  en  $\mathbf{z}_s$  supposée dans l'établissement du modèle à l'état quasi-statique requiert la stabilité de la partie rapide du modèle. Pour étudier le comportement de la variable  $\mathbf{z}$  par rapport à sa valeur quasi-statique  $\mathbf{z}_s$ , est introduite la notation  $\mathbf{z}_f$ .  $\mathbf{z}_f$  représente l'écart entre  $\mathbf{z}$  et sa valeur en régime lent  $\mathbf{z}_s$ . On note :  $\mathbf{z}_f = \mathbf{z} - \mathbf{z}_s$ .

De plus, conformément à la théorie des perturbations singulières, une échelle de temps rapide notée  $\bar{t}$  est introduite, telle que  $\bar{t} = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$ . Soit une fonction  $f : \bar{t} \rightarrow f(\bar{t})$ , la dérivée de cette fonction par rapport à  $\bar{t}$  est notée  $f'(\bar{t}) = \frac{\partial f(\bar{t})}{\partial \bar{t}}$  et ainsi  $f'(\bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \dot{f}(t)$ .

L'équation du sous-système rapide, aussi appelée équation de la couche limite du système (5.31) devient la nouvelle échelle de temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z}'' = -(\widetilde{\mathbf{K}}_\nu + \widetilde{\mathbf{K}}_\eta) \mathbf{z}' - \mathbf{z} + \mathbf{H}_{12} \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} \right) \end{array} \right. \quad (5.38a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\theta}'' = \varepsilon \left( \mathbf{H}_{21} \mathbf{H}_{11}^{-1} \widetilde{\mathbf{K}}_\nu \mathbf{z}' + \mathbf{H}_{22} \mathbf{H}_{12}^+ \widetilde{\mathbf{K}}_\eta \mathbf{z}' + \mathbf{H}_{21} \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{z} - \mathbf{H}_{22} \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} \right) \right) \end{array} \right. \quad (5.38b)$$

Quand  $\varepsilon$  tend vers 0, l'échelle de temps rapide  $\bar{t}$  tend vers l'infini; elle est en quelque sorte étirée puisque un mouvement à cette échelle de temps est infiniment long comparé à un mouvement à l'échelle de temps usuelle. Dans ce cas, la variable lente  $\boldsymbol{\theta}$  est constante et  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\mathbf{z}_s$  est également constante pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{z} = \mathbf{z}_f + \mathbf{H}_{12} \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} \quad (5.39)$$

Le système (5.38) peut être réécrit quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{z}'' = \mathbf{z}_f'' = -(\widetilde{\mathbf{K}}_\nu + \widetilde{\mathbf{K}}_\eta) \mathbf{z}_f' - \mathbf{z}_f + \mathbf{H}_{12} \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \boldsymbol{\theta}'' = \mathbf{0} = -\varepsilon (\mathbf{H}_{12}^\top \mathbf{H}_{11}^{-1} \widetilde{\mathbf{K}}_\nu \mathbf{z}_f' - \mathbf{H}_{22} \mathbf{H}_{12}^+ \widetilde{\mathbf{K}}_\eta \mathbf{z}_f' - \mathbf{H}_{21} \mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{z}_f - \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta}) \end{array} \right. \quad (5.40a)$$

$$(5.40b)$$

Enfin, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, le sous-système (5.40b) tend vers l'équation triviale  $\mathbf{0} = \mathbf{0}$  comme  $\boldsymbol{\theta}$  est stationnaire et le sous-système (5.40a) dégénère vers l'équation dynamique suivante :

$$\mathbf{z}_f'' = -(\widetilde{\mathbf{K}}_\nu + \widetilde{\mathbf{K}}_\eta) \mathbf{z}_f' - \mathbf{z}_f \quad (5.41)$$

De la même manière que dans le cas lent, une fonction  $V_f$  candidate de Lyapunov peut être construite comme la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique du système, avec un système de raideur unitaire. L'expression de cette fonction est la suivante :

$$V_f = \frac{1}{2} \mathbf{z}_f'^\top \mathbf{z}_f' + \frac{1}{2} \mathbf{z}_f^\top \mathbf{z}_f \quad (5.42)$$

D'après (5.41), la dérivée de  $V_f$  par rapport au temps  $\bar{t}$  est donnée par :

$$V_f' = \mathbf{z}_f'^\top \mathbf{z}_f'' + \mathbf{z}_f'^\top \mathbf{z}_f = -\mathbf{z}_f'^\top (\widetilde{\mathbf{K}}_\nu + \widetilde{\mathbf{K}}_\eta) \mathbf{z}_f' \quad (5.43)$$

Les matrices de gain  $\widetilde{\mathbf{K}}_\eta$  et  $\widetilde{\mathbf{K}}_\nu$  sont définies positives, donc on a  $V_f' < 0 \forall \mathbf{z}_f' \neq \mathbf{0}$ . Donc l'origine du système  $\{\mathbf{z}_f, \mathbf{z}_f'\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}$  sur la couche limite est exponentiellement stable.

#### 5.4.4 Stabilité globale

Le système (5.31) peut être séparé par échelle de temps en deux sous-systèmes différents à condition que les valeurs des matrices de gains  $\mathbf{K}_\theta$  et  $\mathbf{K}_\omega$  soient faibles par rapport aux valeurs des matrices  $\mathbf{K}_\eta$ ,  $\mathbf{K}_p$  et  $\mathbf{K}_\nu$ . En pratique la différence de valeur doit être d'un ordre de grandeur pour pouvoir être considérée comme significative.

Comme le sous-système lent et le sous-système rapide sont tous deux exponentiellement stables, on peut faire intervenir le théorème de Tikhonov. D'après ce théorème, il existe un  $\varepsilon$  petit tel que le système (5.31) est exponentiellement – et donc asymptotiquement – stable.

La stabilité du système permet d'assurer qu'ajouter un stabilisateur tel que défini dans cette thèse à un RPC n'empêche pas ce dernier de se stabiliser à la pose souhaitée.

## 5.5 Conclusion

La loi de commande décrite dans ce chapitre s'applique au système composé d'un **RPC** et d'un stabilisateur embarqué sur sa plate-forme. Le système muni de cette loi de commande est stable. Il est donc possible d'embarquer un stabilisateur muni de cette loi de commande sur la plate-forme d'un **RPC** sans entraver la capacité de celui-ci à atteindre une pose désirée dans son espace de travail. Il reste alors à évaluer l'intérêt d'embarquer un stabilisateur sur la plate-forme d'un **RPC** dans le but d'atténuer ses vibrations en mesurant les performances obtenues avec la loi de commande définie dans ce chapitre. Pour cela des essais sont pratiqués sur deux plate-formes expérimentales, un **RPC** suspendu plan et le **RPC** de grandes dimensions *CoGiRo*.

---

# Simulations

## Préambule

*Dans ce chapitre, les développements théoriques effectués dans les chapitres précédents sont réalisés en simulation.*

*Dans une première partie les deux dispositifs expérimentaux utilisés sont décrits, un [RPC](#) suspendu plan et le [RPC](#) CoGiRo déjà présenté au chapitre [1](#).*

*Puis une simulation numérique pouvant décrire différents [RPC](#) suspendus est réalisée à partir des composants élémentaires décrits dans la première partie.*

*Enfin, la dernière partie décrit les séries de simulations pour les deux robots décrits en première partie et en présente les résultats. De plus, une troisième simulation est menée pour déterminer la robustesse de la compensation de vibrations aux erreurs de modélisation.*

## Sommaire

---

6.1	Description des <a href="#">RPC</a> simulés . . . . .	114
6.2	Modèle de simulation . . . . .	119
6.3	Résultats en simulation . . . . .	121
6.4	Conclusion . . . . .	132

---



## 6.1 Description des RPC simulés

Le simulateur développé pour cette thèse se veut générique pour tous les RPC. Cela se traduit par le fait que la plupart des fonctions du simulateur peuvent être utilisées pour tous les robots à câbles, leur configuration particulière est définie à l'initialisation. Néanmoins, deux robots ont été étudiés de manière plus approfondie. Il s'agit d'un RPC suspendu plan à 3 DDL et 3 câbles et du RPC suspendu à 6 DDL et 8 câbles *CoGiRo*.

### 6.1.1 Robot plan

Le premier exemple de RPC traité au cours de cette thèse est un robot à câbles suspendu, plan et possédant 3 DDL : les translations selon les axes Z et Y et la rotation autour de l'axe X du repère  $\mathcal{R}_0$  défini au chapitre 3. Ce robot est représenté Figure 6.2. Ce RPC étant suspendu, le poids de la plate-forme est utilisé pour mettre les câbles en tension de façon passive.

La conception de ce robot s'inspire de l'exemple de RPC plan suspendu décrit dans [Jiang et Gosselin, 2014] et représenté Figure 6.2. Le point noté  $B_3$  sur la figure est au milieu du segment  $[B_1B_2]$  formé par les coins supérieurs de la plate-forme. Les coins supérieurs de la plate-forme,  $B_1$  et  $B_2$  sont reliés aux points  $A_1$  et  $A_2$ , et  $B_3$  le milieu de  $[B_1B_2]$  au point  $A_3$ , situé à la limite de l'espace de travail du RPC.

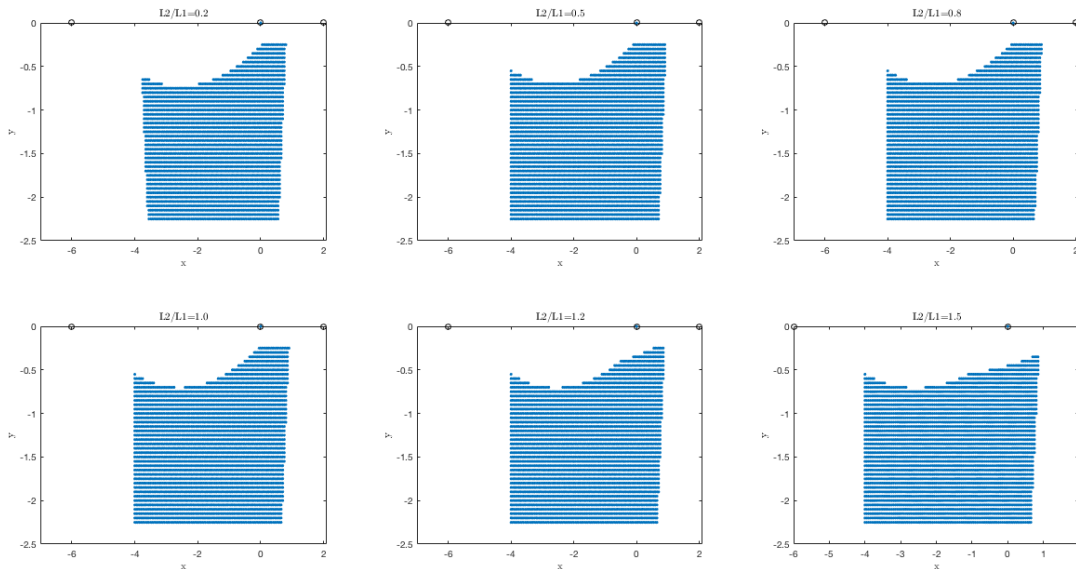


Figure 6.1: Espace de travail en fonction de  $L_2/L_1$

Dans le cas présent les rapports entre les distances  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$  et  $B_1B_2$  ont été sélection-

nés pour assurer le plus grand espace de travail possible pour une distance  $A_2A_3$  donnée. L'espace de travail est ici défini comme l'espace dans lequel le RPC peut fournir un torseur d'effort compensant son poids. On nomme  $L_1$  la distance  $A_1A_2$  et  $L_2$  les distances  $B_1B_3$  et  $B_3B_2$ .

La forme et la taille de l'espace de travail du robot plan en fonction du rapport  $L_2/L_1$  sont données aux Figures 6.1. Le rapport de longueurs  $L_1 = 2L_2$  a été sélectionné d'après ces données. On observe alors l'égalité suivante entre les distances :  $A_1A_2 = B_1B_2$ .

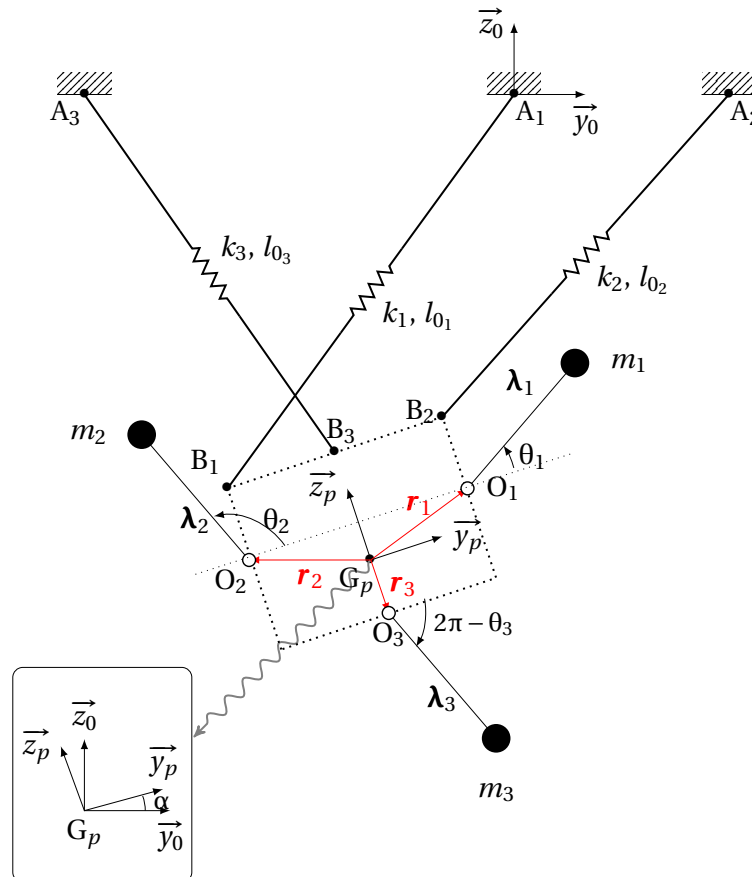


Figure 6.2: Représentation du RPC suspendu plan à 3 DDL avec un stabilisateur 3 bras embarqué

Dans ce modèle les bras sont représentés par des masses ponctuelles de valeur  $m_j$  attachées à des bras de longueur  $\lambda_j$  dont la masse est négligée. La configuration initiale du stabilisateur a été choisie de façon à maximiser l'espace parcouru par les bras en évitant les collisions tout en assurant la possibilité de réaliser des torseurs d'efforts dans toutes les directions principales des vibrations, qui sont ici toutes les directions du plan : les axes Y et Z et la rotation  $\alpha$  autour de l'axe X.

Tableau 6.1: Valeurs des paramètres du RPC suspendu plan à 3 DDL avec un stabilisateur 3 bras embarqué

Paramètre	Valeur
$\mathcal{R}_0\mathbf{A}$	$\begin{bmatrix} 0\text{m} & 0,24\text{m} & -2\text{m} \\ 0\text{m} & 0\text{m} & 0\text{m} \end{bmatrix}$
$\mathcal{R}_p\mathbf{B}$	$\begin{bmatrix} -0,12\text{m} & 0,12\text{m} & 0\text{m} \\ 0,15\text{m} & 0,15\text{m} & 0,15\text{m} \end{bmatrix}$
$k_c$	$500\text{Nm}^{-1}$
$\mathbf{x}_0$	$[-0,94\text{m} \quad -1\text{m} \quad 0\text{rad}]^\top$
$\boldsymbol{\theta}_0$	$[0\text{rad} \quad \pi\text{rad} \quad \frac{-\pi}{2}\text{rad}]^\top$
$m_p$	$3,2\text{kg}$
$\underline{\mathbf{I}}_p$	$0,0394\text{kgm}$
$\lambda_j$	$0,1\text{m}$
$m_j$	$0,15\text{kg}$

Finalement, les paramètres utilisés dans la simulation sont donnés dans le Tableau 6.1. Le robot obtenu est représenté dans la Figure 6.2.

### 6.1.2 CoGiRo

Le deuxième exemple de RPC traité au cours de cette thèse est le RPC suspendu de grandes dimensions *CoGiRo*. Il s'agit d'un RPC à 6 DDL et 8 câbles attachés à chacun des 8 sommets de la plate-forme cubique.

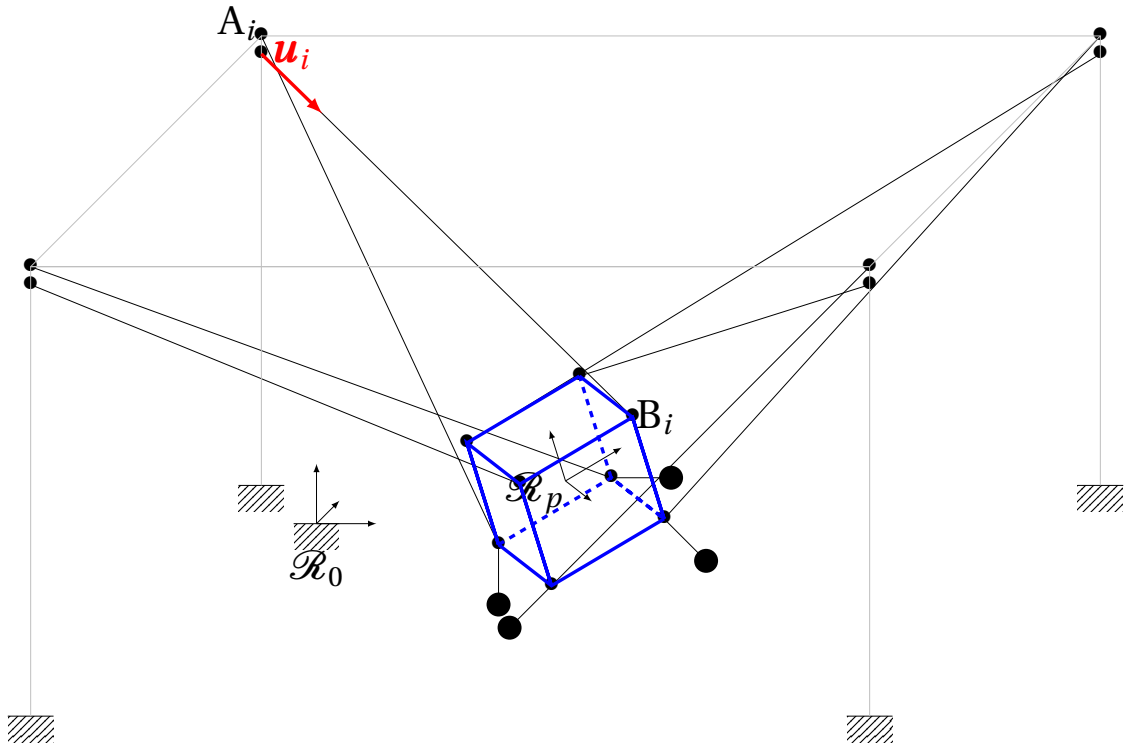


Figure 6.3: Représentation du RPC *CoGiRo*

Le robot *CoGiRo* muni du stabilisateur à 4 bras dont la configuration optimale a été déterminée au chapitre 4 est montré à la Figure 6.3. Les paramètres de modélisation utilisés dans la simulation sont donnés dans deux tableaux : dans le Tableau 6.2 les coordonnées des points d'attaches des câbles sont notées et le Tableau 6.3 présente les valeurs des autres paramètres pris en compte.

