



Étude d'un système quantique ouvert en interactions répétées de type maser à un atome.

Thibault Ebroussard

► To cite this version:

Thibault Ebroussard. Étude d'un système quantique ouvert en interactions répétées de type maser à un atome.. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Cergy Pontoise, 2018. Français. NNT : 2018CERG0975 . tel-02286000

HAL Id: tel-02286000

<https://theses.hal.science/tel-02286000>

Submitted on 13 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Cergy-Pontoise

Spécialité Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par

Thibault EBROUSSARD

le 23 novembre 2018

**Étude d'un système quantique ouvert en
interactions répétées de type maser à un atome.**

Directeur de thèse : **Laurent BRUNEAU**

Jury

M. Jean-Marie BARBAROUX,	Professeur, Université de Toulon	Rapporteur
M. Jérémie FAUPIN,	Professeur, Université de Lorraine	Rapporteur
Mme. Élisabeth LOGAK,	Professeur, Université de Cergy-Pontoise	Examinatrice
M. Yan PAUTRAT,	Maître de conférence, Université Paris-Sud	Examineur

À la mémoire de mon père Gérard.

À ma mère Marie-Anne.

REMERCIEMENTS

Je les adresse en premier lieu à Laurent Bruneau, mon directeur de thèse, pour m'avoir donné la chance de traiter ce sujet. Sa disponibilité, son aide bienveillante, m'ont accompagné tout le temps de ce long travail. Sa pédagogie est exemplaire et j'ai énormément appris à ses côtés.

Je remercie Jean-Marie Barbaroux et Jérémy Faupin, rapporteurs, ainsi que Élisabeth Logak et Yan Pautrat, membres du jury, de m'avoir fait l'honneur d'évaluer mon travail.

Je remercie tous les membres du laboratoire AGM pour leurs contributions à la bonne ambiance au sein du laboratoire. Merci à Caroline et Linda pour leur disponibilité.

Merci au GDR Dynamique Quantique pour m'avoir permis d'assister aux différentes rencontres organisées chaque année.

Je tiens à remercier les occupants du bureau 5.39, Aïman, Mouhamadou, Pierre, pour les nombreuses discussions qui ont animé ces années de cohabitation, souvent mathématiques mais quelquefois dérivant sur des sujets exotiques. Merci à tous les (ex-)thésards que j'ai pu côtoyer, notamment Alexandre, Ali, Andrey, Bruno, Davit, Hicham, Jean-François, Julien, Lysianne, Nicolas, Pierre-Damien, Thomas et Tristan, pour leur sympathie.

Un énorme remerciement à mes parents, Marie-Anne et Gérard, qui m'ont toujours soutenu et poussé à aller toujours plus loin dans mes études. Avec une pensée toute particulière pour mon père qui nous a quittés le mercredi 19 avril 2017 sans voir l'aboutissement de cette thèse. Mille mercis à Stéphanie pour son soutien quotidien et ses encouragements permanents. Merci beaucoup à ma sœur Émilie pour son soutien durant ces années et les moments difficiles. Et un petit coucou à ma nièce Camille qui lira peut-être cette thèse dans de nombreuses années.

Merci à Benoît avec qui j'ai passé une grande partie de ma scolarité, nous partageons le goût des sciences. À Jérémie pour son amitié indéfectible. Au trio Thibault, Julian, Jérémy pour les nombreuses soirées Magic et les bons moments passés ensemble.

Merci à tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé, parfois seulement par la pensée, pendant toutes ces années.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Espaces de Fock bosoniques	11
1.1.1	Définition et opérateur de seconde quantification	11
1.1.2	Les algèbres CCR	14
1.1.3	Produit tensoriel d'espaces de Fock	15
1.2	Description mathématique des systèmes quantiques ouverts	16
1.2.1	Systèmes ouverts et trace partielle	16
1.2.2	Systèmes dynamiques quantiques	17
1.2.3	Mélange et états KMS	18
1.2.4	Etats sur l'algèbre $CCR(\mathfrak{h})$	20
1.3	Les systèmes en interactions répétées	21
1.3.1	Description mathématique	21
1.3.2	L'opérateur de dynamique réduite	22
1.4	Le modèle de type maser à un atome	24
1.4.1	Modélisation mathématique du modèle	25
1.4.2	L'opérateur de dynamique réduite	30
1.5	Plan de la thèse	32
2	Etude des opérateurs H_- et H_+	35
2.1	Auto-adjonction	35
2.2	Diagonalisation de H_-	36
2.2.1	Diagonalisation des hamiltoniens quadratiques bosoniques	37
2.2.2	Application à l'opérateur H_-	40
2.3	Dynamique engendrée par H_-	44
2.3.1	Dynamique symplectique associée à H_-	44
2.3.2	Théorème de Shale et comparaison avec Arai-Konenberg	46
2.4	Dynamique engendrée par H_+	50
3	Dynamique d'interactions répétées	55
3.1	Evolution en temps fini	55
3.2	Comportement en temps long et état asymptotique	58
3.3	Variations d'énergie	66
3.3.1	Variation de l'énergie totale	67
3.3.2	Echanges d'énergie	70

3.4	Comparaison avec [NVZ14]	72
3.4.1	La cavité ouverte dans l'approche markovienne	73
3.4.2	Evolution des observables de Weyl.	74
3.4.3	Nombre de photons dans la cavité	75
3.4.4	Saut d'énergie	77
4	Production d'entropie	79
4.1	Quelques pré-requis	79
4.1.1	Algèbres de Von Neumann et théorie modulaire	80
4.1.2	Forme standard et Liouvillien	81
4.1.3	Entropie relative	83
4.1.4	Convergence au sens fort de la résolvante	84
4.2	Retour au modèle	85
4.2.1	Représentation standard de $\omega_\beta^{\mathcal{C}} \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}}$	86
4.2.2	La représentation standard de $\omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$	89
4.2.3	Représentation des états du système total	90
4.3	Généralisation de la formule de production d'entropie	92
4.4	Application au modèle	99
4.5	Cas où les atomes sont tous dans l'état fondamental ou tous dans l'état excité	106
4.5.1	Le cas $p = 0$	107
4.5.2	Le cas $p=1$	107
A	Quelques résultats de [Ar81a], [Ko11a] et [Ko11b]	111

Chapitre 1

Introduction

Les systèmes quantiques ouverts décrivent l'évolution d'un système de référence $\mathcal{S}$ en interaction avec un ou plusieurs autres systèmes $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ généralement appelés réservoirs ou environnements. On rencontre dans la littérature deux approches à l'étude des systèmes ouverts : les approches hamiltoniennes et markoviennes. L'approche hamiltonienne est plus fondamentale au sens où on s'intéresse à une description complète du système (petit système + environnement). Si on se place dans le cadre usuel de la description de la mécanique quantique, le système $\mathcal{S}$ est décrit par un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ (espace des états) et son évolution est engendrée par un Hamiltonien $H_{\mathcal{S}}$, voir l'équation (1.7). De la même façon, le système $\mathcal{R}$ est décrit par un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ et un Hamiltonien $H_{\mathcal{R}}$. L'espace de Hilbert du système joint est alors donné par

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{R}}, \quad (1.1)$$

l'interaction entre les deux systèmes est décrite par un opérateur auto-adjoint v , appelé opérateur d'interaction et agissant sur l'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, et l'évolution du système en interaction est engendrée par le Hamiltonien

$$H := H_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{R}} + \mathbb{1}_{\mathcal{S}} \otimes H_{\mathcal{R}} + v. \quad (1.2)$$

A l'inverse, dans l'approche markovienne, on abandonne l'idée de décrire le système dans son ensemble et on se concentre sur le petit système $\mathcal{S}$ uniquement, la philosophie étant que l'environnement est trop compliqué à décrire (dans l'approche hamiltonienne, seuls des environnements très simples ont été traités avec succès), voire même il est tel que l'on n'a pas accès aux informations le concernant. A la place, on considère uniquement la dynamique effective du système $\mathcal{S}$ qui est générée par l'interaction avec cet environnement. L'influence de ce dernier est typiquement modélisée par l'ajout de termes de type dissipatif (opérateur de Lindblad) ou stochastique.

Le lecteur intéressé pourra consulter [AJP06a], resp. [AJP06b], pour plus de détails sur l'approche Hamiltonienne, resp. Markovienne.

Une classe particulière de systèmes ouverts va nous intéresser dans cette thèse : les systèmes quantiques à interactions répétées (abrégé SIR par la suite). Ils sont structurés de la manière suivante : on a un petit système $\mathcal{S}$ et une suite de sous-systèmes $(\mathcal{E}_j)_j$ indépendants qui interagissent de façon successive avec $\mathcal{S}$. Plus précisément $\mathcal{S}$ interagit avec $\mathcal{E}_1$ durant l'intervalle $[0, \tau_1[$, puis

avec $\mathcal{E}_2$ durant l'intervalle $[\tau_1, \tau_1 + \tau_2]$, etc. Durant l'interaction entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{E}_n$ les autres $\mathcal{E}_j$ évoluent librement. L'évolution totale du système est alors déterminée par les dynamiques des systèmes $\mathcal{E}_j$ et $\mathcal{S} + \mathcal{E}_j$.

Le cas le plus simple, appelé cas idéal, est celui où tous les sous-systèmes $\mathcal{E}_j$ sont des copies d'un même sous-système $\mathcal{E}$, initialement dans un même état invariant pour la dynamique libre des $\mathcal{E}_j$, et interagissent de la même façon et pendant la même durée τ avec $\mathcal{S}$. L'évolution du système $\mathcal{S}$ au cours d'une interaction sera alors décrite par un opérateur $\mathcal{L}$ appelé opérateur de dynamique réduite, voir (1.21), qu'il suffira d'itérer n fois pour avoir l'évolution du système après n interactions comme nous le verrons dans la Section 1.3.2. Les SIR sont ainsi à la fois Hamiltonien, le système total étant décrit par un Hamiltonien (dépendant du temps, constant par morceaux), et Markovien en temps discret puisque l'état de $\mathcal{S}$ après n interactions peut-être réduit de l'état après $n - 1$ interactions en appliquant l'opérateur $\mathcal{L}$, voir (1.22). L'étude des SIR a donné lieu à de nombreux travaux ces dernières années. On peut citer par exemple [ADP14, AJ07a, AJ07b, AP06, BDBP11, BJM06, BJM08, BJM10, HJPR17, Pe08, Pe10, TZ15, TZ16, V12]. Une introduction à ce sujet est donnée dans l'article de revue [BJM14].

D'un point de vue physique, l'étude des SIR est motivée par les problèmes d'interaction matière-lumière : le système $\mathcal{S}$ décrit un, ou plusieurs, mode du champ électromagnétique dans une cavité et les sous-systèmes $\mathcal{E}_j$ représentent les atomes d'un faisceau (expérience du maser à 1 atome [CDG, FJM86, MWM85, WVHW99, WBKM00] et quelques élaborations [DRBH87, GKG+07, RH07, RBH01]). De tels systèmes jouent un rôle fondamental dans la compréhension pratique et théorique des processus d'interaction matière-lumière ainsi qu'en optique quantique. L'expérience du maser consiste en un champ électromagnétique quantifié et piégé dans une cavité optique (le système $\mathcal{S}$) et traversé par un faisceau d'atomes (les $\mathcal{E}_j$) de telle sorte qu'un seul atome soit dans la cavité à la fois. Pour des travaux plus mathématiques on peut citer [Br14, BP09, NVZ14].

Cette thèse porte sur l'étude d'un système de type maser à un atome. Le modèle considéré décrit un champ électromagnétique $\mathcal{S}$ dans une cavité et traversé par un faisceau d'atomes $(\mathcal{E}_j)_j$ mais auquel on ajoute un réservoir supplémentaire $\mathcal{R}$ interagissant de façon continue avec $\mathcal{S}$. L'idée est que la cavité n'est pas parfaitement isolée et le réservoir $\mathcal{R}$ permet de modéliser les fuites dans la cavité. Une telle situation a été considérée dans [BJM10] mais dans le cas où $\mathcal{S}$ est un système de dimension finie alors qu'ici $\mathcal{S}$ sera décrit par un mode du champ électromagnétique (unitairement équivalent à un oscillateur harmonique). L'environnement $\mathcal{R}$ sera décrit par un gaz de bosons sans masse initialement à l'équilibre thermique et sans condensat de Bose-Einstein. Enfin les atomes du faisceau seront décrits par des systèmes à deux niveaux.

Dans [NVZ14], les auteurs étudient un tel système mais avec une approche Markovienne de la description de l'interaction entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$. Ils décrivent l'interaction entre $\mathcal{S}$ et les $\mathcal{E}_j$ via les SIR, et les fuites de la cavité sont décrites par une extension de type Kossakowski-Lindblad de la dynamique Hamiltonienne, voir l'équation (1.27). Ils ont montré l'existence d'un unique état invariant pour l'évolution dans la cavité, donné une formule explicite de celui-ci, montré la relaxation en temps long vers cet état. Ils donnent par ailleurs des formules pour la valeur moyenne du nombre de photons dans la cavité en fonction du temps et étudient les variations d'énergie dans la cavité. Dans le cadre de l'approche Markovienne la question de la définition de la production d'entropie n'est pas complètement claire, ils n'ont donc pas pu décrire la production d'entropie du système et il s'agira d'une des questions abordées dans cette thèse.

En l'absence d'atomes le système "cavité+réservoir" a été étudié par Könenberg dans [Köl1a,

[Ko11b] en se basant sur des travaux antérieurs de Arai [Ar81a, Ar81b]. Arai étudie un système couplé constitué d'un oscillateur harmonique, système unitairement équivalent à la cavité considérée dans cette thèse, couplé avec un champ électromagnétique quantifié à température nulle, tandis que Könenberg considère un système similaire mais avec un réservoir à température positive. L'idée essentielle derrière leurs travaux est que le hamiltonien du système couplé est un hamiltonien bosonique quadratique et peut être "diagonalisé", permettant ainsi d'étudier plus facilement l'évolution des opérateurs d'annihilation/création. Les travaux [Ko11a, Ko11b] reposent en particulier sur des formules explicites obtenues dans [Ar81a] et l'auteur montre des propriétés de retour à l'équilibre pour le système couplé (voir le Théorème 3.13 page 60). La question de la diagonalisation des hamiltoniens bosoniques quadratiques a été récemment étudiée de façon générale dans [BB16, NNS16, Der17]. Dans le Chapitre 2 nous utiliserons leurs travaux pour donner un nouvel éclairage sur ceux de [Ar81a, Ko11a].

Dans la suite de cette introduction nous allons commencer par présenter le cadre mathématique dans lequel se situe cette thèse en rappelant les outils principaux utilisés par la suite : espaces de Fock bosoniques (ou symétriques), systèmes dynamiques quantiques, systèmes en interactions répétées. Nous présenterons ensuite plus en détails le modèle étudié dans cette thèse.

1.1 Espaces de Fock bosoniques

La théorie quantique des champs est une théorie permettant de décrire des systèmes ayant un très grand nombre ou une infinité de degrés de liberté. Elle est basée sur la seconde quantification des champs introduite par Dirac en 1927. Dans cette théorie pour décrire un nombre variable de particules indiscernables on utilise les espaces de Fock. Nous donnons ici une brève présentation des principaux objets et résultats que nous serons amenés à utiliser dans cette thèse. Le lecteur intéressé pourra consulter par exemple [AJP06a, BR2, DG] pour plus d'informations sur le sujet.

1.1.1 Définition et opérateur de seconde quantification

Les espaces de Fock sont les espaces de Hilbert appropriés pour décrire un système ayant un nombre variable de particules. L'espace des états pour une particule est un espace de Hilbert complexe $\mathfrak{h}$, appelé par la suite espace à une particule. L'espace décrivant n particules est alors le produit tensoriel hilbertien

$$\mathfrak{h}^{\otimes n} := \underbrace{\mathfrak{h} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{h}}_{n \text{ fois}}.$$

Pour prendre en compte le caractère indistinguable des particules on est amené à considérer seulement certains sous-espaces de $\mathfrak{h}^{\otimes n}$, symétrique pour les bosons et antisymétrique pour les fermions. Plus précisément les produits tensoriels symétriques et antisymétriques sont définis comme suit

$$\begin{aligned} f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}, & f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{h}, \\ f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_n &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}, & f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

où S_n est le groupe des permutations à n éléments et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ . Dans cette thèse nous aurons uniquement besoin des espaces symétriques et nous nous restreindrons donc à la description de ces derniers. Le vecteur d'état de n bosons est un élément de l'espace

$$\mathcal{F}_+^n(\mathfrak{h}) := \text{Vect}(\{f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n \mid f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{h}\}).$$

Par exemple, si $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^3, dk)$ alors $\mathcal{F}_+^n(\mathfrak{h})$ est isomorphe à $L_s^2((\mathbb{R}^3)^n, dk_1 \cdots dk_n)$ l'ensemble des fonctions $f(k_1, \dots, k_n)$ de $L^2((\mathbb{R}^3)^n, dk_1 \cdots dk_n)$ symétriques par rapport à $(k_1, \dots, k_n)$.

On peut maintenant définir l'espace de Fock symétrique.

Définition 1.1. *Soit $\mathfrak{h}$ un espace de Hilbert, l'espace de Fock bosonique sur $\mathfrak{h}$ est l'espace de Hilbert défini par*

$$\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_+^n(\mathfrak{h}),$$

où par convention $\mathcal{F}_+^0(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}$.

L'espace à nombre fini de particules est le sous-espace dense de $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ défini par

$$\mathcal{F}_+^{\text{fin}}(\mathfrak{h}) = \{\Psi = (\Psi_0, \dots, \Psi_n, \dots) \in \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}) \mid \exists n_0, \Psi_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}.$$

Le vecteur $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$ est appelé l'état du vide. Enfin, si $\mathcal{D} \subset \mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel ($\mathcal{D}$ jouera ultérieurement le rôle de domaine), on notera $\mathcal{F}_+^n(\mathcal{D})$ le produit tensoriel algébrique symétrique de n copies de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{F}_+^{\text{fin}}(\mathcal{D})$ l'espace à nombre fini de particules correspondant.

Etant donné un opérateur auto-adjoint h agissant sur l'espace à une particule $\mathfrak{h}$ on peut généraliser à l'espace de Fock bosonique sur $\mathfrak{h}$ de la façon suivante.

Définition 1.2. *Soit h un opérateur auto-adjoint agissant sur $\mathfrak{h}$ de domaine $D(h)$. On définit l'opérateur de seconde quantification $H = d\Gamma(h)$ sur $\mathcal{F}_+^n(D(h))$ par*

$$d\Gamma(h) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}_{j-1} \otimes h \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}_{n-j}.$$

Il définit un opérateur essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{F}_+^{\text{fin}}(D(h))$. Lorsque $h = \mathbb{1}$ on notera alors $N = d\Gamma(\mathbb{1})$. Cet opérateur est appelé opérateur de nombre : si $\Psi \in \mathcal{F}_+^n(\mathfrak{h})$ alors $N\Psi = n\Psi$.

Remarque 1.3. *Si h est le hamiltonien engendrant la dynamique pour une particule, l'opérateur $d\Gamma(h)$ engendre la dynamique du système à plusieurs particules identiques et sans interactions.*

Remarque 1.4. *Il découle directement de la définition que si h est positif alors $d\Gamma(h)$ également.*

Pour décrire la variation du nombre de particules on utilise les opérateurs de création et d'annihilation qui ajoute ou retire une particule à l'état quantique décrit, ils sont notés respectivement a^* et a .

Définition 1.5. *Soit $f \in \mathfrak{h}$. On définit les opérateurs de création $a^*(f)$ et d'annihilation $a(f)$ sur $\mathcal{F}_+^n(\mathfrak{h})$, $n \in \mathbb{N}$, par*

$$a^*(f) : f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n \mapsto \sqrt{n+1} f \otimes_s f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n \in \mathcal{F}_+^{n+1}(\mathfrak{h}),$$

et

$$a(f) : f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \langle f, f_j \rangle f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_{j-1} \otimes_s f_{j+1} \otimes_s \cdots \otimes_s f_n \in \mathcal{F}_+^{n-1}(\mathfrak{h}),$$

si $n \geq 1$ et $a(f)\Omega = 0$.

Les opérateurs $a(f)$ et $a^*(f)$ définissent des opérateurs fermables sur $\mathcal{F}_+^{\text{fin}}(\mathfrak{h})$. On notera de la même façon leur fermeture, et on a alors $a^*(f) = (a(f))^*$. On peut noter que les opérateurs $a(f)$ et $a^*(f)$ sont bien définis sur $D(N^{1/2})$. Ils vérifient les relations dites de commutation canonique (ou CCR) suivantes

$$[a(f), a(g)] = 0, \quad [a^*(f), a^*(g)] = 0, \quad [a(f), a^*(g)] = \langle f, g \rangle,$$

les égalités étant à comprendre au sens fort sur $D(N)$. On peut noter aussi que pour tous $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{h}$ on a

$$f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^*(f_1) a^*(f_2) \dots a^*(f_n) \Omega,$$

et que $a^*(f)$ est linéaire par rapport à f tandis que $a(f)$ est antilinéaire.

Notation 1.6. On utilisera souvent la notation “bra-ket”. Si $f \in \mathfrak{h}$, $|f\rangle$ et $\langle f|$ désigneront respectivement

$$|f\rangle : \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda f \in \mathfrak{h} \quad \text{et} \quad \langle f| : \mathfrak{h} \ni g \mapsto \langle f, g \rangle \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, si $f, g \in \mathfrak{h}$ la notation $|f\rangle\langle g|$ désignera l’opérateur

$$|f\rangle\langle g| : \mathfrak{h} \ni h \mapsto \langle g, h \rangle f \in \mathfrak{h}.$$

En particulier si $\|f\| = 1$ alors $|f\rangle\langle f|$ désigne le projecteur orthogonal de rang 1 sur $\text{Vect}(f)$.

Remarque 1.7. Si $h = |f\rangle\langle f|$ alors

$$d\Gamma(|f\rangle\langle f|) = a^*(f)a(f).$$

Plus généralement, si h est auto-adjoint et $(f_n)_n$ est une base Hilbertienne de $\mathfrak{h}$ telle $f_n \in D(h)$ pour tout n on a alors

$$d\Gamma(h) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle f_n, h f_m \rangle a^*(f_n) a(f_m).$$

Les inégalités suivantes sont souvent utiles et parfois appelées estimations N_τ dans la littérature. Elles remontent à [GJ87], voir aussi par exemple [Ar81a, BFS98, Der17].

Proposition 1.8. Soit h un opérateur auto-adjoint positif et $f \in D(h^{-1/2})$. Alors pour tout $\Psi \in D(d\Gamma(h))$ on a

$$\begin{aligned} \|a(f)\Psi\|^2 &\leq \|h^{-1/2}f\|^2 \langle \Psi, d\Gamma(h)\Psi \rangle, \\ \|a^*(f)\Psi\|^2 &\leq \|h^{-1/2}f\|^2 \langle \Psi, d\Gamma(h)\Psi \rangle + \|f\|^2 \|\Psi\|^2. \end{aligned}$$

Enfin on définit l’opérateur suivant.

Définition 1.9. Soient $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ deux espaces de Hilbert et $u : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_2$ un opérateur borné. On définit alors $\Gamma(u) : \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_1) \rightarrow \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_2)$ par

$$\Gamma(u)[\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_1)] = u \otimes \cdots \otimes u.$$

Si u est unitaire alors $\Gamma(u)$ également. Enfin, si h est auto-adjoint sur $\mathfrak{h}$, alors

$$\Gamma(e^{ith}) = e^{itd\Gamma(h)}.$$

1.1.2 Les algèbres CCR

Définition 1.10. Soit $f \in \mathfrak{h}$ un espace de Hilbert. L'opérateur de champ associé est défini sur $\mathcal{F}_+^{\text{fin}}(\mathfrak{h})$ par

$$\phi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a^*(f)).$$

Proposition 1.11. On a les propriétés suivantes.

1. Pour tout $f \in \mathfrak{h}$, $\phi(f)$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{F}_+^{\text{fin}}(\mathfrak{h})$. On notera toujours $\phi(f)$ son unique extension auto-adjointe. On a $D(N^{1/2}) \subset D(\phi(f))$.
2. Pour tous $f, g \in \mathfrak{h}$ on a, au sens fort sur $D(N)$,

$$[\phi(f), \phi(g)] = i\text{Im}\langle f, g \rangle.$$

3. Si $(f_n)_n$ est une famille de $\mathfrak{h}$ qui converge vers $f \in \mathfrak{h}$ alors $\phi(f_n)$ converge vers $\phi(f)$ au sens fort sur $D(N^{1/2})$.

Définition 1.12. Si $f \in \mathfrak{h}$ on définit sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ l'opérateur unitaire

$$W(f) := e^{i\phi(f)}.$$

Les $W(f)$ sont appelés opérateurs de Weyl.

L'avantage des $W(f)$ sur les opérateurs de champs est que ce sont des opérateurs bornés. La Proposition 1.11 se traduit par

Proposition 1.13. On a les propriétés suivantes.

1. Pour tout $f \in \mathfrak{h}$ l'opérateur $W(f)$ laisse $D(N)$ invariant.
2. Pour tous $f, g \in \mathfrak{h}$ on a la version suivante des CCR

$$W(f + g) = e^{\frac{i}{2}\text{Im}\langle f, g \rangle} W(f)W(g). \quad (1.3)$$

3. Si $f_n \rightarrow f$ dans $\mathfrak{h}$ alors $W(f_n)$ converge vers $W(f)$ au sens fort sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$. Cependant pour tous $f \neq g$ dans $\mathfrak{h}$ on a

$$\|W(f) - W(g)\| = 2. \quad (1.4)$$

On appelle $\text{CCR}(\mathfrak{h})$ la C^* -algèbre engendrée par les opérateurs de Weyl sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$. Sauf dans le cas où $\mathfrak{h}$ est de dimension finie, l'algèbre $\text{CCR}(\mathfrak{h})$ est strictement plus petite que l'ensemble $\mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}))$ des opérateurs bornés sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$. Elle est cependant suffisamment grosse dans le sens suivant.

Proposition 1.14. *Le vecteur Ω est cyclique pour $CCR(\mathfrak{h})$, c'est-à-dire que le sous-espace $\text{Vect}\{W(f)\Omega \mid f \in \mathfrak{h}\}$ est dense dans $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$, et $CCR(\mathfrak{h})$ agit de façon irréductible sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$, c'est-à-dire que si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}))$ est telle que $[A, W(f)] = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{h}$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda \mathbb{1}$. Il découle du Théorème du bicommutant de Von Neumann que $CCR(\mathfrak{h})$ est dense dans $\mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}))$ pour la topologie faible et pour la topologie forte des opérateurs.*

Si $\mathcal{D} \subset \mathfrak{h}$ on notera de même $CCR(\mathcal{D})$ la C^* -algèbre engendrée par les $W(f)$, $f \in \mathcal{D}$.

Remarque 1.15. *Le manque de continuité de $W(f)$ par rapport à f , en particulier l'identité (1.4), a pour conséquence que $CCR(\mathcal{D}) \neq CCR(\mathfrak{h})$ dès que $\mathcal{D} \neq \mathfrak{h}$, même si ce dernier est un sous-espace dense.*

La proposition suivante indique comment évolue un opérateur de Weyl sous l'action d'opérateurs $\Gamma(u)$.

Proposition 1.16. [DG] *Si $u : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_2$ est unitaire alors, pour tout $f \in \mathfrak{h}_1$,*

$$\Gamma(u)W_1(f)\Gamma(u^{-1}) = W_2(uf),$$

où W_1 et W_2 désignent les opérateurs de Weyl sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_1)$ et $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_2)$ respectivement. En particulier, si h est auto-adjoint sur $\mathfrak{h}$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{itd\Gamma(h)}W(f)e^{-itd\Gamma(h)} = W(e^{ith}f). \quad (1.5)$$

1.1.3 Produit tensoriel d'espaces de Fock

Etant donnés deux espaces $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ et $j_i : \mathfrak{h}_i \rightarrow \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, $i = 1, 2$, les injections canoniques, on définit l'opérateur $U : \mathcal{F}_+^{\text{fin}}(\mathfrak{h}_1) \otimes \mathcal{F}_+^{\text{fin}}(\mathfrak{h}_2) \rightarrow \mathcal{F}_+^{\text{fin}}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ par : si $\Psi_1 \in \mathcal{F}_+^{n_1}(\mathfrak{h}_1)$ et $\Psi_2 \in \mathcal{F}_+^{n_2}(\mathfrak{h}_2)$

$$U \Psi_1 \otimes \Psi_2 = \sqrt{\frac{(n_1 + n_2)!}{n_1!n_2!}} (\Gamma(j_1)\Psi_1) \otimes_s (\Gamma(j_2)\Psi_2). \quad (1.6)$$

On a alors le résultat suivant, voir par exemple [DG].

Théorème 1.17. 1. *L'opérateur U défini en (1.6) s'étend en un opérateur unitaire de $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_1) \otimes \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_2)$ vers $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$.*

2. *$U\Omega_1 \otimes \Omega_2 = \Omega$ où Ω_i désigne le vide de $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_i)$ et Ω celui de $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$.*

3. *Pour tous $f_1 \in \mathfrak{h}_1$, $f_2 \in \mathfrak{h}_2$ on a*

$$a^\#(f_1 \oplus f_2)U = U(a^\#(f_1) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes a^\#(f_2)),$$

où $a^\#$ désigne a ou a^ , et donc*

$$W(f_1 \oplus f_2)U = U W(f_1) \otimes W(f_2),$$

4. *Si h_1 et h_2 sont auto-adjoints sur $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ respectivement alors*

$$d\Gamma(h_1 \oplus h_2)U = U(d\Gamma(h_1) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes d\Gamma(h_2)).$$

5. *Si $u_1 \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}_1)$ et $u_2 \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}_2)$ alors*

$$\Gamma(u_1 \oplus u_2)U = U\Gamma(u_1) \otimes \Gamma(u_2).$$

Ce résultat est appelé "loi exponentielle pour les espaces de Fock". Il permet d'identifier le produit tensoriel de deux espaces de Fock avec un unique espace de Fock. On l'utilisera régulièrement dans la suite de cette thèse, voir par exemple la Section 1.4.1.

1.2 Description mathématique des systèmes quantiques ouverts

Dans cette section on introduit le cadre algébrique de la mécanique statistique dont on aura besoin dans cette thèse. Il sera nécessaire pour prendre en compte les fuites dans la cavité et en particulier décrire le gaz de bosons à température positive qui modélisera le réservoir additionnel. On ne rappelle ici que les principaux éléments dont on aura besoin. Le lecteur intéressé trouvera une description plus complète par exemple dans [BR1, BR2, Pi06].

1.2.1 Systèmes ouverts et trace partielle

Dans sa forme la plus simple, un système en mécanique est décrit à l'aide d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un opérateur auto-adjoint, également appelé hamiltonien ou opérateur d'énergie, H agissant sur $\mathcal{H}$. L'état du système est alors donné par un vecteur $\Psi \in \mathcal{H}$ de norme 1. Si Ψ_0 est l'état initial du système son évolution est décrite par l'équation de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = H \Psi(t), \quad \Psi(0) = \Psi_0, \quad (1.7)$$

et le Théorème de Stone permet alors d'écrire $\Psi(t) = e^{-itH} \Psi_0$ où e^{-itH} désigne le groupe unitaire engendré par H . Une observable du système est alors un élément auto-adjoint $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et la valeur moyenne de l'observable O dans l'état Ψ est $\langle O \rangle := \langle \Psi, O \Psi \rangle$. Ainsi, la valeur moyenne d'une observable O au temps t si le système est initialement dans l'état Ψ_0 est

$$\langle O \rangle_t = \langle \Psi(t), O \Psi(t) \rangle = \langle \Psi_0, e^{itH} O e^{-itH} \Psi_0 \rangle.$$

Plutôt que de considérer que l'état du système évolue et que l'observable évolue (point de vue de Schrödinger), un point de vue équivalent est de considérer que les états sont fixes et que les observables évoluent (point de vue de Heisenberg). L'observable $O(t)$ évoluée au temps t est alors $O(t) = e^{itH} O e^{-itH}$. Son évolution est décrite par l'équation

$$\frac{d}{dt} O(t) = i[H, O(t)].$$

Considérons maintenant deux systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ en interactions, voir (1.1)-(1.2). Une observable du système $\mathcal{S}$ aura la forme $O_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{R}}$. Cependant même si l'état initial du système est de la forme $\Psi_0 = \Psi_{\mathcal{S}} \otimes \Psi_{\mathcal{R}}$ (état produit) ce ne sera pas le cas de l'état $\Psi(t)$ au temps t . On montre alors facilement qu'il existe un unique opérateur à trace $\rho(t)$ agissant sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ uniquement et tel que, pour tout $O_{\mathcal{S}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ on ait

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}(\rho(t) O_{\mathcal{S}}) = \langle \Psi(t), O_{\mathcal{S}} \otimes_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{R}}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \Psi(t) \rangle. \quad (1.8)$$

On vérifie facilement que ρ est auto-adjoint positif et que $\text{Tr}(\rho) = 1$. On parlera de matrice densité. Il est ainsi naturel d'étendre la notion d'état d'un système quantique : un état est donné par une matrice densité ρ . Un état donné par un vecteur $\Psi \in \mathcal{H}$ comme ci-dessus est appelé état pur et correspond à $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$.

Si un système est dans l'état ρ et O est une observable du système, la valeur moyenne de O dans l'état ρ est alors $\langle O \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho O)$. L'évolution de l'état du système est lui décrit par l'équation de Liouville

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)], \quad (1.9)$$

i.e. si l'état initial est ρ_0 on a $\rho(t) = e^{-itH} \rho_0 e^{itH}$, et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Tr}(\rho(t) O) = \text{Tr}(\rho O(t)). \quad (1.10)$$

Finalement l'opération de "réduction" donnée par (1.8) se généralise immédiatement de la façon suivante.

Définition 1.18. Soit ρ un opérateur à trace sur $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$, on appelle trace partielle de ρ par rapport à $\mathcal{H}_R$ l'unique opérateur à trace ρ_S sur $\mathcal{H}_S$ tel que

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_S}(\rho_S O_S) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R}(\rho O_S \otimes \mathbb{1}_R), \quad \forall O_S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S).$$

On notera $\rho_S = \text{Tr}_{\mathcal{H}_R}(\rho)$. Si ρ est positif alors $\text{Tr}_{\mathcal{H}_R}(\rho)$ aussi et $\text{Tr}_{\mathcal{H}_S}(\text{Tr}_{\mathcal{H}_R}(\rho)) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R}(\rho)$. En particulier si ρ est une matrice densité alors $\text{Tr}_{\mathcal{H}_R}(\rho)$ également. On parle alors de matrice densité réduite.

1.2.2 Systèmes dynamiques quantiques

Afin de décrire un système infiniment étendu ayant une densité positive de particules le cadre usuel brièvement rappelé dans la section précédente ne suffit plus et il est commode de passer à une description plus algébrique. Pour ne donner qu'un exemple, si on est en dimension finie et H est le hamiltonien du système, l'unique état d'équilibre à température $T > 0$ est donné par la matrice densité $\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}(e^{-\beta H})}$ où $\beta = \frac{1}{T}$. Dans certains cas cette formule peut s'étendre en dimension infinie mais cela nécessite que l'opérateur $e^{-\beta H}$ soit de classe trace, en particulier le spectre de H doit être purement discret. C'est le cas par exemple pour un oscillateur harmonique mais ça ne le sera pas pour le réservoir bosonique qui apparaîtra dans le modèle que nous étudierons. On donne ici une brève description de cette approche.

Définition 1.19. L'algèbre des observables est une C^* -algèbre $\mathfrak{A}$.

Remarque 1.20. On supposera toujours que les C^* -algèbres possèdent une unité.

Définition 1.21. Etant donné une C^* -algèbre $\mathfrak{A}$, un état ω est une forme linéaire positive sur $\mathfrak{A}$, i.e. $\omega(O^*O) \geq 0$ pour tout $O \in \mathfrak{A}$, telle que $\|\omega\| = 1$.

Remarque 1.22. Sur une C^* -algèbre une forme linéaire positive est automatiquement continue, ainsi $\|\omega\|$ est bien définie. On peut par ailleurs montrer que dans ce cas $\|\omega\| = \omega(\mathbb{1}_{\mathfrak{A}})$ et donc la condition de normalisation peut s'écrire $\omega(\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}) = 1$.

On voit facilement que la situation décrite dans la section précédente est un cas particulier de celui-ci dans lequel $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et l'état ω est défini par $\omega(O) = \text{Tr}(\rho O)$. La quantité $\omega(O)$ sera ainsi naturellement appelée valeur moyenne de l'observable O dans l'état ω .

Définition 1.23. Une dynamique sur une C^* -algèbre $\mathfrak{A}$ est un groupe à un paramètre $(\tau^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de $*$ -automorphismes de $\mathfrak{A}$.

Le point de départ est ici l'évolution des observables. Si ω_0 est un état donné jouant le rôle d'état initial, l'état du système au temps t est alors naturellement donné par $\omega_t = \omega \circ \tau^t$ et on a

$$\omega_t(O) = \omega(\tau^t(O))$$

qui est l'analogie de (1.10).

Définition 1.24. Un état ω sur $\mathfrak{A}$ est dit τ^t -invariant si $\omega \circ \tau^t = \omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On peut remarquer que dans la définition ci-dessus on n'a imposé aucune propriété de continuité par rapport à t . Dans le cadre des C^* -algèbres la notion naturelle de continuité est celle de continuité forte : pour tout $O \in \mathfrak{A}$ l'application $t \mapsto \tau^t(O)$ est continue pour la norme. Un tel couple $(\mathfrak{A}, \tau^t)$ est alors appelé C^* système dynamique. Cette situation est cependant vite restrictive. En effet, si on reprend la situation de la section précédente la dynamique est alors donnée par

$$\tau^t(O) = e^{itH} O e^{-itH},$$

et on peut montrer que $(\tau^t)_t$ est fortement continu si et seulement si l'opérateur H est borné. Il est donc nécessaire d'affaiblir l'hypothèse de continuité sur τ^t . Cela amène à la définition suivante.

Définition 1.25. Un système dynamique quantique est un triplet $(\mathfrak{A}, \tau^t, \omega)$ où

- $\mathfrak{A}$ est une C^* -algèbre (décrivant l'ensemble des observables),
- τ^t est un groupe de $*$ -automorphisme (décrivant la dynamique du système),
- ω est un état, dit de référence, qui est τ^t -invariant,

tel que $t \mapsto \omega(O^* \tau^t(O))$ est continue pour tout $O \in \mathfrak{A}$.

1.2.3 Mélange et états KMS

La notion de mélange donne des informations sur le comportement en temps long d'un système dynamique quantique, et dans un certain sens sur la stabilité des états invariants. Au préalable on a besoin pour cela de la notion d'état relativement normal.

Théorème 1.26. Soit $\mathfrak{A}$ une C^* -algèbre et ω un état sur $\mathfrak{A}$. Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, une représentation (un $*$ -morphisme de C^* -algèbre) $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $\Omega \in \mathcal{H}$ un vecteur cyclique, i.e. $\{\pi(O)\Omega, O \in \mathfrak{A}\}$ est dense dans $\mathcal{H}$, tel que pour tout $O \in \mathfrak{A}$

$$\omega(O) = \langle \Omega, \pi(O)\Omega \rangle.$$

Le triplet $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ est appelé représentation GNS de $(\mathfrak{A}, \omega)$. Une telle représentation est unique à équivalence unitaire près.

Exemple 1.27. Soit $\mathfrak{h}$ un espace de Hilbert séparable et ρ une matrice densité sur $\mathfrak{h}$ telle que $\ker \rho = \{0\}$. On considère $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ et ω l'état donné par la matrice densité ρ . En prenant $\mathcal{H} = \mathcal{J}_2(\mathfrak{h})$ l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt sur $\mathfrak{h}$, $\pi : \mathcal{B}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ définie par si $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ alors $\pi(A) : \mathcal{H} \ni X \mapsto AX \in \mathcal{H}$ et $\Omega = \rho^{1/2} \in \mathcal{H}$, on vérifie facilement que $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ est une représentation GNS de $(\mathfrak{A}, \omega)$.

Une autre façon équivalente de décrire la représentation GNS de $(\mathfrak{A}, \omega)$ est la suivante. Elle sera utilisée dans le Chapitre 4. On se fixe une conjugaison complexe $\psi \mapsto \bar{\psi}$ sur $\mathfrak{h}$, i.e. une involution anti-unitaire. On vérifie alors que l'application $\varphi \otimes \bar{\psi} \mapsto |\varphi\rangle\langle\psi|$ s'étend en un opérateur unitaire $U : \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{J}_2(\mathfrak{h})$. En notant $\tilde{\mathcal{H}} = \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, $\tilde{\pi}(A) = U^* \pi(A) U$ et $\tilde{\Omega} = U^* \Omega$, le triplet $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\pi}, \tilde{\Omega})$ fournit une autre représentation GNS de $(\mathfrak{A}, \omega)$ et on vérifie facilement que

$$\tilde{\pi}(A) = A \otimes \mathbb{1}, \quad \forall A \in \mathfrak{A},$$

et si $(\phi_j)_{j \geq 1}$ est une base orthonormée de vecteurs propres de ρ , $\rho \phi_j = \lambda_j \phi_j$, alors

$$\tilde{\Omega} = \sum_{j \geq 1} \lambda_j^{1/2} \phi_j \otimes \bar{\phi}_j.$$

Définition 1.28. Soit ω et μ deux états sur une C^* -algèbre $\mathfrak{A}$ et $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ la représentation GNS de $(\mathfrak{A}, \omega)$. On dit que μ est un état ω -normal si, et seulement si, il existe une matrice de densité ρ_μ sur $\mathcal{H}$ tel que pour tout $O \in \mathfrak{A}$ on a

$$\mu(O) = \text{Tr}(\rho_\mu \pi(O)).$$

Définition 1.29. On dit qu'un système quantique dynamique $(\mathfrak{A}, \tau^t, \omega)$ est mélangeant (mixing) si pour tout état ω -normal μ et tout $A \in \mathfrak{A}$ on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(\tau^t(A)) = \omega(A).$$

Parmi les états invariants d'un système dynamique quantique les états KMS (Kubo-Martin-Schwinger) jouent un rôle important.

Définition 1.30. Soient $\mathfrak{A}$ une C^* -algèbre, $(\tau^t)_t$ un groupe de $*$ -automorphismes et $\beta > 0$. On dit qu'un état ω est (τ^t, β) -KMS si pour tout $A, B \in \mathfrak{A}$ il existe une fonction $F_\beta(A, B; z)$ analytique sur la bande

$$S_\beta := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } z < \beta\},$$

continue sur $\overline{S_\beta}$ et vérifiant les égalités suivantes sur ∂S_β

$$\begin{aligned} F_\beta(A, B; t) &= \omega(A \tau^t(B)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ F_\beta(A, B; t + i\beta) &= \omega(\tau^t(B) A), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

D'un point de vue physique ces états décrivent les états d'équilibre thermique. Si $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ avec $\mathcal{H}$ de dimension finie et $\tau^t(O) = e^{itH} O e^{-itH}$, pour tout $\beta > 0$ il existe un unique état (τ^t, β) -KMS donné par

$$\omega_\beta(O) = \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}(e^{-\beta H})} O \right).$$

Physiquement β joue le rôle de l'inverse de la température d'où le fait qu'on définit les états KMS pour β positif. Néanmoins, comme ce sera le cas dans le Chapitre 4, on peut définir mathématiquement un état (τ^t, β) -KMS avec $\beta < 0$ en utilisant la même définition mais avec

$$S_\beta := \{z \in \mathbb{C} \mid \beta < \text{Im } z < 0\}.$$

Lorsque $\beta = 0$ la condition KMS devient simplement $\omega(AB) = \omega(BA)$ pour tous $A, B \in \mathfrak{A}$. On parle alors d'état tracial.