Le module d'Young du câble n'a pas une valeur constante, car cette dernière varie selon la longueur de câble déroulé. Cependant dans le cas étudié ici cette variation est faible. La valeur choisie correspond donc au module d'Young du matériau multiplié par un coefficient de remplissage qui représente le fait qu'un câble est constitué de filins tressés et non une tige pleine.

La matrice de raideur du robot *CoGiRo* à la pose  $\mathbf{x}_0$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$  pour une masse

Tableau 6.2: Points d'attache des câbles de *CoGiRo*

	${}^0x$ (m)	${}^0y$ (m)	${}^0z$ (m)		${}^p x$ (m)	${}^p y$ (m)	${}^p z$ (m)
$a_0$	-7.1775	-5.4361	5.3911	$b_0$	0.495	-0.5075	-0.458
$a_1$	-7.4594	-5.1504	5.3999	$b_1$	-0.500	0.3560	0.542
$a_2$	-7.3911	5.1940	5.3976	$b_2$	-0.500	-0.2625	-0.458
$a_3$	-7.1026	5.4753	5.4094	$b_3$	0.500	0.3410	0.542
$a_4$	7.2398	5.3759	5.4093	$b_4$	-0.495	0.5075	-0.458
$a_5$	7.5208	5.0851	5.4200	$b_5$	0.500	-0.3560	0.542
$a_6$	7.4461	-5.2539	5.3874	$b_6$	0.500	0.2625	-0.458
$a_7$	7.1608	-5.5342	5.3973	$b_7$	-0.500	-0.3410	0.542

Tableau 6.3: Valeurs des paramètres de *CoGiRo* avec un stabilisateur à 4 bras embarqué

Paramètre	Valeur
E	57 GPa
$A_c$	4,0828 mm <sup>2</sup>
$\mathbf{x}_0$	[0 m 0 m 1 m 0 rad 0 rad 0 rad] <sup>T</sup>
$\boldsymbol{\theta}_0$	[0 rad -1,5708 rad -3,14159 rad 1,5708 rad] <sup>T</sup>
$m_p$	340 kg
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}_p$	56.6667 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ kg m
$\lambda_j$	0,5 m
$m_j$	2 kg

correspondant à celle de la plate-forme et de son stabilisateur embarqué est donnée par l'équation (6.1).

$$\mathbf{K} = 10^4 \begin{bmatrix} 9.9457 & 0.0405 & -0.0000 & -0.0848 & 0.4755 & -0.0000 \\ 0.0405 & 5.1921 & 0.0000 & -0.4782 & 0.3019 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 4.1398 & -0.0000 & 0.0000 & -0.2171 \\ -0.0848 & -0.4782 & 0.0000 & 2.2811 & -0.4556 & 0.0000 \\ 0.4755 & 0.3019 & 0.0000 & -0.4556 & 3.4782 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.2171 & 0.0000 & 0.0000 & 7.2469 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

On note  $\mathbf{K}^{xy}$  l'élément situé sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $\mathbf{K}$ . Dans l'expression de la matrice de raideur, on constate que le terme de la force selon l'axe Z n'a de composante non-nulle que pour les déplacements selon Z et  $\gamma$ , la rotation autour de Z, qui sont respectivement  $\mathbf{K}^{33}$  et  $\mathbf{K}^{36}$ . Or, pour l'expérimentation actuelle, les vibrations – et donc les déplacements – selon X, Y et  $\gamma$  ne sont pas prises en compte. Cela signifie qu'un mouvement d'excitation selon Z comme par exemple un mouvement purement vertical, ne génère de force que selon l'axe Z, les rotations autour de Z n'étant pas considérées.

## 6.2 Modèle de simulation

La simulation physique du comportement de ces robots a été implémentée à l'aide du logiciel MATLAB® et de la boîte-à-outils de développement graphique *Simulink*®. La simulation se fait en temps continu.

Le fil conducteur de cette modélisation est de pouvoir conserver la plus grande partie du programme à la fois pour les simulations et pour des essais sur système réel, en utilisant pour cela l'outil RPIt [RPIt]. Le projet RPIt pour *Raspberry PI Simulink Coder target*, permet de piloter directement les capteurs et actionneurs d'un robot sous *Simulink*® avec le mode externe pour permettre le prototypage rapide d'un contrôleur.

Le moteur de simulation physique *Simscape Multibody*™ a été utilisé pour décrire la plate-forme du RPC et les bras du stabilisateur. Il s'agit d'une boîte-à-outils de MATLAB® résolvant les équations du mouvement des systèmes mécaniques.

Les câbles sont commandés en tension désirée, selon la commande donnée au chapitre 5. La longueur de câble déroulé désirée est obtenue par inversion du modèle d'élasticité linéaire du câble donné à l'équation (3.1). En pratique, la mesure de la pose de la plate-forme peut être obtenue par un système de vision. Dans le cas plan ce système est similaire à celui utilisé dans [Begey *et al.*, 2018], dans un cas spatial, la pose est obtenue avec un système de stéréovision. La tension dans le câble est obtenue en appliquant l'équation (3.1), c'est à dire en multipliant par  $K_c$  la différence entre la longueur désirée et la longueur en charge obtenue par la pose de la plate-forme. Le programme graphique utilisé pour simuler la tension des câbles en fonction de leur longueur est donné Figure 6.4.

Les moteurs des enrouleurs de câble sont asservis en couple et modélisés par leur fonction de transfert en boucle fermée. Ces fonctions de transfert sont considérées comme toutes identiques. De plus, la bande passante de l'asservissement des moteurs est considérée suffisamment grande pour que le modèle du moteur soit découplé de la charge. De la même manière, les moteurs actionnant les bras sont asservis en couple, cet asservissement étant considéré comme suffisamment rapide pour pouvoir modéliser les moteurs par une fonction de transfert du premier ordre. L'identification et la commande des moteurs sont détaillées en Annexe B.

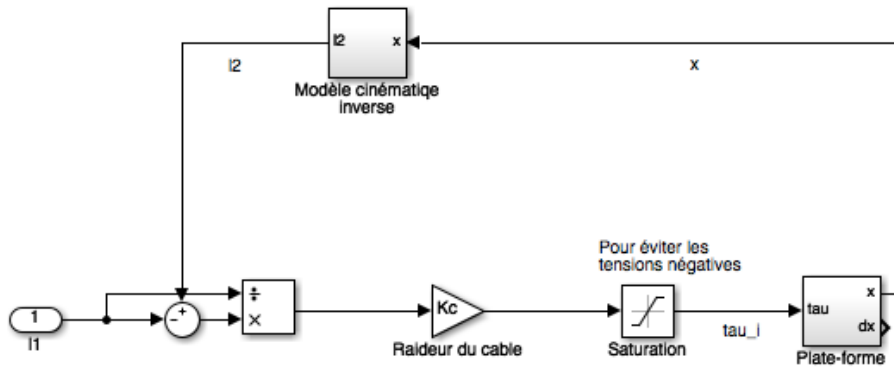


Figure 6.4: Représentation des câbles sous *Simulink*®

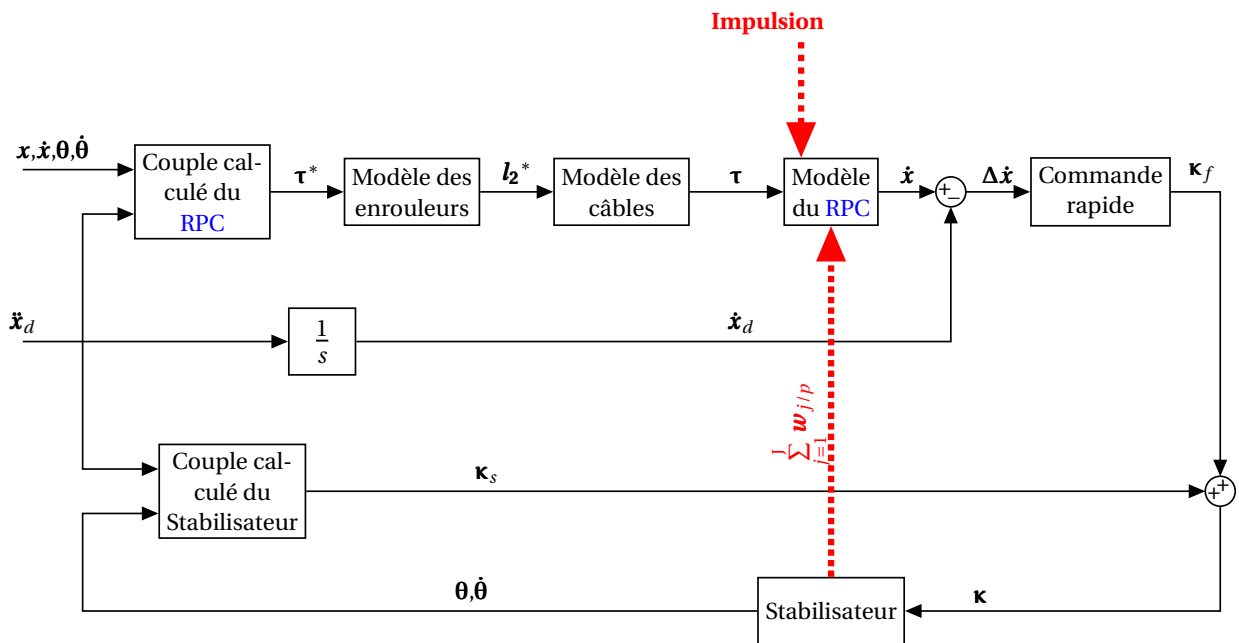


Figure 6.5: Schéma de la simulation

Les blocs de commande par *computed torque* et la commande proportionnelle reprennent les trois lois de commande définies aux équations (5.20), (5.22) et (5.23).

Finalement, un schéma synthétisant la structure du simulateur est donné Figure 6.5.

## 6.3 Résultats en simulation

### 6.3.1 Robot plan

Le prototype modélisé pour la première simulation est le robot plan muni d'un stabilisateur à 3 bras décrit dans la sous-section 6.1.1 ci-dessus. La loi de commande appliquée est celle définie au chapitre 5 et donnée par l'équation (5.24). La vitesse désirée de la plate-forme du RPC  $\dot{\mathbf{x}}_d$  obtenue en intégrant l'accélération désirée  $\ddot{\mathbf{x}}_d$ . La vitesse de vibration  $\Delta\dot{\mathbf{x}}$  du robot est obtenue en soustrayant la vitesse mesurée de la plate-forme retournée par le simulateur à  $\dot{\mathbf{x}}_d$ .

Dans le cas du RPC plan, les moteurs des enrouleurs de câble sont asservis par une boucle de commande bas-niveau et très rapide. Cet asservissement est réalisé au moyen d'un correcteur numérique RST. L'identification et l'asservissement des moteurs sont détaillés en Annexe B.

Les valeurs des gains utilisés dans les trois boucles de commande sont données dans le Tableau 6.4. Ces gains ont été réglés manuellement pour être efficaces à une position de la plate-forme du RPC donnée prise à proximité du centre de son espace de travail. Ces gains vérifient bien les conditions de stabilité données au chapitre 5 : les valeurs des matrices de gains  $\mathbf{K}_\theta$  et  $\mathbf{K}_\omega$  sont plus petites de plusieurs ordres de grandeur que celles de  $\mathbf{K}_\eta$ . De même  $\mathbf{K}_\eta$  et  $\mathbf{K}_\nu$  sont d'un ordre de grandeur au moins inférieures à  $\mathbf{K}_p$ .

La simulation de l'expérience commence au centre de l'espace de travail, où la pose du CDG de la plate-forme vaut  $\mathbf{x}_0 = [-0,94 \text{ m} \quad -1 \text{ m} \quad 0 \text{ rad}]^\top$ . En premier lieu un échelon de position sur l'axe vertical  $\mathbf{z}_0$  et de valeur  $[0 \text{ m} \quad 0,2 \text{ m} \quad 0 \text{ rad}]^\top$  est réalisé après 1 seconde de simulation. Puis, après 15 secondes, un effort ponctuel, noté impulsion sur le schéma de la Figure 6.5, est appliqué au CDG de la plate-forme. Cette impulsion est appliquée pendant 10 ms, dans la direction verticale (selon l'axe  $\mathbf{z}_0$ ) et vers le bas, avec une intensité de 30 N. Dans les deux cas, une perturbation qui fait osciller le RPC est générée. Ces vibrations sont plus fortes selon l'axe  $\mathbf{z}_0$ . Les coordonnées de la pose selon les axes  $\mathbf{y}_0$  et  $\mathbf{z}_0$  sont notées respectivement Y et Z. La coordonnée angulaire de rotation autour de l'axe  $\mathbf{x}_0$  est notée  $\alpha$ .

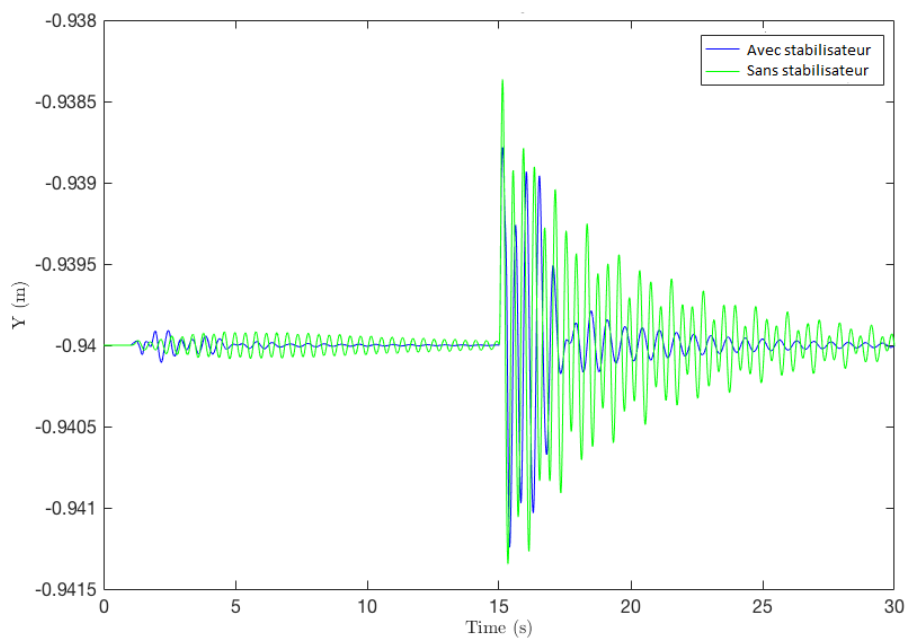
Les résultats sont donnés aux figures 6.6, 6.7 et 6.8. Ces figures représentent la position selon chacun de ses DDL du RPC plan, avec représentée en vert l'évolution de la position pour le RPC non équipé d'un stabilisateur et en bleu pour le RPC avec stabilisateur.

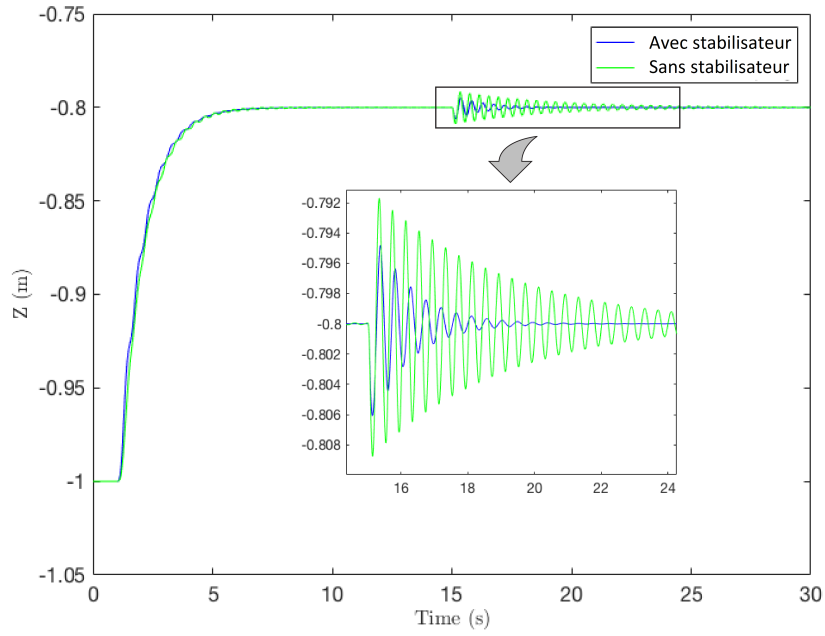
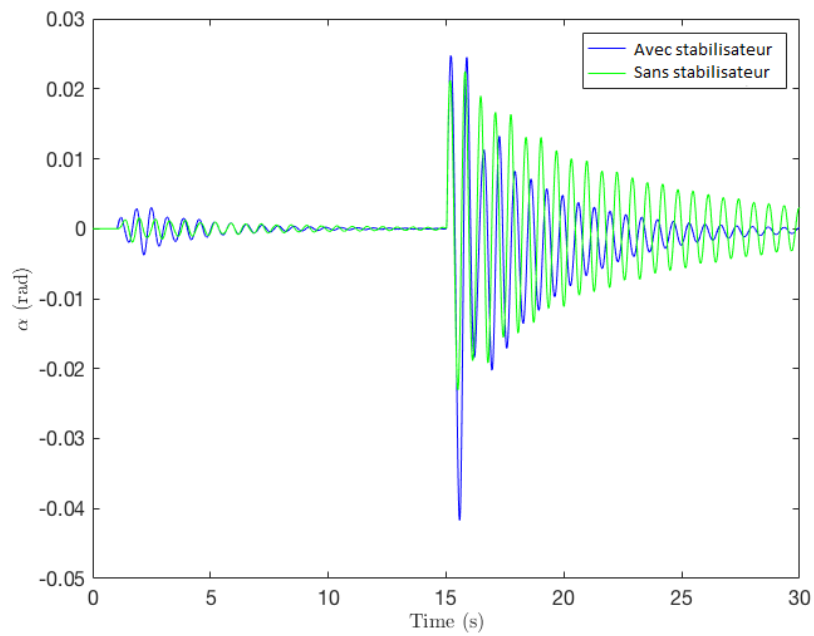
Pour évaluer de façon numérique l'efficacité du stabilisateur, l'erreur moyenne qua-



Tableau 6.4: Gains de commande

Gain	Valeur	Gain	Valeur
$K_p$	$\begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}$	$K_\theta$	$\begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$
$K_v$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$K_\omega$	$\begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$
$K_\eta$	250 $\begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 \end{bmatrix}$		

Figure 6.6: Position selon l'axe  $y_0$

Figure 6.7: Position selon l'axe  $z_0$ Figure 6.8: Position angulaire  $\alpha$  autour de l'axe  $x_0$

dratique (EMQ) entre la valeur désirée et la valeur mesurée durant toute la simulation est introduite. Soient  $Y_d$  la valeur désirée de  $Y(t)$  et  $\hat{Y}$  sa valeur mesurée. La mesure de  $Y$  comporte  $N_s$  échantillons et  $\hat{Y}_k$  est le  $k^{\text{ième}}$  échantillon de  $\hat{Y}$ . L'EMQ sur la valeur de  $Y$ , notée  $\sigma_Y$ , est donnée par :

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{k=1}^{N_s} (\hat{Y}_k - Y_{d_k})^T (\hat{Y}_k - Y_{d_k})} \quad (6.2)$$

Les EMQ sur la valeur de  $Z$  et de  $\alpha$ , notées respectivement  $\sigma_Z$  and  $\sigma_\alpha$ , sont définies de la même manière.

Les EMQ sur la simulation avec et sans stabilisateur selon chacun des axes sont donnée dans le Tableau 6.5. On constate que l'EMQ décroît pour les coordonnées en translation  $Y$  et  $Z$  avec l'ajout de stabilisateur, mais que le mouvement des bras l'augmente légèrement pour la coordonnée angulaire  $\alpha$ .

Tableau 6.5: EMQ avec et sans stabilisateur

Cas	$\sigma_Y(m)$	$\sigma_Z(m)$	$\sigma_\alpha(rad)$
Avec stabilisateur	0.0274	0.0525	0.6325
Sans stabilisateur	0.0298	0.0573	0.6238
Amélioration	8.05 %	8.38 %	-1.28 %

La position angulaire des trois bras du stabilisateur pendant la simulation est donnée Figure 6.9. La position d'un seul des bras, le deuxième, est donnée Figure 6.10. Sur ces deux courbes, en particulier sur la seconde, il est possible de différencier les effets des deux parties de la loi de commande appliquée aux bras. Sur la Figure 6.10, les oscillations de la courbe en rouge représentent les mouvements rapides effectués pour compenser les vibrations et la courbe en bleu pointillée représente la courbe de tendance de la partie lente de la commande qui ramène les bras en position initiale.

Tableau 6.6: EMQ avec et sans stabilisateur pour le deuxième essai sur le RPC plan

Cas	$\sigma_Y(m)$	$\sigma_Z(m)$	$\sigma_\alpha(rad)$
Avec stabilisateur	0.0585	0.0791	0.4475
Sans stabilisateur	0.1376	0.0999	0.7925
Amélioration	57.49 %	20.82 %	43.53 %

Un deuxième essai demandant au RPC de parcourir une autre trajectoire est réalisé. La deuxième simulation commence également au centre de l'espace de travail. Un échelon de

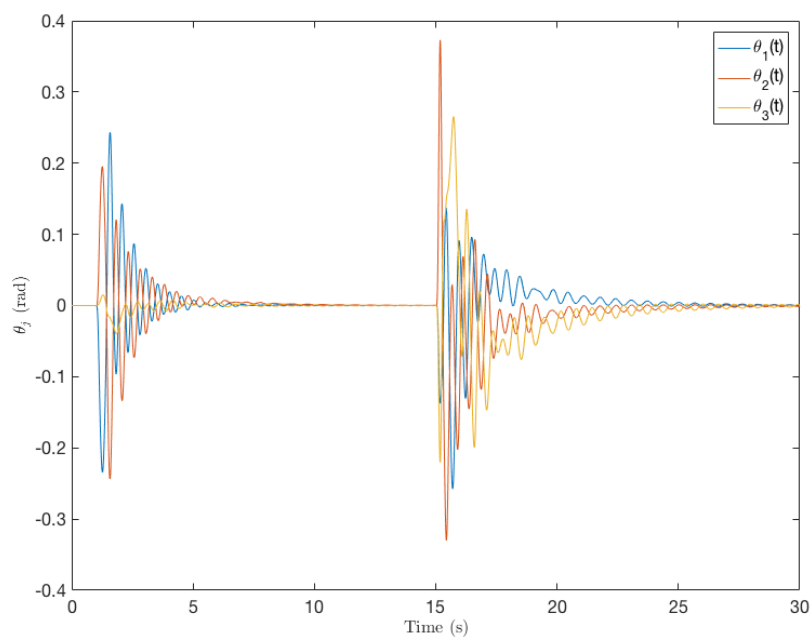


Figure 6.9: Positions angulaires des bras du stabilisateur

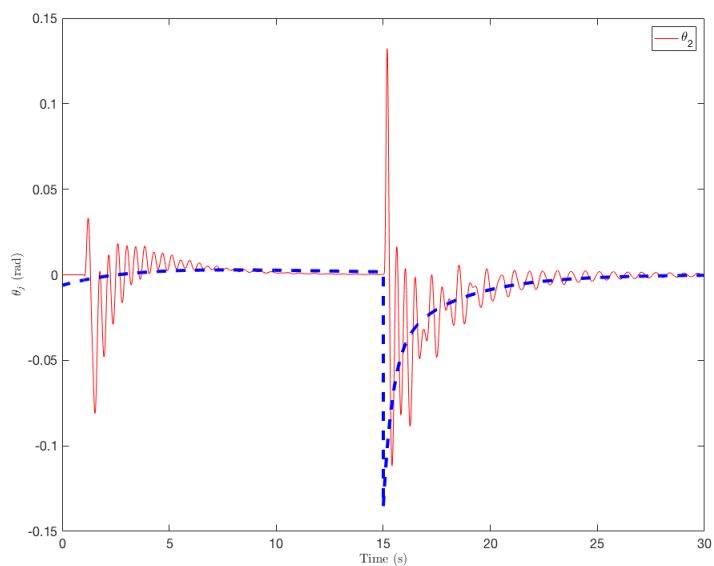


Figure 6.10: Position angulaire du bras 2

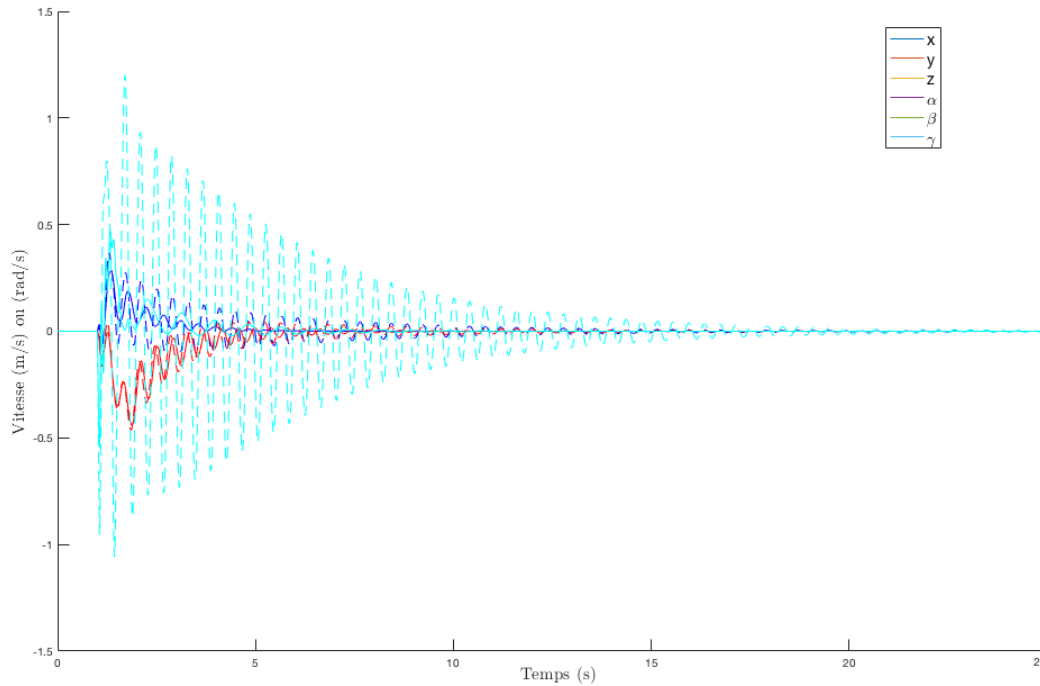


Figure 6.11: Vitesses de vibration de la plate-forme, sans stabilisateur en pointillés et avec stabilisateur en trait plein

position sur les trois axes vertical  $\mathcal{R}_0$ , dont la valeur est  $[0,2 \text{ m} \quad -0,5 \text{ m} \quad \frac{\pi}{15} \text{ rad}]^T$  est réalisé après 1 seconde de simulation. La Figure 6.11 donne les courbes de l'erreur en vitesse  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$ ; les EMQ en position avec et sans stabilisateur sont donnés dans le Tableau 6.6.

Sur ce deuxième exemple, il est aussi clair que l'ajout d'un stabilisateur actif sur la plate-forme du RPC plan est efficace pour compenser les erreurs dues aux vibrations.

### 6.3.2 CoGiRo

La deuxième série de simulations s'est déroulée sur une modélisation numérique du RPC *CoGiRo* dont la plate-forme est équipée d'un stabilisateur à 4 bras, tel que décrit dans la sous-section 6.1.2 ci-dessus. Les moteurs des enrouleurs de câble sont asservis par une boucle de courant interne très rapide (de constante de temps 1 ms) dont l'étude est hors du champ de cette thèse. Ces moteurs ne sont pas modélisés en simulation.

La vitesse de vibration  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$  est obtenue comme précédemment,  $\Delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}$ . La loi de commande appliquée au système composé du RPC et du stabilisateur est celle donnée par l'équation (5.24) du Chapitre 5. Les gains de la loi de commande ont été réglés manuellement, leurs valeurs sont données dans le Tableau 6.7. Ces gains vérifient également les

conditions de stabilité données au chapitre 5 : les valeurs des matrices de gains  $\mathbf{K}_\theta$  et  $\mathbf{K}_\omega$  sont plus petites de plusieurs ordres de grandeur que celles de  $\mathbf{K}_\eta$ . De même  $\mathbf{K}_\eta$  et  $\mathbf{K}_\nu$  sont inférieures à  $\mathbf{K}_p$  d'au moins un ordre de grandeur.

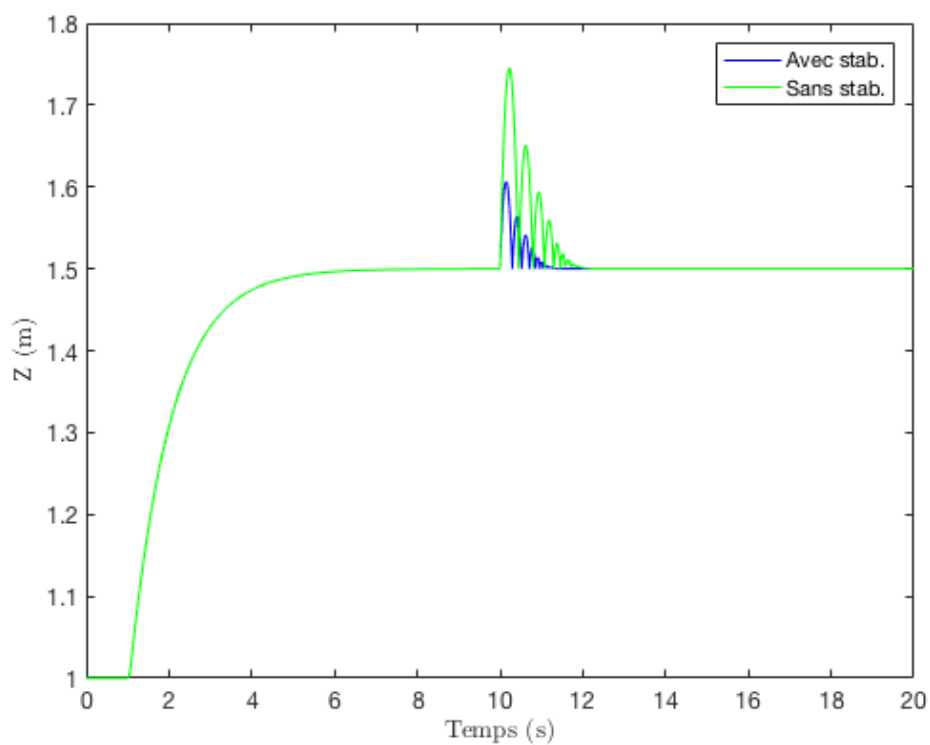
Tableau 6.7: Gains de commande

Gain	Valeur	Gain	Valeur
$\mathbf{K}_\eta$	9.6 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}_\theta$	$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_p$	$2500 \mathbf{I}_{8 \times 8}$	$\mathbf{K}_\omega$	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$
		$\mathbf{K}_\nu$	$50 \mathbf{I}_{8 \times 8}$

La simulation commence au centre de l'espace de travail, où la pose du CDG de la plate-forme vaut  $\mathbf{x}_0 = [0\text{m} \ 0\text{m} \ 1\text{m} \ 0\text{rad} \ 0\text{rad} \ 0\text{rad}]^\top$ . L'expérimentation est similaire à celle réalisée à la section 6.3.1 : d'abord après 1s de simulation un échelon de position est réalisé sur l'axe vertical  $\mathbf{z}_0$  de valeur  $\begin{bmatrix} 0\text{m} & 0\text{m} & 0,5\text{m} & 0\text{rad} & 0\text{rad} & 0\text{rad} \end{bmatrix}^\top$ , puis après 10 secondes, un effort ponctuel de 1000 N est appliqué pendant 10 ms au CDG de la plate-forme.

Le mouvement puis la perturbation génèrent tous deux des oscillations verticales de la plate-forme selon l'axe  $\mathbf{z}_0$ , et uniquement selon cet axe d'après la matrice de raideur de *CoGiRo* (6.1). L'amplitude de ces oscillations est visible sur la Figure 6.12 qui montre la position selon l'axe  $\mathbf{z}_0$  du RPC avec et sans stabilisateur actif. On peut constater dans le Tableau 6.8, qui donne l'EMQ en position avec et sans stabilisateur, qu'une perturbation selon l'axe  $\mathbf{z}_0$  ne génère de vibrations que selon  $\mathbf{z}_0$ . On constate sur la courbe Figure 6.12 que l'ajout d'un stabilisateur actif améliore notablement la vitesse de convergence vers la consigne de la position selon  $\mathbf{z}_0$  de la plate-forme.

Dans la configuration actuelle, les 4 bras ont un mouvement toujours similaire puisqu'ils ne doivent produire d'effort que selon l'axe  $\mathbf{z}_0$ . La position des bras au cours du temps est donnée en Figure 6.13. Comme la perturbation est uniquement selon l'axe verti-

Figure 6.12: Position selon l'axe  $z_0$ Tableau 6.8: EMQ avec et sans stabilisateur pour le premier essai sur *CoGiRo*

Cas	$\sigma_X(m)$	$\sigma_Y(m)$	$\sigma_Z(m)$	$\sigma_\alpha(rad)$	$\sigma_\beta(rad)$	$\sigma_\gamma(rad)$
Sans stabilisateur	$1.17 \cdot 10^{-8}$	$6.83 \cdot 10^{-9}$	20.1993	$6.16 \cdot 10^{-9}$	$6.51 \cdot 10^{-9}$	$1.21 \cdot 10^{-12}$
Avec stabilisateur	$1.89 \cdot 10^{-12}$	$1.05 \cdot 10^{-12}$	7.1517	$4.82 \cdot 10^{-8}$	$7.78 \cdot 10^{-8}$	$7.13 \cdot 10^{-13}$
Amélioration	–	–	64.59%	–	–	–

cal, les quatre masselottes placées symétriquement par rapport au CDG de la plate-forme décrivent le même mouvement.

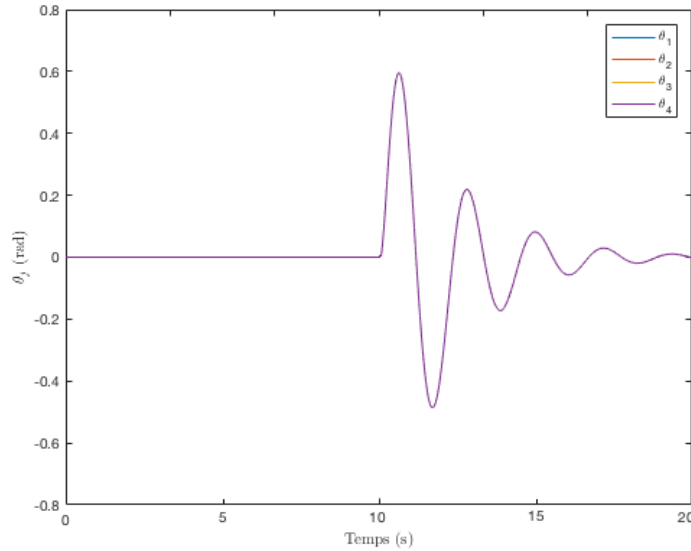


Figure 6.13: Position angulaire des bras

Un deuxième essai demandant au RPC *CoGiRo* de parcourir une autre trajectoire est réalisé. La deuxième simulation commence également au centre de l'espace de travail. Un échelon de position dont la valeur est  $[1\text{ m } 1\text{ m } 0\text{ m } 0\text{ rad } -\frac{\pi}{6}\text{ rad } 0\text{ rad}]^T$  est réalisé après 1 seconde de simulation. La Figure 6.14 donne les courbes des composantes de la pose de la plate-forme mobile avec et sans stabilisateur embarqué; les EMQ en position avec et sans stabilisateur sont donnés dans le Tableau 6.9.