On peut alors montrer que si ω est un état (τ^t, β) -KMS alors il est τ^t -invariant. De plus, en prenant $A = B^*$ dans (1.11), la continuité de la fonction $F_\beta(B^*, B; t)$ sur le bord de S_β assure que $(\mathfrak{A}, \tau^t, \omega)$ définit un système dynamique quantique.

Finalement, on vérifie facilement que pour tout $\lambda \neq 0$ si un état est (τ^t, β) -KMS alors il est $(\tau^{\lambda t}, \beta/\lambda)$ -KMS. En particulier il est $(\sigma^t, -1)$ -KMS où

$$\sigma^t(A) = \tau^{-t\beta}(A).$$

1.2.4 Etats sur l'algèbre $\text{CCR}(\mathfrak{h})$

Dans le cas de l'algèbre $\text{CCR}(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} \subset \mathfrak{h}$, un état ω est complètement déterminé par la donnée des $\omega(W(f))$, $f \in \mathcal{D}$. Cela conduit à la définition suivante.

Définition 1.31. *Soit ω un état sur $\text{CCR}(\mathcal{D})$. La fonction caractéristique de ω est la fonction $S_\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $S_\omega(f) = \omega(W(f))$. Un état ω est entièrement déterminé par la connaissance de S_ω .*

Définition 1.32. *Soit ω un état sur $\text{CCR}(\mathcal{D})$.*

1. *On dit que ω est régulier si pour tout $f \in \mathfrak{h}$ la fonction $s \mapsto S_\omega(sf)$ est continue.*
2. *On dit que ω est analytique, resp. entier, si pour tout $f \in \mathcal{D}$ la fonction $s \mapsto S_\omega(sf)$ admet une extension analytique au voisinage de 0, resp. sur $\mathbb{C}$.*

Remarque 1.33. *L'intérêt d'un état ω analytique est de pouvoir définir la valeur moyenne d'un opérateur de champ $\phi(f)$*

$$\omega(\phi(f)) = -i\partial_s S_\omega(sf)|_{s=0}, \quad \forall f \in \mathcal{D}. \quad (1.12)$$

Plus généralement, si ω est analytique et $f_1, f_2 \in \mathcal{D}$ alors

$$\begin{aligned} \omega(\phi(f_1)\phi(f_2)) &= -\partial_{s_1}\partial_{s_2}\omega(W(s_1f_1)W(s_2f_2))|_{s_1=s_2=0} \\ &= -\partial_{s_1}\partial_{s_2}e^{-\frac{i}{2}s_1s_2\text{Im}\langle f_1, f_2 \rangle} S_\omega(s_1f_1 + s_2f_2)|_{s_1=s_2=0}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Pour plus d'informations le lecteur intéressé pourra consulter [BR2].

Parmi les états sur $\text{CCR}(\mathcal{D})$ certains états jouent un rôle particulier, les états dits quasi-libres.

Définition 1.34. *Un état ω sur $\text{CCR}(\mathcal{D})$ est dit quasi-libre si sa fonction caractéristique est de la forme*

$$S_\omega(f) = \exp\left(-\frac{1}{4}\|f\|^2 - \frac{1}{2}\varrho(f)\right)$$

où ϱ est une forme quadratique positive sur $\mathcal{D}$.

On vérifie alors aisément qu'un état quasi-libre est analytique. Par ailleurs si T est l'opérateur auto-adjoint positif associé à ϱ on doit avoir $\mathcal{D} \subset D(T^{1/2})$. Cette condition expliquera le choix de l'algèbre des CCR utilisée dans la suite de cette thèse, voir (1.28)-(1.29).

Finalement, étant donné un opérateur auto-adjoint h sur $\mathfrak{h}$, pour tout sous-espace $\mathcal{D} \subset \mathfrak{h}$ on a $\text{CCR}(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H} = \mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$, et $H = d\Gamma(h)$ engendre une dynamique sur $\text{CCR}(\mathcal{D})$. Alternativement, (1.5) permet de définir τ^t par

$$\tau^t(W(f)) = W(e^{ith}f).$$

On peut alors montrer, en utilisant les CCR (1.3), que pour tout $\beta > 0$, l'unique état quasi-libre qui est (τ^t, β) -KMS a pour fonction caractéristique

$$S(f) = \exp \left(-\frac{1}{4} \|f\|^2 - \frac{1}{2} \left\langle f, \frac{1}{e^{\beta h} - 1} f \right\rangle \right) = \exp \left(-\frac{1}{4} \left\langle f, \coth \left(\frac{\beta h}{2} \right) f \right\rangle \right). \quad (1.14)$$

On voit qu'un tel état existe uniquement si h est positif et que 0 n'est pas valeur propre de h . La condition $\mathcal{D} \subset D(T^{1/2})$ ci-dessus se traduit alors par $\mathcal{D} \subset D(h^{-1/2})$.

1.3 Les systèmes en interactions répétées

Afin de simplifier la présentation des systèmes en interactions répétées on commence par se placer dans le cadre usuel décrit dans la Section 1.2.1. Pour plus d'informations sur les SIR le lecteur est invité à aller lire l'article de revue [BJM14] dont cette partie est inspirée.

1.3.1 Description mathématique

Les systèmes quantiques en interactions répétées (SIR par la suite) sont structurés de la manière suivante : on a un petit système $\mathcal{S}$, dont l'évolution libre est régie sur un espace de Hilbert $\mathfrak{h}_{\mathcal{S}}$ par le Hamiltonien $H_{\mathcal{S}}$, et une infinité de sous-systèmes $(\mathcal{E}_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ dont chacun est défini sur son espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_j}$ par son propre Hamiltonien $H_{\mathcal{E}_j}$. Chaque sous-système $\mathcal{E}_j$ interagit un à un avec $\mathcal{S}$ pendant un temps $\tau_j > 0$. Pour M interactions le système total est décrit par l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}^M := \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathcal{H}_{\mathcal{E}_j}.$$

On notera aussi l'environnement formé par les sous-systèmes $\mathcal{E}_j$ par

$$\mathcal{H}_{\text{env}}^M := \bigotimes_{j=1}^M \mathcal{H}_{\mathcal{E}_j}.$$

On note V_j les opérateurs décrivant les interactions entre $\mathcal{S}$ et les sous-systèmes $\mathcal{E}_j$. V_j est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}_j}$. On note $t_j = \tau_1 + \dots + \tau_j$ pour $1 \leq j \leq M$. Pour M interactions l'évolution du système en interactions répétées est alors décrite par le Hamiltonien

$$H(t) := H_{\mathcal{S}} + \sum_{j=1}^M H_{\mathcal{E}_j} + \sum_{j=1}^M \chi_j(t) V_j, \quad t \in [0, t_M), \quad (1.15)$$

où χ_j est la fonction caractéristique de l'intervalle $[t_{j-1}, t_j)$. On supposera que

$$H_j := H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{E}_j} + V_j \quad (1.16)$$

définit un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}_j}$. L'opérateur $H(t)$ est constant par morceaux

$$H(t) \equiv \tilde{H}_j = H_j + \sum_{k \neq j} H_{\mathcal{E}_k}, \quad t \in [t_{j-1}, t_j]. \quad (1.17)$$

Dans les identités ci-dessus, pour plus de clarté, on a omis d'écrire les facteurs $\mathbb{1}$ triviaux, le contexte et les indices indiquant généralement sur quel espace agit l'opérateur de façon non-triviale. Par exemple, dans (1.15) $H_{\mathcal{S}}$ devrait être $H_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}_M}$ tandis que dans (1.16) on devrait écrire $H_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}$. On utilisera cette convention sans plus de précision dans toute la suite.

Le cas le plus simple de SIR, appelé idéal, est le cas où tous les sous-systèmes $\mathcal{E}_j$ sont des copies d'un même sous-système $\mathcal{E}$ interagissant tous de la même façon et pour la même durée avec $\mathcal{S}$. Autrement dit, dans le cas idéal on a $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_j} \equiv \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $H_{\mathcal{E}_j} \equiv H_{\mathcal{E}}$, $V_j \equiv V$ et $\tau_j \equiv \tau$. Le modèle considéré dans cette thèse se placera dans le cadre des interactions idéales et pour simplifier la présentation on restreindra la suite de la description des SIR à ce cas. Une généralisation dans un cadre aléatoire a été étudiée dans [BJM08].

1.3.2 L'opérateur de dynamique réduite

Un état initial du sous-système $\mathcal{S}$ est donné par une matrice densité $\rho_{\mathcal{S}}$. De la même manière on note $(\rho_{\mathcal{E}_j})_{1 \leq j \leq M}$ les états initiaux (matrices densité) des sous-systèmes $\mathcal{E}_j$. A nouveau, pour simplifier la présentation, on supposera que les $\rho_{\mathcal{E}_j}$ sont les copies d'un même état $\rho_{\mathcal{E}}$ et que celui-ci est invariant pour la dynamique libre des $\mathcal{E}_j$, i.e. $e^{itH_{\mathcal{E}}} \rho_{\mathcal{E}} e^{-itH_{\mathcal{E}}} = \rho_{\mathcal{E}}$. L'état du système couplé après $n \leq M$ interactions est donné par la matrice de densité suivante

$$\rho(n) := e^{-i\tau \tilde{H}_n} \cdots e^{-i\tau \tilde{H}_1} \left(\rho_{\mathcal{S}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \rho_{\mathcal{E}_j} \right) e^{i\tau \tilde{H}_1} \cdots e^{i\tau \tilde{H}_n}.$$

En notant

$$U_n := e^{-i\tau \tilde{H}_n} \cdots e^{-i\tau \tilde{H}_1},$$

on obtient alors que l'état du système $\mathcal{S}$ après ces n interactions est alors donné par la trace partielle de $\rho(n)$ par rapport à l'environnement., i.e.

$$\rho_{\mathcal{S}}(n) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\text{env}}^M} \left[U_n \left(\rho_{\mathcal{S}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \rho_{\mathcal{E}_j} \right) U_n^* \right]. \quad (1.18)$$

De par la nature des SIR, les différents sous-systèmes $(\mathcal{E}_j)_{1 \leq j \leq M}$ n'interagissent pas entre eux ce qui se traduit par

$$[H_{\mathcal{E}_j}, H_{\mathcal{E}_k}] = 0, \quad \forall j \neq k.$$

De plus, le système $\mathcal{S}$ n'interagit qu'une seule fois avec chacun des sous-systèmes $\mathcal{E}_j$ ce qui se traduit par

$$[H_j, H_{\mathcal{E}_k}] = 0, \quad \forall j \neq k.$$

Ainsi on peut factoriser U_n sous la forme

$$U_n = U_n^+ \times e^{-i\tau H_n} \cdots e^{-i\tau H_1} \times U_n^- \quad (1.19)$$

où

$$U_n^+ = \exp \left(-i \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \tau H_{\mathcal{E}_j} \right) \quad \text{et} \quad U_n^- = \exp \left(-i \sum_{j=2}^n (j-1) \tau H_{\mathcal{E}_j} \right).$$

L'opérateur U_n^+ décrit l'évolution (libre) des $\mathcal{E}_j$ après leur interaction avec $\mathcal{S}$ tandis que U_n^- décrit celle des $\mathcal{E}_j$ avant leur interaction avec $\mathcal{S}$. Puisque les $\mathcal{E}_j$ sont initialement dans un état invariant pour la dynamique libre les opérateurs U_n^- ne jouent aucun rôle, et comme on s'intéresse uniquement à la matrice densité réduite $\rho_{\mathcal{S}}(n)$ les U_n^+ ne jouent aucun rôle non plus (ce qui se voit mathématiquement à l'aide de la cyclicité de la trace). En insérant (1.19) dans (1.18) on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{S}}(n) &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\text{env}}^M} \left[e^{-i\tau H_n} \dots e^{-i\tau H_1} \left(\rho_{\mathcal{S}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \rho_{\mathcal{E}_j} \right) e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_n} \right] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\text{env}}^n} \left[e^{-i\tau H_n} \dots e^{-i\tau H_1} \left(\rho_{\mathcal{S}} \otimes \bigotimes_{j=1}^n \rho_{\mathcal{E}_j} \right) e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_n} \right] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}_n}} \left[e^{-i\tau H_n} \left(\text{Tr}_{\mathcal{H}_{\text{env}}^{n-1}} \left[e^{-i\tau H_{n-1}} \dots e^{-i\tau H_1} \left(\rho_{\mathcal{S}} \otimes \bigotimes_{j=1}^{n-1} \rho_{\mathcal{E}_j} \right) e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_{n-1}} \right] \otimes \rho_{\mathcal{E}_n} \right) e^{i\tau H_n} \right] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}_n}} \left[e^{-i\tau H_n} \left(\rho_{\mathcal{S}}(n-1) \otimes \rho_{\mathcal{E}_n} \right) e^{i\tau H_n} \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

On rappelle que ni $\rho_{\mathcal{E}_n}$ ni H_n ne dépendent de l'indice n . Le rôle de ce dernier est juste d'indiquer quelle copie de $\mathcal{E}$ interagit avec $\mathcal{S}$. L'équation (1.20) amène donc naturellement à la définition suivante.

Définition 1.35. *Etant donné un SIR idéal on définit l'opérateur L sur l'espace $\mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ des opérateurs de classe trace sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ par*

$$L(\rho) := \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} \left[e^{-i\tau H} (\rho \otimes \rho_{\mathcal{E}}) e^{i\tau H} \right], \quad (1.21)$$

où $H = H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{E}} + V$ est le hamiltonien décrivant une interaction $\mathcal{S} - \mathcal{E}$. L est appelé opérateur de dynamique réduite.

Les propriétés de L ci-dessous découlent directement de sa définition.

Proposition 1.36. *Pour tout SIR, l'opérateur de dynamique réduite L est un opérateur complètement positif et préservant la trace sur $\mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$. En particulier c'est un opérateur de contraction (pour la norme trace).*

L'opérateur L décrit la dynamique effective de $\mathcal{S}$ lors d'une interaction. On a ainsi, pour tout $n \leq M$,

$$\rho_{\mathcal{S}}(n) = L(\rho_{\mathcal{S}}(n-1)), \quad (1.22)$$

et donc, si $\mathcal{S}$ est initialement dans l'état $\rho_{\mathcal{S}}$,

$$\rho_{\mathcal{S}}(n) = L^n(\rho_{\mathcal{S}}).$$

On met ici en évidence l'évolution Markovienne mentionnée au début de l'introduction obtenue à partir de la description Hamiltonienne des interactions.

À ce niveau le nombre M d'atomes ne joue plus de rôle et on considèrera par la suite un nombre arbitraire d'interactions, l'idée étant d'étudier le comportement du système en temps long, c'est-à-dire lorsque n tend vers l'infini. Le temps "physique" est ici $n\tau$ puisque n décrit le nombre d'interactions, chacune ayant une durée τ .

Dans ce qui précède nous nous sommes placés dans le point de vue de Schrödinger, nous avons fait évoluer l'état du système en laissant les observables fixes. On peut facilement obtenir le point de vue dual (de Heisenberg) dans lequel l'état est fixe et les observables évoluent. Le dual de $\mathcal{J}_1(\mathcal{H}_S)$ est identifié avec $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ via le crochet de dualité

$$\langle O, \rho \rangle = \text{Tr}(\rho O).$$

On définit alors sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ l'adjoint L^* de L . Pour tous $\rho \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_S)$ et $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$

$$\text{Tr}(L(\rho) O) = \text{Tr}(\rho L^*(O)).$$

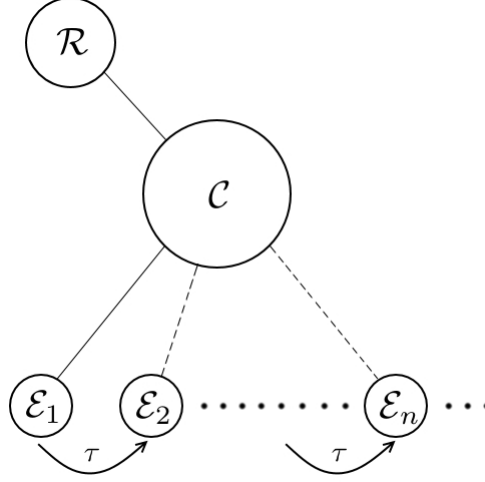
$L^*(O)$ décrit l'évolution de l'observable O après une interaction. L'évolution, en temps discret, de l'observable O est ainsi décrite par le semi-groupe $(L^{*n})_{n \in \mathbb{N}}$. En utilisant (1.21) on obtient également la formule explicite suivante pour le calcul de L^*

$$L^*(O) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_E} [e^{i\tau H} O \otimes \mathbb{1}_E e^{-i\tau H} \mathbb{1}_S \otimes \rho_E], \quad \forall O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S). \quad (1.23)$$

On a vu dans la Section 1.2.2 que pour décrire un système quantique on pouvait être amené à considérer des états qui ne sont pas décrits par des matrices densité. Ce sera le cas dans cette thèse pour modéliser les fuites dans la cavité. Pour cette raison on se placera par la suite dans le point de vue de Heisenberg et on étudiera le semi-groupe $(L^{*n})_{n \in \mathbb{N}}$ associé au modèle d'interactions répétées décrit dans la section suivante. Afin d'éviter d'avoir à écrire l'adjoint L^* tout au long de la thèse on notera $\mathcal{L} = L^*$ l'opérateur défini par (1.23). Il agira sur l'algèbre des observables du système (on vérifiera que cette dernière est bien invariante par $\mathcal{L}$).

1.4 Le modèle de type maser à un atome

Le modèle considéré dans cette thèse modélise la situation suivante. Un champ électromagnétique quantifié est piégé dans une cavité optique et interagit avec un faisceau d'atomes $(\mathcal{E}_j)_{j \geq 1}$. Le faisceau est réglé de façon à ce que les atomes interagissent un à la fois avec la cavité, comme c'est le cas dans les travaux [DRBH87, GKG+07, RH07, RBH01], ce qui conduit à une structure en interactions répétées telle que décrite dans la section précédente. En parallèle on considère la situation dans laquelle la cavité n'est pas parfaitement isolée et on la couple donc, de façon continue, avec un environnement modélisé par un gaz de bosons sans interactions ni condensat de Bose-Einstein et initialement à l'équilibre thermique. En désignant par $\mathcal{C}$ la cavité et $\mathcal{R}$ l'environnement additionnel le système est donc représenté par le schéma suivant



Ce système pourra être considéré comme un système en interactions répétées mais dans lequel le “petit” système $\mathcal{S}$ sera le système composé $\mathcal{S} = \mathcal{C} + \mathcal{R}$.

1.4.1 Modélisation mathématique du modèle

Dans cette section on propose une modélisation mathématique du système que l’on va considérer. On va supposer que les atomes sont préparés dans un mélange de deux états d’énergies $E_0 < E$ et on supposera que la cavité est presque résonante avec la transition entre ces deux niveaux d’énergie. On négligera les modes non-résonants et on ne considèrera qu’un seul mode de fréquence $\theta \simeq E - E_0$. Sans perte de généralité on pourra supposer que $E_0 = 0$ et on décrira les atomes par des systèmes à deux niveaux (fondamental d’énergie 0 et excité d’énergie E).

La cavité $\mathcal{C}$. L’espace de Hilbert pour la cavité est l’espace de Fock bosonique sur l’espace $\mathbb{C}$ (on ne considère qu’un mode)

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} := \mathcal{F}_+(\mathbb{C}).$$

On notera par la suite $\Omega_{\mathcal{C}}$ le vecteur de vide correspondant. Pour alléger les notations on notera simplement $A = a(1)$ et A^* les opérateurs d’annihilation et de création (si $c \in \mathbb{C}$ on a alors $a(c) = \bar{c}A$ et $a^*(c) = cA^*$). Ils vérifient les relations de commutation canonique (ou CCR) suivantes

$$[A, A] = 0, \quad [A^*, A^*] = 0, \quad [A, A^*] = \mathbb{1}.$$

Le Hamiltonien de la cavité est

$$H_{\mathcal{C}} := d\Gamma(\theta) = \theta A^* A$$

où $\theta > 0$ est le mode du champ électromagnétique considéré.

Remarque 1.37. *Il est bien connu que ce système correspond à un oscillateur harmonique de fréquence θ . Si $H_{\text{osc}} = \frac{1}{2}P^2 + \frac{\theta^2}{2}Q^2$ est le hamiltonien d’un oscillateur de fréquence θ , agissant*

sur $L^2(\mathbb{R})$ et où Q et P sont les opérateurs de position et d'impulsion usuels, on définit les opérateurs d'annihilation et de création

$$A_{\text{osc}}^* = \sqrt{\frac{\theta}{2}}Q - \frac{i}{\sqrt{2\theta}}P, \quad A_{\text{osc}} = \sqrt{\frac{\theta}{2}}Q + \frac{i}{\sqrt{2\theta}}P.$$

On a alors $H_{\text{osc}} = \theta A_{\text{osc}}^* A_{\text{osc}} + \frac{\theta}{2}$. Si ψ désigne l'état fondamental de H_{osc} , l'opérateur

$$U : \mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \ni (A^*)^n \Omega_{\mathcal{C}} \mapsto (A_{\text{osc}}^*)^n \psi \in L^2(\mathbb{R})$$

s'étend en un opérateur unitaire et on a $U H_{\mathcal{C}} U^{-1} = H_{\text{osc}} - \frac{\theta}{2}$.

L'état initial de la cavité sera a priori arbitraire. L'algèbre des observables de la cavité est naturellement

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{C}} = \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) = \text{CCR}(\mathbb{C}), \quad (1.24)$$

et la dynamique de la cavité libre est donnée par le groupe de *-automorphismes

$$\tau_{\mathcal{C}}^t(O) = e^{itH_{\mathcal{C}}} O e^{-itH_{\mathcal{C}}}.$$

Les atomes $\mathcal{E}$. On considère ici des atomes à deux niveaux d'énergies 0 et $E > 0$. L'espace de Hilbert pour un atome est donc

$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}} := \mathbb{C}^2.$$

On introduit les opérateurs d'annihilation b et de création b^* sur $\mathbb{C}^2$ par

$$b := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^* := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le hamiltonien d'un atome s'écrit alors

$$H_{\mathcal{E}} := E b^* b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

La notation en terme d'opérateurs b/b^* prend sa source dans le fait que $\mathbb{C}^2$ est unitairement équivalent à l'espace de Fock fermionique $\mathcal{F}_-(\mathbb{C})$ et dans ce point de vue $H_{\mathcal{E}} = d\Gamma(E)$.

L'algèbre des observables pour un atome est $\mathfrak{A}_{\mathcal{E}} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$. Ceux-ci sont initialement envoyés dans une mixture des deux états fondamentaux et excités. Si on note $p \in [0, 1]$ la probabilité que l'atome soit initialement dans l'état excité, l'état initial $\omega_{\mathcal{E}}$ d'un atome est donc donné par $\omega_{\mathcal{E}}(O) = \text{Tr}(\rho_{\mathcal{E}} O)$ où $\rho_{\mathcal{E}}$ est la matrice densité

$$\rho_{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = (1-p)bb^* + pb^*b. \quad (1.25)$$

La dynamique d'un atome libre est donnée par le groupe de *-automorphismes

$$\tau_{\mathcal{E}}^t(O) = e^{itH_{\mathcal{E}}} O e^{-itH_{\mathcal{E}}}.$$

L'interaction cavité-atome. L'interaction entre la cavité et un atome est donnée par l'opérateur d'interaction

$$H_{I_{\mathcal{E}}} := \gamma(A + A^*) \otimes b^* b, \quad (1.26)$$

agissant sur $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ et où $\gamma \in \mathbb{R}$ est une constante de couplage. On peut noter deux particularités de cette interaction :

1. les atomes arrivant dans l'état fondamental sont "transparents" pour la cavité,
2. lors de l'interaction les atomes restent dans le même état qu'initialement (le terme H_{I_ε} commute avec le hamiltonien libre H_ε , et avec ρ_ε).

Un autre choix d'interaction est plus couramment étudié dans la littérature, tant physique [FJM86] que mathématique [BP09, Br14] : une interaction dipolaire dans l'approximation des ondes tournantes

$$\tilde{H}_{I_\varepsilon} := \gamma(A \otimes b^* + A^* \otimes b).$$

Cette dernière est cependant plus difficile à traiter mathématiquement et dans cette thèse nous nous restreindrons à l'interaction donnée par (1.26).

Ce choix d'interaction a été étudié dans [NVZ14], et peut être considéré comme une sorte de "limite d'atomes rigides". Dans cet article les auteurs étudient le modèle d'interactions répétées cavité+atomes. Dans un premier temps ils considèrent le cas plus simple où la cavité est "sans fuites", autrement dit le modèle de SIR dont l'opérateur de dynamique réduite L est donné par (1.21) avec $H = H_C + H_\varepsilon + H_{I_\varepsilon}$. Dans un deuxième temps ils modélisent les fuites dans la cavité en ajoutant à l'évolution libre de la cavité des termes de nature dissipative (approche Markovienne). Plus précisément, en l'absence d'interaction avec les atomes ils remplacent l'équation de Liouville $\frac{d}{dt}\rho = -i[H_C, \rho]$, voir (1.9), par l'équation de Lindblad

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H_C, \rho] + \frac{1}{2}\sigma_- ([A\rho, A^*] + [A, \rho A^*]) + \frac{1}{2}\sigma_+ ([A^*\rho, A] + [A^*, \rho A]), \quad (1.27)$$

où les paramètres σ_- et σ_+ représentent respectivement les taux d'émission et d'absorption de photons dans la cavité. L'objectif ici est de remplacer cet ajout de termes dissipatifs par une interaction avec un réservoir additionnel, autrement dit de se placer entièrement dans l'approche hamiltonienne.

Le réservoir $\mathcal{R}$. L'environnement est modélisé par un gaz de bosons libres, non-massifs, initialement à l'équilibre thermique à température inverse $\beta > 0$ et sans condensat. Sa description repose sur les objets introduits dans les Sections 1.1 et 1.2.4. L'espace à une particule est

$$\mathfrak{h}_{\mathcal{R}} = L^2(\mathbb{R}^3, dk),$$

et le hamiltonien à une particule est l'opérateur de multiplication par la fonction $\varpi(k) = |k|$

$$h_{\mathcal{R}} : f \mapsto \varpi f.$$

k est l'impulsion et $\varpi(k)$ est appelé relation de dispersion. L'opérateur $h_{\mathcal{R}}$ est auto-adjoint sur son domaine naturel $D(h_{\mathcal{R}}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \varpi f \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$.

On fixe $\beta > 0$. L'état initial sera donné par l'état quasi-libre $\omega_\beta^{\mathcal{R}}$ dont la fonction caractéristique est donnée par (1.14), ou par une petite perturbation de celui-ci. L'algèbre des observables sera donc (voir la fin de la Section 1.2.4)

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{R}} = \text{CCR}(\mathfrak{f}), \quad (1.28)$$

l'algèbre des CCR sur le domaine dense

$$\mathfrak{f} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \varpi^{-1/2}f \in L^2(\mathbb{R}^3)\}. \quad (1.29)$$

En particulier $\omega_\beta^\mathcal{R}$ est analytique et on pourra considérer les valeurs moyennes d'observables données par des expressions polynomiales en terme des opérateurs de champs.

La dynamique libre du réservoir est donnée par le groupe de *-automorphismes

$$\tau_\mathcal{R}^t(W(f)) = W(e^{it\varpi}f), \quad f \in \mathfrak{f},$$

et $\omega_\beta^\mathcal{R}$ est un état $(\tau_\mathcal{R}^t, \beta)$ -KMS. Alternativement on peut écrire

$$\tau_\mathcal{R}^t(W(f)) = e^{itH_\mathcal{R}}W(f)e^{-itH_\mathcal{R}},$$

où

$$H_\mathcal{R} := d\Gamma(\varpi)$$

agissant sur

$$\mathcal{H}_\mathcal{R} := \mathcal{F}_+(L^2(\mathbb{R}^3, dk)).$$

On notera par la suite $\Omega_\mathcal{R}$ le vide de $\mathcal{H}_\mathcal{R}$.

L'interaction cavité-réservoir. Pour décrire l'interaction entre la cavité et le réservoir on commence par se donner une fonction $\rho \in \mathfrak{h}_\mathcal{R} = L^2(\mathbb{R}^3, dk)$, appelé facteur de forme. On fera sur ρ l'hypothèse suivante.

- (H1) La fonction ρ est invariante par rotation, strictement positive et vérifie $\varpi^{-1}\rho \in L^2(\mathbb{R}^3, dk)$.

Remarque 1.38. *On sera amené ultérieurement à faire une hypothèse supplémentaire sur ρ , essentiellement technique et liée à l'usage de déformations analytiques. Cette hypothèse n'est pas nécessaire à ce niveau et on préfère la repousser afin de clarifier la présentation.*

L'interaction entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{R}$ est alors donnée par

$$H_{I_\mathcal{R}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(A + A^*) \otimes \phi(\varpi^{-1/2}\rho)$$

agissant sur $\mathcal{H}_\mathcal{C} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{R}$ et où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante de couplage. La présence du facteur $\sqrt{2}$ est juste par convention. La raison de ce choix apparaîtra clairement dans (1.33). A cette interaction s'ajoute un terme supplémentaire, appelé contre-terme et défini par

$$R := \frac{\lambda^2}{4} \|\varpi^{-1}\rho\|^2 (A + A^*)^2 \otimes \mathbb{1}_\mathcal{R}.$$

Ce terme additionnel n'agit de façon non-triviale que sur la partie cavité.

Remarque 1.39. *Comme on l'a mentionné précédemment la cavité correspond à un oscillateur harmonique quantique. Dans ce langage les deux termes de l'interaction s'écrivent*

$$H_{I_\mathcal{R}} = \lambda\theta^{1/2}Q \otimes \phi(\varpi^{-1/2}\rho), \quad R = \frac{\lambda^2\theta}{2} \|\varpi^{-1}\rho\|^2 Q^2 \otimes \mathbb{1}_\mathcal{R},$$

où Q désigne l'opérateur de position sur $L^2(\mathbb{R})$. Cette interaction provient d'une approximation dipolaire à partir d'un modèle "oscillateur harmonique + champ électromagnétique" avec couplage minimal, voir par exemple [Sp97]. On peut voir alors que le contre-termes R a un rôle de renormalisation de la fréquence de l'oscillateur, due à la présence du champ. Ainsi qu'on l'a mentionné au début de l'introduction, le système couplé cavité+réservoir a été étudié dans [Ar81a, Ar81b, Ko11a] en partant de ce point de vue "oscillateur harmonique".

Le système couplé. Le système étudié dans cette thèse est composé de la cavité, d'un faisceau d'atomes et du réservoir. La cavité interagit de façon continue avec le réservoir et sous le schéma des interactions répétées avec les atomes. Les atomes et le réservoir n'interagissent pas directement mais uniquement via la cavité. L'idée est que le temps d'interaction τ entre le mode du champ et les atomes est beaucoup plus petit que le temps de relaxation dû à la présence du réservoir. Les atomes n'ont donc pas le temps de ressentir les effets du réservoir au cours de leur interaction avec le champ.

Ainsi le système étudié peut être vu comme un système de type SIR dans lequel $\mathcal{S}$ est le système couplé "cavité+réservoir", les $\mathcal{E}_j$ sont les atomes et l'interaction entre $\mathcal{S}$ et les $\mathcal{E}_j$ est décrite par (1.26). Comme on l'a vu dans la Section 1.3, pour comprendre le système total il suffit de décrire le système couplé pour une interaction. On obtient ainsi l'opérateur de dynamique réduite associé dont il s'agira de comprendre le comportement des itérés. On commence donc par décrire le système couplé "cavité+ réservoir + 1 atome".

L'espace de Hilbert pour une interaction est donc

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_E = \mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{F}_+(L^2(\mathbb{R}^3, dk)) \otimes \mathbb{C}^2,$$

et le hamiltonien du système couplé est

$$H := H_C + H_R + H_E + H_{I_R} + R + H_{I_E} \quad (1.30)$$

Remarque 1.40. Comme mentionné à la fin de la Section 1.3.1 on a omis ici d'écrire certains facteurs $\mathbb{1}$. Par exemple H_{I_E} agit trivialement sur la partie réservoir et devrait s'écrire $\gamma(A + A^*) \otimes \mathbb{1}_R \otimes b^*b$.

Le Hamiltonien du système couplé "cavité + réservoir" en l'absence d'atome jouera un rôle primordial par la suite. On notera

$$H_0 := H_C + H_R \quad \text{et} \quad H_{C+R} := H_0 + H_{I_R} + R. \quad (1.31)$$

Ces opérateurs agissent sur $\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_R = \mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{F}_+(L^2(\mathbb{R}^3, dk))$.

Comme on l'a vu dans la Section 1.1.3 on peut identifier le produit tensoriel $\mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{F}_+(L^2(\mathbb{R}^3, dk))$ avec

$$\mathcal{H}_{C+R} := \mathcal{F}_+(\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3, dk)).$$

Notation 1.41. Dans la suite de cette thèse on notera $\mathfrak{h}_{C+R} = \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3, dk)$, et alternativement $c \oplus f$ ou $\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ un élément générique de $\mathfrak{h}_{C+R}$, avec $c \in \mathbb{C}$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^3, dk)$. Dans le même esprit, si $\kappa \in \mathbb{R}$ et h_R est un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^3, dk)$ on pourra noter alternativement $\kappa \oplus h_R$ ou $\begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & h_R \end{pmatrix}$ l'opérateur auto-adjoint sur $\mathbb{C} \oplus D(h_R)$ défini par $c \oplus f \mapsto \kappa c \oplus h_R f$.

Via cette identification les opérateurs H_0 , $H_{I_{\mathcal{R}}}$, R et $H_{I_{\mathcal{E}}}$ s'écrivent

$$H_0 = d\Gamma(h_0), \quad \text{où } h_0 = \theta \oplus \varpi, \quad (1.32)$$

$$H_{I_{\mathcal{R}}} = \lambda \phi(1 \oplus 0) \phi(0 \oplus \varpi^{-1/2} \rho), \quad (1.33)$$

$$R = \frac{\lambda^2}{2} \|\varpi^{-1} \rho\|^2 \phi(1 \oplus 0)^2, \quad (1.34)$$

$$H_{I_{\mathcal{E}}} = \gamma \sqrt{2} \phi(1 \oplus 0) \otimes b^* b. \quad (1.35)$$

Les opérateurs H_0 , $H_{I_{\mathcal{R}}}$ et R agissent sur $\mathcal{F}_+(\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3, dk))$, h_0 sur $\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3, dk)$ et $H_{I_{\mathcal{E}}}$ sur $\mathcal{F}_+(\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3, dk)) \otimes \mathbb{C}^2$. On se placera désormais dans cette description du système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$.

Finalement l'algèbre des observables du “petit” système cavité+réservoir est

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} := \mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}} \simeq \text{CCR}(\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f})$$

où $\mathfrak{f}$ a été défini en (1.29).

1.4.2 L'opérateur de dynamique réduite

Comme on l'a vu dans la Section 1.3.2, la structure en interactions répétées permet de ramener l'étude du comportement en temps long du système cavité+réservoir à l'étude des itérés de l'opérateur de dynamique réduite $\mathcal{L}$ donné en (1.23) et où ici H est le hamiltonien couplé (1.30). Comme on l'a indiqué en (1.16) il faut au préalable s'assurer que H définit bien un opérateur auto-adjoint. Notons que H peut se mettre sous la forme

$$H = H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes (\mathbb{1}_{\mathcal{E}} - b^* b) + \left(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} + \gamma \sqrt{2} \phi(1 \oplus 0) + E \right) \otimes b^* b.$$

La base orthonormée de $\mathbb{C}^2$ formée des états fondamentaux et excités de $H_{\mathcal{E}}$ permet d'identifier $\mathcal{H}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \mathbb{C}^2$ avec $\mathcal{H}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$. L'opérateur H est alors diagonal par blocs

$$H = \begin{pmatrix} H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} & 0 \\ 0 & H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} + \gamma \sqrt{2} \phi(1 \oplus 0) + E \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

et l'étude de son auto-adjonction se ramène donc à celle des opérateurs apparaissant sur la diagonale.

Remarque 1.42. *On retrouve ici que si un atome arrive dans son état fondamental il est transparent pour la cavité.*

L'opérateur h_0 défini en (1.32) est auto-adjoint sur son domaine naturel

$$D(h_0) = \mathbb{C} \oplus \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \varpi f \in L^2(\mathbb{R}^3)\}.$$

L'opérateur $H_0 = d\Gamma(h_0)$ est donc essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{F}_+^{\text{fin}}(D(h_0))$, voir Section 1.1.1. On notera $D(H_0)$ le domaine de son unique extension auto-adjointe.

Proposition 1.43. *Les opérateurs*

$$H_- := H_{C+\mathcal{R}} = H_0 + H_{I_{\mathcal{R}}} + R \quad \text{et} \quad H_+ := H_{C+\mathcal{R}} + \gamma\sqrt{2}\phi(1 \oplus 0) + E \quad (1.37)$$

sont auto-adjoints sur $D(H_0)$. En conséquence

$$H = H_- \otimes (\mathbb{1}_{\mathcal{E}} - b^*b) + H_+ \otimes b^*b \quad (1.38)$$

est auto-adjoint sur $D(H_0) \otimes \mathbb{C}^2$.

L'auto-adjonction de $H_- = H_{C+\mathcal{R}}$ sur $D(H_0)$ a été montrée dans [Ar81a] en utilisant le Théorème du commutateur de Nelson ([RS2], Section X.5). On reviendra dessus dans le Chapitre 2 lorsque nous étudierons la question de la diagonalisation de l'opérateur H_- . L'auto-adjonction de H_+ découle de celle de H_- via le Théorème de Kato-Rellich ([RS2], X.2). La preuve sera donnée dans la Section 2.1.

Bien que l'algèbre des observables $\text{CCR}(\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f})$ ne soit pas $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{C+\mathcal{R}})$ tout entier, à ce niveau-ci l'opérateur $\mathcal{L}$ est bien défini sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{C+\mathcal{R}})$. La structure (1.38) de H permet d'obtenir une expression plus maniable de $\mathcal{L}$ qui ne fait pas apparaître de trace partielle.

Proposition 1.44. *Pour tout $O \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3)))$ on a*

$$\mathcal{L}(O) = (1-p) e^{i\tau H_-} O e^{-i\tau H_-} + p e^{i\tau H_+} O e^{-i\tau H_+}. \quad (1.39)$$

Remarque 1.45. *On peut voir ici que le choix particulier de l'interaction $H_{I_{\mathcal{E}}}$, en particulier le fait qu'elle commute avec $H_{\mathcal{E}}$ (et avec $\rho_{\mathcal{E}}$), entraîne l'apparition d'une sorte de processus classique. Si on note X la variable aléatoire (de Bernoulli) prenant la valeur -1 avec probabilité $(1-p)$ et $+1$ avec probabilité p , et si H_X désigne l'opérateur auto-adjoint égal à H_- si $X = -1$ et à H_+ si $X = +1$, l'évolution d'une observable O au cours d'une interaction est donnée par $e^{i\tau H_X} O e^{-i\tau H_X}$ où $X = -1$ correspond au cas où l'atome arrive dans l'état fondamental et $X = 1$ à celui où il arrive dans l'état excité. L'opérateur de dynamique réduite est alors obtenu comme "l'espérance" de cette évolution : $\mathcal{L}(O) = \mathbb{E}(e^{i\tau H_X} O e^{-i\tau H_X})$.*

Si on se donne maintenant une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires i.i.d de même loi que X (la variable X_n va décrire l'état initial du n -ème atome) on pourra alors écrire

$$\mathcal{L}^n(O) = \mathbb{E}(e^{i\tau H_{X_1}} \dots e^{i\tau H_{X_n}} O e^{-i\tau H_{X_n}} \dots e^{-i\tau H_{X_1}}).$$

Preuve. L'identité (1.38) permet d'écrire

$$e^{i\tau H} = e^{i\tau H_-} \otimes (\mathbb{1}_{\mathcal{E}} - b^*b) + e^{i\tau H_+} \otimes b^*b.$$

Par ailleurs on a $\rho_{\mathcal{E}} = (1-p)(\mathbb{1}_{\mathcal{E}} - b^*b) + pb^*b$. En partant de (1.23) on a donc, pour tout $O \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3)))$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(O) &= \text{Tr}_{\mathbb{C}^2} \left[e^{i\tau H} (O \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}) e^{-i\tau H} (\mathbb{1}_{C+\mathcal{R}} \otimes \rho_{\mathcal{E}}) \right] \\ &= \text{Tr}_{\mathbb{C}^2} \left[\left(e^{i\tau H_-} \otimes (\mathbb{1}_{\mathcal{E}} - b^*b) + e^{i\tau H_+} \otimes b^*b \right) (O \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}) \left(e^{-i\tau H_-} \otimes (\mathbb{1}_{\mathcal{E}} - b^*b) + e^{-i\tau H_+} \otimes b^*b \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left((1-p)\mathbb{1}_{C+\mathcal{R}} \otimes (\mathbb{1}_{\mathcal{E}} - b^*b) + p\mathbb{1}_{C+\mathcal{R}} \otimes b^*b \right) \right] \\ &= (1-p) e^{i\tau H_-} O e^{-i\tau H_-} + p e^{i\tau H_+} O e^{-i\tau H_+}, \end{aligned}$$

où à la dernière ligne on a utilisé le fait que $(\mathbb{1}_{\mathcal{E}} - b^*b)b^*b = 0$ (b^*b est le projecteur sur l'état excité de l'atome).

Remarque 1.46. *On peut aussi écrire le calcul ci-dessus en utilisant l'identification de $\mathcal{H}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \mathbb{C}^2$ avec $\mathcal{H}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ comme dans (1.36). On voit alors que le produit présent dans la trace partielle correspond simplement à un produit de matrices diagonales par blocs.*

A ce niveau il n'est pas évident que l'algèbre des observables $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} = \text{CCR}(\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f})$ soit invariante par $\mathcal{L}$ et il s'agira de s'en assurer comme on l'a mentionné à la fin de la Section 1.3.2.

1.5 Plan de la thèse

L'objectif de cette thèse est d'étudier le comportement en temps long du modèle présenté dans la section précédente. Celui-ci repose principalement sur l'étude de l'opérateur de dynamique réduite $\mathcal{L}$ et la Proposition 1.44 montre que les opérateurs H_- et H_+ définis en (1.37) joueront un rôle important.

Le Chapitre 2 est consacré à l'étude de ceux-ci. En plus du caractère auto-adjoint de H_+ sur $D(H_0)$ on s'intéressera surtout à la diagonalisation de l'opérateur H_- afin de pouvoir faciliter le calcul de l'évolution des observables de Weyl $W(f)$, $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$. Ce chapitre s'appuiera principalement sur les travaux de Nam, Napiórkowski et Solovej [NNS16] concernant la diagonalisation des Hamiltoniens bosoniques quadratiques. Il s'appuiera également, pour traiter l'évolution engendrée par H_+ , sur l'article [Der03] qui concerne les perturbations linéaires d'opérateur $d\Gamma(h)$.

Les principaux résultats sur le comportement en temps long du système seront présentés dans le Chapitre 3. Nous étudierons d'abord l'évolution des observables de Weyl. Nous obtiendrons des formules explicites pour l'évolution au temps n (Proposition 3.3) que nous utiliserons ensuite pour en déduire le comportement en temps long du système (Théorème 3.9). Nous étudierons également l'évolution d'observables généralisées du type $\phi(f)$ ou $\phi(f)\phi(g)$ (Proposition 3.4 et Théorème 3.19). Ces résultats seront utilisés entre autre pour étudier les variations d'énergie. Ainsi qu'on peut le voir dans (1.15) le hamiltonien total décrivant un système en interactions répétées est dépendant du temps (constant par morceaux). Il n'y a donc aucune raison pour que l'énergie totale du système soit conservée au cours du temps. Le système étant infiniment étendu cette énergie est bien sûr infinie et on s'intéressera à la variation de l'énergie totale (Théorème 3.25). En plus de la variation totale on s'intéressera aux échanges d'énergie dans le système. Comme on l'a mentionné le choix de l'interaction $H_{I_{\mathcal{E}}}$ a pour effet que l'état des atomes reste invariant et donc l'énergie dans le faisceau d'atome sera inchangée. Cependant la cavité étant de dimension infinie (c'est essentiellement un oscillateur harmonique) il est intéressant d'étudier les échanges d'énergie entre celle-ci et le réservoir (Théorème 3.29). On terminera ce chapitre en comparant les divers résultats avec ceux obtenus dans [NVZ14] en utilisant la version markovienne de ce modèle.