Tableau 6.9: EMQ avec et sans stabilisateur pour le deuxième essai sur *CoGiRo*

Cas	$\sigma_X(m)$	$\sigma_Y(m)$	$\sigma_Z(m)$	$\sigma_\alpha(rad)$	$\sigma_\beta(rad)$	$\sigma_\gamma(rad)$
Sans stabilisateur	10.2632	3.9012	9.8902	9.4698	21.1522	33.1760
Avec stabilisateur	3.1199	0.8093	2.4953	1.5870	7.3339	5.0614
Amélioration	69.60%	79.25%	74.78%	83.24%	65.33%	84.73%

Ces résultats montrent l'efficacité de l'utilisation d'un tel stabilisateur pour la réalisation d'un mouvement selon plusieurs composantes de la pose de la plate-forme mobile. Les vibrations de la plate-forme étant couplées entre elles [Weber, 2016], la compensation



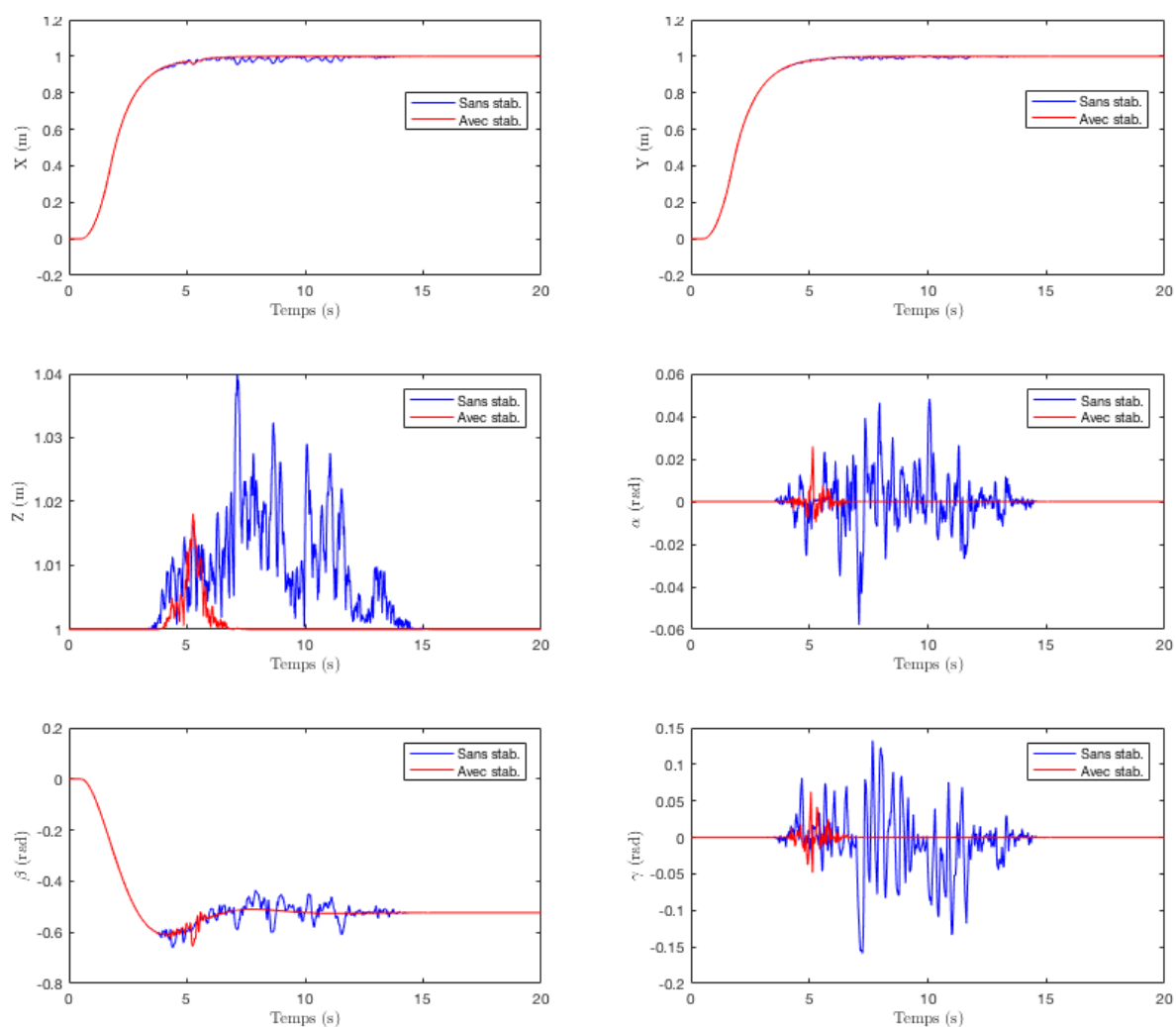


Figure 6.14: Pose du CDG de la plate-forme avec et sans stabilisateur

des vibrations dans les directions où la raideur du RPC est la plus faible permet également d'atténuer les vibrations dans les autres directions.

### 6.3.3 Essais de robustesse

La stratégie de commande développée au cours de cette thèse est basée sur l'utilisation des modèles du RPC et du stabilisateur. Dans le cas de la réalisation physique des démonstrateurs, des erreurs de mesure et de réalisation entachent ces modèles. Il est donc nécessaire de déterminer si la commande développée au Chapitre 5 est robuste aux erreurs de modélisation et quelle est l'influence des erreurs de modélisation paramétriques.

Pour réaliser les essais de détermination des effets des erreurs paramétriques en simulation, un intervalle de confiance a été établi sur les paramètres testés. Les incertitudes paramétriques considérées sont représentées sur la Figure 6.15, ce sont :

- l'erreur de géométrie, en bleu sur la figure : il s'agit de l'erreur de mesure sur la position des points  $A_i$  et  $B_i$
- l'erreur de modélisation des câbles, en magenta sur la figure : il s'agit de l'erreur d'estimation sur la raideur des câbles
- l'erreur de modélisation de la plate-forme, en vert : c'est l'erreur de positionnement du CDG de la plate-forme et de son tenseur d'inertie due à une mauvaise modélisation de la répartition des masses de la plate-forme

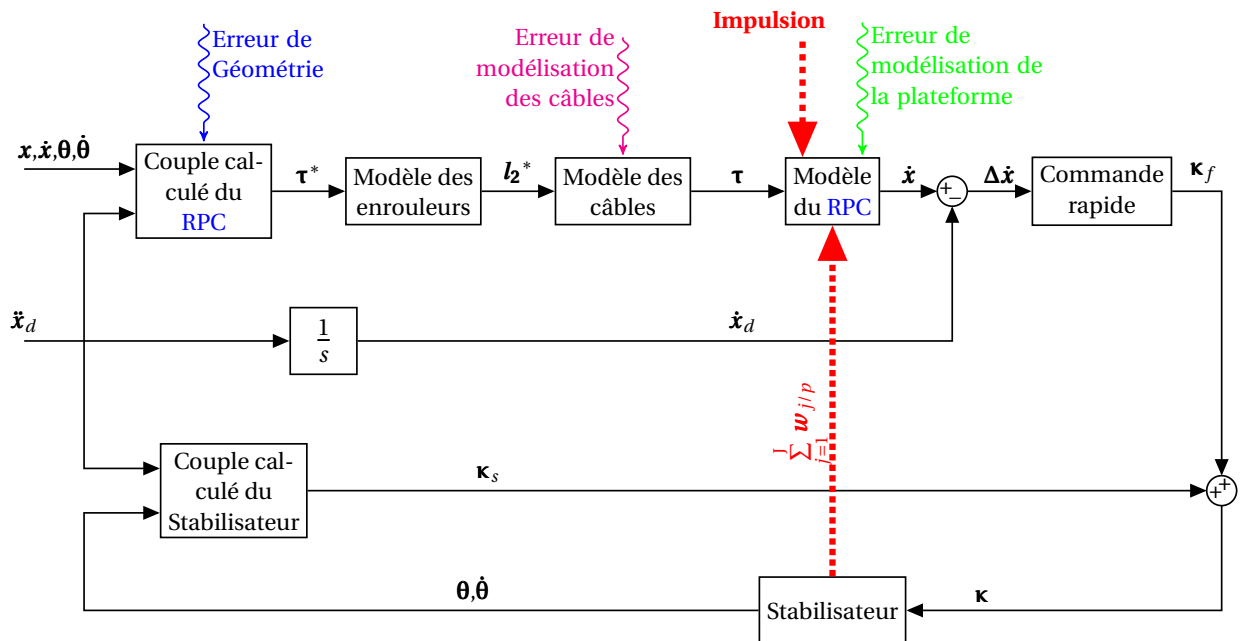


Figure 6.15: Schéma de la simulation avec perturbations

Tableau 6.10: EMQ avec et sans stabilisateur, avec des paramètres incertains

Cas		$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_\alpha$
Avec stabilisateur	moyenne	0.0256	0.1098	0.5955
	écart-type	0.0111	0.0914	0.4875
Sans stabilisateur	moyenne	0.0290	0.1180	0.7987
	écart-type	0.0130	0.0927	0.5012

À chacun des paramètres considérés, une erreur aléatoire a été ajoutée. Cette erreur est comprise dans cet intervalle de confiance :  $\pm 5\%$  de leur valeur selon chaque axe pour les paramètres de position et  $\pm 10\%$  de la valeur nominale de raideur des câbles, donnée dans le Tableau 6.1. La distribution de cette erreur est uniforme.

Les essais ont été réalisés sur le modèle de RPC plan présenté à la section 6.1.1. Deux cents essais ont été réalisés en faisant varier chacune des incertitudes paramétriques. L'Erreur moyenne quadratique (EMQ) est utilisée pour déterminer l'erreur due à chacune des incertitudes paramétriques. Le résultat de ces tests pour le robot plan est donné dans le Tableau 6.10. Ce tableau montre la valeur moyenne et l'écart type de l'EMQ sur la série de 200 essais.

Le Tableau 6.10, présentant la qualité de la compensation active des vibrations en présence d'incertitudes paramétriques, est à comparer au Tableau 6.5 présentant la qualité de la compensation active. On constate que les incertitudes paramétriques ont une influence non négligeable sur la compensation des vibrations, et donc sur l'erreur en position de la plate-forme. Le stabilisateur embarqué parvient néanmoins à compenser les vibrations dans tous le cas testés, y compris avec des incertitudes paramétriques très fortes.

## 6.4 Conclusion

Ce chapitre a montré en simulation la performance de l'amortissement actif des vibrations en utilisant un stabilisateur composé de bras en rotation attaché à la plate-forme d'un RPC.

Les simulations ont été réalisées sur deux RPC différents : un RPC plan à 3DDL et le RPC à 6 DDL *CoGiRo*. Sur chacun de ces RPC, un stabilisateur différent a été embarqué, le stabilisateur défini dans l'article [Lesellier *et al.*, 2018] au RPC plan et le résultat issu de l'optimisation, décrit dans le Tableau 4.3 au chapitre 4, au RPC *CoGiRo*. L'expérimentation a été réalisée numériquement par une simulation utilisant un moteur physique indépendant, tous deux disponibles parmi les outils du logiciel de calcul MATLAB®.

Les résultats de ces essais révèlent que la présence du stabilisateur rend la convergence vers la consigne de la position du RPC plus rapide. L'amortissement actif des vibrations par le stabilisateur embarqué prouve ainsi son efficacité à améliorer la précision de positionnement des RPC suspendus. De plus, une étude a été réalisée pour déterminer la robustesse aux erreurs de modélisation de cette approche d'amortissement actif des vibrations. Cette robustesse a été testée en simulation en spécifiant un intervalle d'erreurs des paramétriques. Les résultats obtenus montrent que l'EMQ est réduite aussi dans les cas d'erreurs de modélisation.



---

# Conclusion

## Préambule

*Cette thèse a présenté la conception, l'optimisation et la commande d'un stabilisateur actif de vibrations embarqué sur la plate-forme d'un RPC. Après la mise en évidence du besoin, la modélisation de différents types de dispositifs actionnés de stabilisation a permis le choix d'une solution : les bras en rotation. Le choix réalisé a rendu possible l'optimisation d'un stabilisateur actif composé de bras, puis la synthèse d'une commande assurant la stabilité de l'ensemble composé du RPC et du stabilisateur embarqué. Enfin, des simulations ont pu montrer la pertinence de ce concept.*

*Ce chapitre se divise en deux parties. La première consiste en un bref résumé de la thèse et de la méthodologie employée pour répondre aux différentes questions soulevées : celles de la modélisation du stabilisateur, du choix de dispositif, de l'optimisation de l'architecture du stabilisateur, de la synthèse de la loi de commande et de la validation en simulation. Finalement, la seconde partie contient des suggestions de travaux futurs et de problèmes encore ouverts.*

## Sommaire

---

7.1 Synthèse . . . . .	136
7.2 Perspectives . . . . .	138

---

## 7.1 Synthèse

Les **RPC**, robots parallèles dont la plate-forme est reliée à une structure de soutien par des câbles et actionnés uniquement par eux, ont des caractéristiques très intéressantes. Ce sont en effet des robots au rapport entre masse propre et charge utile faible, possiblement de grandes dimensions et aux dynamiques élevées, mais ils ont aussi une faible raideur due à la flexibilité des câbles. Les **RPC** suspendus, pour lesquels tous les câbles sont situés au-dessus de la plate-forme et maintenus en tension par le poids de cette dernière, forment une classe de **RPC** dont la faible raideur ne peut être compensée par l'augmentation de la tension dans des câbles antagonistes.

Cette faible raideur est à l'origine des vibrations qui affectent la plate-forme des **RPC**, qui sont en général de faible fréquence et d'une amplitude qui peut être élevée.

Le travail de cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet DexterWide dont un des objectifs est d'utiliser un manipulateur série embarqué sur la plate-forme du **RPC** de grandes dimensions *CoGiRo*, dans le but de réaliser des tâches industrielles génératrices de vibrations sur la plate-forme du **RPC**.

Dans cette thèse, une solution technologique a été proposée pour compenser les vibrations de la plate-forme d'un **RPC**. Cette solution présente l'avantage de ne pas interférer avec la tâche du **RPC** et d'être adaptable à tous les types de **RPC**.

L'objectif de cette thèse est de concevoir un stabilisateur composé de plusieurs dispositifs actionnés embarqués sur la plate-forme d'un **RPC**, d'optimiser son architecture et de synthétiser une commande le prenant en compte pour piloter la position de la plate-forme du **RPC**.

L'étude de l'état de l'art de la robotique parallèle à câbles révèle que les questions de configuration des **RPC** ont été abondamment traitées, un grand nombre d'architectures différentes ayant été proposées. D'autres travaux fournissent des guides de conception des **RPC** en fonction de leur espace de travail, de leur capacité à réaliser certaines tâches, *etc.* L'état de l'art de la commande des **RPC** montre de nombreux travaux sur la répartition des tensions dans les câbles et sur la synthèse de commandes pour piloter leurs plate-formes, en prenant en compte ou non la déformation des câbles. D'autres travaux s'intéressent à la commande des **RPC** dont la plate-forme est sujette à des vibrations. Les méthodes utilisées dans la littérature pour compenser des vibrations se divisent en trois familles : les méthodes d'amortissement passif des vibrations, d'amortissement par la commande des enrouleurs et d'amortissement actif par ajout de dispositifs actionnés, utilisés pour créer un torseur d'effort sur la plate-forme. Le problème de l'optimisation du placement de dispositifs embarqués sur la plate-forme mobile d'un **RPC** est un problème d'optimisation sous contraintes, celles-ci consistant en l'évitement des collisions avec les câbles, la plate-forme et les autres bras ainsi que la contrainte de ne pas faire sortir la plate-forme de l'espace des torseurs faisables du **RPC**. Les méthodes d'optimisation sont très nombreuses dans la lit-

térature, chacune ayant des caractéristiques leur permettant de s'adapter mieux ou moins bien à divers problèmes. Il apparaît que le problème de la disposition et de l'orientation des bras sur la plate-forme étant complexe, des méthodes d'optimisation heuristiques permettant d'obtenir un résultat approché sont plus faciles à mettre en œuvre que des méthodes déterministes.

Le travail décrit dans les chapitres suivants de cette thèse sont désormais synthétisés ci-après.

Dans le chapitre 3, la modélisation des RPC flexibles et de divers dispositifs actionnés pour la compensation de vibrations sont exprimées. La modélisation mécanique a été obtenue au moyen des outils de la mécanique générale. Les câbles sont représentés comme des éléments linéaires élastiques. À partir du modèle de la plate-forme et des modèles des différents dispositifs embarqués, le modèle dynamique complet d'un RPC embarquant ces dispositifs est exprimé. Ce modèle a permis de réaliser le choix d'un dispositif de compensation adéquat pour compenser les vibrations selon tous les DDL du RPC. Les dispositifs choisis pour réaliser le stabilisateur sont des bras actionnés avec une masselotte à leur extrémité.

Les dispositifs étant choisis, un processus d'optimisation doit permettre de trouver leur position sur la plate-forme du RPC et leur orientation initiale qui maximisent l'effet du stabilisateur sur la plate-forme, ce travail est décrit au chapitre 4. Le nombre de dispositifs constituant le stabilisateur ainsi que la masse et la longueur des bras sont déterminées au préalable, les variables d'optimisation sont alors la pose des bras sur la plate-forme et leur orientation initiale. L'optimisation est réalisée avec l'algorithme métaheuristique de l'Optimisation par Essaim de Particules (OEP). La difficulté de cette optimisation concerne les contraintes auxquelles elle est soumise : faisabilité des torseurs et non-collision des bras avec leur environnement. Cette dernière en particulier nécessite d'exprimer l'Espace de Travail des Câbles (ETC) sous forme d'un polyèdre pour pouvoir alléger les calculs réalisés pendant l'optimisation.

Une fois donnée l'architecture du stabilisateur, une loi de commande pour le système composé de la plate-forme mobile du RPC et du stabilisateur embarqué est donnée au chapitre 5. Cette loi de commande comprend trois termes : un terme de tension des câbles pour piloter la pose de la plate-forme, un terme de couples sur les moteurs des bras proportionnels à la vitesse de vibrations et un autre terme de couples sur les moteurs des bras pour ramener les bras à leur orientation initiale. Les commandes de la plate-forme et des bras fonctionnant à deux échelles de temps différentes, il est possible de découpler les deux en utilisant la théorie des perturbations singulières. L'utilisation de cette théorie permet de prouver la stabilité de la commande proposée par la méthode de Lyapunov.

Enfin, pour valider le choix d'utiliser un stabilisateur composé de bras en rotation embarqué sur la plate-forme mobile d'un RPC suspendu, une série de simulation ont été réa-



lisées au chapitre 6 sur deux prototypes de RPC suspendus, l'un plan et l'autre le RPC à 6 DDL de grandes dimensions *CoGiRo*. Ces simulations montrent que la compensation active des vibrations par un stabilisateur embarqué est dans chacun des cas une technique efficace. De plus une autre série d'essais en simulation permet de déterminer la robustesse de la compensation active de vibrations aux erreurs de modélisation du RPC.

## 7.2 Perspectives

Le planning de cette thèse n'a pas permis d'essais du stabilisateur sur un système réel, ni sur *CoGiRo* ni sur le RPC plan. Le matériel nécessaire devant être livré après la fin de la rédaction de ce manuscrit, des expérimentations sont déjà prévues et des résultats expérimentaux viendront probablement compléter la version finale de cette thèse.

Cette thèse a prouvé l'efficacité d'un stabilisateur actif embarqué pour la compensation des vibrations auxquelles est sujette la plate-forme d'un RPC. S'ils se sont révélés pertinents, le choix des dispositifs embarqués, de la modélisation, de la méthode d'optimisation et de la loi de commande suggèrent plusieurs pistes d'amélioration pour des travaux futurs.

La première concerne le modèle utilisé pour représenter les câbles. Dans tous nos travaux actuels les câbles ont été représentés comme non-pesants, rectilignes et linéairement élastiques. Bien qu'elle donne de bons résultats, cette approximation représente mal le modèle réel des câbles. Reprendre les travaux actuels en prenant en compte la masse et le comportement non-linéaire des câbles dans la modélisation et la commande devrait permettre d'obtenir des résultats plus conforme à la réalité et de meilleures performances expérimentales.

L'optimisation réalisée par OEP vise à optimiser uniquement la position et l'orientation initiale des bras. Pour pouvoir simplifier le calcul, le nombre de bras du stabilisateur est fixé en préalable à la procédure d'optimisation, de même que leurs masses et longueurs, ces paramètres étant égaux pour tous les bras. Une optimisation plus longue, qui permettrait d'itérer sur le nombre de bras, leur longueurs et leurs masses pourrait donner un stabilisateur original et beaucoup plus performant que celui proposé dans cette thèse à la fin du chapitre 4.

De plus, lors de la phase de modélisation, il a été décidé d'utiliser exclusivement des bras pour générer des efforts selon tous les DDL à commander de la plate-forme mobile. Pourtant, en couplant des masses en translation avec les bras en rotation, il est possible que la compensation des vibrations soit plus efficace. Le choix des dispositifs d'actionnement pourrait être ajouté au processus d'optimisation.

Les gains de la commande appliquée au système composé du stabilisateur et de la plate-forme mobile du RPC sont réglés pour une pose donnée de la plate-forme. Afin

d'étendre cette stratégie de commande à toutes les poses de l'espace de travail du [RPC](#), il pourrait être envisagé de discrétiser l'espace de travail et d'utiliser le séquençement de gains (*gain scheduling*) pour déterminer localement les gains de commande.

Enfin, le mouvement de retour en position initiale des bras du stabilisateur perturbe l'équilibre de la plate-forme. En introduisant de la redondance cinématique pour [RPC](#) (ou en utilisant celle déjà présente dans le cas de *CoGiRo*) et pour le stabilisateur, il serait possible de générer des trajectoires couplées pour le [RPC](#) et pour les bras qui permettent un tel retour en position sans affecter le mouvement de la plate-forme.





---

# Annexes

<b>A</b>	<b>Paramétrage des angles d'Euler</b>	<b>143</b>
<b>B</b>	<b>Identification et commande des moteurs</b>	<b>147</b>
<b>C</b>	<b>Mesure des vibrations de la plate-forme de RPC</b>	<b>155</b>
<b>D</b>	<b>L'optimisation par essaim de particules</b>	<b>159</b>



## Paramétrage des angles d'Euler

Un repère local est associé à chaque solide, ce repère s'obtient par rotation à partir des 3 angles d'Euler. Pour décrire l'orientation des différents solides modélisés est choisie une modélisation à 3 angles. Par exemple, avec cette description la succession de rotations permettant de passer du repère  $\mathcal{R}_1$  au repère  $\mathcal{R}_2$  est décrite ainsi :

1. une rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $\mathbf{x}_1$  :

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix}$$

2. une rotation d'angle  $\beta$  autour de  $[0 \ c_\alpha \mathbf{y}_1 \ s_\alpha \mathbf{z}_1]^\top$ , la transformée de  $\mathbf{y}_1$  par la précédente rotation :

$$\mathbf{R}_{y_1}(\beta) = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}$$

3. une rotation d'angle  $\gamma$  autour de  $\mathbf{z}_2 = [s_\beta \mathbf{x}_1 \ -s_\alpha c_\beta \mathbf{y}_1 \ c_\alpha c_\beta \mathbf{z}_1]^\top$ , la transformée de  $\mathbf{z}_1$  par les deux précédentes rotations :

$$\mathbf{R}_{z_2}(\gamma) = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rotation  $\mathbf{R}_{12}$  qui permet de calculer les coordonnées d'un point de  $\mathcal{R}_1$  dans  $\mathcal{R}_2$  est :

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_{y_1}(\beta)\mathbf{R}_{z_2}(\gamma) = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ c_\alpha s_\gamma + s_\alpha s_\beta c_\gamma & c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\beta s_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ s_\alpha s_\gamma - c_\alpha s_\beta c_\gamma & s_\alpha c_\gamma + c_\alpha s_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

On note  $\boldsymbol{\theta} = [\alpha \ \beta \ \gamma]^\top$  le vecteur décrivant l'orientation du repère  $\mathcal{R}_2$  dans  $\mathcal{R}_1$ . La vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}$  du repère  $\mathcal{R}_2$  dans le repère  $\mathcal{R}_1$  est liée à la dérivée première du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  par la matrice  $\tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta})$ . Il s'agit d'une matrice Jacobienne qui dépend de la représentation choisie et de l'orientation du solide, telle que :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} {}^1\dot{\alpha} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_\alpha \\ s_\alpha \end{bmatrix} {}^1\dot{\beta} + \begin{bmatrix} s_\beta \\ -s_\alpha c_\beta \\ c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} {}^1\dot{\gamma} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & s_\beta \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha c_\beta \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} {}^1\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.2})$$

On peut alors introduire la matrice  $\tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta})$ , telle que :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\theta}_p \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{x}} \quad (\text{A.3})$$

La dérivée temporelle de  $\tilde{\mathbf{S}}$  est notée  $\dot{\tilde{\mathbf{S}}}$  et vaut :

$$\dot{\tilde{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 0 & 0 & \dot{\beta} c_\beta \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & -\dot{\alpha} s_\alpha & -\dot{\alpha} c_\alpha c_\beta - \dot{\beta} s_\alpha s_\beta \\ 0 & \dot{\alpha} c_\alpha & -\dot{\alpha} s_\alpha c_\beta - \dot{\beta} c_\alpha s_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

**Expression des matrices  $\mathbf{R}_{0p}$  et  $\mathbf{R}_{pj}$ .** La matrice  $\mathbf{R}_{0p}$  décrivant l'orientation du repère  $\mathcal{R}_p$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$  – donnée par les angles d'Euler  $\alpha_p$ ,  $\beta_p$  et  $\gamma_p$  – est la suivante :

$$\mathbf{R}_{0p} = \begin{bmatrix} c_{\beta_p} c_{\gamma_p} & -c_{\beta_p} s_{\gamma_p} & s_{\beta_p} \\ c_{\alpha_p} s_{\gamma_p} + s_{\alpha_p} s_{\beta_p} c_{\gamma_p} & c_{\alpha_p} c_{\gamma_p} - s_{\alpha_p} s_{\beta_p} s_{\gamma_p} & -s_{\alpha_p} c_{\beta_p} \\ s_{\alpha_p} s_{\gamma_p} - c_{\alpha_p} s_{\beta_p} c_{\gamma_p} & s_{\alpha_p} c_{\gamma_p} + c_{\alpha_p} s_{\beta_p} s_{\gamma_p} & c_{\alpha_p} c_{\beta_p} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

La matrice  $\mathbf{R}_{pj}$  décrivant l'orientation du repère  $\mathcal{R}_j$  dans le repère  $\mathcal{R}_p$  est donnée ci-après :

$$\mathbf{R}_{pj} = \begin{bmatrix} c_{\theta_j+\beta_{j0}} c_{\gamma_{j0}} & -c_{\theta_j+\beta_{j0}} s_{\gamma_{j0}} & s_{\theta_j+\beta_{j0}} \\ c_{\alpha_{j0}} s_{\gamma_{j0}} + s_{\alpha_{j0}} s_{\theta_j+\beta_{j0}} c_{\gamma_{j0}} & c_{\alpha_{j0}} c_{\gamma_{j0}} - s_{\alpha_{j0}} s_{\theta_j+\beta_{j0}} s_{\gamma_{j0}} & -s_{\alpha_{j0}} c_{\theta_j+\beta_{j0}} \\ s_{\alpha_{j0}} s_{\gamma_{j0}} - c_{\alpha_{j0}} s_{\theta_j+\beta_{j0}} c_{\gamma_{j0}} & s_{\alpha_{j0}} c_{\gamma_{j0}} + c_{\alpha_{j0}} s_{\theta_j+\beta_{j0}} s_{\gamma_{j0}} & c_{\alpha_{j0}} c_{\theta_j+\beta_{j0}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$





## Identification et commande des moteurs

Sur le robot plan, les moteurs choisis pour l'actionnement des bras sont les mêmes que ceux choisis pour l'enroulement des câbles, il s'agit des servomoteurs Dynamixel XM430-W210-R<sup>1</sup>.

### B.1 Identification

Le schéma de fonctionnement d'un moteur électrique non asservi peut être représenté par la Figure B.1, avec BOZ l'acronyme du bloqueur d'ordre 0. Il s'agit d'un circuit en boucle ouverte, commandé en intensité et retournant une position du moteur dépendant d'un certain nombre de paramètres mécaniques ou électriques, dont la dynamique électrique ou mécanique du moteur ou encore son rapport de réduction.

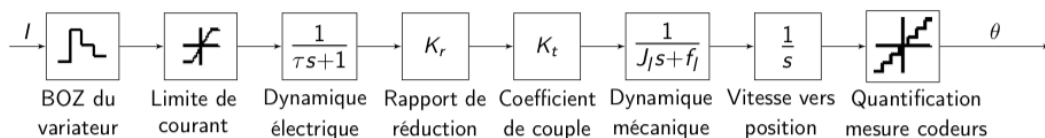


Figure B.1: Schéma de principe d'un moteur électrique

La plupart de ces paramètres sont donnés par la fiche technique du moteur, cependant ce n'est pas toujours le cas. Les paramètres transmis par le constructeur sont transcrits dans le tableau B.1.

<sup>1</sup>Voir caractéristiques : [http://support.robotis.com/en/product/actuator/dynamixel\\_x/xm\\_series/xm430-w210.htm](http://support.robotis.com/en/product/actuator/dynamixel_x/xm_series/xm430-w210.htm)

Notation	Paramètre	Définition
$I_{max}$	Courant maximal	3 A
$K_t$	Constante de couple	0,9439 N m A <sup>-1</sup>
$\tau_i$	Constante de temps électrique	1 ms
$K_r$	Rapport de réduction	212.6
$Q_{enc}$	Pas de quantification du codeur	4096 <sup>-1</sup>

Tableau B.1: Paramètres des moteurs du RPC plan

Les paramètres de la dynamique mécanique du moteur – son inertie  $J_l$  et son frottement visqueux  $f_l$  – sont à déterminer.

On note  $\omega$  la vitesse de rotation du moteur et  $C_m$  le couple fourni par le moteur. La réponse impulsionnelle du moteur est mesurée et tracée, voir Figure B.2a. Cette réponse peut être assimilée à celle d'un système du premier ordre, tracée en vert sur la figure. La constante de temps de ce système est donnée par :

$$\tau_p = \frac{J_l}{f_l} \quad (\text{B.1})$$

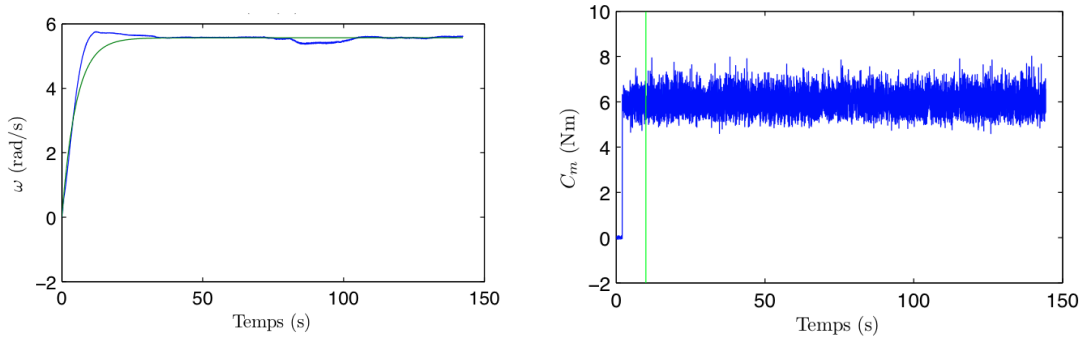
(a) Vitesse de rotation du moteur  $\omega$  en fonction du temps (b) Couple moteur  $C_m$  en fonction du temps

Figure B.2: Caractéristique expérimentale du moteur

Le système étant identifié à un premier ordre, la valeur prise par sa fonction de transfert à l'instant  $\tau_p$  vérifie :

$$\omega(\tau_p) = 0.63\omega(\infty) \quad (\text{B.2})$$

où  $\omega(\infty)$  est la valeur finale prise par la fonction de transfert du moteur, dans le cas présent 5,565 rad s<sup>-1</sup>. Cette valeur est atteinte en 4,6 s, donc  $\tau_p = 4,6$  s. Ces opérations sont illustrées par la Figure B.3.

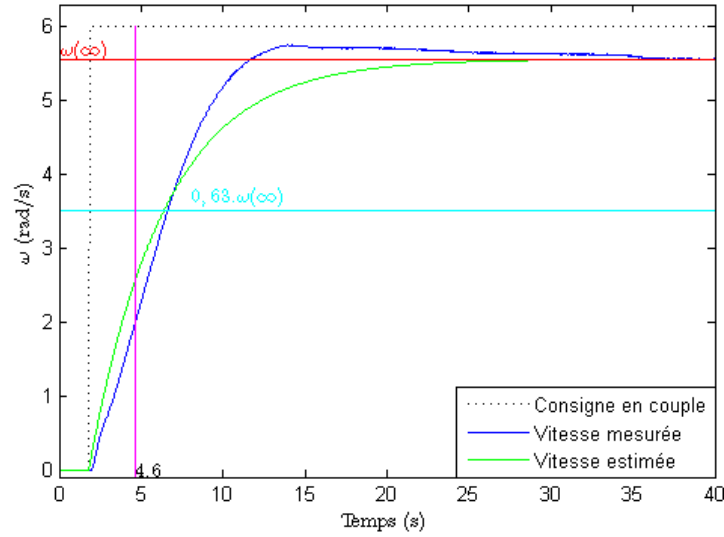


Figure B.3: Détermination de  $\tau_p$  à partir de la caractéristique  $\omega$  en fonction du temps du moteur

Le temps d'établissement du régime permanent est déterminé par des essais expérimentaux réalisés sur les moteurs Dynamixel, à partir des mesures données par les courbes de la figure B.2. Le régime permanent est atteint à partir de  $t=10$  s.

La formulation du PFD sur l'axe du moteur est la suivante :

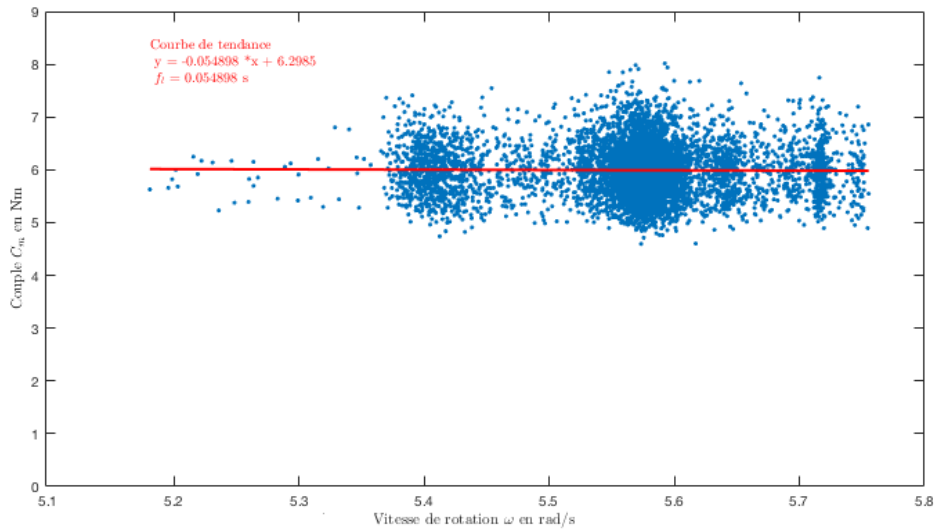
$$C_m - C_r - f_l \omega = J_j \dot{\omega} \quad (\text{B.3})$$

avec  $C_m$  le couple moteur et  $C_r$  le couple résistant dû au frottement sec du moteur.

En régime permanent,  $\dot{\omega} = 0$ , donc,  $C_m = C_r + f_l \omega$ , la relation entre le couple mesuré et la vitesse est alors une fonction affine. Le frottement visqueux correspond au coefficient directeur de la courbe représentant le couple en fonction de la vitesse en régime permanent. Cette courbe, donnée Figure B.4, est obtenue par régression linéaire à partir de mesures réalisées sur les moteurs de *CoGiRo*, les points mesurés sont en bleu sur la Figure. La courbe de tendance tracée en rouge a pour équation  $y = 0.0605x + 0.29853$ . Cette courbe est proche d'une droite horizontale en régime permanent. Ce résultat permet d'obtenir  $f_l = 0,0605$  N s.

L'inertie au niveau de l'arbre du moteur est alors obtenue par la relation (B.1) :  $J_l = \tau_p f_l$ . Finalement on obtient  $J_l = 2781$  kg cm<sup>2</sup>.

Une fois les paramètres du moteur identifiés, il devient possible de réaliser leur commande.

Figure B.4: Couple moteur  $C_m$  en fonction de  $\omega$  en régime permanent

## B.2 Correcteur RST

Le commande RST est une technique de commande numérique polynomiale. Le contrôleur RST présente l'avantage de disposer de nombreux degrés de liberté, et donc d'une grande souplesse d'utilisation.

Ce correcteur comprend trois polynômes en  $z^{-1}$  nommés R, S et T,  $z$  étant l'inverse de la variable utilisée pour la représentation en temps discret de la fonction de transfert du moteur. Le schéma de principe de la commande est donné Figure B.5. Les coefficients de ces polynômes sont obtenus par la résolution de deux équations diophantiennes, auxquelles il est possible d'ajouter des contraintes additionnelles. Il est ainsi par exemple possible d'ajouter des effets de filtrage ou d'intégration à la commande.

Puisqu'il s'agit d'une commande numérique, le pas de quantification est une donnée importante pour déterminer les paramètres du correcteur. Celui choisi pour représenter les moteurs en temps discret est  $T_s = 1$  ms.