Ainsi qu'on l'a mentionné au début de cette introduction, le fait de se placer dans l'approche markovienne n'a pas permis d'aborder les questions de production d'entropie dans [NVZ14]. Celles-ci feront l'objet du Chapitre 4. L'outil clé sera la formule de production d'entropie (4.12). Celle-ci a été prouvée dans [JP03] et repose en particulier sur la théorie de perturbation des états KMS d'Araki [A75, A77]. Nous aurons besoin ici d'une petite généralisation de cette formule (Théorème 4.42). Enfin on reliera la production d'entropie aux variations d'énergie étudiées dans la Section 3.3 et on vérifiera que le système satisfait le second principe de la thermodynamique.

On donnera en appendices quelques notations et un résultat provenant des travaux [Ar81a], [Ko11a] et [Ko11b].

Chapitre 2

Etude des opérateurs H_- et H_+

Comme on l'a vu dans la Section 1.4 nous allons dans un premier temps étudier certaines propriétés des opérateurs H_- et H_+ définis en (1.37). D'une part leur caractère auto-adjoint est nécessaire afin de s'assurer que la dynamique du système est bien définie. D'autre part, comme on l'a vu dans la Proposition 1.44, la dynamique réduite des observables du système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ se ramène à celle des groupes unitaires engendrés par H_- et H_+ .

L'opérateur H_- fait partie de la classe des opérateurs bosoniques quadratiques. C'est-à-dire qu'ils peuvent s'écrire sous forme d'expression quadratique en les opérateurs d'annihilation et de création comme le montrent (1.31)-(1.34), voir aussi la Remarque 1.7. Pour un opérateur de seconde quantification $H = d\Gamma(h)$, ce qui correspond à l'absence de terme de la forme $a^*(f)a^*(g)$ ou $a(f)a(g)$ dans l'expression quadratique, l'évolution d'observables de Weyl se ramène à l'espace à une particule et à l'étude du groupe unitaire e^{ith} , voir (1.5). Cependant l'opérateur H_- contient de tels termes du type $a^*(f)a^*(g)$ ou $a(f)a(g)$. L'idée est donc de diagonaliser l'opérateur H_- . Plus précisément on va montrer qu'il existe une transformation, dite de Bogoliubov, telle que H_- soit unitairement équivalent, à constante près, à un opérateur de seconde quantification. La diagonalisation des Hamiltoniens bosoniques quadratiques remonte à [Bog47] et a été étudiée récemment dans [BB16, GS13, LNSS15, NNS16].

2.1 Auto-adjonction

Comme nous l'avons mentionné précédemment Arai a montré dans [Ar81a] que l'opérateur H_- est auto-adjoint sur $D(H_0)$ en utilisant le Théorème du commutateur de Nelson, et que par ailleurs celui-ci est positif. Nous reviendrons dessus par une méthode alternative via le Théorème KLMN ([RS2], X.2) à la fin de la Section 2.2.2. Dans cette section nous achevons la preuve de la Proposition 1.43 en montrant que l'opérateur H_+ est également auto-adjoint sur $D(H_0)$. On rappelle que H_+ peut s'écrire

$$H_+ = H_- + \gamma(a(1 \oplus 0) + a^*(1 \oplus 0)) + E.$$

L'idée est de montrer que la perturbation $\gamma(a(1 \oplus 0) + a^*(1 \oplus 0))$ est relativement bornée par rapport à H_- avec borne infinitésimale, ce qui permet ainsi d'appliquer le Théorème de Kato-Rellich.

La Proposition 1.8 avec $f = 1 \oplus 0$ et $h = \theta \oplus 0$ nous donne, pour tout $\varphi \in D(H_0)$,

$$\begin{aligned} \|(a(1 \oplus 0) + a^*(1 \oplus 0))\varphi\|^2 &\leq 2\|a(1 \oplus 0)\varphi\|^2 + 2\|a^*(1 \oplus 0)\varphi\|^2 \\ &\leq \frac{4}{\theta} \langle \varphi, d\Gamma(\theta \oplus 0)\varphi \rangle + 2\|\varphi\|^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Si on prend maintenant $f = 0 \oplus \varpi^{-1/2}\rho$ et $h = 0 \oplus \varpi$, l'Hypothèse **(H1)** assure que $f \in D(h^{-1/2})$ et on peut donc à nouveau appliquer la Proposition 1.8. On a ainsi pour tout $\varphi \in D(H_0)$

$$\begin{aligned} &\langle \varphi, (d\Gamma(0 \oplus \varpi) + H_{I_{\mathcal{R}}} + R)\varphi \rangle \\ &\geq \left\langle \varphi, \left(\|\varpi^{-1}\rho\|^{-2} a^*(0 \oplus \varpi^{-1/2}\rho) a(0 \oplus \varpi^{-1/2}\rho) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \phi(1 \oplus 0) \left(a^*(0 \oplus \varpi^{-1/2}\rho) + a(0 \oplus \varpi^{-1/2}\rho) \right) + \frac{\lambda^2}{2} \|\varpi^{-1}\rho\|^2 \phi(1 \oplus 0)^2 \right) \varphi \right\rangle \\ &= \left\| \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \|\varpi^{-1}\rho\| \phi(1 \oplus 0) + \|\varpi^{-1}\rho\|^{-1} a(0 \oplus \varpi^{-1/2}\rho) \right) \varphi \right\|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

En combinant (2.1) et (2.2) on obtient, pour tout $\varphi \in D(H_0)$ et $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \|(a(1 \oplus 0) + a^*(1 \oplus 0))\varphi\|^2 &\leq \frac{4}{\theta} \langle \varphi, H_- \varphi \rangle + 2\|\varphi\|^2 \\ &\leq \varepsilon \|H_- \varphi\|^2 + \left(2 + \frac{4}{\varepsilon \theta^2} \right) \|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\gamma(a(1 \oplus 0) + a^*(1 \oplus 0))$ est H_- -borné avec borne infinitésimale. L'auto-adjonction de H_+ sur $D(H_0)$ en découle par application du Théorème de Kato-Rellich.

Remarque 2.1. L'inégalité (2.2) assure que

$$\langle \varphi, H_- \varphi \rangle \geq \langle \varphi, d\Gamma(\theta \oplus 0)\varphi \rangle \geq 0,$$

et donc que l'opérateur H_- est bien positif.

2.2 Diagonalisation de H_-

Comme on l'a indiqué précédemment, l'opérateur H_- défini sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_{C+\mathcal{R}})$ par

$$H_- = d\Gamma(h_0) + \lambda \phi(1 \oplus 0) \phi \left(0 \oplus \varpi^{-1/2}\rho \right) + \frac{\lambda^2}{2} \|\varpi^{-1}\rho\|^2 \phi(1 \oplus 0)^2,$$

fait partie de la classe des Hamiltoniens quadratiques bosoniques dans le sens où ils s'écrivent comme une expression quadratique en a et a^* . De façon générale un Hamiltonien quadratique bosonique est un opérateur, agissant sur un espace de Fock bosonique $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$, de la forme

$$H = d\Gamma(h) + \frac{1}{2} \sum_{m,n \geq 0} \left(\langle Jh_R f_m, f_n \rangle a(f_m) a(f_n) + \overline{\langle Jh_R f_m, f_n \rangle} a^*(f_m) a^*(f_n) \right), \quad (2.3)$$

où h est un opérateur auto-adjoint positif sur $\mathfrak{h}$, $J : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ une conjugaison complexe, $h_R : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ un opérateur tel que $D(h) \subset D(h_R)$ et réel symétrique, i.e. tel que $h_R^* = Jh_RJ$, et $(f_n)_{n \geq 0}$ une base Hilbertienne de $\mathfrak{h}$ formée d'éléments appartenant à $D(h)$. Ecrire ainsi une telle expression est en général formelle. On peut lui donner un sens à l'aide de la théorie des formes quadratiques en utilisant les notions de matrices densité à une particule. Nous n'en aurons cependant pas besoin ici puisque nous savons déjà que H_- définit un opérateur auto-adjoint sur $D(H_0)$, $H_0 = d\Gamma(h_0)$. Une grande simplification ici vient du fait que H_- n'a qu'un nombre fini de termes de la forme $a(f)a(g)$ et $a^*(f)a^*(g)$. L'opérateur h_R sera donc ici de rang fini. Nous renvoyons le lecteur à l'article [NNS16] pour plus de détails sur la définition de l'opérateur H donné par (2.3) dans le cas général.

Dans certains cas le Hamiltonien quadratique (2.3) peut être diagonalisé par une transformation dite de Bogoliubov. Plus précisément, sous certaines conditions suffisantes en termes des opérateurs h et h_R , on peut trouver un unitaire sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ qui transforme H en opérateur du type $d\Gamma$ tout en préservant l'algèbre des CCR, voir le Théorème 2.6 ci-dessous. Nous allons voir dans cette section que cette théorie s'applique bien à l'opérateur H_- . Nous allons pour cela nous baser sur les résultats de [NNS16]. Pour cela, on va commencer par rappeler quelques notations et les principaux résultats que nous utiliserons. La présentation qui suit est largement inspirée de l'introduction de [NNS16]. Dans un deuxième temps on montrera comment ces résultats s'appliquent à notre cas.

2.2.1 Diagonalisation des hamiltoniens quadratiques bosoniques

N. Bogoliubov dans [Bog47] montre que la diagonalisation dans l'espace de Fock $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$, où $\mathfrak{h}$ est un espace de Hilbert, peut-être associée à une diagonalisation sur l'espace $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$. Pour cela il est nécessaire d'introduire la notion d'espace conjugué $\mathfrak{h}^*$ et une conjugaison complexe $J : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$. L'opérateur, dit d'interaction, h_R est alors défini sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans $\mathfrak{h}^*$. Plusieurs choix canoniques d'espace conjugué sont possibles, le plus simple étant de prendre $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}$ et J une involution anti-unitaire. Ce choix est particulièrement adapté lorsqu'une conjugaison complexe naturelle est présente comme dans le cas d'espaces de type L^2 , ce qui sera le cas ici et justifie donc ce choix. Nous adapterons la présentation donnée dans l'article [NNS16] à cette situation. Pour plus de détails sur ces notions d'espaces conjugués nous renvoyons le lecteur par exemple à [DG, Der17].

On définit sur $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ les opérateurs d'annihilation et de création généralisés

$$A(f \oplus Jg) = a(f) + a^*(g), \quad A^*(f \oplus Jg) = a^*(f) + a(g), \quad f, g \in \mathfrak{h},$$

et sur $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

L'opérateur $\mathcal{J}$ est anti-unitaire et $\mathcal{S}$ est unitaire. De plus

$$A^*(F) = A(\mathcal{J}F), \quad [A(F), A^*(G)] = \langle F, \mathcal{S}G \rangle, \quad \forall F, G \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}. \quad (2.4)$$

Définition 2.2. *Un opérateur $\mathcal{V}$ borné sur $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ est dit unitairement implémentable sur l'espace de Fock s'il existe un opérateur unitaire $\mathbb{U}_{\mathcal{V}}$ tel que*

$$\mathbb{U}_{\mathcal{V}} A(F) \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = A(\mathcal{V}F), \quad \forall F \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}.$$

En utilisant les deux identités dans (2.4) on peut voir que si $\mathcal{V}$ est implémentable alors pour tous $F, G \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ on a

$$A^*(\mathcal{V}F) = \mathbb{U}_{\mathcal{V}} A^*(F) \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = \mathbb{U}_{\mathcal{V}} A(\mathcal{J}F) \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = A(\mathcal{V}\mathcal{J}F) = A^*(\mathcal{J}\mathcal{V}\mathcal{J}F),$$

et

$$\langle F, \mathcal{S}G \rangle = \mathbb{U}_{\mathcal{V}} \langle F, \mathcal{S}G \rangle \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = \mathbb{U}_{\mathcal{V}} [A(F), A^*(G)] \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = [A(\mathcal{V}F), A^*(\mathcal{V}G)] = \langle \mathcal{V}F, \mathcal{S}\mathcal{V}G \rangle,$$

d'où l'on déduit que

$$\mathcal{J}\mathcal{V}\mathcal{J} = \mathcal{V}, \quad \mathcal{V}^* \mathcal{S}\mathcal{V} = \mathcal{S} = \mathcal{V}\mathcal{S}\mathcal{V}^*. \quad (2.5)$$

La première identité dans (2.5) entraîne que $\mathcal{V}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} U & JVJ \\ V & JUJ \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

avec $U : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$, $V : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ et les autres identités (2.5) assurent que

$$U^*U = 1 + V^*V, \quad UU^* = 1 + JVV^*J, \quad V^*JU = U^*JV. \quad (2.7)$$

On peut également noter qu'il découle de (2.5) que

$$\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{S}\mathcal{V}^*\mathcal{S}.$$

Définition 2.3. Une transformation $\mathcal{V}$ qui vérifie (2.5) est appelée transformation de Bogoliubov.

Remarque 2.4. Si $\mathcal{V}$ est unitairement implémenté par $\mathbb{U}_{\mathcal{V}}$ en prenant $F = f \oplus Jf$ pour $f \in \mathfrak{h}$ on en déduit que pour tout $f \in \mathfrak{h}$ on a

$$\mathbb{U}_{\mathcal{V}} W(f) \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = W((U + JV)f). \quad (2.8)$$

C'est surtout sous cette forme que nous utiliserons les transformations de Bogoliubov dans la suite. On peut noter ici qu'à cause de la présence de la conjugaison complexe J l'opérateur $U + JV$ est seulement réel-linéaire. Nous reviendrons dessus ultérieurement, on verra en particulier que c'est une transformation symplectique, voir la Section 2.3.1.

Le Théorème de Shale [Sh62] assure qu'une transformation de Bogoliubov $\mathcal{V}$ est implémentable si, et seulement si, V est Hilbert-Schmidt (voir également la Remarque 2.25 dans la Section 2.3.2). L'objectif de la diagonalisation des opérateurs quadratiques bosoniques est de trouver une transformation de Bogoliubov $\mathcal{V}$ implémentable telle que en plus de (2.8) on ait

$$\mathbb{U}_{\mathcal{V}} H \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = d\Gamma(\xi) + C, \quad (2.9)$$

où ξ est auto-adjoint sur $\mathfrak{h}$ et $C \in \mathbb{R}$. Avant d'énoncer le résultat de [NNS16] voyons l'intérêt d'une telle transformation. Si on note $Z = U + JV$, les relations (2.7) assurent que Z est inversible d'inverse $Z^{-1} = U^* - V^*J$ et en combinant (2.8) et (2.9) on obtient

$$\begin{aligned} e^{itH} W(f) e^{-itH} &= \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* e^{it(d\Gamma(\xi) + C)} W(Zf) e^{-it(d\Gamma(\xi) + C)} \mathbb{U}_{\mathcal{V}} \\ &= \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* W(e^{it\xi} Zf) \mathbb{U}_{\mathcal{V}} \\ &= W(Z^{-1} e^{it\xi} Zf). \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'évolution d'observables de Weyl sous la dynamique engendrée par un tel opérateur quadratique se réduit à l'étude de la dynamique $w_t(f) := Z^{-1}e^{it\xi}Zf$ sur l'espace à particule.

Dans [NNS16] les auteurs donnent des conditions suffisantes pour pouvoir diagonaliser un Hamiltonien quadratique bosonique par une transformation de Bogoliubov. Comme on l'a mentionné ci-dessus une telle diagonalisation peut-être associée à la diagonalisation d'un certain opérateur $\mathcal{A}$ défini sur l'espace $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$.

Définition 2.5. Soient h un opérateur auto-adjoint tel que $h > 0$ et h_R un opérateur réel symétrique tel que $D(h) \subset D(h_R)$. On définit l'opérateur $\mathcal{A}$ sur $D(h) \oplus JD(h)$ par

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} h & Jh_RJ \\ h_R & JhJ \end{pmatrix}.$$

On regroupe dans le théorème ci-dessous les deux Théorèmes de [NNS16] que nous utiliserons.

Théorème 2.6. ([NNS16], Thm 1 et 2). Soient h , h_R et $\mathcal{A}$ comme dans la Définition 2.5.

1. On suppose que l'opérateur $G := Jh^{-1/2}Jh_Rh^{-1/2}$ est densément défini et s'étend à un opérateur borné vérifiant $\|G\| < 1$. Alors $\mathcal{A}$ définit un opérateur auto-adjoint avec $\mathcal{A} > 0$. De plus $\mathcal{A}$ peut être diagonalisé sur $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ par une transformation de Bogoliubov $\mathcal{V}$ dans le sens où il existe un opérateur auto-adjoint $\xi > 0$ sur $\mathfrak{h}$ tel que

$$\mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{V}^* = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & J\xi J \end{pmatrix},$$

et on a

$$\|\mathcal{V}\| \leq \left(\frac{1 + \|G\|}{1 - \|G\|} \right)^{1/4}.$$

2. Si de plus l'opérateur G est Hilbert-Schmidt et en mettant $\mathcal{V}$ sous la forme (2.6), V est Hilbert-Schmidt aussi avec

$$\|V\|_{HS} \leq \frac{2}{1 - \|G\|} \|G\|_{HS},$$

où $\|\cdot\|_{HS}$ désigne la norme Hilbert-Schmidt. En particulier $\mathcal{V}$ est unitairement implémentable.

3. Si on suppose de plus que l'opérateur $h_Rh^{-1/2}$ est Hilbert-Schmidt alors le Hamiltonien quadratique H , donné par l'expression formelle (2.3), définit une forme quadratique bornée inférieurement et fermable. Sa fermeture définit donc un opérateur auto-adjoint qu'on note encore H . De plus, si $\mathbb{U}_{\mathcal{V}}$ est l'opérateur unitaire sur l'espace de Fock implémentant la transformation de Bogoliubov $\mathcal{V}$ alors

$$\mathbb{U}_{\mathcal{V}}H\mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = d\Gamma(\xi) + \inf \operatorname{sp}(H),$$

où $\operatorname{sp}(H)$ désigne le spectre de H .

Remarque 2.7. Dans le cas de l'opérateur H_- étudié ici l'intérêt du point 3. dans le théorème précédent est l'équivalence unitaire, à constante près, avec un opérateur $d\Gamma(\xi)$. L'auto-adjonction de H_- est en effet déjà assurée par les travaux de Arai.

2.2.2 Application à l'opérateur H_-

Dans cette section nous montrons que les résultats de [NNS16] donnés dans la section précédente s'appliquent au cas de l'opérateur H_- . Ici $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} = \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3, dk)$ et la conjugaison complexe J est la conjugaison usuelle

$$J : c \oplus f \mapsto \bar{c} \oplus \bar{f}$$

où $\bar{f}$ est la fonction définie par $\bar{f}(k) = \overline{f(k)}$. On va commencer par identifier les opérateurs h et h_R permettant de mettre H_- sous la forme (2.3).

Si on note $f_0 = 1 \oplus 0$ et f_1 le vecteur $0 \oplus \varpi^{-1/2}\rho$ normalisé alors H_- peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} H_- &= d\Gamma(h_0) + \lambda \phi(f_0) \phi(f_1) + \frac{\lambda^2}{2} \|\varpi^{-1}\rho\|^2 \phi(f_0)^2 \\ &= d\Gamma(h_0) + \frac{\lambda \|\varpi^{-1/2}\rho\|}{2} \left(a^*(f_1)a(f_0) + a^*(f_0)a(f_1) \right) + \frac{\lambda^2 \|\varpi^{-1}\rho\|^2}{2} a^*(f_0)a(f_0) \\ &\quad + \frac{\lambda \|\varpi^{-1/2}\rho\|}{2} \left(a(f_0)a(f_1) + a^*(f_0)a^*(f_1) \right) + \frac{\lambda^2 \|\varpi^{-1}\rho\|^2}{4} \left(a(f_0)a(f_0) + a^*(f_0)a^*(f_0) \right) \\ &\quad + \frac{\lambda^2 \|\varpi^{-1}\rho\|^2}{4}. \end{aligned}$$

Soit h_R l'opérateur agissant sur $\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ et défini par

$$h_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^2 \|\varpi^{-1}\rho\|^2 & \lambda \langle \varpi^{-1/2}\rho | \\ \lambda |\varpi^{-1/2}\rho\rangle & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Remarque 2.8. Comme $\varpi^{-1/2}\rho \in L^2(\mathbb{R}^3)$ l'opérateur h_R est borné. Par ailleurs le fait que ρ soit à valeurs réelles assure que h_R vérifie bien $Jh_RJ = h_R^*$. En fait on a en plus h_R auto-adjoint.

On vérifie alors aisément que l'opérateur $H_- - \frac{\lambda^2 \|\varpi^{-1}\rho\|^2}{4}$ est de la forme (2.3) avec $h = h_0 + h_R$ et où h_R est donné par (2.11). Comme h_R est borné h est auto-adjoint sur $D(h) = D(h_0)$ et on a évidemment $D(h) \subset D(h_R)$. Notons aussi que les opérateurs h et h_0 ont également le même domaine de forme, i.e. $D(|h|^{1/2}) = D(h_0^{1/2})$.

Dans la suite de cette section nous allons montrer que toutes les hypothèses du Théorème 2.6 sont satisfaites :

1. L'opérateur h est défini positif, ce sera l'objet du Lemme 2.9, et ainsi l'opérateur $h^{1/2}$ est bien défini et $D(h^{1/2}) = D(h_0^{1/2})$.
2. L'opérateur $G = Jh^{-1/2}Jh_Rh^{-1/2}$ est densément défini et s'étend en un opérateur borné avec $\|G\| < 1$ (Proposition 2.10). On peut ici noter que l'opérateur h commute avec la conjugaison J , cela provient du fait que h_0 est un opérateur de multiplication et du fait que h_R est à la fois réel symétrique et auto-adjoint. Ainsi l'opérateur G s'écrit ici simplement

$$G = h^{-1/2}h_Rh^{-1/2}. \quad (2.12)$$

3. Les opérateurs $h_Rh^{-1/2}$ et G sont Hilbert-Schmidt.

Lemme 2.9. *L'opérateur h , auto-adjoint sur $D(h_0)$, est défini positif.*

Preuve. Soit $c \oplus f \in D(h_0)$, on a

$$\left\langle \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}, h \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \right\rangle = \left(\theta + \frac{\lambda^2 \|\varpi^{-1} \rho\|^2}{2} \right) |c|^2 + \lambda \operatorname{Re} \left(\bar{c} \langle \varpi^{-1/2} \rho, f \rangle \right) + \|\varpi^{1/2} f\|^2. \quad (2.13)$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} & \left| \lambda \operatorname{Re} \left(\bar{c} \langle \varpi^{-1/2} \rho, f \rangle \right) \right| \\ & \leq |\lambda| \|\varpi^{-1} \rho\| |c| \|\varpi^{1/2} f\| \\ & \leq \frac{|\lambda|}{2} \|\varpi^{-1} \rho\| \left(\theta + \frac{\lambda^2 \|\varpi^{-1} \rho\|^2}{2} \right)^{-1/2} \left[\left(\theta + \frac{\lambda^2 \|\varpi^{-1} \rho\|^2}{2} \right) |c|^2 + \|\varpi^{1/2} f\|^2 \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

où on a utilisé l'inégalité $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ avec $a = \left(\theta + \frac{\lambda^2 \|\varpi^{-1} \rho\|^2}{2} \right)^{1/2} |c|$ et $b = \|\varpi^{1/2} f\|$. En insérant (2.14) dans (2.13) on a ainsi

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}, h \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \right\rangle \\ & \geq \underbrace{\left(1 - \frac{|\lambda|}{2} \|\varpi^{-1} \rho\| \left(\theta + \frac{\lambda^2 \|\varpi^{-1} \rho\|^2}{2} \right)^{-1/2} \right)}_{>0} \left[\left(\theta + \frac{\lambda^2 \|\varpi^{-1} \rho\|^2}{2} \right) |c|^2 + \|\varpi^{1/2} f\|^2 \right]. \end{aligned}$$

□

On s'intéresse maintenant à l'opérateur G donné formellement par (2.12).

Proposition 2.10. *Le domaine*

$$D(G) := \left\{ \psi \in D(h^{-1/2}) \mid h_R h^{-1/2} \psi \in D(h^{-1/2}) \right\}$$

est dense dans $\mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ et l'opérateur G défini sur $D(G)$ par $G := h^{-1/2} h_R h^{-1/2}$ s'étend à un opérateur borné sur $\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ avec $\|G\| < 1$. De plus G est Hilbert-Schmidt.

Comme $h_R = h - h_0$ on peut écrire, au moins formellement, G sous la forme

$$G = \mathbb{1} - h^{-1/2} h_0 h^{-1/2}$$

Il est donc naturel de s'intéresser à l'opérateur $h_0^{1/2} h^{-1/2}$.

Lemme 2.11. *Pour tout $\psi \in D(h_0^{1/2}) = D(h^{1/2})$ on a*

$$B_- \langle \psi, h_0 \psi \rangle \leq \langle \psi, h \psi \rangle \leq B_+ \langle \psi, h_0 \psi \rangle, \quad (2.15)$$

où

$$B_{\pm} = \frac{\sqrt{\lambda^2 \|\varpi^{-1} \rho\|^2 + 4\theta}}{\sqrt{\lambda^2 \|\varpi^{-1} \rho\|^2 + 4\theta} \mp |\lambda| \|\varpi^{-1} \rho\|}. \quad (2.16)$$

En conséquence l'opérateur $h_0^{1/2}h^{-1/2}$ initialement défini sur $D(h^{-1/2})$ s'étend à un opérateur borné inversible. De plus $h^{-1/2}h_0h^{-1/2} = (h_0^{1/2}h^{-1/2})^*(h_0^{1/2}h^{-1/2})$ vérifie

$$0 < B_+^{-1} \leq h^{-1/2}h_0h^{-1/2} \leq B_-^{-1} < 2. \quad (2.17)$$

Remarque 2.12. Il découle du fait que $h_0^{1/2}h^{-1/2}$ s'étend à un opérateur borné qu'on a également $D(h_0^{-1/2}) = D(h^{-1/2})$. En effet, si $\varphi \in D(h_0^{1/2})$ et $\psi \in D(h^{-1/2})$ on peut écrire

$$|\langle h_0^{1/2}\varphi, h^{-1/2}\psi \rangle| = |\langle \varphi, h_0^{1/2}h^{-1/2}\psi \rangle| \leq B_-^{-1/2}\|\varphi\|\|\psi\|,$$

ce qui prouve que $h_0^{1/2}\varphi \in D(h^{-1/2})$ et donc $D(h_0^{-1/2}) = h_0^{1/2}D(h_0^{1/2}) = D(h^{-1/2})$.

Preuve. La preuve est dans le même esprit que celle du Lemme 2.9. Soit $\psi = c \oplus f \in D(h^{1/2})$. Pour tout $K > 0$ on a

$$\begin{aligned} \langle \psi, h\psi \rangle &= \theta |c|^2 + \|\varpi^{1/2}f\|^2 + \frac{\lambda^2\|\varpi^{-1}\rho\|^2}{2}|c|^2 + \lambda \operatorname{Re} \left(\bar{c} \langle \varpi^{-1/2}\rho, f \rangle \right) \\ &\leq \theta |c|^2 + \|\varpi^{1/2}f\|^2 + \frac{\lambda^2\|\varpi^{-1}\rho\|^2}{2}|c|^2 + |\lambda| \|\varpi^{-1}\rho\| |c| \|\varpi^{1/2}f\| \\ &\leq \theta |c|^2 + \|\varpi^{1/2}f\|^2 + \frac{\lambda^2\|\varpi^{-1}\rho\|^2}{2}|c|^2 + \frac{|\lambda|\|\varpi^{-1}\rho\|}{2} \left(K|c|^2 + \frac{1}{K}\|\varpi^{1/2}f\|^2 \right). \end{aligned}$$

En prenant $K = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\lambda^2\|\varpi^{-1}\rho\|^2 + 4\theta} - |\lambda|\|\varpi^{-1}\rho\| \right)$ on obtient

$$\langle \psi, h\psi \rangle \leq B_+ \left(\theta |c|^2 + \|\varpi^{1/2}f\|^2 \right) = B_+ \langle \psi, h_0\psi \rangle.$$

L'autre inégalité s'obtient de même en écrivant, pour tout $K > 0$,

$$\langle \psi, h\psi \rangle \geq \theta |c|^2 + \|\varpi^{1/2}f\|^2 + \frac{\lambda^2\|\varpi^{-1}\rho\|^2}{2}|c|^2 - \frac{|\lambda|\|\varpi^{-1}\rho\|}{2} \left(K|c|^2 + \frac{1}{K}\|\varpi^{1/2}f\|^2 \right),$$

puis en prenant $K = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\lambda^2\|\varpi^{-1}\rho\|^2 + 4\theta} + |\lambda|\|\varpi^{-1}\rho\| \right)$.

Si $\psi \in D(h^{-1/2})$ alors $h^{-1/2}\psi \in D(h^{1/2})$ et donc en appliquant la première inégalité de (2.15) à $h^{-1/2}\psi$ on obtient

$$\|h_0^{1/2}h^{-1/2}\psi\| \leq B_-^{-1/2}\|\psi\|,$$

ce qui prouve que $h_0^{1/2}h^{-1/2}$ s'étend à un opérateur borné, de norme inférieure à $B_-^{-1/2} < \sqrt{2}$. Un argument similaire prouve que $h^{1/2}h_0^{-1/2}$ s'étend aussi en opérateur borné et donc $h_0^{1/2}h^{-1/2}$ est inversible.

Finalement (2.17) découle directement de (2.15). $\square$

Preuve de la Proposition 2.10. On rappelle que h_R est donné par (2.11). L'hypothèse (H1) assure que $\operatorname{Ran}(h_R) \subset D(h_0^{-1/2}) = D(h^{-1/2})$ et donc

$$\left\{ \psi \in D(h^{-1/2}) \mid h_R h^{-1/2}\psi \in D(h^{-1/2}) \right\} = D(h^{-1/2})$$

est dense. Par ailleurs **(H1)** assure également que $h_R h_0^{-1/2}$ définit un opérateur borné et donc $h_R h^{-1/2}$ et $G = h^{-1/2} h_R h^{-1/2}$ également. Comme h_R est de rang fini l'opérateur G l'est également donc en particulier Hilbert-Schmidt.

Il reste à montrer que $\|G\| < 1$. Puisque $h_R = h - h_0$, pour tout $\psi \in D(h^{-1/2})$ on peut écrire

$$\langle \psi, G\psi \rangle = \langle \psi, (\mathbb{1} - h^{-1/2} h_0 h^{-1/2})\psi \rangle$$

et (2.17) donne

$$(1 - B_-^{-1})\|\psi\|^2 \leq \langle \psi, G\psi \rangle \leq (1 - B_+^{-1})\|\psi\|^2.$$

L'opérateur G vérifie donc (on rappelle que $B_-^{-1} < 2$)

$$\|G\| \leq \max\{1 - B_+^{-1}, B_-^{-1} - 1\} < 1.$$

□

Remarque 2.13. Le fait que h_R soit de rang fini et $h_R h^{-1/2}$ définisse un opérateur borné assure que $h_R h^{-1/2}$ est également de rang fini et donc en particulier Hilbert-Schmidt.

Le Lemme 2.9, la Proposition 2.10 et la Remarque ci-dessus prouvent que dans notre cas toutes les hypothèses du Théorème 2.6 sont satisfaites. On en déduit donc le résultat suivant concernant la diagonalisation de l'opérateur H_- .

Théorème 2.14. Il existe une transformation de Bogoliubov $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} U & JVJ \\ V & JUJ \end{pmatrix}$ sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ avec V Hilbert-Schmidt, un opérateur unitaire $\mathbb{U}_{\mathcal{V}}$ sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}})$ et un opérateur auto-adjoint $\xi > 0$ sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ tels que

$$\mathbb{U}_{\mathcal{V}} A(F) \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = A(\mathcal{V}F), \quad \forall F \in \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{V} \begin{pmatrix} h & Jh_R J \\ h_R & JhJ \end{pmatrix} \mathcal{V}^* = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & J\xi J \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

et

$$\mathbb{U}_{\mathcal{V}} H_- \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = d\Gamma(\xi) + \inf \operatorname{sp}(H_-). \quad (2.20)$$

Remarque 2.15. On peut noter que l'auto-adjonction de l'opérateur H_- fait partie des résultats du Théorème 2.6, ce qui fournit ainsi une autre preuve que celle de [Ar81a]. Cependant le Théorème 2.6 ne fournit aucune information sur le domaine de H_- alors que dans [Ar81a] l'auteur montre qu'on a $D(H_-) = D(H_0)$. La raison principale est que les travaux de [NNS16] se basent essentiellement sur des techniques de formes quadratiques. On pourrait donc s'attendre à obtenir par cette méthode une information sur le domaine de forme de H_- . C'est en effet le cas comme on le montre ci-dessous.

Proposition 2.16. Le domaine de forme de H_- est égal à celui de H_0 , i.e. $D(H_-^{1/2}) = D(H_0^{1/2})$.

Corollaire 2.17. Le domaine de forme de H_+ est égal à celui de H_0 , i.e. $D(|H_+|^{1/2}) = D(H_0^{1/2})$.

Remarque 2.18. L'égalité entre les domaines de forme de H_0 et H_- avait été notée dans [Ar81a].

L'identité (2.15) assure que les formes quadratiques positives $d\Gamma(h)$ et $H_0 = d\Gamma(h_0)$ ont même domaine. Il suffit donc de montrer que le domaine de forme de H_- est le même que celui de $d\Gamma(h)$. Le résultat découle du lemme ci-dessous en appliquant le Théorème KLMN.

Lemme 2.19. *Au sens des formes quadratiques $H_- - d\Gamma(h)$ est relativement bornée par rapport à $d\Gamma(h)$ avec borne relative inférieure ou égale à $\|G\| < 1$.*

La preuve du Lemme est une application du résultat suivant de [NNS16].

Lemme 2.20. ([NNS16], Lemme 9) *Si H est un Hamiltonien bosonique quadratique de la forme (2.3) tel que $h > 0$, $h^{-1/2}h_R^*$ est Hilbert-Schmidt et $h_R h^{-1}h_R^* \leq \Lambda JhJ$ avec $0 \leq \Lambda < 1$, alors*

$$\left(1 - \Lambda^{1/2}\right) d\Gamma(h) - \frac{\Lambda^{1/2}}{2} \left\|h^{-1/2}h_R^*\right\|_{HS}^2 \leq H \leq \left(1 + \Lambda^{1/2}\right) d\Gamma(h) + \frac{\Lambda^{1/2}}{2} \left\|h^{-1/2}h_R^*\right\|_{HS}^2$$

au sens des formes quadratiques. En particulier $H - d\Gamma(h)$ est relativement borné au sens des formes par rapport à $d\Gamma(h)$ avec borne relative $\Lambda^{1/2}$.

Preuve du Lemme 2.19. La positivité de h et le fait que $h^{-1/2}h_R^*$ soit Hilbert-Schmidt ont déjà été prouvés (ce dernier est même de rang fini).

On rappelle que h commute avec J et il reste donc à montrer que $h_R h^{-1}h_R^* \leq \|G\|^2 h$. Il suffit pour ça d'écrire

$$h_R h^{-1}h_R^* = h^{1/2} G G^* h^{1/2} \leq \|G\|^2 h.$$

□

Preuve du Corollaire 2.17. Ça découle directement du résultat de la Section 2.1 et du Théorème KLMN, en utilisant le fait que si un opérateur B est A -borné avec borne relative a alors il est relativement borné au sens des formes par rapport à A avec même borne relative. □

2.3 Dynamique engendrée par H_-

2.3.1 Dynamique symplectique associée à H_-

Comme expliqué dans la Section 2.2 un des avantages de la diagonalisation du Hamiltonien est de pouvoir calculer plus facilement l'évolution des observables et notamment des opérateurs de Weyl $W(f)$. Comme on l'a noté dans la Section 2.2.1, voir (2.10), en combinant les identités (2.18) et (2.20) du Théorème 2.14 on a, pour tout $f \in \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$,

$$e^{itH_-} W(f) e^{-itH_-} = W(Z^{-1} e^{it\xi} Z f), \quad (2.21)$$

où $Z = U + JV$ est inversible avec $Z^{-1} = U^* - V^*J$, et U, V et ξ sont donnés par le Théorème 2.14. On notera que l'antilinearité de J fait que Z est uniquement réelle-linéaire. Bien sur ici cela ne semble pas simplifier le problème puisque ni Z ni ξ ne sont explicites à ce niveau. L'objectif de cette section est d'exprimer ces derniers, et en particulier l'opérateur $Z^{-1} e^{it\xi} Z$ à l'aide des opérateurs h et h_R .

La structure sous-jacente aux transformations de Bogoliubov est en fait celle de transformation symplectique. On rappelle que si $\mathfrak{h}$ est un espace de Hilbert alors l'application

$$\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \ni (f, g) \mapsto \operatorname{Im} \langle f, g \rangle$$

définit une forme symplectique.

Proposition 2.21. *Si $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} U & JVJ \\ V & JUJ \end{pmatrix}$ est une transformation de Bogoliubov sur $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ et $Z = U + JV$, alors Z est une transformation symplectique sur $\mathfrak{h}$, i.e.*

$$\operatorname{Im} \langle Zf, Zg \rangle = \operatorname{Im} \langle f, g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathfrak{h}. \quad (2.22)$$

Avant de donner la preuve de cette Proposition on introduit quelques notations que l'on utilisera également ci-dessous. Cela permet de rendre plus transparents certains calculs qui seraient autrement fastidieux. On introduit pour cela le sous-espace

$$\mathcal{Y} = \{F = f \oplus Jf \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \mid f \in \mathfrak{h}\}$$

de l'espace "doublé" $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel. L'application $\sigma : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\sigma(f \oplus Jf, g \oplus Jg) := \operatorname{Im} \langle f, g \rangle \quad (2.23)$$

définit alors une forme symplectique sur $\mathcal{Y}$. L'identité $\mathcal{J}\mathcal{V}\mathcal{J} = \mathcal{V}$, voir (2.5), traduit alors le fait que $\mathcal{V}$ laisse $\mathcal{Y}$ invariant et il est facile de voir que si $F = f \oplus Jf \in \mathcal{Y}$ alors

$$\mathcal{V}F = Zf \oplus JZf. \quad (2.24)$$

Preuve de la Proposition 2.21. L'identité $\mathcal{V}^* \mathcal{S} \mathcal{V} = \mathcal{S}$ traduit le fait que $\mathcal{V}$ définit une transformation symplectique sur $\mathcal{Y}$, i.e.

$$\sigma(\mathcal{V}F, \mathcal{V}G) = \sigma(F, G), \quad \forall F, G \in \mathcal{Y}. \quad (2.25)$$

La relation (2.22) découle directement de (2.23), (2.24) et (2.25). $\square$

Cela nous conduit au théorème suivant qui sera mis en relation avec les résultats de [Koll1a] dans la section suivante.

Théorème 2.22. *Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $w_t = Z^{-1}e^{it\xi}Z$. Alors $(w_t)_t$ définit un groupe fortement continu de transformations symplectiques sur $\mathfrak{h}_{C+\mathcal{R}}$. Son générateur est l'opérateur $i(h - Jh_R)$, et on a pour tout $f \in \mathfrak{h}_{C+\mathcal{R}}$ et $t \in \mathbb{R}$*

$$e^{itH_-}W(f)e^{-itH_-} = W(w_t(f)).$$

Preuve. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it\xi}$ est unitaire donc symplectique. Comme Z est également symplectique cela assure que w_t est symplectique. Le fait que $(w_t)_t$ définisse un groupe fortement continu découle directement du fait que $(e^{it\xi})_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu (ξ est auto-adjoint) et que Z et Z^{-1} sont des opérateurs bornés.

Il reste à justifier que le générateur $Z^{-1}i\xi Z$ de $(w_t)_t$ est bien $i(h - Jh_R)$. Les opérateurs $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}^*$ et $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} h & Jh_R J \\ h_R & Jh J \end{pmatrix}$ laissent l'espace $\mathcal{Y}$ invariant et on vérifie facilement que si $F = f \oplus Jf \in \mathcal{Y}$ alors

$$\mathcal{V}^* F = Z^* f \oplus JZ^* f, \quad (2.26)$$

où $Z^* = U^* - V^* J^1$, et

$$\mathcal{A}F = (h + Jh_R)f \oplus J(h + Jh_R)f.$$

Ainsi l'identité de diagonalisation (2.19) du Théorème 2.14 se traduit par

$$Z(h + Jh_R)Z^* = \xi. \quad (2.27)$$

Par ailleurs l'opérateur $i\mathcal{S}$ préserve également $\mathcal{Y}$ et on a

$$i\mathcal{S}(f \oplus Jf) = if \oplus Ji f. \quad (2.28)$$

En combinant (2.24), (2.26) et (2.28), l'identité $\mathcal{V}^* \mathcal{S} \mathcal{V} = \mathcal{S}$ se traduit donc par la relation, on rappelle que Z n'est que réel-linéaire,

$$Z^* i Z = i. \quad (2.29)$$

Finalement, cette relation et (2.27) entraînent que, on rappelle que ξ est bien complexe-linéaire lui,

$$Z^{-1} \xi i Z = (h + Jh_R) Z^* i Z = (h + Jh_R) i = i(h - Jh_R).$$

□

2.3.2 Théorème de Shale et comparaison avec Arai-Konenberg

L'objectif de cette section est de comparer les résultats obtenus dans les Sections 2.2 et 2.3.1 avec certains résultats obtenus par Könenberg dans [Koll1a] et qui reposent sur des travaux antérieurs de Arai, [Ar81a, Ar81b], et en particulier une “diagonalisation” explicite de l'opérateur H_- . Ceux-ci requièrent un peu plus de régularité sur le facteur de forme ρ décrivant le couplage cavité-réservoir. En plus de l'hypothèse (H1) on supposera à partir de maintenant que $\rho \in C^2$. Cette hypothèse n'est pas restrictive, on sera de toute manière amené à la renforcer par la suite dans l'étude du comportement en temps long.

On commence par rappeler quelques notations. L'algèbre des observables du système cavité+réservoir est $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} = \text{CCR}(\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f})$, où

$$\mathfrak{f} := \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \varpi^{-1/2} g \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\},$$

tandis que $\mathfrak{A}_{\mathcal{R}} = \text{CCR}(\mathfrak{f})$ désigne l'algèbre des observables du réservoir seul, i.e. d'un gaz de bosons libres. On rappelle également que $\omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$ désigne l'état quasi-libre dont la fonction caractéristique est donnée par (1.14), et que c'est un état KMS pour la dynamique libre $\tau_{\mathcal{R}}^t$ du réservoir.

Le résultat suivant, issu de [Koll1a], montre que le système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ est équivalent à un gaz de bosons libres. La notion de transformation symplectique apparaissant dans le théorème est la même que dans la section précédente, la forme symplectique étant donnée par la partie imaginaire du produit scalaire.

1. Si $Z : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ est réelle-linéaire, Z^* désigne son adjoint sur $\mathfrak{h}$ vu en tant qu'espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \text{Re} \langle f, g \rangle$.