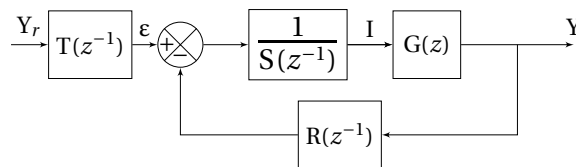


Figure B.5: Principe du contrôleur RST

Sur le schéma de la Figure B.5, la valeur de la fonction de transfert du système à asservir

$G(z)$  et celle de l'entrée de ce bloc sont données par :

$$I(z) = \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})}Y_r(z) - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})}Y(z) \quad (\text{B.4a})$$

$$G(z) = \frac{z^{-d}B^+B^-}{A^+A^-} \quad (\text{B.4b})$$

où  $d$  est un entier positif représentant l'ordre maximal des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$ ,  $B^+$ ,  $A^+$  et  $A^-$  sont des polynômes moniques,  $B^-$  est un polynôme. Les polynômes  $B^+$  et  $A^+$  contiennent les zéros que la commande doit compenser,  $A^-$  et  $B^-$  ceux que l'on ne souhaite pas compenser.

Le but de la commande est d'obtenir une équation du modèle complet en boucle fermée qui soit égale à :  $F(z) = \frac{z^{-d}B^-B_m^+}{A_m}$ , avec  $B_m^+$  et  $A_m$  deux polynômes de degré inférieur à  $d$ . Le principe de cette commande est illustré par la Figure B.5.

Le nombre d'intégrateurs ajoutés dans le polynôme  $S$  est noté  $p$ , le filtre supplémentaire ajouté à la commande est représenté par le polynôme  $A_0$ .

Le nombre et l'ordre des solutions de l'équation diophantienne est déterminé avant le calcul. Soient :

$$\begin{cases} n = \text{deg}((1-z)^p A^-) \\ m = \text{deg}(z^{-d} B^-) \\ q = \text{deg}(A_0 A_m) \end{cases}$$

Alors on peut déterminer le degré des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  :

- $q < n + m \rightarrow$  solution unique avec  $\text{deg}(S) = m - 1$  et  $\text{deg}(R) = n - 1$
- $q \geq n + m \rightarrow$  deux solutions :  $\begin{cases} \text{deg}(S) = m - 1 \text{ et } \text{deg}(R) = q - m \\ \text{deg}(S) = q - n \text{ et } \text{deg}(R) = n - 1 \end{cases}$

Les équations diophantiennes régissant le comportement du moteur sont :

$$\begin{cases} T(z^{-1}) = B_m^+(z^{-1})A_0(z^{-1}) \end{cases} \quad (\text{B.5a})$$

$$\begin{cases} (1-z^{-1})^p A^-(z^{-1})S_2(z^{-1}) + z^{-d}B^-(z^{-1})R_0(z^{-1}) = A_m(z^{-1})A_0(z^{-1}) \end{cases} \quad (\text{B.5b})$$

Finalement la résolution de ces équation donne les coefficients des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  :

$$\begin{cases} R(z^{-1}) = A^+(z^{-1})R_0(z^{-1}) \end{cases} \quad (\text{B.6a})$$

$$\begin{cases} S(z^{-1}) = (1-z^{-1})^p B^+(z^{-1})S_2(z^{-1}) \end{cases} \quad (\text{B.6b})$$

$$\begin{cases} T(z^{-1}) = A^+(z^{-1})B_m^+(z^{-1})A_0(z^{-1}) \end{cases} \quad (\text{B.6c})$$

Le modèle de suivi de consigne proposé pour les moteurs est décrit par la fonction de transfert du deuxième ordre suivante donnée dans l'équation (B.7). Le type de consigne à suivre est une rampe en position, donc  $p = 2$ .

$$M(s) = \frac{K}{\omega_0^2 + 2.\xi.\omega_0.s + s^2} \quad (\text{B.7})$$

où  $s$  est la variable de Laplace, avec :

- $K=1$
- $\omega_0 = 12\pi$
- $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La synthèse du correcteur pour le suivi de cette consigne est réalisé par un logiciel de calcul, dans le cas présent MATLAB® a été utilisé. Le résultat pour les moteurs Dynamixel, dot les performances sont illustrées par la Figure B.6, est le suivant :

- $R(z^{-1}) = 3.7910^5 - 3.15410^5 z^{-1} - 6.14710^4 z^{-2}$
- $S(z^{-1}) = 1 - 0.7919z^{-1} - 0.2081z^{-2}$
- $T(z^{-1}) = 1.40110^5 - 2.43110^5 z^{-1} + 1.05110^5 z^{-2}$

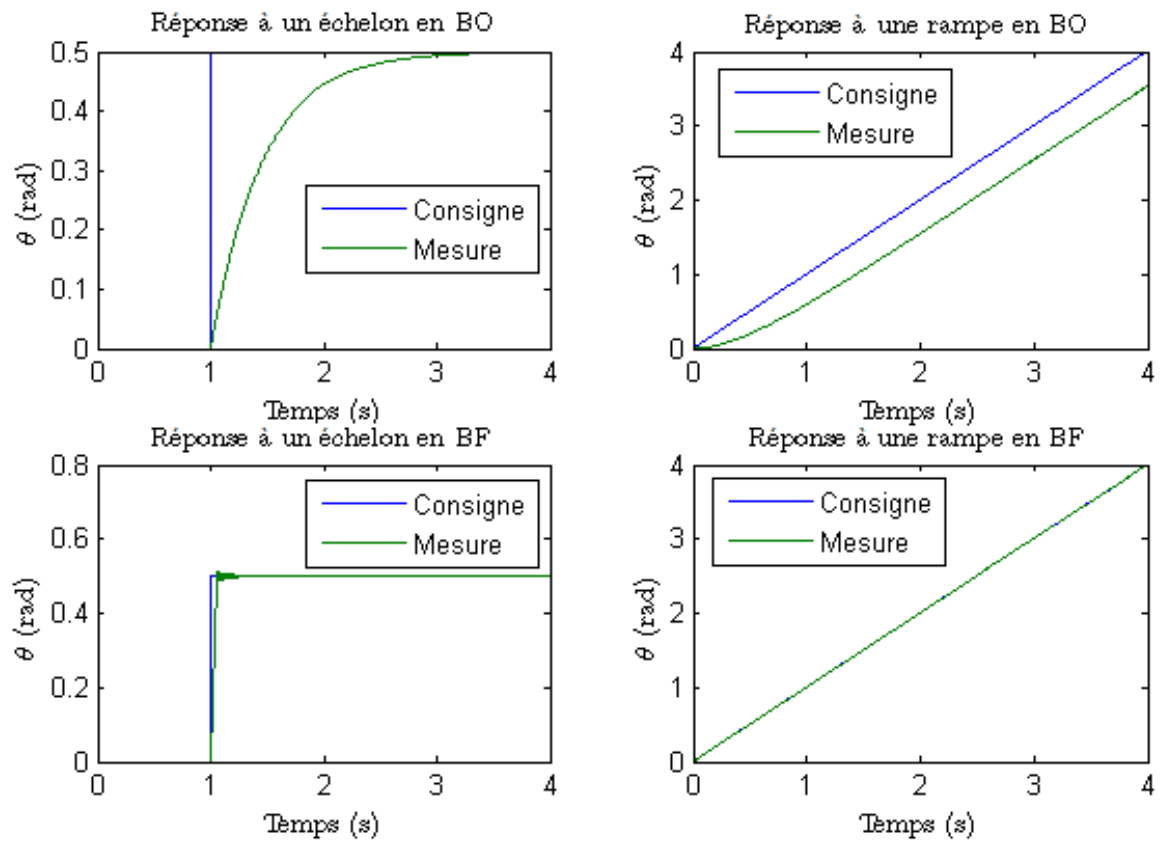


Figure B.6: Comparaison des performances des moteurs en boucle ouverte (BO) et en boucle fermée (BF), courbes représentant la position angulaire  $\theta$  du moteur en fonction du temps





---

## Mesure des vibrations de la plate-forme de **RPC**

Les vibrations de la plate-forme des **RPC** sont liées à la faible raideur de leur structure. Afin de déterminer le déplacement provoqué par ses vibrations et la vitesse de ces vibrations, des essais ont été menés en simulation et sur le **RPC** de grandes dimensions *CoGiRo*.

En premier lieu, les fréquences principales de vibration des **RPC** suspendus sont en général très faible, de l'ordre de grandeur du Hertz ou de la dizaine de Hertz. Ce sujet a déjà été traité plusieurs fois sur différents **RPC** des mesures expérimentales selon les modes propres de vibration des plate-formes de différents **RPC** suspendus ont mis en évidence des modes de vibrations principaux à des fréquences de 1.5 à 16 Hz suivant la direction [Weber *et al.*, 2014, 2015; Yuan *et al.*, 2017]. La connaissance de ces fréquences sert de vérification de la plausibilité des valeurs expérimentales trouvées ci-dessous.

### C.1 Mesure des vibrations sur *CoGiRo*

La mesure des vibrations de la plate-forme de *CoGiRo* a été obtenue par le traitement des données de position obtenues par une caméra vidéo. Dans cet essai, le **RPC** *CoGiRo* dont la plate-forme pèse 142kg est commandé pour rester à une pose donnée. Une perturbation est créée en modifiant temporairement la masse dans le terme de *feed-forward*  $f_{ff}$  de la commande de *CoGiRo* donnée dans [Gouttefarde *et al.*, 2015b] et détaillée Figure C.1, en la faisant passer à 200kg.

Puisque l'essai réalisé correspond à une excitation selon l'axe vertical uniquement, on peut considérer que les vibrations du robot se font uniquement selon l'axe vertical (voir sous-section 6.1.2).

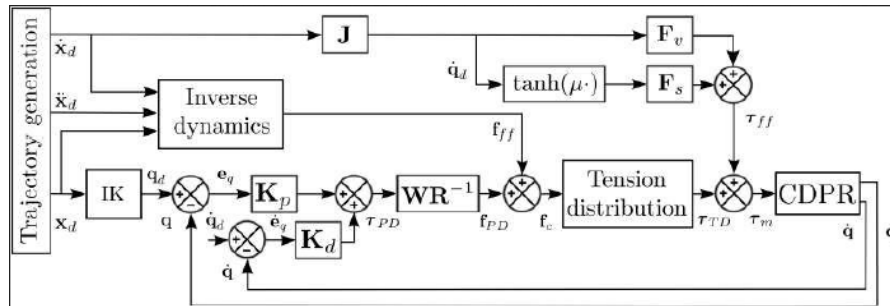


Figure C.1: Commande dans l'espace dual

Le programme de traitement vidéo a été réalisé en C++ en utilisant la bibliothèque *open source* pour la vision par ordinateur *OpenCV* [OpenCV].

Une mire composée de papier quadrillé est fixée à la plate-forme et le mouvement du RPC est capturé par une caméra. Les images obtenues sont traitées par un programme de vision par ordinateur. En premier lieu ce programme lance une interface d'utilisation pour pouvoir étalonner le système et choisir un point à suivre dans les images. Les étapes d'utilisation de ce programme sont :

1. chargement d'une vidéo ;
2. choix par une interface d'utilisation d'un point de la mire qui sera suivi par le programme ;
3. détermination de l'échelle par l'interface d'utilisation.

Ensuite, le point est suivi par le programme, son flot optique étant obtenue par la méthode de Lucas-Kanade [Lucas et Kanade, 1982]. Puis grâce à la procédure d'étalonnage précédemment suivie, la vitesse de vibration de la nacelle est obtenue en convertissant le flot optique, qui correspond à une vitesse de déplacement en pixels par seconde. Enfin le programme sauvegarde cette vitesse dans un fichier.

Finalement, un script MATLAB® lit ce fichier texte pour en extraire les valeurs. Au moyen des vitesses d'oscillation de la plate-forme est obtenue sa pose. La mesure de la position permet de mettre en évidence la période des oscillations. Un résultat de cette opération est donné Figure C.2.

La vitesse de vibration maximale observée pour la plate-forme du robot *CoGiRo* dans cette expérience est de  $0,4 \text{ m s}^{-1}$ .

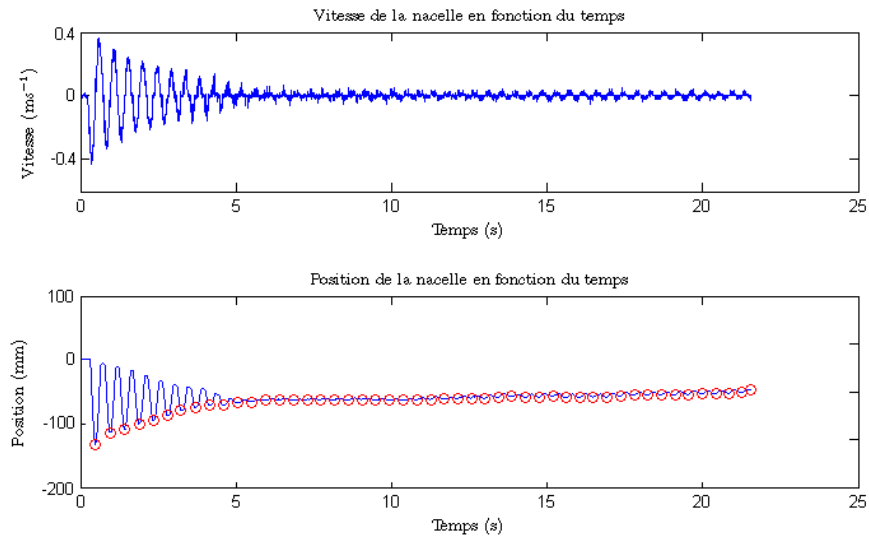


Figure C.2: Valeurs des vitesses et position de la plate-forme en fonction du temps

## C.2 Mesure des vibrations en simulation

Sur les simulations décrites au chapitre 6, il est possible d'obtenir directement la vitesse de déplacement du CDG de la plate-forme via le moteur physique *Simscape Multibody*<sup>TM</sup>.

En particulier, sur la simulation du RPC *CoGiRo*, on peut obtenir la vitesse de vibration de la plate-forme dans les mêmes conditions que l'expérimentation. L'essai réalisé est une perturbation transitoire à 15 s, et donne une vitesse de vibration proche de  $0,4 \text{ m s}^{-1}$  au maximum. Le résultat de cet essai est donné figure C.3. La simulation peut ainsi être validée expérimentalement, on constate que pour une même perturbation, la vitesse d'oscillation de la plate-forme est proche en simulation et sur la mesure expérimentale Figure C.2.

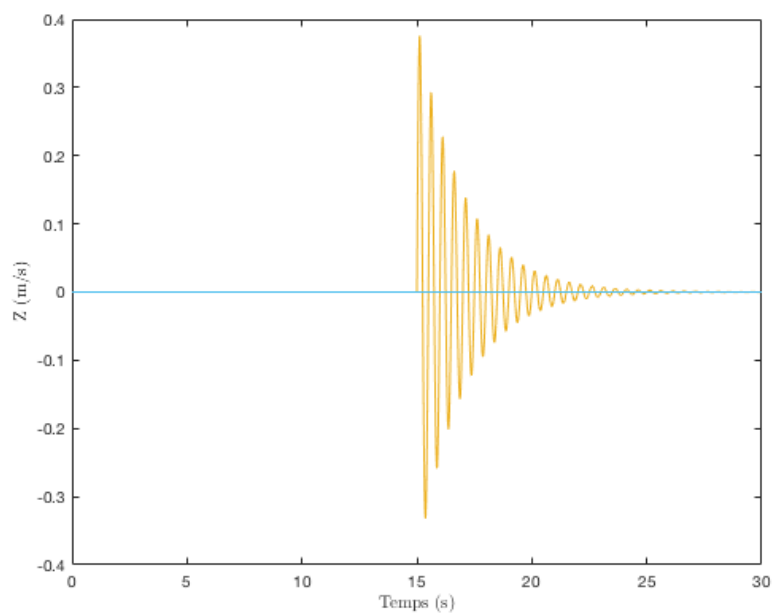


Figure C.3: Vitesse de la plate-forme en fonction du temps

---

## L'optimisation par essaim de particules

La méthode de L'Optimisation par Essaim de Particules (**OEP**), ou *Particle Swarm Optimization* en anglais, a été développée dans [Kennedy et Eberhart, 1995]. Cet algorithme s'inspire du monde vivant, notamment de la socio-psychologie. Grâce à une règle de déplacement simple et basée sur la collaboration, les solutions potentielles – nommées individus – convergent progressivement vers le minimum global.

L'algorithme de l'**OEP** travaille sur une population de ces particules appelée « essaim ». Les particules ont chacune :

- une position, c'est à dire leur coordonnées dans l'espace des paramètres
- une meilleure position, la position visitée précédemment pour laquelle la valeur de la fonction de coût est la meilleure
- un voisinage, c'est un ensemble de particules qui agit directement sur la particule courante
- une vitesse calculée à chaque itération

Il existe deux définitions du voisinages [Kennedy, 1999] : le voisinage géographique où les voisins sont les particules les plus proches, le voisinage devant être reconstruit à chaque itération du calcul, ou le voisinage social, où les voisins sont définis à l'initialisation pour tout le reste de la procédure. La seconde définition est la plus utilisée car elle est plus simple à programmer, moins coûteuse en calculs et enfin parce que le voisinage social et le voisinage géographique se confondent quand l'algorithme converge vers une solution. Le voisinage de la particule correspond au sous-ensemble de l'essaim avec lequel la particule

peut échanger des données. En particulier chaque particule connaît la meilleure position de son voisinage.

À chaque itération les particules se déplacent à une vitesse qui dépend de leur meilleure position et de celle de leur voisinage. La vitesse à l'instant  $k + 1$  de la particule  $i$  est donnée par :

$$V_{k+1}^i = c_1 V_k^i + c_2 (b^i - p^i) + c_3 (b^{v(i)} - p^i) \quad (\text{D.1})$$

où  $p^i$  désigne la position de la particule  $i$ ,  $b^i$  sa meilleure position.  $v(i)$  est une fonction qui retourne le voisin de  $i$  ayant le meilleur score et  $b^{v(i)}$  est la meilleure position du meilleur voisin. Les coefficients  $c_2$  et  $c_3$  sont générés aléatoirement dans un certain intervalle à chaque itération, le coefficient  $c_1$  est fixé.

La position de la particule à l'itération  $k + 1$  est alors :

$$P_{k+1}^i = P_k^i + V_{k+1}^i dt \quad (\text{D.2})$$

avec  $dt = k + 1 - k = 1$ .

L'évolution d'une particule, illustrée sur la Figure D.1 issue de [Lepagnot, 2011], est le résultat d'une combinaison de trois types de comportements [Clerc, 2004] :

- égoïste, la particule cherche à continuer son mouvement avec sa vitesse actuelle
- conservateur, la particule cherche à retourner vers sa meilleure valeur
- panurgien, la particule suit la particule la plus performante de son voisinage

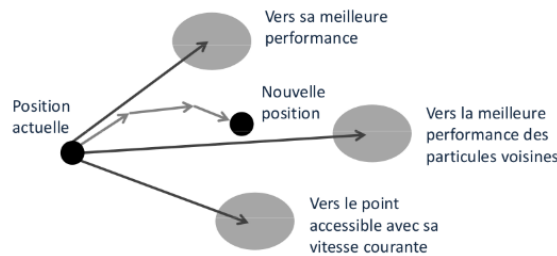


Figure D.1: Déplacement d'une particule [Lepagnot, 2011]

L'algorithme de l'OEP est très simple, le pseudocode de cet algorithme est donné Figure D.2 et une représentation en schéma-bloc est donnée Figure D.3.

```

1 Pour chaque particule :
2   Initialiser de la position
3   Mettre la meilleur position à la position courante
4   Initialiser de la vitesse de la particule
5 Fin Pour
6 Tant que l'itération maximale ou la meilleure valeur ne sont
   pas atteintes :
7   Ancre:
8   Pour chaque particule i :
9     Tirer aléatoirement  $c_2$  et  $c_3$ 
10    Mettre à jour la vitesse de la particule
11    Mettre à jour la position de la particule
12    Si la position n'est pas faisable :
13      Sauter à l'Ancre
14    Fin Si
15    Sinon :
16      Si la position actuelle est la meilleure :
17        Mettre à jour la meilleure position de i
18      Fin Si
19    Fin Sinon
20  Fin Pour
21 Fin Tant que

```

Figure D.2: Pseudocode de la méthode d'OEP

Un des inconvénients majeurs de l'OEP est le nombre de paramètres de réglage à prendre en compte. Ces paramètres permettent d'adapter cette heuristique à de nombreux problèmes mais nécessitent un réglage précis pour l'application de cette méthode. Certains d'entre eux doivent être définis empiriquement, c'est le cas par exemple de la taille de l'essaim ou du coefficient  $c_1$ , ou encore des intervalles de variation de  $c_2$  et  $c_3$ , qui impactent grandement le temps de calcul et la capacité de la méthode à atteindre le maximum global. Le meilleur moyen de régler ces coefficients est de faire de nombreux essais, ou de les régler en utilisant une méthode d'optimisation.

Un choix adéquats de ces paramètres est important pour une exécution efficace de l'OEP. Ce paramétrage nécessite de définir un compromis exploration-exploitation dans l'espace des variables d'optimisation. Ce compromis qui est celui entre la convergence rapide vers une solution proche et la recherche d'une meilleure solution détermine la rapidité de la recherche avec l'algorithme, sa capacité à s'extraire ou non d'un minimum local et son aptitude à converger vers une solution. Clerc propose un réglage des principaux



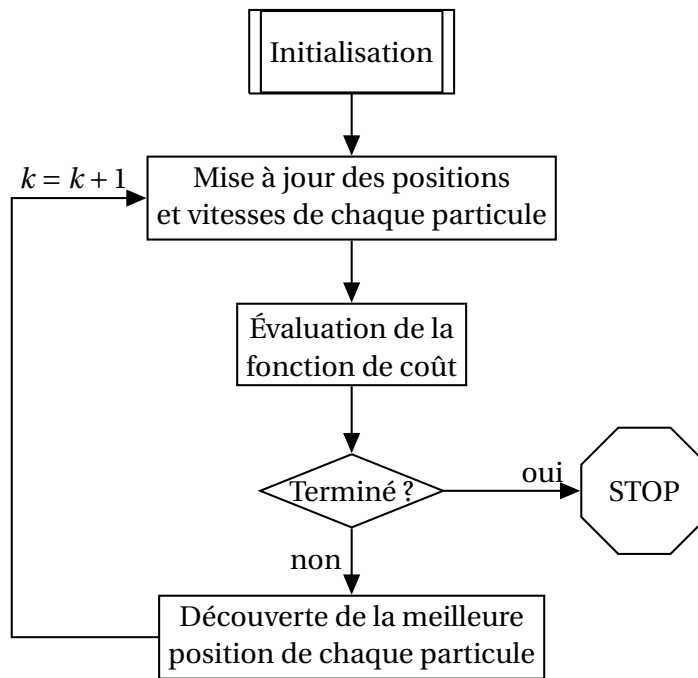


Figure D.3: Schéma-bloc de la méthode d'OEP

paramètres qui permet d'obtenir des résultats intéressants pour un large éventail de problèmes dans [Clerc, 2005]. Cet article préconise notamment d'utiliser un essaim de taille comprise entre 20 et 40 solutions, de régler le paramètre  $c_1$  dans l'intervalle  $]0, 1[$ , ou encore de rendre égaux  $c_2$  et  $c_3$ . Dans cet article comme dans de nombreuses autres méthodes l'auteur suggère de limiter la valeur de la vitesse des particules. L'auteur précise que l'utilisation de valeurs différentes peut conduire à des résultats meilleurs ou pires suivant le problème.

L'initialisation de l'essaim a aussi une influence importante sur la convergence et la rapidité de la méthode. Elle est généralement aléatoire, cependant il peut être intéressant d'initialiser une ou plusieurs particule à proximité de solutions pressenties.

Enfin le critère d'arrêt de cet algorithme est un paramètre important à prendre en compte. Comme la convergence vers la solution optimale n'est pas garantie, il faut doter l'algorithme d'un nombre maximal d'itérations. L'algorithme s'arrête donc lorsque toutes les particules ont convergé ou lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint.



---

## Bibliographie

- James ALBUS, Roger BOSTELMAN et Nicholas DAGALAKIS : The nist robocrane. *Journal of robotic systems*, 10(5), 1993. [2.1.3](#), [2.1.4](#)
- Abdullah B ALP et Sunil K AGRAWAL : Cable suspended robots : feedback controllers with positive inputs. *In American Control Conference*, 2002. [2.4.3](#)
- Kaveh AZIZIAN et Pierre CARDOU : The dimensional synthesis of planar parallel cable-driven mechanisms through convex relaxations. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, 4(3), 2012. [2.3.1](#)
- Reza BABAGHASABHA, Mohammad A KHOSRAVI et Hamid D TAGHIRAD : Adaptive robust control of fully-constrained cable driven parallel robots. *Mechatronics*, 25:27–36, 2015. [2.4.4](#)
- Reza BABAGHASABHA, Mohammad A KHOSRAVI et Hamid D TAGHIRAD : Adaptive robust control of fully constrained cable robots : singular perturbation approach. *Nonlinear Dynamics*, 85(1):607–620, 2016. [2.4.4](#), [5.3.2](#)
- Sana BAKLOUTI, Stéphane CARO et Éric COURTEILLE : Sensitivity analysis of the elasto-geometrical model of cable-driven parallel robots. *In Cable-Driven Parallel Robots*. 2018. [2.1.3](#)
- Sana BAKLOUTI, Stéphane CARO et Éric COURTEILLE : Elasto-dynamic model-based control of non-redundant cable-driven parallel robots. *In ROMANSY 22–Robot Design, Dynamics and Control*. 2019. [2.4.4](#)

- Sana BAKLOUTI, Eric COURTEILLE, Stéphane CARO et Mohamed DKHIL : Dynamic and oscillatory motions of cable-driven parallel robots based on a nonlinear cable tension model. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, 9(6), 2017. [3.1.1](#)
- Guillaume BARRETTE et Clément M GOSSELIN : Determination of the dynamic workspace of cable-driven planar parallel mechanisms. *Journal of mechanical design*, 127(2), 2005. [2.1.2](#), [2.1.3](#)
- Jérémy BEGEY, Loïc CUVILLON, Maximilien LESELLIER, Marc GOUTTEFARDE et Jacques GANGLOFF : Dynamic control of parallel robots driven by flexible cables and actuated by position-controlled winches. *IEEE Transactions on Robotics*, 2018. [2.2.1](#), [6.2](#)
- Saeed BEHZADIPOUR et Amir KHAJEPOUR : Design of reduced dof parallel cable-based robots. *Mechanism and Machine Theory*, 39(10), 2004. [2.4.2](#)
- Saeed BEHZADIPOUR et Amir KHAJEPOUR : Stiffness of cable-based parallel manipulators with application to stability analysis. *Journal of Mechanical Design*, 128(1), 2006. [2.1.3](#), [2](#), [2.2.1](#)
- Javad BOLBOLI, Mohammad A KHOSRAVI et Farzaneh ABDOLLAHI : Stiffness feasible workspace of cable-driven parallel robots with application to optimal design of a planar cable robot. *Robotics and Autonomous Systems*, 2018. [2.1.3](#)
- Paul BOSSCHER, Andrew T RIECHEL et Imme EBERT-UPHOFF : Wrench-feasible workspace generation for cable-driven robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(5):890–902, 2006. [2.1.3](#), [4.4.1](#)
- Paul BOSSCHER, Robert L WILLIAMS et Melissa TUMMINO : A concept for rapidly-deployable cable robot search and rescue systems. In *ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2005. [2.1.4](#), [2.10a](#)
- Samuel BOUCHARD : *Géométrie des Robots Parallèles entraînés par des Câbles*. Thèse de doctorat, Université de Laval, 2008. [2.1.1](#), [2.1.3](#), [3.1.1](#)
- Samuel BOUCHARD, Clément GOSSELIN et Brian MOORE : On the ability of a cable-driven robot to generate a prescribed set of wrenches. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, 2, 2010. [4.4.3](#), [4.4.3](#)
- Samuel BOUCHARD et Clément M GOSSELIN : Kinematic sensitivity of a very large cable-driven parallel mechanism. In *ASME 2006 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2006. [2.1.3](#)

- Tobias BRUCKMANN, Wildan LALO, Christian STURM, Dieter SCHRAMM et Manfred HILLER : Design and realization of a high rack storage and retrieval machine based on wire robot technology. *DINAME*, 2013. [2.1.3](#)
- Tobias BRUCKMANN, Andreas POTT et Manfred HILLER : Calculating force distributions for redundantly actuated tendon-based stewart platforms. *In Advances in Robot Kinematics*. 2006. [2.4.2](#)
- CABLECAM : Cablecam. <http://www.cablecam.com/>. [2.1.3](#)
- Evan CHANG-SIU, Thomas LIBBY, Masayoshi TOMIZUKA et Robert J FULL : A lizard-inspired active tail enables rapid maneuvers and dynamic stabilization in a terrestrial robot. *In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2011. [2.2.2](#)
- Hui CHENG, Yiu-Kuen YIU et Zexiang LI : Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 8(4), 2003. [5.2.1](#)
- Maurice CLERC : Discrete particle swarm optimization, illustrated by the traveling salesman problem. *In New optimization techniques in engineering*. 2004. [D](#)
- Maurice CLERC : Binary particle swarm optimisers : toolbox, derivations, and mathematical insights. 2005. [4.7.3](#), [D](#)
- Lawrence L CONE : Skycam-an aerial robotic camera system. *Byte*, 10(10), 1985. [2.1.4](#)
- Jerome J CONNOR : Introduction to structural motion control. 2003. [2.2.1](#), [2.2.1](#)
- Daniel CUNNINGHAM et H Harry ASADA : The winch-bot : A cable-suspended, under-actuated robot utilizing parametric self-excitation. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2009. [2.4.2](#)
- Nicholas G DAGALAKIS, James S ALBUS, Ben-Li WANG, Joseph UNGER et James D LEE : Stiffness study of a parallel link robot crane for shipbuilding applications. *ASME Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 111(3), 1989. [2.1.4](#), [2.5a](#)
- Héron D'ALEXANDRIE : Ἀυτόματα (*Les automates*). I siècle. [2.1.4](#)
- Mark DE BERG, Marc VAN KREVELD, Mark OVERMARS et Otfried SCHWARZKOPF : Computational geometry. *In Computational geometry*. 1997. [4.4.1](#)
- Peter DEWDNEY, Meyer NAHON et Bruce VEIDT : The large adaptive reflector : A giant radio telescope with an aero twist. *Canadian aeronautics and space journal*, 48(4), 2002. [2.1.4](#)
- DEXTERWIDE : Dexterwide. <https://www.lirmm.fr/dexterwide>. Icube - LIRMM - NFM - Tecnalia. [1.2](#)

- Xiumin DIAO et Ou MA : Vibration analysis of cable-driven parallel manipulators. *Multi-body System Dynamics*, 21(4), 2009. 1, 3.1.1
- Ivan M DIAZ et Paul REYNOLDS : Robust saturated control of human-induced floor vibrations via a proof-mass actuator. *Smart Materials and Structures*, 18(12), 2009. 2.2.2
- Johann DRÉO, Alain PÉTROWSKI, Patrick SIARRY et Eric TAILLARD : *Métaheuristiques pour l'optimisation difficile*. Eyrolles, 2003. 2.3.1, 2.3.1
- Emad ELBELTAGI, Tarek HEGAZY et Donald GRIERSON : Comparison among five evolutionary-based optimization algorithms. *Advanced engineering informatics*, 19(1), 2005. 2.3.1, 2.3.2
- Shiqing FANG, Daniel FRANITZA, Marc TORLO, Frank BEKES et Manfred HILLER : Motion control of a tendon-based parallel manipulator using optimal tension distribution. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, 9(3), 2004. 2.4.2, 2.4.3
- Neil FENICHEL : Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of differential equations*, 31(1), 1979. 5.3.1, 5.3.1
- Lorenzo GAGLIARDINI, Stéphane CARO, Marc GOUTTEFARDE, Philippe WENGER et Alexis GIRIN : A reconfigurable cable-driven parallel robot for sandblasting and painting of large structures. *In Cable-Driven Parallel Robots*. 2015. 2.1.1, 2.1.3
- Julien GAGNE, Olivier PICCIN, Edouard LAROCHE, Michele DIANA et Gangloffn JACQUES : Gyrolock : stabilizing the heart with control moment gyroscope (cmg)—from concept to first in vivo assessments. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(4), 2012. 2.2.2
- William L GARRARD et Lyle G CLARK : On the synthesis of suboptimal, inertia-wheel attitude control systems. *Automatica*, 5(6), 1969. 2.2.2
- Pooneh GHOLAMI, Mohammad M AREF et Hamid D TAGHIRAD : On the control of the kntu cdrpm : A cable driven redundant parallel manipulator. *In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2008. 2.4.3
- Faouzi GHORBEL, John Y HUNG et Mark W SPONG : Adaptive control of flexible joint manipulators. *IEEE Control Systems Magazine*, 9(7), 1989. 5.4.1
- David E. GOLDBERG : *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, 1989. 2.3.2
- Clément GOSSELIN, Simon LEFRANÇOIS et Nathaniel ZOSO : Underactuated cable-driven robots : machine, control and suspended bodies. *In Brain, Body and Machine*. 2010. 2.4.2

- Marc GOUTTEFARDE, Jean-François COLLARD, Nicolas RIEHL et Cédric BARADAT : Geometry selection of a redundantly actuated cable-suspended parallel robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(2), 2015a. [1.3](#), [2.1.2](#), [2.1.3](#), [2.1.4](#), [2.3.1](#), [3.1.1](#), [4.4.1](#)
- Marc GOUTTEFARDE, David DANEY et Jean-Pierre MERLET : Interval-analysis-based determination of the wrench-feasible workspace of parallel cable-driven robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 27(1), 2011. [4.4.1](#)
- Marc GOUTTEFARDE et Clément M GOSSELIN : Wrench-closure workspace of six-dof parallel mechanisms driven by 7 cables. *Transactions of the canadian society for mechanical engineering*, 29(4), 2005. [2.1.3](#)
- Marc GOUTTEFARDE et Clément GOSSELIN : Analysis of the wrench-closure workspace of planar parallel cable-driven mechanisms. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(3), 2006. [2.1.3](#)
- Marc GOUTTEFARDE et Sébastien KRUT : Characterization of parallel manipulator available wrench set facets. *In Advances in robot kinematics : motion in man and machine*. 2010. [4.4.3](#), [4.7.2](#)
- Marc GOUTTEFARDE, Johann LAMAURY, Christopher REICHERT et Tobias BRUCKMANN : A versatile tension distribution algorithm for  $n$ -dof parallel robots driven by  $n + 2$  cables. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(6), 2015b. [2.4.2](#), [C.1](#)
- Mahir HASSAN et Amir KHAJEPOUR : Minimization of bounded cable tensions in cable-based parallel manipulators. *In ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2007. [2.4.2](#)
- Guang-Ping HE, Xiao-Lan TAN, Xiang-Hui ZHANG et Zhen LU : Modeling, motion planning and control of one-legged hopping robot actuated by two arms. *Mechanism and Machine Theory*, 43(1), 2008. [2.2.2](#)
- Richard E HENRICH : Tuned rubber crankshaft vibration damper, 1957. [2.2.1](#)
- Hiroto HIGASHIYAMA, Masaaki YAMADA, Yukihiro KAZAO et Masao NAMIKI : Characteristics of active vibration control system using gyro-stabilizer. *In Structural Control*, 1998. [2.2.2](#)
- Manfred HILLER, Shiqing FANG, Sonja MIELCZAREK, Richard VERHOEVEN et Daniel FRANTZ : Design, analysis and realization of tendon-based parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 40(4), 2005. [2.1.4](#)
- Holger H HOOS et Thomas STÜTZLE : *Stochastic local search : Foundations and applications*. Elsevier, 2004. [2.3.1](#)

- Hussein HUSSEIN, Joao CAVALCANTI SANTO et Marc GOUTTEFARDE : Geometric optimization of a large scale cdpr operating on a building facade. *In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2018. [2.1.2](#)
- H. Max IRVINE : *Cable Structures*. MIT Press, Cambridge, 1981. [2.1.1](#)
- Zuliana ISMAIL et Renuganth VARATHARAJOO : A study of reaction wheel configurations for a 3-axis satellite attitude control. *Advances in Space Research*, 45(6), 2010. [2.2.2](#)
- Hamed JAMSHIDIFAR, Baris FIDAN, Gokhan GUNGOR et Amir KHAJEPOUR : Adaptive vibration control of a flexible cable driven parallel robot. *IFAC-PapersOnLine*, 48(3), 2015. [2.4.4](#)
- Hamed JAMSHIDIFAR, Amir KHAJEPOUR, Baris FIDAN et Mitchell RUSHTON : Kinematically-constrained redundant cable-driven parallel robots : Modeling, redundancy analysis, and stiffness optimization. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 22(2), 2017. [2.4.2](#)
- Hamed JAMSHIDIFAR, Saeid KHOSRAVANI, Baris FIDAN et Amir KHAJEPOUR : Vibration decoupled modeling and robust control of redundant cable-driven parallel robots. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(2), 2018. [2.4.4](#)
- Xiaoling JIANG, Eric BARNETT et Clément GOSSELIN : Periodic trajectory planning beyond the static workspace for 6-dof cable-suspended parallel robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 2018. [2.1.3](#), [2.4.2](#)
- XiaoLing JIANG et Clément GOSSELIN : Dynamically feasible trajectories for three-dof planar cable-suspended parallel robots. *In ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2014. [6.1.1](#)
- Sadao KAWAMURA, Won CHOE, Satoshi TANAKA et Shunmugam R PANDIAN : Development of an ultrahigh speed robot falcon using wire drive system. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1995. [2.1.3](#), [2.1.4](#), [2.2.1](#), [2.4.3](#)
- Sadao KAWAMURA et Ken ITO : A new type of master robot for teleoperation using a radial wire drive system. *In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 1, 1993. [2.1.2](#), [2.1.4](#)
- Sadao KAWAMURA, Hitoshi KINO et Won CHOE : High-speed manipulation by using parallel wire-driven robots. *Robotica*, 18(1), 2000. [2.1.3](#)
- James KENNEDY : Small worlds and mega-minds : effects of neighborhood topology on particle swarm performance. *In Evolutionary Computation*, 1999. *CEC 99. Proceedings of the 1999 Congress on*, volume 3, 1999. [D](#)