Théorème 2.23. ([Koll1a], Thm II.1) *Il existe une unique application symplectique $v : \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}$, tel que $\nu : \mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \ni W(f) \mapsto W(v(f)) \in \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$ définisse un $*$ -isomorphisme et l'état*

$$\omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}} := \omega_{\beta}^{\mathcal{R}} \circ \nu$$

est un état KMS à température inverse β pour la dynamique $\tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t$ engendrée par $H_- = H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$, i.e. $\tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t(A) = e^{itH_-} A e^{-itH_-}$ pour $A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$. Sa fonction caractéristique est donnée par

$$S_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(f) := \omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(W(f)) = \exp \left(-\frac{1}{4} \left\langle v(f), \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right) v(f) \right\rangle \right). \quad (2.30)$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\tau_{\mathcal{R}}^t \circ \nu = \nu \circ \tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t,$$

et il existe une unique transformation symplectique $w_t : \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f} \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$, tel que

$$e^{itH_-} W(f) e^{-itH_-} = W(w_t(f)) \quad \text{et} \quad w_{t+s} = w_t \circ w_s.$$

On peut noter que la dernière assertion correspond au résultat obtenu dans la section précédente dans laquelle on a obtenu une expression explicite du générateur du groupe $(w_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Par ailleurs les relations

$$\nu(W(f)) = W(v(f)) \quad \text{et} \quad \nu \circ \tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t = \tau_{\mathcal{R}}^t \circ \nu \quad (2.31)$$

sont les directs analogues des relations

$$\mathbb{U}_{\mathcal{V}} W(f) \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = W(Zf) \quad \text{et} \quad \mathbb{U}_{\mathcal{V}} H_- \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* = d\Gamma(\xi) + \inf \text{sp}(H_-). \quad (2.32)$$

En effet, si on note $\tilde{\nu}$ le $*$ -isomorphisme de $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ défini par

$$\tilde{\nu}(A) = \mathbb{U}_{\mathcal{V}} A \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^*,$$

alors les relations ci-dessus se traduisent par

$$\tilde{\nu}(W(f)) = W(Zf) \quad \text{et} \quad \tilde{\nu} \circ \tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t = \tilde{\tau}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t \circ \tilde{\nu}$$

où $\tilde{\tau}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t$ est la dynamique engendrée par $d\Gamma(\xi)$.

Comme on l'a indiqué ci-dessus le résultat du Théorème 2.23 repose sur les travaux de [Ar81a]. En particulier il repose sur l'existence d'opérateurs d'annihilation et de création asymptotiques obtenue via des formules exactes, et plus ou moins explicites, pour l'évolution des observables de champs. Dans la suite de cette section nous allons voir comment la transformation de Arai-Könnenberg peut en fait être unitairement implémentée. En combinant cela avec les résultats des sections précédentes on verra que l'on peut en fait écrire (2.31) sous une forme similaire à (2.32). Pour cela on commence par rappeler quelques éléments sur l'implémentation unitaire des transformations de Bogoliubov.

Etant donné un espace de Hilbert complexe $\mathfrak{h}$ (ce dernier joue le rôle d'espace à une particule), on note $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ l'espace $\mathfrak{h}$ vu comme espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(f, g) = \text{Re} \langle f, g \rangle$. La forme $\sigma(f, g) = \text{Im} \langle f, g \rangle$ définit alors une forme symplectique sur $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$. Etant donnée une application réelle-linéaire $R : \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ on note alors R^* son adjoint pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. Si R est une transformation symplectique sur $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$, la question de l'implémentation unitaire de R est : existe-t-il un unitaire U_R sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ tel que $W(Rf) = U_R W(f) U_R^{-1}$ pour tout $f \in \mathfrak{h}$, où les $W(f)$ désignent les opérateurs de Weyl. La réponse est donnée par le Théorème de Shale

Théorème 2.24. [Sh62] Soit $R : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ une application linéaire bornée, inversible et symplectique. Il existe un opérateur unitaire U_R sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h})$ tel que

$$W(Rf) = U_R W(f) U_R^{-1}, \quad \forall f \in \mathfrak{h},$$

si et seulement si $(R^* R)^{1/2} - \mathbb{1}$ est Hilbert-Schmidt.

Lorsque R est symplectique, pour tous $f, g \in \mathfrak{h}$ on a

$$\operatorname{Im} \langle f, g \rangle = \operatorname{Im} \langle Rf, Rg \rangle \iff \operatorname{Re} \langle if, g \rangle = \operatorname{Re} \langle iRf, Rg \rangle = \operatorname{Re} \langle R^* iRf, g \rangle.$$

On en déduit que son adjoint R^* vérifie $R^* iR = i$, ou encore $R^{*-1} = -iRi$, où i désigne l'opérateur de multiplication par i . Cette relation est l'équivalent de (2.29).

Puisque R est bornée l'opérateur $(R^* R)^{1/2} + \mathbb{1}$ est un opérateur borné inversible et la condition du Théorème de Shale est équivalente au caractère Hilbert-Schmidt de l'opérateur

$$R^* R - \mathbb{1} = R^* (R + iRi) = R^* i(Ri - iR),$$

et donc R est unitairement implémentable si et seulement si $Ri - iR$ est Hilbert-Schmidt.

Remarque 2.25. Dans le langage de la Section 2.3.1 cette condition est équivalent à la condition, voir (2.24) et (2.28), $\mathcal{V}S - S\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & -2JVJ \\ V & 0 \end{pmatrix}$ est Hilbert-Schmidt, et on retrouve donc que $\mathcal{V}$ est implémentable si et seulement si V est Hilbert-Schmidt.

Afin de pouvoir montrer que l'application symplectique v apparaissant dans le Théorème 2.23 est unitairement implémentable nous avons besoin d'une petite généralisation du Théorème de Shale. En effet ici les espaces de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes, respectivement $\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ et $L^2(\mathbb{R}^3)$. Elle est donnée par le Lemme suivant.

Lemme 2.26. Soit $R : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_2$ une application linéaire bornée, inversible et symplectique, i.e. $\operatorname{Im} \langle Rf, Rg \rangle_{\mathfrak{h}_2} = \operatorname{Im} \langle f, g \rangle_{\mathfrak{h}_1}$ pour tous $f, g \in \mathfrak{h}_1$. On note W_i les opérateurs de Weyl sur $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_i)$, pour $i = 1, 2$. L'application R est unitairement implémentable, dans le sens où il existe un opérateur unitaire $U_R : \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_1) \rightarrow \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_2)$ tel que

$$W_2(Rf) = U_R W_1(f) U_R^*, \quad \forall f \in \mathfrak{h}_1$$

si et seulement si $(R^* R)^{1/2} - \mathbb{1}$ est un opérateur Hilbert-Schmidt sur $\mathfrak{h}_1$, ou de façon équivalente si l'opérateur $Ri - iR : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_2$ est Hilbert-Schmidt.

Preuve. L'équivalence entre les caractères Hilbert-Schmit des opérateurs $(R^* R)^{1/2} - \mathbb{1}$ et $Ri - iR$ se montre comme dans le cas $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.

On note $R = V|R|$ la décomposition polaire de R avec $|R| : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_1$ et $V : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_2$ une application orthogonale (R est réelle-linéaire inversible). Comme R est symplectique, les éléments de sa décomposition polaire sont également symplectiques, voir [Sh62, DG]. Ainsi V est à la fois orthogonale, donc $\operatorname{Re} \langle Vf, Vg \rangle = \operatorname{Re} \langle f, g \rangle$ pour tous f, g , et symplectique, donc $\operatorname{Im} \langle Vf, Vg \rangle = \operatorname{Im} \langle f, g \rangle$ pour tous f, g , V est donc unitaire. Ainsi $R = V|R|$ avec $V : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_2$ unitaire et $|R| : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_1$ symplectique.

L'opérateur $\Gamma(V)$, voir la Section 1.1.1, est unitaire et la Proposition 1.16 assure que, pour tout $f \in \mathfrak{h}_1$,

$$W_2(Rf) = W_2(V|R|f) = \Gamma(V) W_1(|R|f) \Gamma(V)^*.$$

Ainsi $R : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_2$ est unitairement implémentable si et seulement si $|R| : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_1$ l'est. D'après le Théorème de Shale, ce dernier est implémentable si et seulement si $(|R|^*|R|)^{1/2} - \mathbb{1}$ est Hilbert-Schmidt sur $\mathfrak{h}_1$. Comme

$$R^*R = |R|^*V^*V|R| = |R|^*|R|,$$

on en déduit que R est implémentable si et seulement si $(R^*R)^{1/2} - \mathbb{1}$ est Hilbert-Schmidt sur $\mathfrak{h}_1$. $\square$

En utilisant les résultats de [Ar81a], Könenberg montre dans [Kol1a] que v peut s'écrire sous la forme

$$v(c \oplus g) = \overline{W}_+^* g + c\overline{Q}_+ - \overline{W}_-^* \overline{g} - \overline{c}\overline{Q}_-, \quad \forall c \oplus g \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}, \quad (2.33)$$

où

$$W_{\pm} : L^2(\mathbb{R}^3, dk) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3, dk) \quad \text{avec} \quad W_{\pm}(\mathfrak{f}) \subset \mathfrak{f} \quad \text{et} \quad W_{\pm} \text{ Hilbert-Schmidt}$$

et

$$Q_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\varpi^{1/2} \pm \varpi^{-1/2} \right) Q \quad \text{où} \quad Q \in D(\varpi^{-1}) \cap D(\varpi^{1/2}) \quad \text{et} \quad Q, \varpi Q \in L^{\infty}(\mathbb{R}^3, dk). \quad (2.34)$$

En particulier les fonctions Q_+ et Q_- sont dans $\mathfrak{f}$. Les formules explicites et certaines propriétés additionnelles de $Q_{\pm}$ et $W_{\pm}$ sont rappelées dans l'annexe A. Le choix des notations suit celui de [Ar81a] afin de simplifier la lecture de [Ar81a, Kol1a] pour le lecteur qui le souhaiterait.

Remarque 2.27. Bien que dans [Kol1a] l'auteur indique que $v : \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}$, l'expression (2.33) montre que v est une application définie sur $\mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ tout entier, à valeurs dans $\mathfrak{h}_{\mathcal{R}}$, et telle que $v(\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$.

On vérifie facilement que

$$vi - iv : c \oplus g \mapsto 2i(\overline{W_-^* g} + c\overline{Q_-}),$$

qui est donc Hilbert-Schmidt. La proposition suivante découle donc directement du Lemme 2.26

Proposition 2.28. *L'opérateur v est unitairement implémentable, i.e. il existe $\mathbb{U}_v : \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) \rightarrow \mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_{\mathcal{R}})$ unitaire tel que pour tout $f \in \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ on ait*

$$\nu(W(f)) = W(v(f)) = \mathbb{U}_v W(f) \mathbb{U}_v^*.$$

La seconde relation dans (2.31) se traduit alors par une diagonalisation explicite de l'opérateur $H_- = H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$. En effet, en appliquant cette dernière à un élément $W(f)$, $f \in \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ on a

$$\begin{aligned} & \nu(\tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t(W(f))) = \tau_{\mathcal{R}}^t(\nu(W(f))) \\ \iff & \nu(W(w_t(f))) = e^{itd\Gamma(\varpi)} \nu(W(f)) e^{-itd\Gamma(\varpi)} \\ \iff & \mathbb{U}_v W(w_t(f)) \mathbb{U}_v^* = e^{itd\Gamma(\varpi)} \mathbb{U}_v W(f) \mathbb{U}_v^* e^{-itd\Gamma(\varpi)} \\ \iff & \mathbb{U}_v e^{itH_-} W(f) e^{-itH_-} \mathbb{U}_v^* = e^{itd\Gamma(\varpi)} \mathbb{U}_v W(f) \mathbb{U}_v^* e^{-itd\Gamma(\varpi)} \\ \iff & \left[\mathbb{U}_v^* e^{-itd\Gamma(\varpi)} \mathbb{U}_v e^{itH_-}, W(f) \right] = 0. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.14, et comme $\mathbb{U}_v^* e^{-itd\Gamma(\varpi)} \mathbb{U}_v e^{itH_-}$ est unitaire, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe $\zeta(t) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{U}_v^* e^{-itd\Gamma(\varpi)} \mathbb{U}_v e^{itH_-} = e^{i\zeta(t)} \mathbb{1} \iff e^{itH_-} = e^{i\zeta(t)} \mathbb{U}_v^* e^{itd\Gamma(\varpi)} \mathbb{U}_v.$$

Le fait que e^{itH_-} et $e^{itd\Gamma(\varpi)}$ définissent des groupes à un paramètre fortement continus assure que $\zeta(t) = \zeta t$ pour un certain $\zeta \in \mathbb{R}$, d'où on déduit que l'opérateur $\mathbb{U}_v$ diagonalise H_- :

$$\mathbb{U}_v H_- \mathbb{U}_v^* = d\Gamma(\varpi) + \zeta.$$

En considérant la borne inférieure du spectre on en déduit que $\zeta = \inf \text{sp}(H_-)$. Par ailleurs, si on compare avec (2.20) on en déduit que les opérateurs $d\Gamma(\xi)$ et $d\Gamma(\varpi)$ sont unitairement équivalents.

Remarque 2.29. *L'équivalence unitaire ci-dessus montre que $\text{sp}(H_-) = [\inf \text{sp}(H_-), +\infty[$, que $\inf \text{sp}(H_-)$ est valeur propre simple et que le reste du spectre de H_- est purement absolument continu. Ces propriétés sont mentionnées dans [Ar81a] mise à part l'absolue continuité du spectre, seule l'absence de valeurs propres plongées y est prouvée.*

Remarque 2.30. *Les opérateurs $i\xi$ et $i\varpi$ sont eux symplectiquement équivalents. En effet, on a pour tout $f \in \mathfrak{h}_{C+\mathcal{R}}$*

$$\begin{aligned} W(w_t(f)) &= \tau_{C+\mathcal{R}}^t(W(f)) \\ &= \nu^{-1} \circ \tau_{\mathcal{R}}^t \circ \nu(W(f)) \\ &= \nu^{-1} \left(e^{itd\Gamma(\varpi)} W(v(f)) e^{-itd\Gamma(\varpi)} \right) \\ &= W(v^{-1}(e^{it\varpi} v(f))), \end{aligned}$$

autrement dit

$$v \circ w_t(f) = e^{it\varpi} v(f). \quad (2.35)$$

En combinant cela avec (2.21) on en déduit que

$$e^{it\xi} = (vZ^{-1})^{-1} e^{it\varpi} vZ^{-1}$$

et donc $i\xi = (vZ^{-1})^{-1} i\varpi vZ^{-1}$.

2.4 Dynamique engendrée par H_+

Dans les sections précédentes nous nous sommes concentrés sur la dynamique engendrée par H_- . Comme le montre la Proposition 1.44, afin d'étudier la dynamique du modèle présenté dans la Section 1.4 et en particulier l'opérateur de dynamique réduite $\mathcal{L}$ il est nécessaire de comprendre aussi la dynamique engendrée par H_+ . Ce dernier est une perturbation linéaire, en les opérateurs d'annihilation/création, de l'opérateur quadratique H_- , voir (1.37). En ce sens, il est très proche des hamiltoniens de la forme

$$H = d\Gamma(h) + a^*(g) + a(g). \quad (2.36)$$

Un tel hamiltonien est parfois appelé Hamiltonien de Van Hove et a été étudié par exemple dans [Der03]. Les résultats de diagonalisation obtenus dans les sections précédentes vont permettre de se ramener à un Hamiltonien de Van Hove et d'en déduire des résultats sur l'évolution des observables de Weyl par le groupe unitaire e^{itH_+} .

En effet, la relation (2.18), en prenant $F = f \oplus Jf$ avec $f = \gamma \oplus 0$, et (2.20) on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\mathcal{V}H_+} \mathbb{U}_{\mathcal{V}}^* &= d\Gamma(\xi) + A(\mathcal{V}F) + \inf \text{sp}(H_-) + E \\ &= d\Gamma(\xi) + a(Z\gamma \oplus 0) + a^*(Z\gamma \oplus 0) + \inf \text{sp}(H_-) + E. \end{aligned} \quad (2.37)$$

De façon similaire, la diagonalisation explicite décrite dans la Section 2.3.2 permet d'écrire

$$\mathbb{U}_v H_+ \mathbb{U}_v^* = d\Gamma(\varpi) + a(v(\gamma \oplus 0)) + a^*(v(\gamma \oplus 0)) + \inf \text{sp}(H_-) + E. \quad (2.38)$$

A constante près ces deux formulations sont bien de la forme (2.36).

Pour énoncer le résultat concernant l'évolution engendrée par H_+ on introduit au préalable quelques notations.

Notation 2.31. Pour $s \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathfrak{h}_{C+\mathcal{R}}$ on note

$$\alpha_s(f) := \sqrt{2}\gamma \text{Im} \langle 1 \oplus 0, w_s(f) \rangle. \quad (2.39)$$

La propriété de groupe de $(w_t)_t$ entraîne que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_s(w_t(f)) = \alpha_{s+t}(f). \quad (2.40)$$

Notons également que pour tout s l'application $f \mapsto \alpha_s(f)$ est réelle-linéaire.

La proposition suivante décrit l'évolution des observables de Weyl pour la dynamique engendrée par H_+ .

Proposition 2.32. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathfrak{h}_{C+\mathcal{R}}$ on a

$$e^{itH_+} W(f) e^{-itH_+} = \exp \left(-i \int_0^t \alpha_s(f) ds \right) W(w_t(f)). \quad (2.41)$$

Comment on l'a mentionné ci-dessus l'idée est de se ramener à un hamiltonien de Van Hove. Le calcul du groupe unitaire engendré par de tels opérateurs repose sur la propriété suivante

Proposition 2.33. [Der03] Soient h un opérateur auto-adjoint positif sur un espace de Hilbert $\mathfrak{h}$ et soit $f \in D(h^{-1/2})$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &e^{it(d\Gamma(h) + a(f) + a^*(f))} \\ &= \exp \left(i \text{Im} \langle h^{-1} f, e^{ith} h^{-1} f \rangle - it \| h^{-1/2} f \|^2 \right) e^{itd\Gamma(h)} W \left(\sqrt{2} \frac{1 - e^{-ith}}{ih} f \right). \end{aligned}$$

Remarque 2.34. L'hypothèse $f \in D(h^{-1/2})$ assure que les différentes quantités ci-dessus sont bien définies. En particulier le terme $\text{Im} \langle h^{-1} f, e^{ith} h^{-1} f \rangle$ est à comprendre comme

$$\left\langle h^{-1/2} f, \frac{\sin(th)}{h} h^{-1/2} f \right\rangle.$$

Preuve de la Proposition 2.32. Afin d'utiliser la Proposition 2.33 l'idée est soit d'utiliser (2.37) sur $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ avec $h = \xi$ et $f = Z\gamma \oplus 0$, et il faut s'assurer que $Z\gamma \oplus 0 \in D(\xi^{-1/2})$, soit (2.38) sur $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathcal{R}}$ avec $h = \varpi$ et $f = v(\gamma \oplus 0)$, et il faut alors s'assurer que $v(\gamma \oplus 0) \in D(\varpi^{-1/2})$. Le fait d'avoir des formules explicites pour v incite à utiliser plutôt (2.38). Les équations (2.33) et (2.34) donnent

$$v(\gamma \oplus 0) = \gamma \varpi^{-1/2} \bar{Q}$$

qui appartient bien au domaine de $\varpi^{-1/2}$ puisque $Q \in D(\varpi^{-1})$. On peut donc appliquer la Proposition 2.33 avec $h = \varpi$ et $f = v(\gamma \oplus 0)$. On obtient ainsi pour tout $f \in \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$,

$$\begin{aligned} e^{i\tau H_+} W(f) e^{-i\tau H_+} &= \mathbb{U}_v^* e^{i\tau(d\Gamma(\varpi) + \sqrt{2}\phi(v(\gamma \oplus 0)))} \mathbb{U}_v W(f) \mathbb{U}_v^* e^{-i\tau(d\Gamma(\varpi) + \gamma\sqrt{2}\phi(v(1 \oplus 0)))} \mathbb{U}_v \\ &= \mathbb{U}_v^* e^{itd\Gamma(\varpi)} W\left(\sqrt{2}\frac{1 - e^{-it\varpi}}{i\varpi} v(\gamma \oplus 0)\right) W(v(f)) W\left(-\sqrt{2}\frac{1 - e^{-it\varpi}}{i\varpi} v(\gamma \oplus 0)\right) e^{-itd\Gamma(\varpi)} \mathbb{U}_v. \end{aligned} \quad (2.42)$$

En utilisant les CCR (1.3) on a, pour tous $f, g \in \mathfrak{h}_{\mathcal{R}}$,

$$W(f)W(g)W(-f) = e^{-i\text{Im}\langle f, g \rangle} W(g), \quad (2.43)$$

et donc (2.42) devient

$$\begin{aligned} e^{i\tau H_+} W(f) e^{-i\tau H_+} &= \exp\left(-i\gamma\sqrt{2}\text{Im}\left\langle \frac{(1 - e^{-it\varpi})}{i\varpi} v(1 \oplus 0), v(f) \right\rangle\right) \mathbb{U}_v^* e^{itd\Gamma(\varpi)} W(v(f)) e^{-itd\Gamma(\varpi)} \mathbb{U}_v \\ &= \exp\left(-i\gamma\sqrt{2}\text{Im}\left\langle \frac{(1 - e^{-it\varpi})}{i\varpi} v(1 \oplus 0), v(f) \right\rangle\right) e^{itH_-} W(f) e^{-itH_-} \\ &= \exp\left(-i\gamma\sqrt{2}\text{Im}\left\langle \frac{(1 - e^{-it\varpi})}{i\varpi} v(1 \oplus 0), v(f) \right\rangle\right) W(w_t(f)). \end{aligned} \quad (2.44)$$

On remarque par ailleurs, en utilisant (2.35), que

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-it\varpi}}{i\varpi} v(1 \oplus 0) &= \int_{-t}^0 e^{is\varpi} v(1 \oplus 0) ds \\ &= \int_{-t}^0 v(w_s(1 \oplus 0)) ds \\ &= v\left(\int_{-t}^0 w_s(1 \oplus 0) ds\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \left\langle \frac{(1 - e^{-it\varpi})}{i\varpi} v(1 \oplus 0), v(f) \right\rangle &= \operatorname{Im} \left\langle v \left(\int_{-t}^0 w_s (1 \oplus 0) ds \right), v(f) \right\rangle \\
&= \operatorname{Im} \left\langle \int_{-t}^0 w_s (1 \oplus 0) ds, f \right\rangle \\
&= \operatorname{Im} \left\langle 1 \oplus 0, \int_{-t}^0 w_{-s}(f) ds \right\rangle \\
&= \operatorname{Im} \left\langle 1 \oplus 0, \int_0^t w_s(f) ds \right\rangle, \tag{2.45}
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que v et w_t sont symplectiques ainsi que la propriété de groupe de $(w_t)_t$. En insérant (2.45) dans (2.44) on en déduit (2.41).

Remarque 2.35. Dans l'approche markovienne du modèle de la Section 1.4 considérée dans [NVZ14], l'opérateur de dynamique réduite (agissant sur la cavité) a une structure similaire à celle apparaissant dans (1.39). Le terme correspondant à H_+ a une structure de type Van Hove et afin d'étudier la dynamique engendrée par celui-ci les auteurs introduisent une transformation unitaire U dont l'effet correspondrait, pour les hamiltoniens de Van Hove, à écrire

$$U(d\Gamma(h) + a(f) + a^*(f))U^* = d\Gamma(h) + C,$$

où C est une constante. Dans le cadre des hamiltoniens de Van Hove l'opérateur U est appelé opérateur d'habillage (dressing operator) mais n'existe que sous la condition $f \in D(h^{-1})$, voir [Der03]. Cela nécessiterait ici que la fonction Q vérifie $Q \in D(\varpi^{-3/2})$ ce qui n'est pas le cas. La Proposition 2.33 permet de contourner ce problème.

Chapitre 3

Dynamique d'interactions répétées

Dans ce chapitre on étudie l'évolution, en temps discret, engendrée par la dynamique d'interactions répétées. C'est-à-dire qu'on s'intéresse au comportement du semi-groupe $(\mathcal{L}^n)_{n \geq 1}$ où $\mathcal{L}$ est l'opérateur de dynamique réduite donné par (1.39), et en particulier au comportement de ce semi-groupe en temps long $n \rightarrow \infty$.

3.1 Evolution en temps fini

On rappelle que l'opérateur de dynamique réduite $\mathcal{L}$, qui décrit l'évolution des observables du système cavité+réservoir sous l'effet des interactions répétées avec les atomes, est donné par

$$\mathcal{L}(O) = (1 - p) e^{i\tau H_-} O e^{-i\tau H_-} + p e^{i\tau H_+} O e^{-i\tau H_+}.$$

Afin d'alléger les notations il est commode d'introduire la quantité $\alpha(f)$ suivante.

Notation 3.1. Pour tout $f \in \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ on note

$$\alpha(f) = \int_0^\tau \alpha_s(f) ds,$$

où $\alpha_s(f)$ est défini par (2.39). A nouveau l'application $f \mapsto \alpha(f)$ est réelle-linéaire.

Remarque 3.2. La relation (2.40) entraîne directement que pour tout f on a

$$\alpha(w_{n\tau}(f)) = \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \alpha_s(f) ds, \quad \forall n \geq 0, \quad (3.1)$$

et en utilisant la linéarité de $f \mapsto \alpha(f)$ on en déduit que pour tout entier n

$$\alpha\left(\sum_{j=0}^{n-1} w_{j\tau}(f)\right) = \int_0^{n\tau} \alpha_s(f) ds. \quad (3.2)$$

Pour une observable de Weyl $O = W(f)$ le Théorème 2.22 et la Proposition 2.32 donnent alors

$$e^{i\tau H_-} W(f) e^{-i\tau H_-} = W(w_\tau(f)), \quad e^{i\tau H_+} W(f) e^{-i\tau H_+} = e^{-i\alpha(f)} W(w_\tau(f)). \quad (3.3)$$

et donc, pour tout $f \in \mathfrak{h}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$,

$$\mathcal{L}(W(f)) = \left(p e^{-i\alpha(f)} + (1-p) \right) W(w_\tau(f)). \quad (3.4)$$

En particulier le fait que w_t préserve $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ assure que $\mathcal{L}$ préserve bien l'algèbre des observables $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$. La proposition suivante qui décrit l'évolution d'une observable de Weyl après n interactions découle directement de (3.4) par récurrence.

Proposition 3.3. *Pour tout $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ et $n \geq 1$ on a*

$$\mathcal{L}^n(W(f)) = \left[\prod_{j=1}^n \left(p e^{-i\alpha(w_{(j-1)\tau}(f)} + (1-p) \right) \right] W(w_{n\tau}(f)), \quad (3.5)$$

où $(w_t)_t$ est le groupe réel-linéaire et symplectique sur $\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ engendré par $i(h - J^* h_R)$ et

$$\alpha(f) = \int_0^\tau \alpha_s(f) ds = \gamma \sqrt{2} \int_0^\tau \text{Im} \langle 1 \oplus 0, w_s(f) \rangle ds.$$

Le prochain résultat étend la proposition précédente en considérant l'évolution d'opérateurs de champs. Bien que ce ne soient pas des observables au sens strict du terme leur évolution sera utile par la suite dans l'étude des variations d'énergie et d'entropie, voir la Section 3.3 et le Chapitre 4.

Proposition 3.4. *L'évolution après $n \geq 1$ interactions d'un opérateur de champ est donnée par, pour tout $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$,*

$$\mathcal{L}^n(\phi(f)) = \phi(w_{n\tau}(f)) - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(f) ds, \quad (3.6)$$

l'égalité ayant lieu au sens fort sur $D(H_0^{1/2})$.

Par ailleurs, pour tous $f, g \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^n(\phi(f)\phi(g)) \\ &= \phi(w_{n\tau}(f))\phi(w_{n\tau}(g)) - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(g) ds \times \phi(w_{n\tau}(f)) - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(f) ds \times \phi(w_{n\tau}(g)) \\ & \quad + p(1-p) \sum_{j=1}^n \alpha(w_{(j-1)\tau}(f)) \alpha(w_{(j-1)\tau}(g)) + p^2 \left(\int_0^{n\tau} \alpha_s(f) ds \right) \left(\int_0^{n\tau} \alpha_s(g) ds \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

où l'égalité est à nouveau à comprendre au sens fort, ici sur $\text{Dom}(H_0)$.

Preuve. On commence par démontrer (3.6). D'après la Proposition 2.16 et le Corollaire 2.17 on a $D(H_-^{1/2}) = D(|H_+|^{1/2}) = D(H_0^{1/2})$. Ainsi pour tout $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f} = D(h_0^{-1/2})$ la Proposition 1.8 assure que les opérateurs

$$e^{i\tau H_-} \phi(f) e^{-i\tau H_-} \quad \text{et} \quad e^{i\tau H_+} \phi(f) e^{-i\tau H_+}$$

sont bien définis sur $D(H_0^{1/2})$. Il découle alors de (3.3) que

$$e^{i\tau H_-} \phi(f) e^{-i\tau H_-} = \phi(w_\tau(f)) \quad \text{et} \quad e^{i\tau H_+} \phi(f) e^{-i\tau H_+} = \phi(w_\tau(f)) - \alpha(f). \quad (3.8)$$

Ainsi $\mathcal{L}(\phi(f))$ est bien défini sur $\text{Dom}(H_0^{1/2})$ et on a

$$\mathcal{L}(\phi(f)) = p e^{i\tau H_+} \phi(f) e^{-i\tau H_+} + (1-p) e^{i\tau H_-} \phi(f) e^{-i\tau H_-} = \phi(w_\tau(f)) - p\alpha(f).$$

Comme w_t préserve $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ on peut alors itérer le calcul et une simple récurrence donne, en utilisant (3.2),

$$\mathcal{L}^n(\phi(f)) = \phi(w_{n\tau}(f)) - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(f) ds.$$

Comme $D(H_-) = D(H_+) = D(H_0)$ le même raisonnement que ci-dessus assure que pour tous $f, g \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ les opérateurs

$$e^{i\tau H_-} \phi(f) \phi(g) e^{-i\tau H_-} \quad \text{et} \quad e^{i\tau H_+} \phi(f) \phi(g) e^{-i\tau H_+}$$

sont bien définis sur $D(H_0)$ et (3.8) montre que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi(f)\phi(g)) &:= p e^{i\tau H_+} \phi(f)\phi(g) e^{-i\tau H_+} + (1-p) e^{i\tau H_-} \phi(f)\phi(g) e^{-i\tau H_-} \\ &= p e^{i\tau H_+} \phi(f) e^{-i\tau H_+} e^{i\tau H_+} \phi(g) e^{-i\tau H_+} + (1-p) e^{i\tau H_-} \phi(f) e^{-i\tau H_-} e^{i\tau H_-} \phi(g) e^{-i\tau H_-} \\ &= \phi(w_\tau(f)) \phi(w_\tau(g)) - p\alpha(g) \phi(w_\tau(f)) - p\alpha(f) \phi(w_\tau(g)) + p\alpha(f)\alpha(g), \end{aligned} \quad (3.9)$$

ce qui prouve (3.7) pour $n = 1$.

On montre ensuite le résultat par récurrence. Etant donné $n \geq 1$ on suppose (3.7) vraie au rang n pour tous $f, g \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$. En utilisant (3.9) on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n+1}(\phi(f)\phi(g)) &= \mathcal{L}^n(\mathcal{L}(\phi(f)\phi(g))) \\ &= \mathcal{L}^n\left(\phi(w_\tau(f)) \phi(w_\tau(g)) - p\alpha(g) \phi(w_\tau(f)) - p\alpha(f) \phi(w_\tau(g)) + p\alpha(f)\alpha(g)\right). \end{aligned}$$

On applique maintenant l'hypothèse de récurrence avec $w_\tau(f)$ et $w_\tau(g)$ (on utilise à nouveau que w_t préserve $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$) ainsi que (3.6), ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n+1}(\phi(f)\phi(g)) &= \phi(w_{(n+1)\tau}(f)) \phi(w_{(n+1)\tau}(g)) \\ &\quad - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(w_\tau(g)) ds \times \phi(w_{(n+1)\tau}(f)) - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(w_\tau(f)) ds \times \phi(w_{(n+1)\tau}(g)) \\ &\quad + p(1-p) \sum_{j=1}^n \alpha(w_{j\tau}(f)) \alpha(w_{j\tau}(g)) + p^2 \left(\int_0^{n\tau} \alpha_s(w_\tau(f)) ds \right) \left(\int_0^{n\tau} \alpha_s(w_\tau(g)) ds \right) \\ &\quad - p\alpha(g) \left[\phi(w_{(n+1)\tau}(f)) - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(w_\tau(f)) ds \right] - p\alpha(f) \left[\phi(w_{(n+1)\tau}(g)) - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(w_\tau(g)) ds \right] \\ &\quad + p\alpha(f)\alpha(g). \end{aligned}$$

En utilisant (2.40) et en regroupant la deuxième ligne du membre de droite avec les termes en ϕ de la quatrième ligne on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{n+1}(\phi(f)\phi(g)) \\
&= \phi(w_{(n+1)\tau}(f))\phi(w_{(n+1)\tau}(g)) \\
&\quad - p \int_0^{(n+1)\tau} \alpha_s(w_\tau(g)) ds \times \phi(w_{(n+1)\tau}(f)) - p \int_0^{(n+1)\tau} \alpha_s(w_\tau(f)) ds \times \phi(w_{(n+1)\tau}(g)) \\
&\quad + p(1-p) \sum_{j=1}^n \alpha(w_{j\tau}(f))\alpha(w_{j\tau}(g)) + p\alpha(f)\alpha(g) \\
&\quad + p^2 \left(\int_\tau^{(n+1)\tau} \alpha_s(f) ds \right) \left(\int_\tau^{(n+1)\tau} \alpha_s(g) ds \right) + p^2 \alpha(g) \int_\tau^{(n+1)\tau} \alpha_s(f) ds + p^2 \alpha(f) \int_\tau^{(n+1)\tau} \alpha_s(g) ds.
\end{aligned}$$

En écrivant dans la troisième ligne

$$\sum_{j=1}^n \alpha(w_{j\tau}(f))\alpha(w_{j\tau}(g)) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha(w_{(j-1)\tau}(f))\alpha(w_{(j-1)\tau}(g)) - \alpha(f)\alpha(g)$$

et en factorisant la quatrième sous la forme

$$p^2 \left[\left(\int_0^{(n+1)\tau} \alpha_s(f) ds \right) \left(\int_0^{(n+1)\tau} \alpha_s(g) ds \right) - \alpha(f)\alpha(g) \right],$$

on obtient bien (3.7) au rang $n+1$. □

3.2 Comportement en temps long et état asymptotique

L'objectif dans cette section est d'étudier la limite en temps long du système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$. Plus précisément, étant donné un état initial ω on cherche à savoir s'il existe un état asymptotique ω_+ i.e. tel que pour toute observable $O \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(\mathcal{L}^n(O)) = \omega_+(O). \tag{3.10}$$

De plus on se posera la question de la dépendance de ω_+ par rapport à l'état initial ω , autrement dit de l'unicité de l'état asymptotique. A la vue de la Proposition 3.3 il est important de comprendre la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(W(w_{n\tau}))$ correspondant au système cavité+réservoir sans interactions avec le faisceau d'atomes et qui a été étudiée dans [Koll1a]. Pour cela on a besoin d'une hypothèse additionnelle sur le facteur de forme ρ qui apparait dans le couplage entre la cavité et le réservoir. On rappelle que ρ vérifie l'hypothèse (H1), voir la Section 1.4.1. La fonction ρ étant invariante par rotation on note $\tilde{\rho}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et telle que

$$\tilde{\rho}(|k|) := \rho(k), \quad \forall k \in \mathbb{R}^3.$$

On supposera en plus que $\tilde{\rho}$ vérifie l'hypothèse suivante, on rappelle que $\beta > 0$ est l'inverse de la température du réservoir.

(H2) $\tilde{\rho}$ a un prolongement analytique sur $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \leq 2\pi\beta^{-1}\}$, que l'on notera toujours $\tilde{\rho}$, tel que $\tilde{\rho}(-r) = \tilde{\rho}(r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et

$$\sup_{|s| \leq 2\pi\beta^{-1}} \int_{\mathbb{R}} |\rho(r + is)|^2 (1 + |r|^3) dr < +\infty.$$

On supposera toujours à partir de maintenant que les deux hypothèses **(H1)** et **(H2)** sont vérifiées.

Avant d'énoncer le principal résultat de cette section on introduit quelques notations supplémentaires. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ on note $\tilde{f} : \mathbb{R} \times S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\tilde{f}(r, \psi) = \begin{cases} f(r, \psi), & r \geq 0 \\ \overline{f(r, \psi)}, & r < 0. \end{cases}$$

Etant donné $\kappa > 0$ on note $\mathfrak{H}^2(\kappa)$ l'espace des fonctions $f : (0, \infty) \rightarrow L^2(S^2)$ tel que $\tilde{f}$ a un prolongement analytique sur $\{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)| < \kappa\}$ et tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \sup_{s \in \mathbb{R}, |s| < \kappa} \|\tilde{f}(r + is)\|_{L^2(S^2)}^2 (1 + |r|^3) dr < +\infty.$$

On définit aussi

$$\mathfrak{A}(\kappa) := \left\{ \left(ai\varpi^{1/2} + b\varpi^{-1/2} \right) f \in \mathfrak{f} : a, b \in \mathbb{R}, f \in \mathfrak{H}^2(\kappa) \right\},$$

et $\mathfrak{g}(\kappa)$ l'espace vectoriel réel des fonctions $h \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ telles que $v(h) \in \mathfrak{A}(\kappa)$. Les propriétés de la fonction Q , voir Appendice A, assurent que $c \oplus 0 \in \mathfrak{g}(\kappa)$ pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $\kappa > 0$.

On rappelle également que $\omega_\beta^{C+\mathcal{R}}$ est l'état quasi-libre dont la fonction caractéristique est donnée par (2.30) et est un état KMS pour la dynamique engendrée par H_- . Enfin on introduit une certaine classe d'observable $\mathfrak{A}_a$ ainsi qu'une classe d'états $\mathfrak{S}_a$ dits analytiques pour lesquels on aura une convergence exponentielle dans (3.10). La définition ci-dessous provient de [Kol1a].

Définition 3.5. *Etant donné $\kappa > 0$, les éléments de l'algèbre*

$$\mathfrak{A}_a(\kappa) := \{W(g) \mid g \in \mathfrak{g}(\kappa)\},$$

sont appelés des observables analytiques et les éléments de

$$\mathfrak{S}_a(\kappa) := \left\{ \mu \text{ état de } \mathcal{C} + \mathcal{R} \mid \exists B \in \mathfrak{A}_a(\kappa), \forall A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}, \mu(A) = \omega_\beta^{C+\mathcal{R}}(B^*AB) \right\}$$

sont appelés des états analytiques.

Remarque 3.6. *Puisque $c \oplus 0 \in \mathfrak{g}(\kappa)$ les observables de la cavité, i.e. de la forme $W(c \oplus 0)$ sont toutes analytiques.*

Remarque 3.7. *Si μ est de la forme*

$$\mu(A) = \omega_\beta^{C+\mathcal{R}}(W(u)^*AW(u)), \quad (3.11)$$

avec $u \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$, en particulier si $\mu \in \mathfrak{S}_a(\kappa)$, alors μ est analytique au sens de la Définition 1.31. En effet, sa fonction caractéristique est alors donnée par

$$S_\mu(f) = \mu(W(f)) = \omega_\beta^{C+\mathcal{R}}(W(u)^*W(f)W(u)) = e^{i\operatorname{Im}\langle f, u \rangle} \omega_\beta^{C+\mathcal{R}}(W(f)). \quad (3.12)$$

où on a utilisé (2.43). L'analyticité de μ découle de celle de $\omega_\beta^{C+\mathcal{R}}$.

Définition 3.8. On notera $\mathfrak{S}_a$ l'ensemble des états de la forme (3.11) avec $u \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 3.9. Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $0 < |\lambda| < \lambda_0$, tout état initial μ sur $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}+\mathcal{R}}$ qui est $\omega_\beta^{\mathbb{C}+\mathcal{R}}$ -normal et toute observable $A \in \mathfrak{A}_{\mathbb{C}+\mathcal{R}}$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{L}^n(A)) = \omega_\infty(A),$$

où ω_∞ est déterminé par, pour tout $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$,

$$\omega_\infty(W(f)) = \left[\prod_{j=1}^{+\infty} \left(p e^{-i \alpha(w_{(j-1)\tau}(f))} + (1-p) \right) \right] \omega_\beta^{\mathbb{C}+\mathcal{R}}(W(f)). \quad (3.13)$$

De plus, il existe $\hat{\kappa}(\lambda)$ tel que pour tout $0 < \kappa < \hat{\kappa}(\lambda)$, si $\mu \in \mathfrak{S}_a(\kappa)$ et $A \in \mathfrak{A}_a(\kappa)$ alors il existe $C > 0$ tel que

$$|\mu(\mathcal{L}^n(A)) - \omega_\infty(A)| \leq C e^{-\kappa n \tau}, \quad \forall n \geq 1. \quad (3.14)$$

Remarque 3.10. La constante $\hat{\kappa}(\lambda)$ est reliée au prolongement analytique de la fonction Q définie en (2.33)-(2.34). Par souci de commodité sa définition précise est rappelée dans l'annexe, voir le Lemme A.3.

Remarque 3.11. La convergence du produit infini dans (3.13) fait partie du résultat du théorème. Cette convergence est à comprendre dans le sens usuel si tous les facteurs sont non nuls et dans le sens où si au moins un des termes du produit est nul alors le produit infini est nul. On vérifie facilement que ce dernier cas ne peut arriver que si $p = \frac{1}{2}$ et f est tel que $\alpha(w_{j\tau}(f)) \in (2\mathbb{Z} + 1)\pi$ pour un certain j .

Remarque 3.12. Si l'état initial est analytique on a toujours convergence exponentielle quand on se restreint aux observables de la cavité, i.e. de la forme $W(c \oplus 0)$. En effet, comme on l'a mentionné ci-dessus celles-ci sont toutes analytiques.

Ce théorème repose bien entendu sur la formule (3.5) qui exprime l'évolution après n interactions. D'un côté, le comportement en temps long de $\mu(W(w_{n\tau}(f))) = \mu(\tau_{\mathbb{C}+\mathcal{R}}^{n\tau}(W(f)))$ a été étudié dans [Koi11a].

Théorème 3.13. [Koi11a] Pour $\lambda \neq 0$ suffisamment petit le système $(\mathfrak{A}_{\mathbb{C}+\mathcal{R}}, \tau_{\mathbb{C}+\mathcal{R}}^t, \omega_\beta^{\mathbb{C}+\mathcal{R}})$ est mélangeant. De plus il existe $\hat{\kappa}(\lambda)$ tel que pour tout $0 < \kappa < \hat{\kappa}(\lambda)$, tout $A \in \mathfrak{A}_a(\kappa)$, $\mu \in \mathfrak{S}_a(\kappa)$ il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \mu(\tau_{\mathbb{C}+\mathcal{R}}^t(A)) - \omega_\beta^{\mathbb{C}+\mathcal{R}}(A) \right| \leq C e^{-\kappa t}.$$

Afin de prouver le Théorème 3.9 il reste donc à montrer que pour tout $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ le produit infini converge et que si de plus $f \in \mathfrak{g}(\kappa)$ alors la convergence de ce produit est exponentielle. Ces convergences reposent sur les deux lemmes suivants.

Lemme 3.14. Pour tout $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ les séries $\sum \alpha(w_{(j-1)\tau}(f))$ et $\sum \alpha(w_{(j-1)\tau}(f))^2$ convergent.

Lemme 3.15. *Si $f \in \mathfrak{g}(\kappa)$ alors il existe $C \geq 0$ tel que*

$$|\alpha_s(f)| \leq Ce^{-\kappa s}, \quad \forall s \geq 0. \quad (3.15)$$

En particulier il existe $C \geq 0$ tel que pour tout j on ait $|\alpha(w_{j\tau}(f))| \leq Ce^{-j\tau\kappa}$.

La preuve du Lemme 3.15 découle directement de la définition de α_s , du fait que $1 \oplus 0 \in \mathfrak{g}(\kappa)$ et du Lemme ci-dessous prouvé dans [Koll1a]. Ce dernier repose sur un principe de déformation analytique.