- James KENNEDY et Robert EBERHART : Particle swarm optimization. *In International Conference on Neural Networks*, 1995. [2.3.2](#), [D](#)
- Hamed KHAKPOUR, Lionel BIRGLEN et Souheil-Antoine TAHAN : Synthesis of differentially driven planar cable parallel manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(3), 2014. [2.3.1](#)
- Hassan K. KHALIL : *Nonlinear Systems*. Pearson, 2001. [5.3.1](#), [5.3.1](#)
- Mohammad A KHOSRAVI et Hamid D TAGHIRAD : Experimental performance of robust pid controller on a planar cable robot. *In Cable-Driven Parallel Robots*. 2013. [2.4.3](#)
- Mohammed A KHOSRAVI et Hamid D TAGHIRAD : Dynamic modeling and control of parallel robots with elastic cables : singular perturbation approach. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(3), 2014. [2.4.3](#), [5.3.2](#)
- Hithoshi KINO, Toshiaki YAHIRO, Fumiaki TAKEMURA et Tetsuya MORIZONO : Robust pd control using adaptive compensation for completely restrained parallel-wire driven robots : Translational systems using the minimum number of wires under zero-gravity condition. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(4), 2007. [2.4.3](#)
- Scott KIRKPATRICK, C Daniel GELATT et Mario P VECCHI : Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598), 1983. [2.3.2](#)
- Petar V KOKOTOVIC, Robert E O'MALLEY JR et Peddapullaiah SANNUTI : Singular perturbations and order reduction in control theory - an overview. *Automatica*, 12(2), 1976. [5.3.1](#)
- Moharam Habibnedjad KORAYEM, Mohammad TAHERIFAR et Hami TOURAJIZADEH : Compensating the flexibility uncertainties of a cable suspended robot using smc approach. *Robotica*, 33(3), 2015. [2.4.4](#), [3.1.2](#)
- Kris KOZAK, Imme EBERT-UPHOFF et William SINGHOSE : Locally linearized dynamic analysis of parallel manipulators and application of input shaping to reduce vibrations. *Journal of Mechanical design*, 126(1), 2004. [2.2.1](#), [2.2.1](#)
- Werner KRAUS, Michael KESSLER et Andreas POTT : Pulley friction compensation for winch-integrated cable force measurement and verification on a cable-driven parallel robot. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2015. [3.1.2](#)
- Johann LAMAURY et Marc GOUTTEFARDE : Control of a large redundantly actuated cable-suspended parallel robot. *In Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference on*, 2013. [2.4.3](#)



- Johann LAMAURY, Marc GOUTTEFARDE, Ahmed CHEMORI et Pierre-Elie HERVÉ : Dual-space adaptive control of redundantly actuated cable-driven parallel robots. *In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2013. [2.4.3](#)
- Casey LAMBERT, Meyer NAHON et Dean CHALMERS : Implementation of an aerostat positioning system with cable control. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 12(1), 2007. [2.1.4](#)
- Samuel Ernest LANDSBERGER : *Design and construction of a cable-controlled, parallel link manipulator*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1984. [2.1.4](#), [2.4a](#)
- Vaios J LAPPAS, Willem H STEYN et Craig I UNDERWOOD : Attitude control for small satellites using control moment gyros. *Acta astronautica*, 51(1–9), 2002. [2.2.2](#)
- Edouard LAROCHE, Ryad CHELLAL, Loïc CUVILLON et Jacques GANGLOFF : A preliminary study for h-infinity control of parallel cable-driven manipulators. *In Cable-Driven Parallel Robots*. 2013. [2.4.3](#)
- Soo Han LEE et Wayne J BOOK : Robot vibration control using inertial damping forces. *In CISM-IFTToMM Symposium Symposium on Robot Design, Dynamics and Control*, 1990. [5.3.2](#)
- Julien LEPAGNOT : *Conception de métaheuristiques pour l'optimisation dynamique : application à l'analyse de séquences d'images IRM*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2011. ([document](#)), [D](#), [D.1](#)
- Maximilian LESELLIER, Loïc CUVILLON, Jacques GANGLOFF et Marc GOUTTEFARDE : An active stabilizer for cable-driven parallel robot vibration damping. *In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2018. ([document](#)), [4.7.4](#), [4.13](#), [6.4](#)
- Jae-Young LEW et Suk-Min MOON : A simple active damping controller compliant base manipulators. *IEEE Transactions on Mechatronics*, 6(3), 2001. [5.3.2](#)
- Hui LI, Xinyu ZHANG, Rui YAO, Jinghai SUN, Gaofeng PAN et Wenbai ZHU : Optimal force distribution based on slack rope model in the incompletely constrained cable-driven parallel mechanism of fast telescope. *In Cable-driven parallel robots*. 2013. [2.1.3](#), [2.1.4](#)
- Wen Bin LIM, Song Huat YEO et Guilin YANG : Optimization of tension distribution for cable-driven manipulators using tension-level index. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 19(2), 2014. [3.1.1](#)
- Randel LINDEMANN et Delbert TESAR : Construction and demonstration of a 9-string 6 dof force reflecting joystick for telerobotics. 1989. [2.1.4](#), [2.9a](#)

- Bruce D LUCAS et Takeo KANADE : An iterative image registration technique with an application to stereo vision. 1982. [C.1](#)
- Jean-Pierre MERLET : Analysis of the influence of wires interference on the workspace of wire robots. *In On Advances in Robot Kinematics*. 2004. [2.1.3](#)
- Jean-Pierre MERLET : *Parallel Robots*. Springer Science & Business Media, 2006. [2.1.3](#)
- Jean-Pierre MERLET : Wire-driven parallel robot : open issues. *In Romansy 19–Robot Design, Dynamics and Control*. 2013. [2.1.3](#)
- Jean-Pierre MERLET et David DANAY : A portable, modular parallel wire crane for rescue operations. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2010. [2.1.3](#), [2.1.4](#)
- Gabriel MEUNIER, Benoit BOULET et Meyer NAHON : Control of an overactuated cable-driven parallel mechanism for a radio telescope application. *IEEE transactions on control systems technology*, 17(5), 2009. [2.1.4](#)
- Lars MIKELSONS, Tobias BRUCKMANN, Manfred HILLER et Dieter SCHRAMM : A real-time capable force calculation algorithm for redundant tendon-based parallel manipulators. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2008. [2.4.2](#), [3.1.1](#)
- Aiguo MING : Study on multiple degree-of-freedom positioning mechanism using wires (part i)-concept, design and control. *International Journal of the Japan Society for Precision Engineering*, 28(2), 1994. [2.4.3](#)
- Forrest MONTGOMERY et Joshua VAUGHAN : Suppression of cable suspended parallel manipulator vibration utilizing input shaping. *In Conference on Control Technology and Applications*, 2017. [2.2.1](#), [2.2.1](#)
- Meyer NAHON, Gabriele GILARDI et Casey LAMBERT : Dynamics/control of a radio telescope receiver supported by a tethered aerostat. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(6), 2002. [2.1.3](#), [2.1.4](#)
- Dragomir N NENCHEV, Kazuya YOSHIDA, Prasart VICHITKULSAWAT et Masaru UCHIYAMA : Reaction null-space control of flexible structure mounted manipulator systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(6), 1999. [5.3.2](#)
- Dinh Quan NGUYEN et Marc GOUTTEFARDE : On the improvement of cable collision detection algorithms. *In Cable-Driven Parallel Robots*. 2015. [2.1.3](#)
- So-Ryeok OH et Sunil K AGRAWAL : Cable suspended planar robots with redundant cables : controllers with positive tensions. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(3), 2005. [2.4.3](#), [3.1.1](#)

- So-Ryeok OH et Sunil Kumar AGRAWAL : Generation of feasible set points and control of a cable robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(3), 2006. 2.3.1, 2.4.2
- OPENCV : Opencv (open source computer vision library). <https://opencv.org/>. ItSeez. C.1
- Joseph O'ROURKE : *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1998. 3, 4.4.2
- Martin J-D OTIS, Simon PERREAULT, Thien-Ly NGUYEN-DANG, Patrice LAMBERT, Marc GOUTTEFARDE, Denis LAURENDEAU et Clément GOSSELIN : Determination and management of cable interferences between two 6-dof foot platforms in a cable-driven locomotion interface. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans*, 39(3), 2009. 2.1.3
- Niel R PETERSEN : Design of large scale tuned mass dampers. *Structural control*, 1980. 2.2.1
- Andreas POTT : Influence of pulley kinematics on cable-driven parallel robots. *In Latest Advances in Robot Kinematics*. 2012. 2.1.1
- Andreas POTT : Determination of the cable span and cable deflection of cable-driven parallel robots. *In Cable-Driven Parallel Robots*. 2018. 4.4.1, 4.4.1
- Andreas POTT, Hendrick MUTHERICH, Werner KRAUS, Valentine SCHMIDT, Philipp MIERMEISTER et Alexander VERL : Ipanema : A family of cable-driven parallel robots for industrial applications. *In Cable-Driven Parallel Robots*, 2013. 2.1.4
- Ping REN et Yunlong SUN : Sliding mode set point control of a six-dof cable-suspended parallel robot with tension constraints and uncertain disturbances. *In ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2018. 2.4.4
- Nicolas RIEHL : *Modélisation et design de robots parallèles à câbles de grande dimension*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier 2, 2011. 2.1.1, 2.1.2, 3.1.1
- Nicolas RIEHL, Marc GOUTTEFARDE, Cédric BARADAT et François PIERROT : On the determination of cable characteristics for large dimension cable-driven parallel mechanisms. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2010. 3.1.1
- Giulio ROSATI, Damiano ZANOTTO et Sunil K AGRAWAL : On the design of adaptive cable-driven systems. *ASME Journal of mechanisms and robotics*, 3(2), 2011. 2.3.1
- Marc R ROUSSEL : Singular perturbation theory. <http://people.uleth.ca/~rousse/nld/singpert.pdf>, 2005. 5.3.1
- RPiT : Rpit (*Raspberry PI simulink Coder target*). [http://icube-avr.unistra.fr/fr/index.php/Raspberry\\_Pi\\_Simulink\\_Coder\\_target\\_\(RPi\)](http://icube-avr.unistra.fr/fr/index.php/Raspberry_Pi_Simulink_Coder_target_(RPi)). Gangloff, Jacques. 6.2

- Mitchell RUSHTON et Amir KHAJEPOUR : Optimal actuator placement for vibration control of a planar cable-driven robotic manipulator. *In American Control Conference*, 2016. [2.2.1](#), [2.2.2](#)
- RUSHTON, MITCHELL : Vibration control in cable robots using a multi-axis reaction system. Mémoire de D.E.A., Univ. Waterloo, 2016. URL <http://hdl.handle.net/10012/10945>. [2.2.1](#), [2.17b](#)
- Makoto SATO, Yukihiro HIRATA et Hiroshi KAWARADA : Space interface device for artificial reality—spidar. *Systems and Computers in Japan*, 23(12), 1992. [2.1.4](#)
- Stephano SERIANI, Massimo SERIANI et Paolo GALLINA : Workspace optimization for a planar cable-suspended direct-driven robot. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 34, 2015. [2.1.1](#)
- Bruno SICILIANO et Wayne J BOOK : A singular perturbation approach to control of light-weight flexible manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 7(4), 1989. [5.3.2](#), [5.4.1](#)
- William Earl SINGHOSE : *Command generation for flexible systems*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1997. [2.2.1](#)
- Edward R SNOW : *The load/deflection behavior of pretensioned cable/pulley transmission mechanisms*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology and Woods Hole Oceanographic Institution, 1993. [3.1.1](#)
- Blair THORNTON, Tamaki URA, Yoshiaki NOSE et Stephen TURNOCK : Zero-g class underwater robots : Unrestricted attitude control using control moment gyros. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 32(3), 2007. [2.2.2](#)
- Nicholas C TOWNSEND, Alan J MURPHY et RAjit SHENOI : A new active gyrostabiliser system for ride control of marine vehicles. *In Ocean Engineering*, volume 34, 2006. [2.2.2](#)
- Alberto TREVISANI, Paolo GALLINA et Robert L WILLIAMS : Cable-direct-driven robot (cddr) with passive scara support : theory and simulation. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 46(1), 2006. [2.1.1](#)
- Sebastian TRIMPE et Raffaello D'ANDREA : The balancing cube : A dynamic sculpture as test bed for distributed estimation and control. *IEEE Control Systems Magazine*, 32(6), 2012. [2.2.2](#)
- Alaleh VAFAEI, Mohammad M AREF et Hamid D TAGHIRAD : Integrated controller for an over-constrained cable driven parallel manipulator : Kntu cdrpm. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2010. [2.4.3](#)

- Alaleh VAFAEI, Mohammad A KHOSRAVI et Hamid D TAGHIRAD : Modeling and control of cable driven parallel manipulators with elastic cables : Singular perturbation theory. *In International Conference on Intelligent Robotics and Applications*, 2011. [5.3.2](#)
- Richard VERHOEVEN et Manfred HILLER : Estimating the controllable workspace of tendon-based stewart platforms. *In Advances in Robot Kinematics*. 2000. [2.1.3](#)
- Xavier WEBER : *Commande modale de robots parallèles à câbles flexibles*. Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, 2016. [2.1.3](#), [2.2.1](#), [6.3.2](#)
- Xavier WEBER, Loïc CUVILLON et Jacques GANGLOFF : Active vibration canceling of a cable-driven parallel robot using reaction wheels. *In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2014. [2.1.1](#), [2.2.1](#), [2.17a](#), [2.2.2](#), [C](#)
- Xavier WEBER, Loïc CUVILLON et Jacques GANGLOFF : Active vibration canceling of a cable-driven parallel robot in modal space. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2015. [2.1.1](#), [2.2.1](#), [C](#)
- Robert L WILLIAMS II : Cable-suspended haptic interface. *International Journal of Virtual Reality*, 3(3), 1998. [2.1.4](#)
- Noritaka YANAI, Motoji YAMAMOTO et Akira MOHRI : Anti-sway control for wire-suspended mechanism based on dynamics compensation. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, 2002. [2.2.1](#)
- Jonghyun YOON, Sung Wook HWANG, Jeong-Hyeon BAK, Jong Hyeon PARK et Sung Young KO : Multi-mode input shaping for vibration suppression of over-constrained cable-driven parallel robots with cable stiffness. *In IEEE International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering*, 2016. [2.2.1](#)
- Han YUAN, Éric COURTEILLE et Dominique DEBLAISE : Elastodynamic analysis of cable-driven parallel manipulators considering dynamic stiffness of sagging cables. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2014. [2.1.3](#)
- Han YUAN, Courteille; ÉRIC, Marc GOUTTEFARDE et Pierre-Élie HERVE : Vibration analysis of cable-driven parallel robots based on the dynamic stiffness matrix method. *Journal of Sound and Vibration*, 2017. [1.3](#), [2.1.3](#), [3.1.1](#), [C](#)
- Xiaobo ZHOU, Chin Pei TANG et Venkat KROVI : Analysis framework for cooperating mobile cable robots. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2012. [2.1.2](#)
- Bin ZI, BY DUAN, JL DU et Hong BAO : Dynamic modeling and active control of a cable-suspended parallel robot. *Mechatronics*, 18(1), 2008. [2.4.3](#)

David C ZIMMERMAN et Daniel J INMAN : On the nature of the interaction between structures and proof-mass actuators. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 13(1), 1990.

[2.2.2](#)

Juanjo ZULAIKA et Francisco Javier CAMPA : New concepts for structural components. *In Machine Tools for High Performance Machining*. 2009. [2.2.1](#)



## Résumé

Dans cette thèse, un stabilisateur actif est conçu pour être embarqué sur la plate-forme d'un Robot Parallèle à Câbles (RPC) et compenser les vibrations de la plate-forme en produisant un torseur d'effort sur celle-ci. Tout d'abord, une modélisation mécanique de divers dispositifs de stabilisation actifs permet de choisir une solution appropriée à la compensation des vibrations. La solution sélectionnée consiste en un stabilisateur composé de bras en rotation. Ensuite, ce modèle est utilisé pour optimiser la structure du stabilisateur en recherchant quelle disposition de ses bras permet de maximiser la puissance fournie par le stabilisateur à la plate-forme mobile du RPC. Une stratégie de commande est alors proposée pour contrôler le système composé de la plate-forme mobile du RPC et du stabilisateur actif embarqué. Ce système étant constitué de deux parties fonctionnant à des échelles de temps différentes, la théorie de la perturbation singulière est utilisée pour prouver la stabilité de la commande proposée. Enfin, des expériences en simulation permettent de valider l'utilisation d'un stabilisateur actif embarqué pour la compensation des vibrations de la plate-forme mobile d'un RPC et commandé avec la loi de commande proposée dans cette thèse.

**Mots clefs :** *Robot parallèle à câbles, Optimisation, Modélisation, Commande*

---

## Abstract

In this thesis, an active stabilizer is designed to be embedded on the platform of a Cable-Driven Parallel Robot (CDPR) and to damp vibrations affecting the platform by producing a wrench on it. First, a mechanical modeling of various active stabilization devices allows the choice of an appropriate solution for vibration damping. The selected solution consists of a stabilizer composed of rotating arms. Then, this model is used to optimize the stabilizer structure by looking at which arm arrangement maximizes the power delivered by the stabilizer to the CDPR mobile platform. A control strategy is then proposed for the system consisting of the CDPR mobile platform and the embedded active stabilizer. As this system consists of two parts operating at different time scales, the singular perturbation theory is used to prove the stability of the proposed control. Finally, simulation experiments make it possible to validate the use of an on-board active stabilizer to damp the vibrations of the mobile platform of a CDPR, and controlled with the control law proposed in this thesis.

**Keywords:** *Cable-driven parallel robot, Optimization, Control*