Lemme 3.16. [Koll1a] *Soient $f, g \in \mathfrak{g}(\kappa)$, il existe $C \geq 0$ tel que*

$$|\operatorname{Im} \langle v(f), e^{it\varpi} v(g) \rangle| \leq Ce^{-\kappa t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve du Lemme 3.14. On rappelle que

$$\begin{aligned} \alpha(w_{j\tau}(f)) &= \gamma\sqrt{2} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \operatorname{Im} \langle 1 \oplus 0, w_s(f) \rangle \, ds \\ &= \gamma\sqrt{2} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \operatorname{Im} \langle v(1 \oplus 0), e^{is\varpi} v(f) \rangle \, ds \\ &= \gamma\sqrt{2} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \operatorname{Im} \langle \varpi^{-1/2} \bar{Q}, e^{is\varpi} v(f) \rangle \, ds, \end{aligned}$$

où v est donné par (2.33). On rappelle également que si $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ alors $v(f) \in \mathfrak{f}$. Dans la suite de la preuve on notera simplement a_j cette dernière intégrale. On doit donc prouver que les deux séries $\sum a_j$ et $\sum a_j^2$ convergent.

La somme partielle des a_j se calcule facilement et on a, pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} a_j &= \int_0^{n\tau} \operatorname{Im} \langle \varpi^{-1/2} \bar{Q}, e^{is\varpi} v(f) \rangle \, ds \\ &= \operatorname{Im} \left\langle \varpi^{-1/2} \bar{Q}, \frac{e^{in\tau\varpi} - 1}{i\varpi} v(f) \right\rangle. \end{aligned}$$

Puisque $Q \in D(\varpi^{-1})$ d'après (2.34) et $v(f) \in \mathfrak{f} = D(\varpi^{-1/2})$ la fonction $g = \varpi^{-1}Q \times \varpi^{-1/2}v(f)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^3, dk)$ et on a

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^3} (e^{in\tau|k|} - 1) g(k) \, dk.$$

En passant en coordonnées sphériques, i.e. si on note $\tilde{g}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\tilde{g}(r) := \int_{S^2} g(r\Theta) \, d\sigma(\Theta),$$

alors le fait que $g \in L^1(\mathbb{R}^3)$ assure que la fonction $r^2 \tilde{g}(r) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}_+} (e^{in\tau r} - 1) \tilde{g}(r) r^2 \, dr \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{g}(r) r^2 \, dr$$

d'après le Lemme de Riemann-Lebesgue.

On montre maintenant que la série $\sum a_j^2$ converge. L'idée de la preuve est similaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$a_j^2 \leq \tau^2 \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \left| \left\langle \varpi^{-1/2} \bar{Q}, e^{is\varpi} v(f) \right\rangle \right|^2 ds,$$

et il faut donc montrer que la fonction $s \mapsto \left\langle \varpi^{-1/2} \bar{Q}, e^{is\varpi} v(f) \right\rangle$ est dans $L^2(\mathbb{R}_+, ds)$. On note cette fois $g = Q \times \varpi^{-1/2} v(f)$ et en passant en coordonnées sphériques on a de la même façon que ci-dessus

$$\left\langle \varpi^{-1/2} \bar{Q}, e^{is\varpi} v(f) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} e^{isr} \tilde{g}(r) r^2 dr,$$

et il suffit donc de prouver que la fonction $r^2 \tilde{g}(r) \in L^2(\mathbb{R}_+, dr)$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} r^4 |\tilde{g}(r)|^2 dr &= \int_{\mathbb{R}^+} r^4 \left| \int_{S^2} g(r\Theta) d\sigma(\Theta) \right|^2 dr \\ &\leq 4\pi \int_{\mathbb{R}^+} r^4 \left(\int_{S^2} |g(r\Theta)|^2 d\sigma(\Theta) \right) dr \\ &= 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} |k|^2 |g(k)|^2 dk, \end{aligned} \tag{3.16}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la deuxième ligne. Puisque $v(f) \in \mathfrak{f}$ on a $\varpi^{-1/2} v(f) \in L^2(\mathbb{R}^3, dk)$ et, d'après (2.34), $\varpi Q \in L^\infty$. Ainsi $\varpi g \in L^2(\mathbb{R}^3, dk)$ et (3.16) prouve que $r^2 \tilde{g}(r) \in L^2(\mathbb{R}_+, dr)$. $\square$

Remarque 3.17. L'identité (3.2) montre que la convergence de la série $\sum \alpha(w_{(j-1)\tau}(f))$ est équivalente à l'existence de la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\tau} \alpha_s(f) ds$. Le même raisonnement que dans la preuve ci-dessus montre qu'en fait, pour tout $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$, la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \alpha_s(f) ds$ existe. La fonction $s \mapsto \alpha_s(f)$ n'est par contre pas nécessairement intégrable. Par la suite, si $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$, lorsqu'on écrira $\int_0^\infty \alpha_s(f) ds$ on sous-entendra toujours que celle-ci est définie dans le sens

$$\int_0^\infty \alpha_s(f) ds := \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \alpha_s(f) ds, \tag{3.17}$$

sans pour autant que la fonction $\alpha_s(f)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 3.18. Le même raisonnement ci-dessus montre que non seulement $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(f) = 0$ mais que quels que soient $f, g \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \langle f, w_t(g) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \langle v(f), e^{it\varpi} v(g) \rangle = 0. \tag{3.18}$$

Preuve du Théorème 3.9. On supposera par la suite qu'aucun des termes du produit dans (3.13) n'est nul sinon il n'y a rien à prouver.

1. Le Lemme 3.14 assure que $a_j := \alpha(w_{(j-1)\tau}(f)) \rightarrow 0$ lorsque $j \rightarrow \infty$ et donc la convergence du produit (3.13) est équivalente à celle de la série

$$\sum \ln(1 + p(e^{ia_j} - 1)).$$

Celle-ci découle du Lemme 3.14 en développant

$$\ln(1 + p(e^{ia_j} - 1)) = ipa_j + O(a_j^2).$$

2. On suppose maintenant que $f \in \mathfrak{g}(\kappa)$ et on montre (3.14). Dans toute la suite $C \geq 0$ désignera une constante pouvant varier d'une ligne à l'autre pouvant dépendre de κ et f mais pas des indices temporels $j, m, n, \dots$. En utilisant (3.1) et l'inégalité (3.15) on a pour tout $j \geq 0$

$$\left| e^{-i\alpha(w_{j\tau}(f))} - 1 \right| \leq |\alpha(w_{j\tau}(f))| \leq C e^{-j\tau\kappa}. \quad (3.19)$$

Pour la suite de la preuve on note

$$P_n(f) := \prod_{j=1}^n \left(p e^{-i\alpha(w_{(j-1)\tau}(f))} + (1-p) \right).$$

On sait que $(P_n(f))_n$ converge et notera $P_\infty(f)$ sa limite. On va commencer par montrer que $P_n(f)$ converge exponentiellement rapidement vers $P_\infty(f)$.

Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ on montre facilement par récurrence que

$$\left| \left(\prod_{j=1}^n (1 + a_j) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{j=1}^n (1 + |a_j|) \right) - 1,$$

et donc, en majorant $1 + |a_j|$ par $e^{|a_j|}$,

$$\left| \left(\prod_{j=1}^n (1 + a_j) \right) - 1 \right| \leq \exp \left(\sum_{j=1}^n |a_j| \right) - 1.$$

On en déduit que pour tous $m > n$ on a

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=n+1}^m \left(p e^{-i\alpha(w_{(j-1)\tau}(f))} + (1-p) \right) - 1 \right| &\leq \exp \left(\sum_{j=n+1}^m p \left| e^{-i\alpha(w_{(j-1)\tau}(f))} - 1 \right| \right) - 1 \\ &\leq \exp \left(C e^{-n\tau\kappa} (1 - e^{-m\tau\kappa}) \right) - 1, \end{aligned}$$

où on a utilisé (3.19), et donc

$$|P_m(f) - P_n(f)| \leq |P_n(f)| \left(\exp \left(C e^{-n\tau\kappa} (1 - e^{-m\tau\kappa}) \right) - 1 \right).$$

En passant à la limite $m \rightarrow \infty$ et en utilisant le fait que $(P_n(f))_n$ est bornée, on en déduit

$$\begin{aligned} |P_n(f) - P_\infty(f)| &\leq |P_n(f)| \left(\exp \left(C e^{-n\tau\kappa} \right) - 1 \right) \\ &\leq C e^{-n\tau\kappa}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

ce qui prouve la convergence exponentielle de $P_n(f)$ vers $P_\infty(f)$ si $f \in \mathfrak{g}(\kappa)$.

Soit maintenant $\mu \in \mathfrak{S}_a(\kappa)$. Le Théorème 3.13 assure que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\left| \mu(W(w_{n\tau}(f))) - \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(W(f)) \right| = \left| \mu(\tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^{n\tau}(W(f))) - \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(W(f)) \right| \leq C e^{-\kappa n\tau}. \quad (3.21)$$

Ainsi en combinant (3.20) et (3.21) on a, pour tout $f \in \mathfrak{g}(\kappa)$,

$$\begin{aligned} & \left| \mu(\mathcal{L}^n(W(f))) - \omega_\infty(W(f)) \right| \\ & \leq \left| P_n(f) \left(\mu(W(w_{n\tau}(f))) - \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(W(f)) \right) \right| + \left| (P_n(f) - P_\infty(f)) \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(W(f)) \right| \\ & \leq C e^{-n\tau\kappa}, \end{aligned}$$

où à la dernière ligne on a utilisé à nouveau le fait que $P_n(f)$ est borné. $\square$

Tout comme dans la section précédente, en vue de l'étude de l'évolution du nombre de photons dans la cavité et des variations d'énergie et d'entropie, on va s'intéresser au comportement en temps long de l'évolution des opérateurs de champs.

Théorème 3.19. *Soit $\mu \in \mathfrak{S}_a$, alors pour tous $f, g \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{L}^n(\phi(f))) = -p \int_0^{+\infty} \alpha_s(f) ds, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{L}^n(\phi(f)\phi(g))) \\ & = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\langle v(f), \coth \left(\frac{\beta\varpi}{2} \right) v(g) \right\rangle + \frac{i}{2} \operatorname{Im} \langle f, g \rangle + p^2 \left(\int_0^{+\infty} \alpha_s(f) ds \right) \left(\int_0^{+\infty} \alpha_s(g) ds \right) \\ & \quad + p(1-p) \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha(w_{(j-1)\tau}(f)) \alpha(w_{(j-1)\tau}(g)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Remarque 3.20. *La convergence de la série ci-dessus est assurée par le Lemme 3.14.*

Preuve. Soit $u \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ tel que $\mu(A) = \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(W(u)^* A W(u))$, et donc la fonction caractéristique de μ est liée à celle de $\omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ par, voir (3.12),

$$S_\mu(f) = e^{i \operatorname{Im} \langle f, u \rangle} S_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(f) = e^{i \operatorname{Im} \langle f, u \rangle} \exp \left(-\frac{1}{4} \left\langle v(f), \coth \left(\frac{\beta\varpi}{2} \right) v(f) \right\rangle \right).$$

Comme on l'a mentionné dans la Remarque 3.7 l'état μ est analytique. On peut donc calculer la valeur moyenne d'observables de type champ en utilisant (1.12)-(1.13) et on a ainsi, pour tous $f, g \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$,

$$\mu(\phi(f)) = \operatorname{Im} \langle f, u \rangle, \quad (3.24)$$

$$\mu(\phi(f)\phi(g)) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\langle v(f), \coth \left(\frac{\beta\varpi}{2} \right) v(g) \right\rangle + \frac{i}{2} \operatorname{Im} \langle f, g \rangle + \operatorname{Im} \langle f, u \rangle \times \operatorname{Im} \langle g, u \rangle. \quad (3.25)$$

En utilisant (3.6) et (3.24) on obtient donc, pour tout $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$,

$$\mu(\mathcal{L}^n(\phi(f))) = \text{Im} \langle w_{n\tau}(f), u \rangle - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(f) \, ds.$$

et (3.22) découle de (3.17)-(3.18).

On montre maintenant (3.23). On commence par remarquer que pour tous $f, g \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} & \mu(\phi(w_t(f))\phi(w_t(g))) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle v \circ w_t(f), \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right) v \circ w_t(g) \right\rangle + \frac{i}{2} \text{Im} \langle w_t(f), w_t(g) \rangle + \text{Im} \langle w_t(f), u \rangle \text{Im} \langle w_t(g), u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle v(f), \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right) v(g) \right\rangle + \frac{i}{2} \text{Im} \langle f, g \rangle + \text{Im} \langle w_t(f), u \rangle \text{Im} \langle w_t(g), u \rangle \end{aligned}$$

où on a utilisé (2.35) et le fait que w_t est symplectique. En utilisant (3.24)-(3.25) dans (3.7) on obtient donc, pour tous $f, g \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$,

$$\begin{aligned} & \mu(\mathcal{L}^n(\phi(f)\phi(g))) \tag{3.26} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle v(f), \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right) v(g) \right\rangle + \frac{i}{2} \text{Im} \langle f, g \rangle + \text{Im} \langle w_{n\tau}(f), u \rangle \text{Im} \langle w_{n\tau}(g), u \rangle \\ & \quad + p \int_0^{n\tau} \alpha_s(g) \, ds \times \text{Im} \langle w_{n\tau}(f), u \rangle + p \int_0^{n\tau} \alpha_s(f) \, ds \times \text{Im} \langle w_{n\tau}(g), u \rangle \\ & \quad + p(1-p) \sum_{j=1}^n \alpha(w_{(j-1)\tau}(f)) \alpha(w_{(j-1)\tau}(g)) + p^2 \left(\int_0^{n\tau} \alpha_s(f) \, ds \right) \left(\int_0^{n\tau} \alpha_s(g) \, ds \right). \end{aligned}$$

A nouveau le résultat découle de (3.17)-(3.18), la convergence de la série étant assurée, d'après le Lemme 3.14, par le caractère ℓ^2 de $\alpha(w_{(j-1)\tau}(f))$ et $\alpha(w_{(j-1)\tau}(g))$ $\square$

Application à l'évolution du nombre de photons dans la cavité.

Comme première application de la Proposition 3.4 et du Théorème 3.19 on considère l'évolution du nombre de photons dans la cavité. On notera N l'opérateur décrivant le nombre de photons dans la cavité, i.e. l'opérateur $N = d\Gamma(\mathbb{I})$ défini sur $\mathcal{H}_C = \mathcal{F}_+(\mathbb{C})$.

Notation 3.21. Pour tout $j \geq 1$ on note

$$u_j := \alpha(w_{(j-1)\tau}(1 \oplus 0)), \quad \tilde{u}_j := \alpha(w_{(j-1)\tau}(i \oplus 0)), \quad c_j := u_j + i \tilde{u}_j. \tag{3.27}$$

Les équations (3.1)-(3.2) entraînent que

$$u_j = \int_{(j-1)\tau}^{j\tau} \alpha_s(1 \oplus 0) \, ds \quad \text{et} \quad \int_0^{n\tau} \alpha_s(1 \oplus 0) \, ds = \sum_{j=1}^n u_j, \tag{3.28}$$

avec également des relations similaires pour $\tilde{u}_j$.

Proposition 3.22. *L'évolution de l'opérateur du nombre de photons dans la cavité après n interactions est donnée par*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(N) = & \frac{1}{2} \left[\phi(w_{n\tau}(1 \oplus 0))^2 + \phi(w_{n\tau}(i \oplus 0))^2 - 1 \right] - p \phi \left(w_{n\tau} \left(\sum_{j=1}^n c_j \oplus 0 \right) \right) \\ & + \frac{p(1-p)}{2} \sum_{j=1}^n |c_j|^2 + \frac{p^2}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^n u_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n \tilde{u}_j \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

L'égalité est à comprendre au sens fort sur $\text{Dom}(H_0)$.

Si $\mu \in \mathfrak{S}_a$ alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{L}^n(N)) = & \frac{1}{4} \left\langle v(1 \oplus 0), \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right) v(1 \oplus 0) \right\rangle + \frac{1}{4} \left\langle v(i \oplus 0), \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right) v(i \oplus 0) \right\rangle - \frac{1}{2} \\ & + \frac{p(1-p)}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} |c_j|^2 + \frac{p^2}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^{+\infty} u_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{u}_j \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Remarque 3.23. *Toutes les séries apparaissant dans (3.30) convergent. Autrement dit le nombre moyen de photons dans la cavité converge dans la limite des grands temps vers une valeur indépendante de l'état initial μ .*

Preuve. En utilisant l'identification entre $\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_R$ et $\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}_{C+R})$ introduite à la fin de la Section 1.4.1 on écrit

$$N = a^*(1 \oplus 0)a(1 \oplus 0) = \frac{1}{2} (\phi(1 \oplus 0)^2 + \phi(i \oplus 0)^2 - 1).$$

La Proposition 3.4 donne alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(N) = & \frac{1}{2} \left[\phi(w_{n\tau}(1 \oplus 0))^2 + \phi(w_{n\tau}(i \oplus 0))^2 - 1 \right] \\ & - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(1 \oplus 0) ds \times \phi(w_{n\tau}(1 \oplus 0)) - p \int_0^{n\tau} \alpha_s(i \oplus 0) ds \times \phi(w_{n\tau}(i \oplus 0)) \\ & + \frac{p(1-p)}{2} \sum_{j=1}^n (u_j^2 + \tilde{u}_j^2) + \frac{p^2}{2} \left[\left(\int_0^{n\tau} \alpha_s(1 \oplus 0) ds \right)^2 + \left(\int_0^{n\tau} \alpha_s(i \oplus 0) ds \right)^2 \right], \end{aligned}$$

et (3.29) en découle en utilisant (3.28) et le fait que ϕ et w_t sont réel-linéaires.

De façon similaire (3.30) est une conséquence du Théorème 3.19 (en particulier la convergence des séries $\sum u_n$, $\sum \tilde{u}_n$ et $\sum |c_n|^2$). $\square$

3.3 Variations d'énergie

Dans cette section on va s'intéresser aux considérations d'énergie. D'une part le système total n'est pas totalement isolé et on s'intéressera à la variation d'énergie totale dans le système. D'autre part on s'intéressera à la question de la répartition de cette énergie dans les différentes composantes (cavité, réservoir, atomes), autrement dit aux échanges d'énergie.

3.3.1 Variation de l'énergie totale

Si $H(t)$ est un Hamiltonien dépendant du temps, τ_t la dynamique engendrée par $H(t)$ et μ l'état initial, l'énergie totale du système au temps t_1 est formellement donnée par $\mu(\tau_{t_1}(H(t_1)))$, et la variation d'énergie entre l'instant t_1 et l'instant $t_2 > t_1$ est donc donnée par, toujours formellement,

$$\mu(\tau_{t_2}(H(t_2)) - \tau_{t_1}(H(t_1))).$$

On revient à notre système. Comme on considère le système total on revient un instant à la situation où il y a M atomes dans le faisceau et $n \leq M$. Ici le Hamiltonien dépend du temps mais est constant par morceaux, voir (1.17). Ainsi la variation de l'énergie totale au cours d'une même interaction est nulle. Afin de comprendre la variation de l'énergie totale du système il faut donc comprendre comment celle-ci varie quand on passe d'une interaction à l'autre. En utilisant (1.17), on voit que le propagateur du système entre les instants 0 et t est donné par

$$U(t) = e^{-i(t-n\tau)\tilde{H}_{n+1}} e^{-i\tau\tilde{H}_n} \dots e^{-i\tau\tilde{H}_1}, \quad t \in [n\tau, (n+1)\tau).$$

On notera simplement $U_n = U(n\tau)$. Pour $0 \leq (n-1)\tau \leq t_1 < n\tau \leq t_2 < (n+1)\tau$, on vérifie alors facilement que

$$\begin{aligned} & U(t_2)^* H(t_2) U(t_2) - U(t_1)^* H(t_1) U(t_1) \\ &= U_n^* e^{i(t_2-n\tau)\tilde{H}_{n+1}} \tilde{H}_{n+1} e^{-i(t_2-n\tau)\tilde{H}_{n+1}} U_n - U_{n-1}^* e^{i(t_1-(n-1)\tau)\tilde{H}_n} \tilde{H}_n e^{-i(t_1-(n-1)\tau)\tilde{H}_n} U_{n-1} \\ &= U_n^* \tilde{H}_{n+1} U_n - U_{n-1}^* e^{i\tau\tilde{H}_n} \tilde{H}_n e^{-i\tau\tilde{H}_n} U_{n-1} \\ &= U_n^* (\tilde{H}_{n+1} - \tilde{H}_n) U_n \\ &= U_n^* (H_{I_{\mathcal{E}_{n+1}}} - H_{I_{\mathcal{E}_n}}) U_n. \end{aligned}$$

On rappelle que $H_{I_{\mathcal{E}_n}}$ désigne l'interaction entre la cavité et le n -ième atome et est donné par (1.35). Si μ est l'état initial de la partie cavité+réservoir du système on note $\tilde{\mu} = \mu \otimes \bigotimes_{j=1}^M \omega_{\mathcal{E}}$ où $\omega_{\mathcal{E}}$ est l'état initial d'un atome, donné par la matrice densité $\rho_{\mathcal{E}}$ définie en (1.25)

$$\omega_{\mathcal{E}}(B) = \text{Tr}[\rho_{\mathcal{E}} B]. \quad (3.31)$$

La variation d'énergie entre les instants t_1 et t_2 s'écrit donc

$$\delta E(t_2, t_1) = \tilde{\mu} \left(U_n^* (H_{I_{\mathcal{E}_{n+1}}} - H_{I_{\mathcal{E}_n}}) U_n \right),$$

On retrouve ici le fait que cette variation d'énergie ne dépend pas précisément des instants t_1 et t_2 , et correspond au saut d'énergie lorsque l'on passe de la n -ième à la $(n+1)$ -ième interaction. Cette discussion conduit à la définition suivante.

Définition 3.24. *Pour tout état initial μ du système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ et $1 \leq n \leq M-1$ on définit la variation d'énergie entre la n -ième interaction et la $(n+1)$ -ième interaction par*

$$\delta E_{\mu}(n) = \tilde{\mu} \left(U_n^* (H_{I_{\mathcal{E}_{n+1}}} - H_{I_{\mathcal{E}_n}}) U_n \right),$$

où $\tilde{\mu} = \mu \otimes \bigotimes_{j=1}^M \omega_{\mathcal{E}}$.

La variation de l'énergie totale du système après $n \leq M$ interactions est définie par

$$\Delta E_\mu(n) := \sum_{k=1}^n \delta E_\mu(k).$$

On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 3.25. *Pour tout état initial μ et $n \leq M$ on a*

$$\delta E_\mu(n) = 2\gamma^2 p(1-p) \left\| \frac{(1 - \cos(\tau\varpi))^{1/2}}{\varpi^{1/2}} v(1 \oplus 0) \right\|^2 \equiv \delta E.$$

Remarque 3.26. *On constate que la variation d'énergie entre la $(n-1)$ -ième et la n -ième interaction d'une part ne dépend pas de l'état initial μ mais surtout ne dépend pas de n et qu'elle est positive. Ainsi la variation d'énergie est linéaire en temps $\Delta E_\mu(n) = n\delta E$ et le passage d'une interaction à l'autre requiert de l'énergie.*

Enfin, à nouveau ici le nombre M d'atomes ne joue plus aucun rôle et la variation asymptotique moyenne d'énergie

$$\Delta E := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta E_\mu(n)}{n\tau}$$

par unité de temps ne dépend pas de μ et vaut

$$\Delta E = \frac{1}{\tau} \delta E = \frac{2\gamma^2}{\tau} p(1-p) \left\| \frac{(1 - \cos(\tau\varpi))^{1/2}}{\varpi^{1/2}} v(1 \oplus 0) \right\|^2. \quad (3.32)$$

Preuve. Etant donné un état initial μ on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \left(U_n^* H_{I_{\varepsilon_{n+1}}} U_n \right) &= \mu \left(\text{Tr}_{\otimes_{j=1}^M \mathcal{H}_\varepsilon} \left[U_n^* H_{I_{\varepsilon_{n+1}}} U_n \left(\mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \rho_\varepsilon \right) \right] \right) \\ &= \mu \left(\text{Tr}_{\otimes_{j=1}^{n+1} \mathcal{H}_\varepsilon} \left[U_n^* H_{I_{\varepsilon_{n+1}}} U_n \left(\mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^{n+1} \rho_\varepsilon \right) \right] \right). \end{aligned}$$

En écrivant

$$H_{I_{\varepsilon_{n+1}}} = \gamma\sqrt{2}\phi(1 \oplus 0) \otimes \mathbb{1}_\varepsilon \times \mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes b_{n+1}^* b_{n+1},$$

où b_{n+1} désigne l'opérateur d'annihilation correspondant au $(n+1)$ -ième atome, on peut commuter $\mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes b_{n+1}^* b_{n+1}$ avec U_n et donc

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \left(U_n^* H_{I_{\varepsilon_{n+1}}} U_n \right) &= \gamma\sqrt{2} \mu \left(\text{Tr}_{\otimes_{j=1}^{n+1} \mathcal{H}_\varepsilon} \left[U_n^* \phi(1 \oplus 0) U_n \left(\mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^n \rho_\varepsilon \otimes b^* b \rho_\varepsilon \right) \right] \right) \\ &= \gamma\sqrt{2} \mu \left(\text{Tr}_{\otimes_{j=1}^n \mathcal{H}_\varepsilon} \left[U_n^* \phi(1 \oplus 0) U_n \left(\mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^n \rho_\varepsilon \right) \right] \right) \times \text{Tr}(b^* b \rho_\varepsilon) \\ &= p\gamma\sqrt{2} \mu(\mathcal{L}^n(\phi(1 \oplus 0))). \end{aligned} \quad (3.33)$$

En raisonnant de façon similaire, et en utilisant le fait que le terme $b_n^* b_n$ provenant de $H_{I_{\mathcal{E}_n}}$ commute avec U_n , on a

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mu}(U_n^* H_{I_{\mathcal{E}_n}} U_n) \\
&= \gamma\sqrt{2} \mu \left(\text{Tr}_{\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{H}_{\mathcal{E}}} \left[U_n^* \phi(1 \oplus 0) U_n \left(\mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^{n-1} \rho_{\mathcal{E}} \otimes b^* b \rho_{\mathcal{E}} \right) \right] \right) \\
&= \gamma\sqrt{2} \mu \left(\text{Tr}_{\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathcal{H}_{\mathcal{E}}} \left[U_{n-1}^* \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} [e^{i\tau H} \phi(1 \oplus 0) e^{-i\tau H} (\mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes b^* b \rho_{\mathcal{E}})] U_{n-1} \left(\mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^{n-1} \rho_{\mathcal{E}} \right) \right] \right) \\
&= p\gamma\sqrt{2} \mu \left(\text{Tr}_{\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathcal{H}_{\mathcal{E}}} \left[U_{n-1}^* e^{i\tau H_+} \phi(1 \oplus 0) e^{-i\tau H_+} U_{n-1} \left(\mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^{n-1} \rho_{\mathcal{E}} \right) \right] \right) \\
&= p\gamma\sqrt{2} \mu (\mathcal{L}^{n-1}(e^{i\tau H_+} \phi(1 \oplus 0) e^{-i\tau H_+})). \tag{3.34}
\end{aligned}$$

En combinant (3.33) et (3.34) on obtient

$$\begin{aligned}
\delta E_{\mu}(n) &= \gamma\sqrt{2} p \mu (\mathcal{L}^n(\phi(1 \oplus 0)) - \mathcal{L}^{n-1}(e^{i\tau H_+} \phi(1 \oplus 0) e^{-i\tau H_+})) \\
&= \gamma\sqrt{2} p \mu \circ \mathcal{L}^{n-1} (\mathcal{L}(\phi(1 \oplus 0)) - e^{i\tau H_+} \phi(1 \oplus 0) e^{-i\tau H_+}).
\end{aligned}$$

En utilisant (3.6), pour $n = 1$, et (3.8) on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\phi(1 \oplus 0)) - e^{i\tau H_+} \phi(1 \oplus 0) e^{-i\tau H_+} &= \phi(w_{\tau}(1 \oplus 0)) - p \alpha(1 \oplus 0) - \phi(w_{\tau}(1 \oplus 0)) + \alpha(1 \oplus 0) \\
&= (1 - p) \alpha(1 \oplus 0),
\end{aligned}$$

et donc, on rappelle que $\alpha(1 \oplus 0)$ est un scalaire et que $\mathcal{L}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$,

$$\delta E_{\mu}(n) = \gamma\sqrt{2} p(1 - p) \mu \circ \mathcal{L}^{n-1}(\alpha(1 \oplus 0)) = \gamma\sqrt{2} p(1 - p) \alpha(1 \oplus 0).$$

Finalement on a

$$\begin{aligned}
\alpha(1 \oplus 0) &= \gamma\sqrt{2} \int_0^{\tau} \text{Im} \langle 1 \oplus 0, w_s(1 \oplus 0) \rangle ds \\
&= \gamma\sqrt{2} \int_0^{\tau} \text{Im} \langle v(1 \oplus 0), e^{is\varpi} v(1 \oplus 0) \rangle ds \\
&= \gamma\sqrt{2} \text{Im} \left\langle v(1 \oplus 0), \frac{e^{i\tau\varpi} - 1}{i\varpi} v(1 \oplus 0) \right\rangle \\
&= \gamma\sqrt{2} \left\| \frac{(1 - \cos(\tau\varpi))^{1/2}}{\varpi^{1/2}} v(1 \oplus 0) \right\|^2, \tag{3.35}
\end{aligned}$$

et donc

$$\delta E_{\mu}(n) = 2\gamma^2 p(1 - p) \left\| \frac{(1 - \cos(\tau\varpi))^{1/2}}{\varpi^{1/2}} v(1 \oplus 0) \right\|^2.$$

□

3.3.2 Echanges d'énergie

Comme on l'a remarqué dans la Section 1.4 (voir les remarques qui suivent l'équation (1.26)) le choix de l'interaction cavité-atome a pour effet de laisser l'état des atomes inchangé. Il n'y a donc pas d'échange d'énergie avec le faisceau d'atomes. On va donc s'attacher à déterminer comment la variation d'énergie dans le système se répartit entre la cavité et le réservoir. Ces dernières ne faisant appel qu'à des observables qui agissent sur $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ on pourra étudier leur évolution via l'opérateur de dynamique réduite $\mathcal{L}$.

Définition 3.27. *Etant donné un état initial μ du système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ on définit les variations d'énergie de la cavité, du réservoir et du système cavité+réservoir entre les instants 0 et $n\tau$ par*

$$\begin{aligned}\Delta E_{\mathcal{C},\mu}(n) &= \mu(\mathcal{L}^n(H_{\mathcal{C}}) - H_{\mathcal{C}}), \\ \Delta E_{\mathcal{R},\mu}(n) &= \mu(\mathcal{L}^n(H_{\mathcal{R}}) - H_{\mathcal{R}}), \\ \Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R},\mu}(n) &= \mu(\mathcal{L}^n(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}),\end{aligned}$$

et, si elles existent, les variations asymptotiques par unité de temps

$$\Delta E_{\mathcal{C},\mu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta E_{\mathcal{C},\mu}(n)}{n\tau}, \quad \Delta E_{\mathcal{R},\mu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta E_{\mathcal{R},\mu}(n)}{n\tau} \quad \text{et} \quad \Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R},\mu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R},\mu}(n)}{n\tau}.$$

Remarque 3.28. *Ces variations d'énergie ne sont a priori pas forcément définies pour tout état initial μ , les quantités $\mathcal{L}^n(H_{\mathcal{C}}) - H_{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{L}^n(H_{\mathcal{R}}) - H_{\mathcal{R}}$ ne définissant pas des opérateurs bornés.*

Théorème 3.29. *Pour tout $\mu \in \mathfrak{S}_a$ on a*

$$\Delta E_{\mathcal{C},\mu} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta E_{\mathcal{R},\mu} = \Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R},\mu} = \frac{2\gamma^2}{\tau} p(1-p) \left\| \frac{(1 - \cos(\tau\varpi))^{1/2}}{\varpi^{1/2}} v(1 \oplus 0) \right\|^2 = \Delta E.$$

Autrement dit, asymptotiquement toute l'énergie transmise au système est absorbée par le réservoir $\mathcal{R}$.

Le résultat concernant l'énergie de la cavité sera une conséquence immédiate de l'étude de l'évolution du nombre de photons dans la cavité effectuée à la fin de la Section 3.2. Pour étudier la variation de l'énergie dans le réservoir l'idée est d'écrire

$$H_{\mathcal{R}} = H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} - H_{\mathcal{C}} - H_{I_{\mathcal{R}}} - R,$$

et d'étudier séparément l'évolution de chacun de ces termes. Les termes $H_{\mathcal{C}}$, $H_{I_{\mathcal{R}}}$ et R sont quadratiques en les opérateurs de champs et leurs contributions s'obtiennent à l'aide de (3.26). Le lemme qui suit donne l'évolution du terme correspondant à $H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$. On rappelle que les u_j sont définis en (3.27).

Lemme 3.30. *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \\ = -\gamma p \sqrt{2} \phi(w_{n\tau}(1 \oplus 0)) + \gamma p \sqrt{2} \phi(1 \oplus 0) + \gamma p^2 \sqrt{2} \sum_{j=1}^n u_j + n\gamma p(1-p) \sqrt{2} \alpha(1 \oplus 0),\end{aligned}\tag{3.36}$$

où l'identité ci-dessus est à comprendre au sens fort sur $D(H_0)$.

Preuve. De la même manière que pour la Proposition 1.44 on a, au sens fort sur $D(H_0)$,

$$\mathcal{L}(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} = p e^{i\tau H_+} H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} e^{-i\tau H_+} + (1-p) e^{i\tau H_-} H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} e^{-i\tau H_-} - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}},$$

Puisque $H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} = H_-$ on a donc

$$\mathcal{L}(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} = p (e^{i\tau H_+} H_- e^{-i\tau H_+} - H_-).$$

En écrivant $H_- = H_+ - \gamma\sqrt{2}\phi(1 \oplus 0)$ et en utilisant (3.8) on obtient, toujours au sens fort sur $D(H_0)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} &= p\gamma\sqrt{2} (\phi(1 \oplus 0) - e^{i\tau H_+} \phi(1 \oplus 0) e^{-i\tau H_+}) \\ &= -p\gamma\sqrt{2} \phi((w_\tau - 1)(1 \oplus 0)) + p\gamma\sqrt{2} \alpha(1 \oplus 0), \end{aligned} \quad (3.37)$$

ce qui correspond à (3.36) pour $n = 1$.

En appliquant la Proposition 3.4 à (3.37) on obtient, au sens fort sur $\text{Dom}(H_0)$ et pour tout $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^j(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - \mathcal{L}^{j-1}(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) &= -p\gamma\sqrt{2} \phi((w_{j\tau} - w_{(j-1)\tau})(1 \oplus 0)) + p^2\gamma\sqrt{2} \int_0^{(j-1)\tau} \alpha_s((w_\tau - 1)(1 \oplus 0)) ds + p\gamma\sqrt{2} \alpha(1 \oplus 0) \\ &= -p\gamma\sqrt{2} \phi((w_{j\tau} - w_{(j-1)\tau})(1 \oplus 0)) + p^2\gamma\sqrt{2} \alpha((w_{(j-1)\tau} - 1)(1 \oplus 0)) + p\gamma\sqrt{2} \alpha(1 \oplus 0), \\ &= -p\gamma\sqrt{2} \phi((w_{j\tau} - w_{(j-1)\tau})(1 \oplus 0)) + p^2\gamma\sqrt{2} u_j + p(1-p)\gamma\sqrt{2} \alpha(1 \oplus 0), \end{aligned} \quad (3.38)$$

où on a utilisé (3.2). En sommant (3.38) pour j allant de 1 à n on en déduit (3.36). $\square$

Preuve du Théorème 3.29. Soit $\mu \in \mathfrak{S}_a$ et $u \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ tel que $\mu(A) = \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(W(u)^* A W(u))$.

1. Les résultats concernant les variations d'énergie de $\mathcal{C}$ découlent directement du fait que $H_{\mathcal{C}} = \theta N$ et de la Proposition 3.22.

2. Passons maintenant à la moyenne asymptotique de la variation d'énergie pour le système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$. D'après le Lemme 3.30 on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\tau} \mu(\mathcal{L}^n(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) &= -\frac{\gamma p \sqrt{2}}{n\tau} \mu(\phi(w_{n\tau}(1 \oplus 0))) + \frac{\gamma p \sqrt{2}}{n\tau} \mu(\phi(1 \oplus 0)) + \frac{\gamma p^2 \sqrt{2}}{n\tau} \sum_{j=1}^n u_j + \frac{\gamma p(1-p)\sqrt{2}}{\tau} \alpha(1 \oplus 0). \end{aligned} \quad (3.39)$$

En utilisant (3.24) on peut écrire

$$\mu(\phi(w_{n\tau}(1 \oplus 0))) = \text{Im} \langle w_{n\tau}(1 \oplus 0), u \rangle$$

qui tend vers 0. Par ailleurs la série $\sum u_n$ converge (voir la Remarque 3.23). On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \mu(\mathcal{L}^n(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) = \frac{\gamma p(1-p)\sqrt{2}}{\tau} \alpha(1 \oplus 0),$$

et donc en utilisant (3.35) et (3.32) que

$$\Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R},\mu} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \mu(\mathcal{L}^n(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) = \Delta E.$$

3. On termine avec la variation d'énergie dans le réservoir $\mathcal{R}$. En écrivant

$$H_{\mathcal{R}} = H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} - H_{\mathcal{C}} - H_{I_{\mathcal{R}}} - R,$$

on a

$$\Delta E_{\mathcal{R},\mu}(n) = \Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R},\mu}(n) - \mu(\mathcal{L}^n(H_{I_{\mathcal{R}}}) - H_{I_{\mathcal{R}}}) - \mu(\mathcal{L}^n(R) - R) - \Delta E_{\mathcal{C},\mu}(n),$$

et il reste à analyser les termes $\mu(\mathcal{L}^n(R) - R)$ et $\mu(\mathcal{L}^n(H_{I_{\mathcal{R}}}) - H_{I_{\mathcal{R}}})$. Ceux-ci se traitent de la même manière que l'évolution de l'opérateur de nombre N . On rappelle que

$$R = \frac{\lambda^2}{2} \|\varpi^{-1}\rho\|^2 \phi(1 \oplus 0)^2,$$

et

$$H_{I_{\mathcal{R}}} = \lambda \phi(1 \oplus 0) \phi(0 \oplus \varpi^{-1/2}\rho).$$

Puisque $1 \oplus 0$ et $0 \oplus \varpi^{-1/2}\rho \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ le Théorème 3.19 assure que chacun des termes $\mu(\mathcal{L}^n(R) - R)$ et $\mu(\mathcal{L}^n(H_{I_{\mathcal{R}}}) - H_{I_{\mathcal{R}}})$ convergent lorsque $n \rightarrow \infty$ ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque 3.31. *La preuve ci-dessus montre que de façon plus précise chacune des limites ci-dessous existe et est finie*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta E_{\mathcal{C},\mu}(n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta E_{\mathcal{R},\mu}(n) - n\tau \Delta E \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R},\mu}(n) - n\tau \Delta E.$$

On a convergence de la variation totale d'énergie dans la cavité tandis que modulo un "terme de bord" l'énergie dans le réservoir croît linéairement en temps.

3.4 Comparaison avec [NVZ14]

Comme on l'a mentionné dans l'introduction, dans [NVZ14] les auteurs étudient un modèle similaire mais avec une approche Markovienne de la description de l'interaction entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{R}$. Ils appellent ce système "cavité ouverte" et le mettent en parallèle avec le SIR cavité+atomes qu'ils appellent "cavité idéale". L'approche Markovienne de la description de l'interaction entre la cavité $\mathcal{C}$ et l'environnement $\mathcal{R}$ revient à considérer uniquement la dynamique effective du système $\mathcal{C}$ qui est générée par l'interaction avec l'environnement $\mathcal{R}$. Pour ce faire, en absence d'atome l'évolution de la cavité est décrite par l'équation de Lindblad (1.27). En présence d'atomes le système est décrit sur l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_{NVZ}^M := \mathcal{H}_{\mathcal{C}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathcal{H}_{\mathcal{E}}.$$

Pour la cavité idéale (ce qui correspond dans cette thèse à prendre $\lambda = 0$), le Hamiltonien du système en interactions répétées est donné par

$$H_{NVZ}(t) := H_C + \sum_{j=1}^M H_{\mathcal{E}_j} + \sum_{j=1}^M \chi_{[(j-1)\tau, j\tau)}(t) H_{I_{\mathcal{E}_j}}, \quad \forall t \in [0, M\tau),$$

et l'évolution d'une observable O est donnée par

$$\frac{d}{dt}O(t) = i[H_{NVZ}(t), O(t)]. \quad (3.40)$$

Comme dans le cas “sans atomes” pour décrire la cavité ouverte on remplace alors l'équation d'évolution (3.40) par l'équation de Lindblad

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}O(t) = & i[H_{NVZ}(t), O(t)] + \sigma_- (A^* \otimes \mathbb{1}) O(t) (A \otimes \mathbb{1}) - \frac{\sigma_-}{2} \{A^* A \otimes \mathbb{1}, O(t)\} \\ & + \sigma_+ (A \otimes \mathbb{1}) O(t) (A^* \otimes \mathbb{1}) - \frac{\sigma_+}{2} \{AA^* \otimes \mathbb{1}, O(t)\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

où σ_+ et σ_- représentent, respectivement, les taux d'émission et d'absorption de photons dans la cavité. L'algèbre des observables de la cavité est toujours $\mathfrak{A}_C$.

Dans [NVZ14] les auteurs étudient alors le comportement en temps long du système, dans les deux cas d'une cavité idéale ou ouverte. Ils montrent l'existence et donnent une formule explicite d'un unique état invariant pour l'évolution dans la cavité ouverte, ils donnent des formules pour la valeur moyenne du nombre de photons dans la cavité et pour les variations d'énergie dans le système. Dans cette section nous comparons leurs résultats sur la dynamique et sur les variations d'énergie à ceux obtenus dans ce chapitre. Notamment nous allons voir comment on peut interpréter leurs résultats à partir des ceux obtenus dans cette thèse.

3.4.1 La cavité ouverte dans l'approche markovienne

En l'absence d'atomes l'évolution markovienne $\tau_{C, \text{Mark}}^t$ d'une observable de Weyl $W(c)$, $c \in \mathbb{C}$, dans la cavité ouverte se calcule explicitement, voir par exemple l'Appendice dans [NVZ14], et est donnée par

$$\tau_{C, \text{Mark}}^t(W(c)) = \exp\left(-\frac{|c|^2}{4} \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)t}\right) \frac{\sigma_- + \sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+}\right) W\left(e^{-\Theta t} c\right), \quad (3.42)$$

où

$$\Theta := i\theta + \frac{\sigma_- - \sigma_+}{2}.$$

Dans l'approche markovienne l'évolution d'une observable de la cavité reste bien entendu une observable de la cavité. Afin de comparer avec l'évolution obtenue dans l'approche hamiltonienne utilisée dans cette thèse, dans laquelle $\tau_{C+\mathcal{R}}^t(O) \in \mathfrak{A}_C \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$, on peut alors prendre la trace partielle de cette dernière sur le réservoir, l'état de référence de celui-ci étant l'état d'équilibre $\omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$. Si on écrit $w_t(c \oplus 0)$ sous la forme

$$w_t(c \oplus 0) =: w_t^{\mathcal{C}}(c \oplus 0) \oplus w_t^{\mathcal{R}}(c \oplus 0) \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f},$$

on a

$$\tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t(W(c \oplus 0)) = W(w_t(c \oplus 0)) = W(w_t^{\mathcal{C}}(c \oplus 0)) \otimes W(w_t^{\mathcal{R}}(c \oplus 0)) \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$$

et $\tau_{\mathcal{C}, \text{Mark}}^t(W(c))$ est alors à comparer avec

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}} \left(W(w_t(c \oplus 0)) \right) \\ &= \omega_{\beta}^{\mathcal{R}} \left(W(w_t^{\mathcal{R}}(c \oplus 0)) \right) W(w_t^{\mathcal{C}}(c \oplus 0)) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{4} \left\langle w_t^{\mathcal{R}}(c \oplus 0), \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right) w_t^{\mathcal{R}}(c \oplus 0) \right\rangle \right) W(w_t^{\mathcal{C}}(c \oplus 0)). \end{aligned}$$

On définit la version markovienne w_t^{Mark} de w_t par

$$w_t^{\text{Mark}}(c \oplus 0) := e^{-\bar{\Theta}t} c \oplus R_t(c), \quad R_t(c) := \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)t} \right)^{1/2} c \rho^{\text{Mark}},$$

où $\rho^{\text{Mark}} \in \mathfrak{f}$ est fixé, de norme 1, et décrit la façon dont la cavité est couplée au réservoir (ρ^{Mark} joue un rôle similaire au facteur de forme ρ apparaissant dans $H_{I_{\mathcal{R}}}$). On vérifie alors facilement que pour tous $c, c' \in \mathbb{C}$ on a

$$\text{Im} \langle w_t^{\text{Mark}}(c \oplus 0), w_t^{\text{Mark}}(c' \oplus 0) \rangle = \text{Im} \langle c \oplus 0, c' \oplus 0 \rangle,$$

i.e. w_t^{Mark} est symplectique. De plus

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}} \left(W(w_t^{\text{Mark}}(c \oplus 0)) \right) \\ &= \omega_{\beta}^{\mathcal{R}} \left(W(R_t(c)) \right) W(e^{-\bar{\Theta}t} c) \\ &= \exp \left(-\frac{|c|^2}{4} \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)t} \right) \left\langle \rho^{\text{Mark}}, \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right) \rho^{\text{Mark}} \right\rangle \right) W(e^{-\bar{\Theta}t} c). \end{aligned} \tag{3.43}$$

En choisissant ρ^{Mark} de façon à ce que

$$\left\langle \rho^{\text{Mark}}, \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right) \rho^{\text{Mark}} \right\rangle = \frac{\sigma_- + \sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+} \tag{3.44}$$

on retrouve alors bien (3.42).

On va voir que si dans chacun des résultats obtenus on remplace w_t par sa version markovienne w_t^{Mark} on retrouve alors exactement les résultats de [NVZ14].

3.4.2 Evolution des observables de Weyl.

On rappelle la formule de l'évolution après une interaction d'un observable de Weyl pour la cavité ouverte obtenue dans [NVZ14].

Théorème 3.32. [NVZ14] *Pour tout $c \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NVZ}^n(W(c)) &= W \left(e^{-n\bar{\Theta}\tau} c \right) \exp \left(-\frac{|c|^2}{4} \left(1 - e^{-n(\sigma_- - \sigma_+)\tau} \right) \frac{\sigma_- + \sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+} \right) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^n \left[p \exp \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 - e^{-\Theta\tau}}{\Theta} e^{-(j-1)\Theta\tau} \bar{c} - \frac{1 - e^{-\bar{\Theta}\tau}}{\bar{\Theta}} e^{-(j-1)\bar{\Theta}\tau} c \right) \right) + (1-p) \right]. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Afin de décrire les versions markoviennes de nos résultats on remplace comme on l'a dit w_t par w_t^{Mark} . En particulier les phases

$$\alpha(w_{(j-1)\tau}(f)) = \int_{(j-1)\tau}^{j\tau} \alpha_s(f) ds = \sqrt{2}\gamma \int_{(j-1)\tau}^{j\tau} \text{Im} \langle 1 \oplus 0, w_s(f) \rangle ds$$

deviennent, pour $f = c \oplus 0$,

$$\begin{aligned} \alpha(w_{(j-1)\tau}^{\text{Mark}}(c \oplus 0)) &= \sqrt{2}\gamma \int_{(j-1)\tau}^{j\tau} \text{Im} \langle 1 \oplus 0, e^{-\bar{\Theta}s} c \oplus R_s(c) \rangle ds \\ &= \sqrt{2}\gamma \text{Im} \left(\frac{1 - e^{-\bar{\Theta}\tau}}{\bar{\Theta}} e^{-(j-1)\bar{\Theta}\tau} c \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ainsi la version markovienne de la Proposition 3.3 devient

$$\mathcal{L}_{\text{Mark}}^n(W(c \oplus 0)) := \left[\prod_{j=1}^n \left(p e^{-i \alpha(w_{(j-1)\tau}^{\text{Mark}}(c \oplus 0))} + (1 - p) \right) \right] W(w_{n\tau}^{\text{Mark}}(c \oplus 0)).$$

En utilisant (3.43), (3.44) et (3.46) on en déduit facilement que pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $n \geq 1$ on a

$$\mathbb{1}_C \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}} \left(\mathcal{L}_{\text{Mark}}^n(W(c \oplus 0)) \right) = \mathcal{L}_{NVZ}^n(W(c)),$$

autrement dit l'évolution markovienne obtenue dans [NVZ14] coïncide bien avec celle obtenue dans l'approche hamiltonienne en remplaçant w_t par sa version markovienne.

3.4.3 Nombre de photons dans la cavité

L'évolution de l'observable N décrivant le nombre de photons dans la cavité ouverte obtenue dans l'approche markovienne (équation (3.38) dans [NVZ14]) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NVZ}^n(N) &= e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau} N + \frac{ip\gamma}{\Theta} \left(e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau} - e^{-\bar{\Theta}n\tau} \right) A^* - \frac{ip\gamma}{\Theta} \left(e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau} - e^{-\Theta n\tau} \right) A \\ &\quad + \frac{\sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+} \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau} \right) + p \frac{\gamma^2}{|\Theta|^2} e^{-(\sigma_- - \sigma_+)\tau} (1 - e^{\Theta\tau})(1 - e^{\bar{\Theta}\tau}) \frac{1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau}}{1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)\tau}} \\ &\quad - p^2 \frac{2\gamma^2}{|\Theta|^2} \frac{1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau}}{1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)\tau}} \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)\tau/2} \cos(\theta\tau) \right) + p^2 \frac{2\gamma^2}{|\Theta|^2} \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau/2} \cos(\theta n\tau) \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

que l'on va comparer avec le résultat de la Proposition 3.22, en remplaçant w_t par w_t^{Mark} dans (3.29).

D'une part pour tout $c \in \mathbb{C}$ on a

$$\phi(w_t^{\text{Mark}}(c \oplus 0)) = \phi(e^{-\bar{\Theta}t} c) \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{R}} + \mathbb{1}_C \otimes \phi(R_t(c)), \quad (3.48)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_C \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}} \left(\phi \left(w_t^{\text{Mark}}(c \oplus 0) \right)^2 \right) &= \phi \left(e^{-\bar{\Theta}t} c \right)^2 + 2\omega_\beta^{\mathcal{R}} \left(\phi(R_t(c)) \right) \phi \left(e^{-\bar{\Theta}t} c \right) + \omega_\beta^{\mathcal{R}} \left(\phi(R_t(c))^2 \right) \\
&= \phi \left(e^{-\bar{\Theta}t} c \right)^2 + \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle R_t(c), \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right) R_t(c) \right\rangle \\
&= \phi \left(e^{-\bar{\Theta}t} c \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_- + \sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+} \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)t} \right) |c|^2.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_C \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{2} \left[\phi \left(w_t^{\text{Mark}}(1 \oplus 0) \right)^2 + \phi \left(w_t^{\text{Mark}}(i \oplus 0) \right)^2 - 1 \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\phi \left(e^{-\bar{\Theta}t} \right)^2 + \phi \left(e^{-\bar{\Theta}t} i \right)^2 - 1 \right] + \frac{1}{2} \frac{\sigma_- + \sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+} \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)t} \right) \\
&= e^{-(\sigma_- - \sigma_+)t} A^* A + \frac{\sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+} \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)t} \right). \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant (3.46) avec $c = 1$ et $c = i$ pour calculer respectivement u_j et $\tilde{u}_j$ puis les c_j on trouve

$$u_j = -\gamma\sqrt{2} \text{Im} \left(\frac{e^{-\Theta(j-1)\tau} - e^{-\Theta j\tau}}{\Theta} \right), \quad \tilde{u}_j = \gamma\sqrt{2} \text{Re} \left(\frac{e^{-\Theta(j-1)\tau} - e^{-\Theta j\tau}}{\Theta} \right),$$

et donc

$$c_j = u_j + i\tilde{u}_j = i\gamma\sqrt{2} \frac{e^{-\Theta(j-1)\tau} - e^{-\Theta j\tau}}{\Theta}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_C \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}} \left(\phi \left(w_{n\tau}^{\text{Mark}} \left(\sum_{j=1}^n c_j \oplus 0 \right) \right) \right) &= \phi \left(e^{-\bar{\Theta}n\tau} \sum_{j=1}^n c_j \right) \\
&= \phi \left(i \frac{\gamma\sqrt{2}}{\Theta} e^{-\bar{\Theta}n\tau} (1 - e^{-\Theta n\tau}) \right) \\
&= i \frac{\gamma}{\Theta} e^{-\bar{\Theta}n\tau} (1 - e^{-\Theta n\tau}) A^* - i \frac{\gamma}{\Theta} e^{-\Theta n\tau} (1 - e^{-\bar{\Theta}n\tau}) A,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

où on a utilisé (3.48) et le fait que $\omega_\beta^{\mathcal{R}}(\phi(f)) = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{f}$, et que

$$\sum_{j=1}^n |c_j|^2 = \frac{2\gamma^2}{|\Theta|^2} |e^{-\Theta\tau} - 1|^2 \sum_{j=1}^n |e^{-\Theta(j-1)\tau}|^2 = \frac{2\gamma^2}{|\Theta|^2} |e^{-\Theta\tau} - 1|^2 \times \frac{1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau}}{1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)\tau}}, \tag{3.51}$$

et

$$\left| \sum_{j=1}^n c_j \right|^2 = \frac{2\gamma^2}{|\Theta|^2} |e^{-\Theta n\tau} - 1|^2. \tag{3.52}$$

En partant de (3.29) et en utilisant (3.49)-(3.52) on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_C \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}} \left(\mathcal{L}_{\text{Mark}}^n(N) \right) &= e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau} N - i \frac{p\gamma}{\Theta} e^{-\bar{\Theta}n\tau} (1 - e^{-\Theta n\tau}) A^* + ip \frac{\gamma}{\Theta} e^{-\Theta n\tau} (1 - e^{-\bar{\Theta}n\tau}) A \\ &\quad + \frac{p(1-p)\gamma^2}{|\Theta|^2} |e^{-\Theta\tau} - 1|^2 \times \frac{1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau}}{1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)\tau}} + \frac{p^2\gamma^2}{|\Theta|^2} |e^{-\Theta n\tau} - 1|^2 \\ &\quad + \frac{\sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+} \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)n\tau} \right), \end{aligned}$$

et on vérifie aisément, en se rappelant que $\Theta = i\theta + \frac{\sigma_- - \sigma_+}{2}$, que cela coïncide avec (3.47), i.e.

$$\mathbb{1}_C \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}} \left(\mathcal{L}_{\text{Mark}}^n(N) \right) = \mathcal{L}_{NVZ}^n(N).$$

Remarque 3.33. Dans le cas de la cavité idéale l'évolution du nombre de photons dans la cavité obtenue dans [NVZ14] est donnée par (Lemme 2.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ideal}}^n(N) &= N + p \frac{\gamma}{\theta} \left[(1 - e^{i\theta n\tau}) A^* + (1 - e^{-i\theta n\tau}) A \right] \\ &\quad + np(1-p) \frac{2\gamma^2}{\theta^2} (1 - \cos(\theta\tau)) + p^2 \frac{2\gamma^2}{\theta^2} (1 - \cos(\theta n\tau)). \end{aligned} \quad (3.53)$$

On peut noter qu'ici on a génériquement une croissance linéaire du nombre de photons dans la cavité.

Dans notre approche cela correspond à prendre la constante de couplage $\lambda = 0$. Dans ce cas l'opérateur w_t devient simplement $w_t(c \oplus f) = e^{i\theta t} c \oplus e^{i\varpi t} f$ (la cavité et le réservoir sont découplés), et le même raisonnement que ci-dessus donne

$$\frac{1}{2} \left[\phi(w_t(1 \oplus 0))^2 + \phi(w_t(i \oplus 0))^2 - 1 \right] = N \quad \text{et} \quad c_j = \frac{\gamma\sqrt{2}}{\theta} (1 - e^{-i\theta\tau}) e^{-i(j-1)\theta\tau}.$$

On en déduit aisément que dans ce cas (3.29) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(N) &= N - \frac{p\gamma}{\theta} e^{i\theta n\tau} (1 - e^{-i\theta n\tau}) A^* - p \frac{\gamma}{\theta} e^{-i\theta n\tau} (1 - e^{i\theta n\tau}) A \\ &\quad + np(1-p) \frac{\gamma^2}{\theta^2} |1 - e^{-i\theta\tau}|^2 + p^2 \frac{\gamma^2}{\theta^2} |e^{-i\theta n\tau} - 1|^2, \end{aligned}$$

et on retrouve bien (3.53).

3.4.4 Saut d'énergie

On compare finalement l'expression pour les sauts d'énergie obtenue dans [NVZ14] avec celle obtenue dans la Section 3.3.1. Il faut noter que dans l'approche markovienne cela ne correspond pas à la variation de l'énergie totale. En effet, si au cours d'une interaction l'énergie totale est constante dans l'approche hamiltonienne ce n'est plus le cas dans l'approche markovienne où le système est dissipatif.

Dans le cas de la cavité ouverte, l'expression du saut d'énergie lorsqu'on passe de la $(n-1)$ -ème à la n -ème interaction est donnée par (équation (4.27) dans [NVZ14])

$$\begin{aligned} \delta E_{NVZ}(n\tau, (n-1)\tau) \\ = p(1-p) \frac{2\gamma^2\theta}{|\Theta|^2} \left(1 - e^{-(\sigma_- - \sigma_+)\tau/2} \cos(\theta\tau)\right) - p(1-p) \frac{\gamma^2(\sigma_- - \sigma_+)}{|\Theta|^2} e^{-(\sigma_- - \sigma_+)\tau/2} \sin(\theta\tau). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Dans la Section 3.3.1 on a obtenu, voir le Théorème 3.25 et (3.35),

$$\delta E(n\tau, (n-1)\tau) = \sqrt{2}\gamma p(1-p) \alpha(1 \oplus 0).$$

En remplaçant $\alpha(1 \oplus 0)$ par sa version markovienne donnée par (3.46) on obtient alors

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{Mark}}(n\tau, (n-1)\tau) &= 2\gamma^2 p(1-p) \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{-\bar{\Theta}\tau}}{\bar{\Theta}} \right) \\ &= \delta E_{NVZ}(n\tau, (n-1)\tau). \end{aligned}$$

Remarque 3.34. Dans le cas de la cavité idéale on a simplement

$$\alpha(1 \oplus 0) = \gamma\sqrt{2} \int_0^\tau \operatorname{Im} \langle 1 \oplus 0, e^{is\theta} \oplus 0 \rangle ds = \frac{\gamma\sqrt{2}}{\theta} (1 - \cos(\theta\tau)),$$

et donc

$$\delta E(n\tau, (n-1)\tau) = p(1-p) \frac{2\gamma^2}{\theta} (1 - \cos(\theta\tau)),$$

qui coïncide bien avec l'expression obtenue dans [NVZ14] (Théorème 4.2).

Chapitre 4

Production d'entropie

Dans ce chapitre on s'intéresse à la production d'entropie dans le système. Supposons un instant que tous les états considérés soient donnés par des matrices densité. Si ρ et ρ' sont deux matrices densité sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ l'entropie relative de ρ' par rapport à ρ est définie par

$$\text{Ent}(\rho'|\rho) = \text{Tr}(\rho' \log \rho - \rho' \log \rho') \leq 0,$$

cette quantité pouvant éventuellement être égale à $-\infty$ (c'est le cas si ρ' n'est pas relativement normal par rapport à ρ). Etant donné un état de référence ρ_{ref} , ρ_0 l'état initial du système et $\rho(n)$ l'état après n interactions on va s'intéresser à la variation d'entropie relative après n interactions, c'est-à-dire la quantité

$$\Delta S(n) := \text{Ent}(\rho(n)|\rho_{\text{ref}}) - \text{Ent}(\rho_0|\rho_{\text{ref}}),$$

ainsi qu'à la production moyenne d'entropie par unité de temps, c'est-à-dire la quantité

$$\Delta S := \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n\tau} \Delta S(n).$$

Ici tous les états ne sont pas représentés par des matrices densité, en particulier pour le réservoir. On est donc amené à utiliser un cadre plus général pour définir l'entropie relative. Celui-ci a été développé par H. Araki, il a étendu la définition de l'entropie relative à des états arbitraires d'une algèbre de von Neumann dans [A75, A77]. Avant de s'intéresser à la production d'entropie dans notre modèle on commence par rappeler le cadre algébrique nécessaire dans la Section 4.1.

4.1 Quelques pré-requis

On rappelle ici les principales définitions et les principaux résultats dont on aura besoin par la suite. Le lecteur intéressé peut consulter [BR2, DJP03, Pi06] pour plus de détails.

4.1.1 Algèbres de Von Neumann et théorie modulaire

On rappelle qu'une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une C^* -algèbre qui est fermée pour la topologie faible. Si $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une sous $*$ -algèbre on note

$$\mathfrak{M}' := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall B \in \mathfrak{M}, [A, B] = 0\}$$

son commutant. Le théorème du bicommutant de von Neumann assure qu'une sous $*$ -algèbre $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ contenant l'identité est fermée pour la topologie faible si et seulement si $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}''$ où $\mathfrak{M}'' = (\mathfrak{M}')'$ désigne le bicommutant de $\mathfrak{M}$.

Remarque 4.1. Si $\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une C^* -algèbre alors $\mathfrak{A}''$ est une algèbre de von Neumann appelé algèbre enveloppante de $\mathfrak{A}$. Par exemple, la Proposition 1.14 traduit le fait que $\text{CCR}(\mathfrak{h})'' = \mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathfrak{h}))$.

Définition 4.2. Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ une sous-algèbre de von Neumann et ω un état sur $\mathfrak{M}$. On appelle support de ω respectivement à $\mathfrak{N}$

$$s_\omega^\mathfrak{N} = \inf \{P \in \mathfrak{N} : P \text{ est une projection orthogonale et } \omega(1 - P) = 0\}.$$

Dans la suite on notera

$$s_\omega := s_\omega^\mathfrak{M}, \quad s'_\omega := s_\omega^{\mathfrak{M}'},$$

et on dit que ω est fidèle si $s_\omega = 1$.

Si $\omega(A) = \langle \Omega, A\Omega \rangle$ on notera

$$s_\Omega := s_\omega, \quad s'_\Omega := s'_\omega.$$

On peut alors montrer que

$$\text{Ran } s'_\Omega = \overline{\mathfrak{M}\Omega}, \quad \text{Ran } s_\Omega = \overline{\mathfrak{M}'\Omega}.$$

En particulier ω est fidèle si et seulement si Ω est cyclique pour $\mathfrak{M}'$. De plus

$$(\mathfrak{M}\Omega)^\perp = \ker(s'_\Omega) = (1 - s'_\Omega)\mathcal{H}.$$

On peut également facilement montrer que Ω est cyclique pour $\mathfrak{M}'$ si et seulement si Ω est séparateur pour $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire si $A \in \mathfrak{M}$ vérifie $A\Omega = 0$ alors $A = 0$.

Définition 4.3. Soient $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une algèbre de von Neumann et $\Omega \in \mathcal{H}$ un vecteur cyclique et séparateur pour $\mathfrak{M}$. On définit l'opérateur antilinéaire S_Ω sur $\mathfrak{M}\Omega$ par

$$S_\Omega : A\Omega \mapsto A^*\Omega.$$

S_Ω est un opérateur fermable et on note toujours S_Ω sa fermeture. Si $S_\Omega = J\Delta_\Omega^{1/2}$ désigne la décomposition polaire de S_Ω on appelle Δ_Ω l'opérateur modulaire et J la conjugaison modulaire.

Remarque 4.4. Le fait que Ω soit séparateur assure que S_Ω est bien défini, et le fait que Ω soit cyclique assure que son domaine de définition soit dense.

Remarque 4.5. La conjugaison modulaire J possède une certaine universalité par rapport au vecteur Ω , voir la Remarque 4.12. C'est pourquoi on la note en général simplement J et pas J_Ω .

Définition 4.6. [A77] Soient $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une algèbre de von Neumann et $\Psi, \Omega \in \mathcal{H}$. On définit l'opérateur antilinéaire $S_{\Omega, \Psi}$ sur le domaine $\mathfrak{M}\Psi + (1 - s'_\Psi)\mathcal{H}$ par

$$S_{\Omega, \Psi}(A\Psi + \Theta) := s_\Psi A^* \Omega,$$

où $A \in \mathfrak{M}$, $\Theta \in (1 - s'_\Psi)\mathcal{H}$. $S_{\Omega, \Psi}$ est un opérateur fermable et on note $\overline{S}_{\Omega, \Psi}$ sa fermeture. L'opérateur modulaire relatif est défini par

$$\Delta_{\Omega, \Psi} = S_{\Omega, \Psi}^* \overline{S}_{\Omega, \Psi}.$$

Remarque 4.7. Si Ω est cyclique et séparateur alors $S_{\Omega, \Omega} = S_\Omega$ et donc $\Delta_{\Omega, \Omega} = \Delta_\Omega$.

C'est la notion d'opérateur modulaire relatif qui permettra de généraliser celle d'entropie relative de deux états (voir la Section 4.1.3).

4.1.2 Forme standard et Liouvillien

La théorie générale sur les formes standard a été développée par Haagerup [H75] suivant les travaux de Araki [A76] et Connes [C73].

La notion de forme standard fait appel à celle de cône et en particulier de cône auto-dual d'un espace de Hilbert. On rappelle que $C \subset \mathcal{H}$ est un cône si pour tout $\psi \in C$ et $t \geq 0$ on a $t\psi \in C$.

Définition 4.8. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C un cône. Le cône dual de C est l'ensemble

$$\widehat{C} := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \forall \phi \in C, \langle \phi, \psi \rangle \geq 0\}.$$

Un cône C est dit auto-dual si $\widehat{C} = C$, et il est automatiquement fermé.

Définition 4.9. Une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dite sous forme standard, s'il existe une involution anti-unitaire J sur $\mathcal{H}$ et un cône auto-dual $\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}$ tels que

1. $J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'$,
2. $JAJ = A^*$ pour $A \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$,
3. $J\psi = \psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}^+$,
4. $AJA\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$ pour tout $A \in \mathfrak{M}$.

On notera $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$ une algèbre de von Neumann sous forme standard.

Le théorème suivant montre qu'il y a unicité, à isomorphisme près, d'une représentation standard. Une idée de la preuve peut être trouvée dans [Pi06]. Elle repose sur la représentation GNS (voir le Théorème 1.26) et la théorie modulaire de Tomita-Takesaki.

Théorème 4.10. Toute algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$ possède une représentation $\pi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ telle que $\pi(\mathfrak{M})$ soit sous forme standard. Cette représentation est unique à équivalence unitaire près.

De la même façon, si $\mathfrak{A}$ est une C^* -algèbre, ω un état fidèle sur $\mathfrak{A}$, et $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ la représentation GNS de $(\mathfrak{A}, \omega)$ alors l'algèbre enveloppante $\mathfrak{M} := \pi(\mathfrak{A})''$ est sous forme standard.

L'opérateur J est la conjugaison modulaire associée au vecteur représentatif Ω et le cône $\mathcal{H}^+$ est

$$\mathcal{H}^+ = \{AJAJ\Omega, A \in \mathfrak{M}\}. \quad (4.1)$$

On dira que $(\mathcal{H}, \pi, J, \mathcal{H}^+)$ est une représentation standard de $\mathfrak{A}$.

Les deux théorèmes suivants montrent l'importance de la notion de représentation standard dans l'étude des systèmes dynamiques quantiques.

Théorème 4.11. *Soit $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$ une algèbre de von Neumann sous forme standard. Pour tout état normal ω sur $\mathfrak{M}$ il existe un unique vecteur représentatif $\Psi_\omega \in \mathcal{H}^+$ tel que*

$$\omega(A) = \langle \Psi_\omega, A\Psi_\omega \rangle, \quad \forall A \in \mathfrak{M}.$$

De plus, si ω et μ sont deux états normaux on a

- $\|\Psi_\omega - \Psi_\mu\|^2 \leq \|\omega - \mu\| \leq \|\Psi_\omega - \Psi_\mu\| \|\Psi_\omega + \Psi_\mu\|$.
- Ψ_ω est cyclique pour $\pi(\mathfrak{M}) \Leftrightarrow \Psi_\omega$ est cyclique pour $\pi(\mathfrak{M})' \Leftrightarrow \omega$ est fidèle.
- Plus généralement $\pi(\mathfrak{M})\Psi_\omega = J\pi(\mathfrak{M})'\Psi_\omega$.

Remarque 4.12. *Si $\mathfrak{M}$ est sous forme standard et $\Psi \in \mathcal{H}^+$, alors Ψ est cyclique si et seulement si il est séparateur. On peut alors montrer que la conjugaison modulaire J_Ψ associée à Ψ vérifie $J_\Psi = J$ et que le cône $\mathcal{H}_\Psi^+ := \{AJAJ\Psi, A \in \mathfrak{M}\}$ ne dépend pas non plus de Ψ , i.e. $\mathcal{H}_\Psi^+ = \mathcal{H}^+$.*

En particulier si $\mathfrak{A}$ est une C^ -algèbre, ω un état fidèle, $(\mathcal{H}, \pi, J, \mathcal{H}^+)$ la représentation standard de $\mathfrak{A}$ associée à ω , et si μ est un autre état relativement normal par rapport à ω , alors*

$$\hat{\mu}(\pi(A)) := \mu(A)$$

s'étend en un état normal sur $\mathfrak{M} = \pi(\mathfrak{A})''$. Il existe donc un vecteur représentatif $\Psi_\mu \in \mathcal{H}^+$. Si de plus μ est fidèle alors Ψ_μ est séparateur, donc cyclique et la conjugaison modulaire associée à Ψ_μ et la même que celle associée à ω .

Le second résultat concerne l'implémentation unitaire des $*$ -automorphismes sur $\mathfrak{M}$. Soit $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$ une algèbre de von Neumann sous forme standard. On note $\text{Aut}(\mathfrak{M})$ le groupe des $*$ -automorphismes de $\mathfrak{M}$ muni de la topologie de la convergence σ -faible, et $\mathfrak{U}$ l'ensemble des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$ tels que

$$U\mathfrak{M}U^* = \mathfrak{M} \quad \text{et} \quad U\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+.$$

Muni de la topologie forte des opérateurs $\mathfrak{U}$ est un groupe et $\tau_U(A) := UAU^*$ définit un morphisme continu de $\mathfrak{U}$ dans $\text{Aut}(\mathfrak{M})$.

Théorème 4.13. *L'application $U \mapsto \tau_U$ est un homéomorphisme. En particulier pour tout $*$ -automorphisme σ de $\mathfrak{M}$ il existe un unique $U \in \mathfrak{U}$ tel que $\sigma = \tau_U$. U est appelé l'implémentation standard de σ .*

De plus, pour tout $U \in \mathfrak{U}$ et tout état normal ω sur $\mathfrak{M}$ on a

- $[U, J] = 0$.
- $U\mathfrak{M}'U^* = \mathfrak{M}'$.
- $U^*\Psi_\omega = \Psi_{\omega \circ \tau_U}$.

Finalement, étant donné un système dynamique quantique $(\mathfrak{A}, \tau^t, \omega)$, voir la Définition 1.25, et $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ la représentation GNS de ω , il est naturel de chercher à décrire la dynamique τ^t dans cette représentation. En utilisant l'unicité à équivalence unitaire près de la représentation GNS et le fait que ω est invariant on montre alors

Proposition 4.14. *Soit $(\mathfrak{A}, \tau^t, \omega)$ un système dynamique quantique et $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ la représentation GNS associée. Il existe un unique opérateur auto-adjoint L sur $\mathcal{H}$ tel que, pour $A \in \mathfrak{A}$,*

- $\pi(\tau^t(A)) = e^{itL} \pi(A) e^{-itL}$, pour tout $A \in \mathfrak{A}$ et $t \in \mathbb{R}$,
- $L\Omega = 0$.

L est appelé Liouvillien associé au système dynamique quantique $(\mathfrak{A}, \tau^t, \omega)$.

Exemple 4.15. *On reprend la situation de l'Exemple 1.27. Soient $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathfrak{h})$, $\tau^t(A) = e^{itH} A e^{-itH}$ où H est un opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{h}$, et ω est l'état associé à une matrice densité $\rho > 0$ invariante, i.e. telle que $e^{-itH} \rho e^{itH} = \rho$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. $(\mathfrak{A}, \tau^t, \omega)$ est un système dynamique quantique dont la représentation GNS est donnée dans l'Exemple 1.27, et on vérifie facilement que le Liouvillien associé est*

$$L = H \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \bar{H},$$

où on rappelle que $\bar{H}$ est défini par $\bar{H}\psi = \overline{H\psi}$.

L'opérateur L permet bien entendu d'étendre la dynamique à $\mathfrak{M} = \pi(\mathfrak{A})''$. En utilisant le Théorème 4.13 on peut alors montrer que si ω est fidèle alors

$$LJ + JL = 0 \quad \text{et} \quad e^{itL} \mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Un cas particulier important est celui dans lequel ω est un état (τ^t, β) -KMS. On peut alors relier le Liouvillien avec l'opérateur modulaire associé au vecteur représentatif Ω de ω

$$\Delta_\Omega = e^{-\beta L}. \quad (4.3)$$

4.1.3 Entropie relative

On peut maintenant définir l'entropie relative d'un état μ respectivement à un état de référence ω . Celle-ci a été introduite par Araki dans [A75] et [A77] et repose sur la notion d'opérateur modulaire relatif introduit dans la Section 4.1.1. Il sera utile de définir l'entropie relative non seulement de deux états mais plus généralement de deux formes linéaires positives pas nécessairement normalisées.

Définition 4.16. *Soit $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$ une algèbre de von Neumann, ω, μ deux états normaux sur $\mathfrak{M}$, et $\Omega, \Psi \in \mathcal{H}^+$ leurs vecteurs représentatifs. L'entropie relative de μ par rapport à ω est définie par*

$$\text{Ent}(\mu | \omega) = \begin{cases} \langle \Psi, \log \Delta_{\Omega, \Psi} \Psi \rangle & \text{si } s_\mu \leq s_\omega, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De la même façon, si $(\mathfrak{A}, \tau^t, \omega)$ est un système dynamique quantique avec ω fidèle, $(\mathcal{H}, \pi, J, \mathcal{H}^+)$ une représentation standard associée à ω , et μ un état relativement normal par rapport à ω , l'entropie relative de μ par rapport à ω est alors définie par

$$\text{Ent}(\mu | \omega) = \begin{cases} \langle \Psi, \log \Delta_{\Omega, \Psi} \Psi \rangle & \text{si } s_\mu \leq s_\omega, \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où Ω, Ψ sont les vecteurs représentatifs de ω et μ dans le cône $\mathcal{H}^+$.

On rappelle deux propriétés utiles sur les opérateurs modulaires relatifs et sur l'entropie relative.

Proposition 4.17. *Soient ω, μ deux formes linéaires positives sur $\mathfrak{M}$ de vecteurs représentatifs respectifs Ω, Ψ .*

1. *Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, le vecteur représentatif de $a\mu$ est $\sqrt{a}\Psi$.*
2. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$\Delta_{a\Omega, b\Psi} = \frac{a^2}{b^2} \Delta_{\Omega, \Psi}.$$

3. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$*

$$\text{Ent}(a\mu \mid b\omega) = a \text{Ent}(\mu \mid \omega) + a \mu(\mathbb{1})(\log b - \log a).$$

4. *Soit $I : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ un $*$ -automorphisme, alors*

$$\text{Ent}(\mu \circ I \mid \omega \circ I) = \text{Ent}(\mu \mid \omega).$$

Proposition 4.18. *[A77] Soient ω, μ deux formes linéaires positives sur $\mathfrak{M}$ de vecteurs représentatifs respectifs Ω, Ψ . Alors*

$$J\Delta_{\Omega, \Psi}J\Delta_{\Psi, \Omega} = \Delta_{\Psi, \Omega}J\Delta_{\Omega, \Psi}J = s'_{\Omega} s_{\Psi}.$$

En particulier, si ω et μ sont fidèles on a $\Delta_{\Psi, \Omega}^{-1} = J\Delta_{\Omega, \Psi}J$ et donc

$$\log \Delta_{\Psi, \Omega} = -J \log \Delta_{\Omega, \Psi} J.$$

4.1.4 Convergence au sens fort de la résolvante

Dans cette partie on rappelle quelques résultats sur la convergence forte au sens de la résolvante qui nous seront utiles dans la Section 4.3. On commence par deux conditions équivalentes impliquant la convergence au sens fort de la résolvante.

Proposition 4.19. *[RS1] Supposons que A_n et A sont des opérateurs auto-adjoints. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Soit $z_0 \notin \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n)}$ (par exemple si $\text{Im } z_0 \neq 0$). Alors*

$$(z_0 - A_n)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (z_0 - A)^{-1} \quad \text{fortement.}$$

- (2) *Si f est une fonction continue et bornée sur $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n)}$, alors*

$$f(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(A) \quad \text{fortement.}$$

Si l'une de ces conditions est vérifiée alors $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ fortement au sens de la résolvante.

Proposition 4.20. *[RS1]*

Supposons que A_n, A sont des opérateurs auto-adjoints, A est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{D}$ et $A_n \psi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A\psi$ pour $\psi \in \mathcal{D}$. Alors $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ au sens fort de la résolvante.

Proposition 4.21. *[DJP03]*

Supposons que A_n, A sont des opérateurs auto-adjoints et $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ fortement au sens de la résolvente. Supposons que ψ_n, ψ tel que $\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi$ faiblement et $\|A_n \psi_n\| < C$. Alors $\psi \in \text{Dom}(A)$, la limite faible de $A_n \psi_n$ existe et $A_n \psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A\psi$ faiblement.

Proposition 4.22. *[DJP03]* Soit $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$ une forme standard d'une C^* -algèbre $\mathfrak{A}$.

On suppose que, pour $\Omega_n, \Psi_n \in \mathcal{H}^+$,

- $\Delta_{\Omega_n, \Psi_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$ fortement au sens fort de la résolvente,
- $\Psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Psi$ faiblement,
- $s_{\Psi_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s_\Psi$ fortement,
- $\Omega_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Omega$ faiblement.

Alors $M = \Delta_{\Omega, \Psi}$.

4.2 Retour au modèle

On revient ici au modèle étudié dans les chapitres précédents. Tout comme pour les variations d'énergie l'étude de l'entropie nécessite de considérer le système total, c'est-à-dire "cavité+réservoir+atomes". On procède comme dans la Section 3.3 en revenant d'abord à la situation où il y a M atomes dans le faisceau et où $n \leq M$. L'algèbre des observables du système est donc

$$\mathfrak{A}^{(M)} := \mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathfrak{A}_{\mathcal{E}_j},$$

où $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}, \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$ sont définies respectivement en (1.24), (1.28) et $\mathfrak{A}_{\mathcal{E}_j} \equiv \mathfrak{A}_{\mathcal{E}} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$. On rappelle que si μ est un état sur $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$ on note

$$\tilde{\mu} := \mu \otimes \bigotimes_{j=1}^M \omega_{\mathcal{E}} \quad (4.4)$$

où $\omega_{\mathcal{E}}$ désigne l'état initial des atomes, voir (3.31). Si μ est l'état initial du système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ alors l'état du système total après n interactions est

$$\tilde{\mu}_{U_n}(A) := \tilde{\mu}(U_n^* A U_n) \quad (4.5)$$

où U_n désigne le propagateur unitaire correspondant à n interactions (voir la Section 3.3.1).

Afin de définir la production d'entropie on se fixe un état de référence ω_{ref} fidèle du système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$. On supposera aussi par la suite que $p \in]0, 1[$ afin que les états $\omega_{\mathcal{E}}$ soient également fidèles. On reviendra sur les deux cas particuliers $p = 0$ et $p = 1$ dans la Section 4.5.

Définition 4.23. Soit μ l'état initial du système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$. La variation d'entropie après n interactions est donnée par

$$\Delta S(n) := \text{Ent}(\tilde{\mu}_{U_n} | \tilde{\omega}_{\text{ref}}) - \text{Ent}(\tilde{\mu} | \tilde{\omega}_{\text{ref}}).$$

A priori la définition de $\Delta S(n)$ dépend du choix de l'état de référence ω_{ref} et du nombre M d'atomes. Cependant au temps $n\tau$ seuls les n premiers atomes ont interagi avec la cavité

tandis que les autres atomes sont restés invariants (les atomes sont initialement dans un état invariant pour leur dynamique libre). Ainsi, après n interactions, seuls les n premiers atomes ont contribué à la production d'entropie et $\Delta S(n)$ ne dépend pas du choix de $M \geq n$. A nouveau le nombre M d'atomes ne joue plus de rôle et on omettra de l'écrire.

Définition 4.24. *La production d'entropie dans le système est définie, si elle existe, par*

$$\Delta S := \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n\tau} \Delta S(n).$$

L'objectif de la suite de ce chapitre est d'étudier la production d'entropie dans le système. Nous allons dans un premier temps calculer la variation d'entropie au temps $n\tau$ et relier celle-ci à la variation d'énergie. En s'appuyant sur les résultats de la Section 3.3 on pourra alors déterminer la production d'entropie dans le système. Comme on l'a mentionné la variation d'entropie dépend a priori du choix de l'état de référence ω_{ref} . Pour ce dernier on va considérer le cas correspondant à l'état d'équilibre $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ du système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ couplé et dont la fonction caractéristique est donnée par (2.30).

Comme on l'a vu dans la Section 4.1.3 la définition de l'entropie relative de deux états nécessite de se placer dans la représentation standard de l'état de référence. On commence donc par décrire ci-dessous la représentation standard de l'état de référence mentionné ci-dessus. Pour cela on commence par décrire la représentation standard de l'état KMS découplé $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$. On en déduira ensuite celle de l'état $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$.

4.2.1 Représentation standard de $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$

On rappelle que $\tau_{\mathcal{C}}^t$ et $\tau_{\mathcal{R}}^t$ décrivent respectivement les dynamiques des systèmes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{R}$ découplés, voir la Section 1.4.1. On donne ici la représentation standard de l'état

$$\omega_{\text{ref}} = \omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}}.$$

Ici $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}}$ est l'état donné par la matrice densité

$$\rho_{\beta}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{\text{Tr}(e^{-\beta H_{\mathcal{C}}})} e^{-\beta H_{\mathcal{C}}}.$$

En notant

$$\tau_{0,\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t = \tau_{\mathcal{C}}^t \otimes \tau_{\mathcal{R}}^t \tag{4.6}$$

la dynamique du système découplé, le triplet $(\mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}, \tau_{0,\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t, \omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}})$ définit donc bien un système dynamique quantique et l'état $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$ est un état $(\tau_{0,\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t, \beta)$ -KMS. Comme on l'a mentionné à la fin de la Section 1.2.3 un état (τ^t, β) -KMS est également $(\sigma^t, -1)$ -KMS où $\sigma^t(A) = \tau^{-\beta t}(A)$. On en déduit que $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$ est un état $(\sigma_{0,\mathcal{C}+\mathcal{R}}, -1)$ -KMS où $\sigma_{0,\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ est la dynamique agissant sur $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$ et définie par

$$\begin{aligned} \sigma_{0,\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t(A) &= \tau_{\mathcal{C}}^{-\beta t} \otimes \tau_{\mathcal{R}}^{-\beta t}(A) \\ &= e^{-it\beta(H_{\mathcal{C}}+H_{\mathcal{R}})} A e^{it\beta(H_{\mathcal{C}}+H_{\mathcal{R}})}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Elle est appelée dynamique modulaire associée à $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$. Son intérêt apparaîtra dans la Section 4.3.

Remarque 4.25. On vérifie facilement que pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $f \in \mathfrak{f}$ on a

$$\begin{aligned} \omega_\beta^{\mathcal{C}} \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}} (W(c) \otimes W(f)) &= \omega_\beta^{\mathcal{C}} (W(c)) \times \omega_\beta^{\mathcal{R}} (W(f)) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}, \coth \left(\begin{pmatrix} \frac{\beta\theta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\varpi}{2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Comme on l'a vu dans la Section 4.1.2, afin d'obtenir une représentation standard de $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$ associée à $\omega_\beta^{\mathcal{C}} \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}}$ on commence par déterminer la représentation GNS de celui-ci. L'état $\omega_\beta^{\mathcal{C}} \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}}$ est un état produit, il suffit donc de déterminer la représentation de chacun des composants séparément.

La représentation de $\omega_\beta^{\mathcal{C}}$

La représentation GNS $(\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}}, \pi_{\mathcal{C}}, \Omega_{\mathcal{C},\beta})$ de $(\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}, \omega_\beta^{\mathcal{C}})$ est donnée par, voir l'Exemple 1.27,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}} &= \mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{F}_+(\mathbb{C}), \\ \pi_{\mathcal{C}} : \mathfrak{A}_{\mathcal{C}} = \mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C})) &\longrightarrow \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}}), \\ A &\longmapsto A \otimes \mathbb{1}, \\ \Omega_{\mathcal{C},\beta} &:= \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^{1/2} \phi_j \otimes \bar{\phi}_j. \end{aligned}$$

où $(\phi_j)_j$ est une base orthonormée de vecteurs propres de $\rho_\beta^{\mathcal{C}}$ et λ_j la valeur propre correspondante.

Remarque 4.26. La conjugaison complexe est la conjugaison usuelle sur $\mathbb{C}$ étendue ensuite à $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$, et on a en fait $\bar{\phi}_j = \phi_j$. Si on identifie $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ avec $L^2(\mathbb{R})$ comme dans la Remarque 1.37 la conjugaison complexe utilisée correspond à la conjugaison usuelle sur $L^2(\mathbb{R})$. Les ϕ_j sont alors les fonctions propres de l'oscillateur harmonique de fréquence θ et vérifient donc bien $\bar{\phi}_j = \phi_j$.

On peut alors vérifier que $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}) = \mathcal{B}(\mathcal{F}_+(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{1}$ et que la conjugaison modulaire $J_{\mathcal{C}} : \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}}$ est donnée par $J_{\mathcal{C}} : \phi \otimes \psi \mapsto \bar{\psi} \otimes \bar{\phi}$.

Enfin, le Liouvillien associé au système dynamique quantique $(\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}, \tau_{\mathcal{C}}^t, \omega_\beta^{\mathcal{C}})$ dans la représentation standard ci-dessus est, voir l'Exemple 4.15,

$$L_{\mathcal{C}} := H_{\mathcal{C}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{C}} - \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes H_{\mathcal{C}},$$

où on a utilisé le fait que $H_{\mathcal{C}}$ commute avec la conjugaison complexe choisie et donc $\overline{H_{\mathcal{C}}} = H_{\mathcal{C}}$.

La représentation de $\omega_\beta^{\mathcal{R}}$

La représentation GNS d'un gaz de bosons libres a été obtenue dans [AW63] et est appelée représentation d'Araki-Woods dans la littérature.

- L'espace de Hilbert est

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}} = \mathcal{F}_+(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \mathcal{F}_+(L^2(\mathbb{R}^3)).$$

- La représentation $\pi_{\mathcal{R}}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\pi_{\mathcal{R}} : W(\mathbf{f}) &\longrightarrow \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}}) \\ W(f) &\longmapsto W\left((1 + \varrho)^{1/2} f\right) \otimes W\left(\varrho^{1/2} \bar{f}\right)\end{aligned}$$

- où $\varrho = (e^{\beta\varpi} - 1)^{-1}$ et $\bar{f}$ désigne la conjugaison complexe usuelle sur $L^2(\mathbb{R}^3)$.
- Le vecteur représentatif est

$$\tilde{\Omega}_{\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{R}} \otimes \Omega_{\mathcal{R}},$$

où on rappelle que $\Omega_{\mathcal{R}}$ est le vecteur de vide de l'espace de Fock $\mathcal{F}_+(L^2(\mathbb{R}^3))$.

La conjugaison modulaire $J_{\mathcal{R}} : \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}}$ est ici aussi donnée par $J_{\mathcal{R}} : \phi \otimes \psi \mapsto \bar{\psi} \otimes \bar{\phi}$, le Liouvillien par

$$L_{\mathcal{R}} := H_{\mathcal{R}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{R}} - \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \otimes H_{\mathcal{R}},$$

et on notera $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}} := \pi_{\mathcal{R}}(\mathfrak{A}_{\mathcal{R}})''$ l'algèbre enveloppante associée à $\mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$.

La représentation de $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$

A partir des représentations décrites ci-dessus on obtient celle de $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$:

- l'espace de Hilbert de la représentation est

$$\tilde{\mathcal{H}} := \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}} \otimes \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}},$$

- la représentation est donnée par $\pi : \mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ avec

$$\pi(A \otimes B) := \pi_{\mathcal{C}}(A) \otimes \pi_{\mathcal{R}}(B),$$

- le vecteur représentatif

$$\Omega_0 = \Omega_{\mathcal{C},\beta} \otimes \tilde{\Omega}_{\mathcal{R}},$$

- la conjugaison est

$$J = J_{\mathcal{C}} \otimes J_{\mathcal{R}},$$

- l'algèbre est

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{M}_{\mathcal{R}},$$

- le cône $\mathcal{H}^+ \subset \tilde{\mathcal{H}}$ est obtenu comme dans la Section 4.1.2, i.e.

$$\mathcal{H}^+ = \{AJAJ\Omega_0, A \in \mathfrak{M}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}\}$$

Enfin le Liouvillien associé à la dynamique découplée $\tau_{0,\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t$ donnée par (4.6) est

$$L_0 := L_{\mathcal{C}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L_{\mathcal{R}},$$

tandis que celui associé à la dynamique modulaire $\sigma_{0,\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t$, (4.7), est

$$\tilde{L}_0 := -\beta L_0.$$

Comme dans les chapitres précédents il est utile d'étendre la représentation π aux opérateurs de champs qui ne sont pas à proprement parler des observables. Cette extension repose sur la notion d'opérateur affilié à une algèbre de von Neumann.

Définition 4.27. *Un opérateur auto-adjoint P agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est affilié à $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si et seulement si $e^{itP} \in \mathfrak{M}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

La notion d'opérateur affilié est plus générale que celle donnée ici, voir par exemple [BR1]. Comme nous ne l'utiliserons que pour les opérateurs de champs qui sont auto-adjoints la définition ci-dessus sera suffisante. On vérifie facilement que pour tout $c \oplus f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ les opérateurs de la forme $\phi(c \oplus f)$ sont affiliés à $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$. La représentation π s'étend alors à ces opérateurs par

$$\pi(\phi(c \oplus f)) = \phi(c) \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}}} + \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{C}}} \otimes \left(\phi \left((1 + \varrho)^{1/2} f \right) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \phi \left(\varrho^{1/2} f \right) \right). \quad (4.8)$$

Remarque 4.28. *Comme nous l'avons indiqué dans la Section 1.1.3, pour $c \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathfrak{f}$, on a*

$$\mathbb{U}_F(W(c) \otimes W(f)) \mathbb{U}_F^* = W(c \oplus f),$$

où $\mathbb{U}_F : \mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{F}_+(L^2(\mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathcal{F}_+(\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^3))$ est défini comme dans (1.6). Pour simplifier les notations nous noterons toujours $\pi \circ \pi_F$ où $\pi_F : \mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \ni A \mapsto \mathbb{U}_F^* A \mathbb{U}_F \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$ et ainsi, pour tout $c \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathfrak{f}$

$$\pi(W(c \oplus f)) := W(c) \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes W\left((1 + \varrho)^{1/2} f\right) \otimes W\left(\varrho^{1/2} f\right).$$

4.2.2 La représentation standard de $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$

La construction de la représentation standard pour $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ va reposer sur celle de $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$ et de la théorie de perturbation des états KMS. On rappelle que $\tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t$ est la dynamique du système $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ couplé engendrée par $H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ (voir le Théorème 2.23) et que $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ est un état $(\tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t, \beta)$ -KMS.

Le théorème suivant fournit une représentation standard de $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$ associée à $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ à partir de celle associée à $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}} \otimes \omega_{\beta}^{\mathcal{R}}$. On rappelle que le couplage entre la cavité et le réservoir est donné par les deux termes $H_{I_{\mathcal{R}}}$ et R , voir la Section 1.4.1, et que λ désigne la constante de couplage.

Théorème 4.29. ([Ko11a], Thm III.2 et [Ko11b]) *Soit $\beta > 0$. Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout $0 \leq |\lambda| < \lambda_0$,*

1. *les opérateurs*

$$L_0 + \pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R) \quad \text{et} \quad L_0 + \pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R) - J\pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R)J$$

sont essentiellement auto-adjoints sur $D(L_0) \cap D(\pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R))$ et $D(L_0) \cap D(\pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R)) \cap D(J\pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R)J)$,

2. $\Omega_0 \in D\left(e^{-\beta(L_0 + \pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R))/2}\right)$ *et*

$$\Omega_{\lambda} := \frac{e^{-\beta(L_0 + \pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R))/2} \Omega_0}{\|e^{-\beta(L_0 + \pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R))/2} \Omega_0\|} \in \mathcal{H}^+ \quad (4.9)$$

est le vecteur représentatif de $\omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ dans $\mathcal{H}^+$, i.e.

$$\omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(A) = \langle \Omega_{\lambda}, \pi(A) \Omega_{\lambda} \rangle, \quad \forall A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}},$$

et est cyclique pour $\pi(\mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}})''$.

Remarque 4.30. Le point 1. est prouvé dans [Ko11b] en utilisant le Théorème du commutateur de Nelson, de façon similaire à celle pour l'opérateur $H_{C+\mathcal{R}}$ dans [Ar81a]. Voir aussi le Théorème 4.46 dans la Section 4.4 ci-dessous.

Le fait que le vecteur $\Omega_0 \in D(e^{-\beta(L_0 + \pi(H_{I_{\mathcal{R}} + R)})/2})$ est également prouvé dans [Ko11b]. Il découle de la théorie de perturbation des états KMS d'Araki que le vecteur Ω_λ définit un état $(\tau_{C+\mathcal{R}}^t, \beta)$ -KMS. Le fait qu'il coïncide avec $\omega_\beta^{C+\mathcal{R}}$ est l'objet du Théorème III.2 dans [Ko11a].

Le théorème ci-dessus montre que $(\tilde{\mathcal{H}}, \pi, \Omega_\lambda)$ est une représentation GNS de $(\mathfrak{A}_C \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}, \omega_\beta^{C+\mathcal{R}})$. Par ailleurs, comme $\Omega_\lambda \in \mathcal{H}^+$, la Remarque 4.12 assure que la conjugaison modulaire et le cône associé sont également J et $\mathcal{H}^+$, autrement dit $(\tilde{\mathcal{H}}, \pi, J, \mathcal{H}^+)$ fournit une représentation standard associée à l'état $\omega_\beta^{C+\mathcal{R}}$. Enfin le Liouvillien correspondant à la dynamique couplée $\tau_{C+\mathcal{R}}^t$ est donné par [DJP03]

$$L_\lambda = L_0 + \pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R) - J\pi(H_{I_{\mathcal{R}}} + R)J.$$

Comme dans la section précédente on peut définir la dynamique modulaire $\sigma_{\lambda, C+\mathcal{R}}^t$ associée à $\omega_\beta^{C+\mathcal{R}}$. Puisque ce dernier est un état $(\tau_{C+\mathcal{R}}^t, \beta)$ -KMS on a simplement $\sigma_{\lambda, C+\mathcal{R}}^t := \tau_{C+\mathcal{R}}^{-\beta t}$, $\omega_\beta^{C+\mathcal{R}}$ est ainsi $(\sigma_{\lambda, C+\mathcal{R}}^t, -1)$ -KMS et le Liouvillien associée à la dynamique modulaire couplée est

$$\tilde{L}_\lambda = -\beta L_\lambda.$$

4.2.3 Représentation des états du système total

On décrit brièvement la représentation pour l'état du système total, atomes inclus, correspondant aux états du système cavité+réservoir étudiés dans les Sections 4.2.1 et 4.2.2, i.e. aux états

$$\omega_0 = \omega_\beta^C \otimes \omega_\beta^{\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \omega_{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad \omega_\lambda = \omega_\beta^{C+\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \omega_{\mathcal{E}}.$$

Comme ces états correspondent à des états produits, leur représentation est obtenue à partir de celles des différents composants.

La représentation de $\omega_{\mathcal{E}}$

La représentation d'un atome est obtenue de façon similaire à celle de $\omega_{\beta_C}^C$ en utilisant l'Exemple 1.27. Si $(|-\rangle, |+\rangle)$ est la base canonique de $\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \mathbb{C}^2$, et la conjugaison complexe est la conjugaison usuelle sur $\mathbb{C}^2$ alors la représentation de $(\mathfrak{A}_{\mathcal{E}}, \tau_{\mathcal{E}}^t, \omega_{\mathcal{E}})$ est donnée par

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{E}} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2,$$

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{E}} : \mathcal{B}(\mathbb{C}^2) &\longrightarrow \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{E}}) \\ A &\longmapsto A \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

$$\Omega_{\mathcal{E}} := \sqrt{1-p}|-\rangle \otimes |-\rangle + \sqrt{p}|+\rangle \otimes |+\rangle,$$

$\mathfrak{M}_{\mathcal{E}} = \pi_{\mathcal{E}}(\mathfrak{A}_{\mathcal{E}}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^2) \otimes \mathbb{1}$, la conjugaison modulaire $J_{\mathcal{E}} : \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{E}}$ est donnée par $J_{\mathcal{E}} : \phi \otimes \psi \mapsto \bar{\psi} \otimes \bar{\phi}$, le cône $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}^+$ est $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}^+ = \{AJ_{\mathcal{E}}AJ_{\mathcal{E}}\Omega_{\mathcal{E}}, A \in \mathfrak{M}_{\mathcal{E}}\}$ et le Liouvillien

$$L_{\mathcal{E}} := H_{\mathcal{E}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}} - \mathbb{1}_{\mathcal{E}} \otimes H_{\mathcal{E}}.$$

Le système total

La représentation standard des états ω_0 et ω_λ est alors donnée par $(\tilde{\mathcal{H}}^{(M)}, \pi^{(M)}, J^{(M)}, \mathcal{H}^{+, (M)})$ où

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}^{(M)} &= \tilde{\mathcal{H}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{E}}, \\ \pi^{(M)} &= \pi \otimes \bigotimes_{j=1}^M \pi_{\mathcal{E}}, \\ J^{(M)} &= J \otimes \bigotimes_{j=1}^M J_{\mathcal{E}}, \\ \mathcal{H}^{+, (M)} &= \mathcal{H}^+ \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathcal{H}_{\mathcal{E}}^+.\end{aligned}$$

Le vecteur représentatif de ω_0 est

$$\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0 \otimes \bigotimes_{j=1}^M \Omega_{\mathcal{E}},$$

et celui de ω_λ est

$$\tilde{\Omega}_\lambda = \Omega_\lambda \otimes \bigotimes_{j=1}^M \Omega_{\mathcal{E}}.$$

Le Liouvillien du système dynamique $(\mathfrak{A}^{(M)}, \tau_{0, \mathcal{C}+\mathcal{R}}^t \otimes \bigotimes_{j=1}^M \tau_{\mathcal{E}}^t, \omega_0)$ est

$$L_0^{(M)} = L_0 \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{E}}} + \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{H}}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M L_{\mathcal{E}},$$

et celui de $(\mathfrak{A}^{(M)}, \tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t \otimes \bigotimes_{j=1}^M \tau_{\mathcal{E}}^t, \omega_\lambda)$ est

$$L_\lambda^{(M)} = L_\lambda \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{E}}} + \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{H}}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M L_{\mathcal{E}}.$$

Remarque 4.31. Comme $L_{\mathcal{E}}\Omega_{\mathcal{E}} = 0$, la relation (4.9) donne

$$\tilde{\Omega}_\lambda = \frac{e^{-\beta(L_0^{(M)} + \pi^{(M)}(H_{I_{\mathcal{R}}} + R))/2} \tilde{\Omega}_0}{\left\| e^{-\beta(L_0^{(M)} + \pi^{(M)}(H_{I_{\mathcal{R}}} + R))/2} \tilde{\Omega}_0 \right\|}.$$

On rappelle que la matrice densité $\rho_{\mathcal{E}}$ décrivant l'état initial $\omega_{\mathcal{E}}$ d'un atome est donnée par (1.25). On voit aisément que cela correspond à un état $(\tau_{\mathcal{E}}, \beta_{\mathcal{E}})$ -KMS avec

$$\beta_{\mathcal{E}} = \frac{\log(p) - \log(1-p)}{E}.$$

Tout comme dans les sections précédentes, les dynamiques

$$\sigma_0^t := \sigma_{0, \mathcal{C}+\mathcal{R}}^t \otimes \bigotimes_{j=1}^M \tau_{\mathcal{E}}^{-\beta_{\mathcal{E}} t} = \tau_{\mathcal{C}}^{-\beta t} \otimes \tau_{\mathcal{R}}^{-\beta t} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \tau_{\mathcal{E}}^{-\beta_{\mathcal{E}} t} \quad (4.10)$$

et

$$\sigma_{\lambda}^t := \sigma_{\lambda, \mathcal{C}+\mathcal{R}}^t \otimes \bigotimes_{j=1}^M \tau_{\mathcal{E}}^{-\beta_{\mathcal{E}} t} = \tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t \otimes \bigotimes_{j=1}^M \tau_{\mathcal{E}}^{-\beta_{\mathcal{E}} t} \quad (4.11)$$

sont telles que ω_0 et ω_{λ} sont respectivement des états $(\sigma_0^t, -1)$ et $(\sigma_{\lambda}^t, -1)$ -KMS. Elles sont appelées dynamiques modulaires associées et leurs Liouvilliens sont

$$\tilde{L}_0^{(M)} = \tilde{L}_0 \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{E}}} - \beta_{\mathcal{E}} \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{H}}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M L_{\mathcal{E}},$$

et

$$\tilde{L}_{\lambda}^{(M)} = \tilde{L}_{\lambda} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{E}}} - \beta_{\mathcal{E}} \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{H}}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M L_{\mathcal{E}}.$$

4.3 Généralisation de la formule de production d'entropie

L'étude de la variation d'entropie nécessite de calculer des quantités de la forme

$$\text{Ent}(\mu_U | \omega) - \text{Ent}(\mu | \omega)$$

où μ et ω sont deux états, U un unitaire et μ_U est l'état défini par $\mu_U(A) = \mu(U^*AU)$. Dans le cas qui nous intéresse, ω sera un des états de référence considérés dans la section précédente, μ l'état initial du système et U le propagateur unitaire de la dynamique, voir la Définition 4.23 et (4.5). L'approche pour calculer de telles quantités est la formule dite de production d'entropie.

Théorème 4.32. [JP03] Soit $\mathfrak{A}$ une C^* -algèbre, σ^t une dynamique sur $\mathfrak{A}$ dont le générateur sera noté δ_{σ} et ω un état $(\sigma, -1)$ -KMS. Soit μ un état ω -normal et $U \in \mathfrak{A} \cap D(\delta_{\sigma})$ un opérateur unitaire, on note $\mu_U(A) := \mu(U^*AU)$ pour $A \in \mathfrak{A}$. Alors on a

$$\text{Ent}(\mu_U | \omega) = \text{Ent}(\mu | \omega) - i \mu(U^* \delta_{\sigma}(U)). \quad (4.12)$$

Le fait que dans le théorème ci-dessus l'état ω soit un état KMS joue un rôle crucial. On voit ici apparaître l'importance des dynamiques modulaires σ_0^t et σ_{λ}^t définies en (4.10)-(4.11).

Dans notre modèle la C^* -algèbre est $\mathfrak{A}^{(M)}$, l'état de référence ω_{λ} , la dynamique est la dynamique modulaire σ_{λ}^t , et l'opérateur unitaire U est le propagateur

$$U_n = e^{-i\tau \tilde{H}_n} \dots e^{-i\tau \tilde{H}_1}.$$

Le générateur de σ_{λ}^t est

$$A \rightarrow i \left[\beta H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} + \beta_{\mathcal{E}} \sum_{j=1}^M H_{\mathcal{E}}, A \right],$$

et

$$\left[\beta H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} + \beta \varepsilon \sum_{j=1}^M H_{\mathcal{E}}, U_n \right]$$

n'est pas borné (plus de détails sont donnés dans la Section 4.4, Lemme 4.45). Il faut donc au préalable généraliser le Théorème 4.32 au cas d'un opérateur unitaire U n'appartenant pas nécessairement à $D(\delta_\sigma)$.

La preuve de (4.12) donnée dans [JP03] repose sur la théorie d'Araki de perturbation des états KMS [A77].

Lemme 4.33. *Soient $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$ est une algèbre de von Neumann sous forme standard, σ^t une dynamique sur $\mathfrak{M}$, ω un état (σ^t, β) -KMS fidèle, Ω le vecteur représentatif de ω dans $\mathcal{H}^+$, L le Liouvillien associé à $(\mathfrak{M}, \sigma^t, \omega)$, et $P \in \mathfrak{M}$ un élément auto-adjoint. Alors*

1. $\Omega \in D(e^{-\beta(L+P)/2})$.
2. $\Omega_P := e^{-\beta(L+P)/2} \Omega \in \mathcal{H}^+$.
3. $\omega_P(A) := \frac{\langle \Omega_P, A \Omega_P \rangle}{\|\Omega_P\|^2}$ définit un état (σ_P^t, β) -KMS où σ_P^t est la dynamique engendrée par $L + P$, i.e.

$$\sigma_P^t(A) = e^{it(L+P)} A e^{-it(L+P)}, \quad \forall A \in \mathfrak{M},$$

et $L_P = L + P - JPJ$ est le Liouvillien associé.

4. Pour tout état μ qui est ω -normal on a

$$\text{Ent}(\mu | \omega_P) = \text{Ent}(\mu | \omega) - \beta \mu(P) - \log \|\Omega_P\|^2. \quad (4.13)$$

Remarque 4.34. Cette formule a été prouvée dans le cas où μ est un état fidèle par [A76, A77] et a été généralisée pour μ un état ω -normal quelconque par [Do90].

Remarque 4.35. La dynamique perturbée σ_P peut également être définie à partir de σ et d'une série de Dyson

$$\sigma_P^t(A) = \sum_{n \geq 0} i^n \int_{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_1 \leq t} [\sigma^{t_n}(P), [\dots, [\sigma^{t_1}(P), \sigma^t(A)] \dots]] dt_1 \dots dt_n.$$

Si δ est le générateur de σ alors celui de σ_P a le même domaine que δ et est donné par $\delta_P(A) = \delta(A) + i[P, A]$.

Afin d'obtenir la généralisation de la formule (4.12) dont nous aurons besoin on va au préalable étendre (4.13) au cas de certaines perturbations P non-bornées. La théorie de perturbation des états KMS (propriétés 1. à 3. du Lemme 4.33) au cas de perturbations non-bornées a été étudiée par Dereziński-Jakšić-Pillet.

Théorème 4.36. [DJP03] *Soient $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{H}^+)$ est une algèbre de von Neumann sous forme standard, σ^t une dynamique sur $\mathfrak{M}$, ω un état (σ^t, β) -KMS fidèle, Ω le vecteur représentatif de ω dans $\mathcal{H}^+$, L le Liouvillien associé à $(\mathfrak{M}, \sigma^t, \omega)$, et P auto-adjoint affilié à $\mathfrak{M}$. On suppose que*

- $L + P$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(L) \cap D(P)$,
- L_P est essentiellement auto-adjoint sur $D(L) \cap D(P) \cap D(JPJ)$,

- $\|e^{-\beta P/2}\Omega\| < +\infty$.

On définit

$$\sigma_P^t(A) := e^{it(L+P)} A e^{-it(L+P)}, \quad \forall A \in \mathfrak{M}.$$

Alors on a

1. $\Omega \in D(e^{-\beta(L+P)/2})$.
2. $\Omega_P := e^{-\beta(L+P)/2}\Omega \in \mathcal{H}^+$.
3. $\omega_P(A) := \frac{\langle \Omega_P, A\Omega_P \rangle}{\|\Omega_P\|^2}$ définit un état (σ_P^t, β) -KMS et $L_P = L + P - JPJ$ est le Liouvillien associé.
4. Ω_P est cyclique et séparateur.
5. $\log \Delta_{\Omega_P, \Omega} = -\beta L - \beta P$.
6. On a l'inégalité de Golden-Thompson

$$\|\Omega_P\| \leq \|e^{-\beta P/2}\Omega\|.$$

7. Pour tout $0 \leq c \leq 1$, cP satisfait les hypothèses du théorème, ainsi Ω_{cP} est bien défini. De plus, $\lim_{c \rightarrow 0^+} \|\Omega_{cP} - \Omega\| = 0$.

L'idée de la preuve de ce théorème est d'approcher P par une suite $(P_n)_n$ d'opérateurs bornés puis d'utiliser des arguments de passage à la limite. On va procéder de façon similaire pour étendre (4.13).

Lemme 4.37. *On reprend les hypothèses et notations du Théorème 4.36. Soit μ un état ω -normal et fidèle. On note $\Psi \in \mathcal{H}^+$ son vecteur représentatif. On suppose que $\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(\log \Delta_{\Omega, \Psi}) \cap D(P)$ et que $\Psi \in D(P)$. Alors*

$$\text{Ent}(\mu|\omega_P) = \text{Ent}(\mu|\omega) - \beta\mu(P) - \log \|\Omega_P\|^2.$$

Remarque 4.38. *L'hypothèse sur l'auto-adjonction de $\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P$ apparait naturellement du fait que l'entropie relative $\text{Ent}(\mu|\omega)$ est définie à partir de l'opérateur modulaire relatif $\Delta_{\Omega, \Psi}$, voir (4.14).*

Dans le cas où $\mu = \omega$ on a $\Delta_{\Omega, \Omega} = e^{-\beta L}$ (voir (4.3)). Ainsi la condition $\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(\log \Delta_{\Omega, \Psi}) \cap D(P)$ se ramène à $L + P$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(L) \cap D(P)$. On verra plus loin, Remarque 4.41, que cette situation est en fait un peu plus générale.

Remarque 4.39. *La restriction à μ fidèle n'est probablement pas nécessaire en ajustant l'hypothèse sur l'auto-adjonction de $\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P$ ($\Delta_{\Omega, \Psi}$ a alors un noyau non trivial). Elle permet cependant de simplifier la preuve et nous suffira par la suite où, tout comme dans la Section 3.3, on considérera des états analytiques $\mu \in \mathfrak{S}_a$, voir la Définition 3.8.*

Preuve. La preuve de (4.13) repose sur l'identité

$$\log \Delta_{\Omega_P, \Psi} = \log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P. \quad (4.14)$$

Celle-ci a été prouvée dans [A77] dans le cas où P est borné. On va montrer qu'elle reste valable sous nos hypothèses et comment on en déduit alors (4.13).

Etape 1 : De (4.14) à (4.13).

On note $\tilde{\Omega}_P := \|\Omega_P\|^{-1}\Omega_P$. $\tilde{\Omega}_P$ est le vecteur représentatif de ω_P dans $\mathcal{H}^+$. D'après le Théorème 4.36 ce vecteur est séparateur, on a donc $s_{\Omega_P} = \mathbb{1}$ et ainsi

$$\text{Ent}(\mu|\omega_P) = \langle \Psi, \log \Delta_{\tilde{\Omega}_P, \Psi} \Psi \rangle$$

Par ailleurs, en utilisant la Proposition 4.17 et (4.14) on a

$$\begin{aligned} \log \Delta_{\tilde{\Omega}_P, \Psi} &= \log (\|\Omega_P\|^{-2} \Delta_{\Omega_P, \Psi}) \\ &= \log \Delta_{\Omega_P, \Psi} - \log \|\Omega_P\|^2 \\ &= \log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P - \log \|\Omega_P\|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Ent}(\mu|\omega_P) &= \langle \Psi, (\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P - \log \|\Omega_P\|^2) \Psi \rangle \\ &= \text{Ent}(\mu|\omega) - \beta \mu(P) - \log \|\Omega_P\|^2. \end{aligned}$$

Etape 2 : Preuve de (4.14).

Dans le cas particulier $\mu = \omega$, l'identité (4.14) s'écrit

$$\log \Delta_{\tilde{\Omega}_P, \Omega} = \log \Delta_{\Omega, \Omega} - \beta P = -\beta L - \beta P,$$

qui n'est rien d'autre que le 5. du Théorème 4.36. Pour démontrer le cas général on suit la méthode utilisée dans [DJP03]. L'idée est d'approcher P par une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs bornés, d'utiliser (4.14) pour P_n et de passer à la limite.

On définit

$$P_n := \mathbb{1}_{[-n, n]}(P)P, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où $\mathbb{1}_{[-n, n]}(P)$ est la projection spectrale de P associée à l'intervalle $[-n, n]$. Ainsi P_n converge vers P au sens fort de la résolvante, et comme P_n est borné on a pour tout n

$$\log \Delta_{\Omega_{P_n}, \Psi} = \log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P_n, \tag{4.15}$$

et on va chercher à "passer à la limite" $n \rightarrow +\infty$.

1. Pour tout $\Phi \in D(P)$ on a $P_n \Phi \rightarrow P \Phi$ et donc pour tout $\Phi \in D(\log \Delta_{\Omega, \Psi}) \cap D(P)$ on a

$$(\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P_n) \Phi \rightarrow (\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P) \Phi.$$

Comme $\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(\log \Delta_{\Omega, \Psi}) \cap D(P)$, la Proposition 4.20 permet d'en déduire que $\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P_n$ converge vers $\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P$ au sens fort de la résolvante.

2. On va montrer que le membre de gauche de (4.15) converge fortement au sens de la résolvante vers $\log \Delta_{\Omega_P, \Psi}$. Le point 1. assure qu'il converge au sens fort de la résolvante et il

reste à justifier que sa limite est bien $\log \Delta_{\Omega_P, \Psi}$, ce qui en utilisant la Proposition 4.19 est équivalent à la convergence au sens fort de la résolvante de $\Delta_{\Omega_{P_n}, \Psi}$ vers $\Delta_{\Omega_P, \Psi}$. On va pour cela utiliser la Proposition 4.22 avec $\Omega_n = \Omega_{P_n}$ et $\Psi_n \equiv \Psi$. Il reste donc à justifier que

$$w - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega_{P_n} = \Omega_P. \quad (4.16)$$

On va pour cela utiliser la Proposition 4.21 avec $A_n = e^{-\beta(L+P_n)/2}$, $A = e^{-\beta(L+P)/2}$ et $\psi_n \equiv \psi = \Omega$.

La convergence au sens fort de la résolvante de $L + P_n$ vers $L + P$, et donc de A_n vers A , se montre comme au 1. On a évidemment $w - \lim \psi_n = \psi$. Enfin, comme P_n vérifie les hypothèses du Théorème 4.36, l'inégalité de Golden-Thompson nous donne

$$\|\Omega_{P_n}\| \leq \|e^{-\beta P_n/2} \Omega\|.$$

Or par hypothèse $\Omega \in D(e^{-\beta P/2})$ et donc

$$e^{-\beta P_n/2} \Omega = \mathbb{1}_{[-n, n]}(P) e^{-\beta P/2} \Omega \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\beta P/2} \Omega.$$

La suite $\Omega_{P_n} = e^{-\beta(L+P_n)/2} \Omega = A_n \psi_n$ est donc bornée. D'après la Proposition 4.21 on a donc $w - \lim A_n \psi_n = A \psi$ ce qui est exactement (4.16). $\square$

Dans la pratique il peut être difficile de vérifier que $\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(\log \Delta_{\Omega, \Psi}) \cap D(P)$. La difficulté est qu'il n'est pas forcément aisé d'avoir une expression simple pour l'opérateur modulaire relatif $\Delta_{\Omega, \Psi}$. Dans la section 4.4 on sera amené à considérer le cas où $\omega = \omega_\beta^{C+\mathcal{R}}$ et $\mu \in \mathfrak{S}_a$, i.e. de la forme $\mu(A) = \omega(W(u)AW(u)^*)$. On pourra alors utiliser le lemme suivant.

Lemme 4.40. *Soit $(\mathfrak{A}, \sigma^t, \omega)$ un système dynamique quantique tel que ω soit un état (σ^t, β) -KMS fidèle, $U \in \mathfrak{A}$ un unitaire et $\mu = \omega_U$ l'état défini par $\mu(A) = \omega(U^*AU)$. Si $(\mathcal{H}, \pi, J, \mathcal{H}^+)$ est une représentation standard associée à ω , Ω le vecteur représentatif de ω dans $\mathcal{H}^+$ et L le Liouvillien associé à $(\mathfrak{A}, \sigma^t, \omega)$, alors le vecteur représentatif de μ dans $\mathcal{H}^+$ est*

$$\Psi = \pi(U)J\pi(U)\Omega,$$

et on a

$$\log \Delta_{\Omega, \Psi} = \beta J\pi(U)L\pi(U^*)J = -\beta J\pi(U)JLJ\pi(U^*)J. \quad (4.17)$$

Remarque 4.41. *Pour un état μ de la forme ci-dessus la preuve de l'essentielle auto-adjonction de $\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P$ se ramène donc à celle $J\pi(U)JLJ\pi(U^*)J + P$ et ainsi à celle de $L + J\pi(U^*)JPJ\pi(U)J$. Comme P est affilié à $\mathfrak{M}$ et que $J\pi(U)J \in \mathfrak{M}$ on a $J\pi(U^*)JPJ\pi(U)J = P$ et l'essentielle auto-adjonction de $\log \Delta_{\Omega, \Psi} - \beta P$ se ramène à celle de $L + P$.*

Preuve. 1. On rappelle que J est une involution anti-unitaire, en particulier

$$\langle \Phi_1, J\Phi_2 \rangle = \langle \Phi_2, J\Phi_1 \rangle, \quad \forall \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{H}, \quad (4.18)$$

et vérifie $J\Omega = \Omega$ et $J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'$. Ainsi on a, pour tout $A \in \mathfrak{A}$,

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \langle \Omega, \pi(U^*AU)\Omega \rangle \\
&= \langle J\Omega, \pi(U^*AU)J\Omega \rangle \\
&= \langle J\pi(U^*AU)J\Omega, \Omega \rangle \\
&= \langle J\pi(U^*AU)J\Omega, \pi(U^*U)\Omega \rangle \\
&= \langle \pi(U)J\pi(U^*AU)J\Omega, \pi(U)\Omega \rangle \\
&= \langle J\pi(U^*AU)J\pi(U)\Omega, \pi(U)\Omega \rangle \\
&= \langle J\pi(U)\Omega, \pi(U^*AU)J\pi(U)\Omega \rangle \\
&= \langle \pi(U)J\pi(U)\Omega, \pi(A)\pi(U)J\pi(U)\Omega \rangle
\end{aligned}$$

où on a utilisé (4.18) aux 3e et 7e lignes, et le fait que $J\pi(U^*AU)J \in \mathfrak{M}'$ à la 6e ligne. Par définition de $\mathcal{H}^+$, voir (4.1), le vecteur $\Psi = \pi(U)J\pi(U)\Omega$ est dans $\mathcal{H}^+$ et est donc l'unique vecteur représentatif de μ dans celui-ci.

2. On commence par déterminer $\Delta_{\Psi,\Omega}$. On utilisera ensuite la Proposition 4.18. Par définition, pour tout $A \in \mathfrak{A}$ on a

$$\begin{aligned}
S_{\Psi,\Omega}\pi(A)\Omega &= \pi(A)^*\Psi \\
&= \pi(A)^*\pi(U)J\pi(U)J\Omega \\
&= J\pi(U)J\pi(A)^*\pi(U)\Omega \\
&= J\pi(U)JS_{\Omega}\pi(U^*)\pi(A)\Omega \\
&= J\pi(U)\Delta_{\Omega}^{1/2}\pi(U^*)\pi(A)\Omega,
\end{aligned}$$

où on a utilisé $J\Omega = \Omega$ à la 1e ligne, $J\pi(U)J \in \mathfrak{M}'$ à la 2e et $S_{\Omega} = J\Delta_{\Omega}^{1/2}$ à la 4e. Comme ω est un état (σ^t, β) -KMS on a de plus $\Delta_{\Omega} = e^{-\beta L}$ et donc

$$S_{\Psi,\Omega}\pi(A)\Omega = J\pi(U)e^{-\beta L/2}\pi(U^*)\pi(A)\Omega.$$

Comme $\pi(U)$ est unitaire, $\pi(U)e^{-\beta L/2}\pi(U^*)$ est auto-adjoint positif et on en déduit que

$$\Delta_{\Psi,\Omega} = \pi(U)e^{-\beta L}\pi(U^*) = e^{-\beta\pi(U)L\pi(U^*)}.$$

Finalement (4.17) découle de la Proposition 4.18 et où on a utilisé (4.2) pour obtenir la deuxième égalité. $\square$

Finalement on peut généraliser le Théorème 4.32.

Théorème 4.42. *Soient $(\mathfrak{A}, \sigma^t, \omega)$ un système dynamique quantique tel que ω soit un état $(\sigma^t, -1)$ -KMS fidèle, μ un état ω -normal fidèle et $U \in \mathfrak{A}$ un unitaire. On note $(\mathcal{H}, \pi, J, \mathcal{H}^+)$ une représentation standard associé à ω , Ω le vecteur représentatif de ω dans $\mathcal{H}^+$, Ψ celui de μ et L le Liouvillien associé à $(\mathfrak{A}, \sigma^t, \omega)$. On suppose que $-iU^*\delta_{\sigma}(U)$ est affilié à $\mathfrak{A}$ où δ_{σ} est le générateur de σ^t , et si $P := \pi(-iU^*\delta_{\sigma}(U))$ on suppose que*

- $L + P$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(L) \cap D(P)$,
- $L_P = L + P - JPJ$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(L) \cap D(P) \cap D(JPJ)$,

- $\|e^{P/2}\Omega\| < +\infty$,
- $\log \Delta_{\Omega,\Psi} + P$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(\log \Delta_{\Omega,\Psi}) \cap D(P)$,
- $\Psi \in D(P)$.

Alors

$$\text{Ent}(\mu_U | \omega) = \text{Ent}(\mu | \omega) + \mu(-iU^* \delta_\sigma(U)),$$

où on rappelle que $\mu_U(A) := \mu(U^*AU)$.

Preuve. Cette preuve est similaire à celle du Théorème 4.32 dans [JP03].

La Proposition 4.17 donne

$$\text{Ent}(\mu_U | \omega) = \text{Ent}(\mu | \omega_{U*}).$$

et on note que d'après le Lemme 4.40 le vecteur représentatif de l'état ω_{U*} est

$$\Omega_{U*} = \pi(U^*)J\pi(U^*)\Omega.$$

D'après le Théorème 4.36, l'état

$$\omega_P(A) := \frac{\langle \Omega_P, A\Omega_P \rangle}{\|\Omega_P\|^2}, \quad \Omega_P := e^{(L+P)/2}\Omega,$$

est $(\sigma_P^t, -1)$ -KMS où σ_P^t est la dynamique engendrée par $L + P$. L'idée est de montrer que $\omega_{U*} = \omega_P$ et de pouvoir ainsi appliquer le Lemme 4.37.

Soient $\mathcal{T}^t := e^{it(L+P)}e^{-itL}$ et $\mathfrak{T}^t := \pi(U^*\sigma^t(U)) = \pi(U^*)e^{itL}\pi(U)e^{-itL}$. D'une part

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}^t = i\mathcal{T}^t e^{itL}Pe^{-itL}, \quad \mathcal{T}^0 = \mathbb{1},$$

et, par définition de L ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathfrak{T}^t &= \pi(U^*\sigma^t(\delta_\sigma(U))) \\ &= \pi(U^*)e^{itL}\pi(\delta_\sigma(U))e^{-itL} \\ &= \mathfrak{T}^t e^{itL}\pi(U^*)\pi(\delta_\sigma(U))e^{-itL} \\ &= i\mathfrak{T}^t e^{itL}Pe^{-itL}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathfrak{T}^0 = \mathbb{1}$ on en déduit que pour tout t on a $\mathcal{T}^t = \mathfrak{T}^t$ et donc que

$$e^{it(L+P)}\Omega = \mathcal{T}^t e^{itL}\Omega = \mathfrak{T}^t e^{itL}\Omega = \pi(U^*)e^{itL}\pi(U)\Omega. \quad (4.19)$$

Vu la définition de Ω_P l'idée va être d'effectuer une continuation analytique de l'identité ci-dessus jusqu'à $t = -i/2$. On utilise pour cela la proposition suivante.

Proposition 4.43. ([DJP03], Prop. A.2.) Soit H un opérateur auto-adjoint et il existe $s > 0$ tel que $\Omega \in D(e^{sH})$. Alors $z \rightarrow e^{zH}\Omega$ est analytique dans la bande $0 < \text{Re}(z) < s$, continue en norme sur sa fermeture et

$$\|e^{zH}\Omega\| \leq \|e^{sH}\Omega\|^{\text{Re}(z)/s} \|\Omega\|^{1-\text{Re}(z)/s}.$$

D'après le Théorème 4.36, $\Omega \in D(e^{(L+P)/2})$ donc la fonction $z \mapsto e^{iz(L+P)}\Omega$ est analytique dans la bande $-\frac{1}{2} < \text{Im}(z) < 0$ et est fortement continue sur sa fermeture. Ainsi la continuation analytique de (4.19) jusqu'à $z = -\frac{i}{2}$ donne

$$\Omega_P = e^{(L+P)/2}\Omega = \pi(U^*)e^{L/2}\pi(U)\Omega.$$

Comme ω est $(\sigma^t, -1)$ -KMS et que L est le Liouvillien associé on a $\Delta_\Omega = e^L$ et donc

$$e^{L/2} = \Delta_\Omega^{1/2} = JS_\Omega.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\Omega_P &= \pi(U^*)JS_\Omega\pi(U)\Omega, \\ &= \pi(U^*)J\pi(U^*)\Omega \\ &= \Omega_{U*}.\end{aligned}$$

On a donc bien $\omega_{U*} = \omega_P$ et comme Ω_{U*} est le vecteur représentatif de l'état ω_{U*} il est de norme 1. Le Lemme 4.37 donne donc finalement (on a ici $\beta = -1$)

$$\begin{aligned}\text{Ent}(\mu_U | \omega) &= \text{Ent}(\mu | \omega_{U*}) \\ &= \text{Ent}(\mu | \omega_P) \\ &= \text{Ent}(\mu | \omega) + \langle \Psi, P\Psi \rangle - \log \|\Omega_P\|^2 \\ &= \text{Ent}(\mu | \omega) + \mu(-iU^*\delta_\sigma(U)).\end{aligned}$$

□

4.4 Application au modèle

Dans cette section on va calculer la variation d'entropie relative et la production d'entropie par unité de temps, voir la Définition 4.23, en prenant comme état de référence

$$\omega_\lambda = \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \omega_{\mathcal{E}_j}.$$

On relie aussi ces variations d'entropie aux variations d'énergie étudiées dans la Section 3.3.

Etant donné un état initial μ sur $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \otimes \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}$ et $\tilde{\mu}$ l'état défini sur $\mathfrak{A}^{(M)}$ par (4.4) on note $\Delta S_\lambda(n)$ la variation d'entropie correspondante, i.e.

$$\Delta S_\lambda(n) = \text{Ent}(\tilde{\mu}_{U_n} | \omega_\lambda) - \text{Ent}(\tilde{\mu} | \omega_\lambda).$$

On va chercher à utiliser le Théorème 4.42. Le système dynamique considéré est $(\mathfrak{A}^{(M)}, \sigma_\lambda^t, \omega_\lambda)$. Le générateur δ_{σ_λ} de la dynamique modulaire σ_λ associée à ω_λ est

$$\delta_{\sigma_\lambda}(A) = -i \left[\beta H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} + \beta \mathcal{E} \sum_{j=1}^M H_{\mathcal{E}_j}, A \right],$$

et sa représentation standard est donnée dans la Section 4.2. L'opérateur unitaire U est l'opérateur d'évolution U_n qui n'est pas dans le domaine de δ_{σ_λ} comme on l'a mentionné au début de la section précédente. Enfin pour l'état initial μ on supposera, comme dans la Section 3.3, que $\mu \in \mathfrak{S}_a$. Le résultat principal de cette section est

Théorème 4.44. *Soit $\mu \in \mathfrak{S}_a$. La variation d'entropie $\Delta S_\lambda(n)$ après n interactions est donnée par*

$$\Delta S_\lambda(n) = -\beta \Delta E_{C+\mathcal{R},\mu}(n),$$

et la production d'entropie moyenne par unité de temps existe et vaut

$$\Delta S_\lambda = \beta \Delta E.$$

Afin de pouvoir utiliser le Théorème 4.42 la première chose est de s'assurer que $-iU_n^* \delta_{\sigma_\lambda}(U_n)$ est affilié à $\mathfrak{A}^{(M)}$ et de déterminer son image P_n dans la représentation standard, les autres hypothèses du théorème s'exprimant en terme de celui-ci. Afin de ne pas alourdir les notations on notera aussi $P_n := -iU_n^* \delta_{\sigma_\lambda}(U_n)$. Comme on l'a déjà noté la dynamique du système couplé laisse invariants les atomes. Ainsi U_n commute avec les $H_{\mathcal{E}_j}$ et on a

$$\begin{aligned} P_n &= -\beta U_n^* [H_{C+\mathcal{R}}, U_n] \\ &= -\beta (U_n^* H_{C+\mathcal{R}} U_n - H_{C+\mathcal{R}}). \end{aligned}$$

Lemme 4.45. *Soit l'opérateur P_n défini sur*

$$D(P_n) := \left\{ \psi \in D(H_{C+\mathcal{R}}) \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathcal{H}_{\mathcal{E}} \mid U_n \psi \in D(H_{C+\mathcal{R}}) \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathcal{H}_{\mathcal{E}} \right\},$$

par

$$P_n = -\beta (U_n^* H_{C+\mathcal{R}} U_n - H_{C+\mathcal{R}}).$$

Alors P_n est affilié à $\mathfrak{A}^{(M)}$, s'étend à $D(H_0^{1/2}) \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, et on a

$$\begin{aligned} P_n &= \beta \gamma \sqrt{2} \sum_{l=1}^n \phi((w_{l\tau} - w_{(l-1)\tau})(1 \oplus 0)) \otimes b_l^* b_l \\ &\quad - \beta \gamma \sqrt{2} u_1 \sum_{l=1}^n b_l^* b_l - \beta \gamma \sqrt{2} \sum_{1 \leq k < l \leq n} (u_{l-k+1} - u_{l-k}) \otimes b_k^* b_k \otimes b_l^* b_l, \end{aligned} \tag{4.20}$$

où on rappelle que les u_j sont des scalaires et sont définis en (3.27).

Preuve. Sur $D(P_n)$ on a

$$P_n = -\beta (U_n^* H_{C+\mathcal{R}} U_n - H_{C+\mathcal{R}}),$$

où

$$U_n = e^{-i\tau \tilde{H}_n} \dots e^{-i\tau \tilde{H}_1}, \quad \tilde{H}_n = H_{C+\mathcal{R}} + H_{I_{\mathcal{E}_n}} + \sum_{j=1}^M H_{\mathcal{E}_j}.$$

Le choix de l'interaction cavité-atome entraîne que, pour tous j, k , $[H_{I_{\mathcal{E}_k}}, H_{\mathcal{E}_j}] = [H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}, H_{\mathcal{E}_j}] = 0$, et donc

$$\begin{aligned} e^{i\tau\tilde{H}_n} H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} e^{-i\tau\tilde{H}_n} &= e^{i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\mathcal{E}_n}})} H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} e^{-i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\mathcal{E}_n}})} \\ &= H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} + H_{I_{\mathcal{E}_n}} - e^{i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\mathcal{E}_n}})} H_{I_{\mathcal{E}_n}} e^{-i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\mathcal{E}_n}})} \\ &= H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} + H_{I_{\mathcal{E}_n}} - e^{i\tau\tilde{H}_n} H_{I_{\mathcal{E}_n}} e^{-i\tau\tilde{H}_n}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} P_n &= -\beta \left(U_{n-1}^* e^{i\tau\tilde{H}_n} H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} e^{-i\tau\tilde{H}_n} U_{n-1} - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \right) \\ &= -\beta \left(U_{n-1}^* H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} U_{n-1} - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \right) + \beta \left(U_n^* H_{I_{\mathcal{E}_n}} U_n - U_{n-1}^* H_{I_{\mathcal{E}_n}} U_{n-1} \right) \\ &= P_{n-1} + \beta \left(U_n^* H_{I_{\mathcal{E}_n}} U_n - U_{n-1}^* H_{I_{\mathcal{E}_n}} U_{n-1} \right), \end{aligned}$$

où $P_0 = 0$. Par récurrence on en déduit que

$$\begin{aligned} P_n &= \beta \sum_{l=1}^n \left(U_l^* H_{I_{\mathcal{E}_l}} U_l - U_{l-1}^* H_{I_{\mathcal{E}_l}} U_{l-1} \right) \\ &= \beta \sum_{l=1}^n U_{l-1}^* \left(e^{i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\mathcal{E}_l}})} H_{I_{\mathcal{E}_l}} e^{-i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\mathcal{E}_l}})} - H_{I_{\mathcal{E}_l}} \right) U_{l-1}, \end{aligned}$$

où $U_0 = \mathbb{1}$.

En raisonnant comme dans le Lemme 1.44 on peut écrire

$$e^{i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\mathcal{E}_l}})} = e^{i\tau H_-} \otimes (\mathbb{1}_{\mathcal{E}_l} - b_l^* b_l) + e^{i\tau H_+} \otimes b_l^* b_l$$

tandis que

$$H_{I_{\mathcal{E}_l}} = \gamma\sqrt{2}\phi(1 \oplus 0) \otimes b_l^* b_l,$$

où b_l/b_l^* désigne les opérateurs d'annihilation/création sur $\mathbb{C}^2$ associé au l -ième atome. En utilisant (3.8) on en déduit

$$\begin{aligned} &e^{i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\mathcal{E}_l}})} H_{I_{\mathcal{E}_l}} e^{-i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\mathcal{E}_l}})} - H_{I_{\mathcal{E}_l}} \\ &= \gamma\sqrt{2} \left(e^{i\tau H_+} \phi(1 \oplus 0) e^{-i\tau H_+} - \phi(1 \oplus 0) \right) \otimes b_l^* b_l \\ &= \gamma\sqrt{2} \left(\phi((w_\tau - \mathbb{1})(1 \oplus 0)) - \alpha(1 \oplus 0) \right) \otimes b_l^* b_l, \end{aligned}$$

et donc, en notant que U_{l-1} agit trivialement sur $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_l}$ et ainsi commute avec $b_l^* b_l$,

$$\begin{aligned} P_n &= \beta\gamma\sqrt{2} \sum_{l=1}^n U_{l-1}^* \left(\phi((w_\tau - \mathbb{1})(1 \oplus 0)) - \alpha(1 \oplus 0) \right) \otimes b_l^* b_l U_{l-1} \\ &= \beta\gamma\sqrt{2} \sum_{l=1}^n U_{l-1}^* \phi((w_\tau - \mathbb{1})(1 \oplus 0)) U_{l-1} \otimes b_l^* b_l - \alpha(1 \oplus 0) \mathbb{1}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes b_l^* b_l. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Etant donné $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$, en utilisant (3.8) et en raisonnant comme ci-dessus on a, sur $D(H_0) \otimes \mathcal{H}_\varepsilon$

$$\begin{aligned} e^{i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_\varepsilon})} \phi(f) e^{-i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_\varepsilon})} &= e^{i\tau H_-} \phi(f) e^{-i\tau H_-} \otimes (\mathbb{1}_\varepsilon - b^*b) + e^{i\tau H_+} \phi(f) e^{-i\tau H_+} \otimes b^*b \\ &= \phi(w_\tau(f)) \otimes (\mathbb{1}_\varepsilon - b^*b) + [\phi(w_\tau(f)) - \alpha(f)] \otimes b^*b \\ &= \phi(w_\tau(f)) - \alpha(f) b^*b. \end{aligned} \quad (4.22)$$

En utilisant (4.22) on obtient donc

$$\begin{aligned} &U_{l-1}^* \phi((w_\tau - \mathbb{1})(1 \oplus 0)) U_{l-1} \otimes b_l^* b_l \\ &= U_{l-2}^* e^{i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\varepsilon_{l-1}}})} \phi((w_\tau - \mathbb{1})(1 \oplus 0)) e^{-i\tau(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}+H_{I_{\varepsilon_{l-1}}})} U_{l-2} \otimes b_l^* b_l \\ &= U_{l-2}^* \phi((w_{2\tau} - w_\tau)(1 \oplus 0)) U_{l-2} b_l^* b_l - \alpha((w_\tau - \mathbb{1})(1 \oplus 0)) b_{l-1}^* b_{l-1} \otimes b_l^* b_l, \end{aligned}$$

et par récurrence

$$\begin{aligned} &U_{l-1}^* \phi((w_\tau - \mathbb{1})(1 \oplus 0)) U_{l-1} \otimes b_l^* b_l \\ &= \phi((w_{l\tau} - w_{(l-1)\tau})(1 \oplus 0)) \otimes b_l^* b_l - \sum_{k=1}^{l-1} \alpha((w_{(l-k)\tau} - w_{(l-k-1)\tau})(1 \oplus 0)) b_k^* b_k \otimes b_l^* b_l. \end{aligned}$$

En insérant cette identité dans (4.21) et en utilisant la notation $u_j = \alpha(w_{(j-1)\tau}(1 \oplus 0))$, voir (3.27), on obtient (4.20).

Finalement, comme $1 \oplus 0 \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ et que w_t laisse $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ invariant, P_n est de la forme

$$P_n = \sum_{l=1}^n \phi(f_l) \otimes b_l^* b_l + \sum_{l=1}^n \zeta_l b_l^* b_l + \sum_{1 \leq k < l \leq n} \zeta_{jk} b_k^* b_k \otimes b_l^* b_l \quad (4.23)$$

où les f_l sont dans $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ et les ζ_l, ζ_{jk} sont des scalaires, et P_n est donc bien affilié à $\mathfrak{A}^{(M)}$. $\square$

On va maintenant s'attacher à vérifier les différentes hypothèses du Théorème 4.42. La représentation standard associée au système dynamique $(\mathfrak{A}^{(M)}, \sigma_\lambda^t, \omega_\lambda)$ est $(\tilde{\mathcal{H}}^{(M)}, \pi^{(M)}, J^{(M)}, \mathcal{H}^{+, (M)})$, le vecteur représentatif de ω_λ est $\tilde{\Omega}_\lambda$ et le Liouvillien $\tilde{L}^{(M)}$. En notant également Ψ le vecteur représentatif de $\tilde{\mu}$ il faut donc vérifier :

1. $\tilde{L}_\lambda^{(M)} + \pi^{(M)}(P_n)$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(\tilde{L}_\lambda^{(M)}) \cap D(\pi^{(M)}(P_n))$,
2. $\tilde{L}_\lambda^{(M)} + \pi^{(M)}(P_n) - J^{(M)} \pi^{(M)}(P_n) J^{(M)}$ est essentiellement auto-adjoint sur

$$D(\tilde{L}_\lambda^{(M)}) \cap D(\pi^{(M)}(P_n)) \cap D(J^{(M)} \pi^{(M)}(P_n) J^{(M)}),$$

3. $\|e^{\pi^{(M)}(P_n)/2} \tilde{\Omega}_\lambda\| < +\infty$,
4. $\log \Delta_{\tilde{\Omega}_\lambda, \Psi} + \pi^{(M)}(P_n)$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(\log \Delta_{\tilde{\Omega}_\lambda, \Psi}) \cap D(\pi^{(M)}(P_n))$,
5. $\Psi \in D(\pi^{(M)}(P_n))$.

On a supposé que $\mu \in \mathfrak{S}_a$, il existe donc $u \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ tel que $\tilde{\mu}(A) = \omega_\lambda(W(u)^*AW(u))$ où on a simplement écrit $W(u)$ pour $W(u) \otimes \bigotimes_{j=1}^M \mathbb{1}_{\mathcal{E}}$. D'après le Lemme 4.40 on a donc

$$\Psi = \pi^{(M)}(W(u))J^{(M)}\pi^{(M)}(W(u))\tilde{\Omega}_\lambda = \pi^{(M)}(W(u))J^{(M)}\pi^{(M)}(W(u))J^{(M)}\tilde{\Omega}_\lambda, \quad (4.24)$$

et la Remarque 4.41 assure que l'hypothèse 4. se ramène à 1. Les hypothèses 1. et 2. découlent directement du théorème ci-dessous, qui est un cas particulier du Théorème 4.2. dans [Koi11b], et du fait que les parties correspondant aux atomes (les $L_{\mathcal{E}}$ et b^*b) sont bornées.

Théorème 4.46. *Soient $A_j, B_j, C \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$,*

$$L = L_{\mathcal{C}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L_{\mathcal{R}},$$

et

$$\mathcal{Q} := \sum_{j=1}^r \pi(\phi(A_j))\pi(\phi(B_j)) + \pi(\phi(C)) \quad (4.25)$$

où $L_{\mathcal{C}}, L_{\mathcal{R}}, \pi = \pi_{\mathcal{C}} \otimes \pi_{\mathcal{R}}$ sont définis dans la Section 4.2.1. Alors les opérateurs

$$L, \quad L + \mathcal{Q} - J\mathcal{Q}J, \quad L + \mathcal{Q}, \quad L - J\mathcal{Q}J,$$

sont essentiellement auto-adjoints sur $\mathcal{D} = \mathcal{F}_+^{\text{fin}}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{F}_+^{\text{fin}}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{F}_+^{\text{fin}}(C_c^\infty(\mathbb{R}^3, dk)) \otimes \mathcal{F}_+^{\text{fin}}(C_c^\infty(\mathbb{R}^3, dk))$.

En effet, $H_{I_{\mathcal{R}}} + R$ et P_n sont bien tous de la forme (4.25) et $\mathcal{D}$ est inclus dans chacun des domaines $D(\tilde{L}_\lambda^{(M)})$, $D(\pi^{(M)}(P_n))$ et $D(J^{(M)}\pi^{(M)}(P_n)J^{(M)})$.

Il reste donc à vérifier les hypothèses 3. et 5. C'est l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 4.47. *Pour tout $u \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$, le vecteur Ψ défini en (4.24) est dans $D(\pi^{(M)}(P_n))$.*

Preuve. Comme $V := \pi^{(M)}(W(u))J^{(M)}\pi^{(M)}(W(u))J^{(M)}$ est unitaire, $\Psi \in D(\pi^{(M)}(P_n))$ si et seulement si $\tilde{\Omega}_\lambda$ est dans le domaine de

$$\begin{aligned} & V^* \pi^{(M)}(P_n) V \\ &= \left(J^{(M)} \pi^{(M)}(W(u)) J^{(M)} \right) \pi^{(M)}(W(u)^*) \pi^{(M)}(P_n) \pi^{(M)}(W(u)) J^{(M)} \pi^{(M)}(W(u)) J^{(M)} \\ &= \pi^{(M)}(W(u)^*) \pi^{(M)}(P_n) \pi^{(M)}(W(u)) \\ &= \pi^{(M)}(W(u)^* P_n W(u)). \end{aligned}$$

où on a utilisé que $J^{(M)}\pi^{(M)}(W(u))J^{(M)}$ est dans le commutant $\pi^{(M)}(\mathfrak{A}^{(M)})'$. Comme

$$W(u)^*\phi(f)W(u) = \phi(f) + \text{Im} \langle u, f \rangle,$$

on vérifie aisément que $W(u)^*P_nW(u)$ est également de la forme (4.23), en remplaçant ζ_l par $\zeta_l + \text{Im} \langle u, f_l \rangle$. On obtient alors $\pi^{(M)}(W(u)^*P_nW(u))$ en utilisant (4.8) et on a bien $\tilde{\Omega}_\lambda \in D(\pi^{(M)}(W(u)^*P_nW(u)))$. $\square$

Lemme 4.48. *Soit l'opérateur P_n défini dans le Lemme 4.45. Alors*

$$\left\| e^{\frac{1}{2}\pi^{(M)}(P_n)} \tilde{\Omega}_\lambda \right\| < +\infty.$$

Preuve. On a

$$\left\| e^{\frac{1}{2}\pi^{(M)}(P_n)} \tilde{\Omega}_\lambda \right\|^2 = \left\langle \tilde{\Omega}_\lambda, e^{\pi^{(M)}(P_n)} \tilde{\Omega}_\lambda \right\rangle = \omega_\lambda(e^{P_n}).$$

ainsi on cherche à contrôler $\omega_\lambda(e^{P_n})$.

Décomposition de P_n

Pour tout j on définit les projecteurs orthogonaux

$$\eta_j^+ := b_j^* b_j, \quad \eta_j^- := (\mathbb{1}_{\mathcal{E}_j} - \eta_j^+).$$

On rappelle que

$$\omega_\lambda = \omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes \bigotimes_{j=1}^M \omega_{\mathcal{E}_j}.$$

L'idée est de décomposer P_n , puis e^{P_n} , comme combinaison linéaire de termes produits de la forme $P_{n,\mathcal{C}+\mathcal{R}} \otimes B_1 \otimes \cdots \otimes B_M$ dans lesquels les B_j seront soit η_j^+ soit η_j^- . Il découle directement de (4.20) que P_n est de la forme

$$P_n = \sum_{\# \in \{+, -\}^n} P_n^\# \otimes \eta^\#,$$

où $\# = (\#_1, \dots, \#_n) \in \{+, -\}^n$, chaque $P_n^\#$ agit sur $\mathcal{H}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ et est de la forme

$$P_n^\# = \phi(f_n^\#) + \zeta_n^\#, \tag{4.26}$$

avec $f_n^\# \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ et $\zeta_n^\# \in \mathbb{C}$, et

$$\eta^\# = \eta_1^{\#_1} \otimes \cdots \otimes \eta_n^{\#_n}.$$

Comme P_n agit trivialement sur les atomes d'indice $j > n$ il est inutile de décomposer les facteurs $\mathbb{1}_{\mathcal{E}_j}$, $j > n$, en terme de η_j^+ et η_j^- . On peut noter que les $\eta^\#$ sont des projecteurs orthogonaux tels que

$$\sum_{\# \in \{+, -\}^n} \eta^\# = \mathbb{1} \quad \text{et} \quad \eta^\# \eta^{\#'} = 0, \quad \forall \# \neq \#' \in \{+, -\}^n.$$

$\eta^\#$ n'est en fait rien d'autre que le projecteur de rang 1 associé au vecteur propre $|\#_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\#_n\rangle$ de $\sum_{j=1}^n H_{\mathcal{E}_j}$. On en déduit que

$$e^{P_n} = \sum_{\# \in \{+, -\}^n} e^{P_n^\#} \otimes \eta^\#.$$

Contrôle de $\omega_\lambda(e^{P_n})$

Puisque $\omega_{\mathcal{E}}(b^*b) = p$ (c'est la probabilité qu'un atome arrive dans l'état exicté) on a

$$\bigotimes_{j=1}^n \omega_{\mathcal{E}}(\eta^\#) = p^{\text{Card}_+(\#)} (1-p)^{\text{Card}_-(\#)}$$

où $\text{Card}_+(\#)$, resp. $\text{Card}_-(\#)$, est le nombre de $+$, resp. $-$, dans $\#$. Ainsi

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(e^{P_n}) &= \sum_{\# \in \{+, -\}^n} p^{\text{Card}_+(\#)} (1-p)^{\text{Card}_-(\#)} \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(e^{P_n^\#}) \\ &= \sum_{\# \in \{+, -\}^n} p^{\text{Card}_+(\#)} (1-p)^{\text{Card}_-(\#)} e^{\zeta_n^\#} \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(e^{\phi(f_n^\#)}),\end{aligned}$$

où on a utilisé (4.26). Il nous reste à s'assurer que chacun des termes

$$\omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(e^{\phi(f_n^\#)}) \quad (4.27)$$

est fini. Pour cela on va utiliser la théorème de Wick suivant.

Théorème 4.49. [W50] *Soit ω un état quasi-libre sur une algèbre $\text{CCR}(\mathfrak{h})$ et $(A_j)_{1 \leq j \leq m}$ une famille d'opérateurs où chaque A_j est une combinaison linéaire d'opérateurs de création et d'annihilation. Alors*

$$\omega(A_1 A_2 \dots A_m) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } m \text{ est impair,} \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{m/2}} \omega(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)}) \omega(A_{\sigma(3)} A_{\sigma(4)}) \dots \omega(A_{\sigma(m-1)} A_{\sigma(m)}) & , \text{ si } m \text{ est pair,} \end{cases}$$

où, pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, 2n\}$ telles que

$$\sigma(2l-1) < \sigma(2l) \quad \text{et} \quad \sigma(2l-1) < \sigma(2l+1),$$

pour tout $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. On a par ailleurs $\text{Card}(\mathcal{P}_n) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

On applique le Théorème 4.49 à l'état quasi-libre $\omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ et $A_1 = \dots = A_m = \phi(f)$ où $f \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$. Si $j = 2l+1 \in \mathbb{N}$ est impair, on a

$$\omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(\phi(f)^{2l+1}) = 0, \quad (4.28)$$

et si $j = 2l \in \mathbb{N}$ est pair on a

$$\omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(\phi(f)^{2l}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_l} \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(\phi(f)^2)^l = \frac{(2l)!}{2^l l!} \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(\phi(f)^2)^l.$$

En utilisant (1.13) et (2.30) on a donc

$$\omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(\phi(f)^{2l}) = \frac{(2l)!}{2^l l!} \left\| \coth\left(\frac{\beta\varpi}{2}\right)^{1/2} v(f) \right\|^{2l}. \quad (4.29)$$

Finalement, en utilisant (4.28) et (4.29), on peut estimer (4.27)

$$\begin{aligned}
\omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \left(e^{\phi(f_n^{\#})} \right) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{j!} \omega_{\beta}^{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \left(\phi(f_n^{\#})^j \right) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2l)!} \frac{(2l)!}{2^l l!} \left\| \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right)^{1/2} v(f_n^{\#}) \right\|^{2l} \\
&= \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^l l!} \left\| \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right)^{1/2} v(f_n^{\#}) \right\|^{2l} \\
&= \exp \left(\frac{1}{2} \left\| \coth \left(\frac{\beta \varpi}{2} \right)^{1/2} v(f_n^{\#}) \right\|^2 \right) < +\infty,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Preuve du Théorème 4.44. Tout ce qui précède assure qu'on peut appliquer le Théorème 4.42 et donc

$$\begin{aligned}
\Delta S_{\lambda}(n) &:= \text{Ent}(\mu_{U_n} | \omega_{\lambda}) - \text{Ent}(\mu | \omega_{\lambda}) \\
&= \tilde{\mu}(P_n) \\
&= -\beta \tilde{\mu}(U_n^* H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} U_n - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) \\
&= -\beta \Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R}, \mu}(n).
\end{aligned}$$

Finalement le Théorème 3.29 assure que la production moyenne d'entropie par unité de temps existe et vaut

$$\Delta S_{\lambda} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n\tau} \Delta S_{\lambda}(n) = \beta \Delta E.$$

$\square$

4.5 Cas où les atomes sont tous dans l'état fondamental ou tous dans l'état excité

On rappelle que la matrice densité $\rho_{\mathcal{E}}$ décrivant l'état initial $\omega_{\mathcal{E}}$ d'un atome est donnée par (1.25). Ainsi si $p = 0$ (tous les atomes arrivent dans l'état fondamental) ou $p = 1$ (tous les atomes arrivent dans l'état excité) $\rho_{\mathcal{E}}$ n'est pas de rang maximal et $\omega_{\mathcal{E}}$ n'est pas fidèle, voir la Définition 4.2, et on ne peut pas raisonner comme dans la Section 4.4.

Comme on l'a déjà mentionné, à cause du choix du couplage entre la cavité et les atomes, l'état de ces derniers est invariant sous la dynamique. Ainsi, si μ est l'état initial de $\mathcal{C} + \mathcal{R}$ et

$\tilde{\mu} = \mu \otimes \bigotimes_{j=1}^M \omega_{\mathcal{E}}$ est celui du système total avec M atomes, l'état du système total après $n \leq M$ interactions est

$$\tilde{\mu}_{U_n} = (\mu \circ \mathcal{L}^n) \otimes \bigotimes_{j=1}^M \omega_{\mathcal{E}}.$$

La variation d'entropie relative $\Delta S_\lambda(n)$ peut donc aussi s'écrire

$$\begin{aligned}\Delta S_\lambda(n) &= \text{Ent}(\tilde{\mu}_{U_n} | \omega_\lambda) - \text{Ent}(\tilde{\mu} | \omega_\lambda) \\ &= \text{Ent}(\mu \circ \mathcal{L}^n | \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - \text{Ent}(\mu | \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}).\end{aligned}$$

Or dans les cas $p = 0$ et $p = 1$ l'opérateur de dynamique réduite $\mathcal{L}$ correspond en fait à une évolution unitaire. On a simplement

$$\mathcal{L}(O) = \begin{cases} e^{i\tau H_-} O e^{-i\tau H_-} & \text{si } p = 0, \\ e^{i\tau H_+} O e^{-i\tau H_+} & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Ainsi

$$\Delta S_\lambda(n) = \text{Ent}(\mu_{U_\#} | \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - \text{Ent}(\mu | \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}),$$

où $\# = +, -$ et le propagateur $U_\#$ est donné par $U_- = e^{-i\tau H_-}$ si $p = 0$ et $U_+ = e^{-i\tau H_+}$ si $p = 1$. On va alors pouvoir utiliser les résultats de la Section 4.3 en travaillant directement sur le système réduit cavité+réservoir.

4.5.1 Le cas $p = 0$

Proposition 4.50. *Soit $\mu \in \mathfrak{S}_a$ et $p = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\Delta S_\lambda(n) = -\beta \Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R}, \mu}(n) = 0,$$

et la production d'entropie par unités de temps vaut donc

$$\Delta S_\lambda = \beta \Delta E = 0.$$

Preuve. En utilisant le 4. de la Proposition 4.17 et comme $\omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ est $\tau_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}^t$ -invariant on obtient

$$\begin{aligned}\Delta S_\lambda(n) &= \text{Ent}(\mu_{U_-^n} | \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - \text{Ent}(\mu | \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) \\ &= \text{Ent}(\mu | \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) - \text{Ent}(\mu | \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Par ailleurs il découle directement de (3.39) que si $p = 0$ on a $\Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R}, \mu}(n) = 0$. □

4.5.2 Le cas $p=1$

Comme dans la section 4.4 on va chercher à utiliser le Théorème 4.42. Le système dynamique considéré est $(\mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}, \sigma_{\lambda, \mathcal{C}+\mathcal{R}}^t, \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}})$. Le générateur $\delta_{\sigma_{\lambda, \mathcal{C}+\mathcal{R}}}$ de la dynamique modulaire $\sigma_{\lambda, \mathcal{C}+\mathcal{R}}$ associée à $\omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ est

$$\delta_{\sigma_{\lambda, \mathcal{C}+\mathcal{R}}}(A) = -i\beta [H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}, A],$$

et sa représentation standard est donnée dans la Section 4.2. L'opérateur unitaire U est l'opérateur d'évolution $U_+^n = e^{-in\tau H_+}$. Comme précédemment on supposera que l'état initial μ est dans $\mathfrak{S}_a$.

Avant d'utiliser le Théorème 4.42 il faut s'assurer que

$$P_n := -i(U_+^n)^* \delta_{\sigma_\lambda, \mathcal{C}+\mathcal{R}}(U_+^n) = -\beta \left(e^{in\tau H_+} H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} e^{-in\tau H_+} - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \right)$$

est affilié à $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$, déterminer son image dans la représentation standard et vérifier que

$$\left\| e^{\frac{1}{2}\pi(P_n)} \Omega_\lambda \right\|^2 < +\infty.$$

Lemme 4.51. *Soit l'opérateur P_n défini sur*

$$D(P_n) := \left\{ \psi \in D(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) \mid U_+^n \psi \in D(H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) \right\},$$

par

$$P_n = -\beta \left(e^{in\tau H_+} H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} e^{-in\tau H_+} - H_{\mathcal{C}+\mathcal{R}} \right).$$

Alors

$$P_n = \beta\gamma\sqrt{2} \left(\phi((w_{n\tau} - \mathbb{1})(1 \oplus 0)) - \int_0^{n\tau} \alpha_s(1 \oplus 0) ds \right). \quad (4.30)$$

En particulier P_n est affilié à $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$ et de plus

$$\left\| e^{\frac{1}{2}\pi(P_n)} \Omega_\lambda \right\|^2 < +\infty.$$

Preuve. Comme $D(H_+) = D(H_-) = D(H_0)$ on a simplement $D(P_n) = D(H_0)$. En raisonnant comme dans le Lemme 3.30 (voir (3.37)) on obtient, sur $D(H_0)$,

$$P_n = \beta\gamma\sqrt{2} \left(\phi((w_{n\tau} - \mathbb{1})(1 \oplus 0)) - \int_0^{n\tau} \alpha_s(1 \oplus 0) ds \right).$$

Comme $1 \oplus 0 \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ et que w_t laisse invariant $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ on en déduit que P_n est bien affilié à $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}+\mathcal{R}}$.

Il reste à vérifier que

$$\left\| e^{\frac{1}{2}\pi(P_n)} \Omega_\lambda \right\|^2 < +\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} \left\| e^{\frac{1}{2}\pi(P_n)} \Omega_\lambda \right\|^2 &= \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(e^{P_n}) \\ &= \exp \left(-\beta\gamma\sqrt{2} \int_0^{n\tau} \alpha_s(1 \oplus 0) ds \right) \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(e^{\phi(f_n)}), \end{aligned}$$

où $f_n = \beta\gamma\sqrt{2}(w_{n\tau} - \mathbb{1})(1 \oplus 0)$ et il suffit donc de vérifier que

$$\omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}(e^{\phi(f_n)}) < +\infty.$$

Ce terme est exactement de la même forme que (4.27) et la preuve est identique. $\square$

Proposition 4.52. Soit $\mu \in \mathfrak{S}_a$ et $p = 1$. La variation d'entropie $\Delta S_\lambda(n)$, pour $n \geq 1$, est donnée par

$$\Delta S_\lambda(n) = -\beta \Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R},\mu}(n) = -\beta\gamma\sqrt{2} \left(\operatorname{Im} \langle (\mathbb{1} - w_{n\tau})(1 \oplus 0), u \rangle + \int_0^{n\tau} \alpha_s(1 \oplus 0) ds \right),$$

et la production d'entropie moyenne par unité de temps existe et vaut

$$\Delta S_\lambda = \beta \Delta E = 0.$$

Preuve. On procède de la même manière que dans la Section 4.4, en appliquant le Théorème 4.42. Pour cela il faut vérifier les hypothèses suivantes

1. $\tilde{L}_\lambda + \pi(P_n)$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(\tilde{L}_\lambda) \cap D(\pi(P_n))$,
2. $\tilde{L}_\lambda + \pi(P_n) - J\pi(P_n)J$ est essentiellement auto-adjoint sur

$$D(\tilde{L}_\lambda) \cap D(\pi(P_n)) \cap D(J\pi(P_n)J),$$

$$3. \left\| e^{\frac{1}{2}\pi(P_n)} \Omega_\lambda \right\|^2 < +\infty,$$

$$4. \log \Delta_{\Omega_\lambda, \Psi} + \pi(P_n) \text{ est essentiellement auto-adjoint sur } D(\log \Delta_{\Omega_\lambda, \Psi}) \cap D(\pi(P_n)),$$

$$5. \Psi \in D(\pi(P_n)),$$

où Ψ est le vecteur représentatif de μ .

Les preuves des différents points sont similaires à celles effectuées dans la Section 4.4. On a supposé que $\mu \in \mathfrak{S}_a$, il existe donc $u \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{f}$ tel que $\mu(A) = \omega_\lambda(W(u)^*AW(u))$, et d'après le Lemme 4.40 on a donc

$$\Psi = \pi(W(u))J\pi(W(u))\Omega_\lambda = \pi(W(u))J\pi(W(u))J\Omega_\lambda.$$

La Remarque 4.41 assure que l'hypothèse 4. se ramène à 1. Les hypothèses 1. et 2. découlent directement du Théorème 4.46. Le point 3. est démontré dans le Lemme 4.51. Le point 5. se montre de la même façon que le Lemme 4.47.

Ainsi on peut appliquer le Théorème 4.42 et on obtient

$$\operatorname{Ent}(\mu_{U^\dagger_+} | \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) = \operatorname{Ent}(\mu | \omega_\beta^{\mathcal{C}+\mathcal{R}}) + \mu(P_n).$$

et donc

$$\Delta S_\lambda(n) = \mu(P_n) = -\beta \Delta E_{\mathcal{C}+\mathcal{R},\mu}(n).$$

Par ailleurs, (4.30) et (3.24) donnent

$$\Delta S_\lambda(n) = \beta\gamma\sqrt{2} \operatorname{Im} \left(\langle (w_{n\tau} - \mathbb{1})(1 \oplus 0), u \rangle - \int_0^{n\tau} \alpha_s(1 \oplus 0) ds \right).$$

Finalement, le fait que $\Delta E = 0$ découle directement de (3.32) avec $p = 1$.

Annexe A

Quelques résultats de [Ar81a], [Ko11a] et [Ko11b]

Dans cette annexe on rappelle des notations et des résultats provenant du travail de A. Arai dans [Ar81a] et de M. Könenberg dans [Ko11a] et [Ko11b]. Ces notations sont utilisées dans la preuve du Lemme 2.26 ainsi que dans la Section 3.4.

Définition A.1. *Pour $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ on défini*

$$D(z) := -z + \theta + \lambda^2 \|\varpi^{-1} \rho\|^2 + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(k)}{z - k^2} d^3 k,$$

$$D_+ := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D(r + i\epsilon), \quad r \in [0, +\infty),$$

$$Q(k) := -\lambda \frac{\rho(k)}{D_+(k^2)},$$

$$Q_{\pm}(k) := \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\varpi(k)}{\theta}} \pm \sqrt{\frac{\theta}{\varpi(k)}} \right) Q(k).$$

Définition A.2. *On définit les opérateurs suivant sur $L^2(\mathbb{R}^3)$*

$$(\tilde{G}\epsilon g)(k) := \int \frac{g(k')}{(\varpi(k)\varpi(k'))^{1/2}(k^2 - k'^2 + i\epsilon)} d^3 k',$$

$$\tilde{G} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \tilde{G}_{\epsilon},$$

$$Tg := g + \lambda \varpi^{1/2} Q \tilde{G} \varpi^{1/2} \rho g,$$

$$T^* g := g - \lambda \varpi^{1/2} \rho \tilde{G} \varpi^{1/2} \overline{Q} g,$$

$$W_+ g := \frac{1}{2} \left(\varpi^{-1/2} T^* \varpi^{1/2} + \varpi^{1/2} T^* \varpi^{-1/2} \right),$$

$$W_- g := \frac{1}{2} \left(\varpi^{-1/2} T^* \varpi^{1/2} - \varpi^{1/2} T^* \varpi^{-1/2} \right).$$

Le lemme suivant donne la forme de $\hat{\kappa}(\lambda)$ qui correspond au taux de décroissance apparaissant dans le Théorème 3.13 et utilisé dans le Théorème 3.9. Ce taux est donné par la partie imaginaire des zéros du prolongement analytique de $\mathbb{R} \ni r \mapsto D_+(r^2)$ sur une bande autour de l'axe des réels.

Lemme A.3. [K011a] *Pour $\lambda \neq 0$ suffisamment petit, il existe un prolongement analytique de $\mathbb{R} \ni r \mapsto D_+(r^2)$ sur $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Im} \hat{\kappa}(\lambda)|\}$ qui n'a pas de zéros. De plus, $\hat{\kappa}(\cdot)$ est pair, analytique et*

$$\hat{\kappa}(\lambda) = 1 + \kappa_2 \lambda^2 + \kappa_4 \lambda^4 + \dots$$

où $\operatorname{Im} \kappa_2 = 2\pi^2 \rho^2(1)$.

Bibliographie

- [Ar81a] Arai A. : On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field. I J. Math. Phys. **22**, vol 11, 2539–2548 (1981).
- [Ar81b] Arai A. : On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized massless, scalar field. II J. Math. Phys. **22**, vol 11, 2549–2552 (1981).
- [A75] Araki H. : Relative entropy of states of von Neumann algebras. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **11**, 809–833 (1975/76).
- [A76] Araki H. : Positive cone, Radon-Nikodym theorems, relative Hamiltonian and the Gibbs condition in statistical mechanics. In *C*-Algebras and their Applications to Statistical Mechanics in Quantum Field Theory*. D. Kastler editor. North Holland, Amsterdam, (1976).
- [A77] Araki H. : Relative entropy of states of von Neumann algebras II. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **13**, 173–192 (1977/78).
- [AW63] Araki H., Woods E.J. : Representations of the Canonical Commutation Relations Describing a Nonrelativistic Infinite Free Bose Gas. J. Math. Phys. **4**, 637–662 (1963).
- [ADP14] Attal S., Deschamps J., Pellegrini C. : Entanglement of Bipartite Quantum Systems Driven by Repeated Interactions. J. Stat. Phys. **154**, 819–837 (2014).
- [AJ07a] Attal S., Joye A. : Weak Coupling and Continuous Limits for Repeated Quantum Interaction. J. Stat. Phys. **126**, 1241–1283 (2007).
- [AJ07b] Attal S., Joye A. : The Langevin Equation for a Quantum Heat Bath. J. Func. Anal. **247**, 253–288 (2007).
- [AJP06a] Attal S., Joye A., Pillet C.-A. : Open Quantum Systems I : The Hamiltonian Approach. Springer Berlin Heidelberg, (2006).
- [AJP06b] Attal S., Joye A., Pillet C.-A. : Open Quantum Systems II : The Markovian Approach. Springer Berlin Heidelberg, (2006).
- [AP06] Attal S., Pautrat Y. : From Repeated to Continuous Quantum Interactions. Ann. Henri Poincaré **7**, vol 1, 59–104 (2006).
- [BB16] Bach V., Bru J.-B. : Diagonalizing quadratic Bosonic operators by non-autonomous flow equations. Mem. Amer. Math. Soc. **240**, vol 1138 (2016).
- [BFS98] Bach V., Fröhlich J., Sigal I. : Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles. Adv. Math. **137**, vol 2, 299–395 (1998).
- [Bog47] Bogoliubov N. : On the theory of superfluidity. J. Phys. **11**, vol 1, 23–32 (1947).

- [BR1] Brattelli O., Robinson D.W. : Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2nd edition (1987).
- [BR2] Brattelli O., Robinson D.W. : Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2nd edition (1997).
- [Br14] Bruneau L. : Mixing properties of the one-atom maser. *J. Stat. Phys.* **155**, vol 5, 888–908 (2014).
- [BDBP11] Bruneau L., De Bièvre S., Pillet C.-A. : Scattering induced current in a tight-binding band. *J. Math. Phys.* **52**, vol 2, 022109 (2011).
- [BD07] Bruneau L., Dereziński J. : Bogoliubov Hamiltonians and one-parameter group of Bogoliubov transformations. *J. Math. Phys.* **48**, vol 2, 022101 (2007).
- [BJM06] Bruneau L., Joye A., Merkli M. : Asymptotics of repeated interaction quantum systems. *J. Func. Anal.* **239**, vol 1, 310–344 (2006).
- [BJM08] Bruneau L., Joye A., Merkli M. : Random repeated interaction quantum systems. *Comm. Math. Phys.* **284**, 553–581 (2008).
- [BJM10] Bruneau L., Joye A., Merkli M. : Repeated and Continuous Interactions in Open Quantum Systems. *Ann. Henri Poincaré* **10**, vol 7, 1251–1284 (2010).
- [BJM14] Bruneau L., Joye A., Merkli M. : Repeated interactions in open quantum systems. *J. Math. Phys.* **55**, vol 7, 075204 (2014).
- [BP09] Bruneau L., Pillet C.-A. : Thermal Relaxation of a QED Cavity. *J. Stat. Phys.* **134**, vol 5, 1071–1095 (2009).
- [CDG] Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G. : Atom-Photon Interactions : Basic Processes and Application. Wiley-VCH Verlag GmbH (2008).
- [C73] Connes A. : Une classification des facteurs de type III. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **6**, 133–252 (1973).
- [DRBH87] Davidovich L., Raimond J.-M., Brune M., Haroche S. : Quantum theory of a two-photon micromaser. *Phys. Rev. A* **36**, vol 8, 3771–3787 (1987).
- [Der03] Dereziński J. : Van Hove Hamiltonian - exactly solvable models of the infrared and ultraviolet problem. *Ann. Henri Poincaré* **4**, 713–738 (2003).
- [Der06] Dereziński J. : Introduction to Representations of the Canonical Commutation and Anticommutation Relations. In *Large Coulomb systems*, Lecture Notes in Phys. **695**, 63–143, Springer, Berlin (2006).
- [Der17] Dereziński J. : Bosonic quadratic Hamiltonians. *J. Math. Phys.* **58**, 121101 (2017).
- [DG99] Dereziński J., Gérard C. : Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians. *Rev. Math. Phys.* **11**, vol 4, 383–450 (1999).
- [DG] Dereziński J., Gérard C. : Mathematics of Quantization and Quantum Fields. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge (2013).
- [DJP03] Dereziński J., Jakšić V., Pillet C.-A. : Perturbation Theory of W^* -Dynamics, Liouvilleans and KMS-States. *Rev. Math. Phys.* **15**, vol 5, 447–489 (2003).
- [Do90] Donald M.J. : Relative Hamiltonians which are not bounded from above. *J. Func. Anal.* **91**, vol 1, 143–173 (1990).

- [FJM86] Filipowicz P., Javanainen J., Meystre, P. : Theory of a microscopic maser. *Phys. Rev. A* **34**, vol 4, 3077–3087 (1986).
- [GKG+07] Gleyzes S., Kuhr S., Guerlin C. et al : Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity. *Nature* **446**, 297–300 (2007).
- [GJ87] Glimm J., Jaffe A. : *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*. 2nd edition, Springer, New-York (1987).
- [GS13] Grech P., Seireinger R. : The Excitation Spectrum for Weakly Interacting Bosons in a Trap. *Comm. Math. Phys.* **322**, vol 2, 559–591 (2013).
- [H75] Haagerup U. : The standard form of von Neumann algebras. *Math. Scand.* **37**, vol 2, 271–283 (1975).
- [HJPR17] Hanson E.P., Joye A., Pautrat Y., Raquépas R. : Landauer’s Principle in Repeated Interaction System. *Comm. Math. Phys.* **349**, vol 1, 285–327 (2017).
- [JPP10] Jakšić V., Pautrat Y., Pillet C.-A. : A quantum central limit theorem for sums of IID random variables. *J. Math. Phys.* **51**, vol 1, 015208 (2010).
- [JP03] Jakšić V., Pillet C.-A. : A note on the entropy production formula. *Contemp. Math.* **327**, 175–180 (2003).
- [Ko11a] Könenberg M. : Return to equilibrium for an anharmonic oscillator coupled to a heat bath. *J. Math. Phys.* **52**, vol 2, 022110 (2011).
- [Ko11b] Könenberg M. : An infinite level atom coupled to a heat bath. *Doc. Math.* **16**, 177–208 (2011).
- [LNSS15] Lewin M., Nam P.T., Serfaty S., Solovej J.P. : Bogoliubov Spectrum of Interacting Bose Gases. *Comm. Pure Appl. Math.* **68**, vol 3, 413–471 (2015).
- [Me06] Merkli M. : The ideal quantum gas. In *Open Quantum Systems I : The Hamiltonian Approach*. S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet editors. Springer Berlin Heidelberg, (2006).
- [MWM85] Meschede D., Walther H., Müller G. : One-Atom Maser. *Phys. Rev. Lett.* **54**, vol 6, 551–554 (1985)..
- [NVZ14] Nachtergaele B., Vershynina A., Zagrebnov V.A. : Non-equilibrium states of a photon cavity pumped by an atomic beam. *Ann. Henri Poincaré* **15**, 213–262 (2014).
- [NNS16] Nam P.T., Napiórkowski M., Solovej J.P. : Diagonalization of bosonic quadratic Hamiltonians by Bogoliubov transformations. *J. Func. Anal.* **270**, vol 11, 4340–4368 (2016).
- [Pe08] Pellegrini C. : Existence, uniqueness and approximation of a stochastic Schrödinger equation : the Diffusive case. *Ann. of Proba.* **36**, vol 6, 2332–2353 (2008).
- [Pe10] Pellegrini C. : Existence, uniqueness and approximation of the jump-type stochastic Schrödinger equation for two-level systems. *Stochastic process and their Applications* **120**, vol 9, 1722–1747 (2010).
- [Pi06] Pillet C.-A. : Quantum dynamical systems. In *Open Quantum Systems I : The Hamiltonian Approach*. S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet editors. Springer Berlin Heidelberg, (2006).
- [RBH01] Raimond J.-M., Brune M., Haroche S. : Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.* **73**, vol 3, 565–582 (2001).

- [RH07] Raimond J.-M., Haroche S. : Monitoring the Decoherence of Mesoscopic Quantum Superpositions in a Cavity. In *Quantum Decoherence*, Prog. Math. Phys. **48**, 33–83, Birkhäuser, Basel (2007).
- [RS1] Reed M., Simon B. : Methods of modern mathematical physics 1 : functional analysis. Elsevier, Academic Press (1980).
- [RS2] Reed M., Simon B. : Methods of modern mathematical physics 2 : fourier analysis, self-adjointness. Elsevier, Academic Press (1975).
- [Sa] Sakai S. : C^* -algebras and W^* -algebras. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1998).
- [Sh62] Shale D. : Linear symmetries of free boson fields. Trans. Amer. Math. Soc. **103**, vol 1, 149–167 (1962).
- [Sp97] Spohn H. : Asymptotic completeness for Rayleigh scattering. J. Math. Phys. **38**, 2281–2296 (1997).
- [TZ15] Tamura H., Zagrebnov V.A. : Exactly soluble quantum model for repeated harmonic perturbations. J. Stat. Mech. **P10005**, 1–27 (2015).
- [TZ16] Tamura H., Zagrebnov V.A. : Dynamics of an open system for repeated harmonic perturbations. J. Stat. Phys. **163**, vol 4, 844–867 (2016).
- [U77] Uhlmann A. : Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory. Commun. Math. Phys. **54**, vol 1, 21–32 (1977).
- [V12] Vogelsberger S. : Dynamique des systèmes quantiques ouverts décohérence et perte d'intrication. Thèse de l'Université de Grenoble, 2012.
- [WVHW99] Weidinger M., Varcoe B.T.H., Heerlein R., Walther H. : Trapping States in the Micromaser. Phys. Rev. Lett. **82**, vol 19, 3795–3798 (1999).
- [WBKM00] Wellens T., Buchleitner A., Kümmerer B., Maassen H. : Quantum State Preparation via Asymptotic Completeness. Phys. Rev. Lett. **85**, vol 10, 3361–3364 (2000).
- [W50] Wick G.C. : The Evaluation of the Collision Matrix. Phys. Rev. **80**, vol 2, 268–272 (1950